Н. П. СОКОЛОВ

# ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ МАТРИЦЫ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1960

## АННОТАЦИЯ

Предлагаемая книга представляет собой монографию, посвященную теории многомерных матриц и детерминантов и ее различным приложениям. В ней обобщаются основные результаты обычного матричного исчисления на случай пространства трех и большего числа измерений и рассматриваются вопросы, еще мало освещенные в русской математической литературе. Основной текст сопровождается упражнениями, значительно расширяющими его содержание. Книга рассчитана на научных работников в области математики и ее приложений.

*Николай Петрович Соколов.*

Пространственные матрицы и их приложения.

Редактор *Л. Б. Нисневич.*

Техн. редактор *С. С. Гаврилов.* Корректор *З. В. Автонеева.*

Сдано в набор 9/III 1960 г. Подписано к печати 22/VIII 1960 г. Бумага $70\times108^1/_{16}$ Физ. печ. л. 18,75 Условн. печ. л. 25,69. Уч.-изд. л. 23,28. Тираж 6000 экз. Т-08911. Цена книги 13 р. 65 к. С 1/I 1961 г. цена 1 р. 37 к. Заказ № 137.

Государственное издательство физико-математической литературы.
Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

Московская типография № 5 Мосгорсовнархоза. Москва, Трехпрудный пер., 9.

# ОГЛАВЛЕНИЕ

# ПРЕДИСЛОВИЕ

Теории пространственных (многомерных) матриц и порождаемых ими детерминантов высших измерений не уделено должного внимания в русской математической литературе. В обширном трактате В. Ф. Кагана [18][1]) об основаниях теории определителей, изданном в 1922 г., лишь несколько страниц отведено понятию кубических детерминантов и их простейшим свойствам. Мимоходом также И. И. Сомовым [37] в мемуаре 1864 г. были сделаны замечания о возможности построения многомерных детерминантов. О матрицах же, число измерений которых больше двух, в имеющейся у нас литературе вовсе не упоминается. Между тем многомерные матрицы и детерминанты являются не формальным обобщением обычных матриц и детерминантов, а представляют мощный, весьма чувствительный аппарат для изучения алгебраических форм и связанных с ними геометрических образов. Многомерные детерминанты могут быть также очень полезны и для целого ряда других задач, в том числе и для теории моментов (случай многих переменных).

Восполнить, хотя бы частично, указанный выше весьма существенный пробел в нашей математической литературе и ознакомить широкие круги математиков с этой многообещающей теорией—такова цель предлагаемой книги. В ней наряду с изложением результатов уже известных приведены собственные исследования автора, частью опубликованные в виде журнальных статей, частью излагаемые здесь впервые.

Расположение материала в книге следующее.

Во введении дан краткий исторический очерк развития теории многомерных матриц и детерминантов и ее приложений.

В главе I излагаются основные понятия, необходимые для изучения $p$-мерных матриц и детерминантов, и указываются простейшие их свойства.

Глава II посвящена операциям над пространственными матрицами и их детерминантами.

В главе III изучаются инварианты пространственных матриц и ассоциированных с ними алгебраических форм, в том числе элементарные делители полиномиальных пространственных матриц (результаты автора по обобщению классической теории Вейерштрасса).

Глава IV содержит приложения теории пространственных матриц к классификации трилинейных, линейно-квадратичных и кубических двойничных форм. В качестве геометрической интерпретации полученных результатов проведены исследования трилинейных проективных соответствий (трех родов) между тремя системами точек на прямой.

В главе V даны проективная и аффинно-проективная классификации кубических тройничных форм и представляемых ими плоских линий третьего порядка с помощью инвариантов соответствующих пространственных матриц.

---

[1]) Здесь и в дальнейшем цифры в квадратных скобках указывают номер цитируемой работы в списке литературы.

Последняя глава VI посвящена применению теории элементарных делителей полиномиальных пространственных матриц к исследованию и классификации пучков кубических двойничных и тройничных форм и представляемых ими соответственно пучков трилинейных инволюций и пучков плоских линий третьего порядка.

В конце параграфов каждой главы даны упражнения, дополняющие содержание основного текста. В большинстве своем упражнения являются оригинальными, остальные отмечены указанием авторов, у которых они заимствованы. Для более трудных упражнений даны указания и ответы.

Содержание упомянутых выше шести глав устанавливает лишь основные вехи в развитии теории пространственных матриц и ее алгебраических и геометрических приложений. Теория эта в нынешнем своем состоянии еще далека от окончательного завершения, но даже то, что уже сделано в этой области, с достаточной убедительностью свидетельствует о мощности матричного метода исследования алгебраических форм и представляемых ими геометрических образов. С особенной яркостью это обнаружится в дальнейшем, когда предметом исследования явятся более сложные проблемы, чем те, которые рассмотрены в этой книге.

В заключение автор выражает искреннюю благодарность академику АН УССР Б. В. Гнеденко и доктору физико-математических наук профессору Г. Б. Гуревичу, ознакомившимся с книгой в рукописи и сделавшим ряд ценных замечаний.

*Н. П. Соколов*

# ВВЕДЕНИЕ

Понятие пространственной матрицы, т. е. матрицы трех и большего числа измерений, так же как и понятие обычной, двумерной матрицы, возникновением своим обязано координатному методу Декарта. Еще в 1771 г. Вандермонд [225], исследуя ходы коня при шахматной игре в пространстве трех измерений, ввел в употребление элементы с тремя индексами для указания расположения шахматных полей. Однако понятия кубических детерминантов, необходимого для развития теории кубических матриц, Вандермонд не дал. Такое понятие и даже более общее понятие $p$-мерных детерминантов $n$-го порядка впервые введено было Кэли в 1843 г. Рассматриваемые им в мемуаре [52] «*функции, приводимые к сумме детерминантов*»—не что иное, как детерминанты высших измерений. В этом кратком, но глубоком по содержанию мемуаре Кэли установил основные свойства $p$-мерных детерминантов, указав на необходимость различать случаи, когда число $p$ четное или нечетное. Однако мемуар Кэли, не совсем удачно озаглавленный, не привлек должного внимания современников и долго оставался незамеченным, вследствие чего приоритет нередко приписывали Гаспарису, который в 1861 г. под псевдонимом «Жан Блез Гранпа» издал брошюру [79], где независимо от Кэли дал определение «*детерминантов, элементы которых имеют $p$ индексов*» и на примерах указал их главнейшие свойства.

В 1863 г. Даландер, незнакомый с работами своих предшественников, опубликовал статью [67] о кубических детерминантах, называя их «*классом функций, обладающих свойствами, аналогичными свойствам детерминантов*».

В 1868 г. появились статьи Арменанта [42] и Падуа [183], касающиеся вопроса об умножении детерминантов и содержащие доказательства теорем, высказанных ранее Гаспарисом в его брошюре, но не доказанных им. Обе статьи дополняют друг друга и не являются свободными от ошибок. В том же году опубликована заметка Гаспариса [80] об инвариантности кубических детерминантов, а также работа Цейфуса [230], посвященная обобщению понятия обычного детерминанта на случай детерминантов высших измерений и связи их с теорией инвариантов алгебраических форм.

В 1877 г. Гарбиери [76] дал строгое доказательство основных свойств многомерных детерминантов. В другом его мемуаре [77] дано систематическое изложение результатов, полученных Гаспарисом, Арменантом и Падуа в области кубических детерминантов, с исправлением допущенных ими ошибок.

В 1878 г. Брааш [47], повторяя рассуждения Гарбиери и Цейфуса, резюмировал основные свойства детерминантов высших измерений и привел много примеров применения их к составлению инвариантов алгебраических форм.

В небольшой заметке 1878 г. Гаспарис [81] указал на возможность представления произведения двух кубических детерминантов в виде обычного детерминанта.

Работа Таннера [221] о многомерных детерминантах, опубликованная в 1879 г., не содержит указаний на исследования в этой области его предшественников и не отличается строгостью доказательств приведенных в ней теорем. В этой работе дан способ графического определения знака любого члена детерминанта.

Скотт, применив к многомерным детерминантам символический метод, изложил в мемуарах [211, 212] 1879—1881 гг. новые их свойства, рассматривая также кубические детерминанты, элементы которых составлены из обычных детерминантов. В мемуаре [213] 1882 г. рассмотрен детерминант нечетного числа $p$ измерений ($p > 3$) специального типа.

Появившееся в 1881 г. обширное исследование Зайончковского [229] о $p$-мерных детерминантах содержит краткую характеристику работ его предшественников с указанием их главнейших ошибок, упрощение доказательств многих теорем и обобщение разложения Лапласа.

Дэвис в заметке [68], опубликованной в 1882 г., исследовал вопрос о нахождении максимальных значений детерминантов чётного и нечетного числа измерений, элементы которых, предполагающиеся вещественными, заключаются между $-a$ и $+a$.

Эшерих, продолжая исследования Цейфуса, опубликовал в 1882 г. мемуар [73] о детерминантах высших измерений и применении их к составлению инвариантов системы алгебраических форм от одного или нескольких рядов переменных.

Много способствовали развитию теории многомерных детерминантов исследования Гегенбауера, несмотря на допущенные им грубые ошибки. В его мемуарах [84—92], публиковавшихся в изданиях Венской академии наук на протяжении 1882—1893 гг., содержатся обобщения многих теорем относительно обычных детерминантов, даются приложения многомерных детерминантов к теории инвариантов алгебраических форм и рассматриваются различные частные их виды.

В 1887 г. Шендель [208] в небольшой заметке о многомерных детерминантах указал правило составления произведения этих детерминантов с помощью особого символического обозначения.

В 1890 г. Сютс [219] обобщил на случай кубических детерминантов формулы, выведенные им ранее для обычного детерминанта одного частного вида, и в статье [220], опубликованной в 1895 г., распространил их на детерминанты $p$ измерений ($p > 3$).

В заметке Кемпбелла [51] 1892 г. о многомерных детерминантах рассмотрены также кососимметрические детерминанты и дано представление произведения $2\nu$ квадратных детерминантов в виде детерминанта $2\nu$ измерений, а также представление произведения этих детерминантов на квадратный перманент в виде детерминанта $2\nu + 1$ измерений.

В 1899 г. Гедрик [98] опубликовал работу, посвященную кубическим детерминантам, в которой элементарно изложены простейшие свойства этих детерминантов и даны приложения их к составлению инвариантов алгебраических форм.

Кацցанига в мемуаре [57], появившемся в 1900 г., изложил элементарную теорию кубических детерминантов бесконечного порядка. В том же году Гаврилович [82] распространил правило Сарруса на случай кубических детерминантов. В другой заметке [83] 1902 г. он указал элементарные свойства кубических детерминантов, относящиеся к изменению знака некоторых их элементов.

В 1902 г. Калегари [49] дал изложение некоторых уже известных свойств детерминантов высших измерений; другая его работа [50], опубликованная в 1904 г., посвящена разложению и умножению многомерных детерминантов бесконечного порядка.

В 1906 г. Стетсон [216], обобщая результаты, найденные им для обычных детерминантов, получил разложение кубического детерминанта одного частного вида и дал формулу, выражающую число членов этого разложения.

В 1910 г. Штернек [215] обобщил теорему Кронекера, связанную с композицией билинейных форм, на случай детерминантов высших измерений. В том же году опубликованы были лекции Лека [106] по теории многомерных детерминантов и в 1911 г. его же краткий очерк [113] этой теории, где, кроме собственных исследований Лека [107—112], даны в сжатом изложении все опубликованные до того времени работы его предшественников с исправлением допущенных ими ошибок. Статьи [114—125] 1912—1914 гг. посвящены детерминантам специальных типов.

В 1913 г. Феллини [75] применил кубические детерминанты к решению системы $n^2$ линейных уравнений с $n$ неизвестными и дал формулы для вычисления ее корней, аналогичные формулам Крамера в случае системы $n$ таких уравнений. Общий случай системы $n^{p-1}$ ($p \geqslant 3$) линейных уравнений с $n$ неизвестными был исследован автором [25], давшим решения ее при помощи детерминантов $p$ измерений. Им же в статье [34] рассмотрен случай несовместности этой системы и указаны формулы для приближенного вычисления ее корней.

Петерсен свою диссертацию [188], опубликованную в 1914 г., посвятила применению кубических детерминантов к исследованию приводимости двойничных и тройничных кубических форм и классификации их в комплексной области.

В 1918 г. Райс [192] обобщил понятие многомерных детерминантов, данное Кэли, введя так называемые смешанные детерминанты, и в последующих работах [193—201, 203] изложил их главнейшие свойства. Смешанные детерминанты детально были изучены Лека, рассмотревшим детерминанты самой разнообразной структуры. Результаты его исследований опубликованы в статьях [126—150, 152—161, 164].

Пуччио в брошюре [191], изданной в 1923 г., рассматривал приложения кубических детерминантов к составлению инвариантов алгебраических форм нескольких переменных.

В 1925 г. Хичкоком [101] было введено понятие упорядоченных многомерных детерминантов, элементы которых не обладают коммутативным свойством. Эти детерминанты были использованы им в работах [102, 105], посвященных изучению полиадических полиномов.

Большая заслуга в систематизации накопившегося материала по теории многомерных детерминантов принадлежит Лека. Им опубликована в 1924 г. полная библиография [151] по детерминантам высших измерений, доведенная до 1923 г. и продолженная в обзоре [162] теории этих детерминантов до 1927 г. Появившаяся в 1929 г. другая его обзорная работа [163] содержит краткое изложение приложений многомерных детерминантов к теории алгебраических форм и охватывает период с 1843 по 1923 г.

Установившаяся и общепринятая в настоящее время терминология и символика в теории детерминантов высших измерений представлена в работе Райса [204], опубликованной в 1930 г., и в более поздней работе (1940 г.) Ольденбургера [182].

Наглядное обоснование теории кубических детерминантов (по существу, без теории подстановок) дано автором в статье [33]. Там же приведено доказательство теоремы, обобщающей известный признак С. Л. Соболева обращения в нуль обычного детерминанта на случай многомерных детерминантов.

С развитием теории детерминантов возникают новые понятия в области пространственных матриц, обобщающие соответственные понятия для двумерных матриц.

Хичкок [103, 104] в 1927 г. ввел понятие рангов различных измерений для пространственной матрицы и отметил их инвариантные свойства.

Райс [202] в 1928 г. обобщил элементарные преобразования двумерной матрицы для пространственной и установил связь между ее рангами.

В 1933—1934 гг. Г. Б. Гуревич [7, 8] дал два новых арифметических инварианта кососимметрической и симметрической кубических матриц и указал на связь их (в виде неравенств) с известным арифметическим инвариантом — рангом кубической матрицы. Более общий характер имеют дальнейшие его работы [9, 10] и, особенно, работы [11—16] 1944—1952 гг.

В 1954 г. автором [28] была указана полная система инвариантов симметрической кубической матрицы 3-го порядка над полем вещественных чисел.

Введение арифметических инвариантов пространственных матриц и применение матричных операций, упрощающих вычисления, значительно продвинули исследования в теории алгебраических форм. В 1932 г. Ольденбургер [169] установил классификацию двойничных трилинейных форм в комплексной области, пользуясь теорией пар билинейных форм и инвариантными свойствами кубической матрицы. В статье [173] 1936 г. эта классификация проведена только при помощи арифметических инвариантов и распространена на двойничные кубические формы. Работы [174, 175] 1937 г. посвящены вопросу об эквивалентности двойничных трилинейных форм в вещественной области. В то же время Ольденбургер, продолжая исследования Хичкока и Райса, опубликовал целый ряд работ [170—172, 176—181] о пространственных матрицах и ассоциированных с ними алгебраических формах, распространив многие результаты инвариантной теории двумерных матриц на матрицы $p$ измерений ($p \geqq 3$).

В 1939 г. автором [26] были получены канонические виды двойничных трилинейных форм в комплексной и вещественной областях путем элементарных преобразований соответствующих кубических матриц и указаны невырожденные линейные преобразования, с помощью которых формы приводятся к каноническим видам как в комплексной, так и в вещественной областях. В статьях [27, 29, 30], опубликованных в 1954—1955 гг., в зависимости от полной системы инвариантов симметрической кубической матрицы 3-го порядка над полем вещественных чисел дана проективная классификация кубических тройничных форм в вещественной области и — в качестве ее геометрической интерпретации — проективная классификация вещественных плоских линий 3-го порядка. Аффинно-проективная классификация этих форм и соответствующих им линий изложена в статьях [31, 35]. В работе [32], опубликованной в 1955 г., автор, обобщая известную теорию элементарных делителей двумерных λ-матриц на полиномиальные кубические матрицы, распространил полученные им ранее результаты применения пространственных матриц к исследованию вещественных кубических тройничных форм на случай пар и ассоциированных с ними пучков этих форм и дал проективную классификацию пучков вещественных плоских линий 3-го порядка в случае, когда характеристика соответствующей полиномиальной кубической матрицы наивысшая. В работе [36] 1957 г. тем же путем проведена полная классификация пучков кубических двойничных форм в вещественной области с соответствующей геометрической интерпретацией.

ГЛАВА I

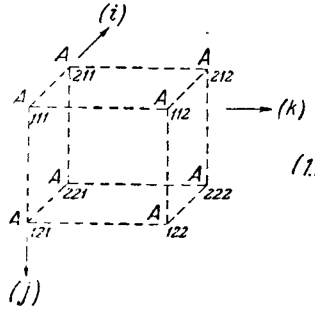
# СТРУКТУРА ПРОСТРАНСТВЕННОЙ МАТРИЦЫ И ЕЕ ДЕТЕРМИНАНТОВ

## § 1. Определения

1. Пусть дано некоторое числовое поле $P$. Как известно, всякая система из $n^2$ элементов $A_{ij}$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$ поля $P$, расположенных в точках плоскости с декартовыми прямоугольными координатами $i$, $j$, называется *двумерной* (*квадратной*) *матрицей n-го порядка на полем P*.

Подобно этому любая система из $n^3$ элементов $A_{ijk}$ $(i, j, k = 1, 2, \ldots, n)$ поля $P$, расположенных в точках трехмерного пространства, определяемых координатами $i$, $j$, $k$, называется *трехмерной* (*кубической*) *матрицей n-го порядка над P*.

Так, например, система $2^3$ элементов $A_{ijk}$ $(i, j, k = 1, 2)$, расположенных в виде куба (рис. 1), представляет кубическую матрицу 2-го порядка.




$(1.1)$

Рис. 1.

Кубическую матрицу $n$-го порядка с общим элементом $A_{ijk}$ будем обозначать сокращенно символом

$$\| A_{ijk} \| \qquad (i, j, k = 1, 2, \ldots, n), \qquad (1.2)$$

а в тех случаях, когда это не вызывает недоразумений, просто через $A$ [1]).

Вообще, любая система из $n^p$ элементов $A_{i_1 i_2 \ldots i_p}$ $(i_1, i_2, \ldots, i_p = 1, 2, \ldots, n)$ поля $P$, расположенных в точках $p$-мерного пространства, определяемых координатами $i_1, i_2, \ldots, i_p$, образует *p-мерную матрицу n-го порядка над P*

$$A = \| A_{i_1 i_2 \ldots i_p} \| \qquad (i_1, i_2, \ldots, i_p = 1, 2, \ldots, n). \qquad (1.3)$$

Такую матрицу в дальнейшем будем называть *пространственной*, если число измерений ее $p$ можно предполагать каким угодно целым, бо́льшим двух.

2. Совокупность элементов матрицы (1.2) с фиксированным значением индекса $i$ называется *сечением ориентации* $(i)$ [2]). Все $n$ сечений ориентации $(i)$ в матрице (1.2) параллельны друг другу и являются обычными, двумерными матрицами $n$-го порядка

$$\| A_{1jk} \|, \quad \| A_{2jk} \|, \ldots, \quad \| A_{njk} \| \qquad (j, k = 1, 2, \ldots, n).$$

---

[1]) Если индексы $i, j, k$ принимают соответственно значения

$$1, 2, \ldots, l,$$
$$1, 2, \ldots, m,$$
$$1, 2, \ldots, n$$

при $l$, $m$, $n$ различных между собой, то трехмерная матрица, состоящая из $lmn$ элементов, представляется в виде прямоугольного параллелепипеда.

[2]) См. [162], т. 45, стр. 6.

Аналогично определяются сечения ориентаций $(j)$ и $(k)$.

Совокупность элементов матрицы (1.2) с фиксированными значениями индексов $j$, $k$ называется *сечением* (*двукратным*) *ориентации* $(jk)$ *или строкой направления* $(i)$ [1]). Все $n^2$ строк этого направления параллельны друг другу и являются одномерными матрицами $n$-го порядка

$$\| A_{1\bar{j}\bar{k}},\ A_{2\bar{j}\bar{k}},\ \ldots,\ A_{n\bar{j}\bar{k}} \|,$$

где $\bar{j}$, $\bar{k}$ — фиксированные значения индексов $j$, $k$. Аналогично определяются строки направлений $(j)$ и $(k)$.

В кубической матрице $n$-го порядка два сечения различных ориентаций имеют $n$ общих элементов, расположенных в одной строке, тогда как три сечения различных ориентаций имеют только один общий элемент. Каждое сечение любой ориентации и каждая строка перпендикулярного к этому сечению направления имеют один и только один общий элемент. *Соответственными* элементами двух параллельных сечений называются элементы, принадлежащие одной и той же строке, перпендикулярной к этим сечениям. *Соответственными* элементами двух параллельных строк называются элементы, принадлежащие одному и тому же сечению, перпендикулярному к этим строкам.

Все эти понятия, относящиеся к кубической матрице, легко распространить на пространственную матрицу любого числа измерений.

Так, в пространственной матрице (1.3) совокупность элементов с фиксированным значением $\bar{i}_\alpha$ индекса $i_\alpha$, где $\alpha$ — любое из чисел $1, 2, \ldots, p$, образует *сечение* (*простое*) *ориентации* $(i_\alpha)$, являющееся $(p-1)$-мерной матрицей $n$-го порядка

$$\| A_{i_1 \ldots i_{\alpha-1}\bar{i}_\alpha i_{\alpha+1} \ldots i_p} \| \qquad (i_1, \ldots, i_{\alpha-1}, i_{\alpha+1}, \ldots, i_p = 1, 2, \ldots, n).$$

Совокупность элементов с фиксированными значениями $\bar{i}_\alpha$ и $\bar{i}_\beta$ индексов $i_\alpha$ и $i_\beta$, где $\alpha<\beta$ — любые из чисел $1, 2, \ldots, p$, образует *сечение* (*двукратное*) *ориентации* $(i_\alpha i_\beta)$, являющееся $(p-2)$-мерной матрицей $n$-го порядка

$$\| A_{i_1 \ldots i_{\alpha-1}\bar{i}_\alpha i_{\alpha+1} \ldots i_{\beta-1}\bar{i}_\beta i_{\beta+1} \ldots i_p} \|$$

$$(i_1, \ldots, i_{\alpha-1}, i_{\alpha+1}, \ldots i_{\beta-1}, i_{\beta+1} \ldots, i_p = 1, 2, \ldots, n)$$

и представляющее совокупность элементов, общих двум $(p-1)$-мерным сечениям ориентаций $(i_\alpha)$ и $(i_\beta)$

$$\| A_{i_1 \ldots i_{\alpha-1}\bar{i}_\alpha i_{\alpha+1} \ldots i_p} \| \qquad (i_1, \ldots, i_{\alpha-1}, i_{\alpha+1}, \ldots, i_p = 1, 2, \ldots, n),$$

$$\| A_{i_1 \ldots i_{\beta-1}\bar{i}_\beta i_{\beta+1} \ldots i_p} \| \qquad (i_1, \ldots, i_{\beta-1}, i_{\beta+1}, \ldots, i_p = 1, 2, \ldots, n).$$

Вообще, совокупность элементов с фиксированными значениями $\bar{i}_{\alpha_1}, \bar{i}_{\alpha_2}, \ldots, \bar{i}_{\alpha_m}$ индексов $i_{\alpha_1}, i_{\alpha_2}, \ldots, i_{\alpha_m}$, где $1 \leq m \leq p-1$, а $\alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_m$ — любые из чисел $1, 2, \ldots, p$, образует *сечение* (*$m$-кратное*) *ориентации* $(i_{\alpha_1} i_{\alpha_2} \ldots i_{\alpha_m})$, являющееся $(p-m)$-мерной матрицей $n$-го порядка и представляющее совокупность элементов, общих $m$ сечениям ориентаций $(i_{\alpha_1})$, $(i_{\alpha_2}), \ldots, (i_{\alpha_m})$; при $m=p-1$ имеем сечение ($(p-1)$-кратное) ориентации $(i_{\alpha_1} i_{\alpha_2} \ldots i_{\alpha_{p-1}})$, которое является одномерной матрицей $n$-го порядка, состоящей из элементов, общих $p-1$ сечениям ориентаций $(i_{\alpha_1})$, $(i_{\alpha_2}), \ldots, (i_{\alpha_{p-1}})$, и которое поэтому называется также *строкой направления* $(i_{\alpha_p})$.

[1]) См. [162], т. 45, стр. 6.

В обычной двумерной матрице $\| A_{ij} \|$ строки и столбцы можно рассматривать как сечения ориентаций $(i)$ и $(j)$ или как строки направлений $(j)$ и $(i)$. Пусть

$$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\alpha_m,\ \beta_1,\ \beta_2,\ \ldots,\beta_{p-m}$$

— некоторая перестановка из чисел $1, 2, \ldots, p$. Называя тогда ориентации $(i_{\alpha_1} i_{\alpha_2} \ldots i_{\alpha_m})$ и $(i_{\beta_1} i_{\beta_2} \ldots i_{\beta_{p-m}})$ $m$-кратного и $(p-m)$-кратного сечений матрицы (1.3) *противоположными*, будем подразумевать под *соответственными* элементами двух $m$-кратных сечений одной и той же ориентации $(i_{\alpha_1} i_{\alpha_2} \ldots i_{\alpha_m})$ те элементы, которые принадлежат одному и тому же $(p-m)$-кратному сечению противоположной ориентации $(i_{\beta_1} i_{\beta_2} \ldots i_{\beta_{p-m}})$. В частности, соответственными элементами двух сечений ориентации $(i_\alpha)$, где $\alpha$ — любое из чисел $1, 2, \ldots, p$, будут элементы, принадлежащие одной и той же строке направления $(i_\alpha)$, а соответственными элементами двух строк направления $(i_\alpha)$ будут элементы, принадлежащие одному и тому же сечению ориентации $(i_\alpha)$.

Два сечения (простые или кратные) одной и той же ориентации называются *пропорциональными*, если элементы одного из них отличаются от соответственных элементов другого одним и тем же множителем, и *тождественными*, если соответственные элементы их равны.

Пользуясь двумерными сечениями, можно записать пространственную матрицу в виде квадратной или прямоугольной таблицы в зависимости от того, будет ли число измерений матрицы четным или нечетным; двумерные сечения при этом отделяются друг от друга вертикальной или горизонтальной чертой. Так, например, кубическая матрица 2-го порядка (1.1) с помощью сечений ориентации $(i)$ может быть записана в виде прямоугольника

$$\left\| \begin{array}{cc|cc} A_{111} & A_{112} & A_{211} & A_{212} \\ A_{121} & A_{122} & A_{221} & A_{222} \end{array} \right\| \quad \begin{array}{l} \longrightarrow (i) \\ \ulcorner\!\!\rightarrow (k) \\ \downarrow \\ (j) \end{array}, \tag{1.1'}$$

а матрица (1.3) при $p=4$ и $n=2$ с помощью сечений ориентации $(i_1 i_2)$ — в виде квадрата

$$\left\| \begin{array}{cc|cc} A_{1111} & A_{1112} & A_{1211} & A_{1212} \\ A_{1121} & A_{1122} & A_{1221} & A_{1222} \\ \hline A_{2111} & A_{2112} & A_{2211} & A_{2212} \\ A_{2121} & A_{2122} & A_{2221} & A_{2222} \end{array} \right\| \quad \begin{array}{l} \ulcorner\!\!\longrightarrow (i_2) \\ \ulcorner\!\!\rightarrow (i_4) \\ \downarrow\ (i_3) \\ \downarrow\ (i_1) \end{array}. \tag{1.4}$$

Стрелки указывают направление, в котором возрастают соответствующие индексы.

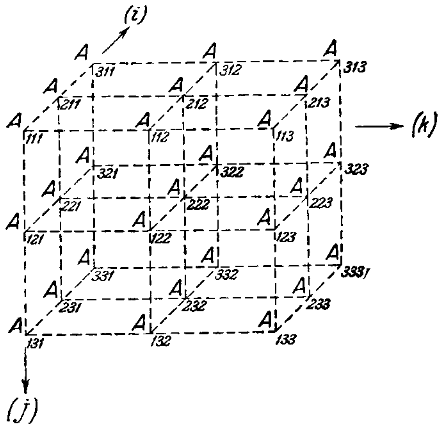
3. Элементы пространственной матрицы $A$, взятые в количестве, не превышающем ее порядка $n$, называются, согласно терминологии Сютса [219], *трансверсальными*, если ни одна пара их не принадлежит одному и тому же сечению (простому) какой-либо ориентации. Совокупность $n$ трансверсальных элементов матрицы $A$, представленная в виде одномерной матрицы $n$-го порядка, образует *трансверсаль*. Так, например, в кубической матрице 3-го порядка (рис. 2) совокупность элементов $A_{112}$, $A_{231}$, $A_{323}$ образует одну из ее трансверсалей, число которых равно $(3!)^2$. В кубической матрице $n$-го порядка насчитывается $(n!)^2$ трансверсалей. Число трансверсалей $p$-мерной матрицы $n$-го порядка равно $(n!)^{p-1}$. Среди них находятся $2^{p-1}$ *диагоналей*, образованных элементами, которые расположены на прямых, соединяющих противоположные

вершины матрицы. Та из диагоналей, у которой в каждом элементе значения всех индексов одинаковы, называется *главной*, а ее первый элемент $A_{11\ldots 1}$ — *главным*. Остальные диагонали называются *побочными*. В матрице (1.5) имеем четыре диагонали

$$A_{111},\ A_{222},\ A_{333}; \qquad A_{113},\ A_{222},\ A_{331}; \qquad A_{131},\ A_{222},\ A_{313}; \qquad A_{133},\ A_{222},\ A_{311}.$$

Из них первая есть главная диагональ с главным элементом $A_{111}$.

4. Обобщением понятия трансверсали пространственной матрицы $n$-го порядка $A$ является понятие *трансверсального сечения.*




(1.5)

Рис. 2.

