Физико-
Математическая
Библиотека
Инженера

И. С. СОКОЛЬНИКОВ

ТЕНЗОРНЫЙ АНАЛИЗ

ТЕОРИЯ И ПРИМЕНЕНИЯ В ГЕОМЕТРИИ И В МЕХАНИКЕ СПЛОШНЫХ СРЕД

Перевод с английского В. И. КОНТОВТА
Под редакцией В. В. ЛОХИНА

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1971

517.3.
С 59
УДК 512.972

Тензорный анализ (с приложениями к геометрии и механике сплошных сред). И. Сокольников, перев. с англ. Главная редакция физико-математической литературы изд-ва «Наука», Москва, 1971, 376 стр.

В основу книги положен курс лекций, читанных автором студентам старших курсов и аспирантам ряда североамериканских университетов. Книга может быть использована как учебное пособие впервые приступающими к изучению предмета и как справочник научными работниками и инженерами. Бо́льшая часть приложений тензорного анализа, рассматриваемых в книге, относится к аналитической механике и к механике сплошных сред. Последние главы книги представляют собой краткое введение в теорию относительности и механику деформируемых сред.

Рис. 53, библ. ссылок 82.

I. S. SOKOLNIKOFF

TENSOR ANALYSIS

THEORY AND APPLICATIONS
TO GEOMETRY
AND MECHANICS OF CONTINUA

2-2-3
65-71

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА ПЕРЕВОДА

В книге И. С. Сокольникова «Тензорный анализ. Теория и применения в геометрии и в механике сплошных сред» ясно и подробно изложены основы тензорного анализа, который является незаменимым математическим аппаратом во многих разделах геометрии, механики и физики.

Автор с большим педагогическим мастерством знакомит с основными идеями, понятиями и теоремами тензорного исчисления и дает представление о предмете в целом как об определенном математическом методе.

В основу книги положен курс лекций, прочитанный автором для студентов старших курсов и аспирантов Висконсинского, Браунского и Калифорнийского университетов. Это определило общий стиль книги. Она может быть использована как учебное пособие впервые приступающими к изучению предмета и как справочник научными работниками и инженерами.

Большинство приложений тензорного анализа, рассматриваемых в книге, относится к аналитической механике и к механике сплошных сред.

Несомненным достоинством книги является простота и доступность изложения, для понимания ее не требуется специальной математической подготовки. В то же время она написана на современном научном уровне. Последние главы книги представляют собой краткое введение в теорию относительности и механику деформируемых сред. Книга И. С. Сокольникова является хорошей базой для дальнейшего углубленного изучения этих теорий, подлинное понимание которых немыслимо без овладения методами тензорного анализа.

Читателю, желающему подробнее ознакомиться с приложениями тензорного анализа, можно рекомендовать обратиться к другим источникам. Например, к книгам Н. Е. Кочина «Векторное исчисление и начала тензорного исчисления», «Наука» (1965) и П. К. Рашевского «Риманова геометрия и тензорный анализ», «Наука» (1967).

В частности, полезно дополнительно ознакомиться с недавно развитой теорией дифференцирования тензоров различных рангов по параметру (времени) в разных смыслах и их применением к физике. Эти вопросы имеют особенно существенное значение при построении физических моделей сплошных сред с учетом различного рода нелинейных эффектов.

Кроме этого, важное значение в различных приложениях имеет теория симметрии, в которой симметрия полностью задается с помощью простых систем тензоров. Сюда примыкает теория симметрии кристаллов и текстур, теория свойств систем коэффициентов в линейных соотношениях термодинамической теории Онзагера; из этой теории автоматически выводится принцип симметрии П. Кюри и т. п. С методами описания симметрии с помощью тензоров тесно связана теория структуры нелинейных тензорных функций для тензоров любого ранга, зависящих от нескольких тензорных аргументов различных рангов. С этими теориями можно ознакомиться в книгах Л. И. Седова «Введение в механику сплошных сред», Физматгиз (1962) и «Механика сплошной среды», т. I, «Наука» (1970).

В. В. Лохин

ПРЕДИСЛОВИЕ КО ВТОРОМУ ИЗДАНИЮ

При подготовке второго издания этой книги я принял во внимание пожелания, любезно высказанные мне читателями, знакомыми с ее первым изданием. При этом выяснилось, что никаких сколько-нибудь значительных изменений ни в первой (вступительной) главе, посвященной линейным преобразованиям и матрицам, ни во второй главе, излагающей основы тензорной алгебры и тензорного анализа, не потребовалось.

В главе III были расширены отдельные параграфы, освещающие применения вариационного исчисления в геометрии, был введен новый иллюстративный материал, а также два новых параграфа: о параллельных поверхностях и о теореме Гаусса — Бонне. Главы II и III настоящего издания содержат материал, отвечающий требованиям вводного курса по метрической дифференциальной геометрии, проходимого при подготовке на степень кандидата наук или в аспирантуре.

Подробнее — в сравнении с первым изданием — излагается аналитическая механика (глава IV). В чистом виде она дает существенные основы классической аналитической механики и теории потенциала, что вместе с главой V (Релятивистская механика) должно было бы составлять — хотя на деле часто и не составляет — важный раздел в экипировке каждого математика — студента и научного работника. Сюда вводится ряд иллюстративных примеров, поясняющих теорию, приводятся сведения о неголономных динамических системах, о канонических уравнениях Гамильтона, детальнее развивается теория потенциала.

Заключительная глава, посвященная механике сплошных сред, полностью переработана. Она построена по единому обобщающему плану и, надо надеяться, передает достаточно ясно существенное в нелинейной теории механики деформируемых сред. Эта глава подводит единый общий фундамент под совместную разработку математических теорий упругости, пластичности, гидродинамики и газовой динамики.

И. С. Сокольников

Пэсифик Палисад, Калифорния
Январь, 1964 г.

ПРЕДИСЛОВИЕ К ПЕРВОМУ ИЗДАНИЮ

Эта книга сформировалась в итоге многолетнего опыта чтения мною курса лекций в Висконсинском, Браунском и Калифорнийском университетах. Моя аудитория состояла главным образом из студентов, закончивших общий курс и интересовавшихся приложениями математики, и это обстоятельство отразилось как на выборе содержания курса, так и на характере его изложения.

В связи с тем значением, которое приобрела теория линейных преобразований в развитии тензорного исчисления, первая глава курса излагает прежде всего именно эту теорию совместно с теорией матриц, иллюстрируя применение этих теорий в геометрии и физике. Хотя значительная часть материала, приводимого в этой главе, освещается обычно в курсах матричной алгебры, лишь немногим из моих слушателей представился случай заранее познакомиться с матричными преобразованиями, столь необходимыми для специалиста по прикладной математике.

Вторая глава посвящена тензорной алгебре и тензорному анализу. Предлагаемое здесь изложение тензорного анализа не нуждается в опоре на какую-либо область математики, специально привлекаемую для его обоснования. В этом отношении здесь — отступление от обычной практики развивать тензорный анализ на конкретном материале геометрии или теории относительности. Хотя в пользу такого пути и можно указать значительные преимущества, поскольку, с одной стороны, он непосредственно наглядно раскрывает мотивы, по которым тензорное исчисление следует изучать, с другой стороны, он часто при этом внушает ошибочное представление о том, что построение формального аппарата тензорного анализа находится будто бы в какой-то зависимости от содержания геометрии или теории относительности.

Остальные разделы этого курса знакомят с применениями тензорного анализа к геометрии, аналитической механике, релятивистской механике и механике деформируемых сред. Так, глава III содержит подбор геометрических задач, представляющих большое значение в изучении аналитической динамики и в тех разделах теории упругости и теории пластичности, в которых исследуются деформации пластинок и оболочек. В этой главе дается также содержательное введение в метрическую дифференциальную геометрию. В главе IV кратко изложены основные идеи аналитической механики. Введению в релятивистскую механику посвящена глава V. Изложение темы дано здесь весьма кратким по тем соображениям, что теория относительности обогатилась за последнее время рядом превосходных книг, едва ли нуждающихся в дублировании их содержания. Последняя глава нашего труда формулирует важнейшие положения нелинейной механики сплошных сред в наиболее общей тензорной форме. Классические линеаризованные уравнения теории упругости и гидромеханики входят сюда как частные случаи общих формулировок.

Может быть самым лучшим доказательством замечательной эффективности тензорного аппарата в изучении законов природы сможет послужить тот факт, что в скромные рамки настоящего тома удалось вместить огромный объем материала, представляющего интерес одновременно и для математиков, и для физиков, и для инженеров.

Столь широкий охват области прикладной механики неизбежно должен был отразить вклад весьма многочисленного круга ученых. И именно в силу этого здесь было бы тщетно пытаться отмечать выдвинутые тем или иным из них в отдельности оригинальные идеи или методы решения частных задач. При всем том, однако, два автора сыграли особо значительную роль в моей многолетней практике преподавания геометрии: Т. Леви-Чивита и Э. Дж. Мак-Коннел, в особенности последний, автор книги «Приложения абсолютного дифференциального исчисления». Выражения признательности только что названным и другим авторам приводятся в надлежащих местах текста. Но самый большой мой долг — перед слушателями, сделавшими работу над этой книгой радостной и не напрасной.

Особенно приятно отметить одного из моих слушателей — Уилльяма Сейглинга (William R. Seugling), научного ассистента Калифорнийского университета в Лос-Анджелесе, не щадившего времени и трудов для продвижения этой книги в процессе печатания.

И. С. Сокольников

Лос-Анджелес
Ноябрь 1951 г.

ГЛАВА I

ЛИНЕЙНЫЕ ВЕКТОРНЫЕ ПРОСТРАНСТВА. МАТРИЦЫ

§ 1. Координатные системы

Для того чтобы указать положение в пространстве какой-либо геометрической фигуры, необходимо предварительно выбрать систему отсчета. Из числа наиболее простых систем такого рода в математике чаще всего пользуются декартовыми системами координат. Хотя построение таких координатных систем и знакомо нашему читателю из курсов аналитической геометрии, мы все же остановимся здесь на их рассмотрении, с тем чтобы выявить то общее, что составляет основу всех систем координат в пространстве нашей физической интуиции. Это рассмотрение проложит путь к некоторым далеко идущим обобщениям понятия физического пространства, которые мы сформулируем в § 4.

Центральная идея, приведшая Декарта к открытию возможности построения координатных систем, заключалась в возможности отождествления множества точек, составляющих прямую линию, с множеством вещественных чисел. Это отождествление основано на допущении, согласно которому каждому вещественному числу соответствует одна-единственная точка на прямой и обратно [1]).

---

[1]) Хотя идея взаимно однозначного соответствия между множеством точек, составляющих линию, и множеством вещественных чисел имеет свои корни в теории несоизмеримых Евдокса, восходящей к IV столетию до нашей эры, открытие координатных систем совершилось лишь в первой половине XVII века. Следует также отметить, что строгий анализ отношения между множеством точек на линии и множеством вещественных чисел был выполнен лишь в самом конце XIX века, главным образом в трудах Р. Дедекинда и Г. Кантора. Понятие строгости зависит всецело от условностей, диктуемых господствующим вкусом, которому и дано на определенный хронологический период утверждать меру требовательности в определении степени математической строгости. Плодотворные интуитивные концепции преобразуются обычно в строгие формы либо путем четко выраженного соглашения о том, какие понятия следует относить в категорию концепций, допускающих определение, и какие остаются неопределимыми, либо путем введения в математические теории новых форм логических процессов, по возможности свободных от противоречий.

Построим прямую X и выберем на ней точку O (рис. 1). Эта точка O, которую мы назовем началом, делит прямую на две полупрямые — на два луча. Назовем один из них *положительным* лучом, другой — *отрицательным*. На положительном луче

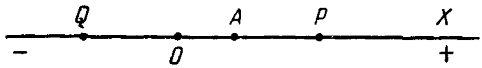

Рис. 1.

выберем точку A и назовем длину отрезка OA *единицей длины*. Теперь сопоставим точки на X с множеством вещественных чисел следующим образом. Если P — произвольная точка на положительном луче, определим число x, связанное с P формулой

$$x = \frac{\overline{OP}}{\overline{OA}},$$

где $\overline{OP}$ и $\overline{OA}$ — длины отрезков OP и OA. Число x *является координатой* P. Координата x точки Q на отрицательном луче определяется отношением

$$x = -\frac{\overline{OQ}}{\overline{OA}}.$$

Мы принимаем, таким образом, что каждое вещественное число x соответствует одной и только одной точке на X. Это соответствие множества точек на X множеству вещественных чисел и составляет *координатную систему одномерного пространства*, образуемого точками, лежащими на X.

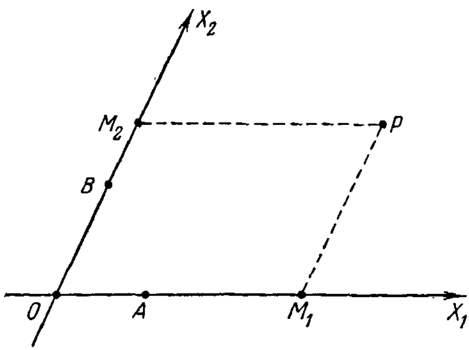

Рис. 2.

Соответствие множества точек, лежащих на плоскости, множеству вещественных чисел выполняется, если мы проведем две прямые линии X_1 и X_2, пересекающиеся в одной точке O (рис. 2). На каждой из этих прямых координатная система строится, как указано выше, хотя единицы длины на каждой из них не обязательно должны быть равными. Пара таких прямых с отмеченными на них точками A и B образует *координатные оси* X_1, X_2. С каждой точкой P, лежащей в плоскости координатных осей, мы связываем *упорядоченную пару* вещественных чисел (x_1, x_2), определяемых нижеследующим образом: прямая, проведенная через P параллельно оси X_2, пересекает ось X_1 в точке M_1 с координатой x_1, прямая же, проходящая через P параллельно оси X_1, пересекает X_2 в точке M_2 с координатой x_2. Упорядоченная пара чисел (x_1, x_2) представляет собой координаты точки P в плоскости, а взаимно однозначное соответствие упорядоченных пар чисел с множеством точек в плоскости X_1X_2 является *координатной системой* двумерного пространства, состоящего из точек плоскости.

Расширение этого представления на точки трехмерного пространства очевидно. Выберем три, не лежащих в одной плоскости прямых X_1, X_2, X_3, пересекающихся в одной общей точке O. На каждой из этих прямых строим координатную систему и с каждой точкой P свяжем упорядоченную тройку чисел (x_1, x_2, x_3), определяемых пересечением с осями трех плоскостей, проведенных через P параллельно *координатным плоскостям* X_1X_2, X_2X_3 и X_1X_3.

Описанные здесь координатные системы называются *косоугольными декартовыми системами*. Построение их использует понятия длины и параллельности обычной евклидовой геометрии и существенной их характеристикой является наличие взаимно однозначного соответствия точек с упорядоченными множествами чисел. Если координатные оси X_1, X_2, X_3 пересекаются под прямыми углами, координатная система называется *ортогональной декартовой* или *прямоугольной декартовой*. В практических применениях обычно используются именно прямоугольные системы, так как выражение для длины d отрезка $\overline{AB}$, соединяющего пару точек с координатами $A(a_1, a_2, a_3)$ и $B(b_1, b_2, b_3)$, принимает здесь простую форму

$$d = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}. \tag{1.1}$$

Это — знакомая формула Пифагора. Если координатная система косоугольная, формула для расстояния d получается несколько более сложной. В § 9 мы узнаем, что от ортогональной системы координат можно перейти к косоугольной, выполнив линейное преобразование координат. Из этого обстоятельства и из структуры формулы (1.1) следует заключить, что длина линейного сегмента, соединяющего точки с заданными координатами (x_1, x_2, x_3) и (y_1, y_2, y_3) в косоугольной системе равна

$$d = \sqrt{\sum_{i,\, j=1}^{3} g_{ij}(y_i - x_i)(y_j - x_j)}, \tag{1.2}$$

где через g_{ij} обозначены константы, зависящие от коэффициентов в вышеупомянутом линейном преобразовании координат, В дальнейшем мы займемся детальным изучением квадратичных форм, входящих под знак радикала в формулу (1.2), и установим их влияние на метрические свойства пространства.

§ 2. Геометрическое понятие вектора

В предыдущем параграфе мы напомнили о процессе построения координатных систем в обычном трехмерном пространстве, где для измерения расстояний между двумя точками используется теорема Пифагора. Пространства, в которых представляется возможным построить такую координатную систему, где длина отрезка прямой определяется формулой Пифагора, называются *евклидовыми пространствами*. Для таких пространств понятие перемещения принимается в качестве основного. Так, например, если точка A перемещается в новое положение B, то это перемещение из A в B может быть наглядно представлено *направленным линейным сегментом* (прямолинейным отрезком) $\overrightarrow{AB}$ (рис. 3). Если B перемещается в новое положение C, то результирующее перемещение может быть получено движением точки A в положение C. Эти операции можно обозначить символически уравнением

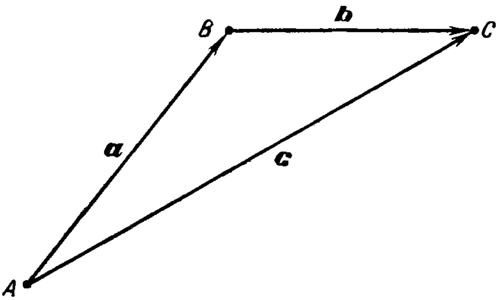

Рис. 3.

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}.$$

В элементарном изложении векторного анализа направленные прямолинейные отрезки называются *векторами* и обозначаются обычно одной буквой жирного шрифта. Предыдущую формулу можно поэтому представить так:

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{c}, \tag{2.1}$$

где $\overrightarrow{AB} = \boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{BC} = \boldsymbol{b}$, $\overrightarrow{AC} = \boldsymbol{c}$.

Правило сложения векторов, представленное наглядно на рис. 3, было сформулировано впервые в 1586 г. С. Стевином в связи с экспериментальным изучением законов, управляющих сложением сил. Этот закон известен как *закон параллелограмма сложения* сил. В силу того, что разнообразные величины, изучаемые физикой, могут быть представлены направленными прямолинейными отрезками, закон сложения которых передается символически формулой (2.1), векторный анализ приобретает большую ценность в своих применениях. Мы усматриваем здесь пример геометризации физики, оказавшей на развитие этой науки не меньшее влияние, чем в свое время арифметизация геометрии на развитие математического анализа.

Из представления о векторе как о перемещении, определяемом парой точек, мы приходим к выводу, что два вектора следует признать равными, если изображающие их отрезки имеют одинаковую длину, а их направления параллельны. Обозначим длину вектора $\boldsymbol{a}$ символом $|\boldsymbol{a}|$. Допустим, что понятие длины не зависит от избранной системы отсчета, так что длина $|\boldsymbol{a}|$ может быть вычислена по формуле Пифагора по координатам начальной и конечной точек вектора $\boldsymbol{a}$.

Под отрицательным значением вектора $\boldsymbol{a}$ (обозначается $-\boldsymbol{a}$) мы понимаем вектор, длина которого равна длине вектора $\boldsymbol{a}$, но направление которого противоположно направлению $\boldsymbol{a}$. Определим вектор-нуль (обозначается $\boldsymbol{0}$), отвечающий нулевому перемещению, формулой

$$\boldsymbol{a} + (-\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{0}.$$

Из геометрических свойств направленных прямолинейных отрезков выводим, что:

(I) $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}$.

(II) $(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) + \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} + (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c})$.

(III) если $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ — векторы, то существует единственный вектор $\boldsymbol{x}$, удовлетворяющий условию

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{x}.$$

Определим теперь операцию умножения векторов на вещественные числа. Если α — вещественное число, символ $\alpha\boldsymbol{a} \equiv \boldsymbol{a}\alpha$ обозначает вектор, длина которого равна $|\alpha||\boldsymbol{a}|$, направление же совпадает с $\boldsymbol{a}$, если $\alpha > 0$, и противоположно $\boldsymbol{a}$, если $\alpha < 0$. Если $\alpha = 0$, то $\alpha\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$.

Из этого определения и из свойств вещественных чисел заключаем, что:

(IV) $(\alpha_1 + \alpha_2)\boldsymbol{a} = \alpha_1\boldsymbol{a} + \alpha_2\boldsymbol{a}$

(V) $\alpha(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = \alpha\boldsymbol{a} + \alpha\boldsymbol{b}$

(VI) $\alpha_1(\alpha_2\boldsymbol{a}) = (\alpha_1\alpha_2)\boldsymbol{a}, \quad 1 \cdot \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}$

для любых вещественных чисел α_1 и α_2.

Введем теперь определение *скалярного произведения* двух векторов, которое позволит нам ввести новое обозначение для длины вектора.

Определение. *Скалярное произведение двух векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, обозначаемое $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$, представляет собой вещественное число*

$|\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|\cos(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$, *где* $\cos(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ — *косинус угла между направлениями* $\boldsymbol{a}$ *и* $\boldsymbol{b}$.

Если выразить это на языке геометрии, $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ равно произведению проекции $\boldsymbol{a}$ на $\boldsymbol{b}$, умноженной на длину $\boldsymbol{b}$. Таким образом, длина вектора $\boldsymbol{a}$ выразится положительным значением квадратного корня из $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}$. Заметим также, что $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ ортогональны лишь в том единственном случае, если $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = 0$.

Из этого определения и из свойств вещественных чисел мы без труда выводим следующие теоремы:

(VII) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a} = |\boldsymbol{a}|^2 > 0$, если только $\boldsymbol{a} \neq 0$

(VIII) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$

(IX) $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}) = \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$

(X) $\alpha(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}) = (\alpha\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})$, где α — вещественное число.

§ 3. Линейные векторные пространства. Размерность пространства

Сформулируем теперь определение *линейной зависимости* совокупности векторов $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n$, которое обнаружит свою важную связь с понятием размерности пространства.

Линейная зависимость. *Совокупность векторов* $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ *называется линейно зависимой, если существуют числа* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, *не все равные нулю, но такие, что*

$$\alpha_1\boldsymbol{a}_1 + \alpha_2\boldsymbol{a}_2 + \ldots + \alpha_n\boldsymbol{a}_n = \boldsymbol{0}.$$

Если таких чисел не существует, то векторы называются линейно независимыми.

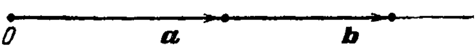

Рис. 4.

Рассмотрим два вектора $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, направления которых либо совпадают, либо противоположны (рис. 4). В таком случае существует число $k \neq 0$, для которого

$$\boldsymbol{b} = k\boldsymbol{a}. \tag{3.1}$$

Если положить $k = -\alpha/\beta$, то это уравнение можно будет представить в виде

$$\alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0},$$

откуда легко заключить, что два *коллинеарных* (или *параллельных*) вектора должны быть линейно зависимыми, поскольку ни α, ни β не равны нулю. В таком случае мы скажем, что полная совокупность векторов $k\boldsymbol{a}$ при произвольном вещественном k и $\boldsymbol{a} \neq 0$ образует одномерное вещественное *линейное векторное пространство*. Основанием для такой терминологии является то, что каждая точка этого пространства может быть представлена некоторым *радиусом-вектором* $k\boldsymbol{a}$.

Если $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ — два неколлинеарных вектора, представленных двумя направленными прямолинейными отрезками, имеющими общее начало O (рис. 5), то любой вектор $\boldsymbol{c}$, лежащий в плоскости $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, может быть представлен выражением

$$\boldsymbol{c} = m\boldsymbol{a} + n\boldsymbol{b}. \tag{3.2}$$

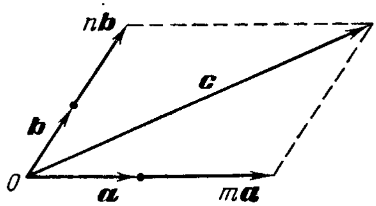

Рис. 5.

Формула (3.2) следует из правила сложения векторов и одновременно из определения умножения векторов на скаляры. Уравнение (3.2) можно будет при этом переписать в симметричной форме

$$\alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{b} + \gamma\boldsymbol{c} = 0,$$

выражающей условие линейной зависимости совокупности трех векторов, если не все константы в этой формуле обращаются в нуль. Формула $m\boldsymbol{a} + n\boldsymbol{b}$, где $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ — два линейно независимых вектора, а m и n — произвольные действительные числа, определяет *двумерное линейное векторное пространство*. Мы видим, что в двумерном линейном векторном пространстве совокупность трех векторов всегда линейно зависима.

Если в качестве системы отсчета принять три некомпланарных вектора $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, берущих общее начало в точке O (рис. 6), то любой вектор $\boldsymbol{d}$ можно будет представить в форме

$$\boldsymbol{d} = m\boldsymbol{a} + n\boldsymbol{b} + p\boldsymbol{c}, \tag{3.3}$$

откуда следует, что между четырьмя векторами $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{d}$ всегда существует нетривиальная зависимость в виде

$$\alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{b} + \gamma\boldsymbol{c} + \delta\boldsymbol{d} = 0.$$

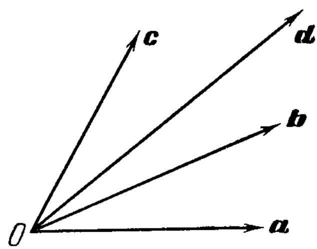

Рис. 6.

Формула (3.3) при произвольном выборе вещественных чисел m, n определяет *трехмерное вещественное линейное векторное пространство*. Конечные точки радиусов-векторов $\boldsymbol{d}$ охватывают трехмерное пространство точек, когда m, n и p пробегают по всей совокупности значений вещественных чисел. В трехмерном линейном векторном пространстве любая совокупность четырех векторов линейно зависима. Восползуемся связью между числом линейно независимых векторов и размерностью пространства для того, чтобы определить понятие размерности для линейного векторного пространства n измерений.

Векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ в (3.3) называются *базисными* или *координатными векторами*, а числа m, n и p — *измеряющими числами* или *компонентами* вектора $\boldsymbol{d}$. Как только мы выберем совокупность базисных векторов, любой другой вектор будет определяться единственным образом тройкой компонентов.

Совокупность трех взаимно ортогональных векторов в трехмерном пространстве, очевидно, линейно независима, и если мы выберем в качестве координатных векторов три взаимно ортогональных вектора $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$, каждый длиной в единицу, то получающаяся таким путем совокупность базисных векторов называется *ортонормальной*.

Мы можем представить себе наглядно совокупность ортонормальных векторов, направленных по осям соответствующей прямоугольной декартовой системы координат; в этом случае каждый вектор $\boldsymbol{x}$ может быть выражен в виде

$$\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{a}_1 + x_2\boldsymbol{a}_2 + x_3\boldsymbol{a}_3,$$

где (x_1, x_2, x_3) называются *физическими компонентами* $\boldsymbol{x}$, конечные же точки базисных векторов $\boldsymbol{a}_i$ $(i = 1, 2, 3)$ получают координаты

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a}_1&\colon (1, 0, 0), \\ \boldsymbol{a}_2&\colon (0, 1, 0), \\ \boldsymbol{a}_3&\colon (0, 0, 1). \end{aligned}$$

Закончим этот параграф перечнем правил сложения и умножения векторов, когда последние отнесены к ортонормальной системе базисных векторов $\boldsymbol{a}_i$ $(i = 1, 2, 3)$. Если у нас имеются два вектора $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ с компонентами (x_1, x_2, x_3) и соответственно (y_1, y_2, y_3), то вектор $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}$ определится компонентами $(x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3)$. Если α — вещественное число, то компонентами вектора $\alpha\boldsymbol{x}$ будут $(\alpha x_1, \alpha x_2, \alpha x_3)$. Из дистрибутивного закона скалярного умножения векторов следует непосредственно, что произведение векторов

$$\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{a}_1 + x_2\boldsymbol{a}_2 + x_3\boldsymbol{a}_3$$

и

$$\boldsymbol{y} = y_1\boldsymbol{a}_1 + y_2\boldsymbol{a}_2 + y_3\boldsymbol{a}_3$$

равно

$$\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3,$$

поскольку $\boldsymbol{a}_i \cdot \boldsymbol{a}_j = \delta_{ij}$, где $\delta_{ij} = 1$, если $i = j$, и $\delta_{ij} = 0$, если $i \neq j$. Это следует из установленной нами ортонормальной природы базисных векторов $\boldsymbol{a}_i$. Только что полученная нами формула приводит непосредственно к знакомому выражению для длины $|x|$ вектора x, отнесенного к прямоугольной декартовой системе отсчета. В самом деле

$$x \cdot x = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = |x|^2,$$

откуда

$$|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2};$$

при этом $|x| > 0$, если только x_1, x_2, x_3 не обращаются в нуль одновременно.

§ 4. N-мерные пространства

В прикладной математике нередко приходится устанавливать соответствия между совокупностью каких-либо объектов и упорядоченной совокупностью чисел, когда количество таких независимых объектов больше трех. Например, если речь идет о состояниях газа, определяемых давлением (p), объемом (v), температурой (T) и временем (t), то эти параметры можно поставить в соответствие с упорядоченной последовательностью четырех вещественных чисел (x_1, x_2, x_3, x_4). Представить закон состояний газа диаграммой в точках трехмерного физического пространства здесь, очевидно, невозможно. Существенным в идее координатной системы является, однако, не визуальное графическое представление, а взаимно однозначное соответствие между совокупностями объектов и чисел. Понятие расстояния между двумя произвольно взятыми точками также утрачивает здесь смысл и оказывается неприменимым. В самом деле, понятие расстояния оказывается лишенным геометрического смысла даже и в знакомом нам представлении состояний газа [давление (p) и объем (v)] точками декартовой плоскости pv. Совершенно абсурдно было бы говорить о расстоянии между двумя состояниями, охарактеризованными упорядоченными парами чисел (p, v).

Эффективность аналитического подхода к решению проблем физики столь велика, что мы, естественно, приходим к идее пространства с более высокими числами измерений и к использованию принципа взаимно однозначного соответствия между множествами чисел и множествами объектов. «Объекты» могут быть здесь весьма различными. В некоторых случаях это будут: давления, объемы, температуры; в иных — электрические заряды и комплексные потенциалы, возбуждаемые движением таких зарядов, и т. п.

Определим[1]) *N-мерное пространство или многообразие как некоторое множество объектов, которое может быть поставлено*

[1]) Сравните: Veblen O., Invariants of quadratic differential forms, стр. 13.

во взаимно однозначное соответствие с множеством всех упорядоченных совокупностей N (вещественных или комплексных) чисел: $x_1, x_2, \ldots, x_N$, удовлетворяющих условию

$$|x_i - A_i| < k_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, N),$$

где $A_1, \ldots, A_N$ — постоянные величины, а $k_1, k_2, \ldots, k_N$ — вещественные числа.

Неравенства в этом определении устанавливают *диапазон изменения* чисел x_i. Если числа x_i вещественны, N-мерное пространство также *вещественно*, и мы сможем тогда записать неравенства в такой форме:

$$a_1 \leqslant x_1 \leqslant a_2, \quad b_1 \leqslant x_2 \leqslant b_2, \ \ldots, \ t_1 \leqslant x_N \leqslant t_2.$$

Знак равенства здесь можно в некоторых случаях опустить, и тогда для диапазона переменных x_k мы будем иметь, например, $0 \leqslant x_k < \infty$.

Обозначим пространство N измерений символом V_N и заменим термином «точки» термин «объекты».

Всякое частное взаимно однозначное соответствие множества точек с упорядоченными совокупностями чисел $(x_1, x_2, \ldots$ $\ldots, x_N)$ называется координатной системой, а числа $x_1, x_2, \ldots, x_N$ — координатами точек в этой координатной системе.

Эти определения не дают повода к заключению, что понятие расстояния между двумя точками приобретает при этом какой-либо смысл. Лишь введение *правил* измерения позволяет назвать пространство V_N *метрическим*. Пока же мы еще не утверждаем, что наши пространства метризованы.

Система уравнений, имеющих вид

$$x_i = x_i(y_1, y_2, \ldots, y_N) \qquad (i = 1, 2, \ldots, N), \tag{4.1}$$

где функции x_i однозначны и в рассматриваемой области дают N однозначных решений

$$y_i = y_i(x_1, x_2, \ldots, x_N),$$

определяет некоторое преобразование координат.

Освещение вопроса об общем функциональном преобразовании координат (4.1) мы откладываем пока до главы II. Здесь в пределах главы I мы остановимся на детальном изучении важного случая линейных (или *аффинных*) преобразований координат

$$y_i = \sum_{j=1}^{N} a_{ij} x_j \qquad (i = 1, \ldots, N),$$

и на значении этих преобразований для линейных векторных пространств.

§ 5. Линейные векторные пространства n измерений

Краткий очерк начал векторного анализа в § 2, основанный на понятии направленного перемещения, сводится к 10 теоремам, выраженным формулами, отмеченными римскими цифрами. Эти теоремы можно положить в основу обобщенного понятия вектора в n-мерном пространстве, поскольку понятие направленного перемещения и длины теряют обычный смысл, коль скоро n превышает число 3. В соответствии с этим мы постулируем, что в n-мерном пространстве существуют точки и что

А. *Каждые две точки вещественного n-мерного пространства определяют геометрический объект, который мы называем вектором. Этот объект мы обозначаем символом* $\boldsymbol{a}$.

Б. *Каждые два вектора $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ дают сумму $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$, следующую законам* I, II, III, *сформулированным в* § 2.

Третий из этих законов приводит к выводу, что операция вычитания векторов однозначна и что существует вектор 0, наделенный тем свойством, что $\boldsymbol{a}+0=\boldsymbol{a}$ для каждого вектора $\boldsymbol{a}$.

В. *Для каждого вещественного числа α и вектора $\boldsymbol{a}$ существует вектор $\alpha\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}\alpha$, следующий законам* IV, V, VI (§ 2).

Мы сохраняем определение линейной зависимости для совокупности n векторов относительно поля вещественных чисел $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ и принимаем в качестве нашей *аксиомы размерности* допущение, согласно которому

Г. *В n-мерном пространстве существует n-линейно независимых векторов, но любая совокупность $n+1$ векторов линейно зависима.*

Эта аксиома предполагает, что каждый вектор $\boldsymbol{x}$ может быть представлен в виде

$$\boldsymbol{x}=\alpha_1\boldsymbol{a}_1+\alpha_2\boldsymbol{a}_2+\ \ldots\ +\alpha_n\boldsymbol{a}_n, \tag{5.1}$$

где $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ — совокупность n линейно независимых векторов. Мы говорим, что все векторы, определяемые формулой (5.1), где α_i — произвольные вещественные числа, составляют вещественное *линейное векторное пространство n измерений.*

Чтобы сообщить смысл понятиям длины и ортогональности векторов, нам следует ввести постулат

Д. *С каждой парой векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ мы можем ассоциировать число $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$, назвав его скалярным произведением векторов, подчиняющимся законам* VII, VIII, IX, X (§ 2).

На этом этапе мы не останавливаемся на природе формулы, использованной для вычисления числа $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$. Достаточно заметить, что свойства, воплощенные в законах скалярного умножения, приводят к определенному правилу вычисления $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$, как только мы введем координатную систему для определения координат точек, определяющих векторы.

О векторе, удовлетворяющем постулатам А — Д, можно сказать, что он определен в n-мерном евклидовом пространстве E_n.

Воспользуемся языком евклидовой геометрии и назовем *длиной* вектора a положительное значение квадратного корня из скалярного произведения вектора $\boldsymbol{a}$ на самого себя. Эта длина запишется формулой $|\boldsymbol{a}| = \sqrt{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}}$. Если $|\boldsymbol{a}| = 1$, вектор $\boldsymbol{a}$ называется *единичным вектором*. Два вектора $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ называются *ортогональными*, если $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = 0$.

Докажем, что любая совокупность m линейно независимых векторов в E_n $(m \leqslant n)$ может быть ортогонализована. Это означает, что из всякой заданной нам совокупности m линейно независимых векторов $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_m$ мы можем построить совокупность векторов $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_m$, удовлетворяющих условию $\boldsymbol{a}_i\cdot\boldsymbol{a}_j = 0$, если $i \neq j$. Сверх того, при этом возможно выбрать векторы $\boldsymbol{a}_i$ так, чтобы они имели единичную длину.

Доказательство. Допустим, что совокупность векторов $\{\boldsymbol{x}_i\}$ $(i = 1, \ldots, m)$ линейно независима. В таком случае уравнение

$$c_1\boldsymbol{x}_1 + c_2\boldsymbol{x}_2 + \ldots + c_m\boldsymbol{x}_m = \boldsymbol{0} \tag{5.2}$$

будет удовлетворяться лишь при условии $c_1 = c_2 = \ldots = c_m = 0$. Отсюда следует, что $\boldsymbol{x}_1 \neq \boldsymbol{0}$, ибо если бы эта величина была равна нулю, то числа

$$c_1 = 1, \quad c_2 = c_3 = \ldots = c_m = 0$$

удовлетворяли бы уравнению (5.2) и тогда эти векторы были бы линейно зависимыми, что противоречит нашему предположению. Обозначим через $\boldsymbol{a}_1$ произведение $\boldsymbol{x}_1$ на величину, обратную его длине, т. е.

$$\boldsymbol{a}_1 = \frac{\boldsymbol{x}_1}{|\boldsymbol{x}_1|}.$$

Так как $\boldsymbol{a}_1\cdot\boldsymbol{a}_1 = 1$, то $\boldsymbol{a}_1$ — единичный вектор.

Совокупность векторов

$$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_m$$

представляет собой, очевидно, линейно независимую совокупность. Рассмотрим теперь вектор

$$\boldsymbol{a}_2' = \boldsymbol{x}_2 - (\boldsymbol{x}_2\cdot\boldsymbol{a}_1)\,\boldsymbol{a}_1.$$

Произведение этого вектора на $\boldsymbol{a}_1$ равно нулю, поскольку

$$\boldsymbol{x}_2\cdot\boldsymbol{a}_1 - (\boldsymbol{x}_2\cdot\boldsymbol{a}_1)\,\boldsymbol{a}_1\cdot\boldsymbol{a}_1 = 0.$$

Отсюда следует, что вектор $\boldsymbol{a}_2'$ ортогонален по отношению к вектору $\boldsymbol{a}_1$, а $\boldsymbol{a}_2'/|\boldsymbol{a}_2'| \equiv \boldsymbol{a}_2$ является единичным вектором.

Совокупность векторов

$$\boldsymbol{a}_1, \ \boldsymbol{a}_2, \ \boldsymbol{x}_3, \ \ldots, \ \boldsymbol{x}_m$$

линейно независима, и мы можем определить вектор $\boldsymbol{a}_3'$ формулой

$$\boldsymbol{a}_3' = \boldsymbol{x}_3 - (\boldsymbol{x}_3 \cdot \boldsymbol{a}_1)\,\boldsymbol{a}_1 - (\boldsymbol{x}_3 \cdot \boldsymbol{a}_2)\,\boldsymbol{a}_2;$$

этот вектор ортогонален как по отношению к $\boldsymbol{a}_1$, так и по отношению к $\boldsymbol{a}_2$. Вектор $\boldsymbol{a}_3 \equiv \boldsymbol{a}_3'/|\boldsymbol{a}_3'|$ — единичный вектор, а совокупность

$$\boldsymbol{a}_1, \ \boldsymbol{a}_2, \ \boldsymbol{a}_3, \ \boldsymbol{x}_4, \ \ldots, \ \boldsymbol{x}_m$$

представляет собой линейно независимую совокупность векторов.

Повторное выполнение этой процедуры дает совокупность, состоящую из m линейно независимых единичных векторов

$$\boldsymbol{a}_1, \ \boldsymbol{a}_2, \ \ldots, \ \boldsymbol{a}_m, \tag{5.3}$$

каждый из которых выражается через $\boldsymbol{x}_i$. Совокупность ортогональных единичных векторов (5.3) называется *ортонормальной совокупностью.*

Если $m = n$, совокупность ортонормальных векторов $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, ..., $\boldsymbol{a}_n$ называется *полной*, поскольку *каждый вектор* $\boldsymbol{x}$ в E_n может быть представлен в виде

$$\boldsymbol{x} = \alpha_1\boldsymbol{a}_1 + \alpha_2\boldsymbol{a}_2 + \ldots + \alpha_n\boldsymbol{a}_n. \tag{5.4}$$

По аналогии с трехмерным случаем полная совокупность ортонормальных векторов может быть принята как совокупность базисных векторов, ориентированных по осям n-мерной *ортогональной декартовой* системы отсчета. Конечные точки этих векторов будут, таким образом, иметь следующие координаты:

$$\begin{array}{lllll}
1, & 0, & & \ldots, & 0,\\
0, & 1, & & \ldots, & 0,\\
0, & 0, & 1, & \ldots, & 0,\\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot\\
0, & 0, & 0, & \ldots, & 1.
\end{array}$$

Константы $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ в (5.4) называются *компонентами* вектора $\boldsymbol{x}$. Умножая (5.4) скалярно соответственно на $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, ..., $\boldsymbol{a}_n$ и вспоминая, что[1]) $\boldsymbol{a}_i \cdot \boldsymbol{a}_j = \delta_{ij}$, получим

$$\boldsymbol{a}_1 \cdot \boldsymbol{x} = \alpha_1, \quad \boldsymbol{a}_2 \cdot \boldsymbol{x} = \alpha_2, \ \ldots, \ \boldsymbol{a}_n \cdot \boldsymbol{x} = \alpha_n.$$

---

[1]) Символ δ_{ij} — дельта Кронекера — означает

$$\delta_{ij} = 1, \quad \text{если} \quad i = j, \quad \delta_{ij} = 0, \quad \text{если} \quad i \neq j.$$

Это значит, что вектор $\boldsymbol{x}$ можно представить в форме

$$\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{a}_1 \cdot \boldsymbol{x})\,\boldsymbol{a}_1 + (\boldsymbol{a}_2 \cdot \boldsymbol{x})\,\boldsymbol{a}_2 + \ldots + (\boldsymbol{a}_n \cdot \boldsymbol{x})\,\boldsymbol{a}_n. \tag{5.5}$$

Если ввести обозначение $\boldsymbol{a}_i \cdot \boldsymbol{x} = x_i$, уравнение (5.5) примет вид

$$\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{a}_1 + x_2\boldsymbol{a}_2 + \ldots + x_n\boldsymbol{a}_n.$$

Пользуясь дистрибутивным свойством скалярного умножения, получаем

$$\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x} = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2, \tag{5.6}$$

откуда

$$|\boldsymbol{x}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}.$$

Это формула Пифагора для пространства E_n.

Если $\boldsymbol{y} = y_1\boldsymbol{a}_1 + y_2\boldsymbol{a}_2 + \ldots + y_n\boldsymbol{a}_n$, то

$$\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n.$$

Эта формула имеет ту же самую структуру, что и выражение для скалярного произведения двух векторов в обычном трехмерном пространстве евклидовой геометрии.

Заметим, что в прямоугольной декартовой системе координат вектор $\boldsymbol{x}$ определяется однозначно совокупностью n чисел $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Это свойство принимается некоторыми авторами как определение вектора в E_n.

Для суммы двух векторов $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ с компонентами

$$\boldsymbol{x}\colon\ (x_1, x_2, \ldots, x_n),$$
$$\boldsymbol{y}\colon\ (y_1, y_2, \ldots, y_n)$$

имеем формулу

$$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\colon\ (x_1 + y_1,\ x_2 + y_2,\ \ldots,\ x_n + y_n),$$

а для произведения $\boldsymbol{x}$ на скаляр α

$$\alpha\boldsymbol{x}\colon\ (\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_n).$$

Формула

$$\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n$$

служит для определения метрических свойств векторов в E_n.

Переход от ортонормальной совокупности векторов $\boldsymbol{a}_i$ к любой иной совокупности базисных векторов совершается, если элементы n-кратной совокупности подвергнуты соответствующему линейному преобразованию. По существу подход к идее векторов путем представления последних n-кратными совокупностями чисел приводит изучение векторов к изучению алгебраических свойств линейных преобразований. В этой книге мы предпочитаем акцентировать геометрическое существо, лежащее в основе идеи вектора, а не обезличивать ее в чисто алгебраическом формализме.

§ 6. Комплексные линейные векторные пространства

Соображения § 5 легко можно распространить на поле комплексных чисел.

В комплексном n-мерном линейном пространстве вектор $\boldsymbol{x}$ определяется упорядоченным множеством n комплексных чисел $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, элементы x_i которого являются *компонентами* $\boldsymbol{x}$. Определим сумму $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}$ двух векторов

$$\boldsymbol{x}\colon (x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

$$\boldsymbol{y}\colon (y_1, y_2, \ldots, y_n)$$

правилом

$$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\colon (x_1+y_1, x_2+y_2, \ldots, x_n+y_n),$$

а произведение $\alpha\boldsymbol{x}$ другим правилом

$$\alpha\boldsymbol{x}\colon (\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_n).$$

Скалярное произведение $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}$ определяют обычно формулой

$$\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}=\sum_{i=1}^{n}\bar{x}_i y_i, \tag{6.1}$$

где $\bar{x}_i$ обозначает комплексное число, сопряженное с комплексным числом x_i.

Заметим, что

$$\boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{x}=\sum_{i=1}^{n}\bar{y}_i x_i, \tag{6.2}$$

откуда

$$\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}=\overline{\boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{x}}, \tag{6.3}$$

поскольку сопряженное к сумме есть сумма сопряженных, а сопряженное к произведению равно произведению сопряженных.

Формулой (6.1) обычно пользуются для вычисления скалярного произведения, с тем чтобы произведение

$$\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x}=\sum_{i=1}^{n}\bar{x}_i x_i$$

получилось вещественным числом. Оно принимает вид (5.6), если числа x_i вещественны.

О векторах x, y говорят, что они *ортогональны* если $x \cdot y = 0$. Что касается понятия линейной независимости, то мы сохраняем здесь определение, приведенное в § 3, полагая, что, коэффициенты α_i принадлежат теперь полю комплексных чисел.

Задачи

1. Определим вектор x как набор n вещественных или комплексных чисел $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и воспользуемся для определения суммы и произведения формулами

$$x + y: (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n), \qquad kx: (kx_1, \ldots, kx_n),$$

$$x \cdot y = \sum_{i=1}^{n} \bar{x}_i y_i.$$

Показать, что

$$(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z, \qquad x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z,$$

$$(kx) \cdot y = k (x \cdot y), \qquad x \cdot (ky) = k (x \cdot y).$$

2. Доказать, что если $a^{(1)}, a^{(2)}, \ldots, a^{(n)}$ — совокупность n линейно независимых векторов в комплексном n-мерном векторном пространстве, то единственным вектором x, ортогональным к каждому из векторов $a^{(i)}$, будет нулевой вектор.

3. Доказать, что совокупность взаимно ортогональных ненулевых векторов всегда линейно независима.

4. Допустим, что совокупность векторов $a^{(i)}$ в E_n: $\left(a_1^{(i)}, a_2^{(i)}, \ldots, a_n^{(i)}\right)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, линейно зависима, и предположим, что r из них $a^{(1)}, a^{(2)}, \ldots, a^{(r)}$, $r < n$, линейно независимы. Показать, что любой вектор x, ортогональный к этой совокупности r линейно независимых векторов, ортогонален также и к остальным $n - r$ векторам в данной совокупности.

§ 7. Соглашение о суммировании [1]). Детерминанты

Из изложенного в предыдущих параграфах ясно, что линейные формы и ассоциируемые с ними матрицы играют существенную роль в изучении векторов в n-мерных пространствах. Поскольку эти формы будут часто встречаться и в остающейся части этой главы, представляется желательным ввести для них сокращенные компактные обозначения и переписать заново с их помощью некоторые известные результаты из теории детерминантов.

Теперь мы перейдем к нижеследующему общепринятому соглашению относительно обозначения суммирования. Если в некотором выражении определенный индекс повторяется дважды, то мы будем подразумевать, что это выражение суммируется по этому индексу для всех допускаемых значений этого индекса. Так, например, линейная форма $\sum_{i=1}^{4} a_i x_i$ содержит

[1]) Соглашение о суммировании, называемое «Правилом Эйнштейна», впервые было применено им в работе «Основы общей теории относительности» (Annalen der Physik, **49** (1916)). (*Прим. ред.*).

индекс i, повторяющийся в ней дважды; мы будем опускать символ суммирования $\sum$ и писать $a_i x_i$, понимая это выражение в развернутом виде как сумму $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4$. Конечно, диапазон допускаемых значений индекса, в данном случае значений от 1 до 4, должен быть указан. Если символ i пробегает диапазон значений 1—3, а j пробегает диапазон 1—4, то выражение

$$a_{ij}x_j \qquad (i=1,\ 2,\ 3), \quad (j=1,\ 2,\ 3,\ 4) \tag{7.1}$$

представляет три линейных формы:

$$\left.\begin{aligned} &a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4, \\ &a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4, \\ &a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4. \end{aligned}\right\} \tag{7.2}$$

В выражении (7.1) индекс i является *свободным обозначающим* индексом. Он обозначает одну из форм (7.2), зависящую от избранного значения i. Индекс же j, поскольку он повторяется дважды, является индексом *суммирования*. Индекс суммирования можно менять произвольно. Так, например, (7.1) можно написать в виде $a_{ik}x_k$, если k имеет тот же диапазон значений, что и j. Индекс суммирования аналогичен переменной интегрирования в определенном интеграле, также допускающем произвольные обозначения.

В дальнейшем, если по этому поводу не сделано специальной оговорки, мы предполагаем, что индекс суммирования и свободные индексы пробегают значения от 1 до n. Выражение $a_i x_i$ представляет собой линейную форму

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n.$$

Хотя в последнем члене этого выражения буква n повторяется дважды, он не представляет суммы, так как n здесь имеет фиксированное значение. Для того чтобы избежать неясности или в тех случаях, когда повторение индекса не должно обозначать суммирования, мы можем заключить индекс в скобки. Например, только что приведенную линейную форму мы можем записать несколько иначе:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_{(n)}x_{(n)}.$$

Квадратичная форма $\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j$ запишется сокращенно в виде $a_{ij}x_ix_j$. Выражение $a_{ij}x_iy_j$ представляет собой билинейную форму, содержащую n^2 членов, выражение же $a_{ij}a_{jk}$ представляет собой n^2 сумм типа

$$a_{i1}a_{1k} + a_{i2}a_{2k} + \ldots + a_{in}a_{nk},$$

поскольку каждый из *свободных* индексов i и k может принять значения от 1 до n. Мы не будем усложнять выражение введением индексов в скобки, если из контекста ясно (как в вышеприведенном выражении), что эти индексы имеют здесь фиксированные значения. Если, однако, мы хотим рассмотреть определенный член в этой сумме, то мы должны записать его выражением $a_{i(j)}a_{(j)k}$.

Часто представляется более удобным обозначить различные выражения индексами, помещенными не снизу буквы, а сверху ее. Мы можем, например, записать последовательность членов $x^1, x^2, \ldots, x^n$, где верхние индексы следует понимать не в качестве показателей степеней, в которые возводится член, а в качестве свободных индексов. Типовым членом такой последовательности является x^i $(i=1, 2, \ldots, n)$. Линейная форма членов x^i с коэффициентами a_i передается выражением a_ix^i. Билинейная форма с коэффициентами a^{ij} в переменных x_i и y_i примет вид $a^{ij}x_iy_i$.

Детерминант

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

состоящий из элементов a_{ij}, записывается, как обычно, в компактном виде $|a_{ij}|$. Если элементы детерминанта обозначены через a^i_j, где верхний индекс i указывает номер строки, а нижний j — номер столбца, занимаемого этим элементом, то детерминант записывается символом $|a^i_j|$. Таким образом,

$$|a^i_j| = \begin{vmatrix} a^1_1 & a^1_2 & \ldots & a^1_n \\ a^2_1 & a^2_2 & \ldots & a^2_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a^n_1 & a^n_2 & \ldots & a^n_n \end{vmatrix}.$$

Умножение двух детерминантов $|a^i_j|$ и $|b^i_j|$ производится по известному правилу:

$$|a^i_j| \cdot |b^i_j| = |c^i_j|,$$

где $c^i_j = a^i_k b^k_j$. Если мы имеем дело с детерминантами $|a_{ij}|$ и $|b_{ij}|$, то элемент c_{ij}, занимающий место в i-й строке и в j-м столбце произведения элементов $|a_{ij}|$ и $|b_{ij}|$, будет представлен как $c_{ij} = a_{ik}b_{kj}$.

Обозначим алгебраическое дополнение элемента a^i_j в $|a^i_j|$ через A^j_i. Если дельту Кронекера представить символом δ^i_j, где

$$\delta^i_j = 1, \quad \text{если} \quad i = j,$$
$$\delta^i_j = 0, \quad \text{если} \quad i \neq j,$$

то для разложения детерминанта $|a^i_j|$ на алгебраические дополнения мы получим следующие формулы:

$$a^i_j A^j_k = a\delta^i_k, \tag{7.3}$$
$$a^i_j A^k_i = a\delta^k_j, \tag{7.4}$$

где $a = |a^i_j|$. В эти формулы входят знакомые простые разложения $|a^i_j|$ Лапласа. Первое из них представляет разложение по элементам i-й строки; второе — по элементам j-го столбца детерминанта $|a^i_j|$.

Если элементы детерминанта a обозначить через a_{ij}, то алгебраическое дополнение для a_{ij} будет A_{ij}. Простые разложения Лапласа, отвечающие формулам (7.3) и (7.4), принимают вид

$$a_{(i)\,j}A_{(i)\,j} = a \quad \text{и} \quad a_{i\,(k)}A_{i\,(k)} = a.$$

Здесь мы можем вывести правило Крамера для решения системы n линейных уравнений

$$a^i_j x^j = b^i \qquad (i, j = 1, \ldots, n) \tag{7.5}$$

с n неизвестными x^i, где $|a^i_j| \neq 0$, следующим образом: умножим обе стороны уравнений (7.5) на A^k_i и суммируем их по i. Получаем

$$a^i_j A^k_i x^j = b^i A^k_i.$$

В силу (7.4) это приводится к виду

$$a\delta^k_j x^j = b^i A^k_i,$$

или

$$ax^k = b^i A^k_i,$$

откуда

$$x^k = \frac{b^i A^k_i}{a}. \tag{7.6}$$

Часто алгебраическое дополнение элемента a_{ij} в $|a_{ij}|$ обозначается через A^{ij}, и тогда разложения Лапласа (7.3) и (7.4) принимают вид

$$a_{(i)\,j}A^{(i)\,j} = a,$$
$$a_{j\,(i)}A^{j\,(i)} = a.$$

Чтобы свыкнуться с этими обозначениями, читателю следует посоветовать вывести правило Крамера для системы линейных уравнений, сформулированных в виде $a_{ij}x^j = b_i$. Он сумеет при этом доказать также, что при $a^i_j b^j_k = \delta^i_k$ имеет место равенство $|a^i_j| = 1/|b^i_j|$.

К теме детерминантов мы вернемся еще в § 41, где иной способ обозначения позволит нам избегнуть указаний на номера строк и столбцов детерминанта и записывать их элементами без ссылок на алгебраические дополнения.

Задачи

1. Выписать нижеследующие выражения в полной развернутой форме: (а) $\delta^i_j a^j$. (б) $\delta_{ij}x^i x^j$. (в) $a_{ij}b_{jk} = \delta_{ik}$. (г) $a_{ijk}x^k$. (д) $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}dx_j$. (е) δ^i_i. (ж) $a^i = \frac{\partial x^i}{\partial y^j}b^j$. (з) $a_{ij\,(k)}x^i y^{(k)}$. (и) $g_{ij} = \frac{\partial y^k}{\partial x^i}\frac{\partial y^k}{\partial x^j}$. (к) $a_{i\,(j)}x^{(j)}$. (л) $\delta_{ij}\delta^{jk}$.
Символы δ^i_j, δ_{ij} и δ^{ij} — все обозначают дельты Кронекера.
2. Доказать, что (7.6) представляет собой решение (7.5).

§ 8. Линейные преобразования и матрицы

Совокупность n соотношений, имеющих вид

$$x'_i = a_{ij}x_j \qquad (i, j = 1, \ldots, n), \tag{8.1}$$

где a_{ij} — постоянные величины, называется *линейным однородным преобразованием* множества переменных x_i в множество x'_i. Будем предполагать, что преобразование (8.1) не особенное, так что совокупность n линейных уравнений (8.1) может быть решена для x_i в функциях от x'_i. Это предполагает, что детерминант $|a_{ij}|$ коэффициентов при x_j отличен от нуля.

Решение (8.1) для значений x дает

$$x_i = \frac{A_{ji}}{a}x'_j, \tag{8.2}$$

где A_{ij} — алгебраическое дополнение элемента a_{ij} в $|a_{ij}| \equiv a$.

Совокупность уравнений (8.1) может быть интерпретирована двумя существенно различными способами.

а) Величины x_i можно рассматривать как компоненты вектора $\boldsymbol{x}$: $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, числа же x'_i — как компоненты другого вектора $\boldsymbol{x}'$: $(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n)$, где как $\boldsymbol{x}$, так и $\boldsymbol{x}'$ отнесены к координатной системе с системой базисных векторов $\boldsymbol{a}_i$: уравнения (8.1) при этом преобразуют вектор $\boldsymbol{x}$ в другой вектор $\boldsymbol{x}'$.

б) Две совокупности чисел $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n)$ могут рассматриваться как компоненты одного-единственного вектора $\boldsymbol{x}$, если $\boldsymbol{x}$ отнесен к двум различным системам декартовых координат, определяемых базисными векторами $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots$ $\ldots, \boldsymbol{a}_n$ и $\boldsymbol{a}'_1, \boldsymbol{a}'_2, \ldots, \boldsymbol{a}'_n$; в этом случае уравнения (8.1) дают преобразование координатных осей.

Прежде чем переходить к специальному обсуждению этих двух интерпретаций совокупности уравнений (8.1), мы должны остановиться на операциях с матрицами.

Размещенная в прямоугольной таблице система mn чисел в m строках и n столбцах называется $m \times n$-матрицей. Заключим матрицы, составленные из элементов a_{ij} (или a^i_j), в квадратные скобки

$$(a_{ij}) \equiv \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad \text{или} \quad (a^i_j) \equiv \begin{bmatrix} a^1_1 & a^1_2 & \ldots & a^1_n \\ a^2_1 & a^2_2 & \ldots & a^2_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a^m_1 & a^m_2 & \ldots & a^m_n \end{bmatrix}$$

и обозначим их сокращенно символом A. Мы будем говорить, что матрица $A = (a_{ij})$ равна матрице $B = (b_{ij})$, в том и только в том случае, если $a_{ij} = b_{ij}$ для каждого i и j. Иначе говоря, если $A = B$, то элементы в соответствующих строках и столбцах матриц должны быть одинаковыми.

Под суммой $A + B$ двух матриц $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$ одного типа, т. е. содержащих одинаковое число строк и столбцов, мы разумеем матрицу

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij}).$$

Имея $m \times n$-матрицу A и $n \times p$-матрицу B, мы можем определить произведение AB матриц A и B, записываемое формулой

$$AB = (a_{ij} b_{jk}). \tag{8.3}$$

Таким образом, произведением AB является $m \times p$-матрица: мы можем умножить две матрицы лишь в том случае, если число столбцов в первом множителе равно числу строк во втором.

Чаще всего мы будем иметь дело с квадратными матрицами, т. е. матрицами, содержащими равное число строк и столбцов.

Матрица, все элементы которой равны нулю, называется *нулевой матрицей*. Она обозначается символом 0.

Отметим две особенности матричного умножения. Из определения (8.3) следует, что если A и B — две $n \times n$-матрицы, то AB не обязательно получается равным BA. Например, если

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad B=\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

то

$$AB=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \text{ между тем как } BA=\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Таким образом, произведение матриц, вообще, не коммутативно. Если, однако, мы имеем дело с двумя матрицами порядка n, содержащими нулевые элементы повсюду, за исключением, может быть, диагонали, в таком случае они коммутативны и следуют простому закону умножеиия

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mu_2 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mu_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1\mu_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2\mu_2 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n\mu_n \end{bmatrix}.$$

Такого рода матрицы называются *диагональными*. Диагональные матрицы в дальнейшем будут играть особенно важную роль.

Диагональная матрица частного типа

$$I=\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

называется *единичной* матрицей. Заметим, что если A — какая-либо матрица, то

$$AI = IA = A.$$

Обратим также внимание на то обстоятельство, что произведение двух матриц может обратиться в нуль, хотя при этом ни один из множителей-матриц и не равен иулю.

Так, например, если

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{а} \quad B=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{то} \quad AB=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Однако *детерминант* $|AB|$ произведения двух квадратных матриц равен произведению детерминантов $|A|$ и $|B|$ матриц A и

B. Это следует непосредственно из того, что закон образования элемента в i-й строке и в k-м столбце произведения двух детерминантов совпадает с соответствующим правилом для произведения двух матриц. Мы назовем $n \times n$-матрицу, детерминант который обращается в нуль, *особенной* матрицей.

Наконец, определим умножение матрицы $A = (a_{ij})$ на число k, записывая это произведение как kA, матрицей, каждый элемент которой умножается на k. Таким образом, $kA = (ka_{ij})$. В качестве упражнения читателю предлагается подтвердить правильность теорем, вытекающих непосредственно из вышеприведенных определений:

(I) $A + B = B + A$.

(II) $(A + B) + C = A + (B + C)$.

(III) $(A + B)C = AC + BC$.

(IV) $C(A + B) = CA + CB$.

Только что введенное обозначение позволяет написать нашу систему уравнений (8.1) в виде одиого векторного уравнения

$$\boldsymbol{x}' = A\boldsymbol{x}, \tag{8.4}$$

где $A = (a_{ij})$ и где мы рассматриваем $\boldsymbol{x}$ либо как матрицу в один столбец

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \text{либо как квадратную матрицу} \quad \begin{bmatrix} x_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ x_2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_n & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}.$$

Обратиое преобразование (8.2) может быть записано в виде

$$\boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{x}', \tag{8.5}$$

где

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{A_{11}}{|A|} & \frac{A_{21}}{|A|} & \dots & \frac{A_{n1}}{|A|} \\ \frac{A_{12}}{|A|} & \frac{A_{22}}{|A|} & \dots & \frac{A_{n2}}{|A|} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{A_{1n}}{|A|} & \frac{A_{2n}}{|A|} & \dots & \frac{A_{nn}}{|A|} \end{bmatrix}, \tag{8.6}$$

а A_{ij} — алгебраические дополнения элементов a_{ij} в детерминанте $|A|$.

Матрица A^{-1} называется *обратной* по отношению к матрице A и может быть определена для любой неособенной матрицы

A. Из определения (8.6) следует, что матрицы A и A^{-1} связаны формулами

$$AA^{-1} = I, \quad A^{-1}A = I,$$

где I — единичная матрица. Так как $AA^{-1} = (a_{ik}A_{jk}/|A|)$, то $a_{ik}A_{jk} = \delta_{ij}|A|$. Единичная матрица I соответствует тождественному преобразованию $x'_i = x_i$; это преобразование, будучи записано в матричной форме (8.4), принимает вид $\boldsymbol{x}' = I\boldsymbol{x}$ или

$$\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{x}.$$

Мы называем матрицу

$$A' = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix},$$

полученную путем перестановки строк и столбцов в матрице

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix},$$

транспозицией A.

Используя определение транспозиции и законы сложения и умножения матриц, легко показать, что:

(V) $(A+B)' = A' + B'$.

(VI) $(kA)' = kA'$.

(VII) $(AB)' = B'A'$. (Обратите внимание на порядок.)

Если A — неособенная, то *матричные уравнения*

$$AX = I \text{ и } XA = I$$

имеют единственные решения $X = A^{-1}$, что может быть немедленно установлено умножением их на A^{-1} с обеих сторон, учитывая, что

$$A^{-1}A = AA^{-1} = I.$$

Если мы примем $A^{-1}A = AA^{-1}$ и образуем транспозицию, то получим

$$A'(A^{-1})' = (A^{-1})'A'.$$

Умножая на $(A')^{-1}$ слева, получим

$$(A')^{-1}A'(A^{-1})' = (A')^{-1}(A^{-1})'A',$$

$$(A^{-1})' = (A')^{-1}(AA^{-1})' = (A')^{-1}.$$

Таким образом,

$$(A^{-1})' = (A')^{-1}.$$

Легко также показать, что

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}. \text{ (Обратите внимание на порядок.)}$$

Если мы имеем два следующих одно за другим линейных преобразования

$$x'_i = a_{ij}x_j \quad \text{и} \quad x''_i = b_{ij}x'_j \qquad (i, j = 1, \ldots, n),$$

то прямое преобразование от переменных x_i к переменным x''_i примет вид

$$x''_i = b_{ij}a_{jk}x_k \qquad (i, j, k = 1, \ldots, n);$$

это преобразование называется *произведением преобразований.* В матричных обозначениях эти преобразования записываются в виде

$$\boldsymbol{x}' = A\boldsymbol{x} \quad \text{и} \quad \boldsymbol{x}'' = B\boldsymbol{x}',$$

так что

$$\boldsymbol{x}'' = BA\boldsymbol{x}.$$

Поскольку произведение BA вообще не равно AB, мы убеждаемся, что последовательность, в которой производятся преобразования, не безразлична.

Следует заметить, что матрица A в уравнении $\boldsymbol{x}' = A\boldsymbol{x}$ может быть использована как оператор, преобразующий вектор $\boldsymbol{x}_{ij}$ в другой вектор $\boldsymbol{x}'$. В силу свойств

$$A(k\boldsymbol{x}) = kA\boldsymbol{x}$$

и

$$A(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = A\boldsymbol{x} + A\boldsymbol{y},$$

где k — некоторый скаляр, A часто называют *линейным векторным оператором* или *линейной векторной функцией.* Ее можно рассматривать как аппарат для получения нового вектора из заданного вектора. Мы осветим эти операции с бо́льшими подробностями, рассмотрев ряд примеров применения матриц в задачах, знакомых нам из аналитической геометрии и элементарного векторного анализа.

§ 9. Линейные преобразования в евклидовом трехмерном пространстве

Отнесем наше евклидово трехмерное пространство (E_3) к системе координат с базисными векторами $\boldsymbol{a}^{(1)}$, $\boldsymbol{a}^{(2)}$, $\boldsymbol{a}^{(3)}$, линейно независимыми, но не обязательно ортогональными.

В таком случае произвольный вектор $\boldsymbol{x}$ можно будет представить в форме

$$\boldsymbol{x} = x_j \boldsymbol{a}^{(j)} \qquad (j = 1, 2, 3), \tag{9.1}$$

где x_j — соответствующие вещественные числа. Если ввести *вещественное* линейное преобразование

$$x'_i = a_{ij} x_j, \quad |a_{ij}| \neq 0 \qquad (i, j = 1, 2, 3) \tag{9.2}$$

или

$$\boldsymbol{x}' = A\boldsymbol{x}, \tag{9.3}$$

то мы сможем интерпретировать получающийся вектор $\boldsymbol{x}'$ как деформированный вектор, полученный *деформацией пространства*, характеризуемой оператором A. Вообще длина вектора $\boldsymbol{x}'$ будет отличаться от длины вектора $\boldsymbol{x}$, а его ориентация относительно нашей фиксированной системы отсчета будет отличаться от ориентации вектора $\boldsymbol{x}$.

Имеется, очевидно, бесконечное множество координатных систем, которые мы можем построить в нашем пространстве, и в каждой такой координатной системе вектор $\boldsymbol{x}$ будет описываться всегда лишь совокупностью трех чисел. Поставим вопрос: какую форму имеет преобразование, сообщающее пространству *ту же самую* деформацию, что и та, которая характеризуется матрицей A, когда вектор $\boldsymbol{x}$ отнесен к новой системе координат, в которой базисные векторы $\alpha^{(1)}$, $\alpha^{(2)}$, $\alpha^{(3)}$ выражаются через базисные векторы $\boldsymbol{a}^{(1)}$, $\boldsymbol{a}^{(2)}$, $\boldsymbol{a}^{(3)}$ формулами

$$\alpha^{(i)} = b_{ij} \boldsymbol{a}^{(j)}? \tag{9.4}$$

Допустим, что матрица $(b_{ij}) \equiv B$ невырожденная, компоненты же $\boldsymbol{x}$ в новой системе обозначим через ξ_1, ξ_2, ξ_3, так что

$$\boldsymbol{x} = \xi_i \alpha^{(i)}. \tag{9.5}$$

Если мы внесем в (9.5) выражения (9.4) для базисных векторов $\alpha^{(i)}$ в зависимости от $\boldsymbol{a}^{(i)}$, то получим

$$\boldsymbol{x} = \xi_i b_{ij} \boldsymbol{a}^{(j)}. \tag{9.6}$$

Сравнение этого уравнения с (9.1) позволяет установить связь между компонентами ξ_i и x_i, а именно

$$x_j = b_{ij} \xi_i. \tag{9.7}$$

Заметим, что матрица B в преобразовании (9.4) базисных векторов $\boldsymbol{a}^{(j)}$ отличается от матрицы B' в преобразовании (9.7) компонентов вектора $\boldsymbol{x}$ в том отношении, что строки и столбцы в этих матрицах меняются местами. Иначе говоря, матрица B' представляет здесь собой транспозицию матрицы B. Запишем (9.7) в виде

$$\boldsymbol{x} = B' \boldsymbol{\xi}. \tag{9.8}$$

Решение уравнения (9.8) для ξ дается выражением

$$\xi = (B')^{-1} x. \tag{9.9}$$

Для упрощения записи обозначим $(B')^{-1}$ через C, так что (9.9) преобразуется в (9.10):

$$\xi = Cx, \tag{9.10}$$

где

$$C \equiv (B')^{-1}. \tag{9.11}$$

Формула (9.10) позволяет нам вычислить компоненты вектора x, если отнести его к новой системе базисных векторов $\alpha^{(i)}$, определяемых формулами (9.4). Тогда компоненты ξ'_1, ξ'_2, ξ'_3 вектора x', отнесенного к системе координат с базисными векторами $\alpha^{(i)}$, будут представлены формулой

$$\xi' = Cx', \tag{9.12}$$

и вопрос о выражении (в новой координатной системе) деформации пространства, характеризуемой преобразованием (9.3), приводится к отысканию связи между компонентами ξ_1, ξ_2, ξ_3 и ξ'_1, ξ'_2, ξ'_3. Подстановка из (9.3) в (9.12) дает

$$\xi' = CAx,$$

и, так как в силу (9.10)

$$x = C^{-1}\xi,$$

мы получаем искомое отношение

$$\xi' = CAC^{-1}\xi. \tag{9.13}$$

Преобразование, определяемое матрицей

$$S = CAC^{-1},$$

называется *подобным* преобразованию, отвечающему матрице A, поскольку формулы (9.13) и (9.3) характеризуют *одну и ту же* деформацию пространства, описываемую в двух различных координатных системах.

Вспомнив определение (9.11), мы можем записать (9.13) в виде

$$\xi' = (B')^{-1} AB'\xi, \tag{9.14}$$

из которого с непосредственной очевидностью явствует значение матриц A и B, характеризующих соответственно деформирование пространства и преобразование базисных векторов. Заметим, что детерминанты всех подобных преобразований равны. Важный особый случай преобразования (9.2), соответствующий повороту вектора $\boldsymbol{x}$ в новое положение, обсуждается в следующем параграфе.

§ 10. Ортогональиое преобразование в E_3

Предположим, что базисные векторы $\boldsymbol{a}^{(1)}$, $\boldsymbol{a}^{(2)}$, $\boldsymbol{a}^{(3)}$ в § 9 являются ортогональными единичными векторами, так что числа x_j в (9.1) являются физическими компонентами $\boldsymbol{x}$. При этом квадрат длины вектора $\boldsymbol{x}$ дается формулой

$$|\boldsymbol{x}|^2 = x_i x_i \qquad (i = 1, 2, 3).$$

Возникает вопрос, какие ограничения следует наложить иа матрицу A в (9.3), для того чтобы длина $\boldsymbol{x}$ не изменялась преобразованием (9.2). Такое ограиичение требует, чтобы

$$x'_i x'_i = x_i x_i. \tag{10.1}$$

Подставляя в (10.1) выражение (9.2), находим

$$(a_{ij} x_j)(a_{ik} x_k) = x_i x_i \qquad (i, j, k = 1, 2, 3),$$

или

$$a_{ij} a_{ik} x_j x_k = \delta_{jk} x_j x_k, \tag{10.2}$$

поскольку

$$\delta_{jk} x_j x_k = x_k x_k = x_i x_i.$$

Приравнивая коэффициеиты сходных произведений в (10.2), получаем шесть уравнений

$$\begin{aligned}
a_{11}^2 + a_{21}^2 + a_{31}^2 &= 1,\\
a_{12}^2 + a_{22}^2 + a_{32}^2 &= 1,\\
a_{13}^2 + a_{23}^2 + a_{33}^2 &= 1,\\
a_{12}a_{13} + a_{22}a_{23} + a_{32}a_{33} &= 0,\\
a_{13}a_{11} + a_{23}a_{21} + a_{33}a_{31} &= 0,\\
a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} + a_{31}a_{32} &= 0,
\end{aligned}$$

или

$$a_{ij} a_{ik} = \delta_{jk}. \tag{10.3}$$

Эти уравнения представляют собой выводы из гипотезы, согласно которой длина $\boldsymbol{x}$ остается инвариантом. Детерминант матрицы в (10.3) имеет значение

$$|a_{ij} a_{ik}| = 1. \tag{10.4}$$

Поскольку значение детерминанта $|a_{ij}|$ остается неизменным при перестановке строк и столбцов, то нз правила умножения детерминантов (§ 7) находим, что

$$|a_{ij} a_{ik}| = |a_{ij}| \cdot |a_{ij}| = |A|^2.$$

Таким образом, (10.4) приводит к тому результату, что квадрат детерминанта $|a_{ij}|$ в (9.2) принимает значение 1, если длина вектора остается без изменения при преобразовании. Отсюда заключаем, что $|A| = \pm 1$. Случай, когда $|A| = +1$, соответствует преобразованию вращения пространства относительно неподвижных осей. Условие $|A| = -1$ передает преобразование отражения (например, $x'_1 = -x_1$, $x'_2 = -x_2$, $x'_3 = -x_3$) или отражения с последующим вращением.

Линейное преобразование

$$x'_i = a_{ij}x_j, \tag{10.5}$$

где $a_{ij}a_{ik} = \delta_{jk}$, называется *ортогональным* преобразованием. Оно называется преобразованием *вращения*, когда $|a_{ij}| = +1$. Если через A' обозначить транспозицию A в (10.5), то мы сможем записать условия ортогональности (10.3) в виде

$$A'A = I.$$

Умножая это уравнение справа на A^{-1}, получаем

$$A' = A^{-1}, \tag{10.6}$$

так что *в ортогональном преобразовании обратная матрица A^{-1} равна транспозиции A' матрицы A, когда базисные векторы ортонормальны.* Отсюда следует, что если уравнения (10.5) записать в форме

$$\boldsymbol{x}' = A\boldsymbol{x},$$

то

$$\boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{x}',$$

а в силу (10.6)

$$\boldsymbol{x} = A'\boldsymbol{x}'$$

или

$$x_i = a_{ji}x'_j. \tag{10.7}$$

§ 11. Линейные преобразования в n-мерных евклидовых пространствах

Наше исследование линейных преобразований в евклидовом 3-мерном пространстве можно распространить непосредственно на n-мерные многообразия E_n, отнесенные к координатной системе, обладающей тем свойством, что длина вектора $\boldsymbol{x}$ определяется из формулы (5.6).

Введем n ортонормальных векторов

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{a}^{(1)}\colon (1, 0, 0, \ldots, 0),\\
&\boldsymbol{a}^{(2)}\colon (0, 1, 0, \ldots, 0),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\boldsymbol{a}^{(n)}\colon (0, 0, 0, \ldots, 1)
\end{aligned}$$

и представим любой вектор $\boldsymbol{x}$: $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ в виде [см. (9.1)]

$$\boldsymbol{x} = x_j \boldsymbol{a}^{(j)} \quad (j = 1, \ldots, n). \tag{11.1}$$

Линейное преобразование компонентов, соответствующее уравнению (9.2), принимает вид

$$x'_i = a_{ij} x_j \quad (i, j = 1, \ldots, n). \tag{11.2}$$

В матричных обозначениях его можно записать так:

$$\boldsymbol{x}' = A\boldsymbol{x}, \tag{11.3}$$

где $A = (a_{ij})$.

Положим, что $|A| \neq 0$ и разрешим (11.3) относительно $\boldsymbol{x}$:

$$\boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{x}',$$

где

$$A^{-1} = \frac{(A_{ji})}{|A|}.$$

Здесь A_{ij} обозначают алгебраические дополнения элементов a_{ij} в $|A|$.

Точно так же, как это было сделано в трехмерном случае, мы можем показать, что произведение преобразований $\boldsymbol{x}' = A\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{x}'' = B\boldsymbol{x}'$ эквивалентно преобразованию $\boldsymbol{x}'' = BA\boldsymbol{x}$. Мы вправе и здесь также пользоваться наглядным языком геометрии, понимая систему уравнений (11.3) как описание деформации пространства E_n и понимать преобразование вида

$$\boldsymbol{x}' = CAC^{-1}\boldsymbol{x} \tag{11.4}$$

как описание того же самого деформирования пространства, которое описывалось матрицей A в (11.3). Матрицы A и CAC^{-1} также называются *подобными*.

По аналогии с трехмерным случаем вещественное линейное преобразование, сохраняющее длину любого вещественного вектора $\boldsymbol{x}$: $(x_1, \ldots, x_n)$ инвариантной, называется *ортогональным*. Из выкладок § 10 явствует, что коэффициенты a_{ij} в ортогональном преобразовании (11.2) удовлетворяют соотношениям

$$a_{ij} a_{ik} = \delta_{jk}, \tag{11.5}$$

а матрица $A = (a_{ij})$ ортогонального преобразования связана с обратной матрицей формулой $A' = A^{-1}$. Условие (11.5) является одновременно и необходимым и достаточным для того, чтобы преобразование было ортогональным. Поскольку транспонированная матрица ортогонального преобразования равна обратной матрице, мы заключаем, что $a_{ji} a_{ki} = \delta_{jk}$.

Всякая матрица, удовлетворяющая *условиям ортогональности* (11.5), называется *ортогональной*. Квадрат детерминанта такой матрицы равен единице.

Как и в трехмерном случае, вводим матрицу $B = (b_{ij})$, определяющую преобразование базисных векторов $a^{(i)}$ в новую совокупность базисных векторов $\alpha^{(i)}$ по формуле

$$\alpha^{(i)} = b_{ij}a^{(j)} \qquad (i, j = 1, \ldots, n); \tag{11.6}$$

тогда $C = (B')^{-1}$.

Если векторы $a^{(i)}$ ортонормальны, а матрица B ортогональна, то новый комплект векторов $\alpha^{(i)}$ будет, очевидно, ортонормальным. В тех случаях, когда $|b_{ij}| = 1$, мы будем говорить, что формула (11.6) представляет вращение базисных векторов в E_n.

Поставим теперь вопрос: можно ли найти такую матрицу C, для которой матрица CAC^{-1} была бы диагональной:

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{bmatrix}?$$

Это значит, что в соответствующей системе координат деформирование пространства, характеризуемого условиями (11.2), принимает вид

$$\xi_1' = \lambda_1\xi_1, \quad \xi_2' = \lambda_2\xi_2, \quad \ldots, \quad \xi_n' = \lambda_n\xi_n, \tag{11.7}$$

где ξ_i' — компоненты x', а ξ_i — компоненты x в новой координатной системе.

На языке преобразований в E_3 уравнения (11.7) констатируют, что для надлежащим образом выбранной координатной системы линейное деформирование пространства эквивалентно простым удлинениям или сокращениям координатных осей. Ясно, что возможность такой редукции зависит от природы коэффициентов a_{ij} в (11.2).

Детальное обсуждение задачи приведения матриц к различным каноническим формам здесь было бы слишком громоздким. В нижеследующих параграфах мы остановимся лишь на тех случаях, которые чаще всего встречаются в применениях, отсылая читателя за исчерпывающей трактовкой к специальным трудам по высшей алгебре.

§ 12. Приведение матриц к диагональной форме

Вернемся теперь к задаче, поставленной в § 11 и касающейся возможности отыскания *неособенной* матрицы C такой, что произвольная матрица A может быть приведена к диагональной форме Λ посредством преобразования подобия CAC^{-1}.

С точки зрения линейного преобразования пространства эта задача эквивалентна определению базисной системы $\alpha^{(i)}$ $(i = 1, \ldots, n)$, в которой преобразование

$$x_i' = a_{ij} x_j$$

приобретает вид [см. (11.7)]

$$\xi_1' = \lambda_1 \xi_1, \quad \xi_2' = \lambda_2 \xi_2, \ \ldots, \ \xi_n' = \lambda_n \xi_n.$$

Записываем $C^{-1} \equiv S$ и ищем решение матричного уравнения

$$S^{-1} A S = \Lambda, \tag{12.1}$$

или

$$AS = S\Lambda, \tag{12.2}$$

где $A = (a_{ij})$ и

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

Матричное уравнение (12.2) эквивалентно системе линейных уравнений

$$a_{ij} s_{jk} = s_{ik} \lambda_k \quad \text{(не суммируется по } k\text{)} \quad (i, j, k = 1, 2, \ldots, n), \tag{12.3}$$

где

$$S = \begin{bmatrix} s_{11} & \ldots & s_{1k} & \ldots & s_{1n} \\ s_{21} & \ldots & s_{2k} & \ldots & s_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ s_{n1} & \ldots & s_{nk} & \ldots & s_{nn} \end{bmatrix}.$$

Если в (12.3) положить $i = 1, 2, \ldots, n$ и фиксировать k, то мы получим систему n уравнений, содержащих элементы $(s_{1k}, s_{2k}, \ldots, s_{nk})$, входящие в столбец k матрицы S. Элементы $(s_{1k}, s_{2k}, \ldots, s_{nk})$ можно рассматривать как компоненты вектора $\mathbf{s}^{(k)}$, так что определение матрицы S приводится к отысканию совокупности n векторов $\mathbf{s}^{(k)}$ $(k = 1, \ldots, n)$, компоненты которых удовлетворяют уравнениям (12.3). В соответствии с этим записываем уравнение (12.3) в таком виде:

$$A\mathbf{s}^{(k)} = \mathbf{s}^{(k)} \lambda_k \quad \text{(не суммируется по } k\text{)} \tag{12.4}$$

и замечаем, что (12.3) эквивалентно уравнению

$$(a_{ij} - \delta_{ij} \lambda_k) s_{jk} = 0 \quad \text{(по } k \text{ не суммируется).} \tag{12.5}$$

Если эта система линейных однородных уравнений должна иметь нетривиальное решение для s_{jk}, то λ_k в таком случае должно быть корнем уравнения

$$|a_{ij}-\delta_{ij}\lambda|=0$$

или записанного в развернутой форме

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix}=0. \tag{12.6}$$

Это алгебраическое относительно λ уравнение n-й степени имеет n корней, которые называются *характеристическими значениями*[1]) матрицы A. Если эти n корней различны, то легко показать, что система уравнений (12.4) дает совокупность n *линейно независимых* векторов $s^{(k)}$ и что, следовательно, *неособенная* матрица S, как это требовалось условием (12.1), существует. Если корни не различны, определить искомую матрицу S *невозможно.*

Рассмотрим случай, в котором корни различны, и обозначим их через $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$. Подставив λ_1 вместо λ_k в (12.5), мы получим систему n однородных уравнений. Она даст нам *нетривиальное* решение $s_{11}, s_{21}, \dots, s_{n1}$. Положив в (12.5) $\lambda_k=\lambda_2$, приходим к системе, дающей решение $s_{12}, s_{22}, \dots, s_{n2}$. Таким путем получаем второй столбец S. Поступая аналогично, определяем остальные столбцы, а отсюда и всю матрицу, удовлетворяющую уравнению (12.2). Для установления возможности преобразования (12.1) мы должны доказать, что вычисленные вышеописанным путем векторы $s^{(k)}$ линейно независимы, так что S имеет обратную матрицу S^{-1}. Докажем это, сделав предположение, что матрица S особенная, придя при этом к противоречию.

Если $|S|=0$, векторы $s^{(k)}$, входящие в столбцы S, линейно зависимы, и отсюда следует, что существует совокупность констант c_i, не всех обращающихся в нуль, но позволяющих составить полином, равный нулю:

$$c_1s^{(1)}+c_2s^{(2)}+\dots+c_ns^{(n)}=0.$$

В этом выражении некоторые c_i могут оказаться нулями. Без утраты общности вывода мы можем допустить, что r первых коэффициентов c не обращаются в нуль, и на этом основании вправе утверждать справедливость того, что

$$c_1s^{(1)}+c_2s^{(2)}+\dots+c_rs^{(r)}=0, \quad r\leqslant n, \tag{12.7}$$

[1]) Они называются также *собственными значениями*, соответствующие им векторы $s^{(k)}$ — *характеристическими векторами* или *собственными векторами.*

где ни один из коэффициентов c_i (или $s^{(i)}$) не обращается в нуль. Из (12.4) выводим соотношения

$$As^{(k)} = s^{(k)}\lambda_k, \quad A\left(As^{(k)}\right) = As^{(k)}\lambda_k = s^{(k)}\lambda_k^2,$$
$$A\left[A\left(As^{(k)}\right)\right] = s^{(k)}\lambda_k^3, \ \ldots, \ (A)^{r-1}s^{(k)} = s^{(k)}\lambda_k^{r-1}.$$

Если (12.7) умножить на A последовательно $r-1$ раз и учесть цепь только что написанных соотношений, то мы придем к системе уравнений

$$\begin{aligned}
c_1 s^{(1)} + c_2 s^{(2)} + \ldots + c_r s^{(r)} &= 0,\\
c_1 s^{(1)}\lambda_1 + c_2 s^{(2)}\lambda_2 + \ldots + c_r s^{(r)}\lambda_r &= 0,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&\\
c_1 s^{(1)}\lambda_1^{r-1} + c_2 s^{(2)}\lambda_2^{r-1} + \ldots + c_r s^{(r)}\lambda_r^{r-1} &= 0.
\end{aligned}$$

Поскольку, как уже установлено, и c и $s^{(k)}$ не обращаются в нуль, эта система может быть удовлетворена лишь при условии

$$\Delta \equiv \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \ldots & \lambda_r \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \lambda_1^{r-1} & \lambda_2^{r-1} & \ldots & \lambda_r^{r-1} \end{vmatrix}.$$

Но детерминант Δ представляет собой детерминант Вандермонда[1]), и его значение, как известно, приводится к

$$\begin{aligned}
\Delta = (\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_1) \ldots (\lambda_r - \lambda_1) \times&\\
\times (\lambda_3 - \lambda_2) \ldots (\lambda_r - \lambda_2) \times&\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&\\
\times (\lambda_r - \lambda_{r-1}) = \Pi(\lambda_i - \lambda_j),& \quad i > j.
\end{aligned}$$

Он никогда не обращается в нуль при различных λ. Таким образом, допущение о том, что матрица S вырожденная, неверно, поэтому ее можно привести к диагональной форме во всех тех случаях, когда характеристические значения матрицы A различны.

Если корни уравнения $|A - \lambda I| = 0$ не различны, приведение A к диагональной форме преобразованием $S^{-1}AS$ может оказаться невозможным. В этом случае можно прибегнуть к иным каноническим представлениям, с которыми можно познакомиться в руководствах по высшей алгебре[2]). В некоторых

---

[1]) См. Paige L. J., Swift J. D., Elements of linear algebra, Ginn C°, Boston 1961.

[2]) См. Murnaghan F. D., Applied mathematics, Wiley, New Yorl 1948; Birkhoff G., MacLane S., A survey of modern algebra, Macmillan, New York 1941.

специальных случаях, однако, приведение матрицы A к диагональному виду удается даже и в том случае, когда характеристическое уравнение $|A-\lambda I|=0$ имеет кратные корни. Мы вернемся к исследованию этих случаев в нижеследующих параграфах.

§ 13. Вещественные симметричные матрицы и квадратичные формы

Допустим, что матрица $A=(a_{ij})$ в линейном преобразовании

$$x'_i = a_{ij}x_j \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n) \tag{13.1}$$

вещественна и *симметрична*, так что $a_{ij}=a_{ji}$ (или $A'=A$) для всех значений i и j. Покажем, что матрицу A можно привести к диагональному виду преобразованием $S^{-1}AS$. Кроме того, S может быть *ортогональной* матрицей.

С линейными преобразованиями вещественных симметричных матриц приходится обычно иметь дело в исследовании деформаций, которым подвергаются упругие среды. Кроме того, вещественные симметричные матрицы играют значительную роль в изучении вещественных квадратичных форм

$$Q(x_1, x_2, \ldots, x_n) \equiv a_{ij}x_ix_j \qquad (i, j = 1, \ldots, n), \tag{13.2}$$

возникающих во многих задачах динамики и геометрии. Не утрачивая ничего в общности, мы можем принять, что коэффициенты в (13.2) симметричны, поскольку (13.2) всегда можно записать в виде

$$Q(x_1, x_2, \ldots, x_n) \equiv \frac{a_{ij}+a_{ji}}{2}x_ix_j,$$

где коэффициенты, очевидно, симметричны. Имея дело с квадратичными формами, мы всегда будем предполагать, что они уже симметризованы.

Из выкладок этого параграфа выяснится, что задачи приведения систем линейных форм (13.1) к форме

$$\xi'_1 = \lambda_1\xi_1, \quad \xi'_2 = \lambda_2\xi_2, \quad \ldots, \quad \xi'_n = \lambda_n\xi_n$$

и квадратичной формы (13.2) к форме

$$Q = \lambda_1\xi_1^2 + \lambda_2\xi_2^2 + \ldots + \lambda_n\xi_n^2 \tag{13.3}$$

математически тождественны.

Обратим сначала внимание на некоторые свойства квадратичных форм (13.2). Подвергнув форму Q в (13.2) линейному преобразованию

$$x_i = s_{ik}\xi_k \tag{13.4}$$

или

$$x = S\xi,$$

получим

$$Q = a_{ij}(s_{ik}\xi_k)(s_{jl}\xi_l) = a_{ij}s_{ik}s_{jl}\xi_k\xi_l.$$

Обозначим коэффициенты при $\xi_k\xi_l$ через c_{kl}, и тогда

$$Q = c_{kl}\xi_k\xi_l,$$

где

$$c_{kl} = a_{ij}s_{ik}s_{jl}. \tag{13.5}$$

Так как $a_{ij} = a_{ji}$, а i и j в (13.5) — индексы суммирования, то обмен местами между k и l не изменяет значения (13.5). Таким образом, $c_{kl} = c_{lk}$, и отсюда матрица $C = (c_{ij})$ симметрична. Мы пришли таким путем к результату, что *симметрия квадратичной формы* (13.2) *не нарушается тем, что мы подвергаем переменные x_i линейному преобразованию.*

Перепишем (13.5) в форме

$$c_{kl} = s_{ik}(a_{ij}s_{jl})$$

и заметим, что $a_{ij}s_{jl}$ представляет собой элемент матрицы

$$AS \equiv B,$$

занимающий в ней место на строке k в столбце l. Таким же образом

$$c_{kl} = s_{ik}b_{il} \tag{13.6}$$

можно рассматривать как элемент строки k столбца l в матрице $S'B$ и

$$C = S'AS. \tag{13.7}$$

На этом основании мы формулируем теорему.

Теорема. *Если переменные x_i в квадратичной форме $Q = a_{ij}x_ix_j$ с матрицей A подвергнуть линейному преобразованию $x_i = s_{ij}\xi_j$ с матрицей S, то получающаяся квадратичная форма имеет матрицу $S'AS$.*

В качестве следствия из этой теоремы мы отмечаем, что детерминант результирующей квадратичной формы получает значение $|A|\,|S|^2$.

Если преобразование (13.4) ортогонально, то $S' = S^{-1}$, и мы вправе представить (13.7) в виде

$$C = S^{-1}AS.$$

Отсюда следует, что определение *ортогонального преобразования*, приводящего форму (13.2) к сумме квадратов (13.3), сводится к решению матричного уравнения

$$S^{-1}AS = \Lambda. \tag{13.8}$$

Именно с этой задачей мы встретились в § 12. Там мы пришли к выводу, что система однородных уравнений

$$a_{ij}s_{jk} = s_{ik}\lambda_k \quad \text{(без суммирования по } k\text{)}, \tag{13.9}$$

полученная из

$$AS = S\Lambda$$

[см. уравнения (12.3)], будет иметь нетривиальное решение для векторов $s^{(k)}$: $(s_{1k}, s_{2k}, \ldots, s_{nk})$ в том и только в том случае, если λ в (13.9) удовлетворяют уравнению $|a_{ij} - \delta_{ij}\lambda| = 0$, или

$$|A - \lambda I| = 0. \tag{13.10}$$

Если матрица A произвольна, характеристическое уравнение (13.10) имеет, вообще, комплексные корни; а если эти корни различны, то изложенные в § 12 методы позволяют вычислить совокупность n линейно независимых векторов $s^{(k)}$, составляющих матрицу S. Мы рассматриваем, однако, случай, когда матрица S должна быть ортогональной и вещественной. Если корни характеристического уравнения (13.10) вещественны, то из уравнения (13.9) сразу же следует, что решения $s^{(k)}$: $(s_{1k}, s_{2k}, \ldots, s_{nk})$ могут быть приняты вещественными, поскольку a_{ij} вещественна. Докажем теорему.

Теорема. *Если матрица A вещественна и симметрична, то все корни характеристического уравнения $|A - \lambda I|$ вещественны.*

Систему уравнений (13.9) можно записать в компактной форме

$$As^{(k)} = s^{(k)}\lambda_k \quad \text{(без суммирования по } k\text{)}. \tag{13.11}$$

Мы можем рассматривать $As^{(k)}$ как вектор с компонентами

$$a_{i1}s_{1k} + a_{i2}s_{2k} + \ldots + a_{in}s_{nk} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Пусть λ_k — корень уравнения (13.10) — вещественный или комплексный, а $s^{(k)}$ — вектор, вещественный или комплексный, удовлетворяющий системе (13.11). Умножив (13.11) скалярно на $s^{(k)}$, получим

$$s^{(k)} \cdot As^{(k)} = |s^{(k)}|^2 \lambda_k. \tag{13.12}$$

Левая часть в этом уравнении [вспомним определение (6.1)]

$$s^{(k)} \cdot As^{(k)} = a_{ij}\bar{s}_{ik}s_{jk} \qquad \text{(без суммирования по } k\text{)}$$

вещественна, если $a_{ij} = a_{ji}$. Для того чтобы это доказать, заметим, что величина, сопряженная с $a_{ij}\bar{s}_{ik}s_{jk}$, равна первоначальному выражению

$$a_{ij}s_{ik}\bar{s}_{jk} = a_{ji}s_{ik}\bar{s}_{jk} = a_{ij}\bar{s}_{ik}s_{jk}.$$

Так как левая часть в (13.12) вещественна, так же как и $|s^{(k)}|^2$, то вещественен также и λ_k. Этим завершается доказательство теоремы.

Докажем далее, что если λ_i и λ_j — два различных корня уравнения (13.10), то векторы $s^{(i)}$ и $s^{(j)}$, соответствующие этим корням, ортогональны. Так как $s^{(i)}$ и $s^{(j)}$ удовлетворяют (13.11), имеем тождества

$$As^{(i)} = s^{(i)}\lambda_i \qquad \text{(без суммирования)},$$
$$As^{(j)} = s^{(j)}\lambda_j \qquad \text{(без суммирования)},$$

где все участвующие векторы вещественны. Если мы умножим первый из них скалярно на $s^{(j)}$ справа, а второй на $s^{(i)}$ слева и вычтем, то получим

$$As^{(i)} \cdot s^{(j)} - s^{(i)} \cdot As^{(j)} = (\lambda_i - \lambda_j)\, s^{(i)} \cdot s^{(j)};$$

тогда левая часть обратится в нуль, поскольку $s^{(i)} \cdot As^{(j)} = As^{(i)} \cdot s^{(j)}$ в силу симметрии A. Этим устанавливается ортогональность $s^{(i)}$ и $s^{(j)}$, если только корни λ_i и λ_j не одинаковы. Так как уравнение (13.11) однородно, мы вправе умножить его на подобранную надлежащим образом константу, так чтобы длина $s^{(k)}$ приняла значение, равное единице. Мы будем предполагать, что это условие выполнено.

Вспомним, что совокупность ортогональных векторов должна быть линейно независимой. На этом основании, если все корни уравнения $|A - \lambda I| = 0$ различны, векторы $s^{(k)}$ будут ортонормальны и в соответствии с этим матрица S, выполняющая преобразование $S^{-1}AS = \Lambda$, будет ортогональной.

Остается рассмотреть случай приведения вещественных квадратичных форм (13.2) к диагональному виду (13.3), когда уравнение

$$|A - \lambda I| = 0 \tag{13.10}$$

имеет кратные корни. Доказательство возможности приведения в этом случае опирается на одно важное свойство подобных матриц, а именно на то, что *характеристические корни всех подобных матриц тождественно равны*. Доказать это легко. Заменяем A в левом множителе (13.10) какой-либо подобной матрицей $S^{-1}AS$ и получаем полином от λ

$$|S^{-1}AS - \lambda I| = |S^{-1}(A - \lambda I)\, S| = |S^{-1}| \cdot |A - \lambda I| \cdot |S| = |A - \lambda I|.$$

Отсюда следует, что характеристические уравнения, ассоциированные с $S^{-1}AS$ и A, тождественны, откуда следует, что корни их равны.

Предположим теперь, что (13.10) имеет кратные корни. Пусть $\lambda = \lambda_1$ представляет собой один из корней этого уравнения. Определим решение системы (13.11): $s^{(1)}$: $(s_{11}, s_{21}, \ldots, s_{n1})$, соответствующее $\lambda = \lambda_1$, при котором $s^{(1)} \cdot s^{(1)} = 1$. Это возможно независимо от того, является ли λ_1 кратным корнем или нет. Мы можем присоединить к вектору $s^{(1)}$ совокупность $n-1$ ортонормальных векторов, образующих полную систему векторов в нашем n-мерном пространстве. Этими векторами можно воспользоваться как базисом нашего пространства вместо начальной системы ортонормальных базисных векторов $a^{(1)}, \ldots, a^{(n)}$, причем мы можем перейти от системы отсчета, определенной векторами $a^{(i)}$, к новой системе путем ортогонального преобразования. В соответствии с этим матрица квадратичной формы (13.2), будучи отнесенной к новой системе, примет вид $A_1 = S_1^{-1} A S_1$, где S_1 ортогональна. Кроме того, уравнение

$$|A_1 - \lambda I| = 0 \tag{13.13}$$

имеет те же характеристические корни, что и (13.10). Уравнение [см. (13.11)]

$$A_1 s = s\lambda \tag{13.14}$$

для $\lambda = \lambda_1$ имеет решение $s^{(1)}$: $(1, 0, 0, \ldots, 0)$, поскольку мы выбрали его в качестве единичного вектора, а $s^{(1)}$ — один из базисных векторов новой системы отсчета. Если мы введем это решение в (13.14), то получим тождество

$$A_1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix},$$

из которого следует, что матрица A_1 имеет следующие элементы:

$$a_{11}^{(1)} = \lambda_1, \quad a_{21}^{(1)} = a_{31}^{(1)} = \ldots = a_{n1}^{(1)} = 0. \tag{13.15}$$

Первоначальная матрица A симметрична, а поскольку ортогональные преобразования не нарушают симметрии, матрица A_1 также симметрична[1]). Таким образом, $A_1' = A_1$, и мы можем теперь вместо (13.15) написать

$$a_{11}^{(1)} = \lambda_1, \quad a_{12}^{(1)} = a_{21}^{(1)} = a_{31}^{(1)} = a_{13}^{(1)} = \ldots = a_{n1}^{(1)} = a_{1n}^{(1)} = 0,$$

так, что

$$A_1 = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a_{22}^{(1)} & \ldots & a_{2n}^{(1)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & a_{n2}^{(1)} & \ldots & a_{nn}^{(1)} \end{bmatrix}.$$

---

[1]) Так как $A_1' = (S_1^{-1} A S_1)' = S_1' A' (S_1^{-1})' = S_1^{-1} A S_1$, поскольку $S^{-1} = S'$ для ортогональных матриц.

Квадратичная форма (13.2), будучи отнесенной к нашей новой системе, получает структуру

$$Q=\lambda_1\xi_1^2+a_{ij}^{(1)}\xi_i\xi_j \qquad (i, j=2, 3, \ldots, n).$$

Нам удалось, выделив один квадрат, привести задачу к исследованию формы $a_{ij}^{(1)}\xi_i\xi_j$ в $(n-1)$ переменных. Мы можем применить аналогичное рассуждение к $(n-1)\times(n-1)$-матрице $A_2=(a_{ij}^{(1)})$ и рассмотреть форму $a_{ij}^{(1)}\xi_i\xi_j$ $(i, j=2, 3, \ldots, n)$ в $(n-1)$-мерном подпространстве E_{n-1} пространства E_n, определенного базисными векторами, отличными от $s^{(1)}$. В E_{n-1} мы можем вычислить единичный вектор $s^{(2)}$, удовлетворяющий уравнению

$$A_2 s = s\lambda,$$

соответствующему $\lambda=\lambda_2$, и построить новую базисную систему ортогональным преобразованием, в котором базисным вектором является $s^{(2)}$. Это приводит к матрице

$$A_2=\begin{bmatrix} \lambda_2 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a_{33}^{(2)} & \ldots & a_{3n}^{(2)} \\ . & . & . & . \\ 0 & a_{n3}^{(2)} & \ldots & a_{nn}^{(2)} \end{bmatrix}$$

и к квадратичной форме

$$Q=\lambda_1\xi_1^2+\lambda_2\xi_2^2+a_{ij}^{(2)}\xi_i\xi_j \qquad (i, j=3, \ldots, n).$$

Продолжение этого процесса приведет первоначальную квадратичную форму (13.2) к виду

$$Q=\lambda_1\xi_1^2+\lambda_2\xi_2^2+\ \ldots\ +\lambda_n\xi_n^2.$$

Поскольку каждое последовательное приведение совершается ортогональным преобразованием, произведение ортогональных преобразований эквивалентно единственному ортогональному преобразованию S. Получающаяся в результате диагональная матрица Λ

$$S^{-1}AS=\Lambda=\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

содержит число одинаковых корней λ, равное количеству корней в $|A-\lambda I|=0$. Так как матрица $S^{-1}AS$ подобна A, то характеристические корни $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ уравнения $|\Lambda-\lambda I|=0$ тождественны с корнями $|A-\lambda I|=0$.

Направления, определяемые характеристическими векторами $s^{(k)}$, ассоциируемые с матрицей A, называются *главными направлениями* матрицы A.

Задачи

Если x: $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — единичный вектор, а $Q = a_{ij}x_ix_j$ — вещественная квадратичная форма с неособенной матрицей A, то наибольшее и наименьшее значения Q будут характеристическими значениями A. Требуется это доказать. *Указание.* Искать экстремум Q при ограничивающем условии $x_ix_i = 1$ и вывести систему уравнений $(a_{ij} - \delta_{ij}\lambda)x_i = 0$, где λ — множитель Лагранжа.

§ 14. Примеры приведения квадратичных форм

Интерпретируем результаты, полученные в § 13, на языке аналитической геометрии и дадим два примера конкретных иллюстраций приведения квадратичных форм к каноническому виду посредством ортогональных преобразований.

Если принять, что число измерений пространства равно $n = 3$, и приравнять квадратичную форму $a_{ij}x_ix_j$ постоянной величине c, то уравнение (14.1) можно представить

$$a_{ij}x_ix_j = c \qquad (i, j = 1, 2, 3) \tag{14.1}$$

как уравнение поверхности второго порядка Q, отнесенной к системе отсчета с базисными векторами a^i. Ортогональное преобразование $S^{-1}AS = \Lambda$, приводящее к квадратичной форме

$$\lambda_1\xi_1^2 + \lambda_2\xi_2^2 + \lambda_3\xi_3^2 = c, \tag{14.2}$$

может быть истолковано как преобразование координатных осей к системе с базисными векторами, направленными по главным осям поверхности второго порядка.

Рассмотрим какую-либо конкретную форму уравнения (14.1), например

$$Q \equiv 2x_1^2 + 2x_2^2 - 15x_3^2 + 8x_1x_2 - 12x_2x_3 - 12x_1x_2 = c,$$

и, для того чтобы определить коэффициенты λ_i в (14.2) для данного частного случая, придадим ей симметричный вид

$$Q \equiv 2x_1^2 + 4x_1x_2 - 6x_1x_3 + 4x_2x_1 + 2x_2^2 - 6x_2x_3 - 6x_3x_1 - 6x_3x_2 - 15x_3^2,$$

из которого непосредственно получаем характеристическое уравнение $|A - \lambda I| = 0$ в развернутой форме

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 4 & -6 \\ 4 & 2-\lambda & -6 \\ -6 & -6 & -15-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Вычисление детерминанта приводит к кубическому уравнению

$$\lambda^3 + 11\lambda^2 - 144\lambda - 324 = 0$$

с корнями

$$\lambda_1 = -2, \quad \lambda_2 = -18, \quad \lambda_3 = 9.$$

Таким образом, в новой системе отсчета Q принимает вид

$$-2\xi_1^2 - 18\xi_2^2 + 9\xi_3^2 = c,$$

т. е. соответствующая поверхность второго порядка представляет собой гиперболоид.

Для определения новых базисных векторов $s^{(i)}$ имеем систему уравнений (13.9)

$$a_{ij}s_{jk} = s_{ik}\lambda_k \quad \text{(без суммирования по } k)$$

или

$$(a_{ij} - \delta_{ij}\lambda_k)\, s_{jk} = 0.$$

Записывая их в развернутой форме, получаем

$$\left.\begin{aligned} (2-\lambda_k)\,s_{1k} + 4s_{2k} - 6s_{3k} &= 0, \\ 4s_{1k} + (2-\lambda_k)\,s_{2k} - 6s_{3k} &= 0, \\ -6s_{1k} - 6s_{2k} - (15+\lambda_k)\,s_{3k} &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{14.3}$$

Подстановка $\lambda_1 = -2$ дает три уравнения, два из которых тождественны. Линейно независимыми уравнениями остаются

$$\begin{aligned} 4s_{11} + 4s_{21} - 6s_{31} &= 0, \\ -6s_{11} - 6s_{21} - 13s_{31} &= 0. \end{aligned}$$

Решение их дает нам компоненты $s^{(1)}$:

$$s_{11} = c, \quad s_{21} = -c, \quad s_{31} = 0,$$

где c произвольно. Определим постоянную c так, чтобы длина $s^{(1)}$ равнялась единице, т. е.

$$s_{11}^2 + s_{21}^2 + s_{31}^2 = 1,$$

тогда $c = 1/\sqrt{2}$ и нормализованные значения компонентов равны

$$s_{11} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad s_{21} = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad s_{31} = 0.$$

Они определяют первый столбец матрицы S.

Подстановка $\lambda_2 = -18$ в (14.3) приводит к трем однородным уравнениям:

$$\begin{aligned} 20s_{12} + 4s_{22} - 6s_{32} &= 0, \\ 4s_{12} + 20s_{22} - 6s_{32} &= 0, \\ -6s_{12} - 6s_{22} + 3s_{32} &= 0, \end{aligned}$$

решение которых быстро находится:

$$s_{12}=\frac{1}{4}c, \qquad s_{22}=\frac{1}{4}c, \qquad s_{32}=c.$$

Нормализованное решение:

$$s_{12}=\frac{1}{3\sqrt{2}}, \qquad s_{22}=\frac{1}{3\sqrt{2}}, \qquad s_{32}=\frac{4}{3\sqrt{2}}.$$

Элементы, входящие в третий столбец матрицы S, определяются из системы (14.3) путем подстановки $\lambda_3=9$. Таким образом, приходим к уравнениям

$$\begin{aligned}-7s_{13}+4s_{23}-6s_{33}&=0,\\ 4s_{13}-7s_{23}-6s_{33}&=0,\\ -6s_{13}-6s_{23}-24s_{33}&=0,\end{aligned}$$

удовлетворяющимся при значениях

$$s_{13}=c, \qquad s_{23}=c, \qquad s_{33}=-\frac{1}{2}c.$$

Нормализуя к единице, получаем для $s^{(3)}$

$$s_{13}=\frac{2}{3}, \qquad s_{23}=\frac{2}{3}, \qquad s_{33}=-\frac{1}{3}.$$

Ортогональное преобразование, приводящее к канонической форме, принимает вид

$$\begin{aligned}\xi_1&=\frac{1}{\sqrt{2}}x_1-\frac{1}{\sqrt{2}}x_2+0\cdot x_3,\\ \xi_2&=\frac{1}{3\sqrt{2}}x_1+\frac{1}{3\sqrt{2}}x_2+\frac{4}{3\sqrt{2}}x_3,\\ \xi_3&=\frac{2}{3}x_1+\frac{2}{3}x_2-\frac{1}{3}x_3.\end{aligned}$$

Для того чтобы проиллюстрировать приведение в случае, когда характеристическое уравнение имеет кратные корни, принимаем

$$Q\equiv 3x_1^2+2x_2^2+3x_3^2+2x_1x_3=c.$$

Здесь характеристическое уравнение матрицы Q имеет вид

$$-\begin{vmatrix}3-\lambda & 0 & 1\\ 0 & 2-\lambda & 0\\ 1 & 0 & 3-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^3-8\lambda^2+20\lambda-16=0$$

и корни $\lambda_1=\lambda_2=2$, $\lambda_3=4$. Поверхность второго порядка конкретизируется здесь как эллипсоид вращения, описываемый уравнением

$$2(\xi_1^2+\xi_2^2)+4\xi_3^2=c.$$

Уравнения для определения новых базисных векторов принимают вид

$$\begin{aligned}(3-\lambda)\,s_{1k}+0s_{2k}+s_{3k}&=0,\\ 0s_{1k}+(2-\lambda)\,s_{2k}+0s_{3k}&=0,\\ s_{1k}+0s_{2k}+(3-\lambda)\,s_{3k}&=0.\end{aligned}$$

Положив $\lambda_1=2$, получаем лишь одно уравнение

$$s_{11}+s_{31}=0$$

для определения $s^{(1)}$, так что в качестве нормализованного решения получаем

$$s_{11}=\frac{1}{\sqrt{2}},\qquad s_{21}=0,\qquad s_{31}=-\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Второй характеристический корень $\lambda_2=2$ дает уравнение

$$s_{12}+s_{32}=0, \tag{14.4}$$

а так как $s^{(2)}$ должен быть нормальным к $s^{(1)}$, то получаем условие ортогональности

$$s_{11}s_{12}+s_{21}s_{22}+s_{31}s_{32}=0,$$

или

$$\frac{1}{\sqrt{2}}s_{21}-\frac{1}{\sqrt{2}}s_{32}=0. \tag{14.5}$$

Уравнения (14.4) и (14.5) устанавливают, что $s_{12}=0$, $s_{22}=1$, $s_{32}=0$.

Наконец, для определения третьего базисного вектора мы располагаем системой уравнений

$$\begin{aligned}-s_{13}+s_{33}&=0,\\ -2s_{23}&=0,\\ s_{13}-s_{33}&=0,\end{aligned}$$

получаемой из условия $\lambda=4$. Нормализованное решение этой системы исчерпывается тремя равенствами $s_{13}=1/\sqrt{2}$, $s_{23}=0$, $s_{33}=1/\sqrt{2}$. Матрица S получает таким образом вид

$$\left\|\begin{matrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0 & 1 & 0\\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{matrix}\right\|,$$

откуда уравнения связи между переменными x_i и ξ_i выписываются непосредственно.

§ 15. Классификация и свойства вещественных квадратичных форм

В этом параграфе мы напомним некоторые свойства вещественных квадратичных форм

$$Q = a_{ij}x_ix_j \qquad (i, j = 1, \ldots, n), \tag{15.1}$$

особенно важные в приложениях.

Мы показали, что вещественная квадратичная форма Q может быть приведена ортогональным преобразованием

$$\xi_i = s_{ij}x_j \tag{15.2}$$

к канонической форме

$$Q = \lambda_1\xi_1^2 + \lambda_2\xi_2^2 + \ldots + \lambda_n\xi_n^2. \tag{15.3}$$

Задача приведения квадратичной формы (15.1) к виду (15.3) эквивалентна отысканию ортогональной матрицы $S = (s_{ij})$, удовлетворяющей матричному уравнению

$$S^{-1}AS = \Lambda \qquad (\text{или } S'AS = \Lambda), \tag{15.4}$$

где элементы, расположенные по диагонали в матрице Λ, являются корнями уравнения в детерминанте

$$|A - \lambda I| = 0, \tag{15.5}$$

причем A — вещественная симметричная матрица.

Поскольку детерминант S не обращается в нуль, из (15.4) явствует, что ранг матрицы A равен рангу Λ. Если характеристическое уравнение (15.5) имеет n не обращающихся в нуль корней, то число членов, фактически входящих в уравнение (15.3), равно n. Если, однако, уравнение (15.5) имеет $r < n$ неисчезающих корней, то приведенная форма (15.3) примет вид

$$Q = \lambda_1\xi_1^2 + \lambda_2\xi_2^2 + \ldots + \lambda_r\xi_r^2, \tag{15.6}$$

и мы скажем тогда, что ранг квадратичной формы (15.1) равен r. Число *положительных* λ, появляющихся в (15.6), называется *индексом* Q. Если в нашей форме (15.6) насчитывается p положительных и $r - p$ отрицательных λ, мы можем ввести вещественное преобразование $\xi_i = \left(1/\sqrt{\lambda_i}\right)\xi'_i$ для членов с положительными λ и $\xi_i = \left(1/\sqrt{-\lambda_i}\right)\xi'_i$ — для членов с отрицательными λ, так что эта форма примет вид

$$Q = \xi_1'^2 + \xi_2'^2 + \ldots + \xi_p'^2 - \xi_{p+1}'^2 - \xi_{p+2}'^2 - \ldots - \xi_r'^2. \tag{15.7}$$

Таким образом, *каждая вещественная квадратичная форма* Q может быть приведена вещественным линейным преобразованием $\xi'_i = c_{ij}x_j$ к *канонической форме* (15.7). Матрица (c_{ij}), конечно, не обязательно должна быть при этом ортогональной.

Форма (15.7) предлагает критерий для классификации квадратичных форм.

Рассмотрим следующие случаи.

1. Индекс p в (15.7) равен n, так что уравнение (15.5) имеет n положительных корней. В этом случае мы говорим, что форма (15.1) *положительно определенная.*

2. Если индекс $p=0$, так что все корни уравнения (15.5) отрицательны и ранг Q равен n, форма (15.1) *отрицательно определенная.*

3. Если индекс p равен рангу r, причем $r<n$, форма называется *положительной.* С другой стороны, если индекс — нуль, а ранг $r<n$, форма Q *отрицательна.*

4. Формы, для которых каноническое представление (15.3) содержит как положительные, так и отрицательные λ, называются *неопределенными.*

Отметим, что положительные и отрицательные определенные формы никогда не обращаются в нуль для вещественных ненулевых значений переменных x_i. Они обращаются в нуль в том, и единственно лишь в том случае, когда обращаются в нуль все x_i. В противоположность этому, положительные и отрицательные формы могут обращаться в нуль для ненулевых значений аргументов x_i. Для того чтобы в этом убедиться, заметим, что при $r<n$

$$Q=\lambda_1\xi_1^2+\lambda_2\xi_2^2+\ldots+\lambda_r\xi_r^2.$$

Мы можем обратить форму (15.1) в нуль, выбрав x_j в (15.2) таким образом, чтобы $\xi_1=\xi_2=\ldots=\xi_r=0$. Значения x_j, при которых форма Q не обращается в нуль, конечно, существуют, так как система r однородных уравнений

$$s_{ij}x_j=0 \qquad (i=1, \ldots, r)$$

с n неизвестными x_j имеет нетривиальные решения, если $r<n$.

Из матричного уравнения (15.4) и из того факта, что в положительно определенной форме все λ_i в A положительны, следует непосредственно, что детерминант $|a_{ij}|$ положительно определенной формы непременно положителен. Обратное утверждение, конечно, неверно. В этом легко убедиться, заметив, что $|A|=|\Lambda|$, а положительное значение $|\Lambda|$ допускает как неопределенные, так и определенные формы.

§ 16. Одновременное приведение двух квадратичных форм к сумме квадратов

Завершим наше изучение квадратичных форм исследованием возможности одновременного приведения двух вещественных квадратичных форм к сумме квадратов одним-единственным линейным преобразованием. Такая задача возникает в различных областях физико-математических наук, в частности, например, в изучении колебаний механических систем относительно состояния равновесия.

Рассмотрим две вещественные квадратичные формы

$$Q_1 = a_{ij}x_ix_j \quad \text{и} \quad Q_2 = b_{ij}x_ix_j, \tag{16.1}$$

каждая ранга n, одна из них, например Q_1, положительно определенная. Положим, что нам требуется найти линейное преобразование, не обязательно ортогональное, но такое, которое приводит обе формы к сумме квадратов.

Если Q_1 — положительно определенная и имеет ранг n, то существует линейное преобразование $x_i = c_{ij}\xi_j$, не обязательно ортогональное, которое приводит Q_1 к виду

$$Q_1 = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \ldots + \xi_n^2. \tag{16.2}$$

В результате того же преобразования Q_2 примет вид

$$Q_2 = b'_{ij}\xi_i\xi_j. \tag{16.3}$$

Далее надлежащим *ортогональным* преобразованием $\xi_i = d_{ij}\eta_j$, произведенным над переменными ξ_i, мы можем привести форму Q_2 к виду

$$Q_2 = \lambda_i\eta_i^2, \tag{16.4}$$

а поскольку ортогональные преобразования оставляют скалярное произведение $\xi_i\xi_i$ инвариантом, форма Q_1 остается неизменной, и мы получим

$$Q_1 = \eta_i\eta_i. \tag{16.5}$$

Поскольку теперь Q_1 и Q_2 оказались преобразованными к искомым формам, и так как произведение последовательных линейных преобразований от x_i к η_i есть линейное преобразование $x_i = s_{ij}\eta_j$, то отсюда следует, что одновременное приведение выполнимо.

Числа λ_i в (16.4) называются *характеристическими числами формы* Q_2, отнесенной к Q_1. Переходим теперь к выводу уравнения для характеристических чисел λ_i.

Напомним, что если переменные x_i в квадратичной форме $Q = a_{ij}x_ix_j$ с матрицей A подвергнуть линейному преобразованию $x_i = s_{ij}\eta_j$ с матрицей S, то матрицей результирующей квадратичной формы будет $S'AS$. Детерминант этой матрицы имеет значение $|S|^2|A|$. Построим теперь квадратичную форму

$$Q \equiv Q_2 - \lambda Q_1 = (b_{ij} - \lambda a_{ij})\,x_ix_j, \tag{16.6}$$

где λ — произвольный параметр. В результате последовательных линейных преобразований переменных x_i в η_i квадратичные формы Q_2 и Q_1 принимают вид (16.4) и (16.5), а (16.6) приводится к (16.7)

$$Q=\lambda_1\eta_1^2+\lambda_2\eta_2^2+\ldots+\lambda_n\eta_n^2-\lambda\eta_1^2-\lambda\eta_2^2-\ldots-\lambda\eta_n^2=\sum_{i=1}^{n}(\lambda_i-\lambda)\eta_i^2. \tag{16.7}$$

Детерминант Δ в (16.7) равен произведению

$$\Delta=(\lambda_1-\lambda)(\lambda_2-\lambda)\ldots(\lambda_n-\lambda), \tag{16.8}$$

а детерминант Q в (16.6)

$$D=|b_{ij}-\lambda a_{ij}|. \tag{16.9}$$

Из только что сделанных замечаний, относящихся к значению детерминанта в преобразовании квадратичной формы, следует, что детерминанты D и Δ могут различаться лишь постоянным множителем, равным квадрату детерминанта $|S|$ преобразования начальных переменных x_i в окончательные переменные η_i. Так как этот детерминант не равен нулю и не содержит параметра λ, то корни полиномов (16.8) и (16.9) должны быть тождественны. Учтя структуру выражения (16.8), заключаем, что коэффициенты λ_i в (16.4) являются корнями уравнения

$$D=\begin{vmatrix} b_{11}-\lambda a_{11} & b_{12}-\lambda a_{12} & \ldots & b_{1n}-\lambda a_{1n} \\ b_{21}-\lambda a_{21} & b_{22}-\lambda a_{22} & \ldots & b_{2n}-\lambda a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{n1}-\lambda a_{n1} & b_{n2}-\lambda a_{n2} & \ldots & b_{nn}-\lambda a_{nn} \end{vmatrix}=0.$$

В приложении этих результатов к изучению малых колебаний механических систем относительно точки равновесия формы Q_1 и Q_2 соответствуют кинетической и потенциальной энергиям системы. Окончательные координаты η_i называются *нормальными* координатами, а характеристические числа λ_i связаны с *нормальными модами колебаний* (см. § 89).

