СЕМИНАР "СОФУС ЛИ"

ТЕОРИЯ АЛГЕБР ЛИ. ТОПОЛОГИЯ ГРУПП ЛИ

Настоящий перевод трудов семинара "Софус Ли" содержит систематическое и полное изложение теории алгебр Ли и некоторых вопросов топологии групп Ли. Целый ряд содержащихся здесь фактов можно найти лишь в разрозненных журнальных статьях.

В процессе изложения авторы используют методы и результаты различных разделов современной математики, в частности гомологической алгебры и алгебраической геометрии. Книга будет с интересом прочитана студентами старших курсов математических факультетов, аспирантами и научными работниками, интересующимися теорией алгебр и групп Ли и смежными вопросами.

Содержание

От издательства 5
Предисловие 7
Глава 1. Теорема Пуанкаре — Биркгофа — Витта. *(П. Картье)* **9**
1. Предварительные понятия 9
2. Универсальная обертывающая алгебра 12
3. Теорема Пуанкаре — Биркгофа — Витта 15
4. Доказательства лемм 19
Глава 2. Нильпотентные и разрешимые алгебры Ли. *(А. Бланшар)* **23**
1. Нильпотентные представления. Нильпотентные алгебры Ли 23
2. Разрешимые алгебры Ли 27
3. Приложение. Глобальное доказательство теоремы 2 30
Глава 3. Когомологии алгебр Ли. *(П. Картье)* **32**
1. Предварительные сведения о комплексах 32
2. Построение основного комплекса 34
3. Свойства основного комплекса 38
4. Определение когомологий алгебр Ли 40
5. Действия над линейными представлениями. Оператор Казимира 42
6. Тривиальность некоторых групп когомологий 47
7. Интерпретация группы $H^0(\mathcal{C},M)$ 49
8. Интерпретация группы $H^1(\mathcal{C},M)$ 50
9. Интерпретация группы $H^2(\mathcal{C},M)$ 55
10. Теорема Леви — Мальцева 60
11. Добавление 63
Глава 4. Теория реплик. Критерий Картана. *(М. Лазар)* **68**
1. Некоторые результаты из теории матриц 68
2. Теория реплик 72
3. Критерий нильпотентности 74
4. Алгебраические алгебры Ли 75
5. Полупростые алгебры Ли. Критерий Картана 78
Глава 5. Полупростые алгебры Ли. *(П. Картье)* **81**

1. Предварительные сведения 81
2. Когомояогии полупростых алгебр Ли 82
3. Редуктивные алгебры 86
4. Теорема Гильберта об инвариантах 91
Глава 6. Радикалы алгебры Ли. *(П. Картье)* **95**
1. Радикал ассоциативной алгебры 95
2. Определение радикалов алгебры Ли 96
3. Простейшие свойства радикалов алгебры Ли 99
4. Критерий Картана для разрешимых алгебр Ли 102
Глава 7. Теоремы Адо и Ивасавы. *(П. Картье)* **104**
1. Введение 104
2. Вспомогательная теорема 105
3. Доказательство теорем 1 и 2. 109
4. Приложение 110
Глава 8. Веса и корни. Структура полупростых алгебр Ли. *(Ф. Брюа)* **112**
1. Представления нильпотентных алгебр Ли 112
2. Подалгебры Картана 114
3. Структура полупростых алгебр Ли 118
4. Серии корней 122
5. Системы простых корней 126
6. База Вейля 132
Глава 9. Вещественные формы полупростых алгебр Ли. *(Ф. Брюа)* **139**
Приложение 148
Глава 10. Классификация простых алгебр Ли. *(М. Берже, П. Картье)* **152**
1. Вступление 152
2. Отыскание связных допустимых систем 153
3. Построение связных допустимых систем 159
Глава 11. Построение простых алгебр Ли. *(М. Берже)* **163**
1. Алгебры типа A_n 163
2. Алгебры типа C_n 165
3. Алгебры типов B_n и D_n 167
4. Алгебры типа G_2 168
5. Добавление 170
Глава 12. Теорема о сопряженности подалгебр Картана. *(П. Картье)* **172**
1. Некоторые сведения из алгебраической геометрии 172
2. Применение к алгебрам Ли 176
Глава 13. Автоморфизмы полупростых алгебр Ли. *(Ф. Брюа)* **179**
Глава 14. Линейные представления полупростых алгебр Ли. *(П. Картье)* **189**
1. Канонические образующие полупростой алгебры Ли 189
2. Веса линейных представлений 190
3. Представления со старшим вектором 191
4. Неприводимые представления конечной степени 194
Глава 15. Теория характеров полупростых алгебр Ли. *(П. Картье)* **199**

1. Отображение 4 в обертывающей алгебре 199
2. Характеры полупростой алгебры Ли 202
3. О пространстве, дуальном к симметрической алгебре 206
4. Леммы о корнях 209
5. Отступление. Об экспоненциалах 210
6. Характеры конечномерных представлений 213
7. Вычисление характеров полупростой алгебры Ли 217
8. Отображение # в симметрической алгебре над $\wp$ 220
9. Добавление 222
Глава 16. Характеры компактных групп Ли. *(П. Картье)* **224**
1. Свертка обобщенных функций 224
2. Формулы интегрирования Г. Вейля 226
3. Метод Г. Вейля для нахождения характеров 230
4. Формула Планшереля для полупростых компактных групп 233
Глава 17. Топологическая структура групп Ли. *(П. Картье)* **238**
1. Теория компактных групп 238
2. Теория полупростых групп 248
3. Произвольные группы Ли 254
Глава 18. Формула Кэмпбелла — Хаусдорфа. *(П. Картье)* **259**
1. Вывод формулы Кэмпбелла — Хаусдорфа 259
2. Сходимость формулы Кэмпбелла — Хаусдорфа 260
3. Приложение к нильпотентным группам 262
Глава 19. Максимальные торы компактных групп Ли. *(Ж.-П. Серр)* **265**
1. Теорема сопряженности 265
2. Доказательство теоремы сопряженности, принадлежащее А. Вейлю 267
3. Другие доказательства теоремы сопряженности 269
4. Дополнения к теореме 1 271
Глава 20. Коммутативные подгруппы компактных групп Ли. *(Ж.-П. Серр)* **276**
1. Группы типа (МР) 276
2. Автоморфизмы простого порядка алгебры Ли 278
3. Основная теорема 280
4. Приложение теоремы 281
5. Заключительные замечания 283
Приложение. О модулях 285
Литература 292

Предметный указатель

Абелева алгебра Ли 9
Автоморфизм алгебры Ли 179
— — — внутренний 179
— — — специальный 62
Алгебра Ли 9
— — абелева 9
— — алгебраическая 75
— — группы Ли 225
— — коммутативная 9
— — компактная 140
— — компактной группы Ли 283
— — инльпотентная И, 24
— — полупростая 78
— — простая 78

— — разрешимая 11, 27
— — редуктивная 86
— — свободная 9
— — эндоморфизмов модуля 10
Алгебраическая алгебра Ли 75
— оболочка алгебры Ли 76
Аналитическое представление комплексной группы Ли 251
Антианалитическое представление комплексной группы Ли 252
Ацикличный комплекс 32
База Вейля 138
Вес линейного представления алгебры Ли 112
— — — полупростой алгебры Ли 190
Вещественная форма комплексной алгебры Ли 139
— — — — — компактная 140
— — — — — нормальная 144
Внутреннее дифференцирование алгебры Ли 12
Внутренний автоморфизм алгебры Ли 179
Вполне приводимое векторное пространство с эндоморфизмами 81
Гомоморфизм алгебр Ли 10
Градиент 211
Группа автоморфизмов алгебры Ли 179
— Вейля комплексной полупростой алгебры Ли 183
— — компактной алгебры Ли 273
— внутренних автоморфизмов алгебры Ли 179
— когомологий алгебры Ли 40
— Ли комплексная 250
— топологическая разрешимая 30
— — типа (MP) 276
Дифференцирование алгебры Ли 11
— — — внутреннее 12
Идеал алгебры Ли 10
— — — производный 11
Инвариант линейного представления 45
Инъективный $\wp$-модуль 47
Канонические образующие полупростой алгебры Ли 190
Коммутативная алгебра Ли 9
Компактная алгебра Ли 140
— вещественная форма комплексной алгебры Ли 140
Комплекс 32
— ацикличный 32
— свободный 33
Комплексная группа Ли 250
Корень 114
— положительный 128
— простой 128
Критерий Картана 78
— нильпотентности эндоморфизма 74
— разрешимости алгебры Ли 102
Лапласиан 211
Линеаризация алгебры Ли 10
Линейное представление алгебры Ли 10
— — — — нильпотентное 23
— — — — присоединенное 12
— — — группы Ли, унитарное .245
— — комплексной группы Ли, аналитическое 251
— — — — — антианалитическое 252
Максимальный тор компактной группы Ли 265
Модуль когомологий алгебры Ли 40
Мономиальная матрица 281
Наибольший нильпотентный идеал 98
— разрешимый идеал 97
Несущественное расширение алгебры Ли 58
— — $\wp$-модуля 51
Нильпотентная алгебра Ли 11, 24
Нильпотентное представление алгебры Ли 23
Нильпотентный радикал 99
Нормальная вещественная форма

комплексной полупростой алгебры Ли 144
Обобщенная функция 224
Оператор Казимира 47
Подалгебра алгебры Ли 10
— — — редуктивная 86
— Картана 115
Полиномиальная функция 172
Полиномиальное отображение 172
Положительный корень 128
Полуглавная последовательность топологической группы 276
Полупростая алгебра Ли 78
Полупрямое произведение топологических групп 241
Поток 225
p-ранг группы 282
Препятствие расширения $\wp$-модуля 51
Присоединенное представление алгебры Ли 12
Производный идеал 11
— ряд 11
Простая алгебра Ли 78
Простой корень 128
Прямое произведение алгебр Ли 10
Радикал алгебры Ли 99
— — — нильпотентный 99
— ассоциативной алгебры 96
Разрешимая алгебра Ли 11, 27
— топологическая группа 30
Ранг компактной группы Ли 266
Расширение алгебры Ли 26, 55
— — — несущественное 58
— — — центральное 26
— $\wp$-модуля 50
— — несущественное 51
Регулярная нильпотентная подалгебра 115
Регулярный элемент алгебры Ли 115
Редуктивная алгебра Ли 86
— подалгебра алгебры Ли 86
Реплика эндоморфизма 72
Свертка обобщенных функций 224
— потоков 225
Свободная алгебра Ли 9
Свободный комплекс 33
Связывающий гомоморфизм 41
Серия весов 124
— корней 122
Специальный автоморфизм алгебры Ли 62
Старший вектор линейного представления 191
— вес линейного представления 191
Теорема Адо 104
— Бернсайда 203
— Блихтфельда 282
— Бореля — Серра 280
— Г. Вейля 85
— Гильберта об инвариантах 91
— Ивасавы 104
— Картана 78
— Леви — Мальцева 63, 86
— Ли 27
— Пуанкаре — Биркгофа — Витта 16, 17
— Хариш-Чандры 219—220
— Хопкинса 96
— Энгеля 24
Тождество Рейнольдса 200
— Якоби 9
Убывающий центральный ряд 11
Универсальная обертывающая алгебра 13
Унитарное представление группы Ли 245
Фактор-алгебра алгебры Ли 10
Форма Киллинга 78
Формула интегрирования Г. Вейля 230
— Кэмпбелла — Хаусдорфа 260
— Планшереля 233
Фундаментальная область Вейля 183
— система корней 129
— — — распадающаяся 130
Характер алгебры Ли 202, 220
— конечномерного представления

203, 217
— представления со старшим вектором 204, 219
Характеристический класс расширения $\wp$-модуля 51
Центр алгебры Ли 11
— компактной группы Ли 274
— универсальной обертывающей алгебры 199
Центральное расширение алгебры Ли 26
Центральный ряд, убывающий 11
Числа Картана 129
Эквивалентные расширения алгебры Ли 56
— — $\wp$-модуля 50
Элемент Казимира 47

ОТ ИЗДАТЕЛЬСТВА

Предлагаемая вниманию читателя книга представляет собой перевод трудов семинара „Софус Ли“, происходившего в Эколь Нормаль (Париж) в 1954/55 г. В отдельных главах излагаются доклады, сделанные на этом семинаре различными математиками. Однако несмотря на это, книга представляет собой единое целое. Значительную часть содержащихся в книге фактов можно найти лишь в разрозненных журнальных статьях.

По ряду причин книга не может служить для первоначального ознакомления с предметом. Так, предполагаются известными основы, а иногда и довольно глубокие результаты теории групп Ли (в русском издании соответствующие места снабжены необходимыми ссылками). Отличительной особенностью книги является использование современной терминологии и методов. Например, классические теоремы Леви — Мальцева и Г. Вейля доказываются на основе построенной в гл. 3 теории когомологий алгебр Ли.

Авторы постоянно используют понятие модуля. В связи с тем, что это понятие мало употребительно в отечественной математической литературе, издательство сочло целесообразным снабдить перевод приложением, написанным переводчиком и содержащим необходимые сведения по этому вопросу.

При переводе и редактировании исправлены некоторые неточности и ошибки в доказательствах, в ряде мест сделаны подстрочные примечания, написанные переводчиком и редактором, расширен список литературы.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Наш семинар, носящий славное имя Софуса Ли, к которому мы могли бы, без сомнения, добавить имя Э. Картана, задался целью дать возможно более полное изложение теории алгебр Ли и топологии групп Ли. Мы хотели, к тому же, привести полные и как можно более элементарные доказательства, не предполагающие у читателя никаких знаний, кроме обычного багажа современного математика. Все необходимые сведения можно найти в книгах „Алгебра“ и „Топология“ Н. Бурбаки, а также в первом томе „Теории групп Ли“ К. Шевалле.

До сих пор не существовало монографического изложения теории алгебр Ли, и мы хотели избавить читателя от необходимости постоянно обращаться к диссертации Э. Картана. С другой стороны, желательно было дать новое изложение теории, использующее методы современной алгебры. Существенную часть последней задачи выполнили Р. Годеман и Н. Бурбаки. Они предоставили нам свои неопубликованные работы, за что мы их горячо благодарим. Наряду с классическими трудами Э. Картана, Г. Вейля и работами упомянутых выше двух авторов, мы пользовались некоторыми недавними работами Хариш-Чандры и статьей Ивасавы из Annals of Mathematics за 1949 год.

Многие вопросы мы не смогли рассмотреть из-за недостатка места. Например, нам не удалось достаточно подробно остановиться на теории когомологий. Тем не менее мы надеемся, что наш труд будет полезен читателю.

Авторы

Глава 1

ТЕОРЕМА ПУАНКАРЕ — БИРКГОФА — ВИТТА

П. Картье

1. Предварительные понятия

Определение. *Алгеброй Ли* $\mathfrak{G}$ *над коммутативным кольцом* K *с единицей называется унитарный* K*-модуль* $\mathfrak{G}$, *снабженный билинейным отображением* $(x, y) \to [x, y]$ *прямого произведения* $\mathfrak{G} \times \mathfrak{G}$ *в* $\mathfrak{G}$, *называемым коммутированием и удовлетворяющим следующим двум аксиомам*:

$$\text{(I)}\ [x, x] = 0, \quad \textit{откуда} \quad [x, y] = -[y, x];$$

$$\text{(II)}\ [x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0$$

(*тождество Якоби*).

В настоящей книге мы обычно ограничиваемся случаем, когда K — поле характеристики 0.

Примеры.

1°. *Свободная алгебра Ли.* Пусть S — какое-нибудь множество, $\overline{S}$ — множество неассоциативных слов, составленных из элементов S (т. е. слов, в которых ставятся все необходимые скобки). Модуль E, образованный формальными линейными комбинациями элементов $\overline{S}$ с коэффициентами из K, естественным образом снабжается мультипликативной структурой, от которой требуется лишь, чтобы она была билинейным отображением $E \times E$ в E. Переходя к фактор-модулю по отношению эквивалентности, определенному тождествами (I) и (II)[1]), получаем алгебру Ли над K, которая называется свободной алгеброй Ли, порожденной множеством S.

2°. *Коммутативная* (*абелева*) *алгебра Ли.* В K-модуле E положим $[x, y] = 0$ для любых $x, y \in E$; тем самым E

---

[1]) Имеется в виду фактор-модуль по подмодулю, порожденному левыми частями тождеств (I), (II). — *Прим. ред.*

наделяется структурой алгебры Ли. В этом случае говорят, что E — коммутативная (абелева) алгебра Ли (по причинам, связанным с теорией групп Ли, а также из-за соотношения (I)).

3°. Пусть A — ассоциативная алгебра над K; положим $[a, b] = ab - ba$. Эта операция коммутирования снабжает K-модуль A структурой алгебры Ли $\bar{A}$ над K. Если, в частности, A — ассоциативная алгебра эндоморфизмов K-модуля M, то $\bar{A}$ обозначается через $\mathfrak{Gl}(M)$ и называется *алгеброй Ли эндоморфизмов модуля* M.

4°. *Прямое произведение.* Пусть $\mathfrak{G}_1$ и $\mathfrak{G}_2$ — две алгебры Ли над K. В K-модуле $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}_1 \times \mathfrak{G}_2$ определим операцию коммутирования

$$[(x_1, x_2), (y_1, y_2)] = ([x_1, y_1], [x_2, y_2]) \qquad (x_i, y_i \in \mathfrak{G}_i).$$

Эта операция удовлетворяет аксиомам (I) и (II) и определяет в модуле $\mathfrak{G}$ структуру алгебры Ли — прямого произведения алгебр Ли $\mathfrak{G}_i$.

5°. Исходя из любой алгебры Ли, можно получать новые алгебры Ли, расширяя или сужая кольцо скаляров.

Определения. *Подмодуль $\mathfrak{H}$ алгебры Ли $\mathfrak{G}$ называется подалгеброй (соответственно идеалом) алгебры $\mathfrak{G}$, если $[x, y] \in \mathfrak{H}$ для всяких $x, y \in \mathfrak{H}$ (соответственно $x \in \mathfrak{G}$, $y \in \mathfrak{H}$).*

В силу (I) не имеет смысла различать левые и правые идеалы.

Если $\mathfrak{H}$ — идеал алгебры Ли $\mathfrak{G}$, то структура алгебры Ли переносится в фактор-модуль $\mathfrak{G}/\mathfrak{H}$. Снабженный этой структурой модуль $\mathfrak{G}/\mathfrak{H}$ называется фактор-алгеброй алгебры Ли $\mathfrak{G}$ по идеалу $\mathfrak{H}$.

Гомоморфизмом алгебры Ли $\mathfrak{G}$ в алгебру Ли $\mathfrak{G}'$ называется K-линейное отображение $\mathfrak{G}$ в $\mathfrak{G}'$, сохраняющее операцию коммутирования (т. е. такое K-линейное отображение f, что $f([x, y]) = [f(x), f(y)]$).

Линеаризацией алгебры Ли $\mathfrak{G}$ в ассоциативную алгебру A с единицей (над тем же кольцом K) называется отображение алгебры $\mathfrak{G}$ в A, которое является гомоморфизмом в алгебру Ли $\bar{A}$[1] *(т. е. $f([x, y]) = f(x) f(y) - f(y) f(x)$). Линейным представлением алгебры $\mathfrak{G}$ в K-модуле M называется линеаризация*

[1]) См. 3°. — *Прим. ред.*

алгебры $\mathfrak{G}$ в алгебру эндоморфизмов модуля M (или, если угодно, гомоморфизм алгебры $\mathfrak{G}$ в $\mathfrak{Gl}(M)$).

Примеры.

6°. Пусть $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ — два подмножества алгебры Ли $\mathfrak{G}$. Обозначим через $[\mathfrak{A}, \mathfrak{B}]$ множество всевозможных линейных комбинаций коммутаторов элементов из $\mathfrak{A}$ с элементами из $\mathfrak{B}$. Если $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ — идеалы, то $[\mathfrak{A}, \mathfrak{B}]$ — также идеал (это следует из тождества Якоби). Положим, в частности,

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{G}^{(1)} = \mathfrak{G}_1; \quad \mathfrak{G}^{(n)} = \left[\mathfrak{G}^{(n-1)}, \mathfrak{G}^{(n-1)}\right]; \quad \mathfrak{G}_n = [\mathfrak{G}, \mathfrak{G}_{n-1}];$$

$\mathfrak{G}^{(n)}$ (соответственно $\mathfrak{G}_n$) — идеал в $\mathfrak{G}^{(r)}$ (соответственно в $\mathfrak{G}_r$) при $0 \leqslant r \leqslant n$. Последовательность идеалов $\mathfrak{G}_n$ называется *убывающим центральным рядом*, последовательность идеалов $\mathfrak{G}^{(n)}$ — *производным рядом* алгебры $\mathfrak{G}$. Алгебра Ли $\mathfrak{G}$ называется *разрешимой* (соответственно *нильпотентной*), если существует такое целое $n > 0$, что $\mathfrak{G}^{(n)} = 0$ (соответственно $\mathfrak{G}_n = 0$). Идеал $\mathfrak{G}^{(2)}$ называется *производным идеалом* алгебры $\mathfrak{G}$.

7°. Отображения алгебр Ли $\mathfrak{G}_1$ и $\mathfrak{G}_2$ в произведение $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}_1 \times \mathfrak{G}_2$, определяемые формулами

$$x_1 \to (x_1, 0), \quad x_2 \to (0, x_2) \qquad (x_i \in \mathfrak{G}_i),$$

являются мономорфизмами[1]); они позволяют отождествить алгебры $\mathfrak{G}_i$ ($i = 1, 2$) с идеалами алгебры $\mathfrak{G}$. При таком отождествлении $[\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2] = 0$. Для того чтобы алгебра $\mathfrak{G}$ была изоморфна прямому произведению своих подалгебр $\mathfrak{G}'$ и $\mathfrak{G}''$, необходимо и достаточно, чтобы $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}' + \mathfrak{G}''$, $\mathfrak{G}' \cap \mathfrak{G}'' = 0$, $[\mathfrak{G}', \mathfrak{G}''] = 0$.

8°. Элементы $x \in \mathfrak{G}$, такие, что $[x, y] = 0$ для всех $y \in \mathfrak{G}$, образуют идеал $\mathfrak{Z}$ в алгебре $\mathfrak{G}$, называемый ее *центром*.

9°. *Дифференцированием* алгебры Ли $\mathfrak{G}$ называют всякий эндоморфизм D K-модуля $\mathfrak{G}$, удовлетворяющий условию

$$D[x, y] = [Dx, y] + [x, Dy].$$

Дифференцирования алгебры $\mathfrak{G}$ образуют подалгебру алгебры Ли эндоморфизмов K-модуля $\mathfrak{G}$, обозначаемую через $\mathfrak{D}(\mathfrak{G})$.

---

[1]) Мономорфизмом называется гомоморфизм с тривиальным ядром. — *Прим. ред.*

Отображение $x \to \mathrm{ad}(x)$ алгебры $\mathfrak{G}$ в $\mathfrak{D}(\mathfrak{G})$, определенное формулой

$$\mathrm{ad}(x) : y \to [x, y],$$

является гомоморфизмом (это, а также то, что $\mathrm{ad}(x)$ — дифференцирование, проверяется при помощи тождества Якоби). Указанный гомоморфизм определяет линейное представление алгебры Ли $\mathfrak{G}$ в K-модуле $\mathfrak{G}$, которое называется *присоединенным представлением* алгебры $\mathfrak{G}$. Его ядро совпадает с центром $\mathfrak{Z}$ алгебры $\mathfrak{G}$, что позволяет вложить $\mathfrak{G}/\mathfrak{Z}$ в $\mathfrak{D}(\mathfrak{G})$; при этом образ $\mathfrak{G}/\mathfrak{Z}$ является идеалом в $\mathfrak{D}(\mathfrak{G})$ (так как $[D, \mathrm{ad}(x)] = \mathrm{ad}(Dx)$; этот идеал называется *идеалом внутренних дифференцирований.*

2. Универсальная обертывающая алгебра

Мы сейчас покажем, что со всякой алгеброй Ли $\mathfrak{G}$ над K можно связать ассоциативную алгебру $U(\mathfrak{G}) = U$ над K с единицей и линеаризацию ρ алгебры $\mathfrak{G}$ в U таким образом, что для всякой пары (A, f), где A — ассоциативная алгебра над K с единицей, а f — линеаризация алгебры $\mathfrak{G}$ в A, найдется такой гомоморфизм $\tilde{f}$ алгебры U в A, что $\tilde{f}(1) = 1$ и $f = \tilde{f}\rho$:

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{G} \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\rho"'] & & A \\ & U(\mathfrak{G}) \arrow[ur, "\tilde{f}"'] & \end{tikzcd}$$

Очевидно, что можно ограничиться рассмотрением случая, когда K-алгебра U порождена $\rho(\mathfrak{G})$ и 1, а тогда ясно, что если решение поставленной задачи существует, то оно единственно с точностью до изоморфизма. (Действительно, если бы было два таких решения, (U, ρ) и (U', ρ'), то эндоморфизм $\tilde{\rho}\tilde{\rho}'$ был бы тождествен на подалгебре алгебры U, порожденной $\rho(\mathfrak{G})$ и 1, а эндоморфизм $\tilde{\rho}'\tilde{\rho}$ был бы тождествен на подалгебре алгебры U', порожденной $\rho'(\mathfrak{G})$ и 1.)

Пусть $T = \sum_r T^r$ — тензорная алгебра над $\mathfrak{G}$ [1]) ($T^0 = K$, $T^1 = \mathfrak{G}$). Всякое линейное отображение f K-модуля $\mathfrak{G}$ в ассоциативную алгебру A продолжается в гомоморфизм f^0

---

[1]) См. [67], т. III. —*Прим. ред.*

алгебры T в A, а именно:

$$f^0(x_1 \otimes \ldots \otimes x_k) = f(x_1) \ldots f(x_k).$$

Если f — линеаризация, то f^0 аннулирует идеал $J \subset T$, порожденный элементами вида $x \otimes y - y \otimes x - [x, y]$, и, следовательно, определяет отображение $\tilde{f}$ фактор-алгебры $U = T/J$ в A. Обозначим через ρ ограничение на $\mathfrak{G} = T^1$ канонического отображения T на U. Легко видеть, что U, ρ, $\tilde{f}$ удовлетворяют требованиям задачи. Алгебра $U = T/J$ в совокупности с линеаризацией ρ называется *универсальной обертывающей алгеброй* алгебры Ли $\mathfrak{G}$.

Примеры.

1°. Рассмотрим случай, когда алгебра Ли $\mathfrak{G}$ абелева. Тогда идеал J порожден тензорами вида $x \otimes y - y \otimes x$. Алгебра U совпадает с симметрической алгеброй $S(\mathfrak{G})$ над $\mathfrak{G}$. Если $\{x_i\}$ — какая-нибудь база в $\mathfrak{G}$, то U изоморфна алгебре многочленов от переменных x_i.

2°. Пусть $\mathfrak{G}$ — свободная алгебра Ли с образующими a_ι $(\iota \in I)$. Обозначим через L алгебру *некоммутативных* многочленов от переменных b_ι $(\iota \in I)$, через $\overline{L}$ — алгебру Ли, полученную из ассоциативной алгебры L описанным в п. 1 способом. Так как алгебра Ли $\mathfrak{G}$ свободна, то отображение $a_\iota \to b_\iota$ продолжается до гомоморфизма алгебры $\mathfrak{G}$ в $\overline{L}$, иными словами, до линеаризации ρ алгебры $\mathfrak{G}$ в L. Пусть теперь f — линеаризация алгебры $\mathfrak{G}$ в ассоциативную алгебру A. Положим $c_\iota = f(a_\iota)$. Существует единственный гомоморфизм $\tilde{f}$ алгебры L в A, для которого $\tilde{f}(1) = 1$ и $\tilde{f}(b_\iota) = c_\iota$ (так как L — свободная ассоциативная алгебра). Отображения f и $\tilde{f}\rho$ — линеаризации алгебры $\mathfrak{G}$ в A, совпадающие на образующих a_ι алгебры $\mathfrak{G}$ и потому всюду. Следовательно, (L, ρ) — обертывающая алгебра алгебры Ли $\mathfrak{G}$.

3°. Допустим, что алгебра Ли $\mathfrak{G}$ изоморфна прямой сумме своих подалгебр $\mathfrak{G}_1$, $\mathfrak{G}_2$ и что (U_i, ρ_i) — обертывающая алгебра алгебры $\mathfrak{G}_i$ $(i = 1, 2)$. Положим $V = U_1 \otimes U_2$[1]) и

---

[1]) Через $U_1 \otimes U_2$ здесь обозначается тензорное произведение K-модулей U_1 и U_2, снабженное структурой ассоциативной алгебры по формуле $(x_1 \otimes x_2)(y_1 \otimes y_2) = x_1 y_1 \otimes x_2 y_2$. — *Прим. перев.*

определим следующим образом отображение ρ алгебры $\mathfrak{G}$ в V:

$$\rho : x_1 + x_2 \to \rho_1(x_1) \otimes 1 + 1 \otimes \rho_2(x_2) \qquad (x_i \in \mathfrak{G}_i).$$

Очевидно, что ρ — линеаризация. Пусть, далее, f — какая-нибудь линеаризация алгебры $\mathfrak{G}$ в ассоциативную алгебру A.

Отображение f, рассматриваемое на алгебре $\mathfrak{G}_i$, продолжается до гомоморфизма $\tilde{f}_i$ алгебры U_i в $A (i = 1, 2)$. При $x_i \in \mathfrak{G}_i$ $(i = 1, 2)$ элементы $f(x_1)$ и $f(x_2)$ перестановочны в алгебре A, так как $[x_1, x_2] = 0$. Отсюда следует, что перестановочны между собой также любые элементы из множеств $\tilde{f}_1(U_1)$ и $\tilde{f}_2(U_2)$. Поэтому можно определить гомоморфизм $\tilde{f}$ алгебры $V = U_1 \otimes U_2$ в алгебру A, положив

$$\tilde{f}(a_1 \otimes a_2) = \tilde{f}_1(a_1)\,\tilde{f}_2(a_2)$$

для любых $a_i \in U_i$ $(i = 1, 2)$. Легко проверить, что

$$\tilde{f}(\rho(x_1 + x_2)) = f(x_1 + x_2)$$

и что $\tilde{f}(1 \otimes 1) = 1$. Тем самым доказано, что (V, ρ) — обертывающая алгебра алгебры Ли $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}_1 \times \mathfrak{G}_2$.

4°. Пусть $\mathfrak{G}$ — алгебра Ли, $\mathfrak{H}$ — ее идеал, (U, ρ) — ее обертывающая алгебра. Обозначим через $\mathfrak{R}$ двусторонний идеал в U, порожденный $\rho(\mathfrak{H})$, через p и p' — естественные проекции алгебр $\mathfrak{G}$ и U на фактор-алгебры $\mathfrak{G}/\mathfrak{H}$ и $U/\mathfrak{R}$ соответственно.

Существует единственная линеаризация ρ' фактор-алгебры $\mathfrak{G}/\mathfrak{H}$ в $U/\mathfrak{R}$, удовлетворяющая условию $\rho' p = p' \rho$. Всякая линеаризация f алгебры $\mathfrak{G}/\mathfrak{H}$ в ассоциативную алгебру A индуцирует линеаризацию fp алгебры $\mathfrak{G}$ в A, которая продолжается до гомоморфизма $\widetilde{fp}$ алгебры U в A. Гомоморфизм $\widetilde{fp}$ аннулирует идеал $\mathfrak{R}$ и потому определяет некоторый гомоморфизм $\tilde{f}$ фактор-алгебры $U/\mathfrak{R}$ в A. Отображение $\tilde{f}$

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{G} \arrow[rr, "\rho"] \arrow[dr, "fp"] \arrow[dd, "p"'] & & U \arrow[dl, "\widetilde{fp}"'] \arrow[dd, "p'"] \\
& A & \\
\mathfrak{G}/\mathfrak{H} \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, "\rho'"'] & & U/\mathfrak{R} \arrow[ul, "\tilde{f}"']
\end{tikzcd}$$

обладает всеми желаемыми свойствами. Таким образом, обертывающей алгеброй для фактор-алгебры $\mathfrak{G}/\mathfrak{H}$ служит $(U/\mathfrak{R}, \rho')$.

Замечание. Двусторонний идеал $\mathfrak{R}$ в действительности совпадает с левым идеалом, порожденным $\rho(\mathfrak{H})$. Это следует из соотношения

$$\rho(h)\rho(g)=\rho(g)\rho(h)+\rho([h, g]) \qquad (h\in\mathfrak{H},\ g\in\mathfrak{G}),$$

если учесть, что $\mathfrak{H}$ — идеал в $\mathfrak{G}$ и что алгебра U порождается $\rho(\mathfrak{G})$ и 1.

3. Теорема Пуанкаре — Биркгофа — Витта

Введем сначала некоторые обозначения. При $x\in\mathfrak{G}$ положим для простоты $\rho(x)=\tilde{x}$.

Пусть U_p — множество линейных комбинаций элементов из U, представимых в виде произведения $q\leqslant p$ множителей вида $\tilde{x}$, $x\in\mathfrak{G}$. В частности,

$$U_{-1}=0, \quad U_0=K, \quad U_1=U_0+\tilde{\mathfrak{G}}.$$

Очевидно, что $U_p\subset U_{p+1}$, $U_pU_q\subset U_{p+q}$, $U=\bigcup\limits_{p=0}^{\infty}U_p$,

так что подмодули U_p алгебры U определяют ее возрастающую фильтрацию. Заметим, что U разлагается в прямую сумму U_0 и идеала (скажем, левого), порожденного $\tilde{\mathfrak{G}}$. Класс эквивалентности по модулю U_0, содержащий $\tilde{x}$, мы будем обозначать через $\hat{x}$.

С фильтрованной алгеброй U связана градуированная алгебра G:

$$G=\sum_{p=0}^{\infty}G_p, \quad G_p=U_p/U_{p-1},$$

причем произведение g_pg_q, $g_p\in G_p$, $g_q\in G_q$, определяется как класс эквивалентности по модулю U_{p+q-1}, содержащий произведение a_pa_q, где a_p и a_q — какие-нибудь элементы из U_p и U_q, представляющие g_p и g_q соответственно. При этом $G_pG_q\subset G_{p+q}$; G_0 совпадает с K; G_1 естественным образом отождествляется с $\tilde{\mathfrak{G}}$. Так как алгебра U порождается U_1, то алгебра G порождается G_1 и единицей.

Докажем, что алгебра G *коммутативна.* В силу сделанного только что замечания достаточно показать, что любые элементы $\hat{x}, \hat{y} \in G_1$ перестановочны, а это следует из того, что для представляющих их элементов $\tilde{x}, \tilde{y} \in \tilde{\mathfrak{G}}$ разность $\tilde{x}\tilde{y} - \tilde{y}\tilde{x} = \widetilde{[x, y]}$ принадлежит U_1.

Отображение $x \to \hat{x}$ алгебры $\mathfrak{G}$ в G продолжается до гомоморфизма τ тензорной алгебры T на G, при котором, как мы только что видели, тензоры вида $x \otimes y - y \otimes x$ переходят в 0. Итак, гомоморфизм τ аннулирует идеал I, порожденный тензорами такого рода, и потому определяет гомоморфизм φ симметрической алгебры $S(\mathfrak{G}) = T/I$ на G.

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{G} \arrow[r] \arrow[d] & G \\ T \arrow[ur, "\tau"] \arrow[r] & S \arrow[u, "\varphi"'] \end{tikzcd}$$

Заметим, что K и $\mathfrak{G}$ изоморфно вкладываются в S, так же, как и в T, и что отображение φ сохраняет градуировку.

Теперь мы в состоянии сформулировать теорему.

Теорема 1. *Если K — поле характеристики* 0, *то φ — изоморфизм симметрической алгебры $S(\mathfrak{G})$ на G.*

Пусть $(x_\iota)_{\iota \in I}$ — вполне упорядоченная база алгебры $\mathfrak{G}$. Для всякого набора M целых неотрицательных чисел $(m_\iota)_{\iota \in I}$, лишь конечное число которых отлично от 0, положим

$$|M| = \sum_\iota m_\iota; \quad x^M = \bigotimes_\iota x_\iota^{m_\iota} \in T,$$

где множители в произведении $\bigotimes_\iota x_\iota^{m_\iota}$ берутся в порядке, заданном на базе.

Далее, обозначая через ψ и σ канонические отображения T в U и S соответственно, положим

$$\tilde{x}^M = \psi(x^M) = \prod_\iota \tilde{x}_\iota^{m_\iota}; \quad z^M = \sigma(x^M).$$

Теорему 1 мы выведем из теоремы 1'.

Теорема 1′. *Элементы $\tilde{x}^M$ образуют базу векторного пространства U.*

Докажем в первую очередь эту теорему. Очевидно, что элементы $\tilde{x}^M$ порождают векторное пространство U. В самом деле, так как алгебра G коммутативна, то всякий одночлен степени p от x_i сравним по модулю U_{p-1} с одночленом вида $\tilde{x}^M$, получающимся из него перестановкой множителей. Отсюда индукцией по p получается доказательство того, что одночлены $\tilde{x}^M$, $|M| \leqslant p$, порождают U_p.

Теорема 1′ будет вытекать из следующих трех лемм.

Лемма 1. *Пусть $\mathfrak{H}$ — идеал алгебры Ли $\mathfrak{G}$. Если теорема* 1 *справедлива для $\mathfrak{G}$, то она справедлива также для $\mathfrak{G}/\mathfrak{H}$.*

Лемма 2. *Если отображение $\rho: \mathfrak{G} \to U(\mathfrak{G})$ взаимно однозначно, то теорема* 1 *справедлива для $\mathfrak{G}$.*

Лемма 3. *Если $\mathfrak{G}$ — свободная алгебра Ли, то отображение $\rho: \mathfrak{G} \to U(\mathfrak{G})$ взаимно однозначно.*

Действительно, для свободных алгебр Ли теорема 1′ верна, согласно леммам 3 и 2, но всякая алгебра Ли есть фактор-алгебра свободной алгебры Ли, и поэтому, согласно лемме 1, теорема 1′ верна всегда.

Доказательство лемм мы отложим до следующего параграфа, а пока выведем некоторые следствия из теоремы 1′, и прежде всего

Доказательство теоремы 1. Обозначим через π_p каноническое отображение U_p на $G_p = U_p/U_{p-1}$. Так как элементы $\tilde{x}^M$, $|M| \leqslant p$, образуют базу пространства U_p, то элементы $\pi_p(\tilde{x}^M)$, $|M| = p$, образуют базу пространства G_p. Но $\pi_p(\tilde{x}^M) = \varphi(z^M)$, а элементы z^M, $|M| = p$, образуют базу пространства S_p [1]). Отсюда следует, что отображение φ взаимно однозначно.

Следствие 1. *Пусть $\mathfrak{S}_n \subset T^n$ — множество симметрических тензоров степени n и $\mathfrak{S} = \sum_n \mathfrak{S}_n$. Ограничение*

---

[1]) $S_p = \sigma(T^p)$. — *Прим. перев.*

на $\mathfrak{S}$ отображения $\psi: T \to U$ есть изоморфизм векторных пространств $\mathfrak{S}$ и U.

Пусть S обозначает операцию симметризации тензоров. Симметрические тензоры Sx^M, $|M| = p$, образуют базу пространства $\mathfrak{S}_p$. С другой стороны,

$$\pi_p \psi (Sx^M) = \varphi\sigma (Sx^M) = \varphi\sigma (x^M) = \varphi (z^M)$$

$$\begin{tikzcd} T^p \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "\sigma"'] & U_p \arrow[r, "\pi_p"] & G_p \\ & S_p \arrow[ur, "\varphi"'] & \end{tikzcd}$$

Элементы $\varphi (z^M)$, $|M| = p$, образуют базу пространства G_p. Отсюда индукцией по p получаем, что элементы $\psi (Sx^M)$, $|M| \leqslant p$, образуют базу пространства U_p, а это означает, что ψ изоморфно отображает $\sum_{q \leqslant p} \mathfrak{S}_q$ на U_p.

Следствие 2. *Линеаризация $\rho : \mathfrak{G} \to U(\mathfrak{G})$ изоморфно отображает $\mathfrak{G}$ на $\tilde{\mathfrak{G}}$.*

Следствие 3. *Пусть $\mathfrak{G}'$ — подалгебра алгебры Ли $\mathfrak{G}$. Естественное отображение $U(\mathfrak{G}')$ в $U(\mathfrak{G})$ является вложением. Если $\mathfrak{G}'' \subset \mathfrak{G}$ — подалгебра, дополнительная к $\mathfrak{G}'$*[1]*, то векторное пространство (но не алгебра!) $U(\mathfrak{G})$ совпадает с $U(\mathfrak{G}') \otimes U(\mathfrak{G}'')$.*

Следствие 4. *Всякий обратимый элемент алгебры $U(\mathfrak{G})$ скалярен*[2].

Следствие 5. *Алгебра $U(\mathfrak{G})$ не имеет делителей нуля*[2].

---

[1]) То есть векторное пространство $\mathfrak{G}$ разлагается в прямую сумму своих подпространств $\mathfrak{G}'$ и $\mathfrak{G}''$. — *Прим. перев.*

[2]) Всякий элемент алгебры $U(\mathfrak{G})$ однозначно представим в виде $\sum_M a_M \tilde{x}^M$, где лишь конечное число коэффициентов a_M отлично от нуля (теорема 1′). Назовем степенью такого элемента $\max_{M : a_M \neq 0} |M|$. Следствия 4 и 5 немедленно вытекают из того легко доказуемого факта, что при перемножении степени складываются. — *Прим. перев.*

Следствие 6. *Алгебра $U(\mathfrak{G})$ не имеет радикала в смысле Джекобсона, т. е. в $U(\mathfrak{G})$ не существует ненулевого элемента, переходящего в 0 при всех неприводимых представлениях алгебры $U(\mathfrak{G})$* [1]).

Следствие 7. *Если алгебра Ли $\mathfrak{G}$ конечномерна, то всякий левый идеал в $U(\mathfrak{G})$ имеет конечный базис* [2]).

4. Доказательства лемм

Доказательство леммы 1. Пусть (b_ν) — база $\mathfrak{H}$. Дополним ее векторами (a_μ) до базы $\mathfrak{G}$, которую упорядочим таким образом, чтобы все μ предшествовали всем ν. Тогда $\tilde{x}^M = \tilde{a}^P\tilde{b}^Q$, где $P = (p_\mu)$, $Q = (q_\nu)$. Согласно примеру 4° п. 2, $U(\mathfrak{G}/\mathfrak{H}) = U(\mathfrak{G})/\mathfrak{R}$, где идеал $\mathfrak{R}$ линейно порожден элементами вида $\tilde{x}^M\tilde{b}_\nu = \tilde{a}^P\tilde{b}^Q\tilde{b}_\nu$. Но элементы вида $\tilde{b}^Q$ порождают векторное пространство $U(\mathfrak{H})$ [3]), поэтому $\tilde{b}^Q\tilde{b}_\nu = \sum_\varkappa \tilde{b}^{Q'}_\varkappa$. Следовательно, идеал $\mathfrak{R}$ линейно порожден элементами вида $\tilde{a}^P\tilde{b}^Q$, где $Q \neq \varnothing$ [4]). Если теорема 1′ справедлива для $\mathfrak{G}$, то элементы $\tilde{x}^M$ линейно независимы; но тогда элементы $\tilde{a}^P\tilde{b}^\varnothing = \tilde{a}^P$ линейно независимы по модулю $\mathfrak{R}$. Отождествляя a_μ и $\tilde{a}^P$ с их образами при канонических отображениях $\mathfrak{G}$ на $\mathfrak{G}/\mathfrak{H}$ и $U(\mathfrak{G})$ на $U(\mathfrak{G})/\mathfrak{R} = U(\mathfrak{G}/\mathfrak{H})$ соответственно, мы

[1]) О радикале ассоциативной алгебры см. п. 1 гл. 6. Для доказательства следствия 6 удобнее всего взять третий вариант данного там определения радикала и воспользоваться следствием 4. — *Прим. перев.*

[2]) Нетрудно доказать, что в алгебре $U(\mathfrak{G})$ всякий левый идеал имеет конечный базис, коль скоро этим свойством обладают идеалы алгебры G. Независимо от теоремы Пуанкаре — Биркгофа — Витта алгебра G изоморфна фактор-алгебре симметрической алгебры S, и поэтому теорема о базисе верна для G, если она верна для S (см., например, [7]*). Если алгебра $\mathfrak{G}$ обладает конечной базой над K, то алгебра S изоморфна алгебре многочленов с коэффициентами из K и для нее справедлива теорема о базисе, если эта теорема верна для K (см. там же). Итак, утверждение следствия 7 не зависит от теоремы Пуанкаре — Биркгофа — Витта и верно всякий раз, когда $\mathfrak{G}$ обладает конечной базой над K и в K любой идеал имеет конечный базис. — *Прим. перев.*

[3]) Это было доказано в п. 3. — *Прим. перев.*

[4]) Через $\varnothing$ здесь обозначен набор (q_ν), в котором все $q_\nu = 0$. — *Прим. перев.*

видим, что элементы a_μ образуют базу в $\mathfrak{G}/\mathfrak{H}$ и элементы $\tilde{a}^P$ образуют базу в $U(\mathfrak{G}/\mathfrak{H})$, что и показывает справедливость теоремы 1′ для алгебры $\mathfrak{G}/\mathfrak{H}$.

Доказательство леммы 2. Требуется доказать, что если $\tilde{x}_\iota$ линейно независимы, то $\tilde{x}^M$ также линейно независимы.

Отображение $x \to \tilde{x} \otimes 1 + 1 \otimes \tilde{x}$ является линеаризацией алгебры Ли $\mathfrak{G}$ в алгебру $U \otimes U$ и потому определяет гомоморфизм H алгебры U в $U \otimes U$. Имеем

$$H(\tilde{x}^m) = (\tilde{x} \otimes 1 + 1 \otimes \tilde{x})^m = \sum_{p+q=m} C_m^p \tilde{x}^p \otimes \tilde{x}^q.$$

Положим $\binom{M}{P} = \prod_{\iota \in I} C_{m_\iota}^{p_\iota}$. Тогда

$$t^M = H(\tilde{x}^M) - \tilde{x}^M \otimes 1 - 1 \otimes \tilde{x}^M = \sum \binom{M}{P} \tilde{x}^P \otimes \tilde{x}^Q$$

$(P + Q = M;\ P,\ Q \neq \varnothing)$.

Доказательство леммы проведем индукцией по $|M|$. По условию векторы $\tilde{x}^M$ линейно независимы при $|M| = 1$; предположим, что они линейно независимы при $|M| \leqslant m$, и пусть теперь $|M| \leqslant m + 1$. Векторы $y^{P,Q} = \tilde{x}^P \otimes \tilde{x}^Q$, входящие в выражение для t^M, линейно независимы в $U_m \otimes U_m$. При $|M| > 1$ векторы t^M отличны от 0 (здесь используется то, что K имеет характеристику 0!). Кроме того, векторы t^M и $t^{M'}$ при $M \neq M'$ не содержат в своих разложениях по $y^{P,Q}$ одинаковых слагаемых, так как t^M содержит только слагаемые $y^{P,Q}$ с $P + Q = M$, а $t^{M'}$ — с $P + Q = M'$. Следовательно, векторы t^M, $1 < |M| \leqslant m + 1$, линейно независимы.

Предположим, что $\sum_{|M| \leqslant m+1} a_M \tilde{x}^M = 0$. Тогда

$$\sum a_M t^M = \sum a_M H(\tilde{x}^M) - 1 \otimes \sum a_M \tilde{x}^M - \sum a_M \tilde{x}^M \otimes 1 = 0,$$

откуда следует, что все коэффициенты a_M, $|M| > 1$, равны 0. Если $|M| = 1$, то $\tilde{x}^M = \tilde{x}_\iota$ при некотором ι. Так как $\tilde{x}_\iota$ линейно независимы, то все коэффициенты a_M равны 0. Таким образом, векторы $\tilde{x}^M$, $|M| \leqslant m + 1$, линейно независимы.

Доказательство леммы 3. Пусть a_ι — образующие алгебры $\mathfrak{G}$, b_ι — образующие алгебры $U(\mathfrak{G}) = L$ (см.

пример 2° п. 2), L' — множество элементов алгебры L, не содержащих константы[1]). Пусть P — линейное отображение L' в $\mathfrak{G}$, определенное формулой

$$P(b_{\iota_1} \dots b_{\iota_n}) = [a_{\iota_1} \dots [a_{\iota_{n-1}}, a_{\iota_n}] \dots].$$

Определим следующим образом гомоморфизм θ свободной ассоциативной алгебры L в ассоциативную алгебру эндоморфизмов векторного пространства $\mathfrak{G}$:

$$\theta(1) = 1; \quad \theta(b_\iota) = \operatorname{ad}(a_\iota).$$

Очевидно, что для всяких $u \in L$, $v \in L'$

$$P(uv) = \theta(u) P(v).$$

Далее,

$$\theta(\rho([x, y])) = \theta(\rho(x)\rho(y) - \rho(y)\rho(x)) = \\ = \theta(\rho(x))\,\theta(\rho(y)) - \theta(\rho(y))\,\theta(\rho(x)).$$

Так как в то же время $\operatorname{ad}([x, y]) = \operatorname{ad}(x)\operatorname{ad}(y) - \operatorname{ad}(y)\operatorname{ad}(x)$, то элементы $x \in \mathfrak{G}$, для которых $\theta(\rho(x)) = \operatorname{ad}(x)$, образуют подалгебру, содержащую a_ι, следовательно, совпадающую с $\mathfrak{G}$. Итак, $\theta(\rho(x)) = \operatorname{ad}(x)$ для всех $x \in \mathfrak{G}$. Обозначая через Q отображение $P\rho$ алгебры $\mathfrak{G}$ в себя, имеем

$$Q([x, y]) = P(\rho([x, y])) = P(\rho(x)\rho(y) - \rho(y)\rho(x)) = \\ = \theta(\rho(x))P(\rho(y)) - \theta(\rho(y))P(\rho(x)) = [x, Q(y)] + [Q(x), y],$$

т. е. Q — дифференцирование алгебры Ли $\mathfrak{G}$. Легко видеть, что Q тождественно на образующих a_ι свободной алгебры Ли $\mathfrak{G}$, поэтому для однородных элементов преобразование Q состоит просто в умножении на их степень. Так как основное поле K имеет характеристику 0, то Q взаимно однозначно, а следовательно, и ρ взаимно однозначно.

Замечания.

1. Теорема Биркгофа — Витта в форме 1′ справедлива во всех случаях, когда $\mathfrak{G}$ обладает базой над кольцом K. Относительно формы 1 Лазар доказал, что она верна, если K — кольцо главных идеалов[2]). Вообще все предполо-

---

[1]) То есть имеющих в разложении по словам, составленным из букв b_ι, нулевой коэффициент при пустом слове. — *Прим. перев.*

[2]) См. [36]. — *Прим. перев.*

жения должны относиться исключительно к аддитивной структуре алгебры $\mathfrak{G}$[1]. С другой стороны, Ширшов показал, что теорема Биркгофа — Витта в некоторых случаях неверна[2].

2. В дальнейшем мы покажем, как из лемм 2 и 3 вывести формулу Кэмпбелла — Хаусдорфа.

3. Из доказательства леммы 2 видно, что $t^M = 0$ влечет $|M| = 1$, так что элементы из $\widetilde{\mathfrak{G}}$ характеризуются тем, что $H(\tilde{x}) = 1 \otimes \tilde{x} + \tilde{x} \otimes 1$.

---

[1] Точнее, к структуре модуля. — *Прим. перев.*

[2] См. Ширшов А. И., О представлениях лиевых колец в ассоциативных кольцах, УМН, т. VIII, вып. 5 (1953), 173—175. — *Прим. перев.*

Глава 2

НИЛЬПОТЕНТНЫЕ И РАЗРЕШИМЫЕ АЛГЕБРЫ ЛИ

А. Бланшар

Все рассматриваемые векторные пространства будут предполагаться *конечномерными* над основным полем K. Поле K произвольно в п. 1, а в п. 2 предполагается имеющим *характеристику* 0 *и алгебраически замкнутым.*

Через θ будет обозначаться линейное представление $x \to \theta(x)$ алгебры Ли $\mathfrak{G}$ над полем K в конечномерном векторном пространстве V над тем же полем. Условимся, что $\theta(x) = X$, $\theta(y) = Y$, ... Мы будем говорить, что вектор $v \in V$ *аннулируется* алгеброй $\mathfrak{G}$, если $\theta(x)v = 0$ для всех $x \in \mathfrak{G}$.

1. Нильпотентные представления. Нильпотентные алгебры Ли

Определение 1. *Линейное представление θ алгебры Ли $\mathfrak{G}$ в векторном пространстве V называется нильпотентным, если для всякого $x \in \mathfrak{G}$ эндоморфизм $\theta(x)$ нильпотентен (т. е. существует такое натуральное число p, что $(\theta(x))^p = 0$).*

Если алгебра Ли имеет точное[1]) нильпотентное представление θ, то ее присоединенное представление нильпотентно. В самом деле, присоединенное представление может быть определено через θ посредством формулы $\mathrm{ad}(X) \cdot Y = XY - YX$[2]). Тогда

$$(\mathrm{ad}(X))^n Y = \sum_{p=0}^{n} (-1)^{n-p} C_n^p X^p Y X^{n-p}.$$

Если $X^q = 0$, то $(\mathrm{ad}(X))^{2q} = 0$.

---

[1]) То есть взаимно однозначное. — *Прим. перев.*

[2]) Элементы алгебры $\mathfrak{G}$ отождествляются здесь со своими образами при представлении θ. — *Прим. перев.*

Определение 2. *Алгебра Ли $\mathfrak{G}$ называется нильпотентной, если ее присоединенное представление нильпотентно* [1]).

Из этого определения ясно, что всякая подалгебра и всякая фактор-алгебра нильпотентной алгебры Ли нильпотентны. Если идеал $\mathfrak{H}$ содержится в центре алгебры $\mathfrak{G}$ и фактор-алгебра $\mathfrak{G}/\mathfrak{H}$ нильпотентна, то алгебра $\mathfrak{G}$ также нильпотентна. В самом деле, пусть $x, y \in \mathfrak{G}$, $\bar{x}, \bar{y}$ — их образы при каноническом отображении $\mathfrak{G}$ на $\mathfrak{G}/\mathfrak{H}$. Для некоторого натурального числа p имеем $(\mathrm{ad}(\bar{x}))^p \bar{y} = 0$, т. е. $z = (\mathrm{ad}(x))^p y \in \mathfrak{H}$; но тогда z лежит в центре алгебры $\mathfrak{G}$ и $(\mathrm{ad}(x))^{p+1} y = [x, z] = 0$, т. е. эндоморфизм $\mathrm{ad}\, x$ нильпотентен.

Определение 2 не предполагает заранее, что $\mathfrak{G}$ допускает точное нильпотентное линейное представление. Отметим, что у нильпотентной алгебры Ли существуют ненильпотентные линейные представления.

Средством для изучения структуры нильпотентной алгебры Ли будет служить

Теорема 1 (Энгель). *Если θ — нильпотентное представление алгебры Ли $\mathfrak{G}$ в векторном пространстве $V \neq 0$, то существует ненулевой вектор $v \in V$, аннулируемый алгеброй $\mathfrak{G}$.*

Заметим, что, хотя представление θ не предполагается точным, можно свести доказательство к этому случаю, рассмотрев фактор-алгебру $\mathfrak{G}/\mathfrak{N} = \mathfrak{G}'$, где $\mathfrak{N}$ — ядро представления θ, и ее индуцированное представление.

Доказательство.

а) Теорема очевидна, если $\dim \mathfrak{G}' = 1$. Действительно, если эндоморфизм X нильпотентен, то $X^p = 0$ для некоторого $p > 0$, так что $\dim X^p V < \dim V$ [2]). Отсюда следует, что $\dim XV < \dim V$, и поэтому ядро эндоморфизма X отлично от 0. Мы будем доказывать теорему по индукции при следующем индуктивном предположении: *для всякой*

---

[1]) Эквивалентность этого определения данному в примере 6 п. 1 гл. 1 будет установлена в конце этого пункта (следствие 4). — *Прим. перев.*

[2]) Через $X^p V$ обозначено подпространство, образованное векторами $X^p v$, $v \in V$. — *Прим. перев.*

собственной подалгебры $\mathfrak{R}$ *алгебры* $\mathfrak{G}'$ *теорема* 1 *справедлива.*

б) Докажем, что в $\mathfrak{G}'$ существует идеал $\mathfrak{H}$ коразмерности 1. Пусть $\mathfrak{B}$ — собственная подалгебра алгебры $\mathfrak{G}'$ (например, одномерная). Построим подалгебру $\mathfrak{C}$, содержащую $\mathfrak{B}$ в качестве идеала коразмерности 1. Рассмотрим присоединенное представление подалгебры $\mathfrak{B}$ в алгебре $\mathfrak{G}'$. Подпространство $\mathfrak{B}$ инвариантно при этом представлении. В фактор-пространстве $\mathfrak{G}'/\mathfrak{B}$ индуцируется представление ψ алгебры $\mathfrak{B}$. Это представление нильпотентно, и, согласно предположению индукции, в $\mathfrak{G}'/\mathfrak{B}$ существует одномерное подпространство, аннулируемое алгеброй $\mathfrak{B}$. Пусть $\mathfrak{C}$ — полный прообраз этого подпространства при каноническом отображении $\mathfrak{G}'$ на $\mathfrak{G}'/\mathfrak{B}$. Очевидно, что $\dim \mathfrak{C} = \dim \mathfrak{B} + 1$ и что $[\mathfrak{B}, \mathfrak{C}] \subset \mathfrak{B}$. Таким образом, $\mathfrak{C}$ удовлетворяет всем предъявляемым требованиям. Применив аналогичную конструкцию несколько раз ($\dim \mathfrak{G} < \infty$), мы построим идеал $\mathfrak{H}$ коразмерности 1.

в) Алгебра $\mathfrak{G}'$ порождается идеалом $\mathfrak{H}$ и каким-либо элементом $y \in \mathfrak{G}' \setminus \mathfrak{H}$. Пусть $W \subset V$ — подпространство, состоящее из всех векторов, аннулируемых алгеброй $\mathfrak{H}$. По предположению индукции $\dim W > 0$. Подпространство W инвариантно относительно представления θ алгебры $\mathfrak{G}'$. В самом деле, пусть $x \in \mathfrak{G}'$, $v \in W$, $a \in \mathfrak{H}$. Имеем

$$\theta(a)\theta(x)v = \theta(x)\theta(a)v + \theta([a, x])v = 0,$$

так как $[a, x] \in \mathfrak{H}$. Поскольку элемент a произволен, это означает, что вектор $\theta(x)v$ аннулируется алгеброй $\mathfrak{H}$, т. е. содержится в W. Эндоморфизм $\theta(y)$, сохраняя подпространство W и будучи нильпотентным, аннулирует некоторый ненулевой вектор $v_0 \in W$. Вектор v_0 аннулируется алгеброй $\mathfrak{G}$.

Следствие 1. *Центр* $\mathfrak{C}$ *нильпотентной алгебры Ли* $\mathfrak{G}$ *отличен от* 0.

Применим теорему 1 к присоединенному представлению алгебры $\mathfrak{G}$. Элемент $x \in \mathfrak{G}$, аннулируемый алгеброй $\mathfrak{G}$ при этом представлении, содержится в $\mathfrak{C}$, что и доказывает следствие 1.

Так как алгебра $\mathfrak{G}/\mathfrak{C}$ также нильпотентна, то последовательным применением следствия 1 получаем

Следствие 2. *Нильпотентная алгебра Ли может быть получена последовательными центральными расширениями*[1]), *исходя из нульмерной алгебры.*

Пусть θ — нильпотентное представление алгебры Ли $\mathfrak{G}$ в векторном пространстве V. Возьмем подпространство $W_0 \subset V$, образованное векторами, аннулируемыми алгеброй $\mathfrak{G}$. Если $W_0 \neq V$, то положим $V_1 = V/W_0$. В пространстве V_1 индуцируется представление алгебры $\mathfrak{G}$. Возьмем теперь подпространство $W'_1 \subset V_1$, образованное векторами, аннулируемыми алгеброй $\mathfrak{G}$, и пусть W_1 — полный прообраз W'_1 при каноническом отображении V на V_1. Очевидно, что W_1 — инвариантное подпространство. Если $W_1 \neq V$, положим $V_2 = V/W_1$ и в пространстве V_2 возьмем подпространство W'_2, состоящее из всех векторов, аннулируемых алгеброй $\mathfrak{G}$, и т. д. .... Вообще, подпространство W_{i+1} состоит из таких векторов $v \in V$, что $\theta(x)v \in W_i$ для всех $x \in \mathfrak{G}$. Согласно теореме Энгеля, если $W_i \neq V$, то $W_i \neq W_{i+1}$. Так как пространство V конечномерно, то для некоторого p будем иметь $W_p = V$. Для любых $x_0, \ldots, x_p \in \mathfrak{G}$

$$\theta(x_0) \ldots \theta(x_p) W_p \subset \theta(x_0) \ldots \theta(x_{p-1}) W_{p-1} \subset \ldots \subset 0.$$

Мы доказали таким образом

Следствие 3. *Если θ — нильпотентное представление алгебры Ли $\mathfrak{G}$, то существует такое целое число $q > 0$, что произведение любых q операторов $\theta(x)$, $x \in \mathfrak{G}$, равно* 0.

Если в пространстве V выбрать базу, согласованную с возрастающей последовательностью подпространств W_i[2]), то операторы $\theta(x)$ запишутся матрицами $\|X_{ij}\|$, у которых $X_{ij} = 0$ при $i \geqslant j$.

Применим следствие 3 к присоединенному представлению нильпотентной алгебры Ли $\mathfrak{G}$. Пусть q — такое число, что произведение любых q операторов $\operatorname{ad}(x)$, $x \in \mathfrak{G}$, равно 0. Рассмотрим убывающий центральный ряд алгебры $\mathfrak{G}$. Так

---

[1]) Алгебра $\mathfrak{G}$ называется *расширением* алгебры $\mathfrak{G}'$, если задан гомоморфизм $\mathfrak{G}$ на $\mathfrak{G}'$. Расширение называется *центральным*, если ядро этого гомоморфизма содержится в центре алгебры $\mathfrak{G}$. — *Прим. перев.*

[2]) То есть существуют такие $k_0, \ldots, k_p$, что первые k_i векторов базы порождают W_i. — *Прим. перев.*

как $[\mathfrak{G}, \mathfrak{G}_n] = \mathfrak{G}_{n+1}$, то $\mathfrak{G}_{q+1} = 0$. Если, обратно, $\mathfrak{G}_{q+1} = 0$, то $(\mathrm{ad}(x))^q = 0$ для любого $x \in \mathfrak{G}$.

Следствие 4. *Алгебра Ли $\mathfrak{G}$ тогда и только тогда нильпотентна, когда ее убывающий центральный ряд сходится к* 0.

2. Разрешимые алгебры Ли

Определение 3. *Алгебра Ли $\mathfrak{G}$ называется разрешимой, если ее производный ряд $\mathfrak{G}^{(n)}$ сходится к* 0[1].

Определение 3′. *Алгебра Ли $\mathfrak{G}$ называется разрешимой, если существует такая последовательность вложенных друг в друга подалгебр*

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{H}_1 \supset \mathfrak{H}_2 \supset \ldots \supset \mathfrak{H}_m \supset \mathfrak{H}_{m+1} = 0,$$

что $\mathfrak{H}_{k+1}$ — идеал в $\mathfrak{H}_k$ $(1 \leqslant k \leqslant m)$ и фактор-алгебра $\mathfrak{H}_k/\mathfrak{H}_{k+1}$ коммутативна.

Эквивалентность этих двух определений очевидна[2]. Очевидно также, что всякая подалгебра и всякая фактор-алгебра разрешимой алгебры разрешимы[3]. При изучении структуры разрешимых алгебр основную роль играет следующая

Теорема 2 (Ли). *Пусть θ — неприводимое линейное представление разрешимой алгебры Ли $\mathfrak{G}$ в векторном пространстве V над алгебраически замкнутым полем K характеристики* 0[4]. *Тогда* $\dim V = 1$.

---

[1]) См. пример 6 п. 1 гл. 1. Очевидно, что $\mathfrak{G}^{(n)} \subset \mathfrak{G}_n$, поэтому всякая нильпотентная алгебра разрешима. — *Прим. перев.*

[2]) Действительно, фактор-алгебры $\mathfrak{G}^{(k)}/\mathfrak{G}^{(k+1)}$ коммутативны; с другой стороны, $\mathfrak{G}^{(k)} \subset \mathfrak{H}_k$. — *Прим. перев.*

[3]) К этому можно добавить, что если идеал $\mathfrak{H} \subset \mathfrak{G}$ и фактор-алгебра $\mathfrak{G}/\mathfrak{H}$ разрешимы, то и алгебра Ли $\mathfrak{G}$ разрешима. — *Прим. перев.*

[4]) Сама алгебра $\mathfrak{G}$ может быть определена над любым подполем поля K. Однако при доказательстве можно считать, что она определена над K, так как представление θ может быть расширено до представления (в том же пространстве V) алгебры $\mathfrak{G}^K$, получающейся из алгебры $\mathfrak{G}$ расширением основного поля K. — *Прим. перев.*

а) Достаточно показать, что в пространстве V существует *вектор, собственный для всех операторов представления* θ. Для случая $\dim \mathfrak{G} = 1$ это верно, поскольку поле K алгебраически замкнуто. Мы будем доказывать теорему индукцией по размерности алгебры $\mathfrak{G}$, используя идеал $\mathfrak{H} \subset \mathfrak{G}$ коразмерности 1. Такой идеал существует, так как всякое подпространство, содержащее $\mathfrak{G}^{(2)}$, является идеалом, и в качестве $\mathfrak{H}$ можно поэтому взять любую гиперплоскость, содержащую $\mathfrak{G}^{(2)}$ (алгебра $\mathfrak{G}$ разрешима, так что $\mathfrak{G}^{(2)} \neq \mathfrak{G}$).

б) Пусть $y_0 \notin \mathfrak{H}$; тогда y_0 и $\mathfrak{H}$ порождают векторное пространство $\mathfrak{G}$. Положим $Y_0 = \theta(y_0)$, и пусть $v_0 \in V$ — такой ненулевой вектор, существующий по предположению индукции, что $Xv_0 = \lambda(X)v_0$ для всех $X \in \theta(\mathfrak{H})$. При этом λ — линейная форма на $\theta(\mathfrak{H})$. Положим $Y_0^n v_0 = v_n$. Поскольку $\dim V < \infty$, существует такое p, что векторы $v_0, v_1, \ldots, v_p$ линейно независимы, а векторы $v_0, v_1, \ldots, v_{p+1}$ уже линейно зависимы.

Подпространство W, натянутое на векторы $v_0, v_1, \ldots, v_p$, инвариантно относительно Y_0. Докажем индукцией по q, что

$$Xv_q \equiv \lambda(X)v_q \qquad (\operatorname{mod} v_0, v_1, \ldots, v_{q-1}) \qquad (1)$$

для всех $X \in \theta(\mathfrak{H})$. При $q = 0$ это соотношение выполнено по условию. Пусть оно выполнено для некоторого q. Тогда

$$Xv_{q+1} = XY_0v_q =$$
$$= [X, Y_0]v_q + Y_0Xv_q \equiv \lambda(X)v_{q+1} \qquad (\operatorname{mod} v_0, v_1, \ldots, v_q).$$

Таким образом, подпространство W инвариантно относительно Y_0 и $\theta(\mathfrak{H})$, а поэтому и относительно $\theta(\mathfrak{G})$.

в) Для всякого оператора $X \in \theta(\mathfrak{G})$ можно определить его след $\operatorname{Tr}_W(X)$ на инвариантном подпространстве W. При $X \in \theta(\mathfrak{H})$ в силу (1) $\operatorname{Tr}_W(X) = \lambda(X)\dim W$. С другой стороны, $\operatorname{Tr}_W(Z) = 0$ для всех $Z \in \theta(\mathfrak{G}^{(2)}) \subset \theta(\mathfrak{H})$ (след коммутатора равен нулю), следовательно, $\lambda(Z) = 0$, если $Z \in \theta(\mathfrak{G}^{(2)})$. Повторяя вычисление, сделанное в б), и учитывая, что $\lambda([X, Y_0]) = 0$, мы докажем по индукции, что

$$Xv_q = \lambda(X)v_q$$

для всех $X \in \theta(\mathfrak{H})$. В самом деле, при $q=0$ эта формула верна по предположению; пусть она верна для некоторого q, тогда

$$Xv_{q+1} = XY_0v_q = [X, Y_0]v_q + Y_0Xv_q =$$
$$= \lambda([X, Y_0])v_q + Y_0\lambda(X)v_q = \lambda(X)v_{q+1}.$$

Таким образом, все векторы пространства W являются собственными для операторов из $\theta(\mathfrak{H})$. Существует вектор $w \in W$, собственный для Y_0. Этот вектор w будет, очевидно, собственным для всех операторов из $\theta(\mathfrak{G})$. Теорема доказана.

Следствие. *Алгебра Ли $\mathfrak{G}$ тогда и только тогда разрешима, когда ее производная алгебра $\mathfrak{G}^{(2)}$ нильпотентна.* (Напомним, что *основное поле K удовлетворяет условиям теоремы* 2[1].)

Легко видеть, что $\mathfrak{G}^{(k)} \subset (\mathfrak{G}^{(2)})_{k-1}$ (см. пример 6 п. 1 гл. 1), поэтому из нильпотентности алгебры $\mathfrak{G}^{(2)}$ вытекает разрешимость алгебры $\mathfrak{G}$.

Пусть теперь алгебра $\mathfrak{G}$ разрешима. Если θ — произвольное линейное представление алгебры $\mathfrak{G}$, то из доказательства теоремы 2 следует, что подпространство W аннулируется операторами из $\theta(\mathfrak{G}^{(2)})$. Поступая, как при доказательстве следствия 3 теоремы 1, т. е. беря фактор-пространство V/W и в нем подпространство, аннулируемое всеми операторами из $\theta(\mathfrak{G}^{(2)})$, и т. д., мы докажем, что ограничение представления θ на $\mathfrak{G}^{(2)}$ нильпотентно. Если применить доказанное к присоединенному представлению алгебры $\mathfrak{G}$, то получится, в частности, что алгебра $\mathfrak{G}^{(2)}$ нильпотентна.

Структура матриц представления разрешимой алгебры.

Основное поле K по-прежнему будем предполагать удовлетворяющим условиям теоремы 2. Из доказательства теоремы 2 видно, что на инвариантном подпространстве W операторы $X \in \theta(\mathfrak{G})$ записываются в базисе $(v_0, v_1, \ldots, v_q)$ треугольными матрицами $\|X_{ij}\|$, $X_{ij}=0$ при $i > j$. Переходя

[1]) Предположение об алгебраической замкнутости поля K не является здесь существенным (ср. примечание 4 на стр. 27). — *Прим. перев.*

к фактор-пространству V/W и т. д., мы получим, что во всем пространстве V можно выбрать базис, в котором операторы $X \in \theta(\mathfrak{G})$ запишутся треугольными матрицами $\|X_{ij}\|$ с $X_{ij}=0$ при $i > j$.

3. Приложение. Глобальное доказательство теоремы 2

Пусть G — связная топологическая группа. Обозначим через DG ее *производную группу*, т. е. подгруппу, порожденную коммутаторами $xyx^{-1}y^{-1}$, $x, y \in G$. Докажем, что *группа DG связна*. Прежде всего множество S коммутаторов $xyx^{-1}y^{-1}$ ($x, y \in G$) связно как образ связного множества $G \times G$ при непрерывном отображении $(x, y) \to xyx^{-1}y^{-1}$ прямого произведения $G \times G$ в G. Далее, множество S_n всевозможных произведений n элементов из S связно как образ прямого произведения n экземпляров множества S при непрерывном отображении $(x_1, \ldots, x_n) \to x_1 \ldots x_n$ прямого произведения $\underbrace{G \times \ldots \times G}_{n}$ в G. Группа DG является объединением всех S_n $(1 \leqslant n < \infty)$. Так как $e \in S_n$ при всяком n, то группа DG связна[1]).

Положим $D^2G = D(DG)$ и вообще $D^pG = D(D^{p-1}G)$. Группа G называется *разрешимой*, если для некоторого $p > 0$ группа D^pG сводится к единице[2]). Наименьшее число p, обладающее этим свойством, называется *высотой* группы G.

Докажем, что *всякое неприводимое линейное представление θ связной разрешимой группы G в конечномерном комплексном векторном пространстве V одномерно*. Доказательство проведем индукцией по высоте p группы G. При $p = 1$ группа G коммутативна и наше утверждение очевидно. Пусть оно доказано для групп высоты $< p$ и пусть G — разрешимая группа высоты p. Группа DG имеет высоту $p - 1$, и по предположению индукции существует

---

[1]) Если G — группа Ли, то DG — аналитическая (но не обязательно замкнутая) подгруппа в G, алгебра Ли которой совпадает с производной алгеброй $\mathfrak{G}^{(2)}$ алгебры Ли $\mathfrak{G}$ группы G. См., например, [67], т. I, гл. IV, § XII. — *Прим. перев.*

[2]) В силу предыдущего примечания группа Ли тогда и только тогда разрешима, когда ее алгебра Ли разрешима. Поэтому в том случае, когда G — группа Ли, доказываемое дальше утверждение в точности соответствует теореме 2. — *Прим. перев.*

такой вектор $v \in V$, что $\theta(h)v = \chi(h)v$ для всех $h \in DG$. Здесь χ — мультипликативная функция на DG, иными словами, характер группы DG. Положим $V_\chi = \{v \in V;\ \theta(h)v = \chi(h)v$ для всех $h \in DG\}$. Если $v \in V_\chi$, $g \in G$, $h \in DG$, то $\theta(h)\theta(g)v = \theta(g)\theta(g^{-1})\theta(h)\theta(g)v = \theta(g)\theta(g^{-1}hg)v = \chi(g^{-1}hg)\theta(g)v$. Введем обозначение $\chi_g(h) = \chi(g^{-1}hg)$. Тогда $\theta(g)V_\chi \subset V_{\chi_g}$. Так как в данной ситуации нам может встретиться лишь конечное число характеров группы DG [1]), χ_g непрерывно зависит от g, а группа G связна, то $\chi_g = \chi$ при любом $g \in G$. Следовательно, подпространство V_χ инвариантно относительно $\theta(G)$ и в силу неприводимости θ совпадает с V. Операторы из $\theta(DG)$ сводятся к умножению на числа. С другой стороны, эти операторы должны иметь определитель 1, так как

$$\det\theta(xyx^{-1}y^{-1}) = \det\theta(x)\det\theta(y)(\det\theta(x))^{-1}(\det\theta(y))^{-1} = 1.$$

Имеем $\det\theta(h) = (\chi(h))^n = 1$ для любого $h \in DG$, где $n = \dim G$. Так как $\chi(h)$ непрерывно зависит от h, а группа DG связна, то $\chi(h) \equiv 1$. Это означает, что DG содержится в ядре представления θ, которое, таким образом, сводится к представлению коммутативной группы G/DG и потому одномерно.

---

[1]) Поскольку пространство V конечномерно. — *Прим. перев.*

Глава

КОГОМОЛОГИИ АЛГЕБР ЛИ

П. Картье

1. Предварительные сведения о комплексах

Согласно общим принципам (см. [31]*), для построения теории гомологий и когомологий алгебры Ли $\mathfrak{G}$ над кольцом K необходимо задаться свободным ацикличным комплексом над обертывающей алгеброй U алгебры $\mathfrak{G}$. Этот путь не совпадает с историческим подходом Хохшильда, Шевалле и Эйленберга, которые исходили из топологии групп Ли, однако он лучше всего приспособлен для наших целей.

Напомним определение комплекса. *Комплексом* C над кольцом K называется унитарный K-модуль C со следующими свойствами:

1) модуль C разложен в прямую сумму подмодулей C_p ($C_p = 0$ при $p < 0$);

2) на модуле C задан линейный оператор d, для которого $dC_p \subset C_{p-1}$ и $d^2 = 0$;

3) задан проектор ε модуля C_0 на его одномерное подпространство, причем $\varepsilon d = 0$.

Оператор ε продолжим на модуль C, положив $\varepsilon C_p = 0$ при $p > 0$. Очевидно, что $d\varepsilon = 0$.

Элементы $a \in C$, для которых $da = 0$, называются *циклами*, элементы вида $a = db$ — *границами*. Всякая граница есть цикл, поскольку $d^2 = 0$. Если все циклы, аннулируемые оператором ε, являются границами, то комплекс C называется *ацикличным*. Для доказательства ацикличности комплекса C проще всего бывает построить *оператор «гомотопии»* k, для которого $kC_p \subset C_{p+1}$ и $kd + dk = 1 - \varepsilon$. Если такой оператор существует и a — такой элемент из C, что $\varepsilon a = da = 0$, то $a = d(ka)$, откуда и следует ацикличность комплекса C.

Пусть C' и C'' — два комплекса (все относящееся к C' будет отмечаться одним штрихом, к C'' — двумя штрихами).

Рассмотрим модуль $C = C' \otimes C''$ и положим в нем $d = d' \otimes 1 + \alpha \otimes d''$, $C_p = \sum_r C'_r \otimes C''_{p-r}$, $\varepsilon = \varepsilon' \otimes \varepsilon''$, где $\alpha : \sum c_p \to \sum (-1)^p c_p$, $(c_p \in C'_p)$. Нетрудно видеть, что в результате C становится комплексом. Если в комплексах C' и C'' существуют операторы гомотопии, то оператор $k = k' \otimes 1 + \varepsilon' \otimes k''$ будет оператором гомотопии в C, так как

$$\begin{aligned}kd + dk &= (k'd' + d'k') \otimes 1 + (k'\alpha + \alpha k') \otimes d'' + \\ &+ (d'\varepsilon' + \varepsilon'd') \otimes k'' + \alpha\varepsilon' \otimes d''k'' + \varepsilon'\alpha \otimes k''d'' = \\ &= (1 - \varepsilon') \otimes 1 + \varepsilon' \otimes (1 - \varepsilon'') = 1 \otimes 1 - \varepsilon' \otimes \varepsilon'' = 1 - \varepsilon.\end{aligned}$$

Лемма 1. *Пусть абелева группа A снабжена эндоморфизмом d, для которого $d^2 = 0$, и B — подгруппа, инвариантная относительно d. Эндоморфизм d индуцирует тогда некоторый эндоморфизм $\bar{d}$ фактор-группы A/B. Если группы B и A/B ацикличны (относительно операторов d и $\bar{d}$ соответственно), то и группа A ациклична.* (Здесь считается $\varepsilon = 0$ [1]).)

Для всякого элемента $a \in A$ пусть $\bar{a}$ обозначает класс смежности по подгруппе B, содержащий a. Пусть $da = 0$. Тогда $\overline{da} = \bar{d}\bar{a} = 0$; следовательно, существует такой элемент $b \in A$, что $\bar{a} = \bar{d}\bar{b}$, т. е. $a - db \in B$. Элемент $a - db$ является циклом в B, поэтому $a - db = dc$ для некоторого $c \in B$. Отсюда получаем, что $a = d(b + c)$.

Комплекс C называется *U-комплексом*, если он снабжен структурой левого U-модуля [2]) и при этом подмодули C_p являются также U-подмодулями и оператор d U-линеен. U-комплекс C называется *свободным*, если подмодули C_p обладают базой над U.

Комплекс, который мы вскоре построим, будет обладать еще одной дополнительной структурой, а именно он будет алгеброй над K. При этом умножение будет отображать

---

[1]) Имея в виду дальнейшее применение этой леммы, лучше считать, что ε — произвольный эндоморфизм, лишь бы $\varepsilon B \subset B$ и $\varepsilon d = 0$. Доказательство при этом изменится лишь незначительно. — *Прим. перев.*

[2]) Структура U-модуля включает в себя структуру K-модуля ($U_0 = K$), и эта последняя должна совпадать с уже имеющейся на C структурой K-модуля. — *Прим. перев.*

$C_p \times C_q$ в C_{p+q}, а оператор d будет антидифференцированием, т. е.

$$d(cc') = dc \cdot c' + \alpha(c) \cdot dc' \qquad (c, c' \in C). \qquad (1)$$

Квадрат антидифференцирования является дифференцированием, поэтому для выполнения равенства $d^2 = 0$ достаточно, чтобы оператор d^2 обращался в 0 на системе образующих алгебры C.

Лемма 2. *Пусть S — система образующих алгебры C. Линейный оператор d является антидифференцированием, если соотношение* (1) *выполняется для всех $c \in C$ и $c' \in S$.*

Множество T элементов c', для которых соотношение (1) выполняется при любом c, является K-модулем. Кроме того, оно замкнуто относительно умножения. Действительно, при $x, y \in T$ имеем

$$\begin{aligned} d(cxy) = d((cx)y) = d(cx) \cdot y + \alpha(cx) \cdot dy = \\ = dc \cdot x \cdot y + \alpha(c) \cdot dx \cdot y + \alpha(c)\alpha(x) dy = \\ = dc \cdot (xy) + \alpha(c) \cdot d(xy), \end{aligned}$$

следовательно, $xy \in T$. Так как, с другой стороны, $T \supset S$, то $T = C$.

Заметим, что соотношение (1) верно при $c' = 1$, если только $d(1) = 0$.

2. Построение основного комплекса

Построение комплекса C будет проведено в два этапа: сначала будет построено умножение, затем оператор d.

Пусть A — некоторая алгебра над K с единицей и $x \to \theta(x)$ — гомоморфизм алгебры Ли $\mathfrak{G}$ в алгебру Ли дифференцирований алгебры A. Положим $C = U \otimes A$ и условимся отождествлять u и $u \otimes 1$, a и $1 \otimes a$ $(u \in U,\ a \in A)$.

Лемма 3. *В модуле C можно ввести такое умножение, что $u \otimes a = ua$ и $\theta(x) \cdot a = xa - ax$ для всех $u \in U$, $a \in A$, $x \in \mathfrak{G}$.*

Положив $\psi(x)u = ux$ и $\psi(x)a = -\theta(x)a$, мы получим два линейных антипредставления[1]) алгебры $\mathfrak{G}$ в модулях U и A соответственно. Образовав их тензорное произведение

$$\varphi(x)(u \otimes a) = ux \otimes a - u \otimes \theta(x)a, \tag{2}$$

получим линейное антипредставление φ алгебры $\mathfrak{G}$ в модуле $C = U \otimes A$. Его можно продолжить в правое линейное представление алгебры U в модуле C, положив $\varphi(x_1 \ldots x_n) = \varphi(x_n) \ldots \varphi(x_1)$. При этом $\varphi(uv) = \varphi(v)\varphi(u)$. Определим теперь следующим образом правое линейное представление φ алгебры A в модуле C:

$$\varphi(a)(u \otimes b) = u \otimes ba. \tag{3}$$

Наконец, положим

$$\varphi(u \otimes a) = \varphi(a)\varphi(u) \tag{4}$$

и распространим отображение φ по линейности на все элементы модуля C.

Мы сейчас докажем, что $\varphi(c)(1 \otimes 1) = c$ и, следовательно, отображение $c \to \varphi(c)$ взаимно однозначно и что операторы $\varphi(c)$, $c \in C$, образуют алгебру. Это позволит ввести в модуль C (однозначно определенное) умножение, при котором отображение φ является правым линейным представлением алгебры C. Мы также докажем, что $\varphi(\theta(x)a) = \varphi(a)\varphi(x) - \varphi(x)\varphi(a)$, откуда в соединении с (4) будет вытекать, что введенное в модуле C умножение удовлетворяет условиям леммы.

Для $c = u \otimes a = (x_1 \ldots x_n) \otimes a$ имеем

$$\varphi(c)(1 \otimes 1) = \varphi(a)\varphi(x_n) \ldots \varphi(x_1)(1 \otimes 1) = \\ = (x_1 \ldots x_n) \otimes a = c.$$

Далее, пусть $t = [\varphi(a), \varphi(x)]$. Тогда

$$t(u \otimes b) = \varphi(a)(ux \otimes b - u \otimes \theta(x)b) - \\ - \varphi(x)(u \otimes ba) = ux \otimes ba - u \otimes (\theta(x)b)a - \\ - ux \otimes ba + u \otimes \theta(x)(ba) = u \otimes b(\theta(x)a),$$

откуда $t = \varphi(\theta(x)a)$. Наконец, для доказательства того, что операторы $\varphi(c)$, $c \in C$, образуют алгебру, достаточно

[1]) Линейным антипредставлением алгебры Ли $\mathfrak{G}$ в модуле M называется линейное отображение $\psi: \mathfrak{G} \to \mathfrak{A}(M)$, для которого $\psi([x, y]) = -[\psi(x), \psi(y)]$ при всех $x, y \in \mathfrak{G}$. — *Прим. ред.*

показать, как видно из формулы (4), что множество $\varphi(C)$ замкнуто относительно умножения слева на операторы вида $\varphi(a)$ и $\varphi(u)$, где $a \in A$, $u \in U$. Более того, достаточно при этом рассматривать не все операторы $\varphi(u)$, $u \in U$, а лишь операторы $\varphi(x)$, $x \in \mathfrak{G}$. Действительно, эти последние операторы порождают $\varphi(U)$, так как элементы $x \in \mathfrak{G}$ порождают U, а отображение φ — правое линейное представление алгебры U. Имеем

$$\varphi(a)\varphi(u \otimes b) = \varphi(a)\varphi(b)\varphi(u) = \varphi(ba)\varphi(u) \in \varphi(C),$$
$$\varphi(x)\varphi(u \otimes b) = \varphi(x)\varphi(b)\varphi(u) = \varphi(b)\varphi(x)\varphi(u) -$$
$$- \varphi(\theta(x)b)\varphi(u) = \varphi(b)\varphi(ux) - \varphi(\theta(x)b)\varphi(u) \in \varphi(C).$$

Осталось сконструировать оператор d.

Лемма 4. *Пусть Λ — внешняя алгебра над модулем $\mathfrak{G}$, B — ассоциативная алгебра, содержащая Λ в качестве подалгебры и имеющая ту же единицу. Для того чтобы линейное отображение h модуля $\mathfrak{G} = \Lambda'$ в алгебру B можно было продолжить в антидифференцирование алгебры Λ в алгебру B, необходимо и достаточно, чтобы всякий элемент $x \in \mathfrak{G}$ был перестановочен с $h(x)$.*

Условие необходимо, так как $x^2 = 0$ в алгебре Λ и для всякого антидифференцирования d должно быть $d(x^2) = dx \cdot x - x \cdot dx = 0$. Докажем его достаточность. Если всякий элемент $x \in \mathfrak{G}$ коммутирует с $h(x)$, то полилинейное отображение прямого произведения $\mathfrak{G}^n$ в алгебру B, определенное формулой

$$h(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} x_1 \ldots x_{i-1} h(x_i) x_{i+1} \ldots x_n, \tag{5}$$

кососимметрично. Действительно, предположим, что $x_j = x_{j+1}$ [1]. Так как $x_j^2 = 0$ в алгебре $\Lambda \subset B$, то в правой

[1] Для доказательства кососимметричности полилинейной функции $h(x_1, \ldots, x_n)$ достаточно доказать ее кососимметричность по каждой паре соседних переменных, а для этого в свою очередь достаточно показать, что $h = 0$ при совпадении значений двух соседних переменных. Последнее следует из очевидного тождества $h(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i + x_{i+1}, x_i + x_{i+1}, x_{i+2}, \ldots, x_n) = h(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i, x_i, x_{i+2}, \ldots, x_n) + h(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, x_{i+1}, x_{i+2}, \ldots, x_n) + h(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, \ldots, x_n) + h(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, x_i, x_{i+2}, \ldots, x_n)$. — *Прим. ред.*

части (5) обращаются в 0 все слагаемые с $i \neq j,\ j+1$. Оставшиеся два слагаемых дают

$$(-1)^{j-1} a \cdot h(x_j)\, x_j b + (-1)^j a x_j \cdot h(x_j)\, b = \\ = (-1)^{j-1} a\, [h(x_j),\ x_j]\, b = 0.$$

Следовательно, существует такое линейное отображение d алгебры Λ в алгебру B, что

$$d(x_1 \ldots x_n) = h(x_1, \ldots, x_n)$$

и $d(1) = 0$. Наконец, при $a = x_1 \ldots x_n$, $x = x_{n+1}$ имеем

$$d(ax) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} x_1 \ldots x_{i-1} h(x_i)\, x_{i+1} \ldots x_n x + \\ + (-1)^n x_1 \ldots x_n h(x_{n+1}) = da \cdot x + \alpha(a) \cdot dx,$$

откуда, согласно лемме 2, вытекает, что d — антидифференцирование. Лемма доказана.

Для построения основного комплекса C возьмем в качестве алгебры A, фигурировавшей в лемме 3, алгебру Λ и в качестве $\theta(x)$, $x \in \mathfrak{G}$, дифференцирование алгебры Λ, продолжающее оператор $\operatorname{ad}(x)$, и снабдим модуль $C = U \otimes \Lambda$ умножением указанным там способом. Во избежание путаницы элемент $x \in \mathfrak{G}$, рассматриваемый как элемент алгебры U, будем обозначать через $\tilde{x}$, а рассматриваемый как элемент алгебры Λ — просто через x. Имеют место следующие соотношения:

$$\begin{aligned} &\tilde{x}\tilde{y} - \tilde{y}\tilde{x} = \widetilde{[x,\ y]},\quad \tilde{x} y - y\tilde{x} = [x,\ y], \\ &xy + yx = 0,\quad x^2 = 0. \end{aligned} \tag{6}$$

Элементы x и $\tilde{x}$ порождают алгебру C. Положим $C_p = U \otimes \Lambda^p$ и $h(x) = \tilde{x}$ $(x \in \mathfrak{G})$. Из второго соотношения (6) и леммы 4 следует, что существует антидифференцирование d алгебры Λ в алгебру C, для которого $dx = \tilde{x}$ при всех $x \in \mathfrak{G}$. Продолжим отображение d на алгебру C по формуле $d(u \otimes a) = u \cdot da$. Тогда

$$d\tilde{x} = d(\tilde{x} \otimes 1) = 0,$$

$$d(uax) - d(ua) \cdot x - \alpha(ua) \cdot dx = \\ = u\,(d(ax) - da \cdot x - \alpha(a) \cdot dx) = 0$$

$$d(ua\tilde{x}) - d(ua)\, \tilde{x} - \alpha(ua) \cdot d\tilde{x} = u\,(d(a\tilde{x}) - da \cdot \tilde{x}).$$

Если мы докажем, что $d(a\tilde{x}) - da \cdot \tilde{x} = 0$, то из этих соотношений в силу леммы 2 будет следовать, что отображение d — антидифференцирование алгебры C. Отображение $\theta(x): c \to \tilde{x}c - c\tilde{x}$ есть дифференцирование алгебры C, продолжающее дифференцирование $\theta(x)$ алгебры Λ. Далее, отображение $d\theta(x) - \theta(x)d$ является антидифференцированием алгебры Λ в алгебру C. Оно обращается в 0 на всех элементах $y \in \Lambda^1$

$$d(\theta(x)y) - \theta(x)dy = d([x, y]) - (\tilde{x}\tilde{y} - \tilde{y}\tilde{x}) =$$
$$= \widetilde{[x, y]} - (\tilde{x}\tilde{y} - \tilde{y}\tilde{x}) = 0.$$

Следовательно, $d(\theta(x)a) = \theta(x)da$ при всяком $a \in \Lambda$. Так как $d(\tilde{x}a) = \tilde{x} \cdot da$ и $a\tilde{x} = \tilde{x}a - \theta(x)a$, то $d(a\tilde{x}) = da \cdot \tilde{x}$. Таким образом, d — антидифференцирование алгебры C. При этом $dx = \tilde{x}$ и $d\tilde{x} = 0$, так что d^2 обращается в нуль на образующих x и $\tilde{x}$ алгебры C, а потому и на всей алгебре C.

Алгебра C естественным образом снабжается структурой левого U-модуля: $u(v \otimes a) = uv \otimes a$. При этом подмодули C_p являются также U-подмодулями и антидифференцирование d (по определению) U-линейно. Наконец, в качестве отображения ε возьмем естественное проектирование $C_0 = U$ на $U_0 = K$ (см. гл. 1).

3. Свойства основного комплекса

Начиная с этого момента модуль $\mathfrak{G}$ предполагается имеющим базу над K.

При этом условии очевидно, что модуль Λ^p обладает базой над K; эта база является базой U-модуля $C_p = U \otimes \Lambda^p$. Таким образом, *комплекс C свободен.*

Докажем ацикличность комплекса C. Для этого рассмотрим фильтрацию модуля C, определенную подмодулями $C^p = \sum_r U_{p-r} \otimes \Lambda^r$ (эта сумма — прямая, поскольку сумма $\Lambda = \sum \Lambda^p$ — прямая). Имеем $C^p \subset C^{p+1}$ и, по теореме Пуанкаре — Биркгофа — Витта, $C^p/C^{p-1} = \sum_r S_{p-r} \otimes \Lambda^r$ (S—симметрическая алгебра над $\mathfrak{G}$).

Каждый элемент из C^p представляется в виде суммы произведений $q \leqslant p$ образующих (x и $\tilde{x}$). Поэтому для доказательства того, что рассматриваемая фильтрация совместима со структурой алгебры, достаточно показать, что $C^p x \subset C^{p+1}$ и $C^p \tilde{x} \subset C^{p+1}$. Первое включение сразу вытекает из того, что $\Lambda^r x \subset \Lambda^{r+1}$. Пусть теперь $u \in U_{p-r}$, $a \in \Lambda^r$; тогда

$$(u \otimes a) \tilde{x} = u\tilde{x} \otimes a - u \otimes \theta(x) a \in \\ \in U_{p-r+1} \otimes \Lambda^r + U_{p-r} \otimes \Lambda^r \subset C^{p+1},$$

что доказывает второе включение.

Обозначим через $\bar{C}$ градуированную алгебру, соответствующую фильтрованной алгебре C. Из леммы 1 нетрудно вывести, что для доказательства ацикличности комплекса C достаточно доказать ацикличность $\bar{C}$[1]. Алгебра $\bar{C}$ порождается образами x' и x'' элементов x и $\tilde{x}$ соответственно при каноническом отображении C^1 на $\bar{C}^1 = C^1/C^0$. Из соотношений (6) получается, что элементы x'' коммутируют между собой и с элементами x' и что $x'^2 = 0$. Следовательно, алгебра $\bar{C}$ изоморфна фактор-алгебре алгебры $S \otimes \Lambda$; но, с другой стороны, выше было показано, что $C^p/C^{p-1} = \sum\limits_r S_{p-r} \otimes \Lambda^r$, поэтому $\bar{C} = S \otimes \Lambda$.

Итак, достаточно рассмотреть случай, когда алгебра $\mathfrak{G}$ коммутативна. Пусть в этом случае $(x_\iota)_{\iota \in I}$ — база модуля $\mathfrak{G}$. Для всякого конечного подмножества $F \subset I$ пусть C_F — подалгебра алгебры C, порожденная элементами x'_ι, x''_ι при $\iota \in F$. Так как $dx'_\iota = x''_\iota$, $dx''_\iota = 0$, то подалгебра C_F инвариантна относительно отображения d. Алгебра C является объединением подалгебр C_F при всевозможных F, поэтому достаточно доказать ацикличность всех C_F. Далее, комплекс C_F является тензорным произведением комплексов вида $C_{\{\iota\}}$, так что достаточно построить оператор гомотопии в основном комплексе для того случая, когда база модуля $\mathfrak{G}$ состоит из одного-единственного элемента x_0. База модуля C состоит

---

[1]) Легко видеть, что $dC^p \subset C^p$. Модуль $\bar{C}$ снабжается индуцированным эндоморфизмом $\bar{d}$, для которого $\bar{d}\bar{C}^p \subset \bar{C}^p$ $(\bar{C}^p = C^p/C^{p-1})$, а также индуцированным эндоморфизмом $\bar{\epsilon}$, равным 0 на $\bar{C}^p$ при $p > 0$ и 1 на $\bar{C}^0 = C^0 = K$. — *Прим. перев.*

тогда из следующих элементов:

$$x_0''^n = u_n, \quad x_0' x_0''^n = v_n \quad (n \geqslant 0).$$

При этом $du_n = 0$, $dv_n = u_{n+1}$,

$$\varepsilon u_n = \begin{cases} 0, & n > 0 \\ u_0, & n = 0. \end{cases}$$

Положим $ku_n = \begin{cases} v_{n-1}, & n > 0 \\ 0, & n = 0 \end{cases}$ и $kv_n = 0$.

Легко видеть, что определенный таким образом оператор k является оператором гомотопии.

Таким образом, доказано, что в любом случае *основной комплекс C ацикличен.*

4. Определение когомологий алгебр Ли

У нас теперь есть все необходимое для определения когомологий. Пусть M — некоторый унитарный U-модуль. Обозначим через $C^p(\mathfrak{G}, M)$ K-модуль, образованный U-линейными отображениями модуля C_p в модуль M, которые называются также *p-мерными коцепями со значениями в M.* Поскольку $C_p = U \otimes \Lambda^p$, задание такой p-мерной коцепи равносильно заданию K-линейного отображения модуля Λ^p в M, или, что то же, p-линейной кососимметрической функции на $\mathfrak{G}$ со значениями в M. *Кограницей* p-мерной коцепи $f : C_p \to M$ называется $(p+1)$-мерная коцепь

$$\delta f = f \circ d : C_{p+1} \to M.$$

Коциклы и группы когомологий определяются далее обычным способом; *p-мерная группа когомологий $H^p(\mathfrak{G}, M)$ алгебры Ли $\mathfrak{G}$ со значениями в модуле M* есть фактор-группа группы $Z^p(\mathfrak{G}, M)$ p-мерных коциклов по подгруппе $B^p(\mathfrak{G}, M)$ p-мерных кограниц [1]).

Всякому U-линейному отображению φ модуля M в какой-либо другой U-модуль N соответствует гомоморфизм модуля $C^p(\mathfrak{G}, M)$ в модуль $C^p(\mathfrak{G}, N)$, перестановочный с кограничным оператором δ и индуцирующий поэтому гомоморфизм

---

[1]) Группа $H^p(\mathfrak{G}, M)$ снабжается естественным образом также структурой K-модуля. — *Прим. перев.*

$\underset{p}{\varphi_*}$ группы $H^p(\mathfrak{G}, M)$ в группу $H^p(\mathfrak{G}, N)$. Если φ — тождественное отображение модуля M на себя, то $\underset{p}{\varphi_*}$ — тождественное отображение группы $H^p(\mathfrak{G}, M)$ на себя. Для двух гомоморфизмов $\varphi: M \to N$ и $\psi: L \to M$ имеет место соотношение $\underset{p}{(\varphi \circ \psi)_*} = \underset{p}{\varphi_*} \circ \underset{p}{\psi_*}$. Если M — подмодуль модуля N, то группа $C^p(\mathfrak{G}, M)$ естественным образом отождествляется с подгруппой группы $C^p(\mathfrak{G}, N)$, а группа $C^p(\mathfrak{G}, N/M)$ — с фактор-группой $C^p(\mathfrak{G}, N)/C^p(\mathfrak{G}, M)$. В этой ситуации возникает связывающий гомоморфизм $\partial: H^p(\mathfrak{G}, N/M) \to$ $\to H^{p+1}(\mathfrak{G}, M)$ [1]) и точная когомологическая последовательность [2])

$$0 \to H^0(\mathfrak{G}, M) \to H^0(\mathfrak{G}, N) \to H^0(\mathfrak{G}, N/M) \xrightarrow{\partial} H^1(\mathfrak{G}, M) \to \ldots$$

В заключение найдем явный вид кограничного оператора δ в том случае, когда коцепь $f \in C^{p-1}(\mathfrak{G}, M)$ задана как линейная функция на Λ^{p-1} со значениями в M. Обозначая $g = \delta f$, имеем для всякого $a = x_1 \ldots x_p \in \Lambda^p$

$$g(x_1 \ldots x_p) = g(a) = f(da),$$

$$da = \sum_{i=1}^{p} (-1)^{i-1} x_1 \ldots x_{i-1} \tilde{x}_i x_{i+1} \ldots x_p =$$

$$= \sum_{i=1}^{p} (-1)^{i-1} [\tilde{x}_i x_1 \ldots \hat{x}_i \ldots x_p -$$

$$- \theta(x_i)(x_1 \ldots x_{i-1}) x_{i+1} \ldots x_p]. \text{ [3])}$$

Далее,

$$\theta(x_i)(x_1 \ldots x_{i-1}) = \sum_{j<i} x_1 \ldots [x_i, x_j] \ldots x_{i-1},$$

---

[1]) Связывающий гомоморфизм ∂ определяется следующим образом. Пусть $\overset{*}{f} \in H^p(\mathfrak{G}, N/M)$ и $f \in Z^p(\mathfrak{G}, N/M)$ — какой-нибудь представитель класса когомологий $\overset{*}{f}$. Возьмем такой элемент $g \in C^p(\mathfrak{G}, N)$, что $f = \pi g$, где π — естественная проекция N на N/M. Тогда $\delta g \in Z^{p+1}(\mathfrak{G}, M)$. Класс когомологий $\overset{*}{h} \in H^{p+1}(\mathfrak{G}, M)$, содержащий δg, не зависит от выбора f и g. По определению, $\partial \overset{*}{f} = \overset{*}{h}$. — *Прим. перев.*

[2]) Последовательность $\ldots \to M_i \xrightarrow{\varphi_i} M_{i+1} \xrightarrow{\varphi_{i+1}} M_{i+2} \to \ldots$ модулей M_i и гомоморфизмов φ_i называется точной, если при каждом i образ гомоморфизма φ_i совпадает с ядром гомоморфизма φ_{i+1}. — *Прим. ред.*

[3]) Знак ^ над буквой означает, что в произведении следует пропустить соответствующий множитель.