Будем называть строки данного направления в матрице $A$, взятые в количестве, не превышающем ее порядка $n$, *трансверсальными*, если ни одна пара их не принадлежит одному и тому же сечению (простому) какой-либо ориентации. Совокупность $n$ трансверсальных строк какого-либо направления, представленная в виде двумерной матрицы $n$-го порядка, будет *двумерным трансверсальным сечением, соответствующим этому направлению*. Так, например, в кубической матрице 3-го порядка (1.5) имеем двумерные трансверсальные сечения, образуемые трансверсальными строками:

$$\left.\begin{matrix} A_{111} & A_{211} & A_{311} \\ A_{123} & A_{223} & A_{323} \\ A_{132} & A_{232} & A_{332} \end{matrix}\right\} \text{ направления } (i),$$

$$\left.\begin{matrix} A_{111} & A_{121} & A_{131} \\ A_{213} & A_{223} & A_{233} \\ A_{312} & A_{322} & A_{332} \end{matrix}\right\} \text{ направления } (j),$$

$$\left.\begin{matrix} A_{111} & A_{112} & A_{113} \\ A_{231} & A_{232} & A_{233} \\ A_{321} & A_{322} & A_{323} \end{matrix}\right\} \text{ направления } (k).$$

Всех таких сечений, соответствующих одному какому-либо из направлений $(i)$, $(j)$, $(k)$, в матрице (1.5) будет $3!$

В кубической матрице $n$-го порядка число двумерных трансверсальных сечений, соответствующих данному направлению, равно $n!$

Среди них находятся два *диагональных сечения*. То из диагональных сечений, которое состоит из элементов с одинаковыми значениями двух определенных индексов, называется *главным*, а другое—*побочным*. Так, в матрице

(1.5) имеем два двумерных диагональных сечения, соответствующих направлению $(i)$:

$$\left\|\begin{matrix} A_{111} & A_{211} & A_{311} \\ A_{122} & A_{222} & A_{322} \\ A_{133} & A_{233} & A_{333}\end{matrix}\right\| \text{— главное,} \qquad \left\|\begin{matrix} A_{113} & A_{213} & A_{313} \\ A_{122} & A_{222} & A_{322} \\ A_{131} & A_{231} & A_{331}\end{matrix}\right\| \text{— побочное.}$$

В $p$-мерной матрице $n$-го порядка (1.3) число двумерных трансверсальных сечений, соответствующих направлению $(i_\alpha)$, очевидно, равно $(n!)^{p-2}$. Среди них находятся $2^{p-2}$ двумерных диагональных сечений. Одно из них, *главное*, состоит из элементов с одинаковыми значениями $p-1$ индексов $i_1, \ldots, i_{\alpha-1}, i_{\alpha+1}, \ldots, i_p$. Остальные диагональные сечения—*побочные*. При $p>3$, кроме двумерных трансверсальных сечений, имеются также трансверсальные сечения высших измерений. Будем называть $m$-кратные $(2 \leq m \leq p-1)$ сечения данной ориентации $(i_{\alpha_1} i_{\alpha_2} \ldots i_{\alpha_m})$, взятые в количестве, не превышающем $n$, *трансверсальными*, если ни одна пара их не принадлежит одному и тому же сечению (простому) какой-либо ориентации. Совокупность $n$ трансверсальных сечений ориентации $(i_{\alpha_1} i_{\alpha_2} \ldots i_{\alpha_m})$, являющихся $(p-m)$-мерными матрицами $n$-го порядка, может быть представлена в виде $(p-m+1)$-мерной матрицы того же порядка, которая и будет *трансверсальным сечением $p-m+1$ измерений, соответствующим ориентации* $(i_{\alpha_1} i_{\alpha_2} \ldots i_{\alpha_m})$. Число такого рода сечений равно $(n!)^{m-1}$. Среди них находятся $2^{m-1}$ *диагональных сечений $p-m+1$ измерений*. То из них, которое состоит из элементов с одинаковыми значениями индексов $i_{\alpha_1}, i_{\alpha_2}, \ldots i_{\alpha_m}$, называется *главным*, а остальные—*побочными*. Так, в четырехмерной матрице 2-го порядка (1.4) имеем два трехмерных трансверсальных сечения, соответствующих ориентации $(i_1 i_2)$:

$$\left\|\begin{matrix} A_{1111} & A_{1112} \\ A_{1121} & A_{1122}\end{matrix}\middle|\begin{matrix} A_{2211} & A_{2212} \\ A_{2221} & A_{2222}\end{matrix}\right\|, \qquad \left\|\begin{matrix} A_{2111} & A_{2112} \\ A_{2121} & A_{2122}\end{matrix}\middle|\begin{matrix} A_{1211} & A_{1212} \\ A_{1221} & A_{1222}\end{matrix}\right\|.$$

Первое из них является также главным, а второе—побочным трехмерным диагональным сечением, соответствующим той же ориентации $(i_1 i_2)$.

5. Пространственная матрица, у которой все элементы, расположенные вне главной диагонали, равны нулю, называется *диагональной*, если среди элементов главной диагонали имеются отличные от нуля, и *нулевой*—в противном случае, когда все элементы матрицы—нули. Нулевую матрицу в дальнейшем будем обозначать через $O$.

6. Пространственная матрица называется *симметрической относительно двух индексов*, если каждые два элемента ее, получающиеся один из другого перестановкой этих индексов, одинаковы. Так, кубическая матрица (1.2) будет симметрической относительно последних двух индексов $j$, $k$, если

$$A_{ijk} = A_{ikj}.$$

Одинаковые элементы такой матрицы симметрично расположены по отношению к главному диагональному сечению, соответствующему направлению $(i)$. Кубическая матрица 2-го порядка, симметрическая относительно индексов $j$, $k$, имеет вид

$$\left\|\begin{matrix} A_{111} & A_{112} \\ A_{112} & A_{122}\end{matrix}\middle|\begin{matrix} A_{211} & A_{212} \\ A_{212} & A_{222}\end{matrix}\right\| \quad \begin{matrix} \longrightarrow (i) \\ \ulcorner\!\rightarrow (k) \\ \downarrow \\ (j)\end{matrix}.$$

Пространственная матрица называется *симметрической относительно нескольких индексов*, если она симметрическая относительно любой пары из них. Если симметрия имеет место по отношению ко всем индексам, то матрп цу будем называть просто *симметрической*. Так, кубическая матрица (1.2) будет симметрической, если

$$A_{ijk} = A_{ikj} = A_{jki} = A_{jik} = A_{kij} = A_{kji}.$$

У такой матрицы одинаковые элементы расположены симметрично относительно главной диагонали. Симметрическая кубическая матрица 2-го порядка имеет вид рис. 3.

Пространственная матрица называется *кососимметрической относительно двух индексов*, если каждые два элемента ее, получающиеся один из другого перестановкой этих индексов, отличаются друг от друга только знаком. Таким образом, кубическая матрица (1.2) будет кососимметрической относительно последних двух индексов $j$, $k$, если $A_{ijk} = -A_{ikj}$. Отсюда вытекает, что элементы этой матрицы с одинаковыми значениями индексов $j$, $k$ равны нулю. Элементы, отличающиеся друг от друга только знаком, симметрично расположены по отношению к главному диагональному сечению, соответствующему направлению $(i)$. Это диагональное сечение целиком состоит из нулей. Кубическая матрица 2-го порядка, кососимметрическая относительно индексов $j$, $k$, имеет вид

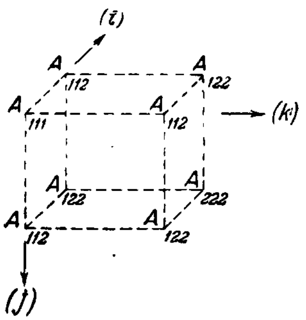



Рис. 3.

$$\begin{array}{c} \\ \left\| \begin{array}{cc|cc} 0 & A_{112} & 0 & A_{212} \\ -A_{112} & 0 & -A_{212} & 0 \end{array} \right\| \end{array} \begin{array}{l} \to (i) \\ \to (k) \\ \downarrow (j) \end{array}$$

Пространственная матрица называется *кососимметрической относительно нескольких индексов*, если она кососимметрическая относительно любой пары из них. Если косая симметрия имеет место по отношению ко всем индексам, то матрицу будем называть просто *кососимметрической*. Элементы кососимметрической матрицы, у которых не все индексы имеют различные значения, очевидно, равны нулю. Таким образом, кубическая матрица (1.2) будет кососимметрической, если

$$A_{ijk} = -A_{ikj} = A_{jki} = -A_{jik} = \\ = A_{kij} = -A_{kji}.$$

Элементы ее, отличающиеся друг от друга только знаком, симметрично расположены относительно главной диагонали, и все три главных диагональных сечения, соответствующие направлениям $(i)$, $(j)$, $(k)$, целиком состоят из нулей. Кососимметрическая кубическая матрица 2-го порядка—нулевая, а 3-го порядка имеет вид рис. 4.

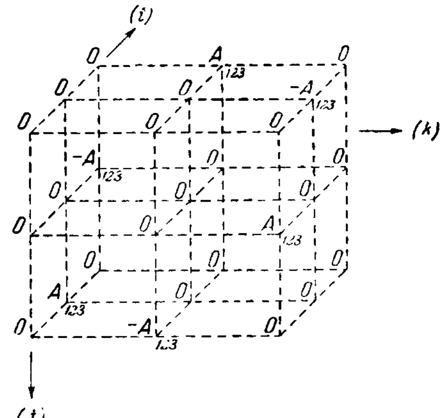



Рис. 4.

7. Матрицу, получающуюся из пространственной матрицы

$$A = \| A_{i_1 i_2 \ldots i_p} \| \qquad (i_1, i_2, \ldots, i_p = 1, 2, \ldots, n)$$

путем обмена значениями двух каких-нибудь индексов, например $i_1$ и $i_2$, во всех ее элементах, будем называть *транспонированной относительно $A$ по этим индексам*. Обозначим ее символом $A^{(i_1, i_2)}$. Элементы такой матрицы связаны с элементами исходной матрицы $A$ соотношениями

$$A^{(i_1, i_2)}_{i_1 i_2 i_3 \ldots i_p} = A_{i_2 i_1 i_3 \ldots i_p} \qquad (i_1, i_2, \ldots, i_p = 1, 2, \ldots, n).$$

Так, например, матрицы $A^{(i,j)}$, $A^{(j,k)}$, $A^{(i,k)}$, транспонированные по двум

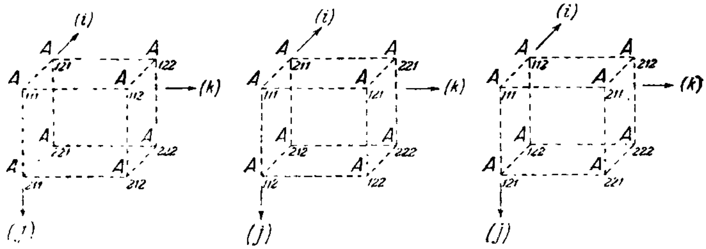


Рис. 5.

индексам относительно кубической матрицы 2-го порядка (1.1), имеют соответственно вид рис. 5.

Матрицу

$$A' = \| A'_{i_1 i_2 \ldots i_p} \| \qquad (i_1, i_2, \ldots, i_p = 1, 2, \ldots, n),$$

элементы которой связаны с элементами упомянутой выше матрицы $A$ соотношениями

$$A'_{i_1 i_2 \ldots i_p} = A_{i_{\alpha_1} i_{\alpha_2} \ldots i_{\alpha_p}},$$

где $i_{\alpha_1}, i_{\alpha_2}, \ldots, i_{\alpha_p}$ — какая-нибудь перестановка из индексов $i_1, i_2, \ldots, i_p$, будем называть *транспонированной относительно A соответственно подстановке* $\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \ldots & i_p \\ i_{\alpha_1} & i_{\alpha_2} & \ldots & i_{\alpha_p} \end{pmatrix}$. Эту матрицу будем обозначать также символом

$$A^{\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \ldots & i_p \\ i_{\alpha_1} & i_{\alpha_2} & \ldots & i_{\alpha_p} \end{pmatrix}}.$$

Таким образом, матрицы $A^{(i,j,k)}$, $A^{(i,k,j)}$, транспонированные относительно кубической матрицы 2-го порядка (1.1) соответственно циклическим подстановкам $(i, j, k)$ и $(i, k, j)$, имеют вид рис. 6.

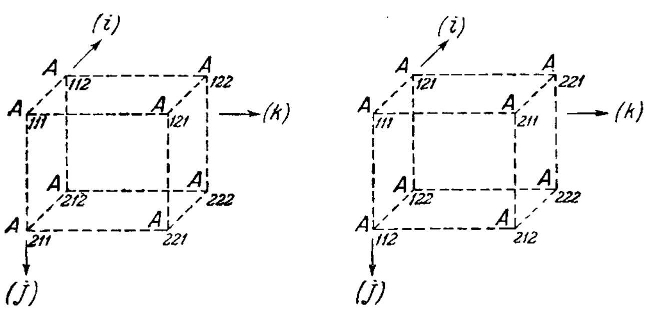


Рис. 6.

Число всех матриц, транспонированных относительно данной $p$-мерной матрицы $A$, включая и матрицу $A$, которую можно рассматривать как транспонированную соответственно тождественной подстановке $\begin{pmatrix} i_1 i_2 & \ldots & i_p \\ i_1 i_2 & \ldots & i_p \end{pmatrix}$, очевидно, равно $p!$

Если матрица $A$ — симметрическая (кососимметрическая) относительно $m$ каких-либо ее индексов $i_{\alpha_1}, i_{\alpha_2}, \ldots, i_{\alpha_m}$, где $2 \leq m \leq p$, то транспонированная матрица

$$A^{\begin{pmatrix} i_{\alpha_1} i_{\alpha_2} \ldots i_{\alpha_m} \\ i_{\beta_1} i_{\beta_2} \ldots i_{\beta_m} \end{pmatrix}},$$

где $i_{\beta_1}, i_{\beta_2}, \ldots, i_{\beta_m}$ — какая-нибудь перестановка из индексов $i_{\alpha_1}, i_{\alpha_2}, \ldots, i_{\alpha_m}$, совпадает с $A$ (совпадает с $A$, если подстановка $\begin{pmatrix} i_{\alpha_1} i_{\alpha_2} \ldots i_{\alpha_m} \\ i_{\beta_1} i_{\beta_2} \ldots i_{\beta_m} \end{pmatrix}$ — четная, или отличается от $A$ только знаками соответствующих элементов, если эта подстановка—нечетная).

8. Выяснив структуру пространственной матрицы, перейдем к установлению понятия о ее детерминантах.

Начнем с простейшего случая, когда дана кубическая матрица $n$-го порядка (1.2). Возьмем в этой матрице какую-нибудь трансверсаль

$$A_{i^{(1)}j^{(1)}k^{(1)}}, \quad A_{i^{(2)}j^{(2)}k^{(2)}}, \ldots, A_{i^{(n)}j^{(n)}k^{(n)}}, \tag{1.6}$$

где значения

$$i^{(1)}, i^{(2)}, \ldots, i^{(n)} \tag{1.7}$$

индекса $i$, а также значения

$$j^{(1)}, j^{(2)}, \ldots, j^{(n)}, \tag{1.8}$$

$$k^{(1)}, k^{(2)}, \ldots, k^{(n)} \tag{1.9}$$

остальных индексов $j$, $k$ образуют некоторые перестановки из чисел 1, 2, ..., $n$. Составим из элементов трансверсали (1.6) произведение

$$A_{i^{(1)}j^{(1)}k^{(1)}} A_{i^{(2)}j^{(2)}k^{(2)}} \ldots A_{i^{(n)}j^{(n)}k^{(n)}}. \tag{1.10}$$

Если мы перегруппируем множители в этом произведении, представляя его, например, в виде

$$A_{i^{(\alpha_1)}j^{(\alpha_1)}k^{(\alpha_1)}} A_{i^{(\alpha_2)}j^{(\alpha_2)}k^{(\alpha_2)}} \ldots A_{i^{(\alpha_n)}j^{(\alpha_n)}k^{(\alpha_n)}}, \tag{1.10'}$$

где

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \tag{1.11}$$

— некоторая перестановка из чисел 1, 2, ..., $n$, то перестановки

$$i^{(\alpha_1)}, i^{(\alpha_2)}, \ldots, i^{(\alpha_n)}, \tag{1.7'}$$

$$j^{(\alpha_1)}, j^{(\alpha_2)}, \ldots, j^{(\alpha_n)}, \tag{1.8'}$$

$$k^{(\alpha_1)}, k^{(\alpha_2)}, \ldots, k^{(\alpha_n)} \tag{1.9'}$$

из значений индексов $i$, $j$, $k$ в элементах трансверсали, входящих в произведение (1.10′), в зависимости от четности перестановки (1.11) имеют одновременно четности, либо совпадающие с четностями соответственных перестановок (1.7), (1.8), (1.9), либо им противоположные. Так как числовое поле $P$, над которым рассматривается матрица (1.2), коммутативно, то произведения *(1.10)* и *(1.10′)*, *отличающиеся друг от друга только порядком множителей*, одинаковы. Однако коммутативность умножения может быть нарушена, если к произведению элементов трансверсали присоединить дополнительный множитель $(-1)^N$, где $N$—целое число, известным образом зависящее от порядка множителей в этом произведении.

В самом деле, выделяя один из индексов $i$, $j$, $k$, например $i$, и обозначая через $I_i$ число инверсий в перестановке (1.7), образуемой значениями этого индекса в элементах трансверсали, входящих в произведение (1.10), умножим последнее на дополнительный множитель $(-1)^{I_i}$. Получим выражение

$$(-1)^{I_i} A_{i(1)j(1)k(1)} A_{i(2)j(2)k(2)} \dots A_{i(n)j(n)k(n)}, \tag{1.12}$$

которое будет иметь тот или иной знак в зависимости не только от знаков элементов трансверсали, но и от четности перестановки (1.7), совпадающей с четностью числа $I_i$. Поэтому, если $I_i^{(\alpha)}$ есть число инверсий в перестановке (1.7′), то выражение

$$(-1)^{I_i^{(\alpha)}} A_{i^{(\alpha_1)} j^{(\alpha_1)} k^{(\alpha_1)}} A_{i^{(\alpha_2)} j^{(\alpha_2)} k^{(\alpha_2)}} \dots A_{i^{(\alpha_n)} j^{(\alpha_n)} k^{(\alpha_n)}}, \tag{1.12′}$$

составленное из произведения (1.10′) по тому же правилу, как и выражение (1.12) из произведения (1.10), будет равно выражению (1.12) только в том случае, когда перестановка (1.11)—четная. Если же эта перестановка—нечетная, то выражения (1.12) и (1.12′), отличаясь в этом случае знаком, уже не будут одинаковыми. Индекс $i$, значениями которого обусловливается положительный либо отрицательный знак дополнительного множителя $(-1)^{I_i}$, будем называть *альтернативным*, а индексы $j$, $k$—*неальтернативными* [1]), поскольку четности перестановок, образуемых их значениями, в рассматриваемом случае не учитываются.

Пусть теперь два какие-нибудь из индексов $i$, $j$, $k$, например $j$ и $k$,— альтернативные, а индекс $i$—неальтернативный. Принимая тогда во внимание четности перестановок (1.8) и (1.9), образуемых значениями альтернативных индексов в элементах трансверсали, входящих в произведение (1.10), умножим это произведение на дополнительный множитель $(-1)^{I_j+I_k}$, где $I_j$ и $I_k$—числа инверсий в перестановках (1.8) и (1.9). В этом случае выражение

$$(-1)^{I_j+I_k} A_{i(1)j(1)k(1)} A_{i(2)j(2)k(2)} \dots A_{i(n)j(n)k(n)} \tag{1.13}$$

уже ничем не будет отличаться от

$$(-1)^{I_j^{(\alpha)}+I_k^{(\alpha)}} A_{i^{(\alpha_1)} j^{(\alpha_1)} k^{(\alpha_1)}} A_{i^{(\alpha_2)} j^{(\alpha_2)} k^{(\alpha_2)}} \dots A_{i^{(\alpha_n)} j^{(\alpha_n)} k^{(\alpha_n)}}, \tag{1.13′}$$

где $I_j^{(\alpha)}$ и $I_k^{(\alpha)}$—числа инверсий в перестановках (1.8′) и (1.9′), так как в силу сделанного выше замечания четности сумм $I_j+I_k$ и $I_j^{(\alpha)}+I_k^{(\alpha)}$ совпадают, какова бы ни была четность перестановки (1.11).

Пусть, наконец, все три индекса $i$, $j$, $k$ — альтернативные. Тогда выражения

$$(-1)^{I_i+I_j+I_k} A_{i(1)j(1)k(1)} A_{i(2)j(2)k(2)} \dots A_{i(n)j(n)k(n)}, \tag{1.14}$$

$$(-1)^{I_i^{(\alpha)}+I_j^{(\alpha)}+I_k^{(\alpha)}} A_{i(\alpha_1)j(\alpha_1)k(\alpha_1)} A_{i(\alpha_2)j(\alpha_2)k(\alpha_2)} \dots A_{i(\alpha_n)j(\alpha_n)k(\alpha_n)}, \tag{1.14′}$$

так же как и выражения (1.12), (1.12′), одинаковы лишь тогда, когда перестановка (1.11)—четная. Если же эта перестановка—нечетная, то выражения (1.14) и (1.14′) отличаются знаком друг от друга, так как в этом случае четности сумм $I_i+I_j+I_k$ и $I_i^{(\alpha)}+I_j^{(\alpha)}+I_k^{(\alpha)}$ противоположны.

Таким образом, рассмотренные выше выражения (1.12) или (1.14), когда принимаются во внимание четности перестановок, образуемых значениями нечетного числа (1 или 3) альтернативных индексов, зависят от

[1]) Ср. [162], т. 45, стр. 27. Эти определения относятся не только к индексам, но также к строкам и их направлениям, к сечениям (простым) и их ориентациям и пр.

порядка множителей, тогда как для выражений (1.13) или (1.10), когда принимаются во внимание четности перестановок, образуемых значениями четного числа (2 или 0) альтернативных индексов, коммутативность умножения сохраняется. Поэтому в дальнейшем мы будем рассматривать лишь выражения вида (1.13) и подобные им выражения

$$(-1)^{I_i+I_k} A_{i^{(1)}j^{(1)}k^{(1)}} A_{i^{(2)}j^{(2)}k^{(2)}} \dots A_{i^{(n)}j^{(n)}k^{(n)}}, \tag{1.15}$$

$$(-1)^{I_i+I_j} A_{i^{(1)}j^{(1)}k^{(1)}} A_{i^{(2)}j^{(2)}k^{(2)}} \dots A_{i^{(n)}j^{(n)}k^{(n)}}, \tag{1.16}$$

составленные из элементов трансверсали (1.6) в предположении, что из всех индексов $i$, $j$, $k$ только индексы $i$, $k$ или $i$, $j$ — альтернативные. Кроме того, будем рассматривать также выражения вида (1.10), составленные в предположении, что все индексы $i$, $j$, $k$ — неальтернативные.

Составим теперь для всех трансверсалей матрицы (1.2) выражения вида (1.13) и возьмем их алгебраическую сумму

$$\sum (-1)^{I_j+I_k} A_{i^{(1)}j^{(1)}k^{(1)}} A_{i^{(2)}j^{(2)}k^{(2)}} \dots A_{i^{(n)}j^{(n)}k^{(n)}}, \tag{1.17}$$

где суммирование распространено на все возможные комбинации любой перестановки $j^{(1)}, j^{(2)}, \dots, j^{(n)}$ с любой перестановкой $k^{(1)}, k^{(2)}, \dots, k^{(n)}$ при фиксированной перестановке $i^{(1)}, i^{(2)}, \dots, i^{(n)}$. Эта сумма, обозначаемая обычно символом Райса [1]) $\left|A_{\overset{+}{i}\overset{\pm}{j}\overset{\pm}{k}}\right|$, где между вертикальными чертами написан общий элемент матрицы (1.2) и над альтернативными индексами $j$, $k$ поставлен знак $\pm$, а над неальтернативным индексом $i$ знак $+$, называется *кубическим детерминантом n-го порядка с сигнатурой* $(\overset{+}{i}\overset{\pm}{j}\overset{\pm}{k})$. Эту сигнатуру сокращенно будем записывать в виде $(\overset{+}{i})$, указывая явно только неальтернативный индекс $i$. Слагаемые суммы (1.17) называются *членами* кубического детерминанта $\left|A_{\overset{+}{i}\overset{\pm}{j}\overset{\pm}{k}}\right|$. Число их, очевидно, равно $(n!)^2$.

Аналогично определяются с помощью выражений (1.15), (1.16) соответствующие той же матрице (1.2) *кубические детерминанты n-го порядка* $\left|A_{\overset{\pm}{i}\overset{+}{j}\overset{\pm}{k}}\right|$ *и* $\left|A_{\overset{\pm}{i}\overset{\pm}{j}\overset{+}{k}}\right|$ *с сигнатурами* $(\overset{+}{j})$ *и* $(\overset{+}{k})$.

Сумма $(n!)^2$ членов вида (1.10), составленных для всех трансверсалей матрицы (1.2), дает *кубический детерминант n-го порядка* $\left|A_{\overset{+}{i}\overset{+}{j}\overset{+}{k}}\right|$ *с сигнатурой* $(\overset{+}{i}\overset{+}{j}\overset{+}{k})$, который обычно называется *кубическим перманентом* матрицы (1.2).

В каждом члене кубического детерминанта с той или иной сигнатурой элементы его, очевидно, могут быть расположены в таком порядке, чтобы перестановка $i^{(1)}, i^{(2)}, \dots, i^{(n)}$, образуемая значениями первого индекса $i$, представляла последовательность натуральных чисел $1, 2, \dots, n$.

Число, указывающее порядок детерминанта, если желательно обратить на него внимание, будем писать внизу правой вертикальной черты в обозначении детерминанта.

При более подробном обозначении детерминантов кубической матрицы мы будем выписывать полностью элементы матрицы или в перспективном изображении, или с помощью ее двумерных сечений, как это сделано в обозначениях (1.1) и (1.1′), заменяя только в первом случае пунктир сплошными линиями, а во втором случае — крайние двойные черты простыми, причем неальтернативные направления всегда будем отмечать знаком $+$.

[1]) См. [204], стр. 49.

Таким образом, кубические детерминанты 2-го порядка матрицы (1.1)

$$|A_{\overset{+}{i}\overset{+}{j}\overset{\pm}{k}}|_2 = A_{111}A_{222} - A_{112}A_{221} - A_{121}A_{212} + A_{122}A_{211}, \tag{1.18}$$

$$|A_{\overset{\pm}{i}\overset{+}{j}\overset{\pm}{k}}|_2 = A_{111}A_{222} - A_{112}A_{221} + A_{121}A_{212} - A_{122}A_{211}, \tag{1.19}$$

$$|A_{\overset{\pm}{i}\overset{\pm}{j}\overset{+}{k}}|_2 = A_{111}A_{222} + A_{112}A_{221} - A_{121}A_{212} - A_{122}A_{211}, \tag{1.20}$$

$$|A_{\overset{+}{i}\overset{+}{j}\overset{+}{k}}|_2 = A_{111}A_{222} + A_{112}A_{221} + A_{121}A_{212} + A_{122}A_{211} \tag{1.21}$$

могут быть представлены в виде рис. 7 или в виде

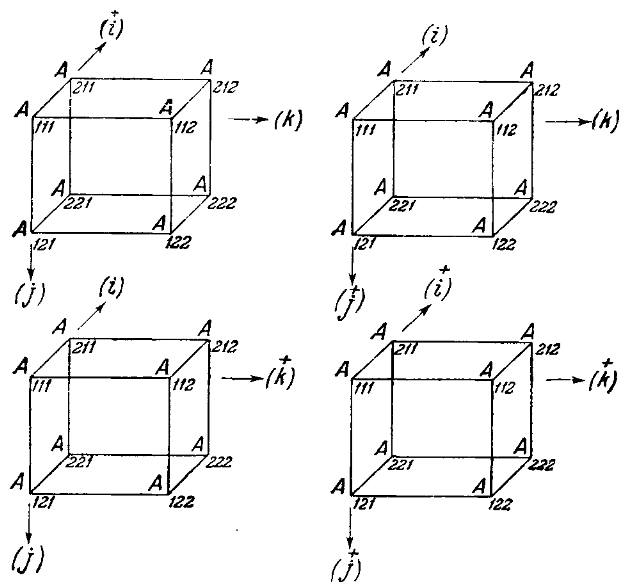



Рис. 7.

$$\left|\begin{array}{cc|cc} A_{111} & A_{112} & A_{211} & A_{212} \\ A_{121} & A_{122} & A_{221} & A_{222} \end{array}\right| \begin{array}{l} \longrightarrow (\overset{+}{i}) \\ \rightarrow (k) \\ \downarrow (j) \end{array}, \qquad \left|\begin{array}{cc|cc} A_{111} & A_{211} & A_{121} & A_{221} \\ A_{112} & A_{212} & A_{122} & A_{222} \end{array}\right| \begin{array}{l} \longrightarrow (\overset{+}{j}) \\ \rightarrow (i) \\ \downarrow (k) \end{array},$$

$$\left|\begin{array}{cc|cc} A_{111} & A_{121} & A_{112} & A_{122} \\ A_{211} & A_{221} & A_{212} & A_{222} \end{array}\right| \begin{array}{l} \longrightarrow (\overset{+}{k}) \\ \rightarrow (j) \\ \downarrow (i) \end{array}, \qquad \left|\begin{array}{cc|cc} A_{111} & A_{112} & A_{211} & A_{212} \\ A_{121} & A_{122} & A_{221} & A_{222} \end{array}\right| \begin{array}{l} \longrightarrow (\overset{+}{i}) \\ \rightarrow (\overset{+}{k}) \\ \downarrow (\overset{+}{j}) \end{array}.$$

Детерминант и перманент обычной матрицы $n$-го порядка

$$\| A_{ij} \| \qquad (i,\ j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$$

также могут быть обозначены символами Райса

$$|A_{\overset{\pm}{i}\overset{\pm}{j}}|_n \text{ и } |A_{\overset{+}{i}\overset{+}{j}}|_n,$$

как двумерные детерминанты с сигнатурами $(\overset{\pm}{i}\overset{\pm}{j})$ и $(\overset{+}{i}\overset{+}{j})$.

Таким образом, имеем:

$$\left|A_{\overset{\pm}{i}\overset{\pm}{j}}\right|_2=\begin{vmatrix}A_{11} & A_{12}\\ A_{21} & A_{22}\end{vmatrix}=A_{11}A_{22}-A_{12}A_{21},$$

$$\left|A_{\overset{+}{i}\overset{+}{j}}\right|_2=\begin{vmatrix}\overset{(+)}{A_{11}} & \overset{(+)}{A_{12}}\\ A_{21} & A_{22}\end{vmatrix}=A_{11}A_{22}+A_{12}A_{21}.$$

9. Дополнительные множители вида $(-1)^N$, на которые приходится умножать произведения элементов каждой трансверсали кубической матрицы $n$-го порядка, чтобы получить члены ее детерминанта с той или иной сигнатурой,

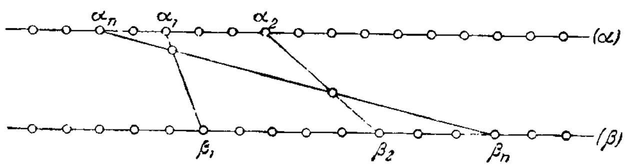



Рис. 8.

легко находятся **графическим способом**. Для пояснения этого способа воспользуемся следующей диаграммой, позволяющей определить четность любой подстановки $n$-й степени

$$\begin{pmatrix}\alpha_1\alpha_2 & \dots & \alpha_n\\ \beta_1\beta_2 & \dots & \beta_n\end{pmatrix},$$

совпадающую с четностью суммы $I_\alpha+I_\beta$ чисел инверсии $I_\alpha$ и $I_\beta$ в перестановках

$$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \dots,\ \alpha_n,$$
$$\beta_1,\ \beta_2,\ \dots,\ \beta_n$$

из чисел $1, 2, \dots, n$.

В диаграмме (рис. 8) каждой паре элементов $\alpha_m$, $\beta_m$ $(m=1, 2, \dots, n)$ подстановки сопоставляется отрезок, соединяющий пару соответствующих точек на горизонталях $(\alpha)$ и $(\beta)$. Число пересечений построенных таким образом $n$ отрезков имеет, очевидно, ту же четность, как и рассматриваемая подстановка (точка пересечения $n$ отрезков считается за $C_n^2$ пересечений).

Возьмем теперь три горизонтали (рис. 9) и на каждой из них отметим по $n$ точек, соответствующих значениям $1, 2, \dots, n$ индексов $i$, $j$, $k$, так, чтобы точки с одинаковыми значениями этих индексов лежали на одной и той же вертикали (рис. 9). Тогда каждому элементу $A_{i^{(\alpha)}j^{(\alpha)}k^{(\alpha)}}$ $(\alpha=1, 2, \dots, n)$ какой-нибудь трансверсали кубической матрицы $n$-го порядка можно сопоставить его график, представляющий, вообще говоря, ломаную линию, которая, выходя из точки на первой горизонтали $(i)$, соответствующей значению $i^{(\alpha)}$ индекса $i$ этого элемента, проходит через точки следующих горизонталей $(j)$, $(k)$, соответствующие значениям $j^{(\alpha)}$, $k^{(\alpha)}$ индексов $j$, $k$. Построенные таким образом графики элементов трансверсали взаимно пересекаются, за исключением графиков элементов главной диагонали $A_{111}, A_{222}, \dots, A_{nnn}$, представляющих собой вертикальные отрезки. Обозначая, как и раньше, число инверсий в перестановках, образуе-

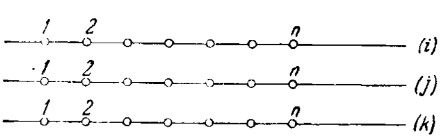



Рис. 9.

мых значениями индексов $i$, $j$, $k$ в элементах трансверсали, образующих произведение

$$A_{i^{(1)}j^{(1)}k^{(1)}}A_{i^{(2)}j^{(2)}k^{(2)}} \dots A_{i^{(n)}j^{(n)}k^{(n)}},$$

соответственно через $I_i$, $I_j$, $I_k$, мы в силу рассмотренной выше диаграммы заключаем, что число $N_{ij}$ пересечений графиков этих элементов между горизонталями $(i)$ и $(j)$ будет той же четности, как и сумма $I_i+I_j$, а число $N_{jk}$ пересечений между горизонталями $(j)$ и $(k)$ — той же четности, как и сумма $I_j+I_k$. Отсюда следует, что число $N_{ik}$ пересечений между горизонталями $(i)$ и $(k)$, равное $N_{ij}+N_{jk}$, имеет четность, совпадающую с четностью суммы $I_i+I_k$. Таким образом, умножая упомянутое выше произведение элементов трансверсали на один из дополнительных множителей

$$(-1)^{N_{ij}}, \quad (-1)^{N_{jk}}, \quad (-1)^{N_{ik}},$$

мы получим соответственно член кубического детерминанта с одной из сигнатур $(\overset{+}{k})$, $(\overset{+}{i})$, $(\overset{+}{j})$.