§ 17. Унитарные преобразования и эрмитова матрица

В ряде вопросов, возникающих в прикладной математике, приходится расширять понятие ортогональных преобразований на векторы, определяемые в комплексной области.

Если мы рассмотрим неособенное преобразование

$$x_i'=a_{ij}x_j \qquad (i,\ j=1,\ \ldots,\ n), \tag{17.1}$$

в котором коэффициенты a_{ij} — комплексные числа, а совокупность чисел $(x_1,\ \ldots,\ x_n)$ представляет собой компоненты вектора x, то при этом естественно возникает вопрос относительно ограничений, которые следует наложить на матрицу (a_{ij}), если длина $|x|$ вектора должна сохранить постоянное значение. Наложение условия инвариантности длины, а именно

$$\bar{x}'_i x'_i = \bar{x}_i x_i,$$

приводит непосредственно к заключению, что [см. (11.5)]

$$\bar{a}_{ij} a_{ik} = \delta_{jk}, \tag{17.2}$$

где черта над буквой, как обычно, обозначает сопряженные комплексные значения. Из (17.2) выводим, что абсолютное значение квадрата детерминанта $|a_{ij}|$ равно единице.

Матрицы $A = (a_{ij})$, элементы которых удовлетворяют условиям (17.2), называются *унитарными*, а соответствующие преобразования (17.1) — *унитарными преобразованиями*. Мы можем поэтому записать (17.2) формулой

$$\bar{A}'A = I, \tag{17.3}$$

где $\bar{A}$ — *сопряженная* матрица, получаемая путем замены каждого элемента a_{ij} в A элементом $\bar{a}_{ij}$. Из (17.3) заключаем непосредственно, что $\bar{A}' = A^{-1}$.

Билинейная форма

$$H = a_{ij}\bar{x}_i x_j \qquad (i,\ j = 1,\ \ldots,\ n), \tag{17.4}$$

где $a_{ij} = \bar{a}_{ji}$ называется *эрмитовой формой*, а соответствующая ей матрица $(a_{ij}) = A$ *эрмитовой матрицей*. Из определения эрмитовой матрицы следует, что элементы диагонали в ней вещественны и что

$$\bar{A}' = A \quad \text{или} \quad A' = \bar{A}.$$

Заметим что эрмитовы формы могут принимать для произвольного x_i лишь вещественные значения, ибо

$$\bar{H} = \bar{a}_{ij} x_i \bar{x}_j = a_{ji} x_i \bar{x}_j = a_{ij}\bar{x}_i x_j = H.$$

Очевидно, что эрмитовы формы представляют собой обобщение вещественных квадратичных форм.

Можно поднять вопрос о возможности приведения формы (17.4) к канонической форме

$$H = \lambda_1\bar{\xi}_1\xi_1 + \lambda_2\bar{\xi}_2\xi_2 + \ \ldots\ + \lambda_n\bar{\xi}_n\xi_n \tag{17.5}$$

с помощью преобразования

$$x_i = u_{ij}\xi_j \quad \text{или} \quad \boldsymbol{x} = U\boldsymbol{\xi},$$

где $U \equiv (u_{ij})$ — унитарная матрица. Вычисление, сходное с выполненным в § 13, приводит к решению матричного уравнения

$$U^{-1}AU = \Lambda, \tag{17.6}$$

где Λ — диагональная матрица. Процедура в этом случае во всех отношениях сходна с описанной для вещественных симметричных матриц. Умножая (17.6) на U, получаем

$$AU = U\Lambda, \tag{17.7}$$

т. е. систему линейных однородных уравнений для определения векторов $u^{(k)}$: $(u_{1k}, u_{2k}, \ldots, u_{nk})$, входящих в столбцы U. Необходимое и достаточное условие того, чтобы система, представленная в (17.7), имела решение, сводится к требованию

$$|A - \lambda I| = 0. \tag{17.8}$$

Возможность построения унитарной матрицы U, удовлетворяющей уравнению (17.6), связана с тем, что корни уравнения (17.8) здесь также вещественны. Тот факт, что характеристические корни λ_i должны быть непременно вещественны, следует из замечания, что $U^{-1}AU$ — эрмитова матрица, если только A — эрмитова, а U — унитарная [1]). Таким образом, Λ в (17.6) является эрмитовой матрицей и, следовательно, ее диагональные элементы вещественны.

Задачи

1. Привести матрицу

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

к диагональной форме S преобразованием подобия $C^{-1}AC$. Показать, что

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad C^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Исследовать значение A как оператора, характеризующего деформацию пространства.

2. Привести к диагональной форме матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

---

[1]) Действительно, $(U^{-1}AU)' = U'A'(U^{-1})'$ и $\overline{(U^{-1}AU)'} = \overline{U}'\overline{A}'\overline{(U^{-1})'}$. Так как A — эрмитова, то $\overline{A}' = A$, а так как U — унитарная, то $\overline{U}' = U^{-1}$ и $\overline{(U^{-1})'} = U$. В результате находим $\overline{(U^{-1}AU)'} = U^{-1}AU$.

ГЛАВА II

ТЕОРИЯ ТЕНЗОРОВ

§ 18. Задача и содержание тензорного анализа. Инвариантность

Тензорный анализ имеет дело с изучением абстрактных объектов, называемых *тензорами*, свойства которых не зависят от координатных систем, используемых для описания этих объектов. В частной координатной системе тензор определяют совокупностью функций, называемых его *компонентами*, точно так же, как совокупностью компонентов определяют в заданной координатной системе и вектор. Определяет ли заданная система функций тензор, зависит от закона преобразования этих функций при переходе от одной координатной системы к другой. Положение здесь тождественное с тем, которое мы встретили еще в главе I. В заданной координатной системе вектор A определяется однозначно совокупностью компонентов A_i. Если мы введем новую систему координат, то этот же вектор A будет определяться совокупностью компонентов B_i, причем эти новые компоненты могут быть однозначным образом вычислены из первых. Именно закон преобразования компонентов вектора и составляет сущность понятия вектора. Это относится также и к тензорам.

Поскольку тензорный анализ имеет дело с объектами и свойствами, не зависящими от выбора координатной системы, он является идеальным инструментом для изучения законов природы. В самом деле, если логическая дедукция, основанная на комплексе случайной совокупности наблюденных фактов, и заслуживает наименования закона природы, то это лишь потому, что она определяется часто общностью подобной дедукции и ее применимостью в достаточно широком классе систем отсчета. Это обстоятельство тесно связано с возможностью формулировки дедукции в тензорном уравнении, так как тензорные уравнения инвариантны относительно принятого в том или ином случае типа преобразований координат. Идея инвариантности математических объектов при преобразовании координат пронизывает всю структуру тензорного анализа до такой степени, что весьма важно с самого начала составить ясное представление об одном частном виде инвариантности, который мы имеем в виду. Положим, что некоторая точка является инвариантом. В заданной системе координат точка P определяется совокупностью координат x^i. Если координатная система меняется, точка P будет описана новой совокупностью координат y^i, но это преобразование координат ничего не изменит в самой точке. С другой стороны, пара точек (P_1, P_2) определяет вектор $\overrightarrow{P_1P_2}$. Этот вектор в частной координатной системе однозначно определяется совокупностью компонентов A_i. Преобразование координат ничего не изменяет в самом векторе $\overrightarrow{P_1P_2}$, но определится он в новой координатной системе $\overrightarrow{P_1P_2}$ иной совокупностью компонентов B_i. Совокупность точек, образующих, например, кривую или поверхность, является, таким образом, инвариантом. Эту кривую можно описать в заданной координатной системе уравнением, которое обычно меняет свою форму с изменением координат, хотя сама кривая остается неизменной. Скажем поэтому вообще, что *математический объект, какова бы ни была его природа, является инвариантом, если только он остается неизменным при преобразовании координат.*

§ 19. Преобразование координат

В главе I мы познакомились достаточно подробно с линейными преобразованиями координат. Здесь мы будем иметь дело с вещественными однозначными, обратимыми функциональными преобразованиями вида

$$T:\ y^i = y^i(x^1, x^2, \ldots, x^n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{19.1}$$

Любую заданную совокупность n вещественных чисел $(x_0^1, x_0^2, \ldots \ldots, x_0^n)$ мы представляем себе как точку P_0 в n-мерном метрическом многообразии с координатной системой X. Систему уравнений (19.1) мы рассматриваем как преобразование координатных систем, в котором подстановка в (19.1) n чисел $(y_0^1, y_0^2, \ldots, y_0^n)$ взамен координат $(x_0^1, x_0^2, \ldots, x_0^n)$ представит координаты точки P_0 в координатной системе Y. Так как преобразование T в (19.1) предполагается обратимым и взаимно однозначным, то мы можем записать

$$T^{-1}:\ x^i(y^1, y^2, \ldots, y^n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{19.2}$$

где функции[1]) $x^i(y)$ однозначные. Для того чтобы обеспечить выполнение только что наложенных нами ограничений на преобразование координат, будет достаточно предположить, что

[1]) Мы будем часто пользоваться обозначениями $x^i(y)$ и $f(x)$ вместо $x^i(y^1, \ldots, y^n)$ и соответственно $f(x^1, x^2, \ldots, x^n)$.

функции $y^i(x)$ в (19.1) непрерывны вместе со своими первыми частными производными в некоторой области R множества V_n и что якобиан — детерминант $J \equiv \left|\frac{\partial y^i}{\partial x^i}\right|$ — не обращается в нуль ни в одной точке области R. В этом случае гарантируется [1]) не только существование однозначного обратимого преобразования (19.2), но и принадлежность функций $x^i(y)$ в (19.2) к классу C^1 в некоторой окрестности рассматриваемой точки.

Заметим, что если функции $y^i(x)$ в (19.1) принадлежит классу C^1, то по формуле Тейлора

$$y^i = a_0^i + a_j^i x^j,$$

где a_j^i — значение $\partial y^i/\partial x^i$, вычисленное для некоторой точки P' области R. Точка P' зависит, конечно, от выбора значений $(x^1, x^2, \ldots, x^n)$. Поэтому преобразование (19.1), обладающее указанными свойствами, является *локально-линейным.* Существование не обращающегося в нуль якобиана гарантирует, что эта система линейных уравнений имеет единственное решение. Повсюду в дальнейшем в этой книге мы будем предполагать, что все встречающиеся типы преобразования координат имеют вид (19.1), в котором функции $y^i(x)$ входят по крайней мере в класс C^1 в некоторой области R и что $\left|\frac{\partial y^i}{\partial x^j}\right| \neq 0$ в любой точке R. Ради краткости будем называть класс преобразований координат, характеризуемый описанными свойствами, *допустимыми преобразованиями.*

В качестве допустимого преобразования рассмотрим систему уравнений, определяющих связь между сферническими полярными координатами x^i и прямоугольными декартовыми координатами y^i:

$$T: \begin{cases} y^1 = x^1 \sin x^2 \cos x^3, \\ y^2 = x^1 \sin x^2 \sin x^3, \\ y^3 = x^1 \cos x^2. \end{cases}$$

Если положить $x^1 > 0$, $0 < x^2 < \pi$ и $0 \leqslant x^3 < 2\pi$, то $J \neq 0$, и обратное преобразование выразится уравнениями

$$T^{-1}: \begin{cases} x^1 = +\sqrt{(y^1)^2 + (y^2)^2 + (y^3)^2}, \\ x^2 = \operatorname{arctg} \dfrac{\sqrt{(y^1)^2 + (y^2)^2}}{y^3}, \\ x^3 = \operatorname{arctg} \dfrac{y^2}{y^1}. \end{cases}$$

[1]) См., например, Sokolnikoff I. S., Advanced calculus, стр. 433—438. Мы пользуемся символом C^n для обозначения класса функций, непрерывных вместе со своими первыми n частными производными.

Задача

Исследовать преобразования, в которых координаты y^i — прямоугольные декартовы:

$$
\text{(а)}\quad \begin{cases} y^1 = \dfrac{1}{\sqrt{6}}x^1 + \dfrac{2}{\sqrt{6}}x^2 + \dfrac{1}{\sqrt{6}}x^3, \\ y^2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}x^1 - \dfrac{1}{\sqrt{3}}x^2 + \dfrac{1}{\sqrt{3}}x^3, \\ y^3 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}x^1 \qquad\qquad - \dfrac{1}{\sqrt{2}}x^3. \end{cases}
$$

$$
\text{(б)}\quad \begin{cases} y^1 = x^1 \cos x^2, \\ y^2 = x^1 \sin x^2, \\ y^3 = x^3. \end{cases}
$$

§ 20. Свойства допустимых преобразований координат

Из содержащейся в этом параграфе сводки некоторых важных свойств допустимых координатных преобразований мы увидим, что совершенно несущественно, какая именно частная система отсчета избирается для описания инвариантных объектов. Будет показано, что все допустимые преобразования координат образуют группу и что вследствие этого каждая координатная система в семействе может быть получена из какой-либо другой частной системы путем допустимого преобразования. Этот факт является важным пунктом в построении теории, которая претендует на независимость от случайного выбора систем отсчета.

Теорема I. *Если преобразование координат T обратимо, т. е. существует обратное преобразование T^{-1}, и если J и K означают соответственно их якобианы, то $J \cdot K = 1$.*

Доказательство просто: подставляем значения x^i из (19.2) в (19.1) и получаем ряд тождеств для y^i:

$$
y^i \equiv y^i\,[x^1(y^1, \ldots, y^n), \ldots, x^n(y^1, \ldots, y^n)].
$$

Дифференцирование по y_j дает

$$
\frac{\partial y^i}{\partial y^j} = \delta^i_j = \frac{\partial y^i}{\partial x^\alpha}\frac{\partial x^\alpha}{\partial y^j} \qquad (\alpha = 1,\ 2,\ \ldots,\ n).
$$

Но

$$
\left| \frac{\partial y^i}{\partial x^\alpha} \cdot \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^j} \right| = \left| \frac{\partial y^i}{\partial x^k} \right| \cdot \left| \frac{\partial x^i}{\partial y^k} \right| = J \cdot K.
$$

Поскольку $|\delta^i_j| = 1$, мы убеждаемся, что $J \cdot K = 1$. Попутно из этого результата следует, что $J \neq 0$ в R. Рассмотрим теперь два допустимых преобразования

$$
T_1\colon\ y^i = y^i(x^1, \ldots, x^n)
$$

и

$$
T_2\colon\ z^i = z^i(y^1, \ldots, y^n) \qquad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n).
$$

Преобразование

$$T_3\colon z^i = z^i [y^1 (x^1, \ldots, x^n), \ldots, y^n (x^1, \ldots, x^n)]$$

называется произведением T_2 и T_1. Записывается оно формулой $T_3 = T_2 T_1$. Если якобиан T_3 обозначить через J_3, то

$$J_3 = \left| \frac{\partial z^i}{\partial y^\alpha} \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^j} \right| = \left| \frac{\partial z^i}{\partial y^j} \right| \left| \frac{\partial y^i}{\partial x^j} \right| = J_2 J_1,$$

где J_2 и J_1 — соответственно якобианы T_2 и T_1.

Сформулируем этот результат как теорему.

Теорема II. *Якобиан произведения преобразований равен произведению якобианов, входящих в произведение преобразований.* Эти две теоремы позволяют нам сформулировать и третью теорему.

Теорема III. *Совокупность всех допустимых преобразований координат образует группу.*

Справедливость теоремы становится очевидной, если заметим, что

(а) фундаментальное свойство группы, именно то, что произведение двух допустимых преобразований является преобразованием, принадлежащим к той же совокупности допустимых преобразований, удовлетворяется с полной очевидностью, это свойство известно как свойство *замкнутости* группы;

(б) произведение преобразований обладает обратным преобразованием, так как входящие в произведение преобразования обратимы;

(в) тождественное преобразование $(x^i = y^i)$, очевидно, существует;

(г) ассоциативный закон $T_3(T_2T_1) = (T_3T_2)T_1$, очевидно, выполняется.

Именно эти свойства входят в определение абстрактной группы.

Как отмечено в начале настоящего параграфа, тот факт, что допустимые преобразования образуют группу, оправдывает нас в выборе в качестве точки отправления *любой* координатной системы, если только она принадлежит к числу допустимых, входящих в группу.

§ 21. Преобразования, индуцированные инвариантностью

Пусть $F(P)$ — функция точки P в n-мерном множестве V_n. Предположим, что $F(P)$ — непрерывная функция в некоторой области R многообразия V_n и что в V_n введена какая-либо координатная система X. Значения $F(P)$ зависят от точки P, но не от координатной системы, использованной для того, чтобы представить P. Мы называем $F(P)$ *скалярной точечной функцией* или просто *скаляром*. В системе отсчета X функция $F(P)$ может принять форму $f(x^1, \ldots, x^n)$, и если мы введем новую систему отсчета Y преобразованием

$$T\colon\ x^i = x^i(y^1, \ldots, y^n), \tag{21.1}$$

то функциональная форма $F(P)$ в координатах Y примет вид

$$f[x^1(y^1, \ldots, y^n), \ldots, x^n(y^1, \ldots, y^n)] \equiv g(y^1, \ldots, y^n), \tag{21.2}$$

поскольку значение $f(x^1, \ldots, x^n)$ для $P(x^1, \ldots, x^n)$ будет то же [1]), что и $g(y^1, \ldots, y^n)$ для $P(y^1, \ldots, y^n)$.

Мы можем говорить о $f(x)$ как о компоненте скалярной функции $F(P)$ в координатной системе X, в то время как $g(y)$ является компонентом той же самой скалярной функции в координатной системе Y. С другой стороны, мы можем рассматривать скалярную функцию $F(P)$ как определенную *набором компонентов* $f(x)$, $g(y)$, $h(z)$ *и т. д., связанных друг с другом подстановками вида* (21.2). Иными словами, коль скоро представление скаляра $F(P)$ известно в одной координатной системе, то форма $F(P)$ в любой другой координатной системе Y определится формулой (21.2). Мы называем это подстановочное преобразование G^0: $f[x(y)] = g(y)$ *преобразованием, индуцированным инвариантностью.*

Заметим, что если даны три преобразования: T_1, T_2 и T_3, где

$$T_1^{-1}\colon\ x = x(y),$$

$$T_2^{-1}\colon\ y = y(z)$$

с $T_3 = T_2 T_1$, так что

$$T_3^{-1}\colon\ x = x[y(z)],$$

и скаляр $F(P)$, компонент которого в системе отсчета X выражается как $f(x)$, то можно вычислить и преобразованные формы $f(x)$. В самом деле, компонент $g(y)$, входящий в состав $F(P)$, определяется законом

$$G_1^0\colon\ g(y) = f[x(y)],$$

между тем как компонент $h(z)$ той же функции $F(P)$ в координатной системе Z задается как

$$G_2^0\colon\ h(z) = g[y(z)].$$

С другой стороны, применяя произведение преобразований

---

[1]) В частном случае $F(P)$ может представлять температуру какой-либо области пространства и $f(x)$ — форма, которую функция температуры принимает в системе отсчета X; $g(y)$ — представление $F(P)$ в системе отсчета Y.

$T_3 = T_2T_1$, находим

$$G_3^0\colon\ h(z) = f\{x[y(z)]\},$$

откуда ясно, что $G_3^0 = G_2^0 G_1^0$.

Мы можем представить эти преобразования координат и соответствующее преобразование компонентов $F(P)$ в виде диаграммы (рис. 7). Если координаты подвергаются группе T допустимых преобразований, то компоненты скаляра подвергаются

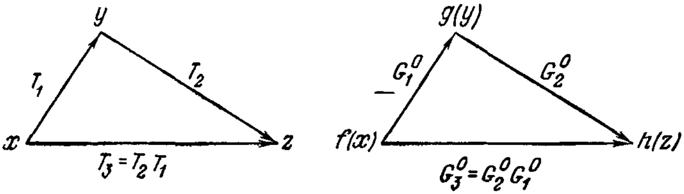

Рис. 7.

некоторым преобразованиям G^0. Связь между последовательными преобразованиями T и G^0 такова, что произведению двух преобразований T_2T_1 отвечает произведение двух однозначно соответствующих преобразований $G_2^0G_1^0$. Когда такое соответствие достигается между двумя какими-либо группами преобразований T и G, то такие группы называются *гомоморфными*. Если же между группами имеется взаимно однозначное соответствие, го тогда такие группы называются *изоморфными*. Изоморфизм между преобразованиями координат и преобразованиями функций, *индуцируемых* преобразованиями координат,— важная характеристика класса инвариантов, называемых тензорами.

§ 22. Ковариантные и контравариантные преобразования

В предыдущем параграфе мы рассмотрели преобразование компонентов скаляра $F(P)$, когда преобразованию подвергаются координаты точки P. Здесь мы займемся законом преобразования объектов, определяемых системами частных производных скаляра. Комплекты частных производных компонента $f(x^1, \ldots, x^n)$ скаляра $F(P)$ представляют интерес в физике в связи с понятием градиента потенциальной функции.

Рассмотрим непрерывно дифференцируемую функцию $f(x^1, \ldots, x^n)$, представляющую скаляр $f(P)$, и преобразование координат

$$T\colon\ x^i = x^i(y^1, \ldots, y^n). \tag{22.1}$$

Если составить комплект из n частных производных

$$\frac{\partial f}{\partial x^1},\ \frac{\partial f}{\partial x^2},\ \ldots,\ \frac{\partial f}{\partial x^n} \quad \text{или} \quad \{f_{x^i}\}, \tag{22.2}$$

то возникнет вопрос: что произойдет с этим комплектом $\{f_{x^i}\}$, когда координаты x^i будут подвергнуты преобразованию (22.1)? Этот вопрос совершенно не имел бы смысла, если бы не было в точности указано, что́ надлежит сделать с комплектом (22.2). Эти производные вовсе не «преобразуются» как-либо автоматически до тех пор, пока не будет указано, какой закон следует использовать в вычислении «соответствующих функций» в системе Y. Иными словами, здесь необходимо договориться относительно того, что́ должен обозначать термин «соответствующая функция» в данной ситуации.

Мы можем, например, вычислить соответствующие функции индуцированной инвариантностью G^0 (§ 21); т. е. мы можем ввести в каждую функцию $f_{x^i}(x^i, \ldots, x^n)$ значения x из (22.1). Это составит комплект n функций

$$g_1(y^1, \ldots, y^n), \quad g_2(y^1, \ldots, y^n), \ldots, g_n(y^1, \ldots, y^n). \tag{22.3}$$

С другой стороны, если воспользоваться понятием градиента $f(P)$, то надо иметь в виду, что комплектом функций, соответствующих (22.2), будет не (22.3), а комплект n частных производных

$$\frac{\partial f}{\partial y^1}, \frac{\partial f}{\partial y^2}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial y^n}, \tag{22.4}$$

вычисленных по правилу дифференцирования сложных составных функций, а именно

$$G^1: \ \frac{\partial f}{\partial y^i} = \frac{\partial f}{\partial x^\alpha} \cdot \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^i} \qquad (i, \alpha = 1, 2, \ldots, n). \tag{22.5}$$

Если у нас имеются функция $f(x^1, \ldots, x^n)$ и преобразование

$$T_1: \ x^i(z^1, \ldots, z^n),$$

то комплект функций, соответствующих (22.2) и определяемых законом G^1 [уравнение (22.5)], будет

$$\frac{\partial f}{\partial z^i} = \frac{\partial f}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^\alpha}{\partial z^i}.$$

Мы можем представить себе комплекты функций $\{\partial f/\partial x^i\}$, $\{\partial f/\partial y^i\}$, $\{\partial f/\partial z^i\}$ и т. д. как *один и тот же* математический объект, взятый в различных системах отсчета. В каждой отдельной точке $P_0(x_0^1, \ldots, x_0^n)$ комплект (22.2) определяет n чисел, которые можно рассматривать как компоненты градиента вектора; комплект же (22.4) представляет тот же вектор в координатной системе Y.

Если у нас имеется комплект n функций $A_1(x), \ldots, A_n(x)$, ассоциированных с координатной системой X, и если мы условимся вычислять соответствующие величины $B_1(y), \ldots, B_n(y)$ в системе Y по *ковариантному закону* G^1, а именно по закону

$$B_i(y) = \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^i} A_\alpha(x), \tag{22.6}$$

то мы будем говорить, что комплект $\{A_i(x)\}$ представляет компоненты *ковариантного вектора* в координатной системе X. Комплект $\{B_i(y)\}$ представляет *тот же самый* ковариантный вектор в системе Y. Ковариантный вектор сам по себе есть совокупность комплектов этих компонентов, каждый из которых связан с другим комплектом ковариантным законом G^1.

В качестве иллюстрации закона преобразования векторов, совершенно отличного от закона G^1, рассмотрим комплект n дифференциалов

$$dx^1,\ dx^2,\ \ldots,\ dx^n, \tag{22.7}$$

где x^i связаны с переменными y^i формулой (22.1). Если у нас имеются две точки $P_1(x^1, \ldots, x^n)$ и $P_2(x^1 + dx^1, \ldots, x^n + dx^n)$, то комплект n чисел (22.7) определит вектор перемещения от точки P_1 к точке P_2.

Этот же самый вектор перемещения, будучи отнесен к координатной системе Y, будет иметь своими компонентами

$$dy^1,\ dy^2,\ \ldots,\ dy^n, \tag{22.8}$$

где

$$G^2\colon\ dy^i = \frac{\partial y^i}{\partial x^\alpha} dx^\alpha \qquad (i,\ \alpha = 1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

Заметим, что закон G^2 для определения величин (22.8) отличается от закона G^1. Если у нас имеется комплект величин $A_1(x), A_2(x), \ldots, A_n(x)$, то закон G^2, определяющий соответственные величины $B_1(y), B_2(y), \ldots, B_n(y)$, имеет вид

$$B_i = \frac{\partial y^i}{\partial x^\alpha} A_\alpha. \tag{22.9}$$

Закон G^2 называется *контравариантным законом* и комплекты величин, преобразуемых нами в соответствии с этим законом, мы называем *компонентами контравариантного вектора*.

Законы G^0, G^1 и G^2 играют фундаментальную роль в построении тензорного анализа.

Задачи

1. Показать, что если преобразование T: $y^i = a^i_j x^j$ ортогонально, то различие между ковариантным и контравариантным законами исчезает.

2. Доказать теорему: если $f(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ — однородная функция степени m, то $\frac{\partial f}{\partial x^i} x^i = mf$.

3. Даны $f(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ и комплект уравнений преобразования $x^i = x^i(y^1, y^2, \ldots, y^n)$, где каждый $y^i = y^i(t)$. Показать, что если преобразование, индуцированное инвариантностью f, имеет вид $g(y^1, y^2, \ldots, y^n)$, то $df/dt = dg/dt$. *Указание.* $(\partial f/dx^\alpha)(dx^\alpha/dt) = df/dt$ и $dx^\alpha/dt = (\partial x^\alpha/\partial y^j)(dy^j/dt)$.

4. Выписать законы преобразования компонентов ковариантного и контравариантного векторов, если T — преобразование прямоугольных декартовых координат в сферические полярные (см. § 19).

§ 23. Понятие тензора. Контравариантный и ковариантный тензоры

Рассмотрим допустимое преобразование

$$T\colon\ y^i = y^i(x^1, x^2, \ldots, x^n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

и комплект $\{f_i\}$ непрерывных функций в количестве m

$$f_i(x^1, x^2, \ldots, x^n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, m),$$

определенных в некоторой области R n-мерного пространства, отнесенного к координатной системе X.

Ассоциируем с заданным преобразованием T преобразование G, которое преобразует каждую функцию $f_i(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ в функцию

$$g_i(y^1, y^2, \ldots, y^n).$$

Примерами преобразования G являются преобразования, индуцированные инвариантностью скаляра, а также контравариантные и ковариантные преобразования, введенные в предыдущих параграфах. Но какова бы ни была природа преобразования G, она всегда будет зависеть от T, и чтобы подчеркнуть этот факт, мы скажем, что G — функция T. Мы назовем G *индуцированным преобразованием* комплекта функций f_i.

Предположим далее, что G, рассматриваемая как функция T, удовлетворяет следующим условиям.

(а) *Если T есть тождественное преобразование, то и G — также тождественное преобразование.* Это значит, что если $y^i = x^i$, то

$$f_i(x^1, \ldots, x^n) = f_i(y^1, y^2, \ldots, y^n).$$

(б) *Если T_1, T_2, T_3 — три преобразования типа T, а G_1, G_2, G_3 — соответственные индуцированные преобразования G, и если при этом $T_3 = T_2T_1$, то $G_3 = G_2G_1$.* Иначе говоря, комплекты преобразований T и G изоморфны. Если данный комплект функций $\{f_i\}$ удовлетворяет условиям (а) и (б), то скажем, что комплект $\{f_i\}$ представляет компоненты f_i тензора f в координатной системе X. Сам же тензор f есть не что иное, как совокупность комплектов функций $\{f_i(x)\}$, $\{g_i(y)\}$ и т. д.

Следует заметить, что термин *тензор* был применен А. Эйнштейном [1]) лишь в связи с комплектами величин, преобразуемых в соответствии с законами контравариантности и ковариантности. Формулировкой контравариантного и ковариантного законов, равно как и наброском существенных положений алгебры и анализа контравариантных и ковариантных тензоров, наука обязана Дж. Риччи [2]). Значительно более широкое истолкование и определение тензоров на основе изоморфизма преобразований координат и индуцированных преобразований принадлежит Г. Вайлю и О. Веблену [3]). Из-за соображений практического удобства и благодаря широкой распространенности ковариантного и контравариантного законов преобразования в применениях анализа к геометрии и физике термин тензор вошел во всеобщее применение в том смысле, в каком его наметил А. Эйнштейн. Тем не менее изоморфизм между законами преобразования координат и индуцированными преобразованиями заложен столь фундаментально в идее тензоров и в инвариантной природе тензорного анализа, что ту степень внимания, которую мы уделили ему в предшествующем изложении, следует признать достаточно оправданной.

Обратимся теперь к рассмотрению ковариантных, контравариантных и смешанных тензоров. Будет удобно ввести (следуя Риччи) различные обозначения для каждого отдельного типа этих тензоров так, чтобы их можно было различать с первого взгляда. Рассмотрим прежде всего комплект из n функций переменных $(x^1, \ldots, x^n)$

$$\{A(i;\ x)\} \quad \text{или} \quad A(1;\ x),\ A(2;\ x),\ \ldots,\ A(n;\ x).$$

Ранее мы помещали *идентифицирующий* (обозначающий) индекс i либо снизу буквы, либо сверху ее, но теперь мы условимся пользоваться верхними индексами для обозначения комплекта функций, которые преобразуются в соответствии с контравариантным законом, и нижние индексы для комплектов, преобразующихся ковариантно [4]). В тех случаях, когда закон преобразования не ковариантный и не контравариантный или когда природа его стоит под сомнением, мы пишем $\{A(i;\ x)\}$, $\{B(i;\ y)\}$ и т. д. Предложим теперь следующие определения.

---

[1]) Einstein A., Annalen der Physik **49** (1916).

[2]) Ricci G., Atti della reale accademia nazionale dei Lincei **5** (1889).

[3]) Weyl H., Mathematische Zeitschrift **23, 24** (1925—1926); Veblen O., Invariants of quadratic differential forms, Cambridge Tract № 24 (1927), стр. 19—20.

[4]) Единственным исключением из этого соглашения является применение верхних индексов для обозначения переменных x^i, y^i и т. д. Эти величины не преобразуются по ковариантному или контравариантному закону, если преобразование T не является аффинным.

Определение 1. *Ковариантным тензором ранга* 1 *называется полный класс комплектов величин* $\{A(i;\ x)\}$, $\{B(i;\ y)\}$, $\{C(i;\ z)\}$, ..., *связанных между собой преобразованием вида*

$$B(i;\ y) = \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^i} A(\alpha;\ x) \qquad (i,\ \alpha = 1,\ 2,\ \ldots,\ n),$$

где $\{A(i;\ x)\}$ — *представление тензора в координатной системе* X, *а* $\{B(i;\ y)\}$ — *его представление в некоторой координатной системе* Y, *связанной с системой* X *преобразованием* T.

Часто мы говорим обобщенно о заданном комплекте $\{A(i;\ x)\}$ как о тензоре, но в этом выражении и нельзя скрывать тот факт, что тензор представляет собой совокупность комплектов величин, обозначаемых символом $\{A(i;\ x)\}$. Последний относится к представлению тензора в частной системе отсчета и может быть понят как компонент тензора в координатной системе X. Тем не менее мы будем применять термин *компонент тензора*, имея в виду индивидуальные элементы $A(i;\ x)$ в комплекте $\{A(i;\ x)\}$.

Мы обозначаем компоненты ковариантных тензоров нижними индексами и часто опускаем переменные x и y, входящие в качестве аргументов A и B. Таким образом,

$$B_i = \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^i} A_\alpha \qquad \text{(ковариантный закон).}$$

Определение 2. *Контравариантным тензором ранга* 1 *называется полный класс комплектов величин типа* $\{A(i;\ x)\}$, $\{B(i;\ y)\}$, ..., *связанных между собой преобразованием вида*

$$B(i;\ y) = \frac{\partial y^i}{\partial x^\alpha} A(\alpha;\ x),$$

где $\{A(i;\ x)\}$ *представляет тензор в координатной системе* X *и* $\{B(i;\ y)\}$ — *в координатной системе* Y.

Мы обозначаем компоненты контравариантных тензоров верхними индексами. Так, например,

$$B^i = \frac{\partial y^i}{\partial x^\alpha} A^\alpha \qquad \text{(контравариантный закон).}$$

Определения контравариантного и ковариантного тензоров первого ранга тождественны с определениями контравариантного и ковариантного векторов, данными в § 22.

Мы говорим о скалярах, определенных в § 21, как о тензорах *нулевого ранга*.

Мы можем обобщить определения тензоров первого ранга, включив сюда тензоры любого ранга, следующим образом.

Определение 3. *Комплект n^r величин $A_{i_1 i_2 \ldots i_r}(x)$, ассоциированных с координатной системой X, представляет компоненты ковариантного тензора ранга r, если соответствующий комплект n^r величин $B_{i_1 i_2 \ldots i_r}(y)$, ассоциированный с координатной системой Y, задан выражением*

$$B_{i_1 i_2 \ldots i_r} = \frac{\partial x^{\alpha_1}}{\partial y^{i_1}} \frac{\partial x^{\alpha_2}}{\partial y^{i_2}} \cdots \frac{\partial x^{\alpha_r}}{\partial y^{i_r}} A_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_r}.$$

Сам тензор представляет собой совокупность комплектов величин $\{A_{i_1 i_2 \ldots i_r}(x)\}$.

Определение 4. *Комплект n^r величин $A^{i_1 i_2 \ldots i_r}(x)$ представляет компоненты контравариантного тензора ранга r в координатной системе X всякий раз, когда соответствующий комплект $B^{i_1 i_2 \ldots i_r}(y)$, составленный из n^r величин в системе Y, задан законом*

$$B^{i_1 i_2 \ldots i_r} = \frac{\partial y^{i_1}}{\partial x^{\alpha_1}} \frac{\partial y^{i_2}}{\partial x^{\alpha_2}} \cdots \frac{\partial y^{i_r}}{\partial x^{\alpha_r}} A^{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_r}.$$

В качестве иллюстрации отметим, что компоненты ковариантного тензора второго ранга преобразуются по закону

$$B_{ij}(y) = \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial y^{i}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial y^{j}} A_{\alpha\beta}(x),$$

тогда как компоненты контравариантного тензора заданы выражением

$$B^{ij}(y) = \frac{\partial y^{i}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial y^{j}}{\partial x^{\beta}} A^{\alpha\beta}(x).$$

При этом в каждом комплекте — n^2 компонентов. Определим теперь *смешанный* тензор.

Определение 5. *Совокупность комплектов из n^{r+s} величин, обозначаемых в координатной системе X выражениями $A^{j_1 j_2 \ldots j_s}_{i_1 i_2 \ldots i_r}(x)$, представляет собой смешанный тензор, ковариантный ранга r и контравариантный ранга s, если соответствующие величины $B^{j_1 j_2 \ldots j_s}_{i_1 i_2 \ldots i_r}(y)$ в координатной системе Y задаются законом*

$$B^{j_1 j_2 \ldots j_s}_{i_1 i_2 \ldots i_r} = \frac{\partial x^{\alpha_1}}{\partial y^{i_1}} \frac{\partial x^{\alpha_2}}{\partial y^{i_2}} \cdots \frac{\partial x^{\alpha_r}}{\partial y^{i_r}} \cdot \frac{\partial y^{j_1}}{\partial x^{\beta_1}} \frac{\partial y^{j_2}}{\partial x^{\beta_2}} \cdots \frac{\partial y^{j_s}}{\partial x^{\beta_s}} A^{\beta_1 \beta_2 \ldots \beta_s}_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_r}.$$

Заметим, что этот закон для преобразования компонентов A^i_j смешанного тензора дает

$$B^j_i(y) = \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial y^{i}} \frac{\partial y^{j}}{\partial x^{\beta}} A^{\beta}_{\alpha}(x).$$

В качестве простого примера смешанного тензора, с которым мы уже встречались в нашем изложении, укажем дельту Кронекера δ^j_i, именно $\frac{\partial x^\alpha}{\partial y^i}\frac{\partial y^j}{\partial x^\beta}\delta^\beta_\alpha=\frac{\partial y^j}{\partial y^i}=\delta^j_i$. Подтверждение того факта, что определения ковариантного и смешанного тензоров удовлетворяют условиям (а) и (б), указанным в начале этого параграфа, приводится в § 24.

Для того чтобы отличить тензоры, определенные для некоторой области пространства, от тензоров, область определения которых сводится к единственной точке, о первых говорят иногда как о тензорах, составляющих *тензорное поле.*

§ 24. Свойства ковариантного и контравариантного законов преобразования тензоров

Проверим, что индуцированные преобразования, определенные в предшествующем параграфе, удовлетворяют условиям изоморфизма, сформулированным в § 21. Тот факт, что преобразование, индуцированное инвариантностью скаляра (приводящее к тензорам нулевого ранга), удовлетворяет этим условиям был отмечен в § 21. Доказательства для контравариантного и ковариантного тензоров — частные случаи доказательства для смешанного тензора. Рассмотрим поэтому смешанный тензор, обозначенный комплектом функций

$$A^{j_1 j_2 \dots j_s}_{i_1 i_2 \dots i_r}(x).$$

Закон G для преобразования смешанных тензоров имеет вид

$$B^{j_1 \dots j_s}_{i_1 \dots i_r}(y)=\frac{\partial x^{\alpha_1}}{\partial y^{i_1}}\dots\frac{\partial x^{j_r}}{\partial y^{i_r}}\cdot\frac{\partial y^{j_1}}{\partial x^{\beta_1}}\dots\frac{\partial y^{j_s}}{\partial x^{\beta_s}}A^{\beta_1 \dots \beta_s}_{\alpha_1 \dots \alpha_r}(x), \tag{24.1}$$

и мы должны показать, что:

(а) если $T=I$, то $G=I$,
(б) если $T=T_2T_1$, то $G=G_2G_1$.

Итак, если $T=I$, то

$$x^{\alpha_1}=y^{\alpha_1},\quad x^{\alpha_2}=y^{\alpha_2},\ \dots,$$

и, следовательно,

$$\frac{\partial x^{\alpha_1}}{\partial y^{i_1}}=\delta^{\alpha_1}_{i_1},\ \dots,\ \frac{\partial x^{\alpha_r}}{\partial y^{i_r}}=\delta^{\alpha_r}_{i_r}.$$

Кроме того, $T^{-1}=I$, так что

$$y^{\alpha_1}=x^{\alpha_1},\quad y^{\alpha_2}=x^{\alpha_2},\ \dots,$$

откуда

$$\frac{\partial y^{j_1}}{\partial x^{\beta_1}} = \delta^{j_1}_{\beta_1}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial y^{j_s}}{\partial x^{\beta_s}} = \delta^{j_s}_{\beta_s}.$$

Подставляя эти значения частных производных в (24.1), получаем

$$B^{j_1 \ldots j_s}_{i_1 \ldots i_r}(y) = \delta^{\alpha_1}_{i_1} \ldots \delta^{\alpha_r}_{i_r} \cdot \delta^{j_1}_{\beta_1} \ldots \delta^{j_s}_{\beta_s} A^{\beta_1 \ldots \beta_s}_{\alpha_1 \ldots \alpha_r}(x) = A^{j_1 \ldots j_s}_{i_1 \ldots i_r}(x),$$

откуда $G = I$, если $T = I$.

Предположим теперь, что преобразованием T_1 переменные x^i преобразуются в y^i, а преобразование T_2 переводит последние в z^i. Соответствующие индуцированные преобразования G_1 и G_2 дают

$$G_1\colon\ B^{j_1 \ldots j_s}_{i_1 \ldots i_r}(y) = \frac{\partial x^{\alpha_1}}{\partial y^{i_1}} \ldots \frac{\partial x^{\alpha_r}}{\partial y^{i_r}} \cdot \frac{\partial y^{j_1}}{\partial x^{\beta_1}} \ldots \frac{\partial y^{j_s}}{\partial x^{\beta_s}} A^{\beta_1 \ldots \beta_s}_{\alpha_1 \ldots \alpha_r}(x) \tag{24.2}$$

и

$$G_2\colon\ C^{j_1 \ldots j_s}_{i_1 \ldots i_r}(z) = \frac{\partial y^{\alpha_1}}{\partial z^{i_1}} \ldots \frac{\partial y^{\alpha_r}}{\partial z^{i_r}} \cdot \frac{\partial z^{j_1}}{\partial y^{\beta_1}} \ldots \frac{\partial z^{j_s}}{\partial y^{\beta_s}} B^{\beta_1 \ldots \beta_s}_{\alpha_1 \ldots \alpha_r}(y). \tag{24.3}$$

Далее произведением преобразований $T_3 = T_2 T_1$ переменные x^i переводятся в y^i, а y^i — в z^i, так что T_3 преобразует x^i в z^i. Вводя значения B из (24.2) в (24.3), находим

$$G_2 G_1\colon\ C^{j_1 \ldots j_s}_{i_1 \ldots i_r}(z) = \left(\frac{\partial y^{\alpha_1}}{\partial z^{i_1}} \ldots \frac{\partial y^{\alpha_r}}{\partial z^{i_r}}\right)\left(\frac{\partial z^{j_1}}{\partial y^{\beta_1}} \ldots \frac{\partial z^{j_s}}{\partial y^{\beta_s}}\right) \times$$
$$\times \left(\frac{\partial x^{\gamma_r}}{\partial y^{\alpha_1}} \ldots \frac{\partial x^{\gamma_r}}{\partial y^{\alpha_r}}\right)\left(\frac{\partial y^{\beta_1}}{\partial x^{\delta_1}} \ldots \frac{\partial y^{\beta_s}}{\partial x^{\delta_s}}\right) A^{\delta_1 \ldots \delta_s}_{\gamma_1 \ldots \gamma_r}(x).$$

Совершая суммирование по α и β, находим

$$G_3\colon\ C^{j_1 \ldots j_s}_{i_1 \ldots i_r}(z) = \frac{\partial x^{\gamma_1}}{\partial z^{i_1}} \ldots \frac{\partial x^{\gamma_r}}{\partial z^{i_r}} \cdot \frac{\partial z^{j_1}}{\partial x^{\delta_1}} \ldots \frac{\partial z^{j_s}}{\partial x^{\delta_s}} A^{\delta_1 \ldots \delta_s}_{\gamma_1 \ldots \gamma_r}(x).$$

Результирующий закон G_3 и представляет собой закон преобразования компонентов смешанного тензора, когда переменные x^i преобразуются в z^i преобразованием T_3. Таким образом, закон преобразования G является *транзитивным*, и этим завершается наше доказательство.

Результаты для ковариантного и контравариантного тензоров получаются как специальные случаи путем отбрасывания верхних или нижних индексов.

В этой книге будут рассматриваться лишь следующие типы тензоров: скаляры, ковариантные, контравариантные, смешанные и относительные тензоры. Последним дается определение в § 28.

Установим теперь одно полезное свойство закона преобразования тензоров, с которым нам часто придется встречаться в дальнейшем.

Обозначим компоненты смешанного тензора в координатной системе X через $A^{j_1 \dots j_s}_{i_1 \dots i_r}(x)$, а их компоненты в системе Y — через $B^{j_1 \dots j_s}_{i_1 \dots i_r}(y)$. Тогда на основании закона преобразования смешанных тензоров мы сможем записать

$$B^{j_1 \dots j_s}_{i_1 \dots i_r}(y) = \frac{\partial x^{\alpha_1}}{\partial y^{i_1}} \dots \frac{\partial x^{\alpha_r}}{\partial y^{i_r}} \cdot \frac{\partial y^{j_1}}{\partial x^{\beta_1}} \dots \frac{\partial y^{j_s}}{\partial x^{\beta_s}} A^{\beta_1 \dots \beta_s}_{\alpha_1 \dots \alpha_r}(x). \quad (24.4)$$

С другой стороны, если нам даны компоненты $B^{j_1 \dots j_s}_{i_1 \dots i_r}(y)$, то компоненты $A^{\beta_1 \dots \beta_s}_{\alpha_1 \dots \alpha_r}(x)$ того же тензора в системе отсчета X определяются формулой

$$A^{\beta_1 \dots \beta_s}_{\alpha_1 \dots \alpha_r}(x) = \frac{\partial y^{i_1}}{\partial x^{\alpha_1}} \dots \frac{\partial y^{i_r}}{\partial x^{\alpha_r}} \cdot \frac{\partial x^{\beta_1}}{\partial y^{j_1}} \dots \frac{\partial x^{\beta_s}}{\partial y^{j_s}} B^{j_1 \dots j_s}_{i_1 \dots i_r}(y). \quad (24.5)$$

Заметим, что мы можем получить (24.5) из (24.4) формально, обращаясь с частными производными и суммами в (24.4), как если бы они были дробями и произведениями, входящими в простые алгебраические выражения.

Из структуры формул (24.4) и (24.5) выводим важную теорему.

Теорема. *Если все компоненты тензора обращаются в нуль в одной координатной системе, то они необходимо обращаются в нуль и во всех других допустимых координатных системах.*

Эта теорема имеет глубокое значение в формулировке физических законов. Она констатирует, по существу, что если какой-либо закон выводится из исчезновения компонентов тензора в одной частной координатной системе, то это значит, что правила преобразования компонентов тензора гарантируют их исчезновение во всех допустимых координатных системах. Физик мало заинтересован в формулировке закона, который мог бы иметь силу лишь в какой-либо одной частной системе отсчета. И действительно, понятие инвариантности и универсальности физических законов — краеугольный камень, на котором строится математическая физика.

§ 25. Алгебра тензоров

В этом параграфе мы устанавливаем несколько правил оперирования с тензорами, являющихся алгебраическими по своему характеру.

Теорема I. *Сумма (или разность) двух тензоров, имеющих одно и то же число ковариантных и одно и то же число контравариантных индексов, представляет собой тензор того же типа и ранга, что и заданные тензоры.*

Доказательство. Рассмотрим два тензора $A(x)$ и $\bar{A}(x)$ одного и того же типа и ранга, определенных в одной и той же точке P, и соответственные законы преобразования

$$B^{j_1 \dots j_s}_{i_1 \dots i_r}(y) = \frac{\partial x^{\alpha_1}}{\partial y^{i_1}} \dots \frac{\partial x^{\alpha_r}}{\partial y^{i_r}} \cdot \frac{\partial y^{j_1}}{\partial x^{\beta_1}} \dots \frac{\partial y^{j_s}}{\partial x^{\beta_s}} A^{\beta_1 \dots \beta_s}_{\alpha_1 \dots \alpha_r}(x),$$

$$\bar{B}^{j_1 \dots j_s}_{i_1 \dots i_r}(y) = \frac{\partial x^{\alpha_1}}{\partial y^{i_1}} \dots \frac{\partial x^{\alpha_r}}{\partial y^{i_r}} \cdot \frac{\partial y^{j_1}}{\partial x^{\beta_1}} \dots \frac{\partial y^{j_s}}{\partial x^{\beta_s}} \bar{A}^{\beta_1 \dots \beta_s}_{\alpha_1 \dots \alpha_r}(x).$$

Тогда

$$B^{j_1 \dots j_s}_{i_1 \dots i_r} \pm \bar{B}^{j_1 \dots j_s}_{i_1 \dots i_r} =$$
$$= \left(\frac{\partial x^{\alpha_1}}{\partial y^{i_1}} \dots \frac{\partial x^{\alpha_r}}{\partial y^{i_r}}\right) \cdot \left(\frac{\partial y^{j_1}}{\partial x^{\beta_1}} \dots \frac{\partial y^{j_s}}{\partial x^{\beta_s}}\right) \cdot \left(A^{\beta_1 \dots \beta_s}_{\alpha_1 \dots \alpha_r} \pm \bar{A}^{\beta_1 \dots \beta_s}_{\alpha_1 \dots \alpha_r}\right).$$

Отсюда следует, что $A + \bar{A}$ — тензор того же типа и ранга, что и слагаемые, что записывается тождеством

$$A^{\beta_1 \dots \beta_s}_{\alpha_1 \dots \alpha_r}(x) \pm \bar{A}^{\beta_1 \dots \beta_s}_{\alpha_1 \dots \alpha_r}(x) \equiv \mathscr{A}^{\beta_1 \dots \beta_s}_{\alpha_1 \dots \alpha_r}(x).$$

Из законов преобразования тензоров явствует, что если каждый компонент тензора умножается на константу, то результативный комплект функций будет тензором. Этот вывод в сочетании с теоремой I позволяет нам сформулировать

Следствие. *Любая линейная комбинация тензоров одного типа и ранга является точно также тензором того же типа и ранга.*

Теорема II. *Уравнение* $A^{\beta_1 \dots \beta_s}_{\alpha_1 \dots \alpha_r}(x) = \bar{A}^{\beta_1 \dots \beta_s}_{\alpha_1 \dots \alpha_r}(x)$ *есть тензорное уравнение; это значит, что если это уравнение удовлетворяется в какой-то определенной координатной системе, то оно удовлетворяется и во всех допустимых системах.*

Доказательство. Из теоремы I следует, что *разность двух тензоров есть тензор.* Отсюда

$$A^{\beta_1 \dots \beta_s}_{\alpha_1 \dots \alpha_r} - \bar{A}^{\beta_1 \dots \beta_s}_{\alpha_1 \dots \alpha_r} = 0.$$

Но в § 24 мы доказали, что если все компоненты тензора обращаются в нуль в одной координатной системе, то они обращаются в нуль и во всех допустимых координатных системах. Тензор, все компоненты которого обращаются в нуль, мы будем называть *нулевым тензором.*

Теорема III. *Комплект величин, состоящих из произведения каждого элемента комплекта $A^{j_1 \dots j_q}_{i_1 \dots i_p}(x)$, представляющего тензор A, на каждый элемент комплекта $\overline{A}^{l_1 \dots l_s}_{k_1 \dots k_r}(x)$, представляющего тензор $\overline{A}$, определяет тензор $\mathscr{A}$, называемый внешним произведением. Этот тензор контравариантен ранга $q+s$ и ковариантен ранга $p+r$.*

Из определения внешнего произведения компоненты тензора $\mathscr{A}$ в системе отсчета X даются формулой

$$\mathscr{A}^{j_1 \dots j_q\, l_1 \dots l_s}_{i_1 \dots i_p\, k_1 \dots k_r} \equiv A^{j_1 \dots j_q}_{i_1 \dots i_p} \overline{A}^{l_1 \dots l_s}_{k_1 \dots k_r}.$$

Тот факт, что комплект функций $\mathscr{A}^{j_1 \dots l_s}_{i_1 \dots k_r}$ определяет тензор, следует непосредственно из закона преобразования компонентов $A^{j_1 \dots j_q}_{i_1 \dots i_p}$ и $\overline{A}^{l_1 \dots l_s}_{k_1 \dots k_r}$.

Мы будем обозначать внешнее произведение $\mathscr{A}$ тензоров A и $\overline{A}$ последовательной записью их — одного за другим в одном ряду — и именно таким образом: $\mathscr{A} = A\overline{A}$. Очевидно, что *внешнее произведение дистрибутивно в отношении сложения*, т. е.

$$(A+B)\,C = AC + BC.$$

Введем теперь операцию *свертки*, которая приводит к появлению тензоров.

Теорема IV. *Если в смешанном тензоре, контравариантном ранга s и ковариантном ранга r, мы приравняем ковариантный и контравариантный индексы и просуммируем по этому индексу, то получающийся при этом комплект n^{r+s-2} сумм будет смешанным тензором, ковариантным ранга $r-1$ и контравариантным ранга $s-1$.*

Во избежание усложнений в записи проиллюстрируем процедуру, используемую в доказательстве, для чего рассмотрим смешанный тензор A^i_{jkl}. Имеем

$$B^i_{jkl} = \frac{\partial y^i}{\partial x^\alpha}\frac{\partial x^\beta}{\partial y^j}\frac{\partial x^\gamma}{\partial y^k}\frac{\partial x^\delta}{\partial y^l} A^\alpha_{\beta\gamma\delta}.$$

Приравняв индексы i и k и просуммировав, получим комплект n^2 величин

$$B^i_{jil} = \frac{\partial y^i}{\partial x^\alpha}\frac{\partial x^\beta}{\partial y^j}\frac{\partial x^\gamma}{\partial y^i}\frac{\partial x^\delta}{\partial y^l} A^\alpha_{\beta\gamma\delta} = \frac{\partial x^\beta}{\partial y^j}\frac{\partial x^\delta}{\partial y^l}\delta^\gamma_\alpha A^\alpha_{\beta\gamma\delta} =$$
$$= \frac{\partial x^\beta}{\partial y^j}\frac{\partial x^\delta}{\partial y^l} A^\alpha_{\beta\alpha\delta} \equiv \frac{\partial x^\beta}{\partial y^j}\frac{\partial x^\delta}{\partial y^l}\overline{A}_{\beta\delta}.$$

Таким образом, придем к ковариантному тензору второго ранга: $B^i_{jil} \equiv \overline{B}_{jl}$.

В рассмотренном случае мы можем получить три различных ковариантных тензора второго ранга, выполнив операцию свертки на других ковариантных индексах. Заметим, что когда в результате свертки одной или большего числа пар индексов, свободных индексов уже не остается, получающаяся величина окажется скаляром.

Если операцию свертки представляется возможным применить к внешнему произведению двух тензоров A и $\bar{A}$, результатом ее будет тензор, именуемый *внутренним произведением* A и $\bar{A}$. Обозначим внутреннее произведение тензоров символом $A \cdot \bar{A}$. Доказательство того, что $A \cdot \bar{A}$ является тензором, следует непосредственно из того, что внешнее произведение двух тензоров есть тензор, операция же свертки также дает тензор.

Пример. Рассмотрим тензоры: $A_{ij}(x)$, $A_k(x)$ и $A^k(x)$. Если мы образуем внешнее произведение $A_{ij}A_k = A_{ijk}$, то получим ковариантный тензор третьего ранга, в связи с чем операция свертки станет невозможной. С другой стороны, внешнее произведение A_{ij} и A^k дает смешанный тензор $A_{ij}A^k \equiv A^k_{ij}$, и здесь мы сможем произвести операцию свертки, получив в результате ее ковариантный тензор $A^{\alpha}_{i\alpha}$ или $A^{\alpha}_{\alpha j}$. Как уже было отмечено, тензор A^i_{jkl} может быть свернут тремя различными способами в $A^{\alpha}_{\alpha kl}$, $A^{\alpha}_{j\alpha l}$ и $A^{\alpha}_{jk\alpha}$. Тензор A^{ij}_{klm} допускает двукратную свертку несколькими способами. Свертка A^i_j приводит к скаляру.

§ 26. Правило частного

В этом параграфе мы приводим две полезные теоремы, которые позволят нам установить тензорный характер комплектов функций, не загружая себя трудностями непосредственного определения закона преобразования.

Мы пользуемся термином *внутреннее произведение* для сумм типа $A(\alpha, i_2, \ldots, i_r)A_{\alpha}$ или $A(\alpha, i_2, \ldots, i_r)A^{\alpha}$, не различая того, представляет собой комплект функций $A(i_1, \ldots, i_r)$ тензор или не представляет. Кроме того, тензоры первого ранга мы называем *векторами*.

Теорема I (правило частного). *Положим, что* $\{A(i_1, i_2, \ldots, i_r)\}$ *— комплект функций переменных* x^i, *а внутреннее произведение* $A(\alpha, i_2, \ldots, i_r)\xi^{\alpha}$ *с произвольным вектором* ξ *— тензор типа* $A^{j_1 \ldots j_q}_{k_1 \ldots k_p}(x)$; *тогда комплект* $A(i_1, \ldots, i_r)$ *представляет собой тензор типа* $A^{j_1 \ldots j_q}_{\alpha k_1 \ldots k_p}(x)$.

Для того чтобы избежать выписывания длинных формул преобразования тензоров с большим числом ковариантных и контравариантных индексов, установим эту теорему для комплекта n^3 функций $A(i, j, k)$, наделенного всеми особенностями более сложных случаев. Положим, что внутреннее произведение $A(\alpha, j, k)\xi^{\alpha}$ произвольного вектора $\xi^{\alpha}(x)$ дает тензор типа $A^j_k(x)$. Докажем, что комплект $A(i, j, k)$ представляет собой тензор типа A^j_{ik}. Если предположить, что $A(\alpha, j, k)\xi^{\alpha}$ — тензор типа A^j_k, то его преобразование $B(\alpha, j, k)\eta^{\alpha}$ осуществляется по правилу

$$B(\alpha, j, k)\eta^{\alpha} = \frac{\partial x^{\gamma}}{\partial y^k}\frac{\partial y^j}{\partial x^{\beta}}\left\{A(\lambda, \beta, \gamma)\xi^{\lambda}\right\},$$

где

$$\xi^{\lambda}(x) = \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial y^{\alpha}}\eta^{\alpha}(y).$$

Введя это выражение для ξ^{λ} в правую часть вышеприведенной формулы и перенеся все ее члены в одну сторону уравнения, получим

$$\left[B(\alpha, j, k) - \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial y^{\alpha}}\frac{\partial x^{\gamma}}{\partial y^k}\frac{\partial y^j}{\partial x^{\beta}}A(\lambda, \beta, \gamma)\right]\eta^{\alpha} = 0.$$

Но $\eta^{\alpha}(y)$ — произвольный вектор; скобки по этой причине здесь можно устранить, и тогда

$$B(\alpha, j, k) = \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial y^{\alpha}}\frac{\partial y^{\gamma}}{\partial y^k}\frac{\partial y^j}{\partial x^{\beta}}A(\lambda, \beta, \gamma).$$

Таков закон преобразования тензора типа A^j_{ik}.

Можно сформулировать и аналогичную теорему, где вектор ξ будет ковариантным вектором. Если, например, $A(i, j, k, \alpha)\xi_{\alpha}$ является тензором типа A^i_{jk} для произвольного вектора ξ_{α}, то $A(i, j, k, \alpha) = A^{i\alpha}_{jk}$. С другой стороны, если $A(i, j, k, \alpha)\xi_{\alpha} = A^{ijk}$, то $A(i, j, k, \alpha) = A^{ijk\alpha}$. Эти выражения подсказывают, что правило частного может быть использовано при установлении тензорного характера величин. Пусть, например, $A(i, j, k, \alpha)\xi^{\alpha} = A^i_{jk}$. Эту формулу можно представить символически:

$$A(i, j, k, \alpha) = \frac{A^i_{jk}}{\xi_{\alpha}}.$$

Если бы теперь нам потребовалось рассматривать ковариантные величины, входящие в формулу ниже черты деления, в качестве контравариантных, мы поместили бы их над чертой деления

$$A(i, j, k, \alpha) = A^i_{jk}\bar{\xi}^{\alpha},$$

где $\bar{\xi}^{\alpha}$ — символическое представление дроби, обратной ξ_{α}. Из произведения $A^{i}_{jk}\bar{\xi}^{\alpha}$ мы видим, что $A(i, j, k, \alpha) = A^{i\alpha}_{jk}$. Подобным же образом, если $A(i, j, k, \alpha)\xi_{\alpha} = A^{ijk}$, то

$$A(i, j, k, \alpha) = \frac{A^{ijk}}{\xi_{\alpha}} = A^{ijk}\bar{\xi}^{\alpha} = A^{ijk\alpha}.$$

С другой стороны, если $A(\alpha, j, k)\xi^{\alpha} = A^{j}_{k}$, то

$$A(\alpha, j, k) = \frac{A^{j}_{k}}{\xi^{\alpha}} = A^{j}_{k}\bar{\xi}_{\alpha} = A^{j}_{k\alpha}.$$

В правиле частного контравариантные величины, появляющиеся под чертой деления, должны рассматриваться как ковариантные, будучи помещенными поверх черты.

Теорема II. *Пусть $\{A(i_1, \ldots, i_r)\}$ — комплект n^r функций, определенных в координатной системе X, а $\{B(i_1, \ldots, i_r)\}$ соответственные величины в системе Y. Если для каждого комплекта векторов с компонентами ξ_{α}, отнесенными к координатам X, и η_{α_i}, отнесенными к координатам Y, мы получаем равенство*

$$B(\beta_1, \ldots, \beta_r)\eta^{(1)}_{\beta_1} \ldots \eta^{(r)}_{\beta_r} = A(\alpha_1, \ldots, \alpha_r)\xi^{(1)}_{\alpha_1} \ldots \xi^{(r)}_{\alpha_r}$$

(т. е. внутреннее произведение как скаляр), то комплект функций $A(i_1, \ldots, i_r)$ представляет контравариантный тензор ранга r в системе координат X.

Доказательство. Поскольку ξ_{α_i} являются компонентами ковариантного вектора

$$\xi^{(i)}_{\alpha_i} = \frac{\partial y^{\beta_i}}{\partial x^{\alpha_i}}\eta^{(i)}_{\beta_i},$$

то отсюда следует, что

$$\left[B(\beta_1, \ldots, \beta_r) - A(\alpha_1, \ldots, \alpha_r)\frac{\partial y^{\beta_1}}{\partial x^{\alpha_1}} \ldots \frac{\partial y^{\beta_r}}{\partial x^{\alpha_r}}\right]\eta^{(1)}_{\beta_1} \ldots \eta^{(r)}_{\beta_r} = 0.$$

Но $\eta^{(1)}_{\beta_1}, \ldots, \eta^{(r)}_{\beta_r}$ произвольны; на этом основании член в квадратных скобках обращается в нуль, откуда следует, что

$$B(\beta_1, \ldots, \beta_r) = \frac{\partial y^{\beta_1}}{\partial x^{\alpha_1}} \ldots \frac{\partial y^{\beta_r}}{\partial x^{\alpha_r}} A(\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$$

и

$$A(\alpha_1, \ldots, \alpha_r) = A^{\alpha_1 \ldots \alpha_r}.$$

Это следствие правила частного принимается некоторыми авторами как определение контравариантного тензора ранга r.

Так, например, если полилинейная форма $A(\alpha_1, \ldots, \alpha_r)\xi^{(1)}_{\alpha_1}\ldots\xi^{(r)}_{\alpha_r}$ — инвариант, то $A(\alpha_1, \ldots, \alpha_r) = A^{\alpha_1 \ldots \alpha_r}$, если только ξ_{α_i} являются компонентами произвольных векторов. С другой стороны, если $A(\alpha_1, \ldots \alpha_r)\xi^{\alpha_1}_{(1)} \ldots \xi^{\alpha_r}_{(r)}$ — инвариант для произвольного выбора ξ^{α}, то

$$A(\alpha_1, \ldots, \alpha_r) = A_{\alpha_1 \ldots \alpha_r}.$$

Из доказательств теорем I и II очевидно, что можно установить и много других законов «деления». Например, если внутреннее произведение $A(i, \alpha)\xi_{\alpha j}$ комплекта n^2 функций $A(i, j)$ с *произвольным* тензором представляет собой ковариантный тензор второго ранга, то $A(i, j)$ представляет собой смешанный тензор типа A^j_i. Читатель сможет доказать это, следуя образцу, использованному в доказательстве теоремы I. Тензорные свойства комплекта $A(i, j)$ можно обнаружить в алгоритме «деления». Так, например, если $A(i, \alpha)\xi_{\alpha j} = \mathcal{A}_{ij}$, то $A(i, \alpha) = \mathcal{A}_{ij}/\xi_{\alpha j}$. Если мы теперь запишем символическую обратную по отношению к $\xi_{\alpha j}$ дробь как $\bar{\xi}^{\alpha j}$, то получим $A(i, \alpha) = \mathcal{A}_{ij}/\xi_{\alpha j} = \mathcal{A}_{ij}\bar{\xi}^{\alpha j} = A^{\alpha}_i$.

§ 27. Симметричные и кососимметричные тензоры

В тех случаях, когда обмен местами двух ковариантных (или контравариантных) индексов в компонентах $A^{i_1 \ldots i_r}_{j_1 \ldots j_s}(x)$ тензора не меняет значения компонентов, говорят, что такой тензор A симметричен относительно этих индексов. Например, ковариантный тензор $A_{ij}(x)$ симметричен, если $A_{ij}(x) = A_{ji}(x)$. Определение симметрии тензоров не было бы, очевидно, удовлетворительным, если бы симметрия их компонентов не сохранялась при преобразованиях координат. Для того, чтобы убедиться, что это действительно так, предположим, что $A_{i_1 i_2 \ldots i_r}(x) = A_{i_2 i_1 \ldots i_r}(x)$, Тогда $A_{i_1 i_2 \ldots i_r} - A_{i_2 i_1 \ldots i_r} = 0$. Но разность двух тензоров есть тензор, и если тензор обращается в нуль в одной координатной системе, то он обращается в нуль и во всех допустимых системах. Поэтому

$$B_{i_1 i_2 \ldots i_r}(y) = B_{i_2 i_1 \ldots i_r}(y).$$

Мы говорим, что тензор *кососимметричен* (или антисимметричен) по отношению к некоторым индексам всякий раз, когда обмен местами между парой ковариантных (или контравариантных) индексов в компонентах меняет только знак в этих компонентах. Антисимметрия тензоров точно так же является инвариантным свойством. Доказательство инвариантности свойства антисимметрии сходно с предложенным выше для симметрии. В качестве упражнения читателю рекомендуется построить это доказательство на основе закона преобразования компонентов $A^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_s}$.

Понятия симметрии и антисимметрии будут расширены в § 40.

§ 28. Относительные тензоры

Вспомним, что функция $f(x^1, \dots, x^n)$ представляет скаляр в системе отсчета X во всех тех случаях, когда в системе отсчета Y, определяемой преобразованием $x^i = x^i(y^1, \dots, y^n)$, скаляр задается формулой $g(y^1, \dots, y^n) = f[x^1(y), \dots, x^n(y)]$. В дальнейшем мы встретимся с функциями $f(x)$, которые преобразуются по более общему закону, а именно

$$g(y^1, \dots, y^n) = f[x^1(y), \dots, x^n(y)] \left| \frac{\partial x^i}{\partial y^j} \right|^W, \tag{28.1}$$

где $\left| \frac{\partial x^i}{\partial y^j} \right|$ обозначает якобиан преобразования, а W — постоянную величину. Заметим, что если функция $f(x)$ преобразуется в соответствии с законом (28.1), то

$$h(z) = f(x) \left| \frac{\partial x^i}{\partial z^j} \right|^W = f(x) \left| \frac{\partial x^i}{\partial y^j} \right|^W \left| \frac{\partial y^k}{\partial z^l} \right|^W = g(y) \left| \frac{\partial y^k}{\partial z^l} \right|^W,$$

где мы использовали теорему II из § 20. Таким образом, формула (28.1) определяет класс инвариантных функций, называемых *относительными скалярами веса* W.

Относительный скаляр нулевого веса определен в § 21. Иногда скаляр нулевого веса называется *абсолютным скаляром*.

Относительный скаляр единичного веса называется *скалярной плотностью*. Обоснованием такой терминологии может служить выражение для полной массы распределения материи плотности $\rho(x^1, x^2, x^3)$ в прямоугольных декартовых координатах x^i. Масса, содержащаяся в объеме τ, выражается интегралом $M = \int\int_\tau\int \rho(x^1, x^2, x^3)\, dx^1\, dx^2\, dx^3$. Если координаты x^i изменяются с помощью уравнений преобразования $x^i = x^i(y^1, y^2, y^3)$ $(i = 1, 2, 3)$, то масса M выразится интегралом

$$M = \int\int_r\int \rho[x(y)] \left| \frac{\partial x^i}{\partial y^j} \right| dy^1\, dy^2\, dy^3 \equiv \int\int_r\int \bar{\rho}(y^1, y^2, y^3)\, dy^1\, dy^2\, dy^3.$$

Очевидно, что плотность распределения, будучи отнесенной к координатам Y, выразится формулой $\bar{\rho}(y) = \rho(x) \left| \frac{\partial x^i}{\partial y^j} \right|$, Мы можем таким образом обобщить закон преобразования компонентов смешанного тензора, введя комплекты величин $A^{j_1 \dots j_s}_{i_1 \dots i_r}(x)$, выполняющих преобразования по формуле

$$B^{j_1 \dots j_s}_{i_1 \dots i_r}(y) = \left|\frac{\partial x^i}{\partial y^j}\right|^W \frac{\partial y^{j_1}}{\partial x^{\alpha_1}} \dots \frac{\partial y^{j_s}}{\partial x^{\alpha_s}} \cdot \frac{\partial x^{\beta_1}}{\partial y^{i_1}} \dots \frac{\partial x^{\beta_r}}{\partial y^{i_r}} A^{\alpha_1 \dots \alpha_s}_{\beta_1 \dots \beta_r}(x). \quad (28.2)$$

Комплекты величин $A^{\alpha_1 \dots \alpha_s}_{\beta_1 \dots \beta_r}(x)$, следующих этому закону преобразования, называются компонентами *относительного тензора веса W*.

Из выкладок § 24 и транзитивного свойства якобианов, а именно

$$\left|\frac{\partial x^i}{\partial z^j}\right| = \left|\frac{\partial x^i}{\partial y^k}\right| \left|\frac{\partial y^k}{\partial z^j}\right|,$$

следует, что преобразование (28.2) транзитивно. Кроме того, из линейного и однородного характера этого преобразования следует, что если все компоненты относительного тензора обращаются в нуль в одной координатной системе, то они обращаются в нуль и в любой другой координатной системе. Непосредственное следствие из этого свойства заключается в том, что тензорное уравнение в относительных тензорах, справедливое в одной координатной системе, верно и во всех других координатных системах. В этом случае относительные тензоры в обеих частях уравнений должны быть одинакового веса.

Читатель может легко убедиться также в том, что:

(а) относительные тензоры одного и того же типа и веса допускают операцию сложения, причем относительный тензор, получающийся в результате суммирования, принадлежит к тому же типу и имеет тот же вес, что и слагаемые;

(б) относительные тензоры могут быть взаимно умножены и вес результата определяется как сумма весов тензоров, входящих в произведение;

(в) операция свертки относительного тензора дает относительный тензор того же веса, что и начальный.

Для того чтобы отличить рассмотренные в предыдущих параграфах смешанные тензоры от относительных тензоров, для первых часто применяется также термин *абсолютный тензор*. В применениях теории тензоров нам в дальнейшем придется встретиться с некоторыми относительными тензорами.

Задачи

1. Дано соотношение $A(i, j, k) B^{jk} = C^i$, где B^{jk} — произвольный симметричный тензор. Доказать, что $A(i, j, k) + A(i, k, j)$ — тензор. Затем вывести, что если $A(i, j, k)$ симметричен относительно j и k, то $A(i, j, k)$ — тензор.

2. Дано соотношение $A(i,j,k)B^{jk} = C^i$, где B^{ik} — произвольный кососимметричный тензор. Доказать, что $A(i,j,k) - A(i,k,j)$ — тензор, и, исходя из этого, доказать, что если $A(i,j,k)$ — тензор, кососимметричный относительно j и k, то $A(i,j,k)$ — тензор.

3. Показать, что если $a(i,j)dx^i dx^j$ — инвариант для произвольного вектора dx^i и $a(i,j)$ симметричен, то $a(i,j)$ — тензор a_{ij}.

4. Показать, что если a_{ij} — тензор, то A^{ij} — алгебраическое дополнение a_{ij} в $|a_{ij}|$, разделенном на $|a_{ij}| \neq 0$, есть тензор.

5. Показать, что если $\varphi(x^1, \ldots, x^n)$ — скаляр, то $\{\partial^2\varphi/\partial x^i \partial x^j\}$ есть тензор относительно комплекта *линейных* преобразований координат.

6. Показать, что если $|a_{ij} - \lambda b_{ij}| = 0$ для $\lambda = \lambda_1$ в одном комплекте переменных, то $|a_{ij} - \lambda b_{ij}| = 0$ для $\lambda = \lambda_1$ в новом комплекте переменных. Иначе говоря, корни полинома $|a_{ij} - \lambda b_{ij}|$ — инварианты.

7. Доказать, что тензор с кососимметричными компонентами в одной координатной системе имеет кососимметричные компоненты во всех координатных системах.

8. Показать, что каждый тензор может быть выражен суммой двух тензоров — одного симметричного и другого кососимметричного.

9. Показать, что тензорное уравнение $a^i_j \lambda_i = \alpha \lambda_j$, где α — инвариант, а λ_j — произвольный вектор, требует, чтобы $a^i_j = \delta^i_j \alpha$.

10. Доказать непосредственно из закона преобразования компонентов, что симметрия тензора представляет собой инвариантное свойство.

11. Квадрат элемента дуги ds задан в виде

$$ds^2 = g_{ij}\, dx^i\, dx^j.$$

Пусть T — допустимое преобразование координат $x^i = x^i(y^1, \ldots, y^n)$, тогда $ds^2 = h_{ij} dy^i dy^j$. Доказать, что $|g_{ij}|$ — относительный скаляр веса 2. *Указание.* $h_{ij}(y) = \dfrac{\partial x^\alpha}{\partial y^i} \dfrac{\partial x^\beta}{\partial y^j} g_{\alpha\beta}(x)$. Вспомнить правило умножения детерминантов.

12. Сколько независимых компонентов имеется в кососимметричном тензоре второго ранга?

13. Показать, что если a_{ij} — кососимметричный тензор и A^i — контравариантный вектор, то $a_{ij}A^iA^j = 0$.

14. Доказать, что если $A(i,j,k)A^iB^jC_k$ — скаляр для произвольных векторов A^i, B^j и C_k, то $A(i,j,k)$ — тензор.

§ 29. Метрический тензор

В § 5 мы ввели понятие n-мерного пространства E_n путем расширения представлений, знакомых нам из обычной геометрии Евклида. Так, например, определяя длину $|\boldsymbol{x}|$ вектора $\boldsymbol{x}$, мы воспользовались обобщенной формулой Пифагора $|\boldsymbol{x}| = \sqrt{x^i x^i}$, где x^i — компоненты вектора $\boldsymbol{x}$, отнесенные к декартовой прямоугольной системе осей (см. § 5). Если мы теперь рассмотрим вектор перемещения dx^i $(i = 1, \ldots, n)$, определяемый парой точек $P(x)$ и $P'(x + dx)$, где x^i — декартовы прямоугольные координаты, то формула Пифагора даст для квадрата расстояния между P и P' выражение

$$ds^2 = dx^i\, dx^i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{29.1}$$

Мы назовем ds *элементом дуги* в E_n.

Изменение координатной системы, определяемое преобразованием

$$x^i = x^i(y^1, \ldots, y^n), \tag{29.2}$$

позволит нам привести формулу (29.1) к виду

$$ds^2 = \frac{\partial x^i}{\partial y^\alpha}\frac{\partial x^i}{\partial y^\beta}dy^\alpha\, dy^\beta, \tag{29.3}$$

поскольку $dx^i = (\partial x^i/\partial y^\alpha)dy^\alpha$. Мы вправе, таким образом, задать формулу для квадрата элемента дуги в системе отсчета Y как квадратичную форму

$$ds^2 = g_{\alpha\beta}\, dy^\alpha\, dy^\beta, \tag{29.4}$$

где коэффициенты $g_{\alpha\beta}(y)$ определяются из

$$g_{\alpha\beta}(y) = \frac{\partial x^i}{\partial y^\alpha}\frac{\partial x^i}{\partial y^\beta}. \tag{29.5}$$

Эти коэффициенты — функции переменных (y^i) и, очевидно, симметричны относительно индексов α и β.

Так как квадрат элемента дуги ds — инвариант, заключаем (см. задачу 3), что комплект функций $g_{\alpha\beta}(y)$ является *симметричным тензором*. Этот тензор называется *метрическим тензором*, поскольку, как это мы увидим в главе III, все существенные метрические свойства евклидова пространства полностью определятся этим тензором.

Мы пришли к формуле (29.4), исходя из выражения (29.1), характеризующего евклидово пространство. Преобразование координат (29.2), очевидно, не изменяет его метрических свойств, формула же (29.4) легко позволяет нам вычислять расстояния в евклидовом пространстве, как только мы ввели в него координатную систему Y. Начав с формы (29.1) и преобразования (29.2), мы показали, что комплект n функций (29.2) удовлетворяет системе, состоящей из $^1/_2 n(n+1)$ частных дифференциальных уравнений (29.5), в которых $g_{\alpha\beta}(y)$ — известные функции переменных y. Однако если функции $g_{\alpha\beta}$ выбраны произвольно, то система $^1/_2 n(n+1)$ дифференциальных уравнений в частных производных (29.5) для n неизвестных функций $x^i(y)$ вообще не имеет решения. В случае же, если $g_{\alpha\beta}$ таковы, что система (29.5) имеет решение, существование преобразования координат, приводящего квадратичную форму (29.4) к сумме квадратов (29.1), гарантировано. В этом случае метрический тензор $g_{\alpha\beta}$ определяет евклидово пространство. Если, наоборот, функции $g_{\alpha\beta}(y)$ таковы, что система (29.5) не имеет решения, то это значит, что никакого допустимого преобразования координат, приводящего выражение (29.4) для квадрата элемента дуги к пифагоровой форме, не существует. Совокупность необходимых и достаточных условий интегрируемости уравнений (29.5) выводится в § 39.

В остальной части этой главы мы будем предполагать, что наши тензоры определены в метрических пространствах и что элемент дуги ds задан квадратичной формой $ds^2 = g_{ij}(x)dx^i dx^j$, где g_{ij} — функции, принадлежащие классу C^1. Мы принимаем также, что симметричный тензор $g_{jj}(x)$ таков, что $|g_{jj}| \neq 0$ в любой точке рассматриваемой области, но воздерживаемся от допущения, что наше пространство обязательно евклидово.

Задачи

1. Пусть в E_3 введена декартова ортогональная система координат x^i и дано преобразование этой системы

$$x^1 = y^1 \sin y^2 \cos y^3,$$
$$x^2 = y^1 \sin y^2 \sin y^3,$$
$$x^3 = y^1 \cos y^2,$$

где y^i — сферические полярные координаты ($y^1 = r$, $y^2 = \theta$, $y^3 = \varphi$). Найти значения метрических коэффициентов $g_{ij}(y)$.

2. Пусть в E_3 введена декартова ортогональная система координат x^i, и пусть

$$x^1 = y^1 \cos y^2,$$
$$x^2 = y^1 \sin y^2.$$
$$x^3 = y^3$$

выражают преобразование к цилиндрическим координатам y^i. Найти выражение для ds^2 в цилиндрических координатах.

3. В E_3 введена система декартовых ортогональных координат x^i, и пусть $x^i = a^i_j y^j$, $|a^i_j| \neq 0$ ($i, j = 1, 2, 3$) — линейное преобразование координат. Определить метрические координаты $g_{ij}(y)$. Исследовать случай ортогонального преобразования.

§ 30. Фундаментальный тензор и ассоциированные с ним тензоры

Пусть $g_{ij}(x)$ представляет собой симметричный тензор, принадлежащий к классу C^1, причем $g = |g_{ij}| \neq 0$ в каждой из точек области. Построим с помощью комплекта функций $g_{ij}(x)$ новый комплект функций $g^{ij}(x)$, представляющих контравариантный тензор, обладающий тем свойством, что $g^{ij} g_{kj} = \delta^i_k$. Тензоры $g_{ij}(x)$ и $g^{ij}(x)$ будут играть существенную роль в наших дальнейших исследованиях и по этой причине будут называться *фундаментальными тензорами.*

Составим комплект n^2 функций

$$g(i, j) = \frac{G^{ij}}{g}, \tag{30.1}$$

где G^{ij} — алгебраическое дополнение элемента g_{ij} в детерминанте g. Обозначение, введенное в определении (30.1), наводит на мысль, что $g(i, j)$ образуют контравариантный тензор, и мы действительно докажем, что они определяют симметричный контравариантный тензор g^{ij}. Симметрия комплекта функций $g(i, j)$ следует непосредственно из того наблюдения, что детерминант, получаемый путем изъятия i-й строки и j-го столбца в симметричном детерминанте g_{ij}, имеет то же самое значение, что и детерминант, получаемый путем изъятия j-й строки и i-го столбца. Докажем теперь, пользуясь правилом частного, что $g(i, j)$ преобразуются согласно контравариантному закону. Отметим сначала, что если ξ^i — произвольный контравариантный вектор, то

$$\xi_i \equiv g_{\alpha i}\xi^\alpha \tag{30.2}$$

— произвольный ковариантный вектор, поскольку $|g_{ij}| \neq 0$. Если теперь обе части формулы (30.2) умножить на $g(\beta, i) = G^{\beta i}/g$ и суммировать по i, то мы получим

$$g(\beta, i)\,\xi_i = \frac{G^{\beta i}}{g} g_{\alpha i}\xi^\alpha. \tag{30.3}$$

Но в силу (7.4) $G^{\beta i}g_{\alpha i} = g\delta^\beta_\alpha$, и потому формула (30.3) примет упрощенный вид

$$g(\beta, i)\,\xi_i = \xi^\beta.$$

Поскольку ξ_i произвольная, заключаем из теоремы I, § 26, что $g(\beta, i)$ — контравариантный тензор второго ранга. Поэтому формула (30.1) принимает вид

$$g^{ij} \equiv \frac{G^{ij}}{g}. \tag{30.4}$$

Соотношение взаимности $g^{ij}g_{kj} = \delta^i_k$ следует непосредственно из того факта, что $G^{ij}g_{kj} = \delta^i_k g$. В данном случае мы вправе заключить, что комплект алгебраических дополнений G^{ij} представляет контравариантный тензор веса 2. Это следует из задачи 11 § 28, где указано, что детерминант $|g_{ij}|$ есть относительный скаляр веса 2.

Тензор, получаемый процессом внутреннего перемножения произвольного тензора $A^{i_1 \ldots i_r}_{j_1 \ldots j_s}$ с одним из фундаментальных тензоров g_{ij} или g^{ij}, называется тензором, *ассоциированным* с заданным тензором.

В качестве иллюстрации такого определения рассмотрим тензор A_{ijk} и образуем следующие внутренние произведения: $g^{\alpha i}A_{ijk} \equiv A^{\alpha}_{\cdot jk}$, $g^{\alpha j}A_{ijk} \equiv A^{\alpha}_{i \cdot k}$, $g^{\alpha k}A_{ijk} \equiv A^{\alpha}_{ij \cdot}$. Все эти тензоры ассоциированы с тензором A_{ijk}. Действуя на эти тензоры тензором

g^{ij}, мы можем получить и другие ассоциированные тензоры. Следует заметить, что операция внутреннего умножения g_{ij} с любым тензором, например A^{ijk}_{lm}, опускает индекс, по которому производится суммирование. Например, $g_{\alpha\beta}A^{ij\alpha}_{lm} = A^{ij\cdot}_{lm\beta}$, в то время как $g^{\alpha\beta}A^{ijk}_{l\alpha} = A^{ijk\beta}_{l\cdot}$. Процедура поднятия и опускания индексов, очевидно, обратима. В предыдущих формулах положение, занимавшееся поднятым (или опущенным) индексом, отмечается точкой. Вообще такие системы, как $g^{i\alpha}A_{j\alpha} = A^{i}_{j\cdot}$ и $g^{i\alpha}A_{\alpha j} = A^{i}_{\cdot j}$, различны. Они тождественны в тех случаях, когда $A_{ij} = A_{ji}$.

Все тензоры, ассоциированные с заданным, можно рассматривать как один-единственный тензор, представленный в различных системах отсчета. Такая интерпретация в особенности проста для ковариантного вектора A_i и ассоциированного с ним вектора $g^{i\alpha}A_\alpha = A^i$ во всех случаях, когда пространство евклидово. Мы вернемся к этому вопросу в § 45.

§ 31. Символы Кристоффеля

Введем в этом параграфе некоторые комбинации частных производных от фундаментального тензора $g_{ij}(x)$, которые в дальнейшем окажутся полезными в развитии тензорного исчисления. Построим совокупность функций, обозначаемых символом

$$[ij, k] \equiv \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\right) \qquad (i, j, k = 1, \ldots, n), \qquad (31.1)$$

и назовем их *3-индексными символами Кристоффеля первого рода*. Совокупности функций

$$\left\{ {k \atop ij} \right\} \equiv g^{k\alpha}[ij, \alpha], \qquad (31.2)$$

где $g^{k\alpha}$ — контравариантный тензор, построенный с помощью g_{ij} по способу, изложенному в предыдущем параграфе, представляют собой *3-индексные символы Кристоффеля второго рода.*

Существует, очевидно, n различных символов Кристоффеля каждого рода для каждого независимого g_{ij}, а поскольку число независимых g_{ij} равно $\frac{1}{2}n(n+1)$, число N независимых символов Кристоффеля определится как $N = \frac{1}{2}n^2(n+1)$. Переходим к выводу некоторых свойств и тождеств, относящихся к символам Кристоффеля, в полезности которых мы убедимся в дальнейшем.

Из определений (31.1) и (32.2) ясно, что символы Кристоффеля симметричны относительно индексов i и j. Поэтому

$$[ij, k] = [ji, k] \tag{31.3}$$

и

$$\left\{ {k \atop ij} \right\} = \left\{ {k \atop ji} \right\}. \tag{31.4}$$

Из определяющей формулы (31.2) видно, что от символа первого рода $[ij, \alpha]$ мы можем перейти к символу $\left\{ {k \atop ij} \right\}$, образовав внутреннее произведение $g^{k\alpha}[ij, \alpha]$. Если теперь умножить уравнение (31.2) на $g_{k\beta}$ и вспомнить, что $g_{k\beta}g^{k\alpha} = \delta_\beta^\alpha$, то мы придем к формуле

$$g_{k\beta}\left\{ {k \atop ij} \right\} = \delta_\beta^\alpha [ij, \alpha] = [ij, \beta]. \tag{31.5}$$

Формулы (31.2) и (31.5) легко запоминаются, если заметить, что операция внутреннего умножения прямоугольных скобок $[ij, \alpha]$ на $g^{k\alpha}$ поднимает индекс и заменяет прямоугольные скобки фигурными. Умножение же $\left\{ {k \atop ij} \right\}$ на $g_{k\alpha}$, наоборот, опускает индекс и заменяет фигурные скобки прямоугольными. Формально эти операции умножения на $g^{k\alpha}$ и $g_{k\alpha}$ аналогичны поднятию и опусканию индексов у тензоров, но в дальнейшем мы увидим, что символы Кристоффеля вообще не являются тензорами.

Из (31.1) выводим непосредственно выражение для частных производных фундаментального тензора g_{ij} в символах первого рода. Они имеют вид

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} = [ik, j] + [jk, i], \tag{31.6}$$

что можно записать также и иначе:

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} = g_{\alpha j}\left\{ {\alpha \atop ik} \right\} + g_{\alpha i}\left\{ {\alpha \atop jk} \right\}, \tag{31.7}$$

если учесть (31.5). Аналогичную формулу для частных производных контравариантного тензора g^{ij} можно получить путем дифференцирования тождества $g_{i\alpha}g^{\alpha j} = \delta_i^j$ по x^k:

$$\frac{\partial g_{i\alpha}}{\partial x^k} g^{\alpha j} + g_{i\alpha}\frac{\partial g^{\alpha j}}{\partial x^k} = 0,$$

или

$$g_{i\alpha}\frac{\partial g^{\alpha j}}{\partial x^k} = -g^{\alpha j}\frac{\partial g_{i\alpha}}{\partial x^k}.$$

Для решения системы уравнений относительно $\partial g^{\alpha j}/\partial x^k$ умножаем обе стороны на $g^{i\beta}$, в результате чего находим

$$g^{i\beta} g_{i\alpha} \frac{\partial g^{\alpha j}}{\partial x^k} = - g^{i\beta} g^{\alpha j} \frac{\partial g_{i\alpha}}{\partial x^k}.$$

Поскольку $g^{i\beta} g_{i\alpha} = \delta^\beta_\alpha$, получаем

$$\frac{\partial g^{\beta j}}{\partial x^k} = - g^{i\beta} g^{\alpha j} ([ik, \alpha] + [\alpha k, i]),$$

где мы воспользовались формулой (31.6). Учтя определение (31.2), приходим к окончательному виду

$$\frac{\partial g^{\beta j}}{\partial x^k} = - g^{i\beta} \left\{ {j \atop ik} \right\} - g^{\alpha j} \left\{ {\beta \atop \alpha k} \right\},$$

тождественному с формулой

$$\frac{\partial g^{ij}}{\partial x^k} = - g^{\alpha i} \left\{ {j \atop \alpha k} \right\} - g^{\alpha j} \left\{ {i \atop \alpha k} \right\}. \qquad (31.8)$$

Закончим этот параграф выводом формулы для производной логарифма от детерминанта $|g_{ij}|$; она будет нам полезна в формулировке компактного выражения для дивергенции векторного поля, а также и в некоторых других случаях.

Детерминант $g = |g_{ij}|$ можно разложить по минорам и получить таким путем выражение

$$\left.\begin{array}{l} g = g_{i1} G^{i1} + g_{i2} G^{i2} + \ldots + g_{in} G^{in} \quad (\textit{без суммирования по } i \textit{ или } n) \\ \text{или} \\ g = g_{i\alpha} G^{i\alpha} \quad (\text{с суммированием } \textit{лишь} \text{ по } \alpha \text{ при фиксированном } i), \end{array}\right\} \qquad (31.9)$$

где G^{ij} — алгебраическое дополнение элемента g_{ij}. Поскольку выражения $g_{i\alpha}$ являются функциями от $x^1, \ldots, x^n$, выражения $G^{i\alpha}$ также являются функциями тех же переменных. Из (31.9) выводим

$$\frac{\partial g}{\partial g_{ij}} = \frac{\partial (g_{i\alpha} G^{i\alpha})}{\partial g_{ij}} = g_{i\alpha} \frac{\partial G^{i\alpha}}{\partial g_{ij}} + G^{i\alpha} \frac{\partial g_{i\alpha}}{\partial g_{ij}} \quad (\text{суммируется лишь по } \alpha \text{ при фиксированном } i).$$

Поскольку $G^{i\alpha}$ не содержит g_{ij}, $\partial G^{i\alpha}/\partial g_{ij} = 0$, и так как g_{ij} — независимые переменные в этой формуле, $\partial g_{i\alpha}/\partial g_{ij} = \delta^j_\alpha$. Отсюда

$$\frac{\partial g}{\partial g_{i}} = G^{i\alpha} \delta^j_\alpha = G^{ij},$$

но

$$\frac{\partial g}{\partial x^i}=\frac{\partial g}{\partial g_{\alpha\beta}}\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^i}=G^{\alpha\beta}\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^i},$$

и если мы вспомним, что $g^{\alpha\beta}=G^{\alpha\beta}/g$, то предыдущая формула преобразуется в

$$\frac{\partial g}{\partial x^i}=gg^{\alpha\beta}\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^i}.$$

Подставив сюда вместо $\partial g_{\alpha\beta}/\partial x^i$ значение из (31.7), получим

$$\frac{\partial g}{\partial x^i}=gg^{\alpha\beta}\left(g_{\gamma\beta}\begin{Bmatrix}\gamma\\ \alpha i\end{Bmatrix}+g_{\gamma\alpha}\begin{Bmatrix}\gamma\\ \beta i\end{Bmatrix}\right)=g\left(\begin{Bmatrix}\alpha\\ \alpha i\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}\beta\\ \beta i\end{Bmatrix}\right)=2g\begin{Bmatrix}\alpha\\ \alpha i\end{Bmatrix}.$$

Мы вправе поэтому утверждать что $\frac{1}{2g}\frac{\partial g}{\partial x^i}=\begin{Bmatrix}\alpha\\ i\alpha\end{Bmatrix}$ и заключить отсюда, что

$$\frac{\partial}{\partial x^i}\lg\sqrt{g}=\begin{Bmatrix}\alpha\\ i\alpha\end{Bmatrix}. \tag{31.10}$$

Закончим этот параграф несколькими замечаниями о различных обозначениях символов Кристоффеля, используемых различными авторами. Обозначение $[ij,\ k]$ для символа первого рода принято почти универсально. Символ же $\begin{Bmatrix}k\\ ij\end{Bmatrix}$ встречается в нескольких вариантах. Многие авторы предпочитают пользоваться обозначением $\{ij,\ k\}$. Поль Аппель[1]) пользуется обозначением $\begin{bmatrix}ij\\ k\end{bmatrix}$ для символа первого рода и $\begin{Bmatrix}ij\\ k\end{Bmatrix}$ — для символа второго рода. Последователи Принстонской школы (США) пользуются обычно символом Γ^k_{ij} вместо $\begin{Bmatrix}k\\ ij\end{Bmatrix}$, принятого в этой книге. Хотя обозначение Γ^k_{ij} обладает некоторыми преимуществами, оно вместе с тем внушает представление, что символ второго рода является тензором. Это, однако, не всегда бывает правильно, как мы сможем в этом убедиться из дальнейших выкладок в § 32.

Задачи

1. Показать, что $\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}-\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i}=[jk,\ i]-[ij,\ k]$.

2. Показать, что если $g_{ij}=0$ для $i\neq j$, то $\begin{Bmatrix}k\\ ij\end{Bmatrix}=0$, если i, j и k различны.

---

[1]) Appell P., Trauté de mécanique rationelle, т. 5.

3. Показать, что если $g_{ij}=0$ для $i\neq j$, то

$$\left\{ {i \atop ii} \right\} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x^i}\lg g_{ii},\quad \left\{ {i \atop ij} \right\} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x^j}\lg g_{ii},\quad \left\{ {i \atop jj} \right\} = -\frac{1}{2g_{ii}}\frac{\partial g_{jj}}{\partial x^i},$$

где мы отменяем соглашение о суммировании и предполагаем, что $i\neq j$.

4. Показать, что если $|g_{ij}|\neq 0$, то

$$g_{\alpha\beta}\frac{\partial}{\partial x^j}\left\{ {\beta \atop ik} \right\} = \frac{\partial}{\partial x^j}[ik,\alpha] - \left\{ {\beta \atop ik} \right\}([\beta j,\alpha]+[\alpha j,\beta]).$$

5. Если $y^i = a^i_j x^j$ есть преобразование из системы прямоугольных декартовых переменных y^i в систему косоугольных декартовых координат x^i, введенную в E_3, то каковы должны быть метрические коэффициенты g_{ij} в $ds^2 = g_{ij}\,dx^i\,dx^j$?

§ 32. Преобразование символов Кристоффеля

Мы уже заметили, что символы Кристоффеля в общем случае не представляют тензоров. Выведем в этом параграфе законы преобразования для совокупностей функций $[ij, k]$ и $\left\{ {k \atop ij} \right\}$ при преобразованиях координат $y^i = y^i(x^1, \ldots, x^n)$, относимых нами отныне к классу C^2. Функции $g_{ij}(x)$, как уже принято, принадлежат классу C^1, а их преобразования к координатной системе Y обозначаются символами $h_{ij}(y)$, так что

$$h_{ij} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^i}\frac{\partial x^\beta}{\partial y^j}g_{\alpha\beta}. \tag{32.1}$$

Построим символы Кристоффеля ${}_y[ij, k]$, где индекс y указывает на то, что они отнесены к координатной системе Y, тогда

$${}_y[ij, k] = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial h_{ik}}{\partial y^j} + \frac{\partial h_{jk}}{\partial y^i} - \frac{\partial h_{ij}}{\partial y^k}\right). \tag{32.2}$$

Дифференцируя (32.1), получаем

$$\frac{\partial h_{ij}}{\partial y^k} = g_{\alpha\beta}\left(\frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial y^k\,\partial y^i}\frac{\partial x^\beta}{\partial y^j} + \frac{\partial^2 x^\beta}{\partial y^k\,\partial y^j}\frac{\partial x^\alpha}{\partial y^i}\right) + \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^i}\frac{\partial x^\beta}{\partial y^j}\frac{\partial x^\gamma}{\partial y^k}\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma}.$$

Поскольку $g_{\alpha\beta}=g_{\beta\alpha}$, мы вправе поменять местами индексы суммирования α и β во втором члене внутри скобок и получить таким путем

$$\frac{\partial h_{ij}}{\partial y^k} = g_{\alpha\beta}\left(\frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial y^k\,\partial y^i}\frac{\partial x^\beta}{\partial y^j} + \frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial y^k\,\partial y^j}\frac{\partial x^\beta}{\partial y^i}\right) + \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^i}\frac{\partial x^\beta}{\partial y^j}\frac{\partial x^\gamma}{\partial y^k}\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma}.$$

Частные производные $\partial h_{jk}/\partial y^i$ и $\partial h_{ik}/\partial y^j$, входящие в (32.2), могут быть получены из этой формулы циклической перестановкой индексов, а подстановка в (32.2) дает

$$ {}_y[ij,\, k] = \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^i}\frac{\partial x^\beta}{\partial y^j}\frac{\partial x^\gamma}{\partial y^k}\, {}_x[\alpha\beta,\, \gamma] + \frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial y^i\,\partial y^j}\frac{\partial x^\beta}{\partial y^k}\, g_{\alpha\beta}, \tag{32.3} $$

т. е. формулу, указывающую на то, что символ $[\alpha\beta, \gamma]$ не является тензором, если только второй член в правой его части не обращается в нуль. Второй член обратится тождественно в нуль, если преобразование координат окажется аффинным, т. е. если $y^i = c^i_j x^j$, а c^i_j будут постоянными величинами.

Точно так же легко показать, что и символы Кристоффеля второго рода вообще не являются тензорами. Действительно, из формулы (31.2) мы замечаем, что

$$ {}_y\left\{ {k \atop ij} \right\} = h^{k\mu}\, {}_y[ij,\, \mu], $$

где

$$ h^{k\mu} = \frac{\partial y^k}{\partial x^\rho}\frac{\partial y^\mu}{\partial x^\sigma}\, g^{\rho\sigma}. $$

Если мы умножим (32.3) (заменив k на μ) слева на $h^{k\mu}$ и справа на равную ему величину из формулы, приведенной строкой выше, то, упростив результат, получим

$$ {}_y\left\{ {k \atop ij} \right\} = \frac{\partial y^k}{\partial x^\rho}\frac{\partial x^\alpha}{\partial y^i}\frac{\partial x^\beta}{\partial y^j}\, g^{\rho\gamma}\, {}_x[\alpha\beta,\ \gamma] + \frac{\partial y^k}{\partial x^\rho}\frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial y^i\,\partial y^j}\, g^{\rho\beta} g_{\alpha\beta}. $$

Таким образом,

$$ {}_y\left\{ {k \atop ij} \right\} = \frac{\partial y^k}{\partial x^\rho}\frac{\partial x^\alpha}{\partial y^i}\frac{\partial x^\beta}{\partial y^j}\, {}_x\left\{ {\rho \atop \alpha\beta} \right\} + \frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial y^i\,\partial y^j}\frac{\partial y^k}{\partial x^\alpha}, \tag{32.4} $$

откуда видно, что *символы второго рода не являются тензорами, за исключением того случая, когда преобразование координат аффинно.*

Система уравнений (32.4) может быть решена относительно $\partial^2 x^\alpha / \partial y^i \partial y^j$ следующим способом: умножим (32.4) на $\partial x^m/\partial y^k$, суммируем по $k = \gamma$, в результате чего находим

$$ {}_y\left\{ {\gamma \atop ij} \right\} \frac{\partial x^m}{\partial y^\gamma} = \frac{\partial x^m}{\partial y^\gamma}\frac{\partial y^\gamma}{\partial x^\rho}\frac{\partial x^\alpha}{\partial y^i}\frac{\partial x^\beta}{\partial y^j}\, {}_x\left\{ {\rho \atop \alpha\beta} \right\} + \frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial y^i\,\partial y^j}\frac{\partial x^m}{\partial y^\gamma}\frac{\partial y^\gamma}{\partial x^\alpha}. $$

Поскольку $\partial x^m/\partial x^\rho = \delta^m_\rho$, а $\partial x^m/\partial x^\alpha = \delta^m_\alpha$, то это выражение дает

$$ \frac{\partial^2 x^m}{\partial y^i\,\partial y^j} = {}_y\left\{ {\gamma \atop ij} \right\} \frac{\partial x^m}{\partial y^\gamma} - {}_x\left\{ {m \atop \alpha\beta} \right\} \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^i}\frac{\partial x^\beta}{\partial y^j}. \tag{32.5} $$

Очевидно, что y и x можно поменять местами, и тогда соотношение (32.5) примет вид

$$ \frac{\partial^2 y^m}{\partial x^i\,\partial x^j} = {}_x\left\{ {\gamma \atop ij} \right\} \frac{\partial y^m}{\partial x^\gamma} - {}_y\left\{ {m \atop \alpha\beta} \right\} \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^i}\frac{\partial y^\beta}{\partial x^j}. \tag{32.6} $$

Важные формулы (32.5) и (32.6) были выведены впервые совершенно иным путем Е. Б. Кристоффелем в мемуаре, посвященном исследованию квадратичных дифференциальных форм [1]). Мы воспользуемся этими формулами в определении операций тензорного дифференцирования.

§ 33. Ковариантное дифференцирование тензоров

В § 22 мы обратили внимание на то, что комплект частных производных $\partial f/\partial x^i$ скалярной функции $f(x^1, \ldots, x^n)$ представляет собой ковариантный вектор, поскольку $\dfrac{\partial f}{\partial y^i} = \dfrac{\partial f}{\partial x^\alpha}\dfrac{\partial x^\alpha}{\partial y^i}$. Но если мы образуем совокупность частных производных $\dfrac{\partial}{\partial y^j}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y^i}\right)$ ковариантного вектора $\partial f/\partial y^i$, то получим

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^j\,\partial y^i} = \frac{\partial}{\partial y^j}\left(\frac{\partial f}{\partial x^\alpha}\frac{\partial x^\alpha}{\partial y^i}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^\alpha\,\partial x^\beta}\frac{\partial x^\beta}{\partial y^j}\frac{\partial x^\alpha}{\partial y^i} + \frac{\partial f}{\partial x^\alpha}\frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial y^i\,\partial y^j},$$

выражение, которое в силу присутствия в нем члена $\dfrac{\partial f}{\partial x^\alpha}\dfrac{\partial^2 x^\alpha}{\partial y^i\,\partial y^j}$ свидетельствует, что комплект вторых производных $\left\{\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^i\,\partial y^j}\right\}$ не преобразуется по закону тензоров. Из этого примера следует, что комплект частных производных ковариантного вектора вообще не является тензором. В самом деле, если у нас имеется ковариантный вектор $A_\alpha(x)$, то

$$B_i(y) = \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^i} A_\alpha$$

и

$$\frac{\partial B_i}{\partial y^j} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^i}\frac{\partial x^\beta}{\partial y^j}\frac{\partial A_\alpha}{\partial x^\beta} + \frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial y^j\,\partial y^i} A_\alpha, \tag{33.1}$$

так что производные вектора не образуют тензора, если только преобразование координат $x^i = x^i(y)$ не будет аффинным. Если из формулы Кристоффеля (32.5) ввести производную $\partial^2 x^\alpha/\partial y^j \partial y^i$ в (33.1), то получим

$$\frac{\partial B_i}{\partial y^j} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^i}\frac{\partial x^\beta}{\partial y^j}\frac{\partial A_\alpha}{\partial x^\beta} + {}_y\begin{Bmatrix}\gamma\\ ij\end{Bmatrix}\frac{\partial x^\alpha}{\partial y^\gamma}A_\alpha - {}_x\begin{Bmatrix}\alpha\\ \gamma\beta\end{Bmatrix}\frac{\partial x^\gamma}{\partial y^i}\frac{\partial x^\beta}{\partial y^j}A_\alpha.$$

Учтя соотношение $\dfrac{\partial x^\alpha}{\partial y^\gamma}A_\alpha = B_\gamma$ и произведя перегруппировку, найдем

$$\frac{\partial B_i}{\partial y^j} - {}_y\begin{Bmatrix}\gamma\\ ij\end{Bmatrix}B_\gamma = \left(\frac{\partial A_\alpha}{\partial x^\beta} - {}_x\begin{Bmatrix}\gamma\\ \alpha\beta\end{Bmatrix}A_\gamma\right)\frac{\partial x^\alpha}{\partial y^i}\frac{\partial x^\beta}{\partial y^j}, \tag{33.2}$$

[1]) Christoffel E. B., Crelle Journal 70 (1869).

откуда выясняется, что совокупность n^2 функций $\frac{\partial A_i}{\partial x^j} - {}_x\left\{ \begin{matrix} \alpha \\ ij \end{matrix} \right\} A_\alpha$ подчиняется закону преобразования для ковариантного тензора второго ранга. И это приводит нас к формулировке:

Определение 1. *Совокупность n^2 функций $\frac{\partial A_i}{\partial x^j} - \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ ij \end{matrix} \right\} A_\alpha$ определяет ковариантную x^j производную (относительно g_{ij}) от ковариантного тензора A_i.*

Обозначим ковариантную x^j производную от A_i символом $A_{i,\,j}$, тогда

$$A_{i,\,j} \equiv \frac{\partial A_i}{\partial x^j} - \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ ij \end{matrix} \right\} A_\alpha. \tag{33.3}$$

Следует заметить, что для вычисления ковариантной производной необходимо иметь совокупность символов Кристоффеля; иначе говоря, фундаментальный тензор g_{ij} должен быть задан заранее.

Подобным же образом, отправляясь от ковариантного вектора A^α и дифференцируя отношение $B^i(y) = \frac{\partial y^i}{\partial x^\alpha} A^\alpha(x)$, мы приходим к формуле

$$\frac{\partial B^i}{\partial y^j} = \frac{\partial A^\alpha}{\partial x^\beta} \frac{\partial x^\beta}{\partial y^j} \frac{\partial y^i}{\partial x^\alpha} + A^\alpha \frac{\partial^2 y^i}{\partial x^\alpha \, \partial x^\beta} \frac{\partial x^\beta}{\partial y^j},$$

а воспользовавшись формулой (32.6), находим

$$\frac{\partial B^i}{\partial y^j} + {}_y\left\{ \begin{matrix} i \\ \gamma j \end{matrix} \right\} B^\gamma = \left(\frac{\partial A^\alpha}{\partial x^\beta} + {}_x\left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \gamma\beta \end{matrix} \right\} A^\gamma \right) \frac{\partial x^\beta}{\partial y^j} \frac{\partial y^i}{\partial x^\alpha}.$$

Таким образом, совокупность n^2 величин $A(i,\,j) \equiv \frac{\partial A^i}{\partial x^j} + \left\{ \begin{matrix} i \\ \alpha j \end{matrix} \right\} A^\alpha$ образует смешанный тензор второго ранга. В соответствии с этим мы вводим

Определение 2. *Совокупность n^2 функций $\frac{\partial A^i}{\partial x^j} + \left\{ \begin{matrix} i \\ \alpha j \end{matrix} \right\} A^\alpha$ представляет ковариантную x^j производную (относительно g_{ij}) контравариантного тензора A^i.*

Обозначим ковариантную x^j производную контравариантного тензора A^i символом $A^i_{.\,j}$, тогда

$$A^i_{.\,j} \equiv \frac{\partial A^i}{\partial x^j} + \left\{ \begin{matrix} i \\ \alpha j \end{matrix} \right\} A^\alpha. \tag{33.4}$$

Определения (33.3) и (33.4) могут быть распространены, очевидным образом, и на смешанные тензоры. В соответствии с этим мы определяем ковариантную x^l производную (по заданному тензору g_{ij}) смешанного тензора $A^{j_1 \dots j_s}_{i_1 \dots i_r}$ формулой

$$A^{j_1 \dots j_s}_{i_1 \dots i_r, l} \equiv \frac{\partial A^{j_1 \dots j_s}_{i_1 \dots i_r}}{\partial x^l} - \left\{ {\alpha \atop i_1 l} \right\} A^{j_1 \dots j_s}_{\alpha i_2 \dots i_r} - \\ - \left\{ {\alpha \atop i_2 l} \right\} A^{j_1 \dots j_s}_{i_1 \alpha i_3 \dots i_r} - \dots - \left\{ {\alpha \atop i_r l} \right\} A^{j_1 \dots j_s}_{i_1 \dots \alpha} + \left\{ {j_1 \atop \alpha l} \right\} A^{\alpha j_2 \dots j_s}_{i_1 \dots i_r} + \\ + \left\{ {j_2 \atop \alpha l} \right\} A^{j_1 \alpha j_3 \dots j_s}_{i_1 \dots i_r} + \dots + \left\{ {j_s \atop \alpha l} \right\} A^{j_1 \dots \alpha}_{i_1 \dots i_r}. \quad (33.5)$$

Проверка того факта, что совокупность функций $A^{j_1 \dots j_s}_{i_1 \dots i_r, l}(x)$ образует тензор типа, указанного индексами, не представляет трудности.

Если A — тензор нулевого ранга, то мы определяем его ковариантную производную как его обыкновенную производную. Так, например, $A,_l = \partial A/\partial x^l$. Это определение согласуется с формулой (33.5). Заметим также, что если g_{ij} — константы, то символы Кристоффеля тождественно исчезают, и потому ковариантные производные приводятся к обычным производным. Это очевидно, если g_{ij} являются метрическими коэффициентами евклидового пространства, отнесенного к декартовой системе координат.

Заметим в заключение, что ковариантные x^l производные относительных тензоров определяются следующим образом: если $f(x)$ — относительный скаляр веса W, в силу чего

$$g(y) = f(x) \left| \frac{\partial x^i}{\partial y^j} \right|^W,$$

то

$$f,_l \equiv \frac{\partial f}{\partial x^l} - Wf \left\{ {\alpha \atop l\alpha} \right\}. \quad (33.6)$$

Эта совокупность функций представляет собой относительный вектор веса W. Если $A^{j_1 \dots j_s}_{i_1 \dots i_r}$ — относительный тензор веса W, то его ковариантная x^l производная будет относительным тензором веса W, определяющимся из формулы

$$A^{j_1 \dots j_s}_{i_1 \dots i_r, l} \equiv \frac{\partial A^{j_1 \dots j_s}_{i_1 \dots i_r}}{\partial x^l} - W A^{j_1 \dots j_s}_{i_1 \dots i_r} \left\{ {\alpha \atop l\alpha} \right\} - \\ - \left\{ {\alpha \atop i_1 l} \right\} A^{j_1 \dots j_s}_{\alpha i_2 \dots i_r} - \dots - \left\{ {\alpha \atop i_r l} \right\} A^{j_1 \dots j_s}_{i_1 \dots \alpha} + \\ + \left\{ {j_1 \atop \alpha l} \right\} A^{\alpha j_2 \dots j_s}_{i_1 \dots i_r} + \dots + \left\{ {j_s \atop \alpha l} \right\} A^{j_1 \dots \alpha}_{i_1 \dots i_r}.$$

Задачи

1. Доказать, что нижеследующие выражения являются тензорами:

(а) $A^{ij}_{,l} = \dfrac{\partial A^{ij}}{\partial x^l} + \left\{ {i \atop \alpha l} \right\} A^{\alpha j} + \left\{ {j \atop \alpha l} \right\} A^{i\alpha}$.

(б) $A^i_{j,l} = \dfrac{\partial A_j}{\partial x^l} - \left\{ {\alpha \atop jl} \right\} A^i_\alpha + \left\{ {i \atop \alpha l} \right\} A^\alpha_j$.

(в) $A_{ij,l} = \dfrac{\partial A_{ij}}{\partial x^l} - \left\{ {\alpha \atop il} \right\} A_{\alpha j} - \left\{ {\alpha \atop jl} \right\} A_{i\alpha}$.

(г) $A^r_{ijk,l} = \dfrac{\partial A^r_{ijk}}{\partial x^l} - \left\{ {\alpha \atop il} \right\} A^r_{\alpha jk} - \left\{ {\alpha \atop jl} \right\} A^r_{i\alpha k} - \left\{ {\alpha \atop kl} \right\} A^r_{ij\alpha} + \left\{ {r \atop \alpha l} \right\} A^\alpha_{ijk}$.

2. Доказать, что ${}_a\left\{ {k \atop ij} \right\} - {}_b\left\{ {k \atop ij} \right\}$ — компоненты тензора третьего ранга, где ${}_a\left\{ {k \atop ij} \right\}$ и ${}_b\left\{ {k \atop ij} \right\}$ являются символами Кристоффеля, образованными из симметричных тензоров $a_{ij}(x)$ и $b_{ij}(x)$.

3. Использовать формулу $\dfrac{\partial}{\partial x^j} \left| \dfrac{\partial y^i}{\partial x^j} \right| = \dfrac{\partial^2 y^\alpha}{\partial x^j \, \partial x^\beta} \dfrac{\partial x^\beta}{\partial y^\alpha} \left| \dfrac{\partial y^l}{\partial x^j} \right|$ и закон преобразования относительных скаляров веса W для вывода формулы (33.6).

§ 34. Формулы ковариантного дифференцирования

Из структуры формулы (33.5) легко заключить, что правила ковариантного дифференцирования сумм и произведений тензоров тождественны с применяемыми в обычном дифференцировании. В самом деле, если $A^{j_1 \ldots j_s}_{i_1 \ldots i_r}(x)$ и $\mathcal{A}^{j_1 \ldots j_s}_{i_1 \ldots i_r}(x)$ — два тензора, то формула

$$\left(A^{j_1 \ldots j_s}_{i_1 \ldots i_r} + \mathcal{A}^{j_1 \ldots j_s}_{i_1 \ldots i_r}\right)_{,l} = A^{j_1 \ldots j_s}_{i_1 \ldots i_r, l} + \mathcal{A}^{j_1 \ldots j_s}_{i_1 \ldots i_r, l}$$

следует непосредственно из (33.5). Для того чтобы доказать, что производные внешнего и внутреннего произведений задаются знакомыми правилами

$$\left(A^{j_1 \ldots j_s}_{i_1 \ldots i_r} \mathcal{A}^{j_{s+1} \ldots j_v}_{i_{r+1} \ldots i_w}\right)_{,l} = A^{j_1 \ldots j_s}_{i_1 \ldots i_r} \mathcal{A}^{j_{s+1} \ldots j_v}_{i_{r+1} \ldots i_w, l} + A^{j_1 \ldots j_s}_{i_1 \ldots i_r, l} \mathcal{A}^{j_{s+1} \ldots j_v}_{i_{r+1} \ldots i_w},$$

$$\left(A^{j_1 \ldots j_{s-1} \alpha}_{i_1 \ldots i_r} \mathcal{A}^{j_{s+1} \ldots j_v}_{i_{r+1} \ldots i_{w-1} \alpha}\right)_{,l} =$$
$$= A^{j_1 \ldots j_{s-1} \alpha}_{i_1 \ldots i_r, l} \mathcal{A}^{j_{s+1} \ldots j_v}_{i_{r+1} \ldots i_{w-1} \alpha} + A^{j_1 \ldots j_{s-1} \alpha}_{i_1 \ldots i_r} \mathcal{A}^{j_{s+1} \ldots j_v}_{i_{r+1} \ldots i_{w-1} \alpha, l},$$

нам нужно лишь ввести в формулу (33.5) произведение $A\mathcal{A}$ вместо A. Проиллюстрируем эту процедуру, рассмотрев произведение $A^{j_1 j_2}\mathcal{A}_{i_1 i_2} \equiv \mathfrak{A}^{j_1 j_2}_{i_1 i_2}$. Получаем

$$\mathfrak{A}^{j_1 j_2}_{i_1 i_2, l} = \frac{\partial \mathfrak{A}^{j_1 j_2}_{i_1 i_2}}{\partial x^l} - \left\{ {\alpha \atop i_1 l} \right\} \mathfrak{A}^{j_1 j_2}_{\alpha i_2} - \left\{ {\alpha \atop i_2 l} \right\} \mathfrak{A}^{j_1 j_2}_{i_1 \alpha} +$$

$$+ \left\{ {j_1 \atop \alpha l} \right\} \mathfrak{A}^{\alpha j_2}_{i_1 i_2} + \left\{ {j_2 \atop \alpha l} \right\} \mathfrak{A}^{j_1 \alpha}_{i_1 i_2} = A^{j_1 j_2}\left(\frac{\partial \mathcal{A}_{i_1 i_2}}{\partial x^l} - \left\{ {\alpha \atop i_1 l} \right\} \mathcal{A}_{\alpha i_2} - \left\{ {\alpha \atop i_2 l} \right\} \mathcal{A}_{i_1 \alpha} \right) +$$

$$+ \mathcal{A}_{i_1 i_2}\left(\frac{\partial A^{j_1 j_2}}{\partial x^l} + \left\{ {j_1 \atop \alpha l} \right\} A^{\alpha j_2} + \left\{ {j_2 \atop \alpha l} \right\} A^{j_1 \alpha} \right) = A^{j_1 j_2}\mathcal{A}_{i_1 i_2, l} + \mathcal{A}_{i_1 i_2} A^{j_1 j_2}_{, l}.$$

Мы пришли к искомому результату. Читатель в качестве упражнения может показать, что

$$\left(A_{j\alpha}\mathcal{A}^{i\alpha}\right)_{, l} = A_{j\alpha, l}\mathcal{A}^{i\alpha} + A_{j\alpha}\mathcal{A}^{i\alpha}_{, l}.$$

Ему легко будет также убедиться в том, что операции ковариантного дифференцирования и свертки могут быть перестановочными.

В заключение этого параграфа обращаем внимание на то, что в выполнении ковариантного дифференцирования дельты Кронекера ведут себя как постоянные величины. В самом деле, из (33.3) находим

$$\delta^i_{j, l} = \frac{\partial \delta^i_j}{\partial x^l} - \left\{ {\alpha \atop jl} \right\} \delta^i_\alpha + \left\{ {i \atop \alpha l} \right\} \delta^\alpha_j = 0 - \left\{ {i \atop jl} \right\} + \left\{ {i \atop jl} \right\} \equiv 0.$$

Задачи

1. Обратить внимание на то, что операция свертки индексов $A^\alpha_{i\alpha}$ эквивалентна умножению A^α_{ij} на δ^j_α. Пользуясь этим, показать, что операция свертки может быть выполнена на тензоре как до, так и после ковариантного дифференцирования.

2. Показать, что операция поднятия или опускания индексов может быть выполнена как до, так и после ковариантного дифференцирования.