откуда

$$da = \sum_{i=1}^{p} (-1)^{i-1} \tilde{x}_i x_1 \ldots \hat{x}_i \ldots x_p -$$
$$- \sum_{j<i} (-1)^{i+j} [x_i, x_j] x_1 \ldots \hat{x}_j \ldots \hat{x}_i \ldots x_p.$$

Следовательно,

$$g(x_1 \ldots x_p) = \sum (-1)^{i-1} x_i f(x_1 \ldots \hat{x}_i \ldots x_p) -$$
$$- \sum_{j<i} (-1)^{i+j} f([x_i, x_j] x_1 \ldots \hat{x}_j \ldots \hat{x}_i \ldots x_p). \quad (7)$$

В этой формуле мы узнаем обычное определение кограничного оператора.[1])

5. Действия над линейными представлениями. Оператор Казимира

Напомним один способ построения новых линейных представлений алгебры Ли $\mathfrak{G}$ по заданной системе представлений.

Лемма 5. *Пусть M — K-модуль, θ_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ — линейные представления алгебры Ли $\mathfrak{G}$ в модуле M, обладающие тем свойством, что $\theta_i(\mathfrak{G})$ коммутирует с $\theta_j(\mathfrak{G})$ при $i \neq j$. Тогда отображение $x \to \theta(x) = \sum_{i=1}^{n} \theta_i(x)$ является линейным представлением алгебры $\mathfrak{G}$ в модуле M.*

Очевидно, что отображение θ линейно. Далее,

$$[\theta(x), \theta(y)] = \sum_{i,j} [\theta_i(x), \theta_j(y)] = \sum_i [\theta_i(x), \theta_i(y)]$$

---

[1]) В случае, когда $\mathfrak{G}$ — алгебра Ли группы Ли G, а M — векторное пространство, структура левого U-модуля в котором индуцирована линейным представлением группы G, коцепи со значением в M можно интерпретировать как левоинвариантные внешние дифференциальные формы на группе G с коэффициентами из M. При этом формула (7), как нетрудно показать, определяет как раз значение дифференциала формы f в точке e. Таким образом, при рассматриваемой интерпретации кограничному оператору δ соответствует обычное дифференцирование внешних дифференциальных форм. — *Прим. перев.*

(члены с $i \neq j$ обращаются в 0, согласно условию леммы). Так как θ_i — представления, $[\theta_i(x), \theta_i(y)] = \theta_i([x, y])$. Окончательно получаем $[\theta(x), \theta(y)] = \sum_i \theta_i([x, y]) = \theta([x, y])$, что и требовалось доказать.

Применим эту лемму к случаю, когда заданы линейные представления θ_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ алгебры Ли $\mathfrak{G}$ в модулях M_i, для построения представления θ алгебры $\mathfrak{G}$ в K-модуле $M_1 \otimes \ldots \otimes M_n$. Будем считать, что представление θ_i действует в модуле $M_1 \otimes \ldots \otimes M_n$ на i-й множитель, оставляя остальные неизменными:

$$\theta_i(x)(\bigotimes_k m_k) = \bigotimes_k n_k, \text{ где } n_k = m_k \text{ при } k \neq i \text{ и } n_i = \theta_i(x) m_i.$$

Очевидно, что при этом $\theta_i(x)\theta_j(y) = \theta_j(y)\theta_i(x)$, если $i \neq j$, что позволяет применить лемму 5 и определить по формуле $\theta(x) = \sum_i \theta_i(x)$ линейное представление θ алгебры $\mathfrak{G}$ в модуле $\bigotimes_k M_k$. В явном виде это представление задается формулой

$$\theta(x)(m_1 \otimes \ldots \otimes m_n) = \sum_{i=1}^{n} m_1 \otimes \ldots \otimes \theta_i(x) m_i \otimes \ldots \otimes m_n,$$

т. е. обычной формулой дифференцирования произведения.

Если заданы два линейных представления θ, θ' алгебры Ли $\mathfrak{G}$ в модулях M и M' соответственно, то можно определить следующим образом два линейных представления алгебры $\mathfrak{G}$ в K-модуле $V = \mathfrak{L}(M, M')$ всех K-линейных отображений M в M':

$$\psi(x) \cdot f = -f \circ \theta(x),$$
$$\psi'(x) \cdot f = \theta'(x) \circ f \qquad (f \in \mathfrak{L}(M, M')).$$

Имеем

$$\psi(x)\psi'(y) f = -\theta'(y) \circ f \circ \theta(x) = \psi'(y)\psi(x) f,$$

что позволяет применить лемму 5 и построить по формуле $\rho(x) \cdot f = \theta'(x) \circ f - f \circ \theta(x)$ линейное представление ρ алгебры $\mathfrak{G}$ в модуле V.

К последнему случаю сводится построение индуцированного линейного представления алгебры Ли $\mathfrak{G}$ в модуле

$\mathfrak{L}(M_1, \ldots, M_n; M)$ [1]) полилинейных отображений прямого произведения $M_1 \times \ldots \times M_n$ в модуль M. Для этого нужно рассмотреть тензорное произведение $M_1 \otimes \ldots \otimes M_n$. Модуль $\mathfrak{L}(M_1, \ldots, M_n; M)$ отождествляется с модулем $\mathfrak{L}(M_1 \otimes \ldots \otimes M_n, M)$. Соответствующее представление строится по формуле

$$(\rho(x) f)(m_1, \ldots, m_n) = \theta(x)[f(m_1, \ldots, m_n)] - \\ - \sum_{i=1}^{n} f(m_1, \ldots, \theta_i(x) m_i, \ldots, m_n).$$

В K-модуле K действует нулевое представление алгебры $\mathfrak{G}$ (все операторы $\theta(x)$ равны 0). Представление алгебры $\mathfrak{G}$, индуцированное в модуле $\mathfrak{L}(M, K) \simeq M^*$, есть представление, дуальное к θ; оно задается формулой

$$\theta^*(x) = -{}^t\theta(x) \text{ [2]).}$$

Подобным же образом можно определить линейное представление алгебры $\mathfrak{G}$ в модуле $\mathfrak{L}(M_1, M_2; K)$ билинейных форм.

Условимся теперь относительно некоторых канонических отождествлений.

1) Пусть σ — некоторая подстановка индексов $(1, \ldots, n)$. Имеется канонический изоморфизм φ тензорного произведения $\bigotimes_k M_k$ на тензорное произведение $\bigotimes_k M_{\sigma(k)}$. Этот изоморфизм является также изоморфизмом $\mathfrak{G}$-модулей. Действительно, если θ и θ' соответственно — индуцированные представления алгебры $\mathfrak{G}$ в этих произведениях, то

$$\theta(x) = \sum_k \theta_k(x), \quad \theta'(x) = \sum_k \theta'_{\sigma(k)}(x).$$

Очевидно, что $\varphi \circ \theta_k(x) = \theta'_{\sigma(k)}(x) \circ \varphi$. Поэтому

$$\varphi \circ \theta(x) = \theta'(x) \circ \varphi.$$

---

[1]) Здесь, а также в остальных примерах предполагается, что в M_i задано линейное представление θ_i алгебры Ли $\mathfrak{G}$. — *Прим. ред.*

[2]) Для всякого эндоморфизма A модуля M через ${}^tA$ обозначается дуальный эндоморфизм модуля M^*. — *Прим. ред.*

2) Пусть $I = \bigcup_{s \in S} I_s$ — разбиение множества индексов $I = \{1, \ldots, n\}$. Положим $N_s = \bigotimes_{i \in I_s} M_i$. Имеется естественный изоморфизм φ K-модуля $\bigotimes_i M_i$ на K-модуль $\bigotimes_s N_s$. Отображение φ является также изоморфизмом $\mathfrak{G}$-модулей. Действительно, представление ψ_s алгебры $\mathfrak{G}$ в модуле N_s определяется формулой

$$\psi_s(x) = \sum_{i \in I_s} \psi_{s,i}(x)\ ^{1)}.$$

Представление ψ' алгебры $\mathfrak{G}$ в модуле $\bigotimes_s N_s$ задается формулой

$$\psi'(x) = \sum_s \psi'_s(x),$$

где $\psi'_s(x) = \sum_{i \in I_s} \psi'_{s,i}(x)$. Следовательно, $\psi'(x) = \sum_{s,i} \psi'_{s,i}(x)$. Очевидно, что $\varphi \circ \theta_i(x) = \psi'_{s,i}(x) \circ \varphi$ $(i \in I_s)$. Поэтому

$$\varphi \circ \theta(x) = \psi'(x) \circ \varphi.$$

3) Так же как и выше, показывается, что каноническое линейное отображение модуля $\bigotimes_k \mathfrak{L}(M_k, M'_k)$ в модуль $\mathfrak{L}(\bigotimes M_k, \bigotimes M'_k)$ является гомоморфизмом $\mathfrak{G}$-модулей. То же относится к естественному отображению модуля $\mathfrak{L}(M, \mathfrak{L}(N, P))$ в модуль $\mathfrak{L}(M \otimes N, P)$.

Из этих основных канонических отождествлений выводятся и другие. Например, $\mathfrak{L}(M, M') \simeq M' \otimes M^*$, если M (или M') имеет конечную базу над K.

Определение 1. *Инвариантом линейного представления θ алгебры $\mathfrak{G}$ в модуле M называется элемент модуля M, аннулируемый всеми операторами $\theta(x)$, $x \in \mathfrak{G}$. Множество инвариантов в модуле M обозначается через $M^{\natural}$.*

---

[1]) Представления $\psi_{s,i}$, ψ_s действуют в модуле N_s, а представления $\psi'_{s,i}$, ψ'_s — в $\bigotimes_s N_s$. — *Прим. ред.*

Примеры. 1°. Элемент $f \in \mathfrak{L}(M, M')$ инвариантен тогда и только тогда, когда $\theta'(x) \circ f = f \circ \theta(x)$, т. е. когда он является гомоморфизмом $\mathfrak{G}$-модулей. Пространство всех $\mathfrak{G}$-гомоморфизмов M в M' обозначается через $\mathfrak{L}_{\mathfrak{G}}(M, M')$.

2°. Билинейная форма на $M \times M$ инвариантна тогда и только тогда, когда

$$f(\theta(x)m, m') + f(m, \theta(x)m') = 0.$$

3°. Если m_i $(i = 1, 2)$ — инвариант представления θ_i алгебры $\mathfrak{G}$ в модуле M_i, то $m_1 \otimes m_2$ — инвариант индуцированного представления в $M_1 \otimes M_2$.

Начиная отсюда, мы всюду в этой главе будем предполагать, что K — поле характеристики 0 и что алгебра $\mathfrak{G}$ и все модули, в которых действуют ее представления, имеют конечную базу над K.

Перейдем к определению элемента Казимира. Пусть f — инвариантная невырожденная симметрическая билинейная форма в $\mathfrak{G}$-модуле M. При естественном изоморфизме $(M \otimes M)^* \simeq \mathfrak{L}(M, M^*)$ инвариантной форме f соответствует $\mathfrak{G}$-гомоморфизм $\varphi : M \to M^*$, определенный по формуле $\langle m, \varphi(m') \rangle = f(m, m')$ [1]). Поскольку форма f невырождена, φ—изоморфное отображение. $\mathfrak{G}$-гомоморфизм $\psi = \varphi^{-1} : M^* \to M$ является инвариантным элементом пространства $\mathfrak{L}(M^*, M) \simeq \simeq M^{**} \otimes M = M \otimes M$. Итак, инварианту f соответствует инвариант $c \in M \otimes M$. Вычислим c в явном виде. Пусть $\{m_i\}$, $\{n_i\}$ — дуальные базы в пространстве M, т. е. $f(m_i, n_j) = \delta_{ij}$. Если $\{m_i^*\}$ — база пространства M^*, дуальная к $\{m_i\}$, т. е. $\langle m_i, m_j^* \rangle = \delta_{ij}$, то $\varphi(n_j) = m_j^*$ и $\psi(m_j^*) = n_j = \sum_i \langle m_i, m_j^* \rangle n_i$. Следовательно, $c = \sum_i m_i \otimes n_i$.

Рассмотрим теперь тот важный случай, когда M совпадает с идеалом $\mathfrak{H}$ алгебры $\mathfrak{G}$, оператор $\theta(x)$, $x \in \mathfrak{G}$, является ограничением на $\mathfrak{H}$ оператора $\operatorname{ad} x$, а форма f имеет вид

$$f(m, m') = \operatorname{Tr}(\rho(m)\rho(m')) \qquad (m, m' \in \mathfrak{H}),$$

где ρ — линейное представление алгебры $\mathfrak{G}$ в пространстве N (для которого форма f невырождена). Очевидно, что определенная таким образом форма f всегда симметрична. Легко

---

[1]) Если $m \in M$, $m^* \in M^*$, то $\langle m, m^* \rangle = m^*(m)$. — *Прим. ред.*

также проверить, что она инвариантна. Пусть $c'_N \in \mathfrak{H} \otimes \mathfrak{H}$ — инвариант, соответствующий f (см. выше). При естественном гомоморфизме $\mathfrak{G}$-модулей $\mathfrak{H} \otimes \mathfrak{H} \to \mathfrak{G} \otimes \mathfrak{G} \to U(\mathfrak{G})$ ему соответствует некоторый элемент c_N центра алгебры $U(\mathfrak{G})$, который и называется *элементом Казимира представления* ρ. Имеем $\rho(c_N) \neq 0$, так как

$$c_N = \sum m_i n_i,$$

$$\mathrm{Tr}\,\rho(c_N) = \sum_i \mathrm{Tr}\,(\rho(m_i)\,\rho(n_i)) = \sum_i \delta_{ii} = \dim \mathfrak{H}.$$

Если представление ρ *неприводимо, то ненулевой* $\mathfrak{G}$-*эндоморфизм* $\rho(c_N)$, будучи перестановочным с $\rho(\mathfrak{G})$, согласно лемме Шура, *является автоморфизмом.*

6. Тривиальность некоторых групп когомологий

Определение 2. *$\mathfrak{G}$-модуль V называется инъективным, если для всякого $\mathfrak{G}$-модуля A, всякого его подмодуля B и всякого $\mathfrak{G}$-гомоморфизма $f: B \to V$ существует $\mathfrak{G}$-гомоморфизм $\bar{f}: A \to V$, продолжающий гомоморфизм f.*

Иначе говоря, для всякого $\mathfrak{G}$-модуля A и всякого его подмодуля B каноническое отображение $\mathfrak{L}_{\mathfrak{G}}(A, V) \to \mathfrak{L}_{\mathfrak{G}}(B, V)$ должно быть *отображением на.*

Лемма 6. *Если $V = \mathfrak{L}(L, N)$, где L — свободный U-модуль, то $\mathfrak{G}$-модуль V инъективен.*

В обозначениях определения 2 $\mathfrak{G}$-гомоморфизм f является инвариантным элементом пространства $\mathfrak{L}(B, V) = \mathfrak{L}(B, \mathfrak{L}(L, N)) \simeq \mathfrak{L}(L, \mathfrak{L}(B, N))$, т. е. $\mathfrak{G}$-гомоморфизмом пространства L в $\mathfrak{L}(B, N)$. Каноническое отображение $\mathfrak{L}(A, N)$ в $\mathfrak{L}(B, N)$ является отображением на (мы ведь имеем дело с векторными пространствами). Кроме того, U-модуль L свободен. Отсюда следует, что всякий $\mathfrak{G}$-гомоморфизм пространства L в $\mathfrak{L}(B, N)$ продолжается в $\mathfrak{G}$-гомоморфизм пространства L в $\mathfrak{L}(A, N)$. Это означает, что каноническое отображение пространства $\mathfrak{L}_{\mathfrak{G}}(L, \mathfrak{L}(A, N))$ в $\mathfrak{L}_{\mathfrak{G}}(L, \mathfrak{L}(B, N))$ есть отображение на, и поэтому то же справедливо для канонического отображения пространства $\mathfrak{L}_{\mathfrak{G}}(A, V)$ в $\mathfrak{L}_{\mathfrak{G}}(B, V)$.

Предложение 1. *Если $\mathfrak{G}$-модуль V инъективен, то $H^q(\mathfrak{G}, V) = 0$ при $q > 0$.*

Пусть $f \in Z^q(\mathfrak{G}, V)$, $q > 0$. По определению, f — $\mathfrak{G}$-гомоморфизм модуля C_q в V, для которого $f \circ d = 0$, т. е. $f(dC_{q+1}) = 0$. Так как комплекс C ацикличен и $q > 0$, то dC_{q+1} совпадает с ядром отображения $d: C_q \to C_{q-1}$. Поэтому отображение f может быть разложено в произведение $f = g \circ d$, где $g: dC_q \to V$. Поскольку $\mathfrak{G}$-модуль V инъективен, $\mathfrak{G}$-гомоморфизм g может быть продолжен до $\mathfrak{G}$-гомоморфизма $\bar{g}: C_{q-1} \to V$. Имеем $f = \bar{g} \circ d$ и $f \in B^q(\mathfrak{G}, V)$. Таким образом, $B^q = Z^q$, так что $H^q(\mathfrak{G}, V) = 0$.

Перед тем как сформулировать предложение 2, сделаем следующее замечание: если c — элемент центра алгебры $U(\mathfrak{G})$ и θ — линейное представление алгебры $\mathfrak{G}$ в пространстве M, то эндоморфизм $\theta(c)$ является $\mathfrak{G}$-эндоморфизмом и индуцирует поэтому эндоморфизм c^* группы $H^q(\mathfrak{G}, M)$, при котором коцикл f переходит в коцикл $c \cdot f = \theta(c) \circ f$.

Предложение 2. *Если $\varepsilon(c) = 0$, то c^* обращается в 0 на всех группах $H^q(\mathfrak{G}, M)$.*

Имеем $(c \cdot f)(\gamma) = f(c\gamma)$ для всякого $\gamma \in C_q$, поскольку f — $\mathfrak{G}$-гомоморфизм. Построим индукцией по q такие $\mathfrak{G}$-гомоморфизмы $k_q: C_q \to C_{q+1}$, что

$$c\gamma = k\,d\gamma + dk\gamma,$$

т. е. $c\gamma = k_q d\gamma + dk_{q+1}\gamma$ для всякого $\gamma \in C_{q+1}$.

Начнем индукцию с $q = -1$, положив $k_{-1} = 0$. Пусть теперь построены $\mathfrak{G}$-гомоморфизмы k_r для $r \leqslant q$. Пусть $\{\gamma_\alpha\}$ — база U-модуля C_{q+1}. Достаточно так определить элементы $k_{q+1}\gamma_\alpha$, чтобы

$$c\gamma_\alpha = k_q d\gamma_\alpha + dk_{q+1}\gamma_\alpha,$$

т. е. $d(k_{q+1}\gamma_\alpha) = c\gamma_\alpha - k_q d\gamma_\alpha$.

Для того чтобы существовали элементы $k_{q+1}\gamma_\alpha$, удовлетворяющие последнему равенству, достаточно в силу ацикличности комплекса C, чтобы элементы $c\gamma_\alpha - k_q d\gamma_\alpha$ аннулировались оператором d (а также оператором ε, если $q = -1$). Так как $d\gamma_\alpha \in C_q$, то

$$d(c\gamma_\alpha - k_q d\gamma_\alpha) = c\,d\gamma_\alpha - dk_q(d\gamma_\alpha) = k_{q-1}d(d\gamma_\alpha) = 0.$$

Если $q = -1$, то $k_q d\gamma_\alpha = 0$ и $\varepsilon(c\gamma_\alpha) = \varepsilon(c)\varepsilon(\gamma_\alpha) = 0$, так как $\varepsilon(c) = 0$. Итак, отображение k, удовлетворяющее предъявленным требованиям, существует.

Пусть f — какой-нибудь элемент $Z^q(\mathfrak{G}, M)$. Тогда

$$(c \cdot f)(\gamma) = f(c\gamma) = f(k\,d\gamma + dk\gamma) = (f \circ k)(d\gamma).$$

Следовательно, коцепь $c \cdot f$ является кограницей коцепи $f \circ k$, что и показывает, что $H^q(\mathfrak{G}, M) = 0$.

Следствие. *Если θ — неприводимое линейное представление алгебры Ли $\mathfrak{G}$ в конечномерном пространстве M и билинейная форма* $\mathrm{Tr}(\theta(x)\theta(y))$ *невырождена на некотором идеале $\mathfrak{H} \neq 0$ алгебры $\mathfrak{G}$, то $H^q(\mathfrak{G}, M) = 0$ при всех $q \geqslant 0$.*

В самом деле, элемент Казимира c_M представления θ лежит в центре алгебры $U(\mathfrak{G})$. Оператор $\theta(c_M)$ — автоморфизм пространства M, следовательно, c_M^* — автоморфизм пространства $H^q(\mathfrak{G}, M)$. С другой стороны, по только что доказанному $c_M^* = 0$. Это может быть только в том случае, когда $H^q(\mathfrak{G}, M) = 0$.

7. Интерпретация группы $H^0(\mathfrak{G}, M)$

Выпишем более подробно формулу для кограницы, приведенную в конце п. 4, для случаев $p = 1, 2, 3$:

$$f \in C^{p-1}(\mathfrak{G}, M), \quad g = \delta f,$$

$C^p(\mathfrak{G}, M)$—пространство p-линейных кососимметрических форм на $\mathfrak{G}^p$ со значениями в M.

При

$p = 1$ $\quad g(x_1) = \theta(x_1) f$,

$p = 2$ $\quad g(x_1, x_2) = \theta(x_1) f(x_2) - \theta(x_2) f(x_1) - f([x_1, x_2])$,

$p = 3$ $\quad g(x_1, x_2, x_3) = \theta(x_1) f(x_2, x_3) - \theta(x_2) f(x_1, x_3) +$

$$+ \theta(x_3) f(x_1, x_2) - f([x_1, x_2], x_3) +$$
$$+ f([x_1, x_3], x_2) - f([x_2, x_3], x_1) =$$
$$= \textstyle\sum_3 \{\theta(x_1) f(x_2, x_3) - f([x_1, x_2], x_3)\}.$$

($\sum_3$ обозначает суммирование трех выражений, получаемых из исходного циклической перестановкой индексов 1, 2, 3.)

Поскольку $C^{-1}(\mathfrak{G},\ M)=0$, $B^0(\mathfrak{G},\ M)=0$. Далее, $f\in Z^0(\mathfrak{G},\ M)$ тогда и только тогда, когда $\theta(x)f=0$ для всех $x\in\mathfrak{G}$, т. е. когда f — инвариант.

Отсюда следует, что *пространство $H^0(\mathfrak{G},\ M)$ естественным образом изоморфно пространству $M^{\mathfrak{G}}$ инвариантных элементов пространства M.*

8. Интерпретация группы $H^1(\mathfrak{G},\ M)$

Рассмотрим проблему расширения $\mathfrak{G}$-модулей. *Расширением $\mathfrak{G}$-модуля $(\theta,\ N)$*[1] *посредством $\mathfrak{G}$-модуля $(\theta',\ M)$ называется совокупность $\mathfrak{G}$-модуля $(\psi,\ P)$ и двух $\mathfrak{G}$-гомоморфизмов*

$$i: M\to P,$$

$$\pi: P\to N,$$

причем требуется, чтобы последовательность

$$0\to M\xrightarrow{i}P\xrightarrow{\pi}N\to 0$$

была точной.

Два расширения $(\psi,\ P;\ i,\ \pi)$ и $(\psi_1,\ P_1;\ i_1,\ \pi_1)$ называются эквивалентными, если существует такой $\mathfrak{G}$-гомоморфизм k $\mathfrak{G}$-модуля P в P_1, что диаграмма

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dr, "\pi"] \arrow[dd, "k"] & \\ M \arrow[ur, "i"] \arrow[dr, "i_1"'] & & N \\ & P_1 \arrow[ur, "\pi_1"'] & \end{tikzcd}$$

коммутативна.

Точной последовательности $0\to M\xrightarrow{i}P\xrightarrow{\pi}N\to 0$ соответствует точная последовательность

$$0\to\mathfrak{L}(N,\ M)\xrightarrow{\pi'}\mathfrak{L}(P,\ M)\xrightarrow{i'}\mathfrak{L}(M,\ M)\to 0,$$

где все гомоморфизмы $\mathfrak{G}$-линейны, если считать пространства $\mathfrak{L}(Q,\ R)$ снабженными структурой $\mathfrak{G}$-модуля, согласно п. 5. Соответствующая точная когомологическая последовательность

[1] То есть K-модуля N, в котором структура $\mathfrak{G}$-модуля задана линейным представлением θ алгебры $\mathfrak{G}$. Аналогичные обозначения используются и в дальнейшем. — *Прим. перев.*

(см. п. 4) имеет вид[1])

$$0 \to H^0(\mathfrak{L}(N, M)) \xrightarrow{\pi^*} H^0(\mathfrak{L}(P, M)) \xrightarrow{i^*} H^0(\mathfrak{L}(M, M)) \xrightarrow{\partial}$$
$$\xrightarrow{\partial} H^1(\mathfrak{L}(N, M)) \to \dots$$

$H^0(\mathfrak{L}(Q, R))$ есть пространство всех инвариантов в $\mathfrak{L}(Q, R)$, т. е. всех $\mathfrak{G}$-гомоморфизмов Q в R. В пространстве $\mathfrak{L}(M, M)$ есть привилегированный элемент, а именно тождественное отображение j пространства M на себя. *Элемент* $\partial j \in H^1(\mathfrak{L}(N, M))$ *называется характеристическим классом, или препятствием, рассматриваемого расширения.*

Если препятствие равно нулю, то j лежит в ядре гомоморфизма ∂ и, следовательно, в образе гомоморфизма i^*. Это означает, что существует $\mathfrak{G}$-гомоморфизм f пространства P в M, индуцирующий тождественное отображение на пространстве M. Но это эквивалентно тому, что P разбивается в прямую сумму подпространства M и некоторого инвариантного подпространства N' (ядра $\mathfrak{G}$-гомоморфизма f), т. е. расширение *несущественно.*

Если два расширения эквивалентны, то их препятствия совпадают, так как из коммутативности диаграммы

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & M & \xrightarrow{i} & P & \xrightarrow{\pi} & N & \to & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle k} & & \downarrow & & \\ 0 & \to & M & \xrightarrow{i_1} & P_1 & \xrightarrow{\pi_1} & N & \to & 0 \end{array}$$

вытекает коммутативность диаграммы

$$\begin{array}{ccc} H^0(\mathfrak{L}(M, M)) & \xrightarrow{\partial} & H^1(\mathfrak{L}(N, M)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^0(\mathfrak{L}(M, M)) & \xrightarrow{\partial_1} & H^1(\mathfrak{L}(N, M)). \end{array}$$

Итак, каждому классу эквивалентных расширений соответствует определенный элемент пространства $H^1(\mathfrak{L}(N, M))$, обращающийся в 0 для несущественных расширений и только для них. Пусть, обратно, $c \in H^1(\mathfrak{L}(N, M))$. Представим U-модуль N как фактор-модуль свободного U-модуля: $N = L/R$.

[1]) В тех случаях, когда алгебра Ли $\mathfrak{G}$ фиксирована, иногда используется для краткости обозначение $H^p(M)$ вместо $H^p(\mathfrak{G}, M)$. — *Прим. ред.*

Точной последовательности $0 \to R \to L \xrightarrow{\omega} N \to 0$ соответствует точная последовательность

$$0 \to \mathfrak{L}(N, M) \to \mathfrak{L}(L, M) \to \mathfrak{L}(R, M) \to 0.$$

Из леммы 6 и предложения 1 вытекает, что $H^1(\mathfrak{L}(L, M)) = 0$. Из точной когомологической последовательности получаем

$$\mathfrak{L}_{\mathfrak{G}}(L, M) \to \mathfrak{L}_{\mathfrak{G}}(R, M) \xrightarrow{\partial} H^1(\mathfrak{L}(N, M)) \to 0,$$

откуда видим, что группа $H^1(\mathfrak{L}(N, M))$ изоморфна фактор-группе группы $\mathfrak{L}_{\mathfrak{G}}(R, M)$ по подгруппе, состоящей из $\mathfrak{G}$-гомоморфизмов R в M, продолжающихся до $\mathfrak{G}$-гомоморфизмов L в M. Пусть c' — элемент $\mathfrak{L}_{\mathfrak{G}}(R, M)$, для которого $c = \partial c'$. Положим $P' = (M + L)/Q$ [1]), где Q — множество элементов вида $(c'(r), -r)$, $r \in R$. Пусть k — каноническое отображение $M + L$ на P'. Положим $i(m) = k(m, 0)$, $\pi(k(m, l)) = \omega(l)$. Последнее определение корректно, так как $\omega(r) = 0$ при $r \in R$ и, значит, π переводит Q в 0. Далее, $(M + (0)) \cap Q = 0$, так что отображение i взаимно однозначно. Из того, что ω отображает L на N, вытекает, что π также является отображением на. Ядро отображения π состоит из элементов вида

$$k(m, r) = k(m + c'(r), 0) = i(m + c'(r)).$$

Следовательно, последовательность

$$0 \to M \to P' \to N \to 0$$

точна.

Формула $q(l) = k(0, l)$ определяет гомоморфизм $q : L \to P'$. При этом диаграмма

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & R & \to & L & \xrightarrow{\omega} & N & \to & 0 \\ & & {\scriptstyle c'}\downarrow & & {\scriptstyle q}\downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \to & M & \xrightarrow{i} & P' & \xrightarrow{\pi} & N & \to & 0 \end{array}$$

коммутативна, откуда вытекает коммутативность диаграмм

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & \mathfrak{L}(N, M) & \to & \mathfrak{L}(L, M) & \to & \mathfrak{L}(R, M) & \to & 0 \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\ 0 & \to & \mathfrak{L}(N, M) & \to & \mathfrak{L}(P', M) & \to & \mathfrak{L}(M, M) & \to & 0 \end{array}$$

[1]) $M + L$ — прямая сумма модулей. — *Прим. ред.*

и

$$\begin{array}{ccc} H^0(\mathfrak{L}(R,\ M)) & \xrightarrow{\partial} & H^1(\mathfrak{L}(N,\ M)) \\ {\scriptstyle c'^*}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle \simeq} \\ H^0(\mathfrak{L}(M,\ M)) & \xrightarrow{\partial} & H^1(\mathfrak{L}(N,\ M)). \end{array}$$

Так как образ тождественного отображения пространства M при гомоморфизме c'^* есть c', а $\partial c' = c$, то препятствием построенного расширения служит как раз c [1]).

Наконец, всякое расширение P эквивалентно расширению, построенному таким образом. Действительно, поскольку U-модуль L свободен, гомоморфизм $\omega : L \to N$ можно разложить в произведение гомоморфизмов $\omega = \pi \circ q$:

$$L \xrightarrow{q} P \xrightarrow{\pi} N.$$

При гомоморфизме q элементы из R должны переходить в ядро гомоморфизма π, т. е. в M. Получаем коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & R & \to & L & \to & N & \to & 0 \\ & & {\scriptstyle c'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle q} & & \downarrow & & \\ 0 & \to & M & \xrightarrow{i} & P & \to & N & \to & 0. \end{array}$$

Далее, формулой $k(m,\ l) = i(m) + q(l)$ определяется гомоморфизм k суммы $M + L$ на P, обращающийся в 0 на Q, так как диаграмма коммутативна. Этот гомоморфизм индуцирует, следовательно, гомоморфизм $k : P' \to P$, причем диаграмма

$$\begin{tikzcd} & & P' \arrow[dd, "k"] \arrow[dr] & & \\ 0 \arrow[r] & M \arrow[ur] \arrow[dr] & & N \arrow[r] & 0 \\ & & P \arrow[ur] & & \end{tikzcd}$$

как легко видеть, коммутативна.

[1]) Здесь следует заметить, что построенное расширение не зависит от выбора элемента c'. Более точно, если элемент $c'' \in \mathfrak{L}_{\mathfrak{G}}(R,\ M)$ таков, что $\partial c'' = c$, то расширения, построенные с помощью элементов c' и c'', эквивалентны. — *Прим. перев.*

Теорема 1. *Классы эквивалентных расширений $\mathfrak{G}$-модуля N посредством $\mathfrak{G}$-модуля M находятся во взаимно однозначном соответствии с элементами группы* $H^1(\mathfrak{L}(N, M))$.

Посмотрим, как явно устанавливается это соответствие. Характеристический класс c данного расширения P определяется следующим образом: тождественное отображение пространства M на себя [элемент группы $Z^0(\mathfrak{L}(M, M))$] поднимается до некоторого линейного отображения ρ пространства P на M; затем берется кограница элемента $\rho \in C^0(\mathfrak{L}(P, M))$ [элемент группы $Z^1(\mathfrak{L}(P, M))$], иными словами, отображение $g: \mathfrak{G} \to \mathfrak{L}(P, M)$, определенное формулой $g(x) = \theta'(x) \circ \rho - \rho \circ \psi(x)$; его в действительности можно рассматривать как отображение $\mathfrak{G}$ в $\mathfrak{L}(N, M)$, т. е. как элемент $Z^1(\mathfrak{L}(N, M))$; соответствующий класс когомологий и будет характеристическим классом расширения. С помощью отображения $p \to (\rho(p), \pi(p))$ пространство P отождествляется с произведением $M \times N$, и операторы из $\psi(\mathfrak{G})$ записываются матрицами

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} \theta'(x) & -g(x) \\ 0 & \theta(x) \end{pmatrix}.$$

При этом

$$[\psi(x), \psi(y)] - \psi([x, y]) = \begin{pmatrix} 0 & -\delta g(x, y) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(см. формулу из п. 7), откуда $\delta g = 0$. Обратно, если $\delta g = 0$, то матрицы $\psi(x)$ определяют некоторое представление алгебры $\mathfrak{G}$ в пространстве $M \times N$.

Если вместо отображения ρ взять отображение $\rho' = \rho + l$, то получим [1] $g'(x) = g(x) + \theta'(x) \circ l - l \circ \theta(x) = g(x) + \delta l(x)$, т. е. элемент $g \in Z^1(\mathfrak{L}(N, M))$ изменится на кограницу.

Теорема 2. *Следующие 4 утверждения эквивалентны* [2]:

(1) $H^1(\mathfrak{G}, M) = 0$ *для всякого простого* $\mathfrak{G}$*-модуля* M;

(2) $H^1(\mathfrak{G}, M) = 0$ *для всякого* $\mathfrak{G}$*-модуля* M;

(3) $\varphi(M^{\natural}) = N^{\natural}$ *для всякого* $\mathfrak{G}$*-гомоморфизма* $\mathfrak{G}$*-модуля* M *на* $\mathfrak{G}$*-модуль* N;

---

[1] Очевидно, что $l(M) = 0$, так что l можно рассматривать как отображение N в M, что и делается ниже. — *Прим. перев.*

[2] Напомним, что все $\mathfrak{G}$-модули предполагаются конечномерными. — *Прим. ред.*

(4) *всякое представление алгебры $\mathfrak{G}$ вполне приводимо.*

$(1) \Rightarrow (2)$. $\mathfrak{G}$-модуль M обладает рядом Жордана—Гёльдера

$$0 = M_0 \subset M_1 \subset \ldots \subset M_n = M,$$

где $\mathfrak{G}$-модули M_{i+1}/M_i просты. Достаточно доказать, что если $H^1(\mathfrak{G}, P/Q) = H^1(\mathfrak{G}, Q) = 0$, то $H^1(\mathfrak{G}, P) = 0$, но это вытекает из точной когомологической последовательности

$$0 = H^1(\mathfrak{G}, Q) \to H^1(\mathfrak{G}, P) \to H^1(\mathfrak{G}, P/Q) = 0.$$

$(2) \Rightarrow (3)$. Имеем $M^{\natural} = H^0(\mathfrak{G}, M)$, $N^{\natural} = H^0(\mathfrak{G}, N)$. Пусть Q — ядро гомоморфизма φ. Точная последовательность $0 \to Q \to M \to N \to 0$ порождает точную последовательность

$$H^0(\mathfrak{G}, M) = M^{\natural} \xrightarrow{\varphi} H^0(\mathfrak{G}, N) = N^{\natural} \longrightarrow H^1(\mathfrak{G}, Q) = 0,$$

откуда $\varphi(M^{\natural}) = N^{\natural}$.

$(3) \Rightarrow (4)$. Пусть P — $\mathfrak{G}$-модуль, N — его подмодуль, π — естественная проекция P на P/N. Достаточно показать, что существует такой $\mathfrak{G}$-гомоморфизм f модуля $M = P/N$ в модуль P, что $\pi \circ f = 1$. Из (3) следует, что отображение $\varphi : \mathfrak{L}(M, P)^{\natural} \to \mathfrak{L}(M, M)^{\natural}$ есть отображение на. Взяв какой-нибудь прообраз тождественного преобразования пространства M, мы получим требуемый $\mathfrak{G}$-гомоморфизм f.

$(4) \Rightarrow (1)$. Если справедливо (4), то всякое расширение несущественно, поэтому

$$H^1(\mathfrak{L}(N, M)) = 0$$

для любых $\mathfrak{G}$-модулей N и M. Взяв в качестве N $\mathfrak{G}$-модуль, определяемый нулевым представлением алгебры $\mathfrak{G}$, получим требуемое равенство $H^1(\mathfrak{G}, M) = 0$, поскольку в этом случае $\mathfrak{L}(N, M) \simeq M$.

9. Интерпретация группы $H^2(\mathfrak{G}, M)$

Подобно тому как в предыдущем пункте были определены расширения модулей, можно определить расширения алгебр Ли. *Расширением $\mathfrak{H}$ алгебры Ли $\mathfrak{G}$ посредством алгебры Ли $\mathfrak{M}$ называется точная последовательность*

$$0 \longrightarrow \mathfrak{M} \xrightarrow{i} \mathfrak{H} \xrightarrow{\pi} \mathfrak{G} \longrightarrow 0.$$

Два расширения $\mathfrak{H}$ и $\mathfrak{H}'$ называются эквивалентными, если существует такой гомоморфизм k алгебры $\mathfrak{H}$ в $\mathfrak{H}'$, что диаграмма

$$\begin{tikzcd}
& \mathfrak{H} \arrow[dr, "\pi"] \arrow[dd, "k"] & \\
\mathfrak{M} \arrow[ur, "i"] \arrow[dr, "i'"'] & & \mathfrak{G} \\
& \mathfrak{H}' \arrow[ur, "\pi'"'] &
\end{tikzcd}$$

коммутативна.

Нас будет вначале интересовать случай, когда алгебра $\mathfrak{M}$ *коммутативна.* В этом случае расширение $\mathfrak{H}$ определяет на $\mathfrak{M}$ структуру $\mathfrak{G}$-модуля. А именно, $\mathfrak{M}$ — идеал в $\mathfrak{H}$, и поэтому присоединенное представление алгебры $\mathfrak{H}$ индуцирует некоторое представление θ алгебры $\mathfrak{H}$ в пространстве $\mathfrak{M}$. Так как алгебра $\mathfrak{M}$ коммутативна, то $\theta(\mathfrak{M}) = 0$. Следовательно, θ определяет представление алгебры $\mathfrak{G} = \mathfrak{H}/\mathfrak{M}$ в пространстве $\mathfrak{M}$. Это представление мы будем обозначать той же буквой θ. При $x \in \mathfrak{G}$, $m \in \mathfrak{M}$ выберем элемент $y \in \mathfrak{H}$, для которого $\pi(y) = x$. Тогда $\theta(x)m = [y, m]$.

Мы сейчас установим *соответствие между элементами группы $H^2(\mathfrak{G}, \mathfrak{M})$ и всеми расширениями алгебры $\mathfrak{G}$ посредством коммутативной алгебры $\mathfrak{M}$, определяющими данную структуру $\mathfrak{G}$-модуля на $\mathfrak{M}$.*

Пусть l — некоторое линейное отображение алгебры $\mathfrak{G}$ в $\mathfrak{H}$, для которого $\pi \circ l = 1$. Элементы вида $[l(x), l(y)] - l([x, y])$, очевидно, аннулируются гомоморфизмом π и, следовательно, лежат в $\mathfrak{M}$. Можно положить

$$[l(x), l(y)] - l([x, y]) = f(x, y) \in \mathfrak{M}.$$

Ясно, что $f(x, x) = 0$, и поэтому $f \in C^2(\mathfrak{G}, \mathfrak{M})$.

Эта 2-*мерная коцепь однозначно определяет операцию коммутирования в $\mathfrak{H}$.*

Действительно, коль скоро фиксировано отображение l, можно отождествить векторные пространства $\mathfrak{M} \times \mathfrak{G}$ и $\mathfrak{H}$ посредством отображения $(m, x) \to m + l(x)$. Операция коммутирования записывается следующим образом:

$$[m+l(x),\ n+l(y)]=[l(x),\ n]+[m,\ l(y)]+[l(x),\ l(y)]=$$
$$=\theta(x)n-\theta(y)m+l([x,\ y])+f(x,\ y),$$

или, если перейти к пространству $\mathfrak{M}\times\mathfrak{G}$,

$$[(m,\ x),\ (n,\ y)]=(\theta(x)n-\theta(y)m+f(x,\ y),\ [x,\ y]). \quad (1)$$

Найдем ограничения, накладываемые аксиомами алгебр Ли на функцию f:

$$[(m,\ x),\ (m,\ x)]=(f(x,\ x),\ 0)=0, \quad (2)$$

$$[[(m,\ x),\ (n,\ y)],\ (p,\ z)]=$$
$$=[(\theta(x)n-\theta(y)m+f(x,\ y),\ [x,\ y]),\ (p,\ z)]=$$
$$=(\theta([x,\ y])p-\theta(z)\theta(x)n+\theta(z)\theta(y)m-\theta(z)f(x,\ y)+$$
$$+f([x,\ y],\ z),\ \ [[x,\ y],\ z]).$$

Образуем сумму $\sum$ трех выражений, полученных из последнего циклической перестановкой букв. Во второй компоненте получим 0 в силу тождества Якоби в алгебре Ли $\mathfrak{G}$. В первой компоненте получим, с одной стороны, сумму

$$-\sum\nolimits_3(\theta(z)f(x,\ y)-f([x,\ y],\ z))=-\delta f(x,\ y,\ z)$$

и, с другой стороны, сумму трех выражений, подобных следующему:

$$\theta([y,\ z])m-\theta(y)\theta(z)m+\theta(z)\theta(y)m=0.$$

Окончательно:

$$\sum=(-\delta f(x,\ y,\ z),\ 0). \quad (3)$$

Равенство (2) выражает тот факт, что f — *коцепь*, равенство (3) означает, что f должна быть *коциклом*.

Обратно, всякий двумерный коцикл f определяет в пространстве $\mathfrak{M}\times\mathfrak{G}$ по формуле (1) структуру алгебры Ли $\mathfrak{H}$. Положив $i(m)=(m,\ 0)$, $\pi(m,\ x)=x$, получаем точную последовательность

$$0\longrightarrow\mathfrak{M}\xrightarrow{i}\mathfrak{H}\xrightarrow{\pi}\mathfrak{G}\longrightarrow 0.$$

Отображение i — гомоморфизм, так как $[(m,\ 0),\ (n,\ 0)]=0$. Из формулы (1) видно также, что π — гомоморфизм. Вложение l пространства $\mathfrak{G}$ в $\mathfrak{H}$ определим формулой $l(x)=(0,\ x)$.

Тогда

$$[l(x),\ l(y)]-l([x,\ y])=[(0,\ x),\ (0,\ y)]-(0,\ [x,\ y])=$$
$$=(f(x,\ y),\ 0),$$

откуда видно, что f — один из коциклов, определенных построенным расширением.

Коцикл f зависит от расширения и от выбранного вложения l. Пусть l' — какое-нибудь другое вложение $\mathfrak{G}$ в $\mathfrak{H}$, для которого $\pi\circ l'=\pi\circ l=1$. Тогда $l'(x)-l(x)=g(x)\in\mathfrak{M}$. Функция g содержится в $C^1(\mathfrak{G},\ \mathfrak{M})$. Вычислим коцикл, определяемый вложением l':

$$f'(x,\ y)=[l'(x),\ l'(y)]-l'([x,\ y])=$$
$$=[l(x)+g(x),\ l(y)+g(y)]-l([x,\ y])-g([x,\ y])=$$
$$=f(x,\ y)+\theta(x)g(y)-\theta(y)g(x)-g([x,\ y]),$$

т. е. $f'=f+\delta g$. Итак, *класс когомологий, содержащий* f, *зависит только от расширения.*

Расширение $\mathfrak{H}$ называется *несущественным*, если существует такая подалгебра $\mathfrak{A}$ алгебры $\mathfrak{H}$, что пространство $\mathfrak{H}$ разлагается в прямую сумму подпространств $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{M}$; оно называется тривиальным, если $\mathfrak{A}$ — идеал. Необходимым и достаточным условием несущественности расширения $\mathfrak{H}$ является существование вложения $l:\mathfrak{G}\to\mathfrak{H}$ $(\pi\circ l=1)$, являющегося гомоморфизмом. Для такого вложения $f(x,\ y)=[l(x),\ l(y)]-l([x,\ y])=0$, следовательно, соответствующий класс когомологий равен нулю. Обратно, если класс когомологий, определяемый расширением, равен нулю, то в нем содержится нулевой коцикл. Соответствующее этому коциклу вложение l является гомоморфизмом, и, следовательно, расширение несущественно.

Теорема 3. *Всякое расширение* $\mathfrak{H}$ *алгебры Ли* $\mathfrak{G}$ *посредством* $\mathfrak{G}$*-модуля* $\mathfrak{M}$ *(рассматриваемого как коммутативная алгебра Ли) определяет класс двумерных когомологий алгебры* $\mathfrak{G}$ *со значениями в модуле* $\mathfrak{M}$, *по которому расширение восстанавливается однозначно с точностью до эквивалентности. Каждый двумерный класс когомологий* $\overset{*}{f}\in H^2(\mathfrak{G},\ \mathfrak{M})$ *соответствует некоторому расширению. Это расширение тогда и только тогда несущественно, когда* $\overset{*}{f}=0$.

Следствие. *Если алгебра Ли $\mathfrak{G}$ такова, что $H^1(\mathfrak{G}, M) = H^2(\mathfrak{G}, M) = 0$ для всех простых нетривиальных*[1] *$\mathfrak{G}$-модулей M и $\mathfrak{G} = [\mathfrak{G}, \mathfrak{G}]$, то всякое расширение алгебры $\mathfrak{G}$ посредством коммутативной алгебры Ли несущественно.*

Для доказательства вычислим $H^1(\mathfrak{G}, K_0)$, где K_0 — тривиальный $\mathfrak{G}$-модуль. При $f \in K_0$ $\delta f(x) = \theta(x) f = 0$, поэтому $B^1(\mathfrak{G}, K_0) = 0$. Далее, если $f \in C^1(\mathfrak{G}, K_0)$, то $\delta f(x, y) = -f([x, y])$. Так как $[\mathfrak{G}, \mathfrak{G}] = \mathfrak{G}$, то из $\delta f = 0$ вытекает, что $f = 0$. Таким образом, $H^1(\mathfrak{G}, K_0) = 0$. Применяя теорему 2, заключаем, что всякое представление алгебры $\mathfrak{G}$ вполне приводимо.

Вычислим теперь $H^2(\mathfrak{G}, K_0)$. Пусть f — некоторый элемент из $H^2(\mathfrak{G}, K_0)$ и $\mathfrak{H}$ — соответствующее ему расширение. Модуль K_0 аннулируется алгеброй $\mathfrak{G}$, и поэтому K_0 лежит в центре алгебры $\mathfrak{H}$. Присоединенное представление алгебры $\mathfrak{H}$, обращаясь в нуль на K_0, индуцирует представление алгебры $\mathfrak{H}/K_0 = \mathfrak{G}$ в пространстве $\mathfrak{H}$. Это представление, по доказанному выше, вполне приводимо. Следовательно, существует идеал в $\mathfrak{H}$, дополнительный к K_0. Итак, расширение $\mathfrak{H}$ тривиально, откуда $f = 0$ и $H^2(\mathfrak{G}, K_0) = 0$. Индуктивное рассуждение с использованием точной когомологической последовательности, аналогичное проведенному при доказательстве теоремы 2, показывает, что $H^2(\mathfrak{G}, M) = 0$ для всякого конечномерного $\mathfrak{G}$-модуля M. Из теоремы 1 тогда вытекает, что всякое расширение алгебры $\mathfrak{G}$ посредством коммутативной алгебры несущественно, что и требовалось доказать.

В заключение остановимся на отыскании *различных подалгебр, дополнительных к* $\mathfrak{M}$, в случае, когда расширение несущественно. Пусть l и l' — два гомоморфизма $\mathfrak{G}$ в $\mathfrak{H}$, для которых $\pi \circ l = \pi \circ l' = 1$, $l' - l = g$. Коциклы f и f', определенные вложениями l и l', равны 0; с другой стороны, $f' - f = \delta g$. Следовательно, $\delta g = 0$. Если $H^1(\mathfrak{G}, \mathfrak{M}) = 0$, то g — кограница, т. е. существует такой элемент $m \in \mathfrak{M}$, что

$$l'(x) - l(x) = -\theta(x) \cdot m = [m, l(x)],$$

или, иначе,

$$l'(x) = l(x) + [m, l(x)] = e^{\operatorname{ad} m} l(x)$$

[1]) $\mathfrak{G}$-модуль M называется тривиальным, если умножение на любой элемент из $\mathfrak{G}$ переводит M в 0. — *Прим. перев.*

($e^{\mathrm{ad}\,m} = 1 + \mathrm{ad}\,m$, так как для всякого $y \in \mathfrak{H}$ имеем $[m, y] \in \mathfrak{M}$, $(\mathrm{ad}\,m)^2(y) = [m, [m, y]] = 0$, и $(\mathrm{ad}\,m)^2 = 0$).

10. Теорема Леви — Мальцева

Будем изучать расширения алгебры Ли $\mathfrak{G}$ посредством *разрешимой* алгебры Ли $\mathfrak{M}$.

Лемма 7. *Пусть $\mathfrak{N}$ — характеристический идеал алгебры $\mathfrak{M}$*[1]. *Если всякое расширение алгебры $\mathfrak{G}$ посредством $\mathfrak{N}$ или $\mathfrak{M}/\mathfrak{N}$ несущественно, то и всякое расширение алгебры $\mathfrak{G}$ посредством $\mathfrak{M}$ несущественно.*

Пусть $\mathfrak{H}$ — расширение алгебры $\mathfrak{G}$ посредством $\mathfrak{M}$. Для всякого $x \in \mathfrak{H}$ эндоморфизм $\mathrm{ad}\,x$ индуцирует дифференцирование алгебры $\mathfrak{M}$, которое должно сохранять идеал $\mathfrak{N}$. Поэтому $\mathfrak{N}$ — идеал в $\mathfrak{H}$. Имеем две точные последовательности:

$$0 \longrightarrow \mathfrak{N} \longrightarrow \mathfrak{H} \xrightarrow{\pi} \mathfrak{H}/\mathfrak{N} \longrightarrow 0,$$

$$0 \longrightarrow \mathfrak{M}/\mathfrak{N} \longrightarrow \mathfrak{H}/\mathfrak{N} \xrightarrow{\pi'} \mathfrak{H}/\mathfrak{M} = \mathfrak{G} \longrightarrow 0.$$

По предположению существует гомоморфизм $l' : \mathfrak{G} \to \mathfrak{H}/\mathfrak{N}$, для которого $\pi' \circ l' = 1$.

Рассмотрим подалгебру $\mathfrak{H}' = \pi^{-1}(l'(\mathfrak{G}))$ алгебры $\mathfrak{H}$. Она является расширением алгебры $\mathfrak{G}$ посредством алгебры $\mathfrak{N}$

$$0 \longrightarrow \mathfrak{N} \longrightarrow \mathfrak{H}' \xrightarrow{\pi} l'(\mathfrak{G}) \simeq \mathfrak{G} \longrightarrow 0.$$

По предположению существует гомоморфизм $l : l'(\mathfrak{G}) \to \mathfrak{H}'$, для которого $\pi \circ l = 1$. Отображение $l \circ l'$ есть гомоморфизм алгебры $\mathfrak{G}$ в $\mathfrak{H}'$, а следовательно, и в $\mathfrak{H}$. При этом $(\pi' \circ \pi) \circ (l \circ l') = \pi' \circ l' = 1$, так что расширение $\mathfrak{H}$ действительно несущественно.

Следствие. *Если алгебра Ли $\mathfrak{G}$ удовлетворяет условиям следствия теоремы 3, а алгебра Ли $\mathfrak{M}$ разрешима, то всякое расширение алгебры $\mathfrak{G}$ посредством $\mathfrak{M}$ несущественно.*

---

[1] То есть идеал, инвариантный относительно всех дифференцирований алгебры $\mathfrak{M}$. — *Прим. перев.*

Утверждение верно, если алгебра $\mathfrak{M}$ коммутативна (следствие теоремы 3). Для любых разрешимых алгебр $\mathfrak{M}$ его можно доказать индукцией по размерности алгебры $\mathfrak{M}$, применяя лемму 7. Действительно, поскольку алгебра $\mathfrak{M}$ разрешима, $\dim[\mathfrak{M}, \mathfrak{M}] < \dim \mathfrak{M}$ и можно положить $\mathfrak{R} = [\mathfrak{M}, \mathfrak{M}]$. Для алгебры $\mathfrak{R}$ утверждение справедливо по предположению индукции, для алгебры $\mathfrak{M}/\mathfrak{R}$ — в силу ее коммутативности.

Лемма 8. *Пусть $\mathfrak{M}$ — разрешимый идеал алгебры $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{N} = [\mathfrak{H}, \mathfrak{M}]$ и θ — линейное представление алгебры $\mathfrak{H}$ в векторном пространстве V. Если $n \in \mathfrak{N}$, то эндоморфизм $\theta(n)$ содержится в радикале ассоциативной алгебры*[1]*, порожденной $\theta(\mathfrak{H})$, и, следовательно, нильпотентен.*

Можно считать основное поле алгебраически замкнутым, расширив его в случае надобности.

Пусть

$$0 = V_n \subset V_{n-1} \subset \ldots \subset V_1 \subset V_0 = V$$

— такая последовательность подпространств, инвариантных относительно $\theta(\mathfrak{M})$, что

$$\theta(m)v \equiv h_i(m)v \pmod{V_{i+1}} \quad \text{при} \quad v \in V_i,$$

где h_i — некоторые линейные формы на $\mathfrak{M}$. (Существование таких подпространств V_i вытекает из теоремы Ли, гл. 2.) Если эндоморфизм $\theta(m)$ нильпотентен, то $h_i(m) = 0$, поскольку $(\theta(m))^k v \equiv h_i^k(m)v \pmod{V_{i+1}}$ при $v \in V_i$. Обратно, если $h_i(m) = 0$, то $\theta(m)V_i \subset V_{i+1}$ и $(\theta(m))^n = 0$. Следовательно, элементы $m \in \mathfrak{M}$, для которых эндоморфизм $\theta(m)$ нильпотентен, образуют подпространство в $\mathfrak{M}$. Это подпространство содержит $[\mathfrak{M}, \mathfrak{M}]$, и потому является даже идеалом.

Алгебра Ли $\mathfrak{M}'$, порожденная $\mathfrak{M}$ и любым элементом $x \in \mathfrak{H}$, разрешима, и $[x, \mathfrak{M}] \subset [\mathfrak{M}', \mathfrak{M}']$. Из теоремы Ли тогда следует, что при любых $x \in \mathfrak{H}$, $m \in \mathfrak{M}$ эндоморфизм $\theta([x, m])$ нильпотентен. Согласно только что доказанному, тем же свойством должны обладать линейные комбинации элементов такого вида. Итак, для любого $n \in \mathfrak{N}$ эндоморфизм $\theta(n)$ нильпотентен.

---

[1]) См. п. 1 гл. 6. — *Прим. перев.*

Пусть U — универсальная обертывающая алгебра алгебры Ли $\mathfrak{H}$ и ψ — неприводимое линейное представление алгебры $\theta(U)$ в пространстве W. Оно очевидным образом определяет неприводимое линейное представление алгебры U, а значит, и алгебры $\mathfrak{H}$ в пространстве W. Ограничение этого представления на $\mathfrak{N}$ нильпотентно. По теореме Энгеля существует ненулевой вектор $w \in W$, аннулируемый алгеброй $\mathfrak{N}$. Так как $\mathfrak{N}$ — идеал в $\mathfrak{H}$, то множество всех векторов из W, аннулируемых алгеброй $\mathfrak{N}$, инвариантно относительно $\mathfrak{H}$ и в силу неприводимости рассматриваемого представления должно совпадать с W. Это и означает, что $\theta(\mathfrak{N})$ содержится в радикале ассоциативной алгебры $\theta(U)$. Лемма доказана.

Лемма 9. *Если D — нильпотентное дифференцирование некоторой, не обязательно ассоциативной алгебры A, то* $\exp D = S$ — *автоморфизм алгебры A.*

Действительно,

$$S(xy) = \sum \frac{1}{k!} D^k(xy) = \sum \frac{1}{k!} \sum \frac{k!}{(k-m)!\, m!} D^m x\, D^{k-m} y =$$
$$= \sum \frac{1}{p!} \frac{1}{q!} D^p x\, D^q y = Sx \cdot Sy$$

(все суммы конечны; при дифференцировании произведения использована формула Лейбница).

Определение. *В обозначениях леммы 8 положим* $\sigma(x) = \exp \operatorname{ad} x$ *для всякого* $x \in \mathfrak{N}$. *Автоморфизмы алгебры $\mathfrak{H}$, содержащиеся в группе, порожденной автоморфизмами вида $\sigma(x)$, $x \in \mathfrak{N}$, называются специальными.*

Вернемся теперь к расширению $\mathfrak{H}$ алгебры $\mathfrak{G}$, удовлетворяющей условиям следствия из теоремы 3, посредством разрешимой алгебры $\mathfrak{M}$. Как мы уже доказали, оно несущественно. Пусть l_1 и l_2 — два гомоморфизма алгебры $\mathfrak{G}$ в $\mathfrak{H}$, для которых $\pi \circ l_1 = \pi \circ l_2 = 1$. Докажем, что $l_1 = \sigma \circ l_2$ для некоторого специального автоморфизма σ алгебры $\mathfrak{H}$. Положим $\overline{\mathfrak{H}} = \mathfrak{H}/[\mathfrak{M}, \mathfrak{M}]$, $\overline{\mathfrak{M}} = \mathfrak{M}/[\mathfrak{M}, \mathfrak{M}]$. Алгебра $\overline{\mathfrak{M}}$ коммутативна, и $\overline{\mathfrak{H}}/\overline{\mathfrak{M}} = \mathfrak{H}/\mathfrak{M} = \mathfrak{G}$. Обозначим через π' каноническое отображение $\mathfrak{H}$ на $\overline{\mathfrak{H}}$, и пусть $\pi' \circ l_i = k_i$. Существует такой специальный автоморфизм $\bar{\sigma}$ алгебры $\overline{\mathfrak{H}}$, что $k_1 = \bar{\sigma} \circ k_2$

(см. конец п. 9)[1]). Так как $\pi'([\mathfrak{H}, \mathfrak{M}]) = [\bar{\mathfrak{H}}, \bar{\mathfrak{M}}]$, то существует такой специальный автоморфизм σ' алгебры $\mathfrak{H}$, что $\pi' \circ \sigma' = \sigma \circ \pi'$. Тогда $\pi' \circ l_1 = k_1 = \sigma \circ k_2 = \sigma \circ \pi' \circ l_2 = \pi' \circ \sigma' \circ l_2$, и, вводя обозначение $l'_2 = \sigma' \circ l_2$, имеем $\pi' \circ l_1 = \pi' \circ l'_2$, т. е. $l_1 - l'_2$ отображает $\mathfrak{S}$ в $[\mathfrak{M}, \mathfrak{M}]$. Положим $\mathfrak{H}' = l_1(\mathfrak{S}) + [\mathfrak{M}, \mathfrak{M}] = l'_2(\mathfrak{S}) + [\mathfrak{M}, \mathfrak{M}]$. Алгебра $\mathfrak{H}'$ является расширением алгебры $\mathfrak{S}$ посредством алгебры $[\mathfrak{M}, \mathfrak{M}]$, и мы можем предположить, проводя доказательство по индукции, что существует такой специальный автоморфизм σ'' алгебры $\mathfrak{H}'$, что $l_1 = \sigma'' \circ l'_2 = \sigma'' \circ \sigma' \circ l_2$.

Так как $[\mathfrak{H}', [\mathfrak{M}, \mathfrak{M}]] \subset [\mathfrak{H}, \mathfrak{M}]$, то σ'' продолжается в специальный автоморфизм алгебры $\mathfrak{H}$. Таким образом, $l_1 = \sigma \circ l_2$, где $\sigma = \sigma'' \circ \sigma'$ — специальный автоморфизм алгебры $\mathfrak{H}$.

Теорема 4. (Леви—Мальцев). *Если алгебра Ли $\mathfrak{S}$ такова, что $H^1(\mathfrak{S}, M) = H^2(\mathfrak{S}, M) = 0$ для всякого нетривиального простого $\mathfrak{S}$-модуля M и $\mathfrak{S} = [\mathfrak{S}, \mathfrak{S}]$, то всякое расширение $\mathfrak{H}$ алгебры $\mathfrak{S}$ посредством разрешимой алгебры $\mathfrak{M}$ несущественно. Если l_1 и l_2 — два гомоморфизма алгебры $\mathfrak{S}$ в $\mathfrak{H}$, для которых $\pi \circ l_1 = \pi \circ l_2 = 1$ (π — проекция $\mathfrak{H}$ на $\mathfrak{S}$), то существует такой специальный автоморфизм σ алгебры $\mathfrak{H}$, что $l_1 = \sigma \circ l_2$.*

Впоследствии мы увидим, что предположения теоремы выполняются для всех полупростых алгебр Ли.

11. Добавление

К интерпретации двумерных групп когомологий алгебр Ли, данной в п. 9, можно прийти и другим путем, не используя явного представления коцепей.

---

[1]) Алгебра $\bar{\mathfrak{H}}$ есть расширение алгебры $\mathfrak{S}$ посредством коммутативной алгебры $\bar{\mathfrak{M}}$. Из доказанного в конце п. 9 следует, что существует такой элемент $\bar{m} \in \bar{\mathfrak{M}}$, что $k_1 = \exp \operatorname{ad} \bar{m} \circ k_2$. При этом можно считать, что $\bar{m} \in [\bar{\mathfrak{H}}, \bar{\mathfrak{M}}] = [\mathfrak{S}, \bar{\mathfrak{M}}] = \bar{\mathfrak{M}}'$. Действительно, $\bar{\mathfrak{M}}' \subset \bar{\mathfrak{M}}$ — инвариантное подпространство для $\operatorname{ad} \mathfrak{S}$. Но всякое линейное представление алгебры $\mathfrak{S}$ вполне приводимо, поэтому $\bar{\mathfrak{M}}$ разлагается в прямую сумму инвариантных относительно $\operatorname{ad} \mathfrak{S}$ подпространств: $\bar{\mathfrak{M}} = \bar{\mathfrak{M}}_0 + \bar{\mathfrak{M}}'$. Элемент $\bar{m}$ представляется тогда в виде суммы $\bar{m} = \bar{m}_0 + \bar{m}'$. Очевидно, что $[\mathfrak{S}, \bar{\mathfrak{M}}_0] = 0$. Следовательно, $\operatorname{ad} \bar{m} = \operatorname{ad} \bar{m}'$. — *Прим. перев.*

Пусть $U(\mathfrak{G})$, как и всегда, — обертывающая алгебра алгебры Ли $\mathfrak{G}$, $U'(\mathfrak{G})$ — идеал алгебры $U(\mathfrak{G})$, образованный элементами, не содержащими свободного члена. Через K_0 обозначим основное поле K, рассматриваемое как тривиальный $\mathfrak{G}$-модуль. Алгебру $U(\mathfrak{G})$ снабдим структурой левого $\mathfrak{G}$-модуля посредством левого регулярного представления. Возникает точная последовательность $\mathfrak{G}$-модулей

$$(S) \qquad 0 \longrightarrow U'(\mathfrak{G}) \longrightarrow U(\mathfrak{G}) \xrightarrow{\varepsilon} K_0 \longrightarrow 0,$$

где ε — естественное проектирование $U(\mathfrak{G})$ на K_0. Если теперь M — какой-нибудь $\mathfrak{G}$-модуль, то имеет место точная последовательность

$$(S') \quad 0 \longrightarrow \mathfrak{L}(K_0, M) \simeq M \longrightarrow \mathfrak{L}(U(\mathfrak{G}), M) \longrightarrow \mathfrak{L}(U'(\mathfrak{G}), M) \longrightarrow 0.$$

Согласно лемме 6 и предложению 1, группы когомологий алгебры $\mathfrak{G}$ со значениями в модуле $\mathfrak{L}(U(\mathfrak{G}), M)$ все равны нулю, за исключением нульмерной. Строя точную когомологическую последовательность, соответствующую последовательности (S'), получаем тогда изоморфизм между группами $H^2(\mathfrak{G}, M)$ и $H^1(\mathfrak{G}, \mathfrak{L}(U'(\mathfrak{G}), M))$, а значит, по теореме 1, и взаимно однозначное соответствие между элементами группы $H^2(\mathfrak{G}, M)$ и различными расширениями $\mathfrak{G}$-модуля $U'(\mathfrak{G})$ посредством M.

Пусть $\mathfrak{G}$-модуль V является таким расширением и пусть π — проекция V на $U'(\mathfrak{G})$. Очевидно, что $U'(\mathfrak{G})$ — алгебра (без единицы) и что всякий $\mathfrak{G}$-модуль можно рассматривать также как $U'(\mathfrak{G})$-модуль. При $u \in U'(\mathfrak{G})$, $v \in V$ пусть $u \cdot v$ обозначает элемент v, умноженный на u в $U'(\mathfrak{G})$-модуле V. В модуле V определим умножение по формуле $v_1 * v_2 = \pi(v_1) \cdot v_2$. Так как $\pi(v_1) \in U'(\mathfrak{G})$ и отображение π $\mathfrak{G}$-линейно, то $\pi(v_1 * v_2) = \pi(\pi(v_1) \cdot v_2) = \pi(v_1) \cdot \pi(v_2)$, т. е. π — гомоморфизм алгебры V в алгебру $U'(\mathfrak{G})$. Алгебра V ассоциативна, потому что $v_1 * (v_2 * v_3) = \pi(v_1)\pi(v_2) \cdot v_3 = \pi(v_1 * v_2) \cdot v_3 = (v_1 * v_2) * v_3$. Наконец, из определения умножения в V следует, что $m * v = 0$ при $m \in M$.

Пусть $\mathfrak{H} \subset V$ — полный прообраз при отображении π алгебры $\mathfrak{G} \subset U'(\mathfrak{G})$; так как множество $\mathfrak{G}$ замкнуто относительно операции коммутирования $[a, b] = ab - ba$, то тем же свойством обладает его прообраз $\mathfrak{H}$. Снабженное этой операцией коммутирования пространство $\mathfrak{H}$ становится алгеброй Ли. Ограничение π' гомоморфизма π на $\mathfrak{H}$ есть гомоморфизм алгебр Ли. Ядром гомоморфизма π' служит M. Таким образом, алгебра Ли $\mathfrak{H}$ — расширение алгебры Ли $\mathfrak{G}$ посредством M. При $m \in M$, $h \in \mathfrak{H}$ имеем $[h, m] = -m*h + h*m = \pi'(h)m$, откуда вытекает, что M является коммутативным идеалом алгебры $\mathfrak{H}$ и что присоединенное представление индуцирует в пространстве M данную структуру $\mathfrak{G}$-модуля.

Итак, всякому классу двумерных когомологий можно сопоставить такое расширение алгебры Ли $\mathfrak{G}$ посредством (коммутативной алгебры) M, что присоединенное представление индуцирует на M данную структуру $\mathfrak{G}$-модуля.

Сейчас мы докажем, что таким образом получаются все расширения алгебры $\mathfrak{G}$ посредством (коммутативной алгебры) M и притом каждое расширение (с точностью до эквивалентности) получается только один раз. Для этого заметим, что естественное вложение алгебры $\mathfrak{H}$ в ассоциативную алгебру без единицы V единственным образом продолжается в гомоморфизм f алгебры $U'(\mathfrak{H})$ в алгебру V. Так как $m*v = 0$, то этот гомоморфизм переводит в нуль множество $MU'(\mathfrak{H})$, которое, очевидно, является правым идеалом алгебры $U'(\mathfrak{H})$ и, с другой стороны, поскольку M — идеал алгебры $\mathfrak{H}$, является также ее левым идеалом (ср. пример 4 п. 2 гл. 1). Далее, алгебра $U'(\mathfrak{G})$ порождается своим подмножеством $\mathfrak{G}$; следовательно, алгебра V порождается $\mathfrak{H}$. Это означает, что определенный нами гомоморфизм f индуцирует гомоморфизм алгебры $U'(\mathfrak{H})/MU'(\mathfrak{H}) = E(\mathfrak{H})$ *на* V. С другой стороны, левое регулярное представление алгебры $\mathfrak{H}$ в алгебре $U'(\mathfrak{H})$ определяет на $U'(\mathfrak{H})$ структуру $\mathfrak{H}$-модуля и, следовательно, на $E(\mathfrak{H})$ — структуру $\mathfrak{H}/M$-модуля, т. е. $\mathfrak{G}$-модуля. В силу формулы $h*v = \pi(h)\cdot v$ гомоморфизм f алгебры $E(\mathfrak{H})$ в V $\mathfrak{G}$-линеен; то же верно для отображения алгебры $E(\mathfrak{H})$ на $U'(\mathfrak{G})$, которое получается из канонического гомоморфизма алгебры $U'(\mathfrak{H})$ в $U'(\mathfrak{G})$ факторизацией по $MU'(\mathfrak{H})$ (действительно, это отображение является гомоморфизмом алгебр, а структура $\mathfrak{G}$-модуля в рассматриваемых алгебрах задается при помощи регулярных представлений). Наконец, тождественное отображение M в $\mathfrak{H}$ индуцирует отображение M в $U'(\mathfrak{H})$ и после факторизации — в $E(\mathfrak{H})$.

Это последнее отображение $\mathfrak{G}$-линейно, так как

$$\pi(h) \cdot m = [h, m] = hm - mh \equiv hm \pmod{MU'(\mathfrak{H})}.$$

Иначе говоря, мы получили следующую коммутативную диаграмму:

$$\begin{tikzcd} & E(\mathfrak{H}) \arrow[dr] & \\ M \arrow[ur] \arrow[dr] & & U'(\mathfrak{G}) \\ & V \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

из которой явствует, что расширение V алгебры $U'(\mathfrak{G})$ посредством M эквивалентно расширению $E(\mathfrak{H})$ и потому однозначно определяется расширением $\mathfrak{H}$ алгебры $\mathfrak{G}$.

Будем теперь исходить из заданного расширения $\mathfrak{H}$ алгебры $\mathfrak{G}$ посредством M. Рассмотрим алгебру $E(\mathfrak{H}) = U'(\mathfrak{H})/MU'(\mathfrak{H})$, снабженную структурой $\mathfrak{G}$-модуля. Определим так же, как и выше, $\mathfrak{G}$-гомоморфизмы модуля M в $E(\mathfrak{H})$ и модуля $E(\mathfrak{H})$ на $U'(\mathfrak{G})$. Остается доказать, что последовательность

$$(S'') \qquad 0 \to M \to E(\mathfrak{H}) \to U'(\mathfrak{G}) \to 0$$

точна. Алгебра $U'(\mathfrak{G})$ изоморфна фактор-алгебре $U'(\mathfrak{H})/MU(\mathfrak{H})$ (см. гл. 1). С другой стороны, $MU(\mathfrak{H}) = M + MU'(\mathfrak{H})$. Следовательно, достаточно показать, что $M \cap MU'(\mathfrak{H}) = 0$. Пусть $\{m_1, \ldots, m_r, n_1, \ldots, n_s\}$ — такая база пространства $\mathfrak{H}$, что элементы m_i образуют базу подпространства M. По теореме Пуанкаре — Биркгофа — Витта мономы $M(\alpha, \beta) = m_1^{\alpha_1} \ldots m_r^{\alpha_r} n_1^{\beta_1} \ldots n_s^{\beta_s}$ образуют базу пространства $U(\mathfrak{H})$, если $\alpha = \{\alpha_i\}$, $\beta = \{\beta_s\}$ пробегают все системы целых неотрицательных чисел. Мономы $M(\alpha, \beta)$ с $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$ образуют базу пространства $U'(\mathfrak{H})$. Положим $\varepsilon_i = (0, \ldots, 1, \ldots, 0)$ (единица на i-ом месте). Тогда $m_i M(\alpha, \beta) = m_1^{\alpha_1} \ldots m_i^{\alpha_i + 1} \ldots \ldots m_r^{\alpha_r} n_1^{\beta_1} \ldots n_s^{\beta_s} = M(\alpha + \varepsilon_i, \beta)$, поскольку алгебра M коммутативна. Отсюда следует, что мономы $M(\alpha, \beta)$ с $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$ или $\alpha \neq \varepsilon_i$, $\beta = 0$ образуют базу пространства $MU'(\mathfrak{H})$.

Так как базу пространства M образуют мономы $M(\varepsilon_i, 0)$, то пересечение M и $MU'(\mathfrak{H})$ равно нулю.

Итак, *установлено взаимно однозначное соответствие между элементами группы* $H^2(\mathfrak{G}, M)$ *и классами эквивалентных расширений алгебры* $\mathfrak{G}$ *посредством коммутативной алгебры* M, *индуцирующих на* M *данную структуру* $\mathfrak{G}$*-модуля.*

Замечание. A priori неясно, что это соответствие совпадает с установленным в п. 9, однако это так, с точностью до знака.

Глава 4

ТЕОРИЯ РЕПЛИК. КРИТЕРИЙ КАРТАНА

М. Лазар

1. Некоторые результаты из теории матриц

Обозначения:

K — поле характеристики 0,

$\mathfrak{M}$ — конечномерное векторное пространство над K,

$\mathfrak{M}^*$ — пространство, дуальное к $\mathfrak{M}$,

$\mathfrak{M}_{r,s}$ — тензорное произведение r экземпляров пространства $\mathfrak{M}$ и s экземпляров пространства $\mathfrak{M}^*$,

$\mathfrak{G}(\mathfrak{M})$ — алгебра Ли эндоморфизмов пространства $\mathfrak{M}$.

Если L — какое-нибудь расширение поля K, то через $\mathfrak{M}^L$ мы будем обозначать векторное пространство над L, полученное из пространства $\mathfrak{M}$ расширением основного поля: $\mathfrak{M}^L = \mathfrak{M} \otimes_K L$. Для всякого K-эндоморфизма X пространства $\mathfrak{M}$ через X^L будет обозначаться L-эндоморфизм пространства $\mathfrak{M}^L$, совпадающий с X на $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{M}^L$.

Нам понадобятся некоторые вспомогательные результаты об эндоморфизмах пространства $\mathfrak{M}$, являющиеся, впрочем, классическими. Заметим прежде всего, что выбор любого эндоморфизма X пространства $\mathfrak{M}$ определяет на $\mathfrak{M}$ структуру $K[x]$-модуля[1]) по формуле

$$P \cdot m = P(X)\,m \qquad (P \in K[x]).$$

Предложение 1. *Пусть X — эндоморфизм пространства $\mathfrak{M}$. Всякий эндоморфизм, перестановочный со всеми эндоморфизмами, коммутирующими с X, является многочленом от X.*

Поскольку $K[x]$ — кольцо главных идеалов, этот результат вытекает из следующего:

---

[1]) $K[x]$ — кольцо многочленов от неопределенного переменного x с коэффициентами из поля K. — *Прим. перев.*

Пусть M — модуль конечного типа над кольцом главных идеалов A. Множество эндоморфизмов группы M, коммутирующих со всеми A-эндоморфизмами, совпадает с множеством умножений на элементы из A.

Действительно, M разлагается в прямую сумму однородных подмодулей M_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ с образующими e_i, причем если $\mathfrak{a}_i$ — аннулятор e_i, то $\mathfrak{a}_i \subset \mathfrak{a}_{i+1}$[1]). Если f коммутирует со всеми A-эндоморфизмами, то f коммутирует, в частности, с проекторами E_i, соответствующими разложению $M = \sum M_i$. Отсюда вытекает, что f сохраняет каждый подмодуль M_i и, следовательно, $f(e_i) = \lambda_i e_i$ $(\lambda_i \in A)$. Так как $\mathfrak{a}_i \subset \mathfrak{a}_{i+1}$, то существует, и притом единственный, A-эндоморфизм p модуля M, для которого $p(e_i) = e_{i+1}$ $(i < n)$, $p(e_n) = 0$. Отображение f перестановочно с p, и поэтому

$$f(e_i) = f(p^{i-1}(e_1)) = p^{i-1} f(e_1) = \lambda_1 p^{i-1}(e_1) = \lambda_1 e_i.$$

Далее, f должно коммутировать со всеми умножениями на элементы из A (являющимися A-эндоморфизмами). Следовательно, f — A-эндоморфизм, и он сводится к умножению на λ_1.

Предложение 2. *Следующие условия, относящиеся к эндоморфизму X пространства $\mathfrak{M}$, эквивалентны:*

1) *$K[x]$-модуль $\mathfrak{M}$, соответствующий X, полупрост;*

2) *существует такой многочлен P, не имеющий кратных делителей, что $P(X) = 0$;*

3) *если L — алгебраическое замыкание поля K, то эндоморфизм X^L приводится к диагональному виду.*

Если выполнено одно из этих условий, то эндоморфизм X называется *полупростым*.

1) $\Rightarrow$ 2). Если выполнено условие 1), то $K[x]$-модуль $\mathfrak{M}$ представим в виде прямой суммы простых модулей $\mathfrak{M}_i$. Пусть e_i — некоторый ненулевой элемент $\mathfrak{M}_i$ и (P_i) — аннулятор e_i. Многочлен P_i неприводим. Действительно, если $P_i = Q_i R_i$, то элемент $Q_i e_i = f_i \neq 0$ аннулируется многочленом R_i и потому порождает подмодуль, не совпадающий с $\mathfrak{M}_i$, что противоречит простоте модуля $\mathfrak{M}_i$. Если взять за P произведение всех различных многочленов из числа многочле-

[1]) См. предложение 4 добавления. — *Прим. ред.*

нов P_i, то $P(X)=0$. С другой стороны, P не имеет кратных делителей.

2) $\Longrightarrow$ 3). Многочлен P, не имея кратных делителей, разлагается в поле L в произведение различных линейных множителей, допустим $P(x)=\prod_i (x-\lambda_i)$. Тогда, положив

$$P_i(x)=\frac{P(x)}{P'(\lambda_i)(x-\lambda_i)},$$

получим $\sum P_i(x)=1$. Эндоморфизм $E_i=P_i(X^L)$ отображает пространство $\mathfrak{M}^L$ в подпространство собственных векторов, принадлежащее собственному значению λ_i, и обращает в нуль все собственные подпространства, принадлежащие собственным значениям λ_j, $j\neq i$. Следовательно, E_i — попарно ортогональные проекторы. В каждом из подпространств $\mathfrak{M}_i=E_i\mathfrak{M}^L$, дающих в сумме все пространство $\mathfrak{M}^L$, оператор X^L сводится к умножению на скаляр. Таким образом, X^L приводится к диагональному виду.

3) $\Longrightarrow$ 1). Пусть $\mathfrak{N}$ — какой-нибудь подмодуль $K[x]$-модуля $\mathfrak{M}$. Достаточно показать, что существует проектор E пространства $\mathfrak{M}$ на $\mathfrak{N}$, перестановочный с X, т. е. оператор E, удовлетворяющий следующим уравнениям:

(а) $\langle En,\ m'\rangle=\langle n,\ m'\rangle,\quad n\in\mathfrak{N},\ m'\in\mathfrak{M}^*$;

(б) $\langle Em,\ n'\rangle=0,\quad m\in\mathfrak{M},\ n'\in\mathfrak{N}^{\perp}\subset\mathfrak{M}^*$;

(в) $\langle EXm,\ m'\rangle=\langle Em,\ {}^tXm'\rangle,\quad m\in\mathfrak{M},\ m'\in\mathfrak{M}^*$.

Поскольку эндоморфизм X^L приводится к диагональному виду, то $L[x]$-модуль $\mathfrak{M}^L$ полупрост и, следовательно, существует проектор E' пространства $\mathfrak{M}^L$ на $\mathfrak{N}^L$, перестановочный с X^L. Это означает, что система линейных уравнений (а), (б), (в) с коэффициентами из K имеет решение в поле L; но тогда эта система имеет также решение в поле K.

Предложение 3. *Всякий эндоморфизм X пространства $\mathfrak{M}$ можно представить в виде $X=Y+Z$, где эндоморфизм Y полупрост, Z нильпотентен, причем Y и Z коммутируют. Такое представление единственно. Эндоморфизмы Y и Z являются полиномами от X. Всякий вектор, аннулируемый эндоморфизмом X, аннулируется также эндоморфизмами Y и Z.*

Существует такой полином f, не имеющий кратных делителей, и такое натуральное число r, что $f^r(X)=0$. Индукцией по l построим многочлены g_l, удовлетворяющие условиям

$$(A_q) \qquad f\left(x-\sum_{l=0}^{q} g_l(x)\, f^l(x)\right)\equiv 0 \pmod{f^{q+1}(x)}.$$

Положим $g_0=0$. Очевидно, что условие (A_0) при этом удовлетворяется. Допустим, что уже найдены многочлены $g_0, \ldots, g_{n-1}$, и пусть

$$P=x-\sum_{l=0}^{n-1} g_l f^l.$$

По предположению индукции, выполнено условие

$$(A_{n-1}) \qquad f(P)\equiv 0 \pmod{f^n}.$$

Условие (A_n) имеет вид

$$(A_n) \qquad f(P-g_n f^n)\equiv 0 \pmod{f^{n+1}}.$$

По формуле Тейлора

$$f(P-g_n f^n)=f(P)-g_n f^n f'(P)+f^{n+1}R,$$

и, так как $f(P)=\varphi f^n$, то достаточно подобрать g_n так, чтобы выполнялось условие

$$\varphi-g_n f'\equiv 0 \pmod f.$$

Этому условию можно удовлетворить, так как многочлены f и f' взаимно просты.

Подобрав многочлены g_l, из условия (A_{r-1}) получаем

$$f\left(X-\sum_{l=0}^{r-1} g_l(X)\, f^l(X)\right)=0,$$

так как $f^r(X)=0$. Положим $Z=\sum\limits_{l=0}^{r-1} g_l(X)\, f^l(X)$ и $Y=X-Z$. Поскольку $g_0=0$, Z делится на $f(X)$, и поэтому $Z^r=0$. Эндоморфизм Y удовлетворяет уравнению $f(Y)=0$ и в силу предложения 2 полупрост (так как f не имеет кратных делителей).

Итак, доказано существование искомого разложения. Пусть теперь $X=Y'+Z'$ — другое разложение подобного рода. Тогда $[X, Y'] = [X, Z'] = 0$, следовательно, Y' и Z коммутируют с Y и Z. Далее, $Y + Z = Y' + Z'$, и

$$Y - Y' = Z' - Z.$$

Из условия 3) предложения 2 вытекает, что разность $Y - Y'$ двух перестановочных полупростых эндоморфизмов полупроста. С другой стороны, разность $Z' - Z$ двух перестановочных нильпотентных эндоморфизмов нильпотентна. Легко видеть, что эндоморфизм, одновременно полупростой и нильпотентный, равен нулю. Следовательно, $Y = Y'$ и $Z = Z'$.

Пусть $e \in \mathfrak{M}$, $Xe = 0$. Поскольку $Z = P(X)$, имеем $Ze = P(X)e = P(0)e = \lambda e$. Так как $Z^h = 0$ для некоторого $h > 0$, то $\lambda = 0$. Отсюда $Ze = 0$, $Ye = Xe - Ze = 0$.

2. Теория реплик

Линейное представление $X \to X$ алгебры Ли $\mathfrak{Gl}(\mathfrak{M})$ в пространстве $\mathfrak{M}$ индуцирует, как было сказано в п. 5 гл. 3, ее представление $X \to X_{r,s}$ в пространстве $\mathfrak{M}_{r,s}$.

Определение 1. *Элемент $X' \in \mathfrak{Gl}(\mathfrak{M})$ называется репликой эндоморфизма X, если всякий вектор пространства $\mathfrak{M}_{r,s}$, аннулируемый эндоморфизмом $X_{r,s}$, аннулируется также эндоморфизмом $X'_{r,s}$.*

Предложение 4. а) *Если X' — реплика X, а X'' — реплика X', то X'' — реплика X.* б) *Если X' — реплика X, то $X'_{r,s}$ — реплика $X_{r,s}$.*

Утверждение а) очевидно.

Для доказательства б) заметим, что пространство $(\mathfrak{M}_{r,s})_{r',s'}$ естественным образом отождествляется с пространством $\mathfrak{M}_{rr'+ss',\, rs'+sr'}$, причем это отождествление совместимо с рассматриваемыми представлениями алгебры $\mathfrak{Gl}(\mathfrak{M})$ (см. п. 5 гл. 3).

В п. 5 гл. 3 мы видели, что пространство $\mathfrak{M}^* \otimes \mathfrak{M}$ естественным образом изоморфно пространству $\mathfrak{L}(\mathfrak{M}, \mathfrak{M}) = \mathfrak{Gl}(\mathfrak{M})$. Представление θ алгебры $\mathfrak{Gl}(\mathfrak{M})$ в пространстве $\mathfrak{L}(\mathfrak{M}, \mathfrak{M})$ задается формулой $\theta(X) \cdot f = X \circ f - f \circ X$. Иными словами,

$$X_{1,1}f = [X, f].$$

Пусть X' — реплика эндоморфизма X. Если f коммутирует с X, то $X_{1,1}f=0$ и, следовательно, $X'_{1,1}f=0$, т. е f коммутирует с X'. Из предложения 1 заключаем, что $X'=P(X)$, где P — некоторый многочлен. Более того, многочлен P можно выбрать не содержащим свободного члена. Для доказательства этого рассмотрим два возможных случая.

1) Не существует *ненулевого элемента в* $\mathfrak{M}$, аннулируемого эндоморфизмом X. Тогда X удовлетворяет некоторому полиномиальному уравнению с ненулевым свободным членом. Можно считать, что для некоторого многочлена Q, не содержащего свободного члена, $Q(X)=1$. Тогда свободный член полинома P можно заменить на полином, кратный Q.

2) X обращает в 0 некоторый ненулевой вектор $e\in\mathfrak{M}$. В этом случае $X'e=P(X)e=0$. Так как $P(X)e=P(0)e$, то $P(0)=0$.

Далее, так как $X'_{r,s}$ — реплика эндоморфизма $X_{r,s}$, то $X'_{r,s}=P(X_{r,s})$. Обратное очевидно: если $X'_{r,s}$ — полином от $X_{r,s}$, не содержащий свободного члена, то всякий вектор, аннулируемый эндоморфизмом $X_{r,s}$, аннулируется также эндоморфизмом $X'_{r,s}$. Отсюда

Предложение 5. *Для того чтобы эндоморфизм X' был репликой эндоморфизма X, необходимо и достаточно, чтобы для всякой пары (r, s) эндоморфизм $X'_{r,s}$ был представим в виде полинома от $X_{r,s}$ без свободного члена.*

Докажем несколько простых свойств реплик, важных для дальнейшего.

Предложение 6. *Если Y и Z — соответственно полупростая и нильпотентная компоненты эндоморфизма X, то $Y_{r,s}$ и $Z_{r,s}$ — полупростая и нильпотентная компоненты эндоморфизма $X_{r,s}$.*

В самом деле, из пункта 3) предложения 2 следует, что эндоморфизм $Y_{r,s}$ полупрост. Далее, эндоморфизм $Z_{r,s}$ нильпотентен и $[Y_{r,s}, Z_{r,s}]=[Y, Z]_{r,s}=0$. Наконец, $X_{r,s}=$ $=Y_{r,s}+Z_{r,s}$, откуда в силу единственности подобного разложения и следует доказываемое утверждение.

Следствие. Полупростая и нильпотентная компоненты эндоморфизма являются его репликами.

Действительно, эндоморфизмы $Y_{r,s}$ и $Z_{r,s}$, будучи соответственно полупростой и нильпотентной компонентами эндоморфизма $X_{r,s}$, аннулируют всякий вектор, аннулируемый эндоморфизмом $X_{r,s}$ (предложение 3).

Посмотрим, наконец, что получается при расширении основного поля.

Предложение 7. *Если X' — реплика X, то X'^L — реплика X^L. Обратно, всякая реплика эндоморфизма X^L есть линейная комбинация с коэффициентами из L реплик эндоморфизма X.*

Согласно предложению 5, если X' — реплика эндоморфизма X, то $X'_{r,s}=P(X_{r,s})$; но тогда $X'^L_{r,s}=P\left((X_{r,s})^L\right)=$ $=P\left((X^L)_{r,s}\right)$, т. е. X'^L — реплика эндоморфизма X^L. Обратно, всякий эндоморфизм Y пространства $\mathfrak{M}^L$ представим в виде $Y=\sum \omega_i Y_i^L$, где $Y_i \in \mathfrak{Gl}(\mathfrak{M})$, а ω_i — элементы поля L, линейно независимые над K. Тогда

$$Y_{r,s}=\sum \omega_i (Y_i)^L_{r,s}.$$

Если какой-либо вектор из $\mathfrak{M}_{r,s}$ аннулируется эндоморфизмом $Y_{r,s}$, то он аннулируется каждым эндоморфизмом $(Y_i)^L_{r,s}$ в отдельности. Следовательно, если Y — реплика X^L, то всякий вектор из $\mathfrak{M}_{r,s}$, аннулируемый эндоморфизмом $X_{r,s}$, аннулируется также эндоморфизмами $(Y_i)_{r,s}$. Отсюда следует, что Y_i — реплики эндоморфизма X.

3. Критерий нильпотентности

Теорема 1. *Для того чтобы эндоморфизм X был нильпотентен, необходимо и достаточно, чтобы $\mathrm{Tr}(XX')=0$ для всякой его реплики X'.*

Если эндоморфизм X нильпотентен, то, поскольку X' коммутирует с X, эндоморфизм XX' также нильпотентен и тем более имеет нулевой след.

Обратно, пусть выполнено условие теоремы и $X=Y+Z$ — разложение эндоморфизма X на полупростую и нильпотентную компоненты. Согласно следствию предложения 6, Y — реплика эндоморфизма X, поэтому всякая реплика Y' эндоморфизма Y является также репликой эндоморфизма X. Отсюда следует, что Y' коммутирует с Z, так что эндоморфизм $Y'Z$ нильпотентен и $\mathrm{Tr}(Y'Z)=0$. С другой стороны;

$\mathrm{Tr}(Y'X)=0$, так что $\mathrm{Tr}(Y'Y)=0$. Дело свелось к доказательству следующего утверждения:

Если Y — *полупростой эндоморфизм и* $\mathrm{Tr}(YY')=0$ *для всякой его реплики* Y', *то* $Y=0$.

Предложение 7 позволяет нам ограничиться случаем, когда основное поле K алгебраически замкнуто. Пусть $\{e_i\}$ — такая база пространства $\mathfrak{M}$, что $Ye_i=\lambda_i e_i$. Всякая реплика Y' эндоморфизма Y должна быть в той же базе диагональной, что видно, например, из предложения 5. Пусть $Y'e_i=\mu_i e_i$. Эндоморфизм $Y_{r,s}$ диагонален в базе пространства $\mathfrak{M}_{r,s}$, образованной векторами вида $e_{i_1}\otimes\ldots\otimes e_{i_r}\otimes e^*_{j_1}\otimes\ldots$ $\ldots\otimes e^*_{j_s}=f_{i,j}$, где $\{e^*_i\}$ — база пространства $\mathfrak{M}^*$, дуальная к базе $\{e_i\}$ пространства $\mathfrak{M}$. При этом собственное значение соответствующее вектору $f_{i,j}$, равно $\lambda_{i_1}+\ldots+\lambda_{i_r}-\lambda_{j_1}-\ldots$ $\ldots-\lambda_{j_s}$. Векторы, аннулируемые эндоморфизмом $Y_{r,s}$, суть линейные комбинации векторов $f_{i,j}$, для которых $\sum\lambda_{i_k}-\sum\lambda_{j_n}=0$. Если всякое целочисленное линейное соотношение между числами λ_i выполняется и для μ_i, то $Y'_{r,s}$ аннулирует все эти векторы и, следовательно, Y' — реплика Y.

Допустим теперь, что $\mathrm{Tr}(YY')=0$ и $Y\neq 0$. Элементы $\lambda_i\in K$ порождают над простым подполем Q поля K векторное пространство $P\neq 0$. Так как по предположению поле K имеет характеристику 0, то Q — поле рациональных чисел. Если $h\neq 0$ — какое-нибудь Q-линейное отображение P в Q и $\mu_i=h(\lambda_i)$, то всякое целочисленное линейное соотношение между λ_i выполняется также и для μ_i. Получаем $0=\mathrm{Tr}(YY')=$ $=\sum\lambda_i h(\lambda_i)$. Поскольку отображение h Q-линейно и $h(\lambda_i)\in Q$, имеем $\sum h(\lambda_i h(\lambda_i))=\sum h(\lambda_i)^2=0$ и, следовательно, $h(\lambda_i)=0$, что противоречит тому, что $h\neq 0$. Теорема доказана.

4. Алгебраические алгебры Ли

Определение 2. *Подалгебра* $\mathfrak{G}$ *алгебры Ли* $\mathfrak{Gl}(\mathfrak{M})$ ***называется алгебраической, если вместе со всяким эндоморфизмом*** X *она содержит всякую его реплику* X'.

Примеры. Алгебра $\mathfrak{G}(\mathfrak{M})$ алгебраична.

Пересечение всех алгебраических алгебр, содержащих данную алгебру Ли $\mathfrak{G}\subset\mathfrak{G}\mathfrak{l}(\mathfrak{M})$, есть алгебраическая алгебра $\overline{\mathfrak{G}}$, называемая *алгебраической оболочкой* алгебры $\mathfrak{G}$.

Предложение 8. *Пусть $\overline{\mathfrak{G}}$ — алгебраическая оболочка алгебры Ли $\mathfrak{G}\subset\mathfrak{G}\mathfrak{l}(\mathfrak{M})$. Тогда*

1) *всякий идеал алгебры $\mathfrak{G}$ остается идеалом и в алгебре $\overline{\mathfrak{G}}$;*

2) *центр алгебры $\mathfrak{G}$ содержится в центре алгебры $\overline{\mathfrak{G}}$;*

3) *алгебры $\mathfrak{G}$ и $\overline{\mathfrak{G}}$ имеют одну и ту же производную алгебру;*

4) *если $\mathfrak{A}$ — идеал алгебры $\mathfrak{G}$, то $[\overline{\mathfrak{G}}, \overline{\mathfrak{A}}]\subset\mathfrak{A}$.*

При доказательстве этого предложения будем использовать следующую лемму.

Лемма. *Пусть P и Q — подпространства пространства $\mathfrak{G}\mathfrak{l}(\mathfrak{M})$ и $Q\subset P$. Элементы $X\in\mathfrak{G}\mathfrak{l}(\mathfrak{M})$, такие, что $\mathrm{ad}\,X\cdot P\subset Q$, образуют алгебраическую алгебру Ли.*

В самом деле, $\mathfrak{G}\mathfrak{l}(\mathfrak{M})\simeq\mathfrak{M}_{1,1}$, причем $\mathrm{ad}\,X=X_{1,1}$. Если X' — какая-либо реплика X, то эндоморфизм $X'_{1,1}=\mathrm{ad}\,X'$ представим в виде полинома от $\mathrm{ad}\,X$ без свободного члена. Поэтому из $\mathrm{ad}\,X\cdot P\subset Q$ следует, что $\mathrm{ad}\,X'\cdot P\subset Q$.

Предложение 8 доказывается теперь без труда.

1) $P=Q=\mathfrak{A}$ — идеал алгебры $\mathfrak{G}$.

$$[\mathfrak{G}, \mathfrak{A}]\subset\mathfrak{A}\Rightarrow[\overline{\mathfrak{G}}, \mathfrak{A}]\subset\mathfrak{A}.$$

2) $Q=0$; $P=\mathfrak{Z}$ — центр алгебры $\mathfrak{G}$.

$$[\mathfrak{G}, \mathfrak{Z}]=0\Rightarrow[\overline{\mathfrak{G}}, \mathfrak{Z}]=0.$$

3) $P=\mathfrak{G}$, $Q=\mathfrak{G}^{(2)}=[\mathfrak{G}, \mathfrak{G}]$.

$$[\mathfrak{G}, \mathfrak{G}]\subset\mathfrak{G}^{(2)}\Rightarrow[\overline{\mathfrak{G}}, \mathfrak{G}]\subset\mathfrak{G}^{(2)}.$$

Далее, возьмем $P=\overline{\mathfrak{G}}$, $Q=\mathfrak{G}^{(2)}$.

$$[\mathfrak{G}, \overline{\mathfrak{G}}]\subset\mathfrak{G}^{(2)}\Rightarrow[\overline{\mathfrak{G}}, \overline{\mathfrak{G}}]\subset\mathfrak{G}^{(2)}=[\mathfrak{G}, \mathfrak{G}].$$

4) В силу 1) $[\mathfrak{A}, \overline{\mathfrak{G}}]\subset\mathfrak{A}$. Возьмем $P=\overline{\mathfrak{G}}$, $Q=\mathfrak{A}$.

$$[\mathfrak{A}, \overline{\mathfrak{G}}]\subset\mathfrak{A}\Rightarrow[\overline{\mathfrak{A}}, \overline{\mathfrak{G}}]\subset\mathfrak{A}.$$

Следствие. *$\mathfrak{G}$ — идеал в $\overline{\mathfrak{G}}$, и $\overline{\mathfrak{G}}/\mathfrak{G}$ — коммутативная алгебра.*

Предложение 9. *Если A — конечномерная (не обязательно ассоциативная) алгебра над K, то ее дифференцирования образуют алгебраическую алгебру Ли.*

Операция умножения в алгебре A — это элемент пространства $\mathfrak{L}(A \otimes A,\ A) \simeq A_{1,2}$; обозначим его через μ. Для всякого эндоморфизма X пространства A

$$\nu = X_{1,2} \cdot \mu = X \circ \mu - \mu \circ (1 \otimes X + X \otimes 1),$$

т. е.

$$\nu(a \otimes b) = X\mu(a \otimes b) - \mu(a \otimes Xb + Xa \otimes b) = \\ = X(ab) - a \cdot Xb - Xa \cdot b.$$

Условие $\nu = X_{1,2}\mu = 0$ эквивалентно тому, что X — дифференцирование. Если X' — реплика дифференцирования X, то $X'_{1,2}\mu = 0$, и X' — также дифференцирование.

Предложение 10. *Пусть $\mathfrak{G}$ — подалгебра алгебры Ли $\mathfrak{gl}(\mathfrak{M})$ и $\mathfrak{N}$ — множество таких элементов $N \in \mathfrak{G}$, что $\mathrm{Tr}(NX) = 0$ для всех $X \in \mathfrak{G}$. Тогда $\mathfrak{N}$ — идеал алгебры $\mathfrak{G}$; всякий элемент из $[\mathfrak{N},\ \mathfrak{G}]$ нильпотентен. Если алгебра Ли $\mathfrak{G}$ алгебраична, то всякий элемент из $\mathfrak{N}$ нильпотентен.*

Легко видеть, что $\mathrm{Tr}([X,\ Y]Z) = \mathrm{Tr}(X[Y,\ Z])$ для любых $X,\ Y,\ Z$. Если $X,\ Y \in \mathfrak{G}$, $Z \in \mathfrak{N}$, то $\mathrm{Tr}([X,\ Y]Z) = 0$ и поэтому $\mathrm{Tr}(X[Y,\ Z]) = 0$, т. е. $\mathfrak{N}$ — идеал в $\mathfrak{G}$.