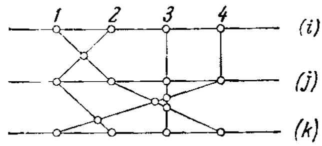


Рис. 10.

Так, из диаграммы (рис. 10), построенной по элементам трансверсали $A_{124}$, $A_{212}$, $A_{333}$, $A_{441}$ кубической матрицы 4-го порядка $\| A_{ijk} \|$ $(i, j, k = 1, 2, 3, 4)$, видим, что $N_{ij}=1$, $N_{jk}=4$, $N_{ik}=5$. Следовательно, выражение $+A_{124}A_{212}A_{333}A_{441}$ есть член детерминанта $\left| A_{\overset{+}{i}\overset{\pm}{j}\overset{\pm}{k}} \right|_4$, тогда как выражение $-A_{124}A_{212}A_{333}A_{441}$ является членом детерминантов $\left| A_{\overset{\pm}{i}\overset{+}{j}\overset{\pm}{k}} \right|_4$ и $\left| A_{\overset{\pm}{i}\overset{\pm}{j}\overset{+}{k}} \right|_4$.

10. Детерминанты пространственной матрицы, число измерений которой больше трех, определяются аналогично детерминантам кубической матрицы.

Возьмем в $p$-мерной матрице $n$-го порядка (1.3) какую-нибудь трансверсаль

$$A_{i_1^{(1)}i_2^{(1)}\dots i_p^{(1)}}, \quad A_{i_1^{(2)}i_2^{(2)}\dots i_p^{(2)}}, \quad \dots, \quad A_{i_1^{(n)}i_2^{(n)}\dots i_p^{(n)}}, \tag{1.22}$$

где значения $i_\nu^{(1)}$, $i_\nu^{(2)}$, $\dots$, $i_\nu^{(n)}$ индексов $i_\nu$ $(\nu = 1, 2, \dots, p)$ в элементах этой трансверсали образуют некоторые перестановки из чисел $1, 2, \dots, n$. Пусть какие-нибудь $m$ ($m$ — любое четное число, не превышающее $p$) индексов, например индексы $i_1, i_2, \dots, i_m$, — альтернативные, а остальные $p-m$ индексов $i_{m+1}, i_{m+2}, \dots, i_p$ — неальтернативные. Обозначим через $I_\mu$ число инверсий в перестановке $i_\mu^{(1)}, i_\mu^{(2)}, \dots, i_\mu^{(n)}$, образуемой значениями альтернативного индекса $i_\mu$ ($\mu$ — любое из чисел $1, 2, \dots, m$), и умножим произведение элементов трансверсали (1.22) на дополнительный множитель $(-1)^{\sum\limits_{\mu=1}^{m} I_\mu}$. Получим выражение

$$(-1)^{\sum\limits_{\mu=1}^{m} I_\mu} A_{i_1^{(1)}i_2^{(1)}\dots i_p^{(1)}}A_{i_1^{(2)}i_2^{(2)}\dots i_p^{(2)}} \dots A_{i_1^{(n)}i_2^{(n)}\dots i_p^{(n)}}, \tag{1.23}$$

где значения $i_1^{(1)}, i_1^{(2)}, \dots i_1^{(n)}$ первого индекса $i_1$, очевидно, можем предполагать идущими в натуральном порядке.

Составляя выражения вида (1.23) для каждой из $(n!)^{p-1}$ трансверсалей матрицы (1.3) и беря их алгебраическую сумму, получим *$p$-мерный детерминант $n$-го порядка* $\left| A_{\overset{\pm}{i_1}\dots\overset{\pm}{i_m}\overset{+}{i_{m+1}}\dots\overset{+}{i_p}} \right|$ с сигнатурой $(\overset{\pm}{i_1}\dots\overset{\pm}{i_m}\overset{+}{i_{m+1}}\dots$ $\dots\overset{+}{i_p})$, которую сокращенно будем записывать в виде $(\overset{\pm}{i_1}\dots\overset{\pm}{i_m})$ или

$(\overset{+}{i}_{m+1} \ldots \overset{+}{i}_p)$, смотря по тому, будет ли меньшим число альтернативных или неальтернативных индексов в данной сигнатуре.

Число $m$ альтернативных индексов всегда предполагается четным, так как тогда и только тогда сохраняется коммутативность умножения. Это число определяет *род* $p$-мерного детерминанта. У $p$-мерной матрицы при $p$ четном существует только один детерминант наивысшего рода $p$, когда все индексы — альтернативные. Его мы будем называть, следуя Кэли [53], *гипердетерминантом*. При $p$ нечетном существует $p$ детерминантов наивысшего рода $p-1$ с сигнатурами $(\overset{+}{i}_1)$, $(\overset{+}{i}_2)$, $\ldots$, $(\overset{+}{i}_p)$. Детерминант наинизшего рода $O$, когда все индексы — неальтернативные, обычно называют *перманентом*. Детерминанты, род которых больше нуля и меньше $p$, называются согласно терминологии Вайдьянатхасвами [224] *смешанными*.

Детерминанты (включая перманент) одной и той же пространственной матрицы объединяются общим названием *кодетерминантов*. Два кодетерминанта четного числа измерений будут *союзными*, если альтернативные индексы одного являются неальтернативными индексами другого, и наоборот.

Так, например, у четырехмерной матрицы 2-го порядка (1.4) детерминантом наивысшего рода 4 будет гипердетерминант

$$|A_{\overset{\pm}{i}_1\overset{\pm}{i}_2\overset{\pm}{i}_3\overset{\pm}{i}_4}|_2 = \begin{array}{l} A_{1111}A_{2222} - A_{1112}A_{2221} - A_{1121}A_{2212} + A_{1122}A_{2211} - \\ - A_{1211}A_{2122} + A_{1212}A_{2121} + A_{1221}A_{2112} - A_{1222}A_{2111}. \end{array} \tag{1.24}$$

Союзным кодетерминантом является перманент

$$|A_{\overset{+}{i}_1\overset{+}{i}_2\overset{+}{i}_3\overset{+}{i}_4}|_2 = \begin{array}{l} A_{1111}A_{2222} + A_{1112}A_{2221} + A_{1121}A_{2212} + A_{1122}A_{2211} + \\ + A_{1211}A_{2122} + A_{1212}A_{2121} + A_{1221}A_{2112} + A_{1222}A_{2111}. \end{array} \tag{1.25}$$

Кроме того, имеются три пары союзных кодетерминантов рода 2, из которых отметим пару смешанных детерминантов

$$|A_{\overset{+}{i}_1\overset{\pm}{i}_2\overset{+}{i}_3\overset{\pm}{i}_4}|_2 = \begin{array}{l} A_{1111}A_{2222} - A_{1112}A_{2221} + A_{1121}A_{2212} - A_{1122}A_{2211} - \\ - A_{1211}A_{2122} + A_{1212}A_{2121} - A_{1221}A_{2112} + A_{1222}A_{2111}, \end{array} \tag{1.26}$$

$$|A_{\overset{\pm}{i}_1\overset{+}{i}_2\overset{\pm}{i}_3\overset{+}{i}_4}|_2 = \begin{array}{l} A_{1111}A_{2222} + A_{1112}A_{2221} - A_{1121}A_{2212} - A_{1122}A_{2211} + \\ + A_{1211}A_{2122} + A_{1212}A_{2121} - A_{1221}A_{2112} - A_{1222}A_{2111}. \end{array} \tag{1.27}$$

Детерминанты двух матриц, обладающие одной и той же сигнатурой, будем называть *косигнатурными*.

11. Обобщая для пространственной матрицы любого числа измерений указанный в п. 9 графический способ определения дополнительного множителя к произведению элементов данной трансверсали, нетрудно убедиться (см. упражнение 14), что в выражении члена

$$(-1)^N A_{i_1^{(1)} i_2^{(1)} \ldots i_p^{(1)}} A_{i_1^{(2)} i_2^{(2)} \ldots i_p^{(2)}} \ldots A_{i_1^{(n)} i_2^{(n)} \ldots i_p^{(n)}}$$

$p$-мерного детерминанта рода $m$ с сигнатурой

$$(\overset{+}{i}_1 \ldots \overset{+}{i}_{\alpha_1 - 1} \overset{\pm}{i}_{\alpha_1} \overset{+}{i}_{\alpha_1+1} \ldots \overset{+}{i}_{\alpha_m - 1} \overset{\pm}{i}_{\alpha_m} \overset{+}{i}_{\alpha_m+1} \ldots \overset{+}{i}_p)$$

показатель $N$ определяется формулой

$$N = \sum_{\nu=1}^{\frac{m}{2}} N_{\alpha_{2\nu-1}\alpha_{2\nu}},$$

где $N_{\alpha_{2\nu-1}\alpha_{2\nu}}$ есть число пересечений графиков элементов, входящих в выражение данного члена, между горизонталями $(i_{\alpha_{2\nu-1}})$ и $(i_{\alpha_{2\nu}})$ соответствующей диаграммы.

Так, например, построив по элементам трансверсали

$$A_{1342},\ A_{2113},\ A_{3221},\ A_{4134}$$

четырехмерной матрицы 4-го порядка

$$\| A_{i_1 i_2 i_3 i_4} \| \qquad (i_1,\ i_2,\ i_3,\ i_4 = 1,\ 2,\ 3,\ 4)$$

диаграмму (рис. 11), видим, что $N_{12}=5$, $N_{23}=4$, $N_{34}=3$, $N_{13}=9$, $N_{14}=12$, $N_{24}=7$.

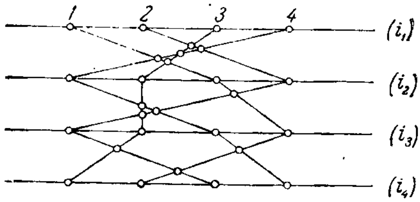



Рис. 11.

Таблица значений $N$ в зависимости от сигнатуры детерминанта имеет следующий вид:

| Сигнатура | $N$ | Сигнатура | $N$ |
|---|---|---|---|
| $\begin{pmatrix} \pm & \pm & \pm & \pm \\ i_1 & i_2 & i_3 & i_4 \end{pmatrix}$ | $N_{12}+N_{34}=8$ | $\begin{pmatrix} + & \pm & + & \pm \\ i_1 & i_2 & i_3 & i_4 \end{pmatrix}$ | $N_{24}=7$ |
| $\begin{pmatrix} \pm & \pm & + & + \\ i_1 & i_2 & i_3 & i_4 \end{pmatrix}$ | $N_{12}=5$ | $\begin{pmatrix} \pm & + & + & \pm \\ i_1 & i_2 & i_3 & i_4 \end{pmatrix}$ | $N_{14}=12$ |
| $\begin{pmatrix} + & + & \pm & \pm \\ i_1 & i_2 & i_3 & i_4 \end{pmatrix}$ | $N_{34}=3$ | $\begin{pmatrix} + & \pm & \pm & + \\ i_1 & i_2 & i_3 & i_4 \end{pmatrix}$ | $N_{23}=4$ |
| $\begin{pmatrix} \pm & + & \pm & + \\ i_1 & i_2 & i_3 & i_4 \end{pmatrix}$ | $N_{13}=9$ | | |

Таким образом, выражение $+A_{1342}A_{2113}A_{3221}A_{4134}$ является членом детерминантов

$$| A_{\overset{\pm}{i_1}\overset{\pm}{i_2}\overset{\pm}{i_2}\overset{\pm}{i_4}} |_4, \qquad | A_{\overset{\pm}{i_1}\overset{+}{i_2}\overset{+}{i_3}\overset{\pm}{i_4}} |_4, \qquad | A_{\overset{+}{i_1}\overset{\pm}{i_2}\overset{\pm}{i_3}\overset{+}{i_4}} |_4,$$

а выражение $-A_{1342}A_{2413}A_{3221}A_{4134}$ есть член детерминантов

$$| A_{\overset{\pm}{i_1}\overset{\pm}{i_2}\overset{+}{i_3}\overset{+}{i_4}} |_4, \qquad | A_{\overset{+}{i_1}\overset{+}{i_2}\overset{\pm}{i_3}\overset{\pm}{i_4}} |_4, \qquad | A_{\overset{\pm}{i_1}\overset{+}{i_2}\overset{\pm}{i_3}\overset{+}{i_4}} |_4, \qquad | A_{\overset{+}{i_1}\overset{\pm}{i_2}\overset{+}{i_3}\overset{\pm}{i_4}} |_4.$$

Замечание 1.1. В дальнейшем мы будем говорить об элементах, сечениях и строках детерминантов пространственной матрицы как о соответствующих элементах, сечениях и строках этой матрицы.

### Упражнения

1. Найти число $N$ всех сечений (простых и кратных) $p$-мерной матрицы $n$-го порядка.

2. Если в $p$-мерной матрице $A = \| A_{i_1 i_2 \ldots i_p} \|$ $(p \geqq 3)$ индексы $i_1, i_2, \ldots, i_p$ принимают соответственно значения

$$\begin{array}{l} 1,\ 2,\ \ldots,\ n_1, \\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n_2, \\ \ldots\ldots\ldots \\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n_p \end{array}$$

при $n_1, n_2, \ldots, n_p$ различных между собой, то матрица $A$, состоящая из $n_1 n_2 \ldots n_p$ элементов, образует параллелепипед $p$ измерений. Говорят тогда, что $A$ имеет порядок $(n_1, n_2, \ldots, n_p)$. Если все числа $n_1, n_2, \ldots, n_p$, за исключением одного из них, одинаковы, то матрица $A$ называется расширенной или сжатой, смотря по тому, будет ли число, отличное от остальных одинаковых чисел, больше или меньше последних.

Доказать, что общее число всех сечений (простых и кратных) расширенной и сжатой $p$-мерных матриц порядков $(n, n, \ldots, n, n+\nu)$ и $(n, n, \ldots, n, n-\nu)$, где $0 < \nu < n$, равно $2N$ (см. упражнение 1).

3. Указать в матрице $\|A_{i_1 i_2 i_3 i_4}\|$ $(i_1, i_2, i_3, i_4 = 1, 2)$: а) все диагонали, б) все главные двумерные диагональные сечения, в) все главные трехмерные диагональные сечения.

4. Какой вид имеют: а) кубическая матрица 2-го порядка, симметрическая относительно двух индексов $i, j$ или $i, k$; б) симметрическая кубическая матрица 3-го порядка?

5. Четырехмерную матрицу 2-го порядка, симметрическую относительно двух пар индексов $(i_1, i_2)$ и $(i_3, i_4)$, записать с помощью ее двумерных сечений, располагая последние в виде квадратной симметрической клеточной матрицы, клетки которой — также симметрические матрицы.

6. Какой вид имеет кубическая матрица 2-го порядка, кососимметрическая относительно двух индексов $i, j$ или $i, k$?

7. Доказать, что кубическая матрица $\|A_{ijk}\|$, симметрическая относительно одной пары индексов и кососимметрическая относительно другой какой-либо пары индексов, будет нулевой матрицей.

8. Найти число различных элементов симметрической $p$-мерной матрицы $n$-го порядка.

9. Найти число одинаковых элементов $A_{i_1 i_2 \ldots i_p}$ симметрической $p$-мерной матрицы $n$-го порядка, у которых значения индексов $i_1, i_2, \ldots, i_p$ представляют $q$ различных чисел $(1 \leqq q \leqq p)$, причем первое из них повторяется $m_1$ раз, второе — $m_2$ раз, ..., $q$-е — $m_q$ раз $(m_1 + m_2 + \ldots + m_q = p)$.

10. Найти число не равных нулю и отличных друг от друга не только по знаку элементов кососимметрической $p$-мерной матрицы $n$-го порядка.

11. Показать, что транспонированные кубические матрицы $A^{(i,\,j)}, A^{(j,\,k)}, A^{(i,\,k)}$ получаются из исходной матрицы $A = \|A_{ijk}\|$ $(i, j, k = 1, 2, \ldots, n)$ поворотом на $180°$ всех ее сечений ориентаций $(k)$, $(i)$, $(j)$ соответственно вокруг их главных диагоналей, а $A^{(i,\,j,\,k)}$ и $A^{(i,\,k,\,j)}$ получаются поворотом матрицы $A$ вокруг ее главной диагонали соответственно на $120°$ и $240°$ влево, если смотреть вдоль главной диагонали в направлении возрастающих индексов.

12. Построению теории кубических детерминантов можно придать наглядный характер, пользуясь геометрически выраженным правилом определения знака любого члена детерминанта подобно тому, как это сделано Г. Е. Шиловым [40, 41] для обычных детерминантов. Будем называть трансверсальную пару элементов

$$A_{i(\alpha) j(\alpha) k(\alpha)}, \qquad A_{i(\beta) j(\beta) k(\beta)} \tag{1.28}$$

кубической матрицы $n$-го порядка (1.2) положительно ориентированной в направлении $(i)$, если отрезок, соединяющий точки плоскости с прямоугольными координатами $j^{(\alpha)}, k^{(\alpha)}$ и $j^{(\beta)}, k^{(\beta)}$ (независимо от того, какая из этих точек принята за начало отрезка), образует с обеими осями координат либо острые, либо тупые углы; в противном случае пару (1.28) будем называть отрицательно ориентированной в направлении $(i)$. Пусть $N_i$ есть число трансверсальных пар в трансверсали (1.6) матрицы (1.2), отрицательно ориентированных в направлении $(i)$. Показать, что алгебраическая сумма выражений вида

$$(-1)^{N_i} A_{i^{(1)} j^{(1)} k^{(1)}} A_{i^{(2)} j^{(2)} k^{(2)}} \ldots A_{i^{(n)} j^{(n)} k^{(n)}},$$

составленных для всех трансверсалей матрицы (1.2), равна детерминанту $\left| A_{\underset{i}{+}\underset{j}{\pm}\underset{k}{\pm}} \right|$. Дать аналогичные определения детерминантов $\left| A_{\underset{i}{\pm}\underset{j}{+}\underset{k}{\pm}} \right|$ и $\left| A_{\underset{i}{\pm}\underset{j}{\pm}\underset{k}{+}} \right|$.

13. Показать, что все детерминанты диагональной кубической матрицы $n$-го порядка $\|A_{ijk}\|$ $(i, j, k = 1, 2, \ldots, n)$ равны произведению $n$ диагональных элементов $A_{111}, A_{222}, \ldots, A_{nnn}$.

14. Показать, что сумма чисел инверсий $I_{\alpha_1}, I_{\alpha_2}, \ldots, I_{\alpha_m}$ в перестановках, образуемых значениями $m$ каких-нибудь индексов $i_{\alpha_1}, i_{\alpha_2}, \ldots, i_{\alpha_m}$ в элементах некоторой трансверсали

$$A_{i_1^{(1)} i_2^{(1)} \ldots i_p^{(1)}}, \qquad A_{i_1^{(2)} i_2^{(2)} \ldots i_p^{(2)}}, \ldots, A_{i_1^{(n)} i_2^{(n)} \ldots i_p^{(n)}}$$

$p$-мерной матрицы $n$-го порядка (1.3), имеет ту же четность, как и сумма $\sum_{\nu=1}^{\frac{m}{2}} N_{\alpha_{2\nu-1}\alpha_{2\nu}}$, где $m$ — какое-нибудь четное число, не превышающее $p$, а $N_{\alpha_{2\nu-1}\alpha_{2\nu}}$ есть число пересечений графиков элементов рассматриваемой трансверсали между горизонталями $(i_{\alpha_{2\nu-1}})$ и $(i_{\alpha_{2\nu}})$.

15. Показать, что число $p$-мерных кодетерминантов равно $2^{p-1}$ (т. е. числу диагоналей их матрицы).

16. Построить диаграмму по элементам трансверсали

$$A_{133424},\ A_{214312},\quad A_{342131},\ A_{421243}$$

матрицы $\|A_{i_1i_2i_3i_4i_5i_6}\|$ и при помощи ее найти тот член детерминанта $|A_{\overset{+\pm\pm\pm+\pm}{i_1i_2i_3i_4i_5i_6}}|_4$, который содержит данные элементы.

17. Построить диаграмму по элементам трансверсали

$$A_{12132},\quad A_{23321},\quad A_{31213}$$

матрицы $\|A_{i_1i_2i_3i_4i_5}\|$ и при помощи ее указать, каким детерминантам наивысшего рода принадлежат: а) член $+A_{12132}A_{23321}A_{31213}$; б) член $-A_{12132}A_{23321}A_{31213}$.

18. Будем рассматривать $p$-мерную матрицу $n$-го порядка (1.3) как некоторую $p$-мерную перестановку из $n^p$ элементов, причем всякую другую перестановку того же рода мы можем получить, лишь переставляя всеми способами в этой матрице сечения ориентаций $(i_1)$, $(i_2)$, $\ldots$, $(i_p)$. Показать, что:

а) число $p$-мерных перестановок из $n^p$ элементов равно $(p+1)$-мерному перманенту $n$-го порядка, у которого все элементы равны 1;

б) число $p$-мерных перестановок из $n^p$ элементов $A_{i_1\ldots i_p}$ $(i_1, \ldots, i_p=1, \ldots, n)$, у которых каждый элемент $A_{i_1\ldots i_p}$ не может занимать в $p$-мерной матрице $n$-го порядка (1.3) место, определяемое значениями его индексов, равно $(p+1)$-мерному перманенту $n$-го порядка, у которого диагональные элементы — нули, а все остальные равны 1. (Случай $p=1$ рассматривался Шао Пинь-цуном [231].)

## § 2. Основные свойства детерминантов пространственной матрицы

1. Характер свойств детерминантов пространственной матрицы зависит от их рода. Гипердетерминант обладает свойствами, являющимися обобщением хорошо известных свойств обычного детерминанта. Смешанные же детерминанты и перманент наряду со свойствами, общими всем кодетерминантам, имеют многие своеобразные свойства, присущие им одним. Детерминант с той или иной сигнатурой (в частности, перманент), число измерений которого можно предполагать каким угодно целым, бóльшим двух, в дальнейшем будем называть *многомерным*.

Свойство I. *Многомерный детерминант равен нулю, если одно из его сечений (простых) состоит из нулей.*

Это очевидно, так как в каждый член многомерного детерминанта, у которого одно сечение (простое) состоит из нулей, входит один элемент из этого сечения.

Свойство II. *Детерминанты пространственной матрицы $A$ связаны с детерминантами транспонированной относительно $A$ по двум каким-нибудь индексам, например $i_1$ и $i_2$, матрицы $A^{(i_1, i_2)}$ следующими соотношениями:*

$$|A_{\overset{\pm\pm}{i_1i_2\ldots}}| = |A^{(i_1, i_2)}_{\overset{\pm\pm}{i_1i_2\ldots}}|,\qquad |A_{\overset{++}{i_1i_2\ldots}}| = |A^{(i_1, i_2)}_{\overset{++}{i_1i_2\ldots}}|,$$

$$|A_{\overset{\pm+}{i_1i_2\ldots}}| = |A^{(i_1, i_2)}_{\overset{+\pm}{i_1i_2\ldots}}|,\qquad |A_{\overset{+\pm}{i_1i_2\ldots}}| = |A^{(i_1, i_2)}_{\overset{\pm+}{i_1i_2}}|,$$

*где в каждом из равенств многоточиями заменены части сигнатур, ничем не отличающиеся друг от друга.*

Действительно, для каждой пары элементов $p$-мерных матриц $n$-го порядка $A$ и $A^{(i_1, i_2)}$ имеем:

$$A^{(i_1, i_2)}_{i_1 i_2 i_3 \ldots i_p} = A_{i_2 i_1 i_3 \ldots i_p} \qquad (i_1, i_2, \ldots, i_p = 1, 2, \ldots, n),$$

и все трансверсали транспонированной матрицы $A^{(i_1, i_2)}$, получающейся из $A$ путем обмена соответственными сечениями ориентаций $(i_1)$ и $(i_2)$, находятся среди трансверсалей исходной матрицы $A$. Наоборот, каждая трансверсаль матрицы $A$ является трансверсалью матрицы $A^{(i_1, i_2)}$. Таким образом, каждый член данного детерминанта матрицы $A$ будет иметь равный себе член среди членов детерминанта матрицы $A^{(i_1, i_2)}$, обладающего такой же сигнатурой, как и данный детерминант, или отличающейся от нее лишь знаками над индексами $i_1$ и $i_2$, смотря по тому, имеют ли индексы $i_1$, $i_2$ один и тот же или противоположный характер. Так как в каждом из рассматриваемых детерминантов все члены различны, а число их одно и то же, то эти детерминанты равны.

Следствие. *Гипердетерминант и перманент не меняются при любом транспонировании их матриц.*

Свойство III. *От перестановки двух сечений (простых) одной и той же ориентации многомерный детерминант не меняется, если ориентация — неальтернативная, и только меняет знак, если ориентация — альтернативная.*

В самом деле, трансверсали матрицы $A'$, в которую переходит матрица $A = \| A_{i_1 i_2 \ldots i_p} \|$ $(i_1, i_2, \ldots, i_p = 1, 2, \ldots, n)$ данного детерминанта при перестановке двух каких-нибудь сечений (простых) одной и той же ориентации, например, $i_1^{(\mu)}$-го и $i_1^{(\nu)}$-го $(1 \leqq \mu < \nu \leqq n)$ сечений ориентации $(i_1)$, ничем не отличаются в своей совокупности от трансверсалей матрицы $A$. Возьмем какую-нибудь трансверсаль

$$A_{i_1^{(1)} i_2^{(1)} \ldots i_p^{(1)}}, \ \ldots, \ A_{i_1^{(\mu)} i_2^{(\mu)} \ldots i_p^{(\mu)}}, \ \ldots, \ A_{i_1^{(\nu)} i_2^{(\nu)} \ldots i_p^{(\nu)}}, \ \ldots, \ A_{i_1^{(n)} i_2^{(n)} \ldots i_p^{(n)}}$$

матрицы $A$. Содержащаяся в ней пара элементов

$$A_{i_1^{(\mu)} i_2^{(\mu)} \ldots i_p^{(\mu)}}, \qquad A_{i_1^{(\nu)} i_2^{(\nu)} \ldots i_p^{(\nu)}}$$

занимает в преобразованной матрице $A'$ положение, соответствующее положению трансверсальной пары элементов

$$A_{i_1^{(\nu)} i_2^{(\mu)} \ldots i_p^{(\mu)}}, \qquad A_{i_1^{(\mu)} i_2^{(\nu)} \ldots i_p^{(\nu)}},$$

тогда как остальные элементы трансверсали занимают в матрице $A'$ то же положение, как и в матрице $A$. Таким образом, члену детерминанта матрицы $A$, составленному из произведения элементов рассматриваемой трансверсали и дополнительного множителя $(-1)^N$, определяемого сигнатурой детерминанта, соответствует член косигнатурного детерминанта матрицы $A'$, составленный из произведения тех же элементов и дополнительного множителя $(-1)^{N'}$, где $N'$ определяется той же сигнатурой и имеет ту же четность, как и $N$, или противоположную ей, в зависимости от того, будет ли индекс $i_1$ неальтернативным или альтернативным, (т. е. в зависимости от того, будет ли сигнатура иметь вид $(\overset{+}{i_1} \ldots)$ или $(\overset{\pm}{i_1} \ldots)$), так как только перестановки, образуемые значениями индекса $i_1$ в элементах обоих членов, различны и, переходя друг в друга транспозицией $(i_1^{(\mu)}, i_1^{(\nu)})$, имеют противоположные четности. В первом случае эти члены, а следовательно, и содержащие их детерминанты, равны, а во втором случае лишь отличаются знаком.

Следствие. *От перестановки двух сечений (простых) одной и той же ориентации перманент не меняется, а гипердетерминант лишь меняет знак.*

Следующие два свойства очевидны, если принять во внимание свойство III.

Свойство IV. *Многомерный детерминант не меняется от одинакового числа перестановок сечений (простых) каждой ориентации.*

Свойство V. *Если в многомерном детерминанте два сечения (простых) одной и той же ориентации одинаковы, то этот детерминант будет равен нулю, если ориентация — альтернативная, и не будет необходимо равным нулю, если ориентация — неальтернативная.*

Следствие. *Гипердетерминант, у котороео два сечения (простые) одной и той же ориентации одинаковы, равен нулю.*

Свойство VI. *Если все элементы какого-либо сечения (простого) в многомерном детерминанте умножить на некоторое число, то сам детерминант умножится на это число.*

Действительно, пусть все элементы некоторого сечения (простого) в многомерном детерминанте умножены на число $t$. В каждый член детерминанта должен войти сомножителем один элемент рассматриваемого сечения, а следовательно, и число $t$, т. е. сам детерминант умножается на $t$.

Это свойство допускает и такую формулировку: *общий множитель всех элементов какого-либо сечения (простого) в многомерном детерминанте можно вынести за знак детерминанта.*

Свойство VII. *Если в многомерном детерминанте два сечения (простые) одной и той же ориентации пропорциональны, то этот детерминант будет равен нулю, если ориентация — альтернативная, и не будет необходимо равным нулю, если ориентация — неальтернативная.*

В самом деле, пусть в рассматриваемом многомерном детерминанте элементы некоторого сечения (простого) какой-нибудь ориентации отличаются от соответственных элементов другого сечения той же ориентации одним и тем же множителем $t$. Вынося тогда, согласно свойству VI, общий множитель $t$ за знак детерминанта, мы получим детерминант, у которого два сечения (простые) одной и той же ориентации одинаковы и к которому, следовательно, применимо свойство V.

Следствие. *Гипердетерминант, у которого два сечения (простые) одной и той же ориентации пропорциональны, равен нулю.*

Замечание 2.1. Свойство V, а также свойство I являются, очевидно, частными случаями свойства VII.

2. До сих пор мы рассматривали многомерные детерминанты с одночленными элементами. Обратимся теперь к рассмотрению многомерных детерминантов с многочленными элементами и установим принцип разложения их на сумму детерминантов, элементы которых являются одночленами.

Свойство VIII. *Если в $p$-мерном детерминанте $n$-го порядка каждый элемент некоторого сечения (простого) какой-нибудь ориентации, например $\nu$-го $(1 \leq \nu \leq n)$ сечения ориентации $(i_1)$, представлен в виде алгебраической суммы некоторого числа $h$ слагаемых, т. е.*

$$A_{\nu i_2^{(\nu)} \dots i_p^{(\nu)}} = \sum_{\mu=1}^{h} A^{(\mu)}_{\nu i_2^{(\nu)} \dots i_p^{(\nu)}} \qquad (i_2^{(\nu)}, \ \dots, \ i_p^{(\nu)} = 1, \ 2, \ \dots, \ n),$$

*то этот детерминант равен сумме $h$ косигнатурных детерминантов, у которых все сечения ориентации $(i_1)$, кроме $\nu$-го, такие же, как и в данном детерминанте, а $\nu$-е сечение в $\mu$-м $(1 \leq \mu \leq h)$ детерминанте состоит из элементов $A^{(\mu)}_{\nu i_2^{(\nu)} \dots i_p^{(\nu)}}$.*

Действительно, при упомянутом выше условии член $p$-мерного детерминанта $n$-го порядка

$$(-1)^N A_{1i_2^{(1)}\ldots i_p^{(1)}} A_{2i_2^{(2)}\ldots i_p^{(2)}} \ldots A_{\nu i_2^{(\nu)}\ldots i_p^{(\nu)}} \ldots A_{ni_2^{(n)}\ldots i_p^{(n)}},$$

где дополнительный множитель $(-1)^N$ определяется сигнатурой детерминанта, можно представить в виде

$$\sum_{\mu=1}^{h} (-1)^N A_{1i_2^{(1)}\ldots i_p^{(1)}} A_{2i_2^{(2)}\ldots i_p^{(2)}} \ldots A^{(\mu)}_{\nu i_2^{(\nu)}\ldots i_p^{(\nu)}} \ldots A_{ni_2^{(n)}\ldots i_p^{(n)}},$$

т. е. в виде алгебраической суммы $h$ членов косигнатурных детерминантов, получающихся из данного заменой каждого элемента $A_{\nu i_2^{(\nu)}\ldots i_p^{(\nu)}}$ в $\nu$-м сечении ориентации $(i_1)$ элементом

$$A^{(\mu)}_{\nu i_2^{(\nu)}\ldots i_p^{(\nu)}} \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, h).$$

Составляя эти суммы для каждого из $(n!)^{p-1}$ членов данного детерминанта и собирая вместе их $\mu$-е слагаемые, мы получим, очевидно, $\mu$-й косигнатурный детерминант, отличающийся от данного лишь тем, что в $\nu$-м сечении ориентации $(i_1)$ вместо элементов $A_{\nu i_2^{(\nu)}\ldots i_p^{(\nu)}}$ стоят элементы $A^{(\mu)}_{\nu i_2^{(\nu)}\ldots i_p^{(\nu)}}$. Полагая $\mu$ последовательно равным $1, 2, \ldots, h$, получим $h$ косигнатурных детерминантов, сумма которых будет равна данному детерминанту.