§ 35. Теорема Риччи

В этом параграфе мы покажем, что фундаментальные тензоры g_{ij} и g^{ij} ведут себя в ковариантном дифференцировании так, как если бы они были постоянными величинами. Это их свойство вытекает из следующей теоремы.

Теорема Риччи. *Ковариантная производная каждого из двух фундаментальных тензоров равна нулю.*

Доказательство. Рассмотрим сперва тензор g_{ij} и образуем

$$g_{ij, l} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l} - g_{\alpha j}\left\{ {\alpha \atop il} \right\} - g_{i\alpha}\left\{ {\alpha \atop jl} \right\}.$$

Правая часть этого выражения обращается в нуль тождественно в силу (31.7), так что $g_{ij, l} = 0$

Подобное же вычисление мы можем провести и для тензора g^{ij}, но более поучительным, пожалуй, было бы продифференцировать внутреннее произведение $g^{i\alpha}g_{\alpha l}=\delta^i_j$. Мы получаем при этом

$$g^{i\alpha}_{,l}g_{\alpha j}+g^{i\alpha}g_{\alpha j,l}=\delta^i_{j,l},$$

а поскольку $\delta^i_{j,l}=0$ и $g_{\alpha j,l}=0$, приходим к выводу

$$g_{\alpha j}g^{i\alpha}_{,l}=0.$$

Поскольку, однако, $|g_{\alpha j}|\neq 0$, единственным решением системы однородных уравнений будет $g^{i\alpha}_{,l}=0$.

В качестве непосредственного следствия теоремы Риччи укажем на то, что фундаментальные тензоры могут быть вынесены за знак ковариантного дифференцирования, в связи с чем операции опускания и поднятия индексов приобретают свойство перестановочности с ковариантным дифференцированием. Иллюстрируем это соответствующей формулой:

$$(g_{\alpha i}A^{\alpha}_{jk})_{,l}=g_{\alpha i}A^{\alpha}_{jk,l}.$$

§ 36. Тензор Римана — Кристоффеля

Напомним, что достаточным условием для равенства смешанных частных производных $\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}$ и $\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial x}$ функции $u(x, y)$ является принадлежность функции $u(x, y)$ к классу C^2. Допустим поэтому для дальнейшего, что рассматриваемые нами компоненты тензора принадлежат к классу C^2, хотя такое ограничение, как мы увидим, само по себе недостаточно, чтобы обеспечить равенство смешанных ковариантных производных. И действительно, в дальнейшем будет показано, что хотя порядок ковариантного дифференцирования и не имеет существенного значения, все же наши тензоры должны быть определены в конкретном частного типа метрическом многообразии X, для которого некоторый тензор четвертого ранга, состоящий полностью из g_{ij}, обращается в нуль. Этот тензор, известный как *тензор Римана — Кристоффеля*, играет существенную роль в дифференциальной геометрии, динамике твердого и деформируемого тела, электродинамике и теории относительности.

Ковариантная производная тензора есть тензор, и потому ее можно продифференцировать ковариантно повторно и получить новый тензор. Такой тензор называется *второй ковариантной производной* данного тензора.

Рассмотрим ковариантную x^j производную от A_i по g_{ij}:

$$A_{i,j}=\frac{\partial A_i}{\partial x^j}-\left\{ {\alpha \atop ij} \right\} A_\alpha. \tag{36.1}$$

Если теперь (36.1) продифференцировать ковариантно по x^k, то получится тензор

$$\begin{aligned} A_{i,jk}&=\frac{\partial A_{i,j}}{\partial x^k}-\left\{ {\alpha \atop ik} \right\} A_{\alpha,j}-\left\{ {\alpha \atop jk} \right\} A_{i,\alpha}= \\ &=\frac{\partial}{\partial x^k}\left(\frac{\partial A_i}{\partial x^j}-\left\{ {\alpha \atop ij} \right\} A_\alpha\right)-\left\{ {\alpha \atop ik} \right\}\left(\frac{\partial A_\alpha}{\partial x^j}-\left\{ {\beta \atop \alpha j} \right\} A_\beta\right)- \\ &\qquad -\left\{ {\alpha \atop jk} \right\}\left(\frac{\partial A_i}{\partial x^\alpha}-\left\{ {\gamma \atop i\alpha} \right\} A_\gamma\right). \end{aligned} \tag{36.2}$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} A_{i,kj}&=\frac{\partial}{\partial x^j}\left(\frac{\partial A_i}{\partial x^k}-\left\{ {\alpha \atop ik} \right\} A_\alpha\right)-\left\{ {\alpha \atop ij} \right\}\left(\frac{\partial A_\alpha}{\partial x^k}+\left\{ {\beta \atop \alpha k} \right\} A_\beta\right)- \\ &\qquad -\left\{ {\alpha \atop kj} \right\}\left(\frac{\partial A_i}{\partial x^\alpha}-\left\{ {\gamma \atop i\alpha} \right\} A_\gamma\right). \end{aligned} \tag{36.3}$$

Выполняя указанное в (36.2) и (36.3) дифференцирование, получаем

$$\begin{aligned} A_{i,jk}&=\frac{\partial^2 A_i}{\partial x^k\,\partial x^j}-\frac{\partial\left\{ {\alpha \atop ij} \right\}}{\partial x^k}A_\alpha-\left\{ {\alpha \atop ij} \right\}\frac{\partial A_\alpha}{\partial x^k}-\left\{ {\alpha \atop ik} \right\}\frac{\partial A_\alpha}{\partial x^j}+ \\ &\quad+\left\{ {\alpha \atop ik} \right\}\left\{ {\beta \atop \alpha j} \right\}A_\beta-\left\{ {\alpha \atop jk} \right\}\frac{\partial A_i}{\partial x^\alpha}+\left\{ {\alpha \atop jk} \right\}\left\{ {\gamma \atop i\alpha} \right\}A_\gamma, \end{aligned} \tag{36.4}$$

$$\begin{aligned} A_{i,kj}&=\frac{\partial^2 A_i}{\partial x^j\,\partial x^k}-\frac{\partial\left\{ {\alpha \atop ik} \right\}}{\partial x^j}A_\alpha-\left\{ {\alpha \atop ik} \right\}\frac{\partial A_\alpha}{\partial x^j}-\left\{ {\alpha \atop ij} \right\}\frac{\partial A_\alpha}{\partial x^k}+ \\ &\quad+\left\{ {\alpha \atop ij} \right\}\left\{ {\beta \atop \alpha k} \right\}A_\beta-\left\{ {\alpha \atop kj} \right\}\frac{\partial A_i}{\partial x^\alpha}+\left\{ {\alpha \atop kj} \right\}\left\{ {\gamma \atop i\alpha} \right\}A_\gamma. \end{aligned} \tag{36.5}$$

Вычитая (36.5) из (36.4), находим

$$A_{i,jk}-A_{i,kj}=\left\{ {\alpha \atop ik} \right\}\left\{ {\beta \atop \alpha j} \right\}A_\beta-\frac{\partial\left\{ {\alpha \atop ij} \right\}}{\partial x^k}A_\alpha-\left\{ {\alpha \atop ij} \right\}\left\{ {\beta \atop \alpha k} \right\}A_\beta+\frac{\partial\left\{ {\alpha \atop ik} \right\}}{\partial x^j}A_\alpha,$$

а обмен местами между α и β в первом и третьем членах правой части последнего равенства дает

$$A_{i,jk}-A_{i,kj}=\left[\frac{\partial\left\{ {\alpha \atop ik} \right\}}{\partial x^j}-\frac{\partial\left\{ {\alpha \atop ij} \right\}}{\partial x^k}+\left\{ {\beta \atop ik} \right\}\left\{ {\alpha \atop \beta j} \right\}-\left\{ {\beta \atop ij} \right\}\left\{ {\alpha \atop \beta k} \right\}\right]A_\alpha. \tag{36.6}$$

Поскольку A_i — произвольный ковариантный тензор первого ранга, а разность двух тензоров $A_{i,jk} - A_{i,kj}$ — ковариантный тензор третьего ранга, то заключаем, согласно правилу частного (§ 26), что выражение в квадратных скобках (36.6) представляет собой смешанный тензор четвертого ранга, т. е.

$$\frac{\partial \left\{ {\alpha \atop ik} \right\}}{\partial x^j} - \frac{\partial \left\{ {\alpha \atop ij} \right\}}{\partial x^k} + \left\{ {\beta \atop ik} \right\} \left\{ {\alpha \atop \beta j} \right\} - \left\{ {\beta \atop ij} \right\} \left\{ {\alpha \atop \beta k} \right\} = R^{\alpha}_{ijk}.$$

Далее, если левая часть уравнения (36.6) должна обратиться в нуль, т. е. если порядок ковариантного дифференцирования не имеет значения, то

$$R^{\alpha}_{ijk} = 0,$$

поскольку A_α — величина произвольная. Вообще же $R^{\alpha}_{ijk} \neq 0$, так что порядок ковариантного дифференцирования нельзя считать несущественным. Из (36.6) ясно, что *необходимым и достаточным условием возможности обращения порядка ковариантного дифференцирования является тот факт, что тензор* R^{α}_{ijk} *тождественно обращается в нуль.*

Тензор

$$R^{i}_{jkl} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x^k} & \dfrac{\partial}{\partial x^l} \\ \left\{ {i \atop jk} \right\} & \left\{ {i \atop jl} \right\} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \left\{ {i \atop \alpha k} \right\} & \left\{ {i \atop \alpha l} \right\} \\ \left\{ {\alpha \atop jk} \right\} & \left\{ {\alpha \atop jl} \right\} \end{vmatrix} \tag{36.7}$$

называется *смешанным тензором Римана — Кристоффеля* или *тензором Римана — Кристоффеля второго рода.*

Ассоциированный тензор

$$R_{ijkl} \equiv g_{i\alpha} R^{\alpha}_{jkl} \tag{36.8}$$

известен как *ковариантный тензор Римана — Кристоффеля* или как *тензор Римана — Кристоффеля первого рода.*

Нетрудно убедиться в том, что определяющая формула (36.8) для R_{ijkl} может быть написана в обычной форме детерминантов:

$$R_{ijkl} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x^k} & \dfrac{\partial}{\partial x^l} \\ [jk, i] & [jl, i] \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \left\{ {\alpha \atop jk} \right\} & \left\{ {\alpha \atop jl} \right\} \\ [ik, \alpha] & [il, \alpha] \end{vmatrix}, \tag{36.9}$$

которая окажется нам полезной в перечне свойств этого тензора в § 37.

Заметим в заключение, что формула (36.6) представляет собой частную форму тождества, установленного Риччи и приводимого здесь нами без доказательства, хотя характер доказательства совершенно ясен из доказательства разобранного ранее случая. Это тождество имеет вид

$$A_{i_1 \dots i_m, jk} - A_{i_1 \dots i_m, kj} = \sum_{\alpha=1}^{m} A_{i_1 \dots i_{\alpha-1} h i_{\alpha+1} \dots i_m} R^h_{i_\alpha jk}.$$

В частном случае тензора второго ранга оно принимает вид

$$A_{ij, kl} - A_{ij, lk} = A_{i\alpha} R^{\alpha}_{jkl} + A_{\alpha j} R^{\alpha}_{ikl}.$$

Задачи.

1. Показать, что

$$R_{ijkl} = \frac{\partial}{\partial x^k}[jl, i] - \frac{\partial}{\partial x^l}[jk, i] + \left\{ {\alpha \atop jk} \right\}[il, \alpha] - \left\{ {\alpha \atop jl} \right\}[ik, \alpha].$$

2. Показать, что

$$R_{ijkl} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{il}}{\partial x^j\, \partial x^k} + \frac{\partial^2 g_{jk}}{\partial x^i\, \partial x^l} - \frac{\partial^2 g_{ik}}{\partial x^j\, \partial x^l} - \frac{\partial^2 g_{jl}}{\partial x^i\, \partial x^k} \right) +$$
$$+ g^{\alpha\beta}\left([jk, \beta][il, \alpha] - [jl, \beta][ik, \alpha] \right).$$

3. Воспользовавшись формулой задачи 2, показать, что

$$R_{ijkl} = -R_{jikl} = -R_{ijlk} = R_{klij}$$

и

$$R_{ijkl} + R_{iklj} + R_{iljk} = 0.$$

4. Показать, что если φ — скаляр, то $g^{ij}\varphi_{,ij}$ — также скаляр и равен

$$\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sqrt{g}\, g^{ij} \frac{\partial \varphi}{\partial x^j} \right).$$

5. Опираясь на данные задачи 4, показать, что $g^{ij}\varphi_{,ij} = 0$ приводится к соотношению $\partial^2\varphi/\partial x^i \partial x^i = 0$, если g_{ij} — метрические коэффициенты пространства E_3, отнесенного к декартовой системе отсчета. Это указывает на то, что уравнение Лапласа в обобщенных криволинейных координатах принимает вид $g^{ij}\varphi_{,ij} = 0$, если считать его тензорным уравнением.

6. Исходя из задачи 5, показать, что уравнение Лапласа в полярных координатах принимает вид

$$\frac{\partial^2 \varphi}{(\partial y^1)^2} + \frac{1}{(y^1)^2} \frac{\partial^2 \varphi}{(\partial y^2)^2} + \frac{1}{(y^1 \sin y^2)^2} \frac{\partial^2 \varphi}{(\partial y^3)^2} + \frac{2}{y^1} \frac{\partial \varphi}{\partial y^1} + \frac{1}{(y^1)^2} \operatorname{ctg} y^2 \frac{\partial \varphi}{\partial y^2} = 0.$$

§ 37. Свойства тензоров Римана — Кристоффелля

Из определения формулы (36.7) для смешанного тензора R^i_{jkl} мы убеждаемся непосредственно в том, что совокупность функций R^i_{jkl} кососимметрична относительно двух последних ковариантных индексов. Это свойство

$$R^i_{jkl} = -R^i_{jlk} \tag{37.1}$$

приводит к следствию

$$R^{i}_{j\,(\alpha)\,(\alpha)} = 0.$$

Мы определили ковариантный тензор R_{ijkl} формулой

$$R_{ijkl} = g_{i\alpha} R^{\alpha}_{jkl}$$

и если мы умножим это уравнение на $g^{i\beta}$ и просуммируем, то получим

$$R^{\beta}_{jkl} = g^{i\beta} R_{ijkl}, \tag{37.2}$$

т. е. убедимся, что тензор Римана — Кристоффеля второго рода возникает в результате поднятия первого ковариантного индекса в тензора R_{ijkl}. Для того чтобы установить свойства совокупности функций, определяющих тензор Римана — Кристоффеля первого рода, разложим детерминанты в (36.9) и введем в качестве символов Кристоффеля в первый детерминант определения (31.1). Несложные выкладки приводят нас к формуле

$$R_{ijkl} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{il}}{\partial x^j \, \partial k^k} - \frac{\partial^2 g_{jl}}{\partial x^i \, \partial x^k} - \frac{\partial^2 g_{ik}}{\partial x^j \, \partial x^l} + \frac{\partial^2 g_{jk}}{\partial x^i \, \partial x^l} \right) + \\ + g^{\alpha\beta}\left([jk, \beta][il, \alpha] - [jl, \beta][ik, \alpha] \right), \tag{37.3}$$

из которой очевидно, что

(а) $R_{jikl} = -R_{ijkl}$,
(б) $R_{ijlk} = -R_{ijkl}$,
(в) $R_{klij} = R_{ijkl}$,
(г) $R_{ijkl} + R_{iklj} + R_{iljk} = 0$.

Последнее тождество может быть подтверждено непосредственной подстановкой; путем поднятия индексов получаем тождество, аналогичное (г), для смешанного тензора R^{i}_{jkl}:

(д) $R^{i}_{jkl} + R^{i}_{klj} + R^{i}_{ljk} = 0$.

(е) компоненты тензора Римана — Кристоффеля с более чем двумя одинаковыми символами обращаются необходимо в нуль. Тождества (а) и (б) констатируют, что тензор R_{ijkl} кососимметричен по двум первым и двум последним индексам, а тождество (в) означает, что тензор R_{ijkl} симметричен по группам двух первых и двух последних индексов. Из этих тождеств следует, что различные, не обращающиеся в нуль компоненты R_{ijkl} распределяются на три типа:

1. Символы с двумя различными индексами, т. е. символы типа R_{ijij}.

2. Символы лишь с тремя различными индексами типа R_{ijik}.

3. Символы R_{ijkl} с четырьмя различными индексами. Теперь легко установить [1]), что полное число N различных, не обращающихся в нуль компонентов символа R_{ijkl} равно $N = n^2(n^2-1)/12$.

В трехмерном пространстве различные, не обращающиеся в нуль, компоненты R_{ijkl} имеют индексы 1212, 1313, 2323, 1213, 2123, 3132; в двух же измерениях из общего числа $2^4 = 16$ компонентов остается лишь один отличный, не обращающийся в нуль компонент R_{1212}. Мы увидим, что этот тензор характеризует весьма важное свойство поверхностей.

§ 38. Тензор Риччи. Тождества Бьянки. Тензор Эйнштейна

Определим *тензор* R_{ij} *Риччи формулой* $R_{ij} = R^{\alpha}_{ij\alpha}$, допускающей в силу (36.7) и иное представление, через детерминанты

$$R_{ij} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x^j} & \dfrac{\partial}{\partial x^\alpha} \\ \begin{Bmatrix} \alpha \\ ij \end{Bmatrix} & \begin{Bmatrix} \alpha \\ i\alpha \end{Bmatrix} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha \\ \beta j \end{Bmatrix} & \begin{Bmatrix} \alpha \\ \beta\alpha \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} \beta \\ ij \end{Bmatrix} & \begin{Bmatrix} \beta \\ i\alpha \end{Bmatrix} \end{vmatrix}.$$

В § 31 мы показали, что $\dfrac{\partial}{\partial x^i} \lg \sqrt{g} = \begin{Bmatrix} \alpha \\ i\alpha \end{Bmatrix}$. Отсюда выводим

$$R_{ij} = \frac{\partial^2 \lg \sqrt{g}}{\partial x^j \partial x^i} - \frac{\partial \begin{Bmatrix} \alpha \\ ij \end{Bmatrix}}{\partial x^\alpha} + \begin{Bmatrix} \alpha \\ \beta j \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \beta \\ i\alpha \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \beta \\ ij \end{Bmatrix} \frac{\partial \lg \sqrt{g}}{\partial x^\beta}.$$

Полученный результат убеждает нас в том, что тензор R_{ij} симметричен, и поскольку $R_{ij} = R_{ji}$, число различных компонентов R_{ij} равно $n(n+1)/2$. В четырехмерном многообразии $n = 4$, так что, если положить $R_{ij} = 0$, мы получим десять дифференциальных уравнений в частных производных, которые А. Эйнштейн принял как уравнения, описывающие поле тяготения в свободном пространстве общей теории относительности [2]). В развитии этой теории важную роль играет и другой введенный Эйнштейном тензор. Простейшим образом этот тензор можно получить из тождества

$$R^i_{jkl,\,m} + R^i_{jlm,\,k} + R^i_{jmk,\,l} = 0, \tag{38.1}$$

найденного Бьянки.

---

[1]) Имеется $n_1 = n(n-1)/2$ различных, не обращающихся в нуль символов типа R_{ijij}, $n_2 = \dfrac{n(n-1)(n-2)}{2}$ — типа R_{ijik} и $n_3 = \dfrac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{12}$ — типа R_{ijkl}.

[2]) См. далее задачу 2.

Поскольку ковариантная производная фундаментального тензора g_{ij} обращается в нуль, тождество Бьянки можно записать в виде

$$R_{ijkl,m} + R_{ijlm,k} + R_{ijmk,l} = 0. \tag{38.2}$$

Если мы умножим уравнение (38.2) на $g^{il}g^{jk}$ и используем кососимметричные свойства тензора Римана R_{ijkl}, то получим

$$g^{jk}R_{jk,m} - g^{jk}R_{jm,k} - g^{il}R_{im,l} = 0.$$

Этот результат может быть представлен в виде

$$R_{,m} - 2R^k_{m,k} = 0,$$

где $R \equiv g^{ij}R_{ij}$, или иначе:

$$\left(R^k_m - \frac{1}{2}\delta^k_m R\right)_{,k} = 0, \tag{38.3}$$

где $R^k_m = g^{jk}R_{jm}$. Тензор

$$R^i_j - \frac{1}{2}\delta^i_j R \equiv G^i_j,$$

входящий в скобки уравнения (38.3), известен как *тензор Эйнштейна.*

Задачи

1. Показать, что $R^{\alpha}_{\alpha jk} \equiv 0$.

2. Если $R_{ij} = \rho g_{ij}$, то $\rho = R/n$, где $R = g^{ij}R_{ij}$. (Уравнение $R_{ij} = \rho g_{ij}$ известно как гравитационное уравнение Эйнштейна для точек пространства, в которых присутствует материя. Оно соответствует уравнению Пуассона $\nabla^2 V = \rho$ в теории тяготения Ньютона.) Доказать это.

3. Показать, что если $n = 2$, то $R_{11}/g_{11} = R_{22}/g_{22} = R_{12}/g_{12} = -R_{12}/g$.

4. Если $n = 3$, тензор R_{ijkl} имеет шесть различных компонентов и дает шесть уравнений для $R_{jk} = g^{il}R_{ijkl}$. Доказать, что решения этих уравнений для R_{ijkl} даны выражением

$$R_{ijkl} = g_{il}R_{jk} + g_{jk}R_{il} - g_{ik}R_{jl} - g_{jl}R_{il} + \frac{R}{2}(g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk}),$$

где $R = g^{ij}R_{ij}$.

5. Подтвердить правильность тождества Бьянки (38.2).

§ 39. Пространства Римана и Евклида. Теорема существования

Отнесем n-мерное пространство V_n к координатной системе X. Произведем метризацию V_n, определив элемент дуги ds таким образом, чтобы форма

$$ds^2 = g_{ij}\,dx^i\,dx^j \tag{39.1}$$

была положительно определенной квадратичной формой в дифференциалах dx^i. При этом предполагается, что функции $g_{ij}(x)$

принадлежат классу C^1 в V_n. Метризованное таким образом пространство называется *римановым n-мерным пространством* R_n.

Рассмотрим теперь несколько подробнее следующий вопрос. *Какое ограничение должно быть наложено на симметричный тензор $g_{ij}(x)$, для того чтобы стало возможным введение координатной системы Y, определенной через*

$$T\colon\ y^i = y^i(x^1, \ldots, x^n) \qquad (i = 1, \ldots, n),$$

если $y^i(x)$ принадлежат классу C^2, в R_n, где тензор $g_{ij}(x)$ имеет постоянные компоненты h_{ij} в R_n?

Это один из основных вопросов дифференциальной геометрии, возникающий также в ином аспекте в динамике, теории упругости, теории относительности и в других разделах прикладной математики.

Заметим сначала, что компоненты $g_{ij}(x)$, будучи отнесенными к координатной системе Y, принимают вид

$$h_{ij} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^i}\frac{\partial x^\beta}{\partial y^j}\, g_{\alpha\beta}. \tag{39.2}$$

Если величины h_{ij} являются постоянными, то символы Кристоффеля ${}_y\left\{ {k \atop ij} \right\}$ тождественно обращаются в нуль. И наоборот, если ${}_y\left\{ {k \atop ij} \right\}$ тождественно обращаются в нуль, $h_{ij,\,l} = \partial h_{ij}/\partial y^l$, а поскольку $h_{ij,\,l} = 0$ в силу теоремы Риччи, получаем $\partial h_{ij}/\partial y^l = 0$ в R_n. Отсюда следует, что h_{ij} постоянны для всего R_n. Это позволяет нам сформулировать теорему.

Теорема I. *Необходимым и достаточным условием для того, чтобы метрические коэффициенты $g_{ij}(x)$ приводились к постоянным величинам h_{ij} в некоторой системе отсчета Y, является тождественное обращение символов Кристоффеля ${}_y\left\{ {k \atop ij} \right\}$ в нуль.*

Из этой теоремы мы можем вывести непосредственно систему дифференциальных уравнений, которые должны удовлетворяться функциями $y^i(x^1, \ldots, x^n)$, если при этом существует некоторая координатная система Y, в которой величины h_{ij} являются постоянными. Закон преобразования (32.6) требует, чтобы

$$-{}_y\left\{ {m \atop \alpha\beta} \right\} \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^i}\frac{\partial y^\beta}{\partial x^j} = \frac{\partial^2 y^m}{\partial x^i\, \partial x^j} - {}_x\left\{ {\gamma \atop ij} \right\} \frac{\partial y^m}{\partial x^\gamma},$$

а поскольку ${}_y\left\{ {m \atop \alpha\beta} \right\} = 0$, мы приходим к системе уравнений

$$\frac{\partial^2 y^m}{\partial x^i\, \partial x^j} - \left\{ {\gamma \atop ij} \right\} \frac{\partial y^m}{\partial x^\gamma} = 0, \tag{39.3}$$

где символы $\left\{ {\gamma \atop ij} \right\}$ формируются из $g_{ij}(x)$. Система дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка (39.3) может быть переписана в эквивалентной форме как система дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial y}{\partial x^i} &= u_i \qquad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n), \\ \frac{\partial u_i}{\partial x^j} &= \left\{ {\gamma \atop ij} \right\} u_\gamma \qquad (\gamma = 1,\ 2,\ \ldots,\ n). \end{aligned}\right\} \tag{39.4}$$

Система эта вообще несовместна, и мы теперь возвращаемся к определению необходимых и достаточных условий существования решения системы (39.4).

Для того чтобы записать эти условия в симметричной форме, рассмотрим систему

$$\begin{gathered} \frac{\partial f^\alpha}{\partial x^i} = F_i^\alpha (f^1,\ f^2,\ \ldots,\ f^m;\ x^1,\ x^2,\ \ldots,\ x^n) \\ (\alpha = 1,\ 2,\ \ldots,\ m), \quad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n), \end{gathered} \tag{39.5}$$

где F_i^α — известные функции переменных f и x. Уравнения (39.5) приводятся к частному виду (39.4), если положить $f^1 = y$, $f^2 = u_1, \ldots, f^m = u_n$. Функции F_i^α определены в n-мерной области R и для произвольных значений функций f^i, т. е. для $-\infty < f^i < \infty$. Обратимся к области определения функций F_i^α. Эта область R' состоит из области R переменных x^i и совокупности интервалов

$$-\infty < f^i < \infty.$$

Положим, что функции F_i^α принадлежат классу C^1 в R'. Так как область R' открыта, допустим, что $\partial F_i^\alpha / \partial f^j$ заключены в R'. Ограничения, налагаемые на выбор функций F_i^α, удовлетворяются, очевидно, функциями, входящими в правые части уравнений (39.4).

Поскольку F_i^α принадлежит классу C^1 в R', f^α принадлежит классу C^2, на основании чего

$$\frac{\partial^2 f^\alpha}{\partial x^i\, \partial x^j} = \frac{\partial^2 f^\alpha}{\partial x^j\, \partial x^i}\,. \tag{39.6}$$

Этой формулой выражено *необходимое условие интегрируемости системы* (39.5). Дифференцируя уравнения (39.5) по x^j, получим

$$\frac{\partial^2 f^\alpha}{\partial x^i\, \partial x^j} = \frac{\partial F_i^\alpha}{\partial x^j} + \frac{\partial F_i^\alpha}{\partial f^\beta}\, \frac{\partial f^\beta}{\partial x^j} = \frac{\partial F_i^\alpha}{\partial x^j} + \frac{\partial F_i^\alpha}{\partial f^\beta}\, F_j^\beta,$$

где последней операцией является подстановка выражения для производной $\partial f^\beta/\partial x^j$ из (39.5). Если теперь вернуться к (39.6), то мы получим в качестве необходимого условия интегрируемости уравнений

$$\frac{\partial F_i^\alpha}{\partial x^j}+\frac{\partial F_i^\alpha}{\partial f^\beta}F_j^\beta=\frac{\partial F_j^\alpha}{\partial x^i}+\frac{\partial F_j^\alpha}{\partial f^\beta}F_i^\beta \quad (\alpha,\ \beta=1,\ \ldots,\ m), \quad (i,\ j=1,\ \ldots,\ n). \tag{39.7}$$

Здесь мы убеждаемся, что если система (39.5) имеет решение, то либо (39.7) будут тождественны для f^α и x^i, либо между f и x должны существовать какие-то функциональные связи. Если (39.7) — тождества, то система уравнений (39.5) называется *вполне интегрируемой*. В таком случае представляется возможным доказать, что условия интегрируемости уравнений (39.7) не только необходимы, но также и достаточны для того, чтобы гарантировать существование решений системы (39.5).

Имеется несколько доказательств существования решений для таких систем дифференциальных уравнений в частных производных; простейшее, может быть, из них было предложено Т. Томасом в 1934 г. в работе, носящей заглавие «Система полных дифференциальных уравнений, определенных в односвязных областях»[1]). Более раннее доказательство, предполагающее аналитичность функций F_i^α, представил в 1872 г. Буке[2]). Существование таких решений доказано также Ж. Дарбу[3]) и Э. Картаном[4]). Мы не будем входить в обсуждение достаточности условий (39.7), а установим лишь теорему существования.

Теорема существования. *Пусть R — открытая n-мерная односвязная область, отнесенная к системе координат X, а R' — область, состоящая из R и границ $-\infty < f^i < \infty$. Если функции $F_\alpha^i(x,\ f)$ входят в класс C^1 в R', имеют ограниченные производные $\partial F_\alpha^i/\partial f^j$ в R' и если, далее, условия* (39.7) *интегрируемости тождественно удовлетворяются, то система* (39.5) *имеет одно и только одно решение*

$$f^\alpha(x^1,\ \ldots,\ x^n) \qquad (\alpha=1,\ \ldots,\ m),$$

которое для произвольного набора значений $(x_0^1,\ \ldots,\ x_0^n)$ принимает произвольно заданные значения $C^\alpha=f^\alpha(x_0^1,\ \ldots,\ x_0^n)$.

---

[1]) Thomas T. Y., Systems of total differential equations defined over simply connected domains, Annales of mathematics, 35, 730—734 (1934).

[2]) Bouquet J. C., Bull. sci. math. et astronom. 3, 265, (1872).

[3]) Darboux G., Leçons sur les systèmes orthogonaux (лекции об ортогональных системах), 1910, стр 326—335.

[4]) Cartan E., Géometrie des espaces de Riemann (Геометрия римановых пространств), 1928, стр. 54—57. Доказательство Томаса весьма близко по замыслу к представленному Э. Картаном.

Применим теперь эти результаты к частному случаю системы (39.4), отождествив ее с (39.5).

Зависимыми переменными в (39.4) являются y, $u_1, \ldots, u_n$, в уравнениях же (39.5) они обозначены через $f^1, f^2, \ldots, f^m$. Положим поэтому

$$f^1 = y,\ f^2 = u_1,\ \ldots,\ f^{n+1} = u_n;$$

тогда система (39.4) примет вид

$$\frac{\partial f^1}{\partial x^i} = F_i^1 = u_i \qquad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$$

и

$$\frac{\partial f^\alpha}{\partial x^i} = F_i^\alpha = \left\{ {\gamma \atop \alpha - 1\ i} \right\} u_\gamma \qquad (\alpha = 2,\ 3,\ \ldots,\ n+1),$$
$$(i,\ \gamma = 1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

Подстановка выражений для F_i^α в условия интегрируемости (39.7) дает

$$\left.\begin{aligned} \left\{ {\gamma \atop ij} \right\} u_\gamma &= \left\{ {\gamma \atop ji} \right\} u_\gamma, \\ R^\gamma_{kij} u_\gamma &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{39.8}$$

Первая из этих систем уравнений удовлетворяется тождественно в силу симметрии символов Кристоффеля. Вторая констатирует, что система уравнений (39.4) получает решение при тождественном обращении тензора Римана — Кристоффеля R^i_{jkl} в нуль. Поскольку этот тензор обращается в нуль в том случае, когда метрические коэффициенты принимают постоянные значения, мы сможем сформулировать следующий критерий.

Теорема II. *Необходимым и достаточным условием того, чтобы симметричный тензор g_{ij} при $|g_{ij}| \neq 0$ приводился при надлежащем преобразовании координат к тензору h_{ij}, где h_{ij} — константы, является условие, чтобы тензор Римана — Кристоффеля, образованный из g_{ij}, был нулевым.*

Отметим далее, что если квадратичная форма $Q = h_{ij}y^iy^j$ положительно определена, существует неособенное *линейное* преобразование, приводящее Q к канонической форме $Q = (y_1)^2 + \ldots + (y^n)^2$. Так, если $g_{ij}(x)$ являются коэффициентами в положительно определенной квадратичной дифференциальной форме

$$ds^2 = g_{ij}\, dx^i\, dx^j, \tag*{[39.1]}$$

характеризующей метрические свойства R_n, то существует вещественное функциональное преобразование $T: y^i = y^i(x)$, приводящее его к виду

$$ds^2 = (dy^1)^2 + \ldots + (dy^n)^2, \tag{39.9}$$

если только R^i_{jkl} обращается тождественно в нуль в R_n.

Напомним, что метрическое многообразие R_n, в котором возможно приведение формы (39.1) к (39.9), называется *евклидовым n-мерным пространством* E_n *и что* R_n *может быть названо евклидовым лишь в том случае, если риманов тензор многообразия является нулевым тензором.*

Задачи

1. Выполнить подстановки в условиях интегрируемости (39.7), приводящие к уравнениям (39.8).

2. Исходя из системы (39.5), показать, что она полностью эквивалентна системе полных дифференциальных уравнений

$$df^\alpha = F_i^\alpha\, dx^i.$$

3. Сформулировать условия интегрируемости для уравнения

$$P(x, y, z)\, dx + Q(x, y, z)\, dy + R(x, y, z)\, dz = 0.$$

Рассмотреть также систему

$$\frac{\partial F}{\partial x} = P, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = Q, \quad \frac{\partial F}{\partial z} = R.$$

4. Доказать теорему: если $P\,dx + Q\,dy + R\,dz = 0$ интегрируемо, то $\lambda P\,dx + \lambda Q\,dy + \lambda R\,dz = 0$ также интегрируемо для всякого $\lambda(x, y, z)$, входящего в класс C^1.

5. Вывести условия интегрируемости для уравнения

$$P_i(x^1, \ldots, x^n)\, dx^i = 0 \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

§ 40. e-системы и обобщенные дельты Кронекера

Понятие симметрии и кососимметрии[1]) относительно пар индексов (см. § 27) можно распространить на множество величин, являющихся симметричными или кососимметричными, и относительно числа индексов, превышающих два индекса. Рассмотрим в этом параграфе совокупности величин $A^{i_1 \ldots i_k}$ или $A_{i_1 \ldots i_k}$, зависящих от k индексов — нижних или верхних — хотя величины A, могут и не представлять собой тензоров.

Определение 1. *Система величин* $A^{i_1 \ldots i_k}$ *(или* $A_{i_1 \ldots i_k}$*), зависящая от k индексов, называется полностью симметричной, если значение символа A остается неизменным при любых перестановках индексов.*

Определение 2. *Система* $A^{i_1 \ldots i_k}$ *(или* $A_{i_1 \ldots i_k}$*), зависящая от k индексов, называется полностью кососимметричной, если значение символа A остается неизменным при произвольной перестановке индексов, причем A меняет знак лишь после нечетного числа перестановок индексов.*

Напомним, что всякая перестановка n различных объектов, например перестановка n различных целых чисел, может быть

[1]) В литературе используется также термин «антисимметрия».

выполнена конечным числом парных обменов этих объектов и что число обменов, требующихся для выполнения заданной перестановки в данной совокупности объектов всегда бывает либо четным, либо нечетным.

Из определения 2 следует непосредственно, что во всякой кососимметричной системе член, сопровождаемый двумя одинаковыми индексами, обращается обязательно в нуль. Если, например, у нас имеется кососимметричная система величин A_{ijk}, где i, j, k принимают значения 1, 2, 3, то $A_{122}=0$, $A_{123}=-A_{213}$, $A_{312}=A_{123}$ и т. д. Вообще компоненты A_{ijk} кососимметричной системы удовлетворяют соотношениям $A_{ijk}=-A_{ikj}=-A_{jik}=$ $=A_{jki}=A_{kij}=-A_{kji}$.

Рассмотрим теперь кососимметричную систему величин $A_{i_1 \ldots i_n}$ (или $A^{i_1 \ldots i_n}$), в которой индексы $i_1, \ldots, i_n$ принимают значения $1, 2, \ldots, n$. Определим e-систему следующим образом:

Определение 3. *Если значение величины* $A_{i_1 \ldots i_n}$ (*или* $A^{i_1 \ldots i_n}$) *равно* $+1$, когда $i_1 i_2 \ldots i_n$ *представляет собой четную перестановку ряда* $1\ 2 \ldots n$, *равно* -1, *когда* $i_1, i_2, \ldots i_n$ *представляет собой нечетную перестановку ряда* $1\ 2 \ldots n$ *и равно нулю во всех иных случаях, то система* $A_{i_1 \ldots i_n}$ (*или* $A^{i_1 \ldots i_n}$) *называется е-системой* (*системой е*).

Эти системы мы будем в дальнейшем записывать последовательностями либо $e_{i_1 \ldots i_n}$, либо $e^{i_1 \ldots i_n}$. В § 41 будет показано, что e-системы являются относительными тензорами.

В качестве иллюстрации отметим, что компонентами системы e_{ij} являются $e_{11}=0$, $e_{12}=1$, $e_{21}=-1$, $e_{22}=0$. Если e-система зависит от трех индексов ijk, то $e_{ijk}=0$ в случае, если два любых индекса одинаковы, между тем как $e_{ijk}=e_{123}=1$, если ijk — четная перестановка 123, и $e_{ijk}=-e_{123}=-1$, если ijk — нечетная перестановка 123.

Близкое отношение к e-системам имеют *обобщенные дельты Кронекера*, к определению которых мы теперь непосредственно и перейдем.

Определение 4. *Символ* $\delta^{i_1 \ldots i_k}_{j_1 \ldots j_k}$, *зависящий от k верхних и k нижних индексов, каждый из которых пробегает последовательность значений от* 1 *до* n, *называется обобщенной дельтой Кронекера при условиях*:

(а) *если он полностью кососимметричен в верхних и нижних индексах*;

(б) *если все верхние индексы различны, а нижние составляют тот же комплект чисел, что и верхние, причем названный символ принимает значения* $+1$ *или* -1 *в зависимости от того, требуется ли четное или нечетное число перестановок для того,* *чтобы расположить верхние индексы в том же порядке, что и нижние*;

(в) *во всех остальных случаях значение указанного символа должно быть равно нулю.*

В качестве примера рассмотрим символ δ^{ij}_{kl}. Из определения 4 следует, что если $i = j$ или $k = l$ или если сочетание ij нетождественно сочетанию kl, то $\delta^{ij}_{kl} = 0$. Во всех иных случаях δ^{ij}_{kl} равен $+1$ или -1 в зависимости от того, является ли kl четной или нечетной перестановкой ij. На этом основании

$$0 = \delta^{11}_{ij} = \delta^{22}_{ij} = \delta^{12}_{13} = \ldots,$$
$$1 = \delta^{12}_{12} = \delta^{13}_{13} = \delta^{21}_{21} = \ldots,$$
$$-1 = \delta^{12}_{21} = \delta^{13}_{31} = \delta^{21}_{12} = \ldots$$

В § 41 мы докажем, что обобщенные дельты Кронекера — тензоры.

Из определения 3 следует, что непосредственное произведение $e^{i_1 i_2 \ldots i_n} e_{j_1 j_2 \ldots j_n}$ двух систем $e^{i_1 \ldots i_n}$ и $e_{j_1 \ldots j_n}$ представляет собой обобщенную дельту Кронекера. Например, $e^{\alpha\beta\gamma} e_{ijk}$ принимает следующие значения:

(а) нуль, если два или большее число верхних или нижних индексов одинаковы;

(б) $+1$, если разность в числе перестановок $\alpha\beta\gamma$ и ijk из 123 представляет собой четное число;

(в) -1, если разность в числе перестановок $\alpha\beta\gamma$ и ijk из 123 представляет собой нечетное число.

Легко сформулировать положения (б) и (в) несколько иначе:

(б′) $e^{\alpha\beta\gamma} e_{ijk} = +1$, если для расположения нижних индексов в том же порядке, что и верхних, требуется четное число перестановок;

(в′) $e^{\alpha\beta\gamma} e_{ijk} = -1$, если для расположения нижних индексов в том же порядке, что и верхних, требуется нечетное число перестановок.

В силу этого представляется возможным установить равенство $e^{\alpha\beta\gamma} e_{ijk} = \delta^{\sigma\beta\gamma}_{ijk}$.

Из определений 3 и 4 поэтому следует, что e-символы допускают выражение в зависимости от дельт Кронекера:

$$e^{i_1 i_2 \ldots i_n} = \delta^{i_1 i_2 \ldots i_n}_{1\ 2\ \ldots\ n} \quad \text{и} \quad \delta^{1\ 2\ \ldots\ n}_{i_1 i_2 \ldots i_n} = e_{i_1 i_2 \ldots i_n},$$

так как $e = +1$ или -1, где совокупность различных целых чисел $i_1 i_2 \ldots i_n$ получается из совокупности $1\,2 \ldots n$ в результате четного или нечетного числа перестановок, причем во всех иных случаях $e = 0$. e-системы и обобщенные дельты Кронекера обнаруживают свою полезность в вычислениях, связанных с альтернируемыми совокупностями величин.

Рассмотрим несколько примеров, позволяющих нам вывести несколько соотношений, связанных с операциями над этими символами.

Произведем операцию свертки в $\delta^{ijk}_{\alpha\beta\gamma}$ по индексам k и γ. Результат для $n=3$ принимает вид

$$\delta^{ijk}_{\alpha\beta k}=\delta^{ij1}_{\alpha\beta 1}+\delta^{ij2}_{\alpha\beta 2}+\delta^{ij3}_{\alpha\beta 3}\equiv\delta^{ij}_{\alpha\beta}.$$

Это выражение обращается в нуль при наличии равенства либо между i и j, либо между α и β. Положив $i=1$, $j=2$, получаем $\delta^{123}_{\alpha\beta 3}=\delta^{12}_{\alpha\beta}$, откуда $\delta^{12}_{\alpha\beta}=0$, если $\alpha\beta$ не является перестановкой 12. В последнем случае $\delta^{12}_{\alpha\beta}=1$, если $\alpha\beta$ — четная перестановка 12, а $\delta^{12}_{\alpha\beta}=-1$ для нечетной перестановки. Подобные же результаты имеют силу для всех значений α и β, выбранных из совокупности чисел 1, 2, 3. Таким образом, находим, что $\delta^{ij}_{\alpha\beta}$ равна:

(а) нулю, если два из нижних или верхних индексов одинаковы или когда они состоят из одних и тех же чисел;

(б) $+1$, если ij — четная перестановка $\alpha\beta$;

(в) -1, если ij — нечетная перестановка $\alpha\beta$.

Если мы произведем свертку $\delta^{ij}_{\alpha\beta}$ и разделим результат на 2, то получим систему, зависящую от двух индексов:

$$\delta^{i}_{\alpha}\equiv\frac{1}{2}\delta^{ij}_{\alpha j}=\frac{1}{2}\left(\delta^{i1}_{\alpha 1}+\delta^{i2}_{\alpha 2}+\delta^{i3}_{\alpha 3}\right).$$

Положив $i=1$ в δ^{i}_{α}, получим $\delta^{1}_{\alpha}=\frac{1}{2}\left(\delta^{12}_{\alpha 2}+\delta^{13}_{\alpha 3}\right)$. Это выражение обращается вообще в нуль, за исключением того случая, когда $\alpha=1$ и $\delta^{1}_{1}=1$. Аналогичные результаты можно получить, положив $i=2$ или $i=3$; тогда δ^{i}_{α} принимает значения:

(а) 0, если $i\neq\alpha$
(б) 1, если $i=\alpha$. $(\alpha,\ i=1,\ 2,\ 3)$;

Путем подсчета числа слагаемых, входящих в суммы, нетрудно убедиться, что вообще

$$\delta^{i}_{\alpha}=\frac{1}{n-1}\delta^{ij}_{\alpha j}\quad\text{и}\quad\delta^{ij}_{ij}=n(n-1). \tag{40.1}$$

Отсюда можно, таким образом, сделать вывод, что

$$\delta^{i_1 i_2\ldots i_r}_{j_1 j_2\ldots j_r}=\frac{(n-k)!}{(n-r)!}\delta^{i_1 i_2\ldots i_r i_{r+1}\ldots i_k}_{j_1 j_2\ldots j_r i_{r+1}\ldots i_k} \tag{40.2}$$

и

$$\delta^{i_1 i_2\ldots i_r}_{i_1 i_2\ldots i_r}=n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)=\frac{n!}{(n-r)!}. \tag{40.3}$$

В качестве частного случая (40.3) находим формулу

$$e^{i_1 i_2\ldots i_n}e_{i_1 i_2\ldots i_n}=n!, \tag{40.4}$$

а из (40.2) выводим соотношение

$$e^{i_1 \dots i_r i_{r+1} \dots i_n} e_{j_1 \dots j_r i_{r+1} \dots i_n} = (n-r)!\, \delta^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_r}. \tag{40.5}$$

Рассмотрим теперь ряд n^{p+q} величин $A^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q}$ (где i и j пробегают ряд значений от 1 до n), симметричных по двум или по большему числу индексов (верхних или нижних). Мы можем показать, что

$$\delta^{j_1 j_2 \dots j_q}_{i_1 i_2 \dots i_q} A^{r_1 r_2 \dots r_p}_{j_1 j_2 \dots j_q} = 0,$$

если $A^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q}$ симметричен по двум или большему числу нижних индексов. Точно так же и

$$\delta^{s_1 s_2 \dots s_p}_{i_1 i_2 \dots i_p} A^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} = 0,$$

если $A^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q}$ также симметричен по двум или по большему числу индексов.

Положим, что $A^{r_1 \dots r_p}_{j_1 \dots j_q}$ симметричен по j_1 и j_2; тогда

$$\delta^{j_1 j_2 \dots j_q}_{i_1 i_2 \dots i_q} A^{r_1 \quad \dots r_p}_{j_1 j_2 \dots j_q} = \delta^{j_1 j_2 \dots j_q}_{i_1 i_2 \dots i_q} A^{r_1 \quad \dots r_p}_{j_2 j_1 \dots j_q} = -\delta^{j_2 j_1 \dots j_q}_{i_1 i_2 \dots i_q} A^{r_1 \quad \dots r_p}_{j_2 j_1 \dots j_q}.$$

Но j_1 и j_2 — индексы суммирования, поэтому

$$\delta^{j_1 j_2 \dots j_q}_{i_1 i_2 \dots i_q} A^{r_1 \dots r_p}_{j_1 j_2 \dots j_q} = -\delta^{j_1 j_2 \dots j_q}_{i_1 i_2 \dots i_q} A^{r_1 \dots r_p}_{j_1 j_2 \dots j_q},$$

и следовательно,

$$\delta^{j_1 j_2 \dots j_q}_{i_1 i_2 \dots i_q} A^{r_1 \dots r_p}_{j_1 j_2 \dots j_q} = 0.$$

Задачи

1. (а) Показать, что $\delta^{ijk}_{ijk} = 3!$, если $i,\ j,\ k = 1,\ 2,\ 3$.

(б) Показать, что $\delta^{ij}_{\alpha\beta} = \begin{vmatrix} \delta^i_\alpha & \delta^i_\beta \\ \delta^j_\alpha & \delta^j_\beta \end{vmatrix}$ и $\delta^{ijk}_{\alpha\beta\gamma} = \begin{vmatrix} \delta^i_\alpha & \delta^i_\beta & \delta^i_\gamma \\ \delta^j_\alpha & \delta^j_\beta & \delta^j_\gamma \\ \delta^k_\alpha & \delta^k_\beta & \delta^k_\gamma \end{vmatrix}$.

2. Раскрыть для $n = 3$ выражения:
(а) $\delta^i_\alpha \delta^\alpha_j$; (б) $\delta^{12}_{ij} x^i y^j$; (в) $\delta^{13}_{ij} x^i y^j$; (г) $\delta^{\alpha\beta}_{ij} x^i y^j$; (д) δ^{ij}_{ij}.

3. Раскрыть для $n = 2$ выражения:
(а) $e^{ij} a^1_i a^2_j$; (б) $e^{ij} a^2_i a^1_j$; (в) $e^{\alpha\beta} a^i_\alpha a^i_\beta = e^{ij}\, |a|$.

4. Показать, что если совокупность величин $A_{i_1 \dots i_k}$ кососимметрична в нижних индексах (числом k), тогда

$$\delta^{i_1 \dots i_k}_{j_1 \dots j_k} A_{i_1 \dots i_k} = k!\, A_{j_1 \dots j_k}.$$

5. Показать, что если выражение A_{ijk} полностью симметрично и индексы пробегают ряд значений от 1 до n, то число различных членов в совокупности $\{A_{ijk}\}$ должно быть равно

$$N = n + n(n-1) + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}.$$

Указание. Рассмотреть случаи, в которых все нижние индексы ijk одинаковы, за исключением двух, и когда все они различны.

6. Показать, что число различных неисчезающих A_{ijk} в задаче 5 равно $\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}$, если выражение A_{ijk} полностью кососимметрично.

§ 41. Применение e-систем к детерминантам. Тензорный характер обобщенных дельт Кронекера

Напомним, что детерминант $|a^i_j|$ n-го порядка из элементов a^i_j вычисляется как сумма произведений, в каждое из которых входит один, и только один, элемент из каждой строки и из каждого столбца детерминанта. Знак каждого члена в сумме определяется способом перестановки индексов. Так, например, если верхние индексы в произведении $a^1_{i_1} a^2_{i_2} \ldots a^n_{i_n}$ располагаются в нормальном порядке $12\ldots n$, то произведение получит знак $+$ если число перестановок, необходимых для того, чтобы расположить нижние индексы в нормальном порядке, окажется четным. Знак получится отрицательным, если требуемое число перестановок будет нечетным. Поскольку $e^{i_1 \ldots i_n} = \delta^{i_1 i_2 \ldots i_n}_{12 \ldots n}$ и $\delta^{12 \ldots n}_{i_1 i_2 \ldots i_n} = e_{i_1 i_2 \ldots i_n}$, детерминант

$$|a^i_j| = \begin{vmatrix} a^1_1 & a^1_2 & \ldots & a^1_n \\ a^2_1 & a^2_2 & \ldots & a^2_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a^n_1 & a^n_2 & \ldots & a^n_n \end{vmatrix} \equiv a \tag{41.1}$$

можно будет записать в компактной форме

$$a = e^{i_1 i_2 \ldots i_n} a^1_{i_1} a^2_{i_2} \ldots a^n_{i_n} = e_{i_1 i_2 \ldots i_n} a^{i_1}_1 a^{i_2}_2 \ldots a^{i_n}_n. \tag{41.2}$$

Рассмотрим в качестве примера

$$|a^i_j| = \begin{vmatrix} a^1_1 & a^1_2 & a^1_3 \\ a^2_1 & a^2_2 & a^2_3 \\ a^3_1 & a^3_2 & a^3_3 \end{vmatrix}.$$

Если этот детерминант разложить по столбцам, то мы получим $a = \sum \pm a^i_1 a^j_2 a^k_3$, где ijk — перестановка 123. Введение знака $+$ или $-$ в произведение $a^i_1 a^j_2 a^k_3$ совершается в зависимости от того, четной или нечетной получается перестановка. Приведенный детерминант можно будет поэтому записать в виде $|a^i_j| = e_{ijk}a^i_1a^j_2a^k_2$. С другой стороны, разложив его по столбцам, мы получим компактную запись $|a^i_j| = e^{ijk}a^1_ia^2_ja^3_k$. Рассмотрим теперь сумму

$$e_{ijk}a^i_\alpha a^j_\beta a^k_\gamma \qquad (i, j, k, \alpha, \beta, \gamma = 1, 2, 3).$$

Прежде всего мы хотим показать, что эта система полностью кососимметрична относительно $\alpha\beta\gamma$. Поскольку индексы ijk являются индексами суммирования, мы вправе заменить их произвольно другими и получить таким путем равенства

$$e_{ijk}a^i_\alpha a^j_\beta a^k_\gamma = e_{kji}a^k_\alpha a^j_\beta a^i_\gamma = e_{kji}a^i_\gamma a^j_\beta a^k_\alpha.$$

Так как k и i подвергнуты в e_{kji} перестановке, то e-символ меняет знак, и мы получаем

$$e_{ijk}a^i_\alpha a^j_\beta a^k_\gamma = -e_{ijk}a^i_\gamma a^j_\beta a^k_\alpha.$$

Убеждаясь в том, что перестановка α и γ приводит к перемене знака, констатируем, что рассматриваемая нами система кососимметрична относительно α и γ. Сходные результаты имеют место, очевидно, и для других индексов. Частным случаем такой системы является детерминант $|a^i_j| = e_{ijk}a^i_1a^j_2a^k_3$, а потому из вышесказанного следует, что

$$e_{ijk}a^i_\alpha a^j_\beta a^k_\gamma = |a^i_j|\, e_{\alpha\beta\gamma}.$$

Подобным же образом можно показать, что

$$e^{ijk}a^\alpha_i a^\beta_j a^\gamma_k = |a^i_j|\, e^{\alpha\beta\gamma}.$$

Из этих выражений следует непосредственно, что перестановка двух столбцов (или двух строк) детерминанта $|a^i_j|$ изменяет его знак, и если два его столбца тождественны, то значение его обращается в нуль.

Эти результаты можно немедленно обобщить на детерминанты n-го порядка, так что для любой перестановки строк мы вправе установить

$$e^{\alpha\beta\ldots\gamma}|a^i_j| = e^{ij\ldots k}a^\alpha_i a^\beta_j \ldots a^\gamma_k, \tag{41.3}$$

и для любой перестановки столбцов

$$e_{ij\ldots k}|a^i_j| = e_{\alpha\beta\ldots\gamma}a^\alpha_i a^\beta_j \ldots a^\gamma_k. \tag{41.4}$$

Воспользуемся формулой (41.4) в вычислении произведения двух детерминантов. Поразительная эффективность и компактность этого приема демонстрируется в нижеследующем выводе:

Пользуясь выражением $|b^i_j| = e_{ij\ldots k}b^i_1b^j_2 \ldots b^k_n$, мы можем, опираясь на формулу (41.4), установить соотношение

$$|a^i_j|\cdot|b^i_j| = |a^i_j|\, e_{ij\ldots k}b^i_1b^j_2 \ldots b^k_n = (e_{\alpha\beta\ldots\gamma}a^\alpha_i a^\beta_j \ldots a^\gamma_k)(b^i_1b^j_2 \ldots b^k_n)$$

и получить из него

$$|a^i_j| \cdot |b^i_j| = e_{\alpha\beta \dots \gamma} (a^\alpha_i b^i_1)(a^\beta_j b^j_2) \dots (a^\gamma_k b^k_n) = |c^i_j|,$$

где

$$c^i_j = a^i_\alpha b^\alpha_j = a^i_1 b^1_j + a^i_2 b^2_j + \dots + a^i_n b^n_j.$$

Разложение детерминанта по элементам первого столбца запишется выражением

$$|a^i_j| = a^{i_1}_1 e_{i_1 i_2 \dots i_n} a^{i_2}_2 \dots a^{i_n}_n = a^\alpha_1 A^1_\alpha, \tag{41.5}$$

в котором $A^1_\alpha = e_{\alpha i_2 \dots i_n} a^{i_2}_2 a^{i_3}_3 \dots a^{i_n}_n$ — алгебраическое дополнение элемента a^α_1.

Выведем теперь формулу для частных производных детерминанта, элементы a^i_j которого являются функциями переменных $x^1, x^2, \dots, x^n$. Из формулы (41.2) получаем

$$a = e_{i_1 i_2 \dots i_n} a^{i_1}_1 a^{i_2}_2 \dots a^{i_n}_n.$$

Дифференцирование этого выражения приводит нас с помощью формулы типа (41.5) к производным:

$$\frac{\partial a}{\partial x^j} = e_{i_1 i_2 \dots i_n} \left(\frac{\partial a^{i_1}_1}{\partial x^j} a^{i_2}_2 \dots a^{i_n}_n + a^{i_1}_1 \frac{\partial a^{i_2}_2}{\partial x^j} \dots a^{i_n}_n + \dots \right.$$

$$\left. \dots + a^{i_1}_1 a^{i_2}_2 \dots \frac{\partial a^{i_n}_n}{\partial x^j} \right) = \frac{\partial a^{i_1}_1}{\partial x^j} A^1_{i_1} + \frac{\partial a^{i_2}_2}{\partial x^j} A^2_{i_2} + \dots$$

$$\dots + \frac{\partial a^{i_n}_n}{\partial x^j} A^n_{i_n} = \frac{\partial a^\alpha_\beta}{\partial x^j} A^\beta_\alpha.$$

Формулы (41.3) и (41.4) позволят нам установить, что *символы перестановок* $e^{i_1 \dots i_n}$ и $e_{i_1 \dots i_n}$ *являются относительными тензорами, которым должен быть приписан вес* $+1$ *и соответственно* -1.

Рассмотрим допустимое преобразование

$$T\colon\ y^i = y^i(x^1, \dots, x^n)$$

и его якобиан $J = \left| \frac{\partial y}{\partial x} \right|$. Если в формуле (41.3) положить $a^i_j = \frac{\partial y^i}{\partial x^j}$ и вспомнить, что $\frac{1}{J} = \left| \frac{\partial x}{\partial y} \right|$, то получим непосредственно

$$e^{i_1 \dots i_n} = \left| \frac{\partial x}{\partial y} \right| e^{\alpha_1 \dots \alpha_n} \frac{\partial y^{i_1}}{\partial x^{\alpha_1}} \dots \frac{\partial y^{i_n}}{\partial x^{\alpha_n}}, \tag{41.6}$$

т. е. уравнение, выражающее закон преобразования относительных контравариантных тензоров веса $+1$. Точно таким же путем выводим, что

$$e_{i_1 i_2 \ldots i_n} = \left| \frac{\partial x}{\partial y} \right|^{-1} e_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n} \frac{\partial x^{\alpha_1}}{\partial y^{i_1}} \frac{\partial x^{\alpha_2}}{\partial y^{i_2}} \cdots \frac{\partial x^{\alpha_n}}{\partial y^{i_n}}, \qquad (41.7)$$

откуда находим, что $e_{i_1 i_2 \ldots i_n}$ — относительный тензор веса -1. Из формулы (40.5)

$$e^{i_1 \ldots i_r i_{r+1} \ldots i_n} e_{j_1 \ldots j_r i_{r+1} \ldots i_n} = (n-r)!\, \delta^{i_1 \ldots i_r}_{j_1 \ldots j_r}$$

обнаруживаем, что дельта Кронекера $\delta^{i_1 \ldots i_r}_{j_1 \ldots j_r}$ получается путем перемножения двух e-символов, одним из которых является относительный тензор веса $+1$, другим — относительный тензор веса -1 и их свертки в соответствии с числом индексов. В результате получается тензор нулевого веса, т. е. обычный тензор. Таким образом, мы доказали, что *обобщенные дельты Кронекера являются абсолютными тензорами.*

Из того, что в случае декартовой координатной системы X выражение $\delta^{j_1 \ldots j_q}_{i_1 \ldots i_q,\, s}$ приводится к $\dfrac{\partial \delta^{j_1 \ldots j_q}_{i_1 \ldots i_q}}{\partial x^s} = 0$, заключаем, что *ковариантные производные обобщенных дельт Кронекера* обращаются тождественно в нуль. Таким образом, дельты Кронекера ведут себя как константы в ковариантном дифференцировании.

Задачи

1. Доказать, что $\delta^{ij}_{\alpha\beta} a^{\alpha\beta} = a^{ij} - a^{ji}$.
2. Доказать, что $\delta^{ijk}_{\alpha\beta\gamma} a^{\alpha\beta\gamma} = a^{ijk} - a^{ikj} + a^{jki} - a^{jik} + a^{kij} - a^{kji}$.
3. Доказать, что если a_{ij} удовлетворяет уравнению

$$b a_{ij} + c a_{ji} = 0,$$

то возникают две возможности: либо $b = -c$ и a_{ij} симметрично, либо $b = c$ и тогда a_{ij} кососимметрично. *Указание*. Так как i и j могут принимать значения $1 \ldots n$, то заданному уравнению можно придать вид

$$b a_{ji} + c a_{ij} = 0.$$

Сложив его с первым, получим $(b + c)(a_{ij} + a_{ji}) = 0$.

4. Показать, что (а) $e_{\alpha j} e^{\alpha i} = \delta^i_j$; (б) $e_{ijk} e^{irs} = \delta^r_j \delta^s_k - \delta^r_k \delta^s_j$. *Указание*. Левый член в (б) обращается в нуль, за исключением случая, когда j и k различны, а j, k — перестановка r, s. Если $j = r$ и $k = s$, то левый член получает значение $+1$, если $j = s$ и $k = r$, то его значение -1. Определить затем значение правого члена при том же наборе индексов.

5. Определить значения δ^i_i, δ^{ij}_{ji}, $\delta^i_j \delta^j_k \delta^k_i$, если индексы располагаются в порядке от 1 до n.

ГЛАВА III

ГЕОМЕТРИЯ

§ 42. Неевклидовы геометрии

Традиционная евклидова геометрия, основанная на системе «самоочевидных истин» и созданная в значительной мере Александрийской школой математиков (около 300 лет до нашей эры), господствовала над мыслью и формировала развитие физики и астрономии на протяжении более двух тысячелетий. Немного нашлось за это время смельчаков среди математиков, для которых «самоочевидные истины», содержавшиеся в евклидовых аксиомах, показались неубедительными: престиж логической структуры «Начал» Евклида был столь высок, а рука авторитета столь весомой, что они на века затормозили развитие математики.

В 1621 г. Г. Сэвиль поднял, наконец, ряд вопросов, направленных на те два, по его выражению, «позорных пятна» геометрии, которые усматривались им в теории пропорций и в теории параллельных линий. Аксиома Евклида о параллельных (V постулат в книге 1 «Элементов») была призвана утверждать, что любая пара проведенных на плоскости прямых при достаточном их продолжении, взаимно пересекается, если сумма двух внутренних углов, образованных линией, пересекающей упомянутую пару, оказывалась меньшей, чем два прямых угла. Действительно, тот факт, что некоторые предложения Евклида, относящиеся главным образом к обращению вышеназванного постулата, оказалось возможным доказать без привлечения V постулата, внушила надежду на то, что и самый постулат можно вывести из других аксиом. Однако все попытки доказать V постулат оказались безуспешными.

В 1826 г. русский математик Н. И. Лобачевский представил математическому факультету Казанского университета исследование, исходившее из допущения, согласно которому через каждую точку на плоскости можно провести две прямые, параллельные заданной. При этом обнаружилось, что построенная

Лобачевским геометрия не содержала в себе никаких внутренних противоречий, как и евклидова. Больше того: геометрия Лобачевского содержала в себе геометрию Евклида как специальный случай и вскрыла произвольность понятия длины, принятого в геометрии Евклида.

В 1831 г. венгерский математик И. Бойаи опубликовал результаты своих самостоятельных исследований, по замыслу мало отличавшихся от результатов Лобачевского, но проникших, может быть, более глубоко в метрические свойства пространства. Бойаи отметил, как и Лобачевский, что геометрию в малом можно приближенно признать евклидовой и что только физический эксперимент может решить, принять ли евклидову или неевклидову геометрию в качестве инструмента физического измерения. Таким образом, выяснилось, что никаких априорных критериев для предпочтения одной геометрии другой не существует. И тем не менее лишь после появления в печати (посмертно опубликованной в 1867 г.) глубокой диссертации Б. Римана «О гипотезах, лежащих в основании геометрии» математический мир полностью признал ту роль, которую играют в геометрии метрические понятия.

Риман, по-видимому, не был знаком с работами Лобачевского и Бойаи, хотя они хорошо были известны К. Гауссу. Позднее Э. Бельтрами опубликовал свой классический труд по интерпретации неевклидовых геометрий (1868), где он исследовал результаты Лобачевского, Бойаи и Римана, и доказал, что метрические свойства пространства являются только определениями. Из этих исследований выяснилось, что все три типа геометрий возможны для поверхностей постоянной кривизны: геометрия Лобачевского — на поверхности постоянной отрицательной кривизны, риманова — на поверхности постоянной положительной кривизны и евклидова — на поверхности нулевой кривизны. Эти геометрии называются также соответственно: гиперболическая, эллиптическая и параболическая. Рассмотрим их вкратце в нижеследующем параграфе.

§ 43. Длина дуги

Введем в n-мерное пространство R систему координат X и рассмотрим одномерное подпространство в R, определенное уравнениями

$$C\colon\ x^i = x^i(t) \qquad (i = 1, \ldots, n), \tag{43.1}$$

где t — вещественный параметр, изменяющийся непрерывно в интервале $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$. Одномерное многообразие C называется *отрезком дуги кривой*. В этой книге мы будем иметь дело лишь с такими кривыми, для которых $x^i(t)$ и $\dot{x}^i(t) \equiv dx^i/dt$ являются непрерывными функциями в интервале $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$. Предлагаемое здесь определение дуги кривой является непосредственным обобщением параметрического представления кривых в элементарной аналитической геометрии.

Пусть функция $F(x^1, \ldots, x^n, \dot{x}^1, \ldots, \dot{x}^n)$, рассматриваемая как функция t, является непрерывной в интервале $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$. Положим[1]), что $F(x, \dot{x}) > 0$, за исключением случая, когда $x^i = 0$ и для каждого положительного числа k

$$F(x^1, \ldots, x^n, k\dot{x}^1, \ldots, k\dot{x}^n) = kF(x^1, \ldots, x^n, \dot{x}^1, \ldots, \dot{x}^n).$$

Интеграл

$$s = \int_{t_1}^{t_2} F(x, \dot{x})\, dt \tag{43.2}$$

---

[1]) Функция $F(x, \dot{x})$, удовлетворяющая условию $F(x, k\dot{x}) = kF(x, \dot{x})$ для каждого $k > 0$, называется *положительно однородной степени* 1 по $\dot{x}^i$. Это условие одновременно и необходимо, и достаточно для того, чтобы гарантировать независимость значения интеграла (43.2) от той или иной частной зависимости параметра C. Например, если t в (43.1) заменить какой-либо функцией $t = \varphi(s)$, а $x^i[\varphi(s)]$ обозначить через $\xi^i(s)$, получив $x^i(t) = \xi^i(s)$, то мы придем к равенству

$$\int_{t_1}^{t_2} F(x, \dot{x})\, dt = \int_{s_1}^{s_2} F(\xi, \xi')\, ds,$$

где $\xi'^i(s) = dx^i/ds$, а $t_1 = \varphi(s_1)$ и $t_2 = \varphi(s_2)$. Для того чтобы доказать эту теорему, положим, что k — произвольное положительное число, а $t = ks$, так что $t_1 = ks_1$, а $t_2 = ks_2$. Тогда (43.1) принимает значение

$$C\colon\ x^i(ks) = \xi^i(s)$$

и

$$\xi'^i(s) = \frac{dx^i(ks)}{ds} = k\dot{x}^i(ks).$$

Если эти значения ввести в (43.2), получим

$$s = \int_{s_1}^{s_2} F[x(ks), \dot{x}(ks)]\, k\, ds,$$

приравняв же результат интегралу

$$s = \int_{s_1}^{s_2} F[\xi(s), \xi'(s)]\, ds,$$

мы должны будем получить соотношение

$$F(\xi, \xi') = F(x, k\dot{x}) = kF(x, \dot{x}).$$

И наоборот, если эти формулы окажутся справедливыми для каждого элемента кривой C и каждого $k > 0$, то равенство интегралов будет обеспечено для любого вида параметра $t = \varphi(s)$, $\varphi'(s) > 0$, $s_1 \leqslant s \leqslant s_2$ при $t_1 = \varphi(s_1)$ и $t_2 = \varphi(s_2)$.

называется длиной C; при этом о пространстве R говорится, что оно *метризовано формулой* (43.2).

Тот или иной выбор функций $F(x, \dot{x})$ приводит к тому или иному типу метрической геометрии.

Если мы определим длину дуги кривой по формуле

$$s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{g_{\alpha\beta}(x) \frac{dx^\alpha}{dt} \frac{dx^\beta}{dt}}\, dt \qquad (\alpha, \beta = 1, \ldots, n), \tag{43.3}$$

где $g_{\alpha\beta}\dot{x}^\alpha\dot{x}^\beta$ — положительно определенная квадратичная форма в переменных $\dot{x}^\alpha$, то получающаяся в этих условиях геометрия будет *римановой геометрией*, пространство же, метризованное таким путем, называется *римановым n-мерным пространством R_n*.

Вспомним из § 39, что если существует допустимое преобразование координат $T: y^i = y^i(x^1, \ldots, x^n)$, обладающее тем свойством, что *квадрат элемента дуги ds*

$$ds^2 = g_{\alpha\beta}\, dx^\alpha\, dx^\beta \tag{43.4}$$

может быть при этом приведен к виду

$$ds^2 = dy^i\, dy^i, \tag{43.5}$$

то говорят, что риманово многообразие R_n приводится к *евклидову многообразию E_n*. Система отсчета Y, в которой элемент дуги C в E_n задается выражением (43.5), называется декартовой ортогональной координатной системой. Очевидно, E_n следует понимать как обобщение так называемой евклидовой плоскости, определяемой полной совокупностью пар вещественных значений (y^1, y^2). Если эти значения (y^1, y^2) ассоциируются с точками плоскости, отнесенной к паре прямоугольных декартовых осей, то квадрат элемента дуги ds примет знакомый вид $ds^2 = (dy^1)^2 + (dy^2)^2$.

Как мы убедимся в дальнейшем, бывает иногда удобно изображать пары вещественных чисел (y^1, y^2) точками в декартовой плоскости даже и в тех случаях, когда метрика многообразия y^i не является евклидовой. Чтобы пояснить это положение, рассмотрим сферу S радиуса a, расположенную в трехмерном евклидовом многообразии E_3 с центром в начале координат $(0, 0, 0)$, которое отнесено к системе прямоугольных декартовых координат $OX^1X^2X^3$. Пусть T будет плоскостью, касательной к сфере S в точке $(0, 0, -a)$. Отнесем точки этой плоскости к прямоугольной декартовой системе осей $O'Y^1Y^2$, как это показано на рис. 8. Если мы проведем из центра $O(0, 0, 0)$ радиальную прямую OP, пересекающую сферу S в точке $P(x^1, x^2, x^3)$, и плоскость T в $Q(y^1, y^2, -a)$, тогда точки P нижней половины сферы S будут находиться во взаимно однозначном соответствии с точками (y^1, y^2) касательной плоскости T.

Чтобы получить аналитическую форму этого соответствия, заметим, что если $P(x^1, x^2, x^3)$ — какая-либо точка на радиальной

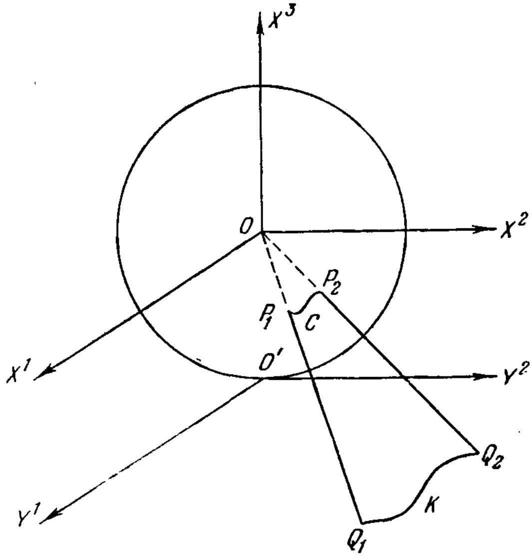

Рис. 8.

прямой OP, то симметричные уравнения этой прямой дадут нам отношения

$$\frac{x^1-0}{y^1-0}=\frac{x^2-0}{y^2-0}=\frac{x^3-0}{-a-0}=\lambda,$$

или

$$x^1=\lambda y^1, \qquad x^2=\lambda y^2, \qquad x^3=-\lambda a. \tag{43.6}$$

Поскольку наша задача требует выявления образов Q для точек P, расположенных на S, переменные x^i удовлетворяют уравнению S:

$$(x^1)^2+(x^2)^2+(x^3)^2=a^2,$$

или

$$\lambda^2\left[(y^1)^2+(y^2)^2+a^2\right]=a^2.$$

Определяя отсюда λ и подставляя значение в (43.6), находим

$$x^1=\frac{ay^1}{\sqrt{(y^1)^2+(y^2)^2+a^2}}, \qquad x^2=\frac{ay^2}{\sqrt{(y^1)^2+(y^2)^2+a^2}},$$

$$x^3=\frac{-a^2}{\sqrt{(y^1)^2+(y^2)^2+a^2}}. \tag{43.7}$$

Эти уравнения решают поставленную задачу, давая аналитическое взаимно однозначное соответствие точек Q на T и точек P рассматриваемой области S.

Пусть $P_1(x^1, x^2, x^3)$ и $P_2(x^1+dx^1, x^2+dx^2, x^3+dx^3)$ — две близко расположенные точки на кривой C, лежащей на сфере S. Евклидово расстояние $\overline{P_1P_2}$ вдоль C дается формулой

$$ds^2 = dx^i\, dx^i \qquad (i = 1,\ 2,\ 3), \tag{43.8}$$

а так как переменные x^i связаны с y^i формулами (43.7),

$$dx^i = \frac{\partial x^i}{\partial y^\alpha}\, dy^\alpha \qquad (\alpha = 1,\ 2),$$

то (43.8) приводит к решению

$$ds^2 = \frac{\partial x^i}{\partial y^\alpha}\frac{\partial x^i}{\partial y^\beta}\, dy^\alpha\, dy^\beta = g_{\alpha\beta}(y)\, dy^\alpha\, dy^\beta \qquad (\alpha,\ \beta = 1,\ 2),$$

где $g_{\alpha\beta}(y)$ суть функции y^i, вычисленные из (43.7) с помощью определения $g_{\alpha\beta} = \dfrac{\partial x^i}{\partial y^\alpha}\dfrac{\partial x^i}{\partial y^\beta}$.

Если образ K кривой C на T дается уравнениями

$$\begin{aligned} &y^1 = y^1(t), \\ &y^2 = y^2(t), \qquad t_1 \leqslant t \leqslant t_2, \end{aligned}$$

то длину C можно вычислить из интеграла

$$s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{g_{\alpha\beta}\dot{y}^\alpha \dot{y}^\beta}\, dt.$$

Непосредственное интегрирование дает

$$ds^2 = \frac{(dy^1)^2 + (dy^2)^2 + \frac{1}{a^2}(y^1\, dy^2 - y^2\, dy^1)^2}{\left\{1 + \frac{1}{a^2}[(y^1)^2 + (y^2)^2]\right\}^2} \tag{43.9}$$

и

$$s = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\sqrt{(\dot{y}^1)^2 + (\dot{y}^2)^2 + \frac{1}{a^2}(y^1\dot{y}^2 - y^2\dot{y}^1)^2}}{1 + \frac{1}{a^2}[(y^1)^2 + (y^2)^2]}\, dt.$$

Мы видим, что полученные формулы выражают двумерное многообразие, определяемое переменными (y^1, y^2) в декартовой плоскости T, и что геометрия поверхности сферы, расположенной в трехмерном евклидовом многообразии, может быть изображена на двумерном многообразии R_2 с метрикой, определенной в (43.9). Если радиус S очень большой, то членом, содержащим $1/a^2$, как в этом нас убеждает формула (43.9), можно пренебречь, и тогда геометрия поверхности сферы определится приближенно евклидовой метрикой

$$ds^2 = (dy^1)^2 + (dy^2)^2. \tag{43.10}$$

Отсюда заключаем, что при больших значениях a метрические свойства сферы S неотличимы от метрики евклидовой плоскости. Сумма углов криволинейного треугольника, построенного на S, будет близка к 180°, в то время как сумма углов соответствующего треугольника на T равна 180° в соответствии с метрикой евклидовой геометрии. По причине ограничений точности измерительных инструментов не исключено, что *априорное* решение вопроса о выборе базиса физических измерений — на основе ли евклидовой метрики (43.10) или более сложной римановой формулы (43.9) — окажется невозможным.

Главной целью в приведенных здесь рассуждениях является указание на то, что геометрия сферы, расположенной в евклидовом трехмерном пространстве, определяющем элемент дуги этой сферы по формуле (43.8), неотличима от геометрии Римана для двумерного многообразия R_2 с метрикой (43.9), которое хотя и отнесено к декартовой системе координат Y, не может быть признано евклидовым, поскольку его метрика (43.9) не приводится к (43.10) ни одним из допустимых преобразований.

Аналогично геометрию Лобачевского можно реализовать на поверхности «псевдосферы», т. е. на поверхности постоянной отрицательной кривизны, образованной вращением трактрисы относительно своей асимптоты

$$x = a\left(\cos t + \lg \operatorname{tg} \frac{t}{2}\right),$$
$$y = a \sin t.$$

Поскольку в нашей программе изучение гиперболической геометрии Лобачевского не предусмотрено, мы вынуждены ограничиться указаниями лишь на главные идеи, приводящие к аналитическому выражению для квадрата элемента дуги

$$ds^2 = \frac{(dy^1)^2 + (dy^2)^2 - \frac{1}{a^2}(y^1\,dy^2 - y^2\,dy^1)^2}{\left\{1 - \frac{1}{a^2}\left[(y^1)^2 + (y^2)^2\right]\right\}^2},$$

с которого собственно и начинается изучение этой геометрии.

Построим на плоскости окружность K радиуса 1. Пространство геометрии Лобачевского состоит из точек, ограниченных окружностью K (т. е. расположенных внутри нее). Хорды PQ этой окружности являются в этой геометрии прямыми линиями (рис. 9). Длина сегмента AB на PQ — это число, заданное формулой

$$\lg\left(\frac{PA}{QA} : \frac{PB}{QB}\right);$$

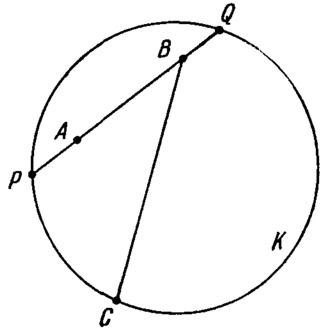

Рис. 9.

величина же угла ABC определяется следующим образом. Построим сферу S единичного радиуса, которая касается K в центре. Проектируем AB и BC на S и определяем евклидов угол, образуемый дугами $B'A'$ и $B'C'$ и пересечением плоскостей, проходящих через BC и BA перпендикулярно к плоскости K (рис. 10). Евклидова мера $A'B'C'$ по определению — мера угла ABC в плоскости Лобачевского. Две линии в плоскости Лобачевского принимаются параллельными, если их отображения

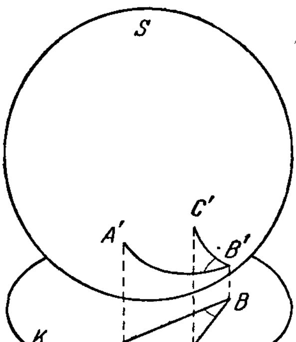

Рис. 10.

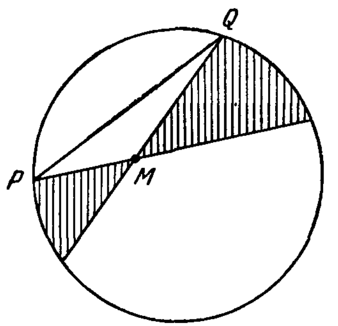

Рис. 11.

(проекции) на сфере не пересекаются. Можно показать, что точки и линии этой геометрии удовлетворяют всем постулатам евклидовой геометрии, за исключением постулата параллельных линий. Параллельно к любой данной прямой PQ через точку M можно провести бесконечно много прямых, не пересекающих PQ. Это — прямые, лежащие в заштрихованной области (рис. 11) и проходящие через M. Нетрудно показать, что сумма углов треугольника в этой геометрии меньше 180°. Логическая правильность геометрии Лобачевского была подтверждена А. Кэли, Ф. Клейном и А. Пуанкаре[1]). Содержание этой главы ограничивается в основном евклидовой геометрией и теми разделами римановой геометрии, которые используются в применениях.

§ 44. Криволинейные координаты в E_3

Аппарат тензорного анализа развивался первоначально как инструмент для изучения различных типов геометрий. Но в силу характерной для него способности выявлять инвариантные свойства изучаемых объектов он был признан особенно удобным и в применениях к другим разделам прикладной математики. Поскольку динамика, механика сплошных сред и теория относительности широко опираются на геометрические свойства трехмерного пространства нашего физического опыта, мы посвящаем бо́льшую часть этой главы исследованию свойств кривых и поверхностей, находящихся в пространстве E_3.

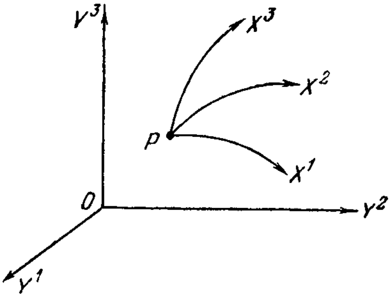

Рис. 12.

Отнесем точку $P(y)$ в евклидовом пространстве E_3 к системе прямоугольных декартовых координат Y (рис. 12). Рассмотрим преобразование общего вида

$$T\colon\ x^i = x^i(y^1,\ y^2,\ y^3) \qquad (i=1,\ 2,\ 3),$$

в котором x^i принадлежат к классу C^1, а $J = \left|\dfrac{\partial x^i}{\partial y^j}\right| \neq 0$ в некоторой области R пространства E_3. Обратное преобразование

$$T^{-1}\colon\ y^i = y^i(x^1,\ x^2,\ x^3) \qquad (i=1,\ 2,\ 3)$$

будет поэтому однозначным, а преобразования T и T^{-1} установят взаимно однозначное соответствие между тройками значений (x^1, x^2, x^3) и (y^1, y^2, y^3). Мы назовем тройки этих чисел (x^1, x^2, x^3) *криволинейными координатами* точек P в R. Эта терминология принимается здесь по следующим соображениям: если мы положим $x^1 = \text{const}$ в T, то

$$x^1(y^1,\ y^2,\ y^3) = \text{const} \tag{44.1}$$

[1]) Более подробное изложение гиперболической геометрии читатель может найти в специальных работах по этому вопросу, в частности в книге: Klein F., Nicht-Euklidische Geometrie. (имеется русский перевод: Клейн Ф., Неевклидова геометрия, ОНТИ, Москва, 1936.)

определяет поверхность. Если же этой постоянной позволить принимать различные значения, мы получим семейство поверхностей с одним параметром. И подобным же образом

$$x^2(y^1, y^2, y^3) = \text{const} \quad \text{и} \quad x^3(y^1, y^2, y^3) = \text{const}$$

определят два семейства поверхностей.

Условие, требующее, чтобы якобиан $J \neq 0$ в рассматриваемой области, выражает тот факт, что поверхности

$$x^1 = c_1, \qquad x^2 = c_2, \qquad x^3 = c_3 \tag{44.2}$$

пересекаются в одной и только в одной точке.

Поверхности, определяемые уравнениями (44.2), мы называем *координатными поверхностями*, а их попарные пересечения — *координатными линиями*; так, например, линией пересечения поверхностей $x^1 = c_1$ и $x^2 = c_2$ является координатная линия $x^3 = c_3$, поскольку именно по этой линии переменная x^3 остается единственной изменяющейся переменной. В качестве примера рассмотрим координатную систему, определяемую преобразованием

$$y^1 = x^1 \sin x^2 \cos x^3,$$
$$y^2 = x^1 \sin x^2 \sin x^3,$$
$$y^3 = x^1 \cos x^2.$$

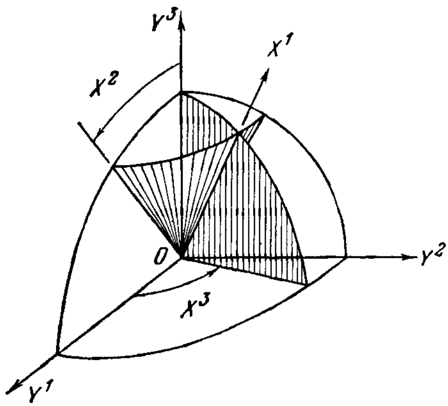

Рис. 13.

Поверхности $x^1 = \text{const}$ представляют собой сферы, $x^2 = \text{const}$ — круговые конусы, $x^3 = \text{const}$ — плоскости, проходящие через ось Y^3 (рис. 13).

Обратное преобразование в этом случае дается уравнениями

$$x^1 = \sqrt{(y^1)^2 + (y^2)^2 + (y^3)^2}, \qquad x^2 = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{(y^1)^2 + (y^2)^2}}{y^3}, \qquad x^3 = \operatorname{arctg} \frac{y^2}{y^1},$$

если $x^1 > 0$, $0 < x^2 < \pi$, $0 \leqslant x^3 < 2\pi$. Это — обычная сферическая координатная система.

Другим примером может служить преобразование

$$y^1 = x^1 \cos x^2, \qquad y^2 = x^1 \sin x^2, \qquad y^3 = x^3,$$

определяющее систему цилиндрических координат (рис. 14).

Пусть точки $P(y^1, y^2, y^3)$ и $Q(y^1 + dy^1, y^2 + dy^2, y^3 + dy^3)$ расположены в непосредственной близости одна от другой в области R. Евклидово расстояние между парой таких точек определяется квадратичной формой

$$(ds)^2 = (dy^1)^2 + (dy^2)^2 + (dy^3)^2 = dy^i\, dy^i,$$

поскольку же $dy^i = \frac{\partial y^i}{\partial x^\alpha} dx^\alpha$, мы можем выразить его сжато:

$$ds^2 = g_{ij}\, dx^i\, dx^j, \tag{44.3}$$

где

$$g_{ij} = \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^i} \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^j} \qquad (\alpha = 1,\ 2,\ 3).$$

Очевидно, символ g_{ij} симметричен. Кроме того, это тензор, поскольку $(ds)^2$ — инвариант, вектор же dx^i произволен. Обозначим через g детерминант $|g_{ij}|$; в области R ему следует приписать положительное значение, поскольку $g_{ij}dx^i dx^j$ — положительно определенная форма. Мы можем поэтому ввести сопряженный симметричный тензор g^{ij}, определенный в § 30 формулой $g^{ij} = G^{ij}/g$, где G^{ij} — алгебраическое дополнение элемента g_{ij} в g.

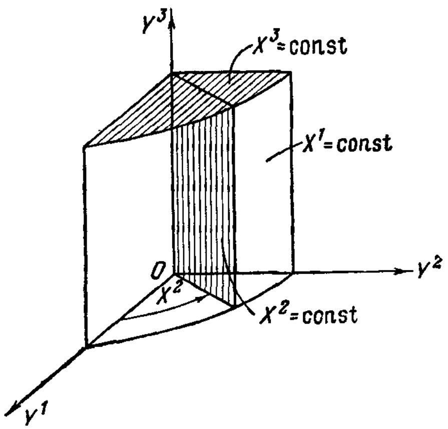

Рис. 14.

Рассмотрим теперь контравариантный вектор $A^i(x)$ и образуем инвариант

$$A = (g_{ij}A^iA^j)^{1/2}. \tag{44.4}$$

Так как в прямоугольной декартовой системе координат инвариант (44.4) принимает вид $[(A^1)^2 + (A^2)^2 + (A^3)^2]^{1/2}$, то мы убеждаемся, что A *представляет собой длину вектора* A^i. Аналогично длина ковариантного вектора определяется формулой

$$A = (g^{ij}A_iA_j)^{1/2}. \tag{44.5}$$

В прямоугольной декартовой системе $g^{ij} = \delta^{ij}$ и мы получаем $A = (A_iA_i)^{1/2}$.

Вектор, длина которого равна 1, называется *единичным вектором*. Из формулы (44.3) мы убеждаемся, что

$$1 = g_{ij} \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^j}{ds},$$

так что $dx^i/ds \equiv \lambda^i$ является единичным вектором. Если $x^i = y^i$ так, что координатная система является декартовой, то $dx^1/ds =$

$= \lambda^1$, $dx^2/ds = \lambda^2$, $dx^3/ds = \lambda^3$ являются направляющими косинусами углов вектора перемещения (dx^1, dx^2, dx^3). В соответствии с этим вектор λ^i будет для нас определять направление в пространстве относительно криволинейной координатной системы X (рис. 15).

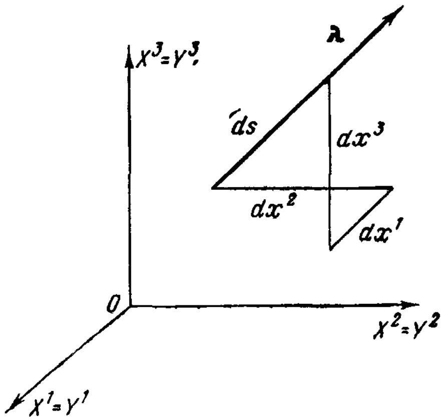

Рис. 15.

Рассмотрим два направления, определенных единичными векторами λ^i и μ^i в некоторой точке P (рис. 16). Поскольку рассматриваемое нами многообразие евклидово, теорема косинусов, вытекающая из формулы Пифагора, дает

$$\overline{QR}^2 = \overline{PQ}^2 + \overline{PR}^2 - 2\overline{PQ}\,\overline{PR}\cos\theta,$$

а поскольку λ^i и μ^i — единичные векторы, $\overline{PQ} - \overline{PR} = 1$, то

$$\overline{QR}^2 = 2(1-\cos\theta). \qquad (44.6)$$

Компоненты вектора, соединяющего точки R и Q, выразятся разностью $\lambda^i - \mu^i$. Используя формулу (44.4) для длины вектора, находим

$$\overline{QR}^2 = g_{ij}(\lambda^i - \mu^i)(\lambda^j - \mu^j) = g_{ij}\lambda^i\lambda^j + g_{ij}\mu^i\mu^j - 2g_{ij}\lambda^i\mu^j = 1 + 1 - 2g_{ij}\lambda^i\mu^j = 2(1 - g_{ij}\lambda^i\mu^j). \qquad (44.7)$$

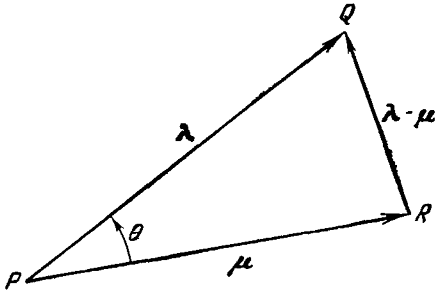

Рис. 16.

Из (44.6) и (44.7) следует, что инвариант $g_{ij}\lambda^i\mu^j$ равен $\cos\theta$, на основании чего мы вправе записать

$$\cos\theta = g_{ij}\lambda^i\mu^j. \qquad (44.8)$$

Формулу (44.8) мы можем использовать для определения угла θ между двумя направлениями λ^i и μ^i, если положим в основу точное определение для $\sin\theta$. Имея два произвольных вектора A^i и B^i и зная определение длины вектора, находим

$$\cos\theta = \frac{g_{ij}A^iB^j}{\sqrt{g_{ij}A^iA^j}\,\sqrt{g_{ij}B^iB^j}}.$$

Это приводит к формуле $AB\cos\theta = g_{ji}A^iB^j$, определяющей инвариант, который совпадает со «скалярным произведением» $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}$ элементарного векторного анализа.

Из выражения
$$ds^2 = g_{ij}\,dx^i\,dx^j$$
для квадрата элемента дуги ds между $P_1(x^1,\ x^2,\ x^3)$ и $P_2(x^1+dx^1,\ x^2+dx^2,\ x^3+dx^3)$ следует, что длины элементов дуги, измеренные вдоль координатных линий нашей криволинейной системы X, измеряются произведениями
$$ds_{(1)} = \sqrt{g_{11}}\,dx^1, \qquad ds_{(2)} = \sqrt{g_{22}}\,dx^2, \qquad ds_{(3)} = \sqrt{g_{33}}\,dx^3. \tag{44.9}$$
Таким образом, длина вектора смещения $(dx^1,\ 0,\ 0)$ определяется значением $\sqrt{g_{11}}\,dx^1$, вектора $(0,\ dx^2,\ 0)$ — значением $\sqrt{g_{22}}\,dx^2$, вектор же $(0,\ 0,\ dx^3)$ измеряется длиной $\sqrt{g_{33}}\,dx^3$ (рис. 17).

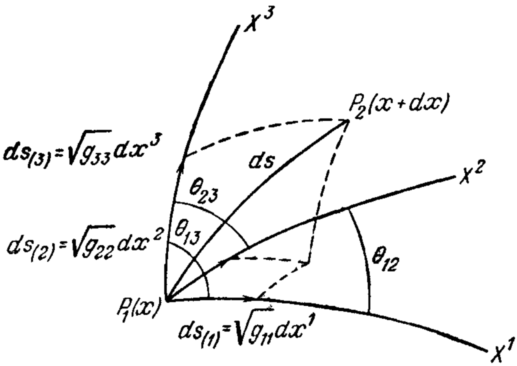

Рис. 17.

Из (44.8) выводим вдобавок, что косинусы углов θ_{12}, θ_{23}, θ_{13} между координатными линиями могут быть вычислены из формул
$$\cos\theta_{12} = \frac{g_{12}}{\sqrt{g_{11}g_{22}}}, \qquad \cos\theta_{23} = \frac{g_{23}}{\sqrt{g_{22}g_{33}}}, \qquad \cos\theta_{13} = \frac{g_{13}}{\sqrt{g_{11}g_{33}}}, \tag{44.10}$$
ибо если $\lambda^i_{(1)}: (dx^1/ds_{(1)},\ 0,\ 0)$ и $\mu^i_{(2)}: (0,\ dx^2/ds_{(2)},\ 0)$ — два единичных вектора, направленных соответственно по координатным линиям X^1 и X^2, то
$$\cos\theta_{12} = g_{ij}\lambda^i_{(1)}\mu^j_{(2)} = \frac{g_{12}\,dx^1\,dx^2}{ds_{(1)}\,ds_{(2)}} = \frac{g_{12}}{\sqrt{g_{11}g_{22}}}.$$

Поскольку g_{11}, g_{22}, g_{33} никогда не обращаются в нуль [см. (44.9)], то уравнение (44.10) позволяет сформулировать теорему.

Теорема. *Необходимое и достаточное условие для того, чтобы заданная криволинейная координатная система X была* *ортогональна, заключается в том, чтобы $g_{ij} = 0$ для $i \neq j$ в любой области R.*

Из определения объемного элемента dV в криволинейных координатах

$$dV = \pm \left| \frac{\partial y^i}{\partial x^j} \right| dx^1\, dx^2\, dx^3,$$

где $\pm \left| \frac{dy^i}{\partial x^j} \right|$ — абсолютное значение якобиана J преобразования, связывающего декартовы переменные y^i с криволинейными x^i, мы можем вывести непосредственно

$$dV = dy^1\, dy^2\, dy^3 = \sqrt{g}\, dx^1\, dx^2\, dx^3, \tag{44.11}$$

ибо

$$J^2 = \left| \frac{\partial y^i}{\partial x^j} \right| \cdot \left| \frac{\partial y^i}{\partial x^j} \right| = \left| \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^i} \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^j} \right| = | g_{ij} | = g,$$

где мы используем определение g_{ij} [см. уравнение (44.3)] и правило умножения детерминантов. Детерминант g представляет собой относительный скаляр веса 2 (см. § 28), поскольку $\sqrt{g}$ — скалярная плотность.

Из выкладок этого параграфа мы устанавливаем, что метрические характеристики пространства E_3, отнесенного к криволинейной координатной системе X, полностью определяются тензором g_{ij}. На этом основании тензор g_{ij} называется *метрическим*, а квадратичная форма $ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j$ получила наименование *фундаментальной квадратичной формы*.

§ 45. Взаимные базисные системы. Ковариантные и контравариантные векторы

В настоящем параграфе мы интерпретируем важнейшие выводы § 44 на языке и в обозначениях элементарного векторного анализа, введенного в главе I. Положим, что мы определили декартову систему осей (рис. 18) пучком ортонормальных базисных векторов $\boldsymbol{b}_1$, $\boldsymbol{b}_2$, $\boldsymbol{b}_3$. В таком случае радиус-вектор $\boldsymbol{r}$ точки $P(y^1, y^2, y^3)$ можно будет представить выражением

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{b}_i y^i \qquad (i = 1,\ 2,\ 3), \tag{45.1}$$

так как базисные векторы $\boldsymbol{b}_i$ не зависят от положения точки $P(y^1, y^2, y^3)$, выводим из (45.1), что

$$d\boldsymbol{r} = \boldsymbol{b}_i\, dy^i. \tag{45.2}$$

По определению квадрат элемента дуги между точками (y^1, y^2, y^3) и $(y^1 + dy^1,\ y^2 + dy^2,\ y^3 + dy^3)$ дается формулой

$$ds^2 = d\boldsymbol{r} \cdot d\boldsymbol{r}. \tag{45.3}$$

Подстановка из (45.2) в (45.3) дает

$$ds^2 = \boldsymbol{b}_i \cdot \boldsymbol{b}_j \, dy^i \, dy^j = \delta_{ij} \, dy^i \, dy^j = dy^i \, dy^i,$$

т. е. знакомое выражение для квадрата элемента дуги в прямоугольных декартовых координатах.

Пусть система уравнений преобразования

$$x^i = x^i (y^1, y^2, y^3) \qquad (i = 1, 2, 3)$$

определяет криволинейную координатную систему X. Радиус-вектор $\boldsymbol{r}$ мы можем теперь рассматривать как функцию координат x^i. Записываем это формулами

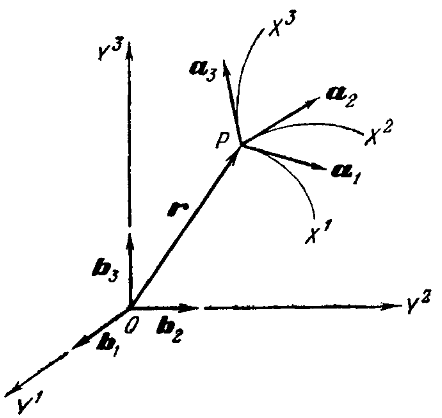

Рис. 18.

$$d\boldsymbol{r} = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x^i} \, dx^i \qquad (45.4)$$

и

$$ds^2 = d\boldsymbol{r} \cdot d\boldsymbol{r} = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x^i} \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x^j} \, dx^i \, dx^j = g_{ij} \, dx^i \, dy^j,$$

где

$$g_{ij} = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x^i} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x^j}. \qquad (45.5)$$

Геометрический смысл вектора $\partial \boldsymbol{r} / \partial x^i$ прост: он представляет собой базисный вектор, направленный касательно к координатной кривой X^i. Положим

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x^i} = \boldsymbol{a}_i \qquad (45.6)$$

и перепишем формулы (45.4) и (45.5):

$$d\boldsymbol{r} = \boldsymbol{a}_i \, dx^i \qquad (45.7)$$

и

$$g_{ij} = \boldsymbol{a}_i \cdot \boldsymbol{a}_j.$$

Заметим, что базисные векторы $\boldsymbol{a}_i$ здесь уже не являются независимыми от координат (x^1, x^2, x^3).

Применение ковариантных обозначений для базисных векторов $\boldsymbol{a}_i$ и $\boldsymbol{b}_i$ может быть оправдано, если сопоставить на основе формул (45.2) и (45.7), что

$$\boldsymbol{a}_j \, dx^j = \boldsymbol{b}_i \, dy^i = \boldsymbol{b}_i \frac{\partial y^i}{\partial x^j} \, dx^j.$$

Мы видим здесь, что базисные векторы $\boldsymbol{a}_j$ преобразуются по закону преобразования компонентов ковариантных векторов

$$a_j = \frac{\partial y^i}{\partial x^j} b_i,$$

поскольку dx^j произвольны.

Компоненты базисных векторов a_j, будучи отнесенными к координатной системе X, принимают вид

$$a_1: (a_1, 0, 0), \quad a_2: (0, a_2, 0), \quad a_3: (0, 0, a_3),$$

откуда мы замечаем, что они не обязательно получаются единичными векторами, поскольку вообще [см. уравнение (45.5)]

$$g_{11} = a_1 \cdot a_1 \neq 1, \quad g_{22} = a_2 \cdot a_2 \neq 1, \quad g_{33} = a_3 \cdot a_3 \neq 1.$$

Если криволинейная координатная система X ортогональна, то

$$g_{ij} = a_i \cdot a_j = |a_i||a_j| \cos\theta_{ij} = 0, \quad \text{если} \quad i \neq j.$$

Этот вывод констатируется в теореме § 44.

Заметим, что любой вектор A можно записать в виде произведения $A = k\,dr$, где k — соответствующий скаляр. Так как $dr = (\partial r/\partial x^i)\,dx^i$, то получаем

$$A = \frac{\partial r}{\partial x^i}(k\,dx^i) = a_i A^i,$$

где $A^i \equiv k\,dx^i$. Числа A^i — контравариантные компоненты вектора A и векторов $A^1 a_1$, $A^2 a_2$, $A^3 a_3$, образующих ребра параллелепипида, диагональю которого является A. Поскольку a_i вообще не являются единичными векторами, мы убеждаемся, что длины ребер этого параллелепипеда, т. е. *физические компоненты* A определяются формулами

$$A^1 \sqrt{g_{11}}, \quad A^2 \sqrt{g_{22}}, \quad A^3 \sqrt{g_{33}}$$

на том основании, что $g_{11} = a_1 \cdot a_1$, $g_{22} = a_2 \cdot a_2$, $g_{33} = a_3 \cdot a_3$.

Введем теперь три некомпланарных вектора

$$a^1 = \frac{a_2 \times a_3}{[a_1 a_2 a_3]}, \quad a^2 = \frac{a_3 \times a_1}{[a_1 a_2 a_3]}, \quad a^3 = \frac{a_1 \times a_2}{[a_1 a_2 a_3]}, \tag{45.8}$$

где $a_2 \times a_3$ и т. д. обозначает векторное произведение[1]) a_2 и a_3, а $[a_1 a_2 a_3]$ — тройное скалярное произведение: $a_1 \cdot a_2 \times a_3$.

Из определений (45.8) очевидно, что $a^i \cdot a_j = \delta^i_j$, что, как в этом легко убедиться, $[a_1 a_2 a_3] = \sqrt{g}$, где $g = |g_{ij}|$, и что

---

[1]) Напомним, что $a_1 \times a_2$ представляет собой вектор длиной $a_1 a_2 [\sin(a_1, a_2)]$, ориентированный таким образом, что a_1, a_2 и $a_1 \times a_2$ образуют правую систему. Тройное скалярное произведение $[a_1 a_2 a_3]$, с другой стороны, численно равно объему параллелепипеда, построенного на векторах a_1, a_2, a_3. Если $\{a_i\}$ — совокупность базисных векторов пространства E_{nj}, то взаимный базис $\{a^i\}$ определяется произведением $a_i \cdot a^j = \delta^j_i$.

$[\boldsymbol{a}^1\boldsymbol{a}^2\boldsymbol{a}^3] = 1/[\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_2\boldsymbol{a}_3]$, в силу чего $[\boldsymbol{a}^1\boldsymbol{a}^2\boldsymbol{a}^3] = 1/\sqrt{g}$. Кроме того,

$$\boldsymbol{a}_1 = \frac{\boldsymbol{a}^2 \times \boldsymbol{a}^3}{[\boldsymbol{a}^1\boldsymbol{a}^2\boldsymbol{a}^3]}, \qquad \boldsymbol{a}_2 = \frac{\boldsymbol{a}^3 \times \boldsymbol{a}^1}{[\boldsymbol{a}^1\boldsymbol{a}^2\boldsymbol{a}^3]}, \qquad \boldsymbol{a}_3 = \frac{\boldsymbol{a}^1 \times \boldsymbol{a}^2}{[\boldsymbol{a}^1\boldsymbol{a}^2\boldsymbol{a}^3]}, \tag{45.9}$$

что легко можно проверить с помощью формул (45.8). Учитывая это, естественно назвать систему векторов $\boldsymbol{a}^1$, $\boldsymbol{a}^2$, $\boldsymbol{a}^3$ *взаимной базисной системой*.

Заметим, что если векторы $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ — *единичные векторы, отнесенные к прямоугольной декартовой системе координат, то взаимная система векторов определяет ту же систему координат.*

Пользуясь взаимной базисной системой, мы можем записать дифференциал вектора $\boldsymbol{r}$ в виде $d\boldsymbol{r} = \boldsymbol{a}^i dx_i$, где dx_i — компоненты $d\boldsymbol{r}$. Мы получим в результате

$$ds^2 = d\boldsymbol{r} \cdot d\boldsymbol{r} = (\boldsymbol{a}^i\, dx_i) \cdot (\boldsymbol{a}^j\, dx_j) = \boldsymbol{a}^i \cdot \boldsymbol{a}^j\, dx_i\, dx_j = g^{ij}\, dx_i\, dx_j,$$

где

$$g^{ij} \equiv \boldsymbol{a}^i \cdot \boldsymbol{a}^j = g^{ji}. \tag{45.10}$$

Нетрудно установить, что коэффициенты g^{ij}, определенные формулой (45.10), совпадают с ранее определенными величинами g^{ij}. Таким путем с помощью формул (45.8) и (45.9) легко показать, что $g_{i\alpha}g^{j\alpha} = \delta_i{}^j$, а решение этой системы уравнений для $g^{j\alpha}$ дает $g^{j\alpha} = G^{j\alpha}/g$, где $G^{j\alpha}$ — алгебраическое дополнение элемента $g_{j\alpha}$ в детерминанте $|g_{ij}|$. Таким образом, приведенное в § 44 определение g^{ij} следует как теорема из определения (45.10).

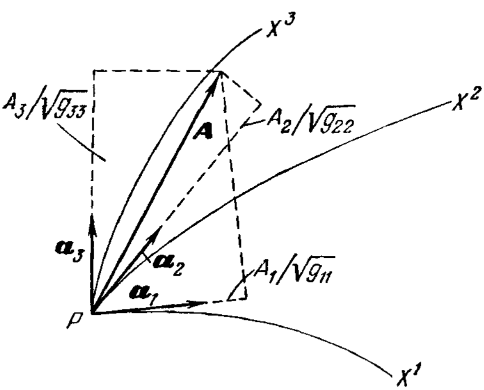

Рис. 19.

Система базисных векторов, определенных из (45.8), может быть использована для того, чтобы представить произвольный вектор $\boldsymbol{A}$ в форме $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{a}^i A_i$, где A_i — ковариантные компоненты $\boldsymbol{A}$. Если мы образуем скалярное произведение вектора $A_i\boldsymbol{a}^i$ с базисным вектором $\boldsymbol{a}_j$ и заметим, что последний направлен по координатной линии X^j, то придем к следующим равенствам: $A_i\boldsymbol{a}^i \cdot \boldsymbol{a}_j = A_i\delta^i_j = A_j$. *Таким образом,* $A_j/\sqrt{g_{jj}}$ (без суммирования по j) *представляет собой длину ортогональной проекции вектора* $\boldsymbol{A}$ *на касательную к координатной кривой* X^j *в точке* P (рис. 19), *вектор же* $A^j\sqrt{g_{jj}}$ *представляет длину ребра параллелепипеда, диагональю которого является вектор* $\boldsymbol{A}$.

Так как

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{a}_i A^i = \boldsymbol{a}^i A_i,$$

то мы вправе установить равенство

$$\boldsymbol{a}_i \cdot \boldsymbol{a}_j A^i = \boldsymbol{a}^i \cdot \boldsymbol{a}_j A_i,$$

и следовательно,

$$g_{ij} A^i = \delta_j^i A_i = A_j.$$

Мы видим, что *вектор, полученный опусканием индекса в* A^i, *является ковариантным вектором* A_i. Два ряда величин A^i и A_i, очевидно, представляют один и тот же вектор $\boldsymbol{A}$, отнесенный к двум различным базисным системам. Как уже ранее было отмечено, различие между ковариантным и контравариантным компонентами $\boldsymbol{A}$ исчезает в тех случаях, когда базисные векторы $\boldsymbol{a}_i$ ортонормальны.

Подобным же образом, если рассмотреть коэффициенты A_{ijk} в полилинейной форме $A_{ijk}\boldsymbol{a}^i\boldsymbol{a}^j\boldsymbol{a}^k$ и потребовать, чтобы $A_{ijk}\boldsymbol{a}^i\boldsymbol{a}^j\boldsymbol{a}^k = A^{ijk}\boldsymbol{a}_i\boldsymbol{a}_j\boldsymbol{a}_k$, то совокупность величин $\{A^{ijk}\}$ представит тот же самый тензор A, отнесенный к базису $\{\boldsymbol{a}_i\}$. Все ассоциированные тензоры (см. § 30) представят этот же тензор A в соответствующих базисных системах.

§ 46. О смысле ковариантиых производных

Пусть A — вектор, берущий начало в точке $P(y^1, y^2, y^3)$ пространства E_3, отнесен к прямоугольной декартовой системе координат Y. Если в каждой отдельной точке области R в окрестности F мы сможем индивидуализировать каждый отдельный вектор $\boldsymbol{A}$, то такую полную совокупность векторов в R мы называем *векторным полем*. Мы предполагаем, что компоненты $\boldsymbol{A}$ являются непрерывно дифференцируемыми функциями от y^i в R, а если мы введем криволинейную систему координат X путем преобразования

$$T:\ x^i = x^i(y^1,\ y^2,\ y^3),$$

то соответствующие компоненты $A^i(x)$ станут непрерывно дифференцируемыми функциями точки $(x^1,\ x^2,\ x^3)$, определяемой радиусом-вектором $\boldsymbol{r}(x^1, x^2, x^3)$. В обозначениях § 45 базисными векторами в координатной системе X являются $\boldsymbol{a}_i = \partial\boldsymbol{r}/\partial x$, так что вектор $\boldsymbol{A}$ записывается произведением

$$\boldsymbol{A} = A^i \boldsymbol{a}_i. \tag{46.1}$$

Вычислим приращение ΔA длины вектора $\boldsymbol{A}$ с переменой положения точки $P(x^1, x^2, x^3)$:

$$P'(x^1 + \Delta x^1,\ x^2 + \Delta x^2,\ x^3 + \Delta x^3).$$

Из (46.1) находим

$$\Delta \boldsymbol{A} = (A^i + \Delta A^i)(\boldsymbol{a}_i + \Delta \boldsymbol{a}_i) - A^i \boldsymbol{a}_i = \Delta A^i \boldsymbol{a}_i + A^i \Delta \boldsymbol{a}_i + (\Delta A^i)(\Delta \boldsymbol{a}_i).$$

Как и в обычном дифференциальном исчислении, мы обозначаем главную часть приращения через dA:

$$d\boldsymbol{A} = \boldsymbol{a}_i \, dA^i + A^i \, d\boldsymbol{a}_i. \tag{46.2}$$

Эта формула показывает, что приращение в $\boldsymbol{A}$ возникает из двух источников:

(а) приращений в компонентах A^i, вызванных изменениями значений (x^1, x^2, x^3);

(б) приращений в базисных векторах $\boldsymbol{a}_i$, являющихся результатом изменения положения точки (x^1, x^2, x^3).

Частная производная $\boldsymbol{A}$ по x^i определяется как предел отношения

$$\lim_{\Delta x^j \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{A}}{\Delta x^j} = \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial x^j},$$

а из выражения для приращения ΔA следует, что

$$\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial x^j} = \frac{\partial A^i}{\partial x^j} \boldsymbol{a}_i + \frac{\partial \boldsymbol{a}_i}{\partial x^j} A^i. \tag{46.3}$$

Покажем теперь, что вектор, определенный формулой (46.3), тождествен ковариантной производной вектора A^i. Установим сначала тождество

$$\frac{\partial \boldsymbol{a}_i}{\partial x^j} = \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ ij \end{matrix} \right\} \boldsymbol{a}_\alpha. \tag{46.4}$$

Вспомним, что $g_{ij} = \boldsymbol{a}_i \cdot \boldsymbol{a}_j$. Отсюда

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} = \frac{\partial \boldsymbol{a}_i}{\partial x^k} \cdot \boldsymbol{a}_j + \frac{\partial \boldsymbol{a}_j}{\partial x^k} \cdot \boldsymbol{a}_i.$$

Произведя в этой формуле перестановку индексов, получим

$$\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} = \frac{\partial \boldsymbol{a}_i}{\partial x^j} \cdot \boldsymbol{a}_k + \frac{\partial \boldsymbol{a}_k}{\partial x^j} \cdot \boldsymbol{a}_i,$$

$$\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} = \frac{\partial \boldsymbol{a}_j}{\partial x^i} \cdot \boldsymbol{a}_k + \frac{\partial \boldsymbol{a}_k}{\partial x^i} \cdot \boldsymbol{a}_j.$$

Приняв, что T входит в класс функций C^2, находим[1])

$$\frac{\partial \boldsymbol{a}_i}{\partial x^j} = \frac{\partial \boldsymbol{a}_j}{\partial x^i}.$$

Построим

$$[ij, k] = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \right)$$

---

[1]) Ибо $\boldsymbol{a}_i = \dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x^i}$ и $\dfrac{\partial \boldsymbol{a}_i}{\partial x^j} = \dfrac{\partial}{\partial x^j}\left(\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x^i}\right) = \dfrac{\partial}{\partial x^i}\left(\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x^j}\right) = \dfrac{\partial \boldsymbol{a}_j}{\partial x^i}$.

и получим

$$\frac{\partial \boldsymbol{a}_i}{\partial x^j} \cdot \boldsymbol{a}_k = [ij,\ k]. \tag{46.5}$$

Из (46.5) следует, что

$$\frac{\partial \boldsymbol{a}_i}{\partial x^j} = [ij,\ k]\,\boldsymbol{a}^k.$$

Таким образом,

$$\frac{\partial \boldsymbol{a}_i}{\partial x^j} \cdot \boldsymbol{a}^\alpha = [ij,\ k]\,\boldsymbol{a}^k \cdot \boldsymbol{a}^\alpha = [ij,\ k]\,g^{k\alpha} = \left\{ {\alpha \atop ij} \right\},$$

откуда следует, что

$$\frac{\partial \boldsymbol{a}_i}{\partial x^j} = \left\{ {\alpha \atop ij} \right\} \boldsymbol{a}_\alpha,$$

и подтверждается тождество (46.4).

Вводя этот результат в (46.3), получаем

$$\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial x^j} = \frac{\partial A^i}{\partial x^j}\,\boldsymbol{a}_i + \left\{ {\alpha \atop ij} \right\} A^i \boldsymbol{a}_\alpha = \left[\frac{\partial A^\alpha}{\partial x^j} + \left\{ {\alpha \atop ij} \right\} A^i \right] \boldsymbol{a}_\alpha.$$

Выражение заключенное здесь в скобки, и представляет собой не что иное, как ковариантную производную $A^\alpha_{,j}$. Таким образом,

$$\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial x^j} = A^\alpha_{,j} \cdot \boldsymbol{a}_\alpha. \tag{46.6}$$

Из (46.6) следует, что ковариантная производная $A^\alpha_{,j}$ вектора A^α является вектором, компоненты которого в точности совпадают с компонентами $\partial \boldsymbol{A}/\partial x^j$, отнесенными к базисной системе $\boldsymbol{a}_i$.

Мы можем, следовательно, показать, что если A представить в виде

$$\boldsymbol{A} = A_\alpha \boldsymbol{a}^\alpha, \tag{46.7}$$

то

$$\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial x^j} = A_{\alpha,\,j}\boldsymbol{a}^\alpha. \tag{46.8}$$

Из $\boldsymbol{a}^i \cdot \boldsymbol{a}_j = \delta^i_j$ получаем

$$\frac{\partial \boldsymbol{a}^i}{\partial x^k} \cdot \boldsymbol{a}_j + \boldsymbol{a}^i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{a}_j}{\partial x^k} = 0.$$

Следовательно, в силу (46.4)

$$\frac{\partial \boldsymbol{a}^i}{\partial x^k} \cdot \boldsymbol{a}_j = -\,\boldsymbol{a}^i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{a}_j}{\partial x^k} = -\,\boldsymbol{a}^i \cdot \boldsymbol{a}_\alpha \left\{ {\alpha \atop jk} \right\}.$$

Поскольку $\boldsymbol{a}^i \cdot \boldsymbol{a}_\alpha = \delta^i_\alpha$, полученный результат эквивалентен нижеследующему:

$$\frac{\partial \boldsymbol{a}^i}{\partial x^k} \cdot \boldsymbol{a}_j = -\left\{ \begin{matrix} i \\ jk \end{matrix} \right\}.$$

Отсюда

$$\frac{\partial \boldsymbol{a}^i}{\partial x^k} = -\left\{ \begin{matrix} i \\ jk \end{matrix} \right\} \boldsymbol{a}^j. \tag{46.9}$$

Дифференцирование (46.7) по x^k и подстановка из (46.9) приводят непосредственно к (46.8).

Заметим, что если символы Кристоффеля обращаются в R тождественно в нуль, то координатная система, ассоциированная с этими символами, должна быть декартовой (см. § 39, теорема I) и в этом случае базисные векотры $\boldsymbol{a}_i$ не зависят от координат. Тогда формула (46.3) дает, что $\dfrac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial x^j} = \dfrac{\partial A^i}{\partial x^j} \boldsymbol{a}_i$ и, следовательно, $A^i_{,j} = \dfrac{\partial A^i}{\partial x^j}$.

§ 47. Внутреннее дифференцирование

Положим, что в некоторой области пространства E_3 определены векторное поле $\boldsymbol{A}(x)$ и кривая

$$C\colon\ x^i = x^i(t), \qquad t_1 \leqslant t \leqslant t_2.$$

Векторы $\boldsymbol{A}(x)$, определенные на одномерном многообразии C, зависят от параметра t, и если $\boldsymbol{A}(x)$ — дифференцируемый вектор, а $x^i(t)$ принадлежит классу C^1, то

$$\frac{d\boldsymbol{A}}{dt} = \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial x^j} \frac{dx^j}{dt}.$$

Пользуясь формулой (46.6), записываем

$$\frac{d\boldsymbol{A}}{dt} = A^\alpha_{,j} \frac{dx^j}{dt} \boldsymbol{a}_\alpha = \left[\frac{dA^\alpha}{dt} + \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ ij \end{matrix} \right\} A^i \frac{dx^j}{dt} \right] \boldsymbol{a}_\alpha.$$

Вектор $\delta A^\alpha / \delta t$, определяемый формулой

$$\frac{\delta A^\alpha}{\delta t} \equiv \frac{dA^\alpha}{dt} + \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ ij \end{matrix} \right\} A^i \frac{dx^j}{dt} \qquad (\alpha = 1, 2, 3), \tag{47.1}$$

называется *абсолютной* или *внутренней* производной от A^α по параметру t.

Следуя Мак-Коннелу[1]), мы будем свободно пользоваться внутренним дифференцированием в исследовании геометрии кривых и поверхностей.

---

[1]) См. McConnell A. J., Applications of the absolute differential calculus, 1931, стр. 156—162 (имеется русский перевод).

Если векторное поле A^α определено не только на C, но и в окрестности C, то можно утверждать, что

$$\frac{\delta A^\alpha}{\delta t} = A^\alpha_{,\beta}\frac{dx^\beta}{dt},$$

и следовательно, обычные правила дифференцирования сумм, произведений и т. д. остаются в силе также и для внутреннего дифференцирования. Если A — скаляр, то, очевидно, $\delta A^\alpha/\delta t = dA/dt$.

Отсюда следует непосредственно и обобщение операции внутреннего дифференцирования на тензоры, ранг которых больше единицы, а именно

$$\frac{\delta A^i_{jk}}{\delta t} \equiv \frac{\delta A^i_{jk}}{dt} + \left\{ {i \atop \alpha\beta} \right\} A^\alpha_{jk}\frac{dx^\beta}{dt} - \left\{ {\alpha \atop j\beta} \right\} A^i_{\alpha k}\frac{dx^\beta}{dt} - \left\{ {\alpha \atop k\beta} \right\} A^i_{j\alpha}\frac{dx^\beta}{dt}.$$

Заметим, что, поскольку $\delta g_{ij}/\delta t = 0$, фундаментальные тензоры g_{ij} и g^{ij} могут быть вынесены за знак внутреннего дифференцирования.