Если алгебра $\mathfrak{G}$ алгебраична, то для всякого элемента $N \in \mathfrak{N}$ и всякой его реплики N' имеем $\mathrm{Tr}(NN') = 0$. Следовательно (теорема 1), эндоморфизм N нильпотентен.

В общем случае пусть $N \in \mathfrak{N}$, $X \in \mathfrak{G}$, $Y \in \overline{\mathfrak{G}}$. Тогда $[X,\ Y] \subset \mathfrak{G}$ и $\mathrm{Tr}([N,\ X]Y) = \mathrm{Tr}(N[X,\ Y]) = 0$. Так как реплики эндоморфизма $\sum [N_i,\ X_i]$ лежат в $\overline{\mathfrak{G}}$, то отсюда следует, что этот эндоморфизм нильпотентен.

Теорема 2. *Если билинейная форма $\mathrm{Tr}(XY)$ равна тождественно нулю на алгебре Ли $\mathfrak{G} \subset \mathfrak{gl}(\mathfrak{M})$, то эта алгебра разрешима.*

Действительно, согласно предложению 10, всякий элемент $X \in [\mathfrak{G}, \mathfrak{G}]$ нильпотентен. Отсюда вытекает (п. 1 гл. 2) нильпотентность алгебры Ли $[\mathfrak{G}, \mathfrak{G}]$ и, следовательно, разрешимость алгебры Ли $\mathfrak{G}$ (следствие теоремы 2 гл. 2).

5. Полупростые алгебры Ли. Критерий Картана

Определение 3. *Алгебра Ли называется полупростой, если она не содержит разрешимых идеалов, отличных от нуля. Алгебра Ли называется простой, если ее размерность больше единицы и она не содержит нетривиальных идеалов.*

Из этого определения следует, что всякая простая алгебра Ли полупроста[1]).

Теорема 3 (Картан). 1) *Если $\mathfrak{G}$ — полупростая алгебра Ли и θ — ее точное линейное представление, то билинейная форма* $\mathrm{Tr}(\theta(x)\theta(y))$ *невырождена.*

2) *Если форма Киллинга $B(x, y) = \mathrm{Tr}(\mathrm{ad}\, x \circ \mathrm{ad}\, y)$ в алгебре $\mathfrak{G}$ невырождена, то $\mathfrak{G}$ полупроста.*

Элементы $n \in \mathfrak{G}$, для которых $\mathrm{Tr}(\theta(x)\theta(n)) = 0$ при всех $x \in \mathfrak{G}$, образуют, согласно предложению 10, идеал в алгебре $\mathfrak{G}$. Для всяких $n, n' \in \mathfrak{N}$ имеем $\mathrm{Tr}(\theta(n)\theta(n')) = 0$, откуда в силу теоремы 2 следует, что алгебра $\theta(\mathfrak{N})$ разрешима. Поскольку представление θ точно, алгебра $\mathfrak{N}$ также разрешима. Так как алгебра $\mathfrak{G}$ полупроста, то $\mathfrak{N} = 0$, т. е. форма $\mathrm{Tr}(\theta(x)\theta(y))$ невырождена.

Предположим теперь, что форма Киллинга алгебры Ли $\mathfrak{G}$ невырождена и алгебра $\mathfrak{G}$ тем не менее не полупроста. Пусть $\mathfrak{A} \neq 0$ — разрешимый идеал алгебры $\mathfrak{G}$ и n — его высота как разрешимой алгебры[2]). Тогда $\mathfrak{B} = \mathfrak{A}^{(n-1)}$ — коммутативный идеал алгебры $\mathfrak{G}$, отличный от нуля[3]). Если $x, y \in \mathfrak{G}$, $b \in \mathfrak{B}$, то $[b, y] \in \mathfrak{B}$, $[x, [b, y]] \in \mathfrak{B}$, $[b, [x, [b, y]]] = 0$, т. е.

---

[1]) Если алгебра Ли $\mathfrak{G}$ проста и тем не менее содержит ненулевой разрешимый идеал, то она сама разрешима и должна содержать идеал коразмерности 1, чего не может быть. — *Прим. перев.*

[2]) То есть наименьшее натуральное число n, для которого $\mathfrak{A}^{(n)} = 0$. — *Прим. перев.*

[3]) См. пример 6 п. 1 гл. 1. — *Прим. ред.*

$\operatorname{ad} b \circ \operatorname{ad} x \circ \operatorname{ad} b = 0$. Тем более $(\operatorname{ad} x \circ \operatorname{ad} b)^2 = 0$ и $\operatorname{Tr}(\operatorname{ad} x \circ \operatorname{ad} b) = 0$, что противоречит невырожденности формы Киллинга.

Обратимся теперь к изучению идеалов полупростой алгебры Ли.

Предложение 11. *Пусть $\mathfrak{G}$ — полупростая алгебра Ли, $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ — ее идеалы. Следующие утверждения эквивалентны*:
1) $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B} = 0$;
2) $[\mathfrak{A}, \mathfrak{B}] = 0$;
3) $\mathfrak{A}$ *и* $\mathfrak{B}$ *ортогональны относительно формы Киллинга.*

1) $\Rightarrow$ 2). Достаточно заметить, что $[\mathfrak{A}, \mathfrak{B}] \subset \mathfrak{A} \cap \mathfrak{B}$.

2) $\Rightarrow$ 3). Пусть $a \in \mathfrak{A}$, $b \in \mathfrak{B}$, $x \in \mathfrak{G}$. Тогда $[b, x] \in \mathfrak{B}$ и $[a, [b, x]] \in [\mathfrak{A}, \mathfrak{B}] = 0$, откуда $\operatorname{ad} a \circ \operatorname{ad} b = 0$ и $B(a, b) = 0$.

3) $\Rightarrow$ 1). Форма Киллинга тождественно обращается в 0 на идеале $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B}$. По теореме 2 отсюда вытекает, что этот идеал разрешим. Так как по предположению алгебра $\mathfrak{G}$ полупроста, то $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B} = 0$.

Из доказанного предложения следует, что ко всякому идеалу $\mathfrak{A}$ полупростой алгебры Ли $\mathfrak{G}$ имеется дополнительный идеал, а именно ортогональное дополнение к $\mathfrak{A}$ в смысле формы Киллинга. Иными словами, *присоединенное представление алгебры $\mathfrak{G}$ вполне приводимо.*

Теорема 4. *Алгебра Ли $\mathfrak{G}$ полупроста тогда и только тогда, когда она разложима в прямую сумму простых алгебр Ли $\mathfrak{G}_i$. В этом случае всякий идеал $\mathfrak{H}$ алгебры $\mathfrak{G}$ есть прямая сумма некоторых $\mathfrak{G}_i$. Указанное разложение полупростой алгебры единственно.*

Пусть алгебра $\mathfrak{G}$ полупроста. Поскольку, как было замечено выше, ко всякому идеалу алгебры $\mathfrak{G}$ имеется дополнительный идеал, алгебра $\mathfrak{G}$ есть прямая сумма некоторого числа минимальных идеалов $\mathfrak{G}_i$. Всякий минимальный идеал прост, так как он, во-первых, не коммутативен и, следовательно, имеет размерность больше единицы и, во-вторых, не содержит меньших идеалов в силу своей минимальности [1]).

---

[1]) Вообще говоря, следует делать различие между идеалами алгебры Ли $\mathfrak{G}$, содержащимися в подалгебре (или даже идеале) $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{G}$, и идеалами самой подалгебры $\mathfrak{A}$. Однако, если $\mathfrak{G}$ — полу-

Пусть теперь $\mathfrak{H}$ — какой-нибудь идеал алгебры $\mathfrak{G}$. Тогда $\mathfrak{H}$ есть прямая сумма минимальных идеалов: ведь присоединенное представление алгебры $\mathfrak{G}$ вполне приводимо. Поэтому достаточно доказать, что всякий минимальный идеал $\mathfrak{H}$ алгебры $\mathfrak{G}$ совпадает с одним из идеалов $\mathfrak{G}_i$. Так как форма $B(x, y)$ невырождена, а подпространства $\mathfrak{G}_i$ в сумме дают $\mathfrak{G}$, то идеал $\mathfrak{H}$ не может быть ортогонален ко всем $\mathfrak{G}_i$. Для определенности предположим, что $\mathfrak{H}$ не ортогонален к $\mathfrak{G}_1$. Тогда из предложения 11 вытекает, что $\mathfrak{H} \cap \mathfrak{G}_1 \neq 0$. Но идеалы $\mathfrak{H}$ и $\mathfrak{G}_1$ минимальны, следовательно, $\mathfrak{H} = \mathfrak{G}_1$.

Единственность разложения вытекает теперь из того, что $\mathfrak{G}_i$ — это все минимальные идеалы алгебры $\mathfrak{G}$ и тем самым они однозначно определены[1]).

Следствие 1. *Если $\mathfrak{G}$ — полупростая алгебра Ли, то* $\mathfrak{G} = [\mathfrak{G}, \mathfrak{G}]$.

Действительно, пусть $\mathfrak{G} = \sum \mathfrak{G}_i$ — разложение алгебры $\mathfrak{G}$ в прямую сумму простых алгебр. Тогда $[\mathfrak{G}, \mathfrak{G}] \supset \sum [\mathfrak{G}_i, \mathfrak{G}_i] = \sum \mathfrak{G}_i = \mathfrak{G}$ [2]).

Следствие 2. *Всякий идеал полупростой алгебры Ли полупрост*[3]).

простая алгебра Ли, а $\mathfrak{A}$ — ее идеал, то всякий идеал $\mathfrak{A}'$ алгебры $\mathfrak{A}$ есть также идеал алгебры $\mathfrak{G}$. Действительно, пусть $\mathfrak{B}$ — идеал, дополнительный к $\mathfrak{A}$. Тогда

$$[\mathfrak{A}', \mathfrak{G}] \subset [\mathfrak{A}', \mathfrak{A}] + [\mathfrak{A}', \mathfrak{B}] \subset \mathfrak{A} + [\mathfrak{A}, \mathfrak{B}] = \mathfrak{A}.$$

— *Прим. перев.*

[1]) Осталось недоказанным утверждение теоремы о том, что всякая алгебра Ли $\mathfrak{G}$, являющаяся прямой суммой простых алгебр $\mathfrak{G}_i$, полупроста. Это можно доказать, например, так. Идеалы $\mathfrak{G}_i$, как легко видеть, попарно ортогональны в смысле формы Киллинга в алгебре $\mathfrak{G}$. Каждый из них полупрост, и поэтому (теорема 3) форма Киллинга алгебры $\mathfrak{G}$ на нем невырождена. Отсюда следует, что форма Киллинга невырождена во всем пространстве $\mathfrak{G}$. Осталось применить теорему 3. — *Прим. перев.*

[2]) $[\mathfrak{G}_i, \mathfrak{G}_i] = \mathfrak{G}_i^{(2)}$ — идеал в $\mathfrak{G}_i$. Так как алгебра $\mathfrak{G}_i$ проста, то $\mathfrak{G}_i^{(2)} = \mathfrak{G}_i$. — *Прим. перев.*

[3]) Согласно теореме 4, всякий идеал полупростой алгебры есть прямая сумма простых алгебр и поэтому, по той же теореме, полупрост. — *Прим. перев.*

Глава 5

ПОЛУПРОСТЫЕ АЛГЕБРЫ ЛИ

П. Картье

В этой главе предполагается, что *основное поле K имеет характеристику* 0.

1. Предварительные сведения

Векторное пространство V произвольной размерности над K, снабженное семейством A эндоморфизмов, называется *вполне приводимым*, если для всякого его подпространства, инвариантного относительно A, имеется дополнительное подпространство, также инвариантное относительно A.

Лемма 1. *Пусть V — вполне приводимое векторное пространство с эндоморфизмами. Обозначим через $V^\natural$ подпространство, образованное векторами, аннулируемыми всеми эндоморфизмами $X \in A$, и через V^0 — подпространство, порожденное векторами Xv, $X \in A$, $v \in V$. Тогда*:

1) *V есть прямая сумма $V^\natural$ и V^0;*

2) *если пространство V снабжено дифференциалом d, коммутирующим со всеми операторами $X \in A$ и таким, что для всякого цикла v и для всякого $X \in A$ элемент Xv — граница, то $H(V) \simeq H(V^\natural)$. (Через $H(V)$ обозначена группа гомологий пространства V относительно дифференциала d: $H(V) = Z(V)/B(V)$.)*

1) Очевидно, что подпространства $V^\natural$ и V^0 инвариантны относительно A. Существует инвариантное подпространство W, дополнительное к $V^\natural$. Если $v = w + v'$, $w \in W$, $v' \in V^\natural$, то $Xv = Xw \in W$, следовательно, $W \supset V^0$. Возьмем теперь инвариантное подпространство T, дополнительное к V^0 в W. Если $t \in T$, то $Xt \in T \cap V^0 = 0$, т. е. $t \in V^\natural$; но $T \cap V^\natural \subset W \cap V^\natural = 0$, так что $t = 0$. Итак, $T = 0$, $W = V^0$ и V — прямая сумма $V^\natural$ и V^0. Заметим, что если U — инвариантное подпространство пространства V, то U — прямая

сумма U^0 и $U^\natural$. Очевидно, что $U^0 \subset V^0$, $U^\natural \subset V^\natural$. Следовательно, $U^0 = U \cap V^0$, $U^\natural = U \cap V^\natural$. В частности, если $U \subset V^0$, то $U = U^0$.

2) Поскольку дифференциал d перестановочен с эндоморфизмами из A, подпространства V^0 и $V^\natural$ инвариантны относительно d. Группа гомологий $H(V)$ разбивается в прямую сумму групп $H(V^0)$ и $H(V^\natural)$. Достаточно показать, что $H(V^0) = 0$. Пусть $v \in V^0$, $dv = 0$. Обозначим через U инвариантное подпространство, порожденное вектором v. Очевидно, что все элементы из U — циклы. С другой стороны, $U = U^0$, поскольку $U \subset V^0$. В частности, вектор $v \in U$ может быть представлен в виде $v = \sum \mu_i X_i u_i$, где $X_i \in A$, $u_i \in U$. Так как u_i — циклы, то $X_i u_i$, а значит, и v — границы.

Доказанная лемма позволяет ввести операцию *проектирования* $\natural$ *пространства* V *на подпространство* $V^\natural$ *параллельно подпространству* V^0. При этом $v^{\natural\natural} = v^\natural$, $(Xv)^\natural = 0$ для всяких $v \in V$, $X \in A$.

2. Когомологии полупростых алгебр Ли

Пусть $\mathfrak{G}$ — полупростая алгебра Ли, θ — ее неприводимое нетривиальное линейное представление в конечномерном пространстве V, $\mathfrak{A}$ — ядро представления θ. Существует такой ненулевой идеал $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{G}$, что алгебра $\mathfrak{G}$ изоморфна прямому произведению $\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$ (см. п. 5 гл. 4). Ограничение представления θ на идеале $\mathfrak{B}$ точно. Поскольку идеал $\mathfrak{B}$ полупрост, ограничение на $\mathfrak{B}$ билинейной формы $\mathrm{Tr}(\theta(x)\theta(y))$ невырождено (теорема 3 гл. 4). В силу следствия из предложения 2 гл. 3 все группы когомологий $H^p(\mathfrak{G}, V)$, $p \geqslant 0$, равны нулю. Если θ — нулевое представление алгебры $\mathfrak{G}$ в пространстве $V = K$, то $H^1(\mathfrak{G}, V) = 0$, так как $\mathfrak{G} = [\mathfrak{G}, \mathfrak{G}]$ [1]. Итак, $H^1(\mathfrak{G}, V) = 0$ для всех простых $\mathfrak{G}$-модулей V. Применяя теорему 2 гл. 3, получаем, что *всякое конечномерное линейное представление полупростой алгебры Ли* $\mathfrak{G}$ *вполне приводимо.*

Если θ — линейное представление полупростой алгебры $\mathfrak{G}$ в конечномерном векторном пространстве V, то простран-

---

[1] См. следствие 1 теоремы 4 гл. 4, а также доказательство следствия теоремы 3 гл. 3. — *Прим. перев.*

ство V разбивается в прямую сумму $V = V^{\natural} + \sum V_i$, где на каждом из подпространств V_i представление θ неприводимо и отлично от нуля. Как уже было доказано, $H^p(\mathfrak{G}, V_i) = 0$. Следовательно, $H^p(\mathfrak{G}, V) = H^p(\mathfrak{G}, V^{\natural})$. Поэтому достаточно рассмотреть случай $V = K$, $\theta = 0$.

Переходя к изучению этого случая, напомним, что $C^p(\mathfrak{G}, K)$ — это пространство $\mathfrak{G}$-гомоморфизмов $\mathfrak{G}$-модуля C_p в K, т. е. таких линейных форм f на C_p, что $f(u \cdot c) = 0$ для всех $c \in C_p$ и $u \in U(\mathfrak{G})$, для которых $\varepsilon(u) = 0$. Напомним, что алгебра $C = \sum C_p$ порождена элементами x и $\tilde{x}$ $(x \in \mathfrak{G})$, причем $dx = \tilde{x}$. Для всякой коцепи $f \in C^p$ положим

$$(\theta(x) f)(c) = f(c \cdot \tilde{x}), \quad (i(x) f)(c) = f(c \cdot x)(-1)^{p-1}.$$

Тогда

$$(i(x)\delta f + \delta i(x) f)(c) = (-1)^p [f(d(c \cdot x)) - f(dc \cdot x)] = \\ = f(c \cdot \tilde{x}) = (\theta(x) f)(c).$$

Следовательно, если $\delta f = 0$, то $\theta(x) f = \delta i(x) f$ — кограница. Очевидно, что $[\theta(x), \theta(y)] = \theta([x, y])$, т. е. θ — линейное представление алгебры $\mathfrak{G}$ в пространстве $C^p(\mathfrak{G}, K)$, поэтому векторное пространство $C^p(\mathfrak{G}, K)$ с операторами $\theta(x)$, $x \in \mathfrak{G}$, вполне приводимо. Далее, $\theta(x)\delta = i(x)\delta^2 + \delta i(x)\delta = \delta\theta(x)$, так как $\delta^2 = 0$. Таким образом, в данной ситуации применимо утверждение 2) леммы 1. Покажем, сверх того, что всякая коцепь f, аннулируемая всеми операторами $\theta(x)$, $x \in \mathfrak{G}$, является коциклом, откуда будет следовать, что группа $H^p(\mathfrak{G}, K)$ изоморфна группе инвариантных p-мерных коцепей.

Пусть f — такая p-мерная коцепь, что $\theta(x) f = 0$ при всех $x \in \mathfrak{G}$. Вычислим $d(x_1 \ldots x_p)$:

$$d(x_1 \ldots x_p) = \sum_i (-1)^{i-1} x_1 \ldots \tilde{x}_i \ldots x_p.$$

Далее,

$$\tilde{x}_i x_1 \ldots \hat{x}_i \ldots x_p = x_1 \ldots \tilde{x}_i \ldots x_p + \\ + \sum_{j<i} x_1 \ldots [x_i, x_j] \ldots \hat{x}_i \ldots x_p,$$

$$x_1 \ldots \hat{x}_i \ldots x_p \tilde{x}_i = \\ = x_1 \ldots \tilde{x}_i \ldots x_p - \sum_{j>i} x_1 \ldots \hat{x}_i \ldots [x_i, x_j] \ldots x_p.$$

Складывая эти два равенства при каждом i, умножая на $(-1)^{i-1}$ и суммируя по i, получаем, учитывая, что элементы x_i антикоммутируют в C,

$$\sum_i (-1)^{i-1} \tilde{x}_i x_1 \ldots \hat{x}_i \ldots x_p + \\ + \sum_i (-1)^{i-1} x_1 \ldots \hat{x}_i \ldots x_p \tilde{x}_i = 2d(x_1 \ldots x_p) + \\ + \sum_i \sum_{j<i} (-1)^{i+j-2} [x_i, x_j] x_1 \ldots \hat{x}_j \ldots \hat{x}_i \ldots x_p + \\ + \sum_i \sum_{j>i} (-1)^{i+j-2} [x_i, x_j] x_1 \ldots \hat{x}_i \ldots \hat{x}_j \ldots x_p = \\ = 2d(x_1 \ldots x_p).$$

Так как коцепь f обращается в 0 на членах, начинающихся с $\tilde{x}_i$ или кончающихся $\tilde{x}_i$ [1]), то она обращается в 0 на всех элементах $d(x_1 \ldots x_p)$, т. е. $\delta f = 0$.

Заметим, наконец, что коцепи со значениями в K можно интерпретировать как линейные формы на внешней алгебре $\Lambda(\mathfrak{G})$. При этом

$$(\theta(x) f)(a) = f(a\tilde{x}) = -f([\tilde{x}, a]) = -f(\theta(x) a) \quad (a \in \Lambda(\mathfrak{G})),$$

где $\theta(x)$ в применении к a обозначает дифференцирование алгебры $\Lambda(\mathfrak{G})$, продолжающее эндоморфизм $\operatorname{ad} x$ пространства $\Lambda^1(\mathfrak{G})$. Равенство $\theta(x) f = 0$ означает, таким образом, что f — инвариантная кососимметрическая полилинейная форма на алгебре $\mathfrak{G}$.

Теорема 1. *Если $\mathfrak{G}$ — полупростая алгебра Ли, а V — произвольный конечномерный $\mathfrak{G}$-модуль, то группа $H^p(\mathfrak{G}, V)$ изоморфна группе $H^p(\mathfrak{G}, V^\natural)$. Далее, пространство $H^p(\mathfrak{G}, K)$ совпадает с пространством инвариантных кососимметрических p-линейных форм на $\mathfrak{G}$.*

Выведем из этой теоремы некоторые важные предложения теории полупростых алгебр Ли [2]). Прежде всего, как мы уже

---

[1]) Первое имеет место, потому что f является коцепью со значениями в K, второе — так как f — инвариантная коцепь. — *Прим. ред.*

[2]) В действительности для доказательства следующих ниже теорем 2 и 3 теорема 1 не используется в полном объеме: достаточно того, что было сказано в самом начале этого пункта. — ***Прим. перев.***

видели, всякое представление полупростой алгебры $\mathfrak{G}$ вполне приводимо. Если, обратно, для некоторой алгебры Ли $\mathfrak{G}$ выполнено это условие, то, в частности, ее присоединенное представление вполне приводимо. Это означает, что всякий идеал алгебры $\mathfrak{G}$ имеет дополнительный идеал. Если бы алгебра $\mathfrak{G}$ не была полупроста, то она содержала бы ненулевой коммутативный идеал $\mathfrak{A}$. Пусть $\mathfrak{B}$ — идеал, дополнительный к $\mathfrak{A}$. Тогда $\mathfrak{G} \simeq \mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$ и всякое представление алгебры $\mathfrak{A}$ продолжается до представления алгебры $\mathfrak{G}$, равного нулю на $\mathfrak{B}$. Однако коммутативная алгебра $\mathfrak{A}$ обладает не вполне приводимыми представлениями: например, таково представление

$$a \to \begin{Vmatrix} 0 & \lambda(a) \\ 0 & 0 \end{Vmatrix},$$

где λ — ненулевая линейная форма на $\mathfrak{A}$.

Теорема 2 [1]. *Для того чтобы алгебра Ли $\mathfrak{G}$ была полупроста, необходимо и достаточно, чтобы всякое ее линейное представление было вполне приводимо.*

Следствие. *Всякое дифференцирование полупростой алгебры Ли $\mathfrak{G}$ — внутреннее.*

Пусть $\mathfrak{D}$ — алгебра Ли дифференцирований алгебры $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{J} \subset \mathfrak{D}$ — идеал, образованный внутренними дифференцированиями. Отображение $x \to \operatorname{ad} x$ является изоморфизмом алгебры $\mathfrak{G}$ на $\mathfrak{J}$; следовательно, $\mathfrak{J}$ — полупростая алгебра Ли. Поскольку присоединенное представление идеала $\mathfrak{J}$ в алгебре $\mathfrak{D}$ вполне приводимо, пространство $\mathfrak{D}$ есть прямая сумма подпространства $[\mathfrak{D}, \mathfrak{J}]$ и подпространства $\mathfrak{D}^{\natural}$ элементов, перестановочных со всеми элементами из $\mathfrak{J}$ (утверждение 1 леммы 1 [2]). Если $D \in \mathfrak{D}^{\natural}$, то $[D, \operatorname{ad} x] = \operatorname{ad} Dx = 0$ для всех $x \in \mathfrak{G}$; но тогда $Dx = 0$ для всех $x \in \mathfrak{G}$ и $D = 0$. Так как $\mathfrak{J}$ — идеал в $\mathfrak{D}$, то $[\mathfrak{J}, \mathfrak{D}] \subset \mathfrak{J}$ и $\mathfrak{D} = \mathfrak{J}$.

Докажем эту лемму другим способом. Будем рассматривать алгебру $\mathfrak{G}$ как $\mathfrak{G}$-модуль, снабдив ее присоединенным представлением. Тогда всякое ее дифференцирование D можно рассматривать как одномерную коцепь со значениями в $\mathfrak{G}$.

---

[1] Эта теорема известна в литературе как теорема Г. Вейля. — *Прим. ред.*

[2] Можно обойтись и без леммы 1, взяв просто инвариантное дополнение к $\mathfrak{J}$ в пространстве $\mathfrak{D}$. — *Прим. перев.*

При этом

$$\delta D(x, y) = \operatorname{ad} x \cdot Dy - \operatorname{ad} y \cdot Dx - D([x, y]) =$$
$$= [x, Dy] + [Dx, y] - D([x, y]) = 0.$$

Мы видим, что D — коцикл. Так как $\mathfrak{G}^{\mathfrak{g}} = 0$ (это центр алгебры $\mathfrak{G}$), то $H^1(\mathfrak{G}, \mathfrak{G}) = 0$ и D — кограница. Это означает, что существует такой элемент $a \in \mathfrak{G}$, что

$$Dx = -\operatorname{ad} x \cdot a = \operatorname{ad} a \cdot x.$$

Теорема 3. *Если алгебра Ли $\mathfrak{G}$ полупроста, то всякое расширение $\mathfrak{H}$ алгебры $\mathfrak{G}$ посредством разрешимой алгебры $\mathfrak{M}$ несущественно. Если при этом l_1 и l_2 — два гомоморфизма алгебры $\mathfrak{G}$ в $\mathfrak{H}$, для которых $\pi \circ l_1 = \pi \circ l_2 = 1$ (π — проекция $\mathfrak{H}$ на $\mathfrak{G}$), то существует такой специальный автоморфизм σ алгебры $\mathfrak{H}$* [1], *что $l_1 = \sigma \circ l_2$.*

Для доказательства достаточно применить к алгебре $\mathfrak{G}$ теорему 4 гл. 3. Все условия этой теоремы выполнены: $H^2(\mathfrak{G}, V) = H^1(\mathfrak{G}, V) = 0$ для всякого нетривиального простого $\mathfrak{G}$-модуля V и $\mathfrak{G} = [\mathfrak{G}, \mathfrak{G}]$.

3. Редуктивные алгебры

Определение. *Подалгебра $\mathfrak{H}$ алгебры Ли $\mathfrak{G}$ называется редуктивной в алгебре $\mathfrak{G}$, если ее присоединенное представление в алгебре $\mathfrak{G}$ вполне приводимо. Алгебра Ли $\mathfrak{G}$, редуктивная в себе, называется редуктивной.*

Теорема 4. *Следующие 3 утверждения относительно алгебры Ли $\mathfrak{G}$ эквивалентны:*

1) *для всякого отличного от нуля элемента $x \in \mathfrak{G}$ существует такое неприводимое линейное представление θ алгебры $\mathfrak{G}$, что $\theta(x) \neq 0$;*

2) *алгебра $\mathfrak{G}$ разлагается в прямую сумму полупростой алгебры и коммутативной алгебры: $\mathfrak{G} = \mathfrak{Z} + [\mathfrak{G}, \mathfrak{G}]$ ($\mathfrak{Z}$ — центр алгебры $\mathfrak{G}$);*

---

[1] Определение специального автоморфизма см. в п. 10 гл. 3. — *Прим. перев.*

3) *алгебра* $\mathfrak{G}$ *редуктивна.*

1) $\Longrightarrow$ 3). Пусть $\mathfrak{M}$ — разрешимый идеал алгебры $\mathfrak{G}$ и $\mathfrak{N}=[\mathfrak{M}, \mathfrak{G}]$. Для всякого линейного представления θ алгебры $\mathfrak{G}$ алгебра $\theta(\mathfrak{N})$ лежит в радикале ассоциативной алгебры $\theta(U(\mathfrak{G}))$ (лемма 8 гл. 3). Если представление θ неприводимо, то $\theta(\mathfrak{N})=0$. Поэтому из 1) следует $\mathfrak{N}=0$, т. е. всякий разрешимый идеал алгебры $\mathfrak{G}$ содержится в ее центре $\mathfrak{Z}$. Фактор-алгебра $\mathfrak{G}/\mathfrak{Z}$ не может иметь разрешимых идеалов, отличных от 0, следовательно, она полупроста. Присоединенное представление алгебры $\mathfrak{G}$, обращаясь в 0 на $\mathfrak{Z}$, сводится к представлению алгебры $\mathfrak{G}/\mathfrak{Z}$ и потому вполне приводимо. Это и означает, что алгебра $\mathfrak{G}$ редуктивна.

3) $\Longrightarrow$ 2). Пусть $\mathfrak{G}$ — редуктивная алгебра. Лемма 1 показывает, что $\mathfrak{G}=\mathfrak{G}^{\natural}+[\mathfrak{G}, \mathfrak{G}]=\mathfrak{Z}+[\mathfrak{G}, \mathfrak{G}]$. Далее, $[\mathfrak{G}, \mathfrak{G}]$ разлагается в прямую сумму минимальных идеалов. Ни один из этих идеалов не может быть коммутативным, так как в этом случае он содержался бы в $\mathfrak{Z}$. Поэтому алгебра $[\mathfrak{G}, \mathfrak{G}]$ есть прямая сумма простых алгебр и сама полупроста.

2) $\Longrightarrow$ 1). Пусть $\mathfrak{G}=\mathfrak{H}\times\mathfrak{A}$, где алгебра $\mathfrak{H}$ полупроста, а алгебра $\mathfrak{A}$ коммутативна. Присоединенное представление алгебры $\mathfrak{H}$ точно. Пусть, далее, $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ — базис пространства линейных форм на $\mathfrak{A}$. Построим следующим образом вполне приводимое точное линейное представление алгебры $\mathfrak{G}$:

$$\theta(h+a)=\left\| \begin{matrix} \operatorname{ad} h & & & & 0 \\ & \lambda_1(a) & & & \\ & & \cdot & & \\ & & & \cdot & \\ 0 & & & & \lambda_n(a) \end{matrix} \right\|.$$

Теперь очевидно, что условие 1) выполнено для алгебры $\mathfrak{G}$. Теорема доказана.

Пусть θ — неприводимое представление редуктивной алгебры Ли $\mathfrak{G}$ в пространстве V. Пусть, далее, $\mathfrak{A}$ — коммутативный идеал алгебры $\mathfrak{G}$. По лемме Шура, централизатор L линейной алгебры $\theta(\mathfrak{G})$ является алгеброй с делением над K. Ассоциативная алгебра с единицей, порожденная семейством операторов $\theta(\mathfrak{A})$, содержится в L. Следовательно, ограничение на $\mathfrak{A}$ представления θ вполне приводимо [1]). Тот же результат получается, если θ — вполне приводимое представление.

Известно, что если A — коммутативная ассоциативная алгебра, то всякое ее ненулевое неприводимое линейное представление эквивалентно представлению, индуцированному ее регулярным представлением в пространстве A/M, где M — подходящий максимальный идеал алгебры A [2]). Отсюда вытекает, что всякое неприводимое конечномерное представление коммутативной алгебры Ли $\mathfrak{A}$ получается следующим образом: берется конечное расширение L поля K и такое линейное отображение θ алгебры $\mathfrak{A}$ в L, что $K+\theta(\mathfrak{A})$ порождает поле L; затем строится представление θ алгебры $\mathfrak{A}$ в пространстве L по формуле $\theta(x)(l)=\theta(x)l$ (в правой части $\theta(x)$ и l перемножаются как элементы поля L) [3]).

Пусть теперь $\mathfrak{G}=\mathfrak{H}\times\mathfrak{Z}$ — редуктивная алгебра Ли и θ — такое линейное представление алгебры $\mathfrak{G}$ в пространстве V, что его ограничение на $\mathfrak{Z}$ вполне приводимо. Пространство V разбивается в сумму подпространств, инвариантных и неприводимых относительно $\theta(\mathfrak{Z})$. Объединяя те подпространства, на которых индуцируются эквивалентные представления алгебры $\mathfrak{Z}$, получаем разложение $V=\sum V_i$, где на подпространстве V_i семейство операторов $\theta(\mathfrak{Z})$ вместе со скалярными операторами порождает поле операторов L_i. Всякий эндоморфизм пространства V, перестановочный со всеми операторами $\theta(a)$, $a\in\mathfrak{Z}$, сохраняет подпространства V_i.

---

[1]) Всякое семейство L операторов в векторном пространстве V, содержащее тождественный автоморфизм и являющееся (относительно обычных действий над операторами) алгеброй с делением над K, вполне приводимо. Действительно, пусть $U\neq V$ — некоторое инвариантное подпространство и пусть $x\notin U$. Подпространство Lx инвариантно и $U\cap Lx=0$, так как если бы $Ax\in U$ для некоторого $A\in L$, $A\neq 0$, то $x\in A^{-1}U\subset U$. — *Прим. перев.*

[2]) Пусть θ — такое представление алгебры A, V — пространство представления θ, $x\neq 0$ — некоторый вектор из V. Подпространство $\theta(A)x\neq 0$ инвариантно и потому совпадает с V. Положим $M=\{P\in A,\ \theta(P)x=0\}$. Тогда $V\simeq A/M$. Идеал M максимален, так как представление θ неприводимо. Он совпадает с ядром представления θ. Фактор-алгебра A/M проста и, следовательно, изоморфна некоторому расширению L поля K. — *Прим. перев.*

[3]) Для доказательства нужно рассмотреть обертывающую алгебру $U(\mathfrak{A})$ алгебры $\mathfrak{A}$. См. также предыдущее примечание. — *Прим. перев.*

В частности, эти подпространства инвариантны относительно $\theta(\mathfrak{G})$. В пространстве V_i семейство операторов $\theta(\mathfrak{Z})$ определяет структуру L_i-пространства, инвариантную относительно $\theta(\mathfrak{G})$. Представление θ можно продолжить до представления в том же пространстве V_i алгебры $\mathfrak{G}^{L_i}$, получающейся из $\mathfrak{G}$ расширением основного поля. Подпространства пространства V_i, инвариантные относительно $\theta(\mathfrak{G})$, — это не что иное, как L_i-подпространства, инвариантные относительно $\theta(\mathfrak{H})$ или, что то же, относительно $\theta(\mathfrak{H}^{L_i})$. Алгебра $\mathfrak{H}^{L_i}$, как легко видеть из критерия Картана, полупроста, поэтому ее представление θ в L_i-пространстве V_i вполне приводимо. Следовательно, представление θ алгебры $\mathfrak{G}$ в пространстве V_i вполне приводимо. То же справедливо и для представления θ алгебры $\mathfrak{G}$ во всем пространстве V. Таким образом, доказано.

Предложение 1. *Для того чтобы представление редуктивной алгебры Ли $\mathfrak{G}$ было вполне приводимо, необходимо и достаточно, чтобы его ограничение на центре $\mathfrak{Z}$ алгебры $\mathfrak{G}$ было таковым.*

Пусть θ_1, θ_2 — два вполне приводимых представления редуктивной алгебры Ли $\mathfrak{G}$ в пространствах V_1, V_2 соответственно. Образуем их тензорное произведение ρ, действующее в пространстве $W = V_1 \otimes V_2$. Ограничение представления ρ на алгебре $\mathfrak{Z}$ совпадает с тензорным произведением ограничений на $\mathfrak{Z}$ представлений θ_1 и θ_2. Если мы докажем, что тензорное произведение любых двух вполне приводимых представлений алгебры $\mathfrak{Z}$ вполне приводимо, то, применяя дважды предложение 1, мы докажем, что представление ρ вполне приводимо.

Очевидно, что достаточно рассмотреть тензорное произведение двух неприводимых представлений алгебры $\mathfrak{Z}$. Пусть L_1, L_2 — расширения поля K и $\psi_i : \mathfrak{Z} \to L_i$ — линейные отображения, определяющие неприводимые представления ψ_i алгебры $\mathfrak{Z}$ в пространствах L_i. Формула $\theta(\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2) = \psi_1(\mathfrak{z}_1) \otimes 1 + 1 \otimes \psi_2(\mathfrak{z}_2)$ определяет представление прямого произведения $\mathfrak{Z} \times \mathfrak{Z}$ в пространстве $L_1 \otimes L_2$. При этом инвариантными подпространствами пространства $L_1 \otimes L_2$ являются идеалы алгебры $L_1 \otimes L_2$. Так как алгебра $L_1 \otimes L_2$ полупроста (характеристика основного поля K равна 0!), то построенное нами представление θ коммутативной алгебры $\mathfrak{Z} \times \mathfrak{Z}$ в пространстве $L_1 \otimes L_2$ вполне приводимо. Следовательно, ограничение представления θ на множестве пар $(\mathfrak{z}, \mathfrak{z})$, $\mathfrak{z} \in \mathfrak{Z}$, т. е. тензорное произведение представлений ψ_1 и ψ_2 алгебры $\mathfrak{Z}$ также вполне приводимо [1]).

Предложение 2. *Тензорное произведение вполне приводимых представлений произвольной алгебры Ли вполне приводимо.*

Предложение уже доказано для редуктивных алгебр. Пусть $\mathfrak{G}$ — произвольная алгебра Ли, θ_1 и θ_2 — ее вполне приводимые линейные представления. Если $\mathfrak{N}$ — ядро представления $\theta_1 \oplus \theta_2$, то вместо представлений θ_1, θ_2, $\theta_1 \otimes \theta_2$ алгебры $\mathfrak{G}$ можно рассматривать представления алгебры $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$. Но эта последняя алгебра допускает точное вполне приводимое линейное представление $\theta_1 \oplus \theta_2$ и в силу условия 1) теоремы 4 редуктивна.

Следствие. *Если линейное представление θ алгебры Ли $\mathfrak{G}$ в пространстве V вполне приводимо, то вполне приводимы также канонические представления алгебры $\mathfrak{G}$ в пространствах $T(V)$, $S(V)$, $\Lambda(V)$. Если V — алгебра Ли и операторы $\theta(g)$, $g \in \mathfrak{G}$, — ее дифференцирования, то каноническое представление алгебры $\mathfrak{G}$ в обертывающей алгебре $U(V)$ также вполне приводимо.*

Тензорная алгебра $T(V)$ есть прямая сумма подпространств $\underbrace{V \otimes V \otimes \ldots \otimes V}_{n \text{ раз}}$, а пространства $S(V)$ и $\Lambda(V)$ получаются из $T(V)$ факторизацией по инвариантным отношениям эквивалентности, поэтому для этих пространств утверждение очевидно. Далее, алгебра $U(V)$ получается из $T(V)$ факторизацией по идеалу J, порожденному элементами вида $u \otimes v - v \otimes u - [u, v] = g_{u,v}$. Пространство J инвариантно относительно алгебры $\mathfrak{G}$, так как

$$\theta(x)\, g_{u,v} = g_{\theta(x)u,\, v} + g_{u,\, \theta(x)v} \in J.$$

Это следствие будет применено к случаю присоединенного представления в алгебре $\mathfrak{G}$ подалгебры $\mathfrak{H}$, редуктивной в $\mathfrak{G}$.

[1]) См. первую часть доказательства предложения 1. — *Прим. перев.*

Теорема 5. *Если подалгебра $\mathfrak{H}$ редуктивна в алгебре $\mathfrak{G}$, то ограничение на $\mathfrak{H}$ всякого вполне приводимого представления θ алгебры $\mathfrak{G}$ вполне приводимо.*

Не ограничивая общности, можно предположить, что θ — неприводимое представление. Пусть V — пространство представления θ, $W \subset V$ — подпространство, инвариантное и неприводимое относительно $\theta(\mathfrak{H})$. Так как V неприводимо относительно $\theta(\mathfrak{G})$, то всякий элемент из V можно представить в виде $\sum \theta(u_i) w_i$, где $w_i \in W$, $u_i \in U(\mathfrak{G})$. Иными словами, отображение $\rho: u \otimes w \to \theta(u) w$ индуцирует отображение произведения $U(\mathfrak{G}) \otimes W$ на все пространство V. При всяком $x \in \mathfrak{H}$ дифференцирование $\operatorname{ad} x$ алгебры $\mathfrak{G}$ продолжается по формуле $d_x u = xu - ux$ в дифференцирование алгебры $U(\mathfrak{G})$. Согласно следствию предложения 2, представление $x \to d_x$ алгебры $\mathfrak{H}$ в пространстве $U(\mathfrak{G})$ вполне приводимо. Из самого предложения 2 вытекает, что представление алгебры $\mathfrak{H}$ в пространстве $U(\mathfrak{G}) \otimes W$ вполне приводимо [1]). Достаточно теперь показать, что отображение $\rho: U(\mathfrak{G}) \otimes W \to V$ совместимо со структурами $\mathfrak{H}$-модулей в пространствах $U(\mathfrak{G}) \otimes W$ и V. Элемент $d_x u \otimes w + u \otimes \theta(x) w$ при отображении ρ переходит в

$$\theta(d_x u) w + \theta(u) \theta(x) w = \theta(x) \theta(u) w = \theta(x) \rho(u \otimes w),$$

что и требовалось доказать.

4. Теорема Гильберта об инвариантах

Пусть V — алгебра Ли, θ — вполне приводимое представление алгебры Ли $\mathfrak{G}$ в пространстве V, причем операторы $\theta(g)$, $g \in \mathfrak{G}$, — дифференцирования алгебры V. Пусть $U = U(V)$ — обертывающая алгебра алгебры V. Продолжим операторы $\theta(g)$ в дифференцирования алгебры U. Согласно следствию предложения 2 и лемме 1, $U = U^{\natural} + U^0$. Очевидно, что $U^{\natural}$ — подалгебра алгебры U. Далее, если $u \in U^{\natural}$, $v \in U^0$, $v = \sum \theta(g_i) v_i$, то $uv = \sum u\theta(g_i) v_i = \sum \theta(g_i)(uv_i) \in U^0$. Следовательно, $U^{\natural} U^0 \subset U^0$. Аналогично доказывается, что $U^0 U^{\natural} \subset U^0$. Отображение $\natural$ (см. п. 1) обладает поэтому сле-

---

[1]) В предложении 2 речь идет о представлениях конечной степени, пространство же $U(\mathfrak{G})$ бесконечномерно. Один из способов обойти это препятствие состоит в том, чтобы вместо алгебры $U(\mathfrak{G})$ рассматривать конечномерную алгебру $\theta(U(\mathfrak{G}))$. — *Прим. перев.*

дующими свойствами:

$$(uv^{\natural})^{\natural} = u^{\natural}v^{\natural} \doteq (u^{\natural}v)^{\natural}.$$

Рассмотрим теперь более общую ситуацию. Пусть $\mathfrak{D}$ — класс эквивалентных неприводимых конечномерных представлений алгебры $\mathfrak{G}$ и $U_{\mathfrak{D}}$ — подпространство пространства U, порожденное всеми инвариантными подпространствами, на которых индуцируются представления класса $\mathfrak{D}$ [1]).

Пространство U есть прямая сумма всевозможных подпространств $U_{\mathfrak{D}}$. Подпространства $U_{\mathfrak{D}}$ инвариантны относительно $\theta(\mathfrak{G})$ и относительно любого оператора, перестановочного со всеми $\theta(g)$, $g \in \mathfrak{G}$. В частности, $U_{\mathfrak{D}}$ инвариантны относительно левых и правых умножений на элементы из $U^{\natural}$. Таким образом, $U_{\mathfrak{D}}$ можно рассматривать как $U^{\natural}$-модуль (левый или правый).

Теорема 6. *Алгебра $U^{\natural}$ имеет конечное число образующих. Каждое из подпространств $U_{\mathfrak{D}}$ является модулем конечного типа над $U^{\natural}$.*

Наиболее важны приложения этой теоремы в двух случаях: когда $\mathfrak{G}$ — подалгебра алгебры V, редуктивная в V, и когда алгебра V коммутативна, т. е. когда рассматривается просто вполне приводимое представление алгебры $\mathfrak{G}$ в пространстве V.

Доказательство. Рассмотрим сначала случай, когда алгебра V коммутативна. Тогда $U^{\natural}$ есть прямая сумма пересечений $U^{\natural} \cap U^p$ $(U^p = S^p(V))$, поскольку U^p — инвариантные подпространства. Пусть I — идеал алгебры $S(V)$, порожденный пересечениями $U^{\natural} \cap U^p$ при $p > 0$. По теореме Гильберта идеал I имеет конечный базис $\{s_1, \ldots, s_n\}$, причем каждый элемент s_i можно считать лежащим в одном из подпространств $U^{\natural} \cap U^p$. Пусть T — подалгебра алгебры U, порожденная элементами s_i и 1. Очевидно, что $T \subset U^{\natural}$. Докажем индукцией по p, что $T \cap U^p = U^{\natural} \cap U^p$. При $p = 0$ это очевидно. Пусть это утверждение верно для всех $p < q$.

[1]) Пространство $U^{\natural}$ совпадает с $U_{\mathfrak{D}}$ в том частном случае, когда $\mathfrak{D}$ — класс нулевых представлений алгебры $\mathfrak{G}$. — *Прим. перев.*

Всякий элемент $u \in U^q \cap U^{\natural}$ может быть представлен в виде $u = \sum s_i' s_i$, где s_i' — однородный элемент степени p_i. Так как элементы s_i имеют положительную степень, то можно считать $p_i < q$. Имеем $u = u^{\natural} = \sum (s_i' s_i^{\natural})^{\natural} = \sum s_i'^{\natural} s_i$. По предположению индукции $t_i = s_i'^{\natural} \in U^{\natural} \cap U^{p_i} \subset T \cap U^{p_i} \subset T$, откуда $u = \sum t_i s_i \in T$, что и требовалось доказать.

Докажем в этом же случае утверждение теоремы относительно $U_{\mathfrak{D}}$. Пусть ρ — представление класса $\mathfrak{D}$ алгебры $\mathfrak{G}$ в пространстве D и пусть L — пространство всех линейных отображений пространства D в $S(V)$. Отображение $r: f \otimes d \to f(d)$ пространства $L \otimes D$ на пространство $S(V)$ совместимо со структурами $\mathfrak{G}$-модулей в $L \otimes D$ и $S(V)$. Далее, формула $(u \cdot f)(d) = uf(d)$ определяет в пространстве L структуру $S(V)$-модуля конечного типа. При этом $\theta(g)\, u \cdot f + u \cdot \theta(g)\, f = \theta(g)(u \cdot f)$, так как $\theta(g)$—дифференцирование алгебры $S(V)$. Отсюда получаем $(u \cdot f^{\natural})^{\natural} = u^{\natural} \cdot f^{\natural}$. Пространство $L^{\natural}$ образовано всеми $\mathfrak{G}$-гомоморфизмами пространства D в $S(V)$, поэтому $r(L^{\natural}) = U_{\mathfrak{D}}$. Пусть J — подмодуль $S(V)$-модуля L, порожденный множеством $L^{\natural}$. Из теоремы Гильберта о базисе для алгебры $S(V)$ нетрудно вывести, что $S(V)$-модуль J имеет конечное число образующих t_i, причем можно считать, что $t_i \in L^{\natural}$. Если $f \in L^{\natural}$, то $f = \sum u_i t_i$, откуда $f = f^{\natural} = \sum (u_i \cdot t_i^{\natural})^{\natural} = \sum u_i^{\natural} \cdot t_i$. Мы видим, что t_i порождают $L^{\natural}$ над $U^{\natural}$. Сумма подпространств $t_i(D) \subset U_{\mathfrak{D}}$ конечномерна и порождает $U_{\mathfrak{D}}$ как левый $U^{\natural}$-модуль.

Перейдем теперь к общему случаю. Подпространства U_p алгебры U определяют ее возрастающую фильтрацию, и $U_p / U_{p-1} \simeq S^p(V)$ (см. п. 3 гл. 1). Каждое из подпространств U_p инвариантно и вполне приводимо относительно алгебры $\mathfrak{G}$. Если π_p — каноническое отображение U_p на S^p, то $\pi_p(U_p \cap U_{\mathfrak{D}}) = S^p \cap S_{\mathfrak{D}}$ и $\pi_p(U_p \cap U^{\natural}) = S^p \cap S^{\natural}$. Следовательно, градуированная алгебра, ассоциированная с $U^{\natural}$, совпадает с $S^{\natural}$ и имеет поэтому конечное число образующих $s_1, \ldots, s_n$. Пусть $s_i \in S^{p_i}$, и $u_i \in U_{p_i} \cap U^{\natural}$ — какой-либо прообраз элемента s_i при отображении π_{p_i}. Обозначим через T подалгебру алгебры $U^{\natural}$, порожденную элементами u_i и 1. Если

$u \in U^{\natural} \cap U_p$, то существует такой элемент $t \in T$, что $u \equiv t \pmod{U_{p-1} \cap T}$. Если уже доказано, что $U_{p-1} \cap T = U_{p-1} \cap U^{\natural}$, то получаем $u \in T$. Таким образом, индукцией по p можно доказать, что $U^{\natural} \cap U_p = T \cap U_p$ для всех p, откуда $T = U^{\natural}$.

Аналогичным образом, рассматривая градуированный $U^{\natural}$-модуль $S_{\mathfrak{D}}$, ассоциированный с фильтрованным $U^{\natural}$-модулем $U_{\mathfrak{D}}$, можно доказать, что $U_{\mathfrak{D}}$ — модуль конечного типа над $U^{\natural}$

Глава 6

РАДИКАЛЫ АЛГЕБРЫ ЛИ

П. Картье

1. Радикал ассоциативной алгебры

Напомним прежде всего некоторые классические определения и результаты.

Пусть A — ассоциативная алгебра с единицей. *Радикалом алгебры* A называется ее двусторонний идеал $\mathfrak{A}$, определяемый одним из следующих условий:

1) $\mathfrak{A}$ — пересечение аннуляторов всех простых левых A-модулей (не обязательно конечномерных над основным полем K);

2) $\mathfrak{A}$ — пересечение всех максимальных левых идеалов алгебры A;

3) $\mathfrak{A}$ состоит из всех таких элементов $a \in A$, что при всяком $x \in A$ элемент $1 - xa$ имеет левый обратный в алгебре A.

При замене в условиях 1)—3) слова „левый" на слово „правый" и элемента $1 - xa$ на элемент $1 - ax$ получаются эквивалентные им условия 1)′—3)′ [1]).

Предположим теперь, что *алгебра A конечномерна, и пусть M — точный A-модуль конечной размерности над K*

---

[1]) Обозначим через $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$, $\mathfrak{A}_3$ левые идеалы, определяемые условиями 1), 2), 3) соответственно. Докажем, что эти идеалы совпадают. Алгебра A при помощи левого регулярного представления наделяется структурой левого A-модуля. Эта структура переносится на фактор-пространство алгебры A по любому левому идеалу. Если M — максимальный левый идеал, то A-модуль $V = A/M$ прост. Наоборот, всякий простой левый A-модуль V может быть получен таким путем. Для этого надо взять в качестве M аннулятор любого элемента из V. Аннулятор A-модуля $V = A/M$ совпадает с пересечением аннуляторов всех его элементов (ср. примечание 2 на стр. 88). Отсюда следует, что $\mathfrak{A}_1 = \mathfrak{A}_2$.

Пусть $a \in \mathfrak{A}_2$. Предположим, что для некоторого $x \in A$ элемент $1 - xa$ не имеет левого обратного. Тогда порожденный этим элементом левый идеал не совпадает с A, а потому содержится в некотором максимальном левом идеале M. Так как $a \in M$, то (например, сама алгебра A, снабженная левым регулярным представлением). Построим ряд Жордана — Гёльдера A-модуля M: $M = M_0 \supset M_1 \supset \ldots \supset M_n = 0$. Про простые A-модули M_i/M_{i+1} говорят, что они содержатся в A-модуле M. Всякий простой A-модуль N однороден [1] и поэтому изоморфен фактор-модулю модуля A, т. е. содержится в модуле A. С другой стороны, ясно, что модуль A изоморфен подмодулю модуля M^s, где s — размерность A над K. Следовательно, модуль N содержится в модуле M^s, а значит, и в модуле M, так как по теореме Жордана — Гёльдера простые модули, содержащиеся в M^s, суть простые модули, содержащиеся в M, взятые s раз. Таким образом, A-модуль M содержит все простые A-модули. Отсюда вытекает, что *элементы a радикала алгебры A характеризуются тем, что $aM_i \subset M_{i+1}$*. В частности, произведение любых n элементов из радикала равно нулю, т. е. *радикал является нильпотентным идеалом* (Хопкинс) [2].

2. Определение радикалов алгебры Ли

Через $\mathfrak{G}$ будем обозначать конечномерную алгебру Ли над полем K.

$xa \in M$ и $1 = (1 - xa) + xa \in M$, чего не может быть. Таким образом, $\mathfrak{A}_2 \subset \mathfrak{A}_3$.

Пусть $a \in \mathfrak{A}_3$. Предположим, что a не содержится в максимальном левом идеале M. В таком случае левый идеал, порожденный M и a, совпадает с A и, в частности, содержит 1. Это означает, что $1 = m + xa$ для некоторых $m \in M$, $x \in A$. Если y — левый обратный элемент к $1 - xa$, то $1 = y(1 - xa) = ym \in M$, чего не может быть. Следовательно, $\mathfrak{A}_2 = \mathfrak{A}_3$.

Аналогично доказывается эквивалентность условий 1)′—3)′. Докажем, наконец, что идеал $\mathfrak{A}$, определяемый условиями 1)—3), совпадает с идеалом $\mathfrak{A}'$, определяемым условиями 1)′—3)′. Заметим прежде всего, что из условия 1) видно, что идеал $\mathfrak{A}$ двусторонен, а из условия 3) — что для всякого $a \in \mathfrak{A}$ элемент $1 - a = 1 - 1 \cdot a$ обратим слева. Пусть $a \in \mathfrak{A}$, $x \in A$. Тогда $ax \in \mathfrak{A}$ и существует такой элемент b, что $b(1 - ax) = 1$. Имеем $b = 1 + bax$. Так как $bax \in \mathfrak{A}$, то элемент b обратим слева. Если $cb = 1$, то $c = cb(1 - ax) = 1 - ax$, так что $(1 - ax)b = 1$. Таким образом, элемент $1 - ax$ обратим справа. Следовательно, $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{A}'$. Аналогично доказывается, что $\mathfrak{A}' \subset \mathfrak{A}$; но тогда $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}'$. — *Прим. перев.*

[1] То есть $An = N$ для некоторого $n \in N$. — *Прим. перев.*

[2] Более того, радикал совпадает с наибольшим нильпотентным идеалом алгебры A. — *Прим. перев.*

Напомним, что алгебра $\mathfrak{G}$ называется разрешимой, если ее производная алгебра достаточно высокой степени равна нулю; $\mathfrak{G}$ называется нильпотентной, если для всякого $x \in \mathfrak{G}$ эндоморфизм $\operatorname{ad} x$ нильпотентен.

Лемма 1. *Пусть $\mathfrak{G}$ — алгебра Ли, $\mathfrak{S}$ — ее подалгебра и $\mathfrak{H}$ — ее идеал. Если алгебра $\mathfrak{G}$ разрешима, то алгебры $\mathfrak{S}$ и $\mathfrak{G}/\mathfrak{H}$ также разрешимы; если алгебры $\mathfrak{H}$ и $\mathfrak{G}/\mathfrak{H}$ разрешимы, то и алгебра $\mathfrak{G}$ разрешима. Если алгебра $\mathfrak{G}$ нильпотентна, то алгебры $\mathfrak{S}$ и $\mathfrak{G}/\mathfrak{H}$ также нильпотентны: если $\mathfrak{H}$ содержится в центре алгебры $\mathfrak{G}$ и алгебра $\mathfrak{G}/\mathfrak{H}$ нильпотентна, то и алгебра $\mathfrak{G}$ нильпотентна.*

Очевидно, что $\mathfrak{S}^{(n)} \subset \mathfrak{G}^{(n)}$; поэтому из разрешимости алгебры $\mathfrak{G}$ следует разрешимость алгебры $\mathfrak{S}$. Далее, индукцией по n легко показать, что $(\mathfrak{G}/\mathfrak{H})^{(n)} = \pi(\mathfrak{G}^{(n)})$, где π — канонический гомоморфизм $\mathfrak{G}$ на $\mathfrak{G}/\mathfrak{H}$; поэтому из разрешимости алгебры $\mathfrak{G}$ следует разрешимость алгебры $\mathfrak{G}/\mathfrak{H}$. Пусть теперь алгебры $\mathfrak{H}$ и $\mathfrak{G}/\mathfrak{H}$ разрешимы и пусть p таково, что $(\mathfrak{G}/\mathfrak{H})^{(p)} = 0$. Тогда $\mathfrak{G}^{(p)} \subset \mathfrak{H}$. Если $\mathfrak{H}^{(q)} = 0$, то $\mathfrak{G}^{(p+q)} = 0$.

Если эндоморфизм $\operatorname{ad}_{\mathfrak{G}} x$ нильпотентен, то при $x \in \mathfrak{S}$ эндоморфизм $\operatorname{ad}_{\mathfrak{S}} x$ является его ограничением на $\mathfrak{S}$ и потому также нильпотентен; эндоморфизм $\operatorname{ad}_{\mathfrak{G}/\mathfrak{H}} \pi(x)$ получается из $\operatorname{ad}_{\mathfrak{G}} x$ факторизацией и тоже нильпотентен. Поэтому из нильпотентности алгебры $\mathfrak{G}$ вытекает нильпотентность алгебр $\mathfrak{S}$ и $\mathfrak{G}/\mathfrak{H}$. Предположим теперь, что $\mathfrak{H}$ содержится в центре алгебры $\mathfrak{G}$ и что фактор-алгебра $\mathfrak{G}/\mathfrak{H}$ нильпотентна. При всяком $x \in \mathfrak{G}$ эндоморфизм $\operatorname{ad}_{\mathfrak{G}/\mathfrak{H}} \pi(x)$ нильпотентен. Следовательно, существует такое n, что $\operatorname{ad}_{\mathfrak{G}}^n x \cdot \mathfrak{G} \subset \mathfrak{H}$; но $\operatorname{ad} x \cdot \mathfrak{H} = 0$, и поэтому $\operatorname{ad}^{n+1} x = 0$, что доказывает нильпотентность алгебры $\mathfrak{G}$.

Следствие. *Во всякой алгебре Ли $\mathfrak{G}$ существует наибольший разрешимый идеал.*

В самом деле, если $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ — два разрешимых идеала, то их сумма $\mathfrak{A} + \mathfrak{B}$ также является разрешимым идеалом, так как идеал $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{A} + \mathfrak{B}$ и фактор-алгебра $(\mathfrak{A} + \mathfrak{B})/\mathfrak{B} = \mathfrak{A}/(\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B})$ разрешимы. Следовательно, сумма конечного числа разрешимых идеалов является разрешимым идеалом. Так как алгебра $\mathfrak{G}$ конечномерна, то сумма всех разрешимых идеалов алгебры $\mathfrak{G}$ совпадает с суммой их конечного числа и поэтому является разрешимым идеалом. Этот идеал и будет наибольшим разрешимым идеалом.

Несколько труднее доказать существование наибольшего нильпотентного идеала алгебры $\mathfrak{G}$. Для того чтобы это сделать, докажем сначала следующую лемму.

Лемма 2. *Пусть* $\mathfrak{H}$ — *идеал алгебры Ли* $\mathfrak{G}$, ρ — *линейное представление алгебры* $\mathfrak{G}$ *в конечномерном пространстве* M, E — *ассоциативная алгебра эндоморфизмов пространства* M, *порожденная* 1 *и* $\rho(\mathfrak{G})$. *Тогда следующие условия эквивалентны*:

1) *для всякого* $x \in \mathfrak{H}$ *эндоморфизм* $\rho(x)$ *нильпотентен*;

2) $\rho(\mathfrak{H})$ *содержится в радикале алгебры* E.

По теореме Хопкинса из 2) следует 1). Пусть теперь выполнено условие 1) и пусть $\{M_i\}$ — ряд Жордана — Гёльдера $\mathfrak{G}$-модуля M. Положим $N_i = M_i/M_{i+1}$. Все элементы идеала $\mathfrak{H}$ представляются в $\mathfrak{G}$-модуле N_i нильпотентными операторами. По теореме Энгеля подпространство $P \subset N_i$, образованное векторами, аннулируемыми алгеброй $\mathfrak{H}$, отлично от нуля. Подпространство P инвариантно относительно алгебры $\mathfrak{G}$, так как если $\rho(a)n = 0$ для всех $a \in \mathfrak{H}$, то $\rho(a)\rho(g)n = \rho([a, g])n + \rho(g)\rho(a)n = 0$. Поскольку $\mathfrak{G}$-модуль N_i прост, $P = N_i$. Это означает, что модуль N_i аннулируется алгеброй $\mathfrak{H}$, т. е. $\rho(\mathfrak{H})M_i \subset M_{i+1}$. Отсюда следует, что $\rho(\mathfrak{H})$ содержится в радикале алгебры E.

Следствие. *Пусть* E — *ассоциативная алгебра эндоморфизмов пространства* $\mathfrak{G}$, *порожденная операторами* 1 *и* $\operatorname{ad} x$, $x \in \mathfrak{G}$. *Множество* $\mathfrak{N}$ *таких* $g \in \mathfrak{G}$, *что эндоморфизм* $\operatorname{ad} g$ *содержится в радикале ассоциативной алгебры* E, *является наибольшим нильпотентным идеалом алгебры* $\mathfrak{G}$.

Радикал алгебры E является ее двусторонним идеалом, поэтому $\mathfrak{N}$ — идеал алгебры $\mathfrak{G}$. Из теоремы Хопкинса следует, что для всякого $g \in \mathfrak{A}$ эндоморфизм $\operatorname{ad} g$ нильпотентен, так что $\mathfrak{N}$ — нильпотентная алгебра Ли. Если $\mathfrak{N}'$ — какой-нибудь нильпотентный идеал алгебры $\mathfrak{G}$, то для всякого $n \in \mathfrak{N}'$ существует такое k, что $(\operatorname{ad} n)^k \cdot \mathfrak{N}' = 0$; с другой стороны, $\operatorname{ad} n \cdot \mathfrak{G} \subset \mathfrak{N}'$, поскольку $\mathfrak{N}'$ — идеал. Отсюда следует, что эндоморфизм $\operatorname{ad} n$ нильпотентен в пространстве $\mathfrak{G}$ и, по лемме 2, содержится в радикале алгебры E. Таким образом, $\mathfrak{N}' \subset \mathfrak{N}$.

Определение. *Наибольший разрешимый идеал алгебры Ли $\mathfrak{G}$ называется ее радикалом и обозначается через $\mathfrak{R}$. Наибольший нильпотентный идеал алгебры $\mathfrak{G}$ обозначается через $\mathfrak{N}$. Наконец, пересечение аннуляторов всех простых $\mathfrak{G}$-модулей конечной размерности над K называется нильпотентным радикалом алгебры $\mathfrak{G}$ и обозначается через $\mathfrak{S}$.*

3. Простейшие свойства радикалов алгебры Ли

Предложение 1. *Радикал $\mathfrak{R}$ алгебры Ли $\mathfrak{G}$ является наименьшим из тех идеалов $\mathfrak{A}$, для которых фактор-алгебра $\mathfrak{G}/\mathfrak{A}$ полупроста. Нильпотентный радикал $\mathfrak{S}$ алгебры $\mathfrak{G}$ является наименьшим из тех идеалов $\mathfrak{A}$, для которых фактор-алгебра $\mathfrak{G}/\mathfrak{A}$ редуктивна. Нильпотентный радикал $\mathfrak{S}$ является также наибольшим идеалом, обладающим тем свойством, что для всякого конечномерного линейного представления ρ алгебры $\mathfrak{G}$ и всякого $a \in \mathfrak{S}$ эндоморфизм $\rho(a)$ нильпотентен.*

Пусть $\mathfrak{A}$ — такой идеал алгебры $\mathfrak{G}$, что фактор-алгебра $\mathfrak{G}/\mathfrak{A}$ полупроста. Образ радикала $\mathfrak{R}$ при каноническом гомоморфизме алгебры $\mathfrak{G}$ на $\mathfrak{G}/\mathfrak{A}$ есть разрешимый идеал в алгебре $\mathfrak{G}/\mathfrak{A}$ и должен поэтому равняться нулю. Это показывает, что $\mathfrak{R} \subset \mathfrak{A}$. Далее, алгебра $\mathfrak{G}/\mathfrak{R}$ не содержит разрешимых идеалов, отличных от нуля, так как если $\mathfrak{R}'/\mathfrak{R}$ — такой идеал, то идеал $\mathfrak{R}'$ алгебры $\mathfrak{G}$, будучи расширением разрешимой алгебры $\mathfrak{R}$ при помощи разрешимой алгебры $\mathfrak{R}'/\mathfrak{R}$, разрешим и потому совпадает с $\mathfrak{R}$. Следовательно, алгебра $\mathfrak{G}/\mathfrak{R}$ полупроста. Заметим также, что если $\mathfrak{A}$ — идеал, содержащий $\mathfrak{R}$, то алгебра $\mathfrak{G}/\mathfrak{A}$ изоморфна алгебре $(\mathfrak{G}/\mathfrak{R})/(\mathfrak{A}/\mathfrak{R})$, т. е. фактор-алгебре полупростой алгебры $\mathfrak{G}/\mathfrak{R}$, и потому полупроста.

Из определения нильпотентного радикала $\mathfrak{S}$ следует, что для всякого элемента $a \notin \mathfrak{S}$ существует такое неприводимое представление θ алгебры $\mathfrak{G}$, что $\theta(a) \neq 0$. Представление θ обращается в 0 на $\mathfrak{S}$ и поэтому индуцирует представление алгебры $\mathfrak{G}/\mathfrak{S}$. Алгебра $\mathfrak{G}/\mathfrak{S}$ обладает, таким образом, свойством 1) теоремы 4 гл. 5 и, следовательно, редуктивна. Если идеал $\mathfrak{A}$ содержит $\mathfrak{S}$, то алгебра $\mathfrak{G}/\mathfrak{A}$ редуктивна, как фактор-алгебра редуктивной алгебры $\mathfrak{G}/\mathfrak{S}$. Предположим теперь, что $\mathfrak{A}$ — такой идеал алгебры $\mathfrak{G}$, что фактор-алгебра $\mathfrak{G}/\mathfrak{A}$ редуктивна. Если какой-либо элемент алгебры $\mathfrak{G}$ переходит в 0 при всех ее неприводимых представлениях, то его образ при каноническом гомоморфизме алгебры $\mathfrak{G}$ на $\mathfrak{G}/\mathfrak{A}$ переходит в 0 при всех неприводимых представлениях алгебры $\mathfrak{G}/\mathfrak{A}$ и поэтому должен равняться нулю. Это показывает, что $\mathfrak{S} \subset \mathfrak{A}$.

Из леммы 2 вытекает, что следующие свойства идеала $\mathfrak{A}$ алгебры $\mathfrak{G}$ равносильны:

1) при всяком конечномерном представлении алгебры $\mathfrak{G}$ элементы из $\mathfrak{A}$ представляются нильпотентными операторами;

2) для всякого конечномерного представления ρ алгебры $\mathfrak{G}$ множество $\rho(\mathfrak{A})$ содержится в радикале ассоциативной алгебры операторов, порожденной 1 и $\rho(\mathfrak{G})$. Согласно характеристике радикала алгебры операторов, данной в п. 1, свойство 2) эквивалентно тому, что идеал $\mathfrak{A}$ переходит в 0 при всяком неприводимом линейном представлении алгебры $\mathfrak{G}$, т. е. что $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{S}$.

Следствие. *Имеют место включения*

$$\mathfrak{R} \supset \mathfrak{N} \supset \mathfrak{S}.$$

Предложение 2. *Пусть f — гомоморфизм алгебры Ли $\mathfrak{G}$ на алгебру Ли $\mathfrak{G}'$. Тогда $f(\mathfrak{R}) \subset \mathfrak{R}'$, $f(\mathfrak{N}) \subset \mathfrak{N}'$, $f(\mathfrak{S}) \subset \mathfrak{S}'$. Если ядро $\mathfrak{H}$ гомоморфизма f содержится в $\mathfrak{R}$, то $f(\mathfrak{R}) = \mathfrak{R}'$; если $\mathfrak{H}$ содержится в центре алгебры $\mathfrak{G}$, то $f(\mathfrak{S}) = \mathfrak{S}'$; если $\mathfrak{H} \subset \mathfrak{S}$, то $f(\mathfrak{S}) = \mathfrak{S}'$.*

Так как $f(\mathfrak{G}) = \mathfrak{G}'$, то образ всякого идеала алгебры $\mathfrak{G}$ является идеалом алгебры $\mathfrak{G}'$. При этом $f(\mathfrak{R})$ — разрешимый идеал алгебры $\mathfrak{G}'$, так что $f(\mathfrak{R}) \subset \mathfrak{R}'$; $f(\mathfrak{N})$ — нильпотентный идеал алгебры $\mathfrak{G}'$, так что $f(\mathfrak{N}) \subset \mathfrak{N}'$. Если $\mathfrak{H} \subset \mathfrak{R}$, то идеал $f^{-1}(\mathfrak{R}')$ алгебры $\mathfrak{G}$ разрешим как расширение разрешимой алгебры $\mathfrak{R}'$ посредством разрешимой алгебры $\mathfrak{H}$ и поэтому содержится в $\mathfrak{R}$. Следовательно, в этом случае $f(\mathfrak{R}) = \mathfrak{R}'$. Если $\mathfrak{H}$ содержится в центре алгебры $\mathfrak{G}$, то идеал $f^{-1}(\mathfrak{N}')$ алгебры $\mathfrak{G}$ нильпотентен как центральное расширение нильпотентной алгебры $\mathfrak{N}'$ и поэтому содержится в $\mathfrak{N}$, т. е. $f(\mathfrak{N}) = \mathfrak{N}'$.

Если какой-либо элемент алгебры $\mathfrak{G}$ переходит в 0 при всех ее неприводимых представлениях, то он, в частности, переходит в 0 при всех представлениях алгебры $\mathfrak{G}$, индуцированных неприводимыми представлениями алгебры $\mathfrak{G}'$. Отсюда следует, что $f(\mathfrak{S}) \subset \mathfrak{S}'$. Если $\mathfrak{H} \subset \mathfrak{S}$, то всякое неприводимое представление алгебры $\mathfrak{G}$ обращается в 0 на $\mathfrak{H}$ и потому индуцировано некоторым неприводимым представлением алгебры $\mathfrak{G}'$. Очевидно, что в этом случае $f(\mathfrak{S}) = \mathfrak{S}'$.

Предложение 3. *Если алгебра Ли $\mathfrak{G}$ есть прямое произведение алгебр $\mathfrak{G}_i$, то всякий ее радикал*[1]) *является прямым произведением соответствующих радикалов алгебр $\mathfrak{G}_i$.*

Согласно предложению 2, проекция всякого радикала алгебры $\mathfrak{G}$ на алгебру $\mathfrak{G}_i$ содержится в радикале того же рода алгебры $\mathfrak{G}_i$; поэтому любой радикал алгебры $\mathfrak{G}$ содержится в произведении соответствующих радикалов алгебр $\mathfrak{G}_i$. Отождествим алгебры $\mathfrak{G}_i$ с идеалами алгебры $\mathfrak{G}$. Наше предложение будет доказано, если мы покажем, что каждый радикал алгебры $\mathfrak{G}_i$ содержится в радикале того же рода алгебры $\mathfrak{G}$. Радикал $\mathfrak{R}_i$ алгебры $\mathfrak{G}_i$ является разрешимым идеалом в алгебре $\mathfrak{G}$ и потому содержится в $\mathfrak{R}$. Точно так же, $\mathfrak{N}_i$ является нильпотентным идеалом в алгебре $\mathfrak{G}$ и потому содержится в $\mathfrak{N}$.

Докажем теперь, что ограничение на $\mathfrak{G}_i$ всякого неприводимого представления алгебры $\mathfrak{G}$ вполне приводимо. Пусть ρ — неприводимое представление алгебры $\mathfrak{G}$ в пространстве M и пусть N — минимальное подпространство, инвариантное относительно алгебры $\mathfrak{G}_i$. Так как при $i \neq j$ элементы из $\mathfrak{G}_i$ и $\mathfrak{G}_j$ коммутируют между собой, то всякий оператор $\rho(g_j)$, $g_j \in \mathfrak{G}_j$, переводит подпространство N в минимальное подпространство, инвариантное относительно $\mathfrak{G}_i$. Следовательно, сумма всех минимальных инвариантных относительно $\mathfrak{G}_i$ подпространств инвариантна относительно алгебры $\mathfrak{G}$ и потому совпадает со всем пространством M. Это показывает, что ограничение представления ρ на идеале $\mathfrak{G}_i$ вполне приводимо. Нильпотентный радикал $\mathfrak{S}_i$ алгебры $\mathfrak{G}_i$ переходит в 0 при всех ее вполне приводимых представлениях, а значит, по только что доказанному, и при всех вполне приводимых представлениях алгебры $\mathfrak{G}$. Таким образом, $\mathfrak{S}_i \subset \mathfrak{S}$.

---

[1]) То есть любой из идеалов $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{S}$. — *Прим. перев.*

4. Критерий Картана для разрешимых алгебр Ли

Теорема. *Нильпотентный радикал* $\mathfrak{S}$ *алгебры Ли* $\mathfrak{G}$ *совпадает с идеалом* $[\mathfrak{G}, \mathfrak{R}] = [\mathfrak{G}, \mathfrak{G}] \cap \mathfrak{R}$. *Радикал* $\mathfrak{R}$ *алгебры* $\mathfrak{G}$ *есть максимальное подпространство, ортогональное к ее производной алгебре* $[\mathfrak{G}, \mathfrak{G}]$ *в смысле формы Киллинга.*

Так как $[\mathfrak{G}, \mathfrak{R}] \subset \mathfrak{R}$, то из предложения 2 следует, что радикал алгебры $\mathfrak{G}' = \mathfrak{G}/[\mathfrak{G}, \mathfrak{R}]$ равен $\mathfrak{R}' = \mathfrak{R}/[\mathfrak{G}, \mathfrak{R}]$. Очевидно, что $\mathfrak{R}'$ содержится в центре алгебры $\mathfrak{G}'$. Фактор-алгебра алгебры $\mathfrak{G}'$ по ее центру есть тогда фактор-алгебра алгебры $\mathfrak{G}'/\mathfrak{R}' = \mathfrak{G}/\mathfrak{R}$ и потому полупроста. Следовательно, присоединенное представление алгебры $\mathfrak{G}'$ вполне приводимо, т. е. алгебра $\mathfrak{G}'$ редуктивна. Применяя предложение 1, получаем $\mathfrak{S} \subset [\mathfrak{G}, \mathfrak{R}] \subset [\mathfrak{G}, \mathfrak{G}] \cap \mathfrak{R}$. Далее, фактор-алгебра $\mathfrak{H} = \mathfrak{G}/\mathfrak{S}$ редуктивна. Ее радикал, с одной стороны, совпадает с ее центром $\mathfrak{Z}$; с другой стороны, он равен $\mathfrak{R}/\mathfrak{S}$ (предложение 2). Очевидно, что $[\mathfrak{H}, \mathfrak{H}] \cap \mathfrak{Z} = 0$. Следовательно, $[\mathfrak{G}, \mathfrak{G}] \cap \mathfrak{R} \subset \mathfrak{S}$. Тем самым доказано первое утверждение теоремы.

Лемма 2, примененная к присоединенному представлению алгебры $\mathfrak{G}$, показывает, что для всяких элементов $n \in \mathfrak{N}$, $g \in \mathfrak{G}$ оператор $\operatorname{ad} n \circ \operatorname{ad} g$ содержится в радикале ассоциативной алгебры эндоморфизмов пространства $\mathfrak{G}$, порожденной операторами 1 и $\operatorname{ad} x$, $x \in \mathfrak{G}$, и, следовательно, нильпотентен. Имеем $B(n, g) = \operatorname{Tr}(\operatorname{ad} n \circ \operatorname{ad} g) = 0$, так что идеал $\mathfrak{N}$ и тем более $\mathfrak{S}$ ортогонален к алгебре $\mathfrak{G}$ в смысле формы Киллинга. Далее, $B(\mathfrak{S}, \mathfrak{G}) = B([\mathfrak{G}, \mathfrak{R}], \mathfrak{G}) = B(\mathfrak{R}, [\mathfrak{G}, \mathfrak{G}]) = 0$, так как билинейная форма B инвариантна. Обозначим через $\mathfrak{R}'$ максимальное подпространство, ортогональное к $[\mathfrak{G}, \mathfrak{G}]$. По доказанному $\mathfrak{R} \subset \mathfrak{R}'$. Из предложения 10 гл. 4 следует, что $[\mathfrak{G}, \mathfrak{R}']$ — нильпотентный идеал алгебры $\mathfrak{G}$, откуда $[\mathfrak{G}, \mathfrak{R}'] \subset \mathfrak{N}$. Значит, идеал $[\mathfrak{R}', \mathfrak{R}']$ также содержится в $\mathfrak{N}$ и потому нильпотентен; но тогда идеал $\mathfrak{R}'$ разрешим и должен содержаться в $\mathfrak{R}$. Итак, $\mathfrak{R}' = \mathfrak{R}$.

Следствие 1. *Для того чтобы алгебра Ли* $\mathfrak{G}$ *была разрешимой, необходимо и достаточно, чтобы трилинейная форма* $B(x, [y, z])$ *тождественно равнялась нулю на* $\mathfrak{G}$.

В самом деле, разрешимость алгебры $\mathfrak{G}$ означает, что $\mathfrak{G} = \mathfrak{R}$, а это по доказанной теореме равносильно тому, что $\mathfrak{G}$ ортогональна к $[\mathfrak{G}, \mathfrak{G}]$.

Следствие 2. *Всякое дифференцирование алгебры Ли $\mathfrak{G}$ отображает $\mathfrak{R}$ в $\mathfrak{R}$ и $\mathfrak{S}$ в $\mathfrak{S}$.*

Образуем полупрямое произведение $\mathfrak{H}$ алгебры $\mathfrak{G}$ и алгебры ее дифференцирований $\mathfrak{D}$ ($\mathfrak{H}$—это так называемый „голоморф" алгебры $\mathfrak{G}$)[1]. При $D \in \mathfrak{D}$, $x \in \mathfrak{G}$ имеем $[D, x] = Dx$ в алгебре $\mathfrak{H}$. Из леммы 8 гл. 3 следует, что $[\mathfrak{H}, \mathfrak{R}]$ — нильпотентный идеал в алгебре $\mathfrak{H}$[2]. Так как $[\mathfrak{H}, \mathfrak{R}] \subset [\mathfrak{H}, \mathfrak{G}] \subset \mathfrak{G}$, то $[\mathfrak{H}, \mathfrak{R}] \subset \mathfrak{R}$, т. е. всякое дифференцирование алгебры $\mathfrak{G}$ отображает $\mathfrak{R}$ в $\mathfrak{R}$. Теперь становится очевидным, что нильпотентный радикал $\mathfrak{S} = [\mathfrak{G}, \mathfrak{R}]$ инвариантен относительно всех дифференцирований алгебры $\mathfrak{G}$.

[1]) Пространство $\mathfrak{H}$ — прямое произведение векторных пространств $\mathfrak{G}$ и $\mathfrak{D}$. Умножение в $\mathfrak{H}$ определяется следующим образом: если $D, D' \in \mathfrak{D}$, $x, x' \in \mathfrak{G}$, то $[(D, x), (D', x')] = ([D, D'], Dx' - D'x + [x, x'y])$. При этом $\mathfrak{G}$ можно рассматривать как идеал алгебры $\mathfrak{H}$, а $\mathfrak{D}$ — как ее подалгебру. — *Прим. перев.*

[2]) Здесь следует предварительно доказать, что $\mathfrak{R}$ — идеал в $\mathfrak{H}$, т. е. что радикал $\mathfrak{R}$ алгебры $\mathfrak{G}$ инвариантен относительно всех ее дифференцирований. Это следует из того, что производная алгебра $[\mathfrak{G}, \mathfrak{G}]$ инвариантна относительно всех дифференцирований и что $\mathfrak{R}$ — максимальное подпространство, ортогональное к $[\mathfrak{G}, \mathfrak{G}]$ в смысле формы Киллинга в алгебре $\mathfrak{G}$. — *Прим. перев.*

Глава 7

ТЕОРЕМЫ АДО И ИВАСАВЫ

П. Картье

1. Введение

В этой главе $\mathfrak{G}$ будет обозначать конечномерную алгебру Ли над полем K характеристики 0 (в приложении будет рассмотрен случай конечной характеристики). Наша цель будет состоять в доказательстве следующих двух теорем.

Теорема 1 (Адо)[1]. *Алгебра Ли $\mathfrak{G}$ допускает точное конечномерное линейное представление, при котором элементы наибольшего нильпотентного идеала $\mathfrak{N}$ алгебры $\mathfrak{G}$ представляются нильпотентными операторами.*

Теорема 2 (Ивасава)[2]. *Если M — $\mathfrak{G}$-модуль конечной размерности над K и $u \in H^2(\mathfrak{G}, M)$, то существует $\mathfrak{G}$-модуль N, содержащий M в качестве подмодуля и такой, что канонический гомоморфизм группы $H^2(\mathfrak{G}, M)$ в группу $H^2(\mathfrak{G}, N)$ аннулирует u.*

Идея приведенного здесь доказательства принадлежит Хариш-Чандре. Усовершенствовав доказательство теоремы 1, данное Э. Картаном, Хохшильд недавно доказал аналог теоремы 2 для всех групп когомологий $H^p(\mathfrak{G}, M)$ в том случае, когда алгебра $\mathfrak{G}$ разрешима (этот же результат был получен независимо Козюлем).

Для доказательства нам понадобится следующая

Лемма. *Пусть A — ассоциативная алгебра с конечным числом образующих, I — двусторонний идеал алгебры A конечной коразмерности. Тогда I обладает ко-*

---

[1]) См. [1]. — *Прим. перев.*
[2]) См. [23]. — *Прим. перев.*

нечной базой (как двусторонний идеал) и идеалы I^s[1]) *имеют конечную коразмерность при всех* $s > 0$.

Сделанные относительно A и I предположения позволяют найти такое конечномерное подпространство $G \subset A$, что $G + I = A$ и G порождает A как алгебру. Если $g_1, g_2 \in G$, то $g_1 g_2 = g + i$, где $g \in G$, $i \in I$, следовательно, $i \in I \cap (G + G^2)$. Обозначим через Z двусторонний идеал, порожденный конечномерным подпространством $I \cap (G + G^2)$. Очевидно, что $G + Z$ — подалгебра. Эта подалгебра содержит G и потому должна совпадать с A. Итак $G + Z = A$, откуда следует, что идеал $Z \subset I$ имеет конечную коразмерность. По самому своему построению идеал Z порождается конечным числом элементов. Следовательно, идеал I обладает тем же свойством.

Пространство I/I^2 очевидным образом снабжается структурой A-бимодуля, при этом I содержится в его аннуляторе, так что I/I^2 можно рассматривать как A/I-бимодуль. Так как по доказанному идеал I имеет конечную базу, то бимодуль I/I^2 порожден над A/I конечным числом элементов; поскольку пространство A/I конечномерно, то и пространство I/I^2 конечномерно. Пространство A/I^2, будучи расширением пространства A/I посредством I/I^2, также конечномерно. Таким образом, идеал I^2 имеет конечную коразмерность в A. Индукцией по n подобное утверждение доказывается для всех идеалов вида I^{2^n}. Далее, при произвольном s можно подобрать такое n, что $s < 2^n$. Тогда идеал I^s также имеет конечную коразмерность.

2. Вспомогательная теорема

Теорема 3. *Пусть* $\mathfrak{H}$ — *коммутативный идеал алгебры Ли* $\mathfrak{G}$ *и* U — *ее обертывающая алгебра. В алгебре* U *существует двусторонний идеал* Z *со следующими свойствами*:

1) Z *имеет конечную коразмерность в* U,
2) $Z \cap \mathfrak{H} = 0$,
3) $\mathfrak{H}\mathfrak{G} \subset Z$,
4) $\mathfrak{N}^s \subset Z$ *при достаточно большом* s. ($\mathfrak{N}$ — *наибольший нильпотентный идеал алгебры* $\mathfrak{G}$.)

[1]) Для всякого подмножества $M \subset A$ и натурального числа s через M^s обозначается линейная оболочка множества всевозможных произведений s элементов из M. — *Прим. перев.*

Сделаем предварительно несколько замечаний. Двусторонние идеалы алгебры U конечной коразмерности суть не что иное, как ядра конечномерных линейных представлений алгебры $\mathfrak{G}$[1]). Отсюда следует, что всякий левый идеал конечной коразмерности содержит двусторонний идеал конечной коразмерности[2]). Далее, по теореме Энгеля условие 4) равносильно тому, что идеал Z содержит достаточно высокую степень всякого элемента из $\mathfrak{R}$. Наконец, заметим, что если $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_k$ — идеалы алгебры $\mathfrak{G}$ и T — левый идеал алгебры U, порожденный произведением $\mathfrak{A}_1 \cdot \cdot \cdot \mathfrak{A}_k$, то всякое дифференцирование D алгебры $\mathfrak{G}$, сохраняющее идеалы $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_k$, продолжается в дифференцирование $\overline{D}$ алгебры U, сохраняющее идеал T. В самом деле,

$$\overline{D}(ua_1 \ldots a_k) = \sum_{i=1}^{k} ua_1 \ldots Da_i \ldots a_k + \overline{D}u \cdot a_1 \ldots a_k \in T.$$

Если, в частности, $D = \operatorname{ad} g$, то $\overline{D}u = gu - ug$, откуда $Tg \subset T$, т. е. T — двусторонний идеал алгебры U.

Первым шагом в доказательстве теоремы 3 будет доказательство следующего предложения:

Если алгебра Ли $\mathfrak{G}$ разрешима и идеал Z алгебры U удовлетворяет условиям 1) — 4), *то существует двусторонний идеал $Z' \subset Z$ алгебры U, удовлетворяющий условиям* 1) — 4) *и, сверх того, условию*

5) *Z' инвариантен относительно всякого дифференцирования $\overline{D}$ алгебры U, продолжающего дифференцирование D алгебры $\mathfrak{G}$, сохраняющее идеал $\mathfrak{H}$.*

Пусть $A \supset Z$ — такой двусторонний идеал алгебры U, что A/Z — радикал ассоциативной алгебры U/Z. Тогда, поскольку идеал A/Z нильпотентен, $A^r \subset Z$ для достаточно большого r. Далее, $\mathfrak{R} \subset A$ (лемма 2 гл. 6); всякое дифференцирование алгебры $\mathfrak{G}$ отображает $\mathfrak{G}$ в $\mathfrak{R}$ (следствие 2 теоремы гл. 6).

---

[1]) Точнее, индуцированных представлений алгебры U. — *Прим. ред.*

[2]) Таким идеалом является, например, ядро линейного представления алгебры U, индуцированного ее левым регулярным представлением в фактор-пространстве по данному левому идеалу. — *Прим. ред.*

Если $\overline{D}$ — дифференцирование алгебры U, продолжающее дифференцирование D алгебры $\mathfrak{G}$, то для всякого $u = g_1 \dots g_n$

$$\overline{D}u = \sum g_1 \dots Dg_i \dots g_n \in A$$

и $\overline{D}1 = 0$, т. е. $\overline{D}U \subset A$. Тем более идеал A инвариантен относительно $\overline{D}$. Левый идеал S, порожденный множеством $\mathfrak{H}\mathfrak{G}$, как было замечено выше, инвариантен относительно тех дифференцирований $\overline{D}$, для которых $D\mathfrak{H} \subset \mathfrak{H}$ и, в частности, является двусторонним идеалом. Следовательно, $Z' = A^r + S$ — двусторонний идеал, удовлетворяющий условию 5). Очевидно, что $Z' \subset Z$. Из леммы 1 следует, что A^r — идеал конечной коразмерности, так как этим свойством обладает идеал $A \supset Z$. Тем более это верно для $Z' \supset A^r$, т. е. идеал Z' удовлетворяет условию 1). Далее, $Z' \cap \mathfrak{H} \subset Z \cap \mathfrak{H} = 0$, так что условие 2) также выполнено. Из $Z' \supset S \supset \mathfrak{H}\mathfrak{G}$ следует, что и условие 3) выполнено. Наконец, справедливость условия 4) вытекает из того, что $\mathfrak{N} \subset A$ и потому $\mathfrak{N}^r \subset Z'$.

Вторым шагом в доказательстве теоремы 3 будет доказательство следующего предложения:

Пусть алгебра Ли $\mathfrak{G}$ есть прямая сумма разрешимого идеала $\mathfrak{P}$ и подалгебры $\mathfrak{B}$, причем $\mathfrak{H} \subset \mathfrak{P}$ и $\mathfrak{N} = \mathfrak{N} \cap \mathfrak{P} + \mathfrak{N} \cap \mathfrak{B}$. Если алгебра $U(\mathfrak{P})$ содержит идеал Z', удовлетворяющий условиям 1) — 5), *то алгебра $U(\mathfrak{G})$ содержит идеал Z, удовлетворяющий условиям* 1) — 4).

Для всякого $g \in \mathfrak{G}$ обозначим через D_g дифференцирование алгебры $\mathfrak{P}$, являющееся ограничением на $\mathfrak{P}$ оператора $\operatorname{ad} g$. Так как $\mathfrak{H}$—идеал алгебры $\mathfrak{G}$, то $D_g\mathfrak{H} \subset \mathfrak{H}$ и поэтому $\overline{D}_g Z' \subset Z'$. Из теоремы Биркгофа — Витта вытекает (следствие 3 теоремы 1′ гл. I), что векторное пространство $U(\mathfrak{G})$ совпадает с пространством $U(\mathfrak{P}) \otimes U(\mathfrak{B})$ [1]). Левый идеал алгебры $U(\mathfrak{G})$, порожденный множеством Z', совпадает с правым идеалом, порожденным этим множеством, поскольку $gz - zg = \overline{D}_g z \in Z'$ при всяких $z \in Z'$, $g \in \mathfrak{G}$. Следовательно, этот идеал двусторонен и равен $Z' \otimes U(\mathfrak{B})$. Далее, левый идеал алгебры $U(\mathfrak{G})$, порожденный $\mathfrak{B}$, равен $U(\mathfrak{P}) \otimes \mathfrak{B}U(\mathfrak{B})$. Рассмотрим левый идеал $V = Z' \otimes U(\mathfrak{B}) + U(\mathfrak{P}) \otimes \mathfrak{B}U(\mathfrak{B})$. Фактор-

[1]) При $u \in U(\mathfrak{P})$, $b \in U(\mathfrak{B})$ элемент $u \otimes b \in U(\mathfrak{P}) \otimes U(\mathfrak{B})$ отождествляется с элементом ub в алгебре $U(\mathfrak{G})$. — *Прим. перев.*

пространство $U(\mathfrak{G})/V$ изоморфно пространству

$$U(\mathfrak{P})/Z' \otimes U(\mathfrak{B})/\mathfrak{B}U(\mathfrak{B}) \simeq U(\mathfrak{P})/Z' = T.$$

Пространство T конечномерно; каноническое линейное представление θ алгебры $U(\mathfrak{G})$ в пространстве T имеет своим ядром наибольший двусторонний идеал Z, содержащийся в V. Для всякого $u \in U(\mathfrak{P})$ пусть $\dot{u} \in T$ обозначает элемент u, приведенный по модулю Z'. Тогда при $p \in \mathfrak{P}$, $b \in \mathfrak{B}$ имеем $p(u \otimes 1) = pu \otimes 1$ и $b(u \otimes 1) = \overline{D}_b u \otimes 1 + u \otimes b \equiv \overline{D}_b u \otimes 1 \pmod V$, откуда $\theta(p)\dot{u} = \dot{\widehat{pu}}$, $\theta(b)\dot{u} = \dot{\widehat{\overline{D}_b u}}$.

Если h — какой-нибудь ненулевой элемент из $\mathfrak{H}$, то $\theta(h)\dot{1} = \dot{h} \neq 0$, поскольку $\mathfrak{H} \cap Z' = 0$. Следовательно, $\mathfrak{H} \cap Z = 0$. Очевидно также, что Z — идеал конечной коразмерности в $U(\mathfrak{G})$, так что Z удовлетворяет условиям 1) и 2). Так как $Z' \supset \mathfrak{H}\mathfrak{P}$, то $V \supset \mathfrak{H}\mathfrak{P} + \mathfrak{H}\mathfrak{B} \supset \mathfrak{H}\mathfrak{G}$, и V содержит левый идеал алгебры $U(\mathfrak{G})$, порожденный $\mathfrak{H}\mathfrak{G}$; но этот идеал двусторонен и должен поэтому содержаться в Z. Таким образом, $\mathfrak{H}\mathfrak{G} \subset Z$, т. е. Z удовлетворяет условию 3). Наконец, множество E тех $n \in \mathfrak{N}$, для которых эндоморфизм $\theta(n)$ нильпотентен, является подпространством в $\mathfrak{N}$ (см. лемму 2 гл. 6). По условию $(\mathfrak{A} \cap \mathfrak{P})^s \subset Z'$ для некоторого s; следовательно, $(\mathfrak{N} \cap \mathfrak{P})^s \subset V$; но левый идеал, порожденный множеством $(\mathfrak{N} \cap \mathfrak{P})^s$, двусторонен и должен содержаться в Z, откуда $(\mathfrak{N} \cap \mathfrak{P})^s \subset Z$ и $\mathfrak{N} \cap \mathfrak{P} \subset E$. Далее, при $b \in \mathfrak{N} \cap \mathfrak{B}$ эндоморфизм $\operatorname{ad} b$, а значит, и D_b, нильпотентен. Множество элементов $u \in U(\mathfrak{P})$, аннулируемых степенями оператора $\overline{D}_b$, есть подалгебра, содержащая $\mathfrak{P}$ и потому совпадающая с $U(\mathfrak{P})$. Это показывает, что эндоморфизм $\theta(b)$ пространства T нильпотентен, т. е. $b \in E$. Итак, $\mathfrak{N} \cap \mathfrak{P} \subset E$ и $\mathfrak{N} \cap \mathfrak{B} \subset E$, так что $\mathfrak{N} \subset E$, и условие 4) также выполнено.

Теперь докажем теорему 3 индукцией по размерности пространства $\mathfrak{G}/\mathfrak{H}$. Если $\mathfrak{G} = \mathfrak{H}$, то $U(\mathfrak{G}) \simeq S(\mathfrak{H})$. Возьмем в качестве Z идеал, порожденный $\mathfrak{H}^2$, т. е. множество элементов алгебры $S(\mathfrak{H})$, не содержащих однородных компонент степеней 0 и 1. При этом условия 1) — 4) выполняются очевидным образом. Если $\mathfrak{G} \neq \mathfrak{H}$, то мы разберем отдельно два случая:

а) Алгебра $\mathfrak{G}$ разрешима. Тогда алгебра $\mathfrak{G}/\mathfrak{H} = \mathfrak{A}$ также разрешима и $[\mathfrak{A}, \mathfrak{A}] \neq \mathfrak{A}$. Следовательно, $[\mathfrak{G}, \mathfrak{G}] + \mathfrak{H} \neq \mathfrak{G}$.

Возьмем в качестве $\mathfrak{P}$ произвольную гиперплоскость, содержащую $[\mathfrak{G}, \mathfrak{G}] + \mathfrak{H}$, и в качестве $\mathfrak{B}$ — прямую, дополнительную к $\mathfrak{P}$ и содержащуюся в $\mathfrak{N}$, если $\mathfrak{N} \not\subset \mathfrak{P}$. Очевидно, что $\mathfrak{G} = \mathfrak{P} + \mathfrak{B}$, что $\mathfrak{P}$ — разрешимый идеал, что $\mathfrak{B}$ — подалгебра и что $\mathfrak{N} = \mathfrak{N} \cap \mathfrak{P} + \mathfrak{N} \cap \mathfrak{B}$.

б) Алгебра $\mathfrak{G}$ не разрешима. Тогда, по теореме Леви — Мальцева, $\mathfrak{G} = \mathfrak{P} + \mathfrak{B}$, где $\mathfrak{P}$ — радикал алгебры $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{B}$ — полупростая подалгебра. Очевидно, что $\mathfrak{H} \subset \mathfrak{P}$ и $\mathfrak{N} \subset \mathfrak{P}$.

В обоих случаях $\dim \mathfrak{P}/\mathfrak{H} < \dim \mathfrak{G}/\mathfrak{H}$ и по предположению индукции алгебра $U(\mathfrak{P})$ содержит идеал Z_1, удовлетворяющий условиям 1) — 4). Так как алгебра $\mathfrak{P}$ разрешима, то идеал Z_1 можно выбрать удовлетворяющим также условию 5) (первый шаг доказательства); но тогда (второй шаг доказательства) можно построить идеал Z_2 алгебры $U(\mathfrak{G})$, удовлетворяющий условиям 1) — 4).

3. Доказательство теорем 1 и 2

Доказательство теоремы 1. Взяв в качестве $\mathfrak{H}$ центр алгебры $\mathfrak{G}$, построим идеал Z алгебры $U(\mathfrak{G})$, удовлетворяющий условиям теоремы 3 (причем условие 3) сейчас для нас несущественно). Идеал Z является ядром некоторого конечномерного линейного представления θ алгебры $\mathfrak{G}$. Представление θ точно на $\mathfrak{H}$ (условие 2)) и элементам из $\mathfrak{N}$ ставит в соответствие нильпотентные операторы (условие 4)). С другой стороны, присоединенное представление ad алгебры $\mathfrak{G}$ имеет своим ядром $\mathfrak{H}$ и элементам из $\mathfrak{N}$ также ставит в соответствие нильпотентные операторы. Очевидно, что прямая сумма представлений θ и ad удовлетворяет условиям теоремы 1.

Доказательство теоремы 2. Пусть $u \in H^2(\mathfrak{G}, M)$. Прием, с помощью которого мы сейчас „убьем“ u, аналогичен использованному в п. 11 гл. 3. Пусть $\mathfrak{A}$ — расширение алгебры $\mathfrak{G}$ посредством M

$$0 \to M \xrightarrow{i} \mathfrak{A} \xrightarrow{\pi} \mathfrak{G} \to 0,$$

соответствующее u. Условимся отождествлять модули M и $i(M) \subset \mathfrak{A}$. Рассмотрим максимальный идеал $I = \mathfrak{A}U(\mathfrak{A})$ алгебры $U(\mathfrak{A})$. Идеал I естественным образом снабжается структурой левого $U(\mathfrak{A})$-модуля, т. е. $\mathfrak{A}$-модуля. При этом фактор-модуль $I/MI = P$ аннулируется алгеброй M и является фактически $\mathfrak{A}/M$-модулем, т. е. $\mathfrak{G}$-модулем. Обозначим через φ

каноническое отображение пространства $M \subset \mathfrak{A} \subset I$ в пространство P. Это отображение является $\mathfrak{G}$-гомоморфизмом. Действительно, при $m \in M$, $g \in \mathfrak{G}$ имеем $\theta(g)m = [a, m]$[1]), где a — такой элемент из $\mathfrak{A}$, что $\pi(a) = g$; далее, $[a, m] \equiv$ $\equiv am \pmod{MI}$ и, с другой стороны, $g \cdot \dot{m} = \dot{\widehat{am}}$[2]).

Возьмем какой-нибудь коцикл k из класса когомологий u. Тогда $k(x, y) = [l(x), l(y)] - l([x, y])$ для некоторого вложения l пространства $\mathfrak{G}$ в $\mathfrak{A}$. Если рассматривать l как функцию со значениями в I, то $k(x, y) = l(x)l(y) -$ $- l([x, y]) - l(y)l(x)$, откуда

$$\dot{\widehat{k(x, y)}} = x \cdot \dot{\widehat{l(y)}} - \dot{\widehat{l([x, y])}} - y \cdot \dot{\widehat{l(x)}}.$$

Следовательно, $\varphi \circ k$ — кограница в $C^2(\mathfrak{G}, P)$, так что $\varphi^* \cdot u = 0$. Пространство P бесконечномерно, но, по теореме 3, существует такой идеал Z конечной коразмерности в $U(\mathfrak{A})$, что $Z \supset MI$, $Z \cap M = 0$. Тогда пространство $N = I/Z = P/(Z/MI)$ конечномерно и M вкладывается в N взаимно однозначным образом, поскольку $M \cap Z = 0$. Так как класс когомологий u „убивается“ отображением $\varphi: M \to P$, то он тем более „убивается“ вложением M в N, являющимся композицией отображения φ и канонической проекции P на $P/(Z/MI)$. Теорема доказана.