Будем говорить, что $\nu$-е $(1 \leqq \nu \leqq n)$ сечение (простое) какой-нибудь ориентации в многомерном детерминанте $n$-го порядка есть **линейная комбинация** его остальных сечений той же ориентации, если для всякого $\mu$-го $(\mu = 1, 2, \ldots, \nu-1, \nu+1, \ldots n)$ из этих сечений можно указать такое число $t_\mu$, что, умножая $\mu$-е сечение на $t_\mu$, а затем складывая все сечения, кроме $\nu$-го, мы получим $\nu$-е сечение (умножение сечения на какое-нибудь число надо понимать как умножение всех его элементов на это число, а сложение сечений одной и той же ориентации — как сложение соответственных элементов этих сечений). Некоторые из множителей $t_\mu$ могут быть равными нулю, т. е. $\nu$-е сечение фактически будет линейной комбинацией не всех $n-1$ оставшихся сечений, а лишь некоторых из них. В частности, если только один из множителей $t_\mu$ не равен нулю, мы имеем случай пропорциональности двух сечений. Наконец, если сечение состоит целиком из нулей, то оно всегда будет линейной комбинацией остальных сечений, — случай, когда все множители $t_\mu$ равны нулю. Первому из этих частных случаев соответствует свойство VII, обобщением которого является

**Свойство IX.** *Если одно из сечений (простых) какой-нибудь ориентации в многомерном детерминанте есть линейная комбинация его других сечений той же ориентации, то детерминант будет равен нулю, если ориентация — альтернативная, и не будет необходимо равным нулю, если ориентация — неальтернативная.*

В самом деле, пусть в рассматриваемом многомерном детерминанте $n$-го порядка некоторое сечение (простое) какой-нибудь ориентации, например $\nu$-е $(1 \leqq \nu \leqq n)$ сечение ориентации $(i_1)$, есть линейная комбинация $h$ других сечений той же ориентации. Тогда каждый элемент этого сечения будет алгебраической суммой $h$ слагаемых, а потому, на основании свойства VIII, детерминант может быть представлен в виде суммы $h$ косигнатурных детерминантов, в каждом из которых $\nu$-е сечение ориентации $(i_1)$ будет пропорционально одному из остальных сечений той же ориентации.

По свойству VII все эти детерминанты равны нулю, если ориентация $(i_1)$ — альтернативная. В этом случае равен нулю, следовательно, и рассматриваемый детерминант. Последний, очевидно, не будет необходимо равным нулю, если ориентация $(i_1)$ — неальтернативная.

Следствие. *Гипердетерминант равен нулю, если одно из его сечений (простых) какой-либо ориентации есть линейная комбинация других сечений той же ориентации.*

Следующее свойство, указанное Гегенбауером [84], является обобщением теоремы Якоби, относящейся к обычным детерминантам.

Свойство X. *Если в многомерном детерминанте к некоторому сечению (простому) какой-нибудь ориентации прибавляется другое сечение той же ориентации, умноженное на какое-либо число, то детерминант не меняется, если ориентация — альтернативная, и, вообще говоря, меняется, если ориентация — неальтернативная.*

Действительно, пусть в данном многомерном детерминанте к некоторому сечению какой-нибудь ориентации, например $(i_1)$, прибавляется другое сечение той же ориентации, умноженное на какое-либо число. Тогда по свойству VIII детерминант делается равным сумме двух косигнатурных детерминантов. Один из них есть данный детерминант, а другой содержит два пропорциональных сечения ориентации $(i_1)$ и согласно свойству VII будет равен нулю, если ориентация $(i_1)$ — альтернативная. Последнего заключения, однако, нельзя сделать в силу того же свойства VII, если ориентация $(i_1)$ — неальтернативная.

Следствие. *Гипердетерминант не меняется, если к одному из его сечений (простых) какой-нибудь ориентации прибавляется другое сечение той же ориентации, умноженное на какое-либо число.*

### Упражнения

1. Пусть матрица $A' = \| A'_{i_1 i_2 \ldots i_p} \|$ — транспонированная относительно матрицы $A = \| A_{i_1 i_2 \ldots i_p} \|$ соответственно подстановке $S = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \ldots & i_p \\ i_{\nu_1} & i_{\nu_2} & \ldots & i_{\nu_p} \end{pmatrix}$. Тогда детерминант матрицы $A$ с сигнатурой $(\overset{+}{i}_{\alpha_1} \ldots \overset{\pm}{i}_{\alpha_m} \overset{+}{i}_{\alpha_{m+1}} \ldots \overset{+}{i}_{\alpha_p})$ равен детерминанту матрицы $A'$ с сигнатурой $(\overset{\pm}{i}_{\beta_1} \ldots \overset{\pm}{i}_{\beta_m} \overset{+}{i}_{\beta_{m+1}} \ldots \overset{+}{i}_{\beta_p})$, где $m$ — любое четное число, не превышающее $p$, а $\begin{pmatrix} \alpha_1 & \ldots & \alpha_m & \alpha_{m+1} & \ldots & \alpha_p \\ \beta_1 & \ldots & \beta_m & \beta_{m+1} & \ldots & \beta_p \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & p \\ \nu_1 & \nu_2 & \ldots & \nu_p \end{pmatrix}$ — лишь разные записи одной и той же подстановки $p$-й степени, иначе говоря, любой детерминант матрицы $A$ с той или иной сигнатурой $\sigma$ равен детерминанту матрицы $A'$ с сигнатурой, получающейся из $\sigma$ с помощью подстановки $S$. Доказать.

2. Непосредственным вычислением проверить, что:

а) $|A_{\overset{\pm}{i}\overset{\pm}{j}\overset{+}{k}}|_2 = |A^{(i,\, j)}_{\overset{\pm}{i}\overset{\pm}{j}\overset{+}{k}}|_2, \quad |A_{\overset{+}{i}\overset{+}{j}\overset{+}{k}}|_2 = |A^{(i,\, j)}_{\overset{+}{i}\overset{+}{j}\overset{+}{k}}|_2,$

$|A_{\overset{\pm}{i}\overset{+}{j}\overset{\pm}{k}}|_2 = |A^{(i,\, j)}_{\overset{+}{i}\overset{\pm}{j}\overset{\pm}{k}}|_2, \quad |A_{\overset{+}{i}\overset{\pm}{j}\overset{\pm}{k}}|_2 = |A^{(i,\, j)}_{\overset{\pm}{i}\overset{+}{j}\overset{\pm}{k}}|_2;$

б) $|A_{\overset{+}{i}\overset{\pm}{j}\overset{\pm}{k}}|_2 = |A^{(i,\, j,\, k)}_{\overset{\pm}{i}\overset{+}{j}\overset{\pm}{k}}|_2 = |A^{(i,\, k,\, j)}_{\overset{\pm}{i}\overset{\pm}{j}\overset{+}{k}}|_2,$

$|A_{\overset{\pm}{i}\overset{+}{j}\overset{\pm}{k}}|_2 = |A^{(i,\, j,\, k)}_{\overset{\pm}{i}\overset{\pm}{j}\overset{+}{k}}|_2 = |A^{(i,\, k,\, j)}_{\overset{+}{i}\overset{\pm}{j}\overset{\pm}{k}}|_2, \quad |A_{\overset{\pm}{i}\overset{\pm}{j}\overset{+}{k}}|_2 = |A^{(i,\, j,\, k)}_{\overset{+}{i}\overset{\pm}{j}\overset{\pm}{k}}|_2 = |A^{(i,\, k,\, j)}_{\overset{\pm}{i}\overset{+}{j}\overset{\pm}{k}}|_2.$

3. Дать иллюстрацию свойств III и IV многомерных детерминантов, переставляя параллельные сечения в детерминанте $|A_{\overset{+}{i}\overset{\pm}{j}\overset{\pm}{k}}|_2$.

4. Вычислить все кодетерминанты матрицы

$$\left\|\begin{array}{cc|cc} A_{111} & A_{112} & A_{111} & A_{112} \\ A_{121} & A_{122} & A_{121} & A_{122} \end{array}\right\| \begin{array}{l} \longrightarrow (i) \\ \ulcorner\!\longrightarrow (k) \\ \downarrow \\ (j) \end{array}.$$

5. Кодетерминанты матрицы

$$\left\|\begin{array}{cc|cc} A_{111}+B_{111} & A_{112}+B_{112} & A_{211} & A_{212} \\ A_{121}+B_{121} & A_{122}+B_{122} & A_{221} & A_{222} \end{array}\right\| \begin{array}{l} \longrightarrow (i) \\ \ulcorner\!\longrightarrow (k) \\ \downarrow \\ (j) \end{array}$$

представить в виде суммы косигнатурных детерминантов с одночленными элементами.

6. Дать иллюстрацию свойства X многомерных детерминантов, составляя косигнатурные детерминанты матриц

$$\left\|\begin{array}{cc|cc} A_{111} & A_{112} & A_{211} & A_{212} \\ A_{121} & A_{122} & A_{221} & A_{222} \end{array}\right\| \begin{array}{l} \longrightarrow (i) \\ \ulcorner\!\longrightarrow (k) \\ \downarrow \\ (j) \end{array}, \qquad \left\|\begin{array}{cc|cc} A_{111}+tA_{211} & A_{112}+tA_{212} & A_{211} & A_{212} \\ A_{121}+tA_{221} & A_{122}+tA_{222} & A_{221} & A_{222} \end{array}\right\| \begin{array}{l} \longrightarrow (i) \\ \ulcorner\!\longrightarrow (k) \\ \downarrow \\ (j) \end{array}.$$

7. Будем называть элемент кубического детерминанта **четным** или **нечетным** относительно какой-либо пары его индексов в зависимости от того, будет ли сумма этих индексов четной или нечетной. Доказать, что кубический детерминант $n$-го порядка не меняется от перемены знаков у всех его элементов, нечетных относительно одной какой-нибудь пары индексов, и что этот же детерминант от перемены знаков у всех его элементов, четных относительно одной какой-нибудь пары индексов, также не меняется, если $n$ — четное, и лишь меняет знак, если $n$ — нечетное (Гаврилович [83]).

8. Если кубическая матрица $\|A_{ijk}\|$ — симметрическая относительно индексов $i$, $j$, то $|A_{\substack{+\,+\,\pm\\ i\,j\,k}}| = |A_{\substack{\pm\,+\,\pm\\ i\,j\,k}}|$. Доказать.

9. Если кубическая матрица $n$-го порядка $\|A_{ijk}\|$ — кососимметрическая относительно индексов $i$, $j$, то $|A_{\substack{+\,\pm\,\pm\\ i\,j\,k}}| = (-1)^n |A_{\substack{\pm\,+\,\pm\\ i\,j\,k}}|$. Доказать.

10. Показать, что $|A_{\substack{+\,\pm\,\pm\\ i\,j\,k}}| = |A_{\substack{\pm\,+\,\pm\\ i\,j\,k}}| = |A_{\substack{\pm\,\pm\,+\\ i\,j\,k}}|$, если матрица $\|A_{ijk}\|$ — симметрическая.

11. Показать, что кубический детерминант $n$-го порядка может быть представлен в виде суммы $n$ косигнатурных детерминантов того же порядка, отличающихся от данного детерминанта и между собой лишь элементами какого-нибудь сечения, которое в каждом из слагаемых детерминантов состоит из нулей, за исключением одной его строки одного какого-нибудь направления, причем эти $n$ ненулевых строк являются различными строками того же направления в соответствующем сечении данного детерминанта. Обобщить на случай детерминанта любого числа измерений.

12. Если $p$-мерная матрица $\|A_{i_1 i_2 \ldots i_p}\|$ — симметрическая, то все ее детерминанты одного и того же рода $m$, где $m$ — любое четное число, не превышающее $p$, одинаковы. Доказать.

13. Сколько различных детерминантов может быть у симметрической $p$-мерной матрицы?

14. Доказать, что все детерминанты кососимметрической пространственной матрицы нечетного порядка равны нулю.

15. Если каждый элемент многомерного детерминанта $n$-го порядка представляется в виде алгебраической суммы $h$ одночленов, то этот детерминант равен сумме $h^n$ косигнатурных детерминантов $n$-го порядка с одночленными элементами. Доказать. (Случай кубического детерминанта рассматривался Гашпаром [78].)

16. Свойство X многомерных детерминантов распространить на случай, когда к некоторому сечению (простому) какой-нибудь ориентации прибавляется любая линейная комбинация других сечений той же ориентации.

## § 3. Разложение детерминантов пространственной матрицы

1. Вычисление детерминантов пространственной матрицы, если непосредственно применять их определение, становится по мере возрастания порядка матрицы все более и более громоздким. Существуют более простые методы вычисления многомерных детерминантов, основанные на выражении их через детерминанты низшего числа измерений или через детерминанты низшего порядка.

Рассмотрим сперва случай понижения числа измерений многомерных детерминантов, в первую очередь кубических.

Возьмем в кубической матрице $n$-го порядка

$$A = \| A_{ijk} \| \qquad (i,\ j,\ k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$$

одно из $n!$ двумерных трансверсальных сечений, соответствующих направлению $(k)$:

$$\left\| \begin{matrix} A_{i^{(1)}11} & A_{i^{(1)}12} & \ldots & A_{i^{(1)}1n} \\ A_{i^{(2)}21} & A_{i^{(2)}22} & \ldots & A_{i^{(2)}2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{i^{(n)}n1} & A_{i^{(n)}n2} & \ldots & A_{i^{(n)}nn} \end{matrix} \right\|, \tag{3.1}$$

где

$$i^{(1)},\ i^{(2)},\ \ldots,\ i^{(n)} \tag{3.2}$$

— некоторая перестановка из чисел $1,\ 2,\ \ldots,\ n$. В элементах квадратной матрицы $n$-го порядка (3.1) каждую пару первых двух индексов $i^{(\nu)}$, $\nu$ $(\nu = 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$ будем рассматривать как один двукратный индекс $\underbrace{i^{(\nu)}\nu}$. Обозначая детерминант этой матрицы через $|A_{\underbrace{i\overset{\pm}{j}}\overset{\pm}{k}}|$, имеем:

$$|A_{\underbrace{i\overset{\pm}{j}}\overset{\pm}{k}}| = \sum (-1)^{I_k} A_{\underbrace{i^{(1)}1}k^{(1)}} A_{\underbrace{i^{(2)}2}k^{(2)}} \ldots A_{\underbrace{i^{(n)}n}k^{(n)}}, \tag{3.3}$$

где

$$k^{(1)},\ k^{(2)},\ \ldots,\ k^{(n)} \tag{3.4}$$

— некоторая перестановка из чисел $1,\ 2,\ \ldots,\ n$, а $I_k$ — число инверсий в ней, и суммирование распространено на все $n!$ перестановок (3.4). Составляя детерминанты вида (3.3) для всех $n!$ перестановок (3.2) и беря их сумму, получим согласно определению детерминант $|A_{\overset{+}{i}\overset{\pm}{j}\overset{\pm}{k}}|$ матрицы $A$. Таким образом, имеем разложение кубического детерминанта $n$-го порядка $|A_{\overset{+}{i}\,j\,\overset{\pm}{k}}|$ на сумму $n!$ обычных детерминантов, порождаемых матрицами вида (3.1):

$$|A_{\overset{+}{i}\overset{\pm}{j}\overset{\pm}{k}}| = \sum |A_{\underbrace{i\overset{\pm}{j}}\overset{\pm}{k}}|. \tag{3.5}$$

Точно так же, беря в матрице $A$ одно из $n!$ двумерных трансверсальных сечений, соответствующих направлению $(j)$:

$$\left\| \begin{matrix} A_{i^{(1)}11} & A_{i^{(1)}21} & \ldots & A_{i^{(1)}n1} \\ A_{i^{(2)}12} & A_{i^{(2)}22} & \ldots & A_{i^{(2)}n2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{i^{(n)}1n} & A_{i^{(n)}2n} & \ldots & A_{i^{(n)}nn} \end{matrix} \right\|, \tag{3.6}$$

и рассматривая в элементах квадратной матрицы $n$-го порядка (3.6) каждую пару крайних индексов $i^{(\nu)}$, $\nu$ $(\nu = 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$ как один двукратный индекс $\underbrace{i^{(\nu)}\nu}$, составим детерминант этой матрицы

$$|A_{\underbrace{i\overset{\pm}{j}\overset{\pm}{k}}}| = \sum (-1)^{I_j} A_{\underbrace{i^{(1)}j^{(1)}1}} A_{\underbrace{i^{(2)}j^{(2)}2}} \ldots A_{\underbrace{i^{(n)}j^{(n)}n}}, \tag{3.7}$$

где

$$j^{(1)},\ j^{(2)},\ \ldots,\ j^{(n)} \tag{3.8}$$

— некоторая перестановка из чисел $1, 2, \dots, n$, а $I_j$ — число инверсий в ней, и суммирование распространено на все $n!$ перестановок (3.8). Сумма $n!$ детерминантов вида (3.7), соответствующих всем перестановкам (3.2), снова дает детерминант $|A_{\overset{+}{i}\overset{\pm}{j}\overset{\pm}{k}}|$ матрицы $A$. Таким образом, имеем другое разложение кубического детерминанта $n$-го порядка $|A_{\overset{+}{i}\overset{\pm}{j}\overset{\pm}{k}}|$ на сумму $n!$ обычных детерминантов, порождаемых матрицами вида (3.6):

$$|A_{\overset{+}{i}\overset{\pm}{j}\overset{\pm}{k}}| = \sum |A_{\underbrace{i\overset{\pm}{j}\overset{\pm}{k}}}|. \tag{3.9}$$

Возьмем, наконец, в матрице $A$ одно из $n!$ двумерных трансверсальных сечений, соответствующих направлению $(i)$:

$$\left\| \begin{matrix} A_{1j^{(1)}k^{(1)}} & A_{2j^{(1)}k^{(1)}} & \dots & A_{nj^{(1)}k^{(1)}} \\ A_{1j^{(2)}k^{(2)}} & A_{2j^{(2)}k^{(2)}} & \dots & A_{nj^{(2)}k^{(2)}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1j^{(n)}k^{(n)}} & A_{2j^{(n)}k^{(n)}} & \dots & A_{nj^{(n)}k^{(n)}} \end{matrix} \right\|. \tag{3.10}$$

Рассматривая каждую пару последних двух индексов $j^{(\nu)}$, $k^{(\nu)}$ $(\nu = 1, 2, \dots, n)$ в элементах квадратной матрицы (3.10) как один двукратный индекс $\underbrace{j^{(\nu)}k^{(\nu)}}$, составим ее перманент

$$|A_{\overset{+}{i}\underbrace{j\overset{+}{k}}}| = \sum A_{1\underbrace{j^{(1)}k^{(1)}}} A_{2\underbrace{j^{(2)}k^{(2)}}} \dots A_{n\underbrace{j^{(n)}k^{(n)}}},$$

где суммирование распространено на все $n!$ перестановок (3.4) или (3.8). Алгебраическая сумма выражений $(-1)^{I_j+I_k}|A_{\overset{+}{i}\underbrace{j\overset{+}{k}}}|$, распространенная на все $n!$ двумерных трансверсальных сечений, соответствующих направлению $(i)$, очевидно, дает детерминант $|A_{\overset{+}{i}\overset{\pm}{j}\overset{\pm}{k}}|$. Имеем, таким образом, разложение кубического детерминанта $n$-го порядка $|A_{\overset{+}{i}\overset{\pm}{j}\overset{\pm}{k}}|$ на алгебраическую сумму перманентов, порождаемых матрицами вида (3.10),

$$|A_{\overset{+}{i}\overset{\pm}{j}\overset{\pm}{k}}| = \sum (-1)^{I_j+I_k} |A_{\overset{+}{i}\underbrace{j\overset{+}{k}}}|. \tag{3.11}$$

Кубические детерминанты $n$-го порядка $|A_{\overset{\pm}{i}\overset{+}{j}\overset{\pm}{k}}|$ и $|A_{\overset{\pm}{i}\overset{\pm}{j}\overset{+}{k}}|$ разлагаются на суммы обычных детерминантов и на алгебраические суммы обычных перманентов по формулам, аналогичным (3.5), (3.9) и (3.11).

Итак, каждый из детерминантов $|A_{\overset{+}{i}\overset{\pm}{j}\overset{\pm}{k}}|$, $|A_{\overset{\pm}{i}\overset{+}{j}\overset{\pm}{k}}|$, $|A_{\overset{\pm}{i}\overset{\pm}{j}\overset{+}{k}}|$ кубической матрицы $n$-го порядка $A$ может быть представлен в виде суммы $n!$ обычных детерминантов, порождаемых трансверсальными сечениями, соответствующими любому из альтернативных направлений, или в виде алгебраической суммы $n!$ обычных перманентов, порождаемых трансверсальными сечениями, соответствующими неальтернативному направлению.

Перманент $|A_{\overset{+}{i}\overset{+}{j}\overset{+}{k}}|$ матрицы $A$ разлагается на сумму $n!$ обычных перманентов, порождаемых трансверсальными сечениями, соответствующими любому из направлений $(i)$, $(j)$, $(k)$. Имеем, следовательно,

$$|A_{\overset{+}{i}\overset{+}{j}\overset{+}{k}}| = \sum |A_{\underbrace{i\overset{+}{j}}\overset{+}{k}}| = \sum |A_{\underbrace{i\overset{+}{j}\overset{+}{k}}}| = \sum |A_{\overset{+}{i}\underbrace{j\overset{+}{k}}}|. \tag{3.12}$$

Для детерминантов кубической матрицы 2-го порядка находим согласно предыдущим формулам следующие разложения:

$$
\begin{aligned}
|A_{\overset{+}{i}\overset{\pm}{j}\overset{+}{k}}|_2 &= \begin{vmatrix} A_{111} & A_{112} \\ A_{221} & A_{222} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} A_{211} & A_{212} \\ A_{121} & A_{122} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_{111} & A_{121} \\ A_{212} & A_{222} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} A_{211} & A_{221} \\ A_{112} & A_{122} \end{vmatrix} = \\
&= \begin{vmatrix} \overset{(+)}{A_{111}} & \overset{(+)}{A_{211}} \\ A_{122} & A_{222} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \overset{(+)}{A_{112}} & \overset{(+)}{A_{212}} \\ A_{121} & A_{221} \end{vmatrix}, \\
|A_{\overset{\pm}{i}\overset{+}{j}\overset{+}{k}}|_2 &= \begin{vmatrix} A_{111} & A_{112} \\ A_{221} & A_{222} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} A_{121} & A_{122} \\ A_{211} & A_{212} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_{111} & A_{211} \\ A_{122} & A_{222} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} A_{121} & A_{221} \\ A_{112} & A_{212} \end{vmatrix} = \\
&= \begin{vmatrix} \overset{(+)}{A_{111}} & \overset{(+)}{A_{121}} \\ A_{212} & A_{222} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \overset{(+)}{A_{211}} & \overset{(+)}{A_{221}} \\ A_{112} & A_{122} \end{vmatrix}, \\
|A_{\overset{\pm}{i}\overset{\pm}{j}\overset{+}{k}}|_2 &= \begin{vmatrix} A_{111} & A_{211} \\ A_{122} & A_{222} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} A_{112} & A_{212} \\ A_{121} & A_{221} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_{111} & A_{121} \\ A_{212} & A_{222} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} A_{112} & A_{122} \\ A_{211} & A_{221} \end{vmatrix} = \\
&= \begin{vmatrix} \overset{(+)}{A_{111}} & \overset{(+)}{A_{112}} \\ A_{221} & A_{222} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \overset{(+)}{A_{121}} & \overset{(+)}{A_{122}} \\ A_{211} & A_{212} \end{vmatrix}, \\
|A_{\overset{+}{i}\overset{+}{j}\overset{+}{k}}|_2 &= \begin{vmatrix} \overset{(+)}{A_{111}} & \overset{(+)}{A_{112}} \\ A_{221} & A_{222} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \overset{(+)}{A_{211}} & \overset{(+)}{A_{222}} \\ A_{121} & A_{122} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \overset{(+)}{A_{111}} & \overset{(+)}{A_{121}} \\ A_{212} & A_{222} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \overset{(+)}{A_{211}} & \overset{(+)}{A_{221}} \\ A_{112} & A_{122} \end{vmatrix} = \\
&= \begin{vmatrix} \overset{(+)}{A_{111}} & \overset{(+)}{A_{211}} \\ A_{122} & A_{222} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \overset{(+)}{A_{112}} & \overset{(+)}{A_{212}} \\ A_{121} & A_{221} \end{vmatrix}.
\end{aligned}
$$

2. Обращаясь теперь к $p$-мерной матрице $n$-го порядка $A$, напишем ее в виде

$$
A = \| A_{i_1 \ldots i_r j_1 \ldots j_s j_t k_1 \ldots k_u} \| \quad \begin{pmatrix} t = s+1, & r+t=m, & m+u=p, \\ 2 \leqq m \leqq p-1 & & \end{pmatrix}. \tag{3.13}
$$

Будем рассматривать какие-нибудь $m$ индексов, например, первые $m$ индексов $i_1, \ldots, i_r, j_1, \ldots, j_s, j_t$, в элементах матрицы (3.13) как один $m$-кратный индекс $\underbrace{i_1 \ldots i_r j_1 \ldots j_s j_t}$ и обозначим через

$$
\| A_{\underbrace{i_1 \ldots i_r j_1 \ldots j_s j_t} k_1 \ldots k_u} \| \tag{3.14}
$$

одну из $(p-m+1)$-мерных матриц $n$-го порядка, которые представляют $(n!)^{m-1}$ трансверсальных сечений $p-m+1$ измерений матрицы (3.13), соответствующих ориентации $(i_1 \ldots i_r j_1 \ldots j_s j_t)$. Каждая из $(n!)^{p-m}$ трансверсалей матрицы (3.14) является также трансверсалью матрицы (3.13), и трансверсалями $(n!)^{m-1}$ матриц вида (3.14) исчерпывается совокупность всех трансверсалей матрицы (3.13). Из упомянутых выше $m$ индексов в элементах матрицы (3.13) какие-нибудь $r$ $(0 \leqq r \leqq m)$ индексов, например $i_1, \ldots, i_r$, — будем предполагать неальтернативными, а остальные $t$ $(0 \leqq t \leqq m)$ индексов $j_1, \ldots, j_s, j_t$ — альтернативными. Рассмотрим $p$-мерный детерминант $n$-го порядка

$$
|A| = |A_{\overset{+}{i_1} \ldots \overset{+}{i_r} \overset{\pm}{j_1} \ldots \overset{\pm}{j_s} \overset{+}{j_t} \ldots}|, \tag{3.15}
$$

где многоточием в конце заменена остальная часть сигнатуры, относящаяся к индексам $k_1, \ldots, k_u$. Будем различать два случая соответственно четности числа $t$.

В первом случае, когда $t$ — нечетное, положим в элементах матрицы (3.14) $m$-кратный индекс $\underbrace{i_1 \ldots i_r j_1 \ldots j_s j_t}$, альтернативным по одному какому-либо из индексов $j_1, \ldots, j_s, j_t$, например по индексу $j_t$, и составим $(p-m+1)$-мерный детерминант $n$-го порядка

$$|A_{\underbrace{i_1 \ldots i_r j_1 \ldots j_s \overset{\pm}{j_t}}} \ldots|, \tag{3.16}$$

где многоточием в конце заменена остальная часть сигнатуры, ничем не отличающаяся от той части сигнатуры детерминанта (3.15), которая относится к индексам $k_1, \ldots, k_u$. Тогда детерминант (3.15), очевидно, может быть разложен на алгебраическую сумму $(n!)^{m-1}$ $(p-m+1)$-мерных детерминантов вида (3.16)

$$|A| = \sum (-1)^{\sum\limits_{\mu=1}^{s} I_\mu} |A_{\underbrace{i_1 \ldots i_r j_1 \ldots j_s \overset{\pm}{j_t}}} \ldots|, \tag{3.17}$$

где $I_\mu$ — число инверсий в перестановке $j_\mu^{(1)}, j_\mu^{(2)}, \ldots, j_\mu^{(n)}$, образуемой значениями индекса $j_\mu$ в элементах каждого члена детерминанта (3.16), которые могут быть взяты в такой последовательности, чтобы значения индекса $j_t$ шли в натуральном порядке.

Во втором случае, когда $t$ — четное (в частности, 0), положим в элементах матрицы (3.14) $m$-кратный индекс $\underbrace{i_1 \ldots i_r j_1 \ldots j_t}$ неальтернативным и составим $(p-m+1)$-мерный детерминант (в частности, перманент, если все индексы $k_1, \ldots, k_u$ — неальтернативные) $n$-го порядка

$$|A_{\underbrace{i_1 \ldots i_r j_1 \ldots \overset{+}{j_t}}} \ldots|, \tag{3.18}$$

где, как и в детерминанте (3.16), многоточием в конце заменена остальная часть сигнатуры, тождественная с частью сигнатуры детерминанта (3.15), относящейся к индексам $k_1, \ldots, k_u$. Тогда получим разложение детерминанта (3.15) на алгебраическую сумму $(n!)^{m-1}$ $(p-m+1)$-мерных детерминантов (в частности, перманентов) вида (3.18)

$$|A| = \sum (-1)^{\sum\limits_{\mu=1}^{t} I_\mu} |A_{\underbrace{i_1 \ldots i_r j_1 \ldots \overset{+}{j_t}}} \ldots|. \tag{3.19}$$

Последняя формула, если $t=0$ и все индексы $k_1, \ldots, k_u$ — неальтернативные, дает разложение $p$-мерного перманента $n$-го порядка $\overset{(+)(+)}{|A|}$ на сумму $(n!)^{m-1}$ $(p-m+1)$-мерных перманентов того же порядка:

$$\overset{(+)(+)}{|A|} = \sum |A_{\underbrace{i_1 \ldots i_m} \overset{+}{k_1} \ldots \overset{+}{k_u}}|. \tag{3.20}$$

Повторными разложениями детерминантов (в частности, перманентов), фигурирующих в предыдущих формулах, детерминант $p$ измерений можно представить в виде алгебраической суммы косигнатурных детерминантов меньшего числа измерений $q$. При этом сигнатура слагаемых детерминантов определяется в зависимости от того, каким образом $p$ индексов в данном детерминанте распределены на $q$ групп, представляющих индексы (простые или кратные) в $q$-мерных детерминантах. Именно, каждый из $q$

индексов будет неальтернативным, если он вовсе не содержит альтернативных в данном детерминанте индексов или содержит четное число их (формулы (3.20), (3.19)); если же он содержит нечетное число таких индексов, то он будет альтернативным по одному какому-нибудь из них (формула (3.17)). В частности, каждый многомерный детерминант с той или иной сигнатурой разлагается, притом различными способами, на алгебраическую сумму обычных детерминантов или перманентов. Такое разложение согласно терминологии Райса [203] называется *полным*. Оно было отмечено еще Кэли [52], рассматривавшим многомерные детерминанты как «*функции, приводимые к сумме обычных детерминантов*».