Задачи

1. Доказать, что $\frac{d}{dt}(g_{ij}A^iA^j) = 2g_{ij}A^i\frac{\delta A^j}{\delta t}$.

2. Показать, что $A_{i,j} - A_{j,i} = \frac{\partial A_i}{\partial x^j} - \frac{\partial A_j}{\partial x^i}$.

3. Показать, что $\frac{d}{dt}(g_{ij}A^iB^j) = g_{ij}\frac{\delta A^i}{\delta t}B^j + g_{ij}A^i\frac{\delta B^j}{\delta t}$.

4. Показать, что если $A_i = g_{ij}A^j$, то $A_{i,k} = g_{i\alpha}A^\alpha_{,k}$.

5. Показать, что $\frac{\partial}{\partial x^k}(g_{ij}A^iB^j) = A_{i,k}B^i + A^iB_{i,k}$.

6. Доказать, что если A — числовое значение A^i, то $A_{,j} = A_{i,j}A^i/A$.

7. Показать, что если y^i — прямоугольные декартовы координаты, то в E_3 $[\alpha\beta, \gamma] = \frac{\partial^2 y^i}{\partial x^\alpha\,\partial x^\beta}\frac{\partial y^i}{\partial x^\gamma}$ и $\left\{ {\gamma \atop \alpha\beta} \right\} = \frac{\partial^2 y^i}{\partial x^\alpha\,\partial x^\beta}\frac{\partial x^\gamma}{\partial y^i}$. Эти формулы часто оказываются более удобными для вычисления символов Кристоффеля, чем определяющие формулы, приведенные в (31.1) и (31.2).

§ 48. Параллельные векторные поля

Рассмотрим кривую (рис. 20)

$$C\colon\ x^i = x^i(t), \qquad t_1 \leqslant t \leqslant t_2 \qquad (i = 1, 2, 3),$$

расположенную в некоторой области пространства E_3, и вектор $\boldsymbol{A}$, берущий свое начало в точке P кривой C. Положим, что функции $x^i(t)$ принадлежат классу C^1. Если мы построим в каждой точке C вектор, равный $\boldsymbol{A}$ по длине и ему параллельный, то получим то, что называется *параллельным полем* векторов на кривой C. Выясним необходимые и достаточные условия для того, чтобы векторное поле было параллельным.

Если $\boldsymbol{A}$ — параллельное поле на C, то векторы $\boldsymbol{A}$ не изменяются вдоль кривой ни по длине, ни по направлению, и мы выразим это равенством $d\boldsymbol{A}/dt = 0$. Из него следует, если учесть (47.1), что компоненты A^i вектора $\boldsymbol{A}$ удовлетворяют системе дифференциальных уравнений $\delta A^i/\delta t = 0$, или в развернутом виде

$$\frac{dA^i}{dt} + \left\{ {i \atop \alpha\beta} \right\} A^\alpha \frac{dx^\beta}{dt} = 0. \tag{48.1}$$

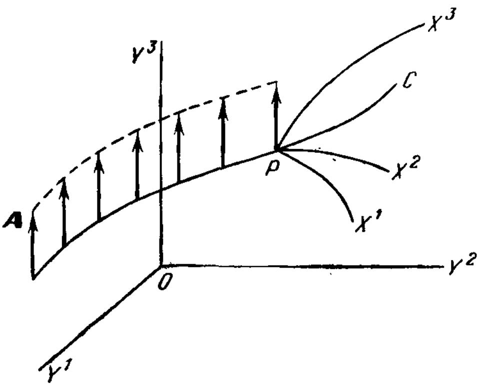

Рис. 20.

И обратно, можно показать, что каждое значение системы (48.1) порождает параллельное векторное поле на C. Действительно, из теории дифференциальных уравнений известно, что эта система трех уравнений первого порядка имеет единственное решение, если значения компонентов A^i указаны в точке C. Но ранее нами было показано, что векторное поле, полученное построением семейства векторов фиксированных длин, параллельно заданному вектору, удовлетворяет этой системе уравнений. Отсюда следует, что любое решение уравнения (48.1), удовлетворяющее начальным условиям, образует параллельное векторное поле вдоль C.

Пусть $A^i(t)$ и $B^i(t)$ — два каких-либо решения системы (48.1). Мы убеждаемся в том, что длины векторов A^i и B^i действительно не изменяются при перемещении по кривой. Кроме того, угол θ между векторами A^i и B^i остается постоянным, в то время как параметр t изменяется. Чтобы это доказать, заметим, что (§ 44) $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} = AB\cos\theta = g_{ij}A^iB^j$, и если $g_{ij}A^iB^j$ остается постоянным вдоль C, то $\frac{d}{dt}(g_{ij}A^iB^j) = 0$. Но $g_{ij}A^iB^j$ — инвариант, а поскольку g_{ij} ведут себя как константы в процессе ковариантного дифференцирования, мы вправе заключить, что

$$\frac{d}{dt}(g_{ij}A^iB^j) = \frac{\delta}{\delta t}(g_{ij}A^iB^j) = g_{ij}\frac{\delta A^i}{\delta t}B^j + g_{ij}A^i\frac{\delta B^j}{\delta t}.$$

Поскольку, в соответствии с принятой нами гипотезой, поля A^i и B^i удовлетворяют уравнениям (48.1), $\delta A^i/\delta t = 0$ и $\delta B^i/\delta t = 0$, заключаем, что $g_{ij}A^iB^j$ постоянно вдоль кривой C. Это следует непосредственно из того, что если $A^i=B^i$, то величина $g_{ij}A^iA^j = A^2$, постоянна на C, а это приводит к выводу, что и θ также константа.

Понятие параллельного векторного поля вдоль кривой можно распространить и на определение параллельных векторных полей на трехмерных евклидовых многообразиях. Рассмотрим для этого некоторую точку $P(x)$ и вектор $\boldsymbol{A}$, берущий начало в P. Если мы построим в каждой точке многообразия вектор, равный $\boldsymbol{A}$ по длине и параллельный ему по направлению, то в пространстве трех измерений возникает параллельное векторное поле. Если провести линию C через P, то векторы A^i поля, лежащего на C, образуют параллельное поле на C и, таким образом, будут удовлетворять уравнениям (48.1). Но так как векторы A^i определены в каждой точке (x^i) многообразия, то, опираясь на выражение

$$\frac{dA^i}{dt}=\frac{\partial A^i}{\partial x^k}\frac{dx^k}{dt},$$

мы можем привести уравнения (48.1) к виду

$$\left(\frac{\partial A^i}{\partial x^k}+\left\{ {i \atop \alpha k} \right\} A^\alpha\right)\frac{dx^k}{dt}=0.$$

Это равенство должно оставаться верным для всех кривых, проходящих через P, иными словами, для всех значений производной dx^k/dt. Таким образом, параллельное векторное поле в E_3 удовлетворяет системе уравнений

$$\frac{\partial A^i}{\partial x^k}+\left\{ {i \atop \alpha k} \right\} A^\alpha=0, \quad \text{или} \quad A^i_{,k}=0.$$

Обратное следует, как и ранее, из существования и единственности решений таких систем дифференциальных уравнений.

Условие для параллельного перемещения ковариантного вектора A_i имеет вид

$$\frac{\partial A_i}{\partial x^k}-\left\{ {\alpha \atop ik} \right\} A_\alpha=0, \quad \text{или} \quad A_{i,k}=0.$$

Это следует из равенства $A_{i,k}=g_{i\alpha}A^\alpha_{,k}$, справедливого во всех случаях, когда $A_i=g_{ij}A^j$.

§ 49. Геометрия кривых в пространстве

Пусть кривая C задана нам в пространстве E_3 параметрическими уравнениями

$$C\colon\ x^i=x^i(t), \qquad t_1\leqslant t\leqslant t_2 \qquad (i=1,2,3),$$

Квадрат длины ее элемента равен

$$ds^2 = g_{ij}\, dx^i\, dx^j, \tag{49.1}$$

длина дуги s кривой C определяется интегралом

$$s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{g_{ij} \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt}}\, dt. \tag{49.2}$$

Переписав (49.1) в виде

$$1 = g_{ij} \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^j}{ds} \tag{49.3}$$

и положив $dx^i/ds = \lambda^i$, преобразуем (49.3) в

$$g_{ij}\lambda^i\lambda^j = 1. \tag{49.4}$$

Вектор $\boldsymbol{\lambda}$ с компонентами λ^i является, таким образом, единичным вектором. Кроме того, λ касателен к C, поскольку его компоненты $\bar{\lambda}^i$ (если кривая C отнесена к прямоугольной декартовой координатной системе Y) выразится производными $\bar{\lambda}^i = dy^i/ds$ — эти последние как раз и передают направление косинусов касательного вектора к кривой C. На протяжении всего нашего изложения мы будем принимать, что кривая C принадлежит классу C^2 и, следовательно, во всех точках имеет непрерывно вращающуюся касательную.

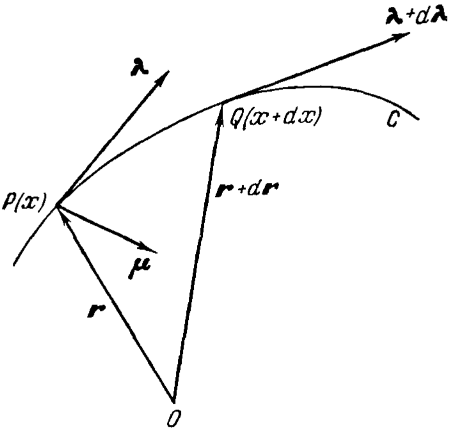

Рис. 21.

Рассмотрим пару единичных векторов λ и μ (с компонентами λ^i и соответственно μ^i) в каждой точке P кривой C (рис. 21). Положим, что λ касается C в P. Косинус угла θ между λ и μ дается формулой

$$\cos\theta = g_{ij}\lambda^i\mu^j, \tag{49.5}$$

причем, если λ и μ взаимно перпендикулярны, то условие (49.5) требует, чтобы

$$g_{ij}\lambda^i\mu^j = 0. \tag{49.6}$$

Любой вектор μ, удовлетворяющий уравнению (49.6), называется *нормальным* к C в точке P.

Если мы возьмем от квадратичного выражения (49.4) внутреннюю производную по параметру дуги s и вспомним, что g_{ij} ведут себя в ковариантном дифференцировании подобно постоянным величинам, то получим

$$g_{ij}\frac{\delta\lambda^i}{\delta s}\lambda^j + g_{ij}\frac{\delta\lambda^j}{\delta s}\lambda^i = 0.$$

Поскольку g_{ij} симметричен, полученный только что результат может быть записан в виде $g_{ij}\lambda^i\frac{\delta\lambda^j}{\delta s} = 0$. Мы видим, что вектор $\frac{\delta\lambda^j}{\delta s}$ либо обращается в нуль, либо нормален к C; в этом последнем случае мы обозначим единичный вектор, параллельный $\frac{\delta\lambda^j}{\delta s}$, через μ^j и запишем

$$\mu^j = \frac{1}{\varkappa}\frac{\delta\lambda^j}{\delta s}, \tag{49.7}$$

где $\varkappa > 0$ выбрана таким образом, чтобы μ^i был единичным вектором.

Вектор μ^j, определенный формулой (49.7), называется *главным нормальным вектором* к кривой C в точке P, а $\varkappa$ — *кривизной* C в названной точке.

Плоскость, определяемая касательным вектором λ и главным нормальным вектором μ, называется *соприкасающейся плоскостью* по отношению к кривой C в точке P.

Так как μ является единичным вектором

$$g_{ij}\mu^i\mu^j = 1, \tag{49.8}$$

и мы вправе поступить с этой квадратичной формулой так же, как мы поступили с выражением $g_{ij}\lambda^i\lambda^j = 1$, т. е. вывести из них ортогональность векторов $\frac{\delta\mu^j}{\delta s}$ и μ^j, т. е. $g_{ij}\mu^i\frac{\delta\mu^j}{\delta s} = 0$.

Дифференцируя внутренним образом соотношение ортогональности (49.6), получаем далее

$$g_{ij}\frac{\delta\lambda^i}{\delta s}\mu^j + g_{ij}\lambda^i\frac{\delta\mu^j}{\delta s} = 0,$$

или

$$g_{ij}\lambda^i\frac{\delta\mu^j}{\delta s} = -g_{ij}\frac{\delta\lambda^i}{\delta s}\mu^j = -\varkappa g_{ij}\mu^i\mu^j = -\varkappa,$$

где мы воспользовались уравнением (49.7) и квадратичным соотношением (49.8). В результате, таким образом,

$$g_{ij}\lambda^i\frac{\delta\mu^j}{\delta s} = -\varkappa, \tag{49.9}$$

поскольку же $g_{ij}\lambda^i\lambda^j = 1$, мы вправе преобразовать (49.9) к виду

$$g_{ij}\lambda^i\left(\frac{\delta\mu^j}{\delta s} + \varkappa\lambda^j\right) = 0,$$

откуда обнаруживаем, что вектор $\frac{\delta\mu^j}{\delta s} + \varkappa\lambda^j$ ортогонален к λ^i. Отсюда следует, что если мы определим *единичный вектор* $\boldsymbol{\nu}$ с компонентами ν^j формулой

$$\nu^j = \frac{1}{\tau}\left(\frac{\delta\mu^j}{\delta s} + \varkappa\lambda^j\right), \tag{49.10}$$

то вектор $\boldsymbol{\nu}$ окажется ортогональным одновременно и к $\boldsymbol{\lambda}$, и к $\boldsymbol{\mu}$. Условимся выбрать знак для τ таким образом, чтобы

$$\sqrt{g}\, e_{ijk}\lambda^i\mu^j\nu^k = 1, \tag{49.11}$$

т. е. так, чтобы триада единичных векторов $\boldsymbol{\lambda}$, $\boldsymbol{\mu}$, $\boldsymbol{\nu}$ образовывала в каждой точке P кривой C правую систему осей[1]).

Из того, что e_{ijk} — относительный тензор веса -1 (§ 41), а $g = \left|\frac{\partial y^l}{\partial x^j}\right|^2$, заключаем, что $\varepsilon_{ijk} \equiv \sqrt{g}\, e_{ijk}$ — абсолютный тензор, а потому левая часть равенства (49.11) представляет собой инвариант. Алгоритм деления указывает, что ν^k в (49.11) определяется формулой

$$\nu^k = \varepsilon^{ijk}\lambda_i\mu_j, \tag{49.12}$$

где λ_i и μ_i — ассоциативные векторы $g_{i\alpha}\lambda^\alpha$ и $g_{i\alpha}\mu^\alpha$, а

$$\varepsilon^{ijk} \equiv \frac{1}{\sqrt{g}}\, e^{ijk}$$

— абсолютный тензор. Законность этого выражения следует из замечания, что (49.12) удовлетворяет условиям ортогональности $g_{ij}\lambda^i\nu^j = 0$, $g_{ij}\mu^i\nu^j = 0$, и уравнения (49.11), определяющего ориентацию единичного орта $\boldsymbol{\nu}$ по отношению к $\boldsymbol{\lambda}$ и $\boldsymbol{\mu}$. Число τ, входящее в уравнение (49.10), называется *кручением* кривой C в точке P, вектор же $\boldsymbol{\nu}$ представляет собой *бинормаль*.

Чтобы привести эти определения в соответствие с общепринятыми определениями главной нормали и кривизны, принятыми в элементарном векторном анализе, вспомним формулу (46.6):

---

[1]) Из формул (41.2) и из определения тройного скалярного произведения (§ 45) следует формула

$$e_{ijk}\lambda^i\mu^j\nu^k = \begin{vmatrix} \lambda^1 & \mu^1 & \nu^1 \\ \lambda^2 & \mu^2 & \nu^2 \\ \lambda^3 & \mu^3 & \nu^3 \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{g}}\, \boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{\mu}\times\boldsymbol{\nu}.$$

$\partial \boldsymbol{A}/\partial x^i = A^\alpha{}_{,i}\boldsymbol{a}_\alpha$ и заметим, что если векторное поле $\boldsymbol{A}$ определено на кривой C, то

$$\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial x^i}\frac{\partial x^i}{\partial s} = A^\alpha{}_{,i}\frac{dx^i}{ds}\boldsymbol{a}_\alpha.$$

Воспользовавшись определением внутренней производной $\frac{\delta A^\alpha}{\delta s} = A^\alpha{}_{,i}\frac{\partial x^i}{ds}$, упрощаем это выражение:

$$\frac{d\boldsymbol{A}}{ds} = \frac{\delta A^\alpha}{\delta s}\boldsymbol{a}_\alpha. \tag{49.13}$$

Пусть $\boldsymbol{r}$ — радиус-вектор точки P на C; тогда касательный вектор $\boldsymbol{\lambda}$ определится выражением

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{ds} = \lambda^i\boldsymbol{a}_i = \boldsymbol{\lambda},$$

и (49.13) дает для *вектора кривизны*

$$\frac{d^2\boldsymbol{r}}{ds^2} = \frac{d\boldsymbol{\lambda}}{ds} = \frac{\delta\lambda^\alpha}{\delta s}\boldsymbol{a}_\alpha \equiv \boldsymbol{c}, \tag{49.14}$$

где $\boldsymbol{c}$ — вектор, перпендикулярный[1]) к $\boldsymbol{\lambda}$.

С каждой точкой P кривой C мы можем ассоциировать константу $\varkappa$, для которой $\boldsymbol{c}/\varkappa = \boldsymbol{\mu}$ является единичным вектором. Равенства (49.14) перепишутся при этом в таком виде:

$$\boldsymbol{\mu} = \frac{1}{\varkappa}\frac{d\boldsymbol{\lambda}}{ds} = \frac{1}{\varkappa}\frac{\delta\lambda^\alpha}{\delta s}\boldsymbol{a}_\alpha = \mu^\alpha\boldsymbol{a}_\alpha,$$

где на последнем этапе мы учли формулу (49.7).

§ 50. Формулы Серре — Френе

В этом параграфе выводится группа трех замечательных формул, известных в основном как формулы Френе и описывающих в сжатом виде все существенные геометрические свойства пространственных кривых. Две из этих формул были уже выведены в § 49. Приведем их здесь:

$$\frac{\delta\lambda^i}{\delta s} = \varkappa\mu^i, \qquad \varkappa > 0, \tag{50.1}$$

и

$$\frac{\delta\mu^i}{\delta s} = \tau\nu^i - \varkappa\lambda^i. \tag{50.2}$$

---

[1]) Поскольку $\boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{\lambda} = 1$, $\boldsymbol{\lambda}\cdot d\boldsymbol{\lambda}/ds = 0$

Первая из них дает скорость вращения касательного вектора λ при движении точки по кривой, вторая — то же самое для главной нормали μ. Третья формула

$$\frac{\delta\nu^i}{\delta s} = -\tau\mu^i, \tag{50.3}$$

к выводу которой мы сейчас переходим, дает скорость вращения бинормали при перемещении точки P по кривой. Если мы применим операцию внутреннего дифференцирования к уравнению (49.12):

$$\nu^k = \varepsilon^{ijk}\lambda_i\mu_j,$$

то получим

$$\frac{\delta\nu^k}{\delta s} = \varepsilon^{ijk}\frac{\delta\lambda_i}{\delta s}\mu_j + \varepsilon^{ijk}\lambda_i\frac{\delta\mu_j}{\delta s}, \tag{50.4}$$

так как ковариантные производные от ε^{ijk} равны нулю[1]. Опуская индексы в (50.1) и (50.2), получаем $\frac{\delta\lambda_i}{\delta s} = \varkappa\mu_i$ и $\frac{\delta\mu_i}{\delta s} = \tau\nu_i - \varkappa\lambda_i$; вводя эти значения в (50.4), находим

$$\frac{\delta\nu^k}{\delta s} = \varepsilon^{ijk}\varkappa\mu_i\mu_j + \varepsilon^{ijk}\lambda_i(\tau\nu_j - \varkappa\lambda_j) = \tau\varepsilon^{ijk}\lambda_i\nu_j = -\tau\mu^k,$$

поскольку $\varepsilon^{ijk}\lambda_i\lambda_j = \varepsilon^{ijk}\mu_i\mu_j = 0$, так как ε^{ijk} кососимметричны, а $\mu^k = \varepsilon^{ijk}\lambda_i\nu_j$. Таким образом, установлена справедливость третьей формулы Френе.

Формулы (50.1)—(50.3), будучи представленными в развернутом виде в символах Кристоффеля, принимают вид

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d\lambda^i}{ds} + \left\{ {i \atop jk} \right\}\lambda^j\frac{dx^k}{ds} = \varkappa\mu^i \quad \text{или} \quad \frac{d^2x^i}{ds^2} + \left\{ {i \atop jk} \right\}\frac{dx^j}{ds}\frac{dx^k}{ds} = \varkappa\mu^i, \\ &\frac{d\mu^i}{ds} + \left\{ {i \atop jk} \right\}\mu^j\frac{dx^k}{ds} = -(\varkappa\lambda^i - \tau\nu^i), \\ &\frac{d\nu^i}{ds} + \left\{ {i \atop jk} \right\}\nu^j\frac{dx^k}{ds} = -\tau\mu^i. \end{aligned}\right\} \tag{50.5}$$

Если система уравнений (50.5) и не устанавливает положения кривой C в пространстве, то она все же определяет эту кривую однозначно при условии задания непрерывных функций $\varkappa(s)$ и $\tau(s)$ на кривой C.

Мы закончим этот параграф примером, иллюстрирующим применение формул Френе. Рассмотрим кривую, определенную в цилиндрических координатах уравнениями

$$x^1 = a, \quad x^2 = \theta(s), \quad x^3 = 0.$$

---

[1]) Поскольку ε^{ijk} в декартовой системе являются константами, то $\varepsilon^{ijk}_{\ \ ,l} = 0$, причем это уравнение тензорное.

Эта кривая — окружность радиуса a. Квадрат элемента дуги в цилиндрических координатах определяется уравнением

$$ds^2 = (dx^1)^2 + (x^1)^2 (dx^2)^2 + (dx^3)^2,$$

так что $g_{11} = 1$, $g_{22} = (x^1)^2$, $g_{33} = 1$, $g_{ij} = 0$, если $i \neq j$, и легко установить, что не обращающиеся в нуль символы Кристоффеля сводятся к следующим:

$$\left\{ {1 \atop 22} \right\} = -x^1, \quad \left\{ {2 \atop 12} \right\} = \left\{ {2 \atop 21} \right\} = \frac{1}{x^1}.$$

Компоненты вектора λ, касательного к окружности C, имеют вид $\lambda^i = dx^i/ds$, так что $\lambda^1 = 0$, $\lambda^2 = d\theta/ds$, $\lambda^3 = 0$. Так как λ — единичный вектор, то $g_{ij}\lambda^i\lambda^j = 1$ во всех точках C, для чего требуется, чтобы

$$(x^1)^2 \left(\frac{d\theta}{ds}\right)^2 = a^2 \left(\frac{d\theta}{ds}\right)^2 = 1.$$

Следовательно, $(d\theta/ds)^2 = 1/a^2$ и первая формула в (50.5) дает

$$\varkappa\mu^1 = \frac{d\lambda^1}{ds} + \left\{ {1 \atop jk} \right\} \lambda^j \frac{dx^k}{ds} = \left\{ {1 \atop 22} \right\} \lambda^2 \frac{dx^2}{ds} = -\frac{1}{a},$$

$$\varkappa\mu^2 = \frac{d\lambda^2}{ds} + \left\{ {2 \atop jk} \right\} \lambda^j \frac{dx^k}{ds} = \left\{ {2 \atop 21} \right\} \lambda^2 \frac{dx^1}{ds} = 0,$$

$$\varkappa\mu^3 = \frac{d\lambda^3}{ds} + \left\{ {3 \atop jk} \right\} \lambda^j \frac{dx^k}{ds} = 0.$$

Так как μ — единичный вектор, $g_{ij}\mu^i\mu^j = 1$, то отсюда следует, что $\varkappa = 1/a$, а $\mu^1 = -1$, $\mu^2 = 0$, $\mu^3 = 0$. Полностью аналогичное вычисление обнаруживает, что $\tau = 0$, $\nu^1 = 0$, $\nu^2 = 0$, $\nu^3 = 1$.

Задачи

1. Найти кривизну и кручение в точке круговой винтовой линии C, уравнения которой в цилиндрических координатах имеют вид

$$C\colon\ x^1 = a,\ x^2 = \theta,\ x^3 = k\theta.$$

Показать, что касательный вектор λ в каждой точке C образует постоянный угол с направлением оси X^3. Исследовать также кривую C, представленную уравнениями в прямоугольных декартовых координатах $y^1 = a\cos\theta$, $y^2 = a\sin\theta$, $y^3 = k\theta$.

2. Показать, что

$$\frac{\delta^2\lambda^i}{\delta s^2} = \frac{d\varkappa}{ds}\mu^i + \varkappa(\tau\nu^i - \varkappa\lambda^i),$$

$$\frac{\delta^2\mu^i}{\delta s^2} = \frac{d\tau}{ds}\nu^i - (\varkappa^2 + \tau^2)\mu^i - \frac{d\varkappa}{ds}\lambda^i,$$

$$\frac{\delta^2\nu^i}{\delta s^2} = \tau(\varkappa\lambda^i - \tau\nu^i) - \frac{d\tau}{ds}\mu^i.$$

3. Учтя решение задачи 1, показать, что отношение кривизны $\varkappa$ к кручению τ остается постоянной величиной. Показать на основании формул Френе,

что если $\tau/\varkappa = \text{const}$, то в декартовых координатах $\nu^i = c\lambda^i + b^i$, где c и b^i — константы. Этот результат приводит к заключению, что $\lambda^i b^i$ — константа и что кривая, следовательно, образует постоянный угол с линиями направлений b^i. Иными словами, кривая оказывается цилиндрической винтовой линией. Эту теорему доказал Ж. Бертран.

4. Если кривая C описана уравнением

$$C\colon\ y^i = y^i(s),$$

где y^i — ортогональные декартовы координаты, а s — параметр дуги, показать, что

$$\varkappa^2 = [(y^1)'']^2 + [(y^2)'']^2 + [(y^3)'']^2$$

и что

$$\tau\varkappa^2 = \begin{vmatrix} (y^1)' & (y^2)' & (y^3)' \\ (y^1)'' & (y^2)'' & (y^3)'' \\ (y^1)''' & (y^2)''' & (y^3)''' \end{vmatrix}.$$

5. Переписать уравнения задачи 2 в декартовых координатах y^i и показать, что при $\tau = 0$ и $\varkappa = \text{const}$ на кривой C уравнения этой кривой C принимают вид

$$y^i = A^i \cos \varkappa s + B^i \sin \varkappa s + C^i,$$

где $A^iA^i = B^iB^i = 1/\varkappa^2$, $A^iB^i = 0$. Таким образом, кривая C является окружностью.

6. Пусть кривая C представляет собой цилиндрическую винтовую линию, описываемую уравнениями

$$C\colon \begin{cases} y^1 = \varphi(\sigma), \\ y^2 = \psi(\sigma), \\ y^3 = k\sigma, \quad k = \text{const}, \end{cases}$$

где σ — параметр дуги директрисы кривой C' в плоскости y^1y^2, так что $(d\sigma)^2 = (dy^1)^2 + (dy^2)^2$. Учтя, что $(ds)^2 = (1 + k^2)(d\sigma)^2$, показать, что

$$\tau = \frac{\begin{vmatrix} \varphi' & \psi' & k \\ \varphi'' & \psi'' & 0 \\ \varphi''' & \psi''' & 0 \end{vmatrix}}{\varkappa^2} \cdot \frac{1}{(1+k^2)^3},$$

$$\varkappa = \frac{\varphi'\psi'' - \psi'\varphi''}{1 + k^2}.$$

Установить, что $\tau/\varkappa = k$.

§ 51. Уравнения прямой линии

Пусть дано векторное поле A^i, определенное на кривой C в E_3 при параметрическом задании C:

$$C\colon\ x^i = x^i(s), \quad s_1 \leqslant s \leqslant s_2 \quad (i = 1,\ 2,\ 3),$$

где s — параметр. Если векторное поле A^i параллельно, то из выкладок § 48 следует, что $\delta A^i/\delta s = 0$, или

$$\frac{dA^i}{ds} + \left\{ {i \atop \alpha\beta} \right\} A^\alpha \frac{dx^\beta}{ds} = 0, \qquad (51.1)$$

Воспользуемся уравнением (51.1) для того, чтобы получить уравнения прямой линии в общих криволинейных координатах. Характеристическое свойство прямых линий заключается в том, что вектор λ, касательный к прямой линии, направлен по прямой линии так, что вся совокупность касательных векторов λ образует параллельное векторное поле. Поле касательных векторов $\lambda^i = dx^i/ds$ должно, таким образом, удовлетворять уравнению (51.1). Поэтому

$$\frac{\delta\lambda^i}{\delta s} = \frac{d^2x^i}{ds^2} + \left\{ \begin{matrix} i \\ \alpha\beta \end{matrix} \right\} \frac{dx^\alpha}{ds} \frac{dx^\beta}{ds} = 0.$$

Искомое уравнение принимает вид

$$\frac{d^2x^i}{ds^2} + \left\{ \begin{matrix} i \\ \alpha\beta \end{matrix} \right\} \frac{dx^\alpha}{ds} \frac{dx^\beta}{ds} = 0. \tag{51.2}$$

В декартовых координатах символы Кристоффеля обращаются в нуль, и мы приходим к знакомой форме дифференциальных уравнений прямых линий. От геометрической интерпретации кривизны $\varkappa$, как меры скорости вращения касательной к кривой, мы пришли к выводу, указывающему, что кривизна прямой линии равна нулю. Это определение совпадает с первой из формул Френе (50.1).

§ 52. Криволинейные координаты на поверхности

В остающейся части этой главы мы займемся изучением свойств поверхностей, расположенных в трехмерном евклидовом пространстве. Мы покажем, что некоторые из этих свойств могут быть исследованы независимо от пространства, заключающего в себе эту изучаемую поверхность, и что эти свойства связаны со структурой дифференциальной квадратичной формы для элемента дуги кривой, проведенной на поверхности. Все такого рода свойства поверхностей называются *внутренними* свойствами, а геометрия, основанная на изучении дифференциальной квадратичной формы, называется *внутренней геометрией* поверхности.

Мы находим удобным относить пространство с расположенной в нем поверхностью к системе ортогональных декартовых осей Y и рассматривать геометрическое место точек, удовлетворяющих уравнению

$$F(y^1, y^2, y^3) = 0, \tag{52.1}$$

как аналитическое определение поверхности S. Мы предполагаем, что только две из переменных y^i в (52.1) являются независимыми и что указание, например, y^1 и y^2 в какой-либо области плоскости Y^1Y^2 определяет однозначно вещественное число

y^3, так что левая часть уравнения (52.1) обращается в нуль. Если предположить, что $F(y^1, y^2, y^3)$, рассматриваемая как функция трех независимых переменных, принадлежит классу C^1 в некоторой области R в окрестности точки $P_0(y_0^1, y_0^2, y_0^3)$, причем $\partial F/\partial y^3|_{P_0} \neq 0$ и $F(y_0^1, y_0^2, y_0^3) = 0$, то основная теорема о неявных функциях гарантирует существование единственного решения $y^3 = f(y^1, y^2)$ такого, что $y_0^3 = f(y_0^1, y_0^2)$.

Определение поверхности единственным уравнением (52.1) несколько более кропотливо в сравнении с методом Гаусса, предложившим определять поверхность как геометрическое место точек, удовлетворяющих трем уравнениям типа

$$y^i = y^i(u^1, u^2), \tag{52.2}$$

где $u_1^1 \leqslant u^1 \leqslant u_2^1$ и $u_1^2 \leqslant u^2 \leqslant u_2^2$, а y^i — вещественные функции класса C^1 в области определения независимых параметров u^1, u^2. Для того чтобы совместить эти два различных определения от функций $y^i(u^1, u^2)$ следует потребовать, чтобы матрица-якобиан

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial y^1}{\partial u^1} & \dfrac{\partial y^2}{\partial u^1} & \dfrac{\partial y^3}{\partial u^1} \\[2mm] \dfrac{\partial y^1}{\partial u^2} & \dfrac{\partial y^2}{\partial u^2} & \dfrac{\partial y^3}{\partial u^2} \end{bmatrix} \tag{52.3}$$

была второго ранга, так чтобы не все составленные из этой матрицы детерминанты второго порядка обращались тождественно в нуль в области определения параметров u^i. Это требование гарантирует возможность решения двух уравнений в (52.2) для u^1 и u^2, выраженных в парах переменных y^i. Подстановка же этих решений в остающееся третье уравнение приводит к уравнению типа $y^3 = y^3(y^1, y^2)$. Следует заметить, что если два каких-либо детерминанта, образованных из матрицы (52.3), обращаются в нуль, то при этом обращается в нуль также и третий, если только поверхность S не является плоскостью, параллельной одной из координатных плоскостей.

Так как u^1 и u^2 — независимые переменные, то геометрическое место, определяемое уравнениями (52.2) — двумерно, причем эти уравнения дают координаты y^i точки на поверхности, в то время как u^1 и u^2 принимают конкретные частные значения. С такой точки зрения поверхность приходится рассматривать как двумерное многообразие S, помещенное в трехмерное обволакивающее пространство E_3. Мы, таким образом, можем исследовать поверхности, не относя их к окружающему пространству, и рассматривать параметры u^1 и u^2 как координаты точек на поверхности. Знакомым примером такой практики является применение широты и долготы как координат пунктов, расположенных на поверхности земного шара.

Если мы придадим координате u^1 в (52.2) определенное фиксированное значение $u^1 = c$ (рис. 22), то получим геометрическое место точек, образующих одномерное многообразие

$$y^i = y^i(c, u^2) \qquad (i = 1, 2, 3),$$

которое является кривой, лежащей на поверхности S, определенной уравнениями (52.2). Мы будем называть эту кривую u^2-кривой. Аналогично, положив $u^2 = \mathrm{const}$ в (52.2), мы определяем u^1-кривую, вдоль которой изменяется лишь u^1. Придавая u^1 и u^2 последовательность фиксированных значений, получаем сетку кривых на поверхности, называемых *координатными кривыми.* Пересечение пары координатных кривых при фиксированных значениях $u^1 = u_0^1$, $u^2 = u_0^2$ определяет точку P_0. Переменные u^1, u^2, определяющие точку P на S, называются *криволинейными* или *гауссовыми координатами на поверхности.*

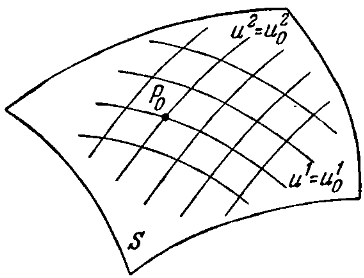

Рис. 22.

Параметрическое представление поверхности уравнениями (52.2) не является, очевидно, единственно возможным: существует бесконечно много криволинейных координатных систем, которыми можно пользоваться для определения точек на заданной поверхности S. Так, например, если ввести преобразование

$$\left.\begin{aligned} u^1 &= u^1(\bar{u}^1, \bar{u}^2), \\ u^2 &= u^2(\bar{u}^1, \bar{u}^2), \end{aligned}\right\} \tag{52.4}$$

где $u^\alpha(\bar{u}^1, \bar{u}^2)$ принадлежат классу C^1 и не обращают якобиан $J = \dfrac{\partial(u^1, u^2)}{\partial(\bar{u}^1, \bar{u}^2)}$ в нуль в какой-либо области переменных $\bar{u}^i$, то значения (52.4) можно ввести в (52.2) и получить иную систему параметрических уравнений

$$y^i = f^i(\bar{u}^1, \bar{u}^2) \qquad (i = 1, 2, 3), \tag{52.5}$$

определяющих ту же поверхность S. Уравнения (52.4) можно рассматривать как *уравнения преобразования координат на поверхности* точно так же, как мы рассматривали уравнения $x^i = x^i(\bar{x}^1, \bar{x}^2, \bar{x}^3)$ $(i = 1, 2, 3,)$ как определяющие преобразование координат в E_3.

§ 53. Внутренняя геометрия. Первая фундаментальная квадратичная форма. Метрический тензор

В предыдущем параграфе мы отметили, что свойства поверхностей, которые могут быть описаны без обращения к пространству, в котором помещается эта поверхность, называются *внутренними* свойствами. Изучение внутренних свойств поставлено там в зависимость от определенной квадратичной дифференциальной формы, описывающей метрические свойства поверхности. Перейдем к выводу этой квадратичной формы.

Примем прежде всего некоторые соглашения о значениях индексов, которыми мы будем пользоваться в настоящем и в последующих параграфах этой главы. Нам предстоит иметь дело с двумя различными совокупностями переменных: 1) с теми, которые имеют отношение к пространству E_3, в которое помещена изучаемая нами поверхность (таких переменных имеется три) и 2) с двумя криволинейными координатами u^1 и u^2, относящимися к двумерному многообразию S. Для того чтобы не путать эти совокупности переменных, мы будем пользоваться латинскими индексами для переменных, относящихся к пространству, и греческими — для переменных, относящихся к поверхности. Латинские индексы будут поэтому принимать значения 1, 2, 3, греческие 1, 2. Преобразование T координат пространства из одной системы X в другую систему $\bar{X}$ мы будем записывать выражением

$$T\colon\ x^i = x^i(\bar{x}^1,\ \bar{x}^2,\ \bar{x}^3),$$

преобразование же гауссовых координат поверхности, описанных уравнениями (52.4), выразится формулой

$$u^\alpha = u^\alpha(\bar{u}^1,\ \bar{u}^2).$$

Повторение греческого индекса в каком-либо члене обозначает суммирование от 1 до 2. Повторение латинского индекса обозначает суммирование в интервале 1—3. Если не оговорено обратное, мы будем предполагать, что в дальнейшем изложении этой главы все участвующие в наших выкладках функции входят в класс C^2 в области их определения

Рассмотрим поверхность S, определенную уравнением

$$y^i = y^i(u^1,\ u^2), \tag{53.1}$$

где y^i — ортогональные декартовы координаты пространства E_3, в котором расположена поверхность S, и на этой поверхности кривую C, заданную уравнениями

$$u^\alpha = u^\alpha(t), \qquad t_1 \leqslant t \leqslant t_2, \tag{53.2}$$

где u^α — гауссовы координаты поверхности S. Рассматриваемая из окружающего пространства кривая, определенная уравнением (53.2), представляет собой кривую в трехмерном евклидовом пространстве, а элемент ее дуги дан формулой

$$ds^2 = dy^i\, dy^i. \tag{53.3}$$

Из (53.1) выводим

$$dy^i = \frac{\partial y^i}{\partial u^\alpha}\, du^\alpha, \tag{53.4}$$

где, как это ясно из (53.2),

$$du^\alpha = \frac{du^\alpha}{dt}\, dt.$$

Подставляя (53.4) в (53.3), получаем

$$ds^2 = \frac{\partial y^i}{\partial u^\alpha}\frac{\partial y^i}{\partial u^\beta}\, du^\alpha\, du^\beta = a_{\alpha\beta}\, du^\alpha\, du^\beta,$$

где

$$a_{\alpha\beta} \equiv \frac{\partial y^i}{\partial u^\alpha}\,\frac{\partial y^i}{\partial u^\beta}. \tag{53.5}$$

Выражение для ds^2, а именно

$$ds^2 = a_{\alpha\beta}\, du^\alpha\, du^\beta, \tag{53.6}$$

представляет собой квадрат *линейного элемента кривой C, лежащей на поверхности S*, и правая часть формулы (53.6) называется *первой фундаментальной квадратичной формой поверхности.* Длина дуги кривой, определяемой из (53.2), выражается формулой

$$s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{a_{\alpha\beta}\dot{u}^\alpha\dot{u}^\beta}\, dt,$$

где $\dot{u}^\alpha = du^\alpha/dt$. Поскольку в нетривиальном случае $ds^2 > 0$, то, положив сначала $u^2 = \text{const}$, а затем $u^1 = \text{const}$, мы найдем непосредственно из (53.6), что $ds^2_{(1)} = a_{11}(du^1)^2$ и $ds^2_{(2)} = a_{22}(du^2)^2$. На этом основании заключаем, что a_{11} и a_{22} — положительные функции от u^1 и u^2.

Рассмотрим преобразование координат поверхности

$$u^\alpha = u^\alpha(\bar{u}^1, \bar{u}^2) \tag{53.7}$$

с не обращающимся в нуль якобином $J = \left|\dfrac{\partial u^\alpha}{\partial \bar{u}^\beta}\right|$. Из (53.7) следует, что

$$du^\alpha = \frac{\partial u^\alpha}{\partial \bar{u}^\gamma}\, d\bar{u}^\gamma,$$

а (53.6) дает

$$ds^2 = a_{\alpha\beta}\frac{\partial u^\alpha}{\partial \bar{u}^\gamma}\frac{\partial u^\beta}{\partial \bar{u}^\delta}d\bar{u}^\gamma\, d\bar{u}^\delta .$$

Если положить

$$\bar{a}_{\gamma\delta} = a_{\alpha\beta}\frac{\partial u^\alpha}{\partial \bar{u}^\gamma}\frac{\partial u^\beta}{\partial \bar{u}^\delta},$$

то мы увидим, что совокупность величин $a_{\alpha\beta}$ представляет собой симметричный ковариантный тензор второго ранга относительно допустимых преобразований (53.7) координат поверхности. То обстоятельство, что $a_{\alpha\beta}$ являются компонентами тензора, явствует также из (53.6), так как ds^2 — инвариант, а величины $a_{\alpha\beta}$ симметричны. Тензор $a_{\alpha\beta}$ называется *ковариантным метрическим тензором* поверхности.

Поскольку форма (53.6) является положительно определенной, то детерминант

$$a = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0,$$

и мы можем определить обратный тензор $a^{\alpha\beta}$ (см. § 30) формулой $a^{\alpha\beta}a_{\beta\gamma} = \delta^\alpha_\gamma$. В результате получаем

$$a^{11} = \frac{a_{22}}{a}, \quad a^{12} = a^{21} = \frac{-a_{12}}{a}, \quad a^{22} = \frac{a_{11}}{a}.$$

Контравариантный тензор $a^{\alpha\beta}$ называется *контравариантным метрическим тензором.*

Мы можем повторить почти дословно содержание § 44, относящееся к метрическим свойствам нашего двумерного пространства S. Так, например, направление линейного элемента на поверхности может быть указано либо *направляющими косинусами* dy^i/ds $(i = 1, 2, 3)$, либо *направляющими параметрами*

$$\lambda^\alpha = \frac{du^\alpha}{ds}. \tag{53.8}$$

Так, например,

$$\frac{dy^i}{ds} = \frac{\partial y^i}{\partial u^\alpha}\frac{du^\alpha}{ds}$$

и du^α/ds определяются однозначно, если указаны направляющие косинусы dy^i/ds, и наоборот

Мы определяем длину *вектора поверхности* A^α, т. е. вектора, определенного через $A^1(u^1, u^2)$ и $A^2(u^1, u^2)$ формулой [1])

$$A = \sqrt{a_{\alpha\beta}A^\alpha A^\beta}.$$

Из (53.6) следует, что

$$1 = a_{\alpha\beta}\frac{du^\alpha}{ds}\frac{du^\beta}{ds} = a_{\alpha\beta}\lambda^\alpha\lambda^\beta,$$

так что параметры направлений λ^α являются компонентами единичного вектора.

Ковариантный вектор

$$\lambda_\beta \equiv a_{\alpha\beta}\lambda^\alpha \qquad (53.9)$$

называется иногда *моментом направления*. Из (53.9) ясно, что

$$a^{\gamma\beta}\lambda_\beta = a^{\gamma\beta}a_{\alpha\beta}\lambda^\alpha = \delta_\alpha^\gamma\lambda^\alpha = \lambda^\gamma$$

и что

$$\lambda^\alpha\lambda_\alpha = a_{\alpha\beta}\lambda^\beta\lambda^\alpha.$$

§ 54. Угол между двумя пересекающимися кривыми на поверхности. Элемент площади поверхности

Уравнения кривой C, лежащей на поверхности S, могут быть написаны в таком виде:

$$C:\ u^\alpha = u^\alpha(t), \qquad t_1 \leqslant t \leqslant t_2.$$

И так как при этом предполагается, что $u^\alpha(t)$ принадлежит классу C^2, то кривая C должна иметь непрерывно вращающуюся касательную. Пусть C_1 и C_2 — две такие кривые, пересекающиеся в точке P кривой S (рис. 23). Воспользуемся уравнениями кривой S, отнесенными к прямоугольным декартовым осям Y, имеющими вид

$$y^i = y^i(u^1, u^2), \qquad (54.1)$$

и обозначим косинусы направлений касательных линий к C_1 и C_2 в P соответственно через ξ^i и η^i. Косинус угла θ между C_1 и C_2, вычисляемый геометрически в объемлющем пространстве E_3, равен

$$\cos\theta = \xi^i\eta^i. \qquad (54.2)$$

---

[1]) Компоненты $\bar{A}^i$ вектора A^α, рассматриваемые с точки зрения системы отсчета объемлющего пространства E_3, задаются выражениями $\bar{A}^i = \dfrac{\partial y^i}{\partial u^\alpha}A^\alpha$, и отсюда ясно, что

$$\bar{A}^i\bar{A}^i = \frac{\partial y^i}{\partial u^\alpha}\frac{\partial y^i}{\partial u^\beta}A^\alpha A^\beta = a_{\alpha\beta}A^\alpha A^\beta.$$

С другой стороны,

$$\xi^i = \frac{\partial y^i}{\partial u^\alpha}\frac{d_1 u^\alpha}{ds_1} \equiv \frac{d_1 y^i}{ds_1},$$

$$\eta^i = \frac{\partial y^i}{\partial u^\beta}\frac{d_2 u^\beta}{ds_2} \equiv \frac{d_2 y^i}{ds_2},$$

где индексы 1 и 2 относятся к элементам кривых C_1 и соответственно C_2. Пользуясь определением (53.8), мы сможем

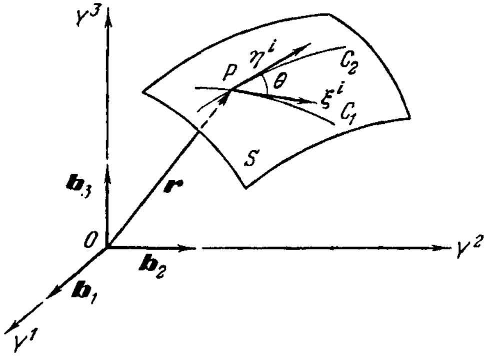

Рис. 23.

записать единичные векторы по направлениям касательных к C_1 и C_2 выражениями

$$\lambda^\alpha = \frac{d_1 u^\alpha}{ds_1}, \qquad \mu^\alpha = \frac{d_2 u^\alpha}{ds_2}$$

и

$$\xi^i = \frac{\partial y^i}{\partial u^\alpha}\lambda^\alpha, \qquad \eta^i = \frac{\partial y^i}{\partial u^\beta}\mu^\beta. \tag{54.3}$$

Вводя в (54.2) выражения из (54.3), получаем

$$\cos\theta = \frac{\partial y^i}{\partial u^\alpha}\frac{\partial y^i}{\partial u^\beta}\lambda^\alpha\mu^\beta,$$

а поскольку

$$a_{\alpha\beta} = \frac{\partial y^i}{\partial u^\alpha}\frac{\partial y^i}{\partial u^\beta},$$

предыдущее выражение можно записать более компактно:

$$\cos\theta = a_{\alpha\beta}\lambda^\alpha\mu^\beta. \tag{54.4}$$

Если кривые C_1 и C_2 ортогональны, то

$$a_{\alpha\beta}\lambda^\alpha\mu^\beta = 0. \tag{54.5}$$

В частности, если поверхностные векторы λ^α и μ^β расположены по координатным кривым $\left(\lambda^1 = 1/\sqrt{a_{11}},\ \lambda^2 = 0,\ \mu^1 = 0,\ \mu^2 = 1/\sqrt{a_{22}}\right)$, то из (54.5) следует, что *координатные кривые образуют ортогональную сетку в том и лишь в том случае, если* $a_{12}=0$ *в каждой точке поверхности.*

Мы можем дать наглядное истолкование этих результатов по способу, приведенному в § 45. Так, например, если $\boldsymbol{r}$ обозначает радиус-вектор какой-либо точки P на поверхности S, а $\boldsymbol{b}_i$ — единичные векторы, направленные по ортогональным

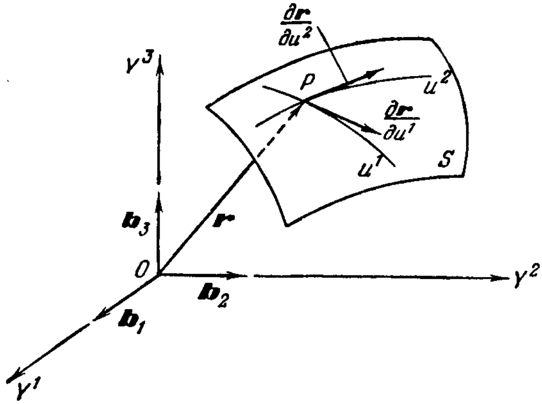

Рис. 24.

координатным осям Y, то уравнения (53.1) поверхности S могут быть записаны в векторной форме (рис. 24) как

$$\boldsymbol{r}(u^1, u^2)=\boldsymbol{b}_i y^i(u^1, u^2).$$

Из такого представления S следует, что

$$ds^2=d\boldsymbol{r}\cdot d\boldsymbol{r}=\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u^\alpha}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u^\beta}\,du^\alpha\,du^\beta=a_{\alpha\beta}\,du^\alpha\,du^\beta,$$

где

$$a_{\alpha\beta}=\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u^\alpha}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u^\beta}. \qquad (54.6)$$

Положив $\partial\boldsymbol{r}/\partial u^\alpha=\boldsymbol{a}_\alpha$, где $\boldsymbol{a}_1$ и $\boldsymbol{a}_2$, — очевидно, касательные векторы к координатным кривым, мы увидим, что

$$a_{11}=\boldsymbol{a}_1\cdot\boldsymbol{a}_1,\quad a_{12}=\boldsymbol{a}_1\cdot\boldsymbol{a}_2,\quad a_{22}=\boldsymbol{a}_2\cdot\boldsymbol{a}_2.$$

В обозначениях (54.3) пространственные компоненты векторов $\boldsymbol{a}_1$ и $\boldsymbol{a}_2$ записываются через ξ^i и соответственно через η^i.

Мы можем определить элемент площади $d\sigma$ поверхности S формулой

$$d\sigma=|\boldsymbol{a}_1\times\boldsymbol{a}_2|\,du^1\,du^2,$$

из которой легко заметить, что ее правую часть можно преобразовать в

$$d\sigma = \sqrt{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}\, du^1\, du^2 = \sqrt{a}\, du^1\, du^2. \tag{54.7}$$

Эта формула имеет в точности ту же самую структуру, что и выражение (44.11) для элемента объема.

Из § 40 следует, что кососимметричные e-системы в двумерном многообразии могут быть определены формулами

$$e_{11} = e_{22} = e^{11} = e^{22} = 0, \quad e^{12} = -e^{21} = e_{12} = -e_{21} = 1,$$

и так как эти системы являются относительными тензорами (см. § 41), то выражения

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \sqrt{a}\, e_{\alpha\beta} \text{ и } \varepsilon^{\alpha\beta} = \frac{1}{\sqrt{a}} e^{\alpha\beta}$$

должны быть признаны абсолютными тензорами. Пользуясь ε-символами, мы можем представить синус угла θ между двумя единичными векторами λ^α, μ^α выражением

$$\varepsilon_{\alpha\beta}\lambda^\alpha\mu^\beta = \sin\theta,$$

количественно равным площади параллелограмма, построенного на единичных векторах λ^α и μ^α. Полученный результат можно сформулировать следующим образом: *необходимым и достаточным условием ортогональности двух поверхностных единичных векторов λ^α и μ^α является* $|\varepsilon_{\alpha\beta}\lambda^\alpha\mu^\beta| = 1$.

Задачи

1. Показать, что косинус угла θ между координатными кривыми u^1 и u^2 на S равен $\cos\theta = a_{12}/\sqrt{a_{11}a_{22}}$.

2. Найти элемент площади на поверхности сферы радиуса r, если уравнения поверхности заданы выражениями

$$y^1 = r\sin u^1 \cos u^2, \quad y^2 = r \sin u^1 \sin u^2, \quad y^3 = r\cos u^1,$$

где y^i — ортогональные декартовы координаты. (Обратить внимание на то, что в данном случае $a_{11} = r^2$, $a_{12} = 0$, $a_{22} = r^2\sin^2 u^1$.)

§ 55. Основные понятия вариационного исчисления

Наиболее общеизвестной задачей внутренней геометрии поверхностей является определение кривых наименьшей длины, соединяющих две заданные точки поверхности. Это задача геодезических линий. Она столь глубоко связана с формулировкой фундаментальных принципов оптики, динамики и механики деформируемых сред, что ее желательно было бы рассмотреть в более широком плане, чем если бы ее значение исчерпывалось лишь геометрией поверхностей, вложенных в E_3. С этой целью мы привлекаем сюда некоторые понятия вариационного исчисления. Поскольку нам придется заняться изучением экстремальных свойств интегралов, напомним важнейшие сведения, относящиеся к максимумам и минимумам функций от нескольких независимых переменных.

Пусть $f(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ — непрерывная функция n независимых переменных x^i, определенных в ограниченной замкнутой области R. Наша цель — найти такую точку $P(x)$ области R, в которой f достигает экстремального значения в сравнении со значениями f в ближайшей окрестности точки $P(x)$. Нет сомнения в том, что такое максимальное или минимальное значение функции f существует, поскольку известно, что *любая функция, непрерывная в ограниченной замкнутой области, достигает своих максимального и минимального значений либо внутри, либо на границе области*[1].

Кроме того, если

$$f(x^1, \ldots, x^n)$$

— дифференцируемая функция, то во внутренних точках области, где функция достигает своих экстремальных значений $\partial f/\partial x^i = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Обращение в нуль производных от $f(x^1, x^2, \ldots, x^n)$, очевидно, не является достаточным условием для экстремума. Назовем точки области R, в которых $\partial f/\partial x^i$ обращается одновременно в нуль, *стационарными точками* функции $f(x^1, \ldots, x^n)$. Определение стационарных точек функций рассматривается в курсе математического анализа, и мы полагаем, что наш читатель с этим вопросом близко знаком.

Вариационное исчисление точно так же имеет дело с определением экстремальных или стационарных значений некоторых выражений, но здесь имеется существенное различие, заключающееся в том, что в вариационном исчислении мы имеем дело с экстремумами *функционалов*, а *не функций* от конечного числа переменных. Под функционалом мы понимаем функцию, зависящую от изменений одной или нескольких функций, играющих роль аргументов, т. е. независимых переменных. В качестве примера функционала рассмотрим формулу

$$s = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + (dy/dx)^2}\, dx,$$

которой определяется длина плоской кривой $y = y(x)$, соединяющей точки с абсциссами x_0 и x_1. Здесь значение s зависит от поведения аргумента $y(x)$ функционала, причем класс функций $y(x)$, от которых зависит функционал s, остается в известной

[1]) Это теорема Вейерштрасса.

мере произвольным. Так, например, можно представить себе задачу определения экстремумов s и в том случае, когда $y(x)$ — произвольная непрерывная функция с кусочно-непрерывной первой производной.

При изучении экстремальных значений непрерывных функций $f(x^1, \ldots, x^n)$ от конечного числа независимых переменных x^i мы должны указать область R, в которой определена функция f, в то время как при изучении экстремальных значений функционалов мы обязаны указать класс *допускаемых функциональных аргументов.* Например, мы можем потребовать, чтобы аргументы функционала обладали теми или иными свойствами непрерывности, или вели себя тем или иным предписанным образом в конечных точках интервала и т. п. Мы будем иметь дело с относительными экстремумами функционалов, т. е. экстремумами относительно некоторой «окрестности» аргументов функционала, для которой функционал принимает экстремальное значение, точно так же, как если бы мы имели дело с относительными максимумами и минимумами функций. Для того чтобы ввести точность в понятие *окрестности функции*, мы формулируем

Определение. *Функция* $g(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ *принадлежит* h-*окрестности функции* $f(x^1, \ldots, x^n)$, *если выполняются условия:* $|f-g|<h$, $h>0$, *для всех значений независимых переменных* $x^1, x^2, \ldots, x^n$ *внутри* R.

С помощью этого определения мы сможем сформулировать основную задачу вариационного исчисления следующим образом: *найти в классе допускаемых функциональных аргументов такие функции* f, *которые для рассматриваемого функционала дают значения, экстремальные по сравнению с функциями, принадлежащими некоторой* h-*окрестности функции* f.

Здесь уместно обратить внимание на трудности, присущие этой задаче. Мы уже заметили, что в теории максимумов и минимумов непрерывных функций нескольких независимых переменных существование экстремальных значений гарантируется теоремой Вейерштрасса. В задаче же вариационного исчисления может случиться, что, будучи сформулированной, пусть даже и без всяких внутренних противоречий, она окажется неразрешимой в силу ограничений, налагаемых на класс допускаемых аргументов функционала. Положим, например, нам требуется соединить две заданные на оси X точки кратчайшей кривой непрерывной кривизны так, чтобы кривая была ортогональна к оси X в конечных точках. Эта задача неразрешима, так как длина каждой допускаемой кривой всегда больше, чем длина прямолинейного отрезка, соединяющего заданные точки. Мы всегда можем найти кривую допускаемого типа, длина которой отличается от длины прямой линии сколь угодно мало, так что все-где существует низшая граница функционала, но эта низшая граница — не тот минимум, который должен быть достигнут кривой, принадлежащей к классу рассматриваемых. Из приведенного примера явствует, что любая вариационная задача ставит нас перед вопросом о возможности существования решения этой задачи.

Чтобы вывести дифференциальные уравнения, из которых мы могли бы извлечь систему необходимых условий для экстремума функционала, нам потребуется следующая

Фундаментальная лемма вариационного исчисления. *Если интеграл* $\int\limits_{t_1}^{t_2} \xi(t) M(t)\,dt$, *где* $M(t)$ — *непрерывная функция* t *в интервале* $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$, *обращается в нуль при любом выборе функции* $\xi(t)$ *класса* C^n *в интервале* $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$, *которая удовлетворяет условию* $\xi(t_1) = \xi(t_2) = 0$, *то в таком случае* $M(t)$ *тождественно обращается в нуль в интервале* $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$.

Докажем лемму, допустив, что $M(t) \not\equiv 0$, и придя к противоречию. Допустим, что $M(t) \neq 0$ в некоторой точке t' интервала $t_1 < t < t_2$ и что $M(t') > 0$. Так как $M(t)$ непрерывна, существует число $\delta > 0$ такое, что $M(t) > 0$ в интервале $(t' - \delta, t' + \delta)$. Определим функцию $\xi(t)$ следующим образом:

$$\xi(t) \equiv 0 \text{ в интервале } t_1 \leqslant t \leqslant \tau_1, \text{ где } \tau_1 = t' - \delta,$$
$$\xi(t) \equiv 0 \text{ в интервале } \tau_2 \leqslant t \leqslant t_2, \text{ где } \tau_2 = t' + \delta,$$
$$\xi(t) \equiv (t - \tau_1)^{2n+2}(t - \tau_2)^{2n+2} \text{ в интервале } \tau_1 \leqslant t \leqslant \tau_2.$$

Функция $\xi(t)$ принадлежит, конечно, классу C^n в (t_1, t_2) и $\xi(t_1) = \xi(t_2) = 0$. Для этой функции, однако,

$$\int\limits_{t_1}^{t_2} \xi(t) M(t)\,dt = \int\limits_{\tau_1}^{\tau_2} \xi(t) M(t)\,dt > 0,$$

поскольку подынтегральное выражение всегда положительно в $\tau_1 < t < \tau_2$. Таким образом, мы приходим к противоречию, и потому наше допущение того, что $M(t) \neq 0$, должно быть отвергнуто.

§ 56. Уравнение Эйлера в простейшем случае

Простейшая задача вариационного исчисления заключается в определении экстремальных значений функционала

$$J(x) = \int\limits_{t_1}^{t_2} F(t, x, \dot{x})\,dt, \tag{56.1}$$

где $F(t, x, \dot{x})$ — заданная вещественная функция вещественных аргументов t, x и $\dot{x} \equiv dx/dt$. Положим, что эта функция $F(t, x, \dot{x})$ принадлежит классу C^2 в некоторой области R плоскости (x, t) для всех значений $\dot{x}$[1]. Что касается класса допускаемых функций (x, t), то мы полагаем, что значения $x(t_1)$ и $x(t_2)$ заданы заранее и что $x(t)$ также принадлежит классу C^2 в интервале $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$.

Наша задача найти функцию

$$x = f(t), \qquad t_1 \leqslant t \leqslant t_2,$$

называемую *экстремалью* для интеграла (56.1), такую, чтобы $J(x)$ для $x = f(t)$ приняла экстремальное значение в сравнении с теми, которые даются функции J допускаемыми функциями в достаточно малой h-окрестности функции $x = f(t)$. Иными словами, допускаемые функции $x(t)$ таковы, что $|x(t) - f(t)| < h$ для $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$. Выведем теперь необходимое условие экстремума J. Рассмотрим функцию $\xi(t)$ класса C^2, удовлетворяющую условию $\xi(t_1) = \xi(t_2) = 0$, и образуем ряд функций

$$\bar{x}(t) = x(t) + \varepsilon\xi(t) \equiv x + \delta x,$$

где ε — произвольный численный параметр, близкий к нулю. Функции $\bar{x}(t)$ принимают, очевидно, те же значения в конечных точках интервала (t_1, t_2), что и $x(t)$. Назовем $\bar{x}(t)$ *варьируемыми функциями*, а величину $\varepsilon\xi(t) \equiv \delta x$ — *вариацией функции* $x = f(t)$. Для достаточно малых значений ε все варьируемые функции $\bar{x}(t)$ войдут в h-окрестность экстремали $x = f(t)$. Следовательно, интеграл (56.1)

$$J(\bar{x}) = J(x + \varepsilon\xi) \equiv \Phi(\varepsilon),$$

рассматриваемый как функция ε, примет экстремальное значение при $\varepsilon = 0$. Необходимым для этого условием должно быть $\Phi'(0) = 0$.

В силу ограничений, наложенных на рассматриваемые функции, интеграл

$$\Phi(\varepsilon) = \int_{t_1}^{t_2} F(t, x + \varepsilon\xi, \dot{x} + \varepsilon\dot{\xi})\, dt$$

может быть дифференцирован под знаком интеграла, и мы получим в таком случае в качестве необходимого условия экстремума уравнение

$$\Phi'(0) = \int_{t_1}^{t_2} (F_x\xi + F_{\dot{x}}\dot{\xi})\, dt = 0, \tag{56.2}$$

[1]) Предписанные ограничения более строги, чем это необходимо, но мы имеем здесь в виду некоторые геометрические задачи, для которых непрерывность вторых производных — желательное свойство.

которое должно удовлетворяться для каждого $\xi(t)$ в соответствии с условиями, заложенными в определении $\xi(t)$. Интегрируя (56.2) по частям, получаем

$$\int_{t_1}^{t_2} F_x \xi(t)\,dt + F_{\dot{x}} \xi(t)\Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \xi(t) \frac{dF_{\dot{x}}}{dt}\,dt = 0, \tag{56.3}$$

а поскольку $\xi(t_1) = \xi(t_2) = 0$, предыдущее уравнение упрощается в

$$\int_{t_1}^{t_2} \xi(t)\left[F_x - \frac{dF_{\dot{x}}}{dt}\right] dt = 0. \tag{56.4}$$

Так как $\xi(t)$ удовлетворяет ограничениям, наложенным на $\xi(t)$ леммой § 55, мы вправе вывести из (56.4) необходимое условие для экстремума (56.1), требующее, чтобы $x(t)$ удовлетворяло дифференциальному уравнению

$$F_x - \frac{dF_{\dot{x}}}{dt} = 0. \tag{56.5}$$

Представляя его в развернутом виде, получаем

$$F_{\dot{x}\dot{x}} \frac{d^2x}{dt^2} + F_{\dot{x}x} \frac{dx}{dt} + F_{\dot{x}t} - F_x = 0, \tag{56.6}$$

где индексы обозначают производные от $F(t, x, \dot{x})$, причем t, x и $\dot{x}$ рассматриваются как независимые переменные. Для того чтобы определить $x(t)$, мы должны решить это обыкновенное дифференциальное уравнение, подчинив его краевым условиям: $x(t_1) = x_1$ и $x(t_2) = x_2$. Уравнения (56.5) и (56.6) были выведены впервые Эйлером и называются *уравнениями Эйлера*.

Выражение [см. уравнение (56.2)]

$$\varepsilon\Phi'(0) = \varepsilon \int_{t_1}^{t_2} [\xi(t) F_x + \dot{\xi}(t) F_{\dot{x}}]\,dt,$$

родственное дифференциалу функции $\Phi(\varepsilon)$, будучи вычисленным для $\varepsilon = 0$, называется *первой вариацией интеграла* J, и обозначается символом δJ. Таким образом,

$$\delta J \equiv \varepsilon\Phi'(0).$$

Используя левую часть уравнения (56.3) и определение δJ, мы можем написать

$$\delta J = [F_{\dot{x}}\,\delta x]_{t=t_1}^{t=t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \left(F_x - \frac{d}{dt} F_{\dot{x}}\right) \delta x\,dt, \tag{56.7}$$

где $\delta x \equiv \varepsilon\xi(t)$. Поскольку правая часть уравнения (56.7) обращается в нуль, как только $x(t)$ принимает экстремальное значение, мы приходим к следующей теореме.

Теорема. *Необходимым условием экстремума для функционала $J(x)$ является обращение в нуль его первой вариации.*

§ 57. Уравнения Эйлера для функционала от нескольких аргументов

Рассмотрим теперь случай функционала J, зависящего от нескольких функциональных аргументов x^i $(i = 1, 2, \ldots, n)$, где[1])

$$J = \int_{t_1}^{t_2} F(t, x^1, x^2, \ldots, x^n, \dot{x}^1, \dot{x}^2, \ldots, \dot{x}^n)\,dt. \tag{57.1}$$

Следуя условиям § 56, мы полагаем, что F — вещественная функция класса C^2 в $(2n+1)$-мерном пространстве вещественных переменных $t, x^1, \ldots, x^n, \dot{x}^1, \ldots, \dot{x}^n$.

Допустим, что существует совокупность функций

$$x^i = f^i(t), \quad t_1 \leqslant t \leqslant t_2 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{57.2}$$

значения которых в конечных точках интервала известны и таковы, что (57.1) принимает экстремальное значение в сравнении со значениями, сообщаемыми функционалу J классом допускаемых функций, принадлежащих h-окрестности (57.2). Вводим n произвольных функций $\xi^i = \xi^i(t)$, $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$, класса C^2, обращающихся в нуль для $t = t_1$ и $t = t_2$, и строим семейство допускаемых функций

$$\bar{x}^i = x^i(t) + \varepsilon\xi^i(t), \tag{57.3}$$

где параметр ε подобран таким образом, чтобы различные варианты (57.3) расположились в h-окрестности кривой (57.2).

Как и в § 56, образуем функцию

$$\Phi(\varepsilon) = \int_{t_1}^{t_2} F(t, x^1 + \varepsilon\xi^1, \ldots, x^n + \varepsilon\xi^n, \dot{x}^1 + \varepsilon\dot{\xi}^1, \ldots, \dot{x}^n + \varepsilon\dot{\xi}^n)\,dt, \tag{57.4}$$

имеющую, согласно гипотезе, экстремум при $\varepsilon = 0$; поэтому

$$\left.\frac{\partial\Phi}{\partial\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = 0. \tag{57.5}$$

[1]) Для того чтобы гарантировать независимость интеграла (57.1) от особых форм параметризации, мы постулируем, что $F(t, x, \dot{x})$ положительно однородна первой степени относительно $\dot{x}^i$ (см. § 43).

Отсюда следует, что

$$\delta J = \varepsilon \int_{t_1}^{t_2} \left[\left(F_{x^1}\xi^1 + F_{\dot{x}^1}\dot{\xi}^1\right) + \ldots + \left(F_{x^n}\xi^n + F_{\dot{x}^n}\dot{\xi}^n\right)\right] dt = 0, \qquad (57.6)$$

и интегрирование по частям дает

$$\delta J = \varepsilon \Big[F_{\dot{x}^1}\xi^1 \Big|_{t_1}^{t_2} + \ldots + F_{\dot{x}^n}\xi^n \Big|_{t_1}^{t_2} + \\ + \int_{t_1}^{t_2} \xi^1 \left(F_{x^1} - \frac{d}{dt} F_{\dot{x}^1}\right) dt + \ldots + \int_{t_1}^{t_2} \xi^n \left(F_{x^n} - \frac{d}{dt} F_{\dot{x}^n}\right) dt \Big] = 0.$$

Поскольку ξ^i произвольны и обращаются в нуль в конечных точках интервала, заключаем из фундаментальной леммы, что

$$F_{x^i} - \frac{d}{dt} F_{\dot{x}^i} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \qquad (57.7)$$

или

$$F_{x^i} - \dot{x}^j F_{\dot{x}^i x^j} - \ddot{x}^j F_{\dot{x}^i \dot{x}^j} = 0.$$

Эта система n обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка называется *уравнениями Эйлера* для вариационной задачи, связанной с функционалом (57.1). Для того чтобы получить группу функций (57.2), мы должны определить решение системы (57.7), удовлетворяющее краевым условиям

$$x_1^i = f^i(t_1), \quad x_2^i = f^i(t_2) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \qquad (57.8)$$

Исследуемая в этом параграфе задача представляется совершенно аналогичной более простой задаче, рассмотренной в § 56, но между ними существует и различие, заключающееся в том, что обращение в нуль первой вариации функционала в (57.1) является необходимым условием не только для экстремума, но также и для совместного максимума и минимума, так называемого минимакса. Интеграл $J(x^1, \ldots, x^n)$ может достигнуть максимума, когда варьируется функция $x^1(t)$, и минимума в процессе вариации функции $x^2(t)$. «Точка седла» в гиперболическом параболоиде, встречающаяся в элементарной теории максимумов и минимумов, может служить простой иллюстрацией к такому положению. Мы будем называть решения уравнений Эйлера (57.7), удовлетворяющие конечным условиям (57.8), *экстремалями функционала* J. Этим термином мы будем пользоваться независимо от характера стационарного значения, принимаемого функционалом J, является ли оно максимумом, минимумом или ни тем, ни другим.

В нашем выводе уравнений Эйлера (57.7) мы приняли, что переменные x^i независимы. Если независимость x^i ограничивается наложенной на них совокупностью $k < n$ функциональных соотношений типа

$$\varphi_j(t, x^1, x^2, \ldots, x^n) = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, k),$$

то группу соответствующих уравнений Эйлера можно будет вывести из рассмотрения свободного экстремума для некоторого нового функционала, введенного Лагранжем.

Для того чтобы осветить существенные различия в задачах независимого и условного экстремумов, рассмотрим функционал

$$J = \int_{t_1}^{t_2} F(t, x^1, x^2, \dot{x}^1, \dot{x}^2)\, dt, \tag{57.9}$$

в котором переменные связаны соотношением

$$\varphi(t, x^1, x^2) = 0. \tag{57.10}$$

Предполагаем, что экстремаль

$$x^i = x^i(t), \quad t_1 \leqslant t \leqslant t_2 \qquad (i = 1, 2),$$

удовлетворяет краевому условию типа (57.8). Если ограничивающее условие (57.10) сформулировано в виде

$$\varphi(x, y, z) = 0, \tag{57.11}$$

т. е. путем подстановок $x = t$, $y = x^1$, $z = x^2$, то уравнение (57.11) может быть интерпретировано как уравнение поверхности, отнесенной к системе декартовых координат xyz. Экстремаль должна лежать на поверхности, и мы полагаем, что (57.11) может быть решено близ экстремали и дать дифференцируемую функцию

$$z = f(x, y). \tag{57.12}$$

Подстановка (57.12) в (57.9) приводит к интегралу вида

$$J = \int_{x_1}^{x_2} \mathcal{F}(x, y, y')\, dx, \tag{57.13}$$

в котором переменные x и y независимы, в силу чего мы можем получить уравнение Эйлера путем минимизации (57.13) на совокупности допускаемых путей, удовлетворяющих условиям $y(x_1) = y_1$, $y(x_2) = y_2$. Это задача свободного экстремума, уже рассмотренная нами в § 56.

Однако такое приведение задачи ограниченного экстремума к задаче свободного экстремума функционала (57.13) представляет обычно затруднения, так как полное решение (57.12) уравнения (57.11) может оказаться громоздким. В этих условиях мы располагаем возможностью последовать процедуре, сходной с приемом «множителя» Лагранжа, т. е. получения относительных экстремальных значений для функций нескольких переменных, связанных соотношениями типа (57.11).

Предположим, что $d\varphi/dz \neq 0$; теоретически при этом возможно разрешить (57.11), и тогда функционалу (57.9) можно будет придать иной вид:

$$J = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y', f, f_x + f_y y')\, dx, \tag{57.14}$$

так как $z' = f_x + f_y y'$.

Подынтегральное выражение в (57.14) представляет собой функцию x, y и y', которую мы обозначим

$$\mathcal{F}(x, y, y') \equiv F(x, y, y', f, f_x + f_y y'). \tag{57.15}$$

Таким образом, уравнение Эйлера для интеграла (57.14) принимает вид

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial y'} = 0. \tag{57.16}$$

Обратившись к (57.15), мы видим, что

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial y} = F_y + F_z f_y + F_{z'}(f_{xy} + f_{yy} y'),$$

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial y'} = F_{y'} + F_{z'} f_y.$$

Поэтому (57.16) дает

$$F_y + F_z f_y + F_{z'}(f_{xy} + f_{yy} y') - \frac{dF_{y'}}{dx} - f_y \frac{dF_{z'}}{dx} - F_{z'}(f_{xy} + f_{yy} y') = 0,$$

т. е.

$$F_y + f_y\left(F_z - \frac{dF_{z'}}{dx}\right) - \frac{dF_{y'}}{dx} = 0,$$

откуда

$$f_y = -\frac{\dfrac{dF_{y'}}{dx} - F_y}{\dfrac{dF_{z'}}{dx} - F_z}, \tag{57.17}$$

поскольку f_y, как это предположено, должна быть определена на экстремали.

С другой стороны, дифференцирование (57.11) дает

$$\varphi_y + \varphi_z f_y = 0,$$

так что

$$f_y = -\frac{\varphi_y}{\varphi_z}. \tag{57.18}$$

Выражения для f_y, представленные формулами (57.18) и (57.17) *по экстремали*, являются одной и той же функцией x; отсюда

$$\frac{\frac{dF_{y'}}{dx}-F_y}{\varphi_y}=\frac{\frac{dF_{z'}}{dx}-F_z}{\varphi_z}\equiv\lambda(x), \tag{57.19}$$

где $\lambda(x)$ обозначает одинаковое для этих двух дробей значение[1]).

Из (57.19) следует, что необходимые условия для экстремума интеграла (57.9) формулируются таким образом:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{dF_{y'}}{dx}-[F_y+\lambda(x)\varphi_y]=0,\\&\frac{dF_{z'}}{dx}-[F_z+\lambda(x)\varphi_z]=0.\end{aligned}\right\} \tag{57.20}$$

Если вернуться к первоначальному обозначению, положив $x=t$, $y=x^1$, $z=x^2$, то мы получим пару уравнений

$$\frac{dF_{\dot{x}^i}}{dt}+F_{x^i}-\lambda(t)\frac{\partial\varphi}{\partial\dot{x}^i}=0 \qquad (i=1,\ 2), \tag{57.21}$$

сохраняющих структуру уравнений (57.7) Эйлера для вариационной задачи, связанной со *свободным экстремумом* интеграла

$$\int_{t_1}^{t_2}[F(t,\ x,\ \dot{x})-\lambda(t)\varphi(x)]\,dt.$$

Сходные соображения применимы и к задаче минимизации интеграла (57.1), в котором n переменных x^i связаны группой $k<n$ соотношений

$$\varphi_j(t,\ x^1,\ \ldots,\ x^n)=0 \qquad (j=1,\ \ldots,\ k). \tag{57.22}$$

Если матрица $\partial\varphi_j/\partial x^i$ имеет ранг k, то система дифференциальных уравнений для экстремали примет вид

$$\frac{dG_{\dot{x}^i}}{dt}-G_{x^i}=0, \tag{57.23}$$

где

$$G=F+\lambda_j(t)\,\varphi_j(x) \qquad (j=1,\ \ldots,\ k).$$

Заметим в заключение, что в ограничительные связи (57.22) не входят производные $\dot{x}^i$. Такие связи называются *голономными*, в отличие от связей вида

$$\varphi_j(t,\ x,\ \dot{x})=0, \tag{57.24}$$

---

[1]) Заметим, что если оба делителя $\varphi_y=0$ и $\varphi_z=0$, то уравнение (57.11) уже не определяет поверхности.

называемых неголономными. *Неголономные* связи возникают в изучении диссипативных динамических систем, и мы встретимся с ними в главе IV. Из вышеизложенного ясно, что уравнения (57.23), имеющие неголономные связи, должны содержать в себе не только множители $\lambda_i(t)$, но также и производные $\dot{\lambda}_i(t)$.

Задачи

1. Исследовать вариационные задачи в (56.1) с применением уравнения (56.6) Эйлера. Заметить, что если $F(t, x, \dot{x})$ не содержит x явно, то (56.5) сразу же приводит к первому интегралу в виде $F_{\dot{x}} = \text{const}$. Показать, что в тех случаях, когда $F(t, x, \dot{x})$ не содержит t в явном виде, первый интеграл (56.6) примет вид $F - \dot{x}F_{\dot{x}} = \text{const}$. *Указание.* Положить $F = F(x, \dot{x})$, вычислить $\frac{d}{dt}(F - \dot{x}F_{\dot{x}})$ и воспользоваться уравнением (56.6).

2. Учесть указание к задаче 1 и показать, что уравнение Эйлера (56.5) может быть представлено в виде

$$\frac{d}{dt}(F - \dot{x}F_{\dot{x}}) = F_t.$$

3. Уравнение Эйлера (57.16) становится тождеством в тех случаях, когда $\mathscr{F}(x, y, y') = M(x, y) + N(x, y)y'$ при $M_y = N_y$. При этом (57.13) принимает вид

$$J = \int_{x_1}^{x_2} M\,dx + N\,dy,$$

причем интеграл становится независимым от пути. Таким образом, любая кривая, достигая заданной конечной точки, становится экстремалью для (57.13).

§ 58. Геодезические линии в R_n

Теперь мы в состоянии обсудить задачу нахождения кривых минимальной длины, соединяющих пару заданных на поверхности точек. Проведем все выкладки для случая n-мерных многообразий Римана, поскольку полученные результаты будут интересны не только для геометрии поверхностей, но также и для изучения динамических траекторий в главе IV.

Пусть метрические свойства n-мерного многообразия R_n определяются квадратичной формой

$$ds^2 = g_{ij}\,dx^i\,dx^j \qquad (i, j = 1, \ldots, n), \tag{58.1}$$

где $g_{ij} = g_{ji}$ — известные функции переменных x^i. Предположим, что форма (58.1) положительно определенная, а функции g_{ij} входят в класс C^2. Длина кривой C, представленной в R_n уравнениями

$$C: x^i = x^i(t), \qquad t_1 \leqslant t \leqslant t_2,$$

определяется функционалом

$$s=\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{g_{\alpha\beta}\dot{x}^{\alpha}\dot{x}^{\beta}}\,dt \qquad (\alpha,\ \beta=1,\ \ldots,\ n). \tag{58.2}$$

Экстремали функционала (58.2) мы будем называть *геодезическими линиями в R_n*. Функция F в § 57 в таком случае принимает вид

$$F=\sqrt{g_{\alpha\beta}\dot{x}^{\alpha}\dot{x}^{\beta}}, \tag{58.3}$$

и для того чтобы сформулировать уравнение Эйлера (57.7), нам надлежит вычислить F_{x^i} и $F_{\dot{x}^i}$. Такое вычисление не представляет затруднений. Из (58.3) выводим

$$F_{x^j}=\frac{1}{2}(g_{\alpha\beta}\dot{x}^{\alpha}\dot{x}^{\beta})^{-1/2}\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^j}\dot{x}^{\alpha}\dot{x}^{\beta}$$

и

$$F_{\dot{x}^j}=(g_{\alpha\beta}\dot{x}^{\alpha}\dot{x}^{\beta})^{-1/2}g_{\alpha j}\dot{x}^{\alpha}.$$

Подстановка этих выражений в уравнения Эйлера дает

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{g_{\alpha j}\dot{x}^{\alpha}}{\sqrt{g_{\alpha\beta}\dot{x}^{\alpha}\dot{x}^{\beta}}}\right]-\frac{\dfrac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^j}\dot{x}^{\alpha}\dot{x}^{\beta}}{2\sqrt{g_{\alpha\beta}\dot{x}^{\alpha}\dot{x}^{\beta}}}=0. \tag{58.4}$$

Так как $ds/dt=\sqrt{g_{\alpha\beta}\dot{x}^{\alpha}\dot{x}^{\beta}}$, уравнение (58.4) можно упростить:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{g_{\alpha j}\dot{x}^{\alpha}}{ds/dt}\right)=\frac{\dfrac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^j}\dot{x}^{\alpha}\dot{x}^{\beta}}{2\,ds/dt}=0$$

и, выполнив указанное дифференцирование, получить

$$g_{\alpha j}\ddot{x}^{\alpha}+\frac{\partial g_{\alpha j}}{\partial x^{\beta}}\dot{x}^{\alpha}\dot{x}^{\beta}-\frac{1}{2}\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^j}\dot{x}^{\alpha}\dot{x}^{\beta}=\frac{g_{\alpha j}\dot{x}^{\alpha}\,d^2s/dt^2}{ds/dt}.$$

Так как второй член в этом уравнении допускает запись в виде суммы двух членов, мы пользуемся этим приемом:

$$g_{\alpha j}\ddot{x}^{\alpha}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\alpha j}}{\partial x^{\beta}}+\frac{\partial g_{\beta j}}{\partial x^{\alpha}}-\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^j}\right)\dot{x}^{\alpha}\dot{x}^{\beta}=\frac{g_{\alpha j}\dot{x}^{\alpha}d^2s/dt^2}{ds/dt}.$$

Вспомнив, что $[\alpha\beta,\ j]\equiv\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\alpha j}}{\partial x^{\beta}}+\frac{\partial g_{\beta j}}{\partial x^{\alpha}}-\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^j}\right)$, приходим к дальнейшему упрощению полученных уравнений:

$$g_{\alpha j}\ddot{x}^{\alpha}+[\alpha\beta,\ j]\,\dot{x}^{\alpha}\dot{x}^{\beta}=g_{\alpha j}\,\dot{x}^{\alpha}\frac{d^2s/dt^2}{ds/dt}. \tag{58.5}$$

Они и являются искомыми уравнениями геодезических линий. Если мы примем в качестве параметра t длину кривой s, т. е. положим

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{g_{\alpha\beta}\dot{x}^\alpha\dot{x}^\beta} = 1,$$

система (58.5) примет еще более простой вид:

$$g_{\alpha j}\ddot{x}^\alpha + [\alpha\beta, j]\,\dot{x}^\alpha\dot{x}^\beta = 0. \tag{58.6}$$

Точки над буквами в этом уравнении обозначают дифференцирование по параметру s.

Если мы умножим уравнение (58.6) на тензор g^{ij} и просуммируем произведения, то придем к простой форме уравнений геодезических линий в R_n

$$\ddot{x}^i + \left\{ {i \atop \alpha\beta} \right\} \dot{x}^\alpha\dot{x}^\beta = 0 \qquad \begin{matrix} (i = 1, 2, \ldots, n), \\ (\alpha, \beta = 1, \ldots, n). \end{matrix} \tag{58.7}$$

Форма этих уравнений, как замечаем, тождественна с уравнениями (51.2), определяющими прямую линию в E_3. Поскольку (58.7) — обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка, оно имеет единственное решение, если значения $x^i(s)$ и первые производные dx^i/ds произвольно выбраны в заданной точке $x^i(s_0)$.

Если рассматривать заданную поверхность S как двумерное риманово многообразие R_2 с наложенной на него гауссовой координатной системой u^α, то (58.7) примет вид

$$\frac{d^2u^\gamma}{ds^2} + \left\{ {\gamma \atop \alpha\beta} \right\} \frac{du^\alpha}{ds}\frac{du^\beta}{ds} = 0 \qquad (\alpha, \beta, \gamma = 1, 2). \tag{58.8}$$

Через каждую точку S проходит при этом одна-единственная геодезическая линия произвольно заданного направления $\lambda^\alpha = du^\alpha/ds$. Нетрудно доказать, что если существует единственное решение $u^\alpha(s)$, проходящее через две заданные точки S, то кривая $u^\alpha(s)$ окажется линией наименьшей длины, соединяющей эти две точки[1]).

Если многообразие R_n — евклидово, то в нем возможна координатная система, для которой символы Кристоффеля обращаются в нуль. Уравнение (58.7) при этом принимает вид $d^2x^i/ds^2 = 0$. Общим решением этого уравнения будет $x^i = A^i s + B^i$. Таким образом, *геодезическими линиями в E_n являются прямые линии.*

В качестве другого примера рассмотрим задачу определения геодезических линий на произвольном цилиндре, расположенном в E_3. Координатную ось Y^3 направим параллельно

[1]) См. например, Eisenhart L. P., Differential geometry, 1940, стр. 175.

образующим цилиндра, и пусть проекция цилиндра на плоскость Y^1Y^2 задана уравнениями

$$C:\ \begin{cases} y^1 = \varphi(\sigma), \\ y^2 = \psi(\sigma), \end{cases}$$

где σ — длина дуги кривой C (рис. 25). Так как

$$(d\sigma)^2 = (dy^1)^2 + (dy^2)^2,$$

элемент дуги ds геодезической линии задается формой

$$(ds)^2 = (d\sigma)^2 + (dy^3)^2,$$

так что $a_{11} = a_{22} = 1$, $a_{12} = a_{21} = 0$. Таким образом, уравнения (58.8) приводятся к

$$\frac{d^2\sigma}{ds^2} = 0 \quad \text{для} \quad \gamma = 1$$

и

$$\frac{d^2y^3}{ds^2} = 0 \quad \text{для} \quad \gamma = 2.$$

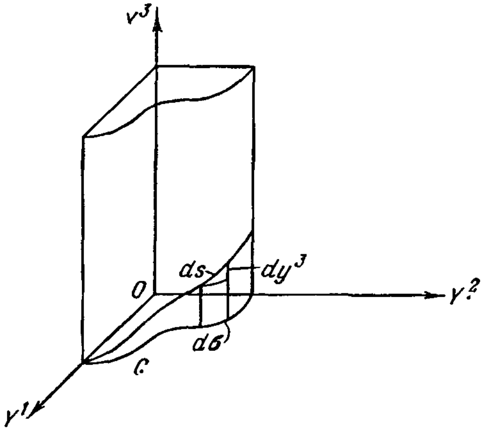

Рис. 25.

Отсюда получаем

$$\sigma = As + B, \quad y^3 = A_1 s + B_1.$$

Если $A \neq 0$, то эти уравнения примут вид

$$y^3 = C_1\sigma + C_2,$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

Уравнения геодезических линий составят, таким образом, систему

$$y^1 = \varphi(\sigma), \qquad y^2 = \psi(\sigma), \qquad y^3 = C_1\sigma + C_2,$$

описывающую пространственную кривую, в данном случае винтовую линию, шаг которой определяется константой C_1. Константа C_2 определяет начало для параметра дуги σ.

Аналогичным путем можно было бы показать, что геодезические линии на поверхности сферы являются дугами больших кругов (см. задачу 1). Но для того чтобы проиллюстрировать применение уравнений (57.23), рассмотрим функционал

$$J = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{x}^i \dot{x}^i}\, dt \qquad (i = 1, 2, 3), \tag{58.9}$$

представляющий длину дуги кривой C в декартовых координатах. Если C лежит на сфере радиуса a, то уравнение связи (57.10) принимает вид

$$\varphi \equiv x^i x^i - a^2 = 0, \tag{58.10}$$

где центр сферы совпадает с началом координат. Введенная в § 57 функция $G = F + \lambda\varphi$ преобразуется в

$$G = \sqrt{\dot{x}^i \dot{x}^i} - \lambda(t)(x^i x^i - a^2), \tag{58.11}$$

а уравнения (57.23) получают вид

$$\frac{d}{dt}\frac{dx^i}{ds} + 2\lambda(t)\,x^i = 0 \qquad (i = 1,\ 2,\ 3), \tag{58.12}$$

где $ds = \sqrt{\dot{x}^i \dot{x}^i}\,dt$.

Исключая $\lambda(t)$ из первых двух уравнений группы (58.12), находим

$$x^2 d\left(\frac{dx^2}{ds}\right) - x^1 d\left(\frac{dx^1}{ds}\right) = 0,$$

или

$$d\left(x^2\frac{dx^1}{ds} - x^1\frac{dx^2}{ds}\right) = 0.$$

Откуда

$$x^2\frac{dx^1}{ds} - x^1\frac{dx^2}{ds} = C_1, \tag{58.13}$$

где C_1 — постоянная интегрирования.

Подобным же образом исключение $\lambda(t)$ из последних двух уравнений группы (58.12) дает после интегрирования

$$x^3\frac{dx^1}{ds} - x^1\frac{dx^3}{ds} = C_2, \tag{58.14}$$

где C_2 — постоянная.

Из (58.13) и (58.14) находим

$$C_1\frac{x^3\,dx^1 - x^1\,dx^3}{(x^1)^2} = C_2\frac{x^2\,dx^1 - x^1\,dx^2}{(x^1)^2}$$

или

$$C_1 d\left(\frac{x^3}{x^1}\right) = C_2 d\left(\frac{x^2}{x^1}\right), \tag{58.15}$$

а интегрирование уравнения (58.15) дает

$$C_3 x^1 - C_2 x^2 + C_1 x^3 = 0, \tag{58.16}$$

т. е. уравнение плоскости, проходящей через начало координат. Уравнение (58.16) вместе с уравнением связи (58.10) показывают, что решением системы (58.12) является дуга большого круга.

Задачи

1. Сфера радиуса a определена в прямоугольной декартовой системе координат Y уравнениями

$$y^1 = a \cos u^1 \cos u^2, \qquad y^2 = a \cos u^1 \sin u^2, \qquad y^3 = a \sin u^1.$$

В этом случае $ds^2 = a^2 (du^1)^2 + a^2 (\cos u^1)^2 (du^2)^2$ и

$$s = a \int\limits_{u_0^1}^{u_1^1} \sqrt{1 + \cos^2 u^1 (\dot{u}^2)^2}\, du^1,$$

где $\dot{u}^2 = du^2/du^1$. Показать, что геодезическими линиями будут здесь дуги больших кругов.

2. Найти геодезические линии на поверхности

$$y^1 = u^1 \cos u^2, \qquad y^2 = u^1 \sin u^2, \qquad y^3 = 0,$$

расположенной в E_3. Координаты y^i — прямоугольные декартовы.

3. Показать, что, приняв $Q = a_{\alpha\beta}\, \dot{u}^\alpha \dot{u}^\beta$, где $\dot{u}^\alpha = du^\alpha/ds$, геодезические линии (58.8) в R_2 можно будет представить уравнениями

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial Q}{\partial \dot{u}^\gamma}\right) - \frac{\partial Q}{\partial u^\gamma} = 0.$$

Решения этих уравнений для $\ddot{u}^\gamma$ должны дать $-\left\{ {\gamma \atop \alpha\beta} \right\} \dot{u}^\alpha \dot{u}^\beta$, как это можно увидеть из (58.8). Этим подсказывается использование различных способов вычисления символов $\left\{ {\gamma \atop \alpha\beta} \right\}$ в любой частной координатной системе. Применить этот метод в вычислении символов Кристоффеля для координатной системы в задаче 1 путем определения коэффициентов $\dot{u}^\alpha \dot{u}^\beta$ в решениях для вторых производных от u^γ по s.

§ 59. Геодезические координаты

Мы установили (см. § 39), что если риманово пространство R_n является вместе с тем и евклидовым, то в таком пространстве существует координатная система, для которой компоненты g_{ij} метрического тензора остаются постоянными по всему пространству. Отсюда следует, что в такой координатной системе $\partial g_{ij}/\partial x^k \equiv 0$. Обращение в нуль этих частных производных эквивалентно обращению в нуль всех символов Кристоффеля, поскольку [1] $[ij, k] = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\right)$. Если пространство R_n не евклидово, то символы Кристоффеля не обращаются в нуль во всех точках R_n. Но при этом остается возможным найти такую координатную систему, и даже бесконечно много таких систем, в которых они обращаются в нуль в любой заданной

[1] См. также теорему I § 39.

точке P пространства R_n. Такие координаты называются *геодезическими, или локально-декартовыми, для данной конкретной точки.*

Рассмотрим некоторую поверхность с сеткой координат u^α и точку $P(u_0^1, u_0^2)$ на S. Если v^α — координаты какой-либо иной сетки на S, то

$$u^\alpha = u^\alpha(v^1, v^2) \qquad (\alpha = 1,\ 2). \tag{59.1}$$

Вторая производная от формулы (32.5) дает соотношение

$$\frac{\partial^2 u^\alpha}{\partial v^\lambda\,\partial v^\mu} + {}_u\left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \beta\gamma \end{matrix} \right\} \frac{\partial u^\beta}{\partial v^\lambda} \frac{\partial u^\gamma}{\partial v^\mu} = {}_v\left\{ \begin{matrix} \nu \\ \lambda\mu \end{matrix} \right\} \frac{\partial u^\alpha}{\partial v^\nu}. \tag{59.2}$$

Но если существует такое преобразование координат (59.1), что символы Кристоффеля ${}_v\left\{ \begin{matrix} \nu \\ \lambda\mu \end{matrix} \right\}$ обращаются в нуль в точке P, то для *этой конкретной точки*

$$\frac{\partial^2 u^\alpha}{\partial v^\lambda\,\partial v^\mu} + {}_u\left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \beta\gamma \end{matrix} \right\} \frac{\partial u^\beta}{\partial v^\lambda} \frac{\partial u^\gamma}{\partial v^\mu} = 0. \tag{59.3}$$

Укажем теперь решение этого уравнения, дающего преобразование (59.1) в координатной системе v^α, в которой символы Кристоффеля обращаются в нуль в точке P. Это — полином второй степени

$$u^\alpha = u_P^\alpha + v^\alpha - \frac{1}{2}\left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \lambda\mu \end{matrix} \right\}_P v^\lambda v^\mu, \tag{59.4}$$

где u_P^α — значение u^α в P, а $\left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \lambda\mu \end{matrix} \right\}_P$ — значения символов Кристоффеля в P. Для того чтобы установить, что (59.4) удовлетворяет (59.3), вычислим

$$\frac{\partial u^\alpha}{\partial v^\mu} = \delta_\mu^\alpha - \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \lambda\mu \end{matrix} \right\}_P v^\lambda \tag{59.5}$$

и

$$\frac{\partial^2 u^\alpha}{\partial v^\lambda\,\partial v^\mu} = -\left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \lambda\mu \end{matrix} \right\}_P. \tag{59.6}$$

Из (59.4) обнаруживаем, что точка P в новых координатах определяется уравнением $v^\alpha = 0$, в силу чего в точке P уравнение (59.5) дает $\left.\frac{\partial u^\alpha}{\partial v^\mu}\right|_P = \delta_\mu^\alpha$. Вводя значения из этого уравнения и из (59.6) в (59.3), находим, что оно удовлетворяется в точке P. Заключаем на этом основании, что новые переменные действительно являются геодезическими координатами в P.

Заканчивая этот параграф, отметим, что Ферми расширил полученный здесь результат, доказав, что в любом римановом многообразии R_n возможна такая координатная система, что ее координаты являются геодезическими во всех точках произвольно заданной аналитической кривой[1]).

§ 60. Параллельные векторные поля иа поверхности

Понятие параллельных векторых полей вдоль кривой, размещающейся в пространстве E_3 (§ 48), было обобщено Леви-Чивита на кривые в n-мерных римановых многообразиях. Полезность этого понятия мы проиллюстрируем на одном примере. Рассмотрим для этого поверхность S, расположенную в E_3, и кривую C на S. Представим эту кривую уравнениями

$$C\colon\ u^\alpha = u^\alpha(t), \qquad t_1 \leqslant t \leqslant t_2,$$

и предположим, что метрические свойства S выражаются тензором $a_{\alpha\beta}$. Если A^α — *векторное поле на поверхности*, определенное вдоль C, то мы можем вычислить для этой поверхности внутреннюю производную

$$\frac{\delta A^\alpha}{\delta t} \equiv \frac{dA^\alpha}{dt} + \left\{ {\alpha \atop \beta\gamma} \right\} A^\beta \frac{du^\gamma}{dt}. \tag{60.1}$$

Это выражение тождественно по виду с левой частью уравнения (48.1), описывающего параллельное векторное поле вдоль пространственной кривой. Вводим поэтому дифференциальное уравнение

$$\frac{dA^\alpha}{dt} + \left\{ {\alpha \atop \beta\gamma} \right\} A^\beta \frac{du^\gamma}{dt} = 0, \tag{60.2}$$

определяющее векторное поле, в котором компоненты вектора указаны в произвольной точке C как определение параллельного векторного поля вдоль кривой C на поверхности S. Если параметр t выбран как длина дуги s, то уравнение (60.2) принимает вид

$$\frac{dA^\alpha}{ds} + \left\{ {\alpha \atop \beta\gamma} \right\} A^\beta \frac{du^\gamma}{ds} = 0, \tag{60.3}$$

и если A^α понимается как единичный касательный вектор к C, так что

$$A^\alpha = \frac{du^\alpha}{ds} \equiv \lambda^\alpha$$

[1]) Детальный вывод уравнений преобразования для этого случая, куда входит и (59.4) в качестве частного случая, был выполнен Леви-Чивита в работе «О геодезическом расстоянии». Mathematische Annalen **97** (1926—1927), 291—320 («Sur l'écart géodésique»).

при $a_{\alpha\beta}\lambda^{\alpha}\lambda^{\beta}=1$, то (60.3) дает

$$\frac{d^2u^{\alpha}}{ds^2}+\left\{\begin{matrix}\alpha\\ \beta\gamma\end{matrix}\right\}\frac{du^{\beta}}{ds}\frac{du^{\gamma}}{ds}=0. \qquad (60.4)$$

В этом уравнении мы узнаем уравнение геодезической линии на S и на этом основании сформулируется

Теорема. *Вектор, полученный параллельным переносом вдоль геодезической линии касательного к ней вектора, остается касательным к этой линии.*

Из единственности решения (60.4) следует, что свойство касательности параллельного векторного поля к поверхностной кривой является одновременно и необходимым и достаточным условием для геодезической линии.

В евклидовой плоскости геодезические линии суть прямые линии, и параллельное векторное поле, образованное касательными к прямым линиям, направлено вдоль тех же прямых линий. На поверхности сферы геодезическая линия является дугой большого круга, соединяющей две заданные точки на сфере, и соответствующее векторное поле представляет собой поле касательных к геодезическим линиям. Из последнего примера ясно, что параллельность к поверхностной кривой отличается от параллельности к пространственной кривой, расположенной в E_3, так как векторы, полученные параллельным переносом вдоль поверхностной кривой C, необязательно должны быть параллельными в евклидовом смысле. Однако нетрудно доказать, что длины векторов, образующих параллельное по отношению к C поле, остаются постоянными. В самом деле, дословное повторение доказательства, изложенного в § 48, приводит к заключению, что угол между двумя векторами, распространяющимися параллельно, остается неизменным, а отсюда следует, как это было и в § 48, что векторы, образующие параллельное поле, имеют постоянную длину. Этот вывод позволяет сделать заключение, что векторное поле, полученное параллельным переносом поверхностного вектора вдоль геодезической линии, образует равные углы с геодезическими линиями.

Следует заметить, что понятие параллельности в римановых многообразиях определяется по отношению к заданной кривой. Поверхностный вектор A^{α}, определенный для точки P поверхности S при параллельном распространении вдоль заданной кривой C к точке Q, не обязательно должен совпадать с вектором, параллельно распространяющимся вдоль иного пути, соединяющего P и Q. Кроме того, если замкнутая кривая C ограничивает односвязную область S, а параллельное векторное поле переносится из некоторой точки P на C, то вектор, получающийся в результате пересечения замкнутого контура, не обязательно должен совпадать с начальным вектором. Угол между начальным и конечным положением вектора измеряет другую внутреннюю характеристику S, известную как *гауссова кривизна* S. Эта характеристика вводится несколько иным способом[1]) в § 62.

§ 61. Изометрические поверхности

Свойства поверхностей, которыми мы занимались до сих пор, были связаны всецело с изучением первой фундаментальной квадратичной формы

$$ds^2 = a_{\alpha\beta}\, du^\alpha\, du^\beta. \tag{61.1}$$

Эти свойства составляют содержание раздела геометрии, именуемого *внутренней геометрией поверхностей*. И они не имеют никакого отношения к тем различным характеристикам поверхностей, которые может различить наблюдатель, находящийся в окружающем пространстве и связанный с системой отсчета этого пространства. Две поверхности, например цилиндр и конус, представляются совершенно различными, если их рассматривать из окружающего пространства, и тем не менее их внутренние геометрии совершенно неразличимы, так как метрические свойства цилиндра и конуса могут быть описаны тождественными выражениями для квадрата элемента дуги. Если на каждой из этих двух поверхностей существует такая координатная система, что линейные элементы этих поверхностей характеризуются одними и теми же метрическими коэффициентами $a_{\alpha\beta}$, то такие поверхности называются *изометрическими*. Поверхности цилиндра и конуса, очевидно, изометричны с евклидовой плоскостью, так как эти поверхности могут быть развернуты на плоскости без изменения длины элементов дуги и, следовательно, без изменения углов площади.

В следующем параграфе мы введем имеющий большое значение скаляр-инвариант, именуемый *гауссовой кривизной*, который позволит нам определять условия, при которых та или иная данная нам поверхность может быть развернута на плоскости, т. е. оказаться изометричной с евклидовой плоскостью.

Как на пример изометричной неразвертывающейся поверхности укажем на катеноид:

$$S_1\colon \begin{cases} y^1 = v^1 \cos v^2, \\ y^2 = v^1 \sin v^2, \\ y^3 = a \operatorname{arcch} \dfrac{v^2}{a}, \end{cases}$$

[1]) Сравните: Eisenhart L. P., Introduction to differential geometry, стр. 200.

т. е. на поверхность, получаемую вращением цепной линии $y^2 = \operatorname{ch}(y^3/a)$ относительно оси Y^3. Покажем, что поверхность S_1 изометрична с поверхностью геликоида, определяемого уравнениями

$$S_2: \begin{cases} y^1 = u^1 \cos u^2, \\ y^2 = u^1 \sin u^2, \\ y^3 = au^2. \end{cases}$$

Первая фундаментальная форма $ds^2 = dy^i dy^i$ для S_1, как легко видеть, содержится в выражении

$$ds^2 = a_{\alpha\beta}\, dv^\alpha\, dv^\beta = \frac{(v^1)^2}{(v^1)^2 - a^2}(dv^1)^2 + (v^1)^2 (dv^2)^2, \tag{61.2}$$

так что

$$a_{11} = \frac{(v^1)^2}{(v^1)^2 - a^2}, \quad a_{12} = 0, \quad a_{22} = (v^1)^2 \equiv a^2 + [(v^1)^2 - a^2].$$

Для поверхности S_2 находим

$$ds^2 = a_{\alpha\beta}\, du^\alpha\, du^\beta = (du^1)^2 + [a^2 + (u^1)^2](du^2)^2, \tag{61.3}$$

так что

$$a_{11} = 1, \quad a_{12} = 0, \quad a_{22} = a^2 + (u^1)^2.$$

Если теперь положить в (61.2)

$$(v^1)^2 - a^2 = (u^1)^2, \quad v^2 = u^2,$$

то получим

$$ds^2 = (du^1)^2 + [(u^1)^2 + a^2](du^2)^2.$$

Так как это выражение тождественно с (61.3), то поверхности S_1 и S_2 изометричны. Из выкладок нижеследующего параграфа выясняется, что эти поверхности неразвертывающиеся.

§ 62. Тензор Римана — Кристоффеля и гауссова кривизна

Формулы § 37, описывающие свойства тензоров Римана — Кристоффеля в n-мерных многообразиях в значительной степени упрощаются, если $n = 2$. Так, например, если дана фундаментальная форма

$$ds^2 = a_{\alpha\beta}\, du^\alpha\, du^\beta \tag{62.1}$$

поверхности S, мы сможем сформировать для этой поверхности символы Кристоффеля и соответствующий тензор Римана

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial u^\gamma} & \dfrac{\partial}{\partial u^\delta} \\ [\beta\gamma, \alpha] & [\beta\delta, \alpha] \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \left\{ {\lambda \atop \beta\gamma} \right\} & \left\{ {\lambda \atop \beta\delta} \right\} \\ [\alpha\gamma, \lambda] & [\alpha\delta, \lambda] \end{vmatrix}. \tag{62.2}$$

Напомним, что этот тензор кососимметричен по двум первым и двум последним индексам, так что для поверхности S

$$R_{\alpha\alpha\beta\gamma} = R_{\alpha\beta\gamma\gamma} = 0, \qquad R_{1212} = R_{2121} = -R_{2112} = -R_{1221}. \tag{62.3}$$

Поэтому каждый, не обращающийся в нуль компонент риманова тензора равен либо R_{1212}, либо отрицательному значению этого компонента.

Определим величину K формулой

$$K = \frac{R_{1212}}{a}, \tag{62.4}$$

где $a = |a_{\alpha\beta}|$, и назовем ее *гауссовой кривизной* или *полной кривизной* поверхности S. Так как в это определение входят лишь метрические коэффициенты $a_{\alpha\beta}$, то свойства, описываемые коэффициентом K, являются внутренними свойствами поверхности S.

Если мы введем двумерные ε-тензоры

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \sqrt{a}\, e_{\alpha\beta} \quad \text{и} \quad \varepsilon^{\alpha\beta} = \frac{e^{\alpha\beta}}{\sqrt{a}},$$

где $e_{\alpha\beta}$ — альтернирующие e-системы (см. § 40), и учтем соотношения (62.3), то сможем записать уравнение (62.4) следующим образом:

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = K\varepsilon_{\alpha\beta}\varepsilon_{\gamma\delta}, \tag{62.5}$$

так как $\varepsilon^{\alpha\beta}\varepsilon_{\alpha\beta} = 2$, то мы можем решить (62.5) и определить из него

$$K = \frac{1}{4} R_{\alpha\beta\gamma\delta}\varepsilon^{\alpha\beta}\varepsilon^{\gamma\delta}. \tag{62.6}$$

Эти уравнения показывают, что гауссова кривизна — инвариант.

Теперь, поскольку поверхность S изометрична с евклидовой плоскостью, можно утверждать, что на S существует координатная система, для которой имеют место равенства $a_{11} = a_{22} = 1$, $a_{12} = 0$. Очевидно, что в этом случае в этой частной координатной системе $R_{\alpha\beta\gamma\delta} = 0$, а так как $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$ — тензор, он должен обратиться в нуль в любой координатной системе.

И наоборот, если тензор Римана обращается в нуль во всех точках поверхности, то теорема II в § 39 гарантирует, что на поверхности возможны координатные системы, для которых $a_{11} = a_{22} = 1$, $a_{12} = 0$.

На этом основании формулируется

Теорема. *Необходимым и достаточным условием для того, чтобы поверхность S была изометрична с евклидовой плоскостью, является тождественное обращение в нуль риманова тензора или гауссовой кривизны S.*

Рассмотрим теперь инвариант

$$R = a^{\mu\nu}R_{\mu\nu}, \tag{62.7}$$

где

$$R_{\mu\nu} = R^{\alpha}_{\mu\nu\alpha} = a^{\lambda\alpha}R_{\lambda\mu\nu\alpha} \tag{62.8}$$

представляет собой тензор Риччи[1]), введенный в § 38.

Если (62.8) умножить на $a^{\mu\nu}$ и просуммировать, то получим

$$R = a^{\mu\nu}R_{\mu\nu} = a^{\lambda\alpha}a^{\mu\nu}R_{\lambda\mu\nu\alpha}, \tag{62.9}$$

а вспомнив (62.3), убеждаемся, что (62.9) эквивалентно

$$R = -2R_{1212}(a^{11}a^{22} - a^{12}a^{12}). \tag{62.10}$$

Поскольку

$$a^{11} = \frac{a_{22}}{a}, \qquad a^{22} = \frac{a_{11}}{a}, \qquad a^{12} = \frac{-a_{12}}{a},$$

получаем

$$R = -2\frac{R_{1212}}{a}. \tag{62.11}$$

Сопоставляя (62.11) и (62.4), мы видим, что

$$R = -2K.$$

Инвариант R иногда называют *эйнштейновой кривизной* S.

В дальнейшем (см. § 72) мы приведем более содержательную интерпретацию гауссовой кривизны, где поверхность S рассматривается из объемлющего ее пространства.

Задачи

1. Использовать формулы (62.2) и (62.4) и показать, что если система координат прямоугольная, то

$$K = -\frac{1}{2\sqrt{a}}\left[\frac{\partial}{\partial u^1}\left(\frac{1}{\sqrt{a}}\frac{\partial a_{22}}{\partial u^1}\right) + \frac{\partial}{\partial u^2}\left(\frac{1}{\sqrt{a}}\frac{\partial a_{11}}{\partial u^2}\right)\right].$$

2. Вычислить полную кривизну многообразия, квадратичная форма которой имеет вид

$$ds^2 = a^2\sin^2 u^1\,(du^2)^2 + a^2\,(du^1)^2.$$

3. Определить, является ли поверхность геликоида, заданная уравнениями

$$y^1 = u^1\cos u^2, \qquad y^2 = u^1\sin u^2, \qquad y^3 = au^2,$$

развертывающейся.

4. Показать, что для поверхности вращения, определенной уравнениями

$$y^1 = u^1\cos u^2, \qquad y^2 = u^1\sin u^2, \qquad y^3 = f(u^1),$$

$$K = \frac{f'f''}{u^1\,[1 + (f')^2]^2},$$

где f принадлежит классу C^2.

---

[1]) Напомним, что $R^{\alpha}_{\mu\nu\beta} = a^{\lambda\alpha}R_{\lambda\mu\nu\beta}$.

5. Показать, что поверхность, определенная уравнениями

$$y^1 = f_1(u^1), \qquad y^2 = f_2(u^1), \qquad y^3 = u^2,$$

где f_1 и f_2 — дифференцируемые функции, развертывающаяся.

6. Показать, что формула гауссовой кривизны K может быть представлена в ином виде:

$$K = \frac{1}{2\sqrt{a}}\left\{\frac{\partial}{\partial u^1}\left[\frac{a_{12}}{a_{11}\sqrt{a}}\frac{\partial a_{11}}{\partial u^2} - \frac{1}{\sqrt{a}}\frac{\partial a_{22}}{\partial u^1}\right] + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial}{\partial u^2}\left[\frac{2}{\sqrt{a}}\frac{\partial a_{12}}{\partial u^1} - \frac{1}{\sqrt{a}}\frac{\partial a_{11}}{\partial u^2} - \frac{a_{12}}{a_{11}\sqrt{a}}\frac{\partial a_{11}}{\partial u^1}\right]\right\}.$$

§ 63. Геодезическая кривизна поверхностных кривых

Закончим наше изучение внутренней геометрии поверхностей выводом формулы, описывающей поведение вектора, касательного к поверхностной кривой. Эта формула аналогична формуле Френе (50.1).

Пусть C — кривая, лежащая на поверхности и определенная параметрически уравнениями

$$u^\alpha = u^\alpha(s), \tag{63.1}$$

где s — параметр. В соответствии с этим в каждой точке кривой выполняется условие

$$a_{\alpha\beta}\frac{du^\alpha}{ds}\frac{du^\beta}{ds} = 1. \tag{63.2}$$

Величины du^1/ds, du^2/ds определяют, очевидно, вектор λ^α, касательный к C, а из (63.2) находим, что

$$\lambda^\alpha = \frac{du^\alpha}{ds} \tag{63.3}$$

представляет собой единичный вектор. Если мы произведем операцию внутреннего дифференцирования квадратичной формы $a_{\alpha\beta}\lambda^\alpha\lambda^\beta = 1$ по s, то получим производную $a_{\alpha\beta}\lambda^\alpha(\delta\lambda^\beta/\delta s) = 0$, из которой следует, что поверхностный вектор $\delta\lambda^\alpha/\delta s$ направлен под прямым углом к λ^α. Следуя рассуждениям § 49, введем единичный поверхностный вектор η^α, нормальный к λ^α:

$$\frac{\delta\lambda^\alpha}{\delta s} = \varkappa_g\eta^\alpha, \tag{63.4}$$

где $\varkappa_g$ — надлежащий скаляр. Для того чтобы определить однозначно направление η^α, выберем η^α способом, аналогичным выбору триады векторов в § 49 (уравнение (49.11)), а именно $\varepsilon_{\alpha\beta}\lambda^\alpha\eta^\beta = 1$. Этот выбор ориентации λ и η однозначно определяет знак $\varkappa_g$ и означает, что синус угла между λ и η равен $+1$.

Вектор η^α — единичный пространственный вектор, образующий с кривой C прямой угол, скаляр же $\varkappa_g$ называется *геодезической кривизной* C.

Напомним, что уравнение геодезической линии на S [см. уравнение (60.4)] может быть записано в виде $\delta\lambda^\alpha/\delta s = 0$. Сопоставление его с (63.4) приводит к заключению, что если геодезическая кривизна $\varkappa_g = 0$, то кривая C — геодезическая линия, и наоборот. Отсюда следует

Теорема. *Необходимое и достаточное условие для того, чтобы кривая на поверхности S была геодезической, сводится к тому, чтобы геодезическая кривизна ее была равна нулю.*

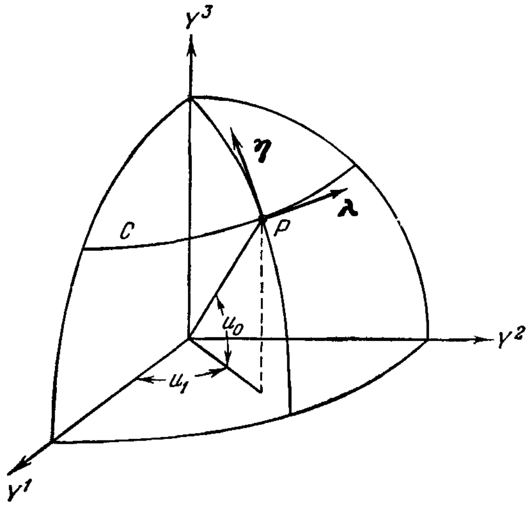

Рис. 26.

В качестве иллюстрации вычислим геодезическую кривизну малого круга

$$C\colon\ u^1 = \text{const} = u_0^1 \neq 0, \qquad u^2 = u^2$$

на поверхности сферы (рис. 26):

$$S\colon\ \begin{aligned} y^1 &= a\cos u^1 \cos u^2,\\ y^2 &= a\cos u^1 \sin u^2,\\ y^3 &= a\sin u^1. \end{aligned}$$

Если дуга длиной s кривой C измерена с плоскости $u_2 = 0$, мы получим $u^2 = s/(a\cos u_0^1)$ и уравнения C можно будет представить в виде

$$u^1 = u_0^1, \quad u^2 = \frac{s}{a\cos u_0^1}. \tag{63.5}$$

Отсюда находим, что компоненты единичного касательного вектора $\lambda^\alpha = du^\alpha/ds$ по кривой C имеют вид

$$\lambda^1 = 0, \quad \lambda^2 = \frac{1}{a\cos u_0^1}, \tag{63.6}$$

так что

$$\frac{\delta\lambda^1}{\delta s} = \frac{d\lambda^1}{ds} + \left\{ {1 \atop \alpha\beta} \right\} \lambda^\alpha \frac{du^\beta}{ds} = 0 + \left\{ {1 \atop 22} \right\} \lambda^2\lambda^2$$

и

$$\frac{\delta\lambda^2}{\delta s} = \frac{d\lambda^2}{ds} + \left\{ {2 \atop \alpha\beta} \right\} \lambda^\alpha \frac{du^\beta}{ds} = 0 + \left\{ {2 \atop 22} \right\} \lambda^2\lambda^2.$$

Так как метрическими коэффициентами S являются $a_{11} = a^2$, $a_{12} = 0$, $a_{22} = a^2\cos^2 u^1$, то, обратившись к задаче 3 § 31, находим, что $\left\{ {1 \atop 22} \right\} = \sin u^1 \cos u^1$, $\left\{ {2 \atop 22} \right\} = 0$. В соответствии с этим формулы (63.4) дают

$$\frac{\delta\lambda^1}{\delta s} = \varkappa_g \eta^1 = \frac{1}{a^2} \operatorname{tg} u_0^1, \qquad \frac{\delta\lambda^2}{\delta s} = \varkappa_g \eta^2 = 0. \tag{63.7}$$

Так как кривая C — не геодезическая линия, $\varkappa_g \neq 0$, мы заключаем, что $\eta^2 = 0$. Но η^α — единичный вектор, так что $a_{\alpha\beta}\eta^\alpha\eta^\beta = 1$, и мы находим, что $\eta^1 = 1/a$. Уравнения (63.7) дают поэтому: $\varkappa_g = (\operatorname{tg} u_0^1)/a$. В § 71 мы установим соотношение между геодезической кривизной $\varkappa_g$ и обычной кривизной $\varkappa$ кривой C.

§ 64. Поверхности в пространстве

За исключением лишь немногих редких случаев обращения к координатной системе окружающего пространства, наше исследование геометрии поверхностей проводилось с точки зрения двумерного существа, вселенная которого определялась параметрами поверхности u^1 и u^2. Изучение свойств поверхностей до сих пор основывалось исключительно на анализе первой квадратичной дифференциальной формы. В изложении теории изометрических поверхностей (§ 61) мы отметили, что пара изометрических поверхностей, например конуса и цилиндра, неразличимых в системе их внутренней геометрии, представляется двумя совершенно различными поверхностями для наблюдателя, исследующего их в системе отсчета, расположенной в пространстве, которое содержит эти поверхности внутри себя. Прием, который позволяет индивидуализировать форму поверхности такой, какой она предстает в системе этого объемлющего пространства, сводится к проведению нормали к поверхности. Поведение же этой нормали при перемещении ее основания по поверхности зависит от формы этой поверхности. Гауссу удалось описать определенные свойства этих поверхностей по виду квадратичной формы, в свою очередь существенным образом связанной с поведением нормали. Но прежде, чем вводить эту новую квадратичную форму, вернемся на миг к отправному пункту, с которого мы начали изучение поверхностей в §§ 52 и 53.