Заметим, что теорема 2 равносильна тому, что *для всякого расширения* $\mathfrak{A}$ *алгебры Ли* $\mathfrak{G}$ *посредством* $\mathfrak{G}$-*модуля* M (*рассматриваемого как коммутативная алгебра Ли*) *существует такое несущественное расширение* $\mathfrak{B} \supset \mathfrak{A}$ *алгебры* $\mathfrak{G}$ *посредством некоторого* $\mathfrak{G}$-*модуля* $N \supset M$, *что диаграмма*

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M \arrow[r] \arrow[d] & \mathfrak{A} \arrow[r] \arrow[d] & \mathfrak{G} \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & N \arrow[r] & \mathfrak{B} \arrow[ur] & &
\end{tikzcd}$$

коммутативна.

4. Приложение

Пусть K — поле конечной характеристики p, $\mathfrak{G}$ — алгебра Ли над K. Докажем, что в алгебре $U(\mathfrak{G})$ существует идеал Z, удовлетворяющий условиям 1) — 3) теоремы 3,

[1]) θ — представление алгебры $\mathfrak{G}$ в пространстве M, задающее структуру $\mathfrak{G}$-модуля M. — *Прим. перев.*

[2]) Точкой обозначается взятие по модулю MI. — *Прим. перев.*

откуда будет следовать, что алгебра $\mathfrak{G}$ обладает точным конечномерным представлением и что всякий класс двумерных когомологий „убивается“, как в теореме 2. Пусть $\{x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_n\}$ — такая база пространства $\mathfrak{G}$, что элементы x_i образуют базу в $\mathfrak{H}$. Оператор $D_i = \operatorname{ad} y_i$ продолжается в дифференцирование $\overline{D}_i$ алгебры $U(\mathfrak{G})$. Легко доказать, что $\overline{D}_i^p u = [y_i^p, u]$ для всякого $u \in U(\mathfrak{G})$. Так как пространство $\mathfrak{G}$ конечномерно, то существуют такие константы $a_{i,j}$, что $\sum\limits_j a_{i,j} \overline{D}_i^{p^j} = 0$; но тогда элементы $\sum\limits_j a_{i,j} y_i^{p^j}$ лежат в центре алгебры $\mathfrak{G}$. Пусть Z — двусторонний идеал алгебры $U(\mathfrak{G})$, порожденный этими элементами и множеством $\mathfrak{H}\mathfrak{G}$. Применяя теорему Биркгофа — Витта [1]) в форме 1′ к базе алгебры $\mathfrak{G}$, образованной элементами x_i и y_i, легко показать, что идеал Z имеет конечную коразмерность и что $\mathfrak{H} \cap Z = 0$.

[1]) См. замечание 1 в конце гл. 1. — *Прим. перев.*

Глава 8

ВЕСА И КОРНИ. СТРУКТУРА ПОЛУПРОСТЫХ АЛГЕБР ЛИ[1]

Ф. Брюа

В этой главе K обозначает алгебраически замкнутое поле характеристики 0; *все рассматриваемые векторные пространства конечномерны над K.*

1. Представления нильпотентных алгебр Ли

Пусть $\mathfrak{H}$ — алгебра Ли, ρ — ее линейное представление в пространстве V. *Функция λ на алгебре $\mathfrak{H}$ называется весом представления ρ, если существует такой ненулевой вектор $a \in \mathfrak{H}$, что $\rho(H)a = \lambda(H)a$ для всех $H \in \mathfrak{H}$. Очевидно, что весами могут быть только линейные функции на $\mathfrak{H}$. По теореме Ли всякое представление разрешимой алгебры Ли в ненулевом пространстве имеет хотя бы один вес.*

Далее, если A — эндоморфизм векторного пространства V и λ — скаляр, то через $V(A, \lambda)$ обозначается подпространство пространства V, образованное такими векторами $a \in V$, что

$$(A - \lambda)^n a = 0 \tag{1}$$

для достаточно большого $n \geqslant 0$. Можно считать, как известно, что $n = \dim V(A, \lambda)$, т. е. при $a \in V(A, \lambda)$

$$(A - \lambda)^{\dim V(A, \lambda)} a = 0. \tag{2}$$

Подобно этому, если ρ — линейное представление алгебры Ли $\mathfrak{H}$ в пространстве V и λ — линейная форма на $\mathfrak{H}$, то через $V(\mathfrak{H}, \lambda)$, или просто через V^λ, обозначается подпространство пространства V, образованное всеми векторами $a \in A$, для которых существует такое целое $n \geqslant 0$, что

$$(\rho(H) - \lambda(H))^n a = 0 \tag{3}$$

---

[1] Изложение в этой главе в основном следует статье [19]. — *Прим. перев.*

при всех $H \in \mathfrak{H}$. Иными словами,

$$V(\mathfrak{H}, \lambda) = \bigcap_{A \in \mathfrak{H}} V(\rho(A), \lambda(A)). \tag{4}$$

Легко видеть, что

$$(\rho(H) - \lambda(H))^{\dim V(\mathfrak{H}, \lambda)} a = 0 \tag{5}$$

для любых $a \in V(\mathfrak{H}, \lambda)$, $H \in \mathfrak{H}$.

Теорема 1. *Пусть ρ — линейное представление нильпотентной алгебры Ли $\mathfrak{H}$ в пространстве V. Тогда*

1) *подпространства V^λ инвариантны относительно $\mathfrak{H}$;*

2) *если $V^\lambda \neq 0$, то λ — вес представления ρ, и это единственный вес в подпространстве V^λ;*

3) *пространство V есть прямая сумма подпространств V^λ.*

Для доказательства первого утверждения достаточно, согласно формуле (4), показать, что если $A \in \mathfrak{H}$, то подпространство $V(A, \lambda(A)) = V(\rho(A), \lambda(A))$ инвариантно относительно $\mathfrak{H}$. Пусть $B \in \mathfrak{H}$ и $a \in V(A, \lambda(A))$. Покажем, что $\rho(B) a \in V(A, \lambda(A))$. Так как алгебра $\mathfrak{H}$ нильпотентна, то существует такое $k \geqslant 0$, что $(\operatorname{ad} A)^k B = 0$. Доказательство проведем индукцией по k. При $k = 0$ утверждение очевидно. Далее,

$$(\rho(A) - \lambda(A))\rho(B) = \rho(B)(\rho(A) - \lambda(A)) + \rho([A, B]), \tag{6}$$

откуда индукцией по n получается формула

$$(\rho(A) - \lambda(A))^n \rho(B) = \rho(B)(\rho(A) - \lambda(A))^n + \sum_{s=0}^{n-1} (\rho(A) - \lambda(A))^{n-s-1} \rho([A, B])(\rho(A) - \lambda(A))^s. \tag{7}$$

Взяв $n > 2 \dim V(A, \lambda(A))$, применим операторы, стоящие в обеих частях равенства (7), к вектору $a \in V(A, \lambda(A))$. Все слагаемые в правой части при этом обратятся в 0. Действительно, это очевидно для первого слагаемого и слагаемых, соответствующих $s \geqslant \dim V(A, \lambda(A))$. Что касается остальных слагаемых, то для них это верно, поскольку операторы $\rho(A) - \lambda(A)$ и $\rho([A, B])$ сохраняют подпространство $V(A, \lambda(A))$ (для первого оператора это очевидно, для второго имеет место по предположению индукции, так как

$(\mathrm{ad}\, A)^{k-1}[A, B]=0$); применяя затем оператор $(\rho(A)-\lambda(A))^{n-s-1}$, получаем 0, так как $s<\dim V(A, \lambda(A))$. Итак, правая часть полученного равенства равна 0, следовательно, и левая равна 0, т. е. $\rho(B)a \in V(A, \lambda(A))$, что и требовалось доказать.

Второе утверждение теоремы очевидно ввиду теоремы Ли.

Докажем утверждение 3). Прежде всего, сумма подпространств V^{λ} прямая. Действительно, пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ — различные веса; тогда, поскольку основное поле K бесконечно, существует такой элемент $A \in \mathfrak{H}$, что $\lambda_i(A) \neq \lambda_j(A)$ при $i \neq j$. По известному свойству эндоморфизмов для этого элемента A сумма подпространств $V(A, \lambda_i(A))$ прямая. Следовательно, то же верно и для подпространств $V^{\lambda_i} \subset V(A, \lambda_i(A))$.

Докажем теперь индукцией по размерности пространства V, что $V=\sum V^{\lambda}$. При $\dim V=0$ это очевидно. При $\dim V>0$ могут представиться два случая: либо каждый оператор $\rho(A)$, $A \in \mathfrak{H}$, имеет единственное собственное значение $\lambda(A)$ и тогда, по теореме Ли, λ — вес представления ρ и $V=V^{\lambda}$; либо существует такой элемент $A \in \mathfrak{H}$, что оператор $\rho(A)$ имеет по крайней мере два различных собственных значения. В последнем случае пространство V есть прямая сумма подпространств $V(A, \lambda_i(A))$, инвариантных относительно $\mathfrak{H}$ и имеющих размерность, меньшую размерности пространства V. Применив к этим подпространствам предположение индукции, получим $V=\sum V^{\lambda}$.

2. Подалгебры Картана

Пусть $\mathfrak{G}$ — алгебра Ли, $\mathfrak{H}$ — ее нильпотентная подалгебра. Применим определения и результаты п. 1 к присоединенному представлению ρ подалгебры $\mathfrak{H}$ в алгебре $\mathfrak{G}$. Всякий вес этого представления называется *корнем алгебры* $\mathfrak{G}$ *относительно подалгебры* $\mathfrak{H}$. Иными словами, линейная форма α на $\mathfrak{H}$ является корнем, если существует такой элемент $G \in \mathfrak{G}$, $G \neq 0$, что для всякого $H \in \mathfrak{H}$

$$[H, G]=\alpha(H) G. \tag{8}$$

По доказанной теореме пространство $\mathfrak{G}$ разбивается в прямую сумму подпространств $\mathfrak{G}^{\alpha}$, соответствующих различным корням α алгебры $\mathfrak{G}$ относительно подалгебры $\mathfrak{H}$. Заметим, что, поскольку алгебра $\mathfrak{H}$ нильпотентна, $\mathfrak{H}\subset\mathfrak{G}^0$; более того, всякая нильпотентная подалгебра алгебры $\mathfrak{G}$, содержащая $\mathfrak{H}$, содержится в $\mathfrak{G}^0$.

Лемма 1. $[\mathfrak{G}^\alpha, \mathfrak{G}^\beta]\subset\mathfrak{G}^{\alpha+\beta}$.

Следствие. $\mathfrak{G}^0$ — *подалгебра алгебры* $\mathfrak{G}$.

Достаточно показать, что $[X, Y]\in\mathfrak{G}^{\alpha+\beta}$ для любых $X\in\mathfrak{G}^\alpha$, $Y\in\mathfrak{G}^\beta$. Имеем

$$(\mathrm{ad}(H)-\alpha(H)-\beta(H))[X, Y]=$$
$$=[(\mathrm{ad}(H)-\alpha(H))X, Y]+[X, (\mathrm{ad}(H)-\beta(H))Y]$$

и более общо (формула Лейбница)

$$(\mathrm{ad}(H)-\alpha(H)-\beta(H))^n[X, Y]=$$
$$=\sum_{p=0}^{n} C_n^p\left[(\mathrm{ad}(H)-\alpha(H))^p X,\quad (\mathrm{ad}(H)-\beta(H))^{n-p} Y\right],$$

откуда и вытекает лемма 1.

Определение 1. *Нильпотентная подалгебра* $\mathfrak{H}$ *алгебры Ли* $\mathfrak{G}$ *называется регулярной, или подалгеброй Картана, если* $\mathfrak{G}^0=\mathfrak{H}$.

Согласно сказанному выше, такая подалгебра обязательно должна быть максимальной нильпотентной подалгеброй алгебры $\mathfrak{G}$ (обратное, вообще говоря, неверно).

Определение 2. *Элемент* $X\in\mathfrak{G}$ *называется регулярным, если размерность пространства* $\mathfrak{G}(X, 0)$ *минимальна.*

Теорема 2. *Пусть* $\mathfrak{H}$ — *нильпотентная подалгебра алгебры Ли* $\mathfrak{G}$, *содержащая регулярный элемент* H. *Тогда* $\mathfrak{G}^0$ — *подалгебра Картана и* $\mathfrak{G}^0=\mathfrak{G}(H, 0)$.

(Применяя эту теорему к одномерной подалгебре $\mathfrak{H}$, порожденной регулярным элементом, получаем, что *алгебра* $\mathfrak{G}$ *содержит по крайней мере одну подалгебру Картана.*)

Пусть $\mathfrak{G}=\mathfrak{G}^0+\sum\limits_{\alpha\neq0}\mathfrak{G}^\alpha$ — разложение пространства $\mathfrak{G}$ относительно алгебры $\mathfrak{H}$ и пусть $\tilde{\mathfrak{G}}=\sum\limits_{\alpha\neq0}\mathfrak{G}^\alpha$. Подпространства $\mathfrak{G}^{\alpha}$ инвариантны относительно всех операторов $\operatorname{ad}(X)$, $X \in \mathfrak{G}^0$, в силу леммы 1. Следовательно, подпространство $\tilde{\mathfrak{G}}$ также инвариантно относительно этих операторов. Обозначим через $d(X)$ определитель преобразования $\operatorname{ad}(X)$ в $\tilde{\mathfrak{G}}$. Функция d не обращается тождественно в 0 на $\mathfrak{G}^0$, так как существует вектор $H \in \mathfrak{H} \subset \mathfrak{G}^0$, для которого $\alpha(H) \neq 0$ при всех $\alpha \neq 0$, т. е. оператор $\operatorname{ad}(H)$ не имеет нулевых собственных значений на $\tilde{\mathfrak{G}}$, так что $d(H) \neq 0$. Пусть тогда X — такой элемент из $\mathfrak{G}^0$, что $d(X) \neq 0$. Ограничение на $\tilde{\mathfrak{G}}$ оператора $\operatorname{ad}(X)$ имеет лишь ненулевые собственные значения, поэтому $\mathfrak{G}(X, 0) \subset \mathfrak{G}^0$. Если H — регулярный элемент, содержащийся в $\mathfrak{H}$, то включение $\mathfrak{G}^0 \subset \mathfrak{G}(H, 0)$ влечет за собой ввиду минимальности размерности пространства $\mathfrak{G}(H, 0)$ равенство

$$\mathfrak{G}(X, 0) = \mathfrak{G}^0 = \mathfrak{G}(H, 0). \tag{9}$$

Это означает, в частности, что эндоморфизм $\operatorname{ad}(X)$ нильпотентен на $\mathfrak{G}^0$, или, что то же,

$$\operatorname{Tr}_{\mathfrak{G}^0}(\operatorname{ad}(X))^p = 0 \quad \text{при всех } p \geqslant 1. \tag{10}$$

В левой части этой формулы стоит полиноминальная функция от координат вектора X; по доказанному, эта функция обращается в 0 во всех точках X, в которых полином $d(X)$ отличен от нуля. Отсюда следует, что левая часть формулы (10) обращается в 0 всюду на $\mathfrak{G}^0$; другими словами, для всякого $X \in \mathfrak{G}^0$ эндоморфизм $\operatorname{ad}(X)$ нильпотентен на $\mathfrak{G}^0$, т. е. алгебра $\mathfrak{G}^0$ нильпотентна. Наконец, $\mathfrak{H}$ содержится в $\mathfrak{G}^0$ и $\mathfrak{G}(\mathfrak{G}^0, 0) \subset \mathfrak{G}(\mathfrak{H}, 0) = \mathfrak{G}^0$. Это показывает, что $\mathfrak{G}(\mathfrak{G}^0, 0) = \mathfrak{G}^0$, т. е. $\mathfrak{G}^0$ — подалгебра Картана.

Замечание. Описанным вслед за формулировкой теоремы 2 способом получаются все подалгебры Картана алгебры $\mathfrak{G}$. В действительности, как можно доказать, любые две подалгебры Картана алгебры $\mathfrak{G}$ могут быть преобразованы одна в другую автоморфизмом алгебры $\mathfrak{G}$.

В дальнейшем $\mathfrak{H}$ обозначает фиксированную подалгебру Картана алгебры $\mathfrak{G}$. Имеем

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{H} + \sum_{\alpha \neq 0} \mathfrak{G}^{\alpha}. \tag{11}$$

Через $\nu(\alpha)$ условимся обозначать размерность подпространства $\mathfrak{G}^\alpha$.

Лемма 2. *Пусть H и H' — элементы из $\mathfrak{H}$, B — форма Киллинга алгебры $\mathfrak{G}$. Тогда $B(H, H') = \sum\limits_\alpha \nu(\alpha)\alpha(H)\alpha(H')$.*

Достаточно рассмотреть случай $H = H'$, откуда общий случай получается поляризацией. Эндоморфизм $\mathrm{ad}(H)$ имеет в пространстве $\mathfrak{G}^\alpha$ единственное собственное значение $\alpha(H)$. Следовательно, $\mathrm{Tr}(\mathrm{ad}(H))^2 = \sum\limits_\alpha \nu(\alpha)(\alpha(H))^2$.

Лемма 3. *Пусть φ и α — два корня алгебры $\mathfrak{G}$ относительно $\mathfrak{H}$, причем $\alpha \neq 0$. Пусть, далее, p — такое целое число $\leqslant 0$, что $[\mathfrak{G}^{-\alpha}, \mathfrak{G}^{\varphi+p\alpha}] = 0$, и q — такое целое число $\geqslant 0$, что $[\mathfrak{G}^\alpha, \mathfrak{G}^{\varphi+q\alpha}] = 0$. Положим*

$$r = -\frac{\sum\limits_{k=p}^{q} k\nu(\varphi + k\alpha)}{\sum\limits_{k=p}^{q} \nu(\varphi + k\alpha)}. \tag{12}$$

Тогда $\varphi(H) = r\alpha(H)$ для всякого $H \in [\mathfrak{G}^\alpha, \mathfrak{G}^{-\alpha}]$.

(Так как имеется лишь конечное число корней алгебры $\mathfrak{G}$, то всегда существуют числа p и q, удовлетворяющие условиям леммы. Отсюда следует, что *форма φ пропорциональна форме α на пространстве* $[\mathfrak{G}^\alpha, \mathfrak{G}^{-\alpha}]$.)

Достаточно доказать лемму для элементов H вида $H = [X, Y]$, $X \in \mathfrak{G}^\alpha$, $Y \in \mathfrak{G}^{-\alpha}$. Положим $V = \sum\limits_{k=p}^{q} \mathfrak{G}^{\varphi+k\alpha}$. Эндоморфизм $\mathrm{ad}(X)$ отображает пространство $\mathfrak{G}^{\varphi+k\alpha}$ в подпространство $\mathfrak{G}^{\varphi+(k+1)\alpha}$ и, следовательно, сохраняет подпространство V. Точно так же, эндоморфизм $\mathrm{ad}(Y)$ сохраняет подпространство V. Так как $\mathrm{ad}(H) = [\mathrm{ad}(X), \mathrm{ad}(Y)]$, то V инвариантно относительно эндоморфизма $\mathrm{ad}(H)$ и $\mathrm{Tr}(\mathrm{ad}(H)) = 0$. Но единственным собственным значением оператора $\mathrm{ad}\, H$ в подпространстве $\mathfrak{G}^{\varphi+k\alpha}$ является $\varphi(H) + k\alpha(H)$, откуда

$$\sum_{k=p}^{q} \nu(\varphi + k\alpha)(\varphi(H) + k\alpha(H)) = 0,$$

что и требовалось доказать.

(Заметим, что знаменатель в выражении (12) для множителя r не может быть равен нулю, так как он является суммой нескольких неотрицательных чисел и положительного числа $\nu(\varphi)$.)

Покажем в виде приложения, как из предыдущих лемм выводится критерий Картана.

Теорема 3. *Если форма Киллинга алгебры Ли $\mathfrak{G}$ тождественно равна нулю, то алгебра $\mathfrak{G}$ разрешима.*

Достаточно показать, что если форма Киллинга на $\mathfrak{G}$ равна нулю и $[\mathfrak{G}, \mathfrak{G}] = \mathfrak{G}$, то $\mathfrak{G} = 0$. Действительно, тогда для произвольной алгебры $\mathfrak{G} \neq 0$, в которой форма Киллинга равна нулю, получим $[\mathfrak{G}, \mathfrak{G}] \neq \mathfrak{G}$; далее, форма Киллинга алгебры $[\mathfrak{G}, \mathfrak{G}]$ индуцирована формой Киллинга алгебры $\mathfrak{G}$ и потому тоже равна нулю; продолжая этот процесс, получим, что производный ряд алгебры $\mathfrak{G}$ сходится к нулю. Итак, пусть $\mathfrak{G} = [\mathfrak{G}, \mathfrak{G}]$, т. е. $\mathfrak{G} = \sum\limits_{\alpha, \beta} [\mathfrak{G}^{\alpha}, \mathfrak{G}^{\beta}]$; тогда (лемма 1)

$$\mathfrak{H} = [\mathfrak{H}, \mathfrak{H}] + \sum_{\alpha \neq 0} [\mathfrak{G}^{\alpha}, \mathfrak{G}^{-\alpha}].$$

Пусть φ — какой-нибудь корень алгебры $\mathfrak{G}$ относительно $\mathfrak{H}$. Очевидно, что $\varphi = 0$ на подпространстве $[\mathfrak{H}, \mathfrak{H}]$. Докажем, что $\varphi = 0$ на $[\mathfrak{G}^{\alpha}, \mathfrak{G}^{-\alpha}]$ при любом α. По лемме 3 существует такое рациональное число r_{φ}, что $\varphi(H) = r_{\varphi}\alpha(H)$ для всех $H \in [\mathfrak{G}^{\alpha}, \mathfrak{G}^{-\alpha}]$; с другой стороны, по лемме 2

$$0 = B(H, H) = \sum_{\varphi} \nu(\varphi)(\varphi(H))^2 = (\alpha(H))^2 \sum_{\varphi} \nu(\varphi) r_{\varphi}^2.$$

Если $\alpha(H) = 0$, то $\varphi(H) = 0$; если $\alpha(H) \neq 0$, то $\sum\limits_{\varphi} \nu(\varphi) r_{\varphi}^2 = 0$, откуда $r_{\varphi} = 0$ при всех φ, и снова $\varphi(H) = 0$. Таким образом, все корни равны нулю и $\mathfrak{H} = \mathfrak{G}$. Следовательно, алгебра $\mathfrak{G}$ нильпотентна, и, поскольку $\mathfrak{G} = [\mathfrak{G}, \mathfrak{G}]$, должно быть $\mathfrak{G} = 0$.

Из доказанной теоремы немедленно вытекает критерий Картана полупростоты алгебр Ли (ср. гл. 4).

3. Структура полупростых алгебр Ли

Через $\mathfrak{G}$ будем здесь обозначать полупростую алгебру Ли, через $\mathfrak{H}$ — ее подалгебру Картана.

Снабдим пространство $\mathfrak{G}$ скалярным произведением $\langle X, Y\rangle = B(X, Y)$ (форма Киллинга). Так как алгебра $\mathfrak{G}$ полупроста, то это скалярное произведение невырождено (единственное свойство полупростых алгебр, которое будет здесь использовано).

Лемма 4. 1) *Если* $\alpha+\beta\neq 0$, *то подпространства* $\mathfrak{G}^\alpha$ *и* $\mathfrak{G}^\beta$ *ортогональны.*

2) *Подпространства* $\mathfrak{G}^\alpha$ *и* $\mathfrak{G}^{-\alpha}$ *двойственны относительно скалярного произведения* $\langle X, Y\rangle$ [1]).

При $X\in\mathfrak{G}^\alpha$, $Y\in\mathfrak{G}^\beta$ оператор $\operatorname{ad} X\circ\operatorname{ad} Y$ переводит подпространство $\mathfrak{G}^\gamma$ в подпространство $\mathfrak{G}^{\gamma+\alpha+\beta}$. Если $\alpha+\beta\neq 0$, то в базисе пространства $\mathfrak{G}$, согласованном с разложением $\mathfrak{G}=\sum\mathfrak{G}^\alpha$, все диагональные элементы матрицы оператора $\operatorname{ad} X\circ\operatorname{ad} Y$ равны 0 и $\operatorname{Tr}(\operatorname{ad} X\circ\operatorname{ad} Y)=0$, откуда и следует 1). Для доказательства 2) предположим, что некоторый элемент $X\in\mathfrak{G}^\alpha$ ортогонален к подпространству $\mathfrak{G}^{-\alpha}$. Из 1) следует тогда, что X ортогонален ко всему пространству $\mathfrak{G}$, откуда $X=0$.

Предложение 1. *Ограничение на подпространстве* $\mathfrak{H}$ *формы Киллинга алгебры* $\mathfrak{G}$ *невырождено; алгебра* $\mathfrak{H}$ *коммутативна; если* $r=\dim\mathfrak{H}$, *то существует* r *линейно независимых корней алгебры* $\mathfrak{G}$ *относительно* $\mathfrak{H}$.

То, что форма Киллинга невырождена на $\mathfrak{H}$, есть частный случай утверждения 2) предыдущей леммы (при $\alpha=0$). Далее, если бы не существовало r линейно независимых корней, то можно было бы найти такой элемент $H\in\mathfrak{H}$, $H\neq 0$, что $\alpha(H)=0$ для всякого корня α. Но тогда для всякого $H'\in\mathfrak{H}$ было бы $\langle H, H'\rangle=\sum_\alpha \nu(\alpha)\,\alpha(H)\,\alpha(H')=0$, что противоречило бы невырожденности формы Киллинга на $\mathfrak{H}$. Наконец, всякий корень обращается в 0 на $[\mathfrak{H}, \mathfrak{H}]$; из этого и из только что доказанного следует, что $\mathfrak{H}$ коммутативна.

Так как форма $\langle X, Y\rangle$ невырождена на $\mathfrak{H}$, то для всякого элемента λ пространства $\mathfrak{H}^*$, дуального к $\mathfrak{H}$, существует

---

[1]) То есть для всякого $X\in\mathfrak{G}^\alpha$ существует такое $Y\in\mathfrak{G}^{-\alpha}$, что $\langle X, Y\rangle\neq 0$ и для всякого $Y\in\mathfrak{G}^{-\alpha}$ существует такое $X\in\mathfrak{G}^\alpha$, что $\langle X, Y\rangle\neq 0$. — *Прим. перев.*

единственный элемент $H'_\lambda \in \mathfrak{H}$, для которого $\lambda(H) = \langle H, H'_\lambda \rangle$ при всех $H \in \mathfrak{H}$. (Иногда мы будем отождествлять H'_λ с λ.) В пространстве $\mathfrak{H}^*$ можно ввести скалярное произведение, положив

$$\langle \lambda, \mu \rangle = \langle H'_\lambda, H'_\mu \rangle = \lambda(H'_\mu) = \mu(H'_\lambda). \tag{13}$$

Выберем теперь в каждом подпространстве $\mathfrak{G}^\alpha$ вектор $E_\alpha \neq 0$, собственный для $\mathfrak{H}$. Тогда для всех $H \in \mathfrak{H}$

$$[H, E_\alpha] = \alpha(H) E_\alpha. \tag{14}$$

Если α — ненулевой корень и $X \in \mathfrak{G}^{-\alpha}$, то

$$[E_\alpha, X] = \langle E_\alpha, X \rangle H'_\alpha. \tag{15}$$

Для доказательства этого заметим, что обе части равенства (15) принадлежат алгебре $\mathfrak{H}$ и имеют одинаковые скалярные произведения с любым вектором $H \in \mathfrak{H}$:

$$\langle H, [E_\alpha, X] \rangle = \langle [H, E_\alpha], X \rangle = \alpha(H) \langle E_\alpha, X \rangle = \langle E_\alpha, X \rangle \langle H'_\alpha, H \rangle.$$

Докажем теперь, что если α — отличный от нуля корень, то $\langle \alpha, \alpha \rangle \neq 0$.

Поскольку подпространства $\mathfrak{G}^\alpha$ и $\mathfrak{G}^{-\alpha}$ находятся в двойственности относительно формы $\langle X, Y \rangle$ (лемма 4), то существует такой элемент $X \in \mathfrak{G}^{-\alpha}$, что $\langle E_\alpha, X \rangle = 1$. Тогда по формуле (15) $[E_\alpha, X] = H'_\alpha$. Так как $[E_\alpha, X] \in [\mathfrak{G}^\alpha, \mathfrak{G}^{-\alpha}]$, то, согласно лемме 3, для всякого корня φ существует такое рациональное число r_φ, что $\varphi(H'_\alpha) = r_\varphi \alpha(H'_\alpha)$. Если вопреки нашему утверждению $\langle \alpha, \alpha \rangle = \alpha(H'_\alpha) = 0$, то $\varphi(H'_\alpha) = 0$ для всякого корня φ, откуда $H'_\alpha = 0$, что противоречит тому, что $\alpha \neq 0$.

Предложение 2. *Для всякого корня $\alpha \neq 0$ подпространство $\mathfrak{G}^\alpha$ одномерно.*

Пусть X — такой элемент из $\mathfrak{G}^{-\alpha}$, что $[E_\alpha, X] = H'_\alpha$, и пусть Y — произвольный элемент из $\mathfrak{G}^\alpha$. Докажем, что вектор Y пропорционален вектору E_α.

Положим $Y_k = (\operatorname{ad} E_\alpha)^k Y$. Очевидно, что $Y_k \in \mathfrak{G}^{(k+1)\alpha}$. Вычислим $[X, Y_k]$. Прежде всего, в силу тождества Якоби $[X, Y_1] = [X, (\operatorname{ad} E_\alpha) Y] = -[E_\alpha, [Y, X]] - [Y, [X, E_\alpha]]$.

Введем обозначение $[X, Y] = H \in \mathfrak{H}$. Первое слагаемое равно $-\alpha(H) E_\alpha$, второе равно $-[H'_\alpha, Y]$. Следовательно,

$$[X, Y_1] = -\alpha(H) E_\alpha - [H'_\alpha, Y]. \tag{16}$$

Индукцией по k легко доказать, что при $k \geqslant 2$

$$[X, Y_k] = \frac{k(k-1)}{2} \alpha(H'_\alpha) Y_{k-1} - k[H'_\alpha, Y_{k-1}]. \tag{17}$$

Пусть k — наименьшее целое число, для которого $Y_k = 0$ (такое число существует, так как $Y_k \in \mathfrak{G}^{(k+1)\alpha}$). Предположим сначала, что $k \geqslant 2$. Тогда из формулы (17) видно, что Y_{k-1} — собственный вектор для оператора $\mathrm{ad}\, H'_\alpha$ с собственным значением $(k-1)\alpha(H'_\alpha)/2$. С другой стороны, $Y_{k-1} \in \mathfrak{G}^{k\alpha}$, так что это собственное значение должно равняться $k\alpha(H'_\alpha)$. Получается противоречие, так как $\alpha(H'_\alpha) \neq 0$. Следовательно, $Y_1 = 0$ и формула (16) дает

$$[H'_\alpha, Y] = -\alpha(H) E_\alpha. \tag{18}$$

Положим $Z = \alpha(H'_\alpha) Y + \alpha(H) E_\alpha$. Тогда $[H'_\alpha, Z] = 0$, т. е. Z — собственный вектор для оператора $\mathrm{ad}\, H'_\alpha$ с собственным значением 0. Так как $Z \in \mathfrak{G}^\alpha$, то $Z = 0$ и вектор Y пропорционален E_α.

Следствие. *Следующие свойства характеризуют подалгебры Картана $\mathfrak{H}$ алгебры $\mathfrak{G}$:*

а) *$\mathfrak{H}$ — максимальная коммутативная подалгебра алгебры $\mathfrak{G}$;*

б) *для всякого $H \in \mathfrak{H}$ эндоморфизм $\mathrm{ad}\, H$ пространства $\mathfrak{G}$ полупрост.*

То, что эти условия выполняются для всякой подалгебры Картана, следует из предложений 1 и 2. Пусть, обратно, $\mathfrak{H}$ — подалгебра, удовлетворяющая условиям а) и б). Тогда каждое из подпространств $\mathfrak{G}^\alpha$ разложения алгебры $\mathfrak{G}$ относительно $\mathfrak{H}$ состоит из векторов, собственных для $\mathfrak{H}$, с собственным значением α. В частности, всякий элемент из $\mathfrak{G}^0$ коммутирует со всеми элементами из $\mathfrak{H}$. Из условия а) тогда следует, что $\mathfrak{G}^0 = \mathfrak{H}$, т. е. $\mathfrak{H}$ — подалгебра Картана.

4. Серии корней

Пусть K, как и выше — алгебраически замкнутое поле характеристики 0, $\mathfrak{G}$ — *полупростая алгебра Ли над* K, $\mathfrak{H}$ — *фиксированная подалгебра Картана алгебры* $\mathfrak{G}$.

Пусть теперь α — какой-либо ненулевой корень алгебры $\mathfrak{G}$. Для всякого корня φ множество S всех корней вида $\varphi + k\alpha$ (k — целое) называется *серией* (или *„α-серией“*)[1]. В силу формулы $[\mathfrak{G}^\alpha, \mathfrak{G}^\beta] \subset \mathfrak{G}^{\alpha+\beta}$ подпространство $\sum\limits_{\alpha \in S} \mathfrak{G}^\alpha = \mathfrak{G}_S$ инвариантно относительно операторов из $\operatorname{ad}\mathfrak{G}^\alpha$, $\operatorname{ad}\mathfrak{G}^{-\alpha}$ и $\operatorname{ad}\mathfrak{H}$. Пусть $E_\alpha \in \mathfrak{G}^\alpha$, $E_{-\alpha} \in \mathfrak{G}^{-\alpha}$ — такие отличные от нуля векторы, что $\langle E_\alpha, E_{-\alpha}\rangle = -1$. Тогда $[E_\alpha, E_{-\alpha}] = -H'_\alpha$, $[H'_\alpha, E_\alpha] = \langle \alpha, \alpha\rangle E_\alpha$, $[H'_\alpha, E_{-\alpha}] = -\langle \alpha, \alpha\rangle E_{-\alpha}$.

Это приводит нас к изучению линейных представлений алгебры Ли $\mathfrak{A}$ с базой X, Y, H и структурными соотношениями $[X, Y] = -H$, $[H, X] = aX$, $[H, Y] = -aY$ ($a \neq 0$). Алгебра $\mathfrak{A}$ проста. Действительно, пусть идеал $\mathfrak{J}$ алгебры $\mathfrak{A}$ содержит элемент Z, не пропорциональный H. Элемент $[H, Z] \in \mathfrak{J}$ является ненулевой линейной комбинацией векторов X и Y. Применяя к нему либо оператор $\operatorname{ad} X$, либо оператор $\operatorname{ad} Y$, получим ненулевой элемент идеала $\mathfrak{J}$, кратный $[X, Y] = -H$. Таким образом, $H \in \mathfrak{J}$, если $\mathfrak{J} \neq 0$, но тогда $X = \frac{1}{a}[H, X] \in \mathfrak{J}$, $Y = -\frac{1}{a}[H, Y] \in \mathfrak{J}$ и, значит, $\mathfrak{A} = \mathfrak{J}$. Следовательно, всякое представление алгебры $\mathfrak{A}$ вполне приводимо; поэтому достаточно изучить ее неприводимые представления.

Обозначим через $\mathfrak{Y}$ прямую, порожденную вектором H, и определим линейную форму α на $\mathfrak{Y}$ соотношением $\alpha(H) = a$. Пусть ρ — линейное представление алгебры $\mathfrak{A}$ в конечномерном пространстве V. Условимся писать X вместо $\rho(X)$ и т. д. Для всякой линейной формы Λ на $\mathfrak{Y}$ обозначим через V_Λ подпространство, образованное теми векторами $v \in V$, для которых $Hv = \Lambda(H)v$. Тогда $XV_\Lambda \subset V_{\Lambda+\alpha}$, так как

---

[1]) Можно было бы называть α-серией множество корней вида $\varphi + c\alpha$, где c — призвольный элемент поля K. Однако можно доказать, что если $\varphi + c\alpha$ — корень, то c должно быть целым. Из того, что будет доказано в этой главе, следует, что c должно быть целым или полуцелым.

если $e \in V_\Lambda$, то

$$HXe = XHe + aXe = (\Lambda(H) + a)Xe = \langle \Lambda + \alpha,\ H \rangle Xe.$$

Точно так же, $YV_\Lambda \subset V_{\Lambda-\alpha}$. Оператор H обладает хотя бы одним собственным вектором, поэтому $V_\Lambda \neq 0$ для некоторого Λ. Из формул $XV_\Lambda \subset V_{\Lambda+\alpha}$, $YV_\Lambda \subset V_{\Lambda-\alpha}$ вытекает тогда, что $\sum\limits_\Lambda V_\Lambda$ — ненулевое инвариантное подпространство пространства V. Если представление ρ неприводимо, то $V = \sum V_\Lambda$. В общем случае оно вполне приводимо, и поэтому все равно $V = \sum V_\Lambda$.

Допустим теперь, что ρ — неприводимое представление. Так как имеется лишь конечное число весов представления ρ [1]), то существует такой вес Λ_0, что $\Lambda_0 + \alpha$ — уже не вес. Тогда $XV_{\Lambda_0} \subset V_{\Lambda_0+\alpha} = 0$. Пусть $e_0 \in V_{\Lambda_0}$, $e_0 \neq 0$. Положим $e_k = Y^k e_0$ и докажем, что $Xe_{k+1} = \mu_k e_k$. При $k = -1$ это очевидно, если считать $\mu_{-1} = 0$ и $e_{-1} = 0$; пусть это доказано для $k < r$. Имеем

$$Xe_{r+1} = XYe_r = YXe_r - He_r =$$
$$= \mu_{r-1} Y e_{r-1} - \langle \Lambda_0 - r\alpha,\ H \rangle e_r = \mu_r e_r,$$

причем $\mu_r = \mu_{r-1} + \langle r\alpha - \Lambda_0,\ H \rangle$. Следовательно,

$$\mu_k = \sum_{r=0}^{k} \langle r\alpha - \Lambda_0,\ H \rangle = \frac{k+1}{2}\,(k\alpha(H) - 2\Lambda_0(H)) =$$
$$= \frac{k+1}{2}\,(k - m)\,\alpha(H), \qquad (19)$$

где $m = 2\Lambda_0(H)/\alpha(H)$. Так как пространство V конечномерно, то существует такое J, что $e_J \neq 0$, $e_{J+1} = 0$. Тогда $\mu_J e_J = Xe_{J+1} = 0$ и $\mu_J = 0$, откуда $J = m$, так что m — целое неотрицательное число. Положив $f_k = (-1)^k (m - k)!\, e_k$ $(k = 0, 1, \ldots, m)$, получаем следующие формулы:

$$\begin{aligned} Xf_k &= \frac{1}{2} k\alpha(H) f_{k-1}, \quad Yf_k = (k - m) f_{k+1}, \\ Hf_k &= \langle \Lambda_0 - k\alpha,\ H \rangle f_k = \frac{1}{2}\alpha(H)(m - 2k) f_k \\ & \qquad\qquad (0 \leqslant k \leqslant m), \end{aligned} \qquad (20)$$

---

[1]) Точнее, его ограничения на $\mathfrak{Y}$. — *Прим. перев.*

из которых явствует, что подпространство, натянутое на векторы $f_0, f_1, \ldots, f_m$, инвариантно. Так как представление ρ неприводимо, то $f_0, f_1, \ldots, f_m$ образуют базу пространства V. Обратно, при всяком m формулы (20), как легко проверить, определяют представление алгебры $\mathfrak{A}$ в пространстве с базой $f_0, f_1, \ldots, f_m$. Это представление неприводимо. Действительно, всякое инвариантное подпространство W инвариантно, в частности, относительно оператора H и потому порождено содержащимися в нем собственными векторами этого оператора. Если $f_k \in W$, то $f_l \in W$ при всяком l, так как при $l \leqslant k$ вектор f_l кратен $X^{k-l} f_k$, а при $l \geqslant k$ он кратен $Y^{l-k} f_k$. Таким образом, пространство V не содержит собственных инвариантных ненулевых подпространств.

Теорема 4. *Пусть ρ — линейное представление простой алгебры $\mathfrak{A}$, определенной выше, в конечномерном пространстве V. Тогда*

1) $V = \sum V_\Lambda$; *для всякого веса Λ число $2\Lambda(H)/\alpha(H)$ целое.*

2) *Если представление ρ неприводимо, то множество всех его весов является α-серией с крайними векторами Λ_0, $-\Lambda_0$ и без пропусков* [1]).

3) *Для всякого веса Λ существует такой вес Λ' что $\Lambda(H) = -\Lambda'(H)$ и* $\dim V_\Lambda = \dim V_{\Lambda'}$.

4) *Если Λ и $\Lambda + \alpha$ — веса, то $\rho(X) V_\Lambda \neq 0$. Если Λ и $\Lambda - \alpha$ — веса, то $\rho(Y) V_\Lambda \neq 0$.*

5) *Если представление ρ неприводимо, $v \in V_\Lambda$, i — наименьшее целое число, для которого $\rho(X)^{i+1} v = 0$, а j — наименьшее целое число, для которого $\rho(Y)^{j+1} v = 0$, то*

$$\rho(X)\rho(Y)v = -\frac{1}{2}(i+1)j\alpha(H)v$$

и

$$\rho(Y)\rho(X)v = -\frac{1}{2}(j+1)i\alpha(H)v.$$

[1]) Были определены только α-серии корней, т. е. α-серии весов присоединенного представления алгебры Ли; α-серии весов любого представления алгебры Ли определяются точно так же. — *Прим. перев.*

Достаточно доказать теорему для неприводимого представления ρ, так как всякое представление алгебры $\mathfrak{A}$ вполне приводимо. Уже доказано, что число $2\Lambda_0(H)/\alpha(H)$ целое. Далее, $f_0 \in V_{\Lambda_0}$, и $f_k \in V_{\Lambda_0 - k\alpha}$; следовательно, совокупность всех весов представления ρ есть $\{\Lambda_0, \Lambda_0 - \alpha, \ldots, \Lambda_0 - m\alpha\}$. При этом $\Lambda_0 - m\alpha = -\Lambda_0$, поскольку $m = 2\Lambda_0(H)/\alpha(H)$. По той же причине $\Lambda_0 - k\alpha = -(\Lambda_0 - (m-k)\alpha)$. Наконец, если $\Lambda = \Lambda_0 - k\alpha$, то число $2\Lambda(H)/\alpha(H) = m - 2k$ целое. Это и доказывает свойства 1) — 3), если учесть, что подпространства V_Λ одномерны.

Пусть $\Lambda = \Lambda_0 - k\alpha$ — некоторый вес представления ρ. Если $\Lambda + \alpha$ — вес, то $k \geqslant 1$ и $\rho(X) f_k \neq 0$; но $f_k \in V_\Lambda$, так что $\rho(X) V_\Lambda \neq 0$. Если $\Lambda - \alpha$ — вес, то $k \leqslant m - 1$ и $\rho(Y) f_k \neq 0$. Тем самым доказано свойство 4). Докажем, наконец, свойство 5). Достаточно рассмотреть случай $v = f_k$. Очевидно, что $i = k$ и $j = m - k$. Из формул (20) получаем

$$\rho(X)\rho(Y) f_k = (k - m)\rho(X) f_{k+1} = \\ = \frac{1}{2}\alpha(H)(k+1)(k-m) f_k = -\frac{1}{2}\alpha(H)(i+1) j f_k,$$

$$\rho(Y)\rho(X) f_k = \frac{1}{2}\alpha(H) k\rho(Y) f_{k-1} = \\ = \frac{1}{2}\alpha(H)(k-1-m) f_k = -\frac{1}{2}\alpha(H) i (j+1) f_k.$$

Теорема доказана.

Применим эту теорему к присоединенному представлению подалгебры $\{E_\alpha, E_{-\alpha}, H'_\alpha\}$ алгебры $\mathfrak{G}$ в пространстве $\mathfrak{G}_S$. Для этого заметим, что $\alpha(H'_\alpha) \neq 0$ и поэтому различные корни φ из одной α-серии принимают различные значения $\varphi(H'_\alpha) = \langle\varphi, \alpha\rangle$ на элементе H'_α.

Предложение 3. *Если α, φ — два корня алгебры $\mathfrak{G}$, причем $\alpha \neq 0$, то α-серия, содержащая φ, состоит из всех векторов вида $\varphi + k\alpha$, где $p \leqslant k \leqslant q$. При этом*

$$-\frac{2\langle\varphi, \alpha\rangle}{\langle\alpha, \alpha\rangle} = p + q.$$

Вид α-серии вытекает из утверждения 2) теоремы 4 [1]). Далее, в обозначениях этой теоремы, $\Lambda_0(H'_\alpha) = (\varphi + q\alpha)(H'_\alpha)$, $-\Lambda_0(H'_\alpha) = (\varphi + p\alpha)(H'_\alpha)$.

Складывая эти равенства, получаем

$$2\langle\varphi, \alpha\rangle + (p+q)\langle\alpha, \alpha\rangle = 0.$$

Предложение 4. *Если* α, β, $\alpha+\beta$ — *корни, не равные* 0, *то* $[\mathfrak{G}^\alpha, \mathfrak{G}^\beta] = \mathfrak{G}^{\alpha+\beta}$.

Известно, что $[\mathfrak{G}^\alpha, \mathfrak{G}^\beta] \subset \mathfrak{G}^{\alpha+\beta}$ и что $\dim \mathfrak{G}^{\alpha+\beta} = 1$. С другой стороны, из утверждения 4) теоремы 4 следует, что $\mathrm{ad}(E_\alpha) \cdot \mathfrak{G}^\beta \neq 0$.

Предложение 5. *Единственные корни, пропорциональные корню* $\alpha \neq 0$, — *это* 0, $\pm\alpha$.

Множество всех корней вида $m\alpha$, где m — целое, образует α-серию без пропусков, т. е. m принимает все целые значения в некотором интервале $[p, q]$. Так как $[\mathfrak{G}^\alpha, \mathfrak{G}^\alpha] = [\mathfrak{G}^{-\alpha}, \mathfrak{G}^{-\alpha}] = 0$, то из предложения 4 вытекает, что 2α и -2α не корни. С другой стороны, $-\alpha$ корень [2]), так что $p = -1$, $q = 1$.

Пусть теперь $\beta = c\alpha$ $(c \in K)$ — корень алгебры $\mathfrak{G}$. Из предложения 3 следует, что $2\langle\beta, \alpha\rangle/\langle\alpha, \alpha\rangle = 2c$ — целое число. Если c не целое, то $c = k + \frac{1}{2}$, где k — целое. Тогда α-серия, содержащая корень β, должна в силу этого же предложения содержать $\alpha/2$ и $-\alpha/2$; вектор $\alpha = 2(\alpha/2)$ по доказанному выше не может быть корнем. Полученное противоречие показывает, что число c должно быть целым.

5. Системы простых корней

Обозначим через $\mathfrak{H}_0$ множество линейных комбинаций векторов H'_α с рациональными коэффициентами; $\mathfrak{H}_0$ — век-

---

[1]) Из того, что корневые подпространства $\mathfrak{G}^\alpha$ при $\alpha \neq 0$ одномерны (предложение 2), вытекает, что рассматриваемое представление либо неприводимо, либо распадается в сумму неприводимого представления и нулевого представления в некотором подпространстве $W \subset \mathfrak{G}_S \cap \mathfrak{H}$ (последнее — в том случае, когда α-серия S содержит 0). — *Прим. перев.*

[2]) Это следует, например, из леммы 4, 2). — *Прим. перев.*

торное пространство над полем Q рациональных чисел, содержащееся в подалгебре Картана $\mathfrak{H}$. Через $\mathfrak{H}_0^*$ обозначим пространство, дуальное (над Q) к пространству $\mathfrak{H}_0$.

Предложение 6. *Размерность пространства $\mathfrak{H}_0$ над полем K равна его размерности над Q*[1]. *Ограничение на $\mathfrak{H}_0$ формы Киллинга $\langle H, H'\rangle$ положительно определено и принимает рациональные значения. Всякий корень принимает на $\mathfrak{H}_0$ рациональные значения.*

Обозначим через Δ множество ненулевых корней. Напомним, что

$$\langle H, H'\rangle = \sum_{\varphi \in \Delta} \varphi(H)\varphi(H').$$

В частности, $\langle H'_\alpha, H'_\alpha\rangle = \sum_{\varphi\in\Delta} (\varphi(H'_\alpha))^2 = \sum_{\varphi\in\Delta} r^2_{\varphi,\alpha}(\langle\alpha, \alpha\rangle)^2$. Так как $\langle H'_\alpha, H'_\alpha\rangle = \langle\alpha, \alpha\rangle$, то $\langle\alpha, \alpha\rangle = \dfrac{1}{\sum_{\varphi\in\Delta} r^2_{\varphi,\alpha}} \in Q_+$[2]. С помощью предложения 3 можно дать более явное выражение для $\langle\alpha, \alpha\rangle$. Обозначим через $p_{\varphi,\alpha}$, $q_{\varphi,\alpha}$ целые числа, определяемые в условии этого предложения. Имеем

$$(\varphi(H'_\alpha))^2 = \frac{(p_{\varphi,\alpha} + q_{\varphi,\alpha})^2}{4}\langle\alpha, \alpha\rangle^2,$$

откуда $\langle\alpha, \alpha\rangle = \left(\sum_{\varphi\in\Delta} \dfrac{(p_{\varphi,\alpha}+q_{\varphi,\alpha})^2}{4}\right)^{-1}$.

Далее, при $\beta \neq \alpha$

$$\langle H'_\alpha, H'_\beta\rangle = \langle\beta, \alpha\rangle = -\frac{p_{\beta,\alpha}+q_{\beta,\alpha}}{2}\langle\alpha, \alpha\rangle \in Q,$$

так как $\langle\alpha, \alpha\rangle \in Q$. Если $X \in \mathfrak{H}_0$, то $X = \sum_{\alpha\in\Delta} a_\alpha H'_\alpha$, где $a_\alpha \in Q$, и

$$\beta(X) = \sum a_\alpha \beta(H'_\alpha) \in Q,$$

[1]) Она равна также размерности $\mathfrak{H}$ над K (предложение 1). — *Прим. перев.*

[2]) Q_+ — множество положительных рациональных чисел. — *Прим. перев.*

что доказывает последнюю часть теоремы. Отсюда получаем также, что

$$\langle X, X\rangle = \sum_{\beta \in \Delta} (\beta(X))^2 \in Q_+,$$

причем равенство $\langle X, X\rangle = 0$ влечет за собой равенство $\beta(X) = 0$ для всех $\beta \in \Delta$ и, следовательно, $X = 0$ (предложение 1).

Докажем, наконец, что $\dim_K \mathfrak{H}_0 = \dim_Q \mathfrak{H}_0$. Достаточно показать, что всякая система $\{H'_{\alpha_i}\}$, линейно независимая над Q, линейно независима над K. Предположим, что $\sum \lambda_i H'_{\alpha_i} = 0$ для некоторых $\lambda_i \in K$, не равных нулю одновременно. Тогда $\sum \lambda_i \langle H'_{\alpha_i}, H'_{\alpha_j}\rangle = 0$. Будем рассматривать эти равенства как систему однородных линейных уравнений относительно λ_i. Коэффициенты $\langle H'_{\alpha_i}, H'_{\alpha_j}\rangle$ этой системы рациональны, поэтому из существования ее ненулевого решения в поле K следует существование ненулевого решения в поле Q, что невозможно. Предложение доказано.

Пусть $H_1, \ldots, H_r$ — какая-нибудь база пространства $\mathfrak{H}_0$. Если λ, μ — две линейные формы на $\mathfrak{H}_0$, то будем говорить, что $\lambda > \mu$, если $\lambda(H_i) = \mu(H_i)$ для $i = 1, 2, \ldots, k$ и $\lambda(H_{k+1}) > \mu(H_{k+1})$. Таким образом, в $\mathfrak{H}_0^*$ вводится линейное упорядочение, совместимое со структурой векторного пространства (всякое упорядочение такого рода получается этим путем). Элемент $\lambda \in \mathfrak{H}_0^*$ называется положительным, если $\lambda > 0$.

Определение 3. *Положительный корень φ называется простым, если его нельзя представить в виде суммы двух положительных корней.*

Теорема 5. *Существует ровно r простых корней $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ ($r = \dim \mathfrak{H}$), которые образуют базу пространства $\mathfrak{H}_0^*$. Всякий корень β представим в виде $\beta = \sum m_i \alpha_i$, где m_i — целые числа одного знака.*

Докажем сначала, что простые корни линейно независимы, откуда будет следовать, что их не больше r.

Если α_i, α_j — простые корни, то их разность $\alpha_i - \alpha_j$ не корень. В самом деле, если $\alpha_i - \alpha_j = \beta \in \Delta$, то либо $\beta > 0$

и равенство $\alpha_i = \alpha_j + \beta$ приводит к противоречию, либо $\beta < 0$ и равенство $\alpha_j = \alpha_i - \beta$ приводит к противоречию.

Из предложения 3 в случае $\varphi = \alpha_i$, $\alpha = \alpha_j$ следует тогда

$$-2\frac{\langle \alpha_i, \alpha_j\rangle}{\langle \alpha_j, \alpha_j\rangle} = q \geqslant 0,$$

поскольку $p = 0$. Следовательно, $\langle \alpha_i, \alpha_j\rangle \leqslant 0$.

Предположим теперь, что система простых корней линейно зависима. Тогда для некоторых неотрицательных чисел a_i, b_j выполнялось бы соотношение $\sum\limits_i a_i\alpha_i = \sum\limits_j b_j\alpha_j > 0$, где корни, входящие в левую и правую части равенства, различны. Полагая $\gamma = \sum\limits_i a_i\alpha_i$, имеем

$$\langle \gamma, \gamma\rangle = \Big\langle \sum_i a_i\alpha_i, \sum_j b_j\alpha_j\Big\rangle = \sum_{i, j} a_i b_j \langle \alpha_i, \alpha_j\rangle.$$

Так как $\langle \gamma, \gamma\rangle \geqslant 0$, $a_i b_j \geqslant 0$, $\langle \alpha_i, \alpha_j\rangle \leqslant 0$, то это равенство возможно только в случае $\langle \gamma, \gamma\rangle = 0$, откуда следует $\gamma = 0$.

Докажем, наконец, что всякий корень $\beta > 0$ можно разложить в сумму простых корней с целыми неотрицательными коэффициентами. Так как множество всех положительных корней конечно и потому вполне упорядочено, доказательство можно провести по индукции. Если корень $\beta > 0$ не прост, то $\beta = \gamma + \delta$, где γ, δ — положительные корни. При этом γ, $\delta < \beta$ и по предположению индукции корни γ и δ разлагаются в сумму простых корней с целыми неотрицательными коэффициентами. Следовательно, корень $\beta = \gamma + \delta$ также обладает этим свойством.

Положительные корни порождают пространство $\mathfrak{H}^*$, поэтому простые корни также порождают это пространство. Теорема доказана.

Система Π простых корней $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ называется иначе *фундаментальной системой корней алгебры* $\mathfrak{G}$. Целые числа $a_{ij} = -\dfrac{2\langle \alpha_i, \alpha_j\rangle}{\langle \alpha_i, \alpha_i\rangle} \geqslant 0$ называются *числами Картана.*

Система Σ положительных корней однозначно восстанавливается по системе Π. Для доказательства этого заметим сначала, что всякий положительный корень β либо прост, либо представляется в виде $\beta = \gamma + \alpha_i$, где γ — положительный корень, α_i — простой корень. В самом деле, $\beta = \sum m_i\alpha_i$ для некоторых целых неотрицательных чисел m_i. Имеем $\langle\beta, \beta\rangle = \sum m_i \langle\beta, \alpha_i\rangle > 0$. Так как $m_i \geqslant 0$, то по крайней мере для одного индекса i должно быть $\langle\beta, \alpha_i\rangle > 0$. Из предположения 3 следует тогда, что

$$p_{\beta, \alpha_i} + q_{\beta, \alpha_i} = -\frac{2\langle\beta, \alpha_i\rangle}{\langle\alpha_i, \alpha_i\rangle} < 0,$$

откуда $p_{\beta, \alpha_i} < 0$, т. е. $\gamma = \beta - \alpha_i$ — корень. Корень γ положителен, так как если бы он был отрицателен, то корень $\alpha_i = \beta - \gamma$ не мог бы быть простым.

Среди всех выражений вида $\sum m_i\alpha_i$, где m_i — целые неотрицательные числа, найдем теперь те, которые являются корнями. Назовем порядком линейной комбинации $\sum m_i\alpha_i$ целое положительное число $m = \sum m_i$. Комбинации порядка 1 — это корни α_i. Пусть уже найдены все корни порядка, не превосходящего m. Каждый корень порядка $m+1$ представим в виде $\gamma + \alpha_i$, где γ — корень порядка m. Поэтому достаточно определить, какие из сумм $\gamma + \alpha_i$ являются корнями. Если $\gamma \neq \alpha_i$, то α_i-серия, содержащая γ, состоит только из положительных корней. Действительно, в этом случае $\gamma = \sum\limits_{j \neq i} m_j\alpha_j + m_i\alpha_i$, где хотя бы одно из чисел m_j положительно. Поэтому в силу теоремы 5 вектор $\gamma + k\alpha_i = \sum\limits_{j \neq i} m_j\alpha_j + (m_i + k)\alpha_i$ может являться корнем только в том случае, если $m_i + k \geqslant 0$; но тогда $\gamma + k\alpha_i > 0$. Далее, при $k \leqslant 0$ выражение $\gamma + k\alpha_i$ имеет порядок $m + k \leqslant m$, так что все корни такого вида нам известны. Следовательно, нам известно число p, определяемое в предложении 3, в случае $\varphi = \gamma$, $\alpha = \alpha_i$. Так как, согласно этому предложению,

$$p + q = -\frac{2\langle\gamma, \alpha_i\rangle}{\langle\alpha_i, \alpha_i\rangle},$$

то мы можем найти также число q. Вектор $\gamma + \alpha_i$ будет корнем тогда и только тогда, когда $q \geqslant 1$.

Говорят, что фундаментальная система Π *распадается*, если $\Pi = \Pi' \cup \Pi''$, где множества Π' и Π'' не пусты и подпространства $\mathfrak{H}'$ и $\mathfrak{H}''$ пространства $\mathfrak{H}$, порожденные векторами $H'_{\alpha'}$, $\alpha' \in \Pi'$, и $H'_{\alpha''}$, $\alpha'' \in \Pi''$, соответственно, ортогональны (в смысле формы Киллинга).

Предложение 7. *Пусть $\mathfrak{G}$ — полупростая алгебра Ли. Следующие свойства алгебры $\mathfrak{G}$ эквивалентны:*

а) *алгебра $\mathfrak{G}$ проста;*

б) *фундаментальная система Π корней алгебры $\mathfrak{G}$ не распадается.*

Покажем сначала, что а) $\Rightarrow$ б). Предположим, что $\Pi = \Pi' \cup \Pi''$, $\mathfrak{H}' \perp \mathfrak{H}''$. Обозначим через Σ' множество положительных корней вида $\sum m_i \alpha_i$, $m_i \geqslant 0$, $\alpha_i \in \Pi'$. Аналогичным образом определим Σ''. Если $\alpha' \in \Sigma'$, то $H'_{\alpha'} = \sum m_i H'_{\alpha_i} \in \mathfrak{H}'$; если $\alpha'' \in \Sigma''$, то $H'_{\alpha''} \in \mathfrak{H}''$. Следовательно, любые два корня $\alpha' \in \Sigma'$, $\alpha'' \in \Sigma''$ взаимно перпендикулярны. Разность $\alpha' - \alpha''$ не может быть корнем, так как

$$\alpha' - \alpha'' = \sum m_i \alpha_i - \sum n_j \beta_j \quad (\alpha_i \in \Sigma',\ \beta_j \in \Sigma'',\ m_i,\ n_j \geqslant 0),$$

между тем как всякий корень должен представляться в виде линейной комбинации корней α_i, β_j с коэффициентами одного знака. С другой стороны, из предложения 3 следует, что

$$p + q = -\frac{2\langle \alpha', \alpha'' \rangle}{\langle \alpha'', \alpha'' \rangle} = 0.$$

Следовательно, $p = q = 0$ и $\alpha' + \alpha''$ не корень. Отсюда видно, что всякий положительный корень принадлежит либо Σ', либо Σ'', т. е. $\Sigma = \Sigma' \cup \Sigma''$.

Положим $\mathfrak{G}' = \mathfrak{H}' + \sum_{\alpha \in \Sigma'} (\mathfrak{G}^{\alpha} + \mathfrak{G}^{-\alpha})$. Если $\alpha, \beta \in \Sigma'$, то $\alpha \pm \beta \in \Sigma' \cup (-\Sigma')$, кроме того, $[\mathfrak{H}', \mathfrak{G}^{\alpha}] \subset \mathfrak{G}^{\alpha}$ и $[\mathfrak{G}^{\alpha}, \mathfrak{G}^{-\alpha}] = \{K \cdot H'_{\alpha}\} \in \mathfrak{H}'$. Это показывает, что $\mathfrak{G}'$ — подалгебра. Аналогично определяется подалгебра $\mathfrak{G}''$. Из доказанного выше следует, что $[\mathfrak{G}^{\pm\alpha'}, \mathfrak{G}^{\pm\alpha''}] = 0$. Далее, $[H'_{\alpha'}, E_{\alpha''}] = \langle \alpha', \alpha'' \rangle E_{\alpha''} = 0$ и т. д., откуда $[\mathfrak{G}', \mathfrak{G}''] = 0$. Следовательно, алгебра $\mathfrak{G}$ разлагается в прямую сумму подалгебр $\mathfrak{G}'$ и $\mathfrak{G}''$ и не может быть простой.

Теперь докажем, что б) $\Rightarrow$ а). Пусть $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}' \oplus \mathfrak{G}''$. Вектор $E_{\alpha} \in \mathfrak{G}^{\alpha}$ единственным образом разлагается в сумму

$E_\alpha = E'_\alpha + E''_\alpha$, $E'_\alpha \in \mathfrak{G}'$, $E''_\alpha \in \mathfrak{G}''$. Для всякого $H \in \mathfrak{H}$

$$0 = [H, E_\alpha] - \alpha(H) E_\alpha = [H, E'_\alpha] - \alpha(H) E'_\alpha + \\ + [H, E''_\alpha] - \alpha(H) E''_\alpha.$$

Так как $[H, E'_\alpha] \in \mathfrak{G}'$, $[H, E''_\alpha] \in \mathfrak{G}''$, то $[H, E'_\alpha] - \alpha(H) E'_\alpha = 0$, $[H, E''_\alpha] - \alpha(H) E''_\alpha = 0$. Это означает, что E'_α, $E''_\alpha \in \mathfrak{G}^\alpha$; но $\dim \mathfrak{G}^\alpha = 1$, поэтому либо $E'_\alpha = 0$, либо $E''_\alpha = 0$. Предположим, что $E''_\alpha = 0$. Тогда $\mathfrak{G}^\alpha \subset \mathfrak{G}'$ и, как легко видеть, $\mathfrak{G}^{-\alpha} \subset \mathfrak{G}'$. Далее, $H'_\alpha = -[E_\alpha, E_{-\alpha}] \in \mathfrak{G}'$. Аналогично обстоит дело и в случае $E'_\alpha = 0$.

Обозначим через Δ' (соответственно Δ'') множество таких корней α, что $\mathfrak{G}^\alpha \subset \mathfrak{G}'$ (соответственно $\mathfrak{G}^\alpha \subset \mathfrak{G}''$). Если $\alpha \in \Delta'$, $\beta \in \Delta''$, то $\langle \alpha, \beta \rangle = \langle H'_\alpha, H'_\beta \rangle = 0$, так как $\langle \mathfrak{G}', \mathfrak{G}'' \rangle = 0$. Имеем $\Pi = (\Pi \cap \Delta') \cup (\Pi \cap \Delta'')$, причем подпространства $\mathfrak{H}' \subset \mathfrak{G}'$ и $\mathfrak{H}'' \subset \mathfrak{G}''$ ортогональны. (Из доказательства видно, что $\mathfrak{H} = (\mathfrak{H} \cap \mathfrak{G}') \oplus (\mathfrak{H} \cap \mathfrak{G}'')$.)

6. База Вейля

Пусть $\mathfrak{G}$ по-прежнему обозначает полупростую алгебру Ли, $\mathfrak{H}$ — ее фиксированную подалгебру Картана.

Произвольная база $\{H_1, \ldots, H_r\}$ пространства $\mathfrak{H}$ дополняется векторами $E_\alpha \in \mathfrak{G}^\alpha$ (α пробегает все ненулевые корни алгебры $\mathfrak{G}$) до базы пространства $\mathfrak{G}$. При этом векторы E_α могут быть выбраны так, чтобы $\langle E_\alpha, E_{-\alpha} \rangle = -1$. Операция коммутирования в алгебре $\mathfrak{G}$ задается тогда формулами

$$[H, E_\alpha] = \alpha(H) E_\alpha, \tag{21}$$

$$[E_\alpha, E_{-\alpha}] = -H'_\alpha, \tag{22}$$

$$[E_\alpha, E_\beta] = \begin{cases} N_{\alpha,\beta} E_{\alpha+\beta}, & \text{если } \alpha + \beta \neq 0 \text{ — корень}, \\ 0 & \text{в противном случае}, \end{cases} \tag{23}$$

$$\langle H, H'_\alpha \rangle = \alpha(H). \tag{24}$$

Условимся считать $N_{\alpha,\beta} = 0$, если $(\alpha + \beta) \neq 0$ не корень [1]. Из формул (21), (22) видно, что структура алгебры $\mathfrak{G}$ вполне

[1]) Если $\alpha + \beta$ — корень, то $N_{\alpha,\beta} \neq 0$ (предложение 4). — *Прим перев.*

определяется числами $N_{\alpha, \beta}$. Мы сейчас выведем некоторые соотношения между этими числами. Легко доказывается, что выполнение этих соотношений достаточно для того, чтобы операция коммутирования в пространстве $\mathfrak{G}$, заданная a priori формулами (21)—(24), удовлетворяла аксиомам алгебр Ли.

Прежде всего, из антикоммутативности вытекает, что $N_{\beta, \alpha} = -N_{\alpha, \beta}$.

Лемма 5. *Пусть α, β, γ — такие ненулевые корни, что $\alpha + \beta + \gamma = 0$. Тогда*

$$N_{\alpha, \beta} = N_{\beta, \gamma} = N_{\gamma, \alpha}. \tag{25}$$

Имеем $[E_\beta, E_\gamma] = N_{\beta, \gamma} E_{\beta+\gamma} = N_{\beta, \gamma} E_{-\alpha}$ и $[E_\alpha, [E_\beta, E_\gamma]] = N_{\beta, \gamma} [E_\alpha, E_{-\alpha}] = -N_{\beta, \gamma} H'_\alpha$. Из тождества Якоби для элементов E_α, E_β, E_γ вытекает, что

$$N_{\beta, \gamma} H'_\alpha + N_{\gamma, \alpha} H'_\beta + N_{\alpha, \beta} H'_\gamma = 0$$

или

$$N_{\beta, \gamma}\alpha + N_{\gamma, \alpha}\beta + N_{\alpha, \beta}\gamma = 0.$$

С другой стороны, $\alpha + \beta + \gamma = 0$. Если эти два линейных соотношения между α, β, γ независимы, то корни α, β, γ пропорциональны одному из них, скажем α. Тогда либо $\beta = -\alpha$, либо $\gamma = -\alpha$. В обоих случаях один из корней оказывается равным нулю, что противоречит предположению. Следовательно, рассматриваемые соотношения пропорциональны, т. е.

$$N_{\alpha, \beta} = N_{\beta, \gamma} = N_{\gamma, \alpha}.$$

Лемма 6. *Пусть α, β, γ, δ — такие ненулевые корни, что их попарные суммы не равны нулю. Если $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 0$, то*

$$N_{\alpha, \beta} N_{\gamma, \delta} + N_{\beta, \gamma} N_{\alpha, \delta} + N_{\gamma, \alpha} N_{\beta, \delta} = 0. \tag{26}$$

В самом деле, $[E_\alpha, [E_\beta, E_\gamma]] = N_{\beta, \gamma} [E_\alpha, E_{\beta+\gamma}] = N_{\beta, \gamma} N_{\alpha, \beta+\gamma} E_{-\delta}$, поскольку $\beta + \gamma \neq 0$ и $\alpha + \beta + \gamma = -\delta$. По лемме 5 $N_{\alpha, \beta+\gamma} = N_{\delta, \alpha} = -N_{\alpha, \delta}$. Следовательно,

$$[E_\alpha, [E_\beta, E_\gamma]] = -N_{\beta, \gamma} N_{\alpha, \delta} E_{-\delta}.$$

Из тождества Якоби для элементов E_α, E_β, E_γ получаем соотношение (26).

Лемма 7. *Пусть α, β — такие корни, что α, β, $\alpha+\beta\neq 0$. Если α-серия, содержащая β, состоит из всех векторов вида $\beta+k\alpha$, где $p\leqslant k\leqslant q$, то*

$$N_{\alpha,\beta}N_{-\alpha,-\beta}=\frac{q(1-p)}{2}\langle\alpha,\alpha\rangle. \tag{27}$$

Поскольку подпространства $\mathfrak{G}^{\beta+k\alpha}$ одномерны, представление подалгебры $\{E_\alpha, E_{-\alpha}, H'_\alpha\}$ в пространстве $\sum\limits_k \mathfrak{G}^{\beta+k\alpha}$ неприводимо и можно применить утверждение 5) теоремы 4. Получаем

$$[E_{-\alpha}, [E_\alpha, E_\beta]]=-\frac{q(1-p)}{2}\langle\alpha,\alpha\rangle E_\beta.$$

С другой стороны,

$$[E_{-\alpha}, [E_\alpha, E_\beta]]=N_{\alpha,\beta}[E_{-\alpha}, E_{\alpha+\beta}]=$$
$$=N_{\alpha,\beta}N_{-\alpha,\alpha+\beta}E_\beta=N_{\alpha,\beta}N_{-\beta,-\alpha}E_\beta,$$

где последнее равенство получено применением леммы 5 к корням $-\alpha$, $\alpha+\beta$, $-\beta$. Сопоставляя полученные соотношения и учитывая, что $N_{-\beta,-\alpha}=-N_{-\alpha,-\beta}$, получаем формулу (27).

Рассмотрим теперь две полупростые алгебры Ли, $\mathfrak{G}$ и $\mathfrak{G}'$, и пусть $\mathfrak{H}$ и $\mathfrak{H}'$ соответственно — их подалгебры Картана. Мы будем предполагать, что выбраны векторы $E_\alpha\in\mathfrak{G}^\alpha$, для которых выполняются соотношения (21)—(24) со структурными константами $N_{\alpha,\beta}$. Далее, пусть Δ (соответственно Δ') обозначает множество ненулевых корней алгебры $\mathfrak{G}$ (соответственно $\mathfrak{G}'$).

Теорема 6. *Пусть φ — такое линейное взаимно однозначное отображение пространства $\mathfrak{H}_0$ на пространство $\mathfrak{H}'_0$, что дуальное к нему отображение ${}^t\varphi$ отображает систему Δ' на систему Δ. Положим $\alpha'={}^t\varphi^{-1}\alpha$. Существуют векторы $E'_{\alpha'}\in\mathfrak{G}'^{\alpha'}$, удовлетворяющие условиям (21)—(24) со структурными константами $N_{\alpha',\beta'}=N_{\alpha,\beta}$, т. е.*

$$[E'_{\alpha'}, E'_{\beta'}]=N_{\alpha,\beta}E'_{\alpha'+\beta'}. \tag{28}$$

Докажем прежде всего, что отображение $\psi = {}^t\varphi$ пространства $\mathfrak{H}_0'^*$ на пространство $\mathfrak{H}_0^*$ изометрично. Согласно предложению 3, $-2\langle\beta, \alpha\rangle/\langle\alpha, \alpha\rangle = p+q$, где числа p и q таковы, что α-серия, содержащая β, состоит из векторов $\beta+k\alpha$, $p \leqslant k \leqslant q$. Так как ψ отображает Δ' взаимно однозначно на Δ и сохраняет линейные соотношения, то $p=p'$, $q=q'$, так что $-2\langle\beta, \alpha\rangle/\langle\alpha, \alpha\rangle = -2\langle\beta', \alpha'\rangle/\langle\alpha', \alpha'\rangle$. Отсюда следует, что для любых $\alpha, \beta \in \Delta$

$$\langle\alpha, \beta\rangle = k\langle\alpha', \beta'\rangle, \tag{29}$$

где k не зависит от α и β. С другой стороны,

$$\langle\alpha, \beta\rangle = \langle H_\alpha', H_\beta'\rangle = \sum_\gamma \gamma(H_\alpha')\gamma(H_\beta') = \sum_\gamma \langle\gamma, \alpha\rangle\langle\gamma, \beta\rangle \tag{30}$$

и, точно так же, $\langle\alpha', \beta'\rangle = \sum\limits_\gamma \langle\gamma', \alpha'\rangle\langle\gamma', \beta'\rangle$. Следовательно, $k=k^2$, и так как $\langle\alpha, \alpha\rangle \neq 0$ при $\alpha \neq 0$, то $k=1$.

Снабдим пространство $\mathfrak{H}_0^*$, как в п. 5, лексикографическим упорядочением и для всякого положительного корня обозначим через Σ_ρ совокупность ненулевых корней α, для которых $-\rho < \alpha < \rho$. Предположим, что уже выбраны векторы $E_{\alpha'}' \in \mathfrak{G}^{\alpha'}$ для $\alpha \in \Sigma_\rho$, удовлетворяющие условию (28) при $\alpha, \beta, \alpha+\beta \in \Sigma_\rho$. Выберем тогда $E_{\rho'}'$ так, чтобы выполнялось соотношение (28) для какого-нибудь одного разложения $\alpha+\beta=\rho$, где $\alpha, \beta \in \Sigma_\rho$ [1]). Вектор $E_{-\rho'}'$ определим из условия $\langle E_{\rho'}', E_{-\rho'}'\rangle = -1$. Если σ — корень, непосредственно следующий за ρ, то $\Sigma_\sigma = \Sigma_\rho \cup \{\rho, -\rho\}$, так что теперь выбраны векторы $E_{\gamma'}'$ для всех $\gamma \in \Sigma_\sigma$. При $\gamma, \delta, \gamma+\delta \in \Sigma_\sigma$ положим $[E_{\gamma'}', E_{\delta'}'] = N_{\gamma', \delta'}'E_{\gamma'+\delta'}'$. Нужно доказать, что $N_{\gamma, \delta} = N_{\gamma', \delta'}'$. Разберем различные случаи, которые могут представиться.

а) $\gamma, \delta, \gamma+\delta \in \Sigma_\rho$. В этом случае $N_{\gamma, \delta} = N_{\gamma', \delta'}'$ по предположению индукции.

б) $\gamma, \delta \in \Sigma_\rho$, $\gamma+\delta=\rho$. Можно считать, что разложение $\rho=\gamma+\delta$ корня ρ отлично от разложения $\rho=\alpha+\beta$. Тогда $\alpha+\beta+(-\gamma)+(-\delta)=0$, причем попарные суммы корней

[1]) Если корень ρ простой, то $E_{\rho'}'$ выбирается произвольно. — *Прим. перев.*

α, β, $-\gamma$, $-\delta$ не равны нулю. Применяя лемму 6 в алгебрах $\mathfrak{G}$ и $\mathfrak{G}'$, получаем

$$N_{\alpha,\beta}N_{-\gamma,-\delta}=-N_{\beta,-\gamma}N_{\alpha,-\delta}-N_{-\gamma,\alpha}N_{\beta,-\delta},$$
$$N'_{\alpha',\beta'}N'_{-\gamma',-\delta'}=-N_{\beta',-\gamma'}N_{\alpha',-\delta'}-N_{-\gamma',\alpha'}N_{\beta',-\delta'}.$$

Правые части этих равенств совпадают в силу предположения индукции, так как $\beta-\gamma$, $\alpha-\delta$, $\alpha-\gamma$, $\beta-\delta\in\Sigma_\rho$. С другой стороны, $N_{\alpha,\beta}=N'_{\alpha',\beta'}$ по определению вектора $E'_{\rho'}$. Так как $N_{\alpha,\beta}\neq 0$, то $N_{-\gamma,-\delta}=N'_{-\gamma',-\delta'}$. Как было доказано, отображение ${}^t\varphi$ изометрично. Поэтому $\langle\gamma,\gamma\rangle=\langle\gamma',\gamma'\rangle$, и из леммы 7 получаем

$$N_{\gamma,\delta}N_{-\gamma,-\delta}=\frac{\langle\gamma,\gamma\rangle}{2}q(1-p)=N'_{\gamma',\delta'}N'_{-\gamma',-\delta'},$$

откуда $N_{\gamma,\delta}=N'_{\gamma',\delta'}$.

Итак, если $\gamma+\delta=\rho$, то $N_{\gamma,\delta}=N'_{\gamma',\delta'}$ и $N_{-\gamma,-\delta}=N'_{-\gamma',-\delta'}$.

в) γ, $\delta\in\Sigma_\rho$, $\gamma+\delta=-\rho$. Тогда $-\gamma$, $-\delta\in\Sigma_\rho$ и $(-\gamma)+(-\delta)=\rho$. Из б) следует, что $N_{\gamma,\delta}=N'_{\gamma',\delta'}$.

г) Из трех корней γ, δ, $-(\gamma+\delta)$, дающих в сумме 0 и лежащих в Σ_σ, самое большее один может быть равен $\pm\rho$. Лемма 5 позволяет тогда свести дело к случаю б) или в).

Так как положительных корней лишь конечное число, то проведенное рассуждение по индукции доказывает теорему.

Следствие 1. *В предположениях теоремы* 6 *пусть* L — *подполе поля* K, *содержащее числа* $N_{\alpha,\beta}$, *и* $\mathfrak{G}_L$ — *алгебра Ли, образованная линейными комбинациями с коэффициентами из* L *элементов* E_α *и* H'_α. *Тогда существует* L-*линейное отображение* f *алгебры* $\mathfrak{G}_L$ *в алгебру* $\mathfrak{G}'$, *продолжающее отображение* φ *и являющееся гомоморфизмом*: $f([x,y])=[f(x),f(y)]$ $(x,y\in\mathfrak{G}_L)$.

Структурные соотношения (21)—(24) показывают, что множество $\mathfrak{G}_L$ замкнуто относительно операции коммутирования. Так как $\mathfrak{G}$ — прямая сумма подпространств $\mathfrak{H}$ и $\mathfrak{G}^a$ и пространство $\mathfrak{H}_0$ имеет ту же размерность над K, что и над Q, то формулы $f(H)=\varphi(H)$ $(H\in\mathfrak{H}_0)$, $f(E_\alpha)=E'_{\alpha'}$ корректным образом определяют некоторое L-линейное отображение f алгебры $\mathfrak{G}_L$ в алгебру $\mathfrak{G}'$. Проверим, что f —

гомоморфизм:

$$f([H, H']) = f(0) = 0 = [f(H), f(H')], \tag{31}$$

$$f([H, E_\alpha]) = f(\alpha(H) E_\alpha) = \alpha(H) E'_{\alpha'} = \alpha'(\varphi(H)) E'_{\alpha'} = \\ = [\varphi(H), E'_{\alpha'}] = [f(H), f(E_\alpha)], \tag{32}$$

$$f([E_\alpha, E_\beta]) = f(N_{\alpha,\beta} E_{\alpha+\beta}) = N_{\alpha,\beta} E'_{\alpha'+\beta'} = \\ = [E'_{\alpha'}, E'_{\beta'}] = [f(E_\alpha), f(E_\beta)] \quad (\alpha + \beta \neq 0), \tag{33}$$

$$f([E_\alpha, E_{-\alpha}]) = f(-H'_\alpha) = [E'_{\alpha'}, E'_{-\alpha'}] = [f(E_\alpha), f(E_{-\alpha})]. \tag{34}$$

Следствие 2. *Алгебра Ли $\mathfrak{G}$ определяется с точностью до изоморфизма заданием пространства $\mathfrak{H}$ и системы корней.*

В самом деле, положив в следствии 1 $L = K$, получаем изоморфизм алгебры $\mathfrak{G}$ на алгебру $\mathfrak{G}'$, продолжающий φ.

Следствие 3. *Можно так выбрать векторы $E_\alpha \in \mathfrak{G}^\alpha$, чтобы наряду с равенствами* (21) — (24) *выполнялось соотношение*

$$N_{\alpha,\beta} = N_{-\alpha,-\beta}. \tag{35}$$

Очевидно, что симметрия $H \to -H$ пространства $\mathfrak{H}_0$ сохраняет систему корней, причем $\alpha' = -\alpha$. Согласно следствию 1, существует автоморфизм f алгебры $\mathfrak{G}$, продолжающий эту симметрию. Выберем векторы $F_\alpha \in \mathfrak{G}^\alpha$ так, чтобы $\langle F_\alpha, F_{-\alpha} \rangle = -1$, и пусть $f(F_\alpha) = F'_{-\alpha} = \rho_\alpha F_{-\alpha}$. Имеем

$$\langle F'_{-\alpha}, F'_\alpha \rangle = -1,$$

откуда $\rho_\alpha \rho_{-\alpha} = 1$. Положим $E_\alpha = \rho_\alpha^{-1/2} F_\alpha$. Тогда

$$f(E_\alpha) = \rho_\alpha^{-1/2} \rho_\alpha F_{-\alpha} = \rho_\alpha^{1/2} F_{-\alpha} = \rho_{-\alpha}^{-1/2} F_{-\alpha} = E_{-\alpha}.$$

Из того, что f — гомоморфизм, следует, что $N_{\alpha,\beta} = N_{\alpha',\beta'} = N_{-\alpha,-\beta}$ для векторов $E_\alpha \in \mathfrak{G}^\alpha$, что и требовалось доказать.

Заметим, что если выполнено условие (35), то в силу леммы 7

$$N^2_{\alpha,\beta} = \frac{q(1-p)}{2} \langle \alpha, \alpha \rangle \geqslant 0,$$

так как $q \geqslant 0$, $p \leqslant 0$. Поэтому в том случае, когда K — поле комплексных чисел, константы $N_{\alpha, \beta}$ *вещественны.*

Определение 4. *База пространства* $\mathfrak{G}$, *образованная какой-нибудь базой* $\{H_1, \ldots, H_r\}$ *пространства* $\mathfrak{H}$ *и такими векторами* $E_\alpha \in \mathfrak{G}^\alpha$, *что* $\langle E_\alpha, E_{-\alpha} \rangle = -1$ и $N_{\alpha, \beta} = N_{-\alpha, -\beta}$, *называется базой Вейля алгебры* $\mathfrak{G}$[1].

---

[1]) Иногда бывает удобно выбрать другой базис в $\mathfrak{G}$. Оказывается (Chevalley C., Tôh. Math. J., **7** (1955), 1—2, p. 14), что векторы E_α можно выбрать таким образом, что константы $N_{\alpha, \beta}$ будут целыми. Именно $N_{\alpha, \beta} = \pm(-p+1)$, где p — такое целое число, что $\beta + p\alpha$ — левый крайний элемент в α-серии, содержащей β (см. предложение 3 этой главы). Если $N'_{\alpha, \beta}$ — структурные константы какого-либо другого базиса, обладающего указанным свойством, то $N'_{\alpha, \beta} = u_\alpha u_\beta u_{\alpha+\beta}^{-1} N_{\alpha, \beta}$, где $u_\gamma = \pm 1$, $u_\gamma u_{-\gamma} = 1$. — *Прим. ред.*

Глава 9

ВЕЩЕСТВЕННЫЕ ФОРМЫ ПОЛУПРОСТЫХ АЛГЕБР ЛИ[1])

Ф. Брюа

В этой главе основным полем будет поле C комплексных чисел; R будет обозначать поле вещественных чисел. Алгебра $\mathfrak{G}$, будучи векторным пространством над C, может также рассматриваться как векторное пространство над R путем ограничения поля скаляров.

Определение 1. *Вещественная подалгебра $\mathfrak{G}_0$ алгебры Ли $\mathfrak{G}$ (рассматриваемой как алгебра над R) называется вещественной формой алгебры $\mathfrak{G}$, если каноническое отображение комплексного расширения $\mathfrak{G}_0 \otimes_R C$ алгебры $\mathfrak{G}_0$ в алгебру $\mathfrak{G}$ является изоморфизмом. В этом случае* $\dim_R \mathfrak{G}_0 = \dim_C \mathfrak{G}$.

Если $\mathfrak{G}_0$ — вещественная форма алгебры $\mathfrak{G}$, то всякий элемент из $\mathfrak{G}$ представим единственным образом в виде $x + iy$ с $x, y \in \mathfrak{G}_0$. Инволюции $\sigma: x \otimes \lambda \to x \otimes \bar{\lambda}$ в алгебре $\mathfrak{G}_0 \otimes C$ соответствует инволюция σ в изоморфной ей алгебре $\mathfrak{G}$; σ зависит от $\mathfrak{G}_0$ и обладает следующими свойствами:

$$\begin{gathered} \sigma(\sigma(x)) = x, \quad \sigma(x+y) = \sigma(x) + \sigma(y), \\ \sigma(\lambda x) = \bar{\lambda}\sigma(x), \quad \sigma([x, y]) = [\sigma(x), \sigma(y)]. \end{gathered} \tag{1}$$

Обратно, пусть σ — отображение алгебры $\mathfrak{G}$ в себя со свойствами (1). Обозначим через $\mathfrak{G}_0$ множество неподвижных точек отображения σ. При $x, y \in \mathfrak{G}_0$, $\lambda \in R$ из (1) следует, что $x+y$, λx, $[x, y] \in \mathfrak{G}_0$. С другой стороны, всякий элемент $x \in \mathfrak{G}$ можно представить в виде $y + iz$ с $y, z \in \mathfrak{G}_0$. В самом деле, $x = \frac{1}{2}(x + \sigma(x)) + i\left(\frac{1}{2i}(x - \sigma(x))\right)$, причем легко видеть, что $x + \sigma(x) \in \mathfrak{G}_0$ и $\frac{1}{2i}(x - \sigma(x)) \in \mathfrak{G}_0$.

---

[1]) Полную классификацию полупростых вещественных алгебр Ли см. в [13]*. — *Прим. перев.*

Далее, если $x = y + iz$, где y, $z \in \mathfrak{G}_0$, то $\sigma(x) = y - iz$, откуда $y = \frac{1}{2}(x + \sigma(x))$, $z = \frac{1}{2i}(x - \sigma(x))$, так что такое представление элемента x единственно. Следовательно, $\mathfrak{G}_0$ — вещественная форма алгебры $\mathfrak{G}$.

Форма Киллинга алгебры $\mathfrak{G}_0$ совпадает с ограничением на $\mathfrak{G}_0$ формы Киллинга B алгебры $\mathfrak{G}$, так как при x, $y \in \mathfrak{G}_0$ эндоморфизм $\operatorname{ad} x \circ \operatorname{ad} y$ пространства $\mathfrak{G}$ сохраняет вещественное подпространство $\mathfrak{G}_0$ и его след не зависит от того, рассматривается ли он как комплексный эндоморфизм пространства $\mathfrak{G}$ или как вещественный эндоморфизм пространства $\mathfrak{G}_0$. В частности, форма B принимает вещественные значения на $\mathfrak{G}_0$. Следовательно, $B(x, y) = \overline{B(\sigma(x), \sigma(y))}$ при x, $y \in \mathfrak{G}_0$, однако обе части этого равенства являются комплексными билинейными формами на $\mathfrak{G}$, поэтому оно справедливо для любых x, $y \in \mathfrak{G}$.

Определение 2. *Вещественная алгебра Ли называется компактной, если квадратичная форма $B(x, x)$ отрицательно определена. Вещественная форма $\mathfrak{G}_0$ комплексной алгебры Ли $\mathfrak{G}$ называется компактной вещественной формой алгебры $\mathfrak{G}$, если вещественная алгебра Ли $\mathfrak{G}_0$ компактна.*

Для того чтобы вещественная форма $\mathfrak{G}_0$ алгебры $\mathfrak{G}$ была компактной, необходимо и достаточно, чтобы эрмитова форма $B(x, \sigma(y))$ на алгебре $\mathfrak{G}$ была отрицательно определена. В самом деле, если $\mathfrak{G}_0$ компактна и $x = y + iz \in \mathfrak{G}$, $x \neq 0$, то $B(x, \sigma(x)) = B(y + iz, y - iz) = B(y, y) + B(z, z) < 0$. Обратно, если эрмитова форма $B(x, \sigma(y))$ отрицательно определена, то при $x \in \mathfrak{G}_0$, $x \neq 0$, имеем $\sigma(x) = x$ и $B(x, x) < 0$.

Займемся изучением инволюций комплексной полупростой алгебры $\mathfrak{G}$.

Лемма 1. 1) *Для того чтобы комплексное подпространство $\mathfrak{H}$ пространства $\mathfrak{G}$ порождалось (над C) пересечением $\mathfrak{H}_0 = \mathfrak{H} \cap \mathfrak{G}_0$, необходимо и достаточно, чтобы $\sigma(\mathfrak{H}) = \mathfrak{H}$.*

2) *Пусть инволюция τ коммутирует с инволюцией σ и $\mathfrak{G}_u$ — множество неподвижных точек инволюции τ. Обозначим через $\mathfrak{G}_u^+$ (соответственно $\mathfrak{G}_u^-$) множество*

таких элементов $x \in \mathfrak{G}_u$, что $\sigma(x) = x$ (соответственно $\sigma(x) = -x$). Тогда пространство $\mathfrak{G}_u$ есть прямая сумма $\mathfrak{G}_u^+$ и $\mathfrak{G}_u^-$, а пространство $\mathfrak{G}_0$ — прямая сумма $\mathfrak{G}_u^+$ и $i\mathfrak{G}_u^-$.

1) Пусть пространство $\mathfrak{H}$ порождается $\mathfrak{H}_0$. Всякий элемент $x \in \mathfrak{H}$ представляется тогда в виде $x = y + iz$, где $y, z \in \mathfrak{H}$. Имеем $\sigma(x) = y - iz \in \mathfrak{H}$. Следовательно, $\sigma(\mathfrak{H}) \subset \mathfrak{H}$. Так как $\sigma^2 = 1$, то $\sigma(\mathfrak{H}) = \mathfrak{H}$. Пусть, наоборот, $\sigma(\mathfrak{H}) = \mathfrak{H}$. Если $x \in \mathfrak{H}$, то

$$y = \frac{1}{2}(x + \sigma(x)) \in \mathfrak{H} \cap \mathfrak{G}_0 = \mathfrak{H}_0$$

и $z = \frac{1}{2i}(x - \sigma(x)) \in \mathfrak{H} \cap \mathfrak{G}_0 = \mathfrak{H}_0$; но $x = y + iz$, так что в этом случае пространство $\mathfrak{H}$ порождается $\mathfrak{H}_0$.

2) Если $x \in \mathfrak{G}_u$, то $\tau\sigma(x) = \sigma\tau(x) = \sigma(x)$ и $\sigma(x) \in \mathfrak{G}_u$. Следовательно, оператор σ сохраняет подпространство $\mathfrak{G}_u$. Ограничение на $\mathfrak{G}_u$ оператора σ является R-линейным эндоморфизмом, квадрат которого равен 1. Очевидно, что $\mathfrak{G}_u^+ \cap \mathfrak{G}_u^- = 0$. С другой стороны, $x = \frac{1}{2}(x + \sigma(u)) + \frac{1}{2}(x - \sigma(x))$ и $\frac{1}{2}(x \pm \sigma(x)) \in \mathfrak{G}_u^\pm$. Следовательно, $\mathfrak{G}_u = \mathfrak{G}_u^+ + \mathfrak{G}_u^-$. Пространство $\mathfrak{G}$ разбивается в прямую сумму подпространств $\mathfrak{G}_u$ и $i\mathfrak{G}_u$, а значит, и подпространств $\mathfrak{G}_u^+$, $\mathfrak{G}_u^-$, $i\mathfrak{G}_u^+$ и $i\mathfrak{G}_u^-$. Отображение σ тождественно на $\mathfrak{G}_u^+$ и $i\mathfrak{G}_u^-$ и сводится к умножению на -1 на $\mathfrak{G}_u^-$ и $i\mathfrak{G}_u^+$. Отсюда следует, что $\mathfrak{G}_0$ — прямая сумма $\mathfrak{G}_u^+$ и $i\mathfrak{G}_u^-$.

Теорема 1. *Пусть $\mathfrak{G}_0$ — вещественная форма комплексной полупростой алгебры Ли $\mathfrak{G}$, σ — соответствующая ей инволюция алгебры $\mathfrak{G}$. Тогда*

1) *Существует подалгебра Картана $\mathfrak{H}$ алгебры $\mathfrak{G}$, инвариантная относительно σ. При этом σ сохраняет также множество $\mathfrak{H}_0$ (Q-подпространство, порожденное векторами H'_α) и отображение ${}^t\sigma$ сохраняет систему корней.*

2) *Если $\mathfrak{G}_0$ — компактная вещественная форма алгебры $\mathfrak{G}$, то $\sigma(H) = -H$ для всех $H \in \mathfrak{H}$ и существует такая база Вейля алгебры $\mathfrak{G}$, что $\sigma(E_\alpha) = E_{-\alpha}$.*

3) *Обратно, если выбрана база Вейля в алгебре $\mathfrak{G}$, то инволюции σ алгебры $\mathfrak{G}$, определенной формулами*

$\sigma(H) = -H$ $(H \in \mathfrak{H})$ и $\sigma(E_\alpha) = E_{-\alpha}$, соответствует компактная вещественная форма.

1) Размерность подпространства алгебры $\mathfrak{G}$, аннулируемого степенями оператора $\operatorname{ad} x$, $x \in \mathfrak{G}$, равна кратности нулевого корня характеристического полинома

$$\det(\operatorname{ad} x - \lambda \cdot 1) = \\ = (-\lambda)^n + (-\lambda)^{n-1}\varphi_1(x) + \ldots + (-\lambda)^{n-k}\varphi_k(x).$$

Элемент x регулярен тогда и только тогда, когда эта размерность минимальна, т. е. когда $\varphi_k(x) \neq 0$.

Полиномиальная функция $\varphi_k(x)$, не равная тождественно нулю на $\mathfrak{G}$, не может обращаться в нуль всюду на $\mathfrak{G}_0$. Следовательно, $\mathfrak{G}_0$ содержит некоторый регулярный элемент x алгебры $\mathfrak{G}$. Согласно результатам п. 2 и 3 гл. 8 (теорема 2 и предложение 1), множество $\mathfrak{H}$ элементов, коммутирующих с x, является подалгеброй Картана алгебры $\mathfrak{G}$. Если $H \in \mathfrak{H}$, то $[\sigma(H), x] = \sigma([H, \sigma(x)]) = \sigma([H, x]) = 0$, так что $\sigma(H) \in \mathfrak{H}$. Таким образом, подпространство $\mathfrak{H}$ инвариантно относительно σ. Для всякого корня α относительно подалгебры $\mathfrak{H}$ определим линейную форму $\bar{\alpha}$ на $\mathfrak{H}$: $\bar{\alpha}(H) = \overline{\alpha(\sigma H)}$. Докажем, что $\bar{\alpha}$ — корень и что $\sigma\mathfrak{G}^\alpha \subset \mathfrak{G}^{\bar{\alpha}}$. Если $y \in \mathfrak{G}^\alpha$, то $[H, y] = \alpha(H)y$ и $[\sigma(H), \sigma(y)] = \overline{\alpha(H)}\sigma(y) = \bar{\alpha}(\sigma H)\sigma(y)$. Так как $\sigma\mathfrak{H} = \mathfrak{H}$, то получаем отсюда, что $\bar{\alpha}$ — корень и $\sigma(y) \in \mathfrak{G}^{\bar{\alpha}}$. Далее, $\langle \sigma H'_\alpha, H\rangle = \overline{\langle H'_\alpha, \sigma H\rangle} = \overline{\alpha(\sigma H)} = \bar{\alpha}(H) = \langle H'_{\bar{\alpha}}, H\rangle$, откуда $\sigma H'_\alpha = H'_{\bar{\alpha}}$. Следовательно, σ сохраняет $\mathfrak{H}_0$.

Пусть выбраны такие векторы $E_\alpha \in \mathfrak{G}^\alpha$, что $\langle E_\alpha, E_{-\alpha}\rangle = -1$. Так как $\sigma E_\alpha \in \mathfrak{G}^{\bar{\alpha}}$, то существуют такие числа ρ_α, что $\sigma E_\alpha = \rho_\alpha E_{\bar{\alpha}}$. Инволюция σ однозначно определена перестановкой корней, которую она индуцирует, и числами ρ_α. Пусть, наоборот, дан инволютивный автоморфизм φ $(\varphi^2 = 1)$ пространства $\mathfrak{H}_0$, сохраняющий систему корней, и числа ρ_α. При каких условиях существует инволюция σ алгебры $\mathfrak{G}$, совпадающая с φ на $\mathfrak{H}_0$ и переводящая E_α в $\rho_\alpha E_{\bar{\alpha}}$ $(\bar{\alpha} = {}^t\varphi \cdot \alpha)$?

a) $\sigma^2 H = \varphi^2 H = H$ для $H \in \mathfrak{H}_0$. Далее, $\sigma^2 E_\alpha = \sigma(\rho_\alpha E_{\bar{\alpha}}) = \bar{\rho}_\alpha \rho_{\bar{\alpha}} E_{\bar{\alpha}}$, откуда необходимое условие

$$\bar{\rho}_\alpha \rho_{\bar{\alpha}} = 1. \tag{2}$$

б) Существует, и притом единственное, антилинейное отображение σ, для которого $\sigma H = \varphi H$ и $\sigma E_\alpha = \rho_\alpha E_{\bar\alpha}$. Условия мультипликативности отображения σ имеют вид

$$\sigma([E_\alpha, E_{-\alpha}]) = [\sigma E_\alpha, \sigma E_{-\alpha}], \quad \sigma([H, E_\alpha]) = [\sigma H, \sigma E_\alpha],$$
$$\sigma([E_\alpha, E_\beta]) = [\sigma E_\alpha, \sigma E_\beta],$$

поскольку на коммутативной алгебре $\mathfrak{H}$ его мультипликативность очевидна. Так как отображение ${}^t\sigma$ сохраняет систему корней, то оно сохраняет и метрику (см. доказательство теоремы 6 гл. 8); следовательно, $\langle {}^t\sigma\alpha, \sigma^t\beta\rangle = \langle\bar\alpha, \beta\rangle$, откуда $\sigma H'_\alpha = H'_{\bar\alpha}$. Первое условие мультипликативности принимает вид: $-H_{\bar\alpha} = [\rho_\alpha E_\alpha, \rho_{-\alpha} E_{-\bar\alpha}]$, т. е.

$$\rho_\alpha \rho_{-\alpha} = 1. \tag{3}$$

Второе условие дает $\rho_\alpha \overline{\alpha}(\sigma H) E_{\bar\alpha} = \overline{\alpha(H)}\, \sigma E_\alpha$, что равносильно определению корня $\bar\alpha$. Наконец, из третьего условия получаем

$$\overline{N}_{\alpha,\beta}\rho_{\alpha+\beta} E_{\bar\alpha+\bar\beta} = \rho_\alpha \rho_\beta N_{\bar\alpha,\bar\beta} E_{\bar\alpha+\bar\beta},$$

т. е.

$$\rho_{\alpha+\beta}\overline{N}_{\alpha,\beta} = \rho_\alpha \rho_\beta N_{\bar\alpha,\bar\beta}. \tag{4}$$

2) Предположим, что алгебра $\mathfrak{G}_0$ компактна. Тогда $B(x, \sigma(x)) < 0$ для $x \neq 0$. В пространстве $\mathfrak{H}_0$ оператор σ индуцирует Q-линейное отображение, квадрат которого равен единице. Поэтому $\mathfrak{H}$ разбивается в прямую сумму подпространств V^+ и V^-, составленных из тех векторов $H \in \mathfrak{H}_0$, для которых $\sigma H = H$ и $\sigma H = -H$ соответственно. Если $H \in V^+$, то $B(H, \sigma(H)) = \langle H, H\rangle \geqslant 0$, откуда следует $H = 0$, поскольку эрмитова форма $B(x, \sigma(x))$ отрицательно определена. Таким образом, $V^+ = 0$ и $\mathfrak{H} = V^-$. Это показывает, что $\bar\alpha = -\alpha$. Выберем в алгебре $\mathfrak{G}$ базу Вейля. Тогда $N_{\alpha,\beta} = \overline{N}_{\alpha,\beta} = N_{\bar\alpha,\bar\beta}$. Имеем $\sigma E_\alpha = \rho_\alpha E_{-\alpha}$, причем для чисел ρ_α выполняются соотношения [см. формулы (2) — (4)]

$$\bar\rho_\alpha \rho_{-\alpha} = \rho_\alpha \rho_{-\alpha} = 1, \quad \rho_{\alpha+\beta} = \rho_\alpha \cdot \rho_\beta.$$

Далее, $\langle E_\alpha, \sigma E_\alpha\rangle = \rho_\alpha \langle E_\alpha, E_{-\alpha}\rangle = -\rho_\alpha < 0$, откуда $\rho_\alpha > 0$. Рассмотрим положительные числа $\rho'_\alpha = \rho_\alpha^{-1/2}$. Положим $E'_\alpha = \rho'_\alpha E_\alpha$. Тогда $\langle E'_\alpha, E'_{-\alpha}\rangle = -\rho'_\alpha \rho'_{-\alpha} = -1$ и $\sigma E'_\alpha = \rho_\alpha^{-1/2} \rho_\alpha E_{-\alpha} = \rho_\alpha^{1/2} E_{-\alpha} = \rho_{-\alpha}^{-1/2} E_{-\alpha} = E'_{-\alpha}$. Так как σ — гомоморфизм, то, полагая $[E'_\alpha, E'_\beta] = N'_{\alpha,\beta} E'_{\alpha+\beta}$, имеем $N'_{\alpha,\beta} = N'_{-\alpha,-\beta}$. Отсюда следует, что $\{E'_\alpha\}$ — база Вейля.