Для иллюстрации указанного выше способа понижения числа измерений многомерных детерминантов при их вычислении приведем разложения четырехмерного гипердетерминанта 2-го порядка:

а) $$|A_{\overset{\pm\pm\pm\pm}{i_1 i_2 i_3 i_4}}|_2 = \sum (-1)^{I_1+I_2} |A_{\overset{+\pm+}{\underbrace{i_1 i_2} i_3 i_4}}|_2 =$$

$$\begin{array}{cc} \longrightarrow (\underbrace{\overset{+}{i_1 i_2}}) & \longrightarrow (\underbrace{\overset{+}{i_1 i_2}}) \end{array}$$

$$= \left|\begin{array}{cc|cc} A_{\underbrace{11}11} & A_{\underbrace{11}12} & A_{\underbrace{22}11} & A_{\underbrace{22}12} \\ A_{\underbrace{11}21} & A_{\underbrace{11}22} & A_{\underbrace{22}21} & A_{\underbrace{22}22} \end{array}\right| \begin{array}{l} \ulcorner\!\longrightarrow (i_4) \\ \downarrow \\ (i_3) \end{array} - \left|\begin{array}{cc|cc} A_{\underbrace{21}11} & A_{\underbrace{21}12} & A_{\underbrace{12}11} & A_{\underbrace{12}12} \\ A_{\underbrace{21}21} & A_{\underbrace{21}22} & A_{\underbrace{12}21} & A_{\underbrace{12}22} \end{array}\right| \begin{array}{l} \ulcorner\!\longrightarrow (i_4) \\ \downarrow \\ (i_3) \end{array},$$

б) $$|A_{\overset{\pm\pm\pm}{i_1 i_2 i_3 i_4}}|_2 = \sum (-1)^{I_1+I_2} |A_{\overset{\pm}{\underbrace{i_1 i_2 i_3} i_4}}|_2 =$$

$$= \begin{vmatrix} A_{\underbrace{111}1} & A_{\underbrace{111}2} \\ A_{\underbrace{222}1} & A_{\underbrace{222}2} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} A_{\underbrace{221}1} & A_{\underbrace{221}2} \\ A_{\underbrace{112}1} & A_{\underbrace{112}2} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} A_{\underbrace{121}1} & A_{\underbrace{121}2} \\ A_{\underbrace{212}1} & A_{\underbrace{212}2} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} A_{\underbrace{211}1} & A_{\underbrace{211}2} \\ A_{\underbrace{122}1} & A_{\underbrace{122}2} \end{vmatrix},$$

в) $$|A_{\overset{\pm\pm}{i_1 i_2 i_3 i_4}}|_2 = \sum (-1)^{I_1+I_2+I_3+I_4} |A_{\overset{+\ +}{\underbrace{i_1 i_2}\underbrace{i_3 i_4}}}|_2 =$$

$$= \overset{(+)}{\begin{vmatrix} A_{\underbrace{11}\underbrace{11}} & A_{\underbrace{22}\underbrace{11}} \\ A_{\underbrace{11}\underbrace{22}} & A_{\underbrace{22}\underbrace{22}} \end{vmatrix}} \overset{(+)\,(+)}{-} \begin{vmatrix} A_{\underbrace{11}\underbrace{21}} & A_{\underbrace{22}\underbrace{21}} \\ A_{\underbrace{11}\underbrace{12}} & A_{\underbrace{22}\underbrace{12}} \end{vmatrix} \overset{(+)\,(+)}{-} \begin{vmatrix} A_{\underbrace{21}\underbrace{11}} & A_{\underbrace{12}\underbrace{11}} \\ A_{\underbrace{21}\underbrace{22}} & A_{\underbrace{12}\underbrace{22}} \end{vmatrix} \overset{(+)\,(+)}{+} \begin{vmatrix} A_{\underbrace{21}\underbrace{21}} & A_{\underbrace{12}\underbrace{21}} \\ A_{\underbrace{21}\underbrace{12}} & A_{\underbrace{12}\underbrace{12}} \end{vmatrix}^{(+)}.$$

3. Пользуясь приведенными в п. 1 разложениями детерминантов кубической матрицы, обладающих той или иной сигнатурой, докажем следующие теоремы, легко обобщающиеся на случай матрицы любого числа измерений (упражнения 4, 5, 7).

Теорема 3.1. *Детерминант кубической матрицы $n$-го порядка $\|A_{ijk}\|$, у которого все сечения неальтернативной ориентации одинаковы, равен умноженному на $n!$ обычному детерминанту (или перманенту, если данный детерминант имеет сигнатуру $(\overset{+++}{i\,j\,k})$) $n$-го порядка, соответствующему этим одинаковым сечениям.*

Действительно, если в одном из детерминантов кубической матрицы $n$-го порядка $\|A_{ijk}\|$, например в детерминанте $|A_{\overset{+\pm\pm}{i\,j\,k}}|$, все $n$ сечений ориентации $(i)$ одинаковы, то в силу разложения (3.5) имеем:

$$|A_{\overset{+\pm\pm}{i\,j\,n}}| = n! \begin{vmatrix} A_{111} & A_{112} & \dots & A_{11n} \\ A_{121} & A_{122} & \dots & A_{12n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n1} & A_{1n2} & \dots & A_{1nn} \end{vmatrix}.$$

Теорема 3.2. *Кубический детерминант равен нулю, если все его строки одного из альтернативных направлений, содержащиеся в двух каких-нибудь сечениях одной и той же ориентации, кратны одной из этих строк* (Гедрик [98]).

В самом деле, пусть в кубическом детерминанте $n$-го порядка с какими-нибудь двумя альтернативными индексами, например в детерминанте $|A_{\underset{i}{+}\underset{j}{\pm}\underset{k}{\pm}}|$, все строки одного из альтернативных направлений, например $(k)$, содержащиеся в двух каких-нибудь сечениях ориентации $(i)$ или $(j)$, кратны одной из этих строк. Тогда каждый из $n!$ обычных детерминантов $|A_{\underset{i}{}\underbrace{\underset{j}{\pm}\underset{k}{\pm}}}|$, входящих в разложение (3.5) рассматриваемого кубического детерминанта, будет равен нулю, так как две строки его матрицы вида (3.1) пропорциональны. Следовательно, $|A_{\underset{i}{+}\underset{j}{\pm}\underset{k}{\pm}}|=0$.

4. Переходя к вопросу о вычислении многомерных детерминантов, основанном на выражении их через детерминанты низшего порядка, мы будем рассматривать главным образом кубические детерминанты. Вводимые при этом понятия и получаемые результаты легко распространяются на детерминанты любого числа измерений (упражнения 11, 12, 14).

Выделим в кубической матрице $n$-го порядка

$$A=\|A_{ijk}\| \qquad (i,\ j,\ k=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$$

какие-нибудь $\nu$ сечений ориентации $(i)$, $\nu$ сечений ориентации $(j)$ и $\nu$ сечений ориентации $(k)$ соответственно с номерами

$$\begin{gathered} i^{(1)},\ i^{(2)},\ \ldots,\ i^{(\nu)}, \\ j^{(1)},\ j^{(2)},\ \ldots,\ j^{(\nu)}, \\ k^{(1)},\ k^{(2)},\ \ldots,\ k^{(\nu)}, \end{gathered}$$

идущими в возрастающем порядке, причем $1\leq\nu\leq n$. Общие всем выделенным сечениям элементы, число которых равно $\nu^3$, образуют *минорную кубическую матрицу порядка* $\nu$.

Каждый элемент матрицы $A$ является, таким образом, минорной матрицей 1-го порядка, а сама матрица $A$ — минорной матрицей $n$-го порядка. Детерминант минорной матрицы $\nu$-го порядка с той или иной сигнатурой называется *минором* $\nu$-*го порядка* косигнатурного детерминанта основной матрицы $A$. Можно сказать также, что минор порядка $\nu$ данного кубического детерминанта $n$-го порядка с той или иной сигнатурой есть косигнатурный детерминант, получающийся после вычеркивания в данном детерминанте по $n-\nu$ сечений каждой ориентации. В частности, вычеркивая в кубическом детерминанте $n$-го порядка по одному сечению каждой ориентации, получим минор $(n-1)$-го порядка; с другой стороны, минором 1-го порядка будет отдельный элемент детерминанта. Минором $n$-го порядка является сам детерминант. Кубический детерминант $n$-го порядка имеет, очевидно, $(C_n^\nu)^3$ миноров порядка $\nu$ или $n-\nu$.

Пусть $M$ — какой-нибудь минор порядка $\nu$ данного кубического детерминанта $n$-го порядка с той или иной сигнатурой. Если мы вычеркнем в последнем те сечения ориентаций $(i)$, $(j)$, $(k)$, которые содержат элементы минора $M$, то получим минор $(n-\nu)$-го порядка $M'$, называемый *дополнительным минором* для $M$. Если мы вычеркнем, наоборот, те сечения ориентаций $(i)$, $(j)$, $(k)$, в которых расположены элементы минора $M'$, то останется, очевидно, минор $M$. Таким образом, $M$ и $M'$ составляют пару *взаимно дополнительных миноров* данного детерминанта. В частности, элемент $A_{\alpha\beta\gamma}$ данного детерминанта и минор $(n-1)$-го порядка, получающийся вычеркиванием в детерминанте сечений ориентаций $(i)$, $(j)$, $(k)$ соответственно с номерами $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, будут составлять пару взаимно дополнительных миноров.

Если элементы минора $\nu$-го порядка $M$ детерминанта $|A_{\overset{+}{i}\overset{\pm}{j}\overset{\pm}{k}}|_n$ содержатся в сечениях ориентации $(j)$ с номерами $j^{(1)}, j^{(2)}, \ldots, j^{(\nu)}$ и в сечениях ориентации $(k)$ с номерами $k^{(1)}, k^{(2)}, \ldots, k^{(\nu)}$, а $M'$ есть минор, дополнительный для $M$, то выражение

$$\mathfrak{M} = \varepsilon M', \tag{3.21}$$

где

$$\varepsilon = (-1)^{j^{(1)}+j^{(2)}+\ldots+j^{(\nu)}+k^{(1)}+k^{(2)}+\ldots+k^{(\nu)}}\ ^{1}),$$

называется *алгебраическим дополнением* минора $M$.

Аналогично определяются алгебраические дополнения миноров детерминантов $|A_{\overset{\pm}{i}\overset{+}{j}\overset{\pm}{k}}|_n$ и $|A_{\overset{\pm}{i}\overset{\pm}{j}\overset{+}{k}}|_n$. Алгебраическое дополнение минора $\nu$-го порядка $M$ перманента $|A_{\overset{+}{i}\overset{+}{j}\overset{+}{k}}|_n$ совпадает с дополнительным для $M$ минором $M'$.

В частности, алгебраическим дополнением элемента $A_{\alpha\beta\gamma}$ в детерминанте $|A_{\overset{+}{i}\overset{\pm}{j}\overset{\pm}{k}}|_n$ будет выражение

$$\mathfrak{A}_{\alpha\beta\gamma} = (-1)^{\beta+\gamma} M_{\alpha\beta\gamma}, \tag{3.22}$$

где $M_{\alpha\beta\gamma}$ – дополнительный минор для $A_{\alpha\beta\gamma}$ в этом детерминанте.

Подобным же образом выражаются алгебраические дополнения элемента $A_{\alpha\beta\gamma}$ в детерминантах $|A_{\overset{\pm}{i}\overset{+}{j}\overset{\pm}{k}}|_n$ и $|A_{\overset{\pm}{i}\overset{\pm}{j}\overset{+}{k}}|_n$. Алгебраическое дополнение элемента $A_{\alpha\beta\gamma}$ в перманенте $|A_{\overset{+}{i}\overset{+}{j}\overset{+}{k}}|_n$ совпадает с дополнительным минором для $A_{\alpha\beta\gamma}$ в этом перманенте.

Распространяя введенные нами понятия на $p$-мерную матрицу $n$-го порядка

$$A = \| A_{i_1 i_2 \ldots i_p} \| \qquad (i_1, i_2, \ldots, i_p = 1, 2, \ldots, n)$$

и ее детерминанты, выделим в этой матрице по $\nu$ $(1 \leqq \nu \leqq n)$ каких-нибудь сечений каждой из ориентаций $(i_1), (i_2), \ldots, (i_p)$. Тогда общие всем выделенным сечениям элементы, число которых равно $\nu^p$, образуют *минорную $p$-мерную матрицу порядка* $\nu$. Ее детерминант с той или иной сигнатурой называется *минором $\nu$-го порядка* косигнатурного детерминанта основной матрицы $A$ (Таннер [221]). *Дополнительный минор и алгебраическое дополнение* для минора $\nu$-го порядка какого-либо из детерминантов матрицы $A$ определяются так же, как и в случае кубической матрицы.

5. Докажем следующую лемму, необходимую для вывода формул разложения любого из детерминантов кубической матрицы по какому-нибудь его сечению.

Лемма 3.1. *Алгебраическая сумма всех членов кубического детерминанта, содержащих какой-нибудь его элемент, равна произведению этого элемента на его алгебраическое дополнение.*

Доказательство проведем для одного из кубических кодетерминантов, например для детерминанта $|A_{\overset{+}{i}\overset{\pm}{j}\overset{\pm}{k}}|_n$.

---

¹) Если $j^{(\nu+1)}, j^{(\nu+2)}, \ldots, j^{(n)}$ и $k^{(\nu+1)}, k^{(\nu+2)}, \ldots, k^{(n)}$ — номера сечений ориентаций $(j)$ и $(k)$, в которых содержатся элементы минора $M'$, то $j^{(1)}+j^{(2)}+\ldots+j^{(\nu)}+k^{(1)}+k^{(2)}+\ldots+k^{(\nu)} = 2n-(j^{(\nu+1)}+j^{(\nu+2)}+\ldots+j^{(n)}+k^{(\nu+1)}+k^{(\nu+2)}+\ldots+k^{(n)})$. Следовательно, имеем также $\varepsilon = (-1)^{j^{(\nu+1)}+j^{(\nu+2)}+\ldots+j^{(n)}+k^{(\nu+1)}+k^{(\nu+2)}+\ldots+k^{(n)}}$.

Рассмотрим сначала члены этого детерминанта, содержащие главный элемент $A_{111}$. Возьмем один из них

$$(-1)^{I_j+I_k}A_{111}A_{2j^{(2)}k^{(2)}}\ \dots\ A_{nj^{(n)}k^{(n)}},$$

где $I_j$, $I_k$ — числа инверсий в перестановках

$$\begin{gathered}1,\ j^{(2)},\ \dots,\ j^{(n)},\\ 1,\ k^{(2)},\ \dots,\ k^{(n)},\end{gathered}$$

а следовательно, и в перестановках

$$\begin{gathered}j^{(2)},\ \dots,\ j^{(n)},\\ k^{(2)},\ \dots,\ k^{(n)}.\end{gathered}$$

Поэтому произведение

$$(-1)^{I_j+I_k}A_{2j^{(2)}k^{(2)}}\ \dots\ A_{nj^{(n)}k^{(n)}}$$

является одним из $[(n-1)!]^2$ членов минора $M_{111}$, дополнительного для элемента $A_{111}$. Наоборот, произведение любого члена разложения минора $M_{111}$ на $A_{111}$ является членом детерминанта. Таким образом, алгебраическая сумма всех членов детерминанта $|A_{\underset{i}{+}\underset{j}{\pm}\underset{k}{\pm}}|_n$, содержащих элемент $A_{111}$, равна произведению $A_{111}M_{111}$. При этом минор $M_{111}$ будет, очевидно, также алгебраическим дополнением элемента $A_{111}$.

Перейдем теперь к рассмотрению общего случая. Пусть $A_{\alpha\beta\gamma}$ — какой-нибудь элемент детерминанта $|A_{\underset{i}{+}\underset{j}{\pm}\underset{k}{\pm}}|_n$, $M_{\alpha\beta\gamma}$ — дополнительный для него минор и $\mathfrak{U}_{\alpha\beta\gamma}$ — алгебраическое дополнение. Переставляя в детерминанте $|A_{\underset{i}{+}\underset{j}{\pm}\underset{k}{\pm}}|_n$ последовательно соседние сечения ориентаций $(i)$, $(j)$, $(k)$, мы можем перевести элемент $A_{\alpha\beta\gamma}$ на место главного элемента $A_{111}$. Для этого понадобится, очевидно, $\alpha-1$ перестановок сечений ориентации $(i)$, $\beta-1$ перестановок сечений ориентации $(j)$ и $\gamma-1$ перестановок сечений ориентации $(k)$. Так как по свойству III многомерных детерминантов $|A_{\underset{i}{+}\underset{j}{\pm}\underset{k}{\pm}}|_n$ не меняется от перестановок сечений ориентации $(i)$ и лишь меняет знак от перестановки двух сечений ориентации $(j)$ или $(k)$, то полученный в результате упомянутых выше преобразований косигнатурный детерминант будет равен $(-1)^{\beta+\gamma}|A_{\underset{i}{+}\underset{j}{\pm}\underset{k}{\pm}}|_n$. В нем, по доказанному, алгебраическая сумма всех членов, содержащих элемент $A_{\alpha\beta\gamma}$, равна произведению $A_{\alpha\beta\gamma}M_{\alpha\beta\gamma}$. Поэтому в исходном детерминанте $|A_{\underset{i}{+}\underset{j}{\pm}\underset{k}{\pm}}|_n$ алгебраическая сумма всех членов, содержащих элемент $A_{\alpha\beta\gamma}$, равна $(-1)^{\beta+\gamma}A_{\alpha\beta\gamma}M_{\alpha\beta\gamma}$ или, на основании равенства (3.22),

$$A_{\alpha\beta\gamma}\mathfrak{U}_{\alpha\beta\gamma}, \tag{3.23}$$

т. е. равна произведению элемента $A_{\alpha\beta\gamma}$ на его алгебраическое дополнение $\mathfrak{U}_{\alpha\beta\gamma}$.

Доказательство леммы для остальных кубических кодетерминантов аналогично.

Из леммы 3.1 вытекают формулы разложения любого из детерминантов кубической матрицы по какому-нибудь его сечению.

Действительно, так как элемент $A_{\alpha\beta\gamma}$ кубического детерминанта принадлежит сечениям ориентаций $(i)$, $(j)$, $(k)$ соответственно с номерами $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, то, составляя выражения (3.23) для всех $n^2$ элементов какого-либо из этих сечений и складывая их, мы будем иметь сумму всех $(n!)^2$ членов детерминанта $|A_{\underset{i}{+}\underset{j}{\pm}\underset{k}{\pm}}|_n$. Таким образом, получаем следующие разложения этого детерминанта по любому его сечению каждой из ориентаций ($i$), ($j$), ($k$):

$$|A_{\substack{+\pm\pm\\ i\,j\,k}}|_n = \sum_{\beta,\,\gamma=1}^{n} A_{\alpha\beta\gamma}\mathfrak{A}_{\alpha\beta\gamma} \qquad (\alpha \text{ — любое из чисел } 1,\ 2,\ \ldots,\ n),$$

$$|A_{\substack{+\pm\pm\\ i\,j\,k}}|_n = \sum_{\alpha,\,\gamma=1}^{n} A_{\alpha\beta\gamma}\mathfrak{A}_{\alpha\beta\gamma} \qquad (\beta \text{ — любое из чисел } 1,\ 2,\ \ldots,\ n),$$

$$|A_{\substack{+\pm\pm\\ i\,j\,k}}|_n = \sum_{\alpha,\,\beta=1}^{n} A_{\alpha\beta\gamma}\mathfrak{A}_{\alpha\beta\gamma} \qquad (\gamma \text{ — любое из чисел } 1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

Аналогичные разложения имеют место для остальных кубических кодетерминантов:

$$|A_{\substack{\pm+\pm\\ i\,j\,k}}|_n, \qquad |A_{\substack{\pm\pm+\\ i\,j\,k}}|_n, \qquad |A_{\substack{+++\\ i\,j\,k}}|_n.$$

Тем самым доказана соответствующая теореме Безу для обычных детерминантов

Теорема 3.3. *Любой из детерминантов кубической матрицы равен сумме произведений всех элементов какого-нибудь его сечения на их алгебраические дополнения.*

Из теоремы 3.3 вытекает соответствующая теореме Вандермонда для обычных детерминантов

Теорема 3.4. *Если в кубическом детерминанте все элементы какого-нибудь сечения альтернативной ориентации умножить на алгебраические дополнения соответствующих элементов другого сечения той же ориентации и полученные произведения сложить, то сумма будет равна нулю* (Гарбиери [77]).

В самом деле, если в кубическом детерминанте $n$-го порядка мы заменим $\mu$-е сечение альтернативной ориентации $\nu$-м сечением той же ориентации ($\nu \neq \mu$; $\mu$, $\nu = 1, 2, \ldots, n$), то составленный таким образом косигнатурный детерминант будет на основании свойства V многомерных детерминантов равен нулю. С другой стороны, этот же детерминант согласно теореме 3.3 равен сумме произведений всех элементов упомянутого выше $\nu$-го сечения в исходном детерминанте на алгебраические дополнения соответствующих элементов параллельного ему $\mu$-го сечения в том же детерминанте. Таким образом, рассматриваемая сумма равна нулю.

6. Обобщение теоремы 3.3 приводит к разложению любого детерминанта кубической матрицы, соответствующему разложению обычного детерминанта, указанному Лапласом. Чтобы убедится в этом, докажем предварительно следующую лемму.

Лемма 3.2. *Алгебраическая сумма членов кубического детерминанта, содержащих в своей совокупности все члены двух каких-нибудь взаимно дополнительных миноров этого детерминанта, равна произведению одного из них на его алгебраическое дополнение.*

Доказательство проведем для одного из кубических кодетерминантов, например, для детерминанта $|A_{\substack{+\pm\pm\\ i\,j\,k}}|_n$. Рассмотрим сначала частный случай, когда минор $\nu$-го ($1 \leqslant \nu \leqslant n-1$) порядка $M$ этого детерминанта расположен в сечениях ориентации ($i$) с номерами $1, 2, \ldots, \nu$ и в сечениях ориентаций ($j$), ($k$) с такими же номерами. Тогда дополнительный для $M$ минор $M'$ будет расположен в сечениях ориентаций ($i$), ($j$), ($k$) с одними и теми же номерами $\nu+1$, $\nu+2$, $\ldots$, $n$ и будет, следовательно, также алгебраическим дополнением минора $M$.

Возьмем в детерминанте $|A_{\substack{+\pm\pm\\ i\,j\,k}}|_n$ член

$$(-1)^{I_j+I_k} A_{1j(1)_k(1)} \ldots A_{\nu j(\nu)_k(\nu)} A_{\nu+1\,j(\nu+1)_k(\nu+1)} \ldots A_{nj(n)_k(n)}, \qquad (3.24)$$

где

$$j^{(1)}, \ldots, j^{(\nu)} \text{ и } k^{(1)}, \ldots, k^{(\nu)} \tag{3.25}$$

— некоторые перестановки из чисел $1, \ldots, \nu$,

$$j^{(\nu+1)}, \ldots, j^{(n)} \quad \text{и} \quad k^{(\nu+1)}, \ldots, k^{(n)} \tag{3.26}$$

— некоторые перестановки из чисел $\nu+1, \ldots, n$, а $I_j$ и $I_k$ — числа инверсий в перестановках

$$j^{(1)}, \ldots, j^{(\nu)}, j^{(\nu+1)}, \ldots, j^{(n)} \quad \text{и} \quad k^{(1)}, \ldots, k^{(\nu)}, k^{(\nu+1)}, \ldots, k^{(n)}.$$

Так как ни один из элементов перестановок (3.25) не может составить инверсий ни с одним из элементов соответственных перестановок (3.26), то

$$I_j = I'_j + I''_j, \qquad I_k = I'_k + I''_k,$$

где $I'_j$, $I'_k$ — числа инверсий в перестановках (3.25), а $I''_j$, $I''_k$ — числа инверсий в перестановках (3.26). Следовательно, произведение (3.24) может быть представлено в виде

$$(-1)^{I'_j+I'_k} A_{1j^{(1)}k^{(1)}} \ldots A_{\nu j^{(\nu)}k^{(\nu)}} \cdot (-1)^{I''_j+I''_k} A_{\nu+1\, j^{(\nu+1)}k^{(\nu+1)}} \ldots A_{nj^{(n)}k^{(n)}},$$

т. е. в виде произведения одного из $(\nu!)^2$ членов минора $M$ на один из $[(n-\nu)!]^2$ членов минора $M'$. Вместе с тем произведение любого члена минора $M$ на любой член минора $M'$ является членом детерминанта. Таким образом, алгебраическая сумма членов детерминанта $|A_{\underset{i}{+}\underset{j}{\pm}\underset{k}{\pm}}{}_{n}|$, которые содержат в своей совокупности все члены взаимно дополнительных миноров $M$ и $M'$, равна произведению $MM'$.

Перейдем теперь к рассмотрению общего случая, когда минор $\nu$-го порядка $M$ детерминанта $|A_{\underset{i}{+}\underset{j}{\pm}\underset{k}{\pm}}{}_{n}|$ расположен в сечениях ориентаций $(i)$, $(j)$, $(k)$ соответственно с номерами

$$\alpha_1, \quad \alpha_2, \ \ldots. \ \alpha_\nu,$$
$$\beta_1, \quad \beta_2, \ \ldots, \ \beta_\nu,$$
$$\gamma_1, \quad \gamma_2, \ \ldots, \ \gamma_\nu,$$

идущими в возрастающем порядке.

Переставляя в детерминанте $|A_{\underset{i}{+}\underset{j}{\pm}\underset{k}{\pm}}{}_{n}|$ последовательно соседние сечения каждой из ориентаций $(i)$, $(j)$, $(k)$, мы можем перевести минор $M$ в первые $\nu$ сечений всех ориентаций, не меняя при этом дополнительного для $M$ минора $M'$. Для этого понадобятся, очевидно,

$(\alpha_1-1)+(\alpha_2-2)+\ \ldots\ +(\alpha_\nu-\nu)$ перестановок сечений ориентации $(i)$,

$(\beta_1-1)+(\beta_2-2)+\ \ldots\ +(\beta_\nu-\nu)$ перестановок сечений ориентации $(j)$

и $(\gamma_1-1)+(\gamma_2-2)+\ \ldots\ +(\gamma_\nu-\nu)$ перестановок сечений ориентации $(k)$.

Полученный в результате этих перестановок косигнатурный детерминант будет равен $\varepsilon\,|A_{\underset{i}{+}\underset{j}{\pm}\underset{k}{\pm}}{}_{n}|$, где

$$\varepsilon = (-1)^{(\beta_1-1)+\ldots+(\beta_\nu-\nu)+(\gamma_1-1)+\ldots+(\gamma_\nu-\nu)} = (-1)^{\beta_1+\ldots+\beta_\nu+\gamma_1+\ldots+\gamma_\nu}.$$

В этом новом детерминанте, по доказанному, алгебраическая сумма его членов, содержащих все члены миноров $M$ и $M'$, равна $MM'$. Следовательно, в исходном детерминанте $|A_{\underset{i}{+}\underset{j}{\pm}\underset{k}{\pm}}{}_{n}|$ алгебраическая сумма членов, содержащих в своей совокупности все члены миноров $M$ и $M'$, равна $\varepsilon MM'$ или на основании равенства (3.21)

$$M\mathfrak{M}, \tag{3.27}$$

т. е. равна произведению минора $M$ на его алгебраическое дополнение $\mathfrak{M}$.

Доказательство леммы для остальных кубических кодетерминантов аналогично.

Из леммы 3.2 вытекает правило разложения любого детерминанта кубической матрицы по заданной совокупности его сечений какой-либо ориентации.

Действительно, так как минор $\nu$-го порядка $M$ расположен в $\nu$ сечениях ориентации $(i)$, а также в $\nu$ сечениях ориентации $(j)$ и в $\nu$ сечениях ориентации $(k)$, то, составляя выражения (3.27) для всех $(C_n^\nu)^2$ миноров $\nu$-го порядка, расположенных в какой-нибудь одной из этих групп сечений, и складывая их, мы будем иметь сумму различных членов детерминанта $|A_{\overset{+}{i}\overset{\pm}{j}\overset{-}{k}n}|$. Но число слагаемых в этой сумме равно

$$(C_n^\nu)^2 (\nu!)^2 [(n-\nu)!]^2 = (n!)^2,$$

т. е. равно числу членов детерминанта $|A_{\overset{+}{i}\overset{+}{j}\overset{\pm}{k}n}|$. Следовательно, она является точным представлением этого детерминанта.

Аналогичные представления получим для остальных кубических кодетерминантов $|A_{i\overset{+}{j}kn}|$, $|A_{\overset{\pm}{i}j\overset{+}{k}n}|$, $|A_{\overset{+}{i}\overset{+}{j}\overset{+}{k}n}|$.

Тем самым доказана соответствующая теореме Лапласа для обычных детерминантов

Теорема 3.5. *Возьмем любой из детерминантов кубической матрицы $n$-го порядка и выделим в нем произвольно $\nu$ $(1 \leq \nu \leq n-1)$ сечений какой-нибудь ориентации. Тогда сумма произведений всех миноров $\nu$-го порядка, расположенных в этих сечениях, на их алгебраические дополнения будет равна данному детерминанту.*

Так, например, выделяя в нижеследующем кубическом детерминанте 4-го порядка первые два сечения ориентации $(i)$ и составляя сумму произведений всех миноров 2-го порядка, расположенных в этих сечениях, на их алгебраические дополнения, получаем:

$$\left|\begin{array}{cccc|cccc|cccc|cccc} A_{111} & A_{112} & 0 & 0 & A_{211} & A_{212} & 0 & 0 & A_{311} & A_{312} & A_{313} & A_{311} & A_{411} & A_{412} & A_{413} & A_{414} \\ A_{121} & A_{122} & 0 & 0 & A_{221} & A_{222} & 0 & 0 & A_{321} & A_{322} & A_{323} & A_{321} & A_{421} & A_{422} & A_{423} & A_{424} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{331} & A_{332} & A_{333} & A_{334} & A_{431} & A_{432} & A_{433} & A_{431} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{341} & A_{342} & A_{313} & A_{344} & A_{441} & A_{442} & A_{443} & A_{444} \end{array}\right| \begin{array}{l} \longrightarrow \overset{+}{(i)} \\ \\ \downarrow\!\!\longrightarrow (k) \\ (j) \end{array} =$$

$$= \left|\begin{array}{cc|cc} A_{111} & A_{112} & A_{211} & A_{212} \\ A_{121} & A_{122} & A_{221} & A_{222} \end{array}\right| \begin{array}{l} \longrightarrow \overset{+}{(i)} \\ \downarrow\!\!\longrightarrow (k) \\ (j) \end{array} \cdot \left|\begin{array}{cc|cc} A_{333} & A_{334} & A_{133} & A_{434} \\ A_{343} & A_{341} & A_{443} & A_{444} \end{array}\right| \begin{array}{l} \longrightarrow \overset{+}{(i)} \\ \downarrow\!\!\longrightarrow (k). \\ (j) \end{array}$$

Заметим, что теорема 3.3 есть частный случай доказанной теоремы, если в последней считать $\nu = 1$.

Из теоремы 3.5 вытекает соответствующая теореме Коши для обычных детерминантов

Теорема 3.6. *Если в кубическом детерминанте порядка $n$ все миноры $\nu$-го порядка, расположенные в каких-нибудь $\nu$ $(1 \leq \nu \leq n-1)$ сечениях альтернативной ориентации, умножить на алгебраические дополнения соот-*

*ветствующих миноров, расположенных в других $\nu$ сечениях*[1]) *той же ориентации, и полученные произведения сложить, то сумма будет равна нулю* (Зайончковский [229]).

В самом деле, если в кубическом детерминанте $n$-го порядка мы заменим какие-нибудь $\nu$ $(1 \leqslant \nu \leqslant n-1)$ сечений альтернативной ориентации другими $\nu$ сечениями той же ориентации, отличающимися от первых хотя бы одним сечением, то составленный таким образом косигнатурный детерминант будет иметь по крайней мере два одинаковых сечения альтернативной ориентации и потому, на основании свойства V многомерных детерминантов, будет равен нулю. Но этот же детерминант согласно теореме 3.5 равен сумме произведений всех миноров $\nu$-го порядка исходного детерминанта, расположенных в упомянутых выше заменяющих $\nu$ сечениях, на алгебраические дополнения в том же детерминанте соответствующих миноров, расположенных в заменяемых $\nu$ сечениях. Таким образом, рассматриваемая сумма равна нулю.

Заметим, что теорема 3.4 есть частный случай доказанной теоремы, если в последней считать $\nu=1$.

На основании теоремы 3.5 может быть доказана также следующая теорема[2]), являющаяся обобщением теоремы С. Л. Соболева[3]) для обычных детерминантов.

Теорема 3.7. *Любой из детерминантов кубической матрицы $n$-го порядка $\|A_{ijk}\|$ $(i, j, k=1, 2, \ldots, n)$ равен нулю, если равны нулю все его элементы, общие каким-нибудь $\alpha$ сечениям ориентации $(i)$, $\beta$ сечениям ориентации $(j)$, $\gamma$ сечениям ориентации $(k)$, где $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ имеют значения, заключающиеся в ряде натуральных чисел $1, 2, \ldots, n$ и удовлетворяющие неравенству*

$$\alpha+\beta+\gamma>2n. \tag{3.28}$$

При доказательстве мы можем, очевидно, не нарушая общности, предполагать, что упоминаемые в теореме сечения, содержащие нулевые элементы кубического детерминанта $n$-го порядка, являются первыми $\alpha$ сечениями ориентации $(i)$, первыми $\beta$ сечениями ориентации $(j)$, первыми $\gamma$ сечениями ориентации $(k)$ и что

$$\alpha \geqslant \beta \geqslant \gamma \geqslant n.$$

Очевидно также, что при условии (3.28) сумма каждых двух из чисел $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ всегда больше, чем $n$.