Поверхность S, расположенная в E_3, была определена тремя параметрическими уравнениями

$$y^i = y^i(u^1, u^2) \qquad (i = 1, 2, 3), \tag{64.1}$$

где y^i — прямоугольные декартовы координаты системы отсчета, расположенной в пространстве, окружающем S. Элемент дуги ds кривой, лежащей на S, определяется формулой

$$ds^2 = a_{\alpha\beta}\, du^\alpha\, du^\beta, \tag{64.2}$$

где

$$a_{\alpha\beta} = \frac{\partial y^i}{\partial u^\alpha} \frac{\partial y^i}{\partial u^\beta}.$$

Выбор декартовых переменных y^i в пространстве, объемлющем поверхность, очевидно, не существен, и мы могли бы с равным правом отнести точки E_3 к криволинейной координатной системе X, связанной с Y преобразованием $x^i = x^i(y^1, y^2, y^3)$. При этом линейный элемент E_3, будучи отнесенным к системе отсчета X, принимает вид

$$ds^2 = g_{ij}\, dx^i\, dx^j, \tag{64.3}$$

где $g_{ij} = \dfrac{\partial y^k}{\partial x^i} \dfrac{\partial y^k}{\partial x^j}$, а система уравнений (64.1) для поверхности S может быть записана в виде

$$S\colon\ x^i = x^i(u^1, u^2). \tag{64.4}$$

Из такого представления S следует, что

$$dx^i = \frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha}\, du^\alpha, \tag{64.5}$$

и тогда выражение для элемента дуги (64.3) на поверхности принимает вид

$$ds^2 = g_{ij}\, dx^i\, dx^j = g_{ij} \frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha} \frac{\partial x^j}{\partial u^\beta}\, du^\alpha\, du^\beta.$$

Сопоставление этой формулы с уравнением (64.2) приводит к заключению, что

$$a_{\alpha\beta} = g_{ij} \frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha} \frac{\partial x^j}{\partial u^\beta} \qquad (i, j = 1, 2, 3), \quad (\alpha, \beta = 1, 2). \tag{64.6}$$

Заметим, что ранее приведенные формулы зависят одновременно и от латинских и от греческих индексов, вспомним также при этом, что латинские индексы пробегают ряд значений от 1 до 3 и относятся к окружающему пространству, между тем как греческие индексы принимают значения 1 и 2 и ассоциируются с поверхностью S, заключенной в пространстве E_3. Далее dx^i и g_{ij} являются *тензорами в отношении к преобразованиям*, налагаемым *на пространственные переменные* x^i, в то время как такие величины, как du^α и $a_{\alpha\beta}$, *являются тензорами в преобразовании гауссовых координат* u^α *поверхности*. Уравнение (64.6) представляет своеобразие в том отношении, что оно содержит частные производные $\partial x^i/\partial u^\alpha$, зависящие как от латинских, так и от греческих индексов. Поскольку как $a_{\alpha\beta}$, так и g_{ij} в (64.6) являются тензорами, эта формула указывает, что $\partial x^i/\partial u^\alpha$ можно рассматривать либо как *контравариантный пространственный вектор*, либо *как ковариантный поверхностный вектор*. Исследуем эту группу величин внимательнее.

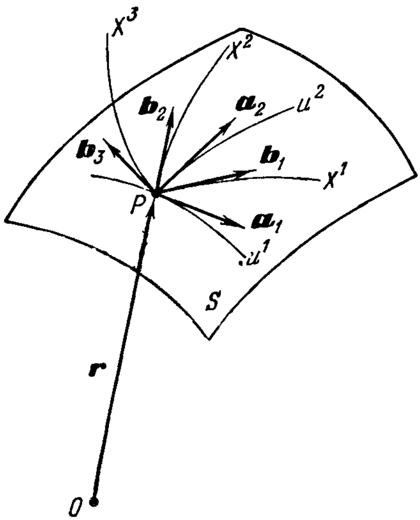

Рис. 27.

Допустим, что на поверхности S совершается малое перемещение, отмечаемое *поверхностным вектором* du^α. Такое же перемещение, как это ясно из (64.5), описывается *пространственным вектором* с компонентами

$$dx^i = \frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha} du^\alpha. \qquad (64.5)$$

Левая часть этого выражения не зависит от греческих индексов и поэтому остается инвариантной относительно изменения поверхностных координат u^α. Поскольку du^α — произвольный поверхностный вектор, заключаем, что

$$\partial x^i/\partial u^\alpha \qquad (64.7)$$

является *ковариантным поверхностным вектором*. С другой стороны, если мы преобразуем пространственные координаты, то du^α, будучи поверхностным вектором, останется инвариантным относительно этого преобразования, так что (64.7) должен быть *контравариантным пространственным вектором*. На этом основании (64.7) получает новое обозначение

$$x^i_\alpha \equiv \frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha}, \qquad (64.8)$$

где индексы надлежащим образом описывают тензорный характер рассмотренной группы величин.

Простое геометрическое значение группы величин (64.8) можно уяснить из рис. 27. Пусть $\boldsymbol{r}$ — радиус-вектор произвольной точки P на S. Точка P определена парой гауссовых координат (u^1, u^2) или тремя пространственными координатами (x^1, x^2, x^3). Поэтому вектор $\boldsymbol{r}$ можно рассматривать как функцию пространственных переменных x^i, удовлетворяющих уравнениям (64.4). Таким образом,

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u^\alpha} = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x^i}\frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha}. \tag{64.9}$$

Но $\partial \boldsymbol{r}/\partial x^i$ суть базисные векторы $\boldsymbol{b}_i$ в точке P, ассоциированные с криволинейной системой X, в то время как $\partial \boldsymbol{r}/\partial u^\alpha$ являются базисными векторами $\boldsymbol{a}_\alpha$ в P, отнесенными к гауссовой системе U.

Отсюда уравнения (64.9) дают

$$\boldsymbol{a}_\alpha = \boldsymbol{b}_i \frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha}. \tag{64.10}$$

Из чертежа ясно, что $\boldsymbol{a}_1 = \frac{\partial x^i}{\partial u^1}\boldsymbol{b}_i$ и $\boldsymbol{a}_2 = \frac{\partial x^i}{\partial u^2}\boldsymbol{b}_i$, так что $\partial x^i/\partial u^\alpha \equiv x^i_\alpha$ $(\alpha = 1, 2)$ являются контравариантными компонентами поверхностных базисных векторов $\boldsymbol{a}_\alpha$, отнесенных к базисным системам $\boldsymbol{b}_i$. Таким образом, группы величин

$$x^i_1: \left(\frac{\partial x^1}{\partial u^1}, \frac{\partial x^2}{\partial u^1}, \frac{\partial x^3}{\partial u^1}\right) \quad \text{и} \quad x^i_2: \left(\frac{\partial x^1}{\partial u^2}, \frac{\partial x^2}{\partial u^2}, \frac{\partial x^3}{\partial u^2}\right)$$

преобразуются контравариантно относительно преобразования пространственных координат.

Мы можем также показать, что три поверхностных вектора

$$x^1_\alpha: \left(\frac{\partial x^1}{\partial u^1}, \frac{\partial x^1}{\partial u^2}\right), \quad x^2_\alpha: \left(\frac{\partial x^2}{\partial u^1}, \frac{\partial x^2}{\partial u^2}\right), \quad x^3_\alpha: \left(\frac{\partial x^3}{\partial u^1}, \frac{\partial x^3}{\partial u^2}\right)$$

преобразуются по ковариантному закону относительно преобразования гауссовых поверхностных координат u^α. Действительно, рассмотрим преобразование $u^\alpha = u^\alpha(\bar{u}^1, \bar{u}^2)$; уравнения (64.4) поверхности S переходят при этом в $x^i = x^i(\bar{u}^1, \bar{u}^2)$ и

$$\frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha} = \frac{\partial x^i}{\partial \bar{u}^\beta}\frac{\partial \bar{u}^\beta}{\partial u^\alpha}. \tag{64.11}$$

Но $\partial x^i/\partial \bar{u}^\beta \equiv \bar{x}^i_\beta$, и (64.1) дает для $i = 1, 2, 3$ $x^i_\alpha = (\partial \bar{u}^\beta/\partial u^\alpha)\bar{x}^i_\beta$, т. е. ковариантный закон.

Пусть ds — элемент дуги, соединяющей пару точек $P(u^1, u^2)$ и $P(u^1 + du^1, u^2 + du^2)$ на S. Направление линейного элемента ds задано параметрами направления $du^\alpha/ds = \lambda^\alpha$. То же направление может быть указано и наблюдателем, находящимся в системе отсчета пространства, посредством трех параметров $dx^i/ds = \lambda^i$, причем из (64.5) следует, что $\lambda^i = x^i_\alpha \lambda^\alpha$. Эта формула говорит нам, что любой поверхностный вектор A^α (т. е. вектор, лежащий в касательной плоскости к S) может рассматриваться как пространственный вектор с компонентами A^i, определенными формулой

$$A^i = x^i_\alpha A^\alpha. \tag{64.12}$$

Этот вектор A^i мы назовем *касательным вектором к поверхности* S.

§ 65. Нормаль к поверхности

Пусть $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ — пара поверхностных векторов, берущих свое начало в некоторой точке P поверхности S (рис. 28). На основании только что выведенной формулы (64.12) их можно представить также пространственными векторами

$$A^i = x^i_\alpha A^\alpha, \quad B^i = x^i_\alpha B^\alpha. \tag{65.1}$$

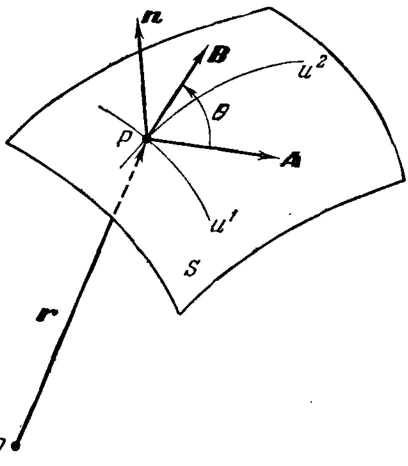

Рис. 28.

Вспоминая, что векторное произведение $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$ представляет собой вектор, нормальный к касательной плоскости, определенной векторами $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$, можно записать следующее выражение для единичного вектора $\boldsymbol{n}$, перпендикулярного к касательной плоскости и так ориентированного, что $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ и $\boldsymbol{n}$ образуют правую систему:

$$\boldsymbol{n} = \frac{\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}}{|\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}|} = \frac{\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}}{AB\,|\sin\theta|}, \tag{65.2}$$

где θ — угол между $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$.

Мы назовем вектор $\boldsymbol{n}$ *единичным вектором, нормальным* к поверхности S в точке P. Ясно, что $\boldsymbol{n}$ — функция координат (u^1, u^2) и что с перемещением точки $P(u^1, u^2)$ в новое положение $P(u^1 + du^1, u^2 + du^2)$ вектор $\boldsymbol{n}$ получает приращение

$$d\boldsymbol{n} = \frac{\partial \boldsymbol{n}}{\partial u^\alpha} du^\alpha, \tag{65.3}$$

одновременно при этом радиус-вектор $\boldsymbol{r}$ испытывает приращение

$$d\boldsymbol{r} = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u^\alpha} du^\alpha.$$

Образуем скалярное произведение

$$d\boldsymbol{n}\cdot d\boldsymbol{r}=\frac{\partial \boldsymbol{n}}{\partial u^{\alpha}}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u^{\beta}}\,du^{\alpha}\,du^{\beta}. \qquad (65.4)$$

Если при этом определить

$$b_{\alpha\beta}=-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \boldsymbol{n}}{\partial u^{\alpha}}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u^{\beta}}+\frac{\partial \boldsymbol{n}}{\partial u^{\beta}}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u^{\alpha}}\right),$$

то скалярное произведение (64.5) выразится в более сжатой форме:

$$d\boldsymbol{n}\cdot d\boldsymbol{r}=-b_{\alpha\beta}\,du^{\alpha}\,du^{\beta}, \qquad (65.5)$$

причем левая его часть по свойству скалярных произведений векторов остается, очевидно, инвариантом, правая же часть в силу симметрии относительно α и β определит коэффициенты при $du^{\alpha}du^{\beta}$ как ковариантный тензор второго ранга. Квадратичная форма

$$\mathscr{B}\equiv b_{\alpha\beta}\,du^{\alpha}\,du^{\beta}, \qquad (65.6)$$

как будет показано в дальнейшем, играет существенную роль в исследовании поверхностей в координатах окружающего пространства точно так же, как первая фундаментальная квадратичная форма

$$\mathscr{A}\equiv d\boldsymbol{r}\cdot d\boldsymbol{r} \quad \text{или} \quad \mathscr{A}=a_{\alpha\beta}\,du^{\alpha}\,du^{\beta},$$

выполняя эту роль в исследовании внутренних свойств поверхности. Дифференциальная форма (65.6) была введена Гауссом и получила наименование *второй фундаментальной квадратичной формы поверхности.*

Так как примененное выше обозначение для единичной нормали, несмотря на графическую наглядность, все же более громоздко в сравнении с тензорным обозначением, мы переведем теперь эту первоначальную определяющую формулу (65.2) на язык компонентов x'_{α} базисных векторов $\boldsymbol{a}_{\alpha}$. Обозначим контравариантные компоненты $\boldsymbol{n}$ через n^i и заметим, что ковариантные компоненты n^i при этом выразятся[1]) формулами

$$n_i=\frac{\varepsilon_{ijk}A^jB^k}{AB\sin\theta} \qquad (65.7)$$

[1]) Заметим, что векторное произведение $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$ зависит от длин векторов $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ и от угла между ними. Если мы выберем прямоугольную декартову систему осей Y так, чтобы векторы $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ лежали в плоскости Y^1Y^2 и $\boldsymbol{A}$ был бы направлен вдоль оси Y^1, тогда декартовы компоненты A^i вектора $\boldsymbol{A}$ будут иметь вид $A^1=A$, $A^2=0$, $A^3=0$, компоненты же $\boldsymbol{B}$: $B^1=B\cos\theta$, $B^2=B\sin\theta$, $B^3=0$. Так как в системе Y имеет место равенство $\varepsilon_{ijk}=e_{ijk}$, то

$$C_i\equiv\varepsilon_{ijk}A^jB^k=e_{i12}AB\sin\theta.$$

Отсюда $C_1=0$, $C_2=0$, $C_3=AB\sin\theta$. Таким образом, C_i определяют вектор $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$, нормальный к плоскости, определяемой через $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$, и равный и (см. § 54)

$$AB \sin\theta = \varepsilon_{\alpha\beta} A^\alpha B^\beta. \tag{65.8}$$

Производя подстановки в (65.7) из (65.1) и (65.8), получаем

$$\left(n_i \varepsilon_{\alpha\beta} - \varepsilon_{ijk} x^j_\alpha x^k_\beta\right) A^\alpha B^\beta = 0,$$

а поскольку это соотношение сохраняет силу для всех поверхностных векторов, заключаем, что

$$n_i \varepsilon_{\alpha\beta} = \varepsilon_{ijk} x^j_\alpha x^k_\beta. \tag{65.9}$$

Умножая (65.9) повсюду на $\varepsilon^{\alpha\beta}$ и замечая, что $\varepsilon^{\alpha\beta}\varepsilon_{\alpha\beta} = 2$, находим искомый результат

$$n_i = \frac{1}{2} \varepsilon^{\alpha\beta} \varepsilon_{ijk} x^j_\alpha x^k_\beta. \tag{65.10}$$

Из структуры этой формулы ясно, что n_i — пространственный вектор, не зависящий от поверхностных координат. Это обстоятельство очевидно также и из чисто геометрических соображений.

§ 66. Тензорные производные

В § 67 мы выведем вторую фундаментальную квадратичную форму (65.6) аналитически, операцией тензорного дифференцирования тензорных полей, являющихся функциями как поверхностных, так и пространственных координат. Плодотворная идея тензорного дифференцирования была введена А. Дж. Мак-Коннелом, и мы будем близко следовать найденному изящному методу исследования поверхностей в этом и в нескольких дальнейших параграфах этой главы[1]).

Рассмотрим кривую C, лежащую на данной поверхности S, и вектор A^i, определенный вдоль C. Если t — параметр C, мы можем вычислить внутреннюю производную $\delta A^i/\delta t$ вектора A^i, а именно

$$\frac{\delta A^i}{\delta t} = \frac{dA^i}{dt} + {}_g\left\{ {i \atop jk} \right\} A^j \frac{dx^k}{dt}. \tag{66.1}$$

В формуле (66.1) символы Кристоффеля ${}_g\left\{ {i \atop jk} \right\}$ относятся к пространственным координатам x^i и составлены из метрических коэффициентов g_{ij}. Это указывается левым индексом-пристав-

---

произведению $AB|\sin\theta|$. Если A^α и B^β — поверхностные компоненты $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$, в таком случае $AB\sin\theta = \varepsilon_{\alpha\beta}A^\alpha B^\beta$. Этот результат следует непосредственно из формулы для синуса угла между двумя векторами, приведенной в § 54.

[1]) См. McConnell A. J., Applications of the absolute differential calculus, 1931, главы XIV—XVI (имеется русский перевод, см. Библиографию).

кой g к символу. С другой стороны, если мы рассматриваем *поверхностный вектор* A^α, определенный вдоль той же самой кривой C, мы сможем образовать внутреннюю производную по переменным поверхности, а именно

$$\frac{\delta A^\alpha}{\delta t}=\frac{dA^\alpha}{dt}+{}_a\left\{ {\alpha \atop \beta\gamma} \right\} A^\beta \frac{du^\gamma}{dt}. \tag{66.2}$$

В этом выражении символы Кристоффеля ${}_a\left\{ {\alpha \atop \beta\gamma} \right\}$ сформированы из метрических коэффициентов $a_{\alpha\beta}$, соединенных с координатами u^α гауссовой поверхности. Геометрическая интерпретация этих формул не вызывает затруднений, если поля A^i и A^α таковы, что $\delta A^i/\delta t=0$ и $\delta A^\alpha/\delta t=0$. В первом уравнении векторы A^i образуют параллельное поле относительно кривой C, *рассматриваемой как пространственная кривая*, между тем как уравнение $\delta A^\alpha/\delta t=0$ определяет параллельное поле *относительно* кривой C, *рассматриваемой как поверхностная кривая.* Соответствующие формулы для внутренних производных ковариантных векторов A_i и A_α имеют вид

$$\frac{\delta A_i}{\delta t}=\frac{dA_i}{dt}-{}_g\left\{ {k \atop ij} \right\} A_k \frac{dx^j}{dt} \tag{66.3}$$

и

$$\frac{\delta A_\alpha}{\delta t}=\frac{dA_\alpha}{dt}-{}_a\left\{ {\gamma \atop \alpha\beta} \right\} A_\gamma \frac{du^\beta}{dt}. \tag{66.4}$$

Рассмотрим теперь тензорное поле T^i_α, представляющее собой контравариантный вектор преобразования пространственных координат x^i и ковариантный вектор преобразования поверхностных координат u^α. Примером такого рода поля может служить тензор $x^i_\alpha=\partial x^i/\partial u^\alpha$, введенный в § 64. Если T^i_α определен для поверхностной кривой C и параметром C является t, то T^i_α будет функцией t. Введем параллельное векторное поле A_i вдоль C, рассматриваемой как пространственная кривая, и параллельное векторное поле B^α вдоль C, рассматриваемой как поверхностная кривая, и образуем инвариант

$$\Phi(t)=T^i_\alpha A_i B^\alpha.$$

Производная от $\Phi(t)$ по параметру t дается выражением

$$\frac{d\Phi}{dt}=\frac{dT^i_\alpha}{dt}A_iB^\alpha+T^i_\alpha\frac{dA_i}{dt}B^\alpha+T^i_\alpha A_i\frac{dB^\alpha}{dt}, \tag{66.5}$$

являющимся, очевидно, инвариантом как относительно пространственных, так и поверхностных координат. Но поскольку поля $A_i(t)$ и $B^\alpha(t)$ параллельны,

$$\frac{dA_i}{dt}={}_g\left\{ {k \atop ij} \right\} A_k \frac{dx^j}{dt} \quad \text{и} \quad \frac{dB^\alpha}{dt}=-{}_a\left\{ {\alpha \atop \beta\gamma} \right\} B^\beta \frac{du^\gamma}{dt},$$

в силу чего (66.5) преобразуется в

$$\frac{d\Phi}{dt}=\left[\frac{dT^i_\alpha}{dt}+{}_g\left\{{i \atop jk}\right\}T^j_\alpha\frac{dx^k}{dt}-{}_a\left\{{\delta \atop \alpha\gamma}\right\}T^i_\delta\frac{du^\gamma}{dt}\right]A_iB^\alpha. \tag{66.6}$$

Так как это выражение — инвариант для произвольного выбора параллельных полей A_i и B^α, правило частного гарантирует, что выражение в квадратных скобках в формуле (66.6) представляет собой тензор того же типа, что и T^i_α. Мы назовем этот тензор, следуя Мак-Коннеллу, *внутренней тензорной производной* от T_α по параметру t, обозначив

$$\frac{\delta T^i_\alpha}{\delta t}\equiv\frac{dT^i_\alpha}{dt}+{}_g\left\{{i \atop jk}\right\}T^j_\alpha\frac{dx^k}{dt}-{}_a\left\{{\delta \atop \alpha\gamma}\right\}T^i_\delta\frac{du^\gamma}{dt}. \tag{66.7}$$

Если поле T^i_α определено по всей поверхности S, мы можем доказать, что, поскольку

$$\frac{\delta T^i_\alpha}{\delta t}\equiv\left[\frac{\partial T^i_\alpha}{\partial u^\gamma}+{}_g\left\{{i \atop jk}\right\}T^j_\alpha x^k_\gamma-{}_a\left\{{\delta \atop \gamma\alpha}\right\}T^i_\delta\right]\frac{du^\gamma}{dt}$$

является тензорным полем, а du^γ/dt — произвольный поверхностный вектор (для произвольной кривой C), то выражение в квадратных скобках является тензором типа $T^i_{\alpha\gamma}$. Обозначаем его поэтому через

$$T^i_{\alpha,\gamma}\equiv\frac{T^i_\alpha}{\partial u^\gamma}+{}_g\left\{{i \atop jk}\right\}T^j_\alpha x^k_\gamma-{}_a\left\{{\delta \atop \alpha\gamma}\right\}T^i_\delta \tag{66.8}$$

и назовем $T^i_{\alpha,\gamma}$ *тензорной производной от* T^i_α *по* u^γ.

Распространение этого определения на более сложные тензоры зависит, очевидно, от структуры формулы (66.8). Так, например, тензорная производная от $T^i_{\alpha\beta}$ по u^γ примет вид

$$T^i_{\alpha\beta,\gamma}=\frac{T^i_{\alpha\beta}}{\partial u^\gamma}+{}_g\left\{{i \atop jk}\right\}T^j_{\alpha\beta}x^k_\gamma-{}_a\left\{{\delta \atop \alpha\gamma}\right\}T^i_{\delta\beta}-{}_a\left\{{\delta \atop \beta\gamma}\right\}T^i_{\alpha\delta}. \tag{66.9}$$

Если поверхностные координаты некоторой точки P на S геодезические, а пространственные — прямоугольные декартовы, то мы видим, что *в этой точке* тензорные производные сводятся к обычным производным. Это позволяет нам заключить, что операции тензорного дифференцирования произведений и сумм подчиняются обычным правилам и что тензорные производные от g_{ij}, $a_{\alpha\beta}$, ε_{ijk}, $\varepsilon_{\alpha\beta}$ и связанные с ними тензоры обращаются в нуль. В соответствии с этим они ведут себя в тензорном дифференцировании как постоянные величины.

§ 67. Вторая фундаментальная форма поверхности

Аппарат, построенный в предшествующем параграфе, позволит нам теперь получить легко и в самой общей форме важную группу формул, выводом которых мы обязаны Гауссу. С их помощью мы построим также и вторую фундаментальную квадратичную форму поверхности, с которой мы уже встретились в § 65[1]).

Начнем с вычисления тензорной производной тензора x^i_α, представляющего компоненты поверхностного базисного вектора $\boldsymbol{a}_\alpha$. Имеем

$$x^i_{\alpha,\beta} = \frac{\partial^2 x^i}{\partial u^\alpha \, \partial u^\beta} + {}_g\left\{ {i \atop jk} \right\} x^j_\alpha x^k_\beta - {}_a\left\{ {\delta \atop \alpha\beta} \right\} x^i_\delta \tag{67.1}$$

и отсюда выводим

$$x^i_{\alpha,\beta} = x^i_{\beta,\alpha}. \tag{67.2}$$

Поскольку тензорная производная от $a_{\alpha\beta}$ обращается в нуль, получаем после дифференцирования соотношение

$$a_{\alpha\beta} = g_{ij} x^i_\alpha x^j_\beta, \qquad [64.6]$$

$$g_{ij} x^i_{\alpha,\gamma} x^j_\beta + g_{ij} x^i_\alpha x^j_{\beta,\gamma} = 0. \tag{67.3}$$

Циклическая перестановка α, β, γ приводит нас к двум формулам

$$g_{ij} x^i_{\beta,\alpha} x^j_\gamma + g_{ij} x^i_\beta x^j_{\gamma,\alpha} = 0, \tag{67.4}$$

$$g_{ij} x^i_{\gamma,\beta} x^j_\alpha + g_{ij} x^i_\gamma x^j_{\alpha,\beta} = 0. \tag{67.5}$$

Если теперь сложить (67.4) с (67.5) и вычесть из суммы (67.3), приняв во внимание соотношение симметрии (67.2), то мы получим

$$g_{ij} x^i_{\alpha,\beta} x^j_\gamma = 0. \tag{67.6}$$

Это — соотношение ортогональности, констатирующее, что $x^i_{\alpha,\beta}$ является пространственным вектором, нормальным к поверхности и потому направленным по единичной нормали n^i. Следовательно, здесь должна существовать группа функций $b_{\alpha\beta}$, обладающих свойством

$$x^i_{\alpha,\beta} = b_{\alpha\beta} n^i. \tag{67.7}$$

Функции $b_{\alpha\beta}$ — компоненты симметричного поверхностного тензора, а дифференциальная квадратичная форма

$$\mathscr{B} \equiv b_{\alpha\beta} \, du^\alpha \, du^\beta \tag{67.8}$$

— искомая *вторая фундамєнтальная форма*.

---

[1]) Ср. McConnell A. J., Applications of the absolute differential calculus, 1931, стр. 200.

Для того чтобы доказать эквивалентность определений тензора $b_{\alpha\beta}$ и данного в § 65, а именно

$$b_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \boldsymbol{n}}{\partial u^\alpha}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u^\beta}+\frac{\partial \boldsymbol{n}}{\partial u^\beta}\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u^\alpha}\right),$$

заметим, что векторы $\boldsymbol{n}$ и $\boldsymbol{a}_\alpha = \partial\boldsymbol{r}/\partial u^\alpha$ ортогональны, в силу чего

$$\boldsymbol{n}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u^\alpha} = 0 \quad \text{и} \quad \boldsymbol{n}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u^\beta} = 0.$$

Дифференцируя эти два скалярных произведения по u^β и соответственно по u^α, а затем складывая, получим

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \boldsymbol{n}}{\partial u^\alpha}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u^\beta}+\frac{\partial \boldsymbol{n}}{\partial u^\beta}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u^\alpha}\right) = -\boldsymbol{n}\cdot\frac{\partial^2 \boldsymbol{r}}{\partial u^\alpha\,\partial u^\beta}.$$

Отсюда

$$b_{\alpha\beta} = \boldsymbol{n}\cdot\frac{\partial^2 \boldsymbol{r}}{\partial u^\alpha\,\partial u^\beta}. \tag{67.9}$$

С другой стороны,

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u^\alpha} = \boldsymbol{a}_\alpha = \boldsymbol{b}_i x^i_\alpha,$$

и следовательно,

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{r}}{\partial u^\alpha\,\partial u^\beta} = \boldsymbol{b}_i\frac{\partial x^i_\alpha}{\partial u^\beta}+\frac{\partial \boldsymbol{b}_i}{\partial u^\beta}x^i_\alpha =$$

$$= \boldsymbol{b}_i\frac{\partial x^i_\alpha}{\partial u^\beta}+\frac{\partial \boldsymbol{b}}{\partial x^j}x^i_\alpha x^j_\beta = \boldsymbol{b}_i\left(\frac{\partial^2 x^i}{\partial u^\alpha\,\partial u^\beta}+{}_g\left\{{i \atop jk}\right\}x^j_\alpha x^k_\beta\right),$$

где в заключительной операции мы используем формулу (46.4) для производной базисного вектора $\boldsymbol{b}_i$.

Если мы внесем в правую часть последнего равенства выражение из уравнения (67.1), то получим

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{r}}{\partial u^\alpha\,\partial u^\beta} = \boldsymbol{b}_i\left(x^i_{\alpha,\beta}+{}_a\left\{{\delta \atop \alpha\beta}\right\}x^i_\delta\right). \tag{67.10}$$

Умножая уравнение (67.10) скалярно на $\boldsymbol{n}$ и замечая, что векторы $\boldsymbol{b}_i x^i_\delta = \boldsymbol{a}_\delta$ и $\boldsymbol{n}$ ортогональны, находим с помощью формулы (67.7)

$$\boldsymbol{n}\cdot\frac{\partial^2 \boldsymbol{r}}{\partial u^\alpha\,\partial u^\beta} = \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{b}_i x^i_{\alpha,\beta} = x^i_{\alpha,\beta}n_i = b_{\alpha\beta}.$$

Этим заканчивается доказательство эквивалентности двух определений второй фундаментальной квадратичной формы.

Уравнения (67.7) известны как *формулы Гаусса*. Важное значение формы (67.8) в дифференциальной геометрии заключается в том факте, что тензоры $a_{\alpha\beta}$ и $b_{\alpha\beta}$, удовлетворяющие уравнениям Гаусса и Кодацци (которые выводятся в § 69), определяют поверхность с точностью до движения как твердого тела в пространстве.

Задачи

1. Показать, что $b_{\alpha\beta}=g_{ij}x^i_{\alpha,\,\beta}n^j=\frac{1}{2}\varepsilon^{\gamma\delta}\varepsilon_{ijk}x^i_{\alpha,\,\beta}x^j_\gamma x^k_\delta$.

2. Показать, что в обозначениях § 65

$$b_{\alpha\beta}=-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\boldsymbol{n}}{\partial u^\alpha}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial u^\beta}+\frac{\partial\boldsymbol{n}}{\partial u^\beta}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial u^\alpha}\right)=-g_{ij}n^i_\alpha x^j_\beta,$$

где $\boldsymbol{n}$ — единичная нормаль, а $\boldsymbol{r}$ — радиус-вектор точки на поверхности.

3. Если уравнение поверхности S, отнесенное к системе прямоугольных декартовых осей, представлено в форме $y^3=f(y^1,\,y^2)$, то мы можем сформулировать параметрические уравнения S в форме $y^1=u^1$, $y^2=u^2$, $y^3=f(u^1,u^2)$. Если частные производные от $f(y^1,\,y^2)$ обозначаются через

$$f_{y^1}\equiv p,\quad f_{y^2}\equiv q,\quad f_{y^1y^1}\equiv r,\quad f_{y^1y^2}\equiv s,\quad f_{y^2y^2}\equiv t,$$

коэффициенты $a_{\alpha\beta}$ в $ds^2=a_{\alpha\beta}\,du^\alpha\,du^\beta$ принимают вид

$$a_{11}=1+p^2,\quad a_{12}=pq,\quad a_{22}=1+q^2,$$

в то время как коэффициенты $b_{\alpha\beta}$ второй фундаментальной формы определяются выражениями

$$b_{11}=\frac{r}{\sqrt{1+p^2+q^2}},\qquad b_{12}=\frac{s}{\sqrt{1+p^2+q^2}},\qquad b_{22}=\frac{t}{\sqrt{1+p^2+q^2}}.$$

Показать это и вычислить $a_{\alpha\beta}$ и $b_{\alpha\beta}$ для поверхности сферы

$$y^3=\sqrt{a^2-(y^1)^2-(y^2)^2}.$$

4. Если уравнения S имеют вид

$$S\colon\ y^i\,(u^1,\,u^2),$$

где y^i — прямоугольные декартовы координаты, а $\boldsymbol{r}$ — радиус-вектор точки y^1, y^2, y^3 на S, то при использовании нижних индексов для обозначения частных производных выполняются равенства: $a_{\alpha\beta}=\boldsymbol{r}_{u^\alpha}\cdot\boldsymbol{r}_{u^\beta}$, $b_{\alpha\beta}=\left[\boldsymbol{r}_{u^\alpha u^\beta}\cdot\boldsymbol{r}_{u^1}\times\boldsymbol{r}_{u^2}\right]/\sqrt{a}$. Показать это. Применить эти формулы в вычислении $a_{\alpha\beta}$ и $b_{\alpha\beta}$ для поверхности вращения $y^1=u^1\cos u^2$, $y^2=u^1\sin u^2$, $y^3=f(u^1)$.

§ 68. Условия интегрируемости

Для того чтобы глубже понять значение тензора $b_{\alpha\beta}$, рассмотрим подробнее формулы Гаусса

$$x^i_{\alpha,\,\beta}=b_{\alpha\beta}n^i, \tag{68.1}$$

где

$$x^i_{\alpha,\,\beta}=\frac{\partial^2x^i}{\partial u^\alpha\,\partial u^\beta}+{}_g\begin{Bmatrix} i\\ jk\end{Bmatrix}x^j_\alpha x^k_\beta-{}_a\begin{Bmatrix}\delta\\ \alpha\beta\end{Bmatrix}x^i_\delta \qquad [67.1]$$

и

$$n_i = \frac{1}{2} \varepsilon^{\alpha\beta} \varepsilon_{ijk} x^j_\alpha x^k_\beta, \qquad [65.10]$$

причем $x^j_\alpha = \partial x^j / \partial u^\alpha$.

Если эти выражения ввести в уравнение (68.1), то мы получим систему дифференциальных уравнений второго порядка в частных производных, в которых зависимые переменные x^i являются функциями поверхностных координат u^α. Коэффициентами в этих дифференциальных уравнениях являются функции метрических коэффициентов g_{ij} многообразия, в котором поверхность S, определенная уравнениями

$$x^i = x^i(u^1, u^2) \qquad (i = 1, 2, 3), \tag{68.2}$$

находится внутри пространства — они являются, таким образом, функциями от $a_{\alpha\beta} = g_{ij}(\partial x^i/\partial u^\alpha)(dx^j/du^\beta)$ и $b_{\alpha\beta}$.

Если нам даны уравнения (68.2), мы можем вычислить $a_{\alpha\beta}$ и $b_{\alpha\beta}$ (см. задачу 1 § 67), ввести надлежащие выражения в (68.1), и тогда уравнения (68.1) будут, конечно, удовлетворяться тождественно. С другой стороны, если функции $a_{\alpha\beta}$ и $b_{\alpha\beta}$ заданы заранее, уравнения (68.1) станут *уравнениями условий*, и тогда вообще уравнения (68.2) поверхности S не будут иметь никаких решений. Для того чтобы тензоры $a_{\alpha\beta}$ и $b_{\alpha\beta}$ были связаны с какой-либо поверхностью, необходимо, чтобы x^i удовлетворяли условиям интегрируемости

$$\frac{\partial^2 x^i_\alpha}{\partial u^\gamma \partial u^\beta} = \frac{\partial^2 x^i_\alpha}{\partial u^\beta \partial u^\gamma}, \tag{68.3}$$

если только функции x^i_α принадлежат классу C^2. Из обсуждения в § 36 обращения порядка ковариантного дифференцирования следует, что условие (68.3) эквивалентно[1]) [см. (36.6)] соотношению

$$x^i_{\alpha,\beta\gamma} - x^i_{\alpha,\gamma\beta} = R^{\delta}_{\cdot\alpha\beta\gamma} x^i_\delta, \tag{68.4}$$

где $R^{\delta}_{\cdot\alpha\beta\gamma}$ — риманов тензор второго рода, образованный из коэффициентов $a_{\alpha\beta}$ первой фундаментальной квадратичной формы. Уравнения (68.4) содержат в себе третьи частные производные координат x^i, и мы должны будем в дальнейшем принять, что функции, входящие в (68.2), входят в класс C^3.

---

[1]) Мы не входим в детали вычисления, поскольку они несущественны в ходе доказательства. См., например, McConnell A. J., Applications of the absolute differential calculus, 1931, стр. 203.

Мы увидим, что условия интегрируемости (68.4) налагают некоторые ограничения на возможные выборы функций $b_{\alpha\beta}$ и $a_{\alpha\beta}$. Эти ограничительные условия известны как *уравнения Гаусса и Кодацци*. Они выводятся в следующем параграфе.

§ 69. Формулы Вейнгартена и уравнения Гаусса и Кодацци [1])

Для того чтобы вывести уравнения Гаусса и Кодацци, мы должны прибегнуть к использованию полученных Вейнгартеном выражений для производных единичного нормального вектора n^i к поверхности S. Начнем с соотношения $g_{ij}n^in^j = 1$ и образуем его тензорную производную [2]). Имеем

$$g_{ij}n^i_{,\alpha}n^j + g_{ij}n^in^j_{,\alpha} = 0,$$

или

$$g_{ij}n^in^j_{,\alpha} = 0. \tag{69.1}$$

Уравнение (69.1) показывает, что вектор $n^j_{,\alpha}$, рассматриваемый как пространственный вектор, образует прямой угол с единичной нормалью n^i и потому лежит в касательной плоскости к поверхности. Поэтому его можно представить линейной формой базисных векторов x^i_α

$$n^i_{,\alpha} = c^\beta_\alpha x^i_\beta. \tag{69.2}$$

Так как n^i нормален к поверхности, то мы имеем соотношение ортогональности $g_{ij}x^i_\alpha n^j = 0$, тензорная производная которого определяется из

$$g_{ij}x^i_{\alpha,\beta}n^j + g_{ij}x^i_\alpha n^j_{,\beta} = 0, \tag{69.3}$$

но из (68.1)

$$x^i_{\alpha,\beta} = b_{\alpha\beta}n^i, \tag{69.4}$$

так что подстановка в (69.3) из (69.4) и (69.2) дает

$$b_{\alpha\beta} + g_{ij}x^i_\alpha x^j_\gamma c^\gamma_\beta = 0,$$

а поскольку $a_{\alpha\beta} = g_{ij}x^i_\alpha x^j_\beta$, получаем

$$b_{\alpha\beta} = -a_{\alpha\gamma}c^\gamma_\beta.$$

---

[1]) Приводимый здесь вывод следует схеме Мак-Коннелла (McConnell A. J., Applications of the absolute differential calculus, 1931, стр. 201—205.)

[2]) Напомним, что $n^i_{,\alpha} = \dfrac{\partial n^i}{\partial u^\alpha} + {}_g\left\{ {i \atop jk} \right\} n^j x^k_\alpha$.

Решая это уравнение относительно c^{γ}_{β}, находим

$$c^{\gamma}_{\beta} = -a^{\alpha\gamma}b_{\alpha\beta};$$

уравнение (69.2) преобразуется при этом в

$$n^{i}_{,\alpha} = -a^{\beta\gamma}b_{\beta\alpha}x^{i}_{\gamma}. \tag{69.5}$$

Таковы *формулы Вейнгартена*, которыми мы воспользуемся в выводе уравнений Кодацци.

Уравнения, которые мы хотим вывести из условий интегрируемости (68.4), имеют вид

$$x^{i}_{\alpha,\beta\gamma} - x^{i}_{\alpha,\gamma\beta} = R^{\delta}_{\cdot\alpha\beta\gamma}x^{i}_{\delta}. \tag{69.6}$$

Образуем тензорную производную уравнения (69.4) и используем (69.5) для того, чтобы получить

$$x^{i}_{\alpha,\beta\gamma} = b_{\alpha\beta,\gamma}n^{i} + b_{\alpha\beta}n^{i}_{,\gamma} = b_{\alpha\beta,\gamma}n^{i} - b_{\alpha\beta}a^{\delta\lambda}b_{\delta\gamma}x^{i}_{\lambda}. \tag{69.7}$$

Подставляя из (69.7) в левую часть уравнения (69.6), находим

$$x^{i}_{\alpha,\beta\gamma} - x^{i}_{\alpha,\gamma\beta} = \left(b_{\alpha\beta,\gamma} - b_{\alpha\gamma,\beta}\right)n^{i} - a^{\delta\lambda}\left(b_{\alpha\beta}b_{\delta\gamma} - b_{\alpha\gamma}b_{\delta\beta}\right)x^{i}_{\lambda}.$$

Отсюда

$$\left(b_{\alpha\beta,\gamma} - b_{\alpha\gamma,\beta}\right)n^{i} - a^{\delta\lambda}\left(b_{\alpha\beta}b_{\delta\gamma} - b_{\alpha\gamma}b_{\delta\beta}\right)x^{i}_{\lambda} = R^{\delta}_{\cdot\alpha\beta\gamma}x^{i}_{\delta}. \tag{69.8}$$

Для того чтобы получить *уравнения Кодацци*, умножаем (69.8) на n_i и, поскольку $x^{i}_{\alpha}n_{i} = 0$, приходим к искомому результату

$$b_{\alpha\beta,\gamma} - b_{\alpha\gamma,\beta} = 0. \tag{69.9}$$

Вывод *уравнений Гаусса* осуществляется путем умножения (69.8) на $g_{ij}x^{j}_{\rho}$:

$$b_{\rho\beta}b_{\alpha\gamma} - b_{\rho\gamma}b_{\alpha\beta} = R_{\rho\gamma\beta\gamma}. \tag{69.10}$$

Так как α, β принимают значения 1, 2, а $b_{\alpha\beta} = b_{\beta\alpha}$, мы видим, что получаются два независимых уравнения Кодацци и лишь одно независимое уравнение Гаусса [1]). Независимые уравнения Кодацци имеют вид

$$1)\ b_{\alpha\alpha,\beta} - b_{\alpha\beta,\alpha} = 0 \qquad (\alpha \neq \beta)\ (\text{не суммируется по } \alpha) \tag{69.11}$$

либо, если ковариантные производные выписаны полностью, с помощью

$$b_{\alpha\beta,\gamma} = \frac{\partial b_{\alpha\beta}}{\partial u^{\gamma}} - {}_{a}\left\{ {\delta \atop \alpha\gamma} \right\} b_{\delta\beta} - {}_{a}\left\{ {\delta \atop \beta\gamma} \right\} b_{\alpha\delta}$$

---

[1]) Напомним, что

$$R_{\alpha\alpha\beta\gamma} = R_{\alpha\beta\gamma\gamma} = 0,\ R_{1212} = R_{2121} = -R_{2112} = -R_{1221}.$$

2) получаем

$$\frac{\partial b_{\alpha\alpha}}{\partial u^{\beta}} - \frac{\partial b_{\alpha\beta}}{\partial u^{\alpha}} - b_{\alpha\delta}\left\{ {\delta \atop \alpha\beta} \right\} + b_{\delta\beta}\left\{ {\delta \atop \alpha\alpha} \right\} = 0 \tag{69.12}$$

($\alpha \neq \beta$) (не суммируется по α). Уравнения Гаусса

$$b_{11}b_{22} - b_{12}^2 = R_{1212} \tag{69.13}$$

в свою очередь связывают коэффициенты $b_{\alpha\beta}$ и $a_{\alpha\beta}$ в двух фундаментальных квадратичных формах.

Изложенное доказательство свидетельствует, что если $a_{\alpha\beta}$ и $b_{\alpha\beta}$ являются фундаментальными тензорами поверхности S: $x^i = x^i(u^1, u^2)$, то уравнения (69.11) и (69.13) удовлетворяются. И наоборот, можно показать, что если две группы функций $a_{\alpha\beta}$ и $b_{\alpha\beta}$, удовлетворяющих уравнениям (69.11) и (69.13), заданы заранее и если $a_{\alpha\beta}du^{\alpha}du^{\beta}$ — положительная определенная форма, то поверхность S определяется (локально) с точностью до движения как твердого тела в пространстве. Доказательство[1]) этого зависит от существования решения системы дифференциальных уравнений типа, рассмотренного в § 39. Заметим, что если $b_{\alpha\beta} = 0$, то в силу (65.5) поверхность S преобразуется в плоскость.

§ 70. Средняя и полная кривизна поверхности

Если вспомнить определение (62.4) полной кривизны K:

$$K = \frac{R_{1212}}{a}, \quad a = a_{11}a_{22} - a_{12}^2, \tag*{[62.4]}$$

то уравнение (69.13) можно преобразовать к развернутому виду

$$K = \frac{b_{11}b_{22} - b_{12}^2}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2} = \frac{b}{a}. \tag{70.1}$$

Таким образом, гауссова кривизна оказывается равной частному дискриминантов второй и первой фундаментальных квадратичных форм.

Введем здесь другой важный инвариант H, называемый *средней кривизной поверхности*. Он дается формулой

$$H \equiv \frac{1}{2} a^{\alpha\beta} b_{\alpha\beta}, \tag{70.2}$$

и мы увидим в § 72, что инварианты K и H связаны замечательным образом с обыкновенной кривизной некоторых кривых, имеющей отношение к нормальным сечениям поверхности.

---

[1]) Более детальное исследование см. Eisenhart L. P., Introduction to differential geometry, стр. 218—221, где рассматривается случай декартовых переменных x_i.

§ 71. Кривые на поверхности. Теорема Менье

Пусть уравнения гладкой кривой C, лежащей на поверхности

$$S\colon\ x^i = x^i(u^i,\ u^2), \tag{71.1}$$

заданы в виде

$$C\colon\ u^\alpha = u^\alpha(s), \tag{71.2}$$

где s — параметр дуги. Если значения переменной $u^\alpha(s)$ введены в (71.1), то мы получим пространственные координаты x^i кривой C в виде

$$x^i = x^i(s). \tag{71.3}$$

В этих уравнениях кривая C рассматривается как пространственная. Свойства C можно будет теперь изучать с помощью формул Френе — Серре (50.1)—(50.3) путем анализа скоростей изменения единичного касательного вектора $\boldsymbol{\lambda}$, единичной главной нормали $\boldsymbol{\mu}$ и единичной бинормали $\boldsymbol{\nu}$.

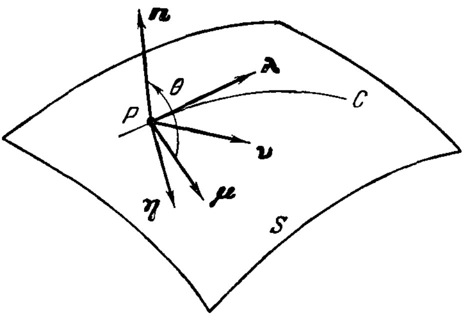

Рис. 29.

С другой стороны, если мы будем рассматривать C как поверхностную кривую, определяемую уравнением (71.2), то компоненты λ^α единичного касательного вектора $\boldsymbol{\lambda}$ могут быть отнесены к пространственным компонентам λ^i того же вектора по формулам

$$\lambda^i = \frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha}\cdot\frac{du^\alpha}{ds} \equiv x^i_\alpha \lambda^\alpha, \tag{71.4}$$

где

$$\lambda^i = \frac{dx^i}{ds} \quad \text{и} \quad \lambda^\alpha = \frac{du^\alpha}{ds}. \tag{71.5}$$

Вспомним также уравнение (63.4)

$$\frac{\delta\lambda^\alpha}{\delta s} = \varkappa_g \eta^\alpha, \tag{71.6}$$

в котором η^α — единичная нормаль к C в касательной плоскости и $\varkappa_g$ — геодезическая кривизна C (рис. 29). Если мы продифференцируем внутренне (71.4) по s:

$$\frac{\delta\lambda^i}{\delta s} = x^i_{\alpha,\,\beta}\lambda^\alpha\frac{du^\beta}{ds} + x^i_\alpha\frac{\delta\lambda^\alpha}{\delta s},$$

то, учтя формулу (50.1) Френе и уравнение (71.6), получим

$$\varkappa\mu^i = x^i_{\alpha,\,\beta}\lambda^\alpha\lambda^\beta + \varkappa_g x^i_\alpha\eta^\alpha.$$

Пространственные компоненты η^i вектора $\boldsymbol{\eta}$ примут вид $\eta^i = x^i_\alpha\eta^\alpha$, и если привлечь формулу Гаусса $x^i_{\alpha,\,\beta} = b_{\alpha\beta}n^i$, то предыдущее уравнение примет вид

$$\varkappa\mu^i = b_{\alpha\beta}\lambda^\alpha\lambda^\beta n^i + \varkappa_g\eta^i, \tag{71.7}$$

где n^i — единичная нормаль к поверхности S.

Формула (71.7) констатирует, что главная нормаль $\boldsymbol{\mu}$ к C лежит в плоскости векторов $\boldsymbol{n}$ и $\boldsymbol{\eta}$. Так как $\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{\eta}$ и $\boldsymbol{\lambda}$ ортонормированы, а $\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\lambda}$, то

$$\varepsilon_{ijk}n^i\eta^k = \lambda_i, \tag{71.8}$$

а поскольку $\boldsymbol{\lambda}$ перпендикулярен к плоскости $\boldsymbol{n}$ и $\boldsymbol{\mu}$, то $\boldsymbol{\mu}\times\boldsymbol{n} = \boldsymbol{\lambda}\sin\theta$, т. е.

$$\varepsilon_{ijk}\mu^j\eta^k = \lambda_i\sin\theta, \tag{71.9}$$

где θ — угол между $\boldsymbol{\mu}$ и $\boldsymbol{n}$.

Умножая (71.9) на $\varkappa$, находим

$$\varepsilon_{ijk}\varkappa\mu^j\eta^k = \varkappa\lambda_i\sin\theta,$$

откуда после подстановки из (71.7) формула дает

$$\varepsilon_{ijk}\left(b_{\alpha\beta}\lambda^\alpha\lambda^\beta n^j + \varkappa_g\eta^j\right)n^k = \lambda_i\sin\theta.$$

Но $\varepsilon_{ijk}n^jn^k = 0$, а $\varepsilon_{ijk}\eta^jn^k = -\lambda_i$ в силу (71.8), откуда заключаем, что

$$\varkappa_g = -\varkappa\sin\theta. \tag{71.10}$$

С другой стороны, если образовать скалярное произведение двух членов уравнения (71.7) с n_i и заметить, что $n_i\mu^i = \cos\theta$, то получим

$$\varkappa\cos\theta = b_{\alpha\beta}\lambda^\alpha\lambda^\beta. \tag{71.11}$$

Инвариант в $b_{\alpha\beta}\lambda^\alpha\lambda^\beta$ в (71.11) принимает одно и то же значение для всех кривых на S с постоянным касательным вектором $\boldsymbol{\lambda}$ в P. В частности, он приобретает это значение для кривой, образующейся в пересечении нормальной плоскости, содержащей $\boldsymbol{n}$ и $\boldsymbol{\lambda}$. Но для каждого сечения нормальной плоскости угол θ равен либо нулю, либо π радианам, так что для нормальиого плоского сечения $\varkappa\cos\theta$ равно либо $\varkappa$, либо $-\varkappa$; так как входящий в правую часть уравнения (71.11) член является инвариантом, то значение произведения $\varkappa\cos\theta$ для любой кривой C, касательной к $\boldsymbol{\lambda}$, равно кривизне $\varkappa_{(n)}$ нормального сечения в направлении λ. Эта кривизна $\varkappa_{(n)}$ называется *нормальной кривизной поверхности* S в направлении λ. Мы можем поэтому переписать (71.11) в виде

$$\varkappa_{(n)} = b_{\alpha\beta}\lambda^{\alpha}\lambda^{\beta}, \tag{71.12}$$

где $\varkappa_{(n)} = \varkappa \cos\theta$. Соответственно уравнению (71.7) можно придать вид

$$\varkappa\mu^{i} = \varkappa_{(n)}n^{i} + \varkappa_{g}\eta^{i}.$$

Это уравнение констатирует, что $\varkappa_{(n)}$ и $\varkappa_{g}$ являются компонентами вектора кривизны $\varkappa\mu^{i}$ в направлениях векторов n^{i} и η^{i}.

Результат, воплощенный в формуле (71.12), может быть резюмирован следующей теоремой.

Теорема Менье. *Радиус кривизны $R = 1/\varkappa$ произвольной кривой в любой заданной точке на поверхности равен произведению радиуса кривизны $R_{(n)} = 1/\varkappa_{(n)}$ соответствующего нормального сечения в этой точке на косинус угла между нормалью к поверхности и главной нормалью к кривой.*

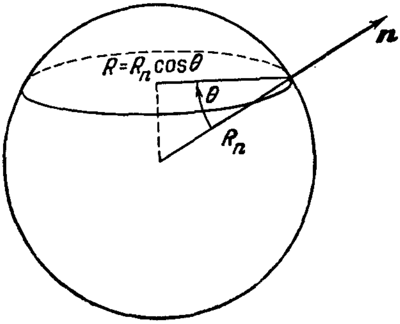

Рис. 30.

В символах мы выражаем это так:

$$R = \pm R_{(n)} \cos\theta.$$

Если S — сфера, то каждое ее нормальное сечение является большим кругом сферы, и если C — какая-либо проведенная на сфере окружность, то полученный только что результат становится очевидным из элементарных геометрических соображений (рис. 30).

Если вспомнить, что $ds^2 = a_{\alpha\beta}du^{\alpha}du^{\beta}$ и $du^{\alpha}/ds = \lambda^{\alpha}$, то мы убедимся, что формулу (71.12) можно привести к виду

$$\varkappa_{(n)} = \frac{b_{\alpha\beta}\,du^{\alpha}\,du^{\beta}}{a_{\alpha\beta}\,du^{\alpha}\,du^{\beta}} \equiv \frac{\mathscr{B}}{\mathscr{A}}. \tag{71.13}$$

Заметим, что если поверхность является плоскостью, то нормальная кривизна ее $\varkappa_{(n)} = 0$ во всех точках плоскости, если же она сфера, то $\varkappa_{(n)} = 1/R$, где R — радиус сферы. Учитывая это, заключаем из (71.13), что для плоскости $b_{\alpha\beta} = 0$ и для сферы $b_{\alpha\beta}du^{\alpha}du^{\beta} = (1/R)a_{\alpha\beta}du^{\alpha}du^{\beta}$, так что $a_{\alpha\beta} = Rb_{\alpha\beta}$ во всех точках сферы.

Задачи

1. Доказать, что геодезическая кривизна $\varkappa_g$ и кривизна $\varkappa$ некоторой поверхностной кривой C связаны формулой $\varkappa_g = \varkappa \sin\theta$, где θ — угол между нормалью к поверхности и главной нормалью к C.

2. Исследовать поверхность прямого кругового конуса

$$S:\ y^1 = u^1 \cos u^2,\quad y^2 = u^1 \sin u^2,\quad y^3 = u^1,$$

и кривой C: $u^1 = a$, $u^2 = u^2$ на S.

Написать уравнения кривой C по типу $u^1 = a$, $u^2 = s/a$, где s — параметр дуги, и показать с помощью (71.6), что $\varkappa_g = \sqrt{2}/2a$. Проверить этот результат формулой (71.10).

3. Показать, что параллели $u^1 = \text{const}$ на достаточно гладкой поверхности вращения

$$y^1 = u^1 \cos u^2,\quad y^2 = u^1 \sin u^2,\quad y^3 = f(u^1),$$

являются кривыми постоянной геодезической кривизны.

4. Кривая C на поверхности S называется *асимптотической линией*, если $b_{\alpha\beta}\lambda^\alpha\lambda^\beta = 0$ вдоль C. Показать, что главная нормаль μ к асимптотической линии является касательной к S, а бинормаль ν является нормалью к S.

5. Показать, что нормальные кривизны в направлениях координатных кривых выражаются формулами b_{11}/a_{11} и b_{22}/a_{22}.

6. Доказать теорему: если некоторая кривая — геодезическая на поверхности, то она либо прямая линия, либо ее главная нормаль ортогональна к поверхности в каждой точке и обратно.

§ 72. Главные кривизны поверхности

В этом параграфе мы займемся определением направлений $\lambda^\alpha = du^\alpha/ds$ на поверхностях, нормальная кривизна которых $\varkappa_{(n)}$, заданная формулой

$$\varkappa_{(n)} = b_{\alpha\beta}\lambda^\alpha\lambda^\beta, \qquad [71.12]$$

принимает экстремальное значение.

Поскольку вектор λ^α единичный, величину $\varkappa_{(n)}$ в (71.12) следует максимизировать лишь под ограничительным условием

$$a_{\alpha\beta}\lambda^\alpha\lambda^\beta = 1. \qquad (72.1)$$

Следуя обычной процедуре определения ограниченных максимумов и минимумов, выводим необходимое условие для экстремума

$$b_{\alpha\beta}\lambda^\beta + \Lambda a_{\alpha\beta}\lambda^\beta = 0, \qquad (72.2)$$

где Λ — множитель Лагранжа. Если уравнение (72.2) умножить на λ^α и учесть соотношения (71.12) и (72.1), то непосредственно получим: $\Lambda = -\varkappa_{(n)}$. Таким образом, уравнение (72.2), определяющее направления экстремальных значений для $\varkappa_{(n)}$, могут быть представлены условием

$$(b_{\alpha\beta} - \varkappa_{(n)} a_{\alpha\beta})\,\lambda^\beta = 0 \qquad (\alpha = 1,\ 2). \qquad (72.3)$$

Система однородных уравнений (72.3) будет обладать нетривиальными решениями для λ^β единственно лишь в том случае, если значения $\varkappa_{(n)}$ окажутся корнями детерминантного уравнения

$$|b_{\alpha\beta} - \vartheta a_{\alpha\beta}| = 0. \tag{72.4}$$

Квадратное уравнение (72.4), будучи выписано в развернутой форме, примет вид

$$\vartheta^2 - a^{\alpha\beta} b_{\alpha\beta} \vartheta + \frac{b}{a} = 0, \tag{72.5}$$

где $b = |b_{\alpha\beta}|$ и $a = |a_{\alpha\beta}|$.

Так как гауссова кривизна K задана выражением

$$K = \frac{b}{a}, \qquad [70.1]$$

а средняя кривизна H равна

$$H = \frac{1}{2} a^{\alpha\beta} b_{\alpha\beta}, \qquad [70.2]$$

убеждаемся, что уравнение (72.5) принимает вид

$$\vartheta^2 - 2H\vartheta + K = 0. \tag{72.6}$$

Корни $\vartheta = \varkappa_{(1)}$ и $\vartheta = \varkappa_{(2)}$ уравнения (72.6) называются *главными кривизнами* поверхности, а направления $\lambda^\alpha_{(1)}$ и $\lambda^\alpha_{(2)}$, отвечающие этим экстремальным значениям $\varkappa_{(n)}$, являются *главными направлениями на поверхностях.* Мы предоставляем читателю показать, что эти направления вещественны.

Из (72.6) ясно, что главные кривизны $\varkappa_{(1)}$ и $\varkappa_{(2)}$ связаны со средней и гауссовой кривизнами формулами

$$\left.\begin{aligned} \varkappa_{(1)} + \varkappa_{(2)} &= 2H, \\ \varkappa_{(1)}\varkappa_{(2)} &= K. \end{aligned}\right\} \tag{72.7}$$

Из уравнения (72.3) следует, что главные направления определяются из формул

$$\left(b_{\alpha\beta} - \varkappa_{(1)} a_{\alpha\beta}\right) \lambda^\beta_{(1)} = 0,$$
$$\left(b_{\alpha\beta} - \varkappa_{(2)} a_{\alpha\beta}\right) \lambda^\beta_{(2)} = 0.$$

Если первое из этих уравнений умножить на $\lambda^\alpha_{(2)}$, второе на $\lambda^\alpha_{(1)}$ и вычесть результаты, то мы получим

$$\left(\varkappa_{(2)} - \varkappa_{(1)}\right) a_{\alpha\beta} \lambda^\alpha_{(1)} \lambda^\beta_{(2)} = 0. \tag{72.8}$$

Если $\varkappa_{(1)} \neq \varkappa_{(2)}$, то уравнение (72.8) приведет нас к выводу

$$a_{\alpha\beta} \lambda^\alpha_{(1)} \lambda^\beta_{(2)} = 0, \tag{72.9}$$

гласящему, что *главные направления ортогональны*. Если экстремальные значения $\varkappa_{(n)}$ равны в данной точке, то любое направление является главным.

Мы можем теперь подытожить полученные результаты.

Теорема. *В каждой точке поверхности существуют два взаимно ортогональных направления, для которых нормальная кривизна достигает своих экстремальных значений.*

Кривая на поверхности, обладающая тем свойством, что линия, касательная к ней в любой точке, ориентирована по главному направлению, называется *линией кривизны*. Дифференциальное уравнение, для которого линии кривизны на S являются интегральными кривыми, следует непосредственно из уравнений (72.3). Если мы исключим из этих уравнений $\varkappa_{(n)}$ и положим $\lambda^\beta = du^\beta/ds$, то найдем

$$\frac{b_{1\beta}}{a_{1\beta}}\frac{du^\beta}{du^\beta} = \frac{b_{2\beta}}{a_{2\beta}}\frac{du^\beta}{du^\beta},$$

или

$$(b_{11}a_{12} - b_{12}a_{11})(du^1)^2 + (b_{11}a_{22} - b_{22}a_{11})\,du^1\,du^2 + \\ + (b_{12}a_{22} - a_{12}b_{22})(du^2)^2 = 0. \qquad (72.10)$$

В каждой точке S, где либо $b_{\alpha\beta}du^\alpha du^\beta \neq 0$, либо $b_{\alpha\beta}du^\alpha du^\beta$ не пропорционально $a_{\alpha\beta}du^\alpha du^\beta$, уравнение (72.10) определяет два ортогональных направления

$$\frac{du^2}{du^1} = \varphi_\alpha(u^1, u^2) \qquad (\alpha = 1, 2), \qquad (72.11)$$

которые совпадают с направлениями главных кривизн[1]). Каждое уравнение в (72.11) определяет семейство кривых на S, сплошь покрывающих поверхность. Эти два семейства кривых ортогональны, и если их принять в качестве параметрической сетки на S, то первая фундаментальная форма примет вид

$$(ds)^2 = a_{11}(d\bar{u}^1)^2 + a_{22}(d\bar{u}^2)^2.$$

При этом уравнение (72.10) в координатной системе $\bar{u}^\alpha$ преобразуется в

$$-\bar{b}_{12}\bar{a}_{11}(d\bar{u}^1)^2 + (\bar{b}_{11}\bar{a}_{22} - \bar{b}_{22}\bar{a}_{11})\,d\bar{u}^1\,d\bar{u}^2 + \bar{b}_{12}\bar{a}_{22}(d\bar{u}^2)^2 = 0,$$

а его решениями будут

$$\bar{u}^1 = \text{const}, \quad \bar{u}^2 = \text{const}.$$

Если положить $d\bar{u}^1 \neq 0$, а $d\bar{u}^2 = 0$, мы увидим, что $b_{12} = 0$, так как $\bar{a}_{11} \neq 0$. Таким образом, необходимое условие для того,

---

[1]) Мы исключаем те точки на S, в которых $\varkappa_{(n)} = 0$ или $\varkappa_{(1)} = \varkappa_{(2)}$. См. заключительные замечания в § 71.

чтобы сетка линий кривизны получилась ортогональной, гласит: $a_{12} = b_{12} = 0$. Наоборот, если $a_{12} = b_{12} = 0$, то (72.10) получает решения: $u^1 = \text{const}$, $u^2 = \text{const}$, так что координатные линии становятся линиями кривизны. Отсюда следует

Теорема. *Необходимым и достаточным условием для того, чтобы координатная сетка на поверхности S (отличающейся от плоскости и от сферы) была сеткой линий кривизны, является выполнение требования, чтобы $a_{12} = b_{12} = 0$ во всех точках S.*

Заметим, что для *любой* ортогональной сетки как на плоскости, так и на сфере $a_{12} = b_{12} = 0$. Формула (71.9) для нормальной кривизны $\varkappa_{(n)}$, если принятая координатная система является сеткой линий кривизны, принимает вид

$$\varkappa_{(n)} = \frac{b_{11}(du^1)^2 + b_{22}(du^2)^2}{a_{11}(du^1)^2 + a_{22}(du^2)^2}.$$

Если положить $du^1 = 0$, $du^2 \neq 0$ и $du^2 = 0$, $du^1 \neq 0$, то получим

$$\varkappa_1 = \frac{b_{11}}{a_{11}}, \quad \varkappa_2 = \frac{b_{22}}{a_{22}}$$

для кривизны координатных линий $u_1 = \text{const}$ и $u_2 = \text{const}$. Линии кривизны на S нельзя смешивать с нормальными сечениями S. Нормальные сечения C_n являются по необходимости плоскими кривыми, между тем как линии кривизны обычно бывают не плоскими.

Заканчиваем этот параграф несколькими определениями.

Поверхность, во всех точках которой гауссова кривизна K положительна, называется *поверхностью положительной кривизны*. В этом случае (см. уравнение (70.1)) $b_{11}b_{22} - b_{12}^2 > 0$, и так как $\varkappa_{(n)} = b_{\alpha\beta}\lambda^\alpha\lambda^\beta$, мы видим, что *главные радиусы* $R_{(n)} = 1/\varkappa_{(n)}$ ко всем нормальным сечениям поверхности с положительной кривизной имеют один и тот же знак. Если $K < 0$ в заданной точке, главные радиусы имеют разные знаки. Тогда уравнение

$$b_{\alpha\beta}\lambda^\alpha\lambda^\beta = 0 \tag{72.12}$$

определяет два направления, для которых радиусы кривизны бесконечны. Поверхность, во всех точках которой $K < 0$, называется *поверхностью отрицательной кривизны*. Если $K = 0$ в некоторой точке, направления, указанные в (72.12), совпадают и для этого направления R бесконечно велик.

Из геометрических соображений ясно, что эллипсоиды, двуполые гиперболоиды и эллиптические параболоиды являются поверхностями положительной кривизны. Однополостные гиперболоиды и гиперболические параболоиды — поверхности отрицательной кривизны.

Точка на S называется *эллиптической*, если главные кривизны в ней $\varkappa_{(1)}$, $\varkappa_{(2)}$ одного знака. Отсюда следует, что $\varkappa_{(n)}$ в эллиптической точке не изменяет знака при любой перемене направления нормального сечения. Точка называется *гиперболической*, если $\varkappa_{(1)}$ и $\varkappa_{(2)}$ имеют противоположные знаки. В гиперболической точке имеются два направления, для которых $\varkappa_{(n)} = 0$. *Параболическая* точка характеризуется тем, что одно из значений $\varkappa_{(1)}$ или $\varkappa_{(2)}$ обращается в нуль. В частном случае $\varkappa_{(1)} = \varkappa_{(2)}$, все значения $\varkappa_{(n)}$ равны и такие точки называются *сферическими*. В окрестности сферической точки поверхность выглядит сферой, и мы можем доказать, что если все точки S сферические, то поверхность S является сферой. В некоторых руководствах сферические точки называются также *омбилическими*.

Задачи

1. Дан эллипсоид вращения, поверхность которого определяется уравнениями

$$y^1 = a\cos u^1 \sin u^2,$$
$$y^2 = a\sin u^1 \sin u^2,$$
$$y^3 = c\cos u^2, \quad a^2 > c^2.$$

Показать, что

$$a_{11} = a^2\sin^2 u^2, \quad a_{12} = 0, \quad a_{22} = a^2\cos^2 u^2 + c^2\sin^2 u^2,$$
$$b_{11} = \frac{ac\sin^2 u^2}{\sqrt{a^2\cos^2 u^2 + c^2\sin^2 u^2}}, \quad b_{12} = 0, \quad b_{22} = \frac{ac}{\sqrt{a^2\cos^2 u^2 + c^2\sin^2 u^2}}$$

и

$$K = \varkappa_{(1)}\varkappa_{(2)} = \frac{c^2}{(a^2\cos^2 u^2 + c^2\sin^2 u^2)^2}.$$

Исследовать линии кривизны на этой поверхности.

2. Найти главные кривизны поверхности, определенной уравнениями

$$y^1 = u^1, \qquad y^2 = u^2, \qquad y^3 = f(u^1, u^2).$$

3. Показать, что геликоид

$$y^1 = u^1\cos u^2, \qquad y^2 = u^1\sin u^2, \qquad y^3 = au^2$$

— поверхность отрицательной кривизны.

4. Показать, что если во всех точках поверхности $b_{11}b_{22} - b_{12}^2$ пропорционально $a_{11}a_{12} - a_{12}^2$, то $b_{\alpha\beta} = ka_{\alpha\beta}$, $k = \text{const}$. Пояснить этот результат геометрическим примером.

5. Доказать, что если каждая точка поверхности S параболическая, то поверхность S развертывающаяся.

6. Дана поверхность вращения S, $y^1 = r\cos\varphi$, $y^2 = r\sin\varphi$, $y^3 = f(r)$, причем $f(r)$ класса C^2. Доказать, что линиями кривизны на S являются меридианы $r = \text{const}$ и параллели $\varphi = \text{const}$.

7. Обратиться к задаче 6 и показать, что поверхность вращения S, для которой $f'f'' > 0$ — эллипсоид, а для которой $f'f'' < 0$ — гиперболоид; и если $f'' = 0$, то S — конус.

8. Пусть векторное уравнение кривой C, лежащей на гладкой поверхности S, имеет вид $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(s)$. Если $\boldsymbol{n}(s)$ — единичная нормаль к S в заданной точке C, а v — параметр, измеряющий расстояние вдоль $\boldsymbol{n}$, векторное уравнение $\boldsymbol{R}(s, v) = \boldsymbol{r}(s) + v\boldsymbol{n}(s)$ определяет линейчатую поверхность S'. Доказать,

что S' — развертывающаяся, если C — линия кривизны, и наоборот. Схема решения: обозначить коэффициенты во второй фундаментальной форме S' через $d_{\alpha\beta}$. Вычислить $d_{\alpha\beta}$ по формуле

$$d_{\alpha\beta} = \frac{\partial^2 \boldsymbol{R}}{\partial v^\alpha \, \partial v^\beta} \cdot \boldsymbol{N},$$

где $v^1 = s$, $v^2 = v$, а $\boldsymbol{N}$ — единичная нормаль к S'. Показать, что $d_{22} = 0$. Условие развертываемости $d_{11} d_{22} - d_{12}^2 = 0$ предполагает при этом, что $d_{12} = 0$. Но вдоль C $\boldsymbol{N} = d\boldsymbol{r}/ds \times \boldsymbol{n}$; отсюда

$$d_{12} = \frac{d\boldsymbol{n}}{ds} \cdot \frac{d\boldsymbol{r}}{ds} \times \boldsymbol{n} = 0.$$

Если $d\boldsymbol{n}/ds = 0$ вдоль C, то S' — цилиндр, т. е. развертывающаяся поверхность. Если $d\boldsymbol{n}/ds$ и $d\boldsymbol{r}/ds$ коллинеарны, то $d\boldsymbol{n} = k\, d\boldsymbol{r}$, что приводит к системе уравнений $(b_{\alpha\beta} - k a_{\alpha\beta})\, du^\beta = 0$ типа (72.3). Проследить этапы доказательства обратного утверждения.

9. Пусть C — гладкая кривая, определяемая уравнением $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(s)$. *Касательная поверхность* S к C определяется уравнением $\boldsymbol{R}(s, v) = \boldsymbol{r}(s) + v(d\boldsymbol{r}/ds)$, где v — параметр, измеренный по касательной $d\boldsymbol{r}/ds$. Доказать, что S — развертывающаяся поверхность. Кривая C называется *краем регрессии* (*возврата*) для S.

10. Доказать теорему Дюпена. Координатные поверхности каждой трижды ортогональной криволинейной координатной системы в E_3 пересекаются по линиям кривизны координатных поверхностей. *Указание*. Рассмотреть поверхность $x^3 = \text{const}$ и принять $x^1 = u^1$, $x^2 = u^2$, как поверхностные координаты при ней. Показать, что вдоль по координатным линиям $u_1 = \text{const}$, $u_2 = \text{const}$, $b_{12} = 0$, если $a_{12} = 0$. См. задачу 4 § 67.

§ 73. Параллельные поверхности

Пусть S — гладкая поверхность, определяемая уравнениями

$$y^i = y^i(u^1, u^2) \qquad (i = 1, 2, 3), \tag{73.1}$$

где координаты y^i ортогональные декартовы. Поверхность $\bar{S}$, описываемая уравнениями

$$\bar{y}^i(u^1, u^2) = y^i(u^1, u^2) + h n^i(u^1, u^2), \tag{73.2}$$

где n^i — единичная нормаль к S, и h — расстояние, измеряемое по нормали $\boldsymbol{n}$, называется *параллельной поверхностью* к S.

Параллельные поверхности фигурируют преимущественно в теории упругих пластинок и оболочек, в первую очередь в установлении отношений, связывающих гауссову кривизну K и среднюю кривизну H поверхности S с соответствующими инвариантами для поверхности $\bar{S}$.

Приступим к выводу этих соотношений, вспомнив прежде всего что базисные векторы $\boldsymbol{a}_\alpha$ вдоль кривых $u_\alpha = \text{const}$ связаны с базисными векторами $\boldsymbol{b}_i$, вдоль осей y^i следующим образом:

$$\boldsymbol{a}_\alpha = \boldsymbol{b}_i \frac{\partial y^i}{\partial u^\alpha}. \qquad [64.10]$$

Для упрощения записи введем обозначения (см. § 64)

$$\frac{\partial y^i}{\partial u^\alpha} = y^i_\alpha, \qquad \frac{\partial \bar{y}^i}{\partial u^\alpha} = \bar{y}^i_\alpha,$$

продифференцировав (73.2), получим

$$\bar{y}^i_\alpha = y^i_\alpha + h n^i_{,\alpha}, \tag{73.3}$$

так что

$$\bar{y}^i_\alpha n_i = y^i_\alpha n_i + h n^i_{,n} n_i. \tag{73.4}$$

Но $y^i_\alpha n_i = 0$, так как $\boldsymbol{a}_\alpha$ ортогонален к $\boldsymbol{n}$, а $n^i_{,\alpha} n_i = 0$, так как $n^i n_i = 1$. Таким образом, (73.4) приводится к

$$\bar{y}^i_\alpha n_i = 0. \tag{73.5}$$

С другой стороны, единичная нормаль $\bar{n}_i$ к S ортогональна к базисным векторам $\bar{y}^i_\alpha$ на S, так что

$$\bar{y}^i_\alpha \bar{n}_i = 0. \tag{73.6}$$

Из (73.5) и (73.6) заключаем, что векторы n_i и $\bar{n}_i$ коллинеарны, и поскольку они единичные векторы (орты), $n_i = \bar{n}_i$. Метрические коэффициенты $\bar{a}_{\alpha\beta}$ поверхности S задаются[1]) уравнением

$$\bar{a}_{\alpha\beta} = \bar{y}^i_\alpha \bar{y}^i_\beta,$$

которое по исследовании (73.3) дает

$$\bar{a}_{\alpha\beta} = (y^i_\alpha + h n^i_{,\alpha})(y^i_\beta + h n^i_{,\beta}) = y^i_\alpha y^i_\beta + h n^i_{,\alpha} y^i_\beta + h n^i_{,\beta} y^i_\alpha + h^2 n^i_{,\alpha} n^i_{,\beta}.$$

Подстановка в это выражение из формулы Вайнгартена (69.5)

$$n^i_{,\alpha} = a^{\delta\gamma} b_{\delta\alpha} y^i_\gamma$$

приводит к

$$\bar{a}_{\alpha\beta} = a_{\alpha\beta} - 2h b_{\alpha\beta} + h^2 n^i_{,\alpha} n^i_{,\beta}, \tag{73.7}$$

поскольку $y^i_\alpha y^i_\beta = a_{\alpha\beta}$.

Последний член в правой части формулы (73.7) может быть выражен в зависимости от гауссовой кривизны K и от средней кривизны H нижеследующим способом.

Воспользовавшись уравнением (69.5), получаем

$$n^i_{,\alpha} n^i_{,\beta} = a^{\gamma\delta} b_{\alpha\delta} y^i_\gamma a^{\lambda\mu} b_{\beta\lambda} y^i_\mu = a^{\lambda\mu} b_{\alpha\mu} b_{\beta\lambda}, \tag{73.8}$$

поскольку $y^i_\gamma y^i_\mu = a_{\gamma\mu}$. С другой стороны, уравнения Гаусса (69.10) требуют, чтобы

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = b_{\alpha\gamma} b_{\beta\delta} - b_{\alpha\delta} b_{\beta\gamma}, \tag*{[69.10]}$$

где

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = K \varepsilon_{\alpha\beta} \varepsilon_{\gamma\delta}$$

[1]) См. (64.6). Следует также помнить, что $g_{ij} = \delta_{ij}$, так как координаты y^i прямоугольные декартовы.

в силу (62.5), так что

$$K\varepsilon_{\alpha\beta}\varepsilon_{\gamma\delta} = b_{\alpha\gamma}b_{\beta\delta} - b_{\alpha\delta}b_{\beta\gamma}.$$

Умножим оба члена этого соотношения на $a^{\alpha\delta}$, суммируем по δ и заметим, что (см. § 62)

$$a^{\alpha\delta}\varepsilon_{\alpha\beta}\varepsilon_{\gamma\delta} = -a_{\beta\gamma}.$$

Находим

$$-Ka_{\beta\gamma} = a^{\alpha\delta}b_{\alpha\gamma}b_{\beta\delta} - 2Hb_{\beta\gamma}, \tag{73.9}$$

поскольку

$$H = \frac{1}{2}a^{\alpha\delta}b_{\alpha\delta}. \qquad [70.2]$$

Подстановка в первый член правой части уравнения (73.9) из (73.8) дает

$$n^i_{,\alpha}n^i_{,\beta} = -Ka_{\alpha\beta} + 2Hb_{\alpha\beta}, \tag{73.10}$$

и потому мы можем теперь придать выражению (73.3) новый вид

$$\bar{a}_{\alpha\beta} = a_{\alpha\beta}(1 - h^2K) - 2hb_{\alpha\beta}(1 - hH). \tag{73.11}$$

Важная формула (73.11) позволяет нам вычислять коэффициенты $\bar{a}_{\alpha\beta}$ в заданной точке $\bar{P}(u_1, u_2)$ на $\bar{S}$ по значениям $a_{\alpha\beta}$, $b_{\alpha\beta}$, K и H в соответствующей точке $P(u_1, u_2)$ на S.

Для того чтобы вычислить коэффициенты $\bar{b}_{\alpha\beta}$ во второй фундаментальной форме $\bar{S}$, вспомним, что

$$b_{\alpha\beta} = y^i_{\alpha,\beta} = n_i$$

в силу (67.7). С другой стороны, из (73.3)

$$\bar{y}^i_{\alpha,\beta} = y^i_{\alpha,\beta} + hn^i_{,\alpha\beta},$$

так что

$$\bar{b}_{\alpha\beta} = b_{\alpha\beta} + hn^i_{,\alpha\beta}n_i. \tag{73.12}$$

Так как координаты y^i прямоугольные декартовы, $n^i = n_i, n^in^i = 1$, то мы заключаем, что

$$n^i_{,\alpha}n^i = 0.$$

Дифференцируя это соотношение ортогональности, находим, что $n^i_{,\alpha\beta}n^i = -n^i_{,\alpha}n^i_{,\beta}$, и тогда (73.12) можно будет представить в виде

$$\bar{b}_{\alpha\beta} = b_{\alpha\beta} + hn^i_{,\alpha}n^i_{,\beta}.$$

Учитывая (73.10), получаем окончательно

$$\bar{b}_{\alpha\beta} = (1 - 2hH)b_{\alpha\beta} + hKa_{\alpha\beta}. \tag{73.13}$$

С формулами (73.11) и (73.13) мы можем встретиться в монографии Т. Томаса[1]). Они весьма близко связаны с формулами книги Л. П. Эйзенхарта[2]).

С определением коэффициентов $\bar{a}_{\alpha\beta}$ и $\bar{b}_{\alpha\beta}$ представляется возможным вычислить гауссову и среднюю кривизны: K и H из формул (70.1) и (70.2). Результат несколько трудоемкой вычислительной процедуры, с которой можно ознакомиться в упомянутой монографии Т. Томаса, имеет вид

$$\left.\begin{aligned} \bar{K} &= \frac{K}{1 + h^2 K - 2hH}, \\ \bar{H} &= \frac{H - hK}{1 + h^2 K - 2hH}. \end{aligned}\right\} \qquad (73.14)$$

Первая из этих изящных формул приводит к выводу, что в том случае, когда S — развертывающаяся поверхность, параллельные ей поверхности $\bar{S}$ также развертывающиеся.

Задачи

1. Показать, что если S — поверхность вращения, то параллельная поверхность $\bar{S}$ — также поверхность вращения. *Указание.* Учесть соотношения: $y^1 = u^1 \cos u^2$, $y^2 = u^1 \sin u^2$, $u^3 = f(u^1)$.

2. Показать, что главные радиусы $R_{(\alpha)}$ нормальной кривизны $\bar{S}$ связаны с главными радиусами $\bar{R}_{(\alpha)}$ параллельной поверхности $\bar{S}$ соотношением

$$\bar{R}_{(\alpha)} = R_{(\alpha)} - h.$$

§ 74. Теорема Гаусса — Боние

Описание поверхностей системами дифференциальных уравнений носит локальный характер, поскольку соотношения между производными передают лишь те свойства поверхностей, которые распространяются на ближайшую окрестность той или иной их точки. Для того чтобы получить результаты, сохраняющие значимость для всей поверхности в целом, надлежит произвести интегрирование. Но по причине сложности структур дифференциальных уравнений теории поверхностей, возможности получения таких результатов, распространяющихся на поверхность в целом, весьма ограничены, а полученные решения для геометрии «в целом» относятся преимущественно лишь к узко специальному классу выпуклых поверхностей. Достигнут здесь лишь один важный классический результат, связывающий интеграл гауссовой кривизны по площади произвольной гладкой поверхности с линейным интегралом геодезической кривизны, вычисленным по

---

[1]) Thomas T. Y., Concepts from tensor analysis and differential geometry, Academic Press 1961, стр. 110—111.

[2]) Eisenhart L. P., Differential geometry, Princeton Press, 1940, стр. 272.

кривой, ограничивающей площадь. Гаусс оценил этот результат как самую изящную теорему геометрии поверхностей «в целом».

Пусть D — область, ограниченная замкнутой кусочно-гладкой кривой C, проведенной на гладкой поверхности S, показанной на рис. 31. Предположим, что D гомеоморфна круглому диску[1]). Мы видели в § 63, что единичный вектор λ^α, касательный к поверхностной кривой C, связан с единичным вектором η^α, нормальным к λ^α, соотношением

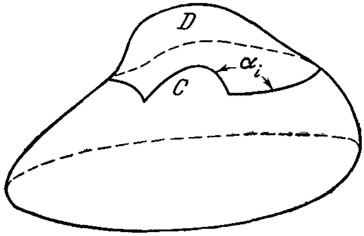

Рис. 31.

$$\frac{\delta\lambda^\alpha}{\delta s} = \varkappa_g \eta^\alpha, \qquad [63.4]$$

где $\varkappa_g$ — геодезическая кривизна C. При этом, если C — геодезическая линия, то $\varkappa_g = 0$ во всех точках C и обратно.

Так как вектор η^α ортогонален к λ^α, то из заключительного абзаца § 54 следует, что $\varepsilon_{\alpha\beta}\eta_\alpha\lambda_\beta = 1$ или

$$\eta_\alpha = \varepsilon_{\alpha\beta}\lambda^\beta.$$

Но из (63.4)

$$\varkappa_g = \eta_\alpha \frac{\delta\lambda^\alpha}{\delta s},$$

откуда

$$\varkappa_g = \varepsilon_{\alpha\beta}\lambda^\beta \frac{\delta\lambda^\alpha}{\delta s}. \qquad (74.1)$$

Интегрирование этого выражения по кривой C дает

$$\int\limits_C \varkappa_g\, ds = \int\limits_C \varepsilon_{\alpha\beta}\lambda^\beta \frac{\delta\lambda^\alpha}{\delta s}\, ds, \qquad (74.2)$$

и если линейный интеграл в правой части уравнения (74.2) преобразовать в поверхностный интеграл формулы Грина, то мы найдем, что[2])

$$\int\limits_C \varkappa_g\, ds = -\int\limits_D\int K\, d\sigma + 2\pi - \sum_i (\pi - \alpha_i), \qquad (74.3)$$

---

[1]) Две области называются *гомеоморфными*, если они могут быть взаимно отображены путем непрерывного взаимно однозначного соответствия.

[2]) Детали несложных вычислений можно найти в следующих книгах: В. А. Погорелов, Дифференциальная геометрия, Физматгиз, Москва 1959; Eisenhart L. P., Differential geometry, Princeton 1940, стр. 191; Struik D. J., Lectures on classical differential geometry, Addison-Wesley 1950, стр. 154.

где α_i — внутренние углы контура C, показанного на рис. 31, а $d\sigma = \sqrt{a}\,du^1\,du^2$ — элемент площади D поверхности. Если кривая C — гладкая, сумма $\sum_i (\pi - \alpha_i) = 0$.

Формула (74.3) резюмирует содержание *теоремы Гаусса — Бонне.* Вместо того чтобы выводить эту теорему с помощью формулы Грина, мы даем геометрическую интерпретацию формулы

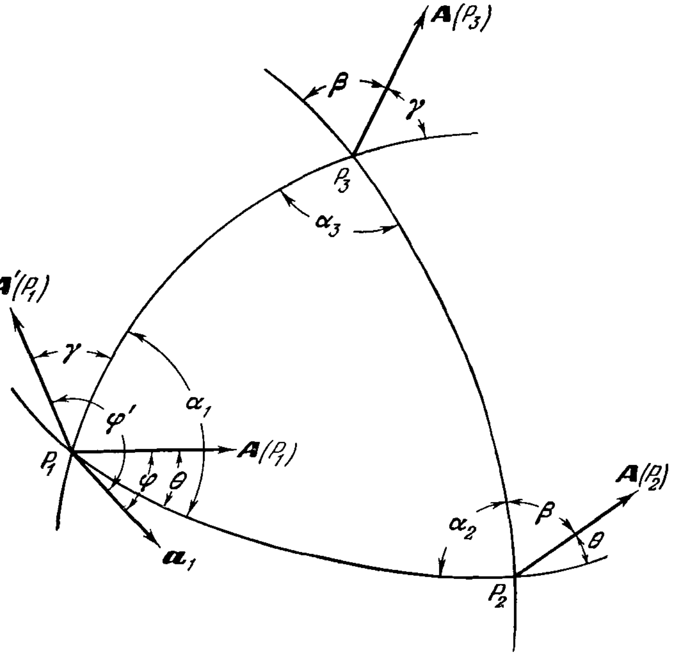

Рис. 32.

(74.3), подсказывающую иной вариант определения гауссовой кривизны.

Рассмотрим прежде всего сферу S радиуса R и сферический треугольник $P_1P_2P_3$ на S (рис. 32), образованный дугами P_1P_2, P_2P_3, P_3P_1 трех больших кругов. Обозначим внутренние углы треугольника в вершинах P_i через α_i и наложим на сферу некоторую координатную сетку (u^1, u^2). Пусть $\boldsymbol{a}_1$ — базисный вектор вдоль координатной линии u_1, берущий начало в точке P_1, а $\boldsymbol{A}(P_1)$ — произвольный поверхностный вектор, берущий начало в P_1. Обозначим угол между $\boldsymbol{a}_1$ и $\boldsymbol{A}(P_1)$ через φ. Пусть θ — угол, образуемый лучом $\boldsymbol{A}(P_1)$ с геодезической дугой P_1P_2. Если вектор $\boldsymbol{A}(P_1)$ переносится параллельно вдоль контура геодезического треугольника $P_1P_2P_3$, то он займет положение $\boldsymbol{A}'(P_1)$, показанное на рис. 32. Наша непосредственная цель — определить угол φ' между $\boldsymbol{a}_1$ и $\boldsymbol{A}'(P_1)$.

При параллельном переносе $\boldsymbol{A}(P_1)$ вдоль P_1P_2 угол θ остается постоянным (см. § 60) и вектор $\boldsymbol{A}$ займет положение $\boldsymbol{A}(P_2)$ относительно геодезической дуги P_2P_3, и тогда

$$\beta = \pi - (\alpha_2 + \theta).$$

В ходе параллельного переноса вектора $\boldsymbol{A}(P_2)$ вдоль P_2P_3 вектор $\boldsymbol{A}$ продолжает сохранять угол β с P_2P_3 и достигнув точки P_3, он примет положение $\boldsymbol{A}(P_3)$. Пусть γ — угол между $\boldsymbol{A}(P_3)$ и дугой P_1P_3; тогда

$$\gamma = \alpha_3 - \beta = \alpha_3 - [\pi - (\alpha_2 + \theta)] = \alpha_1 + \alpha_3 + \theta - \pi.$$

Продолжая переноситься вдоль P_3P_1, вектор $\boldsymbol{A}$ сохраняет постоянным угол γ, образуемый им с P_1P_3, до тех пор, пока, достигнув точки P_1, он не займет положения $\boldsymbol{A}'(P_1)$. Тогда угол φ', образуемый вектор $\boldsymbol{A}'(P_1)$ с $\boldsymbol{a}_1$, выразится алгебраической суммой

$$\varphi' = \gamma + \alpha_1 + \varphi - \theta = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \varphi - \pi,$$

откуда определится и угол $\varphi' - \varphi$, образуемый векторами $\boldsymbol{A}(P')$ и $\boldsymbol{A}(P)$:

$$\varphi' - \varphi = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - \pi. \tag{74.4}$$

Приращение $\varphi' - \varphi$, представляющее собой разность между суммой внутренних углов сферического треугольника $P_1P_2P_3$ и суммой внутренних углов плоского прямолинейного треугольника, называется *сферическим избытком* сферического треугольника $P_1P_2P_3$. Если вместо внутренних углов α мы введем внешние углы $\theta_i = \pi - \alpha_i$, формула (74.4) примет вид

$$\varphi' - \varphi = 2\pi - \sum_{i=1}^{n} \theta_i.$$

Если вектор $\boldsymbol{A}$ переносится по контуру геодезического n-стороннего многоугольника, то совершенно сходные вычисления приведут нас к значению сферического избытка для многоугольника [1])

$$\varphi' - \varphi = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i - (n-2)\pi,$$

или

$$\varphi' - \varphi = 2\pi - \sum_{i=1}^{n} \theta_i,$$

---

[1]) Заметим, что сумма внутренних углов прямолинейного многоугольника с n сторонамн равна $(n-2)\pi$ раднанам.

если мы воспользуемся внешними углами $\theta_i = \pi - \alpha_i$. Но из сферической тригонометрии известно, что сферический избыток геодезического многоугольника равен σ/R^2, где σ — площадь многоугольника, а R — радиус сферы.

Таким образом,

$$\varphi' - \varphi = 2\pi - \sum_{i=1}^{n} \theta_i = \frac{\sigma}{R^2},$$

а поскольку гауссова кривизна K для сферы равна $1/R^2$, мы вправе утверждать, что

$$K = \frac{2\pi - \sum \theta_i}{\sigma}. \tag{74.5}$$

Эта формула допускает обобщение, приводящее к формуле (74.3) Гаусса — Бонне для случая, когда C на рис. 31 представляет собой геодезический полигон. А именно, если область D разбить малыми геодезическими полигонами на подобласти площадью $d\sigma_i$, то обычные приемы интегрального исчисления, примененные к (74.5), дают нам

$$\iint_D K\,d\sigma = 2\pi - \sum_{i=1}^{n} \theta_i. \tag{74.6}$$

Эта формула совпадает с (74.3), поскольку $\varkappa_g = 0$, где C — геодезический многоугольник.

Формула (74.6), впервые полученная Гауссом, была обобщена Бонне[1]) к виду (74.3), который, как мы уже заметили, выводится непосредственно из (74.2) с использованием формулы Грина.

Левая часть формулы (74.6) $\iint_D K\,d\sigma$ называется *интегральной кривизной* D. При этом обнаруживается, что интегральная кривизна представляет собой топологический инвариант. Две поверхности называются топологически эквивалентными, если они допускают взаимное отображение путем непрерывного взаимно однозначного преобразования. Исходя из формулы (74.3), можно показать, что интегральная кривизна $\iint_D K\,d\sigma$, равна 4π, для всех регулярных поверхностей топологически эквивалентна сфере, а $\iint_D K\,d\sigma = 0$ для всех регулярных поверхностей топологически эквивалентна тору[2]).

---

[1]) Bonnet O., Journal école polytechnique 19 (1948), стр. 1—148.

[2]) См. Struik D. J., Lectures on classical differential geometry, Addison-Wesley, 1950, стр. 153—159.

§ 75. n-мерные многообразия

Целью настоящего параграфа является введение нескольких понятий из геометрии n-мерных метрических многообразий, представляющих интерес в приложениях к динамике и к теории относительности. Многие из этих понятий представляют собой непосредственные обобщения идей, введенных в этой главе в связи с изучением поверхностей, расположенных в трехмерных евклидовых многообразиях.

Будем предполагать, что элемент расстояния между двумя близко расположенными точками в n-мерном многообразии дается квадратичной формой

$$ds^2 = g_{ij}\,dx^i\,dx^j \qquad (i,\ j = 1,\ \ldots,\ n), \qquad |g_{ij}| \neq 0. \tag{75.1}$$

Обобщим определение евклидова пространства, данное в § 29, называя пространство евклидовым, если в нем существует преобразование координат x^i, приводящее элемент ds^2 к квадратичной форме с постоянными коэффициентами. Так как каждая вещественная квадратичная форма с постоянными коэффициентами может быть приведена вещественным линейным преобразованием к форме

$$ds^2 = \lambda_i\,(dx^i)^2 \qquad (\lambda_i = \pm 1), \tag{75.2}$$

то форма (75.2) может быть использована для определения евклидова n-мерного многообразия.

Если, в частности, форма (75.2) *определенная*, мы скажем, что многообразие *чисто евклидово*, а если она *неопределенная*, то многообразие назовем *псевдоевклидовым*.

О линейном многообразии, определяемом системой n уравнений

$$C\colon\ x^i = x^i(t), \qquad t_1 \leqslant t \leqslant t_2,$$

с надлежащими свойствами дифференцируемости, утверждается, что оно определяет кривую C в n-мерном многообразии.

Если форма (75.1) положительно определенная, мы скажем, что положительное число

$$s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{g_{ij}\,(dx^i/dt)\,(dx^j/dt)}\,dt$$

есть длина кривой C. Существуют определения метрических многообразий, не основывающиеся на выражении элемента дуги в форме (75.1), но они не входят здесь в круг наших интересов (см. § 43).

Вектор $\lambda^i = dx^i/ds$ определяет направление кривой, и ясно, что $g_{ij}\lambda^i\lambda^j = 1$, так что вектор λ^i — единичный вектор. Длина любого вектора A^i дается формулой

$$A = \sqrt{g_{ij}A^iA^j},$$

Понятие угловой метрики в n-мерном многообразии — это прямое непосредственное обобщение определения угла в трехмерном случае.

Если λ^i и μ^i — два единичных вектора, то мы определяем косинус угла между ними формулой

$$\cos\theta = g_{ij}\lambda^i\mu^j. \tag{75.3}$$

Из этого определения не следует, что угол θ обязательно веществен. Но мы докажем, что это всегда так, если форма $g_{ij}dx^i dx^j$ положительно определенная. Доказательство опирается непосредственно на неравенство Коши — Шварца

$$(g_{ij}x^iy^j)^2 \leqslant (g_{ij}x^ix^j)(g_{ij}y^iy^j), \tag{75.4}$$

где форма $g_{ij}x^ix^j \geqslant 0$.

Установим сначала неравенство (75.4). Пусть форма $Q(x) = g_{ij}x^ix^j$ положительно определенная. Если мы заменим в ней x^i на $x^i + \lambda y^i$, где λ — произвольный скаляр, то получим

$$Q(x+\lambda y) \equiv g_{ij}(x^i+\lambda y^i)(x^j+\lambda y^j) =$$
$$= g_{ij}x^ix^j + 2g_{ij}x^iy^j\lambda + g_{ij}y^iy^j\lambda^2 \equiv Q(x) + 2Q(x, y)\lambda + Q(y)\lambda^2.$$

Это — квадратичное выражение относительно λ с вещественными коэффициентами. В силу гипотезы $Q(x+\lambda y) \geqslant 0$, где знак равенства сохраняется в том и только в том случае, когда $x^i + \lambda y^i = 0$. Следовательно, уравнение относительно λ

$$f(\lambda) \equiv Q(y)\lambda^2 + 2Q(x, y)\lambda + Q(x) = 0$$

не имеет различных вещественных корней. Но необходимым и достаточным условием этого должно быть соотношение $[Q(x, u)]^2 - Q(y)Q(x) \leqslant 0$, т. е.

$$(g_{ij}x^iy^j)^2 \leqslant (g_{ij}x^ix^j)(g_{ij}y^iy^j).$$

Это и есть неравенство (75.4).

Если теперь в формуле (75.4) мы положим $x^i = \lambda^i$ и $y^i = \mu^i$, то получим

$$\frac{(g_{ij}\lambda^i\mu^j)^2}{(g_{ij}\lambda^i\lambda^j)(g_{ij}\mu^i\mu^j)} \leqslant 1,$$

а так как λ^i и μ^i — единичные векторы, мы имеем $(g_{ij}\lambda^i\mu^j)^2 \leqslant 1$, т. е. угол θ в формуле (75.3) вещественный.

Определим элемент объема в R_n формулой

$$d\tau = \sqrt{g}\, dx^1\, dx^2 \ldots dx^n,$$

а объем — соответствующим n-кратным интегралом.

Обобщение понятий кривизны и кручения на кривые, находящиеся в n-мерных римановых многообразиях, не представляет затруднений[1]), но процедура быстро осложняется с переходом к кручению гиперповерхностей.

Система n уравнений

$$x^i = x^i(u^1, u^2, \ldots, u^m) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \qquad m \leqslant n, \tag{75.5}$$

определяет допустимо параметризованное m-мерное многообразие или гиперповерхность в окрестности переменных u^α, если: (а) x^i в (75.5) относятся к классу C^2 и (б) якобиан-матрица $(\partial x^i/\partial u^\alpha)$ $(\alpha = 1, 2, \ldots, m)$ обладает рангом m в каждой точке окрестности.

В §§ 64—73 мы изучили двумерные римановы многообразия (поверхности), расположенные в E_3. Естественно возникает вопрос: при каких обстоятельствах m-мерное многообразие R_m с римановой метрикой

$$ds^2 = a_{\alpha\beta}\, du^\alpha\, du^\beta \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, m) \tag{75.6}$$

может быть помещено в n-мерное евклидово многообразие с

$$ds^2 = dx^i\, dx^i? \tag{75.7}$$

Уравнения (75.5) с (75.6) требуют, чтобы

$$a_{\alpha\beta} = \frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha}\frac{\partial x^i}{\partial u^\beta} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{75.8}$$

Система $\frac{1}{2}m(m+1)$ дифференциальных уравнений (75.8) в частных производных относительно n переменных x^i может быть решена только при выполнении условия $n \geqslant \frac{1}{2}m(m+1)$; иначе говоря, если $m = 2$, то $n \geqslant 3$, если $m = 3$, то $n \geqslant 6$, и т. д. Эта оценка, однако, еще не доказывает, что m-мерное многообразие может быть вложено в E_n всякий раз, когда $n \geqslant \frac{1}{2}m(m+1)$. С другой стороны, однако, представляется возможным доказать, что окрестность пространства R^n может быть вложена в E_n, если $n \geqslant \frac{1}{2}m(m+1)$. Но что касается вопроса о полном вложении всего пространства R_m в E_n, то почти никаких общих результатов не известно. Существует несколько теорем частного характера о вложении двумерных многообразий с частными топологическими характеристиками. Почти все они распространяются лишь на выпуклые двумерные многообразия[2]). Задачи вложения стоят ныне на переднем фронте научно-исследовательской работы в геометрии.

---

[1]) См., например, Gerretsen J. C. H., Lectures on tensor calculus and differential geometry, гл. 6.

[2]) См. Nirenberg L., The Weyl and Minkowski problem, Comm. on Pure and Appl. Math. 6, 1948; А. В. Погорелов, Некоторые вопросы геометрии в целом в римановом пространстве, Гостехиздат, Москва 1957.

ГЛАВА IV

АНАЛИТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

§ 76. Основные понятия. Кинематика

Аналитическая механика представляет собой математическое описание движения материальных тел, подвергающихся воздействию сил. Ее изложение строится по обычной схеме. Материальное тело предполагается состоящим из большого числа мелких частиц материи, соединенных между собой теми или иными способами. В первую очередь внимание исследователя направляется на такую отдельную частицу, причем предполагается сначала, что она свободна от каких-либо связей, а затем ее поведение анализируется в условиях воздействия на нее внешних сил. Получаемый в результате такого анализа комплекс знаний составляет *механику частицы*. Для того чтобы перейти от механики единственной частицы к механике совокупностей частиц, составляющих материальное тело, мы вводим принцип суперпозиции сил и принимаем специальные допущения относительно природы связывающих сил в зависимости от того, является ли рассматриваемое нами тело твердым, упругим, пластичным, жидким или иным.

Изучение механики сплошных сред мы начнем с анализа движения одной-единственной частицы. Мы предполагаем при этом, что такая частица представляет собой идеализированный объект, характеризуемый положением в пространстве и инерцией, но не обладающей протяженностью в пространстве. Мерой инерции является масса, и потому такую частицу называют *материальной точкой*. Другим основным понятием механики является понятие времени, возникающее из предпосылки причинной связи между физическими событиями. Гипотеза причинной связи явлений подразумевает возможность расположения событий в определенном порядке, причем время t, входящее в описание физического пространства, предстает в качестве независимого параметра, диапазон изменений которого — континуум вещественных чисел.

Мы предполагаем, что физические события происходят в трехмерном пространстве, обладающем евклидовой метрикой, а положение частиц в указанный момент времени t относим к некоторой криволинейной координатной системе отсчета X. Как и при изучении геометрии в главе III, обозначим координаты частицы относительно системы прямоугольных декартовых осей символами y^i. Из сказанного ясно, что положение частицы является понятием относительным, зависящим от выбора системы отсчета. Система координат, общепринятая в астрономии, определяется системой так называемых неподвижных звезд. Она называется *первичной инерциальной системой*. Любая иная система осей, движущихся относительно первичной инерциальной системы с постоянной скоростью, называется *вторичной инерциальной системой*. В решении многочисленных задач механики движение Земли относительно первичной инерциальной системы столь незначительно, что законы Ньютона (§ 77), выведенные в том предположении, что они имеют силу лишь в инерциальных координатных системах, в действительности, однако, допускают применение без всяких поправок и в изучении движения частиц, отнесенных к системе осей, связанной неподвижно с Землей.

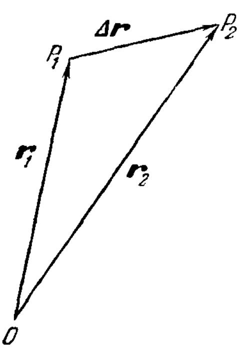

Рис. 33.

Если частица меняет свое положение в принятой системе отсчета, то говорят, что она испытывает *перемещение*. Так, например, предположим, что наша частица находится в точке P_1 в момент времени t. Ее положение в этот момент времени задается вектором $\boldsymbol{r}_1$; в последующий момент времени $t+\Delta t$ частица займет положение P_2, определяемое радиусом-вектором $\boldsymbol{r}_2$. Обозначим перемещение частицы за интервал времени Δt вектором $\overrightarrow{P_1P_2} = \Delta\boldsymbol{r}$ (рис. 33) и положим, что частица проходит в дальнейшем непрерывный путь, представляемый геометрической суммой векторов элементарных перемещений $d\boldsymbol{r}$.

Определим *среднюю скорость* частицы на перемещении $\Delta\boldsymbol{r}$ формулой $\boldsymbol{v}_{\text{ср}} = \Delta\boldsymbol{r}/\Delta t$ и допустим, что это отношение стремится к единственному пределу при $\Delta t \to 0$. Тогда мгновенная скорость $\boldsymbol{v}$ выразится формулой $d\boldsymbol{r}/dt \equiv \dot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{v}$. *Скорость $\boldsymbol{v}$ является*, конечно, *вектором*.

Случай, в котором $d\boldsymbol{r}/dt$ оказывается постоянной величиной, представляет в механике сравнительно меньший интерес, и вообще мы будем иметь дело с движениями, обладающими ускорением. С этой целью мы определяем *среднее ускорение* частицы в интервале времени Δt формулой $\boldsymbol{a}_{\text{ср}} = \Delta\boldsymbol{v}/\Delta t$ и *мгновенное ускорение* формулой

$$\boldsymbol{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\boldsymbol{v}}{\Delta t} = \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} = \ddot{\boldsymbol{r}}.$$

В дальнейшем, если это не оговорено особо, слова *скорость* и *ускорение* мы будем понимать как мгновенные значения этих величин.

Скорость и ускорение относятся в механике к *кинематическим понятиям*, в отличие от понятий, связанных с идеей *силы*. Рассмотрим эти понятия в нижеследующем параграфе.

§ 77. Законы Ньютона. Динамика

В 1687 г. Исаак Ньютон опубликовал три аксиомы или закона, из которых первый был основан на выводах из серии замечательных опытов, проведенных Галилеем (1564—1642) с твердыми телами, движущимися по наклонным плоскостям, другие же два представляли собой глубокое истолкование смысла полученных в этих экспериментах результатов. Эти законы явились отправным пунктом всего дальнейшего развития динамики, и мы приводим их здесь в почти дословном переводе с латинского текста Ньютона, каким он вышел в издании 1726 г. под заглавием «Математические начала натуральной философии» («Philosophia naturalis principia mathematica»). Современной формулировкой их в аналитической механике мы обязаны главным образом Ж. Л. Лагранжу (1736—1813), выдающееся произведение которого «Аналитическая механика» было написано в 1788 г., и У. Р. Гамильтону (1805—1865), знаменитый принцип которого резюмирует в одной формуле все содержание механики.

Законы Ньютона[1])

I. *Всякое тело продолжает оставаться в состоянии покоя или равномерного движения по прямой линии, пока оно не будет вынуждено приложенными силами изменить это состояние.*

II. *Изменение движения пропорционально приложенной движущей силе и совершается в направлении прямой линии, по которой приложена эта сила.*

---

[1]) Приведенная здесь формулировка законов Ньютона — перевод с английского текста книги И. С. Сокольникова. Существующее на русском языке издание трактата И. Ньютона «Математические начала натуральной философии» представляет собой перевод с латинского издания 1871 г., выполненный академиком А. Н. Крыловым. См. Собрание трудов, т. VII, Изд-во АН СССР, 1936. В этом переводе текст законов формулируется следующим образом:

«I. Всякое тело продолжает удерживаться в своем состоянии покоя или равномерного и прямолинейного движения, пока и поскольку оно не понуждается приложенными силами изменить это состояние.

II. Изменение количества движения пропорционально приложенной движущей силе и происходит по направлению той прямой, на которой эта сила действует.

III. Действию всегда есть равное и противоположное противодействие, иначе — взаимодействия двух тел друг на друга между собой равны и направлены в противоположные стороны». (*Прим. пер.*)

III. *Всякое действие встречает всегда равное и противоположно направленное противодействие*; *или*: *взаимодействия двух тел всегда равны и противоположно направлены по одной и той же прямой линии.*

Первый закон опирается на динамическое понятие силы и на кинематическую идею равномерного прямолинейного движения. Он приписывает антропоморфные свойства материальной частице, поддающейся влечению продолжать свое движение по прямой линии, но каким-то способом отклоняемой от своих намерений толчками или притяжением. Ньютон, несомненно, чувствовал, что понятие силы воспринимается интуитивно и не требует дальнейших объяснений. Ныне мы видим, что первый закон в действительности является следствием второго.

Второй закон движения также вводит кинематическое понятие движения и *динамическую* идею силы. Для того чтобы понять его смысл, следует заметить, что Ньютон применяет термин движение (motion) в смысле *количества движения*, т. е. произведения массы на скорость. Таким образом, «изменение движения» означает *темп изменения количества движения* на единицу времени, поэтому в векторном обозначении второй закон можно представить формулой

$$\boldsymbol{F}=\frac{d(m\boldsymbol{v})}{dt} \tag{77.1}$$

при условии, что мы выберем наши единицы измерения таким образом, чтобы коэффициент пропорциональности сохранялся постоянным и равным единице. Если считать массу неизменной, то уравнение (77.1) принимает обычный вид:

$$\boldsymbol{F}=m\boldsymbol{a}. \tag{77.2}$$

Из уравнения (77.1) видно, что если $F=0$, то и $d(mv)/dt=0$, т. е. $mv=\mathrm{const}$; и, следовательно, вектор $\boldsymbol{v}$ — постоянный вектор. На этом основании заключаем, что первый закон Ньютона является следствием второго закона.

Понятие массы можно, очевидно, определить вторым законом как функцию силы и ускорения. Предлагались многочисленные попытки определить массу и силу независимо одну от другой. Самым известным из таких определений мы обязаны Эрнсту Маху[1]), сформулировавшему определение массы на основе третьего закона движения. По нашему мнению, однако, тонкий анализ Маха в его определении массы обнаруживает некоторые логические трудности, не поддающиеся разрешению

---

[1]) Mach E., The science of mechanics. Интересное изложение этого определения приводится в книге: Lindsay R. B., Margenau H., Foundations of physics.

средствами одного лишь третьего закона. По этим соображениям наилучшим, по-видимому, выходом из положения было бы оставить один из краеугольных камней здания механики — массы или силы — без определения и включить его в состав науки механики на тех же правах, на которых математика принимает «богом созданные» целые числа.

Третий закон движения констатирует, что ускорения возникают всегда попарно. Пользуясь термином силы, мы вправе утверждать, что если сила действует на данное тело, то это тело оказывает равное противоположно направленное воздействие силы на какое-либо иное тело. Ньютон называл два аспекта силы *действием* и *противодействием* (реакцией) — терминами, вошедшими и в обычные формулировки закона.

Масса, входящая в формулировку законов Ньютона, называется иногда *инертной массой* (или просто *инерцией*) для того, чтобы отличить ее от *гравитационной* массы M, входящей в закон тяготения Ньютона. Этот закон утверждает, что сила притяжения между частицами пропорциональна произведению их масс, обратно пропорциональна квадрату расстояния r между ними и направлена по прямой линии, соединяющей частицы. В обычных обозначениях закон формулируется таким образом:

$$\boldsymbol{F} = k\,\frac{M_1 M_2}{r^3}\,\boldsymbol{r}, \tag{77.3}$$

где k — универсальная константа, а $\boldsymbol{r}$ — вектор, направленный от массы M_1 к массе M_2.

Если принять, как это обычно делается, что гравитационная и инертная массы равны, закон (77.3) дает практический способ сравнения масс с помощью коромысловых весов.

Для того чтобы развить науку механики для системы, состоящей более чем из двух частиц, к ньютоновым законам необходимо присоединить принцип суперпозиции сил и ввести дальнейшие гипотезы, относящиеся к природе связей.

§ 78. Уравнения движения частицы. Работа. Энергия

Пусть положение движущейся частицы P определяется вектором $\boldsymbol{r}$. Если криволинейные координаты конечной точки вектора $\boldsymbol{r}$ обозначить через $x^i(t)$, то движение частицы по проходимому ею пути C можно представить уравнением

$$C\colon\ x^i = x^i(t), \tag{78.1}$$

в котором кривая C называется *траекторией* частицы.

Скорость точки P представляет собой вектор $v = dr/dt$, компонентами которого являются

$$v^i = \frac{dx^i}{dt}. \tag{78.2}$$

Ускорение $a = d\boldsymbol{v}/dt = d^2\boldsymbol{r}/dt^2$ имеет компоненты (см. §§ 46 и 47)

$$a^i = \frac{\delta v^i}{\delta t} = \frac{d^2x^i}{dt^2} + \left\{ {i \atop jk} \right\} \frac{dx^j}{dt} \frac{dx^k}{dt}, \tag{78.3}$$

где $\delta v^i/\delta t$ — внутренняя производная, а $\left\{ {i \atop jk} \right\}$ — символы Кристоффеля, вычисляемые из метрического тензора g_{ij}, связанного с системой отсчета X.

Если масса точки P равна m, то второй закон движения Ньютона дает уравнение $\boldsymbol{F} = m\, d^2\boldsymbol{r}/dt^2$ или

$$F^i = m \frac{\delta v^i}{\delta t} = ma^i. \tag{78.4}$$

В прямоугольных декартовых координатах уравнение (78.4) принимает обычный вид $F^i = m\, d^2y^i/dt^2$.

Введем теперь понятие энергии, которое позволит нам облечь теорию в более изящную формулировку. Понятие энергии употреблялось еще Галилеем, заметившим, что «выигрыш в энергии есть проигрыш в скорости», однако впервые четко понятие энергии как количества, равного произведению массы на квадрат скорости частицы (vis viva — «живая сила») было введено в механику Гюйгенсом в XVII столетии. Полное же использование этой идеи и обнаружение ее связи с понятием работы заставило себя долго ждать и реализовалось лишь в XIX веке.

Определим *элемент работы*, произведенной силой $\boldsymbol{F}$ на перемещении $d\boldsymbol{r}$, инвариантом $dW = \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r}$, и так как компонентами $\boldsymbol{F}$ и $d\boldsymbol{r}$ являются соответственно F^i и dx^i, то это скалярное произведение равно

$$dW = g_{ij} F^i dx^j = F_j\, dx^j, \tag{78.5}$$

где $F_j = g_{ij}F^i$ — ковариантные компоненты вектора $\boldsymbol{F}$. Мы будем предполагать вообще, что функции $F^i(x)$, определяющие векторное поле $\boldsymbol{F}$, принадлежат классу C^1. Работа, произведенная на перемещении частицы по траектории C, соединяющей пару точек P_1 и P_2, выражается криволинейным интегралом

$$W = \int_{P_1}^{P_2} F_i\, dx^i. \tag{78.6}$$

Воспользовавшись вторым законом движения Ньютона (78.4), преобразуем (78.6) к виду

$$W = \int_{P_1}^{P_2} m g_{ij} \frac{\delta v^i}{\delta t} dx^j = \int_{t_1}^{t_2} m g_{ij} \frac{\delta v^i}{\delta t} v^j \, dt. \tag{78.7}$$

Но

$$\frac{\delta (g_{ij} v^i v^j)}{\delta t} = 2 g_{ij} \frac{\delta v^i}{\delta t} v^j,$$

а поскольку $g_{ij} v^i v^j$ — инвариант,

$$\frac{\delta (g_{ij} v^i v^j)}{\delta t} = \frac{d}{dt} (g_{ij} v^i v^j),$$

и отсюда

$$\frac{d}{dt} (g_{ij} v^i v^j) = 2 g_{ij} \frac{\delta v^i}{\delta t} v^j.$$

Подстановка этого результата в подынтегральное выражение (78.7) дает

$$W = \int_{t_1}^{t_2} \frac{m}{2} \frac{d}{dt} (g_{ij} v^i v^j) \, dt = \frac{m}{2} g_{ij} v^i v^j \Big|_{P_1}^{P_2} = T_2 - T_1, \tag{78.8}$$

где

$$T \equiv \frac{m}{2} g_{ij} v^i v^j = \frac{mv^2}{2}.$$

Мы приходим к результату, что работа, произведенная силой F на перемещении частицы от точки P_1 до точки P_2, равна разности значений величины $T = \frac{1}{2} mv^2$ в конце и в начале перемешения. Мы определим величину $T = \frac{1}{2} mv^2$, составляющую в точности половину «живой силы» (vis viva) Гюйгенса, как *кинетическую энергию частицы.*

Формула (78.8) может быть интерпретирована как

Теорема. *Работа, произведенная на перемещении частицы по ее траектории, равна изменению кинетической энергии частицы.*

Может случиться, что силовое поле F_i таково, что интеграл (78.6) не зависит от пути. В этом случае подынтегральная величина $F_i dx^i$ является точным дифференциалом

$$dW = F_i \, dx^i \tag{78.9}$$

функции работы W. Отрицательное значение функции работы W называется *силовым потенциалом* или *потенциальной энергией.*

Мы обозначим потенциальную энергию символом V и заключим из (78.9), что

$$F_i = -\frac{\partial V}{\partial x^i}. \tag{78.10}$$

Силовые поля, для которых существуют потенциальные функции, называются *консервативными*. Имеется простой критерий установления консервативности силового поля.

Теорема. *Необходимым и достаточным условием для того, чтобы силовое поле F_i, определенное в односвязной области, было консервативным, является равенство $F_{i,j} = F_{j,i}$.*

Доказательство этой теоремы следует непосредственно из замечания, что необходимое и достаточное условие для того, чтобы выражение $F_i dx^i$ было точным дифференциалом однозначной функции V, сводится к равенству

$$\frac{\partial F_i}{\partial x^j} = \frac{\partial F_j}{\partial x^i}, \tag{78.11}$$

поскольку эти производные предполагаются непрерывными функциями[1]. Но

$$F_{i,j} = \frac{\partial F_i}{\partial x^j} - \left\{ {k \atop ij} \right\} F_k,$$

поскольку же $\left\{ {k \atop ij} \right\}$ симметричен относительно i и j, заключаем, что условие (78.11) полностью эквивалентно устанавливаемому вышеприведенной теоремой.

В заключение отметим, что параллельное силовое поле § 48 необходимо консервативно, так как условием для того, чтобы векторное поле F_i было параллельным, является равенство $F_{i,j} = 0$.

§ 79. Уравнения движения Лагранжа

Иную в сравнении с ньютоновым законом (78.4), выраженным в терминах кинетической энергии частицы, формулировку получил этот же закон у Лагранжа, исходившего из принципа, с которым мы познакомимся в § 84. В настоящем параграфе мы выведем эти уравнения непосредственным вычислением, опираясь на второй закон движения Ньютона.

Кинетическую энергию $T = \frac{1}{2} mv^2$ можно представить таким выражением

$$T = \frac{m}{2} g_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j, \tag{79.1}$$

[1]) Если область многосвязна, условия (78.11) еще продолжают гарантировать существование потенциала V, связанного с F_i формулой (78.11), но в этом случае функция V вообще многозначна.

так как $\dot{x}^i = v^i$. Если продифференцировать (79.1) по $\dot{x}^i$, то мы получим $\partial T/\partial \dot{x}^i = mg_{ij}\dot{x}^j$. Производная этого выражения по t получает вид

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}^i}\right) = m\left(g_{ij}\ddot{x}^j + \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\dot{x}^k\dot{x}^j\right).$$

Вычтя из нее производную (79.1) по x^i, а именно

$$\frac{\partial T}{\partial x^i} = \frac{m}{2}\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i}\dot{x}^j\dot{x}^k,$$

находим

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}^i}\right) - \frac{\partial T}{\partial x^i} = m\left[g_{ij}\ddot{x}^j + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i}\right)\dot{x}^j\dot{x}^k\right] =$$

$$= m\{g_{ij}\ddot{x}^j + [jk, i]\,\dot{x}^j\dot{x}^k\} = mg_{il}\left(\ddot{x}^l + \left\{ {l \atop jk} \right\}\dot{x}^j\dot{x}^k\right).$$

Но в силу (78.3) выражение в скобках в правой части представляет собой ускорение a^l, а поскольку $mg_{il}a^l = ma_i = F_i$, мы вправе написать

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}^i}\right) - \frac{\partial T}{\partial x^i} = F_i. \qquad (79.2)$$

Уравнения (79.2) передают содержание второго закона Ньютона в форме, предложенной Лагранжем.

Для консервативной системы $F_i = -\partial V/\partial x^i$ и уравнения (79.2) преобразуются в

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}^i}\right) - \frac{\partial T}{\partial x^i} = -\frac{\partial V}{\partial x^i} \qquad (79.3)$$

или

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}^i}\right) - \frac{\partial (T - V)}{\partial x^i} = 0. \qquad (79.4)$$

Вспомним, что потенциальная энергия V является функцией одних лишь координат x^i; если поэтому ввести *функцию Лагранжа*

$$L \equiv T - V,$$

то уравнению (79.4) можно будет придать вид

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}\right) - \frac{\partial L}{\partial x^i} = 0. \qquad (79.5)$$

В применении уравнений Лагранжа к частным задачам чаще приходится иметь дело с *физическими* компонентами $\overline{F}^i$ вектора силы $\boldsymbol{F}$, чем с *тензорными* компонентами F^i. Вспомним, что физические компоненты $\boldsymbol{F}$ являются коэффициентами в выражении

$$\boldsymbol{F} = \overline{F}^i\boldsymbol{e}_i,$$

где $\boldsymbol{e}_i$ — единичные векторы, совпадающие по направлениям с базисными векторами $\boldsymbol{a}_i$ (см. § 48). Так как $\boldsymbol{F} = F^i\boldsymbol{a}_i$, а $\boldsymbol{a}_i\cdot\boldsymbol{a}_j = g_{ij}$, то физические компоненты $\overline{F}^i$ связаны с тензорными компонентами F^i формулой $\overline{F}^i = \sqrt{g_{ii}}\,F^i$ (без суммирования индексов).