3) Если определить отображение σ, положив $\bar{\alpha} = -\alpha$, $\rho_\alpha = 1$, то условия (2) — (4) будут выполнены, так как числа $N_{\alpha,\beta} = N_{-\alpha,-\beta}$ вещественны. Покажем, что $B(x, \sigma(x)) < 0$ при $x \neq 0$. Пусть $x = H + \sum\limits_\alpha \mu_\alpha E_\alpha$; тогда

$$\sigma(x) = \sigma(H) + \sum \bar{\mu}_\alpha E_{-\alpha}$$

и

$$B(x, \sigma(x)) = \langle H, \sigma(H)\rangle + \sum_\alpha \mu_\alpha \bar{\mu}_\alpha \langle E_\alpha, E_{-\alpha}\rangle =$$
$$= \sum_\alpha (\alpha(H)\alpha(\sigma H) - \mu_\alpha \bar{\mu}_\alpha).$$

Далее, $\alpha(\sigma \cdot H) = \overline{\bar{\alpha}(H)} = -\overline{\alpha(H)}$, поэтому

$$B(x, \sigma(x)) = -\sum_\alpha (|\alpha(H)|^2 + |\mu_\alpha|^2) < 0, \qquad (5)$$

что и требовалось доказать.

Замечания. 1) Совокупность $\mathfrak{G}_R$ линейных комбинаций векторов E_α и H'_α с вещественными коэффициентами является вещественной формой алгебры $\mathfrak{G}$ и называется *нормальной вещественной формой, связанной с данной базой Вейля в алгебре* $\mathfrak{G}$. Компактная вещественная форма алгебры $\mathfrak{G}$, определяемая инволюцией $\sigma: E_\alpha \to E_{-\alpha}$, $H \to -H$ $(H \in \mathfrak{H})$, называется *компактной вещественной формой, связанной с данной базой Вейля в алгебре* $\mathfrak{G}$. Она имеет в качестве вещественной базы векторы iH'_{α_k}, $E_\alpha + E_{-\alpha}$, $i(E_\alpha - E_{-\alpha})$.

2) *Подалгеброй Картана* вещественной алгебры Ли $\mathfrak{G}_0$ называется подалгебра $\mathfrak{H}^0 \subset \mathfrak{G}_0$, комплексное расширение $\mathfrak{H}$ которой является подалгеброй Картана в комплексном расширении $\mathfrak{G}$ алгебры $\mathfrak{G}_0$[1]. Легко доказать, что подалгебры

[1] В силу утверждения 1) теоремы 1 подалгебра Картана существует у всякой вещественной алгебры Ли. — *Прим. ред.*

Картана $\mathfrak{H}_0$ полупростой вещественной алгебры $\mathfrak{G}_0$ характеризуются следующими свойствами:

а) $\mathfrak{H}^0$ — максимальная коммутативная подалгебра алгебры $\mathfrak{G}_0$;

б) присоединенное представление подалгебры $\mathfrak{H}^0$ в алгебре $\mathfrak{G}_0$ вполне приводимо.

После предпринятого нами изучения компактных вещественных форм алгебры $\mathfrak{G}$ займемся другими ее вещественными формами.

Теорема 2. (Э. Картан, Мостов, Ивасава). *Пусть $\mathfrak{G}$ — полупростая комплексная алгебра Ли, $\mathfrak{G}_0$ — ее вещественная форма и σ — соответствующая инволюция. Тогда*

1) *Существует компактная вещественная форма $\mathfrak{G}_u$ алгебры $\mathfrak{G}$, инвариантная относительно σ.*

2) *Пусть $\mathfrak{G}_u^+ = \mathfrak{G}_u \cap \mathfrak{G}_0$ и $\mathfrak{G}_u^- = \mathfrak{G}_u \cap i\mathfrak{G}_0$ — множества соответственно инвариантных и антиинвариантных относительно σ элементов алгебры $\mathfrak{G}_u$. Положим $\mathfrak{P}_0 = \mathfrak{G}_u^+$ и $\mathfrak{Y}_0 = i\mathfrak{G}_u^-$. Тогда $\mathfrak{G}_0$ — прямая сумма $\mathfrak{P}_0$ и $\mathfrak{Y}_0$; $\mathfrak{G}_u$ — прямая сумма $\mathfrak{P}_0$ и $i\mathfrak{Y}_0$.*

3) *Пространство $\mathfrak{G}_0$ — прямая сумма подалгебры $\mathfrak{P}_0$ и некоторой разрешимой подалгебры $\mathfrak{L}_0$.*

Согласно лемме 1, достаточно показать, что существует инволюция τ алгебры $\mathfrak{G}$, перестановочная с σ и такая, что $B(x, \tau(x)) < 0$ при $x \neq 0$. Алгебра $\mathfrak{G}_u$ будет при этом множеством неподвижных точек инволюции τ. По теореме 1 существует подалгебра Картана $\mathfrak{H}$ алгебры $\mathfrak{G}$, инвариантная относительно инволюции σ, и такая база Вейля алгебры $\mathfrak{G}$, что $\sigma E_\alpha = \rho_\alpha E_{\bar{\alpha}}$. Положим $\tau E_\alpha = |\rho_\alpha| E_{-\alpha}$. Проверим условия (2) — (4). Первые два условия очевидны, так как $\rho_\alpha \rho_{-\alpha} = 1$. Третье условие эквивалентно тому, что $|\rho_{\alpha+\beta}| = |\rho_\alpha||\rho_\beta|$, поскольку $N_{\alpha,\beta} = N_{-\alpha,-\beta}$. Далее, $\langle\bar{\alpha}, \bar{\beta}\rangle = \overline{\langle\alpha, \beta\rangle} = \langle\alpha, \beta\rangle$ и по лемме 7 гл. 8

$$|N^2_{\alpha,\beta}| = \frac{1}{2}\langle\alpha, \alpha\rangle q(1-p) = |N^2_{\bar{\alpha},\bar{\beta}}|.$$

Взяв по модулю соотношение (4) для инволюции σ, получаем $|\rho_{\alpha+\beta}| = |\rho_\alpha||\rho_\beta|$. Наконец, инволюции σ и τ перестановочны, как видно из следующих равенств:

$$\sigma\tau E_\alpha = |\rho_\alpha|\, \sigma E_{-\alpha} = |\rho_\alpha|\, \rho_{-\alpha} E_{-\bar{\alpha}} = \frac{|\rho_\alpha|}{\rho_\alpha} E_{-\bar{\alpha}},$$

$$\tau\sigma E_\alpha = \tau(\rho_\alpha E_{\bar{\alpha}}) = \bar{\rho}_\alpha |\rho_{\bar{\alpha}}| E_{-\bar{\alpha}} = \frac{\bar{\rho}_\alpha}{|\rho_\alpha|} E_{-\bar{\alpha}}.$$

Для доказательства утверждения 3) теоремы нам придется сначала специализировать выбор подалгебры Картана $\mathfrak{H}$. Имеем $\mathfrak{G}_u = \mathfrak{G}_u^+ \oplus \mathfrak{G}_u^-$. Пусть $\mathfrak{H}_u^-$ — максимальная коммутативная подалгебра, содержащаяся в $\mathfrak{G}_u^-$, и $\mathfrak{H}_u$ — максимальная коммутативная подалгебра алгебры $\mathfrak{G}_u$, содержащая $\mathfrak{H}_u^-$. Для всякого $H \in \mathfrak{H}_u$ эндоморфизм $\operatorname{ad} H$ пространства $\mathfrak{G}_u$ кососимметричен по отношению к положительно определенной квадратичной форме $-B(x, x)$ и, следовательно, вполне приводим. Это показывает, что $\mathfrak{H}_u$ — подалгебра Картана алгебры $\mathfrak{G}_u$. Докажем, что она инвариантна относительно инволюции σ. Пусть $H \in \mathfrak{H}_u$, $H^- \in \mathfrak{H}_u^-$. Тогда $[H, H^-] = 0$, и поэтому также $[\sigma H, \sigma H^-] = 0$, но $\sigma H^- = -H^-$. Следовательно, σH коммутирует со всеми элементами из $\mathfrak{H}_u^-$. То же относится и к $(H - \sigma H) \in \mathfrak{G}_u^-$. Так как $\mathfrak{H}_u^-$ — максимальная коммутативная подалгебра в $\mathfrak{G}_u^-$, то $H - \sigma H \in \mathfrak{H}_u^-$ и $\sigma H \in \mathfrak{H}_u$. Таким образом, $\mathfrak{H}_u = \mathfrak{H}_u^+ + \mathfrak{H}_u^-$. Комплексное расширение $\mathfrak{H}$ алгебры $\mathfrak{H}_u$ будет подалгеброй Картана алгебры $\mathfrak{G}$, а пересечение $\mathfrak{H}^0 = \mathfrak{H} \cap \mathfrak{G}_0 = \mathfrak{H}_u^+ + i\mathfrak{H}_u^-$ — подалгеброй Картана алгебры $\mathfrak{G}_0$.

Пространство $\mathfrak{H}_0$ (множество линейных комбинаций с рациональными коэффициентами элементов H'_α) инвариантно относительно σ и поэтому разлагается в прямую сумму:

$$\mathfrak{H}_0 = V^+ \oplus V^- \quad (H \in V^\pm \Longleftrightarrow \sigma H = \pm H).$$

Выберем в пространстве $\mathfrak{H}_0$ упорядоченную базу, взяв сначала какую-нибудь базу $\{H_1, \ldots, H_m\}$ подпространства V^+, а затем какую-нибудь базу $\{K_1, \ldots, K_n\}$ подпространства V^-, и снабдим $\mathfrak{H}_0$ соответствующим лексикографическим упорядочением.

Условие $\bar{\alpha} = -\alpha$ эквивалентно тому, что корень α обращается в 0 на V^+. В самом деле, пространство V^+ порождено над Q векторами вида $H + \sigma H$ $(H \in \mathfrak{H}_0)$; с другой стороны, $\bar{\alpha}(H)=\overline{\alpha(\sigma H)}=\alpha(\sigma H)$ при $H\in\mathfrak{H}_0$ (α принимает на $\mathfrak{H}_0$ рациональные значения), так что $\bar{\alpha}=-\alpha$ тогда и только тогда, когда $\alpha(H+\sigma H)=0$ при всех $H\in\mathfrak{H}_0$. Предположим теперь, что $\alpha>0$ и $\bar{\alpha}\neq-\alpha$. Тогда α не обращается в 0 на V^+ и мы имеем $\alpha(H_1)=\ldots=\alpha(H_i)=0$, $\alpha(H_{i+1})>0$ для некоторого i. Так как $\bar{\alpha}(H_j)=\overline{\alpha(\sigma\cdot H_j)}=\alpha(H_j)$ (ведь $H_j\in V^+$), то $\bar{\alpha}(H_j)=0$ при $j\leqslant i$ и $\bar{\alpha}(H_{i+1})=\alpha(H_{i+1})>0$, откуда следует, что $\bar{\alpha}>0$. *Система ненулевых корней алгебры* $\mathfrak{G}$ *разбивается, таким образом, на три части*:

$$\Delta=\Sigma'\cup\Delta''\cup(-\Sigma'),$$

где

$$\alpha\in\Sigma'\Longleftrightarrow\alpha,\ \bar{\alpha}>0,$$

$$\alpha\in\Delta''\Longleftrightarrow\bar{\alpha}=-\alpha\Longleftrightarrow\alpha(V^+)=0.$$

Лемма 2. *Если* $\bar{\alpha}=-\alpha$ *и* $x\in\mathfrak{G}^\alpha$, *то* $\sigma(x)=\tau(x)$ (*в частности*, $\sigma(E_\alpha)=E_{-\alpha}$) *и, следовательно*, $x+\sigma(x)\in\in\mathfrak{G}_u^+=\mathfrak{P}_0$.

Так как $\bar{\alpha}=-\alpha$, то $\sigma(x)\in\mathfrak{G}^{-\alpha}$ и $y=\sigma(x)-\tau(x)\in\mathfrak{G}^{-\alpha}$. Элемент y коммутирует с V^+. Действительно, пусть $H\in V^+$. Тогда $H=\sigma H$ и

$$[H,\ \sigma(x)]=\sigma([H,\ x])=\overline{\alpha(H)}\,\sigma(x)=0,$$

$$[H,\ \tau(x)]=-\tau([H,\ x])=-\overline{\alpha(H)}\,\tau(x)=0,$$

так как $\tau=-1$ на $\mathfrak{H}_0$ (см. теорему 1) и $\alpha=0$ на V^+. Пространство $\mathfrak{H}_u$ порождено над R векторами iH'_α, причем $iV^+\subset\mathfrak{H}_u^-$, $iV^-\subset\mathfrak{H}_u^+$. Следовательно, подпространство $\mathfrak{H}_u^-$ порождено над R множеством iV^+, так что элемент y коммутирует с $\mathfrak{H}_u^-$. Отсюда вытекает, что элемент $y-\sigma(y)\in\mathfrak{G}_u^-$ также коммутирует с $\mathfrak{H}_u^-$ (поскольку подпространство $\mathfrak{H}_u^-$ инвариантно относительно σ) и поэтому $y-\sigma(y)\in\mathfrak{H}_u^-$. Так как $y\in\mathfrak{G}^{-\alpha}$, $\sigma(y)\in\mathfrak{G}^\alpha$ и сумма подпространств $\mathfrak{G}^\alpha$, $\mathfrak{G}^{-\alpha}$, $\mathfrak{H}_u^-$ прямая, то $y=\sigma(y)=0$. Наконец, $x+\sigma(x)=x+\tau(x)\in\in\mathfrak{G}_0\cap\mathfrak{G}_u=\mathfrak{P}_0$. Лемма доказана.

Для доказательства теоремы положим $\mathfrak{N} = \sum_{\alpha \in \Sigma'} \mathfrak{G}^{\alpha}$ и $\mathfrak{N}' = \sum_{\alpha \in \Sigma'} \mathfrak{G}^{-\alpha}$. Если $\alpha \in \Sigma'$, то $\bar{\alpha} \in \Sigma'$, так как $\bar{\alpha}$, $\bar{\bar{\alpha}} = \alpha > 0$. Следовательно, подпространства $\mathfrak{N}$ и $\mathfrak{N}'$ инвариантны относительно инволюции σ. С другой стороны, $\tau(\mathfrak{N}) = \mathfrak{N}'$. Подпространство $\mathfrak{N}$, будучи инвариантным относительно σ, порождается над C пересечением $\mathfrak{N}_0 = \mathfrak{N} \cap \mathfrak{G}_0$. Докажем, что

$$\mathfrak{G}_0 = \mathfrak{P}_0 \oplus i\mathfrak{H}_u^- \oplus \mathfrak{N}_0. \tag{6}$$

Прежде всего, сумма в правой части прямая, так как если $k + h + n = 0$, то, применяя τ, получаем $k - h + \tau(n) = 0$, откуда $2h + n - \tau(n) = 0$ и, поскольку $h \in \mathfrak{H}$, $n \in \mathfrak{N}$, $\tau(n) \in \mathfrak{N}'$ и сумма подпространств $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{N}'$ прямая, $h = n = 0$; следовательно, и $k = 0$. Далее, пространство $\mathfrak{G}_0$ порождено над R подпространством $\mathfrak{H} \cap \mathfrak{G}_0 = \mathfrak{H}_u^+ + i\mathfrak{H}_u^- \subset \mathfrak{P}_0 + i\mathfrak{H}_u^-$ и элементами $y = x + \sigma(x)$, $x \in \mathfrak{G}^{\alpha}$. Если $\bar{\alpha} = -\alpha$, то $x + \sigma(x)$ лежит в $\mathfrak{P}_0$ в силу леммы 2. Если $\alpha \in \Sigma'$, то $y \in \mathfrak{G}^{\alpha} + \mathfrak{G}^{\bar{\alpha}} \subset \mathfrak{N}$ и, поскольку $y \in \mathfrak{G}_0$, $y \in \mathfrak{N}_0$. Если же $\alpha \in -\Sigma'$, то $\tau(y) \in \mathfrak{G}^{-\alpha} + \mathfrak{G}^{-\bar{\alpha}} \subset \mathfrak{N}$ и $y + \tau(y) \in \mathfrak{P}_0$, откуда $y \in \mathfrak{P}_0 + \mathfrak{N}_0$.

Положим теперь $\mathfrak{L}_0 = i\mathfrak{H}_u^- + \mathfrak{N}_0$. Тогда $\mathfrak{G}_0 = \mathfrak{P}_0 \oplus \mathfrak{L}_0$ [1]).

Приложение

Опишем кратко, как из теоремы 2 можно вывести соответствующую *теорему разложения для групп Ли*. Пусть G, G_0, G_u — присоединенные группы (вещественных) алгебр Ли $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{G}_0$, $\mathfrak{G}_u$ соответственно. Группы G_0 и G_u можно считать вложенными в группу G, так как автоморфизмы алгебр $\mathfrak{G}_0$ и $\mathfrak{G}_u$ однозначно продолжаются по линейности (над C) в автоморфизмы алгебры $\mathfrak{G}$ и так как автоморфизмы из группы G сохраняют комплексную структуру пространства $\mathfrak{G}$. Формула $\operatorname{ad}\sigma(g) = \sigma \circ \operatorname{ad} g \circ \sigma^{-1}$ определяет инволютивный автоморфизм группы G, множество неподвижных точек которого [2]) совпадает с G_0. Аналогичным образом определяется автоморфизм τ, множество неподвижных точек которого [2])

---

[1]) Легко видеть, что $\mathfrak{N}$ — нильпотентная подалгебра. С другой стороны, $[\mathfrak{L}_0, \mathfrak{L}_0] \subset \mathfrak{N}$. Отсюда следует, что $\mathfrak{L}_0$ — разрешимая подалгебра. — *Прим. перев.*

[2]) Во всяком случае, связная компонента этого множества. — *Прим. перев.*

совпадает с G_u. Отсюда, в частности, следует, что G_0 и G_u — замкнутые подгруппы группы G. Всякое дифференцирование полупростой алгебры $\mathfrak{G}$ внутреннее, поэтому группа G совпадает со связной компонентой группы всех автоморфизмов алгебры $\mathfrak{G}$ и, в частности, замкнута в группе линейных преобразований пространства $\mathfrak{G}$. Таким образом, G_0 и G_u — замкнутые линейные группы. Так как группа G_u сохраняет положительно определенную эрмитову форму $-B(x, \tau(x))$, то она компактна, так же как и группа $G_0 \cap G_u$. Пусть K — связная компонента единицы группы $G_0 \cap G_u$. Это компактная группа, алгеброй Ли которой служит $\mathfrak{P}_0$. Наконец, обозначим через N разрешимую подгруппу группы G_0, соответствующую подалгебре $\mathfrak{N}_0 + i\mathfrak{H}_u^- = \mathfrak{L}_0$.

Преобразования из $\operatorname{ad}\mathfrak{L}_0$ записываются в базе Вейля $\{E_{-\rho}, \ldots, E_{-\alpha_1}, H_1, \ldots, H_r, E_{\alpha_1}, \ldots, E_\rho\}$ треугольными матрицами с вещественной диагональю, так как, во-первых, пространство $i\mathfrak{H}_u^-$ порождено над R множеством $V^+ \subset \mathfrak{H}_0$ и $\alpha(V^+) \subset Q$ для всякого корня α и, во-вторых, преобразования из $\operatorname{ad}(\mathfrak{N})$ записываются в этом базисе треугольными матрицами с нулями на главной диагонали. Отсюда следует, что экспоненциальное отображение определяет гомеоморфизм алгебры $\mathfrak{L}_0$ на группу N. Поэтому N — односвязная разрешимая группа. Пересечение $N \cap K$ состоит только из единицы. Действительно, в упомянутой базе Вейля матрицы преобразований из K унитарны[1]), как легко убедиться, вычислив $B(x, \tau(x))$ [см. (5)]. Всякая матрица, унитарная и треугольная одновременно, должна быть диагональной; если к тому же у нее на диагонали стоят положительные вещественные числа, то она равна единичной матрице.

Докажем, что $G_0 = K \cdot N$, т. е. что всякий элемент $g \in G_0$ единственным образом представляется в виде $g = k \cdot n$, где $k \in K$, $n \in N$. Касательное пространство в точке e группы K совпадает с $\mathfrak{P}_0$, в то время как касательное пространство в точке e группы N совпадает с $\mathfrak{L}_0$. Следовательно, касательное пространство к многообразию $K \times N$ в точке (e, e) естественным образом отождествляется с прямой суммой $\mathfrak{P}_0 \oplus \mathfrak{L}_0$. Легко видеть, что главная линейная часть отобра-

[1]) Это верно, если только $\{H_1, \ldots, H_r\}$ — ортонормированная база пространства $\mathfrak{H}_0$. — *Прим. перев.*

жения $(g, g') \to gg'$ многообразия $G_0 \times G_0$ в группу G_0 в точке (e, e) задается формулой $(\alpha, \beta) \to \alpha + \beta$. Следовательно, отображение $(k, n) \to kn$ многообразия $K \times N$ в группу G_0 индуцирует в точке (e, e) изоморфизм касательных пространств. Теорема о неявных функциях показывает тогда, что существуют такая окрестность U единицы группы K и такая окрестность V единицы группы N, что ограничение на $U \times V$ упомянутого отображения $K \times N$ в G_0 является гомеоморфизмом. Значит, существуют такие окрестности $U_1 \subset U$ и $V_1 \subset V$ и такие непрерывные функции $k^0 : N \times \times K \to K$ и $n^0 : N \times K \to N$, что

$$n \cdot k = k^0(n, k)\, n^0(n, k) \tag{7}$$

для всяких $k \in U_1$, $n \in V_1$.

Пусть $S = \{k_1, \ldots, k_p\}$ — совокупность элементов из U_1. Построим такую окрестность $V(S) \subset V_1$ и такие непрерывные функции n^S и k^S, что

$$n \cdot k(S) \cdot k = k^S(n, k)\, n^S(n, k) \tag{8}$$

для всех $k \in U_1$, $n \in V(S)$, где $k(S) = k_1 \ldots k_p$. Построение проведем индукцией по p. Случай $p = 0$ сводится к формуле (7). Пусть $S' = \{k_0\} \cup S$. Тогда $k(S') = k_0 k(S)$ и

$$nk(S')\, k = nk_0 k(S)\, k = k^0(n, k_0)\, n^0(n, k_0)\, k(S) \cdot k \tag{9}$$

для всех $n \in V_1$. Из единственности разложения (7) следует, что $n^0(e, k_0) = e$. Поэтому существует такая окрестность $V(S') \subset V_1$, что $n^0(n, k_0) \in V(S)$, как только $n \in V(S')$. Получаем

$$n \cdot k(S') \cdot k = k^0(n, k_0)\, k^S(n^0(n, k_0), k)\, n^S(n^0(n, k_0), k)$$

для всех $n \in V(S')$. Формула (8) доказана.

Используем теперь компактность группы K. Существует такое конечное число наборов S, что $k = \bigcup\limits_S k(S)\, U_1$. При $n \in \bigcap\limits_S V(S) = V_2$ и $k \in K$ из (8) следует, что $nk \in K \cdot N$. Пусть, далее, $T = \{n_1, \ldots, n_q\}$ — совокупность элементов из V_2 и $n(T) = n_1 \ldots n_q$. Докажем, что $n(T) \cdot k \in K \cdot N$.

Случай $q=1$ уже разобран. Если теперь $T'=\{n_0\}\cup T$, то $n(T')=n_0 n(T)$ и

$$n(T')\cdot k = n_0 n(T)\cdot k \in n_0 K\cdot N.$$

Так как $n_0 K \subset K\cdot N$, то $n(T')\cdot k \in K\cdot N$.

Связная группа N порождается окрестностью V_2 единицы. Следовательно, $N\cdot K \subset K\cdot N$.

Теперь нетрудно доказать, что $K\cdot N = H$ — подгруппа группы G_0. С другой стороны, $K\cdot N$ содержит множество $U_1\cdot V_1$, являющееся окрестностью единицы в группе G_0. Так как группа G_0 связна, то $H=G_0$. Единственность разложения вытекает из того, что $K\cap N=\{e\}$.

Глава 10

КЛАССИФИКАЦИЯ ПРОСТЫХ АЛГЕБР ЛИ[1])

М. Берже, П. Картье

1. Вступление

Пусть $\mathfrak{G}$ — простая алгебра Ли над алгебраически замкнутым полем K характеристики 0, $\mathfrak{H}$ — ее подалгебра Картана, Π — система простых корней алгебры $\mathfrak{G}$ относительно $\mathfrak{H}$ и V — векторное пространство над полем Q рациональных чисел, порожденное корнями в пространстве, дуальном к $\mathfrak{H}$. Известно (см. гл. 8), что в пространстве V форма Киллинга принимает рациональные значения и положительно определена и что система Π обладает следующими свойствами:

1) Π — линейно независимая система векторов;

2) если α, β — различные элементы из Π, то $a_{\alpha\beta} = -2\langle\alpha, \beta\rangle/\langle\alpha, \alpha\rangle$ — целое и неотрицательное число;

3) не существует такого разбиения Π на два непустых подмножества: $\Pi = \Pi' \cup \Pi''$, что всякий вектор из Π' ортогонален ко всякому вектору из Π''.

Известно также, что система Π однозначно определяет систему Δ ненулевых корней, по которой в свою очередь алгебра $\mathfrak{G}$ восстанавливается с точностью до изоморфизма. Проблема классификации простых алгебр Ли приводится, таким образом, к нахождению всех систем Π векторов евклидова пространства, удовлетворяющих условиям 1) — 3). Из условия 2) следует, что на векторном пространстве над Q, порожденном множеством Π, скалярное произведение принимает рациональные значения. Свойства 1) — 3) системы Π сохраняются при подобии, однако из семейства подобных

---

[1]) Первоначально сообщение на эту тему сделал на нашем семинаре М. Берже, следуя методу классификации Ван-дер- Вардена [6]. Ввиду того что этот метод применим только к комплексному случаю и непригоден для хорошего письменного изложения, П. Картье сделал второе сообщение на ту же тему, основываясь на методе Дынкина [19]. Именно этод метод и воспроизведен в настоящей главе.

систем только одна может быть системой простых корней алгебры Ли. Действительно, по системе Π определяется система Δ ненулевых корней, в которой должно выполняться соотношение $\langle\alpha, \beta\rangle = \sum\limits_{\gamma} \langle\gamma, \alpha\rangle\langle\gamma, \beta\rangle$. Из этого соотношения находится единственно возможный коэффициент подобия.

Будем называть систему Π векторов евклидова пространства *допустимой*, если она удовлетворяет условиям 1) и 2), и *связной*, если она удовлетворяет, сверх того, условию 3)[1]).

2. Отыскание связных допустимых систем

Через $|v|$ мы будем обозначать длину вектора v, т. е. $|v|^2 = \langle v, v\rangle$.

Пусть Π — допустимая система, α, β — различные элементы из Π, не ортогональные друг другу, и θ — угол между ними.

Имеем

$$0 < a_{\alpha\beta}\, a_{\beta\alpha} = 4\frac{\langle\alpha, \beta\rangle^2}{|\alpha|^2\,|\beta|^2} = 4\cos^2\theta < 4.$$

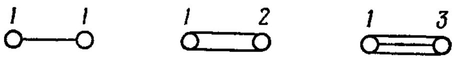
Следовательно, наименьшее из целых положительных чисел $a_{\alpha\beta}$, $a_{\beta\alpha}$ равно единице, т. е. $\sup(|\alpha|^2, |\beta|^2) = -2\langle\alpha, \beta\rangle$. Допустим для определенности, что $|\alpha| \geqslant |\beta|$. Тогда $a_{\alpha\beta} \leqslant a_{\beta\alpha}$ и $|\alpha|^2/|\beta|^2 = a_{\beta\alpha}/a_{\alpha\beta} = 4\cos^2\theta$. Возможны 3 случая: $4\cos^2\theta = 1, 2, 3$; соответственно этому $\pi - \theta = \pi/3, \pi/4, \pi/6$.

Условимся каждой системе Π сопоставлять *схему* S, получаемую следующим образом: каждый элемент $\alpha \in \Pi$ изображается точкой плоскости с числовой отметкой $\langle\alpha, \alpha\rangle$; две различные точки соединяются затем одной, двумя или тремя черточками в зависимости от числа $4\cos^2\theta$, т. е. от квадрата отношения длин соответствующих векторов. *Порядком* схемы называется число элементов системы Π. Схемы, соответствующие допустимым системам Π, называются *допустимыми*. Очевидно, что две точки схемы не соединены между

[1]) A priori не ясно, всякая ли связная допустимая система Π является (с точностью до подобия) системой простых корней некоторой простой алгебры Ли. Нетрудно, однако, доказать, что это так. Для этого по системе Π строится сначала система Δ корней, удовлетворяющая условию предложения 3 гл. 8, затем подбираются числа $N_{\alpha,\beta}$, удовлетворяющие условиям (25) — (27) гл. 8, и операция коммутирования задается формулами (21) — (24) гл. 8. — *Прим. перев.*

собой черточками тогда и только тогда, когда соответствующие векторы системы П ортогональны; поэтому связность системы П равносильна связности ее схемы. Если схема S допустима, то при стирании в ней части точек и черточек, связывающих эти точки друг с другом и с остальными точками, получается снова допустимая схема. Действительно, эта операция соответствует взятию некоторой (быть может, не связной) подсистемы системы П, которая будет допустима, так как свойства 1) и 2) наследственны.

Из связных схем порядка 2 допустимы лишь следующие [1]):



Исследуем вопрос о характере связей в допустимых схемах, не обращая пока внимания на коэффициенты.

А) *В допустимой схеме порядка n имеется не более чем $n-1$ связанных пар точек.*

Положим $x=\sum\limits_{\alpha\in\Pi}\alpha/|\alpha|$. Известно, что $\langle\alpha, \beta\rangle\leqslant 0$ для различных α, β; если α и β не ортогональны, то $4\cos^2\theta$ — целое положительное число, так что $4\cos^2\theta\geqslant 1$ и $2\langle\alpha, \beta\rangle/|\alpha|\,|\beta|\leqslant -1$. Если бы в системе П было более чем $n-1$ не ортогональных пар векторов, то

$$|x|^2=\sum_{\alpha}\frac{|\alpha|^2}{|\alpha|^2}+2\sum_{\alpha\neq\beta}\frac{\langle\alpha, \beta\rangle}{|\alpha|\,|\beta|}\leqslant n-n=0,$$

откуда $x=0$, что противоречило бы линейной независимости векторов из П.

Отсюда следует, что *допустимая схема не может содержать замкнутых циклов.*

В самом деле, такой цикл сам должен был бы быть допустимой схемой, но ясно, что его порядок равен числу связанных пар элементов.

Далее, *если S' — связная подсхема допустимой схемы S и $\alpha\notin S'$, то элемент α связан не более чем с одним элементом из S'.* Для доказательства предположим, что α связан с двумя элементами β и γ подсхемы S'. Так как схема S' связна, то существует последовательность

[1]) С точностью до подобия. — *Прим. перев.*

$\beta_0 = \beta$, $\beta_1, \ldots, \beta_n = \gamma$ элементов из S', в которой каждые два соседних элемента связаны. Подсхема схемы S, образованная элементами α и β_i, содержит $n+2$ элемента и по меньшей мере столько же связанных пар, что невозможно.

Если $S' \neq S$ и схема S связна, то существует по крайней мере один элемент $\alpha \notin S'$, связанный с S'. По доказанному элемент α связан только с одним элементом из S'.

Б) *Из точки допустимой схемы исходит не более трех черточек.*

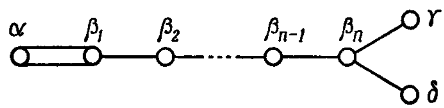
Пусть $\alpha \in \Pi$ и β_i — элементы, связанные с α. При $i \neq j$ элементы β_i и β_j не связаны между собой, так как иначе элементы α, β_i, β_j образовали бы цикл. Следовательно, при $i \neq j$ векторы β_i и β_j ортогональны. Пусть γ — вектор, ортогональный ко всем β_i и лежащий в подпространстве, порожденном векторами α и β_i. Обозначим через θ_0 угол между α и γ, через θ_i — угол между α и β_i. По теореме Пифагора $\cos^2\theta_0 + \sum\limits_i \cos^2\theta_i = 1$. Так как векторы α и β_i линейно независимы, то вектор α не ортогонален γ и $\cos\theta_0 \neq 0$. Отсюда вытекает, что $\sum\limits_i 4\cos^2\theta_i < 4$, что и требовалось доказать.

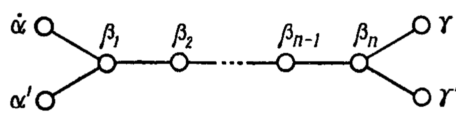
Из доказанного следует, что *связная допустимая схема порядка $\geqslant 3$ не содержит тройных связей*. Действительно, если элементы α и β связаны тремя черточками, то ни из элемента α, ни из элемента β не может больше исходить ни одной черточки. В случае если схема связна, это означает, что она не содержит никаких элементов, кроме α и β, и поэтому не может иметь порядок $\geqslant 3$.

В) *Цепью C* называется последовательность $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1}$ точек схемы S, в которой единственными связями являются связи между α_i и α_{i+1} $(1 \leqslant i \leqslant n)$. Цепь C называется *однородной*, если все связи в ней простые. Всякая цепь C связна, поэтому любой элемент $\beta \notin C$ связан не более чем с одним элементом из C. Образуем новую схему S', сливая все точки из C в одну точку, которую будем считать связанной с элементом $\beta \notin C$ p-кратной связью, если β связан в схеме S p-кратной связью с элементом из C. Если схема S допустима и цепь C однородна, то и схема S' допустима. Для доказательства рассмотрим систему Π', составленную из всех векторов системы Π, не входящих в цепь C, и из вектора $\sum\limits_{i=1}^{n+1} \alpha_i = \alpha$. Схема S' соответствует как раз системе Π', так как если $\beta \notin C$ и β связан с α_i, то вектор β ортогонален ко всем векторам из C, отличным от α_i, и $\langle\beta, \alpha\rangle = \langle\beta, \alpha_i\rangle$; с другой стороны, $|\alpha|^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} (\langle\alpha_i, \alpha_i\rangle + 2\langle\alpha_i, \alpha_{i+1}\rangle) + |\alpha_{n+1}|^2 = |\alpha_{n+1}|^2 = |\alpha_j|^2$ при всяком j. Ясно, что условие 2) для Π' соблюдается; выполнение условия 1) очевидно, т. е. система Π', а значит, и схема S' — допустимы.

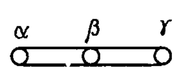
В качестве следствия получаем, что схемы

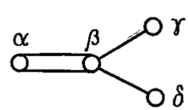
(a_K) 

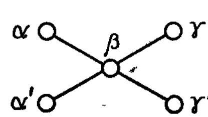
(b_K) 

(c_K) 

не допустимы, так как описанным выше способом из них получаются схемы

(a_1) 

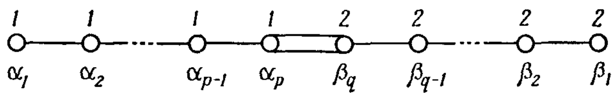
(b_1) 

(c_1) 

в каждой из которых из точки β исходит более трех черточек.

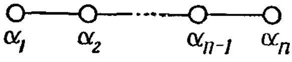
Г) Разобьем все связные допустимые схемы порядка $\geqslant 3$ на три класса.

Как было доказано, такие схемы не содержат тройных связей. Пусть схема S содержит *двойную связь*, т. е. подсхему, изображаемую двумя кружками, которые соединены двумя горизонтальными линиями. Продолжим эту подсхему до максимальной цепи C. Цепь C содержит только одну двойную связь: в противном случае она содержала бы подсхему типа (a_k). Если $C \neq S$, то, согласно А), существует элемент $\beta \notin C$, связанный с одним и только одним элементом из C. Этот последний элемент не может быть крайним элементом цепи C в силу ее максимальности; но тогда в S содержится подсхема типа (b_k), что невозможно. Итак, S имеет вид (при подходящем выборе единицы измерения)

$'_{p,q})$ 

$p, q \geqslant 1$

Пусть теперь *все связи в схеме S простые и из каждой точки исходит не более двух черточек.* Возьмем какую-нибудь максимальную цепь C в схеме S. Если $C \neq S$, то существует элемент $\beta \notin C$, связанный с одним и только одним элементом из C. Этот последний элемент не может быть крайним элементом цепи C ввиду ее максимальности; он не может быть также никаким другим элементом из C, поскольку из каждой точки схемы S исходит по предположению не более двух черточек. Полученное противоречие доказывает, что схема S имеет вид

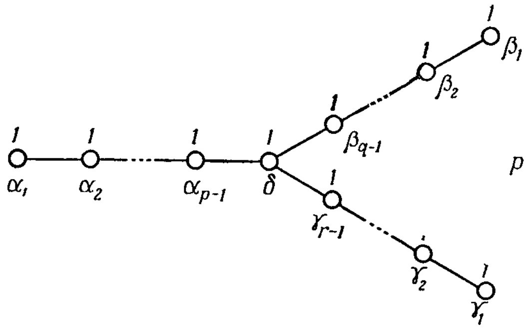
(b'_n) 

$n \geqslant 1$

Пусть, наконец, *все связи в S простые, но существует точка, связанная с тремя другими.* Тогда в S содержится подсхема, изображаемая „звездой“ с тремя лучами.

Дополним ее до максимальной „звезды" E с тремя лучами. Если $E \neq S$, то существует элемент $\beta \notin E$, связанный с одной и только одной точкой из E, которая не может быть крайней в силу максимальности E и не может быть никакой другой точкой из E, так как иначе в S содержалась бы подсхема типа (c_k). Таким образом, $E = S$ и схема S имеет вид

$(c'_{p,q,r})$



$p \geq q \geq r \geq 2$

Д) Пусть цепь $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ образована векторами одинаковой длины; пусть $|\alpha_i|^2 = a$ и $\alpha = \sum_{i=1}^{n} i\alpha_i$. Тогда

$$|\alpha|^2 = \sum_{i=1}^{n} i^2 |\alpha_i|^2 + 2 \sum_{i=1}^{n-1} i(i+1)\langle \alpha_i, \alpha_{i+1}\rangle =$$

$$= n^2 a - \sum_{i=1}^{n-1} ia = n(n+1)a/2.$$

В схеме $a'_{p,q}$ положим $\alpha = \sum_i i\alpha_i$, $\beta = \sum_j jb_j$. Тогда $|\alpha|^2 = p(p+1)/2$, $|\beta|^2 = q(q+1)$ и $\langle \alpha, \beta \rangle = pq\langle \alpha_p, \beta_q \rangle = -pq$. Векторы α и β не коллинеарны, и для них должно выполняться неравенство Шварца $\langle \alpha, \beta\rangle^2 < |\alpha|^2 |\beta|^2$. Отсюда $pq < (p+1)(q+1)/2$ или $(p-1)(q-1) < 2$. Возможны только следующие случаи: $p = 1$, q произвольно; $q = 1$,

p произвольно; $p=q=2$. Соответствующие схемы обозначаются через B_{q+1}, C_{q+1}, F_4.

Схема (b_n') обозначается через A_n.

Наконец, в схеме $c'_{p,q,r}$ положим $\alpha=\sum_i i\alpha_i$, $\beta=\sum_j j\beta_j$, $\gamma=\sum_k k\gamma_k$ и вычислим углы, образуемые этими векторами с вектором δ. Так же как и в Б), показывается, что сумма квадратов косинусов этих углов должна быть меньше 1 (векторы α, β, γ ортогональны друг к другу). Для вектора α имеем $|\alpha|^2=p(p-1)/2$, $|\delta|^2=1$, $\langle\alpha, \delta\rangle=-\frac{p-1}{2}$, откуда $\cos^2\theta=(1-p^{-1})/2$. Аналогично вычисляются другие углы. Таким образом, должно быть $(1-p^{-1}+1-q^{-1}+$ $+1-r^{-1})/2<1$ или $p^{-1}+q^{-1}+r^{-1}>1$. Так как $p\geqslant q\geqslant r$, то $p^{-1}\leqslant q^{-1}\leqslant r^{-1}$ и $3r^{-1}>1$. Следовательно, $r=2$. Далее, $p^{-1}+q^{-1}>1/2$, откуда $2q^{-1}>1/2$, т. е. $q<4$. Возможны два случая: либо $q=2$, а p произвольно, либо $q=3$ и $3\leqslant p<6$. Соответствующие схемы обозначаются через D_{p+2} и E_{p+3}.

Схема порядка 2 с тройной связью обозначается через G_2.

Итак, *все связные допустимые схемы находятся среди схем* A_n, B_n, C_n, D_n, G_2, F_4, E_6, E_7, E_8 (см. таблицу в конце главы).

3. Построение связных допустимых систем

Осталось доказать, что действительно существуют связные допустимые системы со схемами выделенных типов.

Пусть R^{n+1} — $(n+1)$-мерное евклидово пространство, $\{e_i\}$ — его ортонормированная база и $\breve{E}^n$ — подпространство, ортогональное к вектору $s=\sum_{i=1}^{n+1} e_i$. Обозначим через $\bar{e}_i$ ортогональную проекцию вектора e_i на подпространство $\breve{E}^n$. Если $\bar{x}$ — ортогональная проекция вектора $x=\sum a_ie_i$ на $\breve{E}^n$, то

$$|\bar{x}|^2=|x|^2-\frac{\langle x, s\rangle^2}{\langle s, s\rangle}=\sum a_i^2-\left(\sum a_i\right)^2\Big/(n+1).$$

Положим $\alpha_i = e_i - e_{i+1}$. Тогда

$$\langle\alpha_i, \alpha_j\rangle = \begin{cases} 2, & |i-j| = 0 \\ -1, & |i-j| = 1 \\ 0, & |i-j| \geqslant 2 \end{cases} \quad (i, j = 1, \ldots, n).$$

Следовательно, векторы α_i образуют систему типа A_n.

Рассмотрим теперь систему, образованную векторами $\alpha_i (1 \leqslant i \leqslant n-1)$ и e_n. Так как

$$\langle\alpha_i, e_n\rangle = \begin{cases} -1 & \text{при} \quad i = n-1, \\ 0 & \text{при} \quad i < n-1 \end{cases}$$

и $|e_n|^2 = 1$, то это система типа B_n. Точно так же векторы $\alpha_i (1 \leqslant i \leqslant n-1)$ и $2e_n$ образуют систему типа C_n. Наконец,

$$\langle\alpha_i, e_{n-1} + e_n\rangle = \begin{cases} -1 & \text{при} \quad i = n-2, \\ 0 & \text{при} \quad i \neq n-2 \end{cases}$$

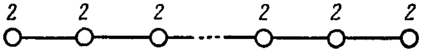
и $|e_{n-1} + e_n|^2 = 2$, так что векторы $\alpha_i (1 \leqslant i \leqslant n-1)$ и $e_{n-1} + e_n$ образуют систему типа D_n.

Осталось рассмотреть 5 особых систем. Для построения системы типа G_2 возьмем в R^3 векторы α_1, $3\overline{e}_2$. Очевидно, что $|\alpha_1|^2 = 2$, $|3\overline{e}_2|^2 = 9 - 3 = 6$, $\langle\alpha_1, 3\overline{e}_2\rangle = 3\langle\alpha_1, e_2\rangle = -3$. Систему типа F_4 можно получить, добавив к системе B_3, т. е. к α_1, α_2, e_3, вектор $\frac{1}{2}(e_4 - e_1 - e_2 - e_3) = \beta$, так как β ортогонален к α_1 и α_2, $|\beta|^2 = 1$ и $\langle e_3, \beta\rangle = -\frac{1}{2}$. В качестве системы типа E_n можно взять систему A_{n-1}, дополненную вектором $-(\overline{e}_1 + \overline{e}_2 + \overline{e}_3) + e_{n+1}(9n^{-1} - 1)^{1/2} = \beta$ ($\overline{e}_i$ — проекция e_i на $\breve{E}^{n-1} \subset R^n$). В самом деле,

$|\beta|^2 = 9n^{-1} - 1 + |\overline{e}_1 + \overline{e}_2 + \overline{e}_3|^2 = 9n^{-1} - 1 + 3 - 9n^{-1} = 2$; вектор β ортогонален ко всем векторам α_i, исключая α_3, и $\langle\beta, \alpha_3\rangle = -\langle e_3, \alpha_3\rangle = -1$.

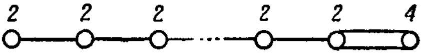
Теорема. *Всякая система векторов евклидова пространства, удовлетворяющая условиям* 1) — 3) п. 1, *подобна одной из систем* A_n, B_n, C_n, D_n, E_n, F_4, G_2, *данных в следующей таблице*:

A_n

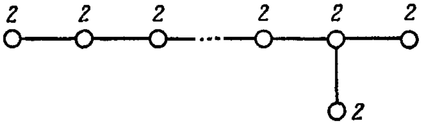


B_n

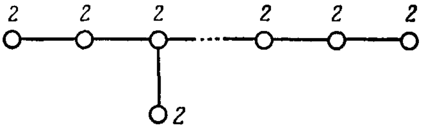
C_n



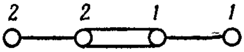
D_n



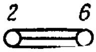
E_n



F_4



G_2



$$\Pi(A_n) = (e_1 - e_2,\ \ldots,\ e_n - e_{n+1}), \qquad n \geqslant 1,$$
$$\Pi(B_n) = (e_1 - e_2,\ \ldots,\ e_{n-1} - e_n,\ e_n), \qquad n \geqslant 2,$$
$$\Pi(C_n) = (e_1 - e_2,\ \ldots,\ e_{n-1} - e_n,\ 2e_n), \qquad n \geqslant 3,$$
$$\Pi(D_n) = (e_1 - e_2,\ \ldots,\ e_{n-1} - e_n,\ e_{n-1} + e_n), \quad n \geqslant 4,$$
$$\Pi(E_n) = \Big(e_1 - e_2,\ \ldots,\ e_{n-1} - e_n,$$
$$-(\bar{e}_1 + \bar{e}_2 + \bar{e}_3) + e_{n+1}\left(\frac{9}{n} - 1\right)^{1/2}\Big), \qquad 6 \leqslant n \leqslant 8\ ^{1)},$$

---

1) $\bar{e}_i = e_i - \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} e_k$. — *Прим. перев.*

$$\Pi(F_4) = \left(e_1 - e_2,\ e_2 - e_3,\ e_3,\ \frac{1}{2}(e_4 - e_1 - e_2 - e_3)\right),$$

$$\Pi(G_2) = (e_1 - e_2,\ 3\overline{e}_2)\ ^{1)}.$$

В следующей главе будут построены простые алгебры Ли типов A_n, B_n, C_n, D_n и G_2.

---

[1]) $3\overline{e}_2 = 2e_2 - e_1 - e_3$. — *Прим. перев.*

Глава 11

ПОСТРОЕНИЕ ПРОСТЫХ АЛГЕБР ЛИ

М. Берже

Целью настоящей главы является явное построение простых алгебр Ли, системы простых корней которых отвечают схемам типов A_n, B_n, C_n, D_n и G_2.

1. Алгебры типа A_n

Пусть V — m-мерное векторное пространство над алгебраически замкнутым полем K характеристики 0, V^* — пространство, дуальное к V. Рассмотрим алгебру Ли $\mathfrak{A} = \mathfrak{Gl}(V)$ операторов в пространстве V, операция коммутирования в которой задается формулой $[A, B] = AB - BA$, и в ней идеал $\mathfrak{G}$, образованный операторами со следом 0. Докажем, что алгебра $\mathfrak{G}$ полупроста. Для этого вычислим ее форму Киллинга. Как было показано в п. 5 гл. 3, при отождествлении пространства $V \otimes V^*$ с пространством операторов в V присоединенное представление алгебры $\mathfrak{A}$ отождествляется с тензорным произведением тождественного представления алгебры $\mathfrak{A}$ и дуального к нему представления, т. е.

$$\operatorname{ad} X = X \otimes 1 - 1 \otimes {}^tX.$$

Отсюда получаем

$$(\operatorname{ad} X)^2 = X^2 \otimes 1 + 1 \otimes {}^tX^2 - 2X \otimes {}^tX$$

и

$$\operatorname{Tr}((\operatorname{ad} X)^2) = 2\operatorname{Tr}(X^2)\operatorname{Tr}(1) - 2(\operatorname{Tr}(X))^2,$$

так как X и ${}^tX$ имеют одинаковый след. Поляризация дает тогда

$$B(X, Y) = 2m \operatorname{Tr}(XY) - 2\operatorname{Tr}(X) \cdot \operatorname{Tr}(Y). \tag{1}$$

Так как $\mathfrak{G}$ — идеал в $\mathfrak{A}$, то форма Киллинга алгебры $\mathfrak{G}$ индуцируется формой Киллинга алгебры $\mathfrak{A}$. Если бы форма Киллинга в алгебре $\mathfrak{G}$ была вырожденной, то существовал бы такой элемент $X \in \mathfrak{G}$, что $B(X, Y) = 0$ для всех $Y \in \mathfrak{G}$, т. е. $\operatorname{Tr}(XY)=0$ для всех операторов Y со следом 0. Это возможно, только если $X=a\cdot 1$, но $0=\operatorname{Tr}(X)=ma$, так что $a=0$ и $X=0$. Итак, алгебра $\mathfrak{G}$ *полупроста*.

Пусть $\{v_i\}$ — база пространства V, $\{w_i\}$ — дуальная база пространства V^*, E_{ij} — оператор, соответствующий элементу $v_i\otimes w_j\in V\otimes V^*$. Обозначим через $\mathfrak{H}$ коммутативную подалгебру алгебры $\mathfrak{G}$, образованную операторами, диагональными в базе $\{v_i\}$. Если $h_{ii}=e_i(H)$ — элемент с индексами (i,i) матрицы оператора $H\in\mathfrak{H}$, то $Hv_i=e_i(H)v_i$ и $Hw_i=e_i(H)w_i$, откуда $\operatorname{ad}H\cdot E_{ij}=Hv_i\otimes w_j-v_i\otimes{}^tHw_j=(e_i(H)-e_j(H))E_{ij}$. Это показывает, что оператор $\operatorname{ad}H$ полупростой и что $\operatorname{ad}H\cdot E_{ij}\neq 0$ при $i\neq j$, если только никакая из форм e_i-e_j, $i\neq j$, не обращается на H в 0 (такие операторы H существуют, так как существует диагональная матрица со следом 0, все диагональные элементы которой различны). Следовательно, $\mathfrak{H}$ — подалгебра Картана алгебры $\mathfrak{G}$ и система корней алгебры $\mathfrak{G}$ относительно $\mathfrak{H}$ образована формами e_i-e_j.

Положим $\alpha_i=e_i-e_{i+1}$ и $H_i'=E_{ii}-E_{i+1,\,i+1}$. Из формулы (1) получается, что на $\mathfrak{G}$

$$B(X,\,Y)=2m\operatorname{Tr}(XY).\tag{2}$$

Поэтому

$$\alpha_i(H)=\operatorname{Tr}\left(HH_i'\right)=(1/2m)\,B\left(H,\,H_i'\right)$$

и

$$\langle\alpha_i,\,\alpha_j\rangle=(1/4m^2)\,B\left(H_i',\,H_j'\right)=(1/2m)\operatorname{Tr}\left(H_i'H_j'\right),$$

откуда

$$\langle\alpha_i,\,\alpha_j\rangle=\begin{cases}0, & \text{если } |i-j|>1,\\ -1/2m, & \text{если } |i-j|=1,\\ 2/2m, & \text{если } |i-j|=0.\end{cases}\tag{3}$$

Так как всякий корень является линейной комбинацией корней α_i с целыми коэффициентами одного знака ($e_i-e_j=\alpha_i+\alpha_{i+1}+\ldots+\alpha_{j-1}$, если $i<j$, и $e_i-e_j=-(e_j-e_i)=-(\alpha_j+\alpha_{j+1}+\ldots+\alpha_{i-1})$, если $i>j$), то корни α_i образуют систему простых корней (см. лемму в добавлении к этой главе). Формулы (3) показывают, что это система простых корней типа A_n, причем $m=n+1$ ($n\geqslant 1$).

2. Алгебры типа C_n

В обозначениях п. 1 пусть (x, y) — невырожденная кососимметрическая билинейная форма на V. Всякая линейная форма на V имеет вид $x \to (x, y)$; это дает изоморфизм N пространства V на V^*. При изоморфизме N оператору ${}^tX$ в пространстве V^* соответствует оператор X^* в пространстве V, определяемый формулой $(Xx, y) = (x, X^*y)$; N индуцирует также изоморфизм пространства $V \otimes V$ на пространство $V \otimes V^*$ или $\mathfrak{Gl}(V)$, при котором элементу $x \otimes y$ соответствует оператор $U: a \to x(a, y)$. Очевидно, что $(a, U^*b) = (Ua, b) = -(a, y)(b, x)$, откуда $U^*b = -y(b, x)$, так что оператор U^* соответствует элементу $-y \otimes x \in V \otimes V$. Итак, отображению $U \to -U^*$ в пространстве $\mathfrak{Gl}(V)$ отвечает каноническая симметрия S пространства $V \otimes V$.

Множество $\mathfrak{G}$ таких операторов X, что $X^* = -X$, является подалгеброй алгебры Ли $\mathfrak{Gl}(V)$. В пространстве $V \otimes V$ множеству $\mathfrak{G}$ соответствует подпространство W, образованное симметрическими элементами. Оператор $\frac{1}{2}(1 + S)$ проектирует пространство $V \otimes V$ на W. При $X \in \mathfrak{G}$ эндоморфизму $\operatorname{ad} X$ отвечает оператор $X \otimes 1 - 1 \otimes X^* = X \otimes 1 + 1 \otimes X$ в пространстве $V \otimes V$. Если A — какой-либо оператор в пространстве $V \otimes V$, сохраняющий подпространство W, то его след на W равен следу оператора $\frac{1}{2}(1 + S)A$ во всем пространстве $V \otimes V$; поэтому

$$
\begin{aligned}
B(X, X) &= \operatorname{Tr}\left(\frac{1}{2}(1+S)(X \otimes 1 + 1 \otimes X)^2\right) = \\
&= \frac{1}{2}(2m \operatorname{Tr}(X^2) + 2(\operatorname{Tr}(X))^2) + \frac{1}{2}(\operatorname{Tr}(S(X^2 \otimes 1)) + \\
&\qquad + \operatorname{Tr}(S(1 \otimes X^2)) + 2\operatorname{Tr}(S(X \otimes X))). \qquad (4)
\end{aligned}
$$

Далее, $\operatorname{Tr}_{V \otimes V}(S(A \otimes B)) = \operatorname{Tr}(AB)$ для любых операторов A и B. В самом деле, достаточно проверить это равенство для операторов $A = x \otimes x^*$ и $B = y \otimes y^*$. Имеем

$$
\begin{gathered}
AB = Ay \otimes y^* = x \otimes y^* \langle y, x^* \rangle, \quad \operatorname{Tr}(AB) = \langle x, y^* \rangle \langle y, x^* \rangle, \\
A \otimes B = (x \otimes y) \otimes (x^* \otimes y^*), \\
S(A \otimes B) = S(x \otimes y) \otimes (x^* \otimes y^*) = (y \otimes x) \otimes (x^* \otimes y^*), \\
\operatorname{Tr}(S(A \otimes B)) = \langle y \otimes x, x^* \otimes y^* \rangle = \langle y, x^* \rangle \langle x, y^* \rangle = \operatorname{Tr}(AB).
\end{gathered}
$$

Отсюда следует, что $B(X, X)=(m+2)\operatorname{Tr}(X^2)+(\operatorname{Tr}(X))^2$. Далее, $\operatorname{Tr}(X^*)=\operatorname{Tr}({}^tX)=\operatorname{Tr}(X)$, и так как $X=-X^*$, то $\operatorname{Tr}(X)=0$. Окончательно после поляризации получаем

$$B(X, Y)=(m+2)\operatorname{Tr}(XY). \tag{5}$$

Докажем теперь, что форма B невырождена. Если $B(X, Y)=0$ для всех $Y\in\mathfrak{G}$, то $\operatorname{Tr}(X(A-A^*))=0$ для всех $A\in\mathfrak{Gl}(V)$, но тогда $\operatorname{Tr}((X-X^*)A)=0$ и $X=X^*$. Так как, с другой стороны, $X=-X^*$, то $X=0$. Итак, алгебра $\mathfrak{G}$ полупроста.

Для построения подалгебры Картана $\mathfrak{H}$ алгебры $\mathfrak{G}$ рассмотрим базу $\{v_i, v_{-i}\}$ $(1\leqslant i\leqslant n)$ пространства V, для которой $(v_i, v_{-i})=1$, а остальные скалярные произведения равны нулю. Подалгебру $\mathfrak{H}$ составим из таких операторов H, что $Hv_i=a_iv_i$, $Hv_{-i}=-a_iv_{-i}$. При этом положим $a_i=e_i(H)$. Алгебра $\mathfrak{G}$ обладает базой $\{F_{IJ}\}$, соответствующей базе $\{v_I\otimes v_J+v_J\otimes v_I\}$ пространства W (здесь I обозначает общий индекс вида $\pm i$). Если положить $e_{-i}=-e_i$, то $Hv_I=e_I(H)v_I$, откуда немедленно получается, что $\operatorname{ad}H\cdot F_{IJ}=(e_I(H)+e_J(H))F_{IJ}$. Это показывает, что оператор $\operatorname{ad}H$ полупрост и что из всех элементов F_{IJ} только элементы вида $F_{I,-I}$, входящие в $\mathfrak{H}$, аннулируются всеми операторами $\operatorname{ad}H$, $H\in\mathfrak{H}$. Следовательно, $\mathfrak{H}$ — подалгебра Картана и корнями алгебры $\mathfrak{G}$ относительно $\mathfrak{H}$ являются формы e_I+e_J, т. е. $\pm e_i\pm e_j$. Положим $\alpha_i=e_i-e_{i+1}$ $(1\leqslant i\leqslant n-1)$, $\alpha_n=2e_n$. Тогда всякий корень можно представить в виде линейной комбинации корней α_i с целыми коэффициентами одного знака. Действительно,

$$e_i-e_j=\begin{cases}\alpha_i+\ldots+\alpha_{j-1}; & \text{если } i<j,\\ -(\alpha_j+\ldots+\alpha_{i-1}), & \text{если } i>j,\end{cases}$$

и $e_i+e_j=(e_i-e_n)+(e_j-e_n)+2e_n$. Следовательно, корни α_i образуют фундаментальную систему корней (см. добавление). Форма Киллинга в алгебре $\mathfrak{G}$ с точностью до множителя равна $\operatorname{Tr}(XY)$. Так как $e_i(H)=\frac{1}{2}\operatorname{Tr}(HF_{i,-i})$ и $\operatorname{Tr}(F_{i,-i}F_{j,-j})=2\delta_{ij}$, то e_i попарно ортогональны и имеют одинаковую длину. Обратившись к таблице, приведенной в конце гл. 10, видим, что $\mathfrak{G}$ — алгебра типа $C_n (C_1 = A_1, C_2 = B_2)$.

3. Алгебры типов B_n и D_n

Предположим теперь, что в пространстве V задана невырожденная симметричная билинейная форма (x, y). Все рассуждения предыдущего пункта остаются в силе, если ввести в них некоторые изменения. Прежде всего $(a, U^*b) = (Ua, b) = (a, y)(b, x)$, так как форма $(\,,)$ симметрична; поэтому оператору U^* соответствует элемент $y \otimes x$ и $\mathfrak{G}$ отождествляется с подпространством A антисимметрических элементов пространства $V \otimes V$. Оператор $\frac{1}{2}(1 - S)$ проектирует $V \otimes V$ на A, так что $B(X, X) = \mathrm{Tr}_{V \otimes V} \times \left(\frac{1}{2}(1 - S)(X \otimes 1 + 1 \otimes X)^2\right) = (m - 2)\,\mathrm{Tr}(X^2)$. По-прежнему $\mathrm{Tr}(X) = 0$. Полностью сохраняется доказательство невырожденности формы B. Таким образом, алгебра $\mathfrak{G}$, составленная из операторов X, для которых $X^* = -X$, и в этом случае полупроста (если только $m > 2$).

Для построения подалгебры Картана выберем в пространстве V базу $\{v_I\}$, для которой $(v_I, v_{-I}) = 1$, а остальные скалярные произведения базисных элементов равны нулю. В качестве $\mathfrak{H}$ возьмем множество таких операторов $H \in \mathfrak{G}$, что $Hv_I = e_I(H)v_I$ $(e_I = -e_{-I})$. Подалгебра $\mathfrak{H}$ будет подалгеброй Картана, и корнями будут служить формы $e_I + e_J$ $(I \neq J)$. Алгебра $\mathfrak{G}$ обладает базой $\{G_{IJ}\}$, соответствующей базе $\{v_I \otimes v_J - v_J \otimes v_I\}$ пространства A. Далее, следует различать два случая.

а) Если размерность пространства V четна: $m = 2n$, то индекс I принимает значения $\pm 1, \pm 2 \ldots \pm n$, $e_i = -e_{-i}$, и корнями являются формы $\pm e_i \pm e_j$ $(i \neq j)$. Положим $\alpha_i = e_i - e_{i+1}$ $(1 \leqslant i \leqslant n - 1)$, $\alpha_n = e_{n-1} + e_n$. Всякий корень является линейной комбинацией этих корней с целыми коэффициентами одного знака. Действительно,

$$e_i - e_j = \begin{cases} \alpha_i + \ldots + \alpha_{j-1}, & \text{если } i < j, \\ -(\alpha_j + \ldots + \alpha_{i-1}), & \text{если } i > j, \end{cases}$$

$$e_i + e_j = (e_i - e_{n-1}) + (e_j - e_n) + (e_{n-1} + e_n).$$

Следовательно, $\{\alpha_i\}$ — фундаментальная система корней. Формы e_i попарно ортогональны и имеют одинаковую длину, что показывается так же, как и в п. 2. Отсюда видно, что $\mathfrak{G}$ — алгебра типа D_n.

б) Пространство V нечетномерно: $m=2n+1$. В этом случае следует давать индексу I значения $0, \pm 1, \ldots, \pm n$; $e_0=0$, и корнями служат формы $\pm e_i$, $\pm e_i \pm e_j$ $(i \neq j)$. Система простых корней образована формами $\alpha_i=e_i-e_{i+1}$ $(1 \leqslant i \leqslant n-1)$ и $\alpha_n=e_n$. В самом деле,

$$e_i-e_j=\begin{cases} \alpha_1+\ldots+\alpha_{j-1}, & \text{если } i<j, \\ -(\alpha_j+\ldots+\alpha_{i-1}), & \text{если } i>j, \end{cases}$$

$$\pm e_i=\pm((e_i-e_n)+e_n),$$

$$e_i+e_j=(e_i-e_n)+(e_j-e_n)+2e_n.$$

Формы e_i попарно ортогональны и имеют одинаковую длину. Следовательно, $\mathfrak{G}$ — алгебра типа B_n.

4. Алгебры типа G_2

В алгебре типа B_3 каноническая база образована элементами G_{0I}, $G_{IJ}=-G_{JI}$ $(I,\ J=\pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3$, см. п. 3). При этом подалгебра Картана $\mathfrak{H}$ порождается элементами $H_i=G_{i,-i}$ $(i=1, 2, 3)$; если положить $e_i(H)=\lambda_i$ при $H=\sum \lambda_i H_i$ и $e_{-i}=-e_i$, то

$$[H,\ G_{0I}]=e_I(H)\,G_{0I},\quad [H,\ G_{IJ}]=(e_I(H)+e_J(H))\,G_{IJ}.$$

Пусть $\mathfrak{H}'$ — подалгебра алгебры $\mathfrak{H}$, выделяемая соотношением $\sum e_i(H)=0$. Если $I,\ J,\ K$ — различные индексы одного знака, то $e_I(H)+e_J(H)+e_K(H)=0$ для всякого $H \in \mathfrak{H}$; поэтому элементы $G_{0,\,-I}$ и G_{JK} принадлежат одному и тому же весу $-e_I$ относительно подалгебры $\mathfrak{H}'$. Тому же весу принадлежит элемент $G_I=\sqrt{2}\,G_{0,\,-I}+G_{JK}$[1]). Далее, элемент $G_{i,-j}$ имеет вес e_i-e_j относительно $\mathfrak{H}'$. Оказывается, что подпространство $\mathfrak{G}' \subset \mathfrak{G}$, порожденное множеством $\mathfrak{H}'$ и элементами G_I и $G_{i,\,-j}$, $(i \neq j)$, является подалгеброй алгебры $\mathfrak{G}$,

[1]) Здесь предполагается, что $|I|$, $|J|$, $|K|$ образуют четную перестановку. — *Прим. перев.*

в которой $\mathfrak{H}'$ — подалгебра Картана. Это вытекает из следующих формул:

$$[G_{i,-j}, G_{k,-l}] = \delta_{jk} G_{i,-l} - \delta_{il} G_{k,-j} \in \mathfrak{G}'.$$

$$[G_{i,-j}, G_k] = -\delta_{ik} G_j,$$

$$[G_{i,-j}, G_{-k}] = \delta_{jk} G_{-i}.$$

$$[G_i, G_{-j}] = 3G_{j,-i}, \quad (i \neq j),$$

$$[G_i, G_{-i}] = 3H_i - (H_1 + H_2 + H_3).$$

$$\left.\begin{aligned} [G_i, G_j] &= -2G_{-k}, \\ [G_{-i}, G_{-j}] &= -2G_k \end{aligned}\right\} \text{перестановка } (i, j, k) \text{ четна.}$$

Операторы $\operatorname{ad} H$, $H \in \mathfrak{H}'$, полупросты, и, как мы видели, элементы G_I, $G_{i,-j}$ принадлежат ненулевым весам относительно $\mathfrak{H}'$. Следовательно, $\mathfrak{H}'$ — максимальная коммутативная подалгебра в $\mathfrak{G}'$. Алгебра $\mathfrak{H}'$ образована операторами, диагональными в базе $\{v_0, v_I\}$ пространства V, причем вектор v_I принадлежит весу e_I, а вектор v_0 — нулевому весу. Всякое подпространство пространства V, инвариантное относительно алгебры $\mathfrak{G}'$, инвариантно также относительно $\mathfrak{H}'$, и если оно отлично от нуля, то оно должно содержать какой-нибудь базисный вектор; но тогда оно содержит все базисные векторы, как следует из формул

$$G_I v_0 = -\sqrt{2} v_{-I}, \quad G_I v_{-J} = \mp v_K, \quad G_{i,-j} v_{-i} = -v_{-j}$$

(I, J, K — различные индексы одного знака; знак в правой части второго равенства определяется в зависимости от четности перестановки ($|I|$, $|J|$, $|K|$) индексов 1, 2, 3). Следовательно, тождественное представление алгебры $\mathfrak{G}'$ в пространстве V неприводимо и алгебра $\mathfrak{G}'$ редуктивна. Алгебра $\mathfrak{G}'$ не имеет центра: если X — элемент центра, то он коммутирует с $\mathfrak{H}'$ и поэтому лежит в $\mathfrak{H}'$; далее, $[X, G_I] = -e_I(X) G_I = 0$, откуда $e_I(X) = 0$ и $X = 0$. Таким образом, алгебра $\mathfrak{G}'$ полупроста.

Мы уже видели, что корни алгебры $\mathfrak{G}'$ относительно $\mathfrak{H}'$ суть $\pm e_i$, $e_i - e_j$ $(i \neq j)$. Покажем, что $e_1 - e_2$ и e_2 образуют фундаментальную систему корней. Так как $e_1 + e_2 + e_3 = 0$, то все корни даются формулами

$$\pm e_1,\ \pm e_2,\ \pm(e_1-e_2),\ \pm(e_1+2e_2),\ \pm(2e_1+e_2),\ \pm(e_1+e_2),$$

но $e_1=(e_1-e_2)+e_2$ и можно применить лемму, доказанную в добавлении. Далее, выражение вида $(e_1-e_2)+ke_2$ является корнем при $k=0, 1, 2, 3$, поэтому число Картана a_{e_2, e_1-e_2} равно 3, что отвечает схеме типа G_2.

Можно доказать, что алгебра $\mathfrak{G}'$ изоморфна алгебре дифференцирований неассоциативной алгебры в пространстве V, определяемой формулами

$$e_I * e_{-I} = (\operatorname{sgn} I)\, e_0,$$
$$e_0 * e_I = -e_I * e_0 = e_I,$$
$$e_I * e_J = -e_J * e_I = e_{-K},$$

где I, J, K — индексы одного знака, причем $|I|, |J|, |K|$ образуют четную перестановку чисел 1, 2, 3; остальные произведения базисных векторов равны 0.

Если добавить еще один базисный элемент e и положить

$$(\lambda e + x)(\mu e + y) = (\lambda\mu - (x, y))\, e + \lambda y + \mu x + x * y,$$

то получится 8-мерная алгебра над K, изоморфная алгебре чисел Кэли (октав). Алгебра $\mathfrak{G}'$ изоморфна также алгебре дифференцирований этой алгебры.

Подытожим результаты, полученные в этой главе.

Теорема. *Алгебра Ли операторов со следом* 0 *в* $(n+1)$-*мерном векторном пространстве* V *есть алгебра типа* A_n $(n \geqslant 1)$.

Алгебра Ли операторов X, *удовлетворяющих условию* $(Xx, y)+(x, Xy)=0$, *есть алгебра типа* C_n, *если* $(x, y)=-(y, x)$ *и размерность пространства* V *равна* $2n$ $(n \geqslant 3)$, — *типа* B_n, *если* $(x, y)=(y, x)$ *и размерность пространства* V *равна* $2n+1$ $(n \geqslant 2)$, — *и типа* D_n, *если* $(x, y)=(y, x)$ *и размерность пространства* V *равна* $2n$ $(n \geqslant 4)$.

Алгебра Ли дифференцирований алгебры чисел Кэли (октав) есть алгебра типа G_2[1]).

---

[1]) Модели алгебр Ли типов F_4 и E_6 построены в работе [69*]. — *Прим. перев.*

5. Добавление

Лемма. *Пусть* $\mathfrak{G}$ — *полупростая алгебра Ли*, $\mathfrak{H}$ — *ее подалгебра Картана размерности* r. *Если* $\{\alpha_i\}$ — *такая система* r *корней, что всякий корень* α *представим в виде* $\alpha = \pm\sum m_i\alpha_i$, *где* m_i — *целые неотрицательные числа, то совокупность* $\{\alpha_i\}$ *является системой простых корней*.

Корни $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ линейно независимы, так как они порождают систему всех корней, имеющую ранг r. Снабдим пространство $\mathfrak{H}_0^*$ лексикографическим упорядочением, соответствующим базе $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$. Корни α_i в этом упорядочении положительны; вообще положительными корнями будут те, которые представимы в виде $\sum m_i\alpha_i$, $m_i \geqslant 0$. Докажем, что корни α_i являются простыми корнями при этом упорядочении. Пусть $\alpha_i = \beta + \gamma$, $\beta, \gamma > 0$. Тогда $\beta = \sum m_j\alpha_j$, $\gamma = \sum n_j\alpha_j$, где $m_j, n_j \geqslant 0$, и $\alpha_i = \sum\limits_j (m_j + n_j)\alpha_j$. Отсюда следует, что $m_j + n_j = 0$ при $j \neq i$ и $m_i + n_i = 1$, и поэтому один из корней β, γ должен равняться α_i, а другой — нулю. Наконец, других простых корней, кроме α_i, нет, так как число простых корней равно r.

Глава 12

ТЕОРЕМА О СОПРЯЖЕННОСТИ ПОДАЛГЕБР КАРТАНА [1])

П. Картье

1. Некоторые сведения из алгебраической геометрии

Мы напомним некоторые определения и результаты, заимствованные из книги Шевалле об алгебраических группах [67, II].

Пусть V — *конечномерное векторное пространство над бесконечным полем* K, $K[V]$ — алгебра функций на V (со значениями в K), порожденная константами и линейными функциями. $K[V]$ — это градуированная алгебра, изоморфная симметрической алгебре над пространством V^*, дуальным к V. Элементами степени 0 алгебры $K[V]$ являются константы, элементами степени 1 — линейные функции. В координатах на V элементы из $K[V]$ записываются в виде полиномов; они называются *полиномиальными функциями* на V.

Отображение f пространства V в конечномерное пространство W называется *полиномиальным*, если $P \circ f \in K[V]$ для всякого $P \in K[W]$; впрочем, достаточно, чтобы это выполнялось для линейных функций P. Отображение $P \to P \circ f$ является тогда гомоморфизмом алгебры $K[W]$ в алгебру $K[V]$, при котором 1 переходит в 1. Пусть, наоборот, φ — гомоморфизм $K[W]$ в $K[V]$ и $\varphi(1) = 1$. Если P — линейная функция на W, то $\varphi(P)(v)$ линейно зависит от P при фиксированном v. Следовательно, $\varphi(P)(v) = \langle P, f(v) \rangle$, где f — полиномиальное отображение пространства V в W. Так как $\varphi(P) = P \circ f$ для постоянных и для линейных функций P, то это соотношение верно для всех $P \in K[W]$. В частности, если $V = 0$, то $K[V] \simeq K$ и ненулевые гомоморфизмы $K[W]$ в K находятся во взаимно однозначном соответствии с элементами из W.

---

[1]) Приводимое в этой главе доказательство теоремы сопряженности является видоизменением доказательства К. Шевалле [63].— *Прим. перев.*

Пусть f — полиномиальное отображение пространства V в пространство W. Для всякой линейной функции P на W функцию $P \circ f$ можно разложить на однородные компоненты. Соответственно этому, как легко видеть, отображение f представляется в виде $f = \sum\limits_n f_n$, где f_n — такое полиномиальное отображение V в W, что для любой линейной функции P на W функция $P \circ f_n$ является однородной компонентой n-й степени функции $P \circ f$.

Если отображения f и g полиномиальны, то отображение $g \circ f$ также полиномиально. Пусть $f = \sum\limits_{m \geqslant m_0} f_m$ и $g = \sum\limits_{n \geqslant n_0} g_n$, причем $m_0 \geqslant 1$. Докажем, *что однородные компоненты степеней* $< m_0 n_0$ *отображения* $h = g \circ f$ *равны нулю и что* $h_{m_0 n_0} = g_{n_0} \circ f_{m_0}$. Так как дело сводится к рассмотрению однородных компонент функций $P \circ h = (P \circ g) \circ f$ для линейных функций P, то можно ограничиться случаем, когда g — функция со значениями в K. Пусть вначале g — однородная функция степени n и пусть $g = \sum\limits_j \prod\limits_i P_{ij}$, где P_{ij} — линейные функции. Тогда

$$P_{ij} \circ f = \sum_m P_{ij} \circ f_m \text{ и } g \circ f = \sum_j \prod_i P_{ij} \circ f = \sum_j \sum_{(m_i)} \prod_i P_{ij} \circ f_{m_i}.$$

Каждое слагаемое в последнем выражении имеет степень $\sum\limits_i m_i \geqslant n m_0$, поскольку $m_i \geqslant m_0$ согласно предположению относительно функции f. Следовательно, в h отсутствуют члены степеней $< m_0 n$. Для того чтобы получить компоненту степени $m_0 n$, надо положить все m_i равными m_0. При этом получаются как раз члены разложения функции $g \circ f_{m_0}$. В общем случае $g = \sum g_n$, где g_n — однородные компоненты степени n функции g, и доказательство легко сводится к рассмотренному частному случаю.

Если f — полиномиальное отображение пространства V в W, то функция $f(v + X) - f(v) = \Delta f(X, v) = (\Delta f)_v(X)$ при фиксированном v полиномиальным образом зависит от X. Ее однородная компонента $df(X, v) = (df)_v(X)$ степени 1 называется дифференциалом отображения f в точке v; $(df)_v$ — линейная функция от X. Пусть $h = g \circ f$ и $w = f(v)$.

Тогда

$$\Delta h(X, v) = g(f(v+X)) - g(f(v)) =$$
$$= g(w + \Delta f(X, v)) - g(w) = \Delta g(\Delta f(X, v), w). \quad (1)$$

Функция $(\Delta f)_v$ не имеет постоянного члена, поэтому

$$(dh)_v = (dg)_w \circ (df)_v. \quad (2)$$

Предположим, что при данном v функция $(df)_v$ отображает V *на* W, и в формуле (1) возьмем в качестве g полиномиальную функцию P со значениями в K. Если функция P не постоянна, то $\Delta P(X, w) \neq 0$; пусть ΔP_m — однородная компонента наименьшей степени функции $(\Delta P)_w$.

По формуле (1) и согласно доказанному выше, однородная компонента степени m функции $(\Delta h)_w$ равна тогда $\Delta P_w \circ (df)_v$ и отлична от 0, так как $(df)_v$ отображает V на W. Следовательно, в этом случае $(\Delta h)_v \neq 0$ и $h = P \circ f \neq 0$.

Лемма. *Пусть f — такое полиномиальное отображение пространства V в пространство W, что при некотором $v \in V$ функция $(df)_v$ отображает V на W. Если при этом поле K алгебраически замкнуто, то для всякой полиномиальной функции $P \neq 0$ на V существует такая полиномиальная функция $Q \neq 0$ на W, что всякий элемент $w \in W$, для которого $Q(w) \neq 0$, является образом при отображении f некоторого элемента $v \in V$, для которого $P(v) \neq 0$.*

а) Как мы только что видели, при сделанном предположении отображение $P \to P \circ f$ алгебры $K[W]$ в алгебру $K[V]$ взаимно однозначно. Так как элементы из V соответствуют ненулевым гомоморфизмам алгебры $K[V]$ в поле K, то достаточно показать, что существует такой отличный от 0 элемент $Q \in K[W]$, что всякий гомоморфизм алгебры $K[W]$ в K, не аннулирующий Q, продолжается до гомоморфизма $K[V]$ в K, не аннулирующего P.

б) Положим $A = K[V]$ и обозначим через B образ алгебры $K[W]$ в алгебре A. Алгебра A имеет конечное число образующих $z_1, \ldots, z_h$; положим $A_k = B[z_{k+1}, \ldots, z_h]$, так что $A_0 = A$, $A_h = B$ и $A_{k-1} = A_k[z_k]$. Достаточно разобрать случай $h = 1$. Тогда мы сможем найти такой элемент $P_1 \in A_1$, что всякий гомоморфизм алгебры A_1 в K, не аннулирующий P_1, продолжается в гомоморфизм алгебры $A_0 = A$ в K, не аннулирующий $P_0 = P$; затем такой элемент

$P_2 \in A_2$, что всякий гомоморфизм алгебры A_2 в K, не аннулирующий P_2, продолжается в гомоморфизм алгебры A_1 в K, не аннулирующий P_1, и т. д.

в) Итак, пусть C и $D = C[z]$ — две области целостности[1]) и $p \neq 0$ — некоторый элемент из D. Если z не удовлетворяет никакому алгебраическому соотношению с коэффициентами из C, то кольцо D изоморфно кольцу многочленов от z с коэффициентами из C. Элемент p является многочленом от z, в котором хотя бы один коэффициент a не равен нулю. Пусть f — гомоморфизм кольца C в K и $\overline{P}$ — многочлен с коэффициентами из K, полученный из p применением ко всем коэффициентам отображения f. Если $f(a) \neq 0$, то $\overline{P} \neq 0$ и существует такой элемент $b \in K$, что $\overline{P}(b) \neq 0$. Можно определить гомоморфизм $\overline{f}$ кольца D в K, продолжающий гомоморфизм f и переводящий z в b. При этом $\overline{f}(p) = \overline{P}(b) \neq 0$. Таким образом, всякий гомоморфизм кольца C в K, не аннулирующий a, продолжается до гомоморфизма кольца D в K, не аннулирующего p.

Пусть теперь z удовлетворяет хотя бы одному нетривиальному алгебраическому уравнению над C. Для того чтобы существовал гомоморфизм $\overline{f}$ кольца D в K, продолжающий данный гомоморфизм f кольца C в K и переводящий элемент z в b, необходимо и достаточно, чтобы элемент b удовлетворял всем уравнениям вида $\overline{P}(b) = 0$, где $\overline{P}$ — многочлен, полученный применением отображения f к коэффициентам многочлена, обращающегося в 0 на z. Пусть $P(z) = 0$ — алгебраическое уравнение наименьшей степени, которому удовлетворяет элемент z, и $P(Z) = \sum_{i=0}^{n} a_i Z^i$. Если Q — произвольный многочлен от Z, то алгоритм деления дает $a_n^k Q(Z) = U(Z) P(Z) + V(Z)$ при достаточно большом k, где степень V меньше степени P. Если $Q(z) = 0$, то $V(z) = 0$ и $V = 0$, поскольку P — многочлен наименьшей степени, для которого $P(z) = 0$. Таким образом, в этом случае $a_n^k Q(Z) = U(Z) P(Z)$; если $f(a_n) \neq 0$ и $\overline{P}(b) = 0$, то $(f(a_n))^k \overline{Q}(b) = 0$

[1]) То есть коммутативные кольца с единицей, не имеющие делителей нуля. Алгебры A_k, очевидно, являются областями целостности. — *Прим. перев.*

и $\overline{Q}(b)=0$. Так как поле K алгебраически замкнуто, то существует такой элемент $b \in K$, что $\overline{P}(b)=0$; всякий гомоморфизм f кольца C в K, для которого $f(a_n) \neq 0$, продолжается тогда до гомоморфизма $\overline{f}$ кольца D в K, переводящего z в b. Далее, поскольку поле отношений кольца D является алгебраическим расширением поля отношений кольца C, всякий элемент из D удовлетворяет некоторому алгебраическому уравнению над C. Пусть $H(p)=0$ — алгебраическое уравнение наименьшей степени, которому удовлетворяет элемент p. Так как $p \neq 0$, то $H(0) \neq 0$. Если $f(H(0)) \neq 0$, то $\overline{f}(p) \neq 0$, так как $\overline{H}(\overline{f}(p))=0$ и $\overline{H}(0)=f(H(0)) \neq 0$. Окончательно, если гомоморфизм f не обращает в 0 произведение $a_n H(0)$, то он не обращает в 0 ни a_n, ни $H(0)$ и поэтому продолжается до такого гомоморфизма $\overline{f}$, что $\overline{f}(p) \neq 0$.

2. Применение к алгебрам Ли

Пусть K — *алгебраически замкнутое поле характеристики* 0, $\mathfrak{G}$ — (*произвольная*) *алгебра Ли над* K, $\mathfrak{H}$ — подалгебра Картана алгебры $\mathfrak{G}$ и $\mathfrak{G}=\mathfrak{H}+\sum_{\alpha \neq 0} \mathfrak{G}^{\alpha}$ — соответствующее разложение пространства $\mathfrak{G}$. Известно, что $[\mathfrak{G}^{\alpha}, \mathfrak{G}^{\beta}] \subset \mathfrak{G}^{\alpha+\beta}$, поэтому для всякого $X \in \mathfrak{G}^{\alpha}$ оператор $\operatorname{ad} X$ отображает $\mathfrak{G}^{\beta}$ в $\mathfrak{G}^{\alpha+\beta}$, а оператор $(\operatorname{ad} X)^k$ отображает $\mathfrak{G}^{\beta}$ в $\mathfrak{G}^{\beta+k\alpha}$. Так как корней алгебры $\mathfrak{G}$ лишь конечное число, то отсюда следует, что оператор $\operatorname{ad} X$ нильпотентен. Можно, следовательно, определить оператор $\exp \operatorname{ad} X=\sigma(X)$, который будет автоморфизмом алгебры $\mathfrak{G}$ (ср. п. 10 гл. 3). Занумеруем каким-либо образом корни алгебры $\mathfrak{G}$ и рассмотрим отображение

$$f:(X_1, \ldots, X_n, H) \to \sigma(X_1) \quad \sigma(X_n) \cdot H$$

произведения $\mathfrak{G}^{\alpha_1} \times \ldots \times \mathfrak{G}^{\alpha_n} \times \mathfrak{H}$ в $\mathfrak{G}$. Вычислим дифференциал отображения f в точке $(0, \ldots, 0, H_0)$:

$$f(X_1, \ldots, X_n, H+H_0)=\sum \frac{1}{\prod\limits_i m_i!}[X_1^{m_1}, \ldots [X_n^{m_n}, H] \ldots]+$$

$$+\sum \frac{1}{\prod\limits_i m_i!}[X_1^{m_1}, \ldots [X_n^{m_n}, H_0] \ldots], \qquad (3)$$

где принято обозначение $[X^k, Y] = \operatorname{ad}^k X \cdot Y$; слагаемые, содержащие H, имеют степень $m_1 + \ldots + m_n + 1$, а слагаемые, содержащие H_0, имеют степень $m_1 + \ldots + m_n$; таким образом, слагаемые степени 1 — это H и $[X_i, H_0]$. Итак,

$$df(X_1, \ldots, X_n, H; 0, \ldots, 0, H_0) = H + \sum_i [X_i, H_0]. \quad (4)$$

Если $\prod_{\alpha \neq 0} \alpha(H_0) \neq 0$, то определитель эндоморфизма $\operatorname{ad} H_0$ в пространстве $\sum_{\alpha \neq 0} \mathfrak{G}^\alpha$ отличен от 0; в этом случае дифференциал отображения f в точке $(0, H_0)$ является изоморфизмом пространства $\mathfrak{G}$ на себя. Обозначим через G группу автоморфизмов алгебры $\mathfrak{G}$, порожденную операторами $\sigma(X)$, $X \in \mathfrak{G}^\alpha$ (при всевозможных $\alpha \neq 0$). Применяя лемму п. 1, получаем, что существует такой многочлен $Q \neq 0$ на $\mathfrak{G}$, что всякий элемент из $\mathfrak{G}$, в котором Q не обращается в 0, сопряжен относительно группы G некоторому элементу $H \in \mathfrak{H}$, для которого $\prod_{\alpha \neq 0} \alpha(H) \neq 0$. Последнее свойство элемента $H \in \mathfrak{H}$ равносильно тому, что $\mathfrak{G}(H, 0) = \mathfrak{H}$ [1]).

Пусть теперь $\mathfrak{H}'$ — другая подалгебра Картана алгебры $\mathfrak{G}$, G' — соответствующая ей группа автоморфизмов алгебры $\mathfrak{G}$, Q' — полиномиальная функция на $\mathfrak{G}$, построенная для $\mathfrak{H}'$ так же, как функция Q для $\mathfrak{H}$. Группы G и G' содержатся в группе A автоморфизмов алгебры $\mathfrak{G}$, порожденной операторами вида $\exp \operatorname{ad} X$, где X — такой элемент из $\mathfrak{G}$, что эндоморфизм $\operatorname{ad} X$ нильпотентен. Пусть элемент $x \in \mathfrak{G}$ таков, что $Q(x) Q'(x) \neq 0$. Тогда он сопряжен относительно группы A, с одной стороны, элементу $H \in \mathfrak{H}$, для которого $\mathfrak{G}(H, 0) = \mathfrak{H}$, и, с другой стороны, элементу $H' \in \mathfrak{H}'$, для которого $\mathfrak{G}(H', 0) = \mathfrak{H}'$. Элементы H и H', следовательно, сопряжены относительно группы A; но тогда и подалгебры $\mathfrak{H}$ и $\mathfrak{H}'$ сопряжены относительно группы A.

Множество регулярных элементов алгебры $\mathfrak{G}$ инвариантно относительно всех ее автоморфизмов и задается неравенством $\varphi(x) \neq 0$, где φ — некоторая полиномиальная функция на $\mathfrak{G}$ (см. доказательство теоремы 1 гл. 9). Элемент $x \in \mathfrak{G}$, для которого $\varphi(x) Q(x) \neq 0$, регулярен и сопряжен некоторому

---

[1]) $\mathfrak{G}(H, 0)$ — это подпространство пространства $\mathfrak{G}$, аннулируемое степенями оператора $\operatorname{ad} H$ (см. гл. 8). — *Прим. перев.*

регулярному элементу $H_0 \in \mathfrak{H}$. Пусть H — такой элемент из $\mathfrak{H}$, что $\prod_{\alpha \neq 0} \alpha(H) \neq 0$. Имеем

$$\mathfrak{G}(H_0, 0) \supset \mathfrak{H} \doteq \mathfrak{G}(H, 0).$$

Отсюда следует, что $\mathfrak{G}(H_0, 0) = \mathfrak{H}$ и что элемент H регулярен. Таким образом, регулярные элементы алгебры $\mathfrak{G}$, содержащиеся в $\mathfrak{H}$, — это в точности те элементы $H \in \mathfrak{H}$, для которых $\alpha(H) \neq 0$ ни при каком $\alpha \neq 0$.

Итак, доказана следующая

Теорема. *Пусть $\mathfrak{H}$ — подалгебра Картана алгебры Ли $\mathfrak{G}$ над алгебраически замкнутым полем характеристики* 0. *Всякий элемент $H \in \mathfrak{H}$, на котором не обращается в* 0 *ни один ненулевой корень алгебры $\mathfrak{G}$ относительно $\mathfrak{H}$, регулярен в $\mathfrak{G}$. Любые две подалгебры Картана алгебры $\mathfrak{G}$ сопряжены относительно группы A автоморфизмов алгебры $\mathfrak{G}$, порожденной операторами* $\exp \operatorname{ad} X$, *где $X \in \mathfrak{G}$ и эндоморфизм* $\operatorname{ad} X$ *нильпотентен.*

Глава 13

АВТОМОРФИЗМЫ ПОЛУПРОСТЫХ АЛГЕБР ЛИ [1])

Ф. Брюа

Основное поле в этой главе предполагается полем комплексных чисел.

Под *автоморфизмом алгебры Ли* $\mathfrak{G}$ понимается такой автоморфизм A векторного пространства $\mathfrak{G}$, что $A[x, y] = [Ax, Ay]$ для любых $x, y \in \mathfrak{G}$.

Группу всех автоморфизмов алгебры $\mathfrak{G}$ мы будем обозначать через $\mathrm{Aut}\,\mathfrak{G}$. Если $\dim \mathfrak{G} = n$, то $\mathrm{Aut}\,\mathfrak{G}$ — замкнутая подгруппа группы $\mathfrak{Gl}(n, C)$, не обязательно связная. На ней индуцируется структура группы Ли. Алгебра Ли группы $\mathrm{Aut}\,\mathfrak{G}$ есть алгебра Ли дифференцирований алгебры $\mathfrak{G}$. Идеалу $\mathrm{ad}\,\mathfrak{G}$ внутренних дифференцирований соответствует нормальный делитель $\mathrm{Int}\,\mathfrak{G}$ группы $\mathrm{Aut}\,\mathfrak{G}$ — *группа внутренних автоморфизмов алгебры* $\mathfrak{G}$. Если $\mathfrak{G}$ — алгебра Ли связной группы Ли G, то группа $\mathrm{Int}\,\mathfrak{G}$ изоморфна фактор-группе группы G по ее центру Z. Вообще говоря, группа $\mathrm{Int}\,\mathfrak{G}$ не замкнута в $\mathrm{Aut}\,\mathfrak{G}$, но если алгебра $\mathfrak{G}$ полупроста, то всякое ее дифференцирование внутреннее (следствие теоремы 2 гл. 5) и группа $\mathrm{Int}\,\mathfrak{G}$ совпадает со связной компонентой единицы группы $\mathrm{Aut}\,\mathfrak{G}$ и, конечно, замкнута в $\mathrm{Aut}\,\mathfrak{G}$.

Пусть $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{H}'$ — две подалгебры Картана алгебры $\mathfrak{G}$. В предыдущей главе было показано, что существует внутренний автоморфизм u алгебры $\mathfrak{G}$, переводящий $\mathfrak{H}$ в $\mathfrak{H}'$. Если $A \in \mathrm{Aut}\,\mathfrak{G}$ и $\mathfrak{H}' = A\mathfrak{H}$, то $u^{-1}A\mathfrak{H} = \mathfrak{H}$. Фиксируем раз навсегда подалгебру Картана $\mathfrak{H}$ алгебры $\mathfrak{G}$ и будем рассматривать только такие автоморфизмы A алгебры $\mathfrak{G}$, которые сохраняют подалгебру $\mathfrak{H}$. Как мы только что видели, во всяком классе смежности группы $\mathrm{Aut}\,\mathfrak{G}$ по подгруппе $\mathrm{Int}\,\mathfrak{G}$ содержится такой автоморфизм.

---

[1]) См. [12] и [20]. — *Прим. перев.*

Всякий автоморфизм A сохраняет форму Киллинга, т. е. $\langle Ax, Ay\rangle = \langle x, y\rangle$, и переставляет между собой корни [1]).

Пусть α — корень и $E_\alpha \in \mathfrak{G}^\alpha$. Тогда

$$A[H, E_\alpha] = \alpha(H) AE_\alpha = [AH, AE_\alpha]$$

и, с другой стороны,

$$\alpha(H) = \langle H, H'_\alpha\rangle = \langle AH, AH'_\alpha\rangle = \alpha^*(AH),$$

откуда

$$[AH, AE_\alpha] = \alpha^*(AH) AE_\alpha.$$

Линейную форму α^* на $\mathfrak{H}$, являющуюся корнем алгебры $\mathfrak{G}$, мы назовем образом корня α при автоморфизме A. Вектор AE_α принадлежит подпространству $\mathfrak{G}^{\alpha^*}$, следовательно, $AE_\alpha = \nu_\alpha E_{\alpha^*}$.

Предположим, что векторы E_α образуют базу Вейля алгебры $\mathfrak{G}$. Так как A — автоморфизм, то из равенства $[E_\alpha, E_{-\alpha}] = -H'_\alpha$ следует, что

$$A[E_\alpha, E_{-\alpha}] = [\nu_\alpha E_{\alpha^*}, \nu_{-\alpha} E_{-\alpha^*}] = -H'_{\alpha^*}$$

(очевидно, что $AH'_\alpha = H'_{A\alpha} = H'_{\alpha^*}$). Далее, $[E_{\alpha^*}, E_{-\alpha^*}] = -H'_{\alpha^*}$, так что

$$\nu_\alpha \nu_{-\alpha} = 1. \tag{1}$$

Из равенства $[E_\alpha, E_\beta] = N_{\alpha, \beta} E_{\alpha+\beta}$ получаем

$$[\nu_\alpha E_{\alpha^*}, \nu_\beta E_{\beta^*}] = N_{\alpha, \beta} \nu_{\alpha+\beta} E_{\alpha^*+\beta^*},$$

откуда

$$\nu_\alpha \nu_\beta = \frac{N_{\alpha, \beta}}{N_{\alpha^*, \beta^*}} \nu_{\alpha+\beta}. \tag{2}$$

Как мы видели в гл. 8,

$$N^2_{\alpha, \beta} = \frac{q(1-p)}{2} \langle \alpha, \alpha\rangle \qquad (p \leqslant 0,\ q \geqslant 0),$$

где целые числа p и q определяются из того условия, что при $p \leqslant k \leqslant q$ линейная форма $\beta + k\alpha$ является корнем, а формы $\beta + (p-1)\alpha$ и $\beta + (q+1)\alpha$ уже не являются корнями. Так как $(\beta + k\alpha)^* = \beta^* + k\alpha^*$, то числа p и q одина-

[1]) Начиная отсюда, предполагается, что алгебра $\mathfrak{G}$ полупроста. — *Прим. перев.*

ковы для пар (α, β) и (α^*, β^*). К тому же $\langle\alpha, \alpha\rangle = \langle\alpha^*, \alpha^*\rangle$, поэтому $N^2_{\alpha, \beta} = N^2_{\alpha^*, \beta^*}$, т. е. $N_{\alpha, \beta} = \pm N_{\alpha^*, \beta^*}$, и формула (2) принимает вид

$$\nu_\alpha \nu_\beta = \pm \nu_{\alpha+\beta}. \tag{3}$$

Пусть $\tilde{H} \in \mathfrak{H}$. Автоморфизм $B = e^{\operatorname{ad} \tilde{H}} = \sum \frac{1}{n!} \operatorname{ad}_n \tilde{H}$ тождествен на $\mathfrak{H}$, и для всякого корня α

$$BE_\alpha = \sum \frac{1}{n!} \underbrace{[\tilde{H}, [\tilde{H}, \ldots [\tilde{H},}_{n} E_\alpha] \ldots] =$$

$$= \sum \frac{1}{n!} (\alpha (\tilde{H}))_n E_\alpha = e^{\alpha (\tilde{H})} E_\alpha.$$

Композиция AB также сохраняет $\mathfrak{H}$; имеем

$$ABE_\alpha = \nu'_\alpha E_{\alpha^*}, \quad \nu'_\alpha = e^{\alpha (\tilde{H})} \nu_\alpha.$$

Выберем систему $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ простых корней и возьмем такой элемент $\tilde{H} \in \mathfrak{H}$, что $\alpha_i (\tilde{H}) = -\ln \nu_{\alpha_i}$. Это всегда возможно, поскольку $\nu_{\alpha_i} \neq 0$ (A — автоморфизм). Пусть $\alpha = \sum_{i=1}^{r} a_i \alpha_i$ — какой-нибудь корень. Тогда

$$\nu'_\alpha = \left(\prod \nu_{\alpha_i}^{-a_i}\right) \nu_\alpha.$$

Используя формулу (3) и тот факт, что всякий положительный корень α, не являющийся простым, представляется в виде $\alpha = \beta + \gamma$, где $\beta, \gamma > 0$, легко по индукции доказать, что

$$\nu_\alpha = \pm \prod \nu_{\alpha_i}^{a_i}, \tag{4}$$

откуда немедленно следует, что $\nu'_\alpha = \pm 1$. Заметим, наконец, что автоморфизм AB принадлежит к тому же классу смежности по подгруппе $\operatorname{Int} \mathfrak{G}$, что и A, так как $B \in \operatorname{Int} \mathfrak{G}$.

Итак, *в каждом классе смежности группы* $\operatorname{Aut} \mathfrak{G}$ *по нормальному делителю* $\operatorname{Int} \mathfrak{G}$ *содержится автоморфизм* A *алгебры* $\mathfrak{G}$, *сохраняющий подалгебру Картана* $\mathfrak{H}$ *алгебры* $\mathfrak{G}$ *и такой, что*

$$AE_\alpha = \pm E_{\alpha^*}$$

для всякого корня α.

Заметим, что автоморфизм A сохраняет компактную форму $\mathfrak{G}_u$ алгебры $\mathfrak{G}$, порожденную векторами iH'_α, $E_\alpha + E_{-\alpha}$ и $i(E_\alpha - E_{-\alpha})$.

Предложение 1. *Автоморфизм A тогда и только тогда тождествен на $\mathfrak{H}$, когда он имеет вид $e^{\mathrm{ad}\, H'}$ для некоторого $H' \in \mathfrak{H}$.*

Очевидно, что всякий автоморфизм вида $e^{\mathrm{ad}\, H'}$ тождествен на $\mathfrak{H}$. Обратно, пусть автоморфизм A тождествен на $\mathfrak{H}$. Тогда $\alpha^* = \alpha$ для всякого корня α. Из формулы (2) получаем $\nu_{\alpha+\beta} = \nu_\alpha \nu_\beta$. Формула (4) принимает вид: $\nu_\alpha = \prod_i \nu_{\alpha_i}^{a_i}$. Определяя автоморфизм B так же, как и выше, находим $\nu'_\alpha = 1$. Автоморфизм AB тождествен на $\mathfrak{H}$, и, сверх того, $ABE_\alpha = E_\alpha$ для всякого корня α. Следовательно, автоморфизм AB тождествен на всей алгебре $\mathfrak{G}$; но тогда $A = B^{-1} = e^{-\mathrm{ad}\, \tilde{H}}$ ($\tilde{H} \in \mathfrak{H}$).