Выделим в рассматриваемом детерминанте первые $\alpha$ сечений ориентации $(i)$ и покажем, что все его миноры порядка $\alpha$, расположенные в этих сечениях, равны нулю. Тогда в силу теоремы 3.5 и сам детерминант будет равен нулю.

Прежде всего ясно, что равны нулю миноры порядка $\alpha$, образуемые элементами, общими первым $\beta$ сечениям ориентации $(j)$ и первым $\gamma$ сечениям ориентации $(k)$, поскольку все они состоят целиком из нулей. Точно так же равны нулю миноры порядка $\alpha$, содержащие элементы, общие первым $\beta$ сечениям ориентации $(j)$ и последним $n-\gamma$ сечениям ориентации $(k)$ или первым $\gamma$ сечениям ориентации $(k)$ и последним $n-\beta$ сечениям ориентации $(j)$, так как $n-\gamma$ и $n-\beta$ меньше, чем $\alpha$, вследствие чего в этих минорах по крайней мере одно сечение ориентации $(k)$ или $(j)$ состоит целиком из нулей.

---

[1]) То есть в сечениях, из которых по крайней мере одно отличается от упомянутых выше $\nu$ сечений.

[2]) См. [33], стр. 188.

[3]) См. [22], стр. 174.

Что касается миноров порядка $\alpha$, содержащих элементы, общие последним $n-\beta$ сечениям ориентации $(j)$ и последним $n-\gamma$ сечениям ориентации $(k)$, то и они будут равны нулю.

Действительно, в каждый такой минор $\Delta_\alpha$ входят, кроме упомянутых выше элементов, также нулевые элементы, общие $\beta'$ сечениям из первых $\beta$ сечений ориентации $(j)$ и $\gamma'$ сечениям из первых $\gamma$ сечений ориентации $(k)$, где числа $\beta'$, $\gamma'$ удовлетворяют неравенствам

$$\alpha \geqq \beta' \geqq \alpha-(n-\beta), \qquad \alpha \geqq \gamma' \geqq \alpha-(n-\gamma).$$

Отсюда

$$\beta'+\gamma' \geqq 2\alpha+\beta+\gamma-2n,$$

и в силу неравенства (3.28) имеем:

$$\beta'+\gamma' > \alpha. \tag{3.29}$$

Пусть

$$\beta' \leqq \gamma'.$$

Тогда, выделяя в миноре $\Delta_\alpha$ те же $\beta'$ сечений ориентации $(j)$, составим из этих сечений миноры порядка $\beta'$, которые все будут равны нулю, так как каждый из них вследствие неравенства $\beta' > \alpha-\gamma'$, вытекающего из неравенства (3.29), содержит по крайней мере одно сечение ориентации $(k)$, состоящее целиком из нулей. Следовательно, на основании теоремы 3.5 $\Delta_\alpha=0$.

К тому же результату придем путем аналогичных рассуждений в случае, если $\beta' > \gamma'$.

### Упражнения

1. Вычислить все детерминанты кубической матрицы 3-го порядка $\|A_{ijk}\|$ $(i, j, k = 1, 2, 3)$, выражая их: а) через обычные детерминанты и перманенты; б) через кубические детерминанты 2-го порядка.

2. Для вычисления детерминантов кубической матрицы 3-го порядка существует обобщенное правило Сарруса, указанное Гавриловичем [34]. Согласно этому правилу образуем сжатую трехмерную матрицу, увеличивая в данной кубической матрице каждое из трех сечений неальтернативной ориентации до $5^2$ элементов. В полученной матрице выделяем главное диагональное сечение, соответствующее неальтернативному направлению, и четыре параллельных ему сечения, представляя их в виде пяти двумерных матриц, из которых берем со знаком $+$ все 18 произведений каждых трех элементов, принадлежащих диагоналям этих матриц. Точно так же поступаем с побочным диагональным сечением и параллельными ему сечениями, беря в этом случае все 18 произведений со знаком $-$ ($+$, если рассматривается перманент). Алгебраическая сумма составленных таким образом 36 произведений даст кубический детерминант с той или иной сигнатурой.

Вычислить по этому правилу все детерминанты кубической матрицы 3-порядка

$$\|A_{ijk}\| = \left\| \begin{array}{ccc|ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 2 & 2 & 1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 1 & 0 & 4 & 3 & 4 & 2 \end{array} \right\| \quad \begin{array}{l} \to (i) \\ \to (k) \\ \downarrow (j) \end{array}.$$

3. Вычислить все детерминанты четырехмерной матрицы 2-го порядка

$$\|A_{i_1 i_2 i_3 i_4}\| = \left\| \begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 2 & 5 \\ \hline 4 & 0 & 5 & 4 \\ 3 & 1 & 1 & 3 \end{array} \right\| \quad \begin{array}{l} \to (i_2) \\ \to (i_4) \\ \downarrow (i_3) \\ \downarrow (i_1) \end{array},$$

выражая их через детерминанты низшего числа измерений.

4. Если $p$-мерный детерминант $n$-го порядка с неальтернативным индексом $i_\alpha$ $(1 \leqq \alpha \leqq p)$ имеет все $n$ сечений ориентации $(i_\alpha)$ одинаковые, то он равен умноженному на $n!$ детерминанту $(p-1)$-мерной матрицы, представляющей одинаковые сечения, причем

сигнатура этого детерминанта одинакова с сигнатурой всех индексов данного детерминанта, отличных от $i_\alpha$[1]). Доказать.

**5.** Если $p$-мерный детерминант $n$-го порядка с неальтернативными индексами $i_1, i_2, \ldots, i_m$ ($1 \leqq m \leqq p-2$) имеет все $n^m$ $m$-кратных сечений ориентации $(i_1 i_2 \ldots i_m)$ одинаковые, то он равен умноженному на $(n!)^n$ $(p-m)$-мерному детерминанту, соответствующему одинаковым сечениям ориентации $(i_1 i_2 \ldots i_m)$, причем сигнатура этого детерминанта одинакова с сигнатурой всех индексов данного детерминанта, отличных от $i_1, i_2, \ldots, i_m$. Доказать.

**6.** Показать, что кубические детерминанты 3-го порядка

$$\left|\begin{array}{ccc|ccc|ccc} au & av & aw & \alpha u & \alpha v & \alpha w & * & * & * \\ bu & bv & bw & \beta u & \beta v & \beta w & * & * & * \\ cu & cv & cw & \gamma u & \gamma v & \gamma w & * & * & * \end{array}\right| \quad \begin{array}{l} \longrightarrow \overset{+}{(i)} \\ \longrightarrow (k) \\ \downarrow \\ (j) \end{array}$$

и

$$\left|\begin{array}{ccc|ccc|ccc} au & av & aw & bu & bv & bw & cu & cv & cw \\ \alpha u & \alpha v & \alpha w & \beta u & \beta v & \beta w & \gamma u & \gamma v & \gamma w \\ * & * & * & * & * & * & * & * & * \end{array}\right| \quad \begin{array}{l} \longrightarrow \overset{+}{(i)} \\ \longrightarrow (k) \\ \downarrow \\ (j) \end{array},$$

где знаками * обозначаются какие угодно элементы, равны нулю.

**7.** Доказать, что детерминант $p$-мерной матрицы $\| A_{i_1 i_2 \ldots i_p} \|$ с неальтернативным индексом $i_\alpha$ и альтернативным индексом $i_\beta$ ($\alpha \neq \beta$ — любые из чисел $1, 2, \ldots, p$) равен нулю, если все $(p-2)$-мерные сечения его ориентации $(i_\alpha i_\beta)$, содержащиеся в двух каких-нибудь $(p-1)$-мерных сечениях любой из ориентаций $(i_\alpha)$, $(i_\beta)$, кратны одному из этих $(p-2)$-мерных сечений.

**8.** Сколько миноров порядка $\nu$ или $n-\nu$ имеет $p$-мерный детерминант $n$-го порядка?

**9.** Представить многомерный детерминант порядка $n$ с т й или иной сигнатурой в виде косигнатурного детерминанта порядка $n+\nu$ ($\nu \geqq 1$).

**10.** Представить произведение двух косигнатурных кубических детерминантов порядков $n_1$ и $n_2$ в виде косигнатурного кубического детерминанта порядка $n_1+n_2$. Распространить на детерминанты любого числа измерений.

**11.** Распространить теоремы 3.3—3.6 на детерминанты $p$-мерной ($p>3$) матрицы.

**12.** Доказать, что любой из детерминантов $p$-мерной матрицы $n$-го порядка $\| A_{i_1 i_2 \ldots i_p} \|$ ($i_1, i_2, \ldots, i_p = 1, 2, \ldots, n$) равен нулю, если равны нулю все его элементы, общие каким-нибудь $\alpha_1$ сечениям ориентации $(i_1)$, $\alpha_2$ сечениям ориентации $(i_2)$, ..., $\alpha_p$ сечениям ориентации $(i_p)$, где $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ имеют значения, заключающиеся в ряде натуральных чисел $1, 2, \ldots, n$ и удовлетворяющие неравенству $\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_p > (p-1)\,n$ (см. [33]).

**13.** Разобьем в кубической матрице $n$-го порядка $A$ $n$ сечений некоторой ориентации на $q$ групп, выделяя в $\nu$-ю ($\nu=1, 2, \ldots, q$) группу какие-нибудь $n_\nu$ сечений, так что $\sum\limits_{\nu=1}^{q} n_\nu = n$.

Пусть $M_\nu$ — какой-нибудь минор порядка $n_\nu$ какого-либо детерминанта матрицы $A$, составленный из элементов $\nu$-й группы. Совокупность миноров $M_\nu$ ($\nu=1, 2, \ldots, q$) будем называть *трансверсальной*, если ни одна пара их не содержит элементов матрицы $A$, принадлежащих одному и тому же сечению какой-либо ориентации.

Доказать, что, беря произведение миноров $M_1, M_2, \ldots, M_q$ образующих некоторую трансверсальную совокупность, со знаком того члена детерминанта, который содержит диагональные элементы этих миноров, и составляя алгебраическую сумму таких произведений, распространенную на все трансверсальные совокупности миноров, расположенных в $q$ группах сечений, мы получим данный детерминант (обобщение теоремы 3. 5, указанное Арменантом [42]).

**14.** Распространить упражнение 13 на детерминанты любого числа измерений (Брааш [47], Таннер [221], Зайончковский [229], Гегенбауер [84]).

---

[1]) Для многомерных детерминантов наивысшего рода это свойство было известно еще Кэли [52] и Цейфусу [230].

ГЛАВА II

# ОПЕРАЦИИ НАД ПРОСТРАНСТВЕННЫМИ МАТРИЦАМИ И ИХ ДЕТЕРМИНАНТАМИ

## § 1. Сложение пространственных матриц. Умножение пространственной матрицы на число

1. Рассматривая основные операции над пространственными матрицами — сложение матриц, умножение матрицы на число и умножение матриц, — мы будем определять их в зависимости от операций над ассоциированными с этими матрицами полилинейными формами, заданными над некоторым числовым полем $P$.

Пусть даны две трилинейные формы

$$F=\sum_{i,\,j,\,k=1}^{n} A_{ijk}x_iy_jz_k, \qquad F'=\sum_{i,\,j,\,k=1}^{m} A'_{ijk}x_iy_jz_k$$

с соответствующими кубическими матрицами

$$A=\|A_{ijk}\| \qquad (i,\,j,\,k=1,\,2,\,\ldots,\,n),$$
$$A'=\|A'_{ijk}\| \qquad (i,\,j,\,k=1,\,2,\,\ldots,\,m).$$

Формы $F$ и $F'$, зависящие от трех рядов переменных

$$x_1,\quad x_2,\quad x_3,\quad \ldots,$$
$$y_1,\quad y_2,\quad y_3,\quad \ldots,$$
$$z_1,\quad z_2,\quad z_3,\quad \ldots,$$

тождественно равны друг другу, если у них число переменных в первом ряду, так же как и во втором и в третьем рядах, одно и то же и соответственные коэффициенты одинаковы.

В связи с этим кубические матрицы $A$ и $A'$ называются *тождественно равными*, если они одного и того же порядка и их соответственные элементы одинаковы, т. е. если $n=m$ и $A_{ijk}=A'_{ijk}$ $(i,\,j,\,k=1,\,2,\,\ldots,\,n)$.

Вообще, в соответствии с условиями тождественного равенства двух $p$-линейных форм

$$F=\sum_{i_1,\,\ldots,\,i_p=1}^{n} A_{i_1i_2\ldots i_p}x^{(1)}_{i_1}x^{(2)}_{i_2}\,\ldots\,x^{(p)}_{i_p},$$
$$F'=\sum_{i_1,\,\ldots,\,i_p=1}^{m} A'_{i_1i_2\ldots i_p}x^{(1)}_{i_1}x^{(2)}_{i_2}\,\ldots\,x^{(p)}_{i_p},$$

зависящих от $p$ рядов переменных

$$x^{(\nu)}_1,\ x^{(\nu)}_2,\ x^{(\nu)}_3,\ \ldots \qquad (\nu=1,\,2,\,\ldots,\,p),$$

мы называем $p$-мерные матрицы этих форм

$$A = \| A_{i_1 i_2 \ldots i_p} \| \qquad (i_1, i_2, \ldots, i_p = 1, 2, \ldots, n),$$
$$A' = \| A'_{i_1 i_2 \ldots i_p} \| \qquad (i_1, i_2, \ldots, i_p = 1, 2, \ldots, m)$$

*тождественно равными*, если они одного и того же порядка и их соответственные элементы одинаковы, т. е. если $n = m$ и

$$A_{i_1 i_2 \ldots i_p} = A'_{i_1 i_2 \ldots i_p} \qquad (i_1, i_2, \ldots, i_p = 1, 2, \ldots, n).$$

2. Сумма двух $p$-линейных форм

$$F = \sum_{i_1, \ldots, i_p = 1}^{n} A_{i_1 i_2 \ldots i_p} x_{i_1}^{(1)} x_{i_2}^{(2)} \ldots x_{i_p}^{(p)},$$
$$\Phi = \sum_{i_1, \ldots, i_p = 1}^{n} B_{i_1 i_2 \ldots i_p} x_{i_1}^{(1)} x_{i_2}^{(2)} \ldots x_{i_p}^{(p)}$$

с соответствующими $p$-мерными матрицами $n$-го порядка

$$A = \| A_{i_1 i_2 \ldots i_p} \|, \qquad B = \| B_{i_1 i_2 \ldots i_p} \| \qquad (i_1, i_2, \ldots, i_p = 1, 2, \ldots, n)$$

равна $p$-линейной форме

$$\Psi = \sum_{i_1, \ldots, i_p = 1}^{n} C_{i_1 i_2 \ldots i_p} x_{i_1}^{(1)} x_{i_2}^{(2)} \ldots x_{i_p}^{(p)},$$

где

$$C_{i_1 i_2 \ldots i_p} = A_{i_1 i_2 \ldots i_p} + B_{i_1 i_2 \ldots i_p} \qquad (i_1, i_2, \ldots, i_p = 1, 2, \ldots, n). \qquad (1.1)$$

Соответствующая форме $\Psi$ $p$-мерная матрица $n$-го порядка

$$C = \| C_{i_1 i_2 \ldots i_p} \| \qquad (i_1, i_2, \ldots, i_p = 1, 2, \ldots, n),$$

элементы которой определяются формулами (1.1), называется *суммой* матриц $A$ и $B$. Операция нахождения суммы двух данных $p$-мерных матриц одного и того же порядка называется *сложением* этих матриц. Имеем, таким образом, $A + B = C$.

Правило сложения двух пространственных матриц естественным образом распространяется на случай любого числа слагаемых.

Из определения сложения пространственных матриц непосредственно следует, что оно обладает коммутативным и ассоциативным свойствами:

$$A + B = B + A,$$
$$(A + B) + C = A + (B + C),$$

где $A$, $B$, $C$ — любые матрицы одного и того же числа измерений и одного и того же порядка над полем $P$.

Кроме того, принимая во внимание определение нулевой пространственной матрицы $O$ (гл. I, § 1), имеем:

$$A + O = A.$$

3. Умножая $p$-линейную форму $F = \sum_{i_1, \ldots, i_p = 1}^{n} A_{i_1 i_2 \ldots i_p} x_{i_1}^{(1)} x_{i_2}^{(2)} \ldots x_{i_p}^{(p)}$ с соответствующей $p$-мерной матрицей

$$A = \| A_{i_1 i_2 \ldots i_p} \| \quad (i_1, i_2, \ldots, i_p = 1, 2, \ldots, n)$$

на какое-нибудь число $t$ из поля $P$, получим форму

$$\Phi = \sum_{i_1, \ldots, i_p=1}^{n} B_{i_1 i_2 \ldots i_p} x_{i_1}^{(1)} x_{i_2}^{(2)} \ldots x_{i_p}^{(p)},$$

где

$$B_{i_1 i_2 \ldots i_p} = t A_{i_1 i_2 \ldots i_p} \qquad (i_1, i_2, \ldots, i_p = 1, 2, \ldots, n). \tag{1.2}$$

Соответствующая форме $\Phi$ $p$-мерная матрица $n$-го порядка

$$B = \| B_{i_1 i_2 \ldots i_p} \| \quad (i_1, i_2, \ldots, i_p = 1, 2, \ldots, n),$$

элементы которой определяются формулами (1.2), называется *произведением матрицы $A$ на число $t$*.

Имеем, таким образом, $tA = B$. В частности, если $t = 1$ или $t = 0$, то $1 \cdot A = A$, $0 \cdot A = O$.

Из определения умножения пространственной матрицы на число вытекают следующие свойства этой операции:

$$t(A + B) = tA + tB,$$
$$(t + u) A = tA + uA,$$
$$t(uA) = (tu) A,$$

где $A$ и $B$ — произвольные матрицы одного и того же числа измерений и одного и того же порядка над полем $P$, а $t$ и $u$ — числа из поля $P$.

Первые два свойства связывают умножение пространственной матрицы на число со сложением пространственных матриц. Вводя обозначение

$$(-1) A = -A,$$

будем иметь также на основании указанных выше свойств:

$$A + (-A) = O,$$
$$(-t) A = -tA,$$
$$-(A + B) = -A - B,$$
$$-(-A) = A.$$

Вместо $A + (-B)$ будем сокращенно писать $A - B$ и называть это выражение *разностью* матриц $A$ и $B$.

### Упражнения

1. Скольким равенствам между элементами двух кубических матриц $n$-го порядка $A$ и $A'$ равносильно равенство $A = A'$?

2. Тот же вопрос относительно двух $p$-мерных матриц $n$-го порядка.

3. Найти

$$\sum_{\alpha=1}^{n} \left\| \begin{array}{cc|cc} 0 & (-1)^{\alpha} & 0 & (-1)^{\alpha}\alpha \\ 1 & -\alpha & \alpha & -\alpha^2 \end{array} \right\| \begin{array}{l} \to (i) \\ \to (k) \\ \downarrow (j) \end{array}.$$

4. Пусть $A$ — сумма $h$ кубических матриц $n$-го порядка

$$A^{(1)}, A^{(2)}, \ldots, A^{(h)}. \tag{1.3}$$

Возьмем детерминант $|A|$ матрицы $A$ с той или иной сигнатурой и косигнатурные детерминанты

$$|A^{(1)}|, \quad |A^{(2)}|, \ldots, |A^{(h)}| \tag{1.4}$$

матриц (1.3). Составим какой-нибудь минор одного из детерминантов (1.4), затем какой-нибудь минор другого из этих детерминантов, лежащий в сечениях, отличающихся своим положением в каждой ориентации от тех сечений, в которых лежит первый минор, и будем продолжать этот процесс составления миноров различных детерминантов (1.4) до тех пор, пока сумма их порядков не сделается равной $n$. В результате получим смешанную трансверсальную совокупность миноров детерминантов (1.4). Каждый из детерминантов (1.4) относится к числу таких совокупностей.

Доказать, что, беря произведение миноров детерминантов (1.4), образующих некоторую смешанную трансверсальную совокупность, со знаком того члена детерминанта $|A|$, который содержит диагональные элементы этих миноров, и составляя алгебраическую сумму таких произведений, распространенную на все смешанные трансверсальные совокупности миноров детерминантов (1.4), мы получим детерминант $|A|$ (обобщение разложения Альбеджиани обычного детерминанта с многочленными элементами, указанное Райсом [193]).

5. Прибавляя к каждому элементу кубической матрицы $n$-го порядка $A$ по $h-1$ нулей, мы можем рассматривать $A$ как сумму $h$ кубических матриц, каждая из которых содержит, кроме нулей, также минорную матрицу относительно $A$. Применяя результат упражнения 4, указать разложение любого из детерминантов матрицы $A$.

6. Распространить упражнения 4 и 5 на матрицы любого числа измерений.

7. Показать, что любой из детерминантов матрицы $B$, представляющей произведение $p$-мерной матрицы $n$-го порядка $A$ на число $t$, равен косигнатурному детерминанту матрицы $A$, умноженному на $t^n$.

## § 2. Умножение двух пространственных матриц

1. Подвергнем трилинейную форму $F=\sum_{i,\,j,\,k=1}^{n} A_{ijk}x_iy_jz_k$ линейному преобразованию

$$x_\lambda=\sum_{i=1}^{n} a_{\lambda i}X_i \qquad (\lambda=1,\,2,\,\ldots,\,n) \tag{2.1$'$}$$

с матрицей $a=\|a_{\lambda i}\|$ $(\lambda,\,i=1,\,2,\,\ldots,\,n)$. В результате получим трилинейную форму $F'=\sum_{i,\,j,\,k=1}^{n} A'_{ijk}X_iy_jz_k$, где

$$A'_{ijk}=\sum_{\lambda=1}^{n} A_{\lambda jk}a_{\lambda i}. \tag{2.2$'$}$$

Точно так же, подвергая форму $F$ линейному преобразованию

$$y_\lambda=\sum_{j=1}^{n} a_{\lambda j}Y_j \qquad (\lambda=1,\,2,\,\ldots,\,n) \tag{2.1$''$}$$

или

$$z_\lambda=\sum_{k=1}^{n} a_{\lambda k}Z_k \qquad (\lambda=1,\,2,\,\ldots,\,n) \tag{2.1$'''$}$$

с той же матрицей $a$, как у преобразования (2.1$'$), получим соответственно трилинейную форму $F''=\sum_{i,\,j,\,k=1}^{n} A''_{ijk}x_iY_jz_k$ или $F'''=\sum_{i,\,j,\,k=1}^{n} A'''_{ijk}x_iy_jZ_k$, где

$$A''_{ijk}=\sum_{\lambda=1}^{n} A_{i\lambda k}a_{\lambda j}, \tag{2.2$''$}$$

$$A'''_{ijk}=\sum_{\lambda=1}^{n} A_{ij\lambda}a_{\lambda k}. \tag{2.2$'''$}$$

Кубическую матрицу $n$-го порядка $A'=\|A'_{ijk}\|$ $(i,\,j,\,k=1,\,2,\,\ldots,\,n)$ формы $F'$ будем называть *произведением по индексу* $i$ кубической матрицы $n$-го порядка $A=\|A_{ijk}\|$ $(i,\,j,\,k=1,\,2,\,\ldots,\,n)$ формы $F$ на квадратную матрицу того же порядка $a$ линейного преобразования этой формы и обозначать через $A\{i\}a$.

Точно так же матрицу $A'' = \| A''_{ijk} \|$ $(i, j, k = 1, 2, \ldots, n)$ формы $F''$ или матрицу $A''' = \| A'''_{ijk} \|$ $(i, j, k = 1, 2, \ldots, n)$ формы $F'''$ будем соответственно называть *произведением по индексу* $j$ *или* $k$ матрицы $A$ на $a$ и обозначать через $A\{j\}a$ или $A\{k\}a$.

Таким образом, на основании формул (2.2′), (2.2″), (2.2‴) имеем:

$$A\{i\}a = \left\| \sum_{\lambda=1}^{n} A_{\lambda jk} a_{\lambda i} \right\|, \tag{2.3′}$$

$$A\{j\}a = \left\| \sum_{\lambda=1}^{n} A_{i\lambda k} a_{\lambda j} \right\|, \tag{2.3″}$$

$$A\{k\}a = \left\| \sum_{\lambda=1}^{n} A_{ij\lambda} a_{\lambda k} \right\|, \tag{2.3‴}$$

т. е. произведение по индексу $\nu$ ($\nu$ — любой из индексов $i$, $j$, $k$) кубической матрицы $n$-го порядка $A$ на квадратную матрицу того же порядка $a$ является кубической матрицей $n$-го порядка, у которой $\mu$-й $(1 \leq \mu \leq n)$ элемент любой строки направления $(\nu)$ есть произведение соответствующей строки матрицы $A$ на $\mu$-й столбец матрицы $a$.

Операцию нахождения произведения $A\{\nu\}a$ будем называть умножением по индексу $\nu$ кубической матрицы $A$ на квадратную матрицу $a$[1]).

Для иллюстрации этого умножения приведем следующий пример. Пусть

$$A = \left\| \begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & -2 & 5 \\ -3 & 4 & 3 & 1 \end{array} \right\| \begin{array}{l} \to (i) \\ \to (k), \\ \downarrow (j) \end{array} \qquad a = \left\| \begin{array}{cc} 3 & -1 \\ -2 & 4 \end{array} \right\|.$$

Тогда

$$A\{k\}a =$$

$$= \left\| \begin{array}{cc|cc} 1\cdot 3 + 2\cdot(-2) & 1\cdot(-1) + 2\cdot 4 & -2\cdot 3 + 5\cdot(-2) & -2\cdot(-1) + 5\cdot 4 \\ -3\cdot 3 + 4\cdot(-2) & -3\cdot(-1) + 4\cdot 4 & 3\cdot 3 + 1\cdot(-2) & 3\cdot(-1) + 1\cdot 4 \end{array} \right\| \begin{array}{l} \to (i) \\ \to k = \\ \downarrow (j) \end{array}$$

$$= \left\| \begin{array}{cc|cc} -1 & 7 & -16 & 22 \\ -17 & 19 & 7 & 1 \end{array} \right\| \begin{array}{l} \to (i) \\ \to (k). \\ \downarrow (j) \end{array}$$

---

1) Для квадратных матриц $A = \| A_{ij} \|$ и $a = \| a_{ij} \|$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$, очевидно, $A\{j\}a = Aa$ и $A\{i\}a = a'A$, где $a'$ — транспонированная матрица относительно $a$.

Аналогично находим:

$$A\{j\}a=\left\|\begin{array}{rr|rr} 9 & -13 & -2 & 14\\ & & & \\ -12 & 14 & 13 & -1\end{array}\right\| \begin{array}{l}\to (k)\\ \downarrow\!\longrightarrow (j),\\ (i)\end{array}$$

$$A\{i\}a=\left\|\begin{array}{rr|rr} 7 & -9 & -15 & 15\\ & & & \\ -4 & 18 & 10 & 0\end{array}\right\| \begin{array}{l}\to (j)\\ \downarrow\!\longrightarrow (i).\\ (k)\end{array}$$

К более общему понятию *произведения* $A\{i_\alpha\}a$ *по индексу* $i_\alpha$ $(1 \leqq \alpha \leqq p)$ $p$-мерной матрицы $n$-го порядка $A=\|A_{i_1i_2\ldots i_p}\|$ $(i_1, i_2, \ldots, i_p=1, 2, \ldots, n)$ на квадратную матрицу того же порядка $a=\|a_{ij}\|$ $(i, j=1, 2, \ldots, n)$ мы придем, подвергая $p$-линейную форму $F=\sum\limits_{i_1, \ldots, i_p=1}^{n} A_{i_1i_2\ldots i_p}x_{i_1}^{(1)}x_{i_2}^{(2)}\ldots x_{i_p}^{(p)}$ с матрицей $A$ линейному преобразованию $x_i^{(\alpha)}=\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}X_j^{(\alpha)}$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ с матрицей $a$, в результате чего получим $p$-линейную форму

$$F^{(\alpha)}=\sum_{i_1, \ldots, i_p=1}^{n} A^{(\alpha)}_{i_1\ldots i_{\alpha-1}i_\alpha i_{\alpha+1}\ldots i_p}x_{i_1}^{(1)}\ldots x_{i_{\alpha-1}}^{(\alpha-1)}X_{i_\alpha}^{(\alpha)}x_{i_{\alpha+1}}^{(\alpha+1)}\ldots x_{i_p}^{(p)},$$

матрица которой

$$\left\|\sum_{\lambda=1}^{n} A_{i_1\ldots i_{\alpha-1}\lambda i_{\alpha+1}\ldots i_p}a_{\lambda i_\alpha}\right\|$$

будет представлять произведение $A\{i_\alpha\}a$ (упражнение 5).