Задачи

1. Показать, что ковариантные компоненты вектора ускорения в сферической координатной системе $ds^2 = (dx^1)^2 + (x^1dx^2)^2 + (x^1)^2\sin^2 x^2(dx^3)^2$ определяются следующими выражениями:

$$a_1 = \ddot{x}^1 - x^1(\dot{x}^2)^2 - x^1(\dot{x}^3\sin x^2)^2,$$

$$a_2 = \frac{d}{dt}\left[(x^1)^2\dot{x}^2\right] - (x^1)^2\sin x^2\cos x^2(\dot{x}^3)^2,$$

$$a_3 = \frac{d}{dt}\left[(x^1\sin x^2)^2\dot{x}^3\right].$$

Вывести эти выражения из формулы (78.3), а также из уравнения Лагранжа (79.2). *Указание.* $F_i = ma_i$, $T = \frac{m}{2}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \frac{mg_{ij}}{2}\dot{x}^i\dot{x}^j$.

2. Использовать уравнения Лагранжа в доказательстве того, что если частица не подвергается действию сил, то ее траектория выражается уравнением $y^i = a^it + b^i$, где a^i и b^i — постоянные величины, а y^i — прямоугольные декартовы координаты.

3. Найти с помощью уравнений Лагранжа траекторию частицы, движущейся в однородном гравитационном поле. *Указание.* $T = \frac{1}{2}m\dot{y}^i\dot{y}^i$ и $V = mgy^3$, где y^3 — нормаль к плоскости Земли.

4. Вывести из уравнений Ньютона уравнение энергии $T + V = h$, где h — постоянная величина. *Указание.* Показать, что $dT/dt = ma_jv^j = -dV/dt$.

5. Доказать, что если частица движется таким образом, что ее скорость постоянна по величине, то ее вектор ускорения либо ортогонален к вектору скорости, либо равен нулю. *Указание.* Вычислить внутренние производные от $v^2 = g_{ij}v^iv^j$.

6. Мы показали в § 79, что $\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{x}^i} - \frac{\partial T}{\partial x^i}$ является ковариантным вектором F_i в тех случаях, когда $T(x,\dot{x})$ — инвариант, определяемый формулой (79.1). Доказать в более общем плане, что если $W(x,\dot{x})$ инвариант, то как $\partial W/\partial\dot{x}^i$, так и $\frac{d}{dt}\frac{\partial W}{\partial \dot{x}^i} - \frac{\partial W}{\partial x^i}$ — ковариантные векторы. *Указание.* Пусть $x^i = x^i(q^1, q^2, q^3)$ — допускаемое преобразование координат. Вычислить $\dot{x}^i$, показать, что $\partial\dot{x}^i/\partial\dot{q}^j = \partial x^i/dq^j$ и заметить, что инвариантность $W(x,\dot{x})$, требует, чтобы $W(x,\dot{x}) = W[x(q),\dot{x}(q)] \equiv \overline{W}(q,\dot{q})$.

§ 80. Применения уравнений Лагранжа

В качестве иллюстрации к использованию уравнений Лагранжа в вычислении траекторий рассмотрим несколько примеров, включающих важные случаи движения частиц по гладким кривым и поверхностям.

1. *Свободно движущаяся частица.* Если частица не подвергается действию сил, правая часть уравнения (79.2) обращается в нуль, и мы получаем

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}^i}\right) - \frac{\partial T}{\partial x^i} = 0. \tag{80.1}$$

Если в избранной системе отсчета координаты x^i прямоугольные декартовы, то $T = (m/2)\dot{y}^i\dot{y}^i$, и тогда уравнение (80.1) даст $m\ddot{y}^i = 0$. Интегрирование этого уравнения дает $y^i = a^i t + b^i$, т. е. уравнение прямой линии.

2. *Постоянное гравитационное поле.* На этот раз мы опять принимаем декартову координатную систему, в которой ось y^3 нормальна к плоскости Земли. Потенциал постоянного гравитационного поля $V = mgy^3$, если за положительное направление оси y^3 принять направление вверх. В этом случае уравнения (79.2) дают

$$\ddot{y}^1 = 0, \quad \ddot{y}^2 = 0, \quad \ddot{y}^3 = -g,$$

так что траектория определяется уравнениями

$$y^\alpha = a^\alpha t + b^\alpha \qquad (\alpha = 1,\ 2),$$

$$y^3 = -\frac{1}{2} gt^2 + at + b.$$

Эта траектория, очевидно, — парабола с осью, направленной параллельно оси y^3.

3. *Движение частицы по кривой.* Пусть частица вынуждена двигаться по кривой C, уравнения которой имеют вид

$$x^i = x^i(s) \qquad (i = 1,\ 2,\ 3), \tag{80.2}$$

где s — параметр дуги. Предположим, что C обладает непрерывно вращающейся касательной такой, что $x^i(s)$ принадлежит классу C^2.

Компоненты v^i вектора v скорости частицы выражаются производными

$$v^i = \frac{dx^i}{dt} = \frac{dx^i}{ds}\frac{ds}{dt} = v\lambda^i, \tag{80.3}$$

где $\lambda^j = dx^j/ds$ — компоненты единичного вектора, касательного к C, а $v = ds/dt$ — величина v.

Компоненты a^i вектора ускорения a определяются путем вычисления внутренней производной (80.3) по t:

$$a^i = \frac{dv}{dt}\lambda^i + v\frac{\delta\lambda^i}{\delta t}, \tag{80.4}$$

где $\delta v/\delta t = dv/dt$, поскольку v — скаляр. Но

$$\frac{\delta\lambda^i}{\delta t} = \frac{\delta\lambda^i}{\delta s}\frac{ds}{dt} = v\frac{\delta\lambda^i}{\delta s} = v\varkappa\mu^i \tag{80.5}$$

— здесь мы привлекли формулу Френе

$$\frac{\delta\lambda^i}{\delta s} = \varkappa\mu^i, \quad \varkappa > 0, \qquad [50.1]$$

определяющую кривизну $\varkappa$ и главный нормальный вектор μ.

Производя подстановку из (80.5) в (80.4), получаем

$$a^i = \frac{dv}{dt}\lambda^i + \varkappa v^2\mu^i, \qquad (80.6)$$

т. е. формулу, констатирующую, что вектор ускорения a лежит в оскулирующей плоскости кривой. Кроме того, компонент в касательном направлении равен темпу изменения скорости v, в то время как компонент в направлении главной нормали равен v^2/R, где $R = 1/\varkappa$ — радиус кривизны C.

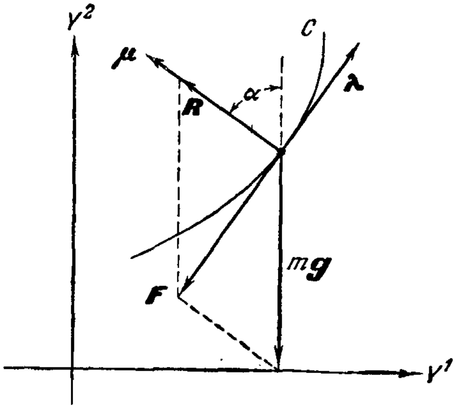

Рис. 34.

Сила $F = ma$, действующая на частицу массы m, которая движется по кривой C, определяется формулой

$$F^i = m\frac{dv}{dt}\lambda^i + m\varkappa v^2\mu^i. \qquad (80.7)$$

Следует заметить, что F^i — результирующая всех внешних сил, действующих на частицу, и потому F включает реакцию R кривой на частицу. Поскольку F лежит в соприкасающейся плоскости кривой, компомент всех внешних сил, нормальных к этой плоскости, равен нулю. Это условие позволяет нам вычислить реакцию R в общем случае. В механике кривая C называется гладкой, если реакция R нормальна [1]) к C, т. е. если $R^i\lambda_i = 0$. Если $R = 0$, кривая C называется *натуральной* (естественной) *траекторией* частицы.

В качестве иллюстрации рассмотрим шарик массы m, скользящий под действием силы тяжести по гладкой кривой C, лежащей в вертикальной плоскости Y^1Y^2 (рис. 34).

Сила F, действующая на m, равна

$$F = mg + R,$$

[1]) Это равносильио утверждению, что сила трения равна нулю. Термин «гладкий», употребляемый в механике, имеет иной смысл, чем в геометрии, где «гладкая кривая» обозначает кривую с иепрерывно вращающейся касательной.

где $\boldsymbol{R}$ — давление, производимое кривой на частицу, а $m\boldsymbol{g}$ — сила тяжести. Так как кривая — гладкая, то $\boldsymbol{R}$ нормальна к C. Если α — угол между направлением $\boldsymbol{R}$ и положительным направлением оси Y^2, то компоненты $\boldsymbol{F}$ в направлениях касательной λ и главной нормали μ равны

$$F_{(\lambda)} = -mg\sin\alpha, \quad F_{(\mu)} = -mg\cos\alpha + R.$$

Опираясь на (80.7), заключаем:

$$m\frac{dv}{dt} = -mg\sin\alpha, \quad m\varkappa v^2 = -mg\cos\alpha + R. \tag{80.8}$$

Но $\cos\alpha = dy^1/ds$, $\sin\alpha = dy^2/ds$ и $dv/dt = (dv/ds)(ds/dt)$. Поэтому первое из уравнений (80.8) дает

$$mv\frac{dv}{ds} = -mg\frac{dy^2}{ds},$$

откуда

$$\frac{1}{2}mv^2 = -mgy^2 + \text{const}. \tag{80.9}$$

Так как в этом случае компонент реакции $\boldsymbol{R}$ в направлении движения равен нулю, мы могли бы записать уравнение (80.9) непосредственно из уравнения энергии $T + V = \text{const}$.

Уравнение (80.9) определяет скорость v вдоль C в функции от y^2. Второе уравнение в (80.8) позволит тогда определить R как функцию кривизны $\varkappa$. Если кривая негладкая, направление реакции $\boldsymbol{R}$ уже не будет нормальным к C, а угол α будет зависеть от коэффициента трения.

Как конкретный пример рассмотрим частицу массы m, движущуюся под воздействием силы тяжести по гладкой циклоиде:

$$\begin{aligned} y^1 &= a(\theta - \sin\theta), \\ y^2 &= a(1 + \cos\theta), \end{aligned} \quad -\pi \leqslant \theta \leqslant \pi, \tag{a}$$

как это показано на рис. 35. В таком случае первое из уравнений (80.7) даст

$$m\frac{d^2s}{dt^2} = -mg\frac{dy^2}{ds}, \tag{б}$$

где

$$s = \int_0^\theta \sqrt{(dy^1)^2 + (dy^2)^2} = a\int_0^\theta \sqrt{2(1-\cos\theta)}\,d\theta =$$
$$= 2a\int_0^\theta \sin\frac{\theta}{2}\,d\theta = 4a\left(1 - \cos\frac{\theta}{2}\right).$$

Так как $\cos^2\frac{\theta}{2}=\frac{1}{2}(1+\cos\theta)$, то, учтя второе из уравнений (а), выведем

$$y^2=\frac{(s-4a)^2}{8a}.$$

Соответственно (б) даст уравнение

$$\ddot{s}+\frac{g}{4a}s=g,$$

общее решение которого имеет вид

$$s=c_1\cos\left(\sqrt{g/4a}\,t+c_2\right)+4a. \tag{в}$$

Постоянные интегрирования c_1 и c_2 определятся из начального положения и начальной скорости m на циклоиде.

Из (в) ясно, что период движения не зависит от амплитуды c_1, а равен $2\pi/\sqrt{g/4a}$. Этот факт был открыт X. Гюйгенсом около

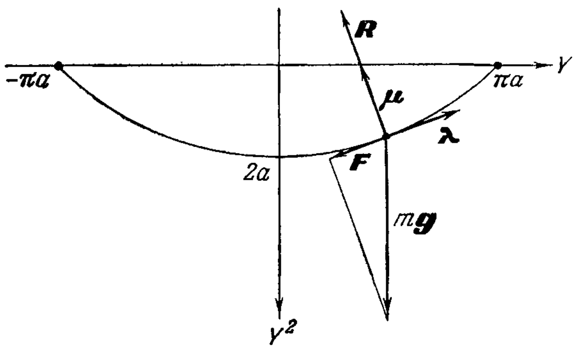

Рис. 35.

300 лет тому назад. Гюйгенс предложил применение циклоидального маятника в устройстве изохронных часов. Вычисления, основанные на применении второго уравнения (80.8), показывают, что $R=2mg\cos\alpha$.

Задачи

1. Вывести дифференциальные уравнения для простого маятника длиной l и показать, что для малых колебаний период равен $2\pi/\sqrt{g/l}$.

2. Вывести уравнения движения для частицы, движущейся под воздействием силы тяжести по гладкой винтовой линии:

$$y^1=a\cos\theta,\quad y^2=a\sin\theta,\quad y^3=k\theta.$$

Обратить внимание на то, что поскольку винтовая линия гладкая, реакция R нормальна к винтовой линии, и потому компонент результирующей силы F в направлении касательной равен компоненту гравитационной силы mg в том же направлении. Последний компонент может быть вычислен из гравитационного потенциала $V = mgy^3$. Далее, в силу уравнения (80.9) уравнение энергии дает в этом случае $\frac{1}{2}m\left(v^2 - v_0^2\right) = mg\left(y^3 - y_0^3\right)$.

3. Показать, что если частица массы m движется по гладкой параболе, ось которой вертикальна, а вершина обращена вниз, то реакция $R = m(v^2 - v'^2)$, где v' — та скорость частицы m, для которой парабола является натуральной траекторией, а v — скорость вынужденного движения.

4. *Движение частицы по поверхности.* Пусть уравнения регулярной поверхности S заданы в параметрической форме

$$S\colon\ x^i = x^i(u^1, u^2) \qquad (i = 1, 2, 3), \tag{80.10}$$

и пусть частица массы m вынуждена двигаться по S под действием силы $\boldsymbol{F}$. Сила $\boldsymbol{F}$ — результирующая всех внешних сил, действующих на частицу, и потому включающая также реакцию $\boldsymbol{R}$ поверхности на частицу. Если поверхность гладкая, $\boldsymbol{R}$ нормальна к S и представляет собой давление, вынуждающее частицу оставаться на S.

Пространственные компоненты v^i вектора скорости $\boldsymbol{v}$ частицы связаны с поверхностными компонентами v^α формулой [1])

$$v^i = \frac{dx^i}{dt} = \frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha}\frac{du^\alpha}{dt} = x^i_\alpha \dot{u}^\alpha \qquad (\alpha = 1, 2),$$

или

$$v^i = x^i_\alpha v^\alpha, \tag{80.11}$$

где $v^\alpha = \dot{u}^\alpha$.

Ускорение $a^i = \delta v^i/\delta t$; отсюда уравнение (80.11) дает

$$a^i = x^i_\alpha \frac{\delta v^\alpha}{\delta t} + \frac{\delta x^i_\alpha}{\delta t} v^\alpha$$

или

$$a = x^i_\alpha a^\alpha + x^i_{\alpha,\beta} v^\alpha v^\beta, \tag{80.12}$$

где $a^\alpha \equiv \delta v^\alpha/\delta t$.

Если воспользоваться формулой Гаусса

$$x^i_{\alpha,\beta} = b_{\alpha\beta} n^i, \tag*{[67.7]}$$

уравнение (80.12) примет вид

$$a^i = x^i_\alpha a^\alpha + b_{\alpha\beta} v^\alpha v^\beta n^i. \tag{80.13}$$

Таким образом,

$$a^i = x^i_\alpha a^\alpha + b_{\alpha\beta} v^2 \lambda^\alpha \lambda^\beta n^i,$$

а так как нормальная кривизна $\varkappa_{(n)} = b_{\alpha\beta}\lambda^\alpha\lambda^\beta$, то мы получим

$$a^i = x^i_\alpha a^\alpha + v^2 \varkappa_{(n)} n^i.$$

---

[1]) См. уравнение (64.5). Читателю следует остерегаться смешивать базисные векторы $\boldsymbol{a}^\alpha$, использованные в главе III, с компонентами ускорения a^α, использованными в этом параграфе.

Поскольку $F^i = ma^i$, находим

$$F^i = mx^i_\alpha a^\alpha + mv^2\varkappa_{(n)}n^i. \tag{80.14}$$

Первый член в правой части уравнения (80.14) — компонент $\boldsymbol{F}$ в касательной плоскости к S, второй же член — компонент $\boldsymbol{F}$ по нормали $\boldsymbol{n}$. Его развернутое выражение принимает вид

$$F^i n_i = mx^i_\alpha n_i a^\alpha + mv^2\varkappa_{(n)}n^i n_i = 0 + mv^2\varkappa_{(n)}, \tag{80.15}$$

поскольку поверхностные векторы x^i_α ортогональны к n_i и $n^i n_i = 1$. Компоненты же $\boldsymbol{F}$ в плоскости, касательной к S, принимают вид

$$g_{ij}x^j_\gamma F^i = mg_{ij}x^j_\gamma x^i_\alpha a^\alpha + mv^2\varkappa_{(n)}g_{ij}x^j_\gamma n^i = ma_{\gamma\alpha}a^\alpha + 0,$$

поскольку $g_{ij}x^i_\gamma x^i_\alpha = a_{\gamma\alpha}$ в силу (64.6), а $g_{ij}x^j_\gamma n^i = 0$, так как поверхностные векторы x^j_γ образуют прямой угол с n_j. Если это соотношение переписать сокращенно:

$$x^j_\gamma F_j = ma_\gamma$$

и положить $F_\gamma \equiv x^j_\gamma F_j$, то мы получим пару ньютоновых уравнений

$$F_\gamma = ma_\gamma, \tag{80.16}$$

связывающих поверхностный вектор силы F_γ с поверхностным вектором ускорения a_γ.

Уравнения (80.16) можно преобразовать к эквивалентному лагранжевому виду, заметив, что кинетическая энергия $T = \frac{1}{2}mv^2$,

$$T = \frac{m}{2}a_{\alpha\beta}v^\alpha v^\beta = \frac{m}{2}a_{\alpha\beta}\dot{u}_\alpha\dot{u}_\beta.$$

Как и в § 79, получим

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{u}^\alpha}\right) - \frac{\partial T}{\partial u^\alpha} = F_\alpha, \tag{80.17}$$

где F_α определяется из (80.16). Если силовое поле консервативно $F_\alpha = -\partial V/\partial u_\alpha$, где V — потенциал.

Мы можем вывести уравнение, аналогичное уравнению (80.6), для ускорения по траектории частицы, движущейся по S. Скорость v^α частицы на траектории равна $v^\alpha = v\lambda^\alpha$; отсюда

$$a^\alpha = \frac{\delta v^\alpha}{\delta t} = \frac{dv}{dt}\lambda^\alpha + v\frac{\delta\lambda^\alpha}{\delta t} = \frac{dv}{dt}\lambda^\alpha + v^2\frac{\delta\lambda^\alpha}{\delta s}.$$

Если вспомнить, что

$$\frac{\delta\lambda^\alpha}{\delta s} = \varkappa_g\eta^\alpha, \qquad [71.6]$$

где η^α — единичная нормаль к траектории в касательной плоскости, а $\varkappa_g$ — геодезическая кривизна, то мы можем написать

$$a^\alpha = \frac{dv}{dt}\lambda^\alpha + v^2\varkappa_g\eta^\alpha = v\frac{dv}{ds}\lambda^\alpha + v^2\varkappa_g\eta^\alpha,$$

и заключить отсюда

$$a^\alpha = \frac{1}{2}\frac{dv^2}{ds}\lambda^\alpha + \varkappa_g v^2\eta^\alpha.$$

Из полученного результата следует [см. уравнение (80.7)], что

$$F^\alpha = \frac{dT}{ds}\lambda^\alpha + 2T\varkappa_g\eta^\alpha,$$

где $T = mv^2/2$. Если вектор F^α обращается тождественно в нуль, то $dT/ds = 0$, а $\varkappa_g = 0$ на траектории.

Первое из этих уравнений констатирует, что $v = \text{const}$ и если $v \neq 0$, то траектория будет геодезической линией в силу теоремы § 63.

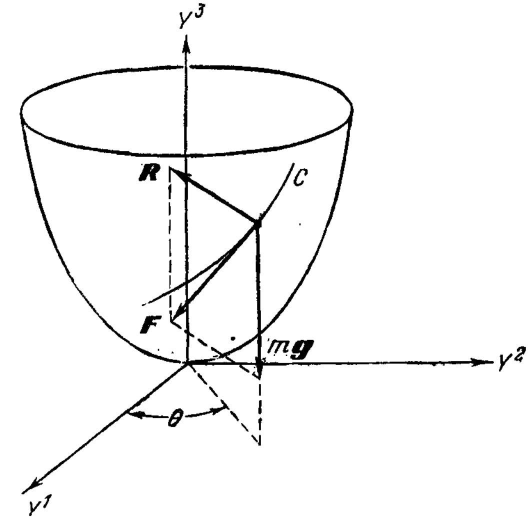

Рис. 36.

В качестве иллюстрации применения уравнений (80.17) рассмотрим частицу массы m, вынужденную двигаться под воздействием силы тяжести по гладкому параболоиду вращения (рис. 36)

$$y^3 = \frac{1}{4a}\left[(y^1)^2 + (y^2)^2\right], \quad a = \text{const}. \tag{80.18}$$

Если ввести цилиндрические координаты (r, θ, z), положив

$$y' = r\cos\theta, \quad y^2 = r\sin\theta, \quad y^3 = z,$$

то уравнение (80.18) преобразуется в

$$z = \frac{r^2}{4a}, \tag{80.19}$$

выражение же для кинетической энергии $T = \frac{1}{2}m\dot{y}^i\dot{y}^i$ принимает вид

$$T = \frac{m}{2}\left[\left(1 + \frac{r^2}{4a^2}\right)\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right].$$

Потенциальная энергия гравитационного поля равна $V = mgy^3$, принимающая, если учесть (80.19), форму $V = mgr^2/4a$. Так как поверхность гладкая, реакция $\boldsymbol{R}$ направлена нормально к S, и мы вправе воспользоваться уравнениями (80.17) с учетом формулы $F_\alpha = -\partial V/\partial u^\alpha$.

Введем параметрические координаты для поверхности, положив $u^1 = r$, $u^2 = \theta$. Подставив их в (80.17) и в выражения для T и $F_\alpha = -\partial V/\partial u^\alpha$, получим два уравнения

$$\begin{gathered}\left(1+\frac{r^2}{4a^2}\right)\ddot{r}+\frac{r\dot{r}^2}{4a^2}-r^2\dot{\theta}^2=-\frac{gr}{2a},\\ \frac{d}{dr}(r^2\dot{\theta})=0.\end{gathered} \tag{80.20}$$

Второе из уравнений (80.20) дает после интегрирования уравнение момента

$$r^2\dot{\theta}=h, \qquad h=\text{const}. \tag{80.21}$$

Исключение $\dot{\theta}$ из первого уравнения (80.20) с использованием (80.21) дает

$$\left(1+\frac{r^2}{4a^2}\right)\ddot{r}+\frac{r\dot{r}^2}{4a^2}-\frac{h^2}{r^3}=-\frac{gr}{2a} \tag{80.22}$$

— уравнение, имеющее единственное решение, если заданы начальное положение $r = r_0$ и начальная скорость $\dot{r} = v_0$ частицы.

Если наша частица вынуждена двигаться по горизонтальной окружности $r = \text{const}$, (80.22) требует, чтобы $h^2 = gr^4/2a$, тогда уравнение (80.21) свидетельствует, что $\dot{\theta}^2 = g/2a$, так что угловая скорость $\dot{\theta}$ остается независимой от радиуса окружности. Если траектория частицы совпадает с линией меридиана $\theta = \text{const}$, то из (80.20) мы получаем уравнение

$$\left(1+\frac{r^2}{4a^2}\right)\ddot{r}+\frac{r\dot{r}^2}{4a^2}+\frac{gr}{2a}=0.$$

Интегрирование уравнения (80.22) и вычисление реакции $\boldsymbol{R}$, необходимой для того, чтобы принудить частицу двигаться по параболоиду, сопряжены с довольно трудоемкими операциями. Для того чтобы вычислить величину реакции, мы должны воспользоваться уравнением (80.15), в котором $\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{g} + \boldsymbol{R}$.

Если мы заменим поверхность параболоида в разобранном примере поверхностью сферы, то встретимся с задачей сферического маятника. Решение уравнений движения для сферического маятника может быть осуществлено с помощью эллиптических функций. Если поверхность цилиндрическая $r = a$, интегрирование уравнений движения упрощается[1]).

Задача

Пусть частица массы m принуждена двигаться по поверхности сферы радиуса a. Связать прямоугольные декартовы координаты y^i с поверхностными координатами u^α формулами

$$\left.\begin{aligned} y^1 &= a \sin u^1 \cos u^2, \\ y^2 &= a \sin u^1 \sin u^2, \\ y^3 &= a \cos u^1. \end{aligned}\right\}$$

Показать, что уравнения (80.17) дают

$$\ddot{u}^1 - (\dot{u}^2)^2 \sin u^1 \cos u^1 = \frac{F_1}{ma^2},$$

$$\ddot{u}^2 \sin^2 u^1 + 2\dot{u}^1\dot{u}^2 \sin u^1 \cos u^1 = \frac{F_2}{ma^2}.$$

Решить эти уравнения для случая, когда $F^\alpha = 0$, и показать, что траектория представляет собой дугу большого круга, а скорость $v = \text{const}$. *Указание.* Первый интеграл второго уравнения — $\dot{u}^2 \sin^2 u^1 = \text{const}$. Использовать этот результат в первом уравнении и заметить, что $v^2 = a^2 [(\dot{u}^1)^2 + (\dot{u}^2)^2 \sin^2 u^1]$.

§ 81. Определение вариации

В настоящем параграфе мы напомним определение операции варьирования δ, введенной ранее в § 56 и отметим некоторые ее свойства. Введенные здесь обозначения позволят нам дать сжатую формулировку принципа Гамильтона и принципа наименьшего действия Лагранжа. Любой из этих принципов с бо́льшим успехом, чем законы Ньютона, сможет служить отправным пунктом в построении аналитической динамики.

Пусть $F(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ — функция n независимых переменных x^i класса C^2 в области R n-мерного многообразия. Займемся изучением поведения функции F в некоторой окрестности кривой C, определенной параметрическими уравнениями

$$C\colon\ x^i = x^i(t), \qquad t_1 \leqslant t \leqslant t_2,$$

где мы принимаем, что $x^i(t)$ принадлежат классу C^2.

Рассмотрим h-окрестность кривой C, определенную неравенствами

$$x^i - h < \bar{x}^i < x^i + h \qquad (i = 1, \ldots, n),$$

[1]) Интересующимся читателям мы можем порекомендовать обратиться к «Аналитической механике» Уиттекера (Whittaker E. T., Analytical mechanics, Cambridge Press 1917, стр. 99—109, где задача о движении частицы на поверхности исследуется иным способом.

где h — малое положительное число, а x^i — координаты точки на C. Введем класс функций

$$C'\colon\ \bar{x}^i(t,\varepsilon)=x^i(t)+\varepsilon\xi^i(t)\qquad (i=1,\ \ldots,\ n),$$

где $-1\leqslant\varepsilon\leqslant 1$, а $\xi^i(t)$ — однозначные функции класса C^2 в $t_1\leqslant t\leqslant t_2$, подчиняющиеся условиям

$$\xi^i(t_1)=\xi^i(t_2)=0$$

и $|\xi^i(t)|<h$ везде в $t_1\leqslant t\leqslant t_2$.

Множество n функций $\bar{x}^i(t,\varepsilon)$ составляет *варьируемую траекторию*, и потому определенная таким способом совокупность кривых C' может быть отнесена к h-окрестности C. В двумерном пространстве все кривые C' расположены в полосе шириной $2h$ около кривой C и совпадают с C в конечных точках интервала (t_1, t_2).

Вариация δx^i была определена в § 56 формулой

$$\delta x^i=\left.\frac{\partial\bar{x}^i}{\partial\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}\varepsilon=\xi^i(t)\,\varepsilon, \tag{81.1}$$

а вариация δF функции $F(x^1,\ \ldots,\ x^n)$ имеет вид

$$\delta F=\varepsilon\left(\frac{\partial F}{\partial\varepsilon}\right)_0,$$

где

$$\left(\frac{\partial F}{\partial\varepsilon}\right)_0=\left.\frac{\partial F\left(x^1+\varepsilon\xi^1,\ \ldots,\ x^n+\varepsilon\xi^n\right)}{\partial\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}=\frac{\partial F}{\partial x^i}\xi^i.$$

Таким образом,

$$\partial F=\frac{\partial F}{\partial x^i}\,\delta x^i. \tag{81.2}$$

Рассмотрим функцию $\dot{x}^i(t)\equiv dx^i/dt$. Составим уравнение

$$\dot{\bar{x}}^i(t,\ \varepsilon)\equiv\dot{x}^i(t)+\varepsilon\dot{\xi}^i(t)$$

и заключим из определения (81.1)

$$\delta\dot{x}^i=\varepsilon\left(\frac{\partial\dot{\bar{x}}^i(t,\ \varepsilon)}{\partial\varepsilon}\right)_0=\varepsilon\dot{\xi}^i(t)=\frac{d}{dt}\,\delta x^i.$$

Отсюда

$$\delta\,\frac{dx^i}{dt}=\frac{d}{dt}\,\delta x^i. \tag{81.3}$$

Это значит, что *вариация производной есть производная вариации.*

Очевидно, если мы имеем функцию $F(x^1,\ \ldots,\ x^n,\ \dot{x}^1,\ \ldots,\ \dot{x}^n,\ t)$ от $2n+1$ переменных x^i, $\dot{x}^i\equiv dx^i/dt$ и t класса C^2, мы можем написать

$$\delta F=\frac{\partial F}{\partial x^i}\,\delta x^i+\frac{\partial F}{\partial\dot{x}^i}\,\delta\dot{x}^i. \tag{81.4}$$

Простое вычисление, аналогичное использованному в выводе формулы (81.3), приводит к заключению

$$\delta \frac{dF}{dt} = \frac{d}{dt}\,\delta F.$$

Теперь можно показать с помощью (81.4), что

$$\delta (F + \Phi) = \delta F + \delta \Phi,$$
$$\delta (F\Phi) = F\,\delta\Phi + \Phi\,\delta F,$$

где F и Φ — некоторые функции, удовлетворяющие наложенным условиям, а знак вариации δ распространяется на ту же совокупность траекторий C'.

В § 57 мы исследовали функционал

$$J = \int_{t_1}^{t_2} F(t,\ x^1,\ \ldots,\ x^n,\ \dot{x}^1,\ \ldots,\ \dot{x}^n)\,dt,$$

где функциональные аргументы $x^i(t)$, $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$, принадлежали к h-окрестности экстремали J. Мы изучили поведение интеграла J на траекториях $\bar{x}^i(t, \varepsilon) = x^i + \varepsilon\xi^i(t)$. Пользуясь уравнением (81.4) настоящего параграфа и обращаясь к формуле (57.6) убеждаемся, что последнюю можно преобразовать в

$$\delta J = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial F}{\partial x^i}\delta x^i + \frac{\partial F}{\partial \dot{x}^i}\,\delta \dot{x}^i\right) dt$$

так, что для пары *фиксированных* пределов t_1 и t_2

$$\delta J = \int_{t_1}^{t_2} \delta F\,dt \equiv \delta \int_{t_1}^{t_2} F\,dt.$$

Полученное уравнение показывает, что *вариация интеграла с фиксированными пределами равна интегралу вариации подынтегрального выражения.*

Введенную в настоящем параграфе систему обозначений мы используем в формулировке *принципа Гамильтона.*

§ 82. Принцип Гамильтона

Рассмотрим частицу массы m, движущуюся в трехмерном евклидовом многообразии, отнесенном к криволинейной системе координат X. Частица находится в состоянии движения под воздействием силы F, и наша задача заключается в определении ее траектории

$$C\colon\ x^i = x^i(t) \qquad (i = 1,\ 2,\ 3), \qquad t_1 \leqslant t \leqslant t_2,$$

где t обозначает время.

Кинетическая энергия частицы (имеющая физический смысл лишь на траектории C) задается формулой $T=\frac{1}{2}mg_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j$. Если мы определим семейство траекторий

$$C'\colon\ \bar{x}^i(\varepsilon,\ t)=x^i(t)+\delta x^i(t),$$

где $\delta x^i(t)=\varepsilon\xi^i(t)$ и $\xi^i(t_1)=\xi^i(t_2)=0$ принадлежат h-окрестности C, то мы можем говорить о вариации T, а именно

$$\delta T=\frac{\partial T}{\partial \dot{x}^i}\delta\dot{x}^i+\frac{\partial T}{\partial x^i}\delta x^i, \tag{82.1}$$

причем мы сможем сформулировать

Принцип Гамильтона. *Если частица находится в точке P_1, в момент времени t_1 и в точке P_2 в момент t_2, то движение частицы происходит таким образом, что*

$$\int\limits_{t_1}^{t_2}(\delta T+F_i\,\delta x^i)\,dt=0, \tag{82.2}$$

где $x^i=x^i(t)$ — координаты частицы на траектории, а $x^i+\delta x^i$ — координаты на варьируемой траектории с началом в P_1 в момент t_1 и концом в P_2 в момент t_2.

Теперь мы покажем, что этот принцип эквивалентен уравнениям движения (79.2) Лагранжа и, следовательно, законам Ньютона. Доказательство не представляет затруднений. Подстановка (82.1) в (82.2) приводит к

$$\int\limits_{t_1}^{t_2}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}^i}\delta\dot{x}^i+\frac{\partial T}{\partial x^i}\delta x^i+F_i\,\delta x^i\right)dt=0. \tag{82.3}$$

Интегрируя первый член под знаком интеграла (82.3) по частям

$$\int\limits_{t_1}^{t_2}\frac{\partial T}{\partial \dot{x}^i}\delta\dot{x}^i\,dt=\frac{\partial T}{\partial \dot{x}^i}\delta x^i\Big|_{t_1}^{t_2}-\int\limits_{t_1}^{t_2}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}^i}\right)\delta x^i\,dt$$

и замечая, что $\delta x^i(t_2)=\delta x^i(t_1)=0$ в силу обращения в нуль $\xi^i(t_2)$ и $\xi^i(t_1)$, уравнение (82.3) преобразуем в

$$\int\limits_{t_1}^{t_2}\left(F_i+\frac{\partial T}{\partial x^i}-\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{x}^i}\right)\delta x^i\,dt=0. \tag{82.4}$$

Так как этот интеграл обращается в нуль для произвольного δx^i, рассуждения, использованные в § 57, показывают, что

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{x}^i}-\frac{\partial T}{\partial x^i}=F_i\qquad(i=1,\ 2,\ 3). \tag{82.5}$$

И, обратно, если уравнения Лагранжа (82.5) справедливы, то справедливы также уравнения (82.4) и (82.2).

В вышеприведенной формулировке принципа Гамильтона не дается никаких указаний о природе силового поля F_i. Если, в частности, это поле консервативно, то существует потенциальная функция $V(x^1, x^2, x^3)$, отвечающая условию $\partial V/\partial x^i = -F_i$. В этом случае уравнение (82.2) принимает вид

$$\int_{t_1}^{t_2}\left(\delta T - \frac{\partial V}{\partial x^i}\,\delta x^i\right)dt = 0,$$

а поскольку $\delta V = (\partial V/\partial x^i)\,\delta x^i$, то мы получим

$$\int_{t_1}^{t_2}\delta(T - V)\,dt = 0. \tag{82.6}$$

Но в § 79 мы определили функцию Лагранжа $L = T - V$ таким образом, что уравнение (82.6) допускает представление в виде $\int_{t_1}^{t_2}\delta L\,dt = 0$, а поскольку пределы интегрирования фиксированы, мы получаем сжатую формулировку принципа Гамильтона для консервативного поля в виде

$$\delta\int_{t_1}^{t_2}L\,dt = 0. \tag{82.7}$$

Содержание уравнения (82.7) мы можем сформулировать следующим образом. *В консервативном силовом поле частица движется таким образом, что интеграл* $\int_{t_1}^{t_2}L\,dt$, *вычисленный на траектории* $x^i = x^i(t)$, $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$, *имеет стационарное значение в сравнении с его значениями для всех окрестных траекторий, берущих свое начало в точке* P_1 *в момент* $t = t_1$ *и завершающихся в точке* P_2 *в момент* $t = t_2$.

Уравнения движения вида (79.5), а именно

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}\right) - \frac{\partial L}{\partial x^i} = 0,$$

выводятся также непосредственно и из формулировки (82.7).

§ 83. Интеграл энергии

В этом параграфе доказывается важная общая

Теорема. *Сумма кинетической и потенциальной энергий частицы, движущейся в консервативном силовом поле, постоянна.*

Установим сначала тождество, из которого следует доказательство этой теоремы.

Так как кинетическая энергия $T = \frac{1}{2} m g_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j$ — инвариант, то

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\delta T}{\delta t} = \frac{\delta}{\delta t}\left[\frac{m}{2}(g_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j)\right] = \frac{m}{2} g_{ij}\left(\frac{\delta \dot{x}^i}{\delta t}\dot{x}^j + \dot{x}^i\frac{\delta \dot{x}^j}{\delta t}\right) = m g_{ij} a^i v^j,$$

так что

$$\frac{\partial T}{\partial t} = m a_i v^i, \tag{83.1}$$

где v^i — скорость и a_i — ускорение частицы.

Для консервативного силового поля $m a_i = F_i = -\partial V/\partial x^i$, и потому (83.1) мы можем представить в виде

$$\frac{dT}{dt} = -\frac{\partial V}{\partial x^i}\frac{dx^i}{dt}$$

или

$$\frac{dT}{dt} = -\frac{dV}{dt}. \tag{83.2}$$

Интегрирование уравнения (83.2) приводит к результату

$$T + V = h,$$

где h — постоянная интегрирования.

§ 84. Принцип наименьшего действия

История науки изобилует попытками уложить законы природы в структуру теологии. Некоторые из этих попыток, исходившие из представлений о минимальных значениях, например учение Герона (100 лет до н. э.) о кратчайшем пути или принцип минимального времени распространения Ферма (1601—1665) произвели на математиков глубокое эстетическое впечатление.

Самой знаменитой из таких попыток в области механики была доктрина наименьшего действия, высказанная французским ученым Мопертюи (P. M. L. Maupertuis) около 1740 г. П. Мопертюи утверждал, что все виды проявления активности природы совершаются с наивозможно меньшей затратой «действия», которое он определял как произведение из массы, скорости и расстояния. Для того чтобы согласовать свой принцип с известными результатами механики, Мопертюи был вынужден изменять определения величин, входивших в произведение массы, скорости, расстояния (mvs) так, чтобы это соответствовало каждой отдельной из рассмотренных им задач. Так, например, в анализе неупругого соударения двух частиц с массами m_1 и m_2, движущихся со скоростями v_1 и v_2, он уменьшал произведение mvs, где s было расстоянием на единицу времени. В результате «действие» получалось пропорциональным кинетической энергии. Мопертюи получил известное правильное выражение для окончательного значения общей скорости $v = (m_1 v_1 + m_2 v_2)/(m_1 + m_2)$. С другой стороны, в задаче преломления света, при переходе из одной оптической среды в другую, он пользовался фактической величиной расстояния s и получал постоянное (но неправильное) значение для отношения синусов углов падающего и преломленного лучей. Доктрина Мопертюи, верившего в то, что он представил научное доказательство существования бога, возбудила воображение Даниила Бернулли и Л. Эйлера, выступивших в защиту ее[1]). В 1744 г. Эйлер показал, что интеграл $\int mv\,ds$ имеет стационарное значение на траектории частицы, движущейся в центральном силовом поле. В 1760 г. Лагранж расширил результат, полученный Эйлером, доказав, что интеграл $A = \int\limits_{P_1}^{P_2} mv\,ds$ имеет стационарное значение на траекториях частиц, движущихся в консервативном силовом поле, если только связи не являются функциями времени. Эти соображения привели его к формулировке принципа наименьшего действия. Но она оставляла желать еще очень многого с точки зрения требований ясности, и Гамильтон пытаясь понять формулировку Лагранжа, вывел более широкий и отличающийся от лагранжева принцип (1827), разъясненный в § 82. Логически четкое доказательство принципа Лагранжа было дано в работе Якоби.

Рассмотрим интеграл Лагранжа

$$A = \int\limits_{P_1}^{P_2} mv\,ds, \tag{84.1}$$

вычисленный на пути

$$C\colon\ x^i = x^i(t), \qquad t_1 \leqslant t \leqslant t_2,$$

где C — траектория частицы массы m, движущейся в консервативном силовом поле. Положим, что ни кинетическая энергия T, ни потенциальная энергия V не являются функциями

[1]) Эти любопытные факты служат хорошей иллюстрацией нравов и миросозерцания того времени. (*Прим. ред.*)

времени. В криволинейных координатах интеграл (84.1) принимает вид

$$A = \int_{P_1}^{P_2} mg_{ij} \frac{dx^i}{dt} dx^j = \int_{t(P_1)}^{t(P_2)} mg_{ij} \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt} dt,$$

а поскольку

$$T = \frac{m}{2} g_{ij} \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt},$$

находим

$$A = \int_{t(P_1)}^{t(P_2)} 2T\, dt. \tag{84.2}$$

Этот интеграл приобретает физический смысл, лишь будучи определенным на траектории C, но значение его вычисляется на любом пути, соединяющем точки P_1 и P_2. Рассмотрим какую-либо частную совокупность допустимых траекторий C', вдоль которых функция $T + V$ для каждого значения параметра t принимает одно и то же постоянное значение h. Определенный таким образом функционал A называется *интегралом действия*, и в отношении его мы сможем сформулировать

Принцип наименьшего действия[1]). *Из всех кривых C', проходящих через P_1 и P_2 в окрестности траектории C, при любых значениях t, $T + V = h$, единственной, для которой интеграл действия A принимает стационарное значение, является траектория частицы.*

Будучи сформулирован как вариационное уравнение, этот принцип принимает вид

$$\delta \int_{t(P_1)}^{t(P_2)} 2T\, dt = 0 \tag{84.3}$$

с вспомогательным условием

$$T + V - h = 0 \quad \text{на} \quad C'. \tag{84.4}$$

Здесь важно понять, что ввиду вспомогательного условия (84.4) мы не можем определить экстремали интеграла действия, подставляя в уравнение Эйлера (57.7) вместо F функцию $2T$. Поскольку T — функция скорости v, а V — функция только положения, отрезки времени $t(P_2) - t(P_1)$, необходимые для перемещения по траектории C', будут вообще различными. Таким образом, верхний предел $t(P_2)$ в интеграле (84.4) не фик-

[1]) Строго говоря, этот принцип следовало бы назвать *принципом стационарного действия*.

сируется. В настоящем случае мы встречаемся с задачей вариационного исчисления с переменными конечными точками и с одним вспомогательным условием (84.4). Процедура, используемая в решении этой задачи, опирается на метод множителей Лагранжа для задач с неголономными связями, на которых мы вкратце останавливались (см. § 57).

Построим функцию $F = 2T + \lambda\varphi$, где $\varphi = T + V - h$ и найдем решение системы четырех уравнений

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial F}{\partial x^i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}^i}\right) = 0 \quad (i = 1,\ 2,\ 3), \\ &T + V - h = 0. \end{aligned}\right\}$$

Исследование этой системы показывает, что [1] $\lambda(t) = -1$, а отсюда следует, что траектория C определяется решением системы

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}^i}\right) - \frac{\partial T}{\partial x^i} = -\frac{\partial V}{\partial x^i} \quad (i = 1,\ 2,\ 3). \tag{84.5}$$

Полученные уравнения и представляют собой уравнения движения Лагранжа.

Иной и несколько более поучительный способ подхода к этой задаче заключается в приведении ее к рассмотрению вариационной задачи с фиксированными конечными точками путем замены переменных. Так как кинетическая энергия

$$\begin{gathered} T = \frac{m}{2} g_{ij} \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt} = \frac{m}{2}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2, \\ dt = \sqrt{\frac{m}{2T}}\, ds = \sqrt{\frac{m}{2(h-V)}}\, ds. \end{gathered} \tag{84.6}$$

Отсюда следует, что интеграл действия (84.2) может быть записан следующим способом [2]:

$$A = \int\limits_{s_1}^{s_2} \sqrt{2m(h-V)}\, ds, \tag{84.7}$$

поскольку по всем допустимым путям $T = h - V$. Подынтегральное выражение в (84.7), очевидно, не зависит от t. Введем теперь для наших траекторий C' параметры так, чтобы

$$C\colon\ x^i = x^i(u), \qquad u_1 \leqslant u \leqslant u_2,$$

---

[1]) См. § 88 и Bolza, Vorlesungen über Variationsrechnung, стр. 586.

[2]) Форма (84.7) интеграла действия была использована в работе Якоби. См. исследование этого интеграла и его обобщений у Каратеодори: Carathéodory C., Variationsrechnung, стр. 255, 290.

где P_1: $x^i(u_1)$ и P_2: $x^i(u_2)$, вспомнив, что $ds=\sqrt{g_{ij}x'^i x'^j}\,du$, где $x'^i=dx^i/du$.

Это позволит нам представить интеграл действия (84.7) в таком виде:

$$A=\int\limits_{u_1}^{u_2}\sqrt{2m(h-V)\,g_{ij}x'^i x'^j}\,du, \tag{84.8}$$

и так как пределы интегрирования в (84.8) фиксированы, мы видим, что определение траектории равносильно нахождению геодезических линий в трехмерном римановом многообразии, элемент дуги которого выражается формулой

$$dS^2=2m(h-V)\,g_{ij}\,dx^i\,dx^j. \tag{84.9}$$

Если мы сформулируем уравнения Эйлера

$$F_{x^i}-\frac{d}{du}F_{x'^i}=0,$$

где $F=\sqrt{2m(h-V)\,g_{ij}x'^i x'^j}$, и примем уравнение (84.6) в виде

$$dt=\sqrt{\frac{mg_{ij}x'^i x'^j}{2(h-V)}}\,du,$$

мы придем к искомым уравнениям (84.5).

Из формул (84.8) и (84.9) мы убеждаемся, что действие равно численно длине кривой в римановом многообразии с метрическими коэффициентами

$$h_{ij}\equiv 2m(h-V)\,g_{ij}$$

и что траектории в E_3 соответствуют геодезическим линиям в римановом пространстве, метризованном по формуле $dS^2=h_{ij}dx^i dx^j$. Эта геометризация динамики оказала далеко идущие воздействия на развитие релятивистской динамики.

§ 85. Системы частиц. Обобщенные координаты

Мы уже обратили внимание (в § 77) на то, что переход от механики одной-единственной частицы к механике материальных тел может быть осуществлен путем введения некоторых гипотез, относящихся к природе стесняющих сил — связей, воздействующих на частицы, составляющие материальное тело. В некоторых динамических задачах изменение формы тела бывает столь незначительным, что вполне оправданной можно принять гипотезу, согласно которой частицы остаются постоянно на фиксированных расстояниях одна от другой. Такое допущение приводит к *динамике твердых тел*. Если материальное тело испытывает деформации, которыми недопустимо пренебрегать, мы можем постулировать с различной степенью приближения к реальности природу связывающих принуждающих сил и прийти таким образом к *динамике упругих тел*, идеальных жидкостей, вязкоупругих сил и т. п. Допущения, касающиеся природы этих сил, позволяют нам характеризовать положения большого числа материальных точек при помощи сравнительно небольшого числа параметров. Так, например, тонкий жесткий стержень длиной l, движущийся в пространстве, требует лишь пяти параметров для определения своего положения. Такими параметрами могут служить, например, пространственные координаты центра массы и два направления одного из его концов относительно центра массы. Выбор описываемых параметров не является однозначным, и они не обязательно должны быть линейными размерами. Бусинка, скользящая по искривленной проволоке, требует всего лишь единственного параметра для описания своего местоположения, например расстояния от некоторой фиксированной точки проволоки; положение частицы, движущейся по поверхности, указывается однозначно парой гауссовых координат. Какова бы ни была природа параметров, во всех случаях они называются *обобщенными координатами*. Очевидно, что если описание динамической системы должно быть полным, обобщенные координаты должны быть функционально связаны с пространственными координатами частиц, образующих систему.

Пусть N частиц образуют систему, а $x^i(\alpha)$ $(i = 1, 2, 3)$, $(\alpha = 1, 2, \ldots, N)$ — координаты положений этих частиц, отнесенных к некоторой условной системе отсчета в E_3. Система N свободных частиц описывается $3N$ параметрами. Если частицы каким-либо образом стеснены связями, то между их координатами $x^i(\alpha)$ должны существовать определенные соотношения; предположим, что имеется r таких независимых соотношений

$$f^i\left(x^1_{(1)},\ x^2_{(1)},\ x^3_{(1)};\ x^1_{(2)},\ x^2_{(2)},\ x^3_{(2)};\ \ldots;\ x^1_{(N)},\ x^2_{(N)},\ x^3_{(N)}\right) = 0 \qquad (85.1)$$
$$(i = 1,\ 2,\ \ldots,\ r).$$

Если эти r уравнений связей (83.1) могут быть решены для некоторых r координат в функциях от $3N - r$ остальных координат, то последние можно будет рассматривать как независимые обобщенные координаты q^i. Удобнее, однако, принять, что каждая из $3N$ координат выразится в зависимости от $3N - r \equiv n$ независимых переменных q^i, и написать $3N$ уравнений

$$x^i_{(\alpha)} = x^i_{(\alpha)}(q^1,\ \ldots,\ q^n,\ t), \qquad (85.2)$$

где мы ввели как параметр время t, которое может войти в задачу явным образом, если мы имеем дело с подвижными связями [1]). Если t не входит явным образом в уравнения (85.2), то рассматриваемая динамическая система называется *натуральной* системой.

Предположим, что функции $x^i_{(\alpha)} = x^i_{(\alpha)}(q, t)$ принадлежат классу C^2 в области определения переменных q^i и t и якобиан-матрица имеет ранг n [см. уравнения (75.5)].

Скорости частиц определяются путем дифференцирования уравнений (85.2) по времени. Таким путем получаем

$$\dot{x}^i_{(\alpha)} = \frac{\partial x^i_{(\alpha)}}{\partial q^j}\dot{q}^j + \frac{\partial x^i_{(\alpha)}}{\partial t}. \tag{85.3}$$

Производные $\dot{q}^i$ обобщенных координат q^i по времени мы будем называть *обобщенными скоростями*.

Иногда, по соображениям симметрии, бывает желательно ввести некоторое количество добавочных координат q^i и описать систему с помощью $k > n$ координат $q^1, \ldots, q^k$. В этих условиях возникнут некоторые соотношения вида

$$f^j(q^1, \ldots, q^k, t) = 0, \tag{85.4}$$

причем величины q^i, а следовательно, и $\dot{q}^i$ перестают быть независимыми. Возникнут соотношения между $\dot{q}$ типа

$$\frac{\partial f^j}{\partial q^i}\dot{q}^i + \frac{\partial f^j}{\partial t} = 0, \tag{85.5}$$

где f^j — дифференцируемые функции.

Из того, что уравнения (85.5) были получены путем дифференцирования уравнений (85.4), следует, что они поддаются интегрированию и могут быть выведены из уравнений (85.4) и использованы для исключения избыточных координат. В некоторых задачах, однако, возникают функциональные соотношения *неинтегрируемого* типа [2])

$$F^j(q^1, q^2, \ldots, q^k; \dot{q}^1, \ldots, \dot{q}^k, t) = 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, m), \tag{85.6}$$

---

[1]) Например, бусинка, скользящая по проволоке, которая сама движется с указанной скоростью.

[2]) Биллиардный шар, катящийся и вращающийся по шероховатой поверхности стола, — пример описываемой ситуации. Для того чтобы установить положение шара, необходимо указать пять обобщенных координат: две из них могут определять положение его центра, а три остальных — определять углы, описывающие ориентацию шара относительно его центра. Так как поверхность стола шероховата, шар не может скользить, так что оба компонента скорости точки контакта должны обратиться в нуль. Это дает два условия связей типа (85.6) с компонентами скорости. Они не поддаются интегрированию, так как при любом положении центра ориентация шара может измениться без нарушения связей.

т. е. такие, что из них представится невозможным вывести дифференцируемые уравнения с решениями типа (85.4). Поведение системы в подобных условиях не поддается описанию с помощью меньшего чем k количества координат, так что все k координат получаются независимыми. Если в рассматриваемой нами задаче мы наталкиваемся на неинтегрируемые соотношения (85.6), то мы говорим в таких случаях, что заданная система имеет *$k-m$ степеней свободы*, где m — число независимых неинтегрируемых соотношений (85.6) и k — число независимых координат. Динамические системы, содержащие неинтегрируемые соотношения (85.6), называются *неголономными*, в отличие от *голономных* систем, в которых число степеней свободы равно числу независимых обобщенных координат. Иными словами, голономная система характеризуется тем, что в ней отсутствуют неинтегрируемые соотношения, заключающие в себе обобщенные скорости.

В следующем параграфе мы выведем уравнение Лагранжа для голономной системы, а в § 88 рассмотрим вкратце один важный клас неголономных систем, часто встречающихся в приложениях.

§ 86. Уравнения Лагранжа в обобщенных координатах

Ради конкретности изложения определения в § 85 вводились для систем, состоявших из конечного, но может быть большого числа частиц. Эти определения легко распространить и в применениях к сплошным (непрерывным) материальным телам, точки которых отмечаются координатами x^r, отнесенными к некоторой системе отсчета X.

Частицы сплошного материального тела подвергаются воздействию различного рода связей и мы будем считать в дальнейшем в этой главе, что рассматриваемые нами тела будут жесткими, так что материальные точки их будут оставаться на неизменных расстояниях одна от другой. Если точки тела определяются однозначно конечным числом обобщенных координат q^i, мы запишем это выражением

$$x^r = x^r(q^1, \ldots, q^n, t) \qquad (r = 1, 2, 3)$$

и примем, как в § 85, что функции $x^r(q, t)$ принадлежат классу C^2. Скорость $\dot{x}^r$ произвольной точки тела определяется уравнением

$$\dot{x}^r = \frac{\partial x^r}{\partial q^j}\frac{dq^j}{dt} + \frac{\partial x^r}{\partial t} = \frac{\partial x^r}{\partial q^j}\dot{q}^j + \frac{\partial x^r}{\partial t} \qquad (j = 1, \ldots, n),$$

где $\dot{q}^i$ — обобщенные скорости.

Пусть рассматриваемая нами система натуральна, голономна и обладает n степенями свободы так, что соотношения

$$x^r = x^r(q^1, \ldots, q^n) \tag{86.1}$$

заключают в себе n независимых параметров q^i. Скорости $\dot{x}^r$ в этом случае заданы выражениями [см. (80.11)]

$$\dot{x}^r = \frac{\partial x^r}{\partial q^j}\dot{q}^j \qquad (r = 1,\ 2,\ 3;\ j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n), \tag{86.2}$$

где $\dot{q}^i$ — координаты, подвергающиеся любому допустимому преобразованию

$$\bar{q}^k = \bar{q}^k(q^1, \ldots, q^n) \qquad (k = 1, \ldots, n) \tag{86.3}$$

в соответствии с контравариантным законом.

Кинетическая энергия системы определяется выражением

$$T = \frac{1}{2}\sum_\alpha m_{(\alpha)} g_{rs} \dot{x}^r_{(\alpha)} \dot{x}^s_{(\alpha)} \qquad (r,\ s = 1,\ 2,\ 3), \tag{86.4}$$

где m — масса частицы, находящейся в точке x^r, а суммирование (или интегрирование) распространяется на всю область, заполненную материальным телом. Обозначения g_{rs} в (86.4) — компоненты метрического тензора, связанные с координатной системой X, введенной в E_3.

Если мы введем в (86.4) значения $\dot{x}^i$ из (86.2), то получим [1])

$$T = \frac{1}{2}\sum_\alpha m g_{rs} \frac{\partial x^r}{\partial q^i}\frac{\partial x^s}{\partial q^j}\dot{q}^i\dot{q}^j \equiv \frac{1}{2}a_{ij}\dot{q}^i\dot{q}^j,$$

где

$$a_{ij} \equiv \sum_\alpha m g_{rs}\frac{\partial x^r}{\partial q^i}\frac{\partial x^s}{\partial q^j} \qquad (r,\ s = 1,\ 2,\ 3), \quad (i,\ j = 1,\ \ldots,\ n).$$

Поскольку

$$T = \frac{1}{2}a_{ij}\dot{q}^i\dot{q}^j \tag{86.5}$$

представляет собой инвариант, а величины a_{ij} симметричны, заключаем, что a_{ij} — компоненты ковариантного тензора второго ранга относительно класса допускаемых преобразований (86.3) обобщенных координат. Отметим, что поскольку кинетическая энергия T представляет собой положительную форму в скоростях $\dot{q}^i$, $|a_{ij}| > 0$, и мы можем построить обратный тензор a^{ij}.

[1]) Для упрощения записи мы опускаем нижние индексы α в членах, предваряемых символом $\sum\limits_\alpha$.

Если мы проведем вычисление, во всех деталях тождественное с выполненным в § 79 и с использованием выражения кинетической энергии в виде (86.5), то получим формулу

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i}\right)-\frac{\partial T}{\partial q^i}=a_{il}\left(\ddot{q}^l+{}_a\left\{ {l \atop jk} \right\}\dot{q}^j\dot{q}^k\right), \tag{86.6}$$

где символы Кристоффеля ${}_a\left\{ {l \atop jk} \right\}$ строятся из тензора a_{kl}. Обозначим выражение, появляющееся в скобках правой части уравнения (86.6), через

$$Q^l\equiv\ddot{q}^l+{}_a\left\{ {l \atop jk} \right\}\dot{q}^j\dot{q}^k$$

и преобразуем уравнение (86.6) к виду

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i}\right)-\frac{\partial T}{\partial q^i}=a_{il}Q^l=Q_i \qquad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n). \tag{86.7}$$

Выражение в левой части уравнения (86.7) также можно вычислить на основе формулы (86.4) и установления зависимости переменных x^i от параметров q^i. Непосредственное, но несколько громоздкое вычисление использующее формулу $\partial\dot{x}^r/\partial\dot{q}^j=\partial x^r/\partial q^j$ и соотношения $\frac{\partial \dot{x}^r}{\partial q^i}=\frac{\partial^2 x^r}{\partial q^i\,\partial q^j}\dot{q}^j$, а также $\frac{\partial \dot{x}^r}{\partial q^i}=\frac{d}{dt}\frac{\partial x^r}{\partial q^i}$, выводимые из уравнения (86.2), приводит к результату

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i}\right)-\frac{\partial T}{\partial q^i}=\sum_{\alpha} ma_r\frac{\partial x^r}{\partial q^i}, \tag{86.8}$$

где $a_j=g_{ij}a^i$ — ускорение точки $P(x)$.

С другой стороны, второй закон Ньютона дает

$$ma_r=F_r, \tag{86.9}$$

где F_r — компоненты силы $\boldsymbol{F}$, действующей на частицу, находящуюся в точке $P(x)$. Из (86.9) следует, что

$$\sum_{\alpha} ma_r\frac{\partial x^r}{\partial q^i}=\sum_{\alpha} F_r\frac{\partial x^r}{\partial q^i},$$

уравнения (86.8) могут быть поэтому записаны в виде

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i}\right)-\frac{\partial T}{\partial q^i}=\sum_{\alpha} F_r\frac{\partial x^r}{\partial q^i}. \tag{86.10}$$

Сравннв (86.7) с (86.10), заключаем, что

$$Q_i=\sum_{\alpha} F_r\frac{\partial x^r}{\partial q^i},$$

где вектор Q_i называется *обобщенной силой*.

Уравнения

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i}\right)-\frac{\partial T}{\partial q^i}=Q_i \qquad (86.11)$$

известны как *уравнения Лагранжа в обобщенных координатах*. Они дают систему n обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка в координатах q^i. Решения этих уравнений

$$C: q^i = q^i(t)$$

представляют *динамическую траекторию* системы.

Если существует функция $V(q^1, \ldots, q^n)$, обладающая свойством

$$\frac{\partial V}{\partial q^i} = -Q_i,$$

то такая система называется консервативной и уравнения (86.11) принимают для нее вид

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\right)-\frac{\partial L}{\partial q^i}=0, \qquad (86.12)$$

где $L \equiv T - V$ представляет собой *кинетический потенциал*.

Так как $L(q, \dot{q})$ — функция как обобщенных координат, так и скоростей, то

$$\frac{dL}{dt}=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\ddot{q}^i+\frac{\partial L}{\partial q^i}\dot{q}^i.$$

Введя сюда выражение из уравнений (86.12) Лагранжа получаем

$$\frac{dL}{dt}=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\ddot{q}^i+\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\right)\dot{q}^i=\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\dot{q}^i\right). \qquad (86.13)$$

Но так как $L = T - V$ и потенциальная энергия V не является функцией $\dot{q}^i$, то

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\dot{q}^i=\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i}\dot{q}^i=2T,$$

поскольку $T=\frac{1}{2}a_{ij}\dot{q}^i\dot{q}^j$. Таким образом, уравнение (86.13) можно представить в виде

$$\frac{d(L-2T)}{dt}=-\frac{d(T+V)}{dt}=0,$$

из которого ясно, что $T + V = h$ (константа). Таким образом, вдоль динамической траектории сумма кинетической и потенциальной энергий остается постоянной.

Из приведенных выкладок следует, что исследование натуральных голономных систем с n степенями свободы может быть приведено к исследованию движения единственной частицы в n-мерном пространстве.

Задачу определения динамической траектории системы мы можем сформулировать на языке вариационного исчисления. В самом деле, содержание принципа Гамильтона и принципа наименьшего действия, освещенные в §§ 82, 84, могут быть повторены слово в слово, если термин «точка» толковать как совокупность n параметров $q^1, \ldots, q^n$, характеризующих конфигурацию нашей динамической системы в определенном n-мерном пространстве.

В этих обозначениях принцип Гамильтона принимает вид

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta T + Q_i\, \delta q^i)\, dt = 0 \tag{86.14}$$

и если силовое поле Q_i консервативно, то он выражается и в еще более сокращенном виде

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L\, dt = 0.$$

Эти вариационные уравнения подтверждают, что уравнения Лагранжа (86.11) и (86.12) удовлетворяются.

Из формулировки принципа наименьшего действия в обобщенных координатах [см. (84.3) и (84.4)] непосредственно следует, что динамические траектории в консервативном поле являются геодезическими линиями в n-мерном римановом многообразии, в котором элемент дуги dS дается выражением

$$dS^2 = 2\,(h - V)\, a_{ij}\, dq^i\, dq^j.$$

Тот факт, что динамическую траекторию можно рассматривать как геодезическую линию, открывает возможность геометризации динамики.

Задача

Показать, что динамические уравнения в сферических координатах с элементом дуги

$$ds^2 = (dr)^2 + r^2\,(d\theta)^2 + r^2 \sin^2\theta\,(d\varphi)^2$$

принимают вид

$$m\,(\ddot r - r\dot\theta^2 - r\dot\varphi^2 \sin^2\theta) = -\frac{\partial V}{\partial r},$$

$$m\left[\frac{1}{r}\,\frac{d}{dt}\,(r^2\dot\theta) - r\dot\varphi^2 \sin\theta\cos\theta\right] = -\frac{1}{r}\,\frac{\partial V}{\partial \theta},$$

$$m\left[\frac{1}{r\sin\theta}\,\frac{d}{dt}\,(r^2\dot\varphi\sin^2\theta)\right] = -\frac{1}{r\sin\theta}\,\frac{\partial V}{\partial \varphi},$$

в цилиндрических же координатах, где элемент дуги равен

$$ds^2 = (dr)^2 + r^2 (d\theta)^2 + (dz)^2,$$

они имеют вид

$$m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = -\frac{\partial V}{\partial r},$$

$$m\left[\frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta})\right] = -\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta},$$

$$m\ddot{z} = -\frac{\partial V}{\partial z}.$$

§ 87. Виртуальная работа и обобщенные силы

В предыдущих параграфах ничего не было сказано о характере сил F_r, действующих в точке (x^r) жесткого тела. В изучении механики сплошных сред принято классифицировать действующие силы по трем категориям [1]:

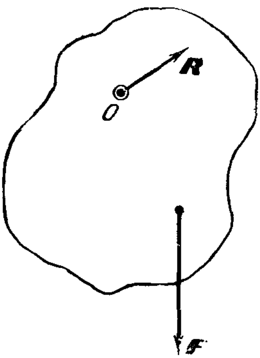

Рис. 37.

(а) внутренние силы, обусловленные физическими свойствами материальной среды;

(б) силы реакции, вызванные связями;

(в) внешние приложенные силы.

Мы можем наглядно представить себе материальное тело составленным из большого числа частиц, взаимодействующих между собой по достаточно сложным законам. Пока внутренние силы относятся к типу действия — противодействия, нет нужды учитывать их в динамических уравнениях, поскольку их результирующая в любой точке тела P обращается в нуль. Таким образом, силы F_r, входящие в формулы § 86, сводятся к реакциям связей, и извне приложенным силам.

Для того чтобы уяснить смысл сказанного мы должны представить себе твердое тело закрепленным неподвижно в какой-либо точке O гладким штифтом и подвергнутым действию приложенной силы $\boldsymbol{F}_r$ (рис. 37). Штифт в точке O связывает движение тела, сводя его к вращению относительно точки O. Реакция $\boldsymbol{R}_r$, действующая в точке O, не производит работы, если тело смещается, не нарушая связей в точке O. Мы будем обозначать все реакции, не производящие работы на произвольном перемещении, не нарушающем связей, *неработающими силами*. Всякое перемещение точки тела совместное с наложенными свя-

---

[1]) Силы реакции, вызванные связями, также являются *внешними силами*.

зями называется *виртуальным* (*возможным*) *перемещением* [1]), и мы обозначим такое виртуальное перемещение в точке x^r через δx^r.

Работа, произведенная внешними силами F_r на виртуальном перемещении δx^r, выражается формулой

$$W_\delta = \sum F_r\,\delta x^r, \tag{87.1}$$

где суммирование распространяется на все частицы тела; эта сумма будет полной работой, *если реактивные силы будут неработающего типа*. Определим W_δ как *виртуальную работу* на виртуальном перемещении δx^r, если реакции не работающие. В противном случае в состав W_δ будут включены также и реактивные работающие силы.

Необходимо тщательно помнить, что виртуальное перемещение δx^r не обязательно является действительным перемещением dx^r, совершаемым точкой $P(x^r)$ под воздействием указанных сил. Оно — лишь *некоторое возможное перемещение*, допустимое для тела без нарушения связей.

Если данная голономная система с n степенями свободы описана в обобщенных координатах q^i, тогда $x^r = x^r(q^1, \ldots, q^n)$ и виртуальные перемещения δx^r связаны линейно с *обобщенными виртуальными перемещениями* δq^i, именно

$$\delta x^r = \frac{\partial x^r}{\partial q^j}\,\delta q^j. \tag{87.2}$$

В формуле (87.2) перемещения δq^i произвольны, но необходимо совместны с наложенными на систему связями, поскольку координаты q^i независимы [2]).

Если мы введем в (87.1) выражение из (87.2), то получим

$$W_\delta = \sum F_r\,\frac{\partial x^r}{\partial q^j}\,\delta q^j = Q_j\,\delta q^j, \tag{87.3}$$

где на последнем этапе используется определение обобщенной силы Q_i. Из этой формулы следует, что действующие на систему обобщенные силы Q_i можно определить, вычисляя работу W_δ, произведенную перемещением системы посредством виртуального перемещения $\delta q^j \neq 0$ (j — фиксированное) при $\delta q^i = 0$, $i \neq j$. Тогда $Q_i = W_\delta/\delta q^j$. Мы обратимся к этому методу вычисления обобщенных сил в иллюстративных примерах § 89.

---

[1]) Виртуальные перемещения, нарушающие связи, также используются в динамике, в частности в тех случаях, когда приходится иметь дело с вычислением реактивных сил.

[2]) Обращаем внимание на различие между виртуальными перемещениями δq^i и действительными перемещениями dq^i, имеющими место на динамической траектории $q^i = q^i(t)$.

§ 88. Неголономные системы

Вывод уравнений Лагранжа в § 86 основывается на той предпосылке, что динамическая система голономна и что ее конфигурация описывается n независимыми обобщенными координатами q^i. Если q^i не независимы, вывод соответствующих динамических уравнений из принципа Гамильтона (86.14) зависит от общих соображений, представленных в § 57.

В тех случаях, когда приходится иметь дело с неголономными динамическими системами, принято исходить из предпосылки, что обобщенные скорости $\dot{q}^i$ входят в уравнения связей линейно. В соответствии с этим предположим, что n обобщенных координат q^i удовлетворяют $m < n$ условиям типа

$$c_{ki}(q^1, \ldots, q^n)\,\dot{q}^i = 0 \qquad (k = 1, \ldots, m), \quad (i = 1, \ldots, n), \tag{88.1}$$

где коэффициенты c_{ki} являются непрерывно дифференцируемыми функциями переменных q^i.

Систему m уравнений (88.1) можно представить кратко:

$$c_{ki}\dot{q}^i\,\delta t = 0,$$

а так как $\dot{q}^i\delta t = \delta q^i$, то мы получим m соотношений

$$c_{ki}\,\delta q^i = 0, \tag{88.2}$$

в которых вариации δq^i вообще не независимы.

Для того чтобы вывести динамические уравнения из вариационного уравнения Гамильтона

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta T + Q_i\,\delta q^i)\,dt = 0, \tag{88.3}$$

где δq^i связаны m соотношениями (88.2), мы вводим (см. § 57) m неизвестных функций $\lambda^k(q^1, \ldots, q^n)$, а затем образуем с помощью (88.2) сумму

$$\lambda^k c_{ki}\delta q^i = 0 \quad (k = 1, \ldots, m, \ i = 1, \ldots, n). \tag{88.4}$$

Поскольку $\delta T = (\partial T/\partial \dot{q}^i)\delta\dot{q}^i + (\partial T/\partial q^i)\delta q^i$, уравнение (88.3) дает

$$\int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i}\delta\dot{q}^i + \frac{\partial T}{\partial q^i}\,\delta q^i + Q_i\,\delta q^i\right) dt = 0. \tag{88.5}$$

Но $\delta\dot{q}^i = d\delta q^i/dt$, и интегрирование по частям первого члена в подынтегральном выражении (88.5) дает (см. 82.3)

$$\int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial T}{\partial q^i} - \frac{d}{dt}\,\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i} + Q_i\right)\delta q^i\,dt = 0, \tag{88.6}$$

если мы вспомним, что $\delta q^i(t_1) = \delta q^i(t_2) = 0$ по каждой из траекторий.

Перепишем теперь (88.6), введя в подынтегральное выражение член $\lambda^k c_{ki} \delta q^i = 0$:

$$\int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial T}{\partial q^i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i} + Q_i + \lambda^k c_{ki} \right) \delta q^i \, dt = 0. \tag{88.7}$$

В формуле (88.7) координаты q^i связаны m отношениями (88.4), и если мы условимся рассматривать первые $n - m$ координат q^i как независимые переменные и положим, что m функций $\lambda^k(q^1, \ldots, q^n)$ могут быть выбраны таким образом, что

$$\frac{\partial T}{\partial q^i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i} + Q_i + \lambda^k c_{ki} = 0 \quad \text{для} \quad i = n - m + 1, \ldots, n, \tag{88.8}$$

и тогда (88.7) приводится к

$$\int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial T}{\partial q^i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i} + Q_i + \lambda^k c_{ki} \right) \delta q^i \, dt = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n - m). \tag{88.9}$$

Так как первые $n - m$ переменных q^i в подынтегральном выражении (88.9) независимы, вариации δq^i для $i = 1, 2, \ldots, n - m$ могут быть выбраны произвольно, откуда мы заключаем, что

$$\frac{\partial T}{\partial q^i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i} + Q_i + \lambda^k c_{ki} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n - m). \tag{88.10}$$

Две системы уравнений (88.8) и (88.10) содержат n обобщенных координат q^i и m множителей Лагранжа $\lambda^k(q^1, \ldots, q^n)$. Присоединяя к этим уравнениям m уравнений (88.1), получаем $n + m$ уравнений для определения систем значений q и λ.

Условия, при которых могут быть определены λ^k таким образом, чтобы удовлетворялись уравнения (88.8), подробнее установлены в § 57; они связаны с рангом матрицы-якобиана для (88.1).

Обратим внимание на то, что если уравнения (88.8) и (88.10) соединены в одну систему

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial T}{\partial q^i} = Q_i + \lambda^k c_{ki} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{88.11}$$

то правая часть уравнения (88.11) будет отличаться от правой части уравнения (86.11) членом $R_i = \lambda^k c_{ki}$. Этот член выражает обобщенные реактивные силы, порожденные связями, если Q_i — обобщенные силы, действующие на систему в отсутствие связей.

В отдельных случаях Q_i могут быть выведены из потенциала $V(q^1, \ldots, q^n)$.

В качестве иллюстрации применения уравнений (88.11) рассмотрим однородный круговой цилиндр, скатывающийся под воздействием силы тяжести вниз по шероховатой наклонной плоскости.

Пусть цилиндр радиуса a и массы m скатывается без скольжения вниз по плоскости, образующей постоянный угол φ с горизонтальной плоскостью. Положение цилиндра определяется углом ската θ и расстоянием x, которое приходится центром массы цилиндра до горизонтальной плоскости. В качестве наших обобщенных координат примем $q^1 = \theta$, $q^2 = x$ и заметим, что кинетическая энергия T системы представляет собой сумму кинетической энергии перемещения центра массы и кинетической энергии вращения относительно центра массы, т. е.

$$T = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 + \frac{1}{2} mk^2\dot{\theta}^2, \tag{88.12}$$

где k — радиус инерции цилиндра.

Так как поверхность наклонной плоскости шероховата, то в ней возникает сила трения F; при этом мы полагаем, что эта сила в точности достаточна для предупреждения скольжения. В этих условиях x и θ оказываются связанными соотношением

$$a\,d\theta = dx, \tag{88.13}$$

в котором a — радиус цилиндра.

Связь (88.13) действительно голономна, так как ее можно интегрировать и получить $x = a\theta$, сведя, таким образом, задачу к рассмотрению одной независимой переменной, например x. Но для того чтобы проиллюстрировать теорию, изложенную в настоящем параграфе, преобразуем (88.13) к виду $c_{ki}\dot{q}^i = 0$ [см. (88.1)]:

$$a\frac{d\theta}{dt} - \frac{dx}{dt} = 0, \tag{88.14}$$

так что $c_{11} = a$, $c_{12} = -1$.

Уравнения (88.11) дадут в таком случае

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \theta} - \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} + Q_1 + \lambda a = 0, \\ \frac{\partial T}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} + Q_2 - \lambda = 0. \end{aligned}\right\} \tag{88.15}$$

Работа W, произведенная теперь одной лишь гравитационной силой, когда центр массы перемещается на расстояние x, равна $W = xmg\sin\varphi$. Отсюда $V = -xmg\sin\varphi$, а

$$Q_1 = -\frac{\partial V}{\partial \theta} = 0, \qquad Q_2 = -\frac{\partial V}{\partial x} = mg\sin\varphi.$$

Введя эти выражения в (88.15) и учтя значение T в (88.12), получим пару уравнений

$$m\ddot{\theta}=\frac{\lambda a}{k^2},\qquad m\ddot{x}=mg\sin\varphi-\lambda \tag{88.16}$$

в сопоставлении с (88.11), показывающую, что обобщенные реакции R равны

$$R_1=\frac{\lambda a}{k^2},\qquad R_2=-\lambda.$$

Для того чтобы вычислить λ, заметим, что $a\theta=x$, так что $\ddot{\theta}=\ddot{x}/a$. Используем это отношение для того, чтобы исключить $\ddot{x}$ и $\ddot{\theta}$ в (88.16). В результате получаем

$$\lambda=\frac{mg\sin\varphi}{1+a^2/k^2},$$

и отсюда уравнения (88.16) дадут

$$m\ddot{\theta}=\frac{mga\sin\varphi}{a^2+k^2},\qquad m\ddot{x}=mg\sin\varphi-\frac{k^2mg\sin\varphi}{a^2+k^2}. \tag{88.17}$$

Член $k^2mg\sin\varphi/(a^2+k^2)$ во втором уравнении (88.17) представляет собой силу трения F, оказывающую сопротивление компоненту $mg\sin\varphi$ гравитационной силы на плоскости. Если цилиндр — массивное тело, $k^2=a^2/2$ и $F=\frac{1}{3}mg\sin\varphi$. Величина силы трения $F=\mu N$, где μ — коэффициент трения, а N — давление цилиндра на плоскость. Так как $N=mg\cos\varphi$, заключаем, что $\mu=F/N=\frac{1}{3}\operatorname{tg}\theta$. Другой пример применения уравнений (88.11) мы можем привести в решении задачи брахистрохроны в сопротивляющейся среде[1]).

Допустим, что нам требуется определить элемент дуги непрерывно дифференцируемой кривой

$$C:\quad y=y(x),\qquad y(x_1)=y_1,\qquad y(x_2)=y_2, \tag{88.18}$$

обладающей тем свойством, что продолжительность спуска бусинки единичной массы, движущейся по этой кривой под воздействием силы тяжести, получается наивозможно более краткой. Положим, что движению противодействует сила $R(v)$ на единицу массы, где $R(v)$ — непрерывно дифференцируемая функция скорости v.

Совместим положительное направление оси y с направлением действия силы тяжести. Так как работа, произведенная силой тяжести на перемещении частицы, за вычетом работы,

---

[1]) См. Bliss G. A., The problem of Lagrange in the calculus of variations, Amer. Journ. of Math., 52, 1930; Pars L. A., Calculus of variations, 1962, стр. 241—243.

произведенной силой противодействия $R(v)$, равна приращению кинетической энергии, то мы получаем уравнение

$$\frac{dv^2}{2} = g\,dy - R(v)\,ds.$$

Если принять x за независимую переменную, то это соотношение даст и условие связей

$$\varphi(y, v, y', v') = vv' - gy' + R(v)\sqrt{1+(y')^2} = 0, \tag{88.19}$$

где верхними штрихами обозначены производные по x.

Определение минимального значения интеграла при условии (88.19) осуществляется нижеследующей операцией:

$$J = \int_{t_1}^{t_2} dt = \int_{x_1}^{x_2} \frac{dv}{v} = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\sqrt{1+(y')^2}}{v}\,dx. \tag{88.20}$$

Обозначим подынтегральное выражение в последнем равенстве через $F = \sqrt{1+(y')^2}/v$ и построим функцию

$$G = F + \lambda\varphi = \frac{\sqrt{1+(y')^2}}{v} + \lambda(x)\left[vv' - gy' + R(v)\sqrt{1+(y')^2}\right].$$

Если определить

$$H = \frac{1}{v} + \lambda R(v), \tag{88.21}$$

то функцию G можно будет представить выражением

$$G = H\sqrt{1+(y')^2} + \lambda(vv' - gy'). \tag{88.22}$$

Уравнения кривой G выводятся из уравнений Эйлера

$$\frac{dG_{y'}}{dx} - G_{y'} = 0, \qquad \frac{dG_{v'}}{dx} - G_v = 0, \tag{88.23}$$

а поскольку G не содержит y, заключаем на основании первого из уравнений (88.23), что $G_{y'} = a$ или

$$\frac{Hy'}{\sqrt{1+(y')^2}} - \lambda g = a, \tag{88.24}$$

где a — постоянная величина.

Второе из уравнений (88.23) дает

$$\frac{d}{dx}(\lambda v) - \sqrt{1+(y')^2}\,H_v - \lambda v' = 0$$

или

$$\frac{v\lambda'(x)}{\sqrt{1+(y')^2}} = H_v. \tag{88.25}$$

Мы получим, таким образом, систему трех уравнений (88.19), (88.24), (88.25) для определения $y(x)$, $v(x)$ и $\lambda(x)$. Положив $ds=\sqrt{1+(y')^2}\,dx$, выразим эти уравнения в сжатом виде

$$\left.\begin{aligned} v\frac{dv}{ds}&=g\frac{dy}{ds}+R,\\ H\frac{dy}{ds}&=\lambda g+a,\\ v\frac{d\lambda}{ds}&=H_v. \end{aligned}\right\} \tag{88.26}$$

Исключая dy и ds из (88.26), получаем уравнение

$$H(H_v\,dv+R\,d\lambda)=(g\lambda+a)\,g\,d\lambda,$$

а поскольку $R=H_\lambda$ в силу (88.21), мы сможем придать ему вид

$$H(H_v\,dv+H_\lambda\,d\lambda)=(g\lambda+a)\,g\,d\lambda,$$

или

$$H\,dH=(g\lambda+a)\,g\,d\lambda.$$

Интегрирование этого уравнения дает

$$H^2=(g\lambda+a)^2+b^2, \tag{88.27}$$

где b^2 — постоянная интегрирования.

Из (88.21) следует, что (88.27) — квадратное относительно λ уравнение, так что λ можно рассматривать как *известную функцию* v и постоянных интегрирования a и b. Этим подсказывается, что уравнение кривой C надлежит искать в параметрической форме

$$C:\quad x=x(v),\qquad y=y(v). \tag{88.28}$$

Поскольку $dy/dv=(dy/ds)(ds/dv)$, находим с помощью двух уравнений (88.26), что

$$\frac{dy}{dv}=\frac{v(\lambda g+a)}{g(\lambda g+a)+RH}, \tag{88.29}$$

где правая часть является известной функцией v. Выполняя квадратуру, получаем

$$y=f_1(v,\ a,\ b)+c, \tag{88.30}$$

где c — постоянная. Уравнение (88.30) — одно из искомых уравнений (88.28). Для того чтобы получить $x=x(v)$, замечаем, что $dx/dv=(dx/ds)(ds/dv)$ и так как $dx/ds=\sqrt{1-(dy/ds)^2}$, а dy/ds и ds/dv определяются из первых двух уравнений (88.26), находим, что dx/ds — также известная функция v. Читатель убедится, что

$$\frac{dx}{dv}=\frac{bv}{g(\lambda g+a)+RH},$$

так что

$$x = f_2(v,\ a,\ b) + d, \tag{88.31}$$

где d — постоянная. Постоянные интегрирования в (88.30) и (88.31) должны быть определены для начальных условий. Для того чтобы придать задаче физический смысл, нам следует наложить некоторые ограничения на относительные величины $R(v)$ и гравитационную силу g, как, например, $R < g$ для всех надлежащих значений v.

Задачи

1. Полый цилиндрический барабан массы m скатывается под воздействием силы тяжести вниз по шероховатой наклонной плоскости, образующей угол φ с горизонталью. Какой величины должен быть коэффициент трения μ, чтобы предупредить скольжение? $\left(\textit{Ответ.}\ \mu \geqslant \frac{1}{2}\operatorname{tg}\varphi.\right)$

2. Бусинка массой m скользит по гладкому стержню, вращающемуся в вертикальной плоскости относительно одного конца с постоянной угловой скоростью ω. Показать, что уравнение движения имеет вид $\ddot{r} - \omega^2 r = g \sin \omega t$, и решить его.

3. Бусинка скользит по гладкой проволоке круглого сечения радиуса a, вращающейся с постоянной угловой скоростью относительно вертикального диаметра проволоки. Показать, что $\ddot{\theta} - \omega^2 \sin\theta\cos\theta = (g/a)\sin\theta$, где θ — угол, образованный радиусом к частице с диаметром.

§ 89. Иллюстративные примеры

Приведем теперь три примера, иллюстрирующих применение обобщенных координат.

Рассмотрим прежде всего задачу о простом маятнике, состоящем из груза массы m и поддерживающей его легкой нерастяжимой нити длины l. Положим, что маятник приведен в состояние колебаний в некоторой плоскости, которую мы обозначим плоскостью Y^1Y^2 (рис. 38). Для того чтобы составить уравнения Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q^i} = Q_i, \tag{89.1}$$

нам необходимо выражение для кинетической энергии

$$T = \frac{1}{2} m \dot{y}^i \dot{y}^i, \tag{89.2}$$

но

$$y^1 = l \sin\theta \equiv l \sin\frac{q}{l},$$

$$y^2 = l(1 - \cos\theta) = l\left(1 - \cos\frac{q}{l}\right), \tag{89.3}$$

где в качестве обобщенной координаты мы принимаем длину дуги $q = l\theta$. Так как $\dot{y}^2 = \dot{q}\sin(q/l)$ и $\dot{y}^1 = \dot{q}\cos(q/l)$, уравнение (89.2) переходит в $T = \frac{1}{2}m(\dot{q})^2$.

Работа W_δ, произведенная на виртуальном перемещении δq, выразится через

$$W_\delta = -mg\sin\theta\,\delta q = -mg\sin\frac{q}{l}\,\delta q,$$

а отсюда получим и обобщенную силу $Q = -mg\sin(q/l)$. Таким образом, уравнение (89.1) дает

$$\ddot{q} + g\sin\frac{q}{l} = 0. \tag{89.4}$$

и так как для малых перемещений $\sin\theta \approx \theta$, то для малых колебаний имеем

$$\ddot{q} + k^2 q = 0,$$

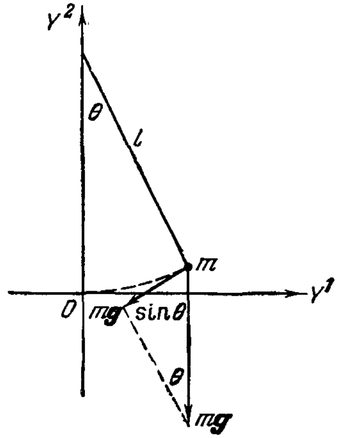

Рис. 38.

где $k^2 = g/l$. Решение этого уравнения: $q = a\cos(kt + \alpha)$. Решение уравнения (89.4) может быть выражено в эллиптических интегралах первого рода.

Обратимся теперь к более интересной задаче двойного маятника. Исследуем расположение частиц, представленное на рис. 39, где, как мы предполагаем, массы m_1 и m_2 поддерживаются нерастяжимыми легкими подвесами длиной l_1 и соответственно l_2. Предполагается, что маятник совершает колебания в одной плоскости, в качестве же обобщенных координат мы принимаем величину θ и φ — углы отклонений подвесов l_1 и l_2 от вертикали.

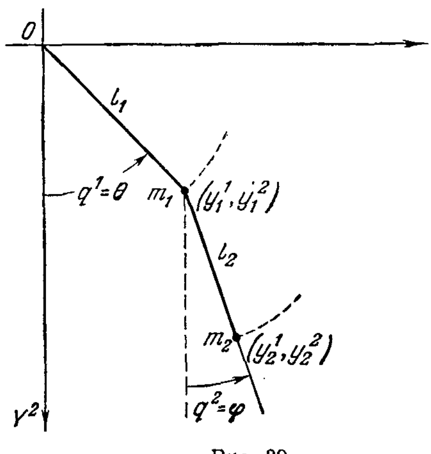

Рис. 39.

Уравнения, связывающие координаты (y_1^1, y_1^2) и (y_2^1, y_2^2) масс m_1 и m_2 с обобщенными координатами $q^1 = 0$, $q^2 = \varphi$ принимают следующий вид:

$$y_1^1 = l_1\sin q^1, \qquad y_1^2 = l_1\cos q^1,$$
$$y_2^1 = l_1\sin q^1 + l_2\sin q^2, \qquad y_2^2 = l_1\cos q^1 + l_2\cos q^2.$$

Так как

$$T=\frac{1}{2}m_1\dot{y}_1^i\dot{y}_1^i+\frac{1}{2}m_2\dot{y}_2^i\dot{y}_2^i \qquad (i=1,\ 2),$$

то незатруднительное вычисление дает

$$T=\frac{1}{2}\{m_1(l_1\dot{q}^1)^2+m_2[(l_1\dot{q}^1)^2+2l_1l_2\dot{q}^1\dot{q}^2\cos(q^2-q^1)+(l_2\dot{q}^2)^2]\}.$$

Работа, произведенная на малом виртуальном перемещении δq^2, если $\delta q^1=0$, равна

$$W_\delta^{(2)}=-m_2gl_2\sin q^2\delta q^2,$$

так что

$$Q_2=-m_2l_2g\sin q^2.$$

Точно так же работа, выполненная на перемещении δq^1, когда $\delta q^2=0$, равна

$$W_\delta^{(1)}=-(m_1+m_2)gl_1\sin q^1\delta q^1.$$

Таким образом,

$$Q_1=-(m_1+m_2)gl_1\sin q^1.$$

Воспользовавшись уравнениями (89.1), находим для определения динамической траектории пару совместных обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\{(m_1+m_2)(l_1)^2\dot{q}^1+m_2l_1l_2\dot{q}^2\cos(q^2-q^1)\}-\\&\qquad\qquad-m_2l_1l_2\dot{q}^1\dot{q}^2\sin(q^2-q^1)=-(m_1+m_2)gl_1\sin q^1,\\&\frac{d}{dt}\{m_2l_1l_2\dot{q}^1\cos(q^2-q^1)+m_2(l_2)^2\dot{q}^2\}+\\&\qquad\qquad+m_2l_1l_2\dot{q}^1\dot{q}^2\sin(q^2-q^1)=-m_2g_2l\sin q^2.\end{aligned}\right\}\qquad(89.5)$$

Вместо того чтобы определять обобщенные силы Q_1 и Q_2 непосредственно, мы могли бы воспользоваться потенциальной энергией V в ее развернутом выражении:

$$V=m_1gl_1(1-\cos q^1)+m_2g(l_1+l_2-l_1\cos q^1-l_2\cos q^2),$$

если мы примем $V=0$, когда $q^1=q^2=0$.

Что касается деталей решения системы дифференциальных уравнений (89.5), то по этому вопросу мы отсылаем читателей к стандартным курсам по аналитической динамике.

Заключительным нашим примером к изучаемой теме будет задача о малых колебаниях консервативной динамической системы относительно положения устойчивого равновесия.

Положим, что такая система — физическая и голономная имеет n степеней свободы. Выберем обобщенные координаты q^i таким образом, чтобы положение равновесия системы определялось условием $q^i = 0$ $(i = 1, \ldots, n)$. Поскольку равновесие устойчивое, потенциальная энергия $V(q^1, \ldots, q^n)$ принимает минимальное значение при $q^i = 0$ и, следовательно, $\partial V/\partial q^i|_0 = 0$. Если мы положим, что уровень потенциала падает до нуля при $q^i = 0$, то разложение потенциала $V(q_1, \ldots, q_n)$ в ряд Тейлора близ $q^i = 0$ принимает вид $V = \frac{1}{2} b_{ij} q^i q^j + O(q^3)$, где $O(q^3)$ обозначает остаточный член после членов q^i во второй степени. Поскольку мы интересуемся малыми колебаниями относительно точки $q^i = 0$, позволительно допустить, что потенциальная энергия может быть представлена с достаточной точностью квадратичной формой

$$V = \frac{1}{2} b_{ij} q^i q^j \qquad (b_{ij} = b_{ji}). \tag{89.6}$$

Кинетическая энергия T системы равна

$$T = \frac{1}{2} a_{ij} \dot{q}^i \dot{q}^j \qquad (a_{ji} = a_{ij}). \tag{89.7}$$

Положим, что в окрестности точки $q^i = 0$ коэффициенты a^{ij} заметно не изменяются, так что их можно рассматривать как постоянные величины.

Уравнения Лагранжа (86.12) дадут в таком случае систему n совместных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами

$$a_{ij} \ddot{q}^j + b_{ij} q^j = 0.$$

Вместо того чтобы интегрировать эту парную систему непосредственно, мы можем упростить задачу введением новой совокупности независимых переменных q'^i, так называемых *нормальных координат*, связанных линейно с координатами q^i таким образом, что квадратичные формы (89.6) и (89.7) приводятся совместно [1]) к сумме квадратов. Мы получаем при этом

$$\left.\begin{aligned} T &= (\dot{q}'^1)^2 + (\dot{q}'^2)^2 + \ldots + (\dot{q}'^n)^2, \\ V &= \lambda_1^2 (q'^1)^2 + \ldots + \lambda_n^2 (q'^n)^2. \end{aligned}\right\} \tag{89.8}$$

Все коэффициенты при q' в (89.8) не отрицательны, так как квадратичная форма (89.6) должна быть обязательно положительной, если потенциальная энергия V принимает минимальное значение для $q^i = 0$.

Уравнения Лагранжа принимают теперь вид

$$\ddot{q}'^i + \lambda_i^2 q'^i = 0 \text{ (без суммирования по } i),$$

[1]) Эта алгебраическая задача была рассмотрена детально в § 16.

а их решениями будут, очевидно,

$$q'^i = c_1 (\cos \lambda_i t + c_2) \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

Таким образом, колебание системы в нормальных координатах получится простым гармоническим с собственными колебаниями, определенными характеристическими значениями λ_i, которые удовлетворяют *уравнению частоты*

$$| b_{ij} - \lambda^2 a_{ij} | = 0. \tag{89.9}$$

Если корни λ_i различны, нормальные координаты q'^i определяются существенно однозначно. Для кратных корней выбор нормальных координат неоднозначен. Это следует из анализа, приведенного в § 16.

Проблема малых колебаний представляет большой технический интерес — ей посвящена обширная литература, в которой исследование осциллирующих систем проводится как для случаев конечного, так и бесконечного числа степеней свободы [1]).

В качестве конкретной иллюстрации к нашему общему анализу колебаний динамических систем относительно положения устойчивого равновесия рассмотрим двойной маятник (рис. 39), для которого $l_1 = l_2 = l$ и $m_1 = m_2 = m$. Выражения для T и V, приведенные на стр. 268, в данном случае примут вид:

$$T = \frac{1}{2} l^2 m \left[2 (\dot{q}^1)^2 + 2\dot{q}^1\dot{q}^2 \cos (q^2 - q^1) + (\dot{q}^2)^2\right],$$
$$V = mgl \left[(1 - \cos q^1) + (2 - \cos q^1 - \cos q^2)\right].$$

Если T и V развернуть в ряд по степеням q^i и $\dot{q}^i$ и сохранить в этих переменных лишь члены во вторых степенях, то мы получим

$$\left.\begin{aligned} T &= \frac{ml^2}{2} \left[2 (\dot{q}^1)^2 + 2\dot{q}^1\dot{q}^2 + (\dot{q}^2)^2\right], \\ V &= \frac{mgl}{2} \left[2 (q^1)^2 + (q^2)^2\right]. \end{aligned}\right\} \tag{89.10}$$

Для того же, чтобы привести (89.10) к виду (89.8), вводим нормальные координаты $x = q'^1$, $y = q'^2$ линейным преобразованием (см. § 16)

$$q^1 = a_1 x + a_2 y, \qquad q^2 = b_1 x + b_2 y. \tag{89.11}$$

Коэффициенты a_i и b_i в (89.11) нужно выбрать так, чтобы T и V в (89.10) приводились к виду

$$T = \frac{1}{2} \left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right), \qquad V = \lambda_1^2 x^2 + \lambda_2^2 y^2. \tag{89.12}$$

[1]) См. интересные случаи в книге: Frazer, Duncan, Collar, Elementary matrices and some applications to dynamics and differential equations, Cambridge University Press, 1938.

Подстановка из (89.11) в (89.10) дает две квадратичные формы, в которых перекрестные произведения приводятся к нулю. Таким образом,

$$2b_1a_2 - 2b_2a_1 = 0, \qquad 4a_1a_2 + 2b_1b_2 = 0.$$

Решая эти уравнения, находим

$$\frac{b_1}{a_1} = \sqrt{2}, \qquad \frac{b_2}{a_2} = -\sqrt{2}.$$

Далее, сравнение коэффициентов при x^2 и y^2 показывает, что

$$a_1^2 = \frac{2-\sqrt{2}}{4ml^2}, \qquad a_2^2 = \frac{2+\sqrt{2}}{4ml^2}.$$

Таким образом, искомое преобразование (89.11) принимает вид

$$\left.\begin{aligned} q^1 &= \frac{1}{2l\sqrt{m}}\left(\sqrt{2-\sqrt{2}}\,x + \sqrt{2+\sqrt{2}}\,y\right), \\ q^2 &= \frac{\sqrt{2}}{2l\sqrt{m}}\left(\sqrt{2-\sqrt{2}}\,x - \sqrt{2+\sqrt{2}}\,y\right), \end{aligned}\right\} \tag{89.13}$$

причем выражение потенциала V преобразуется в

$$V = \frac{g}{2l}\left[\left(2-\sqrt{2}\right)x^2 + \left(2+\sqrt{2}\right)y^2\right].$$

В соответствии с этим уравнения Лагранжа в нормальных координатах выразятся следующим образом:

$$\ddot{x} + \frac{g}{l}\left(2-\sqrt{2}\right)x = 0, \qquad \ddot{y} + \frac{g}{l}\left(2+\sqrt{2}\right)y = 0.$$

Решив их, получим

$$x = c_1\cos(\lambda_1 t + c_2), \qquad y = c_3\cos(\lambda_2 t + c_4), \tag{89.14}$$

где

$$\lambda_1^2 = \frac{g}{l}\left(2-\sqrt{2}\right), \qquad \lambda_2^2 = \frac{g}{l}\left(2+\sqrt{2}\right).$$

Независимые колебания в (89.14) имеют периоды $T_1 = 2\pi/\lambda_1$ и $T_2 = 2\pi/\lambda_2$. Колебания большего периода — это колебания x — называются колебаниями *низкого тона*. Колебания *высокого тона* — это колебания y. Если положить $y = 0$ в (89.13) и рассмотреть колебания низкого тона, то увидим, что

$$q_2 = \sqrt{2}\,q_1.$$

Поведение маятника в этом случае иллюстрируется рис. 40, *а*. Положив $x = 0$, мы получаем движение быстрого типа колебаний, для которого $q_2 = -\sqrt{2}\,q_1$. Он представлен на рис. 40, *б*. Углы представлены на этих схемах преувеличенными. Общее движение, описанное уравнениями (89.13), представляет собой сочетание движений двух характеристических типов колебаний.

Можно, конечно, получить нормальные частоты λ_1, λ_2 непосредственно из уравнений частот (87.9).

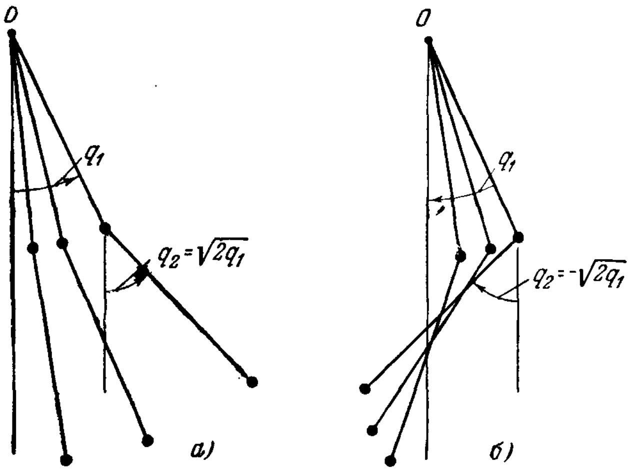

Рис. 40.

Если подставить T и V из (89.10) в уравнения Лагранжа (86.12), то придем к паре уравнений

$$\left.\begin{aligned} 2\ddot{q}^1 + \ddot{q}^2 + \frac{2g}{l} q^1 = 0, \\ \ddot{q}^1 + \ddot{q}^2 + \frac{g}{l} q^2 = 0, \end{aligned}\right\} \tag{89.15}$$

в которых переменные q_1^1 и q_2^2 спарены. Положим, что решения уравнений (89.15) имеют вид

$$q^1 = a_1 e^{i\lambda t}, \qquad q^2 = a_2 e^{i\lambda t}, \tag{89.16}$$

определим λ так, чтобы уравнения (89.15) были удовлетворены. Путем подстановки (89.16) в (89.15) получаем два однородных уравнения

$$a_1\left(2\frac{g}{l} - 2\lambda^2\right) + a_2(-\lambda^2) = 0, \qquad a_1(-\lambda^2) + a_2\left(\frac{g}{l} - \lambda^2\right) = 0,$$

имеющих для a_1 и a_2 нетривиальные решения при единственном условии, если

$$\begin{vmatrix} 2\frac{g}{l} - 2\lambda^2 & -\lambda^2 \\ -\lambda^2 & \frac{g}{l} - \lambda^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Развертывая этот детерминант, найдем, что

$$\lambda^2 = \frac{g}{l}(2 \pm \sqrt{2}),$$

и получаем два значения $\lambda_1^2 = (g/l)(2-\sqrt{2})$, $\lambda_2^2=(g/l)(2+\sqrt{2})$, отвечающих найденным ранее медленным и быстрым типам колебаний низкого и высокого тона. Таким образом, решение (89.16) может быть записано

$$q_1 = c^1 e^{i\lambda_2 t} + c_2 e^{i\lambda_1 t},$$

$$q^2 = -\sqrt{2}\, c_1 e^{i\lambda_2 t} + \sqrt{2}\, c_2 e^{i\lambda_1 t},$$

как в (89.13).

Задачи

1. Найти собственные колебания для двойного маятника (рис. 37), приняв $l_1 = l_2$, но $m_1 \neq m_2$.

2. Частица массы m колеблется относительно низшей точки гладкой поверхности $z = \frac{1}{2}(ax^2 + 2hxy + by^2)$, где координаты декартовы прямоугольные, а ось z направлена вертикально вверх. Предполагаем, что вертикальный компонент скорости мал, так что $T = \frac{1}{2} m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$. Потенциал $V = mgz = (mg/2)(ax^2 + 2hxy + by^2)$. Вывести уравнения движения, определить их решения в форме $x = a_1 e^{i\lambda t}$, $y = a_2 e^{i\lambda t}$ и заключить, что если потенциальная энергия V минимальна при $x = 0$, $y = 0$, тогда $a > 0$, $b > 0$, $ab - h^2 > 0$.

3. Пусть частица в задаче, приведенной в конце § 80, находится под воздействием силы тяжести, так что $F^1 = mga \sin u^1$, $F^2 = 0$. (Заметить, что работа δW, произведенная на малом перемещении δy^3, равна $\delta W = -mg\,\delta y^3 = mga \sin u^1\,\delta u^1$.) Показать, что движение, когда частица проходит через наивысшую и наинизшую точки сферы, совершается по дуге большого круга. Полное исследование этой задачи сопряжено со значительными сложностями. См. Appell P., Mécanique rationnelle 1, гл. 13, в особенности § 277. См. также исследование сферического маятника в книге Synge J. L., Griffith B. A., Principles of mechanics.

4. Пусть частица предыдущей задачи совершает малые колебания относительно нижнего полюса сферы. Определить проекцию этого движения на плоскость, касательную к сфере в полюсе, и исследовать характер движения. *Указание*. Положить $u^1 = \pi - (r/a)$ и вывести уравнения

$$r + \dot{r}u^2 = -g\frac{r}{a},$$

$$r\ddot{u} + 2\dot{r}\dot{u} = 0.$$

§ 90. Канонические уравнения Гамильтона

Рассмотрим консервативную голономную динамическую систему с n степенями свободы и интеграл

$$J = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q})\, dt, \qquad (90.1)$$

где $L = T - V$ — кинетический потенциал. Мы видели в § 86, что система уравнений Эйлера, связанная с вариационной задачей нахождения экстремума J, состоит из совокупности n обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка, которые мы запишем выражением

$$\frac{dL_{\dot{q}^i}}{dt} - L_{q^i} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{90.2}$$

где нижние индексы обозначают частные производные от $L(q, \dot{q})$. В ряде случаев бывает удобно представить систему n уравнений Лагранжа (90.2) в виде эквивалентной системы из $2n$ уравнений первого порядка, известных как уравнения Гамильтона.

Функция $L(q, \dot{q}) = T(q, \dot{q}) - V(q)$ зависит от n обобщенных координат q^i и n обобщенных скоростей $\dot{q}^i$. Вместо переменных $\dot{q}^i$ мы можем ввести n новых переменных p_i, определенных соотношениями

$$p_i = L_{\dot{q}^i}(q, \dot{q}) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{90.3}$$

где мы предполагаем, что система (90.3) разрешима для $\dot{q}^i$ в функции от p_i и q_i. Так, например, обстоит дело в случае, когда якобиан $\left|\frac{\partial L_{\dot{q}^i}}{\partial \dot{q}^j}\right| \neq 0$. Построим теперь функцию $H(p, q)$ независимых переменных q и p

$$H(p, q) = \dot{q}^i p_i - L(q, \dot{q}), \tag{90.4}$$

выразив $\dot{q}^i = \dot{q}^i(q, p)$ в правой части уравнения (90.4) в функции от q^i и p_i с помощью (90.3). Дифференцируя (90.4) по q^j, получаем

$$H_{q^j} = \frac{\partial \dot{q}^i}{\partial q^j} p_i - L_{q^j} - L_{\dot{q}^i} \frac{\partial \dot{q}^i}{\partial q^j},$$

а поскольку $p_i = L_{\dot{q}^i}$ в силу (90.3) находим

$$H_{q^j} = -L_{q^j}. \tag{90.5}$$

Аналогично вычисляем

$$H_{p_j} = \dot{q}^j + \frac{\partial \dot{q}^i}{\partial p_j} p_i - L_{\dot{q}^i} \frac{\partial \dot{q}^i}{\partial p_j}$$

и, пользуясь опять (90.3), получаем

$$H_{p_j} = \dot{q}^j. \tag{90.6}$$

Но уравнения Лагранжа (90.2) устанавливают, что

$$\frac{dL_{\dot{q}^i}}{dt} = L_{q^i},$$

а если учесть определение (90.3) и формулу (90.5), то мы получим n уравнений первого порядка

$$\frac{dp_i}{dt} = -H_{q^i} \qquad (i = 1, \ldots, n), \tag{90.7}$$

которые вместе с n уравнениями (90.6)

$$\frac{dq_i}{dt} = H_{p_i} \qquad (i = 1, \ldots, n), \qquad [90.6]$$

составят систему из $2n$ *канонических уравнений Гамильтона* первого порядка.

Функция $H(p, q)$, известная как *гамильтонова функция*, имеет важный физический смысл. Так как $L = T - V$, а V — функция одного лишь q^i, то можно переписать (90.4) в виде

$$H = \dot{q}^i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} - L = \dot{q}^i \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i} - T + V. \tag{90.8}$$

Но

$$T = \frac{1}{2} a_{ij}\dot{q}^i\dot{q}^j, \qquad \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i} = a_{ij}\dot{q}^j,$$

так что

$$\dot{q}^i \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i} = a_{ij}\dot{q}^i\dot{q}^j = 2T,$$

а отсюда (90.8) приводится к виду

$$H = T + V.$$

Таким образом, H — полная энергия системы.

Переменные

$$p_i \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} = a_{ij}\dot{q}^j \tag{90.9}$$

называются *обобщенными количествами движения*, и мы замечаем, что квадрат величины вектора p_i равен

$$p^2 = a^{ij}p_ip_j = a^{ij}a_{ik}a_{jl}\dot{q}^k\dot{q}^l = a_{kl}\dot{q}^k\dot{q}^l = 2T. \tag{90.10}$$

Для того чтобы дать простой пример использования уравнения Гамильтона, рассмотрим частицу с массой m, движущуюся под воздействием центрального силового поля с потенциалом $V(r)$, где r — расстояние частицы от центра притяжения. Если в качестве обобщенных координат воспользоваться полярными координатами $r = q^1$, $\theta = q^2$, то

$$T = \frac{m}{2}[r^2 + (r\dot{\theta})^2] = \frac{1}{2} a_{ij}\dot{q}^i\dot{q}^j,$$

где

$$(a_{ij}) = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & mr^2 \end{pmatrix}.$$

Но $H = T + V = \frac{1}{2} a^{ij} p_i p_j + V$ в силу (90.10), которое дает после подстановки значений a^{ij}

$$H = \frac{p_1^2}{2m} + \frac{p_2^2}{2mr^2} + V(r).$$

В итоге приходим к соотношениям

$$\frac{\partial H}{\partial r} = -\frac{p_2^2}{mr^3} + V'(r), \quad \frac{\partial H}{\partial \theta} = 0, \quad \frac{\partial H}{\partial p_l} = \frac{p_1}{m}, \quad \frac{\partial H}{\partial p_2} = \frac{p_2}{mr^2}.$$

Уравнения (90.6), (90.7) Гамильтона в этой задаче получают вид

$$\frac{dr}{dt} = \frac{p_1}{m}, \quad \frac{d\theta}{dt} = \frac{p_2}{mr^2}, \quad \frac{dp_1}{dt} = \frac{p_2^2}{mr^3} - V'(r), \quad \frac{dp_2}{dt} = 0. \quad (90.11)$$

Последнее из этих уравнений в сочетании со вторым дает

$$\frac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta}) = 0,$$

т. е. уравнение, выражающее второй закон Кеплера движения планет. Нетрудно показать, воспользовавшись остающимися уравнениями в (90.11), что если $V = -m/r$, то орбита будет коническим сечением (см. § 97).

Задачи

1. Пусть частица массы m вынуждена двигаться по гладкой поверхности. Показать, что система уравнений Гамильтона имеет внд

$$\frac{du^\alpha}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p^\alpha}, \quad \frac{dp^\alpha}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial u^\alpha} \qquad (\alpha = 1, 2),$$

где $p_\alpha = m a_{\alpha\beta} \dot{u}^\beta$ и $H = (1/2m)\, a^{\alpha\beta}\, p_\alpha p_\beta + V$.

2. Показать, что вдоль динамической траектории $dH/dt = 0$, так что $H = \mathrm{const}$ представляет собой интеграл уравнений Гамильтона.

3. Показать, что $\partial L/\partial q^i + \partial H/\partial q^i = 0$.

4. Написать канонические уравнения Гамильтона для задачи 1 § 89.

5. Если $T = \frac{1}{2} m (\dot{q})^2$ и $V = k(q)^2, k > 0$, то $H = p^2/2m + m\omega^2 (q)^2/2$, где $\omega^2 = k/m$. Показать это и вывести, что $q = \sqrt{2h/m\omega^2} \cdot \sin(\omega t + \alpha)$.

6. Вывести уравнеиия Гамильтоиа из вариационного принципа $\delta \int L\, dt = 0$.

Указание. Представить L в виде $L = p_i (dq^i/dt) - H(p, q)$, рассмотреть вариации p и q как независнмые и показать, что

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[\left(\dot{q}^i - \frac{\partial H}{\partial p_i} \right) \delta p_i - \left(\dot{p}_i + \frac{\partial H}{\partial q^i} \right) \delta q^i \right] dt = 0.$$

§ 91. Закон тяготения Ньютона

Общая формулировка динамических уравнений, сделанная в предыдущих параграфах, не накладывает каких-либо специальных ограничений на функциональную форму силовых полей. В различных применениях динамики, включая астрономию и атомную физику, мы имеем дело с динамическими системами, подвергающимися действию центральных силовых полей, и в частности таких полей, интенсивность которых обратно пропорциональна квадрату расстояния частицы от центра притяжения. Теория притяжения по закону обратной пропорциональности квадрату расстояния имеет свое начало в исследованиях Ньютона, относившихся к движению планет по «эксцентрическим коническим сечениям», как он называл их сам[1]). Мы сформулируем этот закон следующим образом.

Две материальные частицы притягиваются одна к другой с силой, прямо пропорциональной произведению их масс и обратно пропорциональной квадрату расстояния между ними. Направление действия силы совпадает с линией, соединяющей частицы.

На языке векторных уравнений этот закон формулируется, следовательно, таким образом:

$$\boldsymbol{F}=\gamma\frac{m_1m_2}{r_{12}^3}\boldsymbol{r}_{12},$$

где m_1 и m_2 — массы частиц, а $\boldsymbol{r}_{12}$ — вектор P_1P_2. Коэффициент пропорциональности γ, зависящий от выбора единиц, в системе CGS определяется значением $6{,}664\cdot10^{-8}$ физической размерности $M^{-1}L^3T^{-2}$. В нашей работе путем надлежащего подбора единиц измерения мы припишем этому коэффициенту значение $\gamma=1$. И тогда получим

$$\boldsymbol{F}=\frac{m_1m_2}{r_{12}^3}\boldsymbol{r}_{12}. \tag{91.1}$$

Заметим прежде всего, что закон тяготения (91.1) распространяется на две частицы, а поскольку в динамике приходится иметь дело обычно с непрерывными распределениями материи, то этот закон представляется необходимым обобщить. С этой целью материальные тела можно подразделить на малые части, каждую такую часть заменить эквивалентной материальной частицей, приложить соответствующие силы к отдельным — дискретным частицам и перейти к пределу по мере неограниченного

[1]) Newton, Principia, книга I, § III, Предложения 1—17.

возрастания числа дроблений материального тела на частицы. Эта процедура для двух тел τ_1 и τ_2 приводит к формуле

$$\boldsymbol{F} = \int\limits_{\tau_1}\int\limits_{\tau_2} \frac{\rho_1\rho_2}{r_{12}^3} \boldsymbol{r}_{12}\, d\tau_1\, d\tau_2, \tag{91.2}$$

где $d\tau_1$ и $d\tau_2$ — объемные элементы тел τ_1 и τ_2, ρ_1 и ρ_2 — их функции плотностей, а $\boldsymbol{r}_{12}$ — радиус-вектор элемента $d\tau_2$, отнесенного к началу $d\tau_1$. Будем предполагать, что ρ_1 и ρ_2 кусочно-непрерывны.

Поскольку два взаимодействующих тела вызывают не только результирующие силы, но также и результирующие моменты, то представляется необходимым удостовериться в том, что обобщенный закон тяготения (91.2) приводится к начальному исходному и не сопровождается какими-либо не обращающимися в нуль парами, когда тела τ_1 и τ_2 в процессе предельного перехода обращаются в точку.

Для того чтобы показать, что это действительно так, введем прямоугольную декартову систему отсчета Y и обозначим

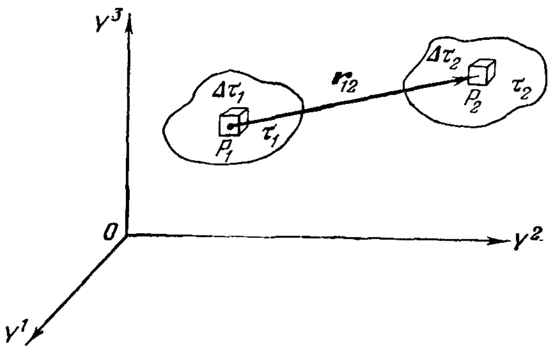

Рис. 41.

координаты точек тел τ_1 и τ_2 через (y_1^i) и соответственно (y_2^i) (рис. 41). Заменяем распределенную массу $\rho_1\Delta\tau_2$ сосредоточенной массой m_1 в точке $P_1(y_1^1,\ y_1^2,\ y_1^3)$, а массу $\rho_2\Delta\tau_2$ массой m_2 в $P_2(y_2^1,\ y_2^2,\ y_2^3)$.

В согласии с законом (91.1) получаем для компонентов силы ΔF^i, обусловленной этими массами,

$$\Delta F^i = \rho_1\rho_2\,\Delta\tau_1\,\Delta\tau_2 \frac{y_2^i - y_1^i}{r^3},$$

и для компонентов моментов[1]) ΔL_i относительно начала O

$$\Delta L_i = e_{ijk} y_1^j \Delta F^k = e_{ijk} y_1^j \rho_1 \rho_2 \Delta\tau_1 \Delta\tau_2 \frac{y_2^k - y_1^k}{r^3}.$$

Векторное сложение этих двух сил дает результирующую силу

$$F^i = \int\limits_{\tau_1} \int\limits_{\tau_2} \frac{\rho_1\rho_2 (y_2^i - y_1^i)}{r^3} d\tau_1 d\tau_2, \tag{91.3}$$

и результирующий момент

$$L_i = \int\limits_{\tau_1} \int\limits_{\tau_2} \rho_1\rho_2 e_{ijk} y_1^j \frac{y_2^k - y_1^k}{r^3} d\tau_1 d\tau_2. \tag{91.4}$$

Докажем теперь, что если в процессе предельного перехода тела τ_1 и τ_2 стягиваются в точку P_1 и соответственно P_2 (или даже стягивается до нуля лишь одно тело τ_1), то результирующий момент L_i стремится к нулю, а уравнение (91.3) преобразуется к частной форме закона тяготения для двух частиц (91.1).

Совместим начало O нашей координатной системы с точкой P_1 и заставим тело τ_1 в процессе предельного перехода сжаться до точки O, а тело τ_2 до точки $P_2(y_2^1, y_2^2, y_2^3)$. Поскольку ρ_1 и ρ_2 в уравнениях (91.3) и (91.4) — неотрицательные функции, то здесь применима первая теорема о средних значениях для интегралов, и мы получаем

$$F^i = \left[\frac{y_2^i - y_1^i}{r^3}\right] \int\limits_{\tau_1} \int\limits_{\tau_2} \rho_1\rho_2 \, d\tau_1 d\tau_2$$

и

$$L_i = \left[e_{ijk} \frac{y_1^j (y_2^k - y_1^k)}{r^3}\right] \int\limits_{\tau_1} \int\limits_{\tau_2} \rho_1\rho_2 \, d\tau_1 d\tau_2,$$

где в скобках заключены значения величин, определенных в отдельных точках в τ_1 и τ_2. По мере приближения размеров τ_1 к нулю, $y_1^i \to 0$, а потому и $L_i \to 0$, причем первый из вышеприведенных интегралов приводится к

$$F^i = \frac{y_2^i}{r^3} m_1 m_2.$$

Мы получили в точности закон тяготения (91.1) для двух частиц, размещенных в точках $(0, 0, 0)$ и (y_2^1, y_2^2, y_2^3).

[1]) Напомним, что момент силы $\boldsymbol{F}$, приложенной в точке определенной радиусом $\boldsymbol{r}$, равен $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}$ или, в компонентах, $L_i = e_{ijk} y^j F^k$.

Из вышеизложенного следует, что взаимодействие материального тела с точечной массой не сопровождается появлением какого-либо результирующего момента $\boldsymbol{L}$. Кроме того, непосредственные вычисления указывают, что это верно также и для того случая, когда точечная масса заменена сферой τ, плотность которой ρ — непрерывная функция одного лишь радиуса. Результирующая сила $\boldsymbol{F}$, с которой тело действует на сферу, оказывается такой же, как и та, которая проявляется телом, действующим на точечную массу $m = \int\limits_{\tau} \rho\, d\tau$, находящуюся в центре сферы [1]).

Рассмотрим теперь тело τ с кусочно-непрерывной плотностью ρ, и пусть $P(y^1, y^2, y^3)$ — фиксированная точка, находящаяся либо внутри, либо вне τ. *Гравитационный потенциал* $V(P)$ в точке P, обусловленный телом τ, определяется интегралом

$$V(P) = \int\limits_{\tau} \frac{\rho(\xi^1, \xi^2, \xi^3)}{r}\, d\tau(\xi), \qquad (91.5)$$

где $r = \sqrt{(y^1 - \xi^1)^2 + (y^2 - \xi^2)^2 + (y^3 - \xi^3)^2}$ — расстояние между $P(y^1, y^2, y^3)$ и переменной точкой (ξ^1, ξ^2, ξ^3), связанное с объемным элементом $d\tau(\xi)$ тела τ. Интеграл (91.5), как мы теперь увидим, определяет дифференцируемую функцию $V(y^1, y^2, y^3)$ для всех положений точки P.