Группу всех автоморфизмов алгебры $\mathfrak{G}$, индуцирующих на $\mathfrak{H}$ тождественное преобразование, обозначим через $\mathrm{Exp\, ad}\, \mathfrak{H}$; это максимальная коммутативная подгруппа в группе $\mathrm{Aut}\, \mathfrak{G}$ (максимальная в множестве всех, а не только связных, коммутативных подгрупп группы $\mathrm{Aut}\, \mathfrak{G}$).

Обозначим через $\mathfrak{H}$ группу ортогональных (в смысле формы Киллинга) преобразований пространства $\mathfrak{H}_0$, сохраняющих систему корней. Так как множество корней конечно и всякое линейное преобразование, оставляющее на месте каждый корень, тождественно на $\mathfrak{H}_0$ (корни порождают $\mathfrak{H}_0$), то группа $\mathfrak{C}$ конечна. Всякий элемент из $\mathfrak{C}$ может быть продолжен до автоморфизма алгебры $\mathfrak{G}$ (теорема 6 гл. 8). Пусть $\mathfrak{J}$ — подгруппа группы $\mathfrak{C}$, соответствующая $\mathrm{Int}\, \mathfrak{G}$. Очевидно теперь, что группа $\mathrm{Aut}\, \mathfrak{G}/\mathrm{Int}\, \mathfrak{G} \simeq \mathfrak{C}/\mathfrak{J}$ не только дискретна, но и конечна [1]).

Пусть λ — линейная форма на $\mathfrak{H}_0$, P_λ — гиперплоскость в $\mathfrak{H}_0$, определяемая уравнением $\lambda(H) = 0$, и P_λ^* — гиперплоскость в $\mathfrak{H}_0^*$, определяемая уравнением $\langle \lambda, \mu \rangle = 0$. Пусть S_λ — симметрия пространства $\mathfrak{H}_0$ относительно гиперплоско-

[1]) Из предложения 1 вытекает, что $\mathfrak{C} \simeq \mathrm{Aut}_{\mathfrak{H}}\, \mathfrak{G}/\mathrm{Exp\, ad}\, \mathfrak{H}$, и $\mathfrak{J} \simeq \mathrm{Int}_{\mathfrak{H}}\, \mathfrak{G}/\mathrm{Exp\, ad}\, \mathfrak{H}$, где $\mathrm{Aut}_{\mathfrak{H}}\, \mathfrak{G}$ и $\mathrm{Int}_{\mathfrak{H}}\, \mathfrak{G}$ — подгруппы групп $\mathrm{Aut}\, \mathfrak{G}$ и $\mathrm{Int}\, \mathfrak{G}$ соответственно, состоящие из автоморфизмов, сохраняющих $\mathfrak{H}$. — *Прим. перев.*

сти P_λ и в то же время симметрия пространства $\mathfrak{H}_0^*$ относительно гиперплоскости P_λ^*. Имеем

$$S_\lambda(H) = H - 2\frac{\lambda(H)}{\langle\lambda, \lambda\rangle} H'_\lambda \qquad (H \in \mathfrak{H}_0),$$

$$S_\lambda(\mu) = \mu - 2\frac{\langle\lambda, \mu\rangle}{\langle\lambda, \lambda\rangle}\lambda \qquad (\mu \in \mathfrak{H}_0^*).$$

В частности, возьмем в качестве λ корень α и применим отображение S_α к корню β:

$$S_\alpha(\beta) = \beta - 2\frac{\langle\alpha, \beta\rangle}{\langle\alpha, \alpha\rangle}\alpha.$$

Как известно (гл. 8),

$$-2\frac{\langle\alpha, \beta\rangle}{\langle\alpha, \alpha\rangle} = p + q,$$

где $p \leqslant 0$ и $q \geqslant 0$ определяются как крайние значения k, для которых форма $\beta + k\alpha$ является корнем. Следовательно, $S_\alpha(\beta) = \beta + (p+q)\alpha$ — корень, так что $S_\alpha \in \mathfrak{C}$. Подгруппа $\mathfrak{S}$ группы $\mathfrak{C}$, порожденная симметриями S_α, где α пробегает систему Δ ненулевых корней алгебры $\mathfrak{G}$ относительно $\mathfrak{H}$, называется *группой Вейля алгебры* $\mathfrak{G}$. Ниже будет доказано, что $\mathfrak{S} = \mathfrak{J}$.

Напомним, что $P_\alpha (\alpha \in \Delta)$ обозначает гиперплоскость в пространстве $\mathfrak{H}_0$, задаваемую уравнением $\alpha(H) = 0$. Пусть $K = \mathfrak{H}_0 \diagdown \bigcup\limits_{\alpha \in \Delta} P_\alpha$; максимальные выпуклые подмножества множества K называются *фундаментальными областями Вейля*. Пусть $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ — простые корни (порождающие $\mathfrak{H}_0$). Множество C_0 таких $H \in \mathfrak{H}_0$, что $\langle\alpha_i, H\rangle > 0$ для всех $i = 1, \ldots, r$, есть фундаментальная область Вейля. Действительно, если $H \in C_0$, то ни для какого корня α не может быть $\langle\alpha, H\rangle = 0$, так как $\alpha = \sum k_i\alpha_i$, где числа k_i одного знака.

Пусть $\mathfrak{S}'$ — подгруппа группы $\mathfrak{S}$, порожденная симметриями $S_{\alpha_i} = S_i (1 \leqslant i \leqslant r)$. Докажем, что группа $\mathfrak{S}'$ транзитивна на совокупности фундаментальных областей Вейля, т. е. что для произвольной фундаментальной области Вейля C_1 существует такой элемент $s \in \mathfrak{S}'$, что $C_0 = sC_1$. Достаточно показать, что если w — какой-нибудь элемент из C_1, то найдется такой элемент $s \in \mathfrak{S}'$, что $sw \in C_0$ (так как тогда $sw' \in C_0$ для любого $w' \in C_1$). Рассмотрим образы σw элемента w при всех преобразованиях $\sigma \in \mathfrak{S}'$, и пусть w_0 — какая-нибудь точка из C_0. Из всех точек σw выберем ближайшую к w_0. Она должна принадлежать области C_0: в противном случае было бы $\langle \alpha_i, \sigma w \rangle < 0$ для некоторого i и отражение S_i, как легко видеть, приближало бы точку σw к w_0.

Будем говорить, что гиперплоскость P_α ограничивает фундаментальную область Вейля C, если граница области C содержит открытое подмножество множества P_α. Легко видеть, что область C_0 ограничивается гиперплоскостями P_{α_i} $(1 \leqslant i \leqslant r)$ и только ими. Пусть α — какой-нибудь корень и C_1 — одна из фундаментальных областей Вейля, ограничиваемых гиперплоскостью P_α. Существует такое преобразование $s \in \mathfrak{S}'$, что $C_1 = sC_0$. Гиперплоскость P_α является при этом образом некоторой гиперплоскости, ограничивающей область C_0, т. е. некоторой гиперплоскости P_{α_i}. Единственные корни, перпендикулярные к P_α, — это $\pm\alpha$; поэтому $s\alpha_i = \pm\alpha$. Если $s\alpha_i = -\alpha$, то $s(S_{\alpha_i}\alpha_i) = s(-\alpha_i) = \alpha$, так что всегда существует такой элемент $s \in \mathfrak{S}'$ и такой простой корень α_i, что $s\alpha_i = \alpha$. Очевидно, что тогда $S_\alpha = sS_is^{-1}$. Так как s, $S_i \in \mathfrak{S}'$, то это показывает, что $S_\alpha \in \mathfrak{S}'$. Следовательно, $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}'$. Итак, доказана следующая

Теорема 1. *Если $\{\alpha_i\}$ $(1 \leqslant i \leqslant r)$ — система простых корней алгебры $\mathfrak{G}$, то симметрии S_{α_i} порождают группу Вейля $\mathfrak{S}$. Группа $\mathfrak{S}$ транзитивна на совокупности фундаментальных областей Вейля, и всякий корень α является образом какого-нибудь простого корня α_i при некотором преобразовании $s \in \mathfrak{S}$.*

Из этой теоремы следует, в частности, что *система простых корней определяет собой систему всех корней*; впрочем, этот результат уже получен другим путем (гл. 8).

Докажем теперь, что $\mathfrak{S} = \mathfrak{J}$.

1. $\mathfrak{S} \subset \mathfrak{J}$.

Достаточно показать, что преобразование S_α $(\alpha \in \Delta)$ пространства $\mathfrak{H}_0$ индуцировано автоморфизмом вида $U = e^{\operatorname{ad} X}$. Возьмем $X = \dfrac{\pi}{\sqrt{2\langle\alpha, \alpha\rangle}}(E_\alpha + E_{-\alpha})$. Так как $\operatorname{ad} X$ аннулирует P_α, то автоморфизм U тождествен на P_α. При произвольном $H \in \mathfrak{H}$ имеем

$$U \cdot H = H + \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2p+1)!} \operatorname{ad}^{2p+1} X \cdot H + \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2p+2)!} \operatorname{ad}^{2p+2} X \cdot H.$$

Первая сумма есть произведение некоторого множителя на $\sin \pi$ и потому равна нулю. Вторая сумма равна $\frac{\cos \pi - 1}{\langle \alpha, \alpha \rangle} \alpha (H) H'_\alpha$. Итак,

$$U \cdot H = H - 2 \frac{\alpha (H)}{\langle \alpha, \alpha \rangle} H'_\alpha = S_\alpha (H),$$

что и требовалось доказать.

Легко видеть, что $UH'_\alpha = -H'_\alpha$, $UE_\alpha = E_{-\alpha}$, $UE_{-\alpha} = E_\alpha$. В трехмерной подалгебре, порожденной векторами H'_α, E_α и $E_{-\alpha}$, матрица преобразования U имеет вид

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Заметим также, что $X \in \mathfrak{G}_u$ ($\mathfrak{G}_u$ — компактная форма $\mathfrak{G}$). Отсюда следует, что $\mathfrak{G}$ и $\mathfrak{G}_u$ имеют одну и ту же группу Вейля [1]).

2. $\mathfrak{J} = \mathfrak{S}$.

Достаточно показать, что группа $\mathfrak{J}$ просто транзитивна на совокупности фундаментальных областей Вейля. Группа $\mathfrak{S}$, будучи по доказанному подгруппой группы $\mathfrak{J}$, должна тогда с ней совпадать. Отсюда также будет следовать, что группа Вейля просто транзитивна на совокупности фундаментальных областей Вейля.

Пусть внутренний автоморфизм A алгебры $\mathfrak{G}$ сохраняет подалгебру Картана $\mathfrak{H}$ и в ней фундаментальную область Вейля C_0, т. е. сохраняет также систему Σ положительных корней алгебры $\mathfrak{G}$ относительно $\mathfrak{H}$. Докажем, что $A \in \operatorname{Exp} \operatorname{ad} \mathfrak{H}$, откуда будет следовать, что автоморфизм A тождествен на $\mathfrak{H}$.

Обозначим через $\check{A}$ подстановку системы Δ ненулевых корней, индуцированную автоморфизмом A, и пусть $\sigma_1, \ldots, \sigma_p$ —

[1]) Понятие группы Вейля для компактной алгебры Ли еще не было введено. См. гл. 19. — *Прим. ред.*

различные циклы системы Δ относительно этой подстановки. Тогда

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{H} + \sum_{i=1}^{p} \mathfrak{G}^{\sigma_i},$$

где каждое из подпространств $\mathfrak{G}^{\sigma_i} = \sum_{\alpha \in \sigma_i} \mathfrak{G}^{\alpha}$ инвариантно относительно A. База пространства $\mathfrak{G}^{\sigma}$ образована векторами $E_{\breve{A}\alpha}, \ldots, E_{\breve{A}^{q}\alpha}$, где $\alpha \in \sigma$. Пусть $AE_{\breve{A}^{m}\alpha} = \nu_m E_{\breve{A}^{m+1}\alpha}$. Тогда преобразование A в пространстве $\mathfrak{G}^{\sigma}$ записывается матрицей

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \ldots & 0 & \nu_q \\ \nu_1 & 0 & 0 \ldots & 0 & 0 \\ 0 & \nu_2 & 0 \ldots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 \ldots & \nu_{q-1} & 0 \end{pmatrix}.$$

Его характеристическое уравнение $\det(A - \lambda \cdot 1) = 0$ имеет вид

$$\lambda^q - \nu_1 \ldots \nu_q = 0. \tag{5}$$

Вместо автоморфизма A рассмотрим теперь автоморфизм AB, где $B = e^{\operatorname{ad} H}$, $H \in \mathfrak{H}$. Очевидно, что этот автоморфизм индуцирует ту же подстановку корней, что и A. Все сказанное об автоморфизме A остается справедливым и для автоморфизма AB. Уравнение (5) принимает вид

$$\lambda^q - \nu_1' \ldots \nu_q' = 0, \tag{6}$$

где $\nu_m' = e^{\left(\breve{A}^{m}\alpha\right)(H)} \nu_m$. Таким образом, характеристическое уравнение оператора AB в пространстве $\mathfrak{G}^{\sigma}$ имеет вид

$$\lambda^q - e^{\sum\limits_{m=0}^{q} \left(\breve{A}^{m}\alpha\right)(H)} \nu_1 \ldots \nu_q = 0. \tag{7}$$

Из того, что $\breve{A}$ сохраняет систему положительных корней, вытекает, что все корни $\breve{A}^{m}\alpha\,(0 \leqslant m \leqslant q)$ одного знака и

$\sum\limits_{m=0}^{q} \breve{A}^m \alpha \neq 0$. Выберем такой элемент $H \in \mathfrak{H}$, чтобы

$$e^{\sum (\breve{A}^m \alpha)(H)}{}_{\nu_1 \ldots \nu_q} \neq 1. \tag{8}$$

При этом условии 1 не является корнем уравнения (7). Элемент $H \in \mathfrak{H}$ можно выбрать так, чтобы условие (8) выполнялось для всех циклов $\sigma_i (1 \leqslant i \leqslant p)$. Тогда

$$\mathfrak{G}(AB, 1) \cap \left(\sum_{i=1}^{p} \mathfrak{G}^{\sigma_i} \right) = 0. \tag{9}$$

Нам теперь понадобится следующая

Лемма. *Если* $A \in \operatorname{Int} \mathfrak{G}$, *то* $\dim \mathfrak{G}(A, 1) \geqslant r$, *где* r — *размерность пространства* $\mathfrak{H}$.

Если A находится вблизи единицы группы $\operatorname{Int} \mathfrak{G}$, то $A = e^{\operatorname{ad} X}$, $X \in \mathfrak{G}$, и $\mathfrak{G}(A, 1) = \mathfrak{G}(X, 0)$. Если X — регулярный элемент, то $\dim \mathfrak{G}(X, 0) = r$ (гл. 12); в общем же случае $\dim \mathfrak{G}(X, 0) \geqslant r$. Таким образом, в некоторой окрестности единицы характеристическое уравнение оператора A имеет 1 по крайней мере r-кратным корнем. Далее, при $A \in \operatorname{Int} \mathfrak{G}$

$$\det(A - \lambda \cdot 1) = \sum (\lambda - 1)^p \varphi_p(A),$$

где φ_p — аналитические функции на группе $\operatorname{Int} \mathfrak{G}$. Из того, что функции $\varphi_0(A), \ldots, \varphi_{r-1}(A)$ обращаются в 0 в некоторой окрестности единицы группы $\operatorname{Int} \mathfrak{G}$, следует, что они тождественно равны 0, поскольку группа $\operatorname{Int} \mathfrak{G}$ связна. Это и доказывает лемму.

Применим доказанную лемму к автоморфизму AB. Ввиду (9) $\mathfrak{G}(AB, 1) = \mathfrak{H}$. Иными словами, автоморфизм AB тождествен на $\mathfrak{H}$[1]). Согласно предложению 1, существует такой элемент $H' \in \mathfrak{H}$, что $AB = e^{\operatorname{ad} H'}$; но тогда

$$A = e^{\operatorname{ad} H'} B^{-1} = e^{\operatorname{ad} (H' - H)} \in \operatorname{Exp} \operatorname{ad} \mathfrak{H}.$$

[1]) Поскольку $\mathfrak{G}(AB, 1) = \mathfrak{H}$, единственным собственным значением оператора AB на $\mathfrak{H}$ является 1. С другой стороны, всякий автоморфизм $C \in \operatorname{Aut} \mathfrak{G}$ вполне приводим на $\mathfrak{H}$, так как он сохраняет $\mathfrak{H}_0$ и индуцирует в $\mathfrak{H}_0$ ортогональное преобразование (в смысле формы Киллинга, которая положительно определена на $\mathfrak{H}_0$). — *Прим. перев.*

Теорема 2. *Пусть* $\mathfrak{G}$ — *полупростая алгебра Ли над полем комплексных чисел. Группа* $\mathrm{Aut}\,\mathfrak{G}/\mathrm{Int}\,\mathfrak{G}$ *конечна и естественным образом изоморфна группе* $\mathfrak{C}/\mathfrak{S}$[1]. *Последнее означает, что множество линейных преобразований пространства* $\mathfrak{H}_0$, *индуцированных сохраняющими* $\mathfrak{H}$ *внутренними автоморфизмами алгебры* $\mathfrak{G}$, *совпадает с группой Вейля. Группа Вейля просто транзитивна на совокупности фундаментальных областей Вейля.*

---

[1]) Группа $\mathfrak{C}/\mathfrak{S}$ изоморфна группе автоморфизмов схемы простых корней алгебры $\mathfrak{G}$. См. по этому поводу [20]. — *Прим. перев.*

Глава 14

ЛИНЕЙНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ПОЛУПРОСТЫХ АЛГЕБР ЛИ[1])

П. Картье

1. Канонические образующие полупростой алгебры Ли

Основное поле K предполагается алгебраически замкнутым, характеристики 0; $\mathfrak{G}$ обозначает полупростую алгебру Ли, $\mathfrak{H}$ — ее подалгебру Картана. Пространство $\mathfrak{H}_0^*$ предполагается снабженным линейным упорядочением, совместимым со структурой векторного пространства над Q; при этом Σ обозначает систему положительных корней, $\Pi = \{\alpha_i\}$ $(1 \leqslant i \leqslant r)$ — систему простых корней.

Алгебры $\mathfrak{N}_+ = \sum\limits_{\alpha > 0} \mathfrak{G}^\alpha$ и $\mathfrak{N}_- = \sum\limits_{\alpha < 0} \mathfrak{G}^\alpha$ нильпотентны, и пространство $\mathfrak{G}$ есть прямая сумма подпространств $\mathfrak{N}_+$, $\mathfrak{N}_-$ и $\mathfrak{H}$. Алгебра $\mathfrak{N}_+$ порождается подпространствами $\mathfrak{G}^{\alpha_i}$. Действительно, пусть $\mathfrak{N}'_+$ — подалгебра алгебры $\mathfrak{N}_+$, порожденная $\mathfrak{G}^{\alpha_i}$, и предположим, что $\mathfrak{G}^\beta \subset \mathfrak{N}'_+$ при $0 < \beta < \alpha$. Если α — простой корень, то $\mathfrak{G}^\alpha \subset \mathfrak{N}'_+$ по определению; если $\alpha = \beta + \gamma$, где $\beta, \gamma > 0$, то $\beta, \gamma < \alpha$ и $\mathfrak{G}^\alpha = [\mathfrak{G}^\beta, \mathfrak{G}^\gamma] \subset \subset [\mathfrak{N}'_+, \mathfrak{N}'_+] \subset \mathfrak{N}'_+$. Точно так же алгебра $\mathfrak{N}_-$ порождена подпространствами $\mathfrak{G}^{-\alpha_i}$.

Напомним, что для всякого корня α элемент $H'_\alpha \in \mathfrak{H}_0$ определяется из условия $\alpha(H) = B(H, H'_\alpha)$ для всех $H \in \mathfrak{H}$. Положим $H_\alpha = 2H'_\alpha/\langle\alpha, \alpha\rangle$ и $H_i = H_{\alpha_i}$. Очевидно, что $\alpha(H_\alpha) = 2$ и $\alpha_i(H_j) = 2\langle\alpha_i, \alpha_j\rangle/\langle\alpha_j, \alpha_j\rangle = -a_{ji}$ (a_{ij} — числа Картана, см. гл. 8). Известно (см. там же), что если $X \in \mathfrak{G}^\alpha$, $Y \in \mathfrak{G}^{-\alpha}$, то $[X, Y] = \langle X, Y\rangle H'_\alpha$; поэтому можно выбрать

[1]) Сводка результатов по теории конечномерных представлений полупростых алгебр Ли в терминах простых корней имеется в [21]. — *Прим. ред.*

такие $X_i \in \mathfrak{G}^{\alpha_i}$, $Y_i \in \mathfrak{G}^{-\alpha_i}$, что $[X_i, Y_i] = H_i$. Наконец, так как $\alpha_i - \alpha_j$ не корень, то $[X_i, Y_j] = 0$ при $i \neq j$. Таким образом, алгебра $\mathfrak{G}$ порождается элементами X_i, Y_i, H_i $(1 \leqslant i \leqslant r)$, между которыми имеются следующие соотношения:

$$\begin{aligned} &[X_i, Y_j] = 0 \text{ при } i \neq j, && [X_i, Y_i] = H_i, \\ &[H_i, X_j] = -a_{ij}X_j, && [H_i, Y_j] = a_{ij}Y_j, \\ &[H_i, H_j] = 0. \end{aligned} \tag{1}$$

(Заметим, что эти соотношения не предполагают известным об алгебре $\mathfrak{G}$ ничего, кроме чисел Картана a_{ij}.)

Образующие X_i, Y_i, H_i алгебры $\mathfrak{G}$ мы будем называть каноническими[1]).

Докажем в заключение, что $\lambda \in \mathfrak{H}_0^*$ *тогда и только тогда, когда числа* $\lambda(H_i)$ $(1 \leqslant i \leqslant r)$ *рациональны*. Пусть $\lambda = \sum m_i\alpha_i$, где $m_i \in K$. Тогда $\lambda(H_i) = \sum m_j\alpha_j(H_i)$. Числа $\alpha_j(H_i)$ целые, поэтому если числа m_i рациональны, то и $\lambda(H_i)$ рациональны. Обратно, если числа $\lambda(H_i)$ рациональны, то числа m_i являются единственным решением системы линейных уравнений с рациональными коэффициентами и потому должны быть сами рациональны.

2. Веса линейных представлений

Пусть ρ — линейное представление алгебры $\mathfrak{G}$ в некотором, не обязательно конечномерном, векторном пространстве V.

Обозначим через V_λ множество таких векторов $v \in V$, что $\rho(H)v = \lambda(H)v$ для всех $H \in \mathfrak{H}$. Очевидно, что V_λ — подпространство в V, содержащееся в V^λ (подпространство V^λ определяется как множество векторов v, аннулируемых степенями операторов $\rho(H) - \lambda(H) \cdot 1$; см. гл. 8). Если $V_\lambda \neq 0$, то линейная форма λ называется *весом* рассматриваемого представления.

Лемма. *Сумма различных подпространств V_λ прямая, и для всякого инвариантного подпространства W*

[1]) Между каноническими образующими имеются соотношения, не вытекающие из (1). — *Прим. перев.*

имеет место равенство $W \cap \left(\sum_\lambda V_\lambda\right) = \sum_\lambda \left(W \cap V_\lambda\right)$. *Всякое конечномерное представление обладает по меньшей мере одним весом. Наконец,* $\rho(\mathfrak{G}^\alpha) V_\lambda \subset V_{\lambda+\alpha}$, *так что подпространство* $\sum_\lambda V_\lambda$ *инвариантно.*

Прежде всего сумма подпространств V^λ прямая (см. п. 1 гл. 8; данное там доказательство не предполагает конечномерности пространства V). Так как $V_\lambda \subset V^\lambda$, то сумма подпространств V_λ и подавно прямая. Применяя это к представлению в фактор-пространстве V/W пространства V по инвариантному подпространству W, получаем, что если $\sum_\lambda v_\lambda \equiv 0 \pmod W$, где $v_\lambda \in V_\lambda$, то $v_\lambda \equiv 0 \pmod W$. Следовательно, $W \cap \left(\sum_\lambda V_\lambda\right) \subset \sum_\lambda (W \cap V_\lambda)$. Обратное включение очевидно.

Если пространство V конечномерно, то в нем можно выделить подпространство, инвариантное и неприводимое относительно $\mathfrak{H}$. Это подпространство, по лемме Шура, должно быть одномерным. Следовательно, вес существует. Наконец, если $v \in V_\lambda$ и $x \in \mathfrak{G}_\alpha$, то

$$\begin{aligned}\rho(H)\rho(x)v &= \rho([H, x])v + \rho(x)\rho(H)v = \\ &= \alpha(H)\rho(x)v + \lambda(H)\rho(x)v = (\lambda(H) + \alpha(H))\rho(x)v\end{aligned}$$

и $\rho(x)v \in V_{\lambda+\alpha}$. Лемма доказана.

3. Представления со старшим вектором

Пусть ρ — представление алгебры $\mathfrak{G}$ в векторном пространстве V. Мы будем говорить, что $v \in V$ — *старший вектор представления* ρ, если $v \in V_\lambda$ для некоторого веса λ, $\rho(X_i)v = 0$ и V порождено вектором v как $\mathfrak{G}$-модуль. Вес λ будет в этом случае называться *старшим весом.*

1) Так как алгебра $\mathfrak{N}_+$ порождается элементами X_i, то старший вектор аннулируется алгеброй $\mathfrak{N}_+$. Кроме того, $\rho(H)v = \lambda(H)v$ для $H \in \mathfrak{H}$. Пространство $\mathfrak{H} + \mathfrak{N}_+ = \mathfrak{P}$ является подалгеброй в алгебре $\mathfrak{G}$, причем $\mathfrak{N}_+$ — идеал этой подалгебры, поскольку $[\mathfrak{H}, \mathfrak{N}_+] \subset \mathfrak{N}_+$. Из того, что было сказано, вытекает, что прямая Kv инвариантна относительно $\mathfrak{P}$, а значит, и относительно обертывающей алгебры U_0 алгебры $\mathfrak{P}$.

Пространство $\mathfrak{G}$ есть прямая сумма подпространств $\mathfrak{N}_-$ и $\mathfrak{P}$. Следовательно, обертывающая алгебра U алгебры $\mathfrak{G}$ совпадает как векторное пространство с тензорным произведением алгебры U_- (обертывающей алгебры алгебры $\mathfrak{N}_-$) и алгебры U_0 (следствие 3 теоремы 1' гл. 1) и, в частности, $U = U_- U_0$. По условию $\mathfrak{G}$-модуль V порожден элементом v; следовательно, $V = \rho(U)v = \rho(U_-)v$, поскольку $\rho(U_0)v = Kv$. Таким образом, V порождается элементом v также и как $\mathfrak{N}_-$-модуль.

Введем в пространство $\mathfrak{H}^*$ новое отношение порядка (частичного), совместимое со сложением, но не с умножением на числа. А именно: будем считать $\mu \leqslant \nu$ тогда и только тогда, когда $\nu - \mu = \sum m_i \alpha_i$, где m_i — целые неотрицательные числа. Подпространство $Kv + \sum_{\mu < \lambda} V_\mu$ пространства V содержит вектор v и инвариантно относительно алгебры $\mathfrak{N}_-$, так как $\rho(\mathfrak{G}^{-\alpha}) V_\mu \subset V_{\mu - \alpha}$ и $\mu - \alpha < \mu \leqslant \lambda$. Следовательно, оно совпадает с V. Таким образом, подпространство V_λ одномерно и всякий вес μ представления ρ представим в виде $\lambda - \sum m_i \alpha_i$, где m_i — целые неотрицательные числа.

Так как $V = \rho(U_-)v$ и элемент Y_i принадлежит корню $-\alpha_i$, то подпространство V_μ линейно порождается векторами вида $\rho(Y_{i_1}) \ldots \rho(Y_{i_p})v$, где $i_1, \ldots, i_p$ таковы, что $\lambda - \alpha_{i_1} - \ldots - \alpha_{i_p} = \mu$. Поскольку имеется лишь конечное число таких наборов $\{i_1, \ldots, i_p\}$, то подпространство V_μ конечномерно.

Наконец, вес λ — наибольший из всех весов в смысле введенного нами нового порядка в пространстве $\mathfrak{H}^*$ и потому однозначно определяется представлением.

2) Пусть $I \subset U$ — аннулятор старшего вектора; это левый идеал, содержащий $\mathfrak{N}_+$ и элементы $H - \lambda(H)$ при $H \in \mathfrak{H}$. Обозначим через I_λ левый идеал, порожденный $\mathfrak{N}_+$ и элементами $H - \lambda(H)$, $H \in \mathfrak{H}$. Очевидно, что $I \supset I_\lambda$. Обратно, если I — левый идеал алгебры U, содержащий I_λ, то каноническая образующая[1]) естественного представления алгебры $\mathfrak{G}$ в пространстве U/I будет старшим вектором

---

[1]) Образ единицы алгебры U при каноническом отображении U на U/I. — *Прим. перев.*

этого представления с весом λ. Поэтому для того чтобы показать, что существуют представления, обладающие старшим вектором с весом λ, достаточно доказать, что $I_\lambda \neq U$. Всякое представление со старшим вектором веса λ будет тогда эквивалентно представлению в некотором фактор-пространстве пространства U/I_λ. Пусть I'_λ — левый идеал алгебры U_0, порожденный $\mathfrak{N}_+$ и элементами $H - \lambda(H)$, $H \in \mathfrak{H}$. Идеал I'_λ содержится в ядре одномерного представления алгебры $\mathfrak{P}$, определенного следующим образом: $\theta(H) = \lambda(H) \cdot 1$, $\theta(n) = 0$ $(n \in \mathfrak{N}_+)$ (это действительно представление, так как оно одномерно и обращается в 0 на $[\mathfrak{P}, \mathfrak{P}] = \mathfrak{N}_+$). Следовательно, $I'_\lambda \neq U_0$. Имеем $U = U_- U_0$, и $I_\lambda = U_- I'_\lambda$. При отождествлении U с $U_- \otimes U_0$ идеал I_λ отождествляется с $U_- \otimes I'_\lambda$ и не может поэтому совпадать с U, что и требовалось доказать.

3) Пусть W — инвариантное подпространство пространства V. Поскольку $V = \sum_\mu V_\mu$, из леммы вытекает, что $W = \sum_\mu (W \cap V_\mu)$. Так как подпространство V_λ одномерно, то пересечение $W \cap V_\lambda$ равно 0 или V_λ; в последнем случае W содержит v и потому совпадает с V. Следовательно, если $W \neq V$, то $W \subset V^+ = \sum_{\mu < \lambda} V_\mu$. Сумма всех инвариантных подпространств, содержащихся в V^+, есть инвариантное подпространство, отличное от V. Это подпространство, очевидно, является наибольшим из инвариантных подпространств, отличных от V. Применяя эту конструкцию к представлению в пространстве U/I_λ, находим, что существует единственный максимальный левый идеал алгебры U, содержащий I_λ. Иными словами, существует единственное с точностью до эквивалентности неприводимое линейное представление алгебры $\mathfrak{G}$ со старшим весом λ.

Подытожим полученные результаты.

Теорема 1. *Пусть ρ — линейное представление полупростой алгебры Ли $\mathfrak{G}$ в векторном пространстве V, имеющее старший вес λ. Тогда пространство V разлагается в прямую сумму конечномерных подпространств V_μ; подпространство V_λ одномерно. Един-*

ственным старшим весом представления ρ является λ. Всякий вес этого представления имеет вид $\lambda - \sum m_i \alpha_i$, где m_i — целые неотрицательные числа. Наконец, для всякой линейной формы λ на пространстве $\mathfrak{H}$ существует единственное, с точностью до эквивалентности, неприводимое линейное представление алгебры $\mathfrak{G}$ со старшим весом λ.

4. Неприводимые представления конечной степени

В этом пункте мы будем изучать конечномерные неприводимые представления алгебры $\mathfrak{G}$ и получим их полную классификацию. Требование неприводимости не является существенным ограничением ввиду теоремы о полной приводимости.

1) Пусть ρ — неприводимое линейное представление алгебры $\mathfrak{G}$ в конечномерном векторном пространстве V. Согласно лемме, это представление обладает хотя бы одним весом. Имеется лишь конечное число весов представления, поскольку сумма подпространств V_μ прямая и пространство V конечномерно. Следовательно, существует вес λ, максимальный в смысле частичного упорядочения, введенного в п. 3. Так как $\lambda + \alpha_i > \lambda$, то $\lambda + \alpha_i$ не вес и $\rho(X_i)v = 0$ для всякого $v \in V_\lambda$. Так как $\mathfrak{G}$-модуль V неприводим, то всякий его ненулевой элемент является образующим. Из сказанного видно, что всякий отличный от 0 вектор из V_λ является старшим вектором. Таким образом, к представлению ρ можно применить все результаты п. 3. В частности, пространство V есть прямая сумма подпространств V_μ и всякий вес представим в виде $\lambda - \sum m_i \alpha_i$, где m_i — целые неотрицательные числа.

2) Пусть μ — какой-нибудь вес представления ρ и α — корень алгебры $\mathfrak{G}$. Положим $W = \sum\limits_k V_{\mu + k\alpha}$. Подпространство W инвариантно относительно подалгебры $\mathfrak{K}$, натянутой на векторы E_α, $E_{-\alpha}$, H_α, так как $\rho(\mathfrak{G}^\alpha) V_\mu \subset V_{\mu+\alpha}$. Поскольку $\alpha(H_\alpha) = 2$, различные веса из серии $\mu + k\alpha$ принимают разные значения на H_α. Применим к представлению алгебры $\mathfrak{K}$ в пространстве W результаты теоремы 4 гл. 8. Утверждение 1) этой теоремы дает, что число $2\mu(H_\alpha)/\alpha(H_\alpha)$ целое. Из 3) следует, что существует такой вес μ' пред-

ставления алгебры $\mathfrak{K}$ в пространстве W, что $\mu'(H_\alpha) = -\mu(H_\alpha)$. Иными словами, существует такой вес μ' представления ρ вида $\mu + k\alpha$, что форма $\mu + \mu'$ ортогональна α, но тогда $\mu' = S_\alpha(\mu)$. Таким образом, множество весов представления ρ инвариантно относительно группы Вейля, которая как раз и порождается преобразованиями S_α. При этом два веса, сопряженные относительно группы Вейля, имеют одинаковую кратность, так как из того же утверждения 3) теоремы 4 гл. 8 следует, что $\dim V_\mu = \dim V_{\mu'}$. Наконец, утверждение 4) показывает, что если $\mu + \alpha$ — вес и X — ненулевой элемент из $\mathfrak{G}^\alpha$, то $\rho(X) V_\mu \neq 0$.

3) Применяя доказанное выше к старшему весу λ, получаем, что $S_i\lambda = \lambda - \lambda(H_i)\alpha_i$ — вес. Если учесть, что всякий вес имеет вид $\lambda - \sum m_j\alpha_j$, где $m_j \geqslant 0$, то отсюда вытекает, что $\lambda(H_i)$ — целое неотрицательное число. Следовательно, для любого положительного корня α число $\lambda(H_\alpha)$ также целое и неотрицательное. Пусть, обратно, ρ — неприводимое представление алгебры $\mathfrak{G}$ в пространстве V с таким старшим весом λ, что числа $\lambda(H_i)$ $(1 \leqslant i \leqslant r)$ целые и неотрицательные. Докажем, что в этом случае пространство V конечномерно.

Пусть $\mathfrak{G}_i$ — подалгебра алгебры $\mathfrak{G}$, натянутая на элементы X_i, Y_i, H_i, и пусть T_i — наименьшее инвариантное относительно $\mathfrak{G}_i$ подпространство, содержащее старший вектор v. Представление алгебры $\mathfrak{G}_i$ в пространстве T_i имеет старший вектор v, поэтому пространство T_i порождается векторами $(\rho(Y_i))^k v$ (см. п. 3). Если $j \neq i$, то $[X_j, Y_i] = 0$ и $\rho(X_j)(\rho(Y_i))^k v = (\rho(Y_i))^k \rho(X_j) v = 0$, т. е. $\rho(X_j)$ аннулирует подпространство T_i. Всякое собственное инвариантное относительно $\mathfrak{G}_i$ подпространство U_i пространства T_i содержится в $T_i^+ = T_i \cap V^+ \subset V^+$. Так как $\rho(X_j) = 0$ на T_i, то подпространство U_i инвариантно также относительно X_j при $j \neq i$; следовательно, оно инвариантно относительно алгебры $\mathfrak{N}_+$. Далее, оно инвариантно также относительно $\mathfrak{H}$. В самом деле, веса представления ρ, содержащиеся в T_i, имеют вид $\lambda - k\alpha_i$, и, поскольку $\alpha_i(H_i) = 2$, различным весам такого вида соответствуют различные веса представления алгебры $\mathfrak{G}_i$ в пространстве T_i, откуда вытекает, что $U_i = \sum_\mu (U_i \cap V_\mu)$. Итак, подпространство U_i инвариантно относительно алгебры $\mathfrak{P} = \mathfrak{H} + \mathfrak{N}_+$ и содержится в V^+. Следовательно, $\rho(U) U_i = \rho(U_-) \rho(U_0) U_l \subset \rho(U_-) V^+ \subset V^+$, и, ввиду неприводимости представления ρ, $\rho(U) U_l = 0$. Тем более $U_l = 0$. Это показывает, что представление алгебры $\mathfrak{G}_l$ в пространстве T_l неприводимо. Его старший вес λ таков, что $\lambda(H_l)$ — целое неотрицательное число. Из результатов п. 4 гл. 8 следует, что существует неприводимое представление конечной степени алгебры $\mathfrak{G}_l$ со старшим весом λ. Доказанная нами теорема единственности позволяет утверждать, что пространство T_l конечномерно.

Рассмотрим теперь семейство F_l конечномерных подпространств пространства V, инвариантных относительно алгебры $\mathfrak{G}_l$. Если M, $N \in F_l$, то $M + N \in F_l$. Если $M \in F_l$, то подпространство $\rho(\mathfrak{G}) M$ конечномерно и

$$\rho(\mathfrak{G}_l) \rho(\mathfrak{G}) M \subset \rho([\mathfrak{G}, \mathfrak{G}_l]) M + \rho(\mathfrak{G}) \rho(\mathfrak{G}_l) M \subset \rho(\mathfrak{G}) M,$$

так что $\rho(\mathfrak{G}) M \in F_l$. Следовательно, объединение W_l всех подпространств из семейства F_l есть подпространство, инвариантное относительно алгебры $\mathfrak{G}$. Так как $T_l \in F_l$ и $v \in T_l$, то $v \in W_l$ и $W_l = V$.

Пусть μ — какой-нибудь вес представления ρ и $x \in V_\mu$. Подпространство $\sum_k V_{\mu + k\alpha_l}$ инвариантно относительно алгебры $\mathfrak{G}_l$, поэтому существует конечномерное подпространство M, инвариантное относительно $\mathfrak{G}_l$, содержащее x и содержащееся в $\sum_k V_{\mu + k\alpha_l}$. Но тогда так же, как и в 2), доказывается, что $S_l\mu$ — вес представления ρ. Так как группа Вейля порождается симметриями S_l, то множество P весов представления ρ инвариантно относительно группы Вейля.

Известно (теорема 1), что все подпространства V_μ конечномерны. Поэтому для доказательства того, что пространство V конечномерно, достаточно показать, что имеется лишь конечное число различных весов представления ρ. Пусть μ — какой-нибудь вес. Из конечного числа весов, сопряженных μ относительно группы Вейля, выберем максимальный в смысле частичного упорядочения, введенного в п. 3. Пусть это будет вес ν. Вес $S_l\nu = \nu - \nu(H_l)\alpha_l$ не может быть больше веса ν, поэтому $\nu(H_i) \geqslant 0$[1]). Таким образом, всякий вес сопряжен такому весу ν, для которого $\nu(H_i) \geqslant 0$ при всех $i = 1, \ldots, r$. Если $\nu = \lambda - \sum m_i \alpha_i = \lambda - \beta$ — такой вес, то

$$\langle \lambda, \lambda \rangle = \langle \nu, \nu \rangle + \langle \beta, \beta \rangle + 2 \langle \nu, \beta \rangle \geqslant \langle \nu, \nu \rangle,$$

поскольку

$$\langle \nu, \beta \rangle = \sum m_i \langle \nu, \alpha_i \rangle = \frac{1}{2} \sum m_i \nu(H_i) \langle \alpha_i, \alpha_i \rangle \geqslant 0.$$

Следовательно, все такие веса содержатся в пересечении дискретной решетки элементов пространства $\mathfrak{H}_0^*$ вида $\lambda - \sum m_i \alpha_i$ (m_i целые) и шара радиуса $|\lambda|$ с центром в 0. Отсюда видно, что их число конечно. Так как каждый вес сопряжен относительно группы Вейля одному из них и группа Вейля конечна, то число всех весов представления ρ конечно.

Итак, доказана следующая

Теорема 2. *Для того чтобы неприводимое линейное представление алгебры $\mathfrak{G}$ со старшим весом λ было конечномерно, необходимо и достаточно, чтобы для всякого i, $1 \leqslant i \leqslant r$, число $\lambda(H_i)$ было целым и неотрицательным. Если ρ — неприводимое линейное представление алгебры $\mathfrak{G}$ в конечномерном векторном пространстве V, то оно обладает старшим вектором и*

а) *V есть прямая сумма подпространств V_μ;*

б) *множество P всех весов представления ρ конечно и инвариантно относительно группы Вейля; если веса μ и ν сопряжены относительно группы Вейля, то подпространства V_μ и V_ν имеют одинаковую размерность;*

в) *для всякого корня α и всякого веса μ число $\mu(H_\alpha)$ целое;*

г) *если α — корень алгебры $\mathfrak{G}$ и μ — такой вес представления ρ, что $\mu + \alpha$ —* тоже *вес, то $\rho(\mathfrak{G}^\alpha) V_\mu \neq 0$.*

Замечания. 1) Предположим, что существует такой вектор $v \in V_\lambda$, что для всякого корня α по крайней мере один из операторов $\rho(E_\alpha)$, $\rho(E_{-\alpha})$ аннулирует v. Тогда множество Q

---

[1]) $\nu(H_i)$ — целое число, так как $\nu = \lambda - \sum m_i \alpha_i$, и $\nu(H_i) = \lambda(H_i) - \sum m_j \alpha_j(H_i) = \lambda(H_i) + \sum m_j a_{ij}$. — *Прим. перев.*

таких корней, что $\rho(E_\alpha)v=0$, обладает следующими свойствами: $(Q+Q)\cap\Delta\subset Q$ и $Q\cup(-Q)=\Delta$[1]. Легко показать, что можно ввести в пространство $\mathfrak{H}_0^*$ такое упорядочение, при котором $\Sigma\subset Q$. При этом v будет старшим вектором. В соединении с теоремой 1 это составляет наиболее существенную часть одного результата Хариш-Чандры.

2) Пусть A — универсальная ассоциативная алгебра, порожденная элементами X_i, Y_i, H_i $(1\leqslant i\leqslant r)$, удовлетворяющими соотношениям (1), в которых $[a, b]=ab-ba$. Доказательство теоремы единственности легко переносится на алгебру A, так что существует единственное неприводимое представление алгебры A со старшим весом λ. Так как всякое представление алгебры $\mathfrak{G}$, или, что то же, алгебры U, определяет некоторое представление алгебры A, то всякое конечномерное представление алгебры A получается из некоторого конечномерного представления алгебры $\mathfrak{G}$. Пусть $\mathfrak{D}_i$ — неприводимое представление алгебры $\mathfrak{G}$ со старшим весом λ, определяемым соотношениями $\lambda_i(H_j)=\delta_{ij}$. Если λ — такой вес, что $\lambda(H_i)=m_i$, то $\lambda=\sum m_i\lambda_i$ и неприводимое представление алгебры $\mathfrak{G}$ со старшим весом λ содержится в представлении $\bigotimes_i \mathfrak{D}_i^{\otimes m_i}$. Следовательно, $\sum\mathfrak{D}_i$ — точное представление алгебры $\mathfrak{G}$. Это дает средство для построения алгебры $\mathfrak{G}$ по числам Картана: нужно построить представление $\sum\mathfrak{D}_i$ алгебры A и рассмотреть алгебру Ли операторов, порожденную образующими алгебры A.

[1]) Напомним, что через Δ обозначается система ненулевых корней. — *Прим. ред.*

Глава 15

ТЕОРИЯ ХАРАКТЕРОВ ПОЛУПРОСТЫХ АЛГЕБР ЛИ

П. Картье

1. Отображение $\mathfrak{h}$ в обертывающей алгебре[1]

Пусть $\mathfrak{G}$ — полупростая алгебра Ли над алгебраически замкнутым полем K характеристики 0 и $U(\mathfrak{G}) = U$ — ее обертывающая алгебра. Присоединенное представление алгебры $\mathfrak{G}$ по формуле

$$\operatorname{ad} g \cdot x = gx - xg = [g, x] \tag{1}$$

продолжается до линейного представления алгебры $\mathfrak{G}$ в пространстве U. Это представление мы также будем называть присоединенным. Подпространства $U_p(\mathfrak{G})$, определяющие фильтрацию алгебры U, конечномерны и инвариантны относительно присоединенного представления алгебры $\mathfrak{G}$, поскольку

$$[g, g_1 g_2 \ldots g_p] = \sum_{i=1}^{p} g_1 g_2 \ldots [g, g_i] \ldots g_p. \tag{2}$$

Так как алгебра $\mathfrak{G}$ полупроста, то ее присоединенное представление вполне приводимо в каждом из подпространств $U_p(\mathfrak{G})$, а значит, и во всем пространстве U, которое является их объединением. Лемма 1 гл. 5 показывает, что пространство U разбивается в прямую сумму подпространств $U^{\mathfrak{h}}$ и U^0. При этом $x \in U^{\mathfrak{h}}$, если x аннулируется всеми операторами $\operatorname{ad} g$, т. е. если x коммутирует со всеми элементами из $\mathfrak{G}$, а значит, и со всеми элементами из U; таким образом, $U^{\mathfrak{h}}$ — центр алгебры U. С другой стороны, U^0 — это подпространство, порожденное элементами вида $[g, x] = \operatorname{ad} g \cdot x$ и содержащееся поэтому в подпространстве $[U, U]$, порожденном эле-

[1]) См. п. 4 гл. 5. — *Прим. ред.*

ментами $[x, y]$, где $x, y \in U$. Если $x = g_1 g_2 \ldots g_p$, то

$$[x, y] = [g_1 \ldots g_p, y] = \sum_{i=1}^{p} [g_i, g_{i+1} \ldots g_p y g_1 \ldots g_{i-1}] \in U^0,$$

так что $U^0 = [U, U]$.

Итак, алгебра U есть прямая сумма своего центра $U^\natural$ и подпространства $[U, U]$. Введем в рассмотрение проектирование $x \to x^\natural$ пространства U на $U^\natural$ параллельно $[U, U]$. Так как $xy - yx \in [U, U]$, то $(xy)^\natural = (yx)^\natural$. Очевидно, что $(x^\natural)^\natural = x^\natural$. Если $z \in U^\natural$ и $t = \sum [x_i, y_i] \in [U, U]$, то $zt = \sum [zx_i, y_i] \in [U, U]$; если $z' \in U^\natural$, то $zz' \in U^\natural$. Это показывает, что $(zx)^\natural = zx^\natural$ для всякого $x \in U$. Наконец, всякая линейная форма f на U, удовлетворяющая условию $f(xy) = f(yx)$, обращается в 0 на $[U, U]$ и поэтому однозначно определяется своими значениями на $U^\natural$, а именно $f(x) = f(x^\natural)$. Обратно, если задана линейная форма f на $U^\natural$, то формула $f(x) = f(x^\natural)$ определяет линейную форму на U, удовлетворяющую условию $f(xy) = f(yx)$.

Мы можем теперь сформулировать следующую теорему.

Теорема 1. *Обертывающая алгебра U полупростой алгебры Ли $\mathfrak{G}$ является прямой суммой своего центра $U^\natural$ и подпространства $[U, U]$, порожденного элементами $[x, y]$, где $x, y \in U$. Соответствующая этому разложению проекция $^\natural$ пространства U на $U^\natural$ обладает следующими свойствами*:

$$\text{а)}\ (x^\natural)^\natural = x^\natural,$$

$$\text{б)}\ (xy)^\natural = (yx)^\natural,$$

$$\text{в)}\ (x^\natural y)^\natural = x^\natural y^\natural$$

(*тождество Рейнольдса*).

Для того чтобы линейная форма f на пространстве U удовлетворяла условию $f(xy) = f(yx)$, необходимо и достаточно, чтобы она имела вид $f(x) = f'(x^\natural)$, где f' — ограничение формы f на подпространстве $U^\natural$.

Формула в) вытекает из доказанного выше, если учесть, что $x^{\natural}$ представляет собой общий элемент подпространства $U^{\natural}$. Заметим, что теорема 1 справедлива и в том случае, когда поле K не обязательно алгебраически замкнуто, а $\mathfrak{G}$ — произвольная редуктивная алгебра. Действительно, в этом случае присоединенное представление алгебры $\mathfrak{G}$ обращается в 0 на ее центре $\mathfrak{Z}$, и так как фактор-алгебра $\mathfrak{G}/\mathfrak{Z}$ полупроста, то присоединенное представление алгебры $\mathfrak{G}$ в пространстве U по-прежнему вполне приводимо.

Пусть теперь $\mathfrak{H}$ — подалгебра Картана алгебры $\mathfrak{G}$ и $U(\mathfrak{H})$ — ее обертывающая алгебра, рассматриваемая как подалгебра алгебры $U(\mathfrak{G})$. Докажем, что отображение $^{\natural}$ однозначно определяется своим ограничением на $U(\mathfrak{H})$[1].

Предложение 1. *Наименьшее подпространство пространства U, содержащее $U(\mathfrak{H})$ и инвариантное относительно присоединенного представления алгебры $\mathfrak{G}$, совпадает со всем пространством U. Отсюда следует, что всякий элемент $x \in U$ можно представить в виде $h + \sum [g_i, x_i]$, где $h \in U(\mathfrak{H})$, $g_i \in \mathfrak{G}_i$, $x_i \in U$, так что пространство U есть сумма подпространств $U(\mathfrak{H})$ и $[U, U]$.*

Пусть S — симметрическая алгебра над $\mathfrak{G}$: это фактор-алгебра тензорной алгебры T над $\mathfrak{G}$ по идеалу I, порожденному тензорами степени 2 вида $g \otimes g' - g' \otimes g$ $(g, g' \in \mathfrak{G})$. Если $TS(\mathfrak{G})$ — пространство симметрических тензоров, то $T(\mathfrak{G})$ — прямая сумма подпространств I и $TS(\mathfrak{G})$, в чем легко убедиться с помощью операции симметризации тензоров. Благодаря этому можно отождествить $TS(\mathfrak{G})$ и $S(\mathfrak{G})$. Присоединенное представление алгебры $\mathfrak{G}$ можно считать действующим в пространстве $T(\mathfrak{G})$ по формуле

$$\operatorname{ad} g\,(g_1 \otimes g_2 \otimes \ldots \otimes g_n) = \sum_{i=1}^{n} g_1 \otimes \ldots \otimes [g, g_i] \otimes \ldots \otimes g_n.$$

При этом оператор $\operatorname{ad} g$ перестановочен с преобразованиями симметрической группы $\mathfrak{S}_n$ на $T_n(\mathfrak{G})$ и, следовательно, сохраняет подпространства I и $TS(\mathfrak{G})$. Это позволяет снабдить

[1]) Точный смысл этого высказывания состоит в следующем: всякое линейное преобразование пространства U, совпадающее с $\natural$ на $U(\mathfrak{H})$ и удовлетворяющее условию б) теоремы 1, совпадает с $\natural$ всюду. — *Прим. перев.*

алгебру $S(\mathfrak{G})$ структурой $\mathfrak{G}$-модуля, при которой естественный изоморфизм пространств $S(\mathfrak{G})$ и $TS(\mathfrak{G})$ является изоморфизмом $\mathfrak{G}$-модулей.

С другой стороны, из теоремы Пуанкаре — Биркгофа — Витта вытекает, что $T(\mathfrak{G})$ — прямая сумма подпространства $TS(\mathfrak{G})$ и идеала $J(\mathfrak{G})$, порожденного тензорами вида $g\otimes g'-g'\otimes g-[g, g']$ $(g, g'\in\mathfrak{G})$. Так как $U=T(\mathfrak{G})/J$ и структура $\mathfrak{G}$-модуля в U индуцируется структурой $\mathfrak{G}$-модуля в T, то естественный изоморфизм пространств U и $TS(\mathfrak{G})$ является изоморфизмом $\mathfrak{G}$-модулей. Сопоставляя это с доказанным выше, получаем, что $\mathfrak{G}$-модули U и $S(\mathfrak{G})$ изоморфны. Ясно, что при этом изоморфизме подпространству $U(\mathfrak{H})\subset U$ соответствует подпространство $S(\mathfrak{H})\subset S$.

Пусть M — наименьшее подпространство пространства $S(\mathfrak{G})$, содержащее $S(\mathfrak{H})$ и инвариантное при присоединенном представлении алгебры $\mathfrak{G}$, и пусть H — такой элемент из $\mathfrak{H}$, что $\alpha(H)\neq 0$ для всякого корня $\alpha\neq 0$. Формула

$$\begin{aligned}(\operatorname{ad}E_{\alpha_1})(E_{\alpha_2}\ldots E_{\alpha_p}H^{n-p+1}) &=\\ &=\sum N_i E_{\alpha_2}\ldots E_{\alpha_1+\alpha_i}\ldots E_{\alpha_p}H^{n-p+1}-\\ &-(-p+n+1)\,\alpha_1(H)\,E_{\alpha_1}\ldots E_{\alpha_p}H^{n-p}, \qquad (3)\end{aligned}$$

где $E_\alpha\in\mathfrak{G}^\alpha$ и $[E_{\alpha_1}, E_{\alpha_i}]=N_iE_{\alpha_1+\alpha_i}$, позволяет доказать индукцией по p, что подпространство M содержит все элементы вида $x=E_{\alpha_1}\ldots E_{\alpha_p}H^{n-p}$.

Нетрудно показать, что пространство $S(\mathfrak{H})$ порождается степенями всех элементов $H\in\mathfrak{H}$, на которых отличны от нуля все ненулевые корни. Следовательно, $S(\mathfrak{G})=M$.

2. Характеры полупростой алгебры Ли

Линейная форма χ на алгебре U называется *характером алгебры* $\mathfrak{G}$, если она удовлетворяет следующим условиям:

$$\chi(xy)=\chi(yx),\quad \chi(1)=1, \qquad (4)$$

$$\chi(x^\natural y)=\chi(x)\chi(y). \qquad (5)$$

В силу теоремы 1 $\chi(x)=\chi(x^\natural)$, и формула 6) показывает, что условие (5) эквивалентно тому, что функция χ мультипликативна на центре алгебры U.

Пусть ρ—неприводимое линейное представление алгебры $\mathfrak{G}$ в конечномерном векторном пространстве V. Это представление обычным образом продолжается в представление алгебры U. Положим

$$\chi(x) = (\dim V)^{-1} \operatorname{Tr}(\rho(x)) \tag{6}$$

для всякого $x \in U$. Таким образом определенная функция χ — характер алгебры $\mathfrak{G}$. В самом деле, формулы (4) вытекают из свойств следа: $\operatorname{Tr}(1) = \dim V$, $\operatorname{Tr}(AB) = \operatorname{Tr}(BA)$. Далее, из неприводимости представления ρ следует, согласно лемме Шура, что элементы центра алгебры U представляются скалярными операторами, т. е. $\rho(x) = \alpha(x) \cdot 1$ при $x \in U^{\natural}$. Очевидно, что функция α мультипликативна на $U^{\natural}$ и что $\chi(x) = \alpha(x)$ при $x \in U^{\natural}$. Характер χ, определенный формулой (6), называется *характером представления* ρ.

Конечномерное неприводимое представление алгебры $\mathfrak{G}$ *определяется с точностью до эквивалентности своим характером.* Действительно, по теореме Бернсайда[1]), операторы $\rho(x)$, $x \in U$, образуют алгебру всех операторов в пространстве V, поэтому условие „$\chi(ax) = 0$ для всех $x \in U$" равносильно тому, что $\rho(a) = 0$. Фактор-алгебра алгебры U по идеалу, образованному такими элементами a, что $\chi(ax) = 0$ для всех $x \in U$, изоморфна, следовательно, алгебре $\mathfrak{L}(V)$ всех эндоморфизмов пространства V. Если ρ и ρ' — представления алгебры $\mathfrak{G}$ в пространствах V и V' соответственно, имеющие один и тот же характер χ, то возникает изоморфизм $\mathfrak{L}(V)$ на $\mathfrak{L}(V')$, который, как хорошо известно, всегда порождается некоторым изоморфизмом пространства V на V'. Последний изоморфизм и устанавливает эквивалентность представлений ρ и ρ'.

Иногда оказывается возможным определить характер бесконечномерного линейного представления алгебры $\mathfrak{G}$. Для этого достаточно, чтобы элементы центра алгебры U представлялись скалярными операторами: $\rho(x) = \chi(x) \cdot 1$ для $x \in U^{\natural}$. Тогда полагаем $\chi(x) = \chi(x^{\natural})$ для всех $x \in U$. Оче-

[1]) Имеется в виду теорема: ассоциативная алгебра операторов, действующая неприводимым образом в конечномерном векторном пространстве V над алгебраически замкнутым полем, совпадает с алгеброй всех линейных преобразований пространства V. — *Прим. перев.*

видно, что определенная таким образом функция χ является характером алгебры $\mathfrak{G}$. Однако она уже не определяет представление с точностью до эквивалентности (см. теорему 2).

Докажем теперь, что если представление ρ обладает старшим весом λ, то можно определить его характер χ_λ. Впоследствии мы дадим даже явную формулу для χ_λ и докажем, что все характеры алгебры $\mathfrak{G}$ получаются таким образом (см. теорему 2).

Очевидно, что если $x \in U^\natural$, то оператор $\rho(x)$ сохраняет подпространства V_μ. Так как подпространство V_λ одномерно, то для $v \in V_\lambda$ имеем $\rho(x)v = \alpha_\lambda(x)v$, где α_λ — линейная форма на $U^\natural$. Подпространство всех векторов v, для которых $\rho(x)v = \alpha_\lambda(x)v$ при любом $x \in U^\natural$, инвариантно относительно алгебры $\mathfrak{G}$ и содержит подпространство V_λ, порождающее V как $\mathfrak{G}$-модуль. Следовательно, $\rho(x) = \alpha_\lambda(x) \cdot 1$ при $x \in U^\natural$. Функция $\chi_\lambda(x) = \alpha_\lambda(x^\natural)$ будет характером алгебры $\mathfrak{G}$.

Пространство V разлагается в прямую сумму подпространств V_λ и V^+. Из равенства $\rho(x)v \equiv \beta_\lambda(x)v \pmod{V^+}$, где $x \in U$, $v \in V_\lambda$, определяется линейная форма β_λ на U, продолжающая, очевидно, форму α_λ, так что $\chi_\lambda(x) = \beta_\lambda(x^\natural)$. Возьмем разложение $\mathfrak{G} = \mathfrak{N}_- \oplus \mathfrak{H} \oplus \mathfrak{N}_+$ алгебры $\mathfrak{G}$ (см. п. 1 гл. 14) и соответствующее ему разложение $U = U_- \oplus U(\mathfrak{H}) \oplus U_+$ алгебры U. Так как пространство V_λ аннулируется алгеброй $\mathfrak{N}_+$ и $\rho(1)v = v$, то $\rho(u_+)v = \varepsilon_+(u_+)v$ для всех $u_+ \in U_+$, $v \in V_\lambda$ (ε_+ обозначает естественный гомоморфизм U_+ в K). Далее, $\rho(H)v = \lambda(H)v$ при $H \in \mathfrak{H}$ и $v \in V_\lambda$, так что если обозначить через f_λ линейную форму на $U(\mathfrak{H})$, совпадающую с λ на $\mathfrak{H}$ и равную 1 в 1, то $\rho(h)v = f_\lambda(h)v$ при всех $h \in U(\mathfrak{H})$, $v \in V_\lambda$. Наконец, алгебра $\mathfrak{N}_-$ отображает V_λ в V^+, откуда $\rho(u_-)v \equiv \varepsilon_-(u_-)v \pmod{V^+}$ для всех $u_- \in U_-$, $v \in V_\lambda$ ($\varepsilon_-(U_-)$ — канонический гомоморфизм U_- в k). Обозначим через β отображение $\varepsilon_- \otimes 1 \otimes \varepsilon_+$ пространства $U \simeq U_- \otimes U(\mathfrak{H}) \otimes U_+$ в $U(\mathfrak{H})$. Тогда $\rho(x)v \equiv f_\lambda(\beta(x))\,v \pmod{V^+}$ при $v \in V_\lambda$ и поэтому $\chi_\lambda(x) = \beta_\lambda(x^\natural) = f_\lambda(\beta(x^\natural))$. Рассмотрим отображение $\gamma : x \to \beta(x^\natural)$ пространства U в $U(\mathfrak{H})$. Очевидно, что $\chi_\lambda = f_\lambda \circ \gamma$.

Предложение 2. *Отображение* $\gamma : x \to \beta(x^{\natural})$ *индуцирует изоморфизм алгебры* $U^{\natural}$ *в алгебру* $U(\mathfrak{H})$.

Всякий элемент алгебры U есть линейная комбинация элементов вида

$$E_{-\alpha_1} \ldots E_{-\alpha_p} h E_{\beta_1} \ldots E_{\beta_q}, \tag{7}$$

где $h \in U(\mathfrak{H})$, а α_i и β_j — положительные корни. Оператор $\operatorname{ad} H$ $(H \in \mathfrak{H})$ умножает элемент (7) на $\sum_{i=1}^{p} \alpha_i(H) - \sum_{j=1}^{q} \beta_j(H)$. Всякий элемент центра $U^{\natural}$ алгебры U коммутирует, в частности, с элементами из $\mathfrak{H}$ и потому должен быть линейной комбинацией таких элементов вида (7), у которых $\sum \alpha_i - \sum \beta_j = 0$. Если при этом $q = 0$, то $\sum \alpha_i = \sum \beta_j = 0$ и $p = 0$. Отсюда следует, что каждый элемент из $U^{\natural}$ единственным образом представляется в виде суммы элемента из $U(\mathfrak{H})$ и элемента из левого идеала $\mathfrak{P} = U\mathfrak{N}_+$ алгебры U. Отображение β аннулирует идеал $\mathfrak{P} = U_- U(\mathfrak{H})(U_+ \mathfrak{N}_+)$ и тождественно на $U(\mathfrak{H})$. Следовательно, проекция элемента $x \in U^{\natural}$ на $U(\mathfrak{H})$ равна $\beta(x) = \gamma(x)$, или, что то же, $x - \gamma(x) \in \mathfrak{P}$. Имеем

$$xy - \gamma(x)\gamma(y) = (x - \gamma(x))\,y + \gamma(x)(y - \gamma(y)) =$$
$$= y(x - \gamma(x)) + \gamma(x)(y - \gamma(y)) \in \mathfrak{P},$$

откуда $\gamma(xy) = \gamma(x)\gamma(y)$ $(x,\ y \in U^{\natural})$.

Пространство $\mathfrak{G}$ двойственно себе относительно формы Киллинга, поэтому билинейная форма на пространстве $S^m(\mathfrak{G})$

$$\langle g_1 \ldots g_m,\ g'_1 \ldots g'_m \rangle = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_m} \prod_{i=1}^{m} \langle g_i,\ g'_{\sigma(i)} \rangle, \tag{8}$$

где $\mathfrak{S}_m$ — группа подстановок индексов $1, \ldots, m$, невырождена (см. п. 3). Возьмем в пространстве $\mathfrak{G}$ базу из элементов $E_\alpha \in \mathfrak{G}^\alpha$, $H_i = H_{\alpha_i}$. Коммутативные одночлены степени m от этих элементов образуют базу пространства $S^m(\mathfrak{G})$. Так как $\mathfrak{H}$ ортогонально ко всем подпространствам $\mathfrak{G}^\alpha$, то одночлены, не содержащие E_α, ортогональны в пространстве $S^m(\mathfrak{G})$ к одночленам, содержащим E_α. Первые одночлены образуют базу в подпространстве $S^m(\mathfrak{H})$ пространства $S^m(\mathfrak{G})$, вторые — в дополнительном подпространстве $\mathfrak{Q}_m$, содержащем образ пространства $\mathfrak{P} \cap U_m(\mathfrak{G})$ при каноническом отображении $U_m(\mathfrak{G})$ на $S^m(\mathfrak{G})$. Докажем, что билинейная форма (8) на пространстве $S^m(\mathfrak{G})$ инвариантна относительно присоединенного представления алгебры $\mathfrak{G}$. Достаточно рассмотреть элементы вида g^m, порождающие $S^m(\mathfrak{G})$. Имеем

$$\langle \operatorname{ad} g \cdot g'^m, g''^m \rangle = \langle m [g, g'] g'^{m-1}, g''^m \rangle = \\ = m \cdot m! \langle [g, g'], g'' \rangle \langle g', g'' \rangle^{m-1},$$

$$\langle \operatorname{ad} g \cdot g''^m, g'^m \rangle = m \cdot m! \, \langle [g, g''], g' \rangle \langle g'', g' \rangle^{m-1} = \\ = -\langle \operatorname{ad} g \cdot g'^m, g''^m \rangle.$$

Если какой-либо ненулевой элемент $s \in S^m(\mathfrak{G})$ инвариантен относительно присоединенного представления алгебры $\mathfrak{G}$, т. е. если $\operatorname{ad} g \cdot s = 0$, то он ортогонален ко всем элементам вида $\operatorname{ad} g \cdot t$, так как $\langle s, \operatorname{ad} g \cdot t \rangle = -\langle \operatorname{ad} g \cdot s, t \rangle = 0$. Если при этом $s \in \mathfrak{Q}_m$, то s ортогонален также к $S^m(\mathfrak{H})$. Из доказательства предложения 1 следует, что пространство $S^m(\mathfrak{G})$ является суммой $S^m(\mathfrak{H})$ и $(\operatorname{ad} \mathfrak{G})(S^m(\mathfrak{G}))$, так что при сделанных предположениях элемент s должен равняться нулю.

Для доказательства взаимной однозначности отображения γ на $U^{\natural}$ достаточно показать, что $U^{\natural} \cap \mathfrak{P} = 0$. Предположим, что уже доказано, что $U^{\natural} \cap U_m(\mathfrak{G}) \cap \mathfrak{P} = 0$ для $m = 0, 1, \ldots, p$ (случай $p = 0$ тривиален, поскольку $\mathfrak{G} U(\mathfrak{G}) \supset \mathfrak{P}$). Пусть $s \in U^{\natural} \cap U_{p+1}(\mathfrak{G}) \cap \mathfrak{P}$. Тогда его образ s' при каноническом отображении $U_{p+1}(\mathfrak{G})$ на $S^{p+1}(\mathfrak{G})$ содержится в $\mathfrak{Q}_{p+1}$ и инвариантен относительно присоединенного представления алгебры $\mathfrak{G}$ в пространстве $S^{p+1}(\mathfrak{G})$. Следовательно, $s' = 0$ и $s \in U^{\natural} \cap U_p(\mathfrak{G}) \cap \mathfrak{P} = 0$. Так как пространство U является объединением подпространств U_p, то тем самым наше утверждение доказано.

3. О пространстве, дуальном к симметрической алгебре

Пусть V и V' — *конечномерные векторные пространства над произвольным полем* K *характеристики* 0, *двойственные относительно билинейной формы* $\langle v, v' \rangle$.

Определим билинейную форму на $S^m(V)\times S^m(V')$ следующей формулой:

$$\langle v_1 \ldots v_m,\ v'_1 \ldots v'_m\rangle = \det_S \langle v_i,\ v'_j\rangle = \\ = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_m} \prod_{i=1}^{m} \langle v_i,\ v'_{\sigma(j)}\rangle\ ^{1)}. \qquad (9)$$

Выражение в последней части равенства (9) линейно по каждому из аргументов и симметрично по аргументам v_i и v'_i в отдельности. Это показывает, что оно действительно определяет билинейную форму на $S^m(V)\times S^m(V')$. Из формулы (9) легко выводится, что $\langle v_1 \ldots v_m,\ v'^m\rangle = m!\prod_{i=1}^{m}\langle v_i,\ v'\rangle$ и что $\langle v^m,\ v'^m\rangle = m!\langle v,\ v'\rangle^m$. Пусть $\{e_j\}$ и $\{f_j\}$ — дуальные базы пространств V и V' соответственно. Если $v=\sum x_j e_j$, $v'=\sum y_j f_j$, то $\langle v,\ v'\rangle = \sum x_j y_j$. Приравнивая коэффициенты при $\prod_j x_j^{m_j}\prod_k y_k^{n_k}$ в обеих частях равенства $\langle v^m,\ v'^m\rangle = m!\langle v,\ v'\rangle^m$, получаем

$$\left\langle \prod_j e_j^{m_j},\ \prod_k f_k^{n_k}\right\rangle = \prod_j \delta_{m_j n_j} m_j!. \qquad (10)$$

Это показывает, что *пространства* $S^m(V)$ *и* $S^m(V')$ *находятся в двойственности относительно введенного скалярного произведения.*

Пространство $S(V)$ является прямой суммой подпространств $S^m(V)$. Следовательно, дуальное к нему пространство изоморфно прямому произведению $S^*(V')$ пространств $S^m(V')$, если считать, что $\langle S^m(V),\ S^n(V')\rangle = 0$ при $m\neq n$. Для всякого $v'\in V'$ положим $e^{v'} = \sum_{m\geqslant 0}(m!)^{-1}v'^m \in S^*(V')$. Имеем $\langle v_1 \ldots v_p,\ e^{v'}\rangle = \prod_i \langle v_i,\ v'\rangle$, откуда следует, что отображение $f_{v'}: s\to\langle s,\ e^{v'}\rangle$ алгебры $S(V)$ в поле K является гомоморфизмом, переводящим 1 в 1 и v в $\langle v,\ v'\rangle$. Алгебра $S(V)$ отождествляется с алгеброй многочленов от элементов e_i, и, точно так же, алгебра $S^*(V')$ отождествляется с алгеброй формальных степенных рядов от переменных f_j.

---

[1]) $\mathfrak{S}_m$ — группа подстановок индексов $(1, 2, \ldots, m)$. — *Прим. перев.*

Формула (10) показывает, что слабая топология $\sigma(S^*(V'), S(V))$ в пространстве $S^*(V')$[1]) совпадает с обычной топологией в алгебре формальных степенных рядов[2]) и поэтому совместима со структурой алгебры $S^*(V')$. Для того чтобы оператор в пространстве $S^*(V')$ был сопряженным к некоторому оператору в пространстве $S(V)$, необходимо и достаточно, согласно теории двойственности, чтобы он был непрерывным в этой топологии. Отсюда, в частности, следует, что *оператор умножения на любой элемент в алгебре $S^*(V')$ сопряжен к некоторому оператору в алгебре $S(V)$.*

Элементы $e^{v'}$ алгебры $S^*(V')$ умножаются по обычному правилу умножения экспонент. Это вытекает из их определения и из формулы бинома. Пусть A — подпространство пространства $S^*(V')$, порожденное элементами $e^{v'}$ с такими v', что $\langle e_j, v'\rangle$ — целые неотрицательные числа. Иными словами, A — подалгебра, порожденная элементами e^{f_j}. Докажем, что *A всюду плотно в $S^*(V')$*, т. е. что для всякого $s \in S^*(V')$ и для всякого натурального числа p найдется такой элемент $a \in A$, что все компоненты элемента $s - a$ степени $\leqslant p$ равны нулю. Прежде всего элементы f_j и $e^{f_j} - 1$ имеют одинаковые компоненты степени 1 и степени 0 и $1 = e^0 \in A$. Если $\sum m_j = m$, то элемент $\prod_j (f_j)^{m_j}$ имеет те же компоненты степеней $\leqslant m$, что и $\prod_j (e^{f_j} - 1)^{m_j}$. Следовательно, для всякого однородного полинома степени m от формальных переменных f_j найдется элемент $a \in A$ с теми же однородными компонентами степеней $\leqslant m$. Пусть теперь s — произвольный элемент алгебры $S^*(V')$. Предположим, что существует элемент $a_p \in A$, имеющий одинаковые с элементом s однородные компоненты степеней $< p$. Тогда $s - a_p$ есть сумма однородного полинома P степени p и членов высших степеней. Полином P есть сумма некоторого элемента $a'_p \in A$

[1]) $\sigma(S^*(V'), S(V))$ — слабейшая из топологий в пространстве $S^*(V')$, при которой все функции $s' \to \langle s, s'\rangle$, $s \in S(V)$, непрерывны. Поле K здесь считается снабженным дискретной топологией. — *Прим. перев.*

[2]) То есть с топологией, индуцированной нормой $|s| = 2^{-p}$, где p — наименьшее целое число, для которого компонента элемента s степени p отлична от нуля ($|0| = 0$). — *Прим. перев.*

и членов степеней $> p$. Следовательно, s представляется в виде суммы элемента $a_{p+1} = a_p + a'_p$ и членов степеней $> p$. Это доказывает наше утверждение индукцией по p.

4. Леммы о корнях

Лемма 1. *Симметрия S_i, связанная с простым корнем α_i, переставляет между собой положительные корни, отличные от α_i, и переводит α_i в $-\alpha_i$.*

Пусть $\alpha = \sum_j m_j \alpha_j$ — какой-нибудь положительный корень. Имеем

$$S_i\alpha = \alpha - m\alpha_i = (m_i - m)\alpha_i + \sum_{j \neq i} m_j\alpha_j,$$

где $m = 2\langle\alpha, \alpha_i\rangle / \langle\alpha_i, \alpha_i\rangle$. Так как корни α_j образуют фундаментальную систему корней, то коэффициенты в разложении $S_i\alpha$ по α_i должны быть одного знака. Если $m_i < m$, то коэффициенты m_j, $j \neq i$, неположительны; но они в то же время неотрицательны, поскольку $\alpha > 0$. Следовательно, $m_j = 0$ при $j \neq i$, т. е. корень α пропорционален α_i. В этом случае $\alpha = \alpha_i$ и $S_i\alpha = -\alpha_i$. Если $m_i \geqslant m$, то все коэффициенты в выражении $S_i\alpha$ неотрицательны и $S_i\alpha$ — положительный корень.

Лемма 2. *Если ρ — полусумма всех положительных корней, то $\rho(H_i) = 1$.*

Имеем $S_i(\rho) = \rho - \rho(H_i)\alpha_i$. С другой стороны, по лемме 1 S_i переставляет между собой все слагаемые в выражении ρ, за исключением слагаемого $\alpha_i/2$, которое переходит в $-\alpha_i/2$. Следовательно, $S_i(\rho) = \rho - \alpha_i$ и $\rho(H_i) = 1$.

Лемма 3. *Для того чтобы линейная форма λ на $\mathfrak{H}$ превосходила все формы, сопряженные к ней относительно нетождественных преобразований группы Вейля, необходимо и достаточно, чтобы $\lambda(H_i) > 0$ для всех i.*

Условие необходимо, так как если бы для некоторого i имело место $\lambda(H_i) \leqslant 0$, то вопреки предположению было бы $S_i(\lambda) = \lambda - \lambda(H_i)\alpha_i \geqslant \lambda$. Докажем, что оно достаточно. Пусть $\lambda(H_i) > 0$ для всех i. Нужно показать, что $\lambda > \sigma\lambda$ для всякого преобразования $\sigma \neq e$, принадлежащего группе Вейля. Это верно при $\sigma = S_i$, поскольку $\lambda > S_i\lambda = \lambda - \lambda(H_i)\alpha_i$.

Докажем то же индукцией по p для произведения p симметрий S_i; этого будет достаточно, поскольку группа Вейля порождается симметриями S_i. Предположим, что неравенство $\lambda > \sigma\lambda$ доказано для всех σ, представимых в виде произведения $q < p$ симметрий S_i, и пусть $\sigma = S_{i_1} \ldots S_{i_p} = \tau S_{i_p}$. Тогда $\sigma\lambda = \tau S_{i_p}\lambda = \tau\lambda - \lambda(H_{i_p})\tau\alpha_{i_p}$. Возможны два случая: либо $\tau\alpha_{i_p}$ — положительный корень, и тогда $\sigma\lambda < \tau\lambda < \lambda$, либо $\tau\alpha_{i_p}$ — отрицательный корень. В последнем случае обозначим через k наименьшее число, обладающее тем свойством, что $\beta_l = S_{i_l} \ldots S_{i_{p-1}} \alpha_{i_p} > 0$ при всех $l \geqslant k$. Так как $\tau\alpha_{i_p} < 0$, то $k > 1$. Имеем $\beta_k > 0$ и $\beta_{k-1} = S_{i_{k-1}}\beta_k < 0$. Согласно лемме 1, отсюда следует, что $\beta_k = \alpha_{i_{k-1}}$. Таким образом, $\tau = \tau' S_{i_{k-1}} \tau''$, где $\tau''\alpha_{i_p} = \alpha_{i_{k-1}}$. Очевидно, что для любого корня α преобразование $\tau'' S_\alpha \tau''^{-1}$ — это симметрия относительно гиперплоскости, ортогональной к корню $\tau''\alpha$, т. е. $\tau'' S_\alpha \tau''^{-1} = S_{\tau''\alpha}$. В частности, $\tau'' S_{i_p} = S_{i_{k-1}}\tau''$ и $\sigma = \tau S_{i_p} = \tau' S^2_{i_{k-1}} \tau'' = \tau'\tau''$. Мы видим, что преобразование σ представимо в виде произведения $p-2$ симметрий S_i. Неравенство $\sigma\lambda < \lambda$ выполнено тогда по предположению индукции.

5. Отступление. Об экспоненциалах

Обозначим через P аддитивную группу линейных форм λ на $\mathfrak{H}$, для которых числа $\lambda(H_i)$ целые, и через P_+ — подмножество в P, выделяемое неравенствами $\lambda(H_i) \geqslant 0$. Пусть A — *групповая алгебра группы* P *с коэффициентами из* K[1]) и $\{e^\lambda\}$ — канонический базис алгебры A[2]). Тогда $e^\lambda e^\mu = e^{\lambda+\mu}$. Подалгебра B алгебры A, образованная линей-

---

[1]) То есть алгебра функций на P, отличных от нуля лишь в конечном числе точек, с операцией свертки в качестве умножения:

$$(ab)(\nu) = \sum_{\lambda+\mu=\nu} a(\lambda)\, b(\mu).$$

— *Прим. перев.*

[2]) e^λ — функция на P, равная 1 в точке λ и нулю в остальных точках. Элементы e^λ можно интерпретировать так же, как линейные формы на $S(\mathfrak{H})$ (см. п. 3). — ***Прим. перев.***

ными комбинациями с коэффициентами из K элементов e^{λ} с $\lambda \in P_+$, имеет элементы e^{λ_i}, где $\lambda_i(H_j) = \delta_{ij}$, в качестве алгебраически независимых образующих. Следовательно, она является областью целостности с однозначным разложением на простые множители. Алгебра A может быть отождествлена с алгеброй отношений алгебры B по множеству элементов $e^{\lambda}(\lambda \in P_+)$, замкнутому относительно умножения, поэтому A — также *область целостности с однозначным разложением на простые множители.*

Рассмотрим модуль $M = A \otimes \mathfrak{H}^*$ над кольцом A. Введем в нем скалярное произведение

$$\langle a \otimes \lambda,\ b \otimes \mu \rangle = ab \langle \lambda,\ \mu \rangle.$$

Определим оператор Δ (*лапласиан*) в алгебре A

$$\Delta(e^{\lambda}) = \langle \lambda,\ \lambda \rangle e^{\lambda}$$

и линейное отображение g (*градиент*) алгебры A в M

$$g(e^{\lambda}) = e^{\lambda} \otimes \lambda.$$

Имеют место следующие соотношения:

$$g(ab) = b \cdot g(a) + a \cdot g(b), \tag{11}$$

$$\Delta(ab) = a\Delta(b) + 2\langle g(a),\ g(b)\rangle + \Delta(a)\,b. \tag{12}$$

Их достаточно проверить для случая $a = e^{\lambda}$, $b = e^{\mu}$. При этом второе соотношение, например, вытекает из тождества

$$\langle \lambda + \mu,\ \lambda + \mu \rangle = \langle \lambda,\ \lambda \rangle + 2\langle \lambda,\ \mu \rangle + \langle \mu,\ \mu \rangle.$$

Группа Вейля W действует в пространстве A по формуле $\sigma \cdot e^{\lambda} = e^{\sigma\lambda}$. Всякое преобразование $\sigma \in W$ пространства $\mathfrak{H}^*$, будучи ортогональным, имеет определитель ± 1. Элемент a алгебры A называется *симметрическим*, если $\sigma \cdot a = a$ для всякого $\sigma \in W$, и *кососимметрическим*, если $\sigma \cdot a = (\det \sigma)\, a$ для всякого $\sigma \in W$. Для того чтобы элемент $a \in A$ был симметрическим, необходимо и достаточно, чтобы $S_i a = a$ для всех i; для того чтобы он был кососимметрическим, необходимо и достаточно, чтобы $S_i a = -a$ для всех i. Это следует из того, что $\det S_i = -1$ и симметрии S_i порождают группу W.

Для всякого $a \in A$ положим

$$Q \cdot a = \sum_{\sigma \in W} (\det \sigma) \sigma \cdot a.$$

Для всякого $\sigma \in W$ имеем $\sigma \cdot Qa = \sum_{\sigma'} (\det \sigma') \sigma\sigma' \cdot a = (\det \sigma)^{-1} Q \cdot a$, так что элемент $Q \cdot a$ кососимметричен. Если a — кососимметрический элемент, то $Qa = wa$, где w — порядок группы Вейля. Это показывает (характеристика поля K равна 0), что *оператор Q отображает алгебру A на подпространство кососимметрических элементов.* Значит, всякий кососимметрический элемент из A может быть представлен как линейная комбинация элементов $Q \cdot e^{\lambda} = \sum_{\sigma} (\det \sigma) e^{\sigma\lambda}$, причем можно ограничиться такими λ, для которых $\lambda \geqslant \sigma\lambda$ при всех $\sigma \in W$. Для таких λ, в частности, $\lambda \geqslant S_i\lambda$, откуда $\lambda(H_i) \geqslant 0$. Если $\lambda(H_i) = 0$ для некоторого i, то $S_i\lambda = \lambda$. Возьмем множество $T \subset W$, пересекающееся ровно по одному элементу с каждым классом смежности группы W по подгруппе $\{e, S_i\}$. Тогда $W = T \cup TS_i$ и $Q \cdot e^{\lambda} = \sum_{\sigma \in T} ((\det \sigma) e^{\sigma\lambda} + (\det \sigma S_i) e^{\sigma S_i \lambda}) = 0$, так как $\det S_i = -1$. Таким образом, *всякий кососимметрический элемент алгебры A записывается в виде линейной комбинации элементов $Q \cdot e^{\lambda}$ с такими λ, для которых $\lambda(H_i) > 0$ при всех i.*

Пусть α — какой-нибудь корень и a — такой элемент из A, что $S_\alpha a = -a$. Очевидно, что a — линейная комбинация элементов вида

$$e^{\lambda} - S_\alpha e^{\lambda} = e^{\lambda} - e^{\lambda - \lambda(H_\alpha)\alpha} = e^{\lambda}\left(1 - (e^{-\alpha})^{\lambda(H_\alpha)}\right)$$

($\lambda(H_\alpha)$ — целое число). Такие элементы делятся на $1 - e^{-\alpha}$, поэтому и a делится на $1 - e^{-\alpha}$. Если a — кососимметрический элемент, то он делится на все элементы $1 - e^{-\alpha}$, $\alpha > 0$, попарно простые между собой[1]), а значит, и на их произведение, поскольку в кольце A разложение на простые мно-

[1]) Нетрудно доказать, что если $\lambda \neq k\mu$, где $\mu \in P$ и $k > 1$ — целое число, то элемент $e^{\lambda} - 1$ алгебры A простой (доказательство можно свести к случаю $\lambda = \lambda_1$). Отсюда следует, что $e^{\lambda} - 1$ и $e^{\mu} - 1$ не взаимно просты только тогда, когда λ и μ пропорциональны. — *Прим. перев.*

жители единственно. Таким образом, *всякий кососимметрический элемент алгебры A делится на элемент*

$$\prod_{\alpha>0}\left(e^{\frac{1}{2}\alpha}-e^{-\frac{1}{2}\alpha}\right)=e^{\rho}\prod_{\alpha>0}(1-e^{-\alpha})=D.$$

При применении к элементу D преобразования S_i множители, отличные от $e^{\frac{1}{2}\alpha_i}-e^{-\frac{1}{2}\alpha_i}$, переставляются между собой согласно лемме 1, а множитель $e^{\frac{1}{2}\alpha_i}-e^{-\frac{1}{2}\alpha_i}$ переходит в $e^{-\frac{1}{2}\alpha_i}-e^{\frac{1}{2}\alpha_i}=-\left(e^{\frac{1}{2}\alpha_i}-e^{-\frac{1}{2}\alpha_i}\right)$. Следовательно, $S_iD=-D$, и элемент D кососимметричен. Так как D есть линейная комбинация элементов e^{λ} с показателями λ, заключенными между ρ и $-\rho$, то в разложении D по элементам $Q\cdot e^{\lambda}$ показатели λ можно считать удовлетворяющими условию $\rho\gg\sigma\lambda\gg-\rho$ при всех $\sigma\in W$. Каждый элемент $Q\cdot e^{\lambda}$ кососимметричен и потому делится на D: $Q\cdot e^{\lambda}=bD$. „Старший" член произведения bD равен произведению старших членов в b и D, а „младший" член — произведению младших членов b и D. Следовательно, разность между показателями старшего и младшего членов в выражении $Q\cdot e^{\lambda}$ равна сумме соответствующих разностей для b и D. Это возможно, только если $\lambda=\rho$ и b — константа. Таким образом, элемент D пропорционален $Q\cdot e^{\rho}$. Так как старшие члены у D и $Q\cdot e^{\rho}$ равны e^{ρ}, то $D=Q\cdot e^{\rho}$.

Если a — симметрический элемент алгебры A, то aD — кососимметрический элемент и представляется в виде линейной комбинации элементов $Q\cdot e^{\lambda}$, где $\lambda(H_i)>0$ при всех i, или, что то же, элементов $Q\cdot e^{\lambda+\rho}$, где $\lambda\in P_+$[1]). Каждый из элементов $Q\cdot e^{\lambda+\rho}$ кососимметричен и делится на $D=Q\cdot e^{\rho}$. Следовательно, элемент a представляется в виде линейной комбинации элементов $Q\cdot e^{\lambda+\rho}/Q\cdot e^{\rho+4}(\lambda\in P_+)$.

6. Характеры конечномерных представлений

Пусть ρ — неприводимое линейное представление алгебры $\mathfrak{G}$ в конечномерном векторном пространстве V, имеющее старший вес Λ. Обозначим через m_λ кратность веса λ в пред-

[1]) Так как $\rho(H_i)=1$ (лемма 2), то множество таких $\lambda\in P$, что $\lambda(H_i)>0$, получается из P_+ сдвигом на ρ. — *Прим. перев.*

ставлении ρ, равную размерности подпространства V_λ. Если $h \in U(\mathfrak{H}) \subset U(\mathfrak{G})$, то оператор $\rho(h)$ скалярен на V_λ и имеет там собственное значение $f_\lambda(h) = \langle h, e^\lambda \rangle$, где $e^\lambda = \sum_{m \geqslant 0} (m!)^{-1} \lambda^m$ — линейная форма на $U(\mathfrak{H})$ (см. п. 3). Следовательно,

$$\mathrm{Tr}_V\, \rho(h) = \sum_\lambda m_\lambda f_\lambda(h) = \left\langle h, \sum_\lambda m_\lambda e^\lambda \right\rangle;$$

при этом $\dim V = \sum_\lambda m_\lambda$. Это приводит нас к рассмотрению элемента $\psi_\Lambda = \sum_\lambda m_\lambda e^\lambda$ алгебры A. Так как два веса представления ρ, сопряженные относительно группы Вейля, имеют одинаковую кратность, то ψ_Λ — симметрический элемент и он линейно выражается через элементы вида $Q \cdot e^{\lambda+\rho}/Q \cdot e^\rho$. В дальнейшем мы покажем, что он равен $Q \cdot e^{\Lambda+\rho}/Q \cdot e^\rho$.

Лемма 4. *Если элементы $E_\alpha \in \mathfrak{G}^\alpha$ выбраны так, что $\langle E_\alpha, E_{-\alpha} \rangle = 1$, и*

$$t(\lambda, \alpha) = \mathrm{Tr}_{V_\lambda}(\rho(E_\alpha)\, \rho(E_{-\alpha})),$$

то

$$t(\lambda, \alpha) - t(\lambda + \alpha, \alpha) = m_\lambda \langle \lambda, \alpha \rangle. \tag{13}$$

В сумме T подпространств V_λ и $V_{\lambda+\alpha}$ определим следующим образом операторы P_+ и P_- $(x \in V_\lambda,\ y \in V_{\lambda+\alpha})$:

$$P_+ x = \rho(E_\alpha)\, x,\quad P_- x = 0;\quad P_+ y = 0,\quad P_- y = \rho(E_{-\alpha})\, y.$$

Получаем

$$[P_+, P_-]\, x = -\rho(E_{-\alpha})\, \rho(E_\alpha)\, x = \langle \lambda, \alpha \rangle\, x - \rho(E_\alpha)\, \rho(E_{-\alpha})\, x,$$

$$[P_+, P_-]\, y = \rho(E_\alpha)\, \rho(E_{-\alpha})\, y,$$

откуда

$$0 = \mathrm{Tr}_T([P_+, P_-]) = \langle \lambda, \alpha \rangle\, m_\lambda - t(\lambda, \alpha) + t(\lambda + \alpha, \alpha),$$

что и дает формулу (13).

Выберем в $\mathfrak{H}$ элементы K_j, удовлетворяющие условиям $\langle H_i, K_j \rangle = \delta_{ij}$. Тогда базы $\langle E_\alpha, H_i \rangle$ и $\langle E_{-\alpha}, K_j \rangle$ пространства $\mathfrak{G}$ дуальны. Элемент Казимира равен, следовательно, $\Gamma = \sum_\alpha E_\alpha E_{-\alpha} + \sum_i H_i K_i$. Он принадлежит центру алгебры $U(\mathfrak{G})$, и, так как представление ρ неприводимо, из леммы Шура вытекает, что оператор $\rho(\Gamma)$ скалярен, т. е. $\rho(\Gamma) = \gamma \cdot 1$.

Тогда имеем:

$$\gamma \cdot m_\lambda = \mathrm{Tr}_{V_\lambda}(\rho(\Gamma)) = \sum_\alpha \mathrm{Tr}_{V_\lambda}(\rho(E_\alpha)\rho(E_{-\alpha})) +$$

$$+ \sum_i \mathrm{Tr}_{V_\lambda}(\rho(H_i)\rho(K_i)) = \sum_\alpha t(\lambda, \alpha) + \sum_i m_\lambda \lambda(H_i)\lambda(K_i) =$$

$$= \sum_\alpha t(\lambda, \alpha) + m_\lambda \langle \lambda, \lambda \rangle.$$

Окончательно

$$m_\lambda(\gamma - \langle \lambda, \lambda \rangle) = \sum_\alpha t(\lambda, \alpha). \tag{14}$$

Рассмотрим произведение

$$R = \prod_\alpha (e^\alpha - 1) = \prod_{\alpha > 0} (e^\alpha - 1)(e^{-\alpha} - 1) = -D^2.$$

Вычислим $R(\gamma\psi_\Delta - \Delta(\psi_\Delta)) = S$:

$$S = \prod_\beta (e^\beta - 1) \sum_\lambda m_\lambda e^\lambda (\gamma - \langle \lambda, \lambda \rangle) = \qquad \text{(формула (14))}$$

$$= \prod_\beta (e^\beta - 1) \sum_\lambda e^\lambda \sum_\alpha t(\lambda, \alpha) =$$

$$= \sum_\alpha \prod_{\beta \neq \alpha} (e^\beta - 1) \sum_\lambda t(\lambda, \alpha)(e^{\lambda+\alpha} - e^\lambda) =$$

$$= \sum_\alpha \prod_{\beta \neq \alpha} (e^\beta - 1) \sum_\lambda e^{\lambda+\alpha}(t(\lambda, \alpha) - t(\lambda+\alpha, \alpha)) = \qquad \text{(лемма 4)}$$

$$= \sum_\alpha \prod_{\beta \neq \alpha} (e^\beta - 1) \sum_\lambda m_\lambda \langle \lambda, \alpha \rangle e^{\lambda+\alpha} =$$

$$= \Big\langle \sum_\alpha e^\alpha \prod_{\beta \neq \alpha} (e^\beta - 1) \otimes \alpha, \sum_\lambda m_\lambda e^\lambda \otimes \lambda \Big\rangle =$$

$$= \langle g(R), g(\psi_\Delta) \rangle.$$

После деления на D получаем

$$D(\gamma\psi_\Delta - \Delta(\psi_\Delta)) = 2\langle g(D), g(\psi_\Delta) \rangle,$$

откуда

$$\gamma(D\psi_\Delta) = D\Delta(\psi_\Delta) + 2\langle g(D), g(\psi_\Delta) \rangle = \Delta(D\psi_\Delta) - \Delta(D)\psi_\Delta.$$

Так как $\Delta(Q \cdot e^\rho) = \langle \rho, \rho \rangle Q \cdot e^\rho$, т. е. $\Delta(D) = \langle \rho, \rho \rangle D$, то $D\psi_\Delta$ — собственный вектор оператора Δ. Для того чтобы вычислить соответствующее собственное значение, заметим, что старший член произведения $D\psi_\Delta$ равен $e^{\Delta+\rho}$ и при применении оператора Δ он умножается на $\langle \Lambda+\rho, \Lambda+\rho\rangle$. Следовательно, $D\psi_\Lambda$ — собственный вектор оператора Δ с собственным значением $\langle \Lambda+\rho, \Lambda+\rho\rangle$. Далее, $D\psi_\Lambda$ — антисимметрический элемент, и

$$w\,D\psi_\Lambda = Q(D\,\psi_\Lambda) = \sum_\sigma \sum_\lambda (\det \sigma)\, m_\lambda Q \cdot e^{\lambda+\sigma\rho}.$$

Каждый член этой суммы есть собственный вектор оператора Δ с собственным значением $\langle \lambda+\sigma\rho, \lambda+\sigma\rho\rangle$, поэтому в действительности можно ограничиться теми членами, для которых $\langle \lambda+\sigma\rho, \lambda+\sigma\rho\rangle = \langle \Lambda+\rho, \Lambda+\rho\rangle$. Эти члены находятся с помощью следующей леммы.

Лемма 5. *Если* λ — *вес представления* ρ, *не равный* $\sigma\Lambda$, *то* $|\lambda+\sigma\rho| < |\Lambda+\rho|$.

Как мы видели в п. 4 гл. 14, каждый вес λ сопряжен относительно группы Вейля некоторому весу μ, для которого $\mu(H_i) \geqslant 0$ и $|\mu| \leqslant |\Lambda|$. При этом $\langle\lambda, \lambda\rangle = \langle\mu, \mu\rangle \leqslant \langle\Lambda, \Lambda\rangle$. С другой стороны, $\sigma^{-1}\lambda$ как вес представления ρ имеет вид $\Lambda - \sum m_i\alpha_i$, где m_i — целые неотрицательные числа. Следовательно,

$$\langle\lambda, \sigma\rho\rangle = \langle\sigma^{-1}\lambda, \rho\rangle = \langle\Lambda, \rho\rangle - \sum_i m_i \langle\rho, \alpha_i\rangle$$

и

$$|\Lambda+\rho|^2 - |\lambda+\sigma\rho|^2 = |\Lambda|^2 - |\lambda|^2 + 2\sum_i m_i\langle\rho, \alpha_i\rangle.$$

Согласно лемме 2,

$$\rho(H_i) = \frac{2\langle\rho, \alpha_i\rangle}{\langle\alpha_i, \alpha_i\rangle} = 1,$$

так что

$$|\Lambda+\rho|^2 - |\lambda+\sigma\rho|^2 = |\Lambda|^2 - |\lambda|^2 + \sum_i m_i |\alpha_i|^2 \geqslant 0,$$

причем равенство может иметь место только в том случае, когда все числа m_i равны нулю, т. е. когда $\sigma^{-1}\lambda = \Lambda$.

Возвращаясь к выражению для $D\psi_\Lambda$, получаем

$$D\,\psi_\Lambda = w^{-1} \sum_\sigma (\det\sigma)^2 m_\Lambda Q \cdot e^{\Lambda+\rho} = m_\Lambda Q \cdot e^{\Lambda+\rho},$$

откуда $\psi_\Lambda = Q\cdot e^{\Lambda+\rho}/Q\cdot e^{\rho}$, поскольку $m_\Lambda = 1$.

Осталось найти $\dim V = \sum_{\lambda} m_\lambda$. Рассмотрим гомоморфизм алгебры A в K, при котором все элементы e^λ переходят в 1. При этом элемент ψ_Λ переходит как раз в $\sum_{\lambda} m_\lambda$. Этот гомоморфизм можно получить следующим образом: сначала заменить e^λ на формальный степенной ряд $e^{T\langle\lambda, \rho\rangle}$ от T, затем каждому степенному ряду поставить в соответствие его свободный член. Пусть f_μ — гомоморфизм, ставящий в соответствие элементу e^λ формальный ряд $e^{T\langle\lambda, \mu\rangle}$. Тогда

$$f_\mu(Q \cdot e^\lambda) = \sum_\sigma (\det\sigma)\, e^{T\langle\sigma\lambda, \mu\rangle} = \sum_\sigma (\det\sigma)\, e^{T\langle\lambda, \sigma^{-1}\mu\rangle} =$$
$$= f_\lambda(Q \cdot e^\mu).$$

Следовательно,

$$f_\rho(Q \cdot e^\lambda) = f_\lambda(Q \cdot e^\rho) = \prod_{\alpha>0}\left(e^{\frac{1}{2}T\langle\alpha, \lambda\rangle} - e^{-\frac{1}{2}T\langle\alpha, \lambda\rangle}\right).$$

Младший член этого ряда равен $\prod_{\alpha>0} T\langle\alpha, \lambda\rangle$. Очевидно, что свободный член ряда $f_\rho(\psi_\Lambda) = f_\rho(Q \cdot e^{\Lambda+\rho})/f_\rho(Q \cdot e^\rho)$ равен $\prod_{\alpha>0}\langle\Lambda+\rho, \alpha\rangle \Big/ \prod_{\alpha>0}\langle\rho, \alpha\rangle$.

Итак, доказаны следующие формулы:

$$\operatorname{Tr}(\rho(h)) = \left\langle h, \frac{\sum_\sigma (\det\sigma)\, e^{\sigma(\Lambda+\rho)}}{\sum_\sigma (\det\sigma)\, e^{\sigma\rho}} \right\rangle \quad (h \in U(\mathfrak{H})), \tag{15}$$

$$\dim V = \prod_{\alpha>0} \frac{\langle\Lambda+\rho, \alpha\rangle}{\langle\rho, \alpha\rangle}. \tag{16}$$

7. Вычисление характеров полупростой алгебры Ли

Используя полученные результаты, вычислим отображение γ, введенное в п. 2, точнее, его ограничение на подалгебре $U(\mathfrak{H})$ алгебры $U(\mathfrak{G})$. Этого будет достаточно, так как, согласно предложению 1, $U(\mathfrak{G})$ — сумма $U(\mathfrak{H})$ и $[U, U]$.