2. Подвергнем теперь трилинейную форму $F=\sum\limits_{i_1, i_2, i_3=1}^{n} A_{i_1i_2i_3}x_{i_1}y_{i_2}z_{i_3}$ билинейному преобразованию

$$x_{j_1}=\sum_{j_2, j_3=1}^{n} a_{j_1j_2j_3}X_{j_2}\xi_{j_3} \quad (j_1=1, 2, \ldots, n) \tag{2.4'}$$

с кубической матрицей

$$a=\|a_{j_1j_2j_3}\| \qquad (j_1, j_2, j_3=1, 2, \ldots, n).$$

Получим в результате четырехлинейную форму

$$F'=\sum_{k_1, \ldots, k_4=1}^{n} A'_{k_1k_2k_3k_4}X_{k_1}y_{k_2}z_{k_3}\xi_{k_4},$$

где

$$A'_{k_1k_2k_3k_4}=\sum_{\lambda=1}^{n} A_{\lambda k_2k_3}a_{\lambda k_1k_4}. \tag{2.5'}$$

Точно так же, подвергая форму $F$ билинейному преобразованию

$$y_{j_1}=\sum_{j_2, j_3=1}^{n} a_{j_1j_2j_3}Y_{j_2}\eta_{j_3} \qquad (j_1=1, 2, \ldots, n) \tag{2.4''}$$

или

$$z_{j_1}=\sum_{j_2,\, j_3=1}^{n} a_{j_1j_2j_3}Z_{j_2}\zeta_{j_3} \qquad (j_1=1,\ 2,\ \ldots,\ n) \tag{2.4'''}$$

с той же матрицей $a$, как у преобразования (2.4′), мы получим соответственно четырехлинейную форму

$$F''=\sum_{k_1,\,\ldots,\,k_4=1}^{n} A''_{k_1k_2k_3k_4}x_{k_1}Y_{k_2}z_{k_3}\eta_{k_4} \quad \text{или} \quad F'''=\sum_{k_1,\,\ldots,\,k_4=1}^{n} A'''_{k_1k_2k_3k_4}x_{k_1}y_{k_2}Z_{k_3}\zeta_{k_4},$$

где

$$A''_{k_1k_2k_3k_4}=\sum_{\lambda=1}^{n} A_{k_1\lambda k_3}a_{\lambda k_2k_4}, \tag{2.5''}$$

$$A'''_{k_1k_2k_3k_4}=\sum_{\lambda=1}^{n} A_{k_1k_2\lambda}a_{\lambda k_3k_4}. \tag{2.5'''}$$

Четырехмерные матрицы $n$-го порядка

$$A'=\|A'_{k_1k_2k_3k_4}\|,\quad A''=\|A''_{k_1k_2k_3k_4}\|,\quad A'''=\|A'''_{k_1k_2k_3k_4}\|$$
$$(k_1,\ k_2,\ k_3,\ k_4=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$$

форм $F'$, $F''$, $F'''$ будут тогда соответственно *произведениями*

$$A\{i_1\}a,\qquad A\{i_2\}a,\qquad A\{i_3\}a$$

*по индексам* $i_1$, $i_2$, $i_3$ кубической матрицы $n$-го порядка $A$ на кубическую матрицу того же порядка $a$. Эти произведения на основании формул (2.5′), (2.5″), (2.5‴) представляются в виде

$$A\{i_1\}a=\Big\|\sum_{\lambda=1}^{n} A_{\lambda k_2k_3}a_{\lambda k_1k_4}\Big\| \qquad (k_1,\ k_2,\ k_3,\ k_4=1,\ 2,\ \ldots,\ n), \tag{2.6'}$$

$$A\{i_2\}a=\Big\|\sum_{\lambda=1}^{n} A_{k_1\lambda k_3}a_{\lambda k_2k_4}\Big\| \qquad (k_1,\ k_2,\ k_3,\ k_4=1,\ 2,\ \ldots,\ n), \tag{2.6''}$$

$$A\{i_3\}a=\Big\|\sum_{\lambda=1}^{n} A_{k_1k_2\lambda}a_{\lambda k_3k_4}\Big\| \qquad (k_1,\ k_2,\ k_3,\ k_4=1,\ 2,\ \ldots,\ n). \tag{2.6'''}$$

Например, если

$$A=\left\|\begin{array}{cc|cc} A_{111} & A_{112} & A_{211} & A_{212}\\ A_{121} & A_{122} & A_{221} & A_{222}\end{array}\right\| \begin{array}{l}\rightarrow (i_1)\\ \rightarrow (i_3),\\ \downarrow (i_2)\end{array} \qquad a=\left\|\begin{array}{cc|cc} a_{111} & a_{112} & a_{211} & a_{212}\\ a_{121} & a_{122} & a_{221} & a_{222}\end{array}\right\| \begin{array}{l}\rightarrow (j_1)\\ \rightarrow (j_3),\\ \downarrow (j_2)\end{array}$$

то

$$A\{i_1\}a=$$
$$=\left\|\begin{array}{cc|cc} A_{111}a_{111}+A_{211}a_{211} & A_{111}a_{112}+A_{211}a_{212} & A_{112}a_{111}+A_{212}a_{211} & A_{112}a_{112}+A_{212}a_{212}\\ A_{111}a_{121}+A_{211}a_{221} & A_{111}a_{122}+A_{211}a_{222} & A_{112}a_{121}+A_{212}a_{221} & A_{112}a_{122}+A_{212}a_{222}\\ \hline A_{121}a_{111}+A_{221}a_{211} & A_{121}a_{112}+A_{221}a_{212} & A_{122}a_{111}+A_{222}a_{211} & A_{122}a_{112}+A_{222}a_{212}\\ A_{121}a_{121}+A_{221}a_{221} & A_{121}a_{122}+A_{221}a_{222} & A_{122}a_{121}+A_{222}a_{221} & A_{122}a_{122}+A_{222}a_{222}\end{array}\right\| \begin{array}{l}\rightarrow (k_3)\\ \rightarrow (k_4)\\ \downarrow (k_1)\\ \downarrow (k_2)\end{array},$$

$A\{i_2\}\,a=$

$$=\left\|\begin{array}{cc|cc} A_{111}a_{111}+A_{121}a_{211} & A_{111}a_{112}+A_{121}a_{212} & A_{112}a_{111}+A_{122}a_{211} & A_{112}a_{112}+A_{122}a_{212} \\ A_{111}a_{121}+A_{121}a_{221} & A_{111}a_{122}+A_{121}a_{222} & A_{112}a_{121}+A_{122}a_{221} & A_{112}a_{122}+A_{122}a_{222} \\ \hline A_{211}a_{111}+A_{221}a_{211} & A_{211}a_{112}+A_{221}a_{212} & A_{212}a_{111}+A_{222}a_{211} & A_{212}a_{112}+A_{222}a_{212} \\ A_{211}a_{121}+A_{221}a_{221} & A_{211}a_{122}+A_{221}a_{222} & A_{212}a_{121}+A_{222}a_{221} & A_{212}a_{122}+A_{222}a_{222} \end{array}\right\| \quad \begin{array}{l} \to (k_3) \\ \to (k_4) \\ \downarrow (k_2) \\ \downarrow (k_1) \end{array} .$$

$A\{i_3\}\,a=$

$$=\left\|\begin{array}{cc|cc} A_{111}a_{111}+A_{112}a_{211} & A_{111}a_{112}+A_{112}a_{212} & A_{121}a_{111}+A_{122}a_{211} & A_{121}a_{112}+A_{122}a_{212} \\ A_{111}a_{121}+A_{112}a_{221} & A_{111}a_{122}+A_{112}a_{222} & A_{121}a_{121}+A_{122}a_{221} & A_{121}a_{122}+A_{122}a_{222} \\ \hline A_{211}a_{111}+A_{212}a_{211} & A_{211}a_{112}+A_{212}a_{212} & A_{221}a_{111}+A_{222}a_{211} & A_{221}a_{112}+A_{222}a_{212} \\ A_{211}a_{121}+A_{212}a_{221} & A_{211}a_{122}+A_{212}a_{222} & A_{221}a_{121}+A_{222}a_{221} & A_{221}a_{122}+A_{222}a_{222} \end{array}\right\| \quad \begin{array}{l} \to (k_2) \\ \to (k_4) \\ \downarrow (k_3) \\ \downarrow (k_1) \end{array} .$$

К самому общему понятию произведения $A\{i_\alpha\}\,a$ по индексу $i_\alpha\,(1 \leqq \alpha \leqq p)$ $p$-мерной матрицы $n$-го порядка $A=\|A_{i_1 i_2 \ldots i_p}\|\,(i_1, i_2, \ldots, i_p=1, 2, \ldots, n)$ на $q$-мерную матрицу того же порядка $a=\|a_{j_1 j_2 \ldots j_q}\|$ $(j_1, j_2, \ldots, j_q=1, 2, \ldots, n)$ мы придем, подвергая $p$-линейную форму

$$F=\sum_{i_1, \ldots, i_p=1}^{n} A_{i_1 i_2 \ldots i_p} x_{i_1}^{(1)} x_{i_2}^{(2)} \ldots x_{i_p}^{(p)}$$

с матрицей $A$ $(q-1)$-линейному преобразованию

$$x_{j_1}^{(\alpha)}=\sum_{j_2, \ldots, j_q=1}^{n} a_{j_1 j_2 \ldots j_q} X_{j_2}^{(\alpha)} \xi_{j_3}^{(3)} \ldots \xi_{j_q}^{(q)} \qquad (j_1=1, 2, \ldots, n)$$

с матрицей $a$, в результате чего получим $(p+q-2)$-линейную форму

$$F^{(\alpha)}=\sum_{k_1, \ldots, k_{p+q-2}=1}^{n} A^{(\alpha)}_{k_1 \ldots k_{\alpha-1} k_\alpha k_{\alpha+1} \ldots k_{p+q-2}} x_{k_1}^{(1)} \ldots x_{k_{\alpha-1}}^{(\alpha-1)} X_{k_\alpha}^{(\alpha)} x_{k_{\alpha+1}}^{(\alpha+1)} \ldots$$
$$\ldots x_{k_p}^{(p)} \xi_{k_{p+1}}^{(3)} \ldots \xi_{k_{p+q-2}}^{(q)}$$

с $(p+q-2)$-мерной матрицей $\left\|\sum\limits_{\lambda=1}^{n} A_{k_1 \ldots k_{\alpha-1} \lambda k_{\alpha+1} \ldots k_p} a_{\lambda k_\alpha k_{p+1} \ldots k_{p+q-2}}\right\|$, представляющей произведение $A\{i_\alpha\}\,a$ (упражнение 6).

3. Умножение пространственных матриц не обладает коммутативным свойством. Сложение же пространственных матриц и их умножение связаны законами д и с т р и б у т и в н о с т и.

В самом деле, пусть даны три матрицы $n$-го порядка, причем две из них одного и того же числа измерений, например:

$$A=\|A_{ijk}\|, \qquad B=\|B_{ijk}\| \qquad (i, j, k=1, 2, \ldots, n) \text{ и } a=\|a_{ij}\|$$
$$(i, j=1, 2, \ldots, n).$$

Тогда для любых значений индексов $i, j, k$ имеем:

$$\sum_{\lambda=1}^{n} (A_{ij\lambda}+B_{ij\lambda})\,a_{\lambda k}=\sum_{\lambda=1}^{n} A_{ij\lambda} a_{\lambda k}+\sum_{\lambda=1}^{n} B_{ij\lambda} a_{\lambda k}.$$

Отсюда ввиду равенства (2.3‴) получаем:

$$(A+B)\,\{k\}\,a=A\,\{k\}\,a+B\,\{k\}\,a.$$

Точно так же находим:

$$(A+B)\{i\}\,a=A\{i\}\,a+B\{i\}\,a \text{ и } (A+B)\{j\}\,a=A\{j\}\,a+B\{j\}\,a.$$

Равенства

$$a\{i\}(A+B)=a\{i\}A+a\{i\}B \text{ и } a\{j\}(A+B)=a\{j\}A+a\{j\}B$$

доказываются аналогично.

Между умножением пространственной матрицы на число и перемножением самих пространственных матриц существует очень важная связь. Именно, если $A$, $a$ — пространственные матрицы одного и того же порядка и $t$ — какое-либо число из поля $P$, то $(tA)\{\nu\}a=A\{\nu\}(ta)=t(A\{\nu\}a)$ ($\nu$ — любой из индексов в матрице $A$), т. е. *если один из множителей матричного произведения умножается на число $t$, то и все произведение умножается на $t$.*

Действительно, пусть даны две какие-нибудь пространственные матрицы одного и того же порядка, например кубические матрицы $n$-го порядка

$$A=\|A_{i_1i_2i_3}\| \qquad (i_1,\ i_2,\ i_3=1,\ 2,\ \ldots,\ n),$$
$$a=\|a_{j_1j_2j_3}\| \qquad (j_1,\ j_2,\ j_3=1,\ 2,\ \ldots,\ n),$$

и число $t$ из поля $P$.

Тогда, имея в виду составление произведения по одному из индексов $i_1$, $i_2$, $i_3$, например по индексу $i_3$, матрицы $A$ на $a$, находим для любых значений индексов $k_1$, $k_2$, $k_3$, $k_4$:

$$\sum_{\lambda=1}^{n}(tA_{k_1k_2\lambda})\,a_{\lambda k_3k_4}=t\sum_{\lambda=1}^{n}A_{k_1k_2\lambda}a_{\lambda k_3k_4},$$

откуда на основании равенства (2.6‴) получаем:

$$(tA)\{i_3\}a=t(A\{i_3\}a).$$

Равенство

$$A\{i_3\}(ta)=t(A\{i_3\}a)$$

доказывается таким же путем.

4. Обратимся теперь к вопросу об умножении детерминантов пространственных матриц, тесно связанному с умножением самих матриц.

Известно, что детерминант произведения двух квадратных матриц одного и того же порядка выражает произведение их детерминантов. Эта операция умножения квадратных детерминантов может быть распространена на детерминанты высших измерений. Для представления произведения кубического детерминанта (рода 2) на квадратный в виде кубического детерминанта с многочленными элементами существует *правило Арменанта—Гарбиери* [42, 77]. В несколько видоизмененной форме это правило заключается в следующем.

Пусть дано произведение $A\{\nu\}a$ по индексу $\nu$ ($\nu$ — любой из индексов $i$, $j$, $k$) кубической матрицы $n$-го порядка $A=\|A_{ijk}\|$ $(i,\ j,\ k=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$ на квадратную матрицу того же порядка $a=\|a_{ij}\|$ $(i,\ j=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$. Тогда кубический детерминант этого матричного произведения, взятый с сигнатурой $(\overset{+}{\mu})$, где $\mu$ — любой из индексов $i$, $j$, $k$, отличный от $\nu$, равен произведению косигнатурного детерминанта матрицы $A$ на детерминант матрицы $a$. Иначе говоря, *произведение кубического детерминанта $n$-го порядка с одной из сигнатур $(\overset{+}{i})$, $(\overset{+}{j})$, $(\overset{+}{k})$ на квадратный детерминант того же порядка равно косигнатурному детерминанту кубической матрицы, представляющей произведение по любому из альтернативных индексов матрицы кубического детерминанта на матрицу квадратного детерминанта.*

В самом деле, возьмем произведение по одному из индексов $i$, $j$, $k$, например по индексу $k$, матрицы $A$ на $a$ и составим соответствующий этому произведению кубический детерминант с сигнатурой $(\overset{+}{i})$, который обозначим через $|A\{k\}a|^{(\overset{+}{i})}$. Тогда согласно формулам (2.2‴) и (2.3‴) имеем:

$$|A\{k\}a|^{(\overset{+}{i})} = |A'''_{\overset{+}{i}\overset{\pm}{j}\overset{\pm}{k}}|.$$

Отсюда, заменяя кубический детерминант $|A'''_{\overset{+}{i}\overset{\pm}{j}\overset{\pm}{k}}|$ на основании формулы (3.5) гл. I суммой $n!$ квадратных детерминантов, составленных из его строк направления $(k)$, находим:

$$|A\{k\}a|^{(\overset{+}{i})} = \sum |A'''_{\underbrace{\overset{+}{i}\overset{\pm}{j}}\overset{\pm}{k}}|, \tag{2.7}$$

где $|A'''_{\underbrace{\overset{+}{i}\overset{\pm}{j}}\overset{\pm}{k}}|$ есть сокращенное обозначение квадратного детерминанта

$$\begin{vmatrix} A'''_{\overset{.}{i}^{(1)}11} & A'''_{\overset{.}{i}^{(1)}12} & \dots & A'''_{\overset{.}{i}^{(1)}1n} \\ A'''_{\overset{.}{i}^{(2)}21} & A'''_{\overset{.}{i}^{(2)}22} & \dots & A'''_{\overset{.}{i}^{(2)}2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A'''_{\overset{.}{i}^{(n)}n1} & A'''_{\overset{.}{i}^{(n)}n2} & \dots & A'''_{\overset{.}{i}^{(n)}nn} \end{vmatrix}.$$

Принимая во внимание формулу (2.2‴), имеем:

$$|A'''_{\underbrace{\overset{+}{i}\overset{\pm}{j}}\overset{\pm}{k}}| = \left|\sum_{\lambda=1}^{n} A_{\underbrace{\overset{+}{i}\overset{\pm}{j}}\lambda}\, a_{\lambda\overset{\pm}{k}}\right|,$$

и так как правая часть последнего равенства может быть рассматриваема согласно правилу умножения квадратных детерминантов как произведение детерминанта $|A_{\underbrace{\overset{+}{i}\overset{\pm}{j}}\overset{\pm}{k}}|$ на детерминант $|a|$ матрицы $a$, то равенство (2.7) можно представить в виде

$$|A\{k\}a|^{(\overset{+}{i})} = \left(\sum |A_{\underbrace{\overset{+}{i}\overset{\pm}{j}}\overset{\pm}{k}}|\right)\cdot|a|$$

или, на основании той же формулы (3.5) гл. I, в виде

$$|A\{k\}a|^{(\overset{+}{i})} = |A_{\overset{+}{i}\overset{\pm}{j}\overset{\pm}{k}}|\cdot|a|.$$

Аналогично доказывается равенство

$$|A\{k\}a|^{(\overset{+}{j})} = |A_{\overset{\pm}{i}\overset{+}{j}\overset{\pm}{k}}|\cdot|a|.$$

Таким образом, имеем:

$$|A|^{(\overset{+}{\mu})}\cdot|a| = |A\{\nu\}a|^{(\overset{+}{\mu})}, \tag{2.8}$$

где $\mu$, $\nu$ — любые из индексов $i$, $j$, $k$, не равные друг другу, а $|A|^{(\overset{+}{\mu})}$ — кубический детерминант матрицы $A$, взятый с сигнатурой $(\overset{+}{\mu})$.

Равенство (2.8) и выражает произведение кубического детерминанта на квадратный в виде кубического детерминанта с многочленными элементами.

Например, если

$$A=\left\|\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & -2 & 5 \\ -3 & 4 & 3 & 1 \end{array}\right\| \begin{array}{l} \to (i) \\ \to (k), \\ \downarrow (j) \end{array} \qquad a=\left\|\begin{array}{cc} 3 & -1 \\ 2 & 4 \end{array}\right\|,$$

то

$$|A_{\overset{+}{i}\overset{\pm}{j}\overset{\pm}{k}}|=2, \qquad |a|=10.$$

Следовательно,

$$|A_{\overset{+}{i}\overset{\pm}{j}\overset{\pm}{k}}|\cdot|a|=20.$$

Вместе с тем имеем:

$$|A\{k\}a|^{(\overset{+}{i})}=\left|\sum_{\lambda=1}^{2} A_{\overset{+}{i}\overset{\pm}{j}\lambda}\, a_{\lambda\overset{\pm}{k}}\right|=\left|\begin{array}{cc|cc} -1 & 7 & -16 & 22 \\ -17 & 19 & 7 & 1 \end{array}\right| \begin{array}{l} \to (\overset{+}{i}) \\ \to (k) \\ \downarrow (j) \end{array} =20,$$

$$|A\{j\}a|^{(\overset{+}{i})}=\left|\sum_{\lambda=1}^{2} A_{\overset{+}{i}\lambda\overset{\pm}{k}}\, a_{\lambda\overset{\pm}{j}}\right|=\left|\begin{array}{cc|cc} 9 & -2 & -12 & 13 \\ -13 & 14 & 14 & -1 \end{array}\right| \begin{array}{l} \to (\overset{+}{i}) \\ \to (k) \\ \downarrow (j) \end{array} =20.$$

Отметим, что

$$|A\{i\}a|^{(\overset{+}{i})}=\left|\sum_{\lambda=1}^{2} A_{\lambda\overset{\pm}{j}\overset{\pm}{k}}\, a_{\lambda\overset{+}{i}}\right|=\left|\begin{array}{cc|cc} 7 & -4 & -9 & 18 \\ -15 & 10 & 15 & 0 \end{array}\right| \begin{array}{l} \to (\overset{+}{i}) \\ \to (k) \\ \downarrow (j) \end{array} =240,$$

т. е. $|A_{\overset{+}{i}\overset{\pm}{j}\overset{\pm}{k}}|\cdot|a|\neq|A\{i\}a|^{(\overset{+}{i})}$.

5. Правило Арменанта — Гарбиери легко обобщить на случай умножения $p$-мерного детерминанта $n$-го порядка (род которого не равен нулю) на квадратный детерминант того же порядка (упражнение 9). Более широким обобщением является *правило Кэли — Райса* [52, 192] умножения детерминантов любого числа измерений, если порядок их один и тот же и род каждого из них не равен нулю. Для вывода этого правила мы ограничимся рассмотрением умножения двух кубических детерминантов $n$-го порядка[1])

$$|A|=|A_{\underset{i_1 i_2}{\underbrace{(\pm)^{s_1}}}\overset{\pm}{i_3}}| \qquad (i_1, i_2, i_3=1, 2, \ldots, n),$$

$$|a|=|a_{\overset{\pm}{j_1}\underset{j_2 j_3}{\underbrace{(\pm)^{s_2}}}}| \qquad (j_1, j_2, j_3=1, 2, \ldots, n),$$

---

[1]) Этот случай, как и вообще случай умножения детерминантов нечетного числа измерений, был исключен Кэли из рассмотрения. Распространение правила Кэли на вышеупомянутые случаи стало возможным лишь после введения Райсом [192] понятия смешанных детерминантов.

где символами $(\pm)s_1$ и $(\pm)s_2$ обозначены совокупности знаков $+$ и $\pm$, взятых в том или ином порядке над соответственными индексами. Умножение детерминантов любого числа измерений рассматривается аналогично (упражнение 11).

Возьмем для определенности детерминанты

$$|A| = |A_{\overset{+\pm\pm}{i_1 i_2 i_3}}| \qquad (i_1, i_2, i_3 = 1, 2, \ldots, n),$$

$$|a| = |a_{\overset{\pm\pm+}{j_1 j_2 j_3}}| \qquad (j_1, j_2, j_3 = 1, 2, \ldots, n) \tag{2.9}$$

и составим согласно формуле (2.6‴) произведение по индексу $i_3$ матрицы $A$ детерминанта $|A|$ на матрицу $a$ детерминанта $|a|$:

$$A\{i_3\}a = \left\| \sum_{\lambda=1}^{n} A_{k_1 k_2 \lambda} a_{\lambda k_3 k_4} \right\| \qquad (k_1, k_2, k_3, k_4 = 1, 2, \ldots, n). \tag{2.10}$$

Соответствующий матрице (2.10) четырехмерный детерминант $n$-го порядка

$$\left| \sum_{\lambda=1}^{n} A_{\overset{+\pm}{k_1 k_2}\lambda}\, a_{\lambda \overset{\pm+}{k_3 k_4}} \right| \qquad (k_1, k_2, k_3, k_4 = 1, 2, \ldots, n) \tag{2.11}$$

будет равен произведению детерминантов (2.9).

Действительно, полагая

$$A'_{k_1 k_2 k_3 k_4} = \sum_{\lambda=1}^{n} A_{k_1 k_2 \lambda} a_{\lambda k_3 k_4},$$

перепишем детерминант (2.11) в виде

$$|A'| = |A'_{\overset{++\pm+}{k_1 k_2 k_3 k_4}}| \qquad (k_1, k_2, k_3, k_4 = 1, 2, \ldots, n).$$

Рассматривая в нем первые два индекса $k_1$, $k_2$ как один двукратный индекс $\underbrace{k_1 k_2}$ с альтернативным $k_2$, а последние два индекса $k_3$, $k_4$ как один двукратный индекс $\underbrace{k_3 k_4}$ с альтернативным $k_3$, мы получаем полное разложение детерминанта $|A'|$ на сумму $(n!)^2$ обычных детерминантов:

$$|A'| = \sum |A'_{\underbrace{k_1 \overset{\pm}{k_2}}\underbrace{\overset{\pm}{k_3} k_4}}| = \sum \left| \sum_{\lambda=1}^{n} A_{\underbrace{k_1 \overset{\pm}{k_2}}\lambda}\, a_{\lambda \underbrace{\overset{\pm}{k_3} k_4}} \right| \qquad (k_1, k_2, k_3, k_4 = 1, 2, \ldots, n). \tag{2.12}$$

С другой стороны, разлагая каждый из кубических детерминантов (2.9) на сумму $n!$ обычных детерминантов, находим:

$$|A| = \sum |A_{\underbrace{i_1 \overset{\pm}{i_2}} \overset{\pm}{i_3}}| \qquad (i_1, i_2, i_3 = 1, 2, \ldots, n),$$

$$|a| = \sum |a_{\underbrace{\overset{\pm}{j_1} \overset{\pm}{j_2}} j_3}| \qquad (j_1, j_2, j_3 = 1, 2, \ldots, n),$$

и так как согласно правилу умножения обычных детерминантов

$$|A_{\underbrace{i_1 \overset{\pm}{i_2}} \overset{\pm}{i_3}}| \cdot |a_{\overset{\pm}{j_1}\underbrace{\overset{\pm}{j_2} j_3}}| = \left| \sum_{\lambda=1}^{n} A_{\underbrace{k_1 \overset{\pm}{k_2}}\lambda}\, a_{\lambda \underbrace{\overset{\pm}{k_3} k_4}} \right| \qquad (k_1, k_2, k_3, k_4 = 1, 2, \ldots, n),$$

то

$$|A| \cdot |a| = \sum \left| \sum_{\lambda=1}^{n} A_{\underbrace{k_1 \overset{\pm}{k_2}}\lambda}\, a_{\lambda \underbrace{\overset{\pm}{k_3} k_4}} \right| \qquad (k_1, k_2, k_3, k_4 = 1, 2, \ldots, n). \tag{2.13}$$

Сравнивая выражения (2.12) и (2.13), заключаем, что

$$|A|\cdot|a|=|A'|,$$

т. е.

$$|A_{\overset{+}{i_1}\overset{+}{i_2}\overset{\pm}{i_3}}|\cdot|a_{\overset{\pm}{j_1}\overset{\pm}{j_2}\overset{+}{j_3}}|=\Big|\sum_{\lambda=1}^{n} A_{\overset{+}{k_1}\overset{\pm}{k_2}\lambda}\, a_{\lambda\overset{\pm}{k_3}\overset{+}{k_4}}\Big|. \tag{2.14}$$

Транспонируя матрицы $A$ и $a$ по любым двум альтернативным индексам и принимая во внимание свойство II многомерных детерминантов (гл. I, § 2), мы видим, что, кроме равенства (2.14), имеют место также следующие равенства:

$$|A_{\overset{+}{i_1}\overset{\pm}{i_2}\overset{\pm}{i_3}}|\cdot|a_{\overset{\pm}{j_1}\overset{\pm}{j_2}\overset{+}{j_3}}|=\Big|\sum_{\lambda=1}^{n} A_{\overset{+}{k_1}\lambda\overset{\pm}{k_3}}\, a_{\lambda\overset{\pm}{k_2}\overset{+}{k_4}}\Big|, \tag{2.15}$$

$$|A_{\overset{+}{i_1}\overset{\pm}{i_2}\overset{+}{i_3}}|\cdot|a_{\overset{\pm}{j_1}\overset{\pm}{j_2}\overset{+}{j_3}}|=\Big|\sum_{\lambda=1}^{n} A_{\overset{+}{k_1}\overset{\pm}{k_2}\lambda}\, a_{\overset{\pm}{k_3}\lambda\overset{+}{k_4}}\Big|, \tag{2.16}$$

$$|A_{\overset{+}{i_1}\overset{\pm}{i_2}\overset{\pm}{i_3}}|\cdot|a_{\overset{\pm}{j_1}\overset{\pm}{j_2}\overset{+}{j_3}}|=\Big|\sum_{\lambda=1}^{n} A_{\overset{+}{k_1}\lambda\overset{\pm}{k_3}}\, a_{\overset{\pm}{k_2}\lambda\overset{+}{k_4}}\Big|, \tag{2.17}$$

где, так же как и в (2.14), все индексы $i$, $j$, $k$ пробегают значения $1, 2, \ldots, n$

Равенства (2.14) — (2.17) выражают произведение двух кубических детерминантов $n$-го порядка в виде четырехмерного детерминанта того же порядка с многочленными элементами, представляющими произведения соответствующих альтернативных строк перемножаемых детерминантов. То обстоятельство, что перемножаемые строки кубических детерминантов — альтернативные, является весьма существенным, так как умножение неальтернативных строк приводит к детерминанту, не выражающему произведения данных детерминантов, а умножение альтернативных строк одного детерминанта на неальтернативные строки другого, вообще, не дает в результате этой операции какого-либо детерминанта, поскольку число альтернативных индексов в произведении становится тогда нечетным.

6. Правило Кэли—Райса, очевидно, не распространяется на тот случай, когда хотя бы один из множителей рассматривавшегося выше произведения является перманентом. Это ограничение устраняется *правилом Скотта—Райса* [211, 192] умножения многомерных детерминантов одного и того же порядка с любыми сигнатурами.

Будем рассматривать те же кубические детерминанты $n$-го порядка (2.9), произведение которых мы получили в виде четырехмерного детерминанта $n$-го порядка с многочленными элементами, и покажем, что это же произведение можно представить в виде пятимерного детерминанта $n$-го порядка с одночленными элементами. Общий случай умножения многомерных детерминантов одного и того же порядка с любыми сигнатурами рассматривается аналогично (упражнение 15).

Выделим в каждой из матриц

$$A=\|A_{i_1i_2i_3}\| \qquad (i_1, i_2, i_3=1, 2, \ldots, n)$$
$$a=\|a_{j_1j_2j_3}\| \qquad (j_1, j_2, j_3=1, 2, \ldots, n)$$

детерминантов (2.9) все сечения любой ориентации, например ориентации $(i_3)$ в матрице $A$ и ориентации $(j_1)$ в матрице $a$. Умножая каждый элемент $\nu$-го $(1\leqq\nu\leqq n)$ сечения ориентации $(i_3)$ матрицы $A$ на каждый элемент $\nu$-го сечения ориентации $(j_1)$ матрицы $a$, образуем $\nu$-е сечение ориентации $(k_3)$ пятимерной матрицы $n$-го порядка

$$B=\|B_{k_1k_2k_3k_4k_5}\| \qquad (k_1, k_2, k_3, k_4, k_5=1, 2, \ldots, n),$$

где в каждом элементе

$$B_{k_1k_2k_3k_4k_5} = A_{i_1i_2\underbrace{i_3 a_{j_1}}j_2j_3} \tag{2.18}$$

соединительные индексы $i_3$, $j_1$ рассматриваются как один двукратный индекс $\underbrace{i_3j_1}$, принимающий одно из значений 11, 22, ..., $nn$. Составленная таким образом матрица $B$ имеет при $n=2$ следующий вид:

$$\left\|\begin{array}{cc|cc|cc|cc}
A_{111}a_{111} & A_{111}a_{112} & A_{121}a_{111} & A_{121}a_{112} & A_{112}a_{211} & A_{112}a_{212} & A_{122}a_{211} & A_{122}a_{212} \\
A_{111}a_{121} & A_{111}a_{122} & A_{121}a_{121} & A_{121}a_{122} & A_{112}a_{221} & A_{112}a_{222} & A_{122}a_{221} & A_{122}a_{222} \\
\hline
A_{211}a_{111} & A_{211}a_{112} & A_{221}a_{111} & A_{221}a_{112} & A_{212}a_{211} & A_{212}a_{212} & A_{222}a_{211} & A_{222}a_{212} \\
A_{211}a_{121} & A_{211}a_{122} & A_{221}a_{121} & A_{221}a_{122} & A_{212}a_{221} & A_{212}a_{222} & A_{222}a_{221} & A_{222}a_{222}
\end{array}\right\| \qquad \to(k_3),\ \to(k_2),\ \to(k_5),\ \downarrow(k_4),\ \downarrow(k_1).$$

Возьмем теперь тот детерминант $|B|$ матрицы $B$, в котором знаки над индексами $k_1$, $k_2$, $k_4$, $k_5$ одинаковы со знаками над индексами $i_1$, $i_2$, $j_2$, $j_3$ детерминантов (2.9), а знак над индексом $k_3$ будет $+$ или $\pm$, смотря по тому, имеют ли индексы $i_3$, $j_1$ этих детерминантов один и тот же или противоположный характер. Имеем тогда:

$$|B| = |B_{\overset{+}{k_1}\overset{\pm}{k_2}\overset{+}{k_3}\overset{\pm}{k_4}\overset{+}{k_5}}| \qquad (k_1, k_2, k_3, k_4, k_5 = 1, 2, \ldots, n).$$

Детерминант $|B|$ согласно определению есть алгебраическая сумма $(n!)^4$ членов вида

$$(-1)^{K_2+K_4} B_{k_1^{(1)}k_2^{(1)}k_3^{(1)}k_4^{(1)}k_5^{(1)}} \ldots B_{k_1^{(n)}k_2^{(n)}k_3^{(n)}k_4^{(n)}k_5^{(n)}},$$

где $K_2$, $K_4$ — числа инверсий в перестановках

$$k_2^{(1)}, k_2^{(2)}, \ldots, k_2^{(n)} \text{ и } k_4^{(1)}, k_4^{(2)}, \ldots, k_4^{(n)}.$$

Перепишем последнее выражение в виде

$$(-1)^{I_2+J_2} A_{i_1^{(1)}i_2^{(1)}\underbrace{i_3^{(1)}a_{j_1^{(1)}}}j_2^{(1)}j_3^{(1)}} \ldots A_{i_1^{(n)}i_2^{(n)}\underbrace{i_3^{(n)}a_{j_1^{(n)}}}j_2^{(n)}j_3^{(n)}}, \tag{2.19}$$

где

$$\underbrace{i_3^{(1)}j_1^{(1)}}, \quad \underbrace{i_3^{(2)}j_1^{(2)}}, \quad \ldots, \quad \underbrace{i_3^{(n)}j_1^{(n)}}$$

есть последовательность в некотором порядке значений 11, 22, ..., $nn$ двукратного индекса $\underbrace{i_3j_1}$, а $I_2$ и $J_2$ — числа инверсий в перестановках

$$i_2^{(1)}, i_2^{(2)}, \ldots, i_2^{(n)} \text{ и } j_2^{(1)}, j_2^{(2)}, \ldots, j_2^{(n)}.$$

Так как детерминанты (2.9) являются алгебраическими суммами $(n!)^2$ членов соответственно видов

$$(-1)^{I_2+I_3} A_{i_1^{(1)}i_2^{(1)}i_3^{(1)}} \ldots A_{i_1^{(n)}i_2^{(n)}i_3^{(n)}}$$

и

$$(-1)^{J_1+J_2} a_{j_1^{(1)}j_2^{(1)}j_3^{(1)}} \ldots a_{j_1^{(n)}j_2^{(n)}j_3^{(n)}},$$

где $I_2$ и $J_2$ имеют указанные выше значения, а $I_3$ и $J_1$ — числа инверсий в перестановках

$$i_3^{(1)}, i_3^{(2)}, \ldots, i_3^{(n)} \text{ и } j_1^{(1)}, j_1^{(2)}, \ldots, j_1^{(n)},$$

то произведение $|A|\cdot|a|$ этих детерминантов есть алгебраическая сумма $(n!)^4$ членов вида

$$(-1)^{I_2+I_3+J_1+J_2} A_{i_1^{(1)}i_2^{(1)}i_3^{(1)}} \ldots A_{i_1^{(n)}i_2^{(n)}i_3^{(n)}} a_{j_1^{(1)}j_2^{(1)}j_3^{(1)}} \ldots a_{j_1^{(n)}j_2^{(n)}j_3^{(n)}},$$

т. е. вида (2.19), поскольку множители последнего выражения могут быть расположены в таком порядке, чтобы перестановки

$$i_3^{(1)},\ i_3^{(2)},\ \ldots,\ i_3^{(n)} \text{ и } j_1^{(1)},\ j_1^{(2)},\ \ldots,\ j_1^{(n)}$$

были одинаковы и, следовательно, $I_3 = J_1$. Таким образом, каждому члену произведения $|A|\cdot|a|$ соответствует один и только один равный ему член детерминанта $|B|$, и так как произведение $|A|\cdot|a|$ и детерминант $|B|$, который на основании выражения (2.18) можно представить в виде $|A_{\underset{k_1k_2\underbrace{k_3\ k_3}k_4k_5}{+\pm+a\ \pm+}}|$, содержат одно и то же число членов, то они равны между собой, т. е.

$$|A_{\overset{+\pm\pm}{i_1i_2i_3}}|\cdot|a_{\overset{\pm\pm+}{j_1j_2j_3}}| = |A_{\underset{k_1k_2\underbrace{k_3\ k_3}k_4k_5}{+\pm+a\ \pm+}}|, \tag{2.20}$$

где все индексы независимо друг от друга пробегают значения 1, 2, ..., $n$.