Если P — вне тела τ, интеграл (91.5) собственный, и мы можем вычислить сколь угодно много производных V путем дифференцирования (91.5) под знаком интеграла по параметрам y^i. В частности,

$$\frac{\partial V}{\partial y^i} = -F_i, \qquad (91.6)$$

где F_i — компоненты силы тяготения

$$\boldsymbol{F}(P) = \int\limits_{\tau} \frac{\rho(\varepsilon)\, \boldsymbol{r}}{r^3}\, d\tau, \qquad (91.7)$$

обнаруживаемой телом τ и действующей на частицу единичной массы, находящейся в точке $P(y)$.

Если $P(y)$ находится внутри τ, то интеграл (91.5) несобственный, поскольку $r = 0$ в том случае, если переменная точка (ξ^1, ξ^2, ξ^3) совпадает с (y^1, y^2, y^3). Тем не менее такой интеграл может быть все же дифференцирован под знаком интеграла, если производный интеграл равномерно сходится. В нашем слу-

[1]) См., например, Sokolnikoff I. S., Redheffer R. M., Mathematics of physics and modern engineering, McGraw-Hill, Book C°, 1958, стр. 410—411.

чае равномерная сходимость интеграла (91.7) следует из известной проверки на сходимость несобственных интегралов [1]). Кроме того, из равномерной сходимости (91.7) следует, что $\boldsymbol{F}(P)$ непрерывны во всем пространстве.

Хотя $V(P)$ принадлежит классу C^{∞}, во всех тех случаях, когда P находится *вне* τ, на непрерывность ρ должны быть наложены более строгие ограничения, для того чтобы обеспечить существование вторых производных от $V(P)$ в точках *внутри* τ. Известно, что если ρ принадлежит классу C^1, то вторые производные потенциала $V(P)$ существуют во всех *внутренних* точках тела τ. Тщательный анализ функции $F(P)$ показывает [2]), кроме того, что $V(P)$ удовлетворяет уравнению Пуассона

$$\nabla^2 V = -4\pi\rho \tag{91.8}$$

во всех точках внутри τ и уравнению Лапласа

$$\nabla^2 V = 0 \tag{91.9}$$

в точках вне τ.

Уравнения (91.8) и (91.9) приводят к выводу, что вторые производные от $V(P)$ вообще испытывают разрывы всякий раз, когда P пересекает поверхность Σ тела τ. В § 93 мы установим справедливость уравнений (91.8) и (91.9) с привлечением гауссовой теоремы потока. Доказательство, основанное на теореме потока Гаусса, имеет преимущества физической убедительности, которой обычно бывает лишен аналитический процесс, основанный на вышеупомянутом изучении.

При всем том оно налагает весьма строгие ограничения на характер областей и поверхностей, ограничивающих эти области. Теорема Гаусса — это теорема в целом и ею нет нужды пользоваться в выводе результатов местного значения (91.8) и (91.9), относящихся к свойствам потенциалов в окрестности заданной точки.

§ 92. Теоремы преобразования интегралов

Для того чтобы обеспечить себя аналитическим инструментарием в нашем дальнейшем исследовании, переведем на язык тензорного исчисления хорошо известные теоремы интегральных преобразований Гаусса, Грина и Стокса.

---

[1]) Так как для всех значений (ξ^1) в окрестности (y^i) $|r^n\rho(\xi)/r^2| < A$, если $2 < n < 3$, где A — константа, не зависящая от (ξ^i). К вопросу об этой оценке см. Sokolnikoff I. S., Advanced calculus, Mc Graw Hill, 1939, стр. 367—372 или: Kellogg O. D., Foundations of potential theory. Springer-Verlag, 1929, стр. 146—156.

[2]) См. Kellogg O. D., op. cit., гл. 6, стр 146—156.

Пусть $\boldsymbol{F}$ — векторная функция класса C^1 в открытой области τ, охватываемой регулярной[1]) поверхностью Σ и непрерывной в замкнутой области $\Sigma+\tau$. Обозначим через n внешнюю единичную нормаль к Σ и сформулируем *теорему дивергенции* в виде

$$\int\limits_{\tau} \operatorname{div} \boldsymbol{F}\, d\tau = \int\limits_{\Sigma} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n}\, d\sigma. \tag{92.1}$$

Интеграл с индексом τ вычисляется по объему τ, интеграл же в правой части формулы (92.1) измеряет поток вектора $\boldsymbol{F}$ через поверхность Σ.

Вспомним из элементарного векторного анализа, что в прямоугольных декартовых координатах дивергенция вектора $\boldsymbol{F}$ выражается формулой

$$\operatorname{div} \boldsymbol{F} = \frac{\partial F^1}{\partial y^1} + \frac{\partial F^2}{\partial y^2} + \frac{\partial F^3}{\partial y^3}. \tag{92.2}$$

Если компоненты $\boldsymbol{F}$, отнесенные к произвольной криволинейной координатной системе X, обозначены через F^i, то ковариантная производная компонента F^i примет вид

$$F^i_{,j} = \frac{\partial F^i}{\partial x^j} + \left\{ {i \atop kj} \right\} F^k,$$

и мы видим, что инвариант $F^i_{,i}$ в декартовых координатах приводится к правой части формулы (92.2), т. е. представляет дивергенцию векторного поля $\boldsymbol{F}$. Кроме того,

$$\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n} = g_{ij} F^i n^j = F^i n_i,$$

и потому уравнению (92.1) можно будет придать вид

$$\int\limits_{\tau} F^i_{,j}\, d\tau = \int\limits_{\Sigma} F^i n_i\, d\sigma. \tag{92.3}$$

Из этой теоремы легко можно вывести две другие теоремы (обычно приписываемые Грину).

Положим, что $u(x^1, x^2, x^3)$ и $v(x^1, x^2, x^3)$ — две скалярные функции класса C^2 в τ и класса C^1 в замкнутой области $\Sigma+\tau$. Обозначим градиенты u и v через u_i и соответственно через v_i, так что получим

$$u_i = \frac{\partial u}{\partial x^i} \quad \text{и} \quad v_i = \frac{\partial v}{\partial x^i}.$$

Если положить

$$F_i = u v_i,$$

[1]) Мы опускаем довольно сложное исследование свойств поверхностей, к которым применима теорема дивергенции. С подробным рассмотрением этого вопроса можно ознакомиться у Келлога: Kellogg O. D., Foundations of potential theory, стр. 97—121.

и образовать дивергенцию от F^i, то мы получим

$$F^i_{,i} = g^{ij} F_{i,j} = g^{ij}(uv_{i,j} + v_i u_j).$$

Введем это выражение в (92.3) и получим искомую формулу

$$\int_\tau g^{ij}(uv_{i,j} + v_i u_j)\, d\tau = \int_\Sigma uv_i n^i\, d\sigma. \qquad (92.4)$$

Инвариант $g^{ij}v_{i,j}$, возникающий в левой части уравнения (92.4), будучи выраженным в декартовых координатах, известен как *лапласиан* функции v, $\partial^2 v/\partial y^i \partial y^i$, и если обозначить оператор-лапласиан символом ∇^2, то мы сможем написать

$$g^{ij} v_{i,j} = \nabla^2 v.$$

Точно так же мы можем записать и внутреннее произведение $g^{ij} v_i u_j$,

$$g^{ij} v_i u_j = \nabla u \cdot \nabla v,$$

где мы пользуемся обычным оператором ∇ для обозначения градиента.

Теперь формулу (92.4) можно представить в знакомом виде

$$\int_\tau u \nabla^2 v\, d\tau = \int_\Sigma u\boldsymbol{n} \cdot \nabla v\, d\sigma - \int_\tau \nabla u \cdot \nabla v\, dt, \qquad (92.5)$$

где

$$\boldsymbol{n} \cdot \nabla v = v_i n^i = \frac{\partial v}{\partial n}.$$

Переменив местами u и v в уравнении (92.5) и вычтя полученную формулу из уравнения (92.5), приходим к *симметричной форме теоремы Грина*

$$\int_\tau (u\nabla^2 v - v\nabla^2 u)\, d\tau = \int_\Sigma \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n}\right) d\sigma. \qquad (92.6)$$

Теоремы, содержащиеся в уравнения (92.3)—(92.6), являются, может быть, именно теми, которые чаще всего используются в математической физике.

Лапласиан v:

$$\nabla^2 v = g^{ij} v_{i,j}, \qquad (92.7)$$

будучи выписан в развернутой форме в символах Кристоффеля, отнесенных к криволинейным координатам x^i пространства E_3, принимает вид

$$\nabla^2 v = g^{ij}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^i \partial x^j} - \left\{ {k \atop ij} \right\} \frac{\partial v}{\partial x^k}\right), \qquad (92.8)$$

а дивергенция вектора F^i —

$$F^i_{,i} = \frac{\partial F^i}{\partial x^i} + \left\{ {i \atop ji} \right\} F^j. \tag{92.9}$$

Формулы (92.8) и (92.9) могут быть представлены в различных формах, часто более удобных для вычислений. Уравнение (31.10) дает

$$\left\{ {i \atop ji} \right\} = \frac{\partial}{\partial x^j} \log \sqrt{g}, \qquad [31.10]$$

и, следовательно, мы сможем представить дивергенцию $F^i_{,i}$ в (92.9) в виде

$$F^i_{,i} = \frac{\partial F^i}{\partial x^i} + \left(\frac{\partial}{\partial x^j} \log \sqrt{g} \right) F^j,$$

или

$$F^i_{,i} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial (\sqrt{g}\, F^i)}{\partial x^i}. \tag{92.10}$$

Вводя в эту формулу $F^i = g^{ij} (\partial v/\partial x^j)$, получим

$$\nabla^2 v = g^{ij} v_{j,\,i} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial (\sqrt{g}\, g^{ij}\, \partial v/\partial x^j)}{\partial x}. \tag{92.11}$$

Обратимся теперь к рассмотрению теоремы Стокса, позволяющей выразить некоторые поверхностные интегралы через криволинейные интегралы.

Пусть часть регулярной поверхности Σ ограничена замкнутой регулярной кривой C, а $\boldsymbol{F}$ — некоторая векторная функция класса C^1, определенная на Σ и на C. Теорема Стокса констатирует, что

$$\int_\Sigma \boldsymbol{n} \cdot \operatorname{rot} \boldsymbol{F}\, d\sigma = \int_C \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{\lambda}\, ds, \tag{92.12}$$

где $\boldsymbol{\lambda}$ — единичный вектор, касательный к C, а $\operatorname{rot} \boldsymbol{F}$ — вектор, компоненты которого в ортогональных декартовых координатах определяются детерминантом

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{F} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \\ \dfrac{\partial}{\partial y^1} & \dfrac{\partial}{\partial y^2} & \dfrac{\partial}{\partial y^3} \\ F^1 & F^2 & F^3 \end{vmatrix}, \tag{92.13}$$

где $\boldsymbol{e}_i$ — единичные базисные векторы в декартовой координатной системе. Детерминант (92.13) может быть представлен как символическое векторное произведение $\nabla \times \boldsymbol{F}$.

Рассмотрим ковариантную производную $F_{i,j}$ вектора F_i и образуем контравариантный вектор

$$G^i = -\varepsilon^{ijk} F_{j,k}. \tag{92.14}$$

Легко удостовериться, что в декартовых координатах уравнение (92.14) приводится к (92.13), и мы устанавливаем, что вектор $\boldsymbol{G}$ есть $\operatorname{rot} \boldsymbol{F}$.

Поскольку $\boldsymbol{n} \cdot \operatorname{rot} \boldsymbol{F} = n_i G^i = -\varepsilon^{ijk} F_{j,k} n_i$ и компоненты единичного касательного вектора $\boldsymbol{\lambda}$ являются произвольными dx^i/dt, поскольку мы можем представить уравнение (92.12) как

$$-\int\limits_{\Sigma} \varepsilon^{ijk} F_{j,k} n_i \, d\sigma = \int\limits_{C} F_i \frac{dx^i}{ds} \, ds. \tag{92.15}$$

Интеграл $\int\limits_C F_i \, dx^i$ называется *циркуляцией* $\boldsymbol{F}$ по контуру C.

Задачи

1. Доказать, что

$$\int\limits_{\Sigma} v_i n^i \, d\sigma = \int\limits_{\tau} \nabla^2 v \, d\tau,$$

где $v_i = \partial v / \partial x^i$ неразрывна на Σ и принадлежит классу C^2 в τ.

2. Показать, что:

(а) В плоских полярных координатах с квадратичной формой

$$ds^2 = (dr)^2 + r^2 (d\theta)^2,$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{F} = \frac{1}{r} \left[\frac{\partial (r F_r)}{\partial r} + \frac{\partial F_\theta}{\partial \theta} \right],$$

$$\nabla^2 v = \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) \right],$$

где F_r и F_θ — *физические* компоненты вектора $\boldsymbol{F}$, т. е.

$$\boldsymbol{F} = F_r \boldsymbol{r}_1 + F_\theta \boldsymbol{\theta}_1,$$

где $\boldsymbol{r}_1$ и $\boldsymbol{\theta}_1$ — единичные векторы.

(б) В цилиндрических координатах с квадратичной формой

$$ds^2 = (dr)^2 + r^2 (d\theta)^2 + (dz)^2,$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{F} = \frac{1}{r} \frac{\partial (r F_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial F_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial F_z}{\partial z},$$

$$\nabla^2 v = \frac{1}{r} \frac{\partial \left(r \frac{\partial v}{\partial r} \right)}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2},$$

где $\boldsymbol{F} = F_r \boldsymbol{r}_1 + F_\theta \boldsymbol{\theta}_1 + F_z \boldsymbol{z}_1$, а $\boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{\theta}_1$, $\boldsymbol{z}_1$ — единичные векторы, так что F_r, F_θ и F_z — физические компоненты $\boldsymbol{F}$.

(в) В сферических координатах с квадратичной формой

$$ds^2 = (dr)^2 + r^2 (d\theta)^2 + r^2 \sin^2\theta\, (d\varphi)^2,$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{F} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial (r^2 F_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(\sin\theta F_\theta)}{\partial\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial F_\varphi}{\partial\varphi},$$

$$\nabla^2 v = \frac{1}{r^2}\frac{\partial\left(r^2 \frac{\partial v}{\partial r}\right)}{\partial r} + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial\left(\sin\theta\frac{\partial v}{\partial\theta}\right)}{\partial\theta} + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 v}{\partial\varphi^2},$$

где *физические* компоненты вектора $\boldsymbol{F} - F_r$, F_θ, F_φ, так что $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{r}_1 F_r + \theta_1 F_\theta + \varphi F_\varphi$, $\boldsymbol{r}_1$, θ_1 и φ_1 — единичные векторы.

3. Показать, что в ортогональной криволинейной системе X

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{F} = \frac{1}{\sqrt{g_{11}g_{22}g_{33}}}\begin{vmatrix} \sqrt{g_{11}}\,\boldsymbol{a}_1 & \sqrt{g_{22}}\,\boldsymbol{a}_2 & \sqrt{g_{33}}\,\boldsymbol{a}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x^1} & \frac{\partial}{\partial x^2} & \frac{\partial}{\partial x^3} \\ \sqrt{g_{11}}\,F^1 & \sqrt{g_{22}}\,F^2 & \sqrt{g_{33}}\,F^3 \end{vmatrix},$$

где $\boldsymbol{a}_i$ — единичные базисные векторы, а $\boldsymbol{F} = F^1\boldsymbol{a}_1 + F^2\boldsymbol{a}_2 + F^3\boldsymbol{a}_3$.

4. Показать, что контравариантные компоненты вектора $\operatorname{rot}\boldsymbol{F}$ имеют вид

$$\frac{1}{\sqrt{g}}\left(\frac{\partial F_3}{\partial x^2} - \frac{\partial F_2}{\partial x^3}\right), \quad \frac{1}{\sqrt{g}}\left(\frac{\partial F_1}{\partial x^3} - \frac{\partial F_3}{\partial x^1}\right), \quad \frac{1}{\sqrt{g}}\left(\frac{\partial F_2}{\partial x^1} - \frac{\partial F_1}{\partial x^2}\right).$$

5. Установить, что при соответствующих ограничениях неразрывности вихрь градиента вектора обращается тождественно в нуль.

6. В ортогональных криволинейных координатах

$$g_{ij} = g^{ij} = 0, \quad i \neq j \quad \text{и} \quad g_{11} = \frac{1}{g^{11}}, \quad g_{22} = \frac{1}{g^{22}}, \quad g_{33} = \frac{1}{g^{33}}.$$

Если положить $ds^2 = e_1^2(dx^1)^2 + e_2^2(dx^2)^2 + e_3^2(dx^3)^2$, так что $g_{11} = e_1^2$, $g_{22} = e_2^2$, $g_{33} = e_3^2$, тогда

(а) $$[ij, k] = 0, \quad \left\{ {k \atop ij} \right\} = 0, \quad i,\ j,\ k \ \text{различны},$$

$$[ij, i] = -[ii, j] = e_i\frac{\partial e_i}{\partial x^j}, \quad [ii, i] = e_i\frac{\partial e_i}{\partial x^i}, \quad \left\{ {i \atop ij} \right\} = \frac{\partial \log e_i}{\partial x^j},$$

$$\left\{ {j \atop ii} \right\} = -\frac{e_i}{(e_j)^2}\frac{\partial e_i}{\partial x^j}, \quad \left\{ {i \atop ii} \right\} = \frac{\partial \log e_i}{\partial x^i} \ \text{(без суммирования)};$$

(б) $$\nabla^2 v = \frac{1}{e_1e_2e_3}\left[\frac{\partial}{\partial x^1}\left(\frac{e_2e_3}{e_1}\frac{\partial v}{\partial x^1}\right) + \frac{\partial}{\partial x^2}\left(\frac{e_3e_1}{e_2}\frac{\partial v}{\partial x^2}\right) + \frac{\partial}{\partial x^3}\left(\frac{e_1e_2}{e_3}\frac{\partial v}{\partial x^3}\right)\right].$$

§ 93. Теорема Гаусса. Решение уравнения Пуассона

Согласно закону тяготения Ньютона частица P массы m воздействует на частицу P_1 единичной массы, находящейся на расстоянии r от P с силой величины $F = m/r^2$. Представим себе замкнутую регулярную поверхность Σ, стянутую вокруг точки P, и пусть θ обозначает угол, образуемый единичной внешней нормалью $\boldsymbol{n}$ к Σ и осью конуса с вершиной в P. Этот конус

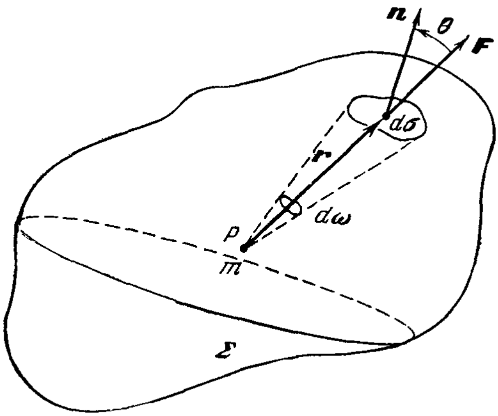

Рис. 42.

стягивает элемент поверхности $d\sigma$ (рис. 42). Поток гравитационного поля, производимый m, определяется интегралом

$$\int_{\Sigma} \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\,d\sigma = \int_{\Sigma} \frac{m\cos\theta}{r^2}\,\frac{r^2\,d\omega}{\cos\theta},$$

где $d\sigma = r^2 d\omega/\cos\theta$, а $d\omega$ — телесный угол, стягиваемый $d\sigma$. Получаем, таким образом,

$$\int_{\Sigma} \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\,d\sigma = \int_{\Sigma} m\,d\omega = 4\pi m. \tag{93.1}$$

Если в объеме, охватываемом поверхностью Σ, имеется n дискретных частиц с массами m_i, то

$$\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i\cos\theta_i}{r_i^2},$$

и полный поток определится как

$$\int_{\Sigma} \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\,d\sigma = 4\pi\sum_{i=1}^{n} m_i. \tag{93.2}$$

Результат, полученный в формуле (93.2), легко может быть распространен на сплошные распределения материи, если эти распределения нигде не пересекаются с поверхностью Σ. Процедура вычисления обычная. Вклад к интегралу потока от элемента массы $\rho\, d\tau$, содержащегося внутри τ, равен

$$\int\limits_{\Sigma} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n}\, d\sigma = \int\limits_{\Sigma} \frac{\cos\theta \rho\, d\tau}{r^2}\, d\sigma,$$

а вклад от масс, содержащихся целиком внутри Σ, определится как

$$\int\limits_{\Sigma} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n}\, d\sigma = \int\limits_{\Sigma} \left(\int\limits_{\tau} \frac{\cos\theta \rho\, d\tau}{r^2} \right) d\sigma, \tag{93.3}$$

где $\int\limits_{\tau}$ обозначает объемный интеграл, охватывающий все тела, находящиеся внутри Σ. Поскольку, как предположено, все массы размещаются внутри Σ, то r не может обратиться в нуль. Подынтегральное выражение в (93.3) представляет собой одночлен, и на этом основании допустимо обратить порядок интегрирования и получить

$$\int\limits_{\Sigma} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n}\, d\sigma = \int\limits_{\tau} \rho \left(\int\limits_{\Sigma} \frac{\cos\theta\, d\sigma}{r^2} \right) d\tau. \tag{93.4}$$

Но интеграл $\int\limits_{\Sigma} \frac{\cos\theta\, d\sigma}{r^2} = 4\pi$, поскольку он представляет поток единой массы, содержащейся в Σ. Отсюда

$$\int\limits_{\Sigma} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n}\, d\sigma = 4\pi \int\limits_{\tau} \rho\, d\tau = 4\pi m, \tag{93.5}$$

где m обозначает полную массу, содержащуюся внутри Σ. Теперь мы можем сформулировать теорему.

Теорема Гаусса. *Интеграл нормального компонента гравитационного потока, вычисленный по регулярной поверхности Σ, содержащей весомые массы полностью внутри себя, равен $4\pi m$, где m — полная масса, заключенная в Σ.*

Эту теорему можно распространить и на такие условия, где Σ пересекает распределенные массы достаточно равномерной плотности ρ. Пусть регулярная замкнутая поверхность Σ пересекает распределенные массы непрерывно дифференцируемой плотности ρ. Строим две поверхности Σ' и Σ'', параллельные Σ (см. § 73), так, чтобы Σ' оказалась внутри Σ, а Σ'' охватывала бы Σ извне (рис. 43). Поток тяготеющих масс непрерывно изменяется при пересечении Σ' и Σ'', когда эти поверхности, оставаясь параллельными, приближаются к Σ.

Так как Σ'' не пересекает Σ, то теорему потока Гаусса можно применить в вычислении полного потока масс, поступающих через Σ'' из внутренней области Σ. Таким образом,

$$\int\limits_{\Sigma''} (\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n})_i \, d\sigma = 4\pi m, \tag{93.6}$$

где m — полная масса, содержащаяся внутри Σ, нижний же индекс i относится к потоку масс, поступающих из *внутренней* области Σ. С другой стороны, поток-*нетто*, поступающий через Σ' от масс, расположенных *вне* Σ, равен

$$\int\limits_{\Sigma'} (\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n})_0 \, d\sigma = 0, \tag{93.7}$$

так как конический поток, исходящий из любой точки, лежащей вне Σ, пересекает Σ' дважды.

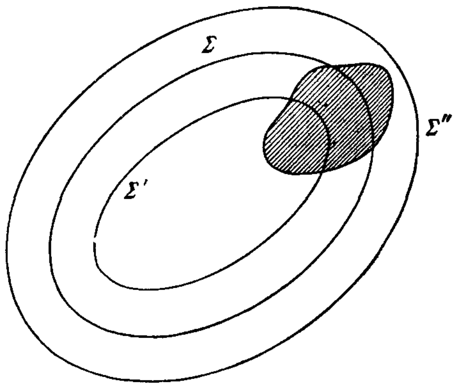

Рис. 43.

Если мы теперь будем приближать Σ' и Σ'' к Σ, то правые части уравнений (93.6) и (93.7) останутся неизменными, левая же часть в (93.6) представит полный поток через Σ масс, поступающих из области, лежащей внутри Σ, между тем как левая часть (93.7) определит поток через Σ всех масс, поступающих из внешней по отношению к Σ области. Таким образом, полный суммарный поток распределения масс внутри Σ определится интегралом

$$\int\limits_{\Sigma} (\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n}) \, d\sigma = 4\pi m = \int\limits_{\tau} 4\pi\rho \, d\tau. \tag{93.8}$$

Если далее положить, что $\boldsymbol{F}$ — непрерывно дифференцируема, то к поверхностному интегралу (93.8) будет законно применить теорему о дивергенции и получить таким образом

$$\int\limits_{\tau} (\operatorname{div} \boldsymbol{F} - 4\pi\rho) \, d\tau = 0. \tag{93.9}$$

Это соотношение справедливо для произвольной области τ, а так как подынтегральное выражение в (93.8) неразрывно, мы заключаем, что

$$\operatorname{div} \boldsymbol{F} = 4\pi\rho \text{ по всей области } \tau. \tag{93.10}$$

Но вместе с тем формула (91.6) констатирует, что $F = -\nabla V$, и на этом основании формулу (93.10) следует признать эквивалентной

$$\nabla^2 V = -4\pi\rho. \tag{93.11}$$

Таким образом, во всех внутренних точках тела τ гравитационный потенциал удовлетворяет уравнению Пуассона. Отметим в заключение, что формула

$$V(P) = \int_\tau \frac{\rho\, d\tau}{r} \qquad [91.5]$$

дает решение уравнения (93.11) во всех точках в τ.

§ 94. Третье тождество Грина. Гармонические функции

Симметричная формула Грина

$$\int_\tau (u\nabla^2 v - v\nabla^2 u)\, d\tau = \int_\Sigma \left(u\,\frac{\partial v}{\partial n} - v\,\frac{\partial u}{\partial n}\right) d\sigma \qquad [92.6]$$

применима к любой паре функций u, v класса C^2 в открытой области τ и класса C^1 в замкнутой области $\Sigma + \tau$. Положим $u = 1/r$, и $v = V$, где r — расстояние между точками $P(x^1, x^2, x^3)$ и $P_1(\xi^1, \xi^2, \xi^3)$, а V — гравитационный потенциал распределения масс непрерывно дифференцируемой плотности ρ так, что V принадлежит классу C^2 в τ.

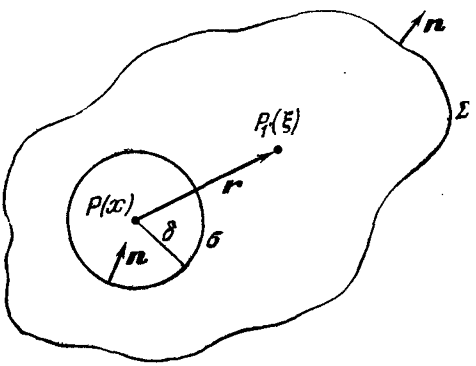

Рис. 44.

Так как $1/r$ имеет разрыв непрерывности в $(x^i) = (\xi^i)$, то мы выделим $P(x)$ из τ, заключив эту точку в сферу σ радиуса δ с центром σ в P. Функции $u = 1/r$ и $v = V$ будут тогда удовлетворять условиям теоремы (92.6) в области $\tau - \varepsilon$, ограниченной Σ и σ (рис. 44). Но в области $\tau - \varepsilon$ имеет место равенство $\nabla^2 u = \nabla^2(1/r) \equiv 0$ и формула (92.6) даст

$$\int_{\tau-\varepsilon} \frac{1}{r}\nabla^2 V\, d\tau = \int_\Sigma \left(\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial n} - V\,\frac{\partial(1/r)}{\partial n}\right) d\sigma + \int_\sigma \left(\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial n} - V\,\frac{\partial(1/r)}{\partial n}\right) d\sigma, \tag{94.1}$$

где n — единичная внешняя нормаль к поверхности $\Sigma+\sigma$. Поскольку, однако, на σ нормаль n направлена к P, имеет место уравнение

$$\int\limits_{\sigma}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial n}-V\frac{\partial(1/r)}{\partial n}\right)d\sigma=\int\limits_{\sigma}\left(-\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial r}+V\frac{\partial(1/r)}{\partial r}\right)d\sigma=$$
$$=\int\limits_{\sigma}\left(-\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial r}-\frac{V}{r^2}\right)r^2\,d\omega=-\int\limits_{\sigma}\left(r\frac{\partial V}{\partial r}+V\right)d\omega=$$
$$=-\delta\int\limits_{\delta}\left(\frac{\partial V}{\partial r}\right)_{r=\delta}d\omega-4\pi\overline{V},\qquad(94.2)$$

где $\overline{V}$ — среднее значение V по сфере σ, а ω — телесный угол.

Если положить $\delta\to 0$, то правая часть уравнения (94.2) даст $-4\pi V(P)$, и мы получим из уравнения (94.1)

$$V(P)=\frac{1}{4\pi}\int\limits_{\tau}-\frac{\nabla^2 V}{r}\,d\tau+\frac{1}{4\pi}\int\limits_{\Sigma}\frac{\partial V}{\partial n}\frac{1}{r}\,d\sigma-\frac{1}{4\pi}\int\limits_{\Sigma}V\frac{\partial(1/r)}{\partial n}\,d\sigma.\qquad(94.3)$$

Важная формула (94.3), известная как *третье тождество Грина*, констатирует, что любая функция V класса C^1 в $\Sigma+\tau$ и класса C^2 в τ может быть представлена как сумма трех входящих в (94.3) интегралов. Если $V(P)$ *регулярна в бесконечности*, т. е. если для достаточно больших значений r потенциал V таков, что

$$|V|\leqslant\frac{m}{r}\quad\text{и}\quad\left|\frac{\partial V}{\partial r}\right|<\frac{m}{r^2},\qquad(94.4)$$

где m — постоянная, не зависящая от r, то, распространяя операцию интегрирования в (94.3) на все пространство, получим

$$V(P)=\frac{1}{4\pi}\int\limits_{\infty}-\frac{\nabla^2 V}{r}\,d\tau,\qquad(94.5)$$

если только этот объемный интеграл сходится. Поверхностные интегралы в (94.3), если их распространить на все пространство, обращаются в нуль в силу условий регулярности (94.4).

Во всех точках, не занятых материей (т. е. где $\rho=0$), гравитационный потенциал V удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\nabla^2 V=0.\qquad(94.6)$$

Функция, удовлетворяющая уравнению (94.6) в заданной области, называется *гармонической* в этой области. Если V — гармоническая в области τ, то формула (94.3) приводится к виду

$$V(P)=\frac{1}{4\pi}\int\limits_{\Sigma}\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial n}\,d\sigma-\frac{1}{4\pi}\int\limits_{\Sigma}V\frac{\partial(1/r)}{\partial n}\,d\sigma\qquad(94.7)$$

так, что значения V полностью определяются в τ, если значения V и ее нормальной производной $\partial V/\partial n$ известны на Σ. Однако эти поверхностные значения не могут быть установлены независимо одно от другого, и мы увидим, что установление значений одного лишь V на Σ полностью определяет $V(P)$ во всех точках τ. С другой стороны, определение $\partial V/\partial n$ на Σ определяет $V(P)$ в τ с точностью до произвольной постоянной при условии, чтобы

$$\int_\Sigma \frac{\partial V}{\partial n}\, d\sigma = 0. \tag{94.8}$$

Условие (94.8) следует непосредственно из формулы (92.6), если положить $u = 1$, $v = V$. *Это необходимое условие удовлетворяется всякой гармонической функцией.*

Если Σ в (94.7) — поверхность сферы радиуса R с центром в P, то $[\partial(1/r)]/\partial n = [\partial(1/r)]/\partial r = -1/r^2$ и (94.7) дает

$$V(P) = \frac{1}{4\pi R^2} \int_\Sigma V\, d\sigma, \tag{94.9}$$

если мы учтем условие (94.8). Формула (94.9) раскрывает важное свойство гармонических функций. *Значение гармонической функции V в центре сферы равно среднему значению V на поверхности сферы.* Это свойство позволяет нам доказать следующую основную теорему о гармонических функциях.

Теорема. *Функция V, гармоническая в замкнутой регулярной области $\Sigma + \tau$, принимает свои максимальные и минимальные значения на границе Σ тела τ, за единственным исключением, когда V — постоянная величина для всего τ.*

Для доказательства этой теоремы допустим, что V принимает свое максимальное (или минимальное) значение V_0 в какой-либо внутренней точке P, принадлежащей τ. Построим сферу S в τ с центром в P, радиуса R. Тогда

$$V_0(P) = \frac{\int_S V\, d\sigma}{4\pi R^2}$$

в силу (94.9). Но правая часть этого выражения представляет собой среднее значение $\overline{V}$ потенциала V по S, причем среднее значение $\overline{V}$ может равняться максимуму V_0 лишь в том случае, когда $V = V_0$ на S. Далее, поскольку радиус R произволен, мы должны заключить, что $V = V_0$ в каждой внутренней точке S. Для того чтобы показать, что V сохраняет одно и то же постоянное значение V_0 в каждой точке Q тела τ, соединим точки P и Q кривой C конечной длины и покроем ее последовательностью сфер, частично накладываемых одна на другую с центрами на C. Внутри каждой из сфер этой последовательности V сохраняет одно и то же постоянное значение V_0, и потому $V(Q) = V_0$. Таким образом, если функция V не остается постоянной по всей области τ, она принимает экстремальные значения на границе Σ.

Определение гармонической функции V в τ по заданным значениям V на границе Σ тела τ составляет содержание *задачи Дирихле.* Если τ — конечная область, мы имеем дело с *внутренней задачей*, если же τ — бесконечная область, ограниченная замкнутой поверхностью Σ, перед нами — *внешняя задача* Дирихле.

Легко показать, что внутренняя задача Дирихле для регулярной поверхности $\Sigma + \tau$ не может иметь более одного решения, ибо если бы мы допустили существование двух функций V_1 и V_2, гармонических в τ и принимающих те же значения на границе Σ, то $V \equiv V_1 - V_2$ оказалась бы также гармонической и принимающей нулевые значения на Σ. Но это привело бы к тому, что $V = 0$ по всей области τ, поскольку в противном случае V должна была бы принять положительный максимум или отрицательный минимум внутри области. Тем же путем можно доказать и единственность решения внешней задачи Дирихле, допустив, что V регулярна в бесконечности.

Определение гармонической функции V в τ, удовлетворяющей на границе Σ области τ условию

$$\frac{\partial V}{\partial n} = f(P), \qquad \int\limits_{\Sigma} f(P)\, d\sigma = 0, \tag{94.10}$$

составляет *задачу Неймана.*

Так как $V = \text{const}$ представляет собой гармоническую функцию, удовлетворяющую условию $\partial V/\partial n = 0$ на Σ, заключаем, что решение задачи Неймана, если оно существует, определяется с точностью до произвольной постоянной. Можно доказать — хотя доказательство это ни в коем случае нелегкое, — что задачи Дирихле и Неймана разрешимы для конечных регулярных областей, если заданные граничные значения непрерывны[1]).

Задача

Показать, что формула (94.7) справедлива в бесконечной области τ вне замкнутой поверхности Σ, если V регулярна в бесконечности. *Указание.* Применить формулу (94.7) к конечной области, ограниченной Σ и сферой S радиуса R столь большого, что S включает Σ.

---

[1]) См. Kellogg O. D., стр. 311, см. сноску на стр. 282.

§ 95. Функции Грина и Неймана

Мы только что показали, что решение внутренней задачи Дирихле для уравнения Лапласа

$$\left.\begin{aligned} \nabla^2 u = 0 \quad & \text{в} \quad \tau, \\ u = f(P) \quad & \text{на} \quad \Sigma, \end{aligned}\right\} \tag{95.1}$$

если оно существует, то по необходимости является единственным. Точно так же и решение внутренней задачи Неймана

$$\left.\begin{aligned} \nabla^2 v = 0 \quad & \text{в} \quad \tau, \\ \frac{\partial v}{\partial n} = g(P) \quad & \text{на} \quad \Sigma \end{aligned}\right\} \tag{95.2}$$

при условии $\int g(P)\,d\sigma = 0$ определяется с точностью до произвольной постоянной, если $g(P)$ непрерывна. Для того чтобы решение задачи Неймана получилось единственным, присоединим к (95.2) *нормализующее условие*

$$\int\limits_{\Sigma} v\,d\sigma = 0. \tag{95.3}$$

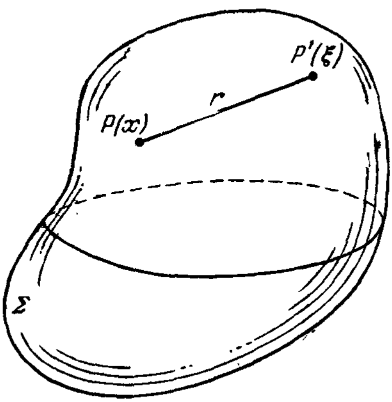

Рис. 45.

Если уравнения Лапласа в (95.1) и (95.2) были заменены нами уравнениями Пуассона, то мы имеем дело с задачами Дирихле и Неймана для уравнений Пуассона.

Формула (94.7) неприменима непосредственно к решению задач (95.1) и (95.2), поскольку она требует знания значений функции и ее нормальной производной на Σ. Покажем сейчас, как этой трудности можно избежать введением специальных функций, зависящих лишь от формы области, а не от предписанных граничных значений $f(P)$ и $g(P)$. Начнем с задачи Дирихле.

Пусть $P(x)$ и $P'(\xi)$ — фиксированная точка и соответственно переменная точка в τ (рис. 45). Строим функцию $G(P, P')$ со следующими свойствами:

(а) $$G(P, P') = \frac{1}{r} + w(P'),$$

где $r = \overline{PP'}$ и $w(P')$ — гармоническая в τ.

(б) $$G(P, P') = 0 \quad \text{на} \quad \Sigma.$$

Условие (б) требует, чтобы

$$w(P') = -\frac{1}{r} \quad \text{на} \quad \Sigma$$

так, чтобы $w(P')$ и, следовательно, $G(P, P')$ определялись однозначно свойствами (а) и (б). Назовем $G(P, P')$ *функцией Грина для области* τ.

Покажем теперь, как функция Грина может быть использована в построении явной интегральной формулы, решающей задачу Дирихле для уравнения Пуассона

$$\left.\begin{aligned} \nabla^2 V &= -4\pi\rho \quad \text{в} \quad \tau, \\ V &= f(P) \quad \text{на} \quad \Sigma. \end{aligned}\right\} \tag{95.4}$$

Эта интегральная формула включает как частный случай и решение задачи (95.1).

Симметричная формула Грина

$$\int_\tau (u\nabla^2 v - v\nabla^2 u)\,d\tau = \int_\Sigma \left(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n}\right) d\sigma \qquad [92.6]$$

не допускает применения к $u = G(P, P')$, $v = V$, поскольку $G(P, P') \to \infty$ при $P' \to P$. Если, однако, исключить точку P, включив ее в сферу σ радиуса δ, как это показано на рис. 44, то формула (92.6) будет иметь силу для области $\tau - \varepsilon$, ограниченной поверхностями Σ и σ. Мы вправе теперь написать

$$\int_{\tau-\varepsilon} (G\nabla^2 V - V\nabla^2 G)\,d\tau = \int_\Sigma \left(G\frac{\partial V}{\partial n} - V\frac{\partial G}{\partial n}\right) d\sigma + \int_\sigma \left(G\frac{\partial V}{\partial n} - V\frac{\partial G}{\partial n}\right) d\sigma. \tag{95.5}$$

Но в $\tau - \varepsilon$, $G \equiv 1/r + w$ — функция гармоническая, так что $\nabla^2 G = 0$ и $G = 0$ на Σ. Точно так же $\nabla^2 V = -4\pi\rho$ в силу (95.4). Поэтому (95.5) приводит к

$$-4\pi \int_{\tau-\varepsilon} G\rho(\xi)\,d\tau = -\int_\Sigma V\frac{\partial G}{\partial n}\,d\sigma - \int_\sigma \left(\frac{1}{r} + w\right)\frac{\partial V}{\partial r}\,d\sigma + \\ + \int_\sigma V\frac{\partial(w + 1/r)}{\partial r}\,d\sigma. \tag{95.6}$$

В выражении (95.6) мы учли, что поскольку n — внешняя нормаль, то $\partial V/\partial n = -\partial V/\partial r$ и $\partial G/\partial n = -\partial G/\partial r$ на σ.

Так как $\partial V/\partial r$ и w непрерывны, в τ, а $d\sigma = r^2 d\omega$, где $d\omega$ — элемент телесного угла, очевидно, что второй интеграл в правой части (95.6) стремится к нулю вместе с $\delta \to 0$. Подобным же образом

$$\int_{\sigma} V \frac{\partial w}{\partial r}\, d\sigma = 0, \quad \text{при} \quad \delta \to 0,$$

между тем как

$$\int_{\sigma} \frac{V\partial(1/r)}{\partial r} r^2\, d\omega = -4\pi V(P) \quad \text{при} \quad \delta \to 0.$$

Соответственно, положив $\delta \to 0$ в (95.6), получим

$$4\pi V(P) = \int_{\tau} 4\pi G\rho\, d\tau - \int_{\Sigma} V \frac{\partial G}{\partial n}\, d\sigma, \tag{95.7}$$

что и является искомым решением задачи (95.4). Если положить $\rho = 0$, находим решение соответствующей задачи для уравнения Лапласа

$$V(P) = -\frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma} V \frac{\partial G}{\partial n}\, d\sigma. \tag{95.8}$$

Для того чтобы использовать эту формулу, надлежит сначала получить функцию Грина G для области τ, иначе говоря, решить частную задачу Дирихле

$$\begin{aligned} \nabla^2 w &= 0 \quad \text{в} \quad \tau, \\ w &= -\frac{1}{r} \quad \text{на} \quad \Sigma. \end{aligned}$$

Сходные соображения применимы и к задаче Неймана (95.2). Вводим *функцию Неймана*

$$N(P, P') = \frac{1}{r} + w(P'),$$

где $w(P')$ — гармоническая в τ и удовлетворяет на границе Σ области τ условию [1])

$$\frac{\partial w}{\partial n} = -\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) + \text{const}.$$

Вычисления, полностью аналогичные проведенным ранее для задачи Дирихле, дают для граничной задачи (95.2) формулу

$$V(P) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma} gN\, d\sigma.$$

[1]) Для того чтобы получить единственное w, можно произвести нормализацию его, потребовав, чтобы $\int_{\Sigma} w\, d\sigma = 0$.

В физическом аспекте функция $G(P, P')$ может быть интерпретирована как электростатический потенциал внутри заземленной проводящей поверхности Σ, произведенный единичным зарядом в точке P. Потенциал, возбужденный одним лишь единичным зарядом, составляет $1/r$. Потенциал же, созданный индуцированными зарядами поверхности Σ, составляет $w(P')$. Так как Σ заземлена, $G(P, P') = 1/r + w(P') = 0$ на Σ. Функция Неймана может быть интерпретирована как установившийся тепловой поток из источника интенсивности 4π, помещенного в P, если тепловой поток поступает через поверхность Σ с равномерной скоростью.

§ 96. Функции Грина для полубесконечного пространства и сферических областей

Физическое истолкование функции Грина, предложенное в § 95, позволяет нам строить функции Грина для полупространства $z \geqslant 0$ и для областей, находящихся внутри и вне сферы.

Если положительный единичный заряд помещен в точке $P(x, y, z)$ (рис. 46), а отрицательный единичный заряд в точке

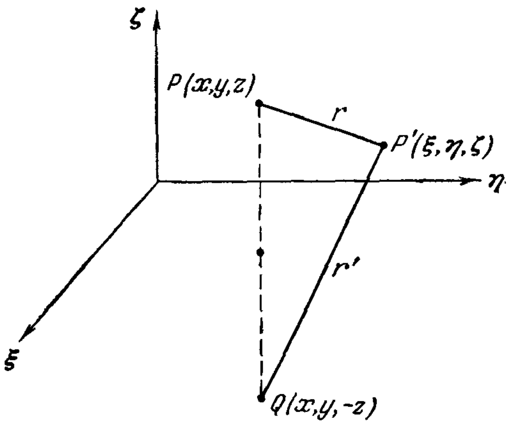

Рис. 46.

зеркального отражения первой $Q(x, y, -z)$, то электростатический потенциал G, возбужденный этими зарядами в $P'(\xi, \eta, \zeta)$, равен

$$G = \frac{1}{r} - \frac{1}{r'}, \tag{96.1}$$

где

$$r = \overline{PP'} = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2}$$

и

$$r' = QP' = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta + z)^2}.$$

Очевидно, $G = 0$ на плоскости $z = 0$, а так как $w(P') = -1/r'$ представляет собой гармоническую функцию для $z > 0$, то уравнение (96.1) дает искомую функцию Грина для области $z \geqslant 0$.

На плоскости $z = 0$

$$\frac{\partial G}{\partial n} = -\left.\frac{\partial G}{\partial \zeta}\right|_{\zeta=0} = \left[\frac{1}{r^2}\frac{\partial r}{\partial \zeta} - \frac{1}{r'^2}\frac{\partial r'}{\partial \zeta}\right]_{\zeta=0},$$

по выполнении простых вычислений и подстановки в формулу (95.8) получаем решение задачи Дирихле (95.1) для области $z > 0$ в виде интеграла Пуассона

$$V(P) = \frac{z}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta}{[(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2]^{3/2}}. \tag{96.2}$$

Частные значения $f(\xi, \eta)$ потенциала V на $z = 0$, должны быть, очевидно, такими, чтобы (96.2) имело смысл.

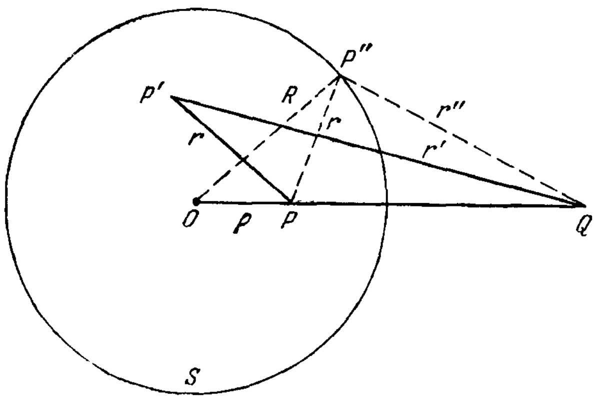

Рис. 47.

Подобная же процедура позволит нам построить функцию Грина для сферической области $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant R^2$ и получить решение задачи Дирихле для сферы.

Представим себе точку $P(x, y, z)$ внутри сферы S радиуса R (рис. 47) и построим отображение Q точки P относительно S так, чтобы $\overline{OP}\cdot\overline{OQ} = R^2$. Пусть P'' — переменная (подвижная) точка на S. Подобные треугольники $OP''P$ и $OP''Q$ приводят к соотношению

$$\frac{P''Q}{P''P} = \frac{OP''}{OP} \quad \text{или} \quad \frac{r'}{r} = \frac{R}{\rho},$$

где $\rho = \overline{OP}$. Таким образом,

$$\frac{1}{r} = \frac{R}{\rho}\frac{1}{r'} \quad \text{на} \quad S.$$

Если для какой-либо внутренней точки P' мы определили

$$G(P, P') = \frac{1}{r} - \frac{R}{\rho}\frac{1}{r'}, \tag{96.3}$$

то (96.3) дает искомую функцию Грина, так как $w = -(R/\rho)(1/r')$ — функция гармоническая внутри S и $G(P, P') = 0$ на S.

Простое вычисление производной dG/dn из (96.3) дает

$$\frac{dG}{dn} = -\frac{R^2-\rho^2}{4\pi R r^3} \quad \text{на } S,$$

формула же (95.8) дает решение задачи Дирихле (95.1) для сферы в виде интеграла Пуассона

$$V(P) = \frac{1}{4\pi}\int\limits_S f(P')\frac{R^2-\rho^2}{Rr^3}\,d\sigma. \tag{96.4}$$

Этот интеграл записывается обычно в сферических координатах (ρ, θ, φ) как

$$V(\rho, \theta, \varphi) = \frac{1}{4\pi}\int\limits_0^{\pi} R\sin\theta'\,d\theta' \int\limits_0^{2\pi} \frac{(R^2-\rho^2)\,f(\theta', \varphi')\,d\varphi'}{(R^2-2\rho R\cos\gamma+\rho^2)^{3/2}}, \tag{96.5}$$

где

$$\cos\gamma = \cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos(\varphi'-\varphi),$$

причем θ — широта, а φ — долгота P.

Функция Грина для области $x^2 + y^2 + z^2 \geqslant R$ выводится из (96.3) путем перестановки ролей P и Q.

Задачи

1. Показать с использованием (96.4), что для каждого положения точки P внутри сферы

$$\frac{1}{4\pi R}\int\limits_S \frac{R^2-\rho^2}{r^3}\,d\sigma = 1.$$

Указание. Направить ось z вдоль $\overline{OP}$ так, чтобы $r^2 = R^2 - 2R\rho\cos\varphi + \rho^2$. Для фиксированного положения P фиксируется также и ρ. Выразить $d\sigma = R^2\sin\theta\,d\theta\,d\varphi$ в сферических координатах и вычислить интеграл.

2. Показать, что решение внешней задачи (95.1) для сферы S дается интегралом

$$V(P) = \frac{1}{4\pi R} \int_S f(P') \frac{\rho^2 - R^2}{r^3} \, d\delta,$$

где $\rho = \overline{OP} > R$.

3. Вывести (96.5) из (96.4). *Указание.* Пусть γ — угол между $\overline{OP}$ и $\overline{OP'}$, если P' расположена на S.

§ 97. Задача двух тел

Задача двух тел формулируется следующим образом. *Дана система двух частиц, взаимодействующих в соответствии с законом всемирного тяготения. Какова траектория системы?* Эта задача была решена Ньютоном в «Началах» книга 1, § III. Она лежит в основе всех исследований в астрономии.

Поскольку использование общих криволинейных координат в частных задачах особого преимущества не представляет, отнесем нашу систему к прямоугольным декартовым осям. Обозначим координаты материальных точек m_1, m_2 для любого заданного момента времени t через (x_1^1, x_1^2, x_1^3) и (x_2^1, x_2^2, x_2^3) (рис. 48). Введем также другую декартову систему отсчета Y,

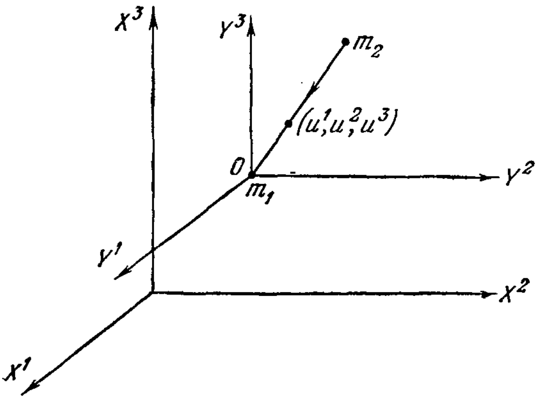

Рис. 48.

движущуюся вместе с массой m_1 таким образом, что m_1 находится всегда в начале O системы отсчета Y, а оси Y^i всегда остаются параллельными осями X^i. Координаты материальной точки m_2, отнесенные к осям Y, обозначаются через y^i. Получаем при этом соотношения

$$y^i = x_2^i - x_1^i \qquad (i = 1, 2, 3). \tag{97.1}$$

Примем для материальной точки m_2 координаты y^i как тройку из наших обобщенных координат, а для остальных трех обобщенных координат примем координаты центра масс системы

$$u^i = \frac{m_1 x_1^i + m_2 x_2^i}{m_1 + m_2} \qquad (i = 1,\ 2,\ 3). \tag{97.2}$$

Очевидно, что u^i располагаются по линии, соединяющей точки (x_1^i) и (x_2^i), а наш подбор обобщенных координат следует в таком порядке:

$$q^1 = y^1, \quad q^2 = y^2, \quad q^3 = y^3, \quad q^4 = u^1, \quad q^5 = u^2, \quad q^6 = u^3.$$

Если решить уравнения (97.1) и (97.2) относительно x_1^i и x_2^i, то мы получим

$$\left. \begin{aligned} x_1^i &= u^i - \frac{m_2}{m_1 + m_2} y^i, \\ x_2^i &= u^i + \frac{m_1}{m_1 + m_2} y^i. \end{aligned} \right\} \tag{97.3}$$

Эти уравнения позволят нам теперь определить координаты x^i положения точек в их зависимостях от обобщенных координат q^i.

Такой специальный выбор обобщенных координат предпринят нами с той целью, чтобы получить простое выражение для потенциальной энергии V нашей системы частиц. В самом деле, поскольку величина силы притяжения $\boldsymbol{F}$ дана произведением масс, отнесенных к расстоянию r между частицами $F = m_1 m_2 / r^2$, то потенциальная энергия V определится формулой

$$V = \frac{m_1 m_2}{r} = \frac{m_1 m_2}{\left[\left(x_1^1 - x_2^1\right)^2 + \left(x_1^2 - x_2^2\right)^2 + \left(x_1^3 - x_2^3\right)^2\right]^{1/2}}.$$

Из соотношений же (97.1) следует, что координаты u^i не входят в V, так что V определяется как функция одних лишь координат y^1, y^2, y^3.

Вспомним уравнения Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q^i} = -\frac{\partial V}{\partial q^i} \tag*{[86.11]}$$

и вычислим

$$T = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^i \dot{x}_1^i + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^i \dot{x}_2^i = \frac{1}{2}\left(m_1 + m_2\right) \dot{u}^i \dot{u}^i + \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \dot{y}^i \dot{y}^i.$$

Так как $\partial V / \partial q^i = 0$ для $i = 4,\ 5,\ 6$, то простые выкладки приводят уравнения [86.11] к

$$\left. \begin{aligned} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \ddot{y}^i &= -\frac{\partial V}{\partial y^i} \qquad (i = 1,\ 2,\ 3), \\ \ddot{u}^i &= 0 \qquad (i = 1,\ 2,\ 3). \end{aligned} \right\} \tag{97.4}$$

Дифференциальные уравнения (97.4) характеризуют движение нашей системы. Заметим сначала, что движение массы m_2 относительно m_1 происходит так, как если бы масса m_1 была неподвижиой, а m_2 притягивалась к ней с силой, потенциал которой равен $[(m_1+m_2)/m_1]V$. Это следует непосредственно из первых трех уравнений (97.4), если мы перепишем их в несколько преобразованном виде

$$m_2\ddot{y}^i = -\frac{m_1+m_2}{m_1}\frac{\partial V}{\partial y^i}. \tag{97.5}$$

Таким образом, наша задача приводится к изучению движения, производимого действием центральных сил. Вторая серия из трех уравнений группы (97.4) констатирует, что центр массы движется по прямой линии с постоянной скоростью.

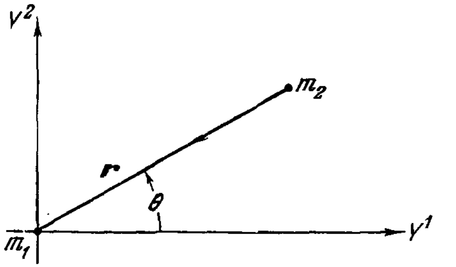

Рис. 49.

Интегрирование уравнений (97.4) мы выполним в предположении, что m_1 (масса Солнца) значительно больше массы m_2 (масса Земли). Если $m_1 \gg m_2$, то центр массы u^i будет лежать весьма близко к массе m_1, и потому координаты u^i почти совпадут с координатами массы m_1. Таким образом, $x_1^i \approx u^i$ и из второй серии уравнений (97.4) мы заключим, что m_1 движется в пространстве с постоянной скоростью. В связи с этим нам достаточно ограничиться исследованием лишь движения массы m_2 относительно массы m_1.

Если $m_1 \gg m_2$, то

$$\frac{m_1+m_2}{m_1} \approx 1,$$

и уравнение (97.5) преобразуется в приближенное

$$m_2\ddot{y}^i = -\frac{\partial V}{\partial y^i}.$$

Положим, что наши координатные оси ориентированы таким образом, что движение массы m_2 относительно m_1 происходит первоначально в плоскости y^1y^2. В дальнейшем в связи с тем, что силовое поле центральное, движение будет оставаться в той же плоскости, так как никаких компонентов силы, образующих прямые углы с плоскостью, не существует. Пусть r и θ (рис. 49) — полярные координаты массы m_2, где

$$y^1 = r\cos\theta, \qquad y^2 = r\sin\theta;$$

тогда кинетическая энергия массы m_2 выразится так:

$$T = \frac{1}{2} m_2 [(\dot{y}_1)^2 + (\dot{y}_2)^2] = \frac{1}{2} m_2 (\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2).$$

Подставив это выражение для T и $V = -m_1m_2/r$ в уравнения (86.11) Лагранжа и учтя подстановки $q^1 = r$ и $q^2 = \theta$, получим [1])

$$m_2\ddot{r} - m_2r\dot{\theta}^2 = -\frac{m_1m_2}{r^2},$$

$$\frac{d}{dt}(m_2r^2\dot{\theta}) = 0,$$

или

$$\left.\begin{aligned} \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 + \frac{m_1}{r^2} &= 0, \\ r^2\dot{\theta} &= h, \end{aligned}\right\} \tag{97.6}$$

где h — постоянная интегрирования.

Уравнения (97.6) представляют собой систему обыкновенных дифференциальных уравнений, определяющих траекторию. Второе из них утверждает постоянство секториальных скоростей, т. е. один из законов Кеплера [2]). Отношением $r^2\dot{\theta} = h$ мы можем воспользоваться в определении продолжительности времени, необходимого для того, чтобы описать орбиту.

Если $h \neq 0$ и, следовательно, траектория не является прямой линией, то мы можем исключить параметр времени t, заметив, что $r^2\,d\theta = h\,dt$, т. е.

$$t = \frac{1}{h}\int_0^\theta r^2\,d\theta.$$

Так как $df/dt = (df/d\theta)(d\theta/dt)$, то получаем соотношение $d/dt = (h/r^2)(d/d\theta)$ и, использовав это в первом уравнении (97.6), находим

$$\frac{h}{r^2}\frac{d}{d\theta}\left(\frac{h}{r^2}\frac{dr}{d\theta}\right) - r\frac{h^2}{r^4} + \frac{m_1}{r^2} = 0$$

или, умножив на r^2,

$$h\frac{d}{d\theta}\left(\frac{h}{r^2}\frac{dr}{d\theta}\right) - \frac{h^2}{r} + m_1 = 0. \tag{97.7}$$

---

[1]) Мы полагаем, что сила направлена от m_2 к m_1.

[2]) См. также один из иллюстративных примеров в конце § 90.

Если мы далее произведем подстановку зависимой переменной r в (97.7), положив $u = 1/r$, то получим простое линейное уравнение второго порядка

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{m_1}{h^2},$$

решение которого имеет вид

$$u = \frac{1}{l}[1 - e\cos(\theta - \alpha)],$$

или

$$r = \frac{l}{1 - e\cos(\theta - \alpha)}, \tag{97.8}$$

где $l \equiv h^2/m_1$, α и e — постоянные интегрирования.

Мы видим, таким образом, что орбита представляет собой коническое сечение (рис. 50), эксцентриситет которого равен e,

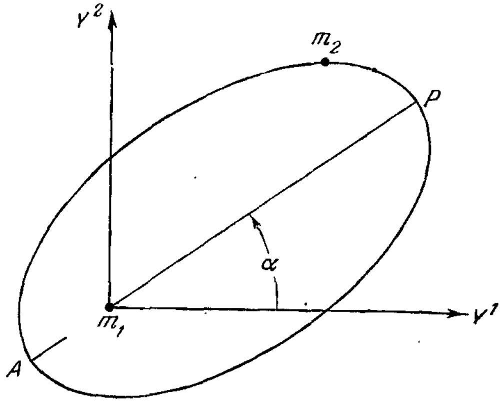

Рис. 50.

а положение апсид определяется углом α. Постоянная α известна как *константа перигелия.* Мы не будем затруднять себя определением этих констант [1]), зависящих от начального положения и скорости массы m_2, поскольку главным предметом нашего исследования в этом параграфе было получение формулы (97.8) в целях сопоставления с соответствующим уравнением орбиты в релятивистской динамике.

[1]) См. Appell P. Mécanique rationnelle, т. 1, гл. II и Synge J. L., Griffith B. A., Principles of mechanics, 1959, стр. 160—169.

ГЛАВА V

РЕЛЯТИВИСТСКАЯ МЕХАНИКА

§ 98. Инвариантность физических законов

Формулировка основных законов классической механики в предыдущей главе основана на гипотезе, предполагающей, что физические явления происходят в трехмерном евклидовом пространстве. При этом допускается также, что эти явления могут быть упорядочены в одномерном континууме временно́й переменной t. Эта последняя рассматривается как не зависящая не только от пространственных переменных x^i, но также и от возможного движения пространственных координатных систем. Масса m тела также предполагается не зависящей от движения координатных систем и, в частности, она инвариантна относительно группы *галилеевых преобразований* координат. Галилеевым преобразованием мы называем преобразование параллельного переноса одной координатной системы относительно другой с постоянной скоростью. Таким образом, если Y — данная нам декартова система отсчета, то галилеево преобразование этой системы выразится формулой

$$\bar{y} = y^i + u^i t \qquad (i = 1,\ 2,\ 3), \tag{98.1}$$

где u^i — постоянный вектор, представляющий скорость начала системы Y относительно декартовой системы $\bar{Y}$. В уравнениях (98.1) предполагается, что начала систем Y и $\bar{Y}$ совпадают в момент времени $t = 0$.

Из линейного характера (98.1) очевидно, что ускорения d^2y^i/dt^2 и $d^2\bar{y}^i/dt^2$ частицы, отнесенные к координатным системам Y и соответственно $\bar{Y}$, принимают одно и то же значение. Из этого следует, что сила $\boldsymbol{F}$, действующая на частицу, принимает одно и то же значение $\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}$ во всех системах отсчета, смещающихся одна относительно другой с постоянной скоростью. Иными словами, второй закон движения Ньютона формально инвариантен относительно группы галилеевых преобразований (98.1).

Хотя значения ускорений a^i остаются одними и теми же во всех инерциальных системах[1]), значения скоростей получаются различными, следуя формуле

$$\bar{v}^i = v^i + u^i. \tag{98.2}$$

Поэтому формулировка какого бы то ни было закона, зависящего от скорости, измеряемой относительно первичной инерциальной системы, не остается инвариантной, будучи выражена в другой системе. В связи с этим основные законы электродинамики и, в частности, оптики, перестают быть инвариантными относительно группы галилеевых преобразований (98.1), так как эти законы зависят от скорости распространения света. По этой причине первичная инерциальная система заняла особое положение в теории оптики. Для того чтобы объяснить наблюдаемый факт независимости скорости света от скорости его источника и включить оптику в структуру аналитической механики, физики ввели эфир в качестве гипотетического носителя световых волн. Этот носитель был наделен физическими свойствами, призванными обеспечить постоянство скорости распространения света во всех инерциальных системах, хотя эти свойства противоречили выводам теории упругости и гидродинамики. Например, было введено предположение, что эфир представляет собой жидкость, проникающую повсюду без трения, сохраняющую покой относительно первичной инерциальной системы и производящую в движущихся сквозь нее физических объектах изменения формы под воздействием упругих напряжений, возникающих при движении материального тела в покоящейся жидкости. При этом возникала необходимость учитывать, что линейные размеры измерительных приборов испытывали сокращения, зависевшие от скорости u^i, причем эти сокращения должны были быть в точности такой величины, чтобы скорость света получалась независимой от скорости источника.

Соответствующая формула, выражающая зависимость линейных размеров тела от его скорости относительно первичной инерциальной системы, была выведена Лоренцем, и значительная часть теории относительности была построена им в 1904 г. на основе гипотезы покоящегося эфира. Математический анализ Лоренца, как оказалось, хорошо смог передать результаты физических наблюдений в области электродинамики и внес простое объяснение в загадочное поведение электрического поля движущегося сферического заряда, хотя физика вообще оставалась в трудном положении. Все экспериментальные попытки обнаружить существование эфира не привели ни

---

[1]) См. § 76.

к каким результатам, и в 1905 г. Альберт Эйнштейн завершил объяснение так называемого сокращения Лоренца — Фитцджеральда на основе теории, призвавшей к глубокому пересмотру господствовавших представлений о пространстве и времени.

§ 99. Частная или специальная теория относительности

В 1905 г. А. Эйнштейн предложил два постулата, один из которых относился к формальной инвариантности физических законов, а другой подытожил результаты некоторых замечательных экспериментов по определению скорости света[1]). Эти постулаты можно сформулировать следующим образом.

1. *Физические законы и принципы имеют одинаковый вид во всех галилеевых системах, т. е. в системах отсчета, движущихся одна относительно другой с постоянной скоростью.*

2. *Скорость света в свободном пространстве сохраняет одно и то же постоянное значение во всех инерциальных системах.*

В некотором смысле в этих утверждениях нет ничего поражающего, поскольку заключенные в них идеи находились в состоянии брожения и обсуждения на исходе XIX столетия и нашли совершенно четкое выражение в работах А. Пуанкаре, Лоренца, Фохта и др. Но дедукции из вышеприведенных постулатов, к которым пришел А. Эйнштейн, помогли пересмотреть и перестроить наши представления о пространстве, времени и материи действительно замечательным путем. Если рассматривать их в свете фундаментальных законов динамики частицы, то первый постулат, как мы уже отметили в § 98, не обнаруживает ничего нового. Зато законы оптики оказались неинвариантными относительно группы преобразований (98.1), и эти преобразования пришлось видоизменить таким образом, чтобы достигнуть инвариантности фундаментальных законов оптики так же, как и механики. Один способ осуществления этой задачи — отказаться от гипотезы, согласно которой отсчеты времени t тождественны для наблюдателей, связанных с двумя различными галилеевыми системами отсчета. С математической точки зрения это значит, что временну́ю переменную t мы должны поставить в те́ же условия, в которых находятся пространственные переменные y^i.

Положим теперь, что в нашем распоряжении имеются две декартовы системы отсчета Y и $\overline{Y}$ и наблюдатель в системе отсчета Y отмечает наступление какого-либо события в точке (y^i) и в момент времени t четырьмя переменными (y^1, y^2, y^3, t). Четырехмерное многообразие S_4 переменных (y^1, y^2, y^3, t) состоит из пространства E_3 и интервала $-\infty < t < +\infty$. То же событие

[1]) Einstein A., Annalen der Physik, 18 (1905), 891.

регистрируется наблюдателем в системе отсчета $\bar{Y}$ точкой $(\bar{y}^1, \bar{y}^2, \bar{y}^3, \bar{t})$ в S_4, где $\bar{t}$ — отсчет времени, основанный на показании часов в координатной системе $\bar{Y}$. Поскольку переменные (y^1, y^2, y^3, t) и $(\bar{y}^1, \bar{y}^2, \bar{y}^3, \bar{t})$ еще не соотнесены между собой, и мы только ищем такие преобразования координат, которые сохранили бы законы динамики частицы, пусть в таком случае слово «событие» будет означать для нас смещение частицы, движущейся в системе отсчета Y под воздействием силы, равной нулю. Траектория такой частицы в координатах Y будет прямой линией, и мы положим, что движение системы $\bar{Y}$ относительно системы Y таково, что траектория в ней принимается как прямая линия.

Эта гипотеза предполагает инвариантность первого закона Ньютона и требует, чтобы переменные (y^1, y^2, y^3, t) и $(\bar{y}^1, \bar{y}^2, \bar{y}^3, \bar{t})$ были связаны между собой линейно, т. е.

$$\left.\begin{aligned} \bar{y}^i &= \alpha^i_j y^j + \alpha^i_4 t \qquad (i, j = 1, 2, 3), \\ \bar{t} &= \alpha^4_j y^j + \alpha^4_4 t. \end{aligned}\right\} \tag{99.1}$$

Из этих уравнений следует, что начало системы $\bar{Y}$ перемещается относительно системы Y с постоянной скоростью. Для того чтобы в этом убедиться, заметим, что координаты начала O системы Y определяются как $(0, 0, 0)$, и потому траектория начала O относительно $\bar{Y}$ определяется из (99.1) уравнениями

$$C: \begin{cases} \bar{y}^i = \alpha^i_4 t, \\ \bar{t} = \alpha^4_4 t. \end{cases}$$

Отсюда

$$d\bar{y}^i / d\bar{t} = \alpha^i_4 / \alpha^4_4 = \text{const}.$$

Аналогичным путем можно показать, что координатные плоскости перемещаются также с постоянной скоростью так, что системы отсчета Y и $\bar{Y}$ следует считать галилеевыми.

Положим теперь, что сферический импульс (колебание света) отправлен из точки $P(y^1, y^2, y^3)$ системы Y в момент времени t. Согласно второму постулату Эйнштейна свет распространяется с постоянной скоростью c по всем направлениям; поэтому фотон, отправившийся из точки (y^i), через dt секунд достигнет точки $(y^i + dy^i)$, т. е.

$$dy^i\, dy^i = c^2\, dt^2. \tag{99.2}$$

С точки зрения наблюдателя, связанного с системой $\bar{Y}$, световой импульс возникает в точке $(\bar{y}^1, \bar{y}^2, \bar{y}^3)$, и уравнение, которое он получит для фронта сферической волны $d\bar{t}$ секундами позднее, будет иметь вид

$$d\bar{y}^i\, d\bar{y}^i = c^2\, d\bar{t}^2. \tag{99.3}$$

Если мы теперь произведем подстановку из (99.1) в (99.3) и сравним результат с (99.2), то обнаружим, что частная система уравнений

$$\left.\begin{aligned} \bar{y}^1 &= k\,(y^1 - vt),\\ \bar{y}^2 &= y^2,\\ \bar{y}^3 &= y^3,\\ \bar{t} &= k\left(t - \frac{\beta}{c}\,y^1\right), \end{aligned}\right\} \tag{99.4}$$

где $k \equiv 1/\sqrt{1-\beta^2}$, $\beta \equiv v/c$, оставляет квадратичную форму

$$d\sigma^2 = c^2\, dt^2 - dy^i dy^i \tag{99.5}$$

инвариантной. Эти уравнения отвечают условиям, в которых система $\bar{Y}$ перемещается относительно Y со скоростью v вдоль оси[1] y^1.

Уравнения (99.4) известны как уравнения преобразования Лоренца — Эйнштейна[2]). Мы не будем входить в дальнейшие сложные исследования этих уравнений и в получаемые из них выводы, поскольку большая часть выходящих ныне руководств по теоретической физике и в особенности по теории относительности уделяет этим вопросам большое место, и нам здесь нет необходимости дублировать эту тему. Остановимся лишь на одном примере, имеющем непосредственное отношение к «сокращению» Лоренца — Фитцджеральда, о котором было упомянуто в § 58.

Рассмотрим стержень, движущийся вместе с системой $\bar{Y}$. Конечные точки стержня имеют координаты $(\bar{y}_2^1, 0, 0)$, $(\bar{y}_1^1, 0, 0)$ так, что его длина, будучи измерена наблюдателем в $\bar{Y}$-системе, получится равной $\bar{L} = \bar{y}_2^1 - \bar{y}_1^1$. Так как $\bar{y}_2^1 = k\left(y_2^1 - vt\right)$ и $\bar{y}_1^1 = k\left(y_1^1 - vt\right)$, то

$$L = y_2^1 - y_1^1 = \sqrt{1-\beta^2}\,(\bar{y}_2^1 - \bar{y}_1^1).$$

Оценка длины L стержня наблюдателем, находящимся в системе Y, будет соответственно меньшей, чем $\bar{L}$ в отношении $\sqrt{1-\beta^2}/1$. Поэтому наблюдатель в системе Y придет

---

[1]) Заметим, что для светового импульса $d\sigma = 0$.

[2]) Эти уравнения выводились многократно различными способами. См., например, Rice J., Relativity, стр. 89; Tolman R., Theory of relativity of motion; Einstein A., Annalen der Physik 18 (1905); Frank, Ignatovsky, Rothe, Archiv für Mathematik und Physik 17, 18; Synge J. L., Relativity. The special theory, 1956, стр. 69.

к заключению, что движущиеся объекты испытывают сжатие в длине. Величина этого сжатия — та самая, которая была выведена Лоренцом и Фитцджеральдом в связи с их изучением электрического поля движущегося сферического заряда. В то время как Лоренц и Фитцджеральд представляли себе обнаруженное ими сжатие как «реальное сжатие», произведенное перемещением объектов сквозь покоящийся эфир, в предыдущем вычислении это сжатие обнаруживается как свойство пространственно-временного многообразия, подвергнутого преобразованию (99.4), где пространственные переменные y^i таковы, что элемент дуги ds задается формулой $ds^2 = dy^i\,dy^i$.

Если бы вместо декартовых переменных y^i мы избрали криволинейные x^i, отнесенные к декартовым y^i формулами

$$y^i = y^i(x^1, x^2, x^3),$$

тогда форму (99.5) следовало бы прочитать как

$$d\sigma^2 = c^2\,dt^2 - g_{ij}\,dx^i\,dx^j \qquad \left(g_{ij} = \frac{\partial y^k}{\partial x^i}\frac{\partial y^k}{\partial x^j}\right).$$

Заметим, что детерминант из коэффициентов этой формы принимает значение $-c^2g$.

Только что приведенные формулы могут быть преобразованы к симметричному виду, если положить $t = x^4$; тогда

$$d\sigma^2 = a_{\alpha\beta}\,dx^\alpha\,dx^\beta \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, 3, 4), \tag{99.6}$$

где

$$a_{ij} = -g_{ij} \qquad (i, j = 1, 2, 3),$$

$$a_{i4} = 0, \ a_{44} = c^2 \ \text{и} \ a = |a_{\alpha\beta}| = -c^2g.$$

Если мы теперь введем класс допустимых функциональных преобразований T в четырехмерное многообразие X

$$T\colon \ \bar{x}^\alpha = \bar{x}^\alpha(x^1, x^2, x^3, x^4) \qquad (\alpha = 1, 2, 3, 4) \tag{99.7}$$

и потребуем, чтобы форма (99.6) была инвариантной для класса преобразований (99.7), мы сможем провести вычисления в тензорах, как это мы делали в главе II.

Задачи

1. Показать с помощью уравнений (99.4), что события, являющиеся одновременными с точки зрения наблюдателя в системе Y, вообще не одновременны в системе $\bar{Y}$.

2. Исследовать замедление хода движущихся часов.

3. Продифференцировать уравнения (99.4) и установить отношения между компонентами скорости w^i движущейся точки, измеренными наблюдателем в Y-системе, с соответствующими величинами $\bar{w}^i$, измеренными в системе $\bar{Y}$.

Ответ. $\dfrac{dy^1}{dt} = \dfrac{\bar{w}^1 + v}{1 + (\beta/c)\,\bar{w}^1}, \quad \dfrac{dy^\alpha}{dt} = \dfrac{\bar{w}^\alpha}{k\,(1 + (\beta/c)\,\bar{w}^1)} \quad (\alpha = 2, 3).$

4. С помощью формул, приведенных в задаче 3, показать, что если $\bar{w}$ и v — обе меньше c, то $w/c < 1$. Так, например, если $v = 0{,}9c$, $\bar{w} = 0{,}9c$, то $w = 0{,}994c$ вместо $1{,}8c$, как это получается в обычном законе сложения скоростей.

5. Выражение $\operatorname{arcth} w/c$ иногда называется *быстротой*. Показать, что обычный закон сложения скоростей выполняется также и для быстрот. Так, например,

$$\operatorname{arcth}\frac{\bar{w}}{c} = \operatorname{arcth}\frac{w}{c} - \operatorname{arcth}\frac{v}{c}.$$

§ 100. Собственные или локальные координаты

Рассмотрим точку P, пространственные координаты которой в некоторой системе отсчета X обозначены через (x^1, x^2, x^3). Пусть скорость точки P, отнесенная к этой системе в момент времени t, равна $\boldsymbol{v}$. Введем галилееву систему отсчета $\overline{X}$, движущуюся совместно с точкой P так, что каждое мгновение t точка P находится в покое относительно системы $\overline{X}$. Назовем такую систему $\overline{X}$ локальной или *собственной* координатной системой.

Выбор локальной координатной системы, очевидно, не однозначен, поскольку только что высказанное определение требует лишь того, чтобы скорость собственной системы не отличалась от скорости частицы. Это условие приводит к тому, что отсчеты времени (измеренные часами, принадлежащими каждой из двух различных местных координатных систем) получаются одинаковыми. По этой причине преобразование от одной собственной системы $\overline{X}$ к другой $\overline{X}'$ принимает вид

$$\bar{x}'^i = \bar{x}'^i(\bar{x}^1, \bar{x}^2, \bar{x}^3)$$
$$\bar{t}' = \bar{t}.$$

Интервал $d\sigma$ определяется формулой

$$d\sigma^2 = a_{\alpha\beta}\, dx^\alpha\, dx^\beta = c^2\, dt^2 - g_{ij}\, dx^i\, dx^j \tag{100.1}$$

так, что

$$\left(\frac{d\sigma}{dt}\right)^2 = c^2 - g_{ij}\frac{dx^i}{dt}\frac{dx^j}{dt} = c^2 - v^2, \tag{100.2}$$

где v — величина скорости $\boldsymbol{v}$ точки P относительно координатной системы X. Если местная координатная система $\overline{X}$ вводится в P, то относительно $\overline{X}$ $v = 0$, и уравнение (100.2) дает

$$\frac{d\sigma}{d\bar{t}} = c \tag{100.3}$$

в собственной системе. *Определим вектор скорости Минковского* u^α формулой

$$u^\alpha = \frac{dx^\alpha}{d\sigma} \quad (\alpha = 1, 2, 3, 4) \tag{100.4}$$

и заметим, что его компоненты[1]) в собственной системе $\bar{X}$ имеют вид $(0, 0, 0, 1/c)$.

Поскольку $a = |a_{\alpha\beta}| = -c^2 g \neq 0$, мы вправе построить взаимный тензор $a^{\alpha\beta}$, символы Кристоффеля

$$[\alpha\beta, \gamma] = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial a_{\alpha\gamma}}{\partial x^\beta} + \frac{\partial a_{\beta\gamma}}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial a_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma}\right),$$

$$\left\{ {\gamma \atop \alpha\beta} \right\} = a^{\gamma\delta}[\alpha\beta, \delta],$$

и определить операции ковариантного и внутреннего дифференцирования, как это мы делали в главах II и III. Это позволит нам определить *вектор ускорения Минковского* f^α формулой

$$f^\alpha = \frac{\delta u^\alpha}{\delta\sigma} \equiv \frac{d^2 x^\alpha}{d\sigma^2} + \left\{ {\alpha \atop \beta\gamma} \right\} \frac{dx^\beta}{d\sigma}\frac{dx^\gamma}{d\sigma} \quad (\alpha, \beta, \gamma = 1, \ldots, 4). \qquad (100.5)$$

Если наша собственная система отсчета X декартова, для которой $d\sigma^2 = c^2 d\bar{t}^2 - d\bar{y}^i dy^i$, то компоненты f^α ускорения Минковского, отнесенного к этой системе, примут вид

$$\bar{f}^\alpha = \frac{d^2\bar{y}^\alpha}{d\sigma^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\bar{y}^\alpha}{d\sigma}\right)\frac{d\bar{t}}{d\sigma} = \frac{1}{c}\frac{d}{d\bar{t}}\left(\frac{d\bar{y}^\alpha}{d\sigma}\right) = \frac{1}{c^2}\frac{d^2\bar{y}^\alpha}{d\bar{t}^2},$$

так что

$$\bar{f}^i = \frac{1}{c^2}\frac{d^2\bar{y}^i}{d\bar{t}^2} \qquad (i = 1, 2, 3),$$

$$\bar{f}^4 = 0, \qquad \text{поскольку } \bar{y}^4 = \bar{t}.$$

Покажем теперь, как можно будет представить второй закон Ньютона в инвариантной форме относительно всех галилеевых систем отсчета. Рассмотрим формулу, подсказываемую вторым законом Ньютона

$$F^\alpha = \frac{\delta}{\delta\sigma}(m_0 u^\alpha) \qquad (\alpha = 1, 2, 3, 4),$$

где $u^\alpha = dx^\alpha/d\sigma$ представляет скорость Минковского, а m_0 — константа, значение которой обнаружится из нижеследующих выкладок:

$$F^\alpha = \frac{\delta}{\delta t}(m_0 u^\alpha)\frac{dt}{d\sigma} = \frac{1}{\sqrt{c^2 - v^2}}\frac{\delta}{\delta t}\left(m_0\frac{dx^\alpha}{d\sigma}\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{c^2 - v^2}}\frac{\delta}{\delta t}\left(\frac{m_0}{\sqrt{c^2 - v^2}}\frac{dx^\alpha}{dt}\right) = \frac{1}{c^2\sqrt{1 - \beta^2}}\frac{\delta}{\delta t}\left(\frac{m_0}{\sqrt{1 - \beta^2}}\frac{dx^\alpha}{dt}\right),$$

---

[1]) Так как

$$u^\alpha = \frac{dx^\alpha}{d\sigma} = \frac{dx^\alpha}{(c^2 dt^2 - g_{ij}dx^i dx^j)^{1/2}} = \frac{dx^\alpha}{dt}\frac{1}{\sqrt{c^2 - v^2}} =$$

$$= \frac{v^2}{\sqrt{c^2 - v^2}}, \quad \text{а} \quad v^1 = v^2 = v^3 = 0, \quad x^4 = t$$

в собственной системе.

где мы пользуемся соотношением (100.2) и вводим $\beta = v/c$. Если определить

$$m \equiv \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

то предшествующее уравнение примет вид

$$\sqrt{1-\beta^2}\, F^\alpha = \frac{1}{c^2} \frac{\delta}{\delta t}\left(m \frac{dx^\alpha}{dt}\right), \tag{100.6}$$

и, поскольку в собственной координатной системе $\bar{Y}$ $\beta = 0$ и $m = m_0$,

$$\bar{F}^\alpha = \frac{m_0}{c^2} \frac{d^2 \bar{y}^\alpha}{d\bar{t}^2} = m_0 \bar{f}^\alpha. \tag{100.7}$$

Эта формула имеет вид второго закона Ньютона классической механики. Инвариант m_0 представляет массу частицы P, отнесенную к собственной системе отсчета. Он называется *покоящейся* (или *собственной*) *массой* частицы. Так как уравнение (100.7) — тензорное уравнение, то уравнение сил можно признать действительным во всех галилеевых системах отсчета

$$F^\alpha = m_0 f^\alpha.$$

Перепишем (100.6) в сокращенной форме:

$$\mathcal{F}^\alpha = \frac{\delta}{\delta t}\left(\frac{m_0 v^\alpha}{\sqrt{1-\beta^2}}\right), \tag{100.8}$$

где $v^\alpha = dx^\alpha/dt$ и $\mathcal{F}^\alpha \equiv c^2 \sqrt{1-\beta^2}\, F^\alpha$, и примем его как уравнение движения частиц в специальной теории относительности.

§ 101. Уравнение энергии Эйнштейна

Завершим наш краткий обзор элементарных основ специальной теории относительности установлением важной связи между массой и энергией.

Ради упрощения записи положим, что координаты x^i, используемые в настоящем параграфе, *прямоугольные декартовы*, вспомнив вместе с тем, что работа, произведенная силой F_i ($i = 1, 2, 3$) на перемещении dx^i, равна изменению кинетической энергии. В самом деле, классическая теория дает

$$T - T_0 = \int_{v_0}^{v} mv\, dv = \int_{v_0}^{v} m \frac{dx^i}{dt} d\left(\frac{dx^i}{dt}\right) =$$
$$= \int_{t_0}^{t} m \frac{dx^i}{dt} \frac{d^2 x^i}{dt^2} dt = \int_{P_0}^{P} m \frac{d^2 x^i}{dt^2} dx^i = \int_{P_0}^{P} F_i\, dx^i.$$

Если мы примем в качестве определения кинетической энергии в специальной теории относительности выражение

$$T = \int_{P_0}^{P} \mathcal{F}_i \, dx^i \tag{101.1}$$

и введем в него под знак интеграла обозначение $\mathcal{F}_i$ из уравнения (100.8), то получим [1])

$$T = \int_{P_0}^{P} \mathcal{F}_i \, dx^i = \int_{P_0}^{P} \frac{d}{dt}\left(\frac{m_0 v^i}{\sqrt{1-\beta^2}}\right) dx^i =$$

$$= m_0 \int_{t_0}^{t} \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\right) v^i \frac{dx^i}{dt} + \frac{dv^i}{dt} \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \frac{dx^i}{dt}\right] dt$$

Но

$$\beta^2 = \frac{v^2}{c^2} = \frac{v^i v^i}{c^2}, \qquad v^i = \frac{dx^i}{dt},$$

отсюда $v^i (dx^i/dt) = \beta^2 c^2$ и $\beta\dot{\beta} = (v^i/c^2)(dv^i/dt)$. Подставляя эти выражения в интеграл, находим

$$T = m_0 \int_{t_0}^{t} \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\right) \beta^2 c^2 + c^2 \beta\dot{\beta} \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\right] dt =$$

$$= m_0 \int_{t_0}^{t} \left[\beta^2 c^2 \frac{\beta\dot{\beta}}{(1-\beta^2)^{3/2}} + \frac{c^2 \beta\dot{\beta}}{(1-\beta^2)^{1/2}}\right] dt = m_0 c^2 \int_{t_0}^{t} \frac{\beta\dot{\beta}}{(1-\beta^2)^{3/2}} dt =$$

$$= m_0 c^2 \int_{P_0}^{P} \frac{\beta \, d\beta}{(1-\beta^2)^{3/2}} = m_0 c^2 \int_{P_0}^{P} d\left[\frac{1}{(1-\beta^2)^{1/2}}\right].$$

Таким образом,

$$T = \frac{m_0 c^2}{(1-\beta^2)^{1/2}} + \text{const}.$$

Если мы хотим получить $T = 0$ при $\beta = v/c = 0$, то постоянная интегрирования получается равной $-m_0 c^2$ так, что

$$T = \left[\frac{m_0}{(1-\beta^2)^{1/2}} - m_0\right] c^2 = (m - m_0) c^2.$$

Таким образом,

$$m = m_0 + \frac{T}{c^2}. \tag{101.2}$$

[1]) Так как система отсчета декартова, внутренняя производная приводится к обычной производной.

Мы убеждаемся в том, что масса m зависит от кинетической энергии. Если допустить, что этот результат сохраняет силу для диссипативных систем, то убыль массы m должна быть приписана потерям энергии через радиацию [1]).

Из вышеизложенного мы приходим к выводу, что принципы сохранения энергии и сохранения массы, которые в классической теории казались совершенно различными, не имеющими между собой ничего общего, ныне объединяются в один общий закон специальной теории относительности. Из уравнения (101.2) мы убеждаемся также, что если частица принимает некоторое количество энергии ΔT, то ее инерциальная масса m увеличивается на $\Delta T/c^2$. Таким образом, инерциальную массу m можно рассматривать как меру энергии частицы, а закон сохранения массы надлежит признать имеющим силу в том, и лишь в том случае, когда частица не приобретает и не теряет своей энергии. Эйнштейн ассоциировал с каждой массой m определенное количество энергии $E = mc^2$. На этом основании уравнение (101.2) может быть записано в форме

$$E = m_0c^2 + T,$$

где m_0c^2 предстает как внутренняя энергия, а T — как кинетическая энергия.

§ 102. Общая теория относительности. Возникновение и перспективы развития

В нашем изложении механики четырехмерного многообразия специальной теории относительности мы сохраняли различение между пространственными координатами x^i $(i = 1, 2, 3)$ частицы и временно́й переменной $t = x^4$. Метрика пространства принималась евклидовой. Но новыми существенными пунктами в теории являются отказ от концепции универсального времени и утверждение, что масса частицы изменяется определенным образом вместе со скоростью при условии, что ньютонов закон движения должен сохранять инвариантность относительно группы преобразований Лоренца — Эйнштейна.

Различение между пространственными и временны́ми переменными оказалось возможным устранить путем введения однозначного обратимого преобразования в четырехмерном многообразии S_4

$$\bar{x}^\alpha = \bar{x}^\alpha (x^1, x^2, x^3, x^4) \qquad (\alpha = 1, 2, 3, 4),$$

---

[1]) В томе 41 (1935) журнала Bulletin of the American Mathematical Society Эйнштейн дал элементарный вывод этого соотношения между массой и энергией, обосновав свои выкладки на принципах сохранения энергии и количества движения. Окончательную формулировку см. Synge J. L., Relativity. The special theory, 1956, гл. VI.

где координаты $\bar{x}^\alpha$ совершенно аналогичны обобщенным координатам аналитической механики. Положим, что наше пространство S_4 метризовано таким образом, что квадратичная форма

$$d\sigma^2 = a_{\alpha\beta}\,dx^\alpha\,dx^\beta \tag{102.1}$$

приводит к

$$d\sigma^2 = c^2\,dt^2 - dy^l\,dy^l, \tag{102.2}$$

где пространственные координаты x^i прямоугольные декартовы. Так как коэффициенты в форме (102.2) постоянны, то отсюда следует, что тензор кривизны Римана $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$ многообразия S_4 обращается в нуль, в связи с чем геодезические линии S_4, описываемые уравнением

$$\frac{d^2x^\alpha}{d\sigma^2} + \left\{ {\alpha \atop \beta\gamma} \right\} \frac{dx^\beta}{d\sigma}\frac{dx^\gamma}{d\sigma} = 0, \tag{102.3}$$

превращаются в прямые.

Заметим, обратившись к уравнениям (100.5), что уравнения (102.3) характеризуют движение частицы, не имеющей ускорения f^α. Это обстоятельство подсказывает возможность истолкования траекторий частиц, подвергающихся воздействию не обращающихся в нуль сил, как геодезических линий в некотором многообразии переменных x, для которых тензор кривизны не обращается в нуль [1]). Физически это соответствует введению обладающих ускорением систем отсчета, движущихся таким образом, что воздействующие на частицы силы обращаются в нуль (исчезают). С этого момента концепция силы в динамике становится лишней, ибо динамические траектории становится возможным рассматривать как геодезические линии, определяемые метрическими характеристиками пространства.

В дальнейших параграфах этой главы мы рассмотрим задачу двух тел с точки зрения общей теории относительности. Этот раздел общей теории относительности сформировался в начале двадцатых годов XX века, и его математическая элегантность и успех в объяснении смещения перигелия Меркурия внушили надежду на то, что время, когда вся математическая физика будет включена в рамки общей теории относительности, не слишком далеко. Однако исследования последующих двух десятилетий обнаружили, что общая теория относительности едва ли сможет оказаться полезной в области микроскопической физики, поскольку ей пришлось потерпеть неудачу в попытке построения

---

[1]) Сходная ситуация возникала и в классической механике (§ 84), где мы вводили риманово многообразие с элементом дуги dS, имеющим вид

$$dS = \sqrt{2m\,(h - V)\,g_{ij}\,dx^i\,dx^j},$$

в котором траектории суть геодезические линии.

объединенной теории механики — электродинамики. Весьма вероятно, что в будущем полезность теории сможет проявиться в новых космологических исследованиях. Эти замечания нисколько не умаляют того глубокого воздействия, которое оказала статья Эйнштейна[1]), заложившая основы общей теории относительности, на пересмотр понятий пространства, времени и материи.

§ 103. Гравитационные уравнения Эйнштейна

Следуя принятому в литературе по общей теории относительности способу, обозначим метрические коэффициенты четырехмерного многообразия теории относительности через $g_{ij}(x^1, x^2, x^3, x^4)$ и запишем фундаментальную квадратичную форму как

$$ds^2 = g_{ij}\, dx^i\, dx^j \qquad (i, j = 1, 2, 3, 4). \tag{103.1}$$

В особом случае специальной теории форма (103.1) может быть приведена надлежащим преобразованием к канонической форме

$$ds^2 = c^2 (dt)^2 - dy^i\, dy^i. \tag{103.2}$$

Примем гипотезу, согласно которой коэффициенты g_{ij}, которые мы назовем *потенциальными функциями*[2]), могут быть подобраны таким образом, чтобы траектории частиц удовлетворяли уравнениям геодезических линий

$$\frac{d^2 x^i}{ds^2} + \left\{ {i \atop jk} \right\} \frac{dx^j}{ds} \frac{dx^k}{ds} = 0. \tag{103.3}$$

Тензор кривизны Римана R^i_{jkl}, ассоциированный с многообразием специальной теории относительности, обращается в нуль, и прямолинейные геодезические линии многообразия соответствуют траекториям частиц в отсутствие гравитационного поля. Если, следовательно, многообразие, характеризуемое квадратичной формой (103.1), сопряжено с непрямолинейными траекториями, то тензор кривизны Римана не должен обращаться в нуль. Вместе с Эйнштейном мы принимаем, что поле большой гравитационной массы (Солнце) таково, что потенциальные функции g_{ij} удовлетворяют в вакууме уравнениям

$$G^i_j = R^i_j - \frac{1}{2} \delta^i_j R = 0,$$

---

[1]) Einstein A., Annalen der Physik 49 (1916), 769.

[2]) Эта терминология может быть оправдана формой коэффициентов в уравнении (84.9) для аналогичной задачи ньютоновой механики.

где G^i_j — тензор Эйнштейна, определенный в § 38. Если мы произведем над ним операцию свертки (контракции), то получим уравнение $R - \frac{1}{2} 4R = 0$, откуда $R = 0$. Соответственно

$$R_{ij} \equiv R^{\alpha}_{ij\alpha} = 0, \tag{103.4}$$

где R_{ij} — тензор Риччи. Эти уравнения описывают плоское многообразие специальной теории относительности и в то же время допускают случай, в котором компоненты тензора кривизны не обращаются в нуль.

Уравнения (103.4) аналогичны уравнению Лапласа $g^{ij}V_{i,j} = 0$ теории потенциала Ньютона, справедливому во всех точках пространства вне тяготеющей массы [1]).

Вспомним [2]), что тензор R_{ij} Риччи, появляющийся в левой части уравнения (103.4), принимает в развернутой форме нижеследующий вид:

$$R_{ij} = \frac{\partial^2 \log \sqrt{|g|}}{\partial x^i \partial x^j} - \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \begin{Bmatrix} \alpha \\ ij \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \alpha \\ \beta j \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \beta \\ i\alpha \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \beta \\ ij \end{Bmatrix} \frac{\partial \log \sqrt{|g|}}{\partial x^\beta},$$

где мы вводим обозначение $|g|$, поскольку детерминант типа (103.1) может оказаться отрицательным.

Из вышеизложенного очевидно, что система десяти нелинейных дифференциальных уравнений (см. § 38)

$$R_{ij} = 0$$

для десяти неизвестных функций g_{ij} чрезвычайно сложна [3]). Общее решение этой системы неизвестно, и приходится искать частные решения по необходимости путем проб, руководствуясь средствами ньютоновой механики в подборе подходящих форм коэффициентов g_{ij}. После того как мы подберем

---

[1]) Это уравнение выводится цепью рассуждений, опирающихся на уравнения движения типа $G^{ij}_{\ \ ,j} = 0$, где $G^{ij} = -\rho u^i u^j$, а $u^i = dx^i/dt$. Превосходное освещение этого вопроса приводится в книге: Rainich G. Y., Mathematics of relativity, 1950. См. также задачу 2 в § 38.

[2]) Эти уравнения не являются независимыми, и можно показать, что существуют четыре связывающих их соотношения. См., например, Eddington A. S., The mathematical theory of relativity, 2-е изд., 1924, стр. 115. Это обстоятельство не оказывает, однако, влияния на приводимые в дальнейшем выкладки.

[3]) Интересно отметить, что в качестве аргумента в пользу принятия этой системы уравнений для гравитационного закона часто указывается, что закон (103.4) представляет собой простое соотношение с входящим в него тензором кривизны R^i_{jkl} и потому будто бы наилучшим образом отвечает задаче описания реального мира. Скептик, пожалуй, признал бы, что Творец не особенно тщательно позаботился о том, чтобы законы математической физики оказались достаточно простыми.

комплект коэффциентов g_{ij}, удовлетворяющих уравнениям (103.4), мы сможем построить уравнения геодезических линий (103.3), и если решение этих уравнений согласуется с точностью до малых величин первого порядка с соответствующими выводами ньютоновой теории, то все будет в порядке.

Мы проиллюстрируем эту процедуру в § 104, где и получим решение Шварцшильда[1]) для гравитационных уравнений (103.4).

Прежде чем перейти к этой теме, отметим, что уравнения (103.3) могут быть представлены в краткой четкой форме

$$\dot{x}^i_{,\,j}\, \dot{x}^j = 0, \tag{103.5}$$

где $\dot{x}^i = dx^i/ds$. Если вектор $dx^i/ds = \lambda^i$ рассматривать как касательный вектор, то уравнения (103.5) или $\lambda^i_{,\,j}\, \lambda^j = 0$ окажутся как раз уравнениями параллельного переноса касательного вектора λ^i вдоль геодезической линии. Наша задача оказалась, таким образом, приведенной к решению системы, имеющей столь обманчиво простой вид:

$$\left.\begin{aligned} R_{ij} &= 0, \\ \dot{x}^i_{,\,j}\, \dot{x}^j &= 0, \end{aligned}\right\}$$

которой мы займемся в §§ 104—105.

§ 104. Сферически-симметричное статическое поле

Переходим к выводу решения уравнений Эйнштейна

$$R_{ij} = 0 \tag{104.1}$$

для гравитационного поля, вызванного сферически-симметричной массой частицы, соответствующего гравитационному полю Солнца, помещенного в начале нашей системы отсчета. При получении этого решения мы будем руководствоваться свойствами ньютонова гравитационного поля и формой соответствующего решения в классической механике.

Исследование задачи двух тел в § 97 подсказывает нам принять в качестве системы отсчета систему координат, которая на большом расстоянии от притягивающей массы превращается в обычную сферическую координатную систему. Кроме того, поскольку поле сферически-симметрично и поскольку метрика

---

[1]) Schwarzschild K., Berlin Sitzungsberichte, 1916, стр. 189. См. также некоторые важные специальные решения: Birkhoff G. D., Relativity and modern physics, стр. 219—227. Имеется также решение Г. Вайля — Т. Леви-Чивита (Weyl H., Levi-Civita T.), отвечающее вращательной симметрии. См. Bergmann P. G., Introduction to the theory of relativity, 1942, стр. 206—210. Исчерпывающее исследование сферически-симметричных полей см. в трактате: Synge J. L., Relativity. The general theory, 1960, гл. VII.

многообразия определяется полем, постольку метрический тензор g_{ij} должен быть сферически-симметричным. Выберем по этим соображениям координаты таким образом, чтобы на большом расстоянии от центра притяжения имели место равенства:

$$x^1 = r, \quad x^2 = \theta, \quad x^3 = \varphi, \quad x^4 = t,$$

где r, θ, φ — обычные сферические координаты.

Траектории частиц, находящихся достаточно далеко от притягивающей материи, должны быть прямыми линиями, так что $R^i_{jkl} = 0$. Запишем выражение для пространственно-временнóго интервала в его предельной форме

$$ds^2 = (dt)^2 - (dr)^2 - r^2 (d\theta)^2 - r^2 \sin^2 \theta \, (d\varphi)^2, \tag{104.2}$$

где мы приняли новую единицу для скорости света c таким образом, что она равна единице. Это побуждает нас принять, что в присутствии сферически-симметричного стационарного гравитационного поля

$$ds^2 = f_1(r)(dt)^2 - f_2(r)(dr)^2 - r^2 (d\theta)^2 - r^2 \sin^2 \theta \, (d\varphi)^2, \tag{104.3}$$

где f_1 и f_2 — неизвестные функции r, каждая из которых приводится к единице, когда c неограниченно возрастает.

Члены, образуемые перекрестными произведениями $dr\,d\theta$, $d\varphi\,d\theta$ и т. п., опускаются в форме (104.3), поскольку ds^2 должны быть независимы от знаков $d\theta$ и $d\varphi$ в силу их сферической симметрии. Равным образом мы отбрасываем результаты перемножений членов, в которые входят dt, поскольку мы принимаем, что поле статическое и обратимое во времени и потому должно быть независимым от знака dt. Наш способ определения функций f_1 и f_2 будет заключаться во введении выражений для метрических коэффициентов g_{ij} из (104.3) в гравитационных уравнениях (104.1) и использования уравнения (104.2) в качестве граничного условия в бесконечности.

В процессе вычисления f_1 и f_2 удобно положить

$$f_1 = e^{\mu}, \qquad f_2 = e^{\lambda},$$

где λ и μ — функции r. Поскольку воздействия гравитационного поля падают по мере того, как $r \to \infty$, функции λ и μ должны стремиться к нулю при неограниченном возрастании r.

Форму (104.3) мы можем переписать в новом обозначении

$$ds^2 = -e^{\lambda}(dr)^2 - r^2 (d\theta)^2 - r^2 \sin^2 \theta \, (d\varphi)^2 + e^{\mu}(dt)^2 \tag{104.4}$$

так, что метрические коэффициенты g_{ij} примут значения:

$$g_{11} = -e^{\lambda}, \quad g_{22} = -r^2, \quad g_{33} = -r^2 \sin^2 \theta, \quad g_{44} = e^{\mu},$$

$$g_{ij} = 0, \quad i \neq j.$$

Детерминант g квадратичной формы (104.4). определится произведением

$$g = g_{11}g_{22}g_{33}g_{44} = -e^{\lambda+\mu}r^4\sin^2\theta,$$

а контравариантный тензор g^{ij} будет представлен матрицей

$$(g^{ij}) = \begin{bmatrix} -e^{-\lambda} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{r^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{r^2\sin^2\theta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-\mu} \end{bmatrix}.$$

Для того чтобы вывести уравнения (104.1), построим символы Кристоффеля $\left\{ {k \atop ij} \right\}$ и, поскольку $g_{ij} = 0$ при $i \neq j$, находим

$$\left\{ {k \atop ij} \right\} = \frac{1}{2} g^{kk}\left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\right) \quad \text{(без суммирования по } k\text{).}$$

Легко удостовериться, что общее число различных не обращающихся в нуль символов Кристоффеля сводится к нижеследующим девяти:

$$\left\{ {1 \atop 11} \right\} = \frac{1}{2}\lambda', \qquad \left\{ {2 \atop 12} \right\} = \frac{1}{r}, \qquad \left\{ {3 \atop 13} \right\} = \frac{1}{r},$$

$$\left\{ {4 \atop 14} \right\} = \frac{1}{2}\mu', \qquad \left\{ {1 \atop 22} \right\} = -re^{-\lambda}, \qquad \left\{ {3 \atop 23} \right\} = \operatorname{ctg}\theta,$$

$$\left\{ {1 \atop 33} \right\} = -r\sin^2\theta e^{-\lambda}, \qquad \left\{ {2 \atop 33} \right\} = -\sin\theta\cos\theta, \qquad \left\{ {1 \atop 44} \right\} = \frac{1}{2}e^{\mu-\lambda}\mu',$$

где знаками $'$ обозначены производные по r.

Мы можем теперь ввести эти символы в формулу

$$R_{ij} = \frac{\partial^2 \log\sqrt{|g|}}{\partial x^i\,\partial x^j} - \frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left\{ {\alpha \atop ij} \right\} + \left\{ {\alpha \atop \beta j} \right\}\left\{ {\beta \atop i\alpha} \right\} - \left\{ {\beta \atop ij} \right\}\frac{\partial \log\sqrt{|g|}}{\partial x^\beta}$$

и получить после громоздких, но простых вычислений нижеследующую систему дифференциальных уравнений:

$$R_{11} = \frac{1}{2}\mu'' - \frac{1}{4}\lambda'\mu' + \frac{1}{4}(\mu')^2 - \frac{\lambda'}{r} = 0, \tag{104.5}$$

$$R_{22} = e^{-\lambda}\left[1 + \frac{1}{2}r(\mu' - \lambda')\right] - 1 = 0, \tag{104.6}$$

$$R_{33} = \sin^2\theta\left\{e^{-\lambda}\left[1 + \frac{1}{2}r(\mu' - \lambda')\right] - 1\right\} = 0, \tag{104.7}$$

$$R_{44} = e^{\mu-\lambda}\left[-\frac{1}{2}\mu'' + \frac{1}{4}\lambda'\mu' - \frac{1}{4}(\mu')^2 - \frac{\mu'}{r}\right] = 0, \tag{104.8}$$

$$R_{ij} = 0, \text{ если } i \neq j.$$

Уравнение (104.7) в этой системе представляет собой лишь повторение уравнения (104.6). Таким образом, нам остается рассмотреть лишь три уравнения относительно λ и μ.

Из уравнений (104.5) и (104.8) выводим

$$\lambda' = -\mu',$$

так что $\lambda = -\mu + \mathrm{const}$. Но поскольку при неограниченном возрастании $r \to \infty$, λ и μ стремятся к нулю, находим

$$\lambda(r) = -\mu(r).$$

Уравнение (104.6) преобразуется, таким образом, в

$$e^{\mu}(1 + r\mu') = 1. \qquad (104.9)$$

Положим, что $e^{\mu} = \gamma$, тогда уравнение (104.9) примет вид $\gamma + r\gamma' = 1$. Интегрируя это линейное уравнение первого порядка, получаем

$$\gamma = 1 - \frac{2m}{r} \equiv e^{\mu}, \qquad (104.10)$$

где $2m$ — постоянная интегрирования. Положим, что масса m в § 105 представляет массу Солнца.

Нетрудно установить, что только что полученное решение удовлетворяет уравнениям нашей системы. Вводя $e^{-\lambda} = e^{\mu} = \gamma$ в уравнение (104.4), получаем искомую квадратичную форму

$$ds^2 = -\gamma^{-1}(dr)^2 - r^2(d\theta)^2 - r^2\sin^2\theta\,(d\varphi)^2 + \gamma\,(dt)^2, \qquad (104.11)$$

где $\gamma = 1 - 2m/r$. Если постоянная интегрирования $2m$ обращается в нуль, $\gamma = 1$ и получающееся многообразие оказывается плоским многообразием специальной теории относительности. При $m \neq 0$ это многообразие получается криволинейным.

Читатель может почувствовать себя неудовлетворенным решением гравитационных уравнений Эйнштейна, предложенным Шварцшильдом, поскольку оно было достигнуто на основе ряда произвольных случайных догадок с «оглядкой» на результаты классической теории. Ему естественно заподозрить, что иной подход может привести и к иному решению, Подозрения такого рода оказались, однако, неосновательными. Это было установлено Дж. Д. Биркгофом[1]), доказавшим, что сферически-симметричные стационарные решения гравитационных уравнений $R_{ij} = 0$, обусловливающих плоскую метрику в бесконечности, т. е. характеризуемую уравнением (104.2), эквивалентны

---

[1]) Birkhoff G. D., Relativity and modern physics, стр. 253.

решению Шварцшильда. Таким образом, полученное нами выше решение представляет интерес, будучи единственным стационарным решением наших уравнений, удовлетворяющих установленным граничным условиям в бесконечности.

§ 105. Орбиты планет

Теперь мы в состоянии выяснить траекторию частицы, движущейся в сферически-симметричном стационарном поле, определяемом квадратичной формой (104.11). Траектория частицы представляет собой геодезическую линию, так что нам требуется решить систему уравнений [1])

$$\frac{d^2x^i}{ds^2}+\left\{ {i \atop \alpha\beta} \right\}\frac{dx^\alpha}{ds}\frac{dx^\beta}{ds}=0,$$

где $x^1=r,\ x^2=\theta,\ x^3=\varphi,\ x^4=t$.

Воспользовавшись таблицей значений символов Кристоффеля, приведенной в § 104, находим, что, например, для $i=2$ получается уравнение

$$\frac{d^2x^2}{ds^2}+\left\{ {2 \atop 12} \right\}\frac{dx^1}{ds}\frac{dx^2}{ds}+\left\{ {2 \atop 21} \right\}\frac{dx^2}{ds}\frac{dx^1}{ds}+\left\{ {2 \atop 33} \right\}\frac{dx^3}{ds}\frac{dx^3}{ds}=0$$

или

$$\frac{d^2\theta}{ds^2}+\frac{2}{r}\frac{dr}{ds}\frac{d\theta}{ds}-\cos\theta\sin\theta\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2=0. \tag{105.1}$$

Подобным же образом строим уравнения для $i=1,\ 3,\ 4$. Результаты получают следующий вид:

$$\frac{d^2r}{ds^2}-\frac{1}{2\gamma}\frac{d\gamma}{dr}\left(\frac{dr}{ds}\right)^2-\gamma r\left(\frac{d\theta}{ds}\right)^2-\gamma r\sin^2\theta\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2+\frac{\gamma}{2}\frac{d\gamma}{dr}\left(\frac{dt}{ds}\right)^2=0, \tag{105.2}$$

$$\frac{d^2\varphi}{ds^2}+\frac{2}{r}\frac{dr}{ds}\frac{d\varphi}{ds}+2\operatorname{ctg}\theta\frac{d\theta}{ds}\frac{d\varphi}{ds}=0, \tag{105.3}$$

$$\frac{d^2t}{ds^2}+\frac{1}{\gamma}\frac{d\gamma}{dr}\frac{dt}{ds}\frac{dr}{ds}=0. \tag{105.4}$$

Последнее из этих уравнений можно преобразовать к более краткому выражению

$$\frac{d^2t}{ds^2}+\frac{1}{\gamma}\frac{d\gamma}{ds}\frac{dt}{ds}=0$$

или

$$\frac{d}{ds}\left(\gamma\frac{dt}{ds}\right)=0. \tag{105.5}$$

[1]) Элегантная трактовка планетных орбит на основе использования уравнений Лагранжа дана Сайнджем: Synge J. L., Relativity. The general theory, 1960, стр. 289—298.

Докажем, что аналитическое решение уравнения (105.1), удовлетворяющее начальному условию $d\theta/ds=0$, если $\theta=\pi/2$, принимает вид $\theta(s)=\pi/2$. Поскольку $d\theta/ds=(d\theta/dt)(dt/ds)$, а $dt/ds\neq 0$, то это равносильно установлению того факта, что траектория частицы лежит в плоскости $\theta=\pi/2$ при условии, если начальный компонент $d\theta/dt$ скорости в направлении возрастающих θ обращается в нуль. На этом основании положим, что решение $\theta(s)$ может быть представлено рядом

$$\theta(s)=(\theta)_0+\left(\frac{d\theta}{ds}\right)_0 s+\left(\frac{d^2\theta}{ds^2}\right)_0\frac{s^2}{2!}+\ \ldots \tag{105.6}$$

Поскольку $d\theta/ds=0$, когда $\theta=\pi/2$, уравнение (105.1) для $\theta=\pi/2$ дает $(d^2\theta/ds^2)_0=0$.

Для того чтобы получить $(d^3\theta/ds^3)_0$ дифференцируем уравнение (105.1) и вводим в результат значения $\theta=\pi/2$, $d\theta/ds=0$ и $d^2\theta/ds^2=0$. Находим $d^3\theta/ds^3=0$. Таким путем мы показали, что $\theta(s)=(\theta)_\theta=\pi/2$.

Соответствующий результат в ньютоновом случае очевиден, поскольку в предположении центрального силового поля никаких компонентов силы, образующих прямые углы с плоскостью движения, быть не может. В этом случае, если движение однажды возникло в плоскости $\theta=\pi/2$, оно будет продолжать совершаться в той же плоскости. Если мы внесем решение $\theta=\pi/2$ уравнения (105.1) в уравнение (105.3), то получим

$$\frac{d^2\varphi}{ds^2}+\frac{2}{r}\frac{dr}{ds}\frac{d\varphi}{ds}=0, \tag{105.7}$$

а интегрируя уравнения (105.5) и (105.7), найдем

$$r^2\frac{d\varphi}{ds}=h, \tag{105.8}$$

$$\frac{dt}{ds}=\frac{a}{\gamma}, \tag{105.9}$$

где a и h — произвольные постоянные.

Произведя подстановки в уравнение (105.2) из (105.8) и (105.9) и учтя ранее найденное решение $\theta=\pi/2$, получим

$$\frac{d^2r}{ds^2}-\frac{1}{2\gamma}\frac{d\gamma}{dr}\left(\frac{dr}{ds}\right)^2-\gamma r\left(\frac{h}{r^2}\right)+\frac{\gamma}{2}\frac{d\gamma}{dr}\left(\frac{a}{\gamma}\right)^2=0. \tag{105.10}$$

Выражение для $(dr/ds)^2$, проявляющееся в уравнении (105.10), может быть получено из формулы (104.11) путем использования уравнений (105.8), (105.9), а также равенства $\theta=\pi/2$. Получаем

$$\left(\frac{dr}{ds}\right)^2=a^2-\frac{h^2\gamma}{r^2}-\gamma,$$

а после введения этого выражения в (105.10) находим

$$\frac{d^2r}{ds^2}+\frac{m}{r^2}=\frac{h^2}{r^3}\left(1-\frac{3m}{r}\right), \tag{105.11}$$

поскольку $\gamma=1-2m/r$. Но

$$\frac{dr}{ds}=\frac{dr}{d\varphi}\frac{d\varphi}{ds},\quad \frac{d^2r}{ds^2}=\frac{d^2r}{d\varphi^2}\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2+\frac{d^2\varphi}{ds^2}\frac{dr}{d\varphi}=\frac{d^2r}{d\varphi^2}\frac{h^2}{r^4}-\frac{2h^2}{r^5}\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2,$$

где мы пользуемся уравнением (105.8).

Таким образом, уравнение (105.11) принимает вид

$$\frac{h^2}{r^4}\frac{d^2r}{d\varphi^2}-\frac{2h^2}{r^5}\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2+\frac{m}{r^2}\equiv\frac{h^2}{r^3}\left(1-\frac{3m}{r}\right). \tag{105.12}$$

Если ввести новую зависимую переменную $u=1/r$, то

$$\frac{dr}{d\varphi}=-\frac{1}{u^2}\frac{du}{d\varphi},\quad \frac{d^2r}{d\varphi^2}=\frac{2}{u^3}\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2-\frac{1}{u^2}\frac{d^2u}{d\varphi^2},$$

и уравнение (105.12) приводится к

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2}+u=\frac{m}{h^2}+3mu^2. \tag{105.13}$$

Уравнение (105.13) вместе с уравнением (105.8), которое мы представим здесь как

$$\frac{d\varphi}{ds}=\frac{h}{r^2}, \tag{105.14}$$

будут достаточными для того, чтобы определить траекторию.

Интересно сопоставить здесь полученный результат с соответствующими уравнениями классической теории, приведенными в § 97

$$\left.\begin{aligned}\frac{d^2u}{d\varphi^2}+u&=\frac{km_1}{h^2},\\ \frac{d\varphi}{dt}&=\frac{h}{r^2},\end{aligned}\right\} \tag{105.15}$$

где мы пользуемся обозначением φ для переменного угла θ, введенного в настоящем параграфе, а также вводим гравитационную константу $k=6{,}7\times10^{-8}$ и величину $m_1=1{,}98\times10^{33}$ *г*, представляющую собой массу Солнца. В связи с нашим выбором единиц для скорости света заметим, что в значительном отдалении от тяготеющей массы

$$ds^2=(dt)^2-dy^i\,dy^i,$$

так что

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2=1-\frac{dy^i}{dt}\frac{dy^i}{dt}=1-v^2.$$

Для плаиет величина скорости v весьма мала в сравнении со скоростью света, для которой мы приняли значение 1, так что с высокой степенью приближения $ds = dt$. Таким образом, как в классической, так и в релятивистской системах уравнений h может быть интерпретирована как секториальная скорость. Постоянная интегрирования m соответствует km_1, так что релятивистское уравнение (105.13) отличается от соответствующего классического уравнения только появлением члена $3mu^2$.

Отношение величины $3mu^2$ к m/h^2 равно $3h^2u^2$ или, если использовать уравнение (105.14), $3(rd\varphi/ds)^2$. Для обычных скоростей планет это отношение мало. Например, средний радиус земной орбиты r равен $1{,}5 \times 10^{13}$ *см*, угловая скорость $d\varphi/dt = 2 \cdot 10^{-7}$ *рад/сек*, и если принять в качестве первого приближения $dt/ds = 1/c$, то найдем, что значение выражения $3r^2(d\varphi/ds)^2$ должно быть порядка величины 10^{-8}.

Отсюда следует, что в обычном движении планет «поправочный член» в релятивистском уравнении (105.13) пренебрежимо мал, поскольку это относится к форме орбиты, но влияние этого члена на перигелий, как это будет выяснено в § 106, значительно.

В следующем параграфе будет показано, что перигелий совершает поворот на угол $6m^2\pi/h^2$ *рад* за время каждого полного оборота планеты по орбите. Но это значение, как обнаружилось, оказывается слишком малым для всех планет Солнечной системы, за исключением Меркурия, для которого он исчисляется приблизительно в 42″ за столетие. Это смещение перигелия Меркурия не нашло удовлетворительного объяснения на основе теории Ньютона, но мы увидим, что вычисления, основанные на релятивистском уравнении (105.13), дали результаты, необычайно хорошо согласовавшиеся со значениями, полученными из наблюдений.

Закончим этот параграф замечанием, что если бы предшествующие вычисления были выполнены на основе квадратичной формы

$$ds^2 = c^2\gamma\,(dt)^2 - \frac{(dr)^2}{\gamma} - r^2\left[(d\theta)^2 + \sin^2\theta\,(d\varphi)^2\right],$$

то мы пришли бы к уравнению[1])

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = \frac{km_1}{h^2} + \frac{3km_1u^2}{c^2},$$

где $m_1 = 1{,}98 \times 10^{33}$ *г* (масса Солнца), $k = 6{,}7 \times 10^{-8}$ $г^{-1}\,см^3/сек^2$, $c = 3 \times 10^{10}$ *см/сек*.

---

[1]) В этом уравнении секториальная скорость h представляет собой секториальную скорость классической теории.

Для движения Меркурия член km_1/h^2 имеет порядок величины 10^{-12}, между тем как $3km_1u^2/c^2$ — порядок 10^{-21}. Эти результаты оправдывают попытку решить уравнение (105.13) методом последовательных приближений (мы проведем его в нижеследующем параграфе).

§ 106. Смещение перигелия

Сопоставление аналитических результатов этого параграфа с астрономическими данными наблюдения — наилучшее возможное свидетельство, подтверждающее общую теорию относительности. В § 107 мы коснемся вопроса об искривлении луча света Солнцем и смещении линий Фраунхофера к красному концу спектра, но количественное согласование для этих явлений между наблюдениями и теоретическими предсказаниями пока еще остается под некоторым сомнением.

Релятивистское уравнение для орбиты планеты

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = \frac{m}{h^2}(1 + 3h^2u^2), \tag{106.1}$$

выведенное в § 105, допускает интегрирование в замкнутой форме с помощью эллиптических функций, но получаемое таким путем решение неудобно для сравнения с соответствующим результатом, полученным в § 97 на основе теории Ньютона.