Так как $\mathfrak{H}$ — коммутативная алгебра Ли, то $U(\mathfrak{H}) = S(\mathfrak{H})$. Для всякого $h \in U(\mathfrak{H})$ имеем

$$\chi_\lambda(h) = f_\lambda(\gamma(h)) = \langle \gamma(h), e^\lambda \rangle = \langle h, {}^t\gamma\, e^\lambda \rangle.$$

Если Λ — старший вес неприводимого конечномерного представления, то $\chi_\Lambda(h) = (\dim V)^{-1}\operatorname{Tr}(\rho(h))$, откуда, используя формулы (15) и (16), получаем

$$
{}^t\gamma\, e^{\Lambda} = \frac{\prod_{\alpha>0}\langle\rho, \alpha\rangle}{Q\cdot e^{\rho}} \cdot \frac{Q\cdot e^{\Lambda+\rho}}{\prod_{\alpha>0}\langle\Lambda+\rho, \alpha\rangle} \tag{17}
$$

($\Lambda(H_i)$ — целые неотрицательные числа, т. е. $\Lambda \in P_+$).

Введем три оператора δ_i в пространстве $U(\mathfrak{H})$, для которых будет выполняться соотношение $\gamma\delta_3 = \delta_1\delta_2$.

Оператор δ_1 определим как автоморфизм алгебры $U(\mathfrak{H})$, переводящий $H \in \mathfrak{H}$ в $H + \rho(H)$. Далее, группа Вейля — это группа линейных преобразований пространства $\mathfrak{H}$; она продолжается единственным образом в группу автоморфизмов алгебры $U(\mathfrak{H})$. Так как $S_\alpha H \equiv H (\operatorname{mod} H_\alpha)$ для $H \in \mathfrak{H}$, то $S_\alpha(h) \equiv h (\operatorname{mod} H_\alpha)$ для всех $h \in U(\mathfrak{H})$, поскольку S_α — автоморфизм алгебры $U(\mathfrak{H})$ и $\mathfrak{H}$ порождает $U(\mathfrak{H})$. Если h — кососимметрический элемент алгебры $U(\mathfrak{H})$ в том смысле, что $S_\alpha h = -h$ для всех α, то $h \equiv 0 (\operatorname{mod} H_\alpha)$ для всякого α, т. е. h делится на все элементы H_α. Алгебра $U(\mathfrak{H})$ изоморфна алгебре многочленов, и поэтому в ней разложение на простые множители единственно. Следовательно, h делится на $\prod_{\alpha>0} H_\alpha = k$. Элемент k кососимметричен, так как по лемме 1 преобразование S_i переставляет между собой множители в выражении k, отличные от H_i, а множитель H_i переводит в $-H_i$, откуда $S_i k = -k$. Теперь определим оператор δ_2 следующей формулой: $\delta_2(h) = \left(\sum_\sigma (\det\sigma)\,\sigma h\right)/k$. Элемент $\delta_2(h)$ симметричен, и, обратно, всякий симметрический элемент есть отношение кососимметрического элемента к k и потому имеет вид $\delta_2(h)$. Таким образом, оператор δ_2 отображает пространство $U(\mathfrak{H})$ на подпространство симметрических элементов. Наконец, оператор δ_3 определим как сопряженный к оператору умножения на $Q\cdot e^{\rho}/\prod_{\alpha>0}\langle\rho, \alpha\rangle$ (см. п. 3). Так как кольцо формальных степенных рядов не имеет делителей нуля, то оператор ${}^t\delta_3$ взаимно однозначен и, значит, оператор δ_3 отображает $U(\mathfrak{H})$ на $U(\mathfrak{H})$.

Отображение $e^\lambda \circ \delta_1$ является гомоморфизмом алгебры $U(\mathfrak{H})$ в K, переводящим $H \in \mathfrak{H}$ в $\lambda(H) + \rho(H)$. Следовательно, $e^\lambda \circ \delta_1 = e^{\lambda+\rho}$, или ${}^t\delta_1 e^\lambda = e^{\lambda+\rho}$. Далее,

$$\langle \delta_2(h), e^\lambda \rangle = \Big\langle \Big(\sum_\sigma (\det\sigma)\,\sigma h\Big) \Big/ \prod_{\alpha>0} H_\alpha, e^\lambda \Big\rangle =$$

$$= \Big(\sum_\sigma (\det\sigma) \langle \sigma h, e^\lambda \rangle\Big) \Big/ \prod_{\alpha>0} \langle \lambda, \alpha \rangle,$$

откуда ${}^t\delta_2\, {}^t\delta_1 e^\lambda = \Big(\sum_\sigma (\det\sigma)\, e^{\sigma(\lambda+\rho)}\Big) \Big/ \prod_{\alpha>0} \langle \lambda+\rho, \alpha \rangle$. Формула (17) показывает, что ${}^t\delta_2\, {}^t\delta_1 e^\lambda = {}^t\delta_3\, {}^t\gamma e^\lambda$ при $\lambda \in P_+$. В п. 3 было доказано, что элементы e^λ, $\lambda \in P_+$, образуют плотную систему в пространстве, дуальном к $U(\mathfrak{H})$. Из этого вытекает, что ${}^t\delta_2\, {}^t\delta_1 = {}^t\delta_3\, {}^t\gamma$, или $\delta_1\delta_2 = \gamma\delta_3$, а также что ${}^t\gamma e^\lambda$ задается формулой (17) при всех $\lambda \in \mathfrak{H}^*$.

Так как оператор δ_3 отображает $U(\mathfrak{H})$ на себя, то образ оператора γ равен образу оператора $\gamma\delta_3 = \delta_1\delta_2$, который, в свою очередь, равен образу при автоморфизме δ_1 подалгебры S симметрических элементов алгебры $U(\mathfrak{H})$. Хорошо известна теорема (см. доказательство в п. 9) о том, что всякий гомоморфизм алгебры S в K продолжается в гомоморфизм алгебры $U(\mathfrak{H})$ в K и, следовательно, имеет вид $s \to \langle s, e^\lambda \rangle$. Отсюда следует, что всякий гомоморфизм алгебры $\gamma(U^\natural) = \gamma(U(\mathfrak{H})) = \delta_1(S)$ в K имеет вид $s \to \langle s, e^\lambda \rangle$, так что всякий характер алгебры $\mathfrak{G}$ имеет вид $e^\lambda \circ \gamma = \chi_\lambda$ [1]) и задается формулой (17).

Для того чтобы $\chi_\lambda = \chi_\mu$, необходимо и достаточно, чтобы формы e^λ и e^μ совпадали на $\gamma(U(\mathfrak{H})) = \delta_1(S)$, т. е. чтобы формы ${}^t\delta_1 e^\lambda = e^{\lambda+\rho}$ и ${}^t\delta_1 e^\mu = e^{\mu+\rho}$ совпадали на S. В силу теоремы, доказанной в п. 9, это эквивалентно тому, что формы $\lambda+\rho$ и $\mu+\rho$ сопряжены относительно группы Вейля.

Теорема 2. (Хариш-Чандра.) *Неприводимое линейное представление $\mathcal{D}_\lambda$ полупростой алгебры Ли $\mathfrak{G}$, имеющее старший вес λ, обладает характером χ_λ,*

---

[1]) Характер алгебры $\mathfrak{G}$ — это мультипликативная функция χ на $U^\natural$. В силу предложения 2, χ можно представить в виде $\chi = \varphi \circ \gamma$, где φ — мультипликативная функция на $\gamma(U^\natural)$. — *Прим. перев.*

задаваемым формулой

$$\chi_\lambda(h) = \left\langle h, \prod_{\alpha>0} \frac{\langle \rho, \alpha \rangle}{\langle \lambda+\rho, \alpha \rangle} \cdot \frac{\sum_\sigma (\det \sigma)\, e^{\sigma(\lambda+\rho)}}{\sum_\sigma (\det \sigma)\, e^{\sigma\rho}} \right\rangle. \qquad (18)$$

Всякий характер алгебры $\mathfrak{G}$ *имеет такой вид. Наконец,* $\chi_\lambda = \chi_\mu$ *тогда и только тогда, когда формы* $\lambda+\rho$ *и* $\mu+\rho$ *сопряжены относительно группы Вейля.*

Заметим, что если $\lambda \neq \mu$, но $\lambda+\rho = \sigma(\mu+\rho)$, то представления $\mathscr{D}_\lambda$ и $\mathscr{D}_\mu$ не эквивалентны, но имеют один и тот же характер. Подобная ситуация, как мы видели в п. 2, невозможна для конечномерных представлений.

8. Отображение $\natural$ в симметрической алгебре над $\mathfrak{G}$

Будем считать, что присоединенное представление алгебры $\mathfrak{G}$ продолжено до ее представления в симметрической алгебре $S(\mathfrak{G})$. По теореме Пуанкаре — Биркгофа — Витта пространство $U_p(\mathfrak{G})/U_{p-1}(\mathfrak{G})$ отождествляется с $S^p(\mathfrak{G})$. Легко видеть, что это отождествление совместимо со структурами $\mathfrak{G}$-модулей. Если вообще M и N — какие-нибудь $\mathfrak{G}$-модули и p — $\mathfrak{G}$-гомоморфизм M на N, то $p(M^0) = N^0$, $p(M^\natural) = N^\natural$ и $p(m^\natural) = p(m)^\natural$. В частности, это применимо к каноническому проектированию $u \to u'$ $\mathfrak{G}$-модуля $U_p(\mathfrak{G})$ на $\mathfrak{G}$-модуль $S^p(\mathfrak{G})$.

Подпространство $S^p(\mathfrak{H})$ пространства $S^p(\mathfrak{G})$ обладает ортогональным дополнением $\mathfrak{Q}_p$ (см. доказательство предложения 2). Мы попытаемся охарактеризовать ортогональную проекцию T множества $S^p(\mathfrak{G})^\natural$ на $S^p(\mathfrak{H})$.

Предложение 1 (точнее, его небольшое усиление) показывает, что всякий элемент $u \in U_p(\mathfrak{G})$ представляется в виде $u = h + \sum [g_i, u_i]$, где $h \in U_p(\mathfrak{H})$, $u_i \in U_p(\mathfrak{G})$. При этом $u^\natural = h^\natural = \gamma(h) + p$, где $\gamma(h) \in U_p(\mathfrak{H})$ и $p \in \mathfrak{P}$. Применяя гомоморфизм $u \to u'$, находим $(u')^\natural = (u^\natural)' = \gamma(h)' + p'$. Элемент p' лежит в $\mathfrak{Q}_p$, элемент $\gamma(h)'$ — в $S^p(\mathfrak{H})$. Следовательно, пространство T состоит из элементов вида $\gamma(h)'$, $h \in U_p(\mathfrak{H})$.

Поскольку алгебра $\mathfrak{H}$ коммутативна, можно отождествить $U(\mathfrak{H})$ с $S(\mathfrak{H})$. При этом $U_p(\mathfrak{H})$ отождествляется с $\sum_{k \leqslant p} S^k(\mathfrak{H})$.

Отображение γ сохраняет подпространства $U_k(\mathfrak{H})$, поэтому $\gamma(h)' = 0$ для всех $h \in U_{p-1}(\mathfrak{H})$. Это означает, что $\gamma(h)'$ не меняется при замене h на произвольный элемент из $U_p(\mathfrak{H})$ с теми же членами степени p. Далее, младший член формы $Q \cdot e^{\rho} = \prod_{\alpha>0}\left(e^{\frac{1}{2}\alpha} - e^{-\frac{1}{2}\alpha}\right)$ равен $\prod_{\alpha>0}\alpha$. Его степень равна числу положительных корней, которое мы обозначим через n. Если f — какой-нибудь элемент пространства, дуального к $S(\mathfrak{H})$, все компоненты которого степеней $\leqslant p$ равны нулю, то у формы ${}^t\delta_3 f = f \cdot D\Big/\prod_{\alpha>0}\langle\rho, \alpha\rangle$ все компоненты степеней $\leqslant p+n$ равны нулю. Иными словами, если f обращается в 0 на $U_p(\mathfrak{H})$, то ${}^t\delta_3 f$ обращается в 0 на $U_{p+n}(\mathfrak{H})$. Отсюда вытекает, что оператор δ_3 отображает $U_{p+n}(\mathfrak{H})$ в $U_p(\mathfrak{H})$. Докажем, что, когда a пробегает пространство $S^{p+n}(\mathfrak{H})$, компонента степени p элемента $\delta_3 a$ принимает всевозможные значения из $S^p(\mathfrak{H})$. Если бы это было не так, то существовала бы линейная форма $f \neq 0$ на $U(\mathfrak{H})$, равная нулю на подпространствах $S^q(\mathfrak{H})$ при $q \neq p$ и такая, что ${}^t\delta_3 f$ обращается в 0 на $S^{p+n}(\mathfrak{H})$. Это невозможно, так как компонента степени $p+n$ формы ${}^t\delta_3 f$ равна $f \cdot \prod_{\alpha>0}(\alpha/\langle\rho, \alpha\rangle) \neq 0$. Таким образом, для всякого $h \in U_p(\mathfrak{H})$ существует такой элемент $k \in S^{p+n}(\mathfrak{H})$, что h и $\delta_3 k$ имеют одинаковые члены степени p.

Теперь мы можем утверждать, что пространство T состоит из элементов вида $(\gamma\delta_3(h))' = (\delta_1\delta_2(h))'$, где $h \in S^{p+n}(\mathfrak{H})$. Элемент $\delta_2(h)$ имеет степень p. Если k — какой-нибудь элемент степени p, то элементы k и $\delta_1(k)$ отличаются только членами степеней $< p$ (для доказательства достаточно рассмотреть случай, когда k является произведением p элементов $h_i \in \mathfrak{H}$; тогда $\delta_1(k)$ — произведение элементов $h_i + \rho(h_i)$). Следовательно, $(\delta_1\delta_2(h))' = (\delta_2(h))'$ и пространство T есть образ пространства $S^{p+n}(\mathfrak{H})$ при отображении δ_2. Из доказанного в предыдущем пункте вытекает, что T совпадает с пространством элементов из $S^p(\mathfrak{H})$, инвариантных относительно группы Вейля.

Т е о р е м а 3 (Ш е в а л л е). *Подпространство элементов из $S^p(\mathfrak{H})$, инвариантных относительно группы Вейля,* *совпадает с ортогональной проекцией на $S^p(\mathfrak{H})$ множества инвариантов присоединенного представления алгебры $\mathfrak{G}$ в пространстве $S^p(\mathfrak{G})$.*

9. Добавление

Теорема 4. *Пусть V — конечномерное векторное пространство над алгебраически замкнутым полем K характеристики 0, G — конечная группа линейных преобразований пространства V, продолженная до группы автоморфизмов симметрической алгебры $S(V) = A$. Тогда A — модуль конечного типа над подалгеброй $A^\natural$ инвариантов группы G. Всякий гомоморфизм алгебры $A^\natural$ в поле K продолжается до гомоморфизма алгебры A в K. Два гомоморфизма алгебры A в K совпадают на $A^\natural$ тогда и только тогда, когда они сопряжены относительно группы G.*

Через B обозначим A-модуль, образованный функциями на G со значениями в A, и пусть C — множество функций вида $g \to g \cdot a$, $a \in A$. Очевидно, что A-модуль B — модуль конечного типа. Так как в кольце A всякий идеал имеет конечный базис, то всякий подмодуль модуля B имеет конечный тип. В частности, это относится к подмодулю C', порожденному множеством C. Систему образующих подмодуля C' можно выбрать в C. Таким образом, существует такое конечное множество элементов $a_i \in A$, что для всякого $a \in A$ имеем $g \cdot a = \sum_i (g \cdot a_i) b_i$ для некоторых $b_i \in A$, откуда $a = \sum_i a_i (g^{-1} \cdot b_i)$. Суммируя последние равенства по всем $g \in G$, получаем $a = \sum_i a_i b_i^\natural$, где $b_i^\natural = [G]^{-1} \sum_{g \in G} g \cdot b_i \in A^\natural$ ($[G]$ — порядок группы G). Это означает, что элементы a_i порождают $A^\natural$-модуль A.

Пусть $\mathfrak{P}$—идеал алгебры $A^\natural$ и $\mathfrak{Q} = \mathfrak{P}A$. Тогда $\mathfrak{Q} \cap A^\natural = \mathfrak{P}$. В самом деле, если $a \in \mathfrak{Q} \cap A^\natural$, то $a = \sum p_i c_i$ ($p_i \in \mathfrak{P}$, $c_i \in A$) и $a = a^\natural$. Пользуясь свойствами отображения $\natural$, получаем $a = a^\natural = \sum p_i c_i^\natural \in \mathfrak{P}$.

Из доказанного следует, что если $\mathfrak{P} \neq A^{\natural}$, то $\mathfrak{P}A \neq A$. Пусть f — гомоморфизм алгебры $A^{\natural}$ в K с ядром $\mathfrak{P}$. Так как A — модуль конечного типа над $A^{\natural}$ и $A^{\natural}/\mathfrak{P} = K$, то $A/\mathfrak{P}A$ — конечномерная алгебра над K. Если $\mathfrak{P}'$ — максимальный идеал алгебры A, содержащий $\mathfrak{P}A$, то $A/\mathfrak{P}'$ — поле, являющееся конечным алгебраическим расширением поля K. Ввиду алгебраической замкнутости поля K поле $A/\mathfrak{P}'$ изоморфно K. Это означает, что существует нетривиальный гомоморфизм алгебры A в K, обращающийся в 0 на $\mathfrak{P}$ и поэтому совпадающий на $A^{\natural}$ с гомоморфизмом f.

Пусть f_1 и f_2 — два гомоморфизма алгебры A в K, совпадающие на $A^{\natural}$. Для всякого гомоморфизма f алгебры A в K и всякого элемента g группы G обозначим через f^g гомоморфизм алгебры A в K, определяемый формулой

$$f^g : a \to f(g \cdot a).$$

Если a — какой-нибудь элемент из A, то $\sum\limits_g g \cdot a \in A^{\natural}$; следовательно, $f_1\left(\sum\limits_{g \in G} g \cdot a\right) = f_2\left(\sum\limits_{g \in G} g \cdot a\right)$, т. е. $\sum\limits_{g \in G} f_1^g - \sum\limits_{g \in G} f_2^g = 0$. Обозначим через $n_i\,(i = 1, 2)$ порядок подгруппы H_i группы G, оставляющей инвариантным гомоморфизм f_i. Тогда $n_1 \sum\limits_\alpha f_{1,\alpha} - n_2 \sum\limits_\beta f_{2,\beta} = 0$, где члены каждой из сумм отличны друг от друга. Докажем, что различные гомоморфизмы h_k алгебры A в K линейно независимы. Для этого возьмем такой элемент $a \in A$, что скаляры $h_k(a)$ попарно различны, и положим

$$a_m = \prod_{k \neq m} \frac{a - h_k(a)}{h_m(a) - h_k(a)}.$$

Тогда $h_k(a_m) = \delta_{km}$, так что линейные формы h_k линейно независимы. Возвращаясь к гомоморфизмам f_i, находим, что один из гомоморфизмов $f_{1,\alpha}$ должен совпадать с одним из гомоморфизмов $f_{2,\beta}$. Следовательно, гомоморфизмы f_1 и f_2 сопряжены. Обратно, если $f_2 = f_1^g$, то очевидно, что f_1 и f_2 совпадают на $A^{\natural}$.

Глава 16

ХАРАКТЕРЫ КОМПАКТНЫХ ГРУПП ЛИ

П. Картье

1. Свертка обобщенных функций

Обобщенной функцией на бесконечно дифференцируемом ориентируемом многообразии V называется непрерывная линейная форма на пространстве $\mathscr{D}(V)$ функций класса C^{∞} с компактным носителем. Можно определить носитель такой обобщенной функции; обобщенная функция с компактным носителем единственным образом продолжается до линейной формы на пространстве $\mathscr{E}(V)$ всех функций класса C^{∞}. Приведем два примера обобщенных функций с компактным носителем. При $p \in V$ положим $\langle f, \delta_p \rangle = f(p)$ для всякой функции $f \in \mathscr{E}(V)$. Если X — касательный вектор в точке p к многообразию V, то по самому своему определению он является линейной формой на $\mathscr{E}(V)$, удовлетворяющей условию $X(fg) = X(f)\,g(p) + f(p)\,X(g)$ [1]). Обобщенные функции δ_p и X имеют в качестве носителя точку p.

Пусть V_1, V_2 и W — три многообразия класса C^{∞} и φ — отображение класса C^{∞} произведения $V_1 \times V_2$ в W. Если T_1 и T_2 — обобщенные функции с компактными носителями на многообразиях V_1 и V_2 соответственно, то посредством формулы

$$\int f(w)\, dS(w) = \int \int f(\varphi(v_1, v_2))\, dT_1(v_1)\, dT_2(v_2) \qquad (1)$$

определяется обобщенная функция $S = T_1 * T_2$ на многообразии W, которая называется *сверткой обобщенных*

[1]) При другом определении касательного вектора эта линейная форма задается в локальных координатах $(x^1, \ldots, x^n)$ на V формулой $X(f) = \sum\limits_i X^i \left(\dfrac{\partial f}{\partial x^i}\right)(p)$. — *Прим. перев.*

функций T_1 и T_2. Легко видеть, что свертка обобщенных функций δ_{v_1} и δ_{v_2} равна $\delta_{\varphi(v_1, v_2)}$ и что свертка обобщенной функции X (касательного вектора) с обобщенной функцией δ_{v_2} есть касательный вектор к многообразию W, в который переходит вектор X при отображении $v_1 \to \varphi(v_1, v_2)$ многообразия V_1 в W.

Непрерывная линейная форма C на пространстве внешних дифференциальных форм степени p называется *p-мерным потоком*. Так же как и для обобщенных функций, определяется *свертка потоков*. Если размерность потока C_i $(i = 1, 2)$ равна p_i, то поток $C_1 * C_2$ имеет размерность $p_1 + p_2$. Функция f класса C^∞ определяет n-мерный поток, где n — размерность многообразия V, по формуле $\langle f, \omega \rangle = \int f\omega$. Следовательно, можно определить свертку функции класса C^∞ на V_2 и обобщенной функции на V_1; результатом свертки будет поток на W.

Пусть G — группа Ли и V — многообразие, на котором она действует слева дифференцируемым образом; результат применения к точке $v \in V$ преобразования g будет обозначаться через gv. Отображения $(g, h) \to gh$ произведения $G \times G$ в G и $(g, v) \to gv$ произведения $G \times V$ в V позволяют определить два рода свертки. Легко проверить, что свертка билинейна и ассоциативна. Следовательно, операция свертки определяет на множестве $C(G)$ потоков на группе с компактным носителем структуру ассоциативной алгебры и на множестве $C(V)$ структуру левого модуля над $C(G)$. Для всякого потока T на группе G через $\check{T}$ будет обозначаться его образ при симметрии $x \to x^{-1}$ группы G. *Алгебра Ли $\mathfrak{G}$ группы G* есть касательное пространство к группе G в ее единице e, снабженное операцией коммутирования $[X, Y] = X * Y - Y * X$ (при таком определении, отличном от определения Шевалле, алгебра Ли линейной группы состоит из эндоморфизмов с правилом коммутирования $[X, Y] = XY - YX$, а не $[X, Y] = YX - XY$). Если $X \in \mathfrak{G}$, то $\check{X} = -X$. В самом деле, поскольку $xx^{-1} = e$, композиция отображения $x \to (x, x^{-1})$ и $(x, y) \to xy$ есть отображение в точку e. Соответствующие инфинитезимальные отображения суть $X \to (X, \check{X})$ и $(X, Y) \to X + Y$, поэтому $X + \check{X} = 0$.

Пусть $g \in G$ и f — функция класса C^∞ на многообразии V, на котором действует группа G. Если ω — внешняя дифференциальная форма максимальной степени на V, то

$$\langle \delta_g * f, \omega \rangle = \int f(v)\,\omega(gv) = \int f(g^{-1}v)\,\omega(v).$$

Следовательно, $\delta_g * f$ есть функция $v \to f(g^{-1}v)$. Подобным образом показывается, что если $X \in \mathfrak{G}$, то $(X*f)(v) = \langle X_g, f(g^{-1}v)\rangle = \langle \check{X}_g, f(gv)\rangle$ [1]. Если, в частности, $V = G$, то $(X*f)(e) = \langle \check{X}, f\rangle = -\langle X, f\rangle$ и функция $\delta_g * f$ получается из f при левом сдвиге на g. Аналогичные результаты имеют место для правых сверток. В силу ассоциативности отображение $f \to X*f$ есть оператор дифференцирования, перестановочный с правыми сдвигами и потому определяющий на G правоинвариантное поле касательных векторов, значение которого в точке e равно $-X$. В общем случае, когда $G \neq V$, отображение $f \to X*f$ есть по-прежнему оператор дифференцирования и потому определяет векторное поле на V. Значение этого векторного поля в точке v является образом вектора X при главной линейной части отображения $g \to g^{-1}v$.

Наконец, если $f \in \mathcal{E}(G)$, то

$$\langle \delta_h * X * \delta_{h^{-1}}, f\rangle = \int\int\int f(g_1g_2g_3)\,d\delta_h(g_1)\,dX(g_2)\,d\delta_{h^{-1}}(g_3) = \int f(hgh^{-1})\,dX(g) = \langle \operatorname{ad} h \cdot X, f\rangle,$$

так что $\operatorname{ad} h \cdot X = \delta_h * X * \delta_{h^{-1}}$.

2. Формулы интегрирования Г. Вейля

Пусть G — полупростая компактная связная группа Ли (полупростота означает, что ее алгебра Ли полупроста). Пусть $\mathfrak{G}$ — ее алгебра Ли, $\mathfrak{H}$ — подалгебра Картана алгебры $\mathfrak{G}$ и H — соответствующая ей подгруппа группы G. В гл. 19 будут получены следующие результаты:

---

[1] Через $\langle X_g, f(g^{-1}v)\rangle$ обозначается значение обобщенной функции X на функции $g \to f(g^{-1}v)$. — *Прим. перев.*

Подгруппа H замкнута в группе G (а, следовательно, компактна) и является максимальной коммутативной подгруппой. Всякий элемент группы G сопряжен относительно внутреннего автоморфизма некоторому элементу из H. Если N — нормализатор подгруппы H в группе G, то фактор-группа N/H изоморфна группе Вейля алгебры $\mathfrak{G}$.

Так как группа H компактна и коммутативна, то она изоморфна тору T^r $(r = \dim \mathfrak{H})$ и экспоненциальное отображение является гомоморфизмом коммутативной группы $\mathfrak{H}$ на группу H. Всякий характер группы H, т. е. всякий ее непрерывный гомоморфизм в группу T, имеет вид $e^{\lambda}(h) = e^{\lambda(H)}$, где $h = \exp H$. Очевидно, что $e^{\lambda}e^{\mu} = e^{\lambda+\mu}$ и $\overline{e^{\lambda}} = e^{-\lambda}$. Пусть ρ — линейное представление группы G в конечномерном векторном пространстве V и $d\rho$ — соответствующее представление алгебры $\mathfrak{H}$. Так как группа H компактна, то представления ρ и $d\rho$ вполне приводимы; так как она коммутативна, то всякое ее неприводимое представление одномерно. Следовательно, пространство V разбивается в прямую сумму подпространств V_{λ}, где V_{λ} состоит из векторов v, для которых $d\rho(H)v = \lambda(H)v$ при всех $H \in \mathfrak{H}$, что равносильно тому, что $\rho(h)v = e^{\lambda}(h)v$ при всех $h \in H$, поскольку $\rho(\exp H) = \exp d\rho(H)$. В частности, $\operatorname{ad} h \cdot E_{\alpha} = e^{\alpha}(h)E_{\alpha}$ $(E_{\alpha} \in \mathfrak{G}^{\alpha})$.

Так как всякий элемент из G сопряжен некоторому элементу из H, то отображение $(g, h) \to ghg^{-1}$ произведения $G \times H$ в группу G имеет в качестве образа всю группу G. При замене g на gh', $h' \in H$, элемент ghg^{-1} не меняется, поэтому можно определить отображение f произведения $(G/H) \times H$ в группу G по формуле $f(p, h) = ghg^{-1}$, где g — представитель класса смежности p по подгруппе H. Элемент группы G называется *регулярным*, если кратность собственного значения 1 оператора $\operatorname{ad} g$ равна r. Для элемента $h \in H$ это означает, что $e^{\alpha}(h) \neq 1$ для всякого ненулевого корня α, т. е. что множество инвариантных векторов оператора $\operatorname{ad} h$ совпадает с $\mathfrak{H}$. Подгруппа H является тогда связной компонентой единицы централизатора элемента h.

Множество G_r регулярных элементов группы G инвариантно относительно ее внутренних автоморфизмов (и даже относительно любых ее автоморфизмов). Следовательно, всякий регулярный элемент группы G сопряжен некоторому регулярному элементу, лежащему в H. Так как регулярные элементы образуют в H плотное множество, то и во всей группе G множество регулярных элементов плотно. Пусть $p = ghg^{-1}$ — регулярный элемент. Равенство $p = g'h'g'^{-1}$ имеет место тогда и только тогда, когда $khk^{-1} = h'$, где $k = g'^{-1}g$. Поскольку элементы h и h' регулярны, группа H совпадает со связной компонентой единицы централизатора каждого из них. Из равенства $khk^{-1} = h'$ следует поэтому, что $k \in N$. Группа N/H изоморфна группе Вейля W и имеет порядок w. Следовательно, при фиксированном регулярном элементе $h \in H$ множество $\{ghg^{-1}\}_{g \in G}$ пересекается с H ровно в w точках. Иными словами, ограничение отображения f на множество $G/H \times H_r$ есть накрытие порядка r множества G_r (здесь $H_r = H \cap G_r$). Наконец, для того чтобы функция на H_r была ограничением функции на G_r, инвариантной относительно внутренних автоморфизмов, необходимо и достаточно, чтобы она была инвариантна относительно группы Вейля.

Пусть $P = G/H$, p — класс смежности H. Каноническое отображение $g \to gp$ группы G на пространстве P индуцирует отображение алгебры Ли $\mathfrak{G}$ на касательное пространство $T(p)$ к многообразию P в точке p, ядро которого совпадает с $\mathfrak{H}$. Если $\{E_\alpha, H_i\}$ — база Вейля в алгебре $\mathfrak{G}_c$ — комплексном расширении алгебры $\mathfrak{G}$, то образы T_α элементов E_α образуют базу пространства $T(p)$. Так как α и $-\alpha$ одновременно являются корнями и $\operatorname{ad} h \cdot E_\alpha = e^\alpha(h) E_\alpha$, то поливектор $\bigwedge\limits_\alpha T_\alpha$ инвариантен относительно группы H, которая является стационарной подгруппой точки $p \in P$. Следовательно, на многообразии P существует поле S касательных поливекторов, инвариантное относительно группы G. Значение этого поля в точке $q = gp$ равно $\delta_g * \bigwedge\limits_\alpha T_\alpha$.

Пусть $k = ghg^{-1}$, $T_i(h) = \delta_h * H_i$ — вектор, касательный к G в точке h, $q = gp$ и $\{\delta_g * T_\alpha\}$ — база пространства $(T(q))_C$. Вектор $\delta_g * T_\alpha$ является образом вектора $\delta_g * E_\alpha$ при каноническом проектировании группы G на многообразие P. Следовательно, образ при отображении f этого вектора, рассматриваемого как касательный вектор к $P \times H$ в точке

(q, h), равен

$$\begin{aligned}
&\delta_g * E_\alpha * \delta_h * \delta_{g^{-1}} + \delta_g * \delta_h * (\widecheck{\delta_g * E_\alpha}) = \\
&= \delta_k * (\delta_{gh^{-1}} * E_\alpha * \delta_{hg^{-1}}) - \delta_k * \delta_g * E_\alpha * \delta_{g^{-1}} = \\
&= \delta_k * (\operatorname{ad}(gh^{-1}) \cdot E_\alpha - \operatorname{ad} g \cdot E_\alpha) = \\
&\qquad\qquad = (e^{-\alpha}(h) - 1)\, \delta_k * (\operatorname{ad} g \cdot E_\alpha). \qquad (2)
\end{aligned}$$

Далее, образ при отображении f вектора $T_l(h)$, рассматриваемого как касательный вектор к $P \times H$, равен

$$\delta_g * \delta_h * H_l * \delta_{g^{-1}} = \delta_k * (\operatorname{ad} g \cdot H_l).$$

Пусть R — касательный поливектор в точке (q, h) многообразия $P \times H$, равный внешнему произведению векторов $\delta_g * T_\alpha$ и $T_l(h)$. Образ поливектора R при отображении f равен $\delta_k * \left(\left(\bigwedge_\alpha E_\alpha\right) \wedge \left(\bigwedge_l H_l\right)\right) \prod_\alpha (e^{-\alpha}(h) - 1)$, так как $\operatorname{ad} g$ — унимодулярное преобразование. В пространстве $\mathfrak{G}^*$ выберем базу $\{E'_\alpha, H'_l\}$, дуальную к базе $\{E_\alpha, H_l\}$ пространства $\mathfrak{G}$. Тогда $g \to \delta_g * \left(\left(\bigwedge_\alpha E'_\alpha\right) \wedge \left(\bigwedge H'_l\right)\right)$ — левоинвариантная дифференциальная форма максимальной степени на группе G. Из полученного выражения для образа поливектора R при отображении f вытекает, что прообразом этой дифференциальной формы на многообразии $P \times H$ служит форма $\prod (e^{-\alpha}(h) - 1)\, S' * \left(\delta_h * \bigwedge_l H'_l\right)$, где S' — форма на P, определяемая соотношением $\langle S, S' \rangle \equiv 1$. Это позволяет найти связь между инвариантными дифференциальными формами, задающими меру Хаара на группах G и H. При надлежащей нормировке инвариантных мер выполняются соотношения

$$\begin{aligned}
\int f(g)\, dg = w^{-1} \int\limits_H \prod_\alpha (e^\alpha(h) - 1)\, dh \int\limits_P f(ghg^{-1})\, d(gp) = \\
= w^{-1} \int\limits_H \prod_\alpha (e^\alpha(h) - 1)\, dh \int\limits_G f(ghg^{-1})\, dg. \qquad (3)
\end{aligned}$$

Если нормировать меры Хаара на группах G и H таким образом, чтобы $\int dg = \int dh = 1$, то соотношение (3) выполняется с точностью до постоянного множителя C в правой части. Для вычисления этого множителя положим $f(g)=1$. Получаем, что $C=w\left(\int\prod_{\alpha}(e^{\alpha}(h)-1)\,dh\right)^{-1}$. Имеем

$$\prod_{\alpha}(e^{\alpha}(h)-1)=\prod_{\alpha>0}(e^{\alpha}(h)-1)(e^{-\alpha}(h)-1)=D(h)\overline{D(h)}, \quad (4)$$

где $D=\prod_{\alpha>0}\left(e^{\frac{1}{2}\alpha}-e^{-\frac{1}{2}\alpha}\right)$. Согласно результатам п. 5 гл. 15 (которые здесь применимы, так как $e^{\lambda+\mu}=e^{\lambda}\cdot e^{\mu}$), $D=\sum_{\sigma}(\det\sigma)e^{\sigma\rho}$. Из соотношений ортогональности для характеров e^{λ} группы H получаем $\int|D(h)|^2\,dh=w$, откуда следует, что $C=1$.

В том случае, когда функция f постоянна на классах сопряженных элементов, формула (3) принимает особенно простой вид:

$$\int f(g)\,dg=w^{-1}\int D(h)\overline{D(h)}f(h)\,dh. \quad (5)$$

3. Метод Г. Вейля для нахождения характеров

Мы здесь покажем, следуя Г. Вейлю, как можно с глобальной точки зрения получить основные результаты теории линейных представлений полупростых компактных групп Ли. При этом не будут предполагаться известными результаты гл. 14 и 15, за исключением полученных в п. 4 и 5 гл. 15.

Обозначим через P_G множество тех линейных форм λ на $\mathfrak{H}$, которые определяют характеры e^{λ} группы H. Если ρ — линейное представление группы G в конечномерном векторном пространстве V, то его ограничение на H вполне приводимо и пространство V разлагается в сумму весовых подпространств V_{λ}, где $\lambda\in P_G$. Обратно, если $\lambda\in P_G$, то e^{λ} определяет одномерное линейное представление группы H. Всякое такое представление содержится в некотором представлении, индуцированном представлением группы G (см. [67], т. I, предложение 4 § VII гл. VI). Следовательно, P_G совпадает с множеством весов представлений группы G.

Если $E_{\alpha}\in\mathfrak{G}^{\alpha}$, то $d\rho(E_{\alpha})V_{\lambda}\subset V_{\lambda+\alpha}$ и подпространство $\sum_{k}V_{\lambda+k\alpha}$ (сумма распространяется на все целые k) инвариантно относительно преобразования $d\rho(X)$, где

$$X = \frac{\pi}{\sqrt{2}\,|\alpha|}(E_\alpha + E_{-\alpha}),$$

а также относительно преобразования $\rho(\exp X) = \exp d\rho(X)$. В гл. 13 мы видели, что

$$e^{\operatorname{ad} X} \cdot H = H - \frac{2\alpha(H)}{\langle\alpha, \alpha\rangle} H'_\alpha = S_\alpha H. \tag{6}$$

Положим $x = \exp X$. Тогда $\operatorname{ad} x = e^{\operatorname{ad} X}$ и $xhx^{-1} = S_\alpha h$ для всякого $h \in H$. Если вектор $v \in V$ принадлежит весу λ, то

$$\rho(h)\rho(x)v = \rho(x)\rho(S_\alpha^{-1}h)v = e^{S_\alpha\lambda}(h)\rho(x)v,$$

т. е. вектор $\rho(x)v$ принадлежит весу $S_\alpha\lambda$. Таким образом, *множество весов представления* ρ *инвариантно относительно группы Вейля*. Далее, $\rho(x)v \in \sum_k V_{\lambda+k\alpha}$, откуда следует, что вес $S_\alpha\lambda$ имеет вид $\lambda + k\alpha$ с целым k, т. е. что $2\langle\lambda, \alpha\rangle/\langle\alpha, \alpha\rangle$ — *целое число*. Итак, множество P_G содержится в множестве P таких линейных форм λ на $\mathfrak{H}$, для которых числа $2\langle\lambda, \alpha\rangle/\langle\alpha, \alpha\rangle$ целые (ср. гл. 14).

Положим $\chi(g) = \operatorname{Tr}(\rho(g))$ и $m_\lambda = \dim V_\lambda$. Так как оператор $\rho(h)$ скалярен на V_λ, то $\chi(h) = \sum_\lambda m_\lambda e^\lambda(h)$. Как мы видели выше, оператор $\rho(x)$ переставляет подпространства V_λ и $V_{S_\alpha\lambda}$. Следовательно, $m_\lambda = m_{S_\alpha\lambda}$ и выражение $\chi = \sum_\lambda m_\lambda e^\lambda$ есть тригонометрический многочлен с целыми положительными коэффициентами, инвариантный относительно группы Вейля. Многочлен $D\chi$ антисимметричен и представляется поэтому в виде $D\chi = \sum a_\mu Q \cdot e^\mu$ (см. п. 5 гл. 15). Поскольку различные многочлены $Q \cdot e^\mu$ не имеют общих членов, коэффициент a_μ равен коэффициенту при e^μ в выражении $D\chi$. Так как многочлены D и χ имеют целые коэффициенты, то a_μ — целое число.

Известно, что $\int |\chi(g)|^2 dg = 1$ (см. [67], т. I, предложение 2 § VI гл. VI) [1]). По формуле (5)

$$1 = \int |\chi(g)|^2 dg = w^{-1} \int |D\chi|^2 dh = \\ = w^{-1} \int \left| \sum a_\mu Q \cdot e^\mu \right|^2 dh. \quad (7)$$

Многочлены $Q \cdot e^\mu$ не имеют друг с другом общих членов; с другой стороны, функции e^μ попарно ортогональны как характеры компактной группы H. Следовательно, многочлены $Q \cdot e^\mu$ попарно ортогональны. Так как $Q \cdot e^\mu = \sum_\sigma (\det \sigma) e^{\sigma\mu}$, то

$$\int |Q \cdot e^\mu|^2 dh = \sum_\sigma (\det \sigma)^2 = w.$$

Окончательно формула (7) дает $\sum |a_\mu|^2 = 1$. Числа a_μ целые, поэтому одно из них должно равняться ± 1, а остальные — нулю. Из этого следует, что *характер* χ *равен* с точностью до знака *функции* $Q \cdot e^{\Lambda+\rho}/Q \cdot e^\rho$, где Λ — некоторый элемент из P_G, относительно которого можно предположить, что $\Lambda(H_i) \geqslant 0$ для всех i. В действительности имеет место точное равенство, так как старший член полинома $Q \cdot e^{\Lambda+\rho}/Q \cdot e^\rho$ равен e^Λ, а в полином χ член e^Λ входит с положительным коэффициентом m_Λ. Отсюда также видно, что Λ — *старший вес представления* ρ и что $m_\Lambda = 1$. Таким образом, *кратность старшего веса представления* ρ *равна* 1. Далее, линейные формы $\sigma(\Lambda+\rho)$ имеют вид $\Lambda+\rho+\sum p_i\alpha_i$, где p_i — целые числа; линейные формы $\sigma\rho$ имеют вид $\rho+\sum q_i\alpha_i$, где q_i — целые числа. Поэтому *веса представления* ρ *представимы в виде* $\Lambda+\sum m_i\alpha_i$, *где числа* m_i *целые*. Наконец, из соотношений ортогональности для характеров [2]) вытекает, что два неэквивалентных неприводимых представления не могут иметь один и тот же характер. Следовательно, *неприводимые представления группы* G *характеризуются своими старшими весами*.

[1]) См. также [43], теорема 30. — *Прим. перев.*

[2]) См. [43], теорема 29. — *Прим. перев.*

Докажем теперь, что *для всякого* $\Lambda \in P_G \cap P_+$ *существует конечномерное представление группы G со старшим весом* Λ. Предположим, что это не так для некоторого Λ. Согласно доказанному в п. 5 гл. 15, отношение $Q \cdot e^{\Lambda+\rho}/Q \cdot e^{\rho}$ представляет собой тригонометрический многочлен. Этот многочлен инвариантен относительно группы Вейля и поэтому продолжается до непрерывной функции ψ на группе G, инвариантной относительно внутренних автоморфизмов. Из доказанного выше следует, что функции на группе G, определяемые многочленами $Q \cdot e^{\Lambda+\rho}/Q \cdot e^{\rho}$ и $Q \cdot e^{\Lambda'+\rho}/Q \cdot e^{\rho}$, ортогональны при $\Lambda \neq \Lambda'$. Это показывает, что функция ψ ортогональна ко всем характерам группы G. С другой стороны, существует такая линейная комбинация $\sum a_i \chi_i$ характеров группы G, что $\left|\psi(g) - \sum a_i \chi_i(g)\right| < \varepsilon$ (см. [67], т. I, предложение 2 § XII гл. VI)[1]. Умножая на $\overline{\psi(g)}$ и интегрируя, получаем, что $\int |\psi(g)|^2 dg < \varepsilon$. Так как ε произвольно мало, то $\psi(g) = 0$, что невозможно.

Итак, мы получили бо́льшую часть результатов инфинитезимальной теории.

4. Формула Планшереля для полупростых компактных групп

Выведем формулу, аналогичную формуле Планшереля в теории преобразования Фурье.

Для всякого $\Lambda \in P_G \cap P_+$ положим

$$d_\Lambda = \prod_{\alpha > 0} (\langle \Lambda + \rho, \alpha \rangle / \langle \rho, \alpha \rangle)$$

и

$$\chi_\Lambda = Q \cdot e^{\Lambda+\rho}/Q \cdot e^{\rho}.$$

Пусть f — какая-нибудь функция класса C^∞ на группе G. Мы сейчас докажем следующую формулу:

$$f(e) = \sum_{\Lambda} d_\Lambda \int f(g) \chi_\Lambda(g)\, dg, \tag{8}$$

где χ_Λ считается продолженным до функции на группе G,

---

[1]) См. [43], теорема 34. — *Прим. перев.*

инвариантной относительно внутренних автоморфизмов. Применяя формулу (8) к характеру χ_Λ неприводимого представления группы G в пространстве V, получим ввиду соотношений ортогональности для характеров, что $\dim V = \chi_\Lambda(e) = d_\Lambda$.

Поскольку характеры χ_Λ инвариантны относительно внутренних автоморфизмов, интеграл $\int f\chi_\Lambda\, dg$ не изменится, если заменить f на $f'(g) = \int f(kgk^{-1})\, dk$. В самом деле,

$$\int f'\chi_\Lambda\, dg = \int\int f(kgk^{-1})\chi_\Lambda(g)\, dk\, dg = \\ = \int\int f(g)\chi_\Lambda(k^{-1}gk)\, dk\, dg = \int f\chi_\Lambda\, dg.$$

Функция f' инвариантна относительно внутренних автоморфизмов и принадлежит классу C^∞; имеем также $f(e) = f'(e)$. Таким образом, можно предположить, что сама функция f инвариантна относительно внутренних автоморфизмов; но тогда

$$\int f(g)\chi_\Lambda(g)\, dg = \\ = w^{-1}\int f(h)\overline{D(h)}\sum_\sigma (\det\sigma)\, e^{\sigma(\Lambda+\rho)}(h)\, dh. \qquad (9)$$

Элемент $\prod\limits_{\alpha>0}\alpha$ симметрической алгебры над $\mathfrak{H}^*$ кососимметричен по отношению к группе Вейля (см. лемму 1 гл. 15). Следовательно,

$$(\det\sigma)\prod_{\alpha>0}\langle\Lambda+\rho, \alpha\rangle = \\ = \prod_{\alpha>0}\langle\Lambda+\rho, \sigma^{-1}\alpha\rangle = \prod_{\alpha>0}\langle\sigma(\Lambda+\rho), \alpha\rangle. \qquad (10)$$

Если элемент $\lambda \in P_G$ таков, что $\langle\lambda, \alpha\rangle \neq 0$ для всякого ненулевого корня α, то, поскольку группа Вейля просто транзитивна на множестве фундаментальных областей Вейля, λ сопряжен единственному элементу μ, для которого $\mu(H_i) > 0$ при всех i. Множество P_G инвариантно относительно группы Вейля, поэтому $\mu \in P_G \cap P_+$ и $\mu(H_i)$ — целые положительные числа. Так как $\rho(H_i) = 1$, то $(\mu - \rho)(H_i) \geqslant 0$. Таким образом, элемент λ может быть представлен, и притом единственным образом, в виде $\sigma(\Lambda+\rho)$, где $\Lambda \in P_G \cap P_+$. Следовательно,

$$\sum d_\Lambda \int \chi_\Lambda(g) f(g)\,dg = \Big(w \prod_{\alpha>0} \langle \rho, \alpha\rangle\Big)^{-1} \times$$
$$\times \sum_{\Lambda, \sigma} \int f(h)\overline{D(h)} \prod_{\alpha>0} \langle \sigma(\Lambda+\rho), \alpha\rangle e^{\sigma(\Lambda+\rho)}(h)\,dh =$$
$$= \Big(w \prod_{\alpha>0} \langle \rho, \alpha\rangle\Big)^{-1} \sum_{\lambda} \int f(h)\overline{D(h)} \prod_{\alpha>0} \langle \lambda, \alpha\rangle e^{\lambda}(h)\,dh, \quad (11)$$

где λ можно считать пробегающим все множество P_G, так как если $\langle \lambda, \alpha\rangle = 0$ для какого-либо α, то соответствующее слагаемое обращается в 0. С другой стороны, коэффициенты $\prod_{\alpha>0} \langle \lambda, \alpha\rangle$ имеют степенной порядок роста и функция $f\overline{D}$ принадлежит классу C^∞ на H; поэтому ряд по λ в последней части равенства (11) абсолютно сходится, и преобразование суммы, которое мы совершили, законно. Дело сводится, таким образом, к изучению обобщенной функции

$$T = \overline{D}(h)\,dh \sum_{\mu} e^{\mu}(h) \prod_{\alpha>0} \mu(H'_\alpha)$$

на группе H. Подставляя известное выражение для D, получаем

$$T = \sum_{\lambda, \sigma} e^{\lambda-\sigma\rho} (\det\sigma) \prod_{\alpha>0} \lambda(H'_\alpha)\,dh =$$
$$= \sum_{\mu} \Big(\sum_{\sigma} (\det\sigma) \prod_{\alpha>0} (\mu+\sigma\rho)(H'_\alpha)\Big) e^{\mu}\,dh. \quad (12)$$

Пусть n — число положительных корней алгебры $\mathfrak{G}$. Тогда

$$\prod_{\alpha>0} \langle \mu+\sigma\rho, H'_\alpha\rangle = \frac{1}{n!}\Big\langle (\mu+\sigma\rho)^n, \prod_{\alpha>0} H'_\alpha\Big\rangle, \quad (13)$$

где скалярное произведение в правой части понимается в смысле двойственности между пространствами $S(\mathfrak{H})$ и $S(\mathfrak{H}^*)$ (см. п. 3 гл. 15). В алгебре $S(\mathfrak{H}^*)$

$$\frac{1}{n!} \sum_{\sigma} (\det\sigma)(\mu+\sigma\rho)^n = \sum_{p} \frac{\mu^{n-p}}{(n-p)!} \sum_{\sigma} (\det\sigma)\,\sigma\Big(\frac{\rho^p}{p!}\Big). \quad (14)$$

Элемент $\sum\limits_{\sigma}(\det\sigma)\,\sigma(\rho^p/p!)$ кососимметричен относительно группы Вейля и потому делится на элемент $\prod\limits_{\alpha>0}\alpha$ степени n. Следовательно, единственным слагаемым в (14), отличным от 0, является слагаемое, соответствующее $p=n$; но тогда выражение

$$\sum_{\sigma}(\det\sigma)\prod_{\alpha>0}(\mu+\sigma\rho)(H'_\alpha)$$

не зависит от μ и равно

$$\frac{1}{n!}\sum_{\sigma}(\det\sigma)\left\langle\rho^n,\,{}_*\sigma\cdot\prod_{\alpha>0}H'_\alpha\right\rangle=$$

$$=\frac{1}{n!}\sum_{\sigma}\left\langle\rho^n,\,\prod_{\alpha>0}H'_\alpha\right\rangle=w\prod_{\alpha>0}\langle\rho,\,\alpha\rangle.$$

Далее, по формуле Фурье для группы H, $\sum e^{\mu}(h)\,dh=\delta_e(h)$. Итак,

$$T=w\prod_{\alpha>0}\langle\rho,\,\alpha\rangle\,\delta_e.$$

Из формулы (11) получаем

$$\sum_{\Lambda}d_\Lambda\int\chi_\Lambda(g)\,f(g)\,dg=\left(w\prod_{\alpha>0}\langle\rho,\,\alpha\rangle\right)^{-1}\int f(h)\,dT(h)=f(e).$$

Формула (8) полностью доказана.

Из формулы (8) выводятся обычные следствия. Прежде всего, заменяя f на $f*\tilde{f}'$, где $\tilde{f}'(g)=\overline{f'(g^{-1})}$, получаем

$$\int f(g)\,\overline{f'(g)}\,dg=\sum_{\Lambda}d_\Lambda\int\chi_\Lambda(g_1g_2^{-1})\,f(g_1)\,\overline{f'(g_2)}\,dg_1\,dg_2=$$

$$=\sum_{\Lambda}d_\Lambda\operatorname{Tr}\left(\int\rho_\Lambda(g_1)\,f(g_1)\,dg_1\right)\left(\int\rho_\Lambda(g_2^{-1})\,\overline{f'(g_2)}\,dg_2\right)=$$

$$=\sum_{\Lambda}d_\Lambda\operatorname{Tr}\left[\rho_\Lambda(f)\,(\rho_\Lambda(f'))^*\right].\qquad(15)$$

Здесь ρ_Λ — конечномерное унитарное представление группы G с характером χ_Λ и $\rho_\Lambda(f)=\int\rho_\Lambda(g)\,f(g)\,dg$ — интеграл операторной функции $g \to \rho_\Lambda(g) f(g)$. Формула (15), справедливая во всяком случае для функций f и f' класса C^∞, продолжается по непрерывности на функции с суммируемым квадратом относительно меры dg. Наконец, из (15) получается следующая формула обращения, справедливая для всех функций класса C^∞:

$$f(g) = \sum_\Lambda d_\Lambda \operatorname{Tr}\left[\rho_\Lambda(f)\left(\rho_\Lambda(g)\right)^*\right]. \tag{16}$$

Глава 17

ТОПОЛОГИЧЕСКАЯ СТРУКТУРА ГРУПП ЛИ

П. Картье

1. Теория компактных групп

Хотя результаты настоящей главы относятся в основном к группам Ли, при доказательствах чаще всего используются средства общей теории локально компактных групп.

Группы будут обозначаться прописными буквами, их элементы — соответствующими строчными буквами. Единица группы будет обозначаться через e.

Пусть G—топологическая группа, действующая в конечномерном векторном пространстве V над полем вещественных чисел, и пусть $g \cdot v$ — образ вектора v при преобразовании g. По очевидным соображениям непрерывная функция f на группе G со значениями в V называется *коциклом*, если

$$f(gg') = f(g) + g \cdot f(g'); \tag{1}$$

функция f называется *кограницей*, если

$$f(g) = g \cdot v - v, \tag{2}$$

где v—фиксированный вектор из V. Всякий коцикл является кограницей, поскольку

$$gg' \cdot v - v = (g \cdot v - v) + g(g' \cdot v - v).$$

Лемма 1. *Пусть G — локально компактная группа, непрерывно действующая в конечномерном векторном пространстве V, H — такой замкнутый нормальный делитель группы G, что фактор-группа $K = G/H$ компактна. Тогда всякий коцикл f, определенный на H и удовлетворяющий условию инвариантности $f(ghg^{-1}) = g \cdot f(h)$, продолжается в коцикл на группе G.*

Обозначим через p каноническую проекцию группы G на K и покажем прежде всего, что существует такое компактное подмножество D группы G, что $p(\mathring{D})=K$[1]), т. е. $G=H\cdot\mathring{D}$. Пусть U — окрестность единицы группы G, замыкание которой компактно. Множество $p(U)$ является окрестностью единицы группы K; поэтому группа K покрывается конечным числом сдвигов $k_i p(U)$ множества $p(U)$. Выберем какие-нибудь элементы $g_i\in G$, для которых $p(g_i)=k_i$, и возьмем в качестве D замыкание объединения множеств g_iU. Так как $p(g_iU)=k_ip(U)$, то множество D отвечает поставленным требованиям.

Пусть r_1 — непрерывная неотрицательная функция с компактным носителем на группе G, равная 1 на D. Положим $r_2(g)=\int r_1(h^{-1}g)\,dh$. Функция r_2 непрерывна, так как функция r_1 равномерно непрерывна (как всякая функция с компактным носителем). Далее, из левой инвариантности меры dh следует, что $r_2(h^{-1}g)=r_2(g)$. По построению компакта D для всякого элемента g существует такой элемент h, что $h^{-1}g\in D$; но тогда $r_1(h^{-1}g)=1$, и $r_2(g)>0$. Следовательно, можно образовать отношение $r=r_1/r_2$. Имеем

$$\int r(h^{-1}g)\,dh=\int\frac{r_1(h^{-1}g)}{r_2(g)}\,dh=1. \tag{3}$$

Пусть теперь f — коцикл, определенный на H. Положим

$$f'(g)=\int f(h)\,r(h^{-1}g)\,dh. \tag{4}$$

Эта функция всюду определена и непрерывна по тем же соображениям, что и выше. Далее, в силу (3)

$$f'(hg)=\int f(h')\,r(h'^{-1}hg)\,dh'=\int f(hh')\,r(h'^{-1}g)\,dh'=$$
$$=\int (f(h)+hf(h'))\,r(h'^{-1}g)\,dh'=f(h)+hf'(g). \tag{5}$$

Функция f' не является коциклом и не совпадает с f на H, однако из (5) видна связь между этими свойствами. Исправим функцию f', положив $f''(g)=f'(g)-g\cdot f'(e)$. При $g=e$ соотношение (5) дает $f''(h)=f(h)$. Из того же соотношения

[1]) Через $\mathring{D}$ обозначается открытое ядро множества D. — *Прим. перев.*

видно, что f'' — почти коцикл:

$$f''(hg) = f'(hg) - hg \cdot f'(e) = f(h) + h \cdot (f'(g) - g \cdot f'(e)) = \\ = f''(h) + h \cdot f''(g). \qquad (6)$$

Чтобы перейти от (6) к (1), произведем подходящее интегрирование по группе K. Положим для этого при $x \in G$

$$m(x;\ g) = x^{-1} \cdot (f''(xg) - f''(x)), \qquad (7)$$

откуда

$$m(x;\ gg') = x^{-1} \cdot (f''(xgg') - f''(x)) = \\ = gg^{-1}x^{-1} \cdot (f''(xgg') - f''(xg)) + x^{-1} \cdot (f''(xg) - f''(x)) = \\ = g \cdot m(xg;\ g') + m(x;\ g). \qquad (8)$$

Далее, функция $m(x;\ g)$ при фиксированном g зависит только от класса смежности по H, которому принадлежит x, как видно из следующего вычисления:

$$m(hx;\ g) = x^{-1}h^{-1} \cdot (f''(hxg) - f''(hx)) = \\ = x^{-1}h^{-1} \cdot f''(h) + x^{-1}h^{-1}h \cdot f''(xg) - x^{-1}h^{-1} \cdot f''(h) - \\ - x^{-1}h^{-1}h \cdot f''(x) = m(x;\ g). \qquad (9)$$

На группе K существует двусторонне инвариантная мера dk. Нормируем ее таким образом, чтобы мера всей группы равнялась единице, и проинтегрируем функцию m при фиксированном g по $p(x)$. При этом получится функция $n(g)$, всюду определенная и непрерывная на группе G. Интегрируя формулу (8) по $p(x)$ и учитывая, что мера dk инвариантна, получаем немедленно, что n — коцикл. Ограничение функции n на H отличается от f лишь на кограницу. В самом деле,

$$f''(xh) = f''(h^x x) = f(h^x) + h^x \cdot f''(x) = \\ = x \cdot f(h) + xhx^{-1} \cdot f''(x), \qquad (10)$$

где $h^x = xhx^{-1}$ (заменяя $f(h^x)$ на $x \cdot f(h)$, мы использовали условие инвариантности). Следовательно,

$$m(x;\ h) = x^{-1} \cdot (f''(xh) - f''(x)) = \\ = f(h) + hx^{-1} \cdot f''(x) - x^{-1} \cdot f''(x).$$

Положим $v = \int x^{-1} f''(x)\, r(x)\, dx$. Тогда

$$f(h) + h \cdot v - v = \int r(x)\, m(x;\ h)\, dx. \qquad (11)$$

Так как функция $m(x;\ h)$ при фиксированном h постоянна на классах смежности по H и интеграл функции $r(x)$ по любому из этих классов смежности равен 1, то

$$\int m(x;\ h)\,r(x)\,dx = \int m(x;\ h)\,dp(x) = n(h).$$

Таким образом,

$$n(h) = f(h) + h \cdot v - v.$$

Достаточно теперь положить $n' = n - dv$ [т. е. $n'(g) = n(g) - (g \cdot v - v)$], чтобы получить коцикл n', продолжающий f. Лемма доказана.

Замечание. Доказанная лемма является небольшой частью теоремы о точности когомологической последовательности Серра для расширений групп, содержащей 5 членов.

Из доказанной леммы мы выведем две важные теоремы. Напомним определение *полупрямого произведения G двух топологических групп H и K при заданном непрерывном представлении φ группы K в группу автоморфизмов группы H*. Как топологическое пространство группа G отождествляется с прямым произведением $H \times K$; умножение задается формулой

$$(h,\ k)(h',\ k') = (h \cdot \varphi(k)(h'),\ kk'). \tag{12}$$

Легко видеть, что при таком определении G становится топологической группой. Группы H и K отождествляются с подгруппами группы G, причем H является нормальным делителем в G и $khk^{-1} = \varphi(k)\,h$. Расслоение G с базой G/H имеет подгруппу K в качестве сечения. Обратно, если G — топологическая группа, H — ее замкнутый нормальный делитель и расслоение G с базой G/H допускает в качестве непрерывного сечения подгруппу K, то группа G изоморфна полупрямому произведению групп H и K.

Теорема 1. *Пусть G — локально компактная группа, V — ее замкнутый нормальный делитель, изоморфный конечномерному вещественному векторному пространству. Если фактор-группа G/V компактна, то расслоение G с базой G/H допускает в качестве сечения подгруппу K и группа G изоморфна полупрямому произведению групп V и K.*

Всякий непрерывный эндоморфизм группы V линеен. Следовательно, полагая $g \cdot v = gvg^{-1}$, получаем линейное представление φ группы G в пространстве V. Так как группа V коммутативна, то ядро представления φ содержит V, и φ индуцирует поэтому гомоморфизм $\overline{\varphi}$ группы $K = G/V$ в группу автоморфизмов группы V. Это позволяет образовать полупрямое произведение групп V и K. Тождественное отображение V в V является, очевидно, инвариантным коциклом на V. По лемме 1 он продолжается до коцикла f на группе G. Если p — проекция группы G на K, отображение $s: g \to (f(g),\ p(g))$ является гомоморфизмом группы G в полупрямое произведение групп V и K. Действительно,

$$\begin{aligned} s(g)\,s(g') = (f(g) + \overline{\varphi}(p(g)) \cdot f(g'),\quad & p(g)\,p(g')) = \\ &= (f(gg'),\ p(gg')) = s(gg'), \end{aligned} \tag{13}$$

поскольку f — коцикл. Далее, гомоморфизм s тождествен на V, и имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd} & & G \arrow[dr] \arrow[dd, "s"] & & \\ (e) \arrow[r] & V \arrow[ur] \arrow[dr] & & K \arrow[r] & (e) \\ & & V \times K \arrow[ur] & & \end{tikzcd}$$

Тем самым теорема доказана.

Теорема 2. *Пусть G — связная топологическая группа и C — ее дискретный нормальный делитель. Если фактор-группа G/C компактна и совпадает с замыканием своего коммутанта, то C — конечная группа и группа G компактна.*

Прежде всего группа G локально компактна. В самом деле, поскольку подгруппа C дискретна, найдется такая окрестность U единицы группы G, что $C \cap UU^{-1} = (e)$. Два различных элемента из U не могут входить в один и тот же класс смежности по C; иначе говоря, ограничение на U проекции p группы G на $G/C = K$ взаимно однозначно. С другой стороны, отображение p непрерывно и открыто. Отсюда следует, что его ограничение на U является гомеоморфизмом.

Множество $p(U)$ является окрестностью единицы группы K и содержит поэтому окрестность единицы, замыкание которой компактно и принадлежит $p(U)$. Эта окрестность имеет вид $p(V)$, где V — окрестность единицы группы G, содержащаяся в U. Очевидно, что замыкание окрестности V компактно.

Докажем теперь, что C — коммутативная группа с конечным числом образующих. При фиксированном $c \in C$ отображение $g \to gcg^{-1}$ есть непрерывное отображение связной группы G в дискретную группу C и потому является отображением в точку. Имеем $gcg^{-1} = ece^{-1} = c$, откуда видно, что C принадлежит центру группы G. Построим, как при доказательстве леммы, компактное подмножество D группы G, для которого $G = C \cdot \overset{\circ}{D}$. Множество DD^{-1} компактно и содержится в $C \cdot \overset{\circ}{D}$. Следовательно, DD^{-1} покрывается конечным числом открытых множеств $c_i\overset{\circ}{D}$, $c_i \in C$. Обозначим через Γ подгруппу группы C, порожденную элементами c_i. Тогда $DD^{-1} \subset D \cdot \Gamma$ и образ множества D при каноническом гомоморфизме группы G на G/Γ является подгруппой. Эта подгруппа содержит единицу группы G/Γ в качестве внутренней точки и потому открыта. Так как группа G связна, то группа G/Γ также связна и, следовательно, $G/\Gamma = D\Gamma/\Gamma$, откуда $G = D\Gamma$. Пересечение $D \cap C$ компактного множества D и дискретного множества C конечно; с другой стороны, Γ содержится в C, и если $c = d\gamma \in C$, то $d = c\gamma^{-1} \in C$, т. е. $C = \Gamma \cdot (D \cap C)$. Следовательно, группа C имеет конечное число образующих.

По теореме об абелевых группах с конечными числом образующих группа C есть прямое произведение конечной группы F и группы Z^n (где Z — аддитивная группа целых чисел). Если группа C бесконечна, то $n > 0$ и C гомоморфно отображается на Z^n. Вложим группу Z^n в векторное пространство R^n и будем считать, что группа G действует тривиальным образом на R^n. Тогда гомоморфизм группы C на Z^n определяет инвариантный коцикл на C со значениями в R^n. Этот коцикл продолжается до коцикла на группе G, т. е. до гомоморфизма группы G в R^n. Образ группы G при этом гомоморфизме связен и не может поэтому содержаться в Z^n. Так как образ группы C содержится в Z^n, то факторизацией из этого гомоморфизма получается нетривиальный гомоморфизм фактор-группы G/C в коммутативную группу R^n/Z^n. Это противоречит тому, что группа G/C совпадает с замыканием своего коммутанта. Итак, группа C конечна; но тогда группа $G=CD$ компактна.

Следствие 1. (Г. Вейль.) *Фундаментальная группа полупростой компактной группы Ли K конечна. Универсальная накрывающая группы K компактна.*

Пусть G — универсальная накрывающая группы K. Ядром канонического гомоморфизма группы G на группу K служит дискретный нормальный делитель C группы G, изоморфный фундаментальной группе группы K (см. [67] т. I, предложение 7 § VIII гл. II)[1]. Алгебра Ли группы K полупроста и совпадает со своей производной. Так как группа K связна, то она совпадает со своим коммутантом ([67], т. I, § XII гл. IV). Это позволяет применить теорему 2.

Следствие 2. *Всякая группа Ли G, накрывающая связную компактную группу K, является прямым произведением компактной группы и односвязной коммутативной группы.*

Предположим сначала, что группа G односвязна. Ее алгебра Ли $\mathfrak{G}$ является в то же время алгеброй Ли группы K. Так как группа K компактна, то ее присоединенное представление, как и всякое ее линейное представление, вполне приводимо ([67], т. I, следствие теоремы 1 § II гл. VI). Следовательно, алгебра $\mathfrak{G}$ редуктивна и распадается в прямую сумму полупростой алгебры $\mathfrak{P}$ и коммутативной алгебры $\mathfrak{A}$. При этом $\mathfrak{P}$ совпадает с производной алгеброй алгебры $\mathfrak{G}$ и является алгеброй Ли коммутанта группы K. Коммутант группы K, будучи замкнут в K, компактен. Согласно следствию 1, его универсальная накрывающая P также компактна. Таким образом, $\mathfrak{P}$ — алгебра Ли компактной односвязной группы P. Если $\dim \mathfrak{A} = n$, то $\mathfrak{A}$ — алгебра Ли векторной группы R^n. Следовательно, $\mathfrak{G}$ — алгебра Ли односвязной группы $P \times R^n$. Группы G и $P \times R^n$ односвязны и имеют одну и ту же алгебру Ли; следовательно, они изоморфны ([67], т. I, теорема 2 § VI гл. IV)[2].

Пусть теперь G — произвольное накрытие группы K. Обозначим через $\tilde{G}$ универсальную накрывающую группы K.

[1] См. также [43], § 50, E). — *Прим. перев.*
[2] См. также [43], теорема 80. — *Прим. перев.*

Группа G изоморфна фактор-группе группы $\tilde{G} \simeq P \times R^n$ по некоторому ее центральному нормальному делителю C. Центр группы $\tilde{G}$ равен произведению центра Z группы P и группы R^n. Так как центр алгебры $\mathfrak{P}$ равен 0, то центр группы P дискретен; так как группа P компактна, то он конечен. Пусть m — порядок группы Z. Элементы вида c^m $(c \in C)$ образуют подгруппу C' конечного индекса в C, содержащуюся во втором множителе произведения $P \times R^n$. Группа R^n/C' изоморфна прямому произведению тора и группы R^p. Следовательно, группа $\tilde{G}/C'$ изоморфна прямому произведению компактной группы и группы R^p. Но $\tilde{G}/C = (\tilde{G}/C')/(C/C')$, причем группа C/C' конечна. Поскольку в R^p нет элементов конечного порядка, группа C/C' содержится в компактной компоненте группы $\tilde{G}/C'$. Отсюда видно, что группа G изоморфна прямому произведению векторной группы R^p и компактной группы, что и требовалось доказать.

Ввиду важности следствия 1 мы дадим другое его доказательство, основанное на совершенно иных принципах. Впрочем, и этим не будут исчерпаны все известные его доказательства[1]).

Пусть K — связная полупростая компактная группа Ли, G — ее универсальная накрывающая, C — ядро канонического гомоморфизма группы G на K. *Унитарным представлением* группы G называется такой гомоморфизм ρ группы G в группу унитарных операторов в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, что при фиксированном $x \in \mathcal{H}$ отображение $g \to \rho(g)x$ группы G в пространство $\mathcal{H}$ непрерывно. И. М. Гельфанд и Д. А. Райков доказали[2]), что *всякая локально компактная группа обладает полной системой неприводимых унитарных представлений*, т. е. для всякого элемента $g \neq e$ группы G существует такое ее неприводимое унитарное представление ρ, что $\rho(g) \neq 1$. (Унитарное представление называется *неприводимым*, если в пространстве представления нет нетривиальных инвариантных *замкнутых* подпространств.)

---

[1]) Еще одно доказательство имеется в [43], теорема 110. — *Прим. перев.*

[2]) См. [15]*. — *Прим. перев.*

Справедлива следующая

Лемма 2. *Пусть G — локально компактная группа, C — такая ее центральная замкнутая подгруппа, что фактор-группа $G/C = K$ компактна. Тогда всякое неприводимое унитарное представление группы G конечномерно.*

Назовем ограниченный оператор T в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ оператором Гильберта — Шмидта, если существует такая константа M, что $\left|\sum (Ta_i, b_i)\right|^2 \leqslant M \sum \|b_i\|^2$ для всякой конечной ортонормированной системы векторов $\{a_i\}$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ и любых векторов b_i. Для всякого вектора $a \neq 0$ существует оператор Гильберта — Шмидта, удовлетворяющий следующим условиям: $(Ta, a) > 0$ и $(Tx, x) \geqslant 0$ при всех x. В качестве такого оператора можно взять, например, оператор T: $x \to \overline{(a, x)}\, a$. В самом деле, имеем $(Ta, a) = \|a\|^4 > 0$, $(Tx, x) = |(a, x)|^2 \geqslant 0$ и $\left|\sum (Ta_i, b_i)\right|^2 = \left|\sum \overline{(a, a_i)}\,(a, b_i)\right|^2 \leqslant \sum |(a, a_i)|^2 \sum |(a, b_i)|^2 \leqslant \|a\|^4 \sum \|b_i\|^2$ в силу неравенств Парсеваля и Коши — Буняковского. С другой стороны, ненулевой скалярный оператор может быть оператором Гильберта — Шмидта только тогда, когда пространство $\mathcal{H}$ конечномерно. В самом деле, пусть $T = \lambda \cdot 1$. Для $a_i = b_i$ получаем $n^2|\lambda|^2 \leqslant Mn$, откуда $\dim \mathcal{H} \leqslant M|\lambda|^{-2}$.

Если ρ — неприводимое унитарное представление группы G, то всякий оператор, коммутирующий со всеми операторами $\rho(g)$, $g \in G$, скалярен. В частности, это относится к операторам $\rho(c)$. Так как оператор $\rho(c)$, сверх того, унитарен, то его собственное значение по модулю равно 1. Исходя из произвольного ограниченного оператора T, построим функцию $N_{a,b}(g) = (T\rho(g)\, a, \rho(g)\, b)$. Очевидно, что $N_{a,b}(gc) = N_{a,b}(g)$; поэтому функцию $N_{a,b}$ можно считать определенной на компактной группе $G/C = K$. Проинтегрируем функцию $N_{a,b}$ по группе K, нормировав инвариантную меру dk таким образом, чтобы $\int dk = 1$. Полученная при этом форма $f_{a,b}$ линейна по a, антилинейна по b и непрерывна, поскольку $|N_{a,b}(g)| \leqslant \|T\|\, \|a\|\, \|b\|$ и $|f_{a,b}| \leqslant \|T\|\, \|a\| \cdot \|b\|$. По известной теореме, $f_{a,b} = (T^{\natural} a, b)$, где $T^{\natural}$ — некоторый ограниченный оператор. Так как

$N_{\rho(h)a,\,\rho(h)b}(g) = N_{a,\,b}(gh)$ и интегрирование инвариантно, то $(T^{\natural}\rho(h)\,a,\ \rho(h)\,b) = (T^{\natural}a,\ b)$. Из унитарности оператора $\rho(h)$ следует тогда, что оператор $T^{\natural}$ перестановочен с $\rho(h)$; но тогда $T^{\natural}$ — скалярный оператор. Если исходный оператор T неотрицателен (т. е. $(Tx,\ x) \geqslant 0$) и не равен нулю, то $N_{a,\,a}(g) \geqslant 0$, причем для некоторого a хотя бы при одном g имеет место строгое неравенство. В этом случае $f_{a,\,a} > 0$ и $T^{\natural} \neq 0$. Наконец, если T — оператор Гильберта — Шмидта, то $T^{\natural}$ — тоже оператор Гильберта — Шмидта:

$$\left|\sum (T^{\natural}a_i,\ b_i)\right|^2 = \left|\int \sum N_{a_i,\,b_i}(g)\,dp(g)\right|^2 \leqslant$$
$$\leqslant \int \left|\sum (T\rho(g)\,a_i,\ \rho(g)\,b_i)\right|^2 dp(g) \leqslant M \sum \|b_i\|^2,$$

так как оператор $\rho(g)$ унитарен и переводит систему векторов a_i в ортонормированную систему. Как мы видели выше, существует неотрицательный оператор Гильберта — Шмидта, не равный нулю. Следовательно, в пространстве $\mathscr{H}$ существует скалярный оператор Гильберта — Шмидта, не равный нулю. Это показывает, что пространство $\mathscr{H}$ конечномерно.

Комбинируя лемму 2 с результатом И. М. Гельфанда и Д. А. Райкова, мы видим, что всякая группа G, удовлетворяющая условиям леммы, обладает полной системой представлений конечной степени. Вернемся к случаю, когда G — универсальная накрывающая полупростой компактной связной группы Ли K. Так как группа G связна и односвязна, то ее конечномерные линейные представления находятся во взаимно однозначном соответствии с конечномерными линейными представлениями ее алгебры Ли $\mathfrak{G}$, которая совпадает с алгеброй Ли группы K и потому полупроста. Если рассматриваются представления в комплексных векторных пространствах, то безразлично, рассматривать ли представления алгебры $\mathfrak{G}$ или ее комплексного расширения $\mathfrak{G}_C$. Из результатов главы 14 [см. замечание 2) в конце главы] следует, что существует такое представление $\mathscr{D}$ алгебры $\mathfrak{G}$, что всякое ее линейное представление содержится в тензорной степени представления $\mathscr{D}$. Линейное представление группы G, соответствующее $\mathscr{D}$, должно быть точным. Пространство представления $\mathscr{D}$ разбивается в сумму неприводимых инвариантных подпространств, и в каждом из этих подпространств индуцируется унимодулярное представление группы G, так как алгебра $\mathfrak{G}$ совпадает со своей производной. Элементы из C представляются операторами, скалярными в каждом неприводимом подпространстве; но скалярный унимодулярный оператор в n-мерном пространстве есть умножение на корень n-й степени из 1. Отсюда видно, что группа $\rho(C)$, а значит, и группа C, конечна. Следовательно, группа G компактна.

2. Теория полупростых групп

Пусть G — связная полупростая группа Ли, т. е. связная группа Ли, алгебра Ли $\mathfrak{G}$ которой полупроста. В гл. 9 было установлено, что в алгебре $\mathfrak{G}$ существуют такие компактная подалгебра $\mathfrak{K}$ и разрешимая подалгебра $\mathfrak{N}$, что пространство $\mathfrak{G}$ разбивается в прямую сумму подпространств $\mathfrak{K}$ и $\mathfrak{N}$. Там же было показано, что присоединенная группа G_0 алгебры $\mathfrak{G}$, изоморфная фактор-группе группы G по ее центру C, представляется в виде $G_0 = K_0 N_0$ (т. е. всякий элемент g_0 единственным образом записывается в виде $g_0 = k_0 n_0$), где K_0 и N_0 — аналитические подгруппы группы G_0, соответствующие подалгебрам $\mathfrak{K}$ и $\mathfrak{N}$ алгебры $\mathfrak{G}$. Здесь мы распространим этот результат на саму группу G.

Теорема 3. *В предыдущих обозначениях пусть K и N — аналитические подгруппы группы G, соответствующие подалгебрам $\mathfrak{K}$ и $\mathfrak{N}$ алгебры $\mathfrak{G}$. Тогда группа K есть прямое произведение компактной группы K' и односвязной коммутативной группы A, а группа N — односвязная разрешимая группа. Центр группы G содержится в K. Отображение $(k', a, n) \to k'an$ произведения $K' \times A \times N$ в группу G есть аналитический гомеоморфизм первого многообразия на второе. Если меры Хаара на группах G, K', A, N надлежащим образом нормированы, то*

$$\int f(g)\,dg = \int \int \int f(k'an^{-1})\,dk'\,da\,dn. \tag{14}$$

Пусть p — канонический гомоморфизм группы G на группу G_0. Так как центр алгебры $\mathfrak{G}$ тривиален, то центр C группы G дискретен и отображение p является накрытием. Обозначим через N связную компоненту группы $p^{-1}(N_0)$.

Группа N накрывает группу N_0; однако последняя группа односвязна и поэтому это накрытие тривиально. Следовательно, ограничение отображения p на N взаимно однозначно, т. е. $N \cap C = (e)$. Если отождествить алгебры Ли групп G и G_0, то N — замкнутая разрешимая подгруппа группы G, алгебра Ли которой совпадает с $\mathfrak{N}$.

Положим $K = p^{-1}(K_0)$. Тогда $K \supset C$. Если $g \in K \cap N$, то $p(g) \in K_0 \cap N_0 = (e)$ и $g \in C$; но $N \cap C = (e)$ и поэтому $g = e$. Таким образом, $K \cap N = (e)$. Далее, если g — какой-нибудь элемент группы G, то $p(g) = k_0 n_0 = p(kn)$ и $g = knc = (kc) n \in KN$. Единственность разложения $g = kn$ почти очевидна: равенство $kn = k'n'$ влечет за собой равенство $k'^{-1}k = n'n^{-1} \in K \cap N = (e)$, т. е. $k = k'$, $n = n'$.

Отображение $\varphi : (k, n) \to kn$, очевидно, аналитическое. Если бы удалось доказать, что главная линейная часть отображения φ в любой точке есть взаимно однозначное отображение касательных пространств, то, поскольку размерности многообразий $K \times N$ и G равны, из этого следовало бы, что φ — изоморфизм аналитических многообразий. Для доказательства взаимной однозначности главной линейной части отображения φ возьмем произвольные элементы $X \in \mathfrak{K}$, $Y \in \mathfrak{N}$ и произвольные точки $k \in K$, $n \in N$. Тогда $(\delta_k * X, \delta_n * Y)$ — общий[1]) касательный вектор к многообразию $K \times N$ в точке (k, n). Его образ при отображении φ равен

$$\delta_k * X * \delta_n + \delta_k * \delta_n * Y = \delta_{kn} * (\operatorname{ad} n^{-1} \cdot X + Y).$$

Равенство $\operatorname{ad} n^{-1} \cdot X + Y = 0$ влечет за собой равенство $X + \operatorname{ad} n \cdot Y = 0$; но тогда $X = Y = 0$, так как сумма подпространств $\mathfrak{K}$ и $\mathfrak{N}$ прямая.

Из того, что φ — гомоморфизм и G — связная группа, вытекает, что группа K связна и потому является аналитической подгруппой группы G, соответствующей подалгебре $\mathfrak{K}$ Так как K содержит C, то $K_0 = K/C$. Следствие 2 теоремы 1 показывает, что $K = K' \times A$, где K' — компактная группа, а A — односвязная коммутативная группа. Из этого немедленно вытекает, что многообразие G аналитически изоморфно многообразию $K' \times A \times N$ и что подгруппы K', A, N замкнуты в G.

---

[1]) То есть всякий касательный вектор к многообразию $K \times N$ в точке (k, n) имеет такой вид. — *Прим. ред.*

Мера Хаара dg на группе G двусторонне инвариантна, поскольку группа G полупроста, и тем более унимодулярна. Рассмотрим функцию вида $f(g)=f'(k)f''(n)$, где $g=kn$. При фиксированной функции $f'\geqslant 0$ интеграл $\int f(g)\,dg$ представляет собой позитивный[1]) линейный функционал от f'', инвариантный справа. Такой функционал пропорционален $\int f''(n^{-1})\,dn$. Следовательно, $\int f(g)\,dg = N(f')\int f''(n^{-1})\,dn$. Фиксируя f'', видим, что $N(f')$ — левоинвариантный позитивный линейный функционал от f', так что $N(f')=\int f'(k)\,dk$. Так как группа K есть прямое произведение групп K' и A, то мера $dk'\,da$ левоинвариантна на K и в силу единственности можно считать $dk=dk'\,da$. Таким образом, формула (14) справедлива для функций f рассматриваемого вида; но такие функции достаточно многочисленны, и поэтому формула (14) справедлива для любых f.

Перейдем к изучению комплексных полупростых групп Ли. Как обычно, под *комплексной группой Ли* мы будем понимать группу G, снабженную структурой комплексного аналитического многообразия таким образом, что отображение $(g, g')\to gg'^{-1}$ произведения $G\times G$ в G аналитично.

Пусть V — комплексное аналитическое многообразие. *Касательным вектором* к многобразию V в точке p называется линейная форма X на векторном пространстве аналитических функций, определенных в окрестности точки p, удовлетворяющая следующему условию:

$$X(fg)=X(f)\,g(p)+f(p)\,X(g). \tag{15}$$

Касательные векторы в данной точке p образуют *комплексное касательное пространство* $T(p)$ к многообразию V в точке p. Для всякого касательного вектора $X\in T(p)$ существует, и притом только одна, линейная форма на пространстве вещественно-аналитических функций с комплексными значениями, определенных в окрестности точки p, для которой, помимо условия (15), выполняется условие $X(\bar{f})=\overline{X(f)}$. Это позволяет установить изоморфизм между

[1]) То есть принимающий неотрицательные значения на неотрицательных функциях f''. — *Прим. перев.*

пространством $T(p)$, рассматриваемым как вещественное векторное пространство, и касательным пространством к многообразию V, рассматриваемому как вещественное многообразие (см. определение касательного пространства в [67]). При этом касательное пространство к вещественному многообразию V снабжается комплексной структурой.

В частности, алгебра Ли $\mathfrak{G}$ комплексной группы Ли G наделяется комплексной структурой; формула

$$\langle [X, Y], f\rangle =$$
$$= \int\int f(xy)\,dX(x)\,dY(y) - \int\int f(xy)\,dY(x)\,dX(y),$$

где f — аналитическая функция, показывает, что эта структура согласована со структурой алгебры Ли. Полученную комплексную алгебру Ли мы будем обозначать через $\mathfrak{G}_0$. Обратно, если в алгебре Ли $\mathfrak{G}$ вещественной группы Ли G можно ввести структуру комплексной алгебры Ли $\mathfrak{G}_0$, из которой $\mathfrak{G}$ получается ограничением поля скаляров, то, как можно доказать, на группе G существует единственная комплексная аналитическая структура, при которой она становится комплексной группой Ли с алгеброй Ли $\mathfrak{G}_0$.

Умножение на i определяет в пространстве $\mathfrak{G}$ оператор Γ. Для того чтобы дифференцируемая функция f на группе G была аналитической, необходимо и достаточно, чтобы $\Gamma X * f = i(X * f)$ для всякого $X \in \mathfrak{G}$. Линейное представление ρ группы G в пространстве V называется *аналитическим*, если для всяких $v \in V$, $v' \in V^*$ функция $\langle \rho(g)v, v'\rangle$ на группе G аналитична. Согласно сказанному выше, последнее условие эквивалентно тому, что $d\rho(\Gamma X) = i\,d\rho(X)$ для всех $X \in \mathfrak{G}$. Пусть $\mathfrak{G}_C$ — комплексное расширение алгебры $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{G}'$ — множество тех $X \in \mathfrak{G}_C$, для которых $\Gamma X = iX$, и $\mathfrak{G}''$ — множество тех $X \in \mathfrak{G}_C$, для которых $\Gamma X = -iX$[1]). Так как $\Gamma^2 = -1$ и $[\Gamma X, Y] = \Gamma[X, Y]$ в алгебре $\mathfrak{G}$, то те же соотношения выполняются и в алгебре $\mathfrak{G}_C$. Отсюда немедленно вытекает, что $\mathfrak{G}_C$ есть прямая сумма подпространств $\mathfrak{G}'$ и $\mathfrak{G}''$, соответствующих собственным значениям i и $-i$ оператора Γ, и что если $X \in \mathfrak{G}'$, $Y \in \mathfrak{G}_C$, то $\Gamma[X, Y] = [\Gamma X, Y] = i[X, Y]$, т. е. $\mathfrak{G}'$ — идеал в $\mathfrak{G}_C$; то же верно для $\mathfrak{G}''$.

---

[1]) Оператор Γ продолжается на пространство $\mathfrak{G}_C$ по линейности.

Линейным представлениям группы G в комплексных векторных пространствах соответствуют линейные представления алгебры $\mathfrak{G}$ и, следовательно, комплексные линейные представления алгебры $\mathfrak{G}_C$. При этом аналитическим представлениям группы G соответствуют комплексные представления алгебры $\mathfrak{G}_C$, обращающиеся в 0 на элементах вида $\Gamma X - iX$, т. е. на $\mathfrak{G}''$. Точно так же антианалитическим[1]) представлениям группы G соответствуют комплексные представления алгебры $\mathfrak{G}_C$, обращающиеся в 0 на $\mathfrak{G}'$.

Поскольку алгебра Ли $\mathfrak{G}_C$ есть прямое произведение алгебр $\mathfrak{G}'$ и $\mathfrak{G}''$, обертывающая алгебра $U(\mathfrak{G}_C)$ изоморфна тензорному произведению алгебр $U(\mathfrak{G}')$ и $U(\mathfrak{G}'')$. Всякое неприводимое линейное представление тензорного произведения двух ассоциативных алгебр эквивалентно тензорному произведению неприводимых представлений этих алгебр; в силу теоремы Бернсайда верно также и обратное. Действительно, пусть $A = B \otimes C$ и ρ — неприводимое представление алгебры A в пространстве V. Выберем в пространстве V минимальное подпространство V_1, инвариантное относительно B, и пусть L — пространство B-гомоморфизмов B-модуля V_1 в B-модуль V, снабженное структурой C-модуля по формуле $c \cdot f = \rho(c) \circ f$. Возьмем в L минимальное подпространство V_2, инвариантное относительно C. Отображение $v_1 \otimes f \to f(v_1)$ произведения $V_1 \otimes V_2$ в V отлично от нулевого и перестановочно с операторами из B и C. Из теоремы Бернсайда следует, что представление алгебры $B \otimes C$ в пространстве $V_1 \otimes V_2$ неприводимо. Лемма Шура показывает тогда, что это представление эквивалентно представлению алгебры A в пространстве V.

Мы доказали, таким образом, следующее

Предложение. *Всякое неприводимое линейное представление комплексной группы Ли в комплексном векторном пространстве эквивалентно тензорному произведению аналитического неприводимого представления и антианалитического неприводимого представления.*

---

[1]) Линейное представление группы G называется антианалитическим, если для всяких $v \in V$, $v' \in V^*$ функция $\overline{\langle \rho(g) v, v' \rangle}$ аналитична. Для этого необходимо и достаточно, чтобы $d\rho(\Gamma X) = -i\, d\rho(X)$ для всех $X \in \mathfrak{G}$. — *Прим. перев.*

Пусть G — комплексная полупростая группа Ли, $\mathfrak{G}$ — ее алгебра Ли. Поскольку $\mathfrak{G}$ — вещественная полупростая алгебра, ее комплексное расширение $\mathfrak{G}_C$ является комплексной полупростой алгеброй. Далее, алгебра $\mathfrak{G} \subset \mathfrak{G}_C$ не пересекает ни $\mathfrak{G}'$, ни $\mathfrak{G}''$, так как если бы какой-нибудь элемент $X \in \mathfrak{G}$ содержался в $\mathfrak{G}'$ или в $\mathfrak{G}''$, то должно было бы быть $\Gamma X = \pm iX$; но $\Gamma X \in \mathfrak{G}$ и $\mathfrak{G} \cap i\mathfrak{G} = 0$, так что $X = 0$. Отсюда следует, что проекции алгебры $\mathfrak{G}$ на $\mathfrak{G}'$ и $\mathfrak{G}''$ взаимно однозначны. Так как $\Gamma X = iX$ в алгебре $\mathfrak{G}'$, то комплексные алгебры $\mathfrak{G}_0$ и $\mathfrak{G}'$ изоморфны. Точно так же, комплексные алгебры $\mathfrak{G}_0$ и $\mathfrak{G}''$ антиизоморфны (т. е. существует взаимно однозначное антилинейное мультипликативное отображение одной из этих алгебр на другую). В частности, получаем, что $\mathfrak{G}_0$ — полупростая комплексная алгебра Ли. Пусть $\mathfrak{K}$ — компактная вещественная форма алгебры $\mathfrak{G}_0$, $\mathfrak{K}'$ и $\mathfrak{K}''$ — компактные вещественные формы алгебр $\mathfrak{G}'$ и $\mathfrak{G}''$, соответствующие $\mathfrak{K}$ при проектировании алгебры $\mathfrak{G}_0$ на $\mathfrak{G}'$ и $\mathfrak{G}''$ соответственно. Произведение $\mathfrak{K}' \times \mathfrak{K}''$ — компактная вещественная форма алгебры $\mathfrak{G}_C = \mathfrak{G}' \times \mathfrak{G}''$. Очевидно, что пересечение алгебры $\mathfrak{G} \subset \mathfrak{G}_C$ с $\mathfrak{K}' \times \mathfrak{K}''$ равно $\mathfrak{K}$.

Алгебра $\mathfrak{K}$ компактна и полупроста, поэтому соответствующая ей подгруппа K группы G компактна (следствие 1 теоремы 2). Пусть $\tilde{G}$ — универсальная накрывающая группы G и C — ядро гомоморфизма группы $\tilde{G}$ на G. Если $\tilde{K}$ — подгруппа группы $\tilde{G}$, соответствующая алгебре $\mathfrak{K}$, то в силу теоремы 3 $\tilde{K}$ содержит центр группы $\tilde{G}$ и тем более подгруппу C. По теореме Петера — Вейля компактная группа K обладает точным линейным представлением ρ в конечномерном вещественном векторном пространстве V. Соответствующее инфинитезимальное представление $d\rho$ алгебры $\mathfrak{K}$ точно и потому продолжается до точного комплексного линейного представления алгебры $\mathfrak{K}_C = \mathfrak{G}_0$ в пространстве V_C. Так как группа $\tilde{G}$ односвязна, то это представление алгебры $\mathfrak{G}_0$ индуцирует аналитическое линейное представление $\tilde{\rho}$ группы $\tilde{G}$. Ядро представления $\tilde{\rho}$ дискретно и потому содержится в центре группы $\tilde{G}$ (ср. доказательство теоремы 2), а значит, и в $\tilde{K}$. Ограничение представления $\tilde{\rho}$ на подгруппе $\tilde{K}$ совпадает, очевидно, с композицией естественного гомоморфизма группы $\tilde{K}$ на K и исходного представления ρ группы K.

Поскольку представление ρ точно и $K = \tilde{K}/C$, ядро представления $\tilde{\rho}$ в точности равно C. Следовательно, факторизацией по C из представления $\tilde{\rho}$ получается точное линейное представление группы G.

Теорема 4. *Всякая полупростая комплексная группа Ли допускает точное аналитическое линейное представление в конечномерном векторном пространстве.*

Рассуждая так же, как при доказательстве этой теоремы, можно доказать, что *аналитические конечномерные линейные представления группы G находятся во взаимно однозначном соответствии с линейными представлениями группы K в конечномерных комплексных векторных пространствах*. В самом деле, линейное представление группы K определяет, с одной стороны, линейное представление группы $\tilde{K}$, ядро которого содержит C, и, с другой стороны, представление алгебры $\mathfrak{K}$. Это последнее представление единственным образом продолжается до комплексного представления алгебры $\mathfrak{G}_0$, которое в свою очередь определяет аналитическое представление $\tilde{\rho}$ группы $\tilde{G}$. Представление $\tilde{\rho}$ тривиально на C и потому индуцирует линейное представление группы $G = \tilde{G}/C$.

Из доказанного следует, что G совпадает с алгебраической группой, ассоциированной с компактной группой K ([67], т. I, § VIII гл. VI).

3. Произвольные группы Ли

Мы покажем, что топология произвольных групп Ли сводится к топологии компактных групп Ли и, следовательно, по существу — к топологии полупростых компактных групп Ли.

Теорема 5. *Для всякой вещественной алгебры Ли $\mathfrak{G}$ существует единственная (с точностью до изоморфизма) односвязная группа Ли G, алгебра Ли которой изоморфна $\mathfrak{G}$. В группе G существуют такие компактная подгруппа K, односвязная коммутативная подгруппа A и разрешимая подгруппа N, гомеоморфная евклидову пространству, что $G = K \cdot A \cdot N$, причем* *всякий элемент $g \in G$ единственным образом представляется в виде $g = kan$.*

Сделаем предварительно следующее замечание. Пусть $\mathfrak{G}$ — алгебра Ли, обладающая таким идеалом $\mathfrak{J}$ и такой подалгеброй $\mathfrak{S}$, что $\mathfrak{J} \cap \mathfrak{S} = 0$ и $\mathfrak{G} = \mathfrak{J} + \mathfrak{S}$. Для всякого $\mathbf{S} \in \mathfrak{S}$ ограничение $D_{\mathbf{S}}$ оператора $\operatorname{ad} \mathbf{S}$ на идеале $\mathfrak{J}$ есть дифференцирование алгебры $\mathfrak{J}$. Как легко убедиться, структура алгебры Ли $\mathfrak{G}$ определяется структурой алгебр $\mathfrak{J}$ и $\mathfrak{S}$ и гомоморфизмом $\mathbf{S} \to D_{\mathbf{S}}$ алгебры $\mathfrak{S}$ в алгебру Ли дифференцирований алгебры $\mathfrak{J}$. Пусть S и I — односвязные группы Ли, алгебры Ли которых изоморфны алгебрам $\mathfrak{S}$ и $\mathfrak{J}$ соответственно. Линейное представление $\mathbf{S} \to D_{\mathbf{S}}$ алгебры $\mathfrak{S}$ в пространстве $\mathfrak{J}$ индуцирует линейное представление $s \to D(s)$ группы S в том же пространстве, причем операторы $D(s)$ являются автоморфизмами алгебры $\mathfrak{J}$ ([67], т. I, предложение 1 § XV гл. IV). Так как группа I односвязна, то существует единственный автоморфизм $\varphi(s)$ группы I, индуцирующий автоморфизм $D(s)$ алгебры $\mathfrak{J}$. Рассмотрим полупрямое произведение G групп I и S, определенное отображением φ. Группы I и S будем отождествлять с подгруппами группы G. Пространство G односвязно как прямое произведение односвязных пространств I и S. Подгруппа I является нормальным делителем в G и $\varphi(s)i = sis^{-1}$. Отображение φ есть гомоморфизм группы Ли S в группу Ли автоморфизмов группы I и потому аналитично. Следовательно, G — группа Ли. Ее алгебра Ли $\mathfrak{G}'$ содержит идеал, изоморфный $\mathfrak{J}$, и подалгебру, изоморфную $\mathfrak{S}$. При соответствующем отождествлении пространство $\mathfrak{G}'$ превращается в прямую сумму подпространств $\mathfrak{J}$ и $\mathfrak{S}$. Далее, так как $\varphi(s)i = sis^{-1}$, имеем $(\operatorname{ad} s)(\mathbf{I}) = D(s)\mathbf{I}$, откуда $[\mathbf{S}, \mathbf{I}] = D_{\mathbf{S}}(\mathbf{I})$ при любых $\mathbf{S} \in \mathfrak{S}$, $\mathbf{I} \in \mathfrak{J}$. Это показывает, что алгебра $\mathfrak{G}'$ изоморфна $\mathfrak{G}$.

Если алгебра $\mathfrak{G}$ полупроста, то ее присоединенное представление точно и, следовательно, алгебра Ли группы $\operatorname{Int} \mathfrak{G}$ изоморфна $\mathfrak{G}$. Рассматривая универсальную накрывающую группы $\operatorname{Int} \mathfrak{G}$, мы видим, что существует односвязная группа Ли, имеющая $\mathfrak{G}$ своей алгеброй Ли.

Если алгебра $\mathfrak{G}$ разрешима, то построение соответствующей группы Ли можно провести индукцией по размерности алгебры $\mathfrak{G}$. Пусть $\mathfrak{H}$ — подпространство коразмерности 1 в алгебре $\mathfrak{G}$, содержащее $[\mathfrak{G}, \mathfrak{G}]$. Тогда $\mathfrak{H}$ — идеал. Пусть $\mathfrak{D}$ — дополнительная к $\mathfrak{H}$ прямая. Очевидно, что $\mathfrak{D}$ — алгебра

Ли аддитивной группы R вещественных чисел. Если H — односвязная разрешимая группа Ли, гомеоморфная евклидову пространству и имеющая $\mathfrak{H}$ своей алгеброй Ли, то можно образовать полупрямое произведение G групп H и R, алгебра Ли которого будет изоморфна $\mathfrak{G}$. При этом G гомеоморфно евклидову пространству.

Чтобы доказать первое утверждение теоремы 5 в общем случае, возьмем разложение Леви алгебры $\mathfrak{G}$ на радикал и полупростую часть и образуем полупрямое произведение G соответствующих односвязных групп N_1 и S. К группе S можно применить теорему 3. Пусть N_2 — разрешимая группа, участвующая в разложении группы S. Множество $N = N_2 N_1$ является подгруппой в G, так как N_1 — нормальный делитель. Эта подгруппа разрешима как расширение разрешимой группы N_2 посредством разрешимой группы N_1 и гомеоморфна евклидову пространству, поскольку этим свойством обладают группы N_1 и N_2. Заменяя N_2 на N в разложении группы S, получаем искомое разложение группы G.

Доказанная теорема содержит, в частности, обращение „третьей теоремы Ли" — теорему о существовании группы Ли с заданной алгеброй Ли. Мы доказали глобальный вариант этой теоремы; в следующей главе будет доказана другими методами соответствующая локальная теорема.

Теперь сформулируем и докажем одну теорему, принадлежащую Ивасаве, как, впрочем, и большая часть результатов этой главы.

Теорема 6. *Во всякой связной группе Ли G можно найти такую компактную подгруппу K и такие однопараметрические подгруппы $H_1, \ldots, H_m$*[1]*, что отображение $(k, h_1, \ldots, h_m) \to kh_1 \ldots h_m$ произведения $K \times H_1 \times \ldots \times H_m$ в группу G — изоморфизм первого многообразия на второе.*

Если G — односвязная коммутативная группа, то она изоморфна группе R^n, так что в этом случае теорема верна. Если G — односвязная разрешимая группа Ли, то ее индуктивное построение, данное в доказательстве теоремы 5, показывает, что теорема верна и в этом случае. Если

[1]) Имеются в виду некомпактные однопараметрические подгруппы. — *Прим. перев.*

группа G полупроста, то по теореме 3 она допускает разложение $G = K \cdot A \cdot N$. Ввиду сделанных только что замечаний относительно разрешимых и коммутативных односвязных групп можно найти однопараметрические подгруппы группы G, удовлетворяющие условиям теоремы.

В общем случае проведем доказательство индукцией по размерности группы G. Пусть $\mathfrak{G}$ — алгебра Ли группы G и $\mathfrak{R}$ — ее радикал. Поскольку алгебра $\mathfrak{R}$ разрешима, последовательность ее производных алгебр сходится к 0 и существует такое число k, что $\mathfrak{R}^{(k)} \neq 0$, $\mathfrak{R}^{(k+1)} = 0$. Тогда $\mathfrak{J} = \mathfrak{R}^{(k)}$ — коммутативный идеал алгебры $\mathfrak{G}$. Пусть I — нормальный делитель группы G, соответствующий $\mathfrak{J}$. Возможно, что нормальный делитель I и не замкнут в G; но, во всяком случае, его замыкание $\bar{I}$ является замкнутым коммутативным нормальным делителем. Группа $\bar{I}$ разлагается в прямое произведение векторной группы R^n и тора T^p, который инвариантен относительно всех автоморфизмов группы $\bar{I}$, как наибольшая компактная подгруппа в $\bar{I}$. В частности, тор T^p инвариантен относительно автоморфизмов группы $\bar{I}$, индуцированных внутренними автоморфизмами группы G. Следовательно, T^p — нормальный делитель в группе G. Таким образом, группа G либо полупроста, либо обладает нетривиальным замкнутым нормальным делителем J, изоморфным T^p или R^n.