Мы заметили в § 105, что величина члена $3h^2u^2$, появляющегося в правой части уравнения (106.1), мала в сравнении с единицей, и это побуждает нас к попытке получить решение этого уравнения методом возмущений. Следуя ему мы пренебрегаем членом $3mu^2$ и получаем для нашего первого приближения u_1 уравнение Ньютона

$$\frac{d^2u_1}{d\varphi^2} + u_1 = \frac{m}{h^2},$$

решением которого является

$$u_1 = \frac{m}{h^2}[1 + e\cos(\varphi - \omega)], \tag{106.2}$$

где e — эксцентриситет орбиты, а ω — долгота перигелия. Введение уравнения (106.2) в правую часть уравнения (106.1) дает

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = \frac{m}{h^2}\left(1 + 3h^2u_1^2\right) =$$
$$= \frac{m}{h^2} + \frac{6m^3}{h^4}e\cos(\varphi - \omega) + \frac{3m^3}{2h^4}e^2[1 + \cos 2(\varphi - \omega)] + \frac{3m^3}{h^4}. \tag{106.3}$$

Так как орбиты планет близки по своей форме к окружности (для Меркурия $e^2 = 0{,}04$), то влияние пертурбационного члена, содержащего e^2, будет пренебрежимо малым. Точно так же и член $3m^3/h^4$ не окажет заметного влияния на форму орбиты, но второй член, содержащий $\cos(\varphi - \omega)$, может оказать явно выраженный суммарный эффект на смещение перигелия. В связи с этим упростим уравнение (106.3):

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = \frac{m}{h^2} + \frac{6m^3}{h^4} e \cos(\varphi - \omega).$$

Решение этого линейного уравнения составляется, очевидно, из решения u_1 и решения уравнения

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = \frac{6m^3}{h^4} e \cos(\varphi - \omega).$$

Результат простых вычислений дает второе приближение u_2 в виде

$$u_2 = \frac{m}{h^2}\left[1 + e\cos(\varphi - \omega) + \frac{3m^2}{h^2} e\varphi \sin(\varphi - \omega)\right]. \qquad (106.4)$$

Для наших целей достаточно будет оборвать ряд шагов в схеме последовательных приближений на указанной в формуле стадии, рассматривая u_2 как величину, представляющую решение уравнения (106.1) с достаточно высокой степенью точности. Если мы положим

$$\delta\omega \equiv \frac{3m^2}{h^2}\varphi \qquad (106.5)$$

и заметим, что

$$\cos(\varphi - \omega) + \delta\omega \sin(\varphi - \omega) = \sqrt{1 + (\delta\omega)^2} \cos(\varphi - \omega - \alpha),$$

где $\alpha = \operatorname{arctg} \delta\omega \approx \delta\omega$, то мы сможем записать (106.4) как

$$u_2 \approx u = \frac{m}{h^2}[1 + e\cos(\varphi - \omega - \delta\omega)], \qquad (106.6)$$

пренебрегая членами порядка $(\delta\omega)^2$, малыми в сопоставлении с единицей. Из уравнений (106.5) и (106.6) выясняется, что когда планета совершает один оборот по орбите, то перигелий опережает это движение на угол

$$\varepsilon = \frac{3m^2}{h^2} 2\pi \text{ } рад. \qquad (106.7)$$

Уравнение (106.6) описывает замкнутую орбиту, лишь приблизительно эллиптическую по форме, по той причине, что $\delta\omega$ — функция φ. Поскольку $u = 1/r$, имеем

$$r = \frac{h^2/m}{1 + e\cos(\varphi - \omega - \delta\omega)},$$

так что «прямолинейная полусторона» (semilatus rectum) — $l = h^2/m$.

Вспомнив из геометрии конических сечений, что $l = a(1-e^2)$, где a — большая ось конического сечения, находим

$$h^2 = ml = ma(1-e^2).$$

Вводя только что полученное выражение в уравнение (106.7), определяем[1])

$$\varepsilon = \frac{6\pi m^2}{am(1-e^2)} = \frac{6\pi m}{a(1-e^2)}.$$

В этом выражении m — масса Солнца.

Для Меркурия величина ε получается равной $4{,}90 \times 10^{-7}$ *рад*. Этот угол весьма мал, но в нашем распоряжении имеются данные наблюдений о положеиии Меркурия за последнее столетие, а поскольку период обращения этой планеты исчисляется в 88 дней, она совершает 415 оборотов в столетие. Суммарное смещение перигелия за 100 лет должно поэтому исчисляться в $415\varepsilon = 2{,}04 \times 10^{-4}$ *рад* $= 42''$. Для других планет соответствующее смещение слишком мало для точного экспериментального определения. Например, для Венеры оно достигает всего лишь $9''$, для Земли $4''$, для Марса $1''$.

Действительная траектория Меркурия, описываемая им вокруг Солнца, конечно, не эллипс — по причине возмущающих воздействий других планет. Мы по существу не можем говорить здесь строго о задаче двух тел. Однако возмущения, производимые другими планетами, могут быть учтены, и отклонения от эллиптической траектории допускают вычисление. Такого рода вычисления были произведены с высокой тщательностью, и в результате их было установлено, что смещение перигелия Меркурия должно выразиться величиной около $42''$ за сто лет. Ньютонова теория неспособна предсказать это значение, а замечательно близкое совпадение между релятивистским расчетом и наиболее тщательно измеренным значением едва ли можно признать случайным[2]).

Следует обратить особое внимание на то, что вычисления, основанные на специальной теории относительности, обнаруживают также эффект прецессии, если принять, что частица движется в силовом поле с потенциалом $V = km/r$. Однако прецессия, определенная на основе таких вычислений, приводит к результатам, не столь близким к эмпирически определенному значению, какие дала общая теория.

---

[1]) Иной путь вывода значения ε см. Synge J. L., Relativity. The general theory, 1960, стр. 294—296 (имеется русский перевод, см. библиографию) и Rainich G. Y., Mathematics of relativity, 1950, стр. 162.

[2]) Клименс (Clemence G. M.) дает $42'',56 \pm 0{,}94$ в Reviews of Modern Physics, 19 (1947), 361. См. также Mc Vittie G. C., General relativity and cosmology, 1956. Эти авторы приводят проницательные комментарии относительно трудности выполнения решающих астрономических наблюдений.

§ 107. Заключительные замечания

Закончим эту часть книги небольшим упоминанием об отклонении лучей света Солнцем и о сдвиге к красному концу спектра спектральных линий света, порождаемого в плотных звездах[1]).

Так как свет материален по своей природе, он должен подвергаться воздействию гравитационного поля Солнца, и отклонение от прямолинейного пути светового луча, порожденного отдаленной звездой, когда этот путь слегка касается поверхности Солнца, может быть легко вычислено.

Отклонение лучей света, проходящих близ большой массы, можно наблюдать при солнечных затмениях, когда неподвижные звезды в кажущейся близости к Солнцу приобретают видимость, но из-за невозможности оценить величины экспериментальных ошибок, обусловленных трудностью получения четких фотографических снимков, принято считать, что эти результаты не подтверждают, но и не опровергают общую теорию. Можно отметить, что вычисления, основанные на ньютоновой теории тяготения, способны учесть лишь около половины наблюденных значений.

Из области других экспериментальных доказательств, приводимых в пользу общей теории, указывается наблюдаемое смещение спектральных линий света, излучаемого звездами, к красному концу спектра. Элементарные соображения указывают, что частоты вибраций света, излучаемого отдаленной звездой, меньше соответствующей частоты, наблюдаемой на поверхности Земли[2]). Если эта частота ассоциируется со светом, излучаемым Солнцем, линии солнечного спектра должны были бы слегка смещаться в сторону длинных волн спектра в противоположность соответствующим линиям спектров Земли. Ожидаемый сдвиг для света, излучаемого Солнцем, оказался весьма малым, но для спутников Сириуса он определен приблизительной величиной, большей почти в 30 раз, чем для Солнца, и наблюдающейся с удовлетворительной точностью. В 1925 г. Эдамс измерил «красный сдвиг» для спутника Сириуса[3]) и нашел его равным $\Delta\lambda = 0{,}27$ для линии с длиной волны λ 4000 Å. Такое измерение позволяет оценить диаметр

---

[1]) См. Synge J. L., Relativity. The general theory, 1960, стр. 298—308, а также §§ 36, 37 книги Rainich G. Y., Mathematics of relativity, 1950. См. также Bergmann P. G., Introduction to the theory of relativity, 1942, гл. XIV; Eddington A. S., Mathematical theory of relativity, 1924, стр. 90—93. Критический обзор значимости прогнозов теории Эйнштейна приводится у Мак-Витти: Mc Vittie G. C., General relativity and cosmology, 1956.

[2]) См. ссылки на литературу в предшествующей сноске.

[3]) Сдвиг соответствующей линии в спектре Солнца определен вычислением в $\Delta\lambda = 0{,}008$.

звезды. Результаты, конечно, не являются строгим доказательством, но вообще рассматриваются как подтверждение теории. Закон тяготения $R_{ij}=0$ был обобщен Эйнштейном к виду $R_{ij}=$ $=\lambda g_{ij}$, где λ — малая «универсальная константа». Решения обобщенного уравнения привели к различным космологическим теориям и к построению различных теоретических моделей расширяющейся вселенной. Мы отсылаем читателя за более подробными сведениями к специальным трактатам по этому вопросу[1]).

---

[1]) Eddington A., Mathematical theory of relativity, 1924; Tolman R. C., Relativity, Thermodynamics and cosmology, 1934; Bergmann P., Introduction to the theory of relativity, 1942; Rainich G. Y., Mathematics of relativity, 1950; Ландау Л., Лифшиц Е., Классическая теория полей, Гостехиздат, 1951; Теория поля, «Наука», 1967; Synge J. L., Relativity. The special theory, 1956; The general theory, 1960.

ГЛАВА VI

МЕХАНИКА СПЛОШНЫХ СРЕД

§ 108. Вводные замечания

Эта часть книги посвящена общей формулировке основных концепций механики сплошных сред и выводу фундаментальных уравнений, описывающих поведение этих сред. Приводимый здесь материал образует введение в нелинейную механику жидкостей и упругих твердых тел. Линеаризованные уравнения классической теории предстают как специальные частные случаи нелинейных уравнений, и во всей главе делается акцент на унифицированную формулировку уравнений механики сплошных сред в наиболее общей форме тензоров.

Систематическое построение тензорного исчисления с точки зрения его применения в механике сплошных сред содержится в заключительном издании пятого тома П. Аппеля[1]) и в книге Мак-Коннела[2]). В обоих этих трудах широкое внимание уделено линеаризованным системам. Образцовыми в области нелинейной теории упругости являются работы Леона Бриллюэна[3]) и Ф. Д. Марнэгана[4]). Сущность внесенного Бриллюэном вклада в нашу науку представлена также в его книге «Тензоры в механике и в теории упругости», впервые вышедшей в издательстве Массон в 1938 г. (Франция) и перепечатанной фирмой Довер в 1946 г. (США)[5]).

Более новыми вкладами в нелинейную теорию упругости являются книги В. В. Новожилова[6]), А. Грина и В. Церна[7])

---

[1]) Appell P., Traité de mécanique rationnelle, vol. V, 1926.

[2]) McConnell A. J., Applications of the absolute differential calculus, 1931.

[3]) Brillouin L., Les lois de l'élasticité sous forme tensorielle valable pour des coordonnées quelconques, Annales de physique, **3** (1925), 251—298.

[4]) Murnaghan F. D., Finite deformations of an elastic solid, American Journal of mathematics, **59** (1937), 235—260. Краткое изложение центральных идей Марнэгана содержится в гл. 14 и 15 книги Майкла: Michal A. D., Matrix and tensor calculus, 1947.

[5]) Brillouin L., Les tenseurs en mécanique et en élasticité, Paris, 1938, Dover Press 1946.

[6]) Новожилов В. В., Основы нелинейной теории упругости, Гостехиздат, Москва 1947.

[7]) Green A. E., Zerna W., Theoretical elasticity, Oxford 1954.

и А. Синьорини[1]). Исчерпывающий критический обзор основ теории упругости и гидромеханики содержится в двух обширных мемуарах Трусделла[2]), I том — 1952, II том — 1953.

Развитие основ механики сплошных сред, прежде всего в рамках линейных теорий (включая применения к механике жидкостей, теориям упругости и пластичности), содержится в книге В. Прагера[3]). Обобщенное совместное изложение геометрически и динамически нелинейной механики сплошной среды мы найдем в превосходной монографии Л. И. Седова[4]). Монография Седова в значительной части основана на тесном объединении классической механики и макроскопической термодинамики. Такое соединение позволяет строить обобщенные модели газов, жидкостей, упругих и термоупругих твердых тел и некоторых типов пластических сред с единой точки зрения.

§ 109. Деформирование сплошной среды

Рассмотрим континуум различимых материальных точек, заполняющих в указанное время $t = t_0$ некоторую область пространства τ_0. В дальнейшем мы будем называть t_0 *начальным временем*, а τ_0 — *начальной областью*. С течением времени точки P области τ_0 подвергаются перемещениям и в определенное время t заполнят область τ. В ходе перемещения начальная область τ_0 обычно деформируется, и мы полагаем, что деформирование τ_0 в τ полностью определяется, если нам известно движение каждой точки P. Для того чтобы описать движение точек P, вводим координатную систему X, движущуюся вместе со средой таким образом, что координаты (x^1, x^2, x^3) любой точки P, находящейся первоначально в τ_0, не изменяются с t. В дополнение к системе X введем неподвижную фиксированную систему отсчета Y, относительно которой задаются координаты точки $P(x^1, x^2, x^3)$:

$$y^i = y^i(x^1, x^2, x^3, t). \tag{109.1}$$

Функциональная форма отношений (109.1) явно зависит от природы деформирования τ_0 в τ. Допустим, что функции $y^i(x, t)$ в (109.1) однозначны, кусочно-гладки и обладают для каждого значения времени t однозначной кусочно-гладкой обратной функцией

$$x^i = x^i(y^1, y^2, y^3, t). \tag{109.2}$$

---

[1]) Signorini A., Questioni di elasticita non linearezzata, Roma 1960.

[2]) Truesdell C., Memoirs of elasticity and fluid mechanics, Journal of rational mechanics and analysis, vol. I (1952), vol. II (1953).

[3]) Prager W., Introduction to mechanics of a continua, Boston 1961.

[4]) Седов Л. И., Введение в механику сплошной среды, Москва, «Наука» 1962.

Фиксированную координатную систему Y без потери в общности можно принять прямоугольной декартовой.

Материальная точка P в τ_0 определится относительно этой прямоугольной декартовой системы отсчета Y радиусом-вектором (рис. 51)

$$\boldsymbol{r}_0 = \boldsymbol{c}_i y_0^i \equiv \boldsymbol{c}_i y^i (x^1, x^2, x^3, t_0), \tag{109.3}$$

где $\boldsymbol{c}_i$ — ортонормальные базисные векторы системы отсчета Y.

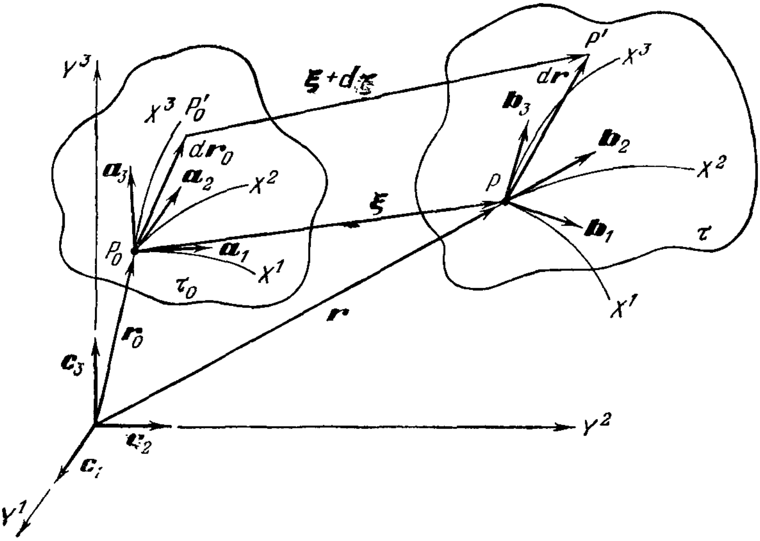

Рис. 51.

Положение некоторой точки P в области τ определяется вектором

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{c}_i y^i (x^1, x^2, x^3, t). \tag{109.4}$$

Базисные векторы $\boldsymbol{b}_j$ в движущейся системе отсчета X даются производными

$$\boldsymbol{b}_j = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x^j} = \boldsymbol{c}_i \frac{\partial y^i (x, t)}{\partial x^j}, \tag{109.5}$$

причем эти векторы зависят, очевидно, не только от координат x^i точки P, но также и от t. Если $P(x^1, x^2, x^3)$ находится в τ_0, мы обозначаем базисные векторы $\boldsymbol{b}_j$ через $\boldsymbol{a}_j$, так что

$$\boldsymbol{a}_j = \frac{\partial \boldsymbol{r}_0}{\partial x^j} \equiv \boldsymbol{c}_i \frac{\partial y^i (x, t_0)}{\partial x^j}. \tag{109.6}$$

Таким образом, в исследовании деформирования сплошной среды мы можем говорить о трех системах отсчета: неподвижной системе отсчета Y, определяемой базисом $\boldsymbol{c}_i$, подвижной системе отсчета X с базисом $\boldsymbol{b}_i$ и неподвижной системе отсчета X с базисом $\boldsymbol{a}_i$. Обращаем внимание на то, что обозначения (x^1, x^2, x^3) рассматриваемой материальной точки P в обеих криволинейных координатных системах X имеют одинаковые значения, но во избежание недоразумений мы будем обозначать точку $P(x^1, x^2, x^3)$, если она находится в начальной области τ_0, через P_0.

Пусть P_0' — точка, находящаяся в окрестности точки $P_0(x^1, x^2, x^3)$. Вектор $P_0P_0' = d\boldsymbol{r}_0$ может быть представлен в виде

$$d\boldsymbol{r}_0 = \boldsymbol{a}_i\, dx^i, \tag{109.7}$$

а квадрат элемента дуги ds_0 в τ_0 равен

$$(ds_0)^2 = d\boldsymbol{r}_0 \cdot d\boldsymbol{r}_0 = \boldsymbol{a}_i \cdot \boldsymbol{a}_j\, dx^i\, dx^j,$$

или

$$(ds_0)^2 = h_{ij}\, dx^i\, dx^j, \tag{109.8}$$

где $h_{ij} = \boldsymbol{a}_i \cdot \boldsymbol{a}_j$ — метрические коэффициенты в τ_0. Аналогично квадрат элемента дуги ds, определяемый соответствующим вектором $\overrightarrow{PP'} = d\boldsymbol{r} = \boldsymbol{b}_i dx^i$ в τ выразится произведением

$$ds^2 = \boldsymbol{b}_i \cdot \boldsymbol{b}_j\, dx^i\, dx^j,$$

или

$$ds^2 = g_{ij}\, dx^i\, dx^j, \tag{109.9}$$

где $g_{ij} = \boldsymbol{b}_i \cdot \boldsymbol{b}_j$ — метрические коэффициенты в τ. Обычно длины и ориентации векторов $d\boldsymbol{r}_0$ и $d\boldsymbol{r}$ различны, и мы будем говорить, что среда, занимающая область τ, находится в состоянии деформации-напряжения, если $ds_0 \neq ds$. В качестве меры деформирования мы можем принять разность

$$(ds)^2 - (ds_0)^2 = (g_{ij} - h_{ij})\, dx^i\, dx^j, \tag{109.10}$$

и если положить

$$g_{ij} - h_{ij} = 2\varepsilon_{ij}, \tag{109.11}$$

то мы вправе представить эту разность как

$$(ds)^2 - (ds_0)^2 = 2\varepsilon_{ij}\, dx^i\, dx^j. \tag{109.12}$$

Поскольку (109.12) — инвариант, а $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$, заключаем, что система функций $\varepsilon_{ij}(x, t)$ представляет тензор E_0 относительно некоторого класса допускаемых преобразований координат X с базисом $\boldsymbol{a}_i$, покрывающих область τ_0. Та же система функций $\varepsilon_{ij}(x, t)$ определяет и тензор E, относительно группы преобразований координат, определяемых базисом $\boldsymbol{b}_i$ конечного состояния τ. В обозначениях заключительного абзаца в § 45 тензор E_0 записывается полилинейной формой $E_0 = \varepsilon_{ij}\boldsymbol{a}^i\boldsymbol{a}^j$, тензор же E

определяется через $E=\varepsilon_{ij}\boldsymbol{b}^i\boldsymbol{b}^j$. Таким образом, операции ковариантного дифференцирования и подъема — опускания индексов в компонентах E_0 используют метрический тензор h_{ij}, соответствующие же операции на E применяют тензор g_{ij}. В обозначениях сказанное принимает вид

$$h^{ij}\varepsilon_{ik}=\varepsilon^j_k \quad \text{и} \quad g^{ij}\varepsilon_{ik}=\varepsilon^j_k.$$

Однако две системы функций ε^j_k, вычисленных указанным путем, остаются различными, и для того чтобы указать происхождение системы ε^j_k, полученной с применением тензора h_{ij}, мы напишем

$$h^{ij}\varepsilon_{ik}=\varepsilon^j_{0k}.$$

В следующем параграфе будет показано, что ни тот, ни другой из тензоров E_0 или E не сможет служить характеристикой деформированного состояния для окрестности точки P_0. Тензоры E_0 и E называются иногда лагранжевым и соответственно эйлеровым тензорами деформации-напряжения в соответствии с двумя точками зрения гидродинамики, связанными с выбором координат начального или конечного состояний как независимых переменных в формулировке уравнений гидродинамики.

§ 110. Геометрическая интерпретация тензоров E_0 и E

В предыдущем параграфе мы определили систему функций ε_{ij} формулой

$$(ds)^2-(ds_0)^2=2\varepsilon_{ij}\,dx^i\,dx^j,$$

где

$$2\varepsilon_{ij}=g_{ij}-h_{ij}. \tag{110.1}$$

Так как $g_{ij}=\boldsymbol{b}_i\cdot\boldsymbol{b}_j$ и $h_{ij}=\boldsymbol{a}_i\cdot\boldsymbol{a}_j$, то мы вправе переписать эту формулу на основе этих обозначений

$$2\varepsilon_{ij}=\boldsymbol{b}_i\cdot\boldsymbol{b}_j-\boldsymbol{a}_i\cdot\boldsymbol{a}_j=|\boldsymbol{b}_i|\cdot|\boldsymbol{b}_j|\cos\theta_{ij}-|\boldsymbol{a}_i|\cdot|\boldsymbol{a}_j|\cos\theta^0_{ij}, \tag{110.2}$$

где θ_{ij} — угол между базисными векторами $\boldsymbol{b}_i$ и $\boldsymbol{b}_j$, а θ^0_{ij} — угол между $\boldsymbol{a}_i$ и $\boldsymbol{a}_j$. Если через e обозначить изменение длины на единицу длины вектора $d\boldsymbol{r}_0=\overrightarrow{P_0P_0'}$ (на рис. 51) так, что

$$e=\frac{|d\boldsymbol{r}|-|d\boldsymbol{r}_0|}{|d\boldsymbol{r}_0|}=\frac{ds-ds_0}{ds_0},$$

то мы получим

$$|d\boldsymbol{r}|=(1+e)|d\boldsymbol{r}_0|. \tag{110.3}$$

Назовем e *удлинением* вектора $d\boldsymbol{r}_0$, и тогда из (110.3) увидим, что удлинения e_i в направлениях базисных векторов $\boldsymbol{a}_i$ задаются формулами

$$|\boldsymbol{b}_i|=(1+e_i)|\boldsymbol{a}_i|. \tag{110.4}$$

Но $|\boldsymbol{b}_i| = \sqrt{g_{ii}}$ и $|\boldsymbol{a}_i| = \sqrt{h_{ii}}$, так что

$$\sqrt{g_{ii}} = (1 + e_i)\sqrt{h_{ii}} \text{ (без суммирования по } i), \tag{110.5}$$

поэтому формулу (110.2) можно переписать с учетом (110.4) и (110.5) в виде

$$\frac{2\varepsilon_{ij}}{\sqrt{h_{ii}}\sqrt{h_{jj}}} = (1 + e_i)(1 + e_j)\cos\theta_{ij} - \cos\theta_{ij}^0. \tag{110.6}$$

Поскольку $\theta_{ij}^0 = \theta_{ij} = 0$ для $i = j$ уравнение (110.6) дает

$$\frac{2\varepsilon_{ii}}{h_{ii}} = (1 + e_i)^2 - 1,$$

или

$$e_i = \sqrt{1 + \frac{2\varepsilon_{ii}}{h_{ii}}} - 1 \text{ (без суммирования).} \tag{110.7}$$

В тех случаях, когда координаты начального состояния прямоугольные декартовы, $h_{ii} = 1$, и мы видим из (110.7), что для $2\varepsilon_{ii}/h_{ii} \ll 1$, $e_i \approx \varepsilon_{ii}$. Соответственно функции ε_{11}, ε_{22}, ε_{33} связаны с удлинениями элементов дуги, направленных вдоль базисных векторов $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$.

Значение ε_{ij} для $i \neq j$ следует из (110.6), если заметить, что когда $\boldsymbol{a}_i$ и $\boldsymbol{a}_j$ — прямоугольные единичные векторы, $\theta_{ij}^0 = \pi/2$. Если положить $\theta_{ij} = \pi/2 - \alpha_{ij}$, так что α_{ij} представляет изменение в первоначально прямом угле между парой элементов дуги, направленных вдоль $\boldsymbol{a}_i$ и $\boldsymbol{a}_j$, то формула (110.6) дает

$$2\varepsilon_{ij} = (1 + e_i)(1 + e_j)\sin\alpha_{ij},$$

или

$$\sin\alpha_{ij} = \frac{2\varepsilon_{ij}}{\sqrt{1 + 2\varepsilon_{ii}}\sqrt{1 + 2\varepsilon_{jj}}}, \tag{110.8}$$

где мы учли (110.7). Если $2\varepsilon_{ii} \ll 1$ и угол α_{ij} мал, получаем приближенное равенство $\alpha_{ij} \approx 2\varepsilon_{ij}$. Таким образом, функции ε_{ij} для $i \neq j$ указывают нам меру уменьшения первоначально прямого угла между элементами дуги, параллельными векторам $\boldsymbol{a}_i$ и $\boldsymbol{a}_j$. Компоненты ε_{ij} для $i \neq j$ называются *скалывающими* (сдвиговыми) компонентами тензора деформации E_0, компоненты же ε_{ij} для $i = j$ — *нормальными компонентами* тензора E_0.

Совершенно аналогичные интерпретации могут быть представлены для функций ε_{ij}, если их рассматривать как компоненты тензора $E = \varepsilon_{ij}\boldsymbol{b}^i\boldsymbol{b}^j$. Действительно, если мы теперь определим относительное удлинение e как изменение в длине, приходящееся на единицу длины в ее конечном состоянии $|d\boldsymbol{r}|$ элемента дуги, то получим

$$e = \frac{ds - ds_0}{ds},$$

и тогда вычисления, сходные с теми, которые привели нас к формулам (110.7) и (110.8), дают теперь

$$e_i = 1 - \sqrt{1 - \frac{2\varepsilon_{ii}}{g_{ii}}}. \tag{110.9}$$

или

$$\sin\beta_{ij} = \frac{2\varepsilon_{ij}}{\sqrt{1-2\varepsilon_{ii}}\,\sqrt{1-2\varepsilon_{jj}}} \text{ (без суммирования)}, \tag{110.10}$$

где $\beta_{ij} = \theta^0_{ij} - \pi/2$.

Мы заключаем, как и раньше, что компоненты ε_{ii} в (110.9) ассоциируются с удлинениями элементов дуги, первоначально параллельных базисным векторам $\boldsymbol{b}_i$, в то время как компоненты ε_{ij}, для $i \neq j$ измеряют соответствующие сдвиговые деформации.

§ 111. Квадрика деформаций. Главные деформации

Определяющая формула (109.12) для компонентов ε_{ij} тензора деформации $E = \varepsilon_{ij}\boldsymbol{b}^i\boldsymbol{b}^j$ может быть упрощена:

$$\frac{(ds)^2 - (ds_0)^2}{2\,(ds)^2} = \varepsilon_{ij}\frac{dx^i}{ds}\frac{dx^j}{ds}, \tag{111.1}$$

где $dx^i/ds = \lambda^i$ — единичный вектор, определяющий направление вектора $d\boldsymbol{r}$ в конечном состоянии. Попробуем определить те направления λ^i, для которых (111.1) принимает экстремальные значения. Положим в этих целях, что

$$Q(\lambda) = \varepsilon_{ij}\lambda^i\lambda^j, \tag{111.2}$$

и найдем максимальное значение квадратичной формы $Q(\lambda)$, подчиненной ограничивающему условию

$$\varphi(\lambda) = g_{ij}\lambda^i\lambda^j - 1 = 0,$$

требующему, чтобы λ^i был единичным вектором.

Знакомая уже нам процедура определения экстремальных значений (111.2) методом множителей Лагранжа приводит к системе уравнений

$$\frac{\partial Q}{\partial\lambda^i} - \varepsilon\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda^i} = 0$$

или

$$(\varepsilon_{ij} - \varepsilon g_{ij})\,\lambda^j = 0, \tag{111.3}$$

где ε — множитель Лагранжа.

Эта система имеет нетривиальные решения для λ^i, если и только если

$$|\,\varepsilon_{ij}(x) - \varepsilon g_{ij}(x)\,| = 0$$

в каждой точке $P(x)$ области τ. Для того чтобы привести эту систему (111.3) к форме (13.10), рассмотренной в § 13, умножим (111.3) на g^{ik}, суммируем по i и получаем

$$\left(\varepsilon_j^k - \varepsilon\delta_j^k\right)\lambda^j = 0, \tag{111.4}$$

где

$$\varepsilon_j^k = g^{ik}\varepsilon_{ij}. \tag{111.5}$$

Система (111.4) имеет три нетривиальных решения: $\lambda^i_{(1)}$, $\lambda^i_{(2)}$, $\lambda^i_{(3)}$ $(i = 1,\ 2,\ 3)$, отвечающих корням ε_i кубического уравнения

$$\left|\varepsilon_j^i - \varepsilon\delta_j^i\right| \equiv -\varepsilon^3 + \vartheta_1\varepsilon^2 - \vartheta_2\varepsilon + \vartheta_3 = 0. \tag{111.6}$$

Коэффициенты ϑ_i в этом кубическом уравнении являются инвариантами

$$\left.\begin{aligned} \vartheta_1 &= \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3, \\ \vartheta_2 &= \varepsilon_2\varepsilon_3 + \varepsilon_3\varepsilon_1 + \varepsilon_1\varepsilon_2, \\ \vartheta_3 &= \varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3. \end{aligned}\right\} \tag{111.7}$$

В §§ 13—15 было показано, что корни ε_i должны быть необходимо вещественными, а связаиные с ними направления $\lambda^i_{(1)}$, $\lambda^i_{(2)}$, $\lambda^i_{(3)}$ ортогональными.

Квадратичная форма (111.2), в которой мы рассматриваем λ^i как текущие подвижные координаты, приводится к канонической форме

$$Q(y) = \varepsilon_1 (y^1)^2 + \varepsilon_2 (y^2)^2 + \varepsilon_3 (y^3)^2, \tag{111.8}$$

если при этом *главные направления* $\lambda^i_{(1)}$, $\lambda^i_{(2)}$, $\lambda^i_{(3)}$, приняты как базисные векторы надлежащей прямоугольной декартовой системы отсчета Y в τ.

Мы можем истолковать эти результаты геометрически, введя сюда *поверхность деформации*

$$\varepsilon_{ij}(x)\,\lambda^i\lambda^j = \text{const}, \tag{111.9}$$

которая в каждой своей точке $P(x)$ представляет поверхность деформаций, где λ^i — бегущие координаты. Главные направления $\lambda^i_{(j)}$ совпадают с осями поверхности (111.9) и из (111.8) следует, что тензор деформации ε_{ij}, будучи отнесенным к системе отсчета Y, имеет вид

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{bmatrix}.$$

Из геометрического смысла компонентов ε_{ij}, $i \neq j$ (см. уравнение 110.10), следует, что *главными направлениями являются те ортогональные направления в недеформированном состоянии, которые остаются ортогональными после деформирования.*

Деформации ε_1, ε_2, ε_3 называются *главными деформациями.*

Инварианты ϑ_1, ϑ_2, ϑ_3, определенные формулами (111.7), играют важную роль в построении моделей сплошных сред. Если мы развернем детерминант в (111.6) и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях ε, то получим в результате

$$\left.\begin{aligned}
\vartheta_1 &= \varepsilon_1^1 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^3 \equiv \varepsilon_i^i,\\
\vartheta_2 &= \begin{vmatrix} \varepsilon_2^2 & \varepsilon_3^2 \\ \varepsilon_2^3 & \varepsilon_3^3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \varepsilon_3^3 & \varepsilon_1^3 \\ \varepsilon_3^1 & \varepsilon_1^1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \varepsilon_1^1 & \varepsilon_2^1 \\ \varepsilon_1^2 & \varepsilon_2^2 \end{vmatrix} \equiv \frac{1}{2!}\,\delta_{\alpha\beta}^{ij}\varepsilon_i^\alpha\varepsilon_j^\beta,\\
\vartheta_3 &= \begin{vmatrix} \varepsilon_1^1 & \varepsilon_2^1 & \varepsilon_3^1 \\ \varepsilon_1^2 & \varepsilon_2^2 & \varepsilon_3^2 \\ \varepsilon_1^3 & \varepsilon_2^3 & \varepsilon_3^3 \end{vmatrix} \equiv \frac{1}{3!}\,\delta_{\alpha\beta\gamma}^{ijk}\varepsilon_i^\alpha\varepsilon_j^\beta\varepsilon_k^\gamma.
\end{aligned}\right\} \qquad (111.10)$$

Мы увидим в следующем параграфе, каким образом эти инварианты войдут в выражение соотношения объемных элементов $d\tau_0$ и $d\tau$ начального и деформированного состояний.

Равным образом мы могли бы рассмотреть квадратичную форму

$$Q_0 = \varepsilon_{ij}\lambda_0^i\lambda_0^j. \qquad (111.11)$$

где $\lambda_0^i = dx^i/ds_0$ указывает направление вектора $d\boldsymbol{r}_0$ для начального состояния, а ε_{ij} рассматриваются как компоненты тензора деформации $E_0 = \varepsilon_{ij}\boldsymbol{a}^i\boldsymbol{a}^j$.

Для определения главных направлений мы имеем теперь систему уравнений типа (111.4), где

$$\varepsilon_j^k = h^{ik}\varepsilon_{ij}, \qquad (111.12)$$

а значения ε — корни характеристического уравнения

$$|\varepsilon_j^k - \varepsilon\delta_j^k| = 0, \qquad (111.13)$$

в котором ε_j^k даны формулой (111.12). Квадратичную форму (111.11) можно, таким образом, привести к каноническому виду

$$Q_0 = \varepsilon_1^0(y_0^1)^2 + \varepsilon_2^0(y_0^2)^2 + \varepsilon_3^0(y_0^3)^2,$$

где главные направления $\lambda_{0\,(1)}^i$, $\lambda_{0\,(2)}^i$, $\lambda_{0\,(3)}^i$ приняты как базис соответствующей ортогональной системы отсчета Y_0 в τ_0.

Из формул (110.7) следует, что удлинения e_i^0 по главным направлениям выражаются формулами

$$e_i^0 = \frac{ds^i - ds_0^i}{ds_0^i} = \sqrt{1 + 2\varepsilon_i^0} - 1, \tag{111.14}$$

удлинения же e_i, вычисленные на единицу длины в конечном состоянии [см. уравнение (110.9)], получаются равными

$$e_i = \frac{ds^i - ds_0^i}{ds^i} = 1 - \sqrt{1 - 2\varepsilon_i}. \tag{111.15}$$

Из (111.14) и (111.15) заключаем, что

$$\varepsilon_i^0 = \frac{\varepsilon_i}{1 - 2\varepsilon_i} \quad \text{и} \quad \varepsilon_i = \frac{\varepsilon_i^0}{1 + 2\varepsilon_i^0}. \tag{111.16}$$

Формулы (111.16) позволяют нам вычислить инварианты ϑ_i^0 кубического уравнения (111.3) в зависимости от инвариантов ϑ_i, приведенных в (111.7), а инварианты ϑ_i кубического уравнения (111.6) — в зависимости от ϑ_i^0.

Задача

Показать, что

$$\vartheta_1 = \frac{\vartheta_1^0 + 4\vartheta_2^0 + 12\vartheta_3^0}{1 + 2\vartheta_1^0 + 4\vartheta_2^0 + 8\vartheta_3^0},$$

$$\vartheta_2 = \frac{\vartheta_2^0 + 6\vartheta_3^0}{1 + 2\vartheta_1^0 + 4\vartheta_2^0 + 8\vartheta_3^0},$$

$$\vartheta_3 = \frac{\vartheta_0^3}{1 + 2\vartheta_1^0 + 4\vartheta_2^0 + 8\vartheta_3^0}.$$

§ 112. Относительное изменение элементов объема

Исследуем теперь изменения в объемных элементах $d\tau_0$ и $d\tau$ в начальном и деформированном состояниях и учтем их связь с инвариантами ϑ_i, введенными в § 111.

Из определения объемного элемента в § 44 следует, что $d\tau_0 = \sqrt{h}\, dx^1\, dx^2\, dx^3$ и $d\tau = \sqrt{g}\, dx^1\, dx^2\, dx^3$, где $h = |h_{ij}|$ и $g = |g_{ij}|$ — детерминанты квадратичных форм $ds_0^2 = h_{ij}\, dx^i\, dx^j$ и $ds^2 = g_{ij}\, dx^i\, dx^j$. Отсюда

$$\frac{d\tau_0}{d\tau} = \sqrt{h/g}. \tag{112.1}$$

Группу функций h_{ij} можно рассматривать как комплект компонентов тензора $H = h_{ij}\boldsymbol{b}^i\boldsymbol{b}^j$, определенного в пространстве переменных x^i в конечном состоянии, так что

$$g^{ik}h_{ij} = h^k_j$$

и

$$g_{ik}h^k_j = h_{ij}.$$

Заключаем, что

$$|g_{ik}h^k_j| = |h_{ij}|,$$

так что

$$g|h^i_j| = h.$$

Вследствие этого отношение (112.1) принимает вид

$$\frac{d\tau_0}{d\tau} = \sqrt{|h^i_j|}. \tag{112.2}$$

Но из определения (110.1) мы знаем, что

$$h_{ij}(x) = g_{ij}(x) - 2\varepsilon_{ij}(x),$$

выражение, которое с поднятием индексов принимает упрощенную форму

$$h^i_j = \delta^i_j - 2\varepsilon^i_j.$$

Формулу (112.2) мы сможем, следовательно, представить таким образом:

$$\frac{d\tau_0}{d\tau} = \sqrt{|\delta^i_j - 2\varepsilon^i_j|}. \tag{112.3}$$

Если развернуть находящийся здесь под знаком радикала детерминант, то мы найдем

$$|\delta^i_j - 2\varepsilon^i_j| = 1 - 2\vartheta_1 + 4\vartheta_2 - 8\vartheta_3, \tag{112.4}$$

где ϑ_i — инварианты типа (111.10).

В линейной теории деформации произведениями деформаций ε^i_j можно пренебречь, так что приближенное выражение для соотношения (112.3) получает упрощенный вид

$$\frac{d\tau_0}{d\tau} \approx \sqrt{1 - 2\vartheta_1} \approx 1 - \vartheta_1.$$

Таким образом, приближенно

$$\frac{d\tau - d\tau_0}{d\tau} = \vartheta_1. \tag{112.5}$$

Эта формула выражает объемное изменение на единицу объема, по этой причине ϑ_1 называется *удельным расширением*. Чаще всего с этой величиной приходится встречаться в линейной теории упругости и в гидродинамике.

Формулу (112.3) можно выразить в зависимости от одних лишь ϑ:

$$\frac{d\tau_0}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{\left|\delta^i_j + 2\varepsilon^0_i\right|}} = \frac{1}{\sqrt{1 + 2\vartheta^0_1 + 4\vartheta^0_2 + 8\vartheta^0_3}}, \qquad (112.6)$$

если инварианты ϑ_i выразить в функциях от ϑ^0_i как в задаче § 111. Если деформации малы, то из (112.6) следует, что

$$\frac{d\tau - d\tau_0}{d\tau_0} \approx \vartheta^0_1, \qquad (112.7)$$

а так как для малых деформаций $\varepsilon^0_i \approx \varepsilon_i$, $\vartheta^0_1 \approx \vartheta_1$, то обе формулы — (112.5) и (112.7) — дают для удельного расширения одно и то же значение.

Задача

Вывести формулы (112.3) и (112.6) непосредственно из (111.14) и (111.15).

§ 113. Перемещения в сплошных средах

Определим вектор перемещения $\boldsymbol{\xi}$ точки P (рис. 51) разностью радиусов-векторов

$$\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0 \qquad (113.1)$$

и обозначим компоненты $\boldsymbol{\xi}$, отнесенные к базису $\boldsymbol{a}_i$, через u^i, а отнесенные к базису $\boldsymbol{b}_i$, через w^i; тогда

$$\boldsymbol{\xi} = u^i \boldsymbol{a}_i, \quad \boldsymbol{\xi} = w^i \boldsymbol{b}_i. \qquad (113.2)$$

На основании (113.1) получаем

$$\frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial x^i} = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x^i} - \frac{\partial \boldsymbol{r}_0}{\partial x^i} = \boldsymbol{b}_i - \boldsymbol{a}_i,$$

откуда

$$\boldsymbol{b}_i = \boldsymbol{a}_i + \frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial x^i}. \qquad (113.3)$$

Вычислив $g_{ij} = \boldsymbol{b}_i \cdot \boldsymbol{b}_j$ с помощью (113.3) и вычтя $h_{ij} = \boldsymbol{a}_i \cdot \boldsymbol{a}_j$ из результата, находим

$$g_{ij} - h_{ij} = \frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial x^i} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial x^j} + \boldsymbol{a}_i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial x^j} + \boldsymbol{a}_j \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial x^i} = 2\varepsilon_{ij} \qquad (113.4)$$

в силу (110.1).

Уравнения (113.4) можно рассматривать как группу дифференциальных уравнений для компонентов $\boldsymbol{\xi}$ при указанных функциях ε_{ij}. Эта группа уравнений принимает очень простой вид, если вектор перемещения $\boldsymbol{\xi}$ выражен через ковариантные компоненты u_j или w_j, таким образом:

$$\boldsymbol{\xi} = u_j \boldsymbol{a}^j, \quad \boldsymbol{\xi} = w_j \boldsymbol{b}^j, \qquad (113.5)$$

причем $\boldsymbol{a}^j$ и $\boldsymbol{b}^j$ — взаимные базисные векторы, введенные в § 45.

Дифференцируя (113.5) по x^i, получаем (см. § 45)

$$\frac{\partial \xi}{\partial x^i} = u_{j|i} \boldsymbol{a}^j, \quad \frac{\partial \xi}{\partial x^i} = w_{j,i} \boldsymbol{b}^j, \tag{113.6}$$

где

$$u_{j|i} = \frac{\partial u_j}{\partial x^i} - {}_h\left\{ {k \atop ji} \right\} u_k \tag{113.7}$$

является ковариантной производной от u_j по метрическому тензору h_{ij} начального состояния, а

$$w_{j,i} = \frac{\partial w_j}{\partial x^i} - {}_g\left\{ {k \atop ji} \right\} w_k \tag{113.8}$$

— ковариантная производная от w_j по метрическому тензору g_{ij} конечного состояния. Левые нижние индексы в символах Кристоффеля в (113.7) и (113.8) указывают, что эти символы в (113.7) построены из тензора h_{ij}, символы же в (113.8) — из g_{ij}.

Если мы введем первую из формул (113.6) в (113.4), то получим

$$2\varepsilon_{ij} = (u_{l|i} \boldsymbol{a}^l \cdot u_{k|j} \boldsymbol{a}^k) + (\boldsymbol{a}_i \cdot \boldsymbol{a}^k u_{k|j} + \boldsymbol{a}_j \cdot \boldsymbol{a}^k u_{k|i}) =$$

$$= u_{l|i} u_{k|j} \boldsymbol{a}^l \cdot \boldsymbol{a}^k + \delta_i^k u_{k|j} + \delta_j^k u_{k|i} = u^k_{|i} u_{k|j} + u_{i|j} + u_{j|i},$$

поскольку $\boldsymbol{a}^l \cdot \boldsymbol{a}^k = h^{lk}$.

Таким образом,

$$2\varepsilon_{ij} = u_{i|j} + u_{j|i} + u^k_{|i} u_{k|j}. \tag{113.9}$$

С другой стороны, если вектор ξ представлен в виде $\xi = w_j \boldsymbol{b}^j$, то, учтя (113.3), мы придем к выражениям

$$h_{ij} = \boldsymbol{a}_i \cdot \boldsymbol{a}_i = \left(\boldsymbol{b}_i - \frac{\partial \xi}{\partial x^i}\right) \cdot \left(\boldsymbol{b}_j - \frac{\partial \xi}{\partial x^j}\right).$$

Подстановка в них из второй формулы (113.6) даст

$$2\varepsilon_{ij} = w_{i,j} + w_{j,i} - w^k_{,i} w_{k,j}. \tag{113.10}$$

Формулы (113.9) позволяют нам вычислить компоненты деформации-напряжения ε_{ij} из компонентов u_i вектора ξ, отнесенного к базису $\boldsymbol{a}_i$ начального состояния. С другой стороны, в формулы (113.10) входят компоненты ξ, отнесенные к базису $\boldsymbol{b}_i$ конечного состояния. В свою очередь, если указаны функции ε_{ij}, то дифференциальные уравнения (113.9) и (113.10) позволят определить компоненты вектора перемещения ξ.

В тех случаях, когда система отсчета X прямоугольная декартова, мы полагаем $y^i = x^i$ и получаем на основании (113.9) и (113.10)

$$2\varepsilon_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial y_0^j} + \frac{\partial u_j}{\partial y_0^i} + \frac{\partial u_k}{\partial y_0^i}\frac{\partial u_k}{\partial y_0^j}, \tag{113.11}$$

$$2\varepsilon_{ij} = \frac{\partial w_i}{\partial y^j} + \frac{\partial w_j}{\partial y^i} - \frac{\partial w_k}{\partial y^i}\frac{\partial w_k}{\partial y^j}, \tag{113.12}$$

где знаками y_0^j обозначены декартовы координаты в начальном состоянии.

В специальных задачах производные компонентов перемещения бывают достаточно малыми, для того чтобы оправдать пренебрежение их произведениями в сопоставлении с членами первого порядка в этих производных. В этих условиях уравнения (113.11) и (113.12) становятся линейными и теория деформации, основанная на изучении получающихся линейных дифференциальных уравнений, называется *линейной теорией*. В линейной теории обычно предполагается, что вектор перемещения ξ достаточно мал, для того чтобы оправдать отождествление координат y_0^j и y^j начального и конечного состояний. Получающаяся в результате теория называется *инфинитезимальной* теорией деформации. В инфинитезимальной теории формулы (113.11) и (113.12) превращаются в единственную

$$2e_{ij} = u_{i,j} + u_{j,i}, \tag{113.13}$$

где e_{ij} — *инфинитезимальные компоненты* тензора деформации ε_{ij}. В классической теории упругости тензор деформации ε_{ij} принимается в форме (113.13). Инвариант деформации $\vartheta = e_{11} + e_{22} + e_{33}$, как это следует из (113.13), получается при этом равным дивергенции вектора перемещения u_i и отсюда — расширению $\vartheta_1 = (d\tau - d\tau_0)/d\tau = u^i_{,i}$.

§ 114. Уравнения совместности

Уравнения (113.10) или, в декартовой форме, (113.12) можно рассматривать как систему шести дифференциальных уравнений в частных производных для определения трех компонентов перемещения по заданным значениям тензора деформации. Очевидно, что если решение этой системы должно существовать, то компонентами тензора деформации не могут оказаться произвольные величины. Для того чтобы обеспечить интегрируемость системы, необходимо наложить некоторые ограничения на выбор функций ε_{ij}. Такие условия вместе с доказательством их необходимости[1])

[1]) Доказательство необходимости и достаточности условий Сен-Венана приводится в книге автора: Sokolnikoff I. S., Mathematical theory of elasticity, 1946, стр. 24—25.

для линеаризованного случая, выраженного уравнением (113.13), были выведены Б. Сен-Венаном в 1860 г. Покажем здесь, каким образом эти условия *интегрируемости* или *совместности* могут быть выведены в общем случае.

Напомним, что пространство, в котором имеют место деформации, является евклидовым, и потому риманов тензор, ассоциируемый с метрикой евклидова пространства, определяемого квадратичной формой $ds_0^2 = h_{ij}\,dx^i\,dx^j$, обращается в нуль (см. § 39). На этом основании

$$R^0_{ijkl} = \frac{\partial}{\partial x^k}[jl,\ i] - \frac{\partial}{\partial x^l}[jk,\ i] + \left\{ {\alpha \atop jk} \right\}[il,\ \alpha] - \left\{ {\alpha \atop jl} \right\}[ik,\ \alpha] = 0, \quad (114.1)$$

где риманов тензор R^0_{ijk} построен из метрических коэффициентов h_{ij}. Если вспомнить, что (см. (110.1))

$$h_{ij} = g_{ij} - 2\varepsilon_{ij}$$

позволяют вычислить символы Кристоффеля, необходимые в (114.1) в функциях от g_{ij} и ε_{ij}, и использовать то обстоятельство, что риманов тензор R_{ijkl}, основанный на g_{ij}, также обращается в нуль, получаем условие

$$\varepsilon_{ijkl} + \bar{h}^{\alpha\beta}(\varepsilon_{jk\beta}\varepsilon_{il\alpha} - \varepsilon_{jl\beta}\varepsilon_{ik\alpha}) = 0, \quad (114.2)$$

где

$$\varepsilon_{ijkl} \equiv \varepsilon_{jl,\ ik} + \varepsilon_{ik,\ jl} - \varepsilon_{ij,\ kl} - \varepsilon_{kl,\ ij},$$

$$\varepsilon_{ijk} \equiv \varepsilon_{ik,\ j} + \varepsilon_{kj,\ i} - \varepsilon_{ij,\ k},$$

и

$$\bar{h}^{\alpha\beta} = \frac{H^{\alpha\beta}}{h},$$

где $H^{\alpha\beta}$ — алгебраическое дополнение [1]) коэффициента $h_{\alpha\beta}$ в $|h_{ij}|$.

Если мы линеаризуем (114.2), опустив члены, содержащие произведения ε_{ijk}, то придем к уравнениям совместности Сен-Венана

$$e_{ij,\ kl} + e_{kl,\ ij} - e_{ik,\ jl} - e_{jl,\ ik} = 0, \quad (114.3)$$

знакомым нам в линейной теории деформации [2]).

Из того обстоятельства, что в трехмерном пространстве риманов тензор имеет шесть независимых, не обращающихся в нуль компонентов, следует, что в (114.2) и (114.3) содержится шесть независимых уравнений.

---

[1]) Заметим, что контравариантный тензор h^{ij} является ассоциированным тензором h_{ij} относительно метрического тензора g_{ij}. См. § 30.

[2]) В этой связи отсылаем к статье Seigling W. R., American mathematical monthly, т. 57, 1950, стр. 679—681. См. также Murnaghan, F. D., Finite deformation of an elastic solid, 1951 и Седов Л. И., Введение в механику сплошной среды, 1962, стр. 128—130.

§ 115. Анализ напряженного состояния

В исследовании напряженного состояния деформированного тела естественно принять в качестве независимых переменных переменные x^i конечного состояния. Докажем, что напряженное состояние в точке $P(x)$ тела, находящегося в равновесии под приложенными поверхностными и объемными силами, характеризуется симметричным тензором — *тензором напряжений.*

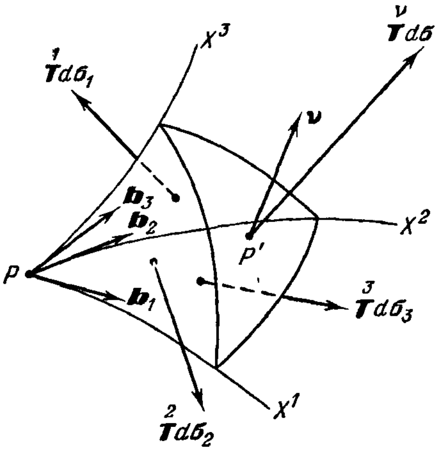

Рис. 52.

Пусть тело τ отнесено к криволинейной координатной системе X, и мы рассматриваем элемент площади поверхности в некоторой точке P' тела. Образуем малый тетраэдральный объемный элемент $d\tau$ координатными поверхностями в близкой точке P и поверхностным элементом $d\sigma$ (рис. 52). Если $\boldsymbol{\nu}$ — единичная нормаль к $d\sigma$, то элементы площади $d\sigma$, лежащие на координатных поверхностях, определяются формулами

$$d\sigma_i = \nu_i \, d\sigma, \tag{115.1}$$

где ν_i — ковариантные компоненты $\boldsymbol{\nu}$.

Обозначим *вектор напряжения* (силу, отнесенную к единице площади), действующий на $d\sigma$, через $\overset{\nu}{\boldsymbol{T}}$, где верхний индекс ν отмечает зависимость вектора напряжений от ориентации элемента $d\sigma$. Векторы напряжения, действующего на элементы поверхности $d\sigma_i$, обозначаются через $\overset{i}{\boldsymbol{T}}$, а их положительными направлениями мы будем считать внешние нормали к объемному элементу. Мы можем написать

$$\overset{i}{\boldsymbol{T}} = -\tau^{ij}\boldsymbol{b}_j, \tag{115.2}$$

где $\boldsymbol{b}_j$ — базисные векторы, направленные вдоль координатных линий, а τ^{ij} — контравариантные компоненты $\overset{i}{\boldsymbol{T}}$.

Если теперь $\boldsymbol{F} = F^i\boldsymbol{b}_i$ обозначает силу на единицу объема, действующую на массу, содержащуюся в $d\tau$, то первое условие равновесия требует, чтобы

$$\boldsymbol{F}\,d\tau + \overset{\nu}{\boldsymbol{T}}\,d\sigma + \overset{i}{\boldsymbol{T}}\,d\sigma_i = 0. \tag{115.3}$$

Если учесть определения (115.1) и (115.2) и заметить, что $d\tau = l\,d\sigma$, где l — надлежащий коэффициент, зависящий от линейного размера объемного элемента, то условия равновесия (115.3) примут вид

$$F^i\boldsymbol{b}_i l\,d\sigma + T^j\boldsymbol{b}_j\,d\sigma - \tau^{ij}\nu_i\,d\sigma\boldsymbol{b}_j = 0,$$

где $T^j\boldsymbol{b}_j \equiv \overset{\nu}{\boldsymbol{T}}$.

Если точку P' мы будем теперь сближать с точкой P таким образом, чтобы направление ν оставалось постоянным, то $l \to 0$, и первый член в вышеприведенном соотношении будет обращаться в нуль всякий раз, когда объемная сила $\boldsymbol{F}$ ограничена. Это приводит к тому результату, что компоненты T^j напряжения $\overset{\nu}{\boldsymbol{T}}$, действующего на поверхность элемента с направлением $\boldsymbol{\nu}$, выразятся формулой

$$T^j = \tau^{ij}\nu_i. \tag{115.4}$$

Так как T^i — вектор, а ν_i — произвольный ковариантный вектор, то можно заключить, что τ^{ij} — контравариантные компоненты тензора — именно *тензора напряжения*. Формула (115.4) позволяет нам вычислить вектор напряжения, действующий на поверхности элемента определенного направления, если нам известен комплект девяти функций τ^{ij}. В § 116 мы увидим, что введение остающегося условия равновесия приводит к заключению, что тензор напряжения симметричен.

Формулу (115.4) можно, очевидно, представить в виде

$$T_j = \tau_{ij}\nu^i. \tag{115.5}$$

Компонент N вектора $\overset{\nu}{\boldsymbol{T}}$ в направлении нормали $\boldsymbol{\nu}$ запишется как $\overset{\nu}{\boldsymbol{T}}\cdot\boldsymbol{\nu} = T_j\nu^j$; введя же (115.3), получим

$$N = \tau_{ij}\nu^i\nu^j. \tag{115.6}$$

В отношении квадратичной формы (115.6) мы можем поднять вопрос об определении направлений ν^i, приводящих форму N к экстремальным значениям. Как и в § 111, это влечет за собой исследование характеристического уравнения

$$\left|\tau^i_j - \tau\delta^i_j\right| \equiv -\tau^3 + \Theta_1\tau^2 - \Theta_2\tau + \Theta_3 = 0, \tag{115.7}$$

где

$$\Theta_1 = \tau_1 + \tau_2 + \tau_3,$$
$$\Theta_2 = \tau_2\tau_3 + \tau_3\tau_1 + \tau_1\tau_2,$$
$$\Theta_3 = \tau_1\tau_2\tau_3,$$

а τ_i — корни кубического уравнения (115.7). Ортогональные направления ν^i, отвечающие *главным* напряжениям τ_i, определяются из системы линейных уравнений [см. уравнение (111.4)]

$$\left(\tau^k_j - \tau\delta^k_j\right)\nu^j = 0 \tag{115.8}$$

и называются *главными направлениями напряжения.* Если мы выберем прямоугольную декартову систему отсчета Y, оси которой совпадают с главными направлениями в P, то квадратичная поверхность

$$\tau_{ij}\nu^i\nu^j = \mathrm{const} \tag{115.9}$$

примет вид

$$\tau_1 (y^1)^2 + \tau_2 (y^2)^2 + \tau_3 (y^3)^2 = \mathrm{const}. \tag{115.10}$$

Квадратичная поверхность (115.9) была введена Коши и называется *квадрикой напряжений.*

Из уравнений (115.10) очевидно, что компоненты τ_{ij} для $i \neq j$ обращаются в нуль, если соответствующая система отсчета выбрана в P. Компоненты τ_{11}, τ_{22}, τ_{33} называются *нормальными компонентами* напряжения, остальные же — компонентами *сдвига.*

По аналогии с формулами (110.10) мы можем здесь выписать выражения для *инвариантов напряжения* Θ_i. Они принимают следующий вид:

$$\Theta_1 = \tau^i_i, \quad \Theta_2 = \frac{1}{2!}\delta^{ij}_{\alpha\beta}\tau^\alpha_i\tau^\beta_j, \qquad \Theta_3 = \frac{1}{3!}\delta^{ijk}_{\alpha\beta\gamma}\tau^\alpha_i\tau^\beta_j\tau^\gamma_k. \tag{115.11}$$

§ 116. Дифференциальные уравнения равновесия

Пусть тело τ находится в состоянии равновесия под воздействием заданных объемных и поверхностных сил. Так как каждая часть тела пребывает в равновесии, результирующая всех сил и результирующий момент этих сил, воздействующих на каждую подобласть V тела τ, должны обратиться в нуль. Условие, выражающее исчезновение результирующей силы в любом направлении, задается уравнением

$$\int\limits_V F^i\lambda_i\,d\tau + \int\limits_S T^i\lambda_i\,d\sigma = 0, \tag{116.1}$$

где λ_i — единичный вектор в произвольном постоянном направлении.

Мы полагаем, что компонентами объемной силы $F^i(x)$ являются непрерывные функции и что компоненты T^i вектора напряжений входят в класс C^1.

Подстановка в T^i из (115.4) и применение теоремы дивергенции (92.3) к интегралу поверхности в (116.1) дает уравнение

$$\int\limits_V [F^i\lambda_i + (\tau^{ji}\lambda_i)_{,j}]\,d\tau = 0.$$

Так как λ_i — параллельное векторное поле, $\lambda_{i,j} = 0$, то предыдущее уравнение можно преобразовать в

$$\int\limits_V (F^i + \tau^{ji}_{,j})\,\lambda_i\,d\tau = 0. \tag{116.2}$$

Поскольку подынтегральная функция в (116.2) непрерывна, а направление λ_i произвольно, заключаем, что в любой точке P тела τ

$$\tau^{ji}_{,j} + F^i = 0. \tag{116.3}$$

Воспользуемся теперь условием, требующим, чтобы результирующий момент тела и поверхностные силы обращались в нуль. Если $\boldsymbol{r} = l^i \boldsymbol{b}_i$ — радиус-вектор точки $P'(x)$, относительно некоторой точки P, то компонент момента $(\boldsymbol{F} \times \boldsymbol{r}) d\tau$ в направлении единичного вектора $\boldsymbol{\lambda}$ будет равен $\boldsymbol{F} \times \boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{\lambda}\, d\tau$. Компонент момента поверхностных сил $\overset{\nu}{\boldsymbol{T}}$ равен $\overset{\nu}{\boldsymbol{T}} \times \boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{\lambda} d\sigma$. Вспомнив (§ 49) выражение тройного скалярного произведения

$$\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{C} = \varepsilon_{ijk} A^i B^j C^k,$$

мы сможем написать

$$\int\limits_V \varepsilon_{ijk} F^i l^j \lambda^k \, d\tau + \int\limits_S \varepsilon_{ijk} T^i l^j \lambda^k \, d\sigma = 0.$$

Подстановка в интеграл по поверхности из (115.4) и применение теоремы дивергенции дает

$$\int\limits_V \varepsilon_{ijk} \lambda^k [F^i l^j + (\tau^{mi} l^j)_{,m}] \, d\tau = 0,$$

поскольку $\varepsilon_{ijk,m} = 0$.

Если мы выполним предписанное здесь ковариантное дифференцирование и используем уравнения (116.3), то получим

$$\int\limits_V \varepsilon_{ijk} \tau^{mi} l^j_{,m} \lambda^k \, d\tau = 0;$$

поскольку же[1]) $l^j_{,m} = \delta^j_m$, а объем V — произволен, то

$$\varepsilon_{ijk} \tau^{ji} \lambda^k = 0. \tag{116.4}$$

Заметив, что $\varepsilon_{ijk} = -\varepsilon_{jik}$, мы сможем выразить это равенство в следующем виде:

$$\frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} (\tau^{ji} - \tau^{ij}) \lambda^k = 0. \tag{116.5}$$

Поскольку $\varepsilon_{ijk} = \sqrt{g}\, e_{ijk}$, а $\sqrt{g} \neq 0$, получим после разложения (116.5)

$$(\tau^{23} - \tau^{32}) \lambda^1 + (\tau^{31} - \tau^{13}) \lambda^2 + (\tau^{12} - \tau^{21}) \lambda^3 = 0.$$

Так как направление $\boldsymbol{\lambda}$ произвольно, то заключаем, что

$$\tau^{ij} = \tau^{ji}. \tag{116.6}$$

---

[1]) Так как $\boldsymbol{b}_j = \dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x^j} = l^i_{,j} \boldsymbol{b}_i$ в силу (46.6), то $l^i_{,j} = \delta^i_j$.

Таким образом, мы пришли к выводу, что тензор напряжений симметричен.

Полученные результаты подытоживает

Т е о р е м а. *Если тело находится в равновесии под воздействием заданных объемных и поверхностных сил, то компоненты тензора напряжений* τ^{ij} *в каждой точке тела удовлетворяют системе дифференциальных уравнений в частных производных*

$$\tau^{ij}_{,j} + F^i = 0,$$

где $\tau^{ij} = \tau^{ji}$. *На поверхности* Σ *тела, подвергающейся действию векторов напряжения* T^i, *имеет место равенство*

$$\tau^{ij}\nu_j = T^i,$$

причем ν_j — *внешняя единичная нормаль к* Σ.

Опираясь теперь на принцип Даламбера, мы сможем непосредственно же сформулировать уравнения движения. Нам следует лишь добавить к объемной силе F^i инерциальную силу — ρa^i, где ρ — плотность, а a^i — ускорение. Искомое уравнение движения принимает вид

$$\tau^{ij}_{,j} + F^i = \rho a^i, \tag{116.7}$$

где F^i — объемная сила, приходящаяся на единицу объема. Если F^i представляет силу, *отнесенную к единице массы*, то уравнения движения принимают вид

$$\tau^{ij}_{,j} = \rho\left(a^i - F^i\right). \tag{116.8}$$

Так как уравнения в §§ 115, 116 приводятся в тензорной форме, они имеют силу во всех допустимых системах отсчета. В частности, в системе отсчета X начального состояния τ_0 ковариантные производные в (116.8) берутся по метрическим коэффициентам h_{ij}, а a^i и F^i — компоненты векторов ускорения и силы — относительно базиса начального состояния.

§ 117. Виртуальная работа

Пусть сплошная среда поддерживается в состоянии равновесия объемными силами F^i и поверхностными силами T^i. Если $\overrightarrow{P_0P} = \xi(x, t)$ — вектор перемещения точки P (на рис. 51), то мы можем рассматривать точку P' в окрестности P и обозначить вектор $\overrightarrow{P_0P'}$ (не показанный на рис. 51) через $\xi'(x, t)$. Тогда

$$\xi'(x, t) = \xi(x, t) + \delta\xi(x, t),$$

где *вариация*

$$\delta\xi = \xi' - \xi, \tag{117.1}$$

или *виртуальное перемещение* точки P является произвольным вектором $\overrightarrow{PP'}$ в окрестности P. Будем рассматривать вариацию векторов лишь в конечном состоянии τ и скажем, что вариации векторов и тензоров, ассоциированных с точками P_0 начального состояния τ_0 равны нулю.

Положим, что ξ принадлежит классу C^2, и определим вариацию $\partial\xi/\partial x^i$ формулой

$$\delta\left(\frac{\partial\xi}{\partial x^i}\right)=\frac{\partial\xi'}{\partial x^i}-\frac{\partial\xi}{\partial x^i}=\frac{\partial(\xi'-\xi)}{\partial x^i}=\frac{\partial(\delta\xi)}{\partial x^i}, \qquad (117.2)$$

так что вариация производной $\partial\xi/\partial x^i$ получается равной производной вариации (см. § 81). Поскольку $\xi=\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0$ и

$$\frac{\partial\xi}{\partial x^i}=\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial x^i}-\frac{\partial\boldsymbol{r}_0}{\partial x^i}=\boldsymbol{b}_i-\boldsymbol{a}_i,$$

то мы получим, использовав дистрибутивное свойство символа δ,

$$\delta\left(\frac{\partial\xi}{\partial x^i}\right)=\delta(\boldsymbol{b}_i-\boldsymbol{a}_i)=\delta\boldsymbol{b}_i,$$

ибо $\delta\boldsymbol{a}_i=0$, так как точки в начальном состоянии не подвергаются варьированию. Таким образом,

$$d\boldsymbol{b}_i=\delta\left(\frac{\partial\xi}{\partial x^i}\right)=\frac{\partial(\delta\xi)}{\partial x^i}. \qquad (117.3)$$

Метрические коэффициенты конечного состояния даны соотношениями $g_{ij}=\boldsymbol{b}_i\cdot\boldsymbol{b}_j$, и мы находим, как в § 81,

$$\delta g_{ij}=\delta(\boldsymbol{b}_i\cdot\boldsymbol{b}_j)=\boldsymbol{b}_i\cdot\delta\boldsymbol{b}_j+\boldsymbol{b}_j\cdot\delta\boldsymbol{b}_i$$

так, что

$$\delta g_{ij}=\boldsymbol{b}_i\frac{\partial(\delta\xi)}{\partial x^j}+\boldsymbol{b}_j\frac{\partial(\delta\xi)}{\partial x^i} \quad \text{(в силу (117.3))}. \qquad (117.4)$$

Тензор деформации ε_{ij} определяется из

$$2\varepsilon_{ij}=g_{ij}-h_{ij}, \qquad [109.11]$$

и отсюда

$$2\,\delta\varepsilon_{ij}=g_{ij}, \qquad (117.5)$$

поскольку $\delta(h_{ij})=\delta(\boldsymbol{a}_i\cdot\boldsymbol{a}_j)=0$.

Произведя подстановку (117.4) в (117.5), находим

$$2\,\delta\varepsilon_{ij}=\boldsymbol{b}_i\frac{\partial(\delta\xi)}{\partial x^j}+\boldsymbol{b}_j\frac{\partial(\delta\xi)}{\partial x^i}. \qquad (117.6)$$

Но $\delta\xi=(\delta\xi)_i\boldsymbol{b}^i$, где $(\delta\xi)_i$ — ковариантные компоненты вектора $\delta\xi$, а поскольку

$$\frac{\partial(\delta\xi)}{\partial x^i}=(\delta\xi)_{i,j}\,\boldsymbol{b}^j,$$

то из (46.8) заключаем, что (117.6) можно записать в таком виде:

$$2\,\delta\varepsilon_{ij} = (\delta\xi)_{i,\,j} + (\delta\xi)_{j,\,i}. \tag{117.7}$$

Если образовать внутреннее произведение вектора $(\delta\xi)$ с двумя членами уравнения равновесия

$$\tau^{ij}_{,\,j} = -\rho F^i, \tag{117.8}$$

где F^i — объемная сила, отнесенная к единице массы [см. (116.3)], и проинтегрировать его по объему τ, то получим

$$\int\limits_\tau \tau^{ij}_{,\,j}(\delta\xi)_i\,d\tau = -\int\limits_\tau \rho F^i(\delta\xi)_i\,d\tau. \tag{117.9}$$

Но $\tau^{ij}_{,\,j}(\delta\xi)_i = \left[\tau^{ij}(\delta\xi)_i\right]_{,\,j} - \tau^{ij}(\delta\xi)_{i,\,j}$, поэтому (117.9) можно будет записать в виде

$$\int\limits_\tau [\tau^{ij}(\delta\xi)_i]_{,\,j}\,d\tau - \int\limits_\tau \tau^{ij}(\delta\xi)_{i,\,j}\,d\tau = -\int\limits_\tau \rho F^i(\delta\xi)_i\,d\tau,$$

либо

$$\int\limits_\Sigma \tau^{ij}(\delta\xi)_i\,\nu_j\,d\sigma - \int\limits_\tau \tau^{ij}(\delta\xi)_{i,\,j}\,d\tau = -\int\limits_\tau \rho F^i(\delta\xi)_i\,d\tau,$$

где мы преобразовали интеграл по объему τ в интеграл по поверхности Σ, охватывающей τ.

Поскольку $\tau^{ij}\nu_j = T^i$ в силу (115.4), а

$$\tau^{ij}(\delta\xi)_{i,\,j} = \frac{1}{2}\tau^{ij}\left[(\delta\xi)_{i,\,j} + (\delta\xi)_{j,\,i}\right] = \tau^{ij}\,\delta\varepsilon_{ij}$$

на основании (117.7), то в конечном результате находим

$$\int\limits_\tau \tau^{ij}\,\delta\varepsilon_{ij}\,d\tau = \int\limits_\Sigma T^i(\delta\xi)_i\,d\sigma + \int\limits_\tau \rho F^i(\delta\xi)_i\,d\tau. \tag{117.10}$$

По определению интеграл по поверхности в (117.10) представляет *виртуальную работу*, выполняемую внешними поверхностными силами T^i в виртуальном перемещении $(\delta\xi)_i$. Интеграл же по объему в правой части уравнения (117.10), с другой стороны, представляет *виртуальную работу, выполненную* объемными силами F^i. Если обозначить работу, произведенную как объемными, так и поверхностными силами, суммой

$$\delta W = \int\limits_\Sigma T^i(\delta\xi)_i\,d\sigma + \int\limits_\tau \rho F^i(\delta\xi)_i\,d\tau, \tag{117.11}$$

то выражение (117.10) перепишется в кратком виде

$$\delta W = \int \tau^{ij}\,\delta\varepsilon_{ij}\,d\tau. \tag{117.12}$$

Если в только что приведенном вычислении вместо уравнений равновесия (117.8) исследовать динамические уравнения

$$\tau^{ij}_{\ .j} = \rho\,(a^i - F^i), \qquad [116.8]$$

то мы получили бы в левой части уравнения (117.10) добавочный член

$$\delta K \equiv \int\limits_\tau \rho a^i\,(\delta\xi)_i\,d\tau. \qquad (117.13)$$

Этот член получает простую механическую интерпретацию, как только виртуальные перемещения $(\delta\xi)_i$ превращаются в действительные актуальные перемещения $(d\xi)_i$, возникающие в теле, движение которого управляется уравнениями (116.8). В этом случае мы записываем (117.13) в виде

$$dK = \int\limits_\tau \rho a^i\,(d\xi)_i\,d\tau. \qquad (117.14)$$

Но скорость точки P в τ равна

$$v_i = \frac{(d\xi)_i}{dt},$$

и мы вправе поэтому переписать (117.14) в виде

$$dK = \int\limits_\tau \rho a^i v_i\,d\tau\,dt.$$

В прямоугольных декартовых координатах

$$a^i v_i = \frac{1}{2}\,\frac{d}{dt}\,(v^i v_i) = \frac{1}{2}\,\frac{d\,(v)^2}{dt}$$

и этот интеграл принимает вид

$$dK = \int\limits_\tau \frac{1}{2}\,d\,(v)^2\,(\rho\,d\tau).$$

Подынтегральное выражение в нем представляет приращение кинетической энергии элемента массы $dm = \rho\,dt$, приобретаемое им за интервал времени $(t, t + dt)$. Таким образом, dK представит приращение кинетической энергии $K = \int\limits_\tau \frac{1}{2}\rho v^2\,d\tau$. Соответственно для движения тела τ, подчиняющегося уравнениям (116.8), получаем важный результат

$$dK + dA = dW, \qquad (117.15)$$

где

$$dA = \int\limits_{\tau} \tau^{ij}\, d\varepsilon_{ij}\, d\tau \quad \text{и} \quad dW = \int\limits_{\Sigma} T^i (d\xi)_i\, d\sigma + \int\limits_{\tau} \rho F^i (d\xi)_i\, d\tau. \qquad (117.16)$$

В статическом случае $dK = 0$, а $dA = dW$.

Результаты, полученные в этом параграфе, в сочетании с некоторыми термодинамическими соображениями, образуют основу для построения теоретических моделей упругих тел, вязких жидкостей и других физических объектов.

§ 118. Законы термодинамики

Построение математических моделей различных типов сплошных сред базируется на концепции энергии, являющейся основным понятием механики и термодинамики. Мы заимствуем из механики понятия потенциальной и кинетической энергий, а из термодинамики несколько менее четко определенные понятия химической энергии, тепловой энергии, электрической энергии и т. д. Мы будем предполагать, что функции, определяющие различные виды энергий, зависят от некоторого числа параметров, некоторые из которых являются переменными (координаты положения, температура, плотности, тензоры деформации и т. п.), другие же — физическими или универсальными константами. Полная совокупность постоянных параметров c_j и переменных параметров q^i, избранных для того, чтобы описать заданную функцию, не обязательно должна быть единственной. Но какие бы частные системы параметров мы ни подбирали, мы всегда будем полагать, что $q^i (i = 1, \ldots$ $\ldots, n)$ взаимно независимы.

В некоторых особых ситуациях q^i могут быть определены, как функции скаляра t (обычно время) так, что их можно рассматривать как определяющие кривую

$$C\colon\ q^i = q^i(t),$$

характеризующую определенный процесс.

В предыдущем параграфе мы ввели понятие работы или *механической энергии* путем рассмотрения линейных форм типа

$$\delta W = Q_i(q^1, \ldots, q^n;\ c_1, \ldots, c_m)\,\delta q^i. \qquad (118.1)$$

Криволинейный интеграл $\int\limits_C Q_i\, dq^i$ представляет, таким образом, работу, произведенную на пути C обобщенными силами Q_i. Обычно такие интегралы зависят от пути C, ассоциируемого с заданным процессом.

Положим, что частица массы $dm = \rho\, d\tau$, где ρ — плотность, а $d\tau$ — элемент объема, способна приобретать энергии, кроме механической, еще и иные, отличающиеся от механической, и мы в состоянии представить эти приращения энергии таким выражением:

$$\delta E = F_i(q^1, \ldots, q^n;\ c_1, \ldots, c_m)\,\delta q^i. \tag{118.2}$$

Если δE включает *все* энергии, без учета механической, то полная сумма энергии, которой располагает частица, определяется интегралом

$$\int\limits_C (\delta W + dE) = \int\limits_C (F_i + Q_i)\,dq^i. \tag{118.3}$$

На основании принципа сохранения полной энергии заключаем, что интеграл (118.3) должен обратиться в нуль для произвольного замкнутого пути C, в связи с чем подынтегральное выражение $(F_i + Q_i)dq^i$ должно быть точным дифференциалом некоторой функции $\overline{U}(q^1, \ldots, q^n;\ c_1, \ldots, c_m)$, определенной с точностью до константы интегрирования. Мы назовем $\overline{U}$ *полной энергией на единицу массы* и определим *внутреннюю энергию* U на единицу массы формулой

$$U = \overline{U} - \frac{1}{2}v^2, \tag{118.4}$$

где v — скорость элемента массы dm. Величина $K \equiv \frac{1}{2}v^2$ представляет кинетическую энергию на единицу массы, так что полная энергия

$$\overline{U} = U + K.$$

Мы сможем, таким образом, сформулировать основной закон сохранения полной энергии в такой форме:

$$\delta K + \delta U = \delta W + \delta E, \tag{118.5}$$

где левая часть равенства (118.5) представляет собой сумму приращений кинетической энергии K и внутренней энергии U, приобретаемой единичной массой.

Если δE состоит лишь из тепловой энергии δQ, то мы пришли к формулировке п е р в о г о з а к о н а т е р м о д и н а м и к и

$$\delta K + \delta U = \delta W + \delta Q. \tag{118.6}$$

Тепловая энергия δQ, как разъясняется в трудах по термодинамике, может быть определена по измерениям температуры T. Эксперименты свидетельствуют, что тепло неизменно переходит из тел с более высокой температурой в тела с менее высокой температурой, причем этот переход тепла от одного тела к другому полностью определяется температурой T и, конечно, некоторыми физическими параметрами, зависящими от свойств состава тел. Эксперименты, далее, подтверждают, что невозможно построить машину, которая преобразовывала бы тепловую энергию в механическую из тела с меньшей температурой. Это является следствием второго закона термодинамики, гласящего, что для каждого обратимого термодинамического процесса существует функция S, называемая *энтропией*, подчиняющаяся условию

$$dS\,dm = \frac{\delta Q}{T}, \tag{118.7}$$

где T — абсолютная температура, а δQ — приращение тепла, приобретаемое элементом массы dm.

В тех случаях, когда среда находится в состоянии механического равновесия, кинетическая энергия K исчезает и закон (118.6) принимает форму

$$dU = \delta W + \delta Q. \tag{118.8}$$

Мы воспользуемся законами (118.7) и (118.8) в § 119 при построении механической модели упругого тела.

§ 119. Упругие среды

Некоторые тела обладают способностью восстанавливать свои первоначальные размеры и формы после того, как приложенные силы, произведшие деформацию, устранены и перестали действовать. Среды, из которых состоят подобные тела, называются *упругими*. Строя модель упругого тела, мы будем предполагать, что все процессы, имеющие место в таком теле, обратимы, не утверждая, однако, что рассматриваемое тело обязательно находится в состоянии теплового равновесия. Таким образом, наша термоупругая модель будет учитывать влияния температур на деформации.

Отправной точкой наших выкладок будет служить первый закон термодинамики в формулировке [см. (118.8)]

$$\delta U = \delta Q + \delta W, \tag{119.1}$$

где

$$\delta W = \int_\tau \tau^{ij}\,\delta e_{ij}\,d\tau \tag{119.2}$$

определяется интегралом (117.12).

Представим также соотношение (118.7) в виде

$$\delta Q = \int_m T\,\delta S\,dm$$

или

$$\delta Q = \int_\tau \rho T\,\delta S\,d\tau. \tag{119.3}$$

Если u обозначает внутреннюю энергию U на единицу массы тела, то

$$\delta U = \int_m \delta u \, dm = \int_\tau \rho \, \delta u \, d\tau, \tag{119.4}$$

где через δU обозначено приращение внутренней энергии, приобретенной областью τ.

Введение в (119.1) значений из (119.2), (119.3) и (119.4) дает

$$\int_\tau \rho \, \delta u \, d\tau = \int_\tau \rho T \, \delta S \, d\tau + \int_\tau \tau^{ij} \, \delta\varepsilon_{ij} \, d\tau. \tag{119.5}$$

Положим, что подынтегральные выражения в (119.5) представляют собой непрерывные функции, а поскольку равенство (119.5) сохраняет силу в произвольной подобласти τ, мы заключаем, что

$$\delta u = T \, \delta S + \frac{1}{\rho} \tau^{ij} \, \delta\varepsilon_{ij} \tag{119.6}$$

во всех точках τ.

Формула (119.6) подсказывает нам рассматривать u как функцию независимой переменной S и девяти независимых параметров ε_{ij}. Поскольку компоненты ε_{ij} тензора напряжений $E_0 = \varepsilon_{ij} \boldsymbol{a}^i \boldsymbol{a}^j$ зависят обычно от выбора координатной системы X, функция u может также содержать явно метрический тензор h_{ij} и координаты x^i. И, само собой разумеется, u должно зависеть от подбора параметров $\{c\}$, связанных с физическими свойствами среды. Таким путем мы приходим к тому, чтобы рассматривать u в виде функции

$$u = u(h_{ij}, \varepsilon_{ij}, S, \{c\}, x^i), \tag{119.7}$$

где аргументы и предполагаются независимыми. Соотношение (119,6) позволит нам утверждать, что

$$\frac{\partial u}{\partial \varepsilon_{ij}} = \frac{1}{\rho} \tau^{ij} \quad \text{и} \quad \frac{\partial u}{\partial S} = T.$$

Первое из этих отношений

$$\tau^{ij} = \rho \frac{\partial u}{\partial \varepsilon_{ij}} \tag{119.8}$$

связывает компоненты τ^{ij} тензора напряжений с компонентами ε_{ij} тензора деформации. Мы получаем, таким образом, систему *соотношений напряжение — деформация*, в которой плотность внутренней энергии u служит потенциальной функцией.

Можно построить и иную потенциальную функцию φ, если определить ее как *свободную энергию* соотношением

$$\varphi = u - TS. \tag{119.9}$$

Из (119.9) находим приращение $\delta\varphi$ функции φ:

$$\delta\varphi = \delta u - T\delta S - S\delta T$$

и введение сюда значения для δu из (119.6) дает

$$\delta\varphi = \frac{1}{\rho}\tau^{ij}\,\delta\varepsilon_{ij} - S\,\delta T. \tag{119.10}$$

Появление $\delta\varepsilon_{ij}$ и δT в правой части выражения (119.10) побуждает нас рассматривать T и ε_{ij} как независимые переменные, а свободную энергию φ как функцию следующих переменных [см. (119.7)]:

$$\varphi = (h_{ij},\ \varepsilon_{ij},\ T,\ \{c\},\ x^i). \tag{119.11}$$

Из (119.10) заключаем затем, что

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\varepsilon_{ij}} = \frac{1}{\rho}\tau^{ij}, \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial T} = -S,$$

так что соотношение деформация — напряжение принимает теперь вид

$$\tau^{ij} = \tau\frac{\partial\varphi}{\partial\varepsilon_{ij}}. \tag{119.12}$$

Таким образом, либо u, либо φ (если они существуют), могут быть использованы в выводе отношений между напряжениями и деформациями. Если процесс адиабатический, S — константа, и потому $\delta Q = 0$ в силу (119.3). В таком случае удобнее использовать u как потенциал напряжений. В изотермическом случае T — константа и φ представляется более пригодным.

Мы говорим, что упругая среда *однородна*, если координаты x^i не входят явно в (119.7) или (119.11). Среда *изотропна*, если все параметры в системе $\{c\}$ — скаляры, так что значения $\{c\}$ независимы от выбора системы отсчета X. Если среда одновременно и однородна и изотропна, то параметры $\{c\}$ имеют постоянные значения во всей среде.

Если в исследовании однородной упругой среды мы считаем, что $\varphi(\varepsilon_{ij}, T)$ — аналитическая функция ε_{ij} и $\Delta T \equiv T - T_0$, где T_0 — температура начального состояния, то мы сможем разложить функцию φ по степеням ε_{ij} и ΔT. Если начальное состояние отвечает условию $\varepsilon_{ij} = 0$ и $\tau_{ij} = 0$, разложение начнется с членов второго порядка и ряд примет вид

$$\varphi = c^{ijkl}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl} + k^{ij}\varepsilon_{ij}\,\Delta T + \varkappa(\Delta T)^2 + \ldots$$

Для малых деформаций членами порядка, превышающего второй, допустимо пренебречь, и с помощью (119.12) получить линейное соотношение напряжений — деформаций, учитывающее влияние температуры на тензор напряжений τ^{ij}. Выражение последнего приобретает при этом вид

$$\tau^{ij} = \rho_0[c^{ijkl}e_{kl} + k^{ij}(T - T_0)]. \tag{119.13}$$

Мы заменили здесь ρ на ρ_0, т. е. на плотность начального состояния, и ввели обозначение e_{kl} для линеаризованных компонентов ε_{kl}. Тензор c^{ijkl} характеризует упругие свойства среды, а k^{ij} связаны с коэффициентами термического расширения. Для данной среды тензоры c^{ijkl} и k^{ij} должны быть определены из экспериментов. В случае, если $T = T_0$, соотношение (119.13) приводится к знакомому обобщенному линейному закону упругости Гука[1]). В следующем параграфе мы выведем один частный случай соотношений напряжения — деформации для больших деформаций в однородной изотропной упругой среде и получим из него знакомый закон линейной теории упругости Гука.

§ 120. Соотношения напряжение — деформация в изотропных упругих средах

В тех случаях, когда ориентация координатных осей не имеет существенного значения, аргументы потенциала φ в (119.11) являются скалярами или тензорами, зависящими лишь от метрического тензора h_{ij}. В этих условиях скалярные инварианты тензоров h_{ij} и ε_{ij} можно рассматривать как функции инвариантов ϑ_i, определенных в § 111, и представить в виде

$$\varphi = \varphi(\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3, T, \{c\}, x^i).$$

Если среда одновременно однородна и изотропна, φ принимает вид

$$\varphi = \varphi(\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3, T, \{c\}), \tag{120.1}$$

где все параметры в $\{c\}$ — константы. Формулу

$$\tau^{ij} = \rho \frac{\partial\varphi}{\partial\varepsilon_{ij}} \qquad [119.12]$$

можно будет представить при этом в виде[2])

$$\tau^i_j = \rho\left(\delta^l_k - 2\varepsilon^l_k\right)\frac{\partial\varphi}{\partial\varepsilon^j_k}, \tag{120.2}$$

причем значение φ определяется из (120.1), $\tau^i_j = g_{\alpha j}\tau^{i\alpha}$, а $\varepsilon_{ij} = g_{i\alpha}\varepsilon^\alpha_j$.

---

[1]) См. Sokolnikoff I. S., Mathematical theory of elasticity, 1956, стр. 58—67, где показано, что число независимых *упругих коэффициентов* c^{ijkl} в самом общем случае анизотропии равно 21.

[2]) Заметим, что

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\varepsilon_{ij}} = \frac{\partial\varphi}{\partial\varepsilon^\alpha_\beta}\frac{\partial\varepsilon^\alpha_\beta}{\partial\varepsilon_{ij}} = \frac{1}{\rho}\tau^{ij}.$$

Поскольку

$$g_{\alpha\beta} = 2\varepsilon_{\alpha\beta} - h_{\alpha\beta}, \qquad \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial\varepsilon_{ij}} = \frac{2\,\partial\varepsilon_{\alpha\beta}}{\partial\varepsilon_{ij}} = 2\delta^i_\alpha\delta^j_\beta.$$

Вычисляем $\partial\varepsilon_{\alpha\beta}/\partial\varepsilon_{ij}$ из $\varepsilon_{\alpha\beta} = g_{\alpha\gamma}\varepsilon^\gamma_\beta$, используем полученный результат и за-

Если мы теперь предположим, что φ в (120.1) с $T=\text{const}$ можно будет разложить в степенной ряд по ϑ_i и рассмотреть случай отсутствия начальных напряжений, т. е. условия $\tau^i_j=0$ при $\varepsilon^i_j=0$, то такой ряд примет у нас следующий вид:

$$\rho_0\varphi = c_1\vartheta_1^2 + c_2\vartheta_2 + c_3\vartheta_1^3 + c_4\vartheta_1\vartheta_2 + c_5\vartheta_3 + \ldots \qquad (120.3)$$

Если в этом выражении мы сохраним лишь члены третьего порядка относительно ε^i_j, то обнаружим из (120.2), что выражение для напряжений τ^i_j в зависимости от деформаций ε^i_j будет содержать пять упругих коэффициентов c_i. Из принципа сохранения массы следует, что

$$\rho_0\, d\tau_0 = \rho\, d\tau,$$

а формулы (112.3) и (112.4) приводят к результату

$$\rho = \rho_0\sqrt{1-2\vartheta_1+4\vartheta_2-8\vartheta_3} \approx \rho_0\left(1-\vartheta_1-\frac{1}{2}\vartheta_1^2+2\vartheta_2\right),$$

если пренебречь членами третьего порядка относительно ε^i_j. Подстановка из этой формулы и (120.3) в (120.2) дает нижеследующее выражение для отношения между напряжением и деформацией, в котором мы ограничиваемся в деформациях членами порядка не выше второго

$$\tau^i_j = \left[2c_1\vartheta_1 + (3c_3-2c_1)\vartheta_1^2 + c_4\vartheta_2\right]\delta^i_j + \left[c_2+(c_4-c_2)\vartheta_1\right]\delta^{i\alpha}_{j\beta}\varepsilon^\beta_\alpha -$$
$$- 4c_1\vartheta_1\varepsilon^i_j + \frac{1}{2}c_5\delta^{i\beta\gamma}_{j\alpha\delta}\varepsilon^\alpha_\beta\varepsilon^\delta_\gamma - 2c_2\delta^{\beta\alpha}_{j\gamma}\varepsilon^\gamma_\alpha\varepsilon^i_\beta. \qquad (120.4)$$

Оно заключает в себе пять упругих констант. Если, однако, мы удержим в (120.4) лишь члены первого порядка относительно ε^i_j, то придем к линейному закону

$$\tau^i_j = (2c_1+c_2)\vartheta_1\delta^i_j - c_2\varepsilon^i_j. \qquad (120.5)$$

Мы отождествляем этот результат с *обобщенным законом Гука* для изотропных сред

$$\tau^i_j = \lambda\vartheta_1\delta^i_j + 2\mu\varepsilon^i_j, \qquad \vartheta_1 = e^i_i, \qquad (120.6)$$

ключаем, что

$$\delta^i_k - 2\varepsilon^i_k = g_{j\alpha}\frac{\partial\varepsilon^\alpha_k}{\partial\varepsilon_{ij}}.$$

Поставив этот результат в (а), получаем формулу (120.2).

где λ и μ — *константы Ламе*, связанные с *модулем Юнга* E и *коэффициентом Пуассона* σ отношениями

$$\lambda = \frac{E\sigma}{(1+\sigma)(1-2\sigma)}, \qquad \mu = \frac{E}{2(1+\sigma)}.$$

Мы видим, что

$$c_1 = \frac{1}{2}(\lambda + 2\mu), \qquad c_2 = -2\mu.$$

Если мы заменим c_1 и c_2 в (120.4) этими значениями и положим $c_3 = l$, $c_4 = m$, $c_5 = n$, мы сможем переписать это в виде

$$\tau^i_j = \left[\lambda\vartheta_1 + (3l + m - \lambda)\vartheta_1^2 + m\vartheta_2\right]\delta^i_j + \\ + \left[2\mu - (m + 2\lambda + 2\mu)\vartheta_1\right]\varepsilon^i_j - 4\mu\varepsilon^i_\alpha\varepsilon^\alpha_j + n\vartheta_3\varphi^i_j, \qquad (120.7)$$

где φ^i_j определяется формулой

$$\varphi^i_j \equiv \frac{1}{2\vartheta_3}\delta^{i\beta\gamma}_{j\alpha\delta}\varepsilon^\alpha_\beta\varepsilon^\delta_\gamma.$$

Новые упругие константы l, m и n, появляющиеся в (120.7), подлежат определению экспериментальным путем точно так же, как и константы Ламе λ и μ[1]).

Превосходное исследование модели термоупругой изотропной среды содержится на стр. 234—124 книги Л. И. Седова «Введение в механику сплошной среды», 1962.

§ 121. Уравнения упругости

Если соотношения напряжения — деформации (120.6) переписать в виде

$$\tau_{ij} = \lambda g_{ij}\vartheta + 2\mu\varepsilon_{ij}, \qquad (121.1)$$

где $\vartheta = g^{ij}e_{ij} \equiv e^i_i$, и использовать уравнения равновесия (116.3) в виде

$$g^{ik}\tau_{ij,k} + F_i = 0, \qquad (121.2)$$

[1]) Допущения различной степени достоверности относительно возможных соотношений между новыми константами (l, m, n) и старыми (λ, μ), предлагались различными авторами. Ф. Д. Мариэган достиг хорошего согласия с экспериментальными результатами (на твердых телах, подвергнутых высокому гидростатическому давлению), положив $l = m = n = 0$ в формулах (120). Обсуждение этого вопроса имеется в статье Ф. Д. Марнэгана «Сжимаемость твердых тел под высокими давлениями» (Murnaghan F. D., The compressibility of solids under extreme pressures, Th. v. Kármán Anniversary volume, 1941, стр. 112—136. См. также Риз П. М., Доклады АН СССР **20** (1938) и Риз П. М. и Зволынский Н. В., Журнал прикладной математики и механики АН СССР **2** (1939).

то мы сможем выразить линеаризованные дифференциальные уравнения равновесия в векторах смещения, вспомнив, что [см. (113.13)]

$$e_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}). \tag{121.3}$$

Вычисление производится в нижеследующем порядке. Подстановка из (121.1) в (121.2) дает

$$g^{jk}\left(\lambda g_{ij}\frac{\partial\vartheta}{\partial x^k} + 2\mu e_{ij,k}\right) + F_i = 0$$

или

$$\lambda\frac{\partial\vartheta}{\partial x^i} + 2\mu g^{jk}e_{ij,k} + F_i = 0. \tag{121.4}$$

Но на основании (121.3)

$$g^{jk}e_{ij,k} = \frac{1}{2}g^{jk}(u_{i,jk} + u_{j,ik}) = \frac{1}{2}g^{jk}u_{i,jk} + \frac{1}{2}\frac{\partial\vartheta}{\partial x^i},$$

так как $g^{jk}u_{j,ik} = u^k_{,ki}$ и $u^k_{,k} = \vartheta$. Таким образом, (121.4) преобразуется в

$$(\lambda + \mu)\frac{\partial\vartheta}{\partial x^i} + \mu g^{jk}u_{i,jk} + F_i = 0. \tag{121.5}$$

Если вспомнить обозначение (92.7)

$$g^{jk}u_{i,jk} = \nabla^2 u_i,$$

то получим

$$(\lambda + \mu)\frac{\partial\vartheta}{\partial x^i} + \mu\nabla^2 u_i + F_i = 0. \tag{121.6}$$

Это — знаменитые *уравнения Навье* в классической теории упругости.

Уравнения движения:

$$(\lambda + \mu)\frac{\partial\vartheta}{\partial x^i} + \mu\nabla^2 u_i + F_i = \rho a_i, \tag{121.7}$$

следуют непосредственно из (121.6) по принципу Даламбера.

Дифференциальные уравнения (121.6) и (121.7) для вектора перемещения u_i дают, как это можно показать, единственные решения при задании надлежащих граничных и начальных условий. Интересующихся читателей мы отсылаем к трактатам по математической теории упругости, в которых подобного рода задачи граничных значений обсуждаются детально[1]).

---

[1]) См., например, Sokolnikoff I. S., Mathematical theory of elasticity, Нью-Йорк, 1956, а также Love A. E. H., A treatise on the mathematical theory of elasticity, Кембридж, 1927.

§ 122. Гидромехаиика. Уравнеиия неразрывности

Вернемся теперь к формулировке уравнений, описывающих течение жидкостей и газов. С точки зрения механики жидкости представляют собой сплошные распределения материи, не способной выдерживать скалывающих напряжений в состоянии покоя. Из этого определения следует, что вектор напряжений T^i на элементе поверхности $d\sigma$ жидкости, находящейся в покое, нормален к этому элементу. В математических символах мы выражаем это формулой

$$T^i = -p\nu^i,$$

где ν^i — единичная нормаль к элементу поверхности, а $p(x^1, x^2, x^3, t)$ — инвариант, называемый *гидростатическим давлением*. Вообще давление p является функцией времени t, равно, как и координат x^i.

Так как вектор T^i может быть выражен в компонентах тензора напряжений τ^{ij} и $\nu^i = g^{ij}\nu_j$ мы видим, что

$$T^i = \tau^{ij}\nu_j = -pg^{ij}\nu_j.$$

Отсюда

$$\tau^{ij} = -pg^{ij}. \tag{122.1}$$

Из (122.1) следует, что гидростатическое давление p связано с инвариантом напряжения $\Theta = g_{ij}\tau^{ij}$ [см. (115.11)] формулой

$$p = -\frac{1}{3}g_{ij}\tau^{ij}. \tag{122.2}$$

Когда, однако, жидкость приводится в состояние движения, то в дополнение к нормальным напряжениям, в результате взаимодействия движущихся частиц, возникают новые косые напряжения. Например, если жидкость, находящаяся в покое, помещается между двумя большими параллельными пластинами и одна из этих пластин приводится в состояние движения в направлении, параллельном другой пластине (рис. 53), то частицы жидкости, сцепляющиеся с поверхностью движущейся пластины, передают свое количество движения частицам, заполняющим внутреннее пространство между пластинами. Таким путем жидкость между двумя пластинами приводится в состояние движения, и эксперименты показывают, что тормозящая сила на единицу площади пластины, производимая пла-

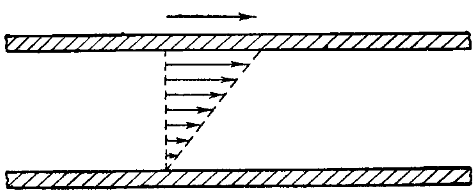

Рис. 53.

стиной на жидкость, пропорциональна ее скорости и обратнопропорциональна расстоянию между пластинами. Константа пропорциональности в этом соотношении является мерой *вязкости* жидкости.

Мы будем называть жидкость *вязкой*, если тензор напряжений для жидкости, находящейся в состоянии движения, имеет вид

$$\tau^{ij} = -pg^{ij} + t^{ij}, \tag{122.3}$$

где не обращающийся в нуль тензор t^{ij} является *тензором вязких напряжений*. Жидкость называется *идеальной*, если $t^{ij} \equiv 0$.

Принцип сохранения массы в механике требует, чтобы

$$dm = \rho_0\, d\tau_0 = \rho\, d\tau,$$

где $\rho_0(x, t_0)$ — плотность материи в элементе объема $d\tau_0 = \sqrt{h}\, dx^1\, dx^2\, dx^3$ в начальном состоянии, и $\rho(x, t)$ — плотность в элементарном объеме $d\tau = \sqrt{g}\, dx^1\, dx^2\, dx^3$ в момент времени t. В таком случае

$$\frac{\rho_0}{\rho} = \frac{d\tau}{d\tau_0} \tag{122.4}$$

— соотношение, которое можно представить также в виде

$$-\frac{\rho(x, t) - \rho(x, t_0)}{\rho(x, t)} = \frac{d\tau - d\tau_0}{d\tau_0}. \tag{122.5}$$

Числитель в левой части уравнения (122.5) $\Delta\rho \equiv \rho(x, t) - \rho(x, t_0)$ представляет изменение плотности в малом интервале времени $\Delta t = t - t_0$, правая же часть

$$\frac{d\tau - d\tau_0}{d\tau_0} \approx \vartheta_1^0 \tag{112.7}$$

— соответствующее малое изменение удельного объема. Так как $\vartheta_1^0 \approx \operatorname{div} \xi = u^i_{,i}$ (см. § 113), то мы можем преобразовать уравнение (122.5) в

$$-\frac{\Delta\rho}{\Delta t}\frac{1}{\rho} = \frac{u^i_{,i}}{\Delta t}, \tag{122.6}$$

поскольку же $u^i \approx v^i \Delta t$, где через v^i обозначены компоненты скорости $d\xi/dt$, то из (122.6) заключаем, что $-(1/\rho)(d\rho/dt) = v^i_{,i}$. Приходим, таким образом, к *уравнению неразрывности*

$$\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt} + v^i_{,i} = 0. \tag{122.7}$$

Напомним, что $\rho(x, t)$ — функция координат x^i в системе отсчета X, где x^i не зависят от t. Если Y — *фиксированная* система отсчета (см. § 109), в которой координаты y^i частицы заданы уравнениями

$$y^i = y^i(x^1,\ x^2,\ x^3,\ t),$$

тогда цепное правило дифференцирования даст для $\rho(y,\ t)$

$$\frac{d\rho}{dt} = \left(\frac{\partial\rho}{\partial t}\right)_{y^i} + \frac{\partial\rho}{\partial y^i}\, v^i.$$

Уравнение (122.7) примет при этом вид

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial\rho}{\partial y^i}\, v^i + \rho v^i_{,\,i} = 0$$

или

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + (\rho v^i)_{,\,i} = 0. \tag{122.8}$$

В этой формуле ковариантное дифференцирование производится по метрическому тензору в системе Y и $v^i = dy^i/dt$. Формула (122.8) приводится к частному случаю (122.7), если система Y движется вместе с частицей.

§ 123. Идеальные жидкости. Уравнения Эйлера

В этом параграфе мы выводим систему уравнений, описывающих поведение идеальных жидкостей. Вспомним из § 122, что в идеальной жидкости тензор напряжения принимает простой вид

$$\tau^{ij} = -\,pg^{ij}, \tag{123.1}$$

где скаляр p определяет давление.

Вводя (123.1) в общие динамические уравнения

$$\rho\left(a^i - F^i\right) = \tau^{ij}_{\ \ ,\,j}, \qquad [116.8]$$

получаем три *эйлеровых уравнения*

$$\rho\,(a^i - F^i) = -\,g^{ij}p_{,\,j} \tag{123.2}$$

или в векторной форме

$$\rho\,(\boldsymbol{a} - \boldsymbol{F}) = -\operatorname{grad} p.$$

Уравнения (123.2) заключают в себе пять неизвестных: плотность $\rho(x,\ t)$, давление $p(x,\ t)$ и три компонента скорости $v^i(x,\ t)$, поскольку $a^i = \delta v^i/\delta t$. Система трех уравнений (123.2) для определения пяти неизвестных является, таким образом, неполной, и для того чтобы система стала полной, нам необходимо ввести в нее два дополнительных независимых уравнения. Одно такое уравнение — это уравнение неразрывности

$$\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt} + v^i_{\ ,i} = 0, \tag{123.3}$$

выведенное в § 122. И последнее уравнение, известное как *уравнение состояния*, дается термодинамическими уравнениями (118.7) и (118.8), приводимыми нами здесь для обратимых процессов в жидкости в такой форме:

$$\frac{dQ}{T} = dS\,dm, \tag{123.4}$$

$$dU = dW + dQ. \tag{123.5}$$

Работ

$$dW = \frac{\tau^{ij}\,d\varepsilon_{ij}}{\rho}\,dm, \tag{123.6}$$

производимая внутренними напряжениями τ^{ij} на элементе массы $dm = \rho\,d\tau$, может быть представлена [см. (119.2)] выражением

$$dM = \frac{-pg^{ij}\,d\varepsilon_{ij}}{\rho\,dt}\,dt\,dm, \tag{123.7}$$

если учесть уравнения (123.1).

Положим, что компоненты ε_{ij} тензора деформации в жидкости столь малы, что их допустимо представить с достаточно высокой точностью линеаризованными формулами (113.9) или (113.10), совпадающими в инфинитезимальной теории. На этом основании получаем

$$2e_{ij} = w_{i,\,j} + w_{j,\,i}$$

и

$$2\,\frac{de_{ij}}{dt} = \frac{d}{dt}(w_{i,\,j} + w_{j,\,i}),$$

где e_{ij} — линеаризованные компоненты ε_{ij}. Так как компоненты скоростей $v_i = dw_i/dt$, заключаем из только что написанного уравнения, что

$$\frac{de_{ij}}{dt} = \frac{1}{2}(v_{i,\,j} + v_{j,\,i}). \tag{123.8}$$

Подстановка значения de_{ij}/dt из (123.8) в (123.7) приводит затем к

$$dW = -\frac{p}{\rho}\,v^i_{\ ,i}\,dt\,dm,$$

а поскольку $v^i_{\ ,i} = -(1/\rho)(d\rho/dt)$ в силу (123.3), находим

$$dW = \frac{p}{\rho^2}\frac{d\rho}{dt}\,dt\,dm = -pd\left(\frac{1}{\rho}\right)dm.$$

Внося этот результат в (123.5), определяем количество теплоты dQ, приобретаемое элементом массы dm:

$$dQ = dU + pd\left(\frac{1}{\rho}\right)dm. \tag{123.9}$$

С другой стороны, формула (123.4) констатирует, что

$$dQ = T\,dS\,dm. \tag{123.10}$$

Если изменение количества теплоты на единицу массы обозначить через dq так, что $dq = dQ/dm$, а изменение внутренней энергии U на единицу массы — через du, то формулы (123.9) и (123.10) примут вид

$$\left.\begin{aligned} dq &= du + pd\left(\frac{1}{\rho}\right), \\ dq &= T\,dS. \end{aligned}\right\} \tag{123.11}$$

В ряде проблем абсолютная температура T, плотность внутренней энергии u и энтропия S зависят, по-видимому, лишь от давления p и плотности ρ, так что[1])

$$T = T(p, \rho), \quad S = S(p, \rho), \quad U = U(p, \rho). \tag{123.12}$$

В таком случае из (123.11) следует, что T, S и U не являются независимыми величинами, поскольку уравнения (123.11) требуют, чтобы

$$T\,dS = du + pd\left(\frac{1}{\rho}\right). \tag{123.13}$$

Если T, S и u в (123.12) определены (либо экспериментально, либо теоретически), то дифференциальное уравнение (123.13), если оно интегрируемо, определяет p как некоторую функцию ρ:

$$p = f(\rho). \tag{123.14}$$

Уравнение (123.14) является искомым *уравнением состояния*, необходимым для замыкания системы четырех уравнений (123.2), (123.4) и определения таким путем пяти функций v^1, v^2, v^3, p и ρ.

§ 124. Вязкие жидкости. Уравнения Навье

Если вязкая жидкость находится в состоянии движения, то компоненты τ_{ij} тензора напряжений принимают вид

$$\tau^{ij} = -pg^{ij} + t^{ij}, \tag{124.1}$$

[1]) Эти функции могут зависеть (и обычно фактически зависят) от физических или химических констант, характеризующих свойства той или иной жидкости.

где величины t^{ij}, как это отмечено в § 122, связаны с вязкими напряжениями. Как и в § 123, ограничимся исследованием малых перемещений и запишем формулу (123.8) в виде

$$\dot{e}_{ij} = \frac{1}{2}(v_{i,j} + v_{j,i}), \tag{124.2}$$

где $\dot{e}_{ij} = de_{ij}/dt$ — компоненты *тензора скорости деформирования.*

Построение моделей вязких жидкостей и формулировка полных систем уравнений требуют теперь введения дополнительных допущений, относящихся к природе вязких напряжений. Последние должны, очевидно, зависеть от скорости деформирования $\dot{e}_{ij}$, и в приближении первого порядка естественно предположить, что

$$t^{ij} = c^{ijkl}\dot{e}_{kl}. \tag{124.3}$$

Коэффициенты c^{ijkl} являются *коэффициентами вязкости*, зависящими от свойств той или иной исследуемой жидкости. Линейный закон (124.3) совершенно аналогичен обобщенному закону Гука (119.14).

Если жидкость одновременно и однородна и изотропна, число независимых коэффициентов вязкости сокращается до двух, и отношение (124.3) принимает вид [см. (121.1)]

$$t^{ij} = \lambda v^k_{,k} g^{ij} + 2\mu e^{ij}, \tag{124.4}$$

где λ и μ — константы, а $v^k_{,k}$ — дивергенция поля скоростей. В соответствии с этим полный тензор напряжений, включающий влияние вязкости и гидростатического давления, может быть записан формулой

$$\tau_{ij} = -pg_{ij} + \lambda\dot{\vartheta}g_{ij} + 2\mu\dot{e}_{ij}, \tag{124.5}$$

где $\dot{\vartheta} = v^i_{,i} = g^{ij}\dot{e}_{ij}$.

Вспомним теперь уравнения движения (116.8) и запишем их в ковариантной форме

$$g^{jk}\tau_{ij,k} = \rho(a_i - F_i), \tag{124.6}$$

а затем произведем подстановку в (124.6) значения τ_{ij}, заимствованного из (124.5). Результатом[1]) этого будут *уравнения*

---

[1]) Заметим, что

$$a^i = \frac{\delta v^i}{\delta t} \frac{\partial v^i}{\partial t} + v^i_{,j}v^j,$$

так что $a_i = \dfrac{\partial v_i}{\partial t} + v_{i,j}v^j$.

течения жидкости Навье

$$(\lambda + \mu)\dot{\vartheta}_{,i} + \mu g^{jk} v_{i,jk} - p_{,i} = \rho(a_i - F_i) \qquad (124.7)$$

или в векторной форме

$$(\lambda + \mu)\nabla\dot{\vartheta} + \mu\nabla^2 \boldsymbol{v} - \nabla p = \rho(\boldsymbol{a} - \boldsymbol{F}).$$

В систему трех уравнений Навье (124.7) входит пять неизвестных: $v^i(x, t)$ $(i = 1, 2, 3)$, $p(x, t)$ и $\rho(x, t)$. Для того чтобы система получилась полной, присоединяем (как в случае идеальных жидкостей) уравнение состояния и уравнение неразрывности. Соответственно для несжимаемых жидкостей уравнение (124.7) дает

$$\mu g^{jk} v_{i,jk} - p_{,i} = \rho(a_i - F_i). \qquad (124.8)$$

Далее, если жидкость идеальна, $\mu = 0$ и уравнения (124.8) приводятся к уравнениям Эйлера (123.2).

Стокс упростил уравнения (124.7) путем введения гипотезы, согласно которой среднее давление p в вязкой жидкости выражается той же самой формулой (122.2), что и в случае жидкостей, находящихся в покое. Это допущение приводит к заключению, что постоянные λ и μ не зависимы. В самом деле, из (124.1) устанавливаем

$$t_{ij} = \tau_{ij} + p g_{ij},$$

откуда

$$g^{ij} t_{ij} = g^{ij}\tau_{ij} + p g^{ij} g_{ij} = -3p + 3p = 0,$$

если применить формулу (122.2). Но так как t_{ij} определяется через (124.4), то, умножив эти уравнения на g^{ij}, получим

$$\lambda g^{ij} g_{ij}\dot{\vartheta} + \mu 2 g^{ij}\dot{e}_{ij} = 0$$

или

$$(3\lambda + 2\mu)\dot{\vartheta} = 0.$$

Таким образом,

$$3\lambda + 2\mu = 0. \qquad (124.9)$$

В силу этого соотношения уравнения (124.7) оказываются зависящими лишь от одного коэффициента вязкости μ, а подстановка (124.9) в (124.7) дает систему *гидродинамических уравнений Навье — Стокса*

$$\mu g^{jk} v_{i,jk} + \frac{\mu}{3}\frac{\partial\dot{\vartheta}}{\partial x^i} - \frac{\partial p}{\partial x^i} = (a_i - F_i). \qquad (124.10)$$

Если жидкость идеальна, получаем, положив $\mu = 0$ и

$$a_i = \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_{i,j} v^j,$$

гидродинамические уравнения Эйлера

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} = F_i - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x^i} - v_{i,\,j}v^j \tag{124.11}$$

для идеальных сжимаемых жидкостей.

Если движение медленно, членом $v_{i,\,j}v^j$ можно пренебречь, и тогда $a^i = \partial v^i/\partial t$.

Задачи

1. Показать, что уравнение, характеризующее несжимаемую жидкость, может быть выражено следующим образом:

$$v^i_{,\,i} = \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial(\sqrt{g}\,v^i)}{\partial x^i} = 0, \quad \text{где} \quad g = |g_{ij}|.$$

2. Показать, что уравнениям Навье — Стокса можно придать вид

$$\frac{\partial v^i}{\partial t} = \nu g^{jk}\left[\frac{\partial^2 v^i}{\partial x^j\,\partial x^k} + \left\{ {i \atop lk} \right\}\frac{\partial v^l}{\partial x^j} + \left\{ {i \atop lj} \right\}\frac{\partial v^l}{\partial v^k} - \left\{ {l \atop jk} \right\}\frac{\partial v^i}{\partial x^l} + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{\partial \left\{ {i \atop lj} \right\}}{\partial x^k} + \left\{ {i \atop mk} \right\}\left\{ {m \atop lj} \right\} - \left\{ {i \atop lm} \right\}\left\{ {m \atop jk} \right\}\right) v^l\right] - \frac{1}{\rho} g^{ij}\frac{\partial p}{\partial x^j} -$$

$$- v^j\left(\frac{\partial v^i}{\partial x^j} + \left\{ {i \atop lj} \right\} v^l\right) + \frac{\nu}{3} g^{ij}\frac{\partial}{\partial x^j}\left(\frac{\partial v^k}{\partial x^k} + \left\{ {k \atop lk} \right\} v^l\right) + F^i,$$

где $\nu \equiv \mu/\rho$ — кинематическая вязкость.

3. Показать, что уравнение неразрывности допускает формулировку

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v^i)}{\partial x^i} + \rho v^i\frac{\partial \log\sqrt{g}}{\partial x^i} = 0.$$

Указание. Использовать выражение для $v^i_{,\,i}$ в задаче 1.

4. Показать, что уравнение неразрывности в цилиндрических координатах

$$[g_{11} = 1,\ g_{22} = (x^1)^2,\ g_{33} = 1]$$

формулируется следующим образом:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v^i)}{\partial x^i} + \rho\frac{v^1}{x^1} = 0,$$

а в сферических полярных координатах $[g_{11} = 1,\ g_{22} = (x^1)^2,\ g_{33} = (x^1)^2 \sin^2 x^2.]$ Таким образом,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v^i)}{\partial x^i} + \rho\left(\frac{2v^1}{x^1} + v^2 \operatorname{ctg} x^2\right) = 0.$$

5. Ротация поля скоростей $\mathbf{v}$ равна удвоенной угловой скорости ротации. Вектор $\boldsymbol{\omega}$ такой, что $\operatorname{rot} \mathbf{v} = 2\boldsymbol{\omega}$, называется *вектором вихря.* Показать, что $\omega^i_{,i} = 0$. *Указание.* $\omega^i = -\frac{1}{2} \varepsilon^{ijk} v_{j,k}$.

6. Если вектор вихря $\omega^i = 0$, движенне называется *безвихревым.* Показать, что еслн движение безвнхревое, то вектор скорости $\mathbf{v}$ является градиентом *потенциала скоростей* Φ.

7. Выписать приближенные уравнения медленного движения вязкой жидкости.

§ 125. Замечания о турбулентных течениях и диссипативных средах

Закончим наш краткий обзор основ механики сплошных сред несколькими замечаниями, относящимися к турбулентным течениям жидкостей и к построению моделей для сред, в которых процессы необратимы.

Течения жидкостей, в которых компоненты v^i скорости испытывают сложные пульсирующие изменения, называются *турбулентными.* Имея дело с турбулентными течениями жидкостей и газов, естественно представлять компоненты скорости в форме $v^i = \bar{v}^i + v'^i$, где $\bar{v}^i$ — среднее значение v^i за определенный период времени, а v'^i — пульсационный компонент v^i. Подобные же разложения на средние и пульсационные компоненты могут быть выполнены для давления p и для плотности ρ, так что $p = \bar{p} + p'$ и $\rho = \bar{\rho} + \rho'$. Развитие теории турбулентного течения решающим образом зависит от характера усредняющих процессов, используемых в вычислении $\bar{v}^i$, $\bar{p}$ и $\bar{\rho}$ и от формулировки отношений между этими средними величинами.

Если, например, предположить, что пульсационные компоненты v', p' и ρ' подчиняются уравнениям Навье — Стокса для несжимаемой жидкости, то некоторый процесс усреднения, примененный к уравнению Навье, приводит к системе уравнений, полученных Рейнольдсом[1]). Эти уравнения содержат не только $\bar{v}^i$, но также и средние значения пульсационных компонентов скорости. В связи с присутствием этих последних система уравнений Рейнольдса получается неполной, и для того чтобы ее сделать полной, необходимо ввести новые гипотезы, основанные на экспериментальных результатах.

Представляется маловероятным, чтобы в рамках классической механики и термодинамики можно было построить модель, одинаково пригодную для описания как турбулентных течений сжимаемых вязких жидкостей, так и течений вязко-упругих и

---

[1]) См., например, Schlichting H., Boundary layer theory, New York (имеется русский перевод: Шлихтинг Г., Теория пограничного слоя, «Наука», 1969) и Седов Л. И., Введенне в механику сплошной среды, Физматгиз, 1962, стр. 213—217.

пластических твердых тел. Разработка таких моделей должна, по-видимому, основываться на статистической механике, в которой механические характеристики рассматриваются как вероятностные, а их значения представляются как математические ожидания.

Исследование моделей пластических и вязкоупругих материалов, основанное на принципах термодинамики необратимых процессов, содержится в монографии Л. И. Седова, цитированной в примечании на стр. 732, а также в книге Cemal Eringen A., Nonlinear theory of continuous media, New York, 1962.

БИБЛИОГРАФИЯ

Appell P., Traité de méchanique rationelle, vol. 5, Paris 1926.

Eisenhart L. P., Riemannian geometry, Princeton 1926.

Levi-Civita T., The absolute differential calculus, London 1927.

Eddington A. S., The mathematical theory of relativity, Cambridge 1931 (имеется русский перевод: Эддингтон А. С., Теория относительности, Гостехтеоретиздат, Москва 1934).

Mc Connell A. J., Applications of the absolute differential calculus, London 1931 (имеется русский перевод: Мак-Коннел А. Дж., Введение в тензорный анализ с приложениями к геометрии, механике и физике, Физматгиз, Москва 1963).

Veblen O., Invariants of quadratic differential forms, Cambridge 1933 (имеется русский перевод: Веблен О., Инварианты дифференциальных квадратичных форм, Гостехиздат, Москва 1948).

Thomas T. Y., Differential invariants of generalized spaces, Cambridge 1934.

Lindsay R. B., Margenau H., Foundations of physics, New York 1936.

Brillouin L., Les tenseurs en mécanique et en élasticité, Paris 1938.

Weatherburn C. E.. Riemannian geometry and the tensor calculus, Cambridge 1938.

Eisenhart L. P., An introduction to differential geometry, Princeton 1940.

Bergman P. G., An introduction to the theory of relativity, New York 1942 (имеется русский перевод: Бергман П. Г., Введение в теорию относительности. С предисловием А. Эйнштейна, ИЛ, Москва 1947).

Michal A. D., Matrix and tensor calculus, New York 1947.

Synge J. L., Schild A., Tensor calculus, Toronto 1949.

Rainich G. Y., Mathematics of relativity, New York 1950.

Struik D. J., Lectures on classical differential geometry, Cambridge Mass 1950.

Murnaghan F. D., Finite deformation of an elastic solid, New York 1951.

Green A. E., Zerna W., Theoretical elasticity, Oxford 1954.

Sokolnikoff I. S., Mathematical theory of elasticity, New York 1956.

Synge J. L., Relativity. The special theory, Amsterdam 1956.

Synge J. L., Relativity. The general theory, Amsterdam 1960 (имеется русский перевод: Синг Дж., Общая теория относительности, ИЛ, Москва 1963).

Prager W., Introduction to mechanics of continua, Boston 1961 (имеется русский перевод: Прагер Б., Введение в механику сплошных сред, ИЛ, Москва 1963).

Eringen A. C., Nonlinear theory of continuous media, New York 1962.

Gerretsen J. C. H., Lectures on tensor calculus and differential geometry, Groningen 1962.

Седов Л. И., Введение в механику сплошной среды, Физматгиз, Москва 1962.

И. С. Сокольников

ТЕНЗОРНЫЙ АНАЛИЗ

Теория и применения в геометрии и в механике сплошных сред

(Серия: «Физико-математическая библиотека инженера»)

М., 1971 г., 376 стр. с илл.

Редактор *А. Г. Мордвинцев*

Техн. редактор *Л. А. Пыжова*

Корректор *Т. С. Вайсберг*

Сдано в набор 28/VII 1971 г. Подписано к печати 6/XII 1971 г. Бумага $60\times90^1/_{16}$. Физ. печ. л. 23,5. Условн. печ. л. 23,5. Уч.-изд. л. 21,49. Тираж 16 000 экз. Цена книги 1 р. 79 к. Заказ № 1200.

Издательство «Наука» главная редакция физико-математической литературы
117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

Ордена Трудового Красного Знамени Ленинградская типография № 2 имени Евгении Соколовой Главполиграфпрома Комитета по печати при Совете Министров СССР.
Измайловский проспект, 29.