Применяя индуктивное предположение к группе G/J, получаем разложение $G/J = K' \cdot H'_1 \ldots H'_r$, удовлетворяющее условиям теоремы. Каждый элемент $\bar{g} \in G/J$ тогда единственным образом представляется в виде $\bar{g} = k'h'_1 \ldots h'_r$, причем множители k', h'_i (вещественно) аналитически зависят от $\bar{g}$. Однопараметрические подгруппы H'_i группы G/J поднимаются в однопараметрические подгруппы H_i группы G: для этого достаточно поднять их направляющие векторы в алгебру $\mathfrak{G}$[1]). Пусть L — полный прообраз подгруппы K'

---

[1]) Подгруппа H_i замкнута в G; в противном случае ее замыкание $\overline{H}_i$ было бы компактным и группа H'_i также была бы компактной как непрерывный образ $\overline{H}_i$. — *Прим. перев.*

в группе G. Обозначая чертой естественный гомоморфизм группы G на G/J, для всякого $g \in G$ имеем $\overline{g} = k'h'_1 \ldots h'_r = k'\overline{h}_1 \ldots \overline{h}_r$, где h_i — единственный элемент группы H_i, проектирующийся в h'_i. Так как всякий гомоморфизм групп Ли аналитичен, то элементы h_i аналитически зависят от g. Далее, $g = lh_1 \ldots h_r$, и элемент l, равный $g(h_1 \ldots h_r)^{-1}$, однозначно определен и аналитически зависит от g.

Группа L обладает замкнутым коммутативным нормальным делителем J, фактор-группа по которому компактна. Если группа J изоморфна T^p, то группа L компактна и можно положить $L = K$. Если группа J изоморфна R^n, то по теореме 1 в группе L существует такая компактная подгруппа K, что $L = K \cdot J$ (полупрямое произведение). Очевидно, что при этом в разложении $l = kj$ множители k и j аналитически зависят от l. Группу J можно записать в виде $J = H_{r+1} \ldots H_{r+n}$. Тогда $L = K \cdot J = K \cdot H_{r+1} \ldots H_{r+n}$, откуда немедленно получается требуемое разложение группы G.

Глава 18

ФОРМУЛА КЭМПБЕЛЛА—ХАУСДОРФА

П. Картье

1. Вывод формулы Кэмпбелла — Хаусдорфа

Пусть P_n — алгебра некоммутативных многочленов с рациональными коэффициентами от n переменных x_i; L_n — подалгебра Ли алгебры P_n (относительно операции коммутирования $[a, b] = ab - ba$), порожденная элементами x_i. В первой главе были получены следующие результаты:

а) элементы из L_n характеризуются условием

$$\Delta(a) = a \otimes 1 + 1 \otimes a, \tag{1}$$

где Δ — гомоморфизм алгебры P_n в алгебру $P_n \otimes P_n$, переводящий x_i в $x_i \otimes 1 + 1 \otimes x_i$ [1]);

б) оператор P, определяемый равенством

$$P(x_{i_1} \ldots x_{i_p}) = \frac{1}{p}[x_{i_1}, [x_{i_2}, \ldots [x_{i_{p-1}}, x_{i_p}] \ldots]], \tag{2}$$

является проектированием пространства P_n на L_n.

Пусть $\overline{P}_n$ — алгебра формальных некоммутативных степенных рядов с рациональными коэффициентами от переменных x_i. Алгебра P_n естественным образом вкладывается в $\overline{P}_n$. Пусть $\overline{L}_n$ — множество тех рядов, все однородные компоненты которых лежат в L_n. Легко видеть, что утверждения а) и б) сохраняют силу при замене P_n на $\overline{P}_n$ и L_n на $\overline{L}_n$.

Формальные ряды со свободным членом 1 обратимы в алгебре $\overline{P}_n$. Среди них выделим ряды b, удовлетворяющие условию $\Delta(b) = b \otimes b$; такие ряды, очевидно, образуют группу S. Установим взаимно однозначное соответствие между формальными рядами без свободного члена и формальными

---

[1]) Это видно из доказательства леммы 2 гл. 1 в случае, когда $\mathfrak{G}$ — свободная алгебра Ли с образующими x_i. — *Прим. перев.*

рядами со свободным членом 1 посредством формул

$$e^x = \sum_{n \geqslant 0} \frac{x^n}{n!}, \quad \log(1+y) = -\sum_{n>0} \frac{(-y)^n}{n}. \tag{3}$$

Если элементы x и x' перестановочны, то $e^{x+x'} = e^x e^{x'}$. Поэтому

$$e^{1\otimes a + a\otimes 1} = e^{a\otimes 1} e^{1\otimes a} = (e^a \otimes 1)(1 \otimes e^a) = e^a \otimes e^a,$$

откуда видно, что экспоненциал отображает $\overline{L}_n$ на S. Структуру группы S перенесем на множество $\overline{L}_n$, положив $a \circ a' = \log(e^a e^{a'})$. Найдем явный вид этого группового умножения в $\overline{L}_n$. Достаточно рассмотреть случай $a = x_1$, $a' = x_2$, из которого общий случай получается специализацией $x_1 \to a$, $x_2 \to a'$. Так как произведение $x_1 \circ x_2$ лежит в $\overline{L}_n$, то оно не изменится при применении оператора P. Далее,

$$(e^{x_1} e^{x_2} - 1)^m = \sum \frac{x_1^{p_1} x_2^{q_1} \ldots x_1^{p_m} x_2^{q_m}}{p_1!\, q_1! \ldots p_m!\, q_m!}, \tag{4}$$

где сумма распространяется на все системы чисел (p, q), для которых $p_i + q_i \neq 0$ при всяком i. Применяя оператор P к разложению $\log(e^{x_1} e^{x_2}) = \sum_{m>0} \frac{(-1)^{m-1}}{m} (e^{x_1} e^{x_2} - 1)^m$, получаем окончательно формулу

$$x_1 \circ x_2 = \sum_{p,q} \frac{(-1)^{m-1} [x_1^{p_1}, [x_2^{q_1}, \ldots [x_1^{p_m}, x_2^{q_m}] \ldots]}{m \sum_i (p_i + q_i) \prod_i (p_i!\, q_i!)}, \tag{5}$$

где принято обозначение $[x^k, y] = \mathrm{ad}^k x \cdot y$. Эта формула носит название *формулы Кэмпбелла — Хаусдорфа*; ее точный вид принадлежит Дынкину [18*].

2. Сходимость формулы Кэмпбелла—Хаусдорфа

Если $\mathfrak{G}$ — конечномерная вещественная алгебра Ли и коммутатор в формуле (5) понимается как операция в алгебре $\mathfrak{G}$, то можно доказать, что ряд в правой части этой формулы сходится при $x_1 = x$ и $x_2 = y$, достаточно близких к 0. Пусть $\{e_i\}$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ — база в пространстве $\mathfrak{G}$, c_{ij}^k — структурные константы алгебры $\mathfrak{G}$ относительно этой базы. Подобным преобразованием всегда можно добиться того, чтобы константы c_{ij}^k по модулю не превосходили $1/n$. Положим $z = x \circ y$, $x = \sum x^i e_i$, $y = \sum y^i e_i$ и $z = \sum z^i e_i$. Числа z^i будут тогда выражаться через x^i и y^i посредством степенных рядов. Найдем для этих рядов мажоранту Коши. Известно, что при сложении и умножении рядов их мажоранты соответственно складываются и умножаются. Следовательно, если $A = (A^i)$ и $B = (B^i)$ — две совокупности степенных рядов от x^i и y^i, имеющие мажоранты $\alpha = (\alpha^i)$ и $\beta = (\beta^i)$, то ряд $C^i = [A,\ B]^i = \sum c_{jk}^i A^j B^k$ допускает в качестве мажоранты

$$\gamma^i = \sum |c_{jk}^i| \alpha^j \beta^k \leqslant \frac{1}{n} \sum \alpha^j \sum \beta^k.$$

При этом $\sum \gamma^i \leqslant \sum \alpha^j \sum \beta^k$. Полагая $\|x\| = \sum |x_i|$, находим, что ряд, выражающий $x \circ y$, мажорируется рядом

$$\sum_{m>0} \frac{(e^{\|x\|} e^{\|y\|} - 1)^m}{m}.$$

Этот последний ряд сходится, как только $|e^{\|x\|} e^{\|y\|} - 1| < 1$, т. е. если $\|x\| + \|y\| < \log 2$. Следовательно, ряд Кэмпбелла — Хаусдорфа также сходится при выполнении этого условия.

Так как операция $x \circ y$ формально ассоциативна и 0 играет для нее роль единичного элемента, то формула Кэмпбелла — Хаусдорфа, сходясь в некоторой окрестности нуля в алгебре $\mathfrak{G}$, определяет там локальную группу Ли G. Прямые пространства $\mathfrak{G}$ являются однопараметрическими подгруппами группы G, поскольку $e^{aX} e^{bX} = e^{(a+b)X}$. Следовательно, всякая линейная система координат в $\mathfrak{G}$ определяет каноническую систему координат в локальной группе G.

Пусть H — локальная группа Ли с алгеброй Ли $\mathfrak{H}$ и f — аналитическая функция в окрестности единицы e группы H. Положим $f'(t) = f(\exp tX \cdot h)$. По определению экспоненциального отображения

$$\frac{df'(t)}{dt} = \langle X * \delta_{\exp tX \cdot h},\ f \rangle = (\check{X} * f)(\exp tX \cdot h),$$

откуда индукцией по n получаем

$$\frac{d^n f'(t)}{dt^n} = (\check{X}^n * f)(\exp tX \cdot h). \qquad (6)$$

Функция f' аналитична по t и допускает поэтому разложение в ряд Тейлора, сходящийся при достаточно малых t. Заменяя в случае надобности вектор X на пропорциональный ему вектор, можно добиться того, чтобы этот ряд сходился при $t = 1$. Тогда при $h = e$ получаем из (6)

$$f(\exp X) = \sum_{n \geqslant 0} \frac{1}{n!} \langle X^n, f \rangle.$$

При $h = \exp Y$ формула (6) дает

$$f(\exp X \cdot \exp Y) = \sum_{m,\, n \geqslant 0} \frac{1}{m!\, n!} \langle X^m * Y^n, f \rangle.$$

Беря в качестве f последовательно все канонические координаты, приходим к выводу, что групповое умножение задается в канонических координатах формулой Кэмпбелла — Хаусдорфа.

Теорема. *Во всякой локальной группе Ли умножение в канонических координатах задается формулой Кэмпбелла — Хаусдорфа. Обратно, для всякой конечномерной алгебры Ли $\mathfrak{G}$ формула Кэмпбелла — Хаусдорфа сходится в некоторой окрестности нуля и определяет локальную группу Ли, имеющую $\mathfrak{G}$ в качестве алгебры Ли.*

3. Приложение к нильпотентным группам

Напомним, что алгебра Ли $\mathfrak{G}$ называется нильпотентной, если оператор $\operatorname{ad} X$ нильпотентен для всякого ее элемента X. Из теоремы Энгеля вытекает, что существует такая последовательность

$$\mathfrak{G}_0 = \mathfrak{G} \supset \mathfrak{G}_1 \supset \ldots \supset \mathfrak{G}_n = 0$$

идеалов алгебры $\mathfrak{G}$, что $[\mathfrak{G}, \mathfrak{G}_i] \subset \mathfrak{G}_{i+1}$. Следовательно, при достаточно большом p выражения вида $[x_1, \ldots [x_{p-1}, x_p] \ldots]$ обращаются в 0, так что в формуле Кэмпбелла — Хаусдорфа лишь конечное число членов отлично от нуля. Групповое умножение задается тогда полиномиальными формулами и определено во всем пространстве $\mathfrak{G}$. Это показывает, что *если G — односвязная нильпотентная группа Ли и $\mathfrak{G}$ — ее алгебра Ли, то экспоненциальное отображение есть гомеоморфизм $\mathfrak{G}$ на G и в канонических координатах в группе G умножение задается полиномиальными формулами.*

Более того, пусть ρ — такое линейное представление группы G в пространстве V, что оператор $d\rho(X)$ нильпотентен для всякого $X \in \mathfrak{G}$. Ряд в правой части формулы $\rho(\exp X) = \exp d\rho(X)$ имеет лишь конечное число ненулевых членов, причем это число равномерно ограничено по X в силу теоремы Энгеля. Следовательно, $\rho(\exp X)$ — полиномиальная функция от X, и *в канонических координатах на группе G представление ρ задается полиномиальными формулами.* Обратно, *всякое рациональное*[1]) *линейное представление группы G определяет нильпотентное представление алгебры* $\mathfrak{G}$. В самом деле, пусть ρ — рациональное представление группы G в пространстве V. Тогда представление группы G, индуцированное в любом подпространстве и в любом фактор-пространстве пространства V, также рационально, и поэтому достаточно доказать, что для всякого рационального представления ρ в пространстве представления V найдется вектор, аннулируемый всеми операторами $d\rho(X)$, $X \in \mathfrak{G}$. Поскольку алгебра $\mathfrak{G}$ разрешима, она обладает в пространстве V общим собственным вектором с некоторым весом λ. Если $v \in V_\lambda$, то $d\rho(X)v = \lambda(X)v$ и $\rho(\exp X)v = \exp d\rho(X) \cdot v = e^{\lambda(X)}v$. Из рациональности представления ρ вытекает, что $e^{\lambda(X)}$ — рациональная функция от X. Очевидно, что это возможно только в том случае, когда $\lambda = 0$, т. е. когда вектор v аннулируется оператором $d\rho(X)$ для всякого $X \in \mathfrak{G}$.

Этот последний результат можно уточнить, доказав, *что всякая полиномиальная функция на G есть коэффициент (матричный элемент) некоторого полиномиального представления группы G.* Действительно, так как закон умножения в группе G полиномиален, то для всякого многочлена P на группе G функция $P(gh)$ на произведении $G \times G$ полиномиальна. Следовательно, $P(gh) = \sum_i P_i(g)Q_i(h)$; отсюда видно, что пространство V, порожденное пра[...]

[1]) В канонических координатах. — *Прим. перев.*

сдвигами функции P, содержится в пространстве, натянутом на многочлены P_i, и потому конечномерно. Пусть R — представление группы G, индуцированное в пространстве V ее правым регулярным представлением, и пусть δ — линейная форма на V, ставящая в соответствие каждому многочлену его значение в единице e группы G. Тогда $P(h) = \langle R(h)P, \delta\rangle$; это означает, что $P(h)$ — коэффициент представления R. Представление R полиномиально, поскольку функции Q_i полиномиальны.

Глава 19

МАКСИМАЛЬНЫЕ ТОРЫ КОМПАКТНЫХ ГРУПП ЛИ

Ж.-П. Серр

1. Теорема сопряженности

Пусть G — связная компактная группа Ли и A — связная коммутативная подгруппа группы G (такие подгруппы существуют; например, однопараметрические подгруппы). Замыкание $\bar{A}$ подгруппы A есть также связная коммутативная подгруппа; к тому же $\bar{A}$ — группа Ли. Будучи компактной, группа Ли $\bar{A}$ изоморфна тору. Если подгруппа $\bar{A}$ не содержится ни в каком большем торе, то она называется *максимальным тором*. Пусть A — максимальный тор в группе G. Тогда алгебра Ли $\mathfrak{A}$ группы A является максимальной коммутативной подалгеброй в алгебре Ли $\mathfrak{G}$ группы G. В самом деле, если бы это было не так, то существовала бы коммутативная подалгебра $\mathfrak{T}$ алгебры $\mathfrak{G}$, содержащая подалгебру $\mathfrak{A}$ и не совпадающая с ней. Подгруппа T, соответствующая подалгебре $\mathfrak{T}$, была бы тогда связной коммутативной подгруппой, содержащей подгруппу A и не совпадающей с A. Теми же свойствами обладало бы замыкание подгруппы T, что противоречило бы максимальности тора A. Аналогичное рассуждение показывает, что всякой максимальной коммутативной подалгебре алгебры $\mathfrak{G}$ соответствует максимальный тор в группе G (в частности, такой подалгебре всегда соответствует замкнутая подгруппа). Поскольку группа G компактна, ее присоединенное представление полупросто и алгебра $\mathfrak{G}$, следовательно, разлагается в прямую сумму своего центра $\mathfrak{Z}$ и простых алгебр. Объединяя все простые слагаемые, получаем разложение $\mathfrak{G} = \mathfrak{Z} \oplus \mathfrak{G}'$, где $\mathfrak{G}'$ — компактная полупростая алгебра. В самом деле, присоединенное представление группы G в алгебре $\mathfrak{G}'$ сохраняет некоторую положительно определенную квадратичную форму f. Следовательно, в некоторой базе пространства $\mathfrak{G}'$ матрицы $\operatorname{ad} g$, $g \in G$, ортогональны. Алгебра Ли группы ортогональных матриц состоит из кососимметрических матриц, и, значит, при всяком $x \in \mathfrak{G}'$, $x \neq 0$, оператор $\operatorname{ad} x$ представляется кососимметрической матрицей $\|a_{ij}\|$: $a_{ji} = -a_{ij}$. Имеем

$$B(x, x) = \operatorname{Tr}((\operatorname{ad} x)^2) = \sum_{i, j} a_{ij} a_{ji} = -\sum_{i, j} a_{ij}^2 < 0,$$

т. е. форма Киллинга алгебры $\mathfrak{G}'$ отрицательно определена.

Всякая максимальная коммутативная подалгебра $\mathfrak{A}$ алгебры $\mathfrak{G}$ содержит ее центр $\mathfrak{Z}$. Компонента $\mathfrak{A}'$ подалгебры $\mathfrak{A}$ в $\mathfrak{G}'$ является максимальной коммутативной подалгеброй в $\mathfrak{G}'$.

Так как присоединенное представление алгебры $\mathfrak{A}$ в $\mathfrak{G}$ полупросто, то следствие предложения 2 гл. 8 показывает, что $\mathfrak{A}'$ — подалгебра Картана алгебры $\mathfrak{G}'$. Отсюда легко вывести, что $\mathfrak{A}$ — подалгебра Картана алгебры $\mathfrak{G}$. Из этого следует, что *все максимальные коммутативные подалгебры алгебры* $\mathfrak{G}$ *имеют одну и ту же размерность* r. Эта размерность называется *рангом группы* G. Из результатов гл. 12 вытекает, что все максимальные коммутативные подалгебры алгебры $\mathfrak{G}$ сопряжены в алгебре $\mathfrak{G} \otimes C$. Мы сейчас покажем, что в действительности они сопряжены в алгебре $\mathfrak{G}$.

В дальнейшем G будет предполагаться связной компактной группой и через T будет обозначаться фиксированный максимальный тор в G.

Теорема 1. *Пусть T — максимальный тор связной компактной группы G. Для всякого элемента $x \in G$ найдется такой элемент $g \in G$, что $x \in gTg^{-1}$.*

Перед тем как доказывать эту теорему, выведем из нее некоторые следствия.

Следствие 1. *Всякий элемент группы G принадлежит некоторой однопараметрической подгруппе.*

Действительно, это очевидно для тора.

Следствие 2. *Всякая связная коммутативная подгруппа A группы G содержится в максимальном торе, сопряженном тору T.*

Достаточно провести доказательство для случая, когда A — тор, заменив в случае надобности A на $\bar{A}$. Известно, что во всяком торе существует элемент, степени которого образуют всюду плотное в торе множество (Кронекер). Пусть x — такой элемент в торе A. Мы будем говорить, что x *порождает* A. Если $x \in gTg^{-1}$, то $x^n \in gTg^{-1}$ при всяком n и $A \subset gTg^{-1}$.

Следствие 3. *Любые два максимальных тора в группе G сопряжены.*

Для доказательства достаточно применить следствие 2 в случае, когда A — максимальный тор.

Заметим, что теорема 1 вытекает из следствий 1 и 3 и, следовательно, равносильна их объединению.

2. Доказательство теоремы сопряженности, принадлежащее А. Вейлю

Пусть V — n-мерное компактное многообразие и f — его отображение в себя. Алгебраическая топология связывает с отображением f *число Лефшеца* $L(f)$, которое обладает следующими свойствами:

а) если отображения f и g гомотопны, то $L(f) = L(g)$;

б) если $L(f) \neq 0$, то отображение f имеет по крайней мере одну неподвижную точку;

в) если все неподвижные точки отображения f изолированы, то каждой неподвижной точке a_i можно сопоставить число k_i, называемое ее индексом, таким образом, что $L(f) = (-1)^n \sum k_i$;

г) если a — изолированная неподвижная точка и отображение f дифференцируемо в точке a, причем его главная линейная часть df в точке a не имеет собственных значений, равных 1, то индекс неподвижной точки a равен знаку числа $\det(df - 1)$.

Возьмем в качестве V левое однородное пространство G/T и в качестве f — преобразование $p(x)$ этого пространства, соответствующее элементу $x \in G$. Элементы пространства G/T — это левые классы смежности $\bar{a} = aT$. При этом $p(x)\bar{a} = \overline{(xa)} = xaT$, и неподвижные точки $\bar{a}$ отображения $p(x)$ характеризуются тем, что $xaT = aT$, т. е. $x \in aTa^{-1}$. Поэтому для доказательства теоремы 1 достаточно показать, что отображение $p(x)$ имеет хотя бы одну неподвижную точку. Для того чтобы это имело место, достаточно в силу б), чтобы $L(p(x)) \neq 0$. Так как группа G линейно связна, то отображение $p(x)$ гомотопно всякому другому отображению

$p(y)$, $y \in G$. Следовательно, $L(p(x)) = L(p(y))$ и достаточно вычислить $L(p(y))$ для какого-нибудь одного $y \in G$.

Возьмем в качестве y образующую тора T (см. доказательство следствия 2). Если $\bar{a}$ — неподвижная точка отображения $p(y)$, то $y \in aTa^{-1}$ и, значит, $T = aTa^{-1}$, т. е. a содержится в нормализаторе N тора T в группе G. Элементы группы N естественным образом представляются автоморфизмами группы T: $t^n = ntn^{-1}$ ($t \in T$, $n \in N$). Группа автоморфизмов тора T изоморфна группе обратимых целочисленных матриц и, следовательно, дискретна. Поэтому рассматриваемый гомоморфизм группы N в группу автоморфизмов тора T постоянен на связной компоненте N^0 единицы группы N. Поскольку группа N замкнута в G, N^0 — группа Ли. То, что N^0 тривиальным образом действует на T, означает, что все элементы из T коммутируют со всеми элементами из N^0. С другой стороны, T содержится в N^0. Если бы тор T не совпадал с N^0, то можно было бы найти однопараметрическую подгруппу в N^0, порождающую вместе с T тор, больший, чем T. Это невозможно; следовательно, $T = N^0$. Таким образом, фактор-группа N/T дискретна и компактна одновременно, т. е. конечна. Это показывает, что неподвижные точки преобразования $p(y)$ изолированы; их число равно порядку группы $\Phi = N/T$.

Осталось вычислить индексы неподвижных точек преобразования $p(y)$. Если $n \in N$, то для того, чтобы $p(g)\bar{n} = \bar{n}$, необходимо и достаточно, чтобы $g \in nTn^{-1} = T$. Это означает, что T — стационарная подгруппа точки $\bar{n}$ в пространстве G/T. Пусть $\mathfrak{T}$ — алгебра Ли группы T. Касательное пространство к многообразию G/T в точке $\bar{n}$ отождествляется с фактор-пространством $\mathfrak{G}/\mathfrak{T}$. При этом главная линейная часть M преобразования $p(y)$ в точке $\bar{n}$ отождествляется с оператором, индуцированным на $\mathfrak{G}/\mathfrak{T}$ эндоморфизмом $\operatorname{ad} y$. Пусть f — положительно определенная квадратичная форма на $\mathfrak{G}$, инвариантная относительно присоединенной группы, и $\mathfrak{P}$ — ортогональное дополнение к $\mathfrak{T}$ относительно f. Эндоморфизм $\operatorname{ad} y$ сохраняет форму f и подпространство $\mathfrak{T}$, следовательно, он сохраняет подпространство $\mathfrak{P}$. Это позволяет отождествить $\mathfrak{P}$ и $\mathfrak{G}/\mathfrak{T}$, причем M представляется тогда как ограничение оператора $\operatorname{ad} y$ на подпространстве $\mathfrak{P}$.

Оператор $\operatorname{ad} y$ не имеет в подпространстве $\mathfrak{P}$ собственных значений, равных 1. Действительно, если бы $\operatorname{ad} y \cdot X = X$ для некоторого $X \in \mathfrak{P}$, то, поскольку y порождает T, $\operatorname{ad} t \cdot X = X$ для всех $t \in T$ и X коммутировал бы со всеми элементами из $\mathfrak{T}$, что противоречило бы тому, что $\mathfrak{T}$ — максимальная коммутативная подалгебра. Следовательно, оператор $\operatorname{ad} y$ имеет в пространстве $\mathfrak{P}$ собственное значение -1 с некоторой кратностью α и, кроме того, пары сопряженных собственных значений λ_i, $\overline{\lambda_i}$. Имеем тогда

$$\det(M-1) = (-1)^n \det(1-M) = \\ = (-1)^n 2^\alpha \prod_i (1-\lambda_i)(1-\overline{\lambda_i}).$$

Знак $\det(M-1)$ совпадает со знаком $(-1)^n$. Отсюда вытекает, что число $L(p(y)) = (-1)^n \sum k_i$ равно порядку группы Φ.

Замечание. Поскольку преобразование $p(x)$ гомотопно тождественному преобразованию, мы в сущности доказали, что характеристика Эйлера — Пуанкаре многообразия G/T равна порядку группы Φ. Нам достаточно было бы знать, что она отлична от нуля. Это вытекает из того, что нечетномерные числа Бетти многообразия G/T равны нулю, а это доказывается индукцией по размерности группы G с использованием теории симметрических пространств или с помощью аналитического клеточного разбиения многообразия G/T. Положительность характеристики Эйлера в этом случае можно также доказать дифференциально-геометрическими методами (с использованием кривизны).

3. Другие доказательства теоремы сопряженности

а) Одно из доказательств теоремы сопряженности имеется в третьем томе [67]. Оно опирается на некоторые результаты о подгруппах Картана, принадлежащие Шевалле.

б) Учитывая, что торы, сопряженные тору T относительно внутренних автоморфизмов, порожденных элементами одного и того же левого класса смежности gN, совпадают, введем в рассмотрение фактор-множество P произведения $G \times T$ по отношению эквивалентности $(g, t) \sim (gn, n^{-1}tn)$ $(n \in N)$. Это расслоенное пространство со слоем T и базой G/N. Все сводится к доказательству того, что отображение φ множества P в G, получаемое факторизацией из отображения $(g, t) \to gtg^{-1}$ произведения $G \times T$ в G, имеет своим образом всю группу G. Так как P и G — компактные многообразия одинаковой размерности (группа N/T конечна), то отображение φ обладает гомологической степенью (по модулю 2), и достаточно доказать, что эта степень отлична от нуля. Если x — образующая тора T, то равенство $x = gtg^{-1}$ равносильно тому, что $g^{-1}xg \in T$, и, следовательно, тому, что $g^{-1}Tg = T$, т. е. $g \in N$. Иными словами, $\varphi^{-1}(x)$ — это класс эквивалентности в произведении $G \times T$, содержащий точку (e, x). Достаточно показать, что локальная степень отображения φ в точке $\varphi^{-1}(x)$ равна ± 1, т. е. что φ — гомеоморфизм в окрестности этой точки. Это условие будет выполнено, если главная линейная часть отображения φ в точке $\varphi^{-1}(x)$ есть изоморфизм касательных пространств. Далее, из соображений размерности следует, что достаточно установить, что всякий вектор, касательный к G в точке x, является образом при отображении $(g, t) \to gtg^{-1}$ какого-нибудь вектора, касательного к $G \times T$. Пусть X — произвольный вектор, касательный к G в точке e, а Y — произвольный вектор, касательный к T в точке e. Тогда $(X, \delta_x * Y)$ — общий касательный вектор к $G \times T$ в точке (e, x). Образ этого вектора равен $X * \delta_x + \delta_x * Y - \delta_x * X = \delta_x * (\mathrm{ad}\, x^{-1} \cdot X - X + Y)$. Оператор $\mathrm{ad}\, x^{-1}$ ортогонален относительно квадратичной формы f. Следовательно, пространство $\mathfrak{G}$ разлагается в прямую сумму образа эндоморфизма $\mathrm{ad}\, x^{-1} - 1$ и его ядра, т. е. подпространства, образованного инвариантами оператора $\mathrm{ad}\, x^{-1}$. Последнее подпространство есть не что иное, как $\mathfrak{T}$. Это и доказывает требуемое утверждение.

в) Если ограничиться лишь доказательством следствия 1, то можно поступить следующим образом. Снабдим группу G двусторонне инвариантной римановой метрикой. Симметрия $x \to ax^{-1}a$ группы G относительно точки a сохраняет эту метрику. Две точки, симметричные относительно точки a и достаточно близкие к ней, лежат на геодезической, проходящей через a. Возьмем две точки a и b, лежащие на какой-либо однопараметрической подгруппе и расположенные так, что точка b одинаково удалена от a и e. Симметрия в точке b сохраняет данную однопараметрическую подгруппу, следовательно, переставляет между собой e и a. Это означает, что b лежит на геодезической, проходящей через точки e и a. То же верно для всех точек данной подгруппы, делящих отрезок $\overline{ea}$ в отношении $\frac{p}{2^n} : \frac{q}{2^n}$. Отсюда следует, что рассматриваемая однопараметрическая подгруппа совпадает с геодезической, а значит, все вообще геодезические суть сдвиги однопараметрических подгрупп. Известно, что на компактном многообразии всегда существует геодезическая, соединяющая две данные точки (Гильберт). Следовательно, в группе G всякий элемент принадлежит некоторой однопараметрической подгруппе, а значит, и максимальному тору [1]).

4. Дополнения к теореме 1

Теорема 2. *Пусть G — связная компактная группа Ли, T — максимальный тор в G, M — какое-нибудь подмножество в T и g — такой элемент из G, что $gMg^{-1} \subset T$.*

---

[1]) Если считать доказанным следствие 1, то теорема 1 может быть получена следующим простым способом, принадлежащим Ханту (Hunt G. A., A theorem of E. Cartan, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 7 (1956), 307—308).

В силу следствия 1 существует однопараметрическая подгруппа группы G, проходящая через x. Обозначим через X элемент алгебры Ли $\mathfrak{G}$ группы G, порождающий эту однопараметрическую подгруппу. Далее, в алгебре Ли $\mathfrak{T}$ тора T выберем такой элемент Y, что однопараметрическая подгруппа, порождаемая Y, всюду плотна в T. Достаточно показать, что существует такой элемент $g_0 \in G$, что $[\mathrm{ad}\, g_0 \cdot X, Y] = 0$. Рассмотрим функцию $\varphi(g) = B(X, \mathrm{ad}\, g \cdot Y) = B(X, \delta_g * Y * \delta_{g^{-1}})$ на группе G (B — форма Киллинга в алгебре Ли $\mathfrak{G}$). Очевидно, что φ — дифференцируемая функция. Так как группа G компактна, то в некоторой точке $g_0 \in G$ дифференциал $d\varphi$ функции φ обращается в 0. Пусть Z — произвольный элемент алгебры Ли $\mathfrak{G}$. Тогда $\delta_{g_0} * Z$ — касательный вектор в точке g_0. Имеем

$$0 = d\varphi(g_0, \delta_{g_0} * Z) = B(X, \delta_{g_0} * Z * Y * \delta_{g_0}^{-1} +$$
$$+ \delta_{g_0} * Y * \overset{\vee}{\widehat{(\delta_{g_0} * Z)}}) =$$
$$= B(X, \delta_{g_0} * Z * Y * \delta_{g_0}^{-1} - \delta_{g_0} * Y * Z * \delta_{g_0}^{-1}) =$$
$$= B(X, \mathrm{ad}\, g_0 \cdot [Z, Y]) = -B(\mathrm{ad}\, g_0 \cdot X, [Z, Y]) =$$
$$= B([\mathrm{ad}\, g_0 \cdot X, Y], Z).$$

Следовательно, $[\mathrm{ad}\, g_0 \cdot X, Y] = 0$, что и требовалось доказать. — *Прим. перев.*

Тогда существует такой элемент $n \in N$, *что* $nmn^{-1} = gmg^{-1}$ *для всякого* $m \in M$.

Следствие. *Если два элемента тора* T *сопряжены, то они преобразуются друг в друга преобразованиями из группы* $\Phi = N/T$.

(Для доказательства достаточно взять в качестве M один элемент.)

Иначе это следствие можно сформулировать так: если C — пространство классов сопряженных элементов в T и Ω — фактор-пространство пространства T по отношению эквивалентности, определенному группой Φ, то $\Omega \simeq C$. Это означает, в частности, что *пространство непрерывных центральных функций*[1]) *на группе* G *отождествляется* (*посредством ограничения*) *с пространством непрерывных функций на* T, *инвариантных относительно группы* Φ. Следовательно, существует единственная инвариантная относительно Φ мера ν на T, обладающая тем свойством, что $\int\limits_G \varphi(x)\,dx = \int\limits_T \varphi(t)\,d\nu(t)$ для всякой центральной функции φ (dx обозначает меру Хаара на группе G). (Фактическое вычисление меры ν важно для теории характеров, см. гл. 16.)

Доказательство теоремы 2. Пусть G' — подгруппа группы G, образованная элементами, коммутирующими со всеми элементами из M, G'' — связная компонента единицы группы G'. Очевидно, что G'' — связная компактная группа Ли, содержащая тор T. Если $x \in g^{-1}Tg$, то $xm = mx$ для всякого $m \in M$, так как gmg^{-1} коммутирует со всеми элементами из T. Следовательно, группа G'' содержит также тор $g^{-1}Tg$. Торы T и $g^{-1}Tg$, будучи максимальными в группе G, тем более максимальны в G''. Следовательно, они сопряжены в группе G'', т. е. существует такой элемент $g'' \in G''$, что $g''g^{-1}Tgg''^{-1} = T$, т. е. $gg''^{-1} = n \in N$. Имеем $nmn^{-1} = gmg^{-1}$, поскольку $g'' \in G'$ и коммутирует с m.

Теорема 3. *Пусть* A — *какой-нибудь тор в связной компактной группе* G *и* x — *элемент группы* G, *комму-*

[1]) Центральной называется функция на G, постоянная на классах сопряженных элементов. Это название связано с тем, что такие функции образуют центр группового кольца (кольца функций на G относительно свертки). — *Прим. ред.*

тирующий со всеми элементами из A. Тогда в группе G существует максимальный тор T, содержащий A и x.

В самом деле, пусть A' — замыкание подгруппы, порожденной A и x. Группа A' компактна и коммутативна. Пусть A'_0 — тор, являющийся связной компонентой единицы группы A'. Известно, что группа A' разлагается в прямое произведение подгруппы A'_0 и некоторой конечной подгруппы. Элемент x содержится в прямом произведении A'' группы A'_0 и некоторой циклической подгруппы: $x \in A'' = A'_0 \times Z_n$. Группа A'' содержит элемент u, степени которого всюду плотны в ней. Для построения такого элемента достаточно взять образующую θ тора A'_0 и образующую z группы Z_n, затем выбрать элемент $y \in A'_0$, для которого $y^n = \theta$, и положить $u = (y, z)$. Согласно следствию 1 теоремы 1, элемент u содержится в некотором максимальном торе T; но тогда $A'' \in T$, и $x \in T$, $A \subset T$.

Следствие 1. *Всякий элемент группы G, перестановочный со всеми элементами максимального тора T, принадлежит T.*

Следствие 2. *Центр группы G содержится во всяком максимальном торе.*

Следствие 3. *Группа $\Phi = N/T$ действует на T эффективно.*

В самом деле, если $n^{-1}tn = t$ для всех $t \in T$, то, согласно следствию 1, $n \in T$.

Следствие 4. *Всякий максимальный тор является в то же время максимальной коммутативной подгруппой.*

Следствие 5. *Централизатор любого тора A связен.*

Действительно, этот централизатор совпадает с объединением всех максимальных торов, содержащих A.

Следствие 6. *Если группа G полупроста, то группа $\Phi = N/T$ изоморфна группе Вейля алгебры $\mathfrak{G}$.*

Согласно следствию 3, группа Φ действует эффективно на T как группа автоморфизмов. Пусть $\mathfrak{G}_C$ — комплексное расширение алгебры Ли $\mathfrak{G}$. Тогда $\mathfrak{T}_C$ — подалгебра Картана алгебры $\mathfrak{G}_C$. Пусть I' — группа внутренних автоморфизмов алгебры $\mathfrak{G}_C$, порожденных элементами из N, I — группа всех внутренних автоморфизмов алгебры $\mathfrak{G}_C$, сохраняющих $\mathfrak{T}_C$. Очевидно, что $I' \subset I$. С другой стороны, из результатов главы 13 следует, что ограничение группы I' на $\mathfrak{T}$ содержит симметрии S_α, а значит, и группу Вейля $\mathfrak{S}$. Так как $\mathfrak{S} = I$ и $\mathfrak{S} \subset I' \subset I$, то $\mathfrak{S} = I'$.

Покажем в заключение, как можно, используя полученные результаты, найти *центр односвязной полупростой компактной группы Ли G*. Пусть $\mathfrak{T}$ — подалгебра Картана алгебры $\mathfrak{G}$, T — соответствующий максимальный тор, C — центр группы G. Согласно следствию 2, $C \subset T$. Далее, множество характеров группы T (т. е. ее гомоморфизмов в группу комплексных чисел, по модулю равных 1) совпадает с множеством весов конечномерных представлений группы G (см. п. 3 гл. 16). Известно (гл. 14 и 16), что эти веса имеют вид e^λ, где λ — такая линейная форма на $\mathfrak{T}$, что для всякого простого корня α_i число $2\langle\lambda, \alpha_i\rangle/\langle\alpha_i, \alpha_i\rangle$ целое. Таким образом, группа характеров группы T — дискретная коммутативная группа с образующими e^{λ_i}, где λ_i определяется из соотношений $2\langle\lambda_i, \alpha_j\rangle/\langle\alpha_j, \alpha_j\rangle = \delta_{ij}$.

Характеры группы T, постоянные на C, очевидно, являются весами представлений группы G, постоянных на C. Так как присоединенное представление группы G/C в алгебре $\mathfrak{G}$ точно, то ([67], т. I, предложение 3 § VII гл. VI) все представления группы G, постоянные на C, т. е. представления группы G/C, получаются из присоединенного переходом к контраградиентному представлению, взятием тензорного произведения, прямой суммы и ограничением. Веса таких представлений являются, очевидно, линейными комбинациями корней с целыми коэффициентами. Поскольку всякий характер группы C продолжается до характера группы T, группа характеров группы C изоморфна фактор-группе группы характеров группы T по подгруппе, образованной характерами, постоянными на C, т. е. фактор-группе группы, порожденной характерами e^{λ_i}, по подгруппе, порожденной характерами e^{α_i}. Имеем $\alpha_i = -\sum_j a_{ji}\lambda_j$, где a_{ij} — числа Картана алгебры $\mathfrak{G}$. В аддитивных обозначениях группа характеров группы C (изоморфная группе C) имеет образующие m_i с соотношениями $\sum_i a_{ij} m_i = 0$.

Числа Картана определяются из схем Дынкина; обозначая через Z_n циклическую группу порядка n, получаем следующую таблицу для центров односвязных простых компактных групп Ли:

Группа G	A_n	B_n	C_n	D_{2n}	D_{2n+1}	E_6	E_7
Группа C	Z_{n+1}	Z_2	Z_2	Z_2+Z_2	Z_4	Z_3	Z_2

Группы остальных типов имеют тривиальный центр [1]).

[1]) Способ нахождения центра компактной полупростой группы Ли, использующий схему простых корней, см. в статье [22]. — *Прим. перев.*

Глава 20

КОММУТАТИВНЫЕ ПОДГРУППЫ КОМПАКТНЫХ ГРУПП ЛИ

Ж.-П. Серр

1. Группы типа (MP)

В предыдущей главе мы изучали связные коммутативные подгруппы компактной группы Ли G и показали, что всякая такая подгруппа сопряжена относительно внутреннего автоморфизма подгруппе фиксированного максимального тора T группы G. Кроме того, мы доказали, что максимальный тор T не может содержаться в большей коммутативной подгруппе, связной или не связной. Однако в группе G могут существовать коммутативные подгруппы, не содержащиеся ни в каком максимальном торе. Простейшим примером этому служит подгруппа диагональных матриц в ортогональной группе SO(3). Эта подгруппа не содержится в максимальном торе, так как в группе SO(3) всякий такой тор состоит из вращений вокруг некоторой оси. В этой главе мы покажем, следуя Борелю и Серру [4], что *всякая коммутативная подгруппа компактной группы Ли содержится в нормализаторе некоторого максимального тора.* При этом мы придем к рассмотрению групп несколько более общего рода, чем коммутативные, а именно групп, удовлетворяющих следующему условию:

(MP) *Топологическая группа A обладает такой последовательностью замкнутых нормальных делителей $A_0 = A \supset A_1 \supset \ldots \supset A_n \supset A_{n+1} = (e)$, что каждая из фактор-групп A_i/A_{i+1} изоморфна одномерному тору или конечной циклической группе Z_n.*

Такая последовательность нормальных делителей группы A называется *полуглавной*. Очевидно, что всякая группа типа (MP) — разрешимая компактная группа Ли. Ее алгебра Ли, будучи одновременно разрешимой и редуктивной, должна быть коммутативной. Следовательно, связная группа типа (MP) всегда коммутативна. С другой стороны, конечная разрешимая группа не обязана быть группой типа (MP) (возьмем, например, полупрямое произведение группы $Z_2 + Z_2$ на группу Z_3, в котором Z_3 циклически переставляет ненулевые элементы из $Z_2 + Z_2$; такая группа не имеет ни одного циклического нормального делителя).

Предложение 1. *Если G — группа типа* (MP), *то тем же свойством обладает всякая ее замкнутая подгруппа и всякая ее фактор-группа по замкнутому нормальному делителю. Если H и G/H — группы типа* (MP) *и H содержится в центре группы G, то G — также группа типа* (MP).

Заметим прежде всего, что если топологическая группа A изоморфна одномерному тору или группе Z_n, то то же верно для всякой ее замкнутой подгруппы и для всякой ее фактор-группы по замкнутой подгруппе. Пусть G — группа типа (MP) с полуглавной последовательностью $\{G_i\}$, H — ее замкнутая подгруппа. Тогда подгруппы $H_i = G_i \cap H$ образуют полуглавную последовательность для группы H, так как группа H_i/H_{i+1} изоморфна замкнутой подгруппе $(H_i + G_{i+1})/G_{i+1}$ группы G_i/G_{i+1} и потому изоморфна одномерному тору или группе Z_n. Если H — замкнутый нормальный делитель и $K = G/H$, то подгруппы $K_i = (G_i + H)/H = G_i/(G_i \cap H)$ суть замкнутые нормальные делители в K. Группа K_i/K_{i+1} изоморфна группе $G_i/((G_{i+1} + H) \cap G_i)$ и потому изоморфна одномерному тору или группе Z_n. Наконец, если H — центральная подгруппа типа (MP), то полуглавная последовательность для группы G получается дополнением полуглавной последовательности группы H прообразами элементов любой полуглавной последовательности группы G/H.

Следствие. *Нильпотентная (в частности, коммутативная) компактная группа Ли есть группа типа* (MP).

В самом деле, нильпотентная компактная группа может быть построена последовательными центральными расширениями, так что доказательство сводится к случаю коммутативной группы. Компактная коммутативная группа G разлагается в прямое произведение тора и конечной коммутативной группы. Используя теорему о структуре конечных коммутативных групп, получаем, что группа G разлагается в прямое произведение одномерных торов и конечных циклических групп и является, следовательно, группой типа (MP).

Предложение 2. *Топологическая группа G типа* (MP), *не сводящаяся к единице, содержит циклический нормальный делитель простого порядка.*

Для доказательства возьмем последний нетривиальный член G_n полуглавной последовательности группы G. Группа G_n изоморфна либо одномерному тору, либо конечной циклической группе. В обоих случаях подгруппа, образованная элементами группы G_n данного простого порядка p, инвариантна относительно всех автоморфизмов группы G_n и потому является нормальным делителем в G. Эта подгруппа будет циклической порядка p, если только во втором случае p выбрано делящим порядок группы G_n.

2. Автоморфизмы простого порядка алгебры Ли

Утверждение, которое мы собираемся доказать, носит вспомогательный характер. С его помощью будет получен основной результат этой главы.

Пусть K — поле характеристики 0, $\mathfrak{G}$ — конечномерная алгебра Ли над K.

Предложение 3. *Пусть σ — автоморфизм алгебры $\mathfrak{G}$ простого порядка p, не имеющий неподвижных точек, отличных от* 0. *Тогда алгебра $\mathfrak{G}$ нильпотентна.*

Обозначим через $\overline{K}$ алгебраическое замыкание поля K и пусть $\overline{\mathfrak{G}}$ — алгебра Ли, получающаяся из $\mathfrak{G}$ расширением основного поля до $\overline{K}$. Автоморфизм σ продолжается по линейности на $\overline{\mathfrak{G}}$. Неподвижные точки автоморфизма σ в $\overline{\mathfrak{G}}$ являются линейными комбинациями с коэффициентами из $\overline{K}$ его неподвижных точек в $\mathfrak{G}$. Если единственной неподвижной точкой автоморфизма σ в алгебре $\mathfrak{G}$ является 0, то то же верно и для алгебры $\overline{\mathfrak{G}}$. Если алгебра $\overline{\mathfrak{G}}$ нильпотентна, то тем более это верно для алгебры $\mathfrak{G}$. Таким образом, достаточно провести доказательство в том случае, когда поле K алгебраически замкнуто.

В этом случае обозначим через $\mathfrak{G}_i$ подпространство пространства $\mathfrak{G}$, определяемое уравнением $\sigma(x) = \xi^i x$, где ξ — первообразный корень p-й степени из единицы, i — целое число. Так как $\xi^p = 1$, то подпространство $\mathfrak{G}_i$ зависит только от класса числа i по модулю p. Пространство $\mathfrak{G}$ раскладывается в прямую сумму $\mathfrak{G}_i$:

$$\mathfrak{G} = \sum_{i \in Z_p} \mathfrak{G}_i.$$

Предположение об отсутствии у автоморфизма σ неподвижных точек, отличных от 0, означает, что $\mathfrak{G}_0 = 0$. Так как $\sigma([x, y]) = [\sigma(x), \sigma(y)]$, то $[\mathfrak{G}_i, \mathfrak{G}_j] \subset \mathfrak{G}_{i+j}$.

Докажем сначала, что при $x \in \mathfrak{G}_i$ эндоморфизм $\operatorname{ad} x$ нильпотентен. Можно при этом предполагать, что $i \not\equiv 0 \pmod p$, поскольку $\mathfrak{G}_0 = 0$. В таком случае эндоморфизм $\operatorname{ad}^k x$ отображает подпространство $\mathfrak{G}_j$ в подпространство $\mathfrak{G}_{j+ki}$. Так как p — простое число, то существует такое k, что $j + ki \equiv 0 \pmod p$; но тогда $\operatorname{ad}^k x \cdot \mathfrak{G}_i \subset \mathfrak{G}_0 = 0$. Это и показывает, что эндоморфизм $\operatorname{ad} x$ нильпотентен,

Рассмотрим теперь два элемента из $\mathfrak{G}: x \in \mathfrak{G}_i$ и $y \in \mathfrak{G}_j$. Оператор $(\operatorname{ad} x \circ \operatorname{ad} y)^n$ переводит $\mathfrak{G}_k$ в $\mathfrak{G}_{k+n(i+j)}$. Если $i + j \not\equiv 0 \pmod p$, то найдется такое n, что $k + n(i + j) \equiv \equiv 0 \pmod p$; значит, найдется и такое n, что $(\operatorname{ad} x \circ \operatorname{ad} y)^n = 0$. Если $i + j \equiv 0 \pmod p$, то $[x, y] \in \mathfrak{G}_0 = 0$ и операторы $\operatorname{ad} x$ и $\operatorname{ad} y$ перестановочны; так как каждый из них нильпотентен, то их произведение также нильпотентно. Итак, во всех случаях оператор $\operatorname{ad} x \circ \operatorname{ad} y$ нильпотентен. Следовательно, билинейная форма $B(x, y) = \operatorname{Tr}(\operatorname{ad} x \circ \operatorname{ad} y)$ обращается в 0 при $x \in \mathfrak{G}_i$, $y \in \mathfrak{G}_j$, а значит, обращается в 0 тождественно. Критерий Картана (п. 4 гл. 6) показывает тогда, что алгебра $\mathfrak{G}$ разрешима.

Выведем отсюда, что алгебра $\mathfrak{G}$ нильпотентна. Из теоремы Ли следует, что во всякой разрешимой линейной алгебре Ли $\mathfrak{H}$ нильпотентные элементы образуют подпространство. В самом деле, существует такая последовательность подпространств $0 = V_0 \subset V_1 \subset \ldots \subset V_m = V$ пространства V, в котором действует группа $\mathfrak{H}$, что $hv \equiv \lambda_i(h) v \pmod{V_{i-1}}$ для всяких $h \in \mathfrak{H}$, $v \in V_i$, где λ_i — линейные формы на $\mathfrak{H}$. Нильпотентные элементы $h \in \mathfrak{H}$ характеризуются тем, что $\lambda_i(h) = 0$. Эти условия линейны. Применяя доказанное к случаю присоединенного представления алгебры $\mathfrak{G}$, видим, что множество нильпотентных элементов алгебры $\mathfrak{G}$ есть подпространство, содержащее все подпространства $\mathfrak{G}_i$. Следовательно, все элементы алгебры $\mathfrak{G}$ нильпотентны.

3. Основная теорема

Приводимая ниже теорема принадлежит А. Борелю и Ж.-П. Серру.

Теорема 1. *Пусть G — компактная группа Ли и A — ее подгруппа типа* (МР). *Существует такой максимальный тор T группы G, что группа A содержится в его нормализаторе N.*

Условие $A \subset N$ означает, что внутренние автоморфизмы группы G, порожденные элементами из A, сохраняют тор T. Это равносильно тому, что подгруппа $\mathrm{ad}\, A$ группы $\mathrm{ad}\, G$ сохраняет подалгебру $\mathfrak{T}$, соответствующую T. Дело сводится, таким образом, к доказательству следующего:

Пусть A — группа автоморфизмов алгебры Ли $\mathfrak{G}$ компактной группы Ли, удовлетворяющая условию (МР). *Тогда существует максимальная коммутативная подалгебра алгебры $\mathfrak{G}$, инвариантная относительно A.*

(Для этого сведéния нужно воспользоваться тем, что фактор-группа группы типа (МР) есть группа типа (МР).)

Доказательство проведем индукцией по размерности алгебры $\mathfrak{G}$. Известно, что $\mathfrak{G}$ — прямое произведение своего центра $\mathfrak{Z}$ и полупростой подалгебры $\mathfrak{G}'$. Группа A сохраняет $\mathfrak{Z}$ и $\mathfrak{G}' = [\mathfrak{G}, \mathfrak{G}]$. Если $\mathfrak{Z} \neq 0$, то $\dim \mathfrak{G}' < \dim \mathfrak{G}$ и по предположению индукции группа A сохраняет некоторую максимальную коммутативную подалгебру алгебры $\mathfrak{G}'$. Произведение этой подалгебры на $\mathfrak{Z}$ будет максимальной коммутативной подалгеброй в $\mathfrak{G}$, инвариантной относительно A.

Таким образом, можно предполагать, что алгебра $\mathfrak{G}$ полупроста. Исключим тривиальный случай $A = (e)$. Тогда в силу предложения 2 группа A обладает циклическим нормальным делителем простого порядка p. Пусть σ — образующая этого нормального делителя. Подалгебра $\mathfrak{G}_1$ алгебры $\mathfrak{G}$, образованная элементами, инвариантными относительно автоморфизма σ, не совпадает с $\mathfrak{G}$. С другой стороны, предложение 3 показывает, что $\mathfrak{G}_1 \neq 0$, так как полупростая алгебра $\mathfrak{G}$ не может быть нильпотентной. Подалгебра $\mathfrak{G}_1$ инвариантна относительно группы A. Действительно, если $x \in \mathfrak{G}_1$ и $a \in A$, то $\sigma(a(x)) = a((a^{-1}\sigma a)(x)) = a(x)$, поскольку $a^{-1}\sigma a$ — степень автоморфизма σ и поэтому сохраняет x. Алгебра Ли $\mathfrak{G}_1$, будучи подалгеброй компактной алгебры Ли, сама является алгеброй Ли компактной группы Ли. Группа A индуцирует группу A' автоморфизмов алгебры $\mathfrak{G}_1$, которая также удовлетворяет условию (MP). Так как $\dim \mathfrak{G}_1 < \dim \mathfrak{G}$, то можно к алгебре $\mathfrak{G}_1$ и группе A' применить предположение индукции. Существует, следовательно, максимальная коммутативная подалгебра $\mathfrak{T}$ алгебры $\mathfrak{G}_1$, инвариантная относительно A' и, значит, относительно A. Пусть $\mathfrak{G}_2$ — централизатор подалгебры $\mathfrak{T}$ в алгебре $\mathfrak{G}$. Подалгебра $\mathfrak{G}_2$ не совпадает с $\mathfrak{G}$, поскольку центр алгебры $\mathfrak{G}$ тривиален; она содержит $\mathfrak{T}$ и инвариантна относительно A. Далее, всякая максимальная коммутативная подалгебра алгебры $\mathfrak{G}$, содержащая $\mathfrak{T}$, содержится в $\mathfrak{G}_2$. Следовательно, алгебры $\mathfrak{G}$ и $\mathfrak{G}_2$ имеют одинаковые ранги. Группа A индуцирует на $\mathfrak{G}_2$ некоторую группу A'' автоморфизмов, удовлетворяющую условию (MP). Поскольку $\dim \mathfrak{G}_2 < \dim \mathfrak{G}$, к алгебре $\mathfrak{G}_2$ и группе A'' применимо предположение индукции. Пусть $\mathfrak{T}'$ — максимальная коммутативная подалгебра алгебры $\mathfrak{G}_2$, инвариантная относительно A''. Так как алгебры $\mathfrak{G}$ и $\mathfrak{G}_2$ имеют один и тот же ранг, то $\mathfrak{T}'$ — максимальная коммутативная подалгебра и в алгебре $\mathfrak{G}$. Поскольку подалгебра $\mathfrak{T}'$ инвариантна относительно группы A, это завершает наше доказательство.

4. Приложение теоремы

Найдем прежде всего максимальные торы T в группе $U(n)$ унитарных матриц порядка n. Всякое комплексное линейное представление компактной коммутативной группы T разлагается в прямую сумму одномерных представлений; поэтому всякая коммутативная подгруппа группы $U(n)$ сопряжена подгруппе группы диагональных матриц. Следовательно, группа T всех диагональных унитарных матриц является максимальным тором в $U(n)$. Пусть N — нормализатор этого тора в группе $U(n)$. Всякое преобразование n из группы N переводит любую прямую D, инвариантную относительно T, в прямую D', обладающую тем же свойством. Действительно, $tD' = n(n^{-1}tn)D = nD = D'$ при $t \in T$ (заметим, что $n^{-1}tn \in T$). Единственные прямые, инвариантные относительно T, — это координатные оси. Если e_i — базисные векторы, то всякое преобразование $n \in N$ имеет вид $e_i \to \lambda_i e_{\sigma(i)}$, где λ_i — некоторые числа, а σ — подстановка множества $(1, \ldots, n)$. Матрицы таких преобразований называются *мономиальными*.

Пусть G — группа типа (MP) и ρ — ее комплексное линейное представление степени n, т. е. гомоморфизм группы G в группу $U(n)$ (всякое представление компактной группы G эквивалентно унитарному). По теореме 1 группа $\rho(G)$ содержится в подгруппе, сопряженной к N. Иными словами, в пространстве представления можно выбрать базу, в которой операторы $\rho(g)$, $g \in G$, запишутся мономиальными матрицами. Тем самым доказана

Теорема 2 (Блихтфельд). *Всякое линейное представление группы типа* (MP) *в конечномерном комплексном векторном пространстве эквивалентно некоторому представлению этой группы мономиальными матрицами.*

Эта теорема применима, в частности, к конечным нильпотентным группам и p-группам; в последнем случае получается хорошо известный результат. Есть группы, не удовлетворяющие условию (MP), для которых теорема 2 все же справедлива (например, группа, упоминавшаяся в п. 1).

В заключение остановимся на p-ранге компактных групп Ли. Вообще *p-рангом группы* G называется наибольшее целое число m (или бесконечность, если такого не существует), обладающее тем свойством, что G содержит подгруппу, изоморфную группе $(Z_p)^m$. Число p предполагается здесь простым; p-ранг группы G обозначается через $l_p(G)$. Для всякой группы G и всякого ее нормального делителя H выполняются неравенства

$$l_p(H) \leqslant l_p(G) \leqslant l_p(H) + l_p(G/H).$$

Первое из этих неравенств очевидно. Второе вытекает из того, что если A — подгруппа группы G, изоморфная $(Z_p)^{l_p(G)}$, то $A \cap H \simeq (Z_p)^m$, где $m \leqslant l_p(H)$, и $A/A \cap H \simeq (Z_p)^n$, где $n \leqslant l_p(G/H)$, причем $m + n = l_p(G)$.

Если G — компактная группа Ли, то из теоремы 1 немедленно вытекает, что группы G и N имеют одинаковый p-ранг. Учитывая, что группа N/T изоморфна группе Вейля W, получаем

$$l_p(T) \leqslant l_p(G) \leqslant l_p(T) + l_p(W);$$

$l_p(T)$ совпадает с размерностью тора T, т. е. с обычным рангом группы G. Группа W реализуется как группа ортогональных преобразований l-мерного евклидова пространства и поэтому, как легко убедиться, $l_p(W) \leqslant l/2$ при $p \neq 2$ и $l_2(W) \leqslant l$. Следовательно,

$$l \leqslant l_p(G) \leqslant \frac{3}{2} l \quad \text{при} \quad p \neq 2,$$

$$l \leqslant l_p(G) \leqslant 2l \quad \text{при} \quad p = 2.$$

5. Заключительные замечания

а) Джекобсон доказал (*Proc. Amer. Math. Soc.*, **2**, 1955), что предположение о том, что характеристика поля K равна 0, несущественно для предложения 3.

б) При доказательстве теоремы 1 мы использовали следующий факт: если $\mathfrak{G}$ — (вещественная) алгебра Ли компактной группы Ли, то всякая подалгебра $\mathfrak{H}$ алгебры $\mathfrak{G}$ также является алгеброй Ли некоторой компактной группы Ли. Доказательство этого факта основывается на следующем критерии:

Вещественная конечномерная алгебра Ли $\mathfrak{G}$ тогда и только тогда является алгеброй Ли некоторой компактной группы Ли, когда на ней существует инвариантная положительно определенная квадратичная форма f (инвариантность означает, что $f(x, [y, z]) = f([x, y], z)$).

Сформулированное условие необходимо. В самом деле, пусть $\mathfrak{G}$ — алгебра Ли компактной группы Ли G. Присоединенное представление группы G в алгебре $\mathfrak{G}$ сохраняет некоторую положительно определенную квадратичную форму f. Так как алгебра Ли ортогональной группы состоит из кососимметрических матриц, то форма f инвариантна в требуемом смысле.

Докажем, что это условие достаточно. Из существования положительно определенной инвариантной формы f на алгебре $\mathfrak{G}$ вытекает, что ко всякому идеалу алгебры $\mathfrak{G}$ имеется дополнительный идеал, а именно ортогональное дополнение к нему в смысле формы f. Это означает, что присоединенное представление алгебры $\mathfrak{G}$ вполне приводимо. Следовательно, алгебра $\mathfrak{G}$ редуктивна и разлагается в прямую сумму коммутативной и полупростой подалгебр. Коммутативная подалгебра изоморфна алгебре Ли тора подходящей размерности, т. е. компактной группы. Осталось изучить случай, когда алгебра $\mathfrak{G}$ полупроста. В этом случае всякое ее дифференцирование внутреннее, и присоединенная группа совпадает со связной компонентой группы всех автоморфизмов алгебры $\mathfrak{G}$, а потому замкнута. Так как она к тому же сохраняет форму f, то она компактна. Ее алгебра Ли изоморфна алгебре $\mathfrak{G}$.

в) Как было показано в п. 4, p-ранг компактной группы Ли конечен и не меньше, чем ее обычный ранг. Строгое неравенство в некоторых случаях действительно имеет место, как, например, для группы $SO(n)$ унимодулярных ортогональных матриц порядка n. Обычный ранг этой группы равен целой части числа $n/2$, в то время как ее 2-ранг равен $n-1$. В самом деле, максимальные коммутативные 2-группы группы $SO(n)$ сопряжены группе диагональных матриц (имеющих на диагонали ± 1, причем -1 в четном числе). Борель и Серр показали, что если $l_p(G) > l$, то группа целочисленных гомологий пространства G имеет нетривиальную p-примарную компоненту. Обратное неверно, как показывает пример присоединенной группы для группы $SO(6)$.

ПРИЛОЖЕНИЕ[1])

О модулях

Левым модулем над ассоциативным кольцом K, или *левым K-модулем*, называется коммутативная группа M, в которой определена дополнительная операция „умножения слева на элементы из K“, обладающая следующими свойствами (λ, $\mu \in K$, x, $y \in M$):

1) $\lambda(x+y)=\lambda x+\lambda y$,

2) $(\lambda+\mu)x=\lambda x+\mu x$,

3) $(\lambda\mu)x=\lambda(\mu x)$.

В том случае, когда кольцо K имеет единицу 1, обычно предполагается выполненной еще аксиома

4) $1 \cdot x = 1$.

Если хотят специально подчеркнуть, что выполнена аксиома 4), говорят, что модуль M *унитарен*.

Аналогично определяется *правый K-модуль*. Если кольцо K *коммутативно*, то не имеет смысла различать левые и правые K-модули и говорят просто о *K-модулях*. Если кольцо K не коммутативно, то термин „K-модуль“ в этой книге всюду, где не оговорено противное, означает „левый K-модуль“.

Кольцо K называется по отношению ко всякому K-модулю *кольцом скаляров*. Если K_1 — подкольцо кольца K, то любой K-модуль можно естественным образом рассматривать как K_1-модуль. Эта операция называется *сужением кольца скаляров*.

---

[1]) В книге постоянно используется понятие модуля и связанная с ним терминология. Ввиду того, что некоторые результаты, связанные с этим понятием, в советской математической литературе не изложены, мы сочли полезным поместить здесь это приложение, написанное переводчиком. — *Прим. ред.*

Пусть S — некоторое подмножество K-модуля M. *Аннулятором* $K_0(S)$ *подмножества* S называется левый идеал кольца K, образованный всеми такими $\lambda \in K$, что $\lambda x = 0$ для любого $x \in S$. K-модуль M называется *точным*, если $K_0(M) = 0$. В любом случае M можно рассматривать как точный модуль над кольцом $K/K_0(M)$ ($K_0(M)$ — двусторонний идеал).

Частным случаем модулей являются *векторные пространства*. Это название употребляется в том случае, когда кольцо скаляров — *поле*. Другим частным случаем модулей являются *коммутативные группы*, которые можно рассматривать как модули над кольцом целых чисел.

Подмодулем K-модуля M называется подгруппа группы M, инвариантная относительно умножений на элементы из K. Если N — подмодуль модуля M, то фактор-группа M/N естественным образом снабжается структурой K-модуля; получающийся при этом модуль M/N называется *фактормодулем модуля M по подмодулю N*. *K-линейным отображением, или K-гомоморфизмом*, K-модуля M в K-модуль P называется гомоморфизм φ группы M в группу P, обладающий тем свойством, что $\varphi(\lambda x) = \lambda\varphi(x)$ для любых $\lambda \in K$, $x \in M$. Если $\varphi(M) = P$, то $P \simeq M/N$, где N — ядро гомоморфизма φ (являющееся подмодулем модуля M). K-линейное отображение K-модуля в себя называется его *эндоморфизмом*.

Пусть $\{M_\iota\}_{\iota \in I}$ — (конечное или бесконечное) семейство K-модулей. *Прямой суммой* $\sum\limits_{\iota \in I} M_\iota$ *модулей* M_ι называется совокупность всевозможных наборов $\{a_\iota\}_{\iota \in I}$, где $a_\iota \in M_\iota$ и лишь конечное число элементов a_ι отлично от 0, снабженная структурой K-модуля по формулам

$$\{a_\iota\} + \{b_\iota\} = \{a_\iota + b_\iota\}; \quad \lambda\{a_\iota\} = \{\lambda a_\iota\} \qquad (\lambda \in K).$$

Модули M_ι при этом естественным образом отождествляются с подмодулями модуля $\sum M_\iota$. Если не требовать, чтобы лишь конечное число элементов a_ι было отлично от 0, то получится *прямое произведение* $\prod\limits_{\iota \in I} M_\iota$ *модулей* M_ι. Для конечного числа модулей понятия прямой суммы и прямого произведения совпадают.

Ненулевой модуль M называется *простым*, если он не содержит подмодулей, отличных от 0 и M. Модуль M называется *полупростым*, если он разлагается в прямую сумму простых подмодулей.

Пусть M — некоторый модуль, N — его подмодуль. Подмодуль P модуля M называется *дополнительным* к подмодулю N, если модуль M разлагается в прямую сумму подмодулей N и P.

Предложение 1. *Модуль M тогда и только тогда полупрост, когда всякий его подмодуль обладает дополнительным подмодулем.* (См., например, [31], предложение 4,1 гл. I.)

Рядом Жордана — Гёльдера модуля M называется конечная последовательность

$$M = M_0 \supset M_1 \supset \ldots \supset M_{n-1} \supset M_n = 0$$

его подмодулей M_i, обладающая тем свойством, что все фактор-модули $M_{i-1}/M_i = N_i \, (1 \leqslant i \leqslant n)$ простые. (Конечно, не для всякого модуля можно построить ряд Жордана — Гёльдера.)

Если простой модуль N изоморфен одному из модулей N_i, то говорят, что он *содержится* в модуле M; число тех модулей N_i, которым он изоморфен, называется *кратностью*, с которой простой модуль N содержится в модуле M. Оправданием такому определению служит

Предложение 2. *Если* $\{M_i\} \, (1 \leqslant i \leqslant n)$ *и* $\{M'_i\}$ $(1 \leqslant i \leqslant n')$ *— два ряда Жордана — Гёльдера модуля M, то $n = n'$ и существует такая подстановка $i \to i'$ индексов* $1, \ldots, n$, *что модули N_i и $N'_{i'}$ изоморфны при всяком i.*

Это предложение является частным случаем теоремы Жордана — Гёльдера о группах с операторами (см., например, Bourbaki N., IV, Algèbre, ch. 1, § 6, теорема 8, а также Курош А. Г., Лекции по общей алгебре, М., 1962, § 4 гл. 3).

Пусть в модуле M существует ряд Жордана — Гёльдера. Легко видеть, что тем же свойством обладает всякий его подмодуль и фактор-модуль. Отсюда следует, что любая конечная последовательность вложенных друг в друга подмодулей модуля M может быть включена в ряд Жордана — Гёльдера.

Начиная отсюда, будем предполагать, что кольцо K имеет единицу, и рассматривать только унитарные K-модули.

Система $\{a_\iota\}_{\iota\in I}$ элементов K-модуля M называется *системой образующих* модуля M, если всякий элемент $a\in M$ представляется в виде $a=\sum_{\iota\in I}\lambda_\iota a_\iota$, где λ_ι — элементы кольца K, лишь конечное число которых отлично от 0. Модуль, обладающий конечной системой образующих, называется *модулем конечного типа*. В частности, модули конечного типа над полями — это конечномерные векторные пространства.

Предложение 3. *Если в кольце K всякий левый идеал имеет конечную базу, то любой подмодуль K-модуля конечного типа есть модуль конечного типа.*

Доказательство. Пусть M — K-модуль с образующими $a_1, \ldots, a_n$; N — его подмодуль. При $n=0$ утверждение очевидно. Пусть оно доказано для всех K-модулей с меньшим, чем n, числом образующих. Обозначим через M' подмодуль модуля M, порожденный элементами $a_2, \ldots, a_n$. Всякий элемент $x\in N$ представляется в виде $x=\lambda a_1+y$, где $\lambda\in K$, $y\in M'$. Всевозможные λ, которые при этом могут встретиться, образуют левый идеал I в кольце K. Пусть $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ — база этого идеала и $x_1, \ldots, x_m$ — такие элементы из N, что $x_i=\lambda_i a_1+y_i$ $(y_i\in M')$. Пусть, далее, $\{x_{m+1}, \ldots, x_p\}$ — конечная система образующих модуля $N\cap M'$, существующая по предположению индукции. Легко видеть, что $\{x_1, \ldots, x_p\}$ — система образующих модуля N.

Модуль с одной образующей называется *однородным*.

Предложение 4. *Всякий модуль M конечного типа над кольцом K главных идеалов*[1]) *разлагается*

---

[1]) Кольцом главных идеалов называется коммутативное кольцо с единицей без делителей нуля, в котором все идеалы главные, т. е. порождаются одним элементом. К числу таких колец относится кольцо целых чисел, все поля, а также кольца многочленов от одной переменной с коэффициентами из поля.

в прямую сумму однородных подмодулей M_i. Это разложение может быть выбрано таким образом, чтобы $K_0(M_i) \subset K_0(M_{i+1})$; при этом условии идеалы $K_0(M_i)$ кольца K определены однозначно.

(См. Bourbaki N., XIV, Algèbre, ch. VII, § 4, теорема 2.)

Это предложение содержит как частный случай известную теорему о структуре коммутативных групп с конечным числом образующих.

Рассмотрим другой важный частный случай предложения 4. Пусть X — эндоморфизм векторного пространства V над полем L. Обозначим через K кольцо многочленов от одной переменной с коэффициентами из поля L. В пространство V естественным образом вносится структура K-модуля. А именно, для всякого многочлена $P \in K$ положим $P \cdot v = P(X)v$ $(v \in V)$.

Предложение 4, примененное к K-модулю $M = V$, позволяет привести линейное преобразование X к некоторому каноническому виду. Образующие идеалов $K_0(M_i)$ называются в этом случае инвариантными множителями линейного преобразования X.

Если поле L алгебраически замкнуто, то отсюда легко получить теорему о приведении линейного преобразования к жордановой нормальной форме.

Пусть $\{a_\iota\}_{\iota \in I}$ — система образующих K-модуля M. Если каждый элемент $a \in M$ представим единственным образом в виде конечной суммы $a = \sum \lambda_\iota a_\iota$ $(\lambda_\iota \in K)$, то система $\{a_\iota\}$ называется *базой* K-модуля M. Модуль, обладающий базой, называется *свободным*. Само кольцо K, снабженное левым регулярным представлением, является свободным K-модулем с одной образующей. Всякий свободный K-модуль изоморфен прямой сумме некоторого множества модулей, изоморфных кольцу K (рассматриваемому как левый K-модуль). Всякий K-модуль изоморфен фактор-модулю некоторого свободного K-модуля.

Модуль над полем (т. е. векторное пространство) всегда свободен.

Пусть M — правый K-модуль и N — левый K-модуль. *Тензорным произведением* модулей M и N называется коммутативная группа $M \otimes_K N$ с образующими $x \otimes y$ $(x \in M,\ y \in N)$, подчиняющимися соотношениям:

1) $x \otimes (y_1 + y_2) = x \otimes y_1 + x \otimes y_2$,

2) $(x_1 + x_2) \otimes y = x_1 \otimes y + x_2 \otimes y$,

3) $(x\lambda) \otimes y = x \otimes (\lambda y)$ $(\lambda \in K)$.

Если кольцо K коммутативно, то пропадает различие между правыми и левыми K-модулями и в группу $M \otimes_K N$ естественным образом вводится структура K-модуля

$$\lambda (x \otimes y) = \lambda x \otimes y = x \otimes \lambda y.$$

Если L — некоторое кольцо, содержащее K в качестве подкольца, то его можно рассматривать как правый K-модуль. Пусть M — какой-нибудь левый K-модуль. Образуем тензорное произведение $L \otimes_K M$ модулей L и M и введем в него структуру левого L-модуля по формуле

$$\alpha (\beta \otimes x) = \alpha\beta \otimes x \qquad (\alpha, \beta \in L, \; x \in M).$$

Полученный левый L-модуль обозначим через M^L. Модуль M^L называется *модулем, получающимся из M расширением кольца скаляров до L*. Исходный модуль M естественным образом вкладывается в модуль M^L:

$$x \to 1 \otimes x.$$

Если на M определена структура алгебры, то она переносится на M^L по формуле

$$(\alpha \otimes x)(\beta \otimes y) = \alpha\beta \otimes xy.$$

Если модуль M свободен, то и модуль M^L свободен. Более точно, всякая база K-модуля M является в то же время базой L-модуля M^L (при естественном вложении M в M^L).

K-бимодулем, или двусторонним K-модулем, называется коммутативная группа M, снабженная одновременно структурами левого и правого K-модулей таким образом, что выполняется условие

$$\lambda (x\mu) = (\lambda x) \mu$$

для любых $\lambda, \mu \in K$, $x \in M$.

В заключение остановимся на понятии *модуля над алгеброй Ли*, постоянно употребляемом в этой книге. Пусть

$\mathfrak{G}$ — алгебра Ли над коммутативным кольцом K, ρ — ее линейное представление в K-модуле M (см. п. 1 гл. I). В модуле M определено тогда „умножение слева на элементы из $\mathfrak{G}$", что естественно называть структурой „$\mathfrak{G}$-*модуля*", хотя кольцо $\mathfrak{G}$ и не ассоциативно и аксиома 3) определения модуля, данного в начале этого приложения, не выполняется. Эта аксиома заменяется следующей:

$$3') \quad [\lambda, \mu]\, x = \lambda(\mu x) - \mu(\lambda x) \qquad (\lambda, \mu \in \mathfrak{G}).$$

Кроме того, поскольку $\mathfrak{G}$ — не только кольцо, но и алгебра над K, в определении $\mathfrak{G}$-модуля добавляется еще аксиома линейности

$$\lambda(kx) = k(\lambda x) \quad (\lambda \in \mathfrak{G},\ k \in K).$$

Впрочем, можно и не выходить за рамки модулей над ассоциативными кольцами. Для этого нужно ввести в рассмотрение обертывающую алгебру U алгебры $\mathfrak{G}$. Всякое линейное представление ρ алгебры $\mathfrak{G}$ в K-модуле M определяет естественным образом унитарное (т. е. при котором 1 переходит в тождественный автоморфизм) линейное представление ассоциативной алгебры U в модуле M и, значит, структуру U-модуля на M. Наоборот, всякому линейному представлению алгебры U в K-модуле M соответствует линейное представление алгебры $\mathfrak{G}$ в том же модуле. Таким образом, $\mathfrak{G}$-*модули можно отождествить с* U-*модулями*

ЛИТЕРАТУРА[1])

А д о И. Д.

[1]* О представлении конечных непрерывных групп с помощью линейных подстановок, Казань, *Изв. Физ.-матем. о-ва*, 7 (1934—1935), 1—43.

Б е р е з и н Ф. А.

[2]* Операторы Лапласа на полупростых группах Ли, М., *Труды Моск. Матем. о-ва*, 6 (1957), 371—463.

Б и р к г о ф Г. (B i r k h o f f G.)

[3] Representations of Lie algebras and Lie groups by matrices, *Ann. Math.*, 38 (1937), 526—532.

Б о р е л ь А. и С е р р Ж.-П. (B o r e l A. et S e r r e J.-P.)

[4] Sur certains sous-groupes des groupes de Lie compacts, *Commentarii Math. Helvetici*, 27 (1953), 128—139.

Б у р б а к и Н. (B o u r b a k i N.)

[5]* Éléments de mathématique, XXVI, Groupes et algèbres de Lie, Ch. I, Algèbres de Lie, Paris, 1960.

В а н - д е р - В а р д е н Б. Л. (Van der W a e r d e n B. L.)

[6]* Die Klassifikation der einfachen Lieschen Gruppen, *Math. Zeitschr.*, 37 (1933), 446—462.

[7]* Современная алгебра, т. II, М., ИЛ, 1947.

В е й л ь А. (W e y l A.)

[8] Интегрирование в топологических группах и его применения, М., ИЛ, 1950.

В е й л ь Г. (W e y l H.)

[9] Theorie der Darstellung kontinuierlicher halbeinfacher Gruppen durch lineare Transformationen, *Math. Zeitschr.*, 23 (1924), 271—304; 24 (1925), 328—395. (Есть неполный русский перевод, *УМН*, 4 (1937), 201—246.)

[10] Классические группы, их инварианты и представления, М., ИЛ, 1947.

---

[1]) Звездочкой отмечена литература, добавленная переводчиком. — *Прим. ред.*

Витт Э. (Witt E.)

[11] Treue Darstellung Liescher Ringe, *Journ. für reine und angewandte Math.*, 177 (1937), 152—160.

Гантмахер Ф. Р.

[12]* Canonical representation of automorphisms of a complex semi-simple Lie group, *Матем. сб.*, 5 (1939), 101—146.

[13]* On the classification of real simple Lie groups, *Матем. сб.*, 5 (1939), 217—250.

Гельфанд И. М.

[14]* Центр инфинитезимального группового кольца, *Матем сб.*, 26 (1950), 103—112.

Гельфанд И. М. и Райков Д. А.

[15]* Неприводимые унитарные представления локально бикомпактных групп, *ДАН*, 42 (1944), 203—205.

Джекобсон Н. (Jacobson N.)

[16] Rational methods in the theory of Lie algebras, *Ann. Math.*, 36 (1935), 875—881.

[17]* Lie algebras (в печати).

Дынкин Е. Б.

[18]* Вычисление коэффициентов в формуле Campbell 'a — Hausdorf'a, *ДАН*, 57 (1947), 323—326.

[19]* Структура полупростых алгебр Ли, *УМН*, **2 : 4** (1947), 59—127.

[20]* Автоморфизмы полупростых алгебр Ли, *ДАН*, 76 (1951), 629—632.

[21]* Максимальные подгруппы классических групп, М., *Труды Моск. Матем. о-ва*, 1 (1952), 39—166.

Дынкин Е. Б. и Онищик А. Л.

[22]* Компактные группы Ли в целом, *УМН*, **10 : 4** (1955), 3—74.

Ивасава К. (Iwasawa K.)

[23] On the representations of Lie algebras, *Japan J. Math.*, 19 (1948), 405—426.

[24] On some types of topological groups, *Ann. Math.*, 50 (1949), 507—558.

Картан Э. (Cartan E.)

[25] Sur la structure des groupes de transformations finis et continus, Thèse, Nony, Paris, 1894.

[26] Les groupes projectifs qui ne laissent invariante aucune multiplicité plane, *Bull. Soc. Math. France*, 41 (1913), 53—96.

[27]* Les groupes réels simples, finis et continus, *Ann. Sci. École Norm. Sup.*, 31 (1914), 263—355.

[28] Groupes simples clos et ouverts, et géométrie riémannienne, *Journ. Math. pures et appliquées*, 8 (1929), 1—33. (Есть русский перевод в сборнике: Э. Картан, Геометрия групп Ли и симметрические пространства, М., ИЛ, 1949.)

[29] Sur les invariants intégraux de certains espaces homogènes clos, *Ann. Soc. polonaise de Math.*, 8 (1929), 181—225.

[30] Les représentations linéaires des groupes de Lie, *Journ. Math. pures et appliquées*, 17 (1938), 1—12.

Картан А. и Эйленберг С. (Cartan H. and Eilenberg S.)

[31]* Гомологическая алгебра, М., ИЛ, 1960.

Картье П. (Cartier P.)

[32]* On H. Weyl's character formula, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 67, 2 (1961).

Костант Б. (Kostant B.)

[33]* A formula for the multiplicity of a weight, *Trans. Am. Math. Soc.*, 93, 1 (1959).

Козюль Ж.-Л. (Koszul J. L.)

[34] Homologie et cohomologie des algèbres de Lie, *Bull. Soc math. de France*, 78 (1950), 65—127.

[35] Sur les modules de représentations des algèbres de Lie résolubles, *Amer. J. Math.*, 76 (1954), 535—554.

Лазар М. (Lazard M.)

[36]* Sur les algèbres enveloppantes universelles de certaines algèbres de Lie, *C. R.*, 235 (1952), 788—791.

Леви Э. (Levi E.)

[37]* Sulla struttura dei gruppi finiti e continui, *Atti Accad. Torino*, 40 (1905), 3—17.

Леджер Д. Ф. (Leger G. F.)

[38] On cohomology theory for Lie algebras, Thesis, Univ. of Illinois, 1951.

Мальцев А. И.

[39] О разложении алгебры в прямую сумму радикала и полупростой подалгебры, *ДАН*, 36 (1942), 46—50.

[40] О линейных связных локально замкнутых группах, *ДАН*, 40 (1943), 108—110.

[41] On the theory of the Lie groups in the large, *Матем. сб.*, 16 (1945), 163—190; 19 (1946), 523.

Мостов Г. Д. (Mostow G. D.)

[42] A new proof of E. Cartan's theorem on the topology of semi-simple groups, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 55 (1949), 969—980.

Понтрягин Л. С.

[43] Непрерывные группы, М., 1954.

Пуанкаре А. (Poincaré H.)

[44] Quelques remarques sur les groupes finis et continus, Oeuvres complètes, III, Paris, 1954.

Самельсон Г. (Samelson H.)

[45] Beiträge zur Topologie der Gruppen-Mannigfaltigkeiten, *Ann. Math.*, **42** (1941), 1091—1137.

Серр Ж.-П. и Хохшильд Г. (Serre J.-P. and Hochschild G.)

[46] Cohomology of Lie algebras, *Ann. Math.*, **57** (1953), 591—603.

Уайтхед Дж. Г. К. (Whitehead J. H. C.)

[47] On the decomposition of an infinitesimal group, *Proc. Cambridge phil. Soc.*, **32** (1936), 229—236.

[48] Certain equations in the algebra of an infinitesimal semi-simple group, *Quarterly J. Math.*, Oxford, 8 (1937), 220—237.

Фрейденталь Г. (Freudenthal H.)

[49]* Zur Berechnung der Charaktere der halbeinfachen Lieschen Gruppen, *Indag. Math.*, 16 (1954), 369—376; там же 487—491; **18** (1956), 511—514.

Хариш-Чандра (Harish-Chandra)

[50] Faithful representations of Lie algebras, *Ann. Math.*, **50** (1949), 68—76.

[51] On representations of Lie algebras, *Ann. Math.*, **50** (1949), 900—915.

[52] Lie algebras and the Tannaka duality theorem, *Ann. Math.*, **51** (1950), 299—330.

[53] On faithful representations of Lie groups, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **1** (1950), 205—210.

[54] On the radical of a Lie algebra, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **1** (1950), 14—17.

[55] Some applications of the universal enveloping algebra of a semi-simple Lie algebra, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **70** (1951), 28—99.

Хопф Г. (Hopf H.)

[56] Über die Topologie der Gruppen-Mannigfaltigkeiten und ihrer Verallgemeinerungen, *Ann. Math.*, **42** (1941), 22—52.

Хохшильд Г. (Hochschild G.)

[57] Semi-simple algebras and generalized derivations, *Amer. J. Math.*, **64** (1942), 677—694.

[58] Lie algebras and differentiations in ring of power series, *Amer J. Math.*, **72** (1950), 58—80.

[59] Cohomology of restricted Lie algebras, *Amer. J. Math.*, **76** (1954), 555—580.

[60] Lie algebras kernels and cohomology, *Amer. J. Math.*, **76** (1954), 698—716.

[61] Cohomology classes of finite type and finite dimensional kernels for Lie algebras, *Amer. J. Math.*, **76** (1954), 763—778.

Цассенхаус Г. (Zassenhaus H.)

[62] Über die Darstellungen der Lie-Algebren bei Charakteristik 0, *Comm. Math. Helvetici*, **26** (1952), 252—274.

Шевалле К. (Chevalley C.)

[63] An algebraic proof of a property of Lie groups, *Amer. J. Math.*, **63** (1941), 785—793.

[64] On the topological structure of solvable groups, *Ann. Math.*, 42 (1941), 668—675.

[65] Algebraic Lie algebras, *Ann. Math.*, **48** (1947), 91—100.

[66] The determination of the Betti numbers of the simple exceptional Lie groups, *Proc. Intern. Congress of Math.*, 1950, II, 21—24.

[67] Теория групп Ли, М., ИЛ, I, 1948; II, 1958; III, 1958.

Шевалле К. и Эйленберг С. (Chevalley C. and Eilenberg S.)

[68] Cohomology theory of Lie groups and Lie algebras, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **63** (1948), 85—124.

Шевалле К. и Шафер Р. Д. (Chevalley C. and Schafer R. D.)

[69]* The exceptional simple Lie algebras F_4 and E_6, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, **36**, (1950), 137—141.

СПИСОК ОБОЗНАЧЕНИЙ

K — основное кольцо (кольцо скаляров)

$M, N, \ldots$ — модули

M^* — модуль линейных форм на M

$T(M) = \sum_{p=0}^{\infty} T^p(M)$ — тензорная алгебра над M

$S(M) = \sum_{p=0}^{\infty} S^p(M)$ — симметрическая алгебра над M

$\Lambda(M) = \sum_{p=0}^{\infty} \Lambda^p(M)$ — внешняя алгебра над M

$\mathfrak{L}(M, N)$ — модуль линейных отображений модуля M в модуль N

$\mathfrak{L}(M_1, \ldots, M_k; N)$ — модуль полилинейных отображений произведения $M_1 \times \ldots \times M_k$ в модуль N

$\mathrm{Gl}(M)$ — алгебра Ли эндоморфизмов модуля M

$\mathfrak{G}, \mathfrak{H}, \ldots$ — алгебры Ли

$U = U(\mathfrak{G}) = \bigcup_{p=0}^{\infty} U_p(\mathfrak{G})$ — универсальная обертывающая алгебра алгебры $\mathfrak{G}$

$H(\mathfrak{G}, M) = \sum H^p(\mathfrak{G}, M)$ — модуль когомологий алгебры $\mathfrak{G}$ со значениями в $\mathfrak{G}$-модуле M

$M^{\natural}$ — подмодуль инвариантов $\mathfrak{G}$-модуля M

$c_M \in U(\mathfrak{G})$ — элемент Казимира $\mathfrak{G}$-модуля M

ad — присоединенное представление алгебры Ли

$\mathfrak{G}^{(k)}$ — k-й член производного ряда алгебры $\mathfrak{G}$

$\mathfrak{G}_k$ — k-й член убывающего центрального ряда алгебры $\mathfrak{G}$

$\mathfrak{R}$ — радикал алгебры $\mathfrak{G}$

$\mathfrak{N}$ — наибольший нильпотентный идеал алгебры $\mathfrak{G}$

$\mathfrak{S}$ — нильпотентный радикал алгебры $\mathfrak{G}$

$(\,,)$ или $\langle\,,\rangle$ — скалярное произведение

$\oplus$ — прямая сумма (модулей, алгебр, представлений)

$\otimes$ — тензорное произведение (модулей, алгебр, представлений)

$\circ$ — композиция отображений

∂ — связывающий гомоморфизм в точной когомологической последовательности

1 — единица кольца K, а также тождественный эндоморфизм модуля

Q — поле рациональных чисел

R — поле вещественных чисел

C — поле комплексных чисел

Обозначения, используемые в полупростой алгебре Ли $\mathfrak{G}$

(K — алгебраически замкнутое поле характеристики 0)

$\mathfrak{H}$ — подалгебра Картана

$\alpha, \beta, \ldots$ — корни алгебры $\mathfrak{G}$ относительно $\mathfrak{H}$

$\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ — простые корни

Δ — система ненулевых корней

Σ — система положительных корней

Π — система простых корней

H'_α — элемент алгебры $\mathfrak{H}$, определяемый из условия:

$$\alpha(H) = \langle H'_\alpha, H \rangle \text{ для всех } H \in \mathfrak{H}$$

$$H_\alpha = \frac{2H'_\alpha}{\langle \alpha, \alpha \rangle}$$

$\mathfrak{H}_0$ — Q — подпространство пространства $\mathfrak{H}$, порожденное элементами H'_α, $\alpha \in \Delta$

S_α — отражение пространства $\mathfrak{H}_0$ в гиперплоскости $\alpha(H) = 0$, или сопряженное преобразование пространства $\mathfrak{H}_0^*$

$\mathfrak{G}^\alpha$ — корневое подпространство, соответствующее корню α

E_α — корневой вектор, образующая пространства $\mathfrak{G}^\alpha$

$\mathfrak{G}_0$ — вещественная форма алгебры $\mathfrak{G}$

$\mathfrak{G}_u$ — компактная вещественная форма алгебры $\mathfrak{G}$

(K — поле комплексных чисел)

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Абелева алгебра Ли 9
Автоморфизм алгебры Ли 179
— — — внутренний 179
— — — специальный 62
Алгебра Ли 9
— — абелева 9
— — алгебраическая 75
— — группы Ли 225
— — коммутативная 9
— — компактная 140
— — компактной группы Ли 283
— — нильпотентная 11, 24
— — полупростая 78
— — простая 78
— — разрешимая 11, 27
— — редуктивная 86
— — свободная 9
— — эндоморфизмов модуля 10
Алгебраическая алгебра Ли 75
— оболочка алгебры Ли 76
Аналитическое представление комплексной группы Ли 251
Антианалитическое представление комплексной группы Ли 252
Ацикличный комплекс 32

База Вейля 138

Вес линейного представления алгебры Ли 112
— — — полупростой алгебры Ли 190
Вещественная форма комплексной алгебры Ли 139
— — — — — компактная 140
— — — — — нормальная 144
Внутреннее дифференцирование алгебры Ли 12
Внутренний автоморфизм алгебры Ли 179
Вполне приводимое векторное пространство с эндоморфизмами 81

Гомоморфизм алгебр Ли 10
Градиент 211
Группа автоморфизмов алгебры Ли 179
— Вейля комплексной полупростой алгебры Ли 183
— — компактной алгебры Ли 273
— внутренних автоморфизмов алгебры Ли 179
— когомологий алгебры Ли 40
— Ли комплексная 250
— топологическая разрешимая 30
— — типа (MP) 276

Дифференцирование алгебры Ли 11
— — — внутреннее 12

Идеал алгебры Ли 10
— — — производный 11
Инвариант линейного представления 45
Инъективный $\mathfrak{G}$-модуль 47

Канонические образующие полупростой алгебры Ли 190

Коммутативная алгебра Ли 9
Компактная алгебра Ли 140
— вещественная форма комплексной алгебры Ли 140
Комплекс 32
— ацикличный 32
— свободный 33
Комплексная группа Ли 250
Корень 114
— положительный 128
— простой 128
Критерий Картана 78
— нильпотентности эндоморфизма 74
— разрешимости алгебры Ли 102

Лапласиан 211
Линеаризация алгебры Ли 10
Линейное представление алгебры Ли 10
— — — — нильпотентное 23
— — — — присоединенное 12
— — — группы Ли, унитарное 245
— — комплексной группы Ли, аналитическое 251
— — — — — антианалитическое 252

Максимальный тор компактной группы Ли 265
Модуль когомологий алгебры Ли 40
Мономиальная матрица 281

Наибольший нильпотентный идеал 98
— разрешимый идеал 97
Несущественное расширение алгебры Ли 58
— — $\mathfrak{G}$-модуля 51
Нильпотентная алгебра Ли 11, 24
Нильпотентное представление алгебры Ли 23
Нильпотентный радикал 99
Нормальная вещественная форма комплексной полупростой алгебры Ли 144

Обобщенная функция 224
Оператор Казимира 47

Подалгебра алгебры Ли 10
— — — редуктивная 86
— Картана 115
Полиномиальная функция 172
Полиномиальное отображение 172
Положительный корень 128
Полуглавная последовательность топологической группы 276
Полупростая алгебра Ли 78
Полупрямое произведение топологических групп 241
Поток 225
p-ранг группы 282
Препятствие расширения $\mathfrak{G}$-модуля 51
Присоединенное представление алгебры Ли 12
Производный идеал 11
— ряд 11
Простая алгебра Ли 78
Простой корень 128
Прямое произведение алгебр Ли 10

Радикал алгебры Ли 99
— — — нильпотентный 99
— ассоциативной алгебры 96
Разрешимая алгебра Ли 11, 27
— топологическая группа 30
Ранг компактной группы Ли 266
Расширение алгебры Ли 26, 55
— — — несущественное 58
— — — центральное 26
— $\mathfrak{G}$-модуля 50
— — несущественное 51
Регулярная нильпотентная подалгебра 115
Регулярный элемент алгебры Ли 115
Редуктивная алгебра Ли 86
— подалгебра алгебры Ли 86

Реплика эндоморфизма 72

Свертка обобщенных функций 224
— потоков 225
Свободная алгебра Ли 9
Свободный комплекс 33
Связывающий гомоморфизм 41
Серия весов 124
— корней 122
Специальный автоморфизм алгебры Ли 62
Старший вектор линейного представления 191
— вес линейного представления 191

Теорема Адо 104
— Бернсайда 203
— Блихтфельда 282
— Бореля — Серра 280
— Г. Вейля 85
— Гильберта об инвариантах 91
— Ивасавы 104
— Картана 78
— Леви — Мальцева 63, 86
— Ли 27
— Пуанкаре — Биркгофа — Витта 16, 17
— Хариш-Чандры 219—220
— Хопкинса 96
— Энгеля 24
Тождество Рейнольдса 200
— Якоби 9

Убывающий центральный ряд 11
Универсальная обертывающая алгебра 13
Унитарное представление группы Ли 245

Фактор-алгебра алгебры Ли 10
Форма Киллинга 78
Формула интегрирования Г. Вейля 230
— Кэмпбелла — Хаусдорфа 260
— Планшереля 233
Фундаментальная область Вейля 183
— система корней 129
— — — распадающаяся 130

Характер алгебры Ли 202, 220
— конечномерного представления 203, 217
— представления со старшим вектором 204, 219
Характеристический класс расширения 𝔊-модуля 51

Центр алгебры Ли 11
— компактной группы Ли 274
— универсальной обертывающей алгебры 199
Центральное расширение алгебры Ли 26
Центральный ряд, убывающий 11

Числа Картана 129

Эквивалентные расширения алгебры Ли 56
— — 𝔊-модуля 50
Элемент Казимира 47

ОГЛАВЛЕНИЕ

От издательства 5
Предисловие 7

Глава 1. **Теорема Пуанкаре — Биркгофа — Витта.** *П. Картье* 9

1. Предварительные понятия 9
2. Универсальная обертывающая алгебра 12
3. Теорема Пуанкаре — Биркгофа — Витта 15
4. Доказательства лемм 19

Глава 2. **Нильпотентные и разрешимые алгебры Ли.** *А. Бланшар* 23

1. Нильпотентные представления. Нильпотентные алгебры Ли 23
2. Разрешимые алгебры Ли 27
3. Приложение. Глобальное доказательство теоремы 2 30

Глава 3. **Когомологии алгебр Ли.** *П. Картье* 32

1. Предварительные сведения о комплексах 32
2. Построение основного комплекса 34
3. Свойства основного комплекса 38
4. Определение когомологий алгебр Ли 40
5. Действия над линейными представлениями. Оператор Казимира 42
6. Тривиальность некоторых групп когомологий 47
7. Интерпретация группы $H^0(\mathfrak{G}, M)$ 49
8. Интерпретация группы $H^1(\mathfrak{G}, M)$ 50
9. Интерпретация группы $H^2(\mathfrak{G}, M)$ 55
10. Теорема Леви — Мальцева 60
11. Добавление 63

Глава 4. **Теория реплик. Критерий Картана.** *М. Лазар* 68

1. Некоторые результаты из теории матриц 68
2. Теория реплик 72
3. Критерий нильпотентности 74
4. Алгебраические алгебры Ли 75
5. Полупростые алгебры Ли. Критерий Картана 78

Глава 5. **Полупростые алгебры Ли.** *П. Картье* 81

1. Предварительные сведения 81
2. Когомологии полупростых алгебр Ли 82
3. Редуктивные алгебры 86
4. Теорема Гильберта об инвариантах 91

Глава 6. **Радикалы алгебры Ли.** *П. Картье* 95

1. Радикал ассоциативной алгебры 95
2. Определение радикалов алгебры Ли 96
3. Простейшие свойства радикалов алгебры Ли 99
4. Критерий Картана для разрешимых алгебр Ли . . . 102

Глава 7. **Теоремы Адо и Ивасавы.** *П. Картье* 104

1. Введение 104
2. Вспомогательная теорема 105
3. Доказательство теорем 1 и 2 109
4. Приложение 110

Глава 8. **Веса и корни. Структура полупростых алгебр Ли.** *Ф. Брюа* 112

1. Представления нильпотентных алгебр Ли 112
2. Подалгебры Картана 114
3. Структура полупростых алгебр Ли 118
4. Серии корней 122
5. Системы простых корней 126
6. База Вейля 132

Глава 9. **Вещественные формы полупростых алгебр Ли.** *Ф. Брюа* 139

Приложение 148

Глава 10. **Классификация простых алгебр Ли.** *М. Берже, П. Картье* 152

1. Вступление 152
2. Отыскание связных допустимых систем 153
3. Построение связных допустимых систем 159

Глава 11. **Построение простых алгебр Ли.** *М. Берже* . . 163

1. Алгебры типа A_n 163
2. Алгебры типа C_n 165
3. Алгебры типов B_n и D_n 167
4. Алгебры типа G_2 168
5. Добавление 170

Глава 12. **Теорема о сопряженности подалгебр Картана.** *П. Картье* 172

1. Некоторые сведения из алгебраической геометрии . . 172
2. Применение к алгебрам Ли 176

Глава 13. **Автоморфизмы полупростых алгебр Ли.** *Ф. Брюа* 179

Глава 14. **Линейные представления полупростых алгебр Ли.** *П. Картье* 189

1. Канонические образующие полупростой алгебры Ли 189
2. Веса линейных представлений 190
3. Представления со старшим вектором 191
4. Неприводимые представления конечной степени . . 194

Глава 15. **Теория характеров полупростых алгебр Ли.** *П. Картье* 199

1. Отображение $\natural$ в обертывающей алгебре 199
2. Характеры полупростой алгебры Ли 202
3. О пространстве, дуальном к симметрической алгебре 206
4. Леммы о корнях 209
5. Отступление. Об экспоненциалах 210
6. Характеры конечномерных представлений 213
7. Вычисление характеров полупростой алгебры Ли . . 217
8. Отображение $\natural$ в симметрической алгебре над $\mathfrak{G}$ . . 220
9. Добавление 222

Глава 16. **Характеры компактных групп Ли.** *П. Картье* 224

1. Свертка обобщенных функций 224
2. Формулы интегрирования Г. Вейля 226
3. Метод Г. Вейля для нахождения характеров 230
4. Формула Планшереля для полупростых компактных групп 233

Глава 17. **Топологическая структура групп Ли.** *П. Картье* 238

1. Теория компактных групп 238
2. Теория полупростых групп 248
3. Произвольные группы Ли 254

Глава 18. **Формула Кэмпбелла — Хаусдорфа.** *П. Картье* 259

1. Вывод формулы Кэмпбелла — Хаусдорфа 259
2. Сходимость формулы Кэмпбелла — Хаусдорфа . . . 260
3. Приложение к нильпотентным группам 262

Глава 19. **Максимальные торы компактных групп Ли.** *Ж.-П. Серр* 265

1. Теорема сопряженности 265
2. Доказательство теоремы сопряженности, принадлежащее А. Вейлю 267
3. Другие доказательства теоремы сопряженности . . . 269
4. Дополнения к теореме 1 271

Глава 20. **Коммутативные подгруппы компактных групп Ли.** *Ж.-П. Серр* 276

1. Группы типа (MP) 276
2. Автоморфизмы простого порядка алгебры Ли . . . 278
3. Основная теорема 280
4. Приложение теоремы 281
5. Заключительные замечания 283

Приложение. О модулях 285

Литература 292

ТЕОРИЯ АЛГЕБР ЛИ ТОПОЛОГИЯ ГРУПП ЛИ

Редактор *С. Г. Гиндикин*. Художник *М. Г. Ровенский*
Художественный редактор *В. И. Шаповалов*. Технический редактор *Н. А. Иовлева*.

Сдано в производство 26/I 1962 г. Подписано к печати 8/VIII 1962 г.
Бумага $84\times108^1/_{32}$. 4,8 бум. л. 15,8 печ. л. Уч.-изд. л. 14,5. Изд. № 1/0791.
Цена 1 р. 02 к. Зак. 151.

ИЗДАТЕЛЬСТВО ИНОСТРАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
Москва, 1-й Рижский пер. 2

Типография № 2 им. Евг. Соколовой УПП Ленсовнархоза
Ленинград, Измайловский пр., 29.