Равенство (2.20) и подобные ему равенства, которые получим таким же путем, беря в матрицах детерминантов (2.9) сечения других каких-нибудь ориентаций для составления матрицы $B$, выражают правило Скотта — Райса получения произведения двух кубических детерминантов в виде пятимерного детерминанта с одночленными элементами.

### Упражнения

1. Трилинейная форма

$$F = 2x_1y_1z_1 + x_1y_1z_2 - 3x_1y_2z_1 + 4x_1y_2z_2 - x_2y_1z_1 + 5x_2y_1z_2 - 2x_2y_2z_1 + 3x_2y_2z_2$$

подвергается линейному преобразованию $y_1 = Y_1 + 3Y_2$, $y_2 = -4Y_1 + 2Y_2$. Найти матрицу преобразованной формы, вычисляя произведение по индексу $j$ матрицы трилинейной формы на матрицу линейного преобразования.

2. Билинейная форма $F = x_1y_1 + 3x_1y_2 - 4x_2y_1 + 2x_2y_2$ подвергается билинейному преобразованию

$$y_1 = 2Y_1\eta_1 + Y_1\eta_2 - 3Y_2\eta_1 + 4Y_2\eta_2, \qquad y_2 = -Y_1\eta_1 + 5Y_1\eta_2 - 2Y_2\eta_1 + 3Y_2\eta_2.$$

Найти матрицу преобразованной формы, вычисляя произведение по индексу $j$ матрицы билинейной формы на матрицу билинейного преобразования. Сравнить с результатом упражнения 1.

3. Показать, что от умножения по индексу $\nu$ ($\nu$ — любой из индексов $i$, $j$, $k$) кубической матрицы $A = \|A_{ijk}\|$ ($i$, $j$, $k = 1, 2, \ldots, n$) на диагональную квадратную матрицу

$$a = \begin{Vmatrix} a_{11} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a_{22} & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & a_{nn} \end{Vmatrix}$$

первое сечение ориентации ($\nu$) в матрице $A$ умножается на $a_{11}$, второе на $a_{22}$ и т. д. Отметить случай, когда $a$ — единичная матрица.

4. Показать, что произведение по индексу $\nu$ ($\nu$ — любой из индексов $i$, $j$, $k$) диагональной кубической матрицы $n$-го порядка $A = \|A_{ijk}\|$ на квадратную матрицу того же порядка $a = \|a_{ij}\|$ равно кубической матрице $n$-го порядка, у которой все элементы — нули, кроме элементов главного диагонального сечения, соответствующего направлению ($\nu$) и представляющего обычную матрицу, получающуюся из матрицы $a$ умножением 1-й строки на $A_{111}$, 2-й — на $A_{222}$ и т. д. Отметить случай, когда диагональные элементы матрицы $A$ равны 1.

5. Даны матрицы

$$A = \|A_{i_1i_2\ldots i_p}\| \quad (i_1, i_2, \ldots, i_p = 1, 2, \ldots, n), \qquad a = \|a_{ij}\| \quad (i, j = 1, 2, \ldots, n).$$

Показать, что

$$A\{i_\alpha\}\,a = \Big\|\sum_{\lambda=1}^{n} A_{i_1\ldots i_{\alpha-1}\lambda i_{\alpha+1}\ldots i_p}a_{\lambda i_\alpha}\Big\|$$
$$(i_1, i_2, \ldots, i_p = 1, 2, \ldots, n;\ 1 \leqq \alpha \leqq p),$$

т. е. произведение по индексу $i_\alpha$ матрицы $A$ на $a$ является $p$-мерной матрицей $n$-го порядка, у которой $\mu$-й ($1 \leqq \mu \leqq n$) элемент любой строки направления ($i_\alpha$) есть произведение соответствующей строки матрицы $A$ на $\mu$-й столбец матрицы $a$.

6. Даны матрицы

$$A = \| A_{i_1 i_2 \ldots i_p} \| \qquad (i_1, i_2, \ldots, i_p = 1, 2, \ldots, n),$$
$$a = \| a_{j_1 j_2 \ldots j_q} \| \qquad (j_1, j_2, \ldots, j_q = 1, 2, \ldots, n).$$

Показать, что

$$A\{i_\alpha\}a = \left\| \sum_{\lambda=1}^{n} A_{k_1 \ldots k_{\alpha-1} \lambda k_{\alpha+1} \ldots k_p} a_{\lambda k_\alpha k_{p+1} \ldots k_{p+q-2}} \right\|$$
$$(k_1, k_2, \ldots, k_{p+q-2} = 1, 2, \ldots, n; \quad 1 \leqq \alpha \leqq p),$$

т. е. произведение по индексу $i_\alpha$ матрицы $A$ на $a$ является $(p+q-2)$-мерной матрицей $n$-го порядка

$$A^{(\alpha)} = \| A^{(\alpha)}_{k_1 k_2 \ldots k_{p+q-2}} \| \qquad (k_1, k_2, \ldots, k_{p+q-2} = 1, 2, \ldots, n),$$

где

$$A^{(\alpha)}_{k_1 \ldots k_{\alpha-1} k_\alpha k_{\alpha+1} \ldots k_{p+q-2}} = \sum_{\lambda=1}^{n} A_{k_1 \ldots k_{\alpha-1} \lambda k_{\alpha+1} \ldots k_p} a_{\lambda k_\alpha k_{p+1} \ldots k_{p+q-2}}.$$

7. Дана кубическая матрица 2-го порядка

$$A = \left\| \begin{array}{rr|rr} 2 & 1 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & -3 & 3 \end{array} \right\| \quad \begin{array}{l} \xrightarrow{\ } (i) \\ \ulcorner \longrightarrow (k) \\ \downarrow \\ (j) \end{array}.$$

Найти $A\{i\}A$, $A\{j\}A$, $A\{k\}A$.

8. Составить произведение $A\{i_\alpha\}a$ (см. упражнение 6) и показать, что это произведение тогда и только тогда равно одной из матриц $A$, $a$, когда другая из них есть единичная квадратная матрица.

9. Показать, что произведение $p$-мерного детерминанта $n$-го порядка с сигнатурой, содержащей по крайней мере два альтернативных индекса, на квадратный детерминант того же порядка равно косигнатурному детерминанту $p$-мерной матрицы $n$-го порядка, представляющей произведение по любому из альтернативных индексов матрицы $p$-мерного детерминанта на матрицу квадратного детерминанта, т. е.

$$\Big| A_{\underbrace{(\pm)\, s_1}_{i_1 \ldots i_{\alpha-1}} \overset{\pm}{i_\alpha} \underbrace{(\pm)\, s_2}_{i_{\alpha+1} \ldots i_p}} \Big| \cdot \Big| a_{\overset{\pm}{i} \overset{\pm}{j}} \Big| = \Big| \sum_{\lambda=1}^{n} A_{\underbrace{(\pm\, s_1}_{i_1 \ldots i_{\alpha-1}} \lambda \underbrace{(\pm)\, s_2}_{i_{\alpha+1} \ldots i_p}} a_{\lambda \overset{\pm}{i_\alpha}} \Big|,$$

где символы $(\pm)s_1$ и $(\pm)s_2$ обозначают совокупности знаков $+$, $\pm$ над соответственными индексами.

10. Представить всеми способами произведение детерминантов $n$-го порядка $| a_{\overset{\pm}{i_1}\overset{\pm}{i_2}\overset{\pm}{i_3}\overset{\pm}{i_4}} |$, $| b_{\overset{\pm}{i}\overset{\pm}{j}} |$.

11. Даны $p$-мерный и $q$-мерный детерминанты $n$-го порядка

$$|A| = \Big| A_{\underbrace{(\pm)\, s_1}_{i_1 \ldots i_{\alpha-1}} \overset{\pm}{i_\alpha} \underbrace{(\pm)\, s_2}_{i_{\alpha+1} \ldots i_p}} \Big| \qquad (i_1, i_2, \ldots, i_p = 1, 2, \ldots, n),$$
$$|a| = \Big| a_{\underbrace{(\pm)\, \sigma_1}_{j_1 \ldots j_{\beta-1}} \overset{\pm}{j_\beta} \underbrace{(\pm)\, \sigma_2}_{j_{\beta+1} \ldots j_q}} \Big| \qquad (j_1, j_2, \ldots, j_q = 1, 2, \ldots, n),$$

где символами $(\pm)s_1$, $(\pm)s_2$, $(\pm)\sigma_1$, $(\pm)\sigma_2$ обозначены совокупности знаков, $+$, $\pm$ над соответственными индексами.

Если $n^{p-1}$ строк альтернативного направления ($i_\alpha$) ($1 \leqq \alpha \leqq p$) детерминанта $|A|$ умножим на $n^{q-1}$ строк альтернативного направления ($j_\beta$) ($1 \leqq \beta \leqq q$) детерминанта $|a|$ полученные $n^{p+q-2}$ произведений примем за элементы $(p+q-2)$-мерного детерминанта

$n$-го порядка

$$|B| = \left|\sum_{\lambda=1}^{n} A_{\overbrace{k_1\ldots k_{\alpha-1}}^{(\pm)s_1}\lambda\overbrace{k_{\alpha+1}\ldots k_p}^{(\pm)s_2}}\, a_{\overbrace{k_\alpha k_{p+1}\ldots k_{p+\beta-2}}^{(\pm)\sigma_1}\lambda\overbrace{k_{p+\beta-1}\ldots k_{p+q-2}}^{(\pm)\sigma_2}}\right|$$

$$(k_1,\ k_2,\ \ldots,\ k_{p+q-2} = 1,\ 2,\ \ldots,\ n),$$

то $|A|\cdot|a| = |B|$ (правило Кэли—Райса). Доказать.

12. Сколькими способами может быть представлено произведение двух многомерных детерминантов по правилу Кэли—Райса?

13. Пусть $A = \|A_{i_1\ldots i_\alpha\ldots i_p}\|$ $(i_1, \ldots, i_{\alpha-1}, i_{\alpha+1}, \ldots, i_p = 1, 2, \ldots, m;\ i_\alpha = 1, 2, \ldots, n)$ — $p$-мерная матрица, расширенная в направлении $(i_\alpha)$ $(1 \leqq \alpha \leqq p)$ и $a = \|a_{j_1\ldots j_\beta\ldots j_q}\|$ $(j_1, \ldots, j_{\beta-1}, j_{\beta+1}, \ldots, j_q = 1,\ 2,\ \ldots,\ m;\ j_\beta = 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$ — $q$-мерная матрица, расширенная в направлении $(i_\beta)$ $(1 \leqq \beta \leqq q)$. Умножая $m^{p-1}$ строк направления $(i_\alpha)$ матрицы $A$ на $m^{q-1}$ строк направления $(j_\beta)$ матрицы $a$, примем полученные $m^{p+q-2}$ произведений за элементы $(p+q-2)$-мерной матрицы $m$-го $(m < n)$ порядка

$$B = \left\|\sum_{\lambda=1}^{n} A_{k_1\ldots k_{\alpha-1}\lambda k_{\alpha+1}\ldots k_p} a_{k_\alpha k_{p+1}\ldots k_{p+\beta-2}\lambda k_{p+\beta-1}\ldots k_{p+q-2}}\right\|$$

$$(k_1,\ k_2,\ \ldots,\ k_{p+q-2} = 1,\ 2,\ \ldots,\ m).$$

Будем предполагать альтернативными какое-либо четное число индексов $i$, включая $i_\alpha$, матрицы $A$ и какое-нибудь четное число индексов $j$, включая $j_\beta$, матрицы $a$. Эту сигнатуру сохраним для всех несуммируемых индексов матрицы $B$. Каждые $m$ сечений ориентации $(i_\alpha)$ матрицы $A$ и те же $m$ сечений ориентации $(j_\beta)$ матрицы $a$ образуют матрицы соответственных детерминантов $m$-го порядка с данными сигнатурами $|A_\Gamma|$ и $|a_\Gamma|$, где $\Gamma$ — некоторое сочетание (без повторений) из $n$ чисел 1, 2, ..., $n$ по $m$.

Доказать, что детерминант $|B|$ матрицы $B$ (с указанной выше сигнатурой) равен сумме произведений $|A_\Gamma|\cdot|a_\Gamma|$ соответственных детерминантов матриц $A$ и $a$, распространенной на все $C_n^m$ сочетаний $\Gamma$:

$$|B| = \sum |A_\Gamma|\cdot|a_\Gamma|.$$

(Обобщенная формула Бине—Коши для обычных детерминантов, указанная впервые Гегенбауером [84] и уточненная впоследствии Лека [162].)

14. Пусть в матрицах $A$ и $a$ упражнения 13 индексы $i_\alpha$ и $j_\beta$ — неальтернативные и $\Gamma$ — какое-либо сочетание (с повторениями) из чисел 1, 2, ..., $n$ по $m$ $(m < n)$, например, совокупность $\nu$ $(1 \leqq \nu \leqq m)$ различных чисел $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu$ из натурального ряда 1, 2, ..., $n$, повторяющихся соответственно $m_1, m_2, \ldots, m_\nu$ $(m_1 + m_2 + \ldots + m_\nu = m)$ раз. Оставляя остальные обозначения упражнения 13 неизменными, доказать, что в этом случае

$$|B| = \sum \frac{1}{k_\Gamma}|A_\Gamma|\cdot|a_\Gamma|,$$

где $k_\Gamma = m_1!m_2!\ldots m_\nu!$ и суммирование распространено на все возможные сочетания (с повторениями) $\Gamma$ (Ольденбургер [170]).

15. Даны $p$-мерный и $q$-мерный детерминанты $n$-го порядка

$$|A_{\overbrace{i_1\ldots i_{\alpha-1}}^{(\pm)s_1}\overbrace{i_\alpha}^{(\pm)s}\overbrace{i_{\alpha+1}\ldots i_p}^{(\pm)s_2}}| \qquad (i_1,\ i_2,\ \ldots,\ i_p = 1,\ 2,\ \ldots,\ n;\ 1 \leqq \alpha \leqq p),$$

$$|a_{\overbrace{j_1\ldots j_{\beta-1}}^{(\pm)\sigma_1}\overbrace{j_\beta}^{(\pm)\sigma}\overbrace{j_{\beta+1}\ldots j_q}^{(\pm)\sigma_2}}| \qquad (j_1,\ j_2,\ \ldots,\ j_q = 1,\ 2,\ \ldots,\ n;\ 1 \leqq \beta \leqq q),$$

где каждый из символов $(\pm)s$, $(\pm)\sigma$ обозначает любой из знаков $+$, $\pm$. Доказать, что произведение этих детерминантов выражается $(p+q-1)$-мерным детерминантом $n$-го порядка с одночленными элементами

$$|A_{\overbrace{k_1\ldots k_{\alpha-1}}^{(\pm)s_1}\overbrace{k_\alpha}^{(\pm)\tau}\overbrace{k_{\alpha+1}\ldots k_p}^{(\pm)s_2}}\, a_{\overbrace{k_{p+1}\ldots k_{p+\beta-1}}^{(\pm)\sigma_1}k_\alpha\overbrace{k_{p+\beta}\ldots k_{p+q-1}}^{(\pm)\sigma_2}}|$$

$$(k_1, k_2, \ldots, k_{p+q-1} = 1,\ 2,\ \ldots,\ n),$$

где знак $(\pm)\,\tau$ над индексом $k_\alpha$ будет $+$ или $\pm$, смотря по тому, имеют ли индексы $i_\alpha$ и $j_\beta$ перемножаемых детерминантов один и тот же или противоположный характер (правило Скотта—Райса).

**16.** Сколькими способами можно представить произведение $p$-мерного и $q$-мерного детерминантов одного и того же порядка по правилу Скотта—Райса?

**17.** Применяя правило Скотта—Райса, представить всеми способами:

а) произведение квадратных детерминантов $n$-го порядка $|a|$, $|b|$ в виде кубического детерминанта того же порядка (п р а в и л о  П а д у а [183]);

б) произведение квадратного детерминанта $n$-го порядка $|a|$ на квадратный перманент того же порядка $\overset{(+)\,(+)}{|\;b\;|}$ в виде кубического детерминанта $n$-го порядка;

в) произведение квадратных перманентов $n$-го порядка $\overset{(+)\,(+)}{|\;a\;|}$, $\overset{(+)\,(+)}{|\;b\;|}$ в виде кубического перманента того же порядка.

**18.** Показать, что квадрат детерминанта $n$-го порядка $|a_{ij}|$ можно представить в виде кубического детерминанта того же порядка, симметрического относительно его альтернативных индексов, причем элементами главного диагонального сечения, соответствующего неальтернативному направлению, являются квадраты элементов $a_{ij}$. Дать пример (Лека [113]).

**19.** Применяя правило Скотта—Райса, представить всеми способами произведение кубического детерминанта $n$-го порядка с той или иной сигнатурой на квадратный детерминант или перманент того же порядка в виде четырехмерного детерминанта $n$-го порядка.

**20.** Применяя правило Падуа (упражнение 17а), показать, что решение системы уравнений

$$\sum_{i_1=1}^{n} x_{i_1}^{(1)} \sum_{i_2=1}^{n} A_{\alpha i_2} x_{i_1+i_2-1}^{(2)} = N_\alpha \qquad (x_{\nu+n}^{(2)} = x_\nu^{(2)};\quad \alpha = 1, 2, \ldots, n;\quad \nu = 1, 2, \ldots, n),$$

линейных относительно $x_{i_1}^{(1)}$, может быть представлено в виде

$$x_\nu^{(1)} = \frac{\left|(1-\delta_{i_1,\nu})\, A_{\underset{\alpha}{\pm}\,\underset{i_2}{+}}\, x^{(2)}_{i_1+i_2-1} + \delta_{i_1,\nu} N_\alpha\right|}{\left|A_{\underset{\alpha}{\pm}\,\underset{i_2}{+}}\, x^{(2)}_{\underset{i_1+i_2-1}{\pm}}\right|} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n),$$

где $\delta_{i_1,\nu}$—символ Кронекера, равный 1 или 0 в зависимости от того, равны или не равны между собой $i_1$ и $\nu$ (Падуа [183]).

**21.** Показать, что система уравнений

$$\sum_{i_1=1}^{n} x_{i_1}^{(1)} \sum_{i_2=1}^{n} x_{i_1+i_2-1}^{(2)} \sum_{i_3=1}^{n} B_{\alpha i_3} x_{i_2+i_3-1}^{(3)} = N_\alpha$$

$$(x_{\nu+n}^{(k)} = x_\nu^{(k)} \text{ для } k = 2, 3;\quad \alpha = 1, 2, \ldots, n;\quad \nu = 1, 2, \ldots, n),$$

линейных относительно $x_{i_1}^{(1)}$, имеет решение

$$x_\nu^{(1)} = \frac{\left|(1-\delta_{i_1,\nu})\, B_{\underset{\alpha}{\pm}\,\underset{i_3}{+}}\, x^{(3)}_{\underset{i_2+i_3-1}{+}}\, x^{(2)}_{\underset{i_1+i_2-1}{\pm}} + \delta_{i_1,\nu} N_\alpha\right|}{\left|B_{\underset{\alpha}{\pm}\,\underset{i_3}{+}}\, x^{(3)}_{\underset{i_2+i_3-1}{+}}\, x^{(2)}_{\underset{i_1+i_2-1}{\pm}}\right|} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

(см. [25]).

**22.** Обобщить результат упражнения 21 на систему уравнений

$$\sum_{i_1=1}^{n} x_{i_1}^{(1)} \sum_{i_2=1}^{n} x_{i_1+i_2-1}^{(2)} \sum_{i_3=1}^{n} x_{i_2+i_3-1}^{(3)} \cdots \sum_{i_p=1}^{n} M_{\alpha i_p} x_{i_{p-1}+i_p-1}^{(p)} = N_\alpha$$

$$\begin{bmatrix} x_{\nu+n}^{(k)} = x_\nu^{(k)} \text{ для } k = 2, 3, \ldots, p; \\ \alpha = 1, 2, \ldots, n;\quad \nu = 1, 2, \ldots, n \end{bmatrix}$$

(см. [25]).

## § 3. Умножение нескольких пространственных матриц

1. Как было показано в § 2, мы приходим к понятию произведения по некоторому индексу кубической матрицы на квадратную, подвергая соответственную трилинейную форму линейному преобразованию по одному ряду переменных. Подвергнем теперь трилинейную форму $F=\sum_{i,j,k=1}^{n} A_{ijk}x_iy_jz_k$ с кубической матрицей $A=\|A_{ijk}\|$ $(i, j, k=1, 2, \ldots, n)$ цепочке линейных преобразований по одному какому-нибудь ряду переменных, например

$$x_\lambda=\sum_{i=1}^{n} a_{\lambda i}^{(1)}X_i^{(1)},\qquad X_\lambda^{(1)}=\sum_{i=1}^{n} a_{\lambda i}^{(2)}X_i^{(2)},\qquad \ldots,\qquad X_\lambda^{(q-1)}=\sum_{i=1}^{n} a_{\lambda i}^{(q)}X_i^{(q)}$$
$$(\lambda=1, 2, \ldots, n)$$

с соответствующими квадратными матрицами

$$a^{(1)}=\|a_{\lambda i}^{(1)}\|,\qquad a^{(2)}=\|a_{\lambda i}^{(2)}\|,\qquad \ldots,\qquad a^{(q)}=\|a_{\lambda i}^{(q)}\|\qquad (\lambda, i=1, 2, \ldots, n). \quad (3.1)$$

Получим тогда трилинейную форму $F^{(q)}=\sum_{i,j,k=1}^{n} A_{ijk}^{(q)}X_i^{(q)}y_jz_k$ с кубической матрицей

$$A^{(q)}=\|A_{ijk}^{(q)}\|\qquad (i, j, k=1, 2, \ldots, n), \quad (3.2)$$

элементы которой выражаются формулами

$$A_{ijk}^{(q)}=\sum_{\lambda_1,\ldots,\lambda_q=1}^{n} A_{\lambda_1 jk}a_{\lambda_1\lambda_2}^{(1)}a_{\lambda_2\lambda_3}^{(2)}\ldots a_{\lambda_q i}^{(q)}\qquad (i, j, k=1, 2, \ldots, n).$$

Отсюда, принимая во внимание равенство (2.3′), заключаем, что матрица (3.2) получается в результате последовательного умножения по индексу $i$ кубической матрицы $A$ на квадратные матрицы (3.1), т. е.

$$A^{(q)}=[(A\{i\}a^{(1)})\{i\}a^{(2)}\ \ldots\ ]\{i\}a^{(q)}. \quad (3.3)$$

К той же форме $F^{(q)}$ мы придем, подвергая форму $F$ линейному преобразованию

$$x_\lambda=\sum_{i=1}^{n} a_{\lambda i}X_i^{(q)}\qquad (\lambda=1, 2, \ldots, n),$$

матрица которого $a=\|a_{\lambda i}\|$ $(\lambda, i=1, 2, \ldots, n)$ является произведением матриц (3.1), т. е. $a=a^{(1)}a^{(2)}\ldots a^{(q)}$. Следовательно, ввиду равенств (2.2′), (2.3′) имеем:

$$A^{(q)}=A\{i\}a. \quad (3.4)$$

Сравнивая равенства (3.3) и (3.4), находим:

$$[(A\{i\}a^{(1)})\{i\}a^{(2)}\ \ldots\ ]\{i\}a^{(q)}=A\{i\}a. \quad (3.5)$$

Таким образом, *последовательное умножение по одному какому-либо индексу кубической матрицы n-го порядка на несколько квадратных матриц того же порядка равносильно умножению по тому же индексу кубической матрицы на квадратную, являющуюся произведением данных квадратных матриц.*

Аналогичный результат получим при умножении по какому-нибудь индексу $p$-мерной матрицы $n$-го порядка $A$ на квадратные матрицы того же порядка $a^{(1)}, a^{(2)}, \ldots, a^{(q)}$ (упражнение 1).

2. Преобразуем, далее, трилинейную форму $F=\sum\limits_{i,\,j,\,k=1}^{n} A_{ijk}x_iy_jz_k$, полагая

$$\left.\begin{aligned} x_\lambda &= \sum_{i=1}^{n} a_{\lambda i}X_i \qquad (\lambda=1,\ 2,\ \ldots,\ n),\\ y_\mu &= \sum_{j=1}^{n} b_{\mu j}Y_j \qquad (\mu=1,\ 2,\ \ldots,\ n).\end{aligned}\right\} \tag{3.6$'$}$$

Получим тогда трилинейную форму $\Phi'=\sum\limits_{i,\,j,\,k=1}^{n} B'_{ijk}X_iY_jz_k$, коэффициенты которой согласно формулам (2.2′), (2.2″) представляются в зависимости от порядка, в котором совершаются преобразования (3.6′), выражениями

$$B'_{ijk}=\sum_{\mu=1}^{n} b_{\mu j}\sum_{\lambda=1}^{n} A_{\lambda\mu k}a_{\lambda i} \quad \text{или} \quad B'_{ijk}=\sum_{\lambda=1}^{n} a_{\lambda i}\sum_{\mu=1}^{n} A_{\lambda\mu k}b_{\mu j} \quad (i,\ j,\ k=1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

В соответствии с этим матрица

$$\| B'_{ijk}\| = \|\sum_{\lambda,\,\mu=1}^{n} A_{\lambda\mu k}a_{\lambda i}b_{\mu j}\| \qquad (i,\ j,\ k=1,\ 2,\ \ldots,\ n) \tag{3.7}$$

формы $\Phi'$ выражается в виде следующих произведений матрицы $A$ формы $F$ на матрицы $a$, $b$ преобразований (3.6′):

$$(A\{i\}a)\{j\}b=(A\{j\}b)\{i\}a=\|\sum_{\lambda,\,\mu=1}^{n} A_{\lambda\mu k}a_{\lambda i}b_{\mu j}\|. \tag{3.8$'$}$$

При этом согласно правилу Арменанта — Гарбиери имеем:

$$|A_{\underset{i}{\pm}\underset{j}{\pm}\underset{k}{+}}|\cdot|a|\cdot|b|=|\sum_{\lambda,\,\mu=1}^{n} A_{\underset{\lambda\mu k}{+}}a_{\underset{\lambda i}{\pm}}b_{\underset{\mu j}{\pm}}|. \tag{3.9$'$}$$

Точно так же, полагая в форме $F$

$$\left.\begin{aligned} x_\lambda &= \sum_{i=1}^{n} a_{\lambda i}X_i \qquad (\lambda=1,\ 2,\ \ldots,\ n),\\ z_\mu &= \sum_{k=1}^{n} b_{\mu k}Z_k \qquad (\mu=1,\ 2,\ \ldots,\ n)\end{aligned}\right\} \tag{3.6$''$}$$

или

$$\left.\begin{aligned} y_\lambda &= \sum_{j=1}^{n} a_{\lambda j}Y_j \qquad (\lambda=1,\ 2,\ \ldots,\ n),\\ z_\mu &= \sum_{k=1}^{n} b_{\mu k}Z_k \qquad (\mu=1,\ 2,\ \ldots,\ n),\end{aligned}\right\} \tag{3.6$'''$}$$

получим соответственно трилинейную форму

$$\Phi''=\sum_{i,\,j,\,k=1}^{n} B''_{ijk}X_iy_jZ_k \quad \text{или} \quad \Phi'''=\sum_{i,\,j,\,k=1}^{n} B'''_{ijk}x_iY_jZ_k.$$

Отсюда находим:

$$(A\{i\}a)\{k\}b=(A\{k\}b)\{i\}a=\|\sum_{\lambda,\,\mu=1}^{n} A_{\lambda j\mu}a_{\lambda i}b_{\mu k}\|, \tag{3.8$''$}$$

$$(A\{j\}a)\{k\}b=(A\{k\}b)\{j\}a=\|\sum_{\lambda,\,\mu=1}^{n} A_{i\lambda\mu}a_{\lambda j}b_{\mu k}\| \tag{3.8$'''$}$$

и

$$|A_{\underset{i}{\pm}\underset{j}{+}\underset{k}{\pm}}|\cdot|a|\cdot|b| = |\sum_{\lambda,\,\mu=1}^{n} A_{\lambda\underset{j}{+}\mu}\, a_{\lambda\underset{i}{\pm}}\, b_{\mu\underset{k}{\pm}}|, \tag{3.9''}$$

$$|A_{\underset{i}{+}\underset{j}{\pm}\underset{k}{\pm}}|\cdot|a|\cdot|b| = |\sum_{\lambda,\,\mu=1}^{n} A_{\underset{i}{+}\lambda\mu}\, a_{\lambda\underset{j}{\pm}}\, b_{\mu\underset{k}{\pm}}|. \tag{3.9'''}$$

Из равенств (3.8′), (3.8″), (3.8‴) заключаем, что при *последовательном умножении по различным индексам кубической матрицы на квадратные порядок следования квадратных матриц в произведении не влияет на результат умножения.*

Если матрицы $a$, $b$ одинаковы, то равенства (3.8′), (3.8″), (3.8‴) принимают вид

$$A\{ij\}\,a = \|\sum_{\lambda,\,\mu=1}^{n} A_{\lambda\mu k} a_{\lambda i} a_{\mu j}\|, \tag{3.10'}$$

$$A\{ik\}\,a = \|\sum_{\lambda,\,\mu=1}^{n} A_{\lambda j\mu} a_{\lambda i} a_{\mu k}\|, \tag{3.10''}$$

$$A\{jk\}\,a = \|\sum_{\lambda,\,\mu=1}^{n} A_{i\lambda\mu} a_{\lambda j} a_{\mu k}\|, \tag{3.10'''}$$

где $A\{ij\}\,a$, $A\{ik\}\,a$, $A\{jk\}\,a$ — сокращенные обозначения матричных произведений

$$(A\{i\}\,a)\{j\}\,a = (A\{j\}\,a)\{i\}\,a,$$
$$(A\{i\}\,a)\{k\}\,a = (A\{k\}\,a)\{i\}\,a,$$
$$(A\{j\}\,a)\{k\}\,a = (A\{k\}\,a)\{j\}\,a,$$

а вместо равенств (3.9′), (3.9″), (3.9‴) будем иметь:

$$|A_{\underset{i}{\pm}\underset{j}{\pm}\underset{k}{+}}|\cdot|a|^2 = |\sum_{\lambda,\,\mu=1}^{n} A_{\lambda\mu\underset{k}{+}}\, a_{\lambda\underset{i}{\pm}}\, a_{\mu\underset{j}{\pm}}|, \tag{3.11'}$$

$$|A_{\underset{i}{\pm}\underset{j}{+}\underset{k}{\pm}}|\cdot|a|^2 = |\sum_{\lambda,\,\mu=1}^{n} A_{\lambda\underset{j}{+}\mu}\, a_{\lambda\underset{i}{\pm}}\, a_{\mu\underset{k}{\pm}}|, \tag{3.11''}$$

$$|A_{\underset{i}{+}\underset{j}{\pm}\underset{k}{\pm}}|\cdot|a|^2 = |\sum_{\lambda,\,\mu=1}^{n} A_{\underset{i}{+}\lambda\mu}\, a_{\lambda\underset{j}{\pm}}\, a_{\mu\underset{k}{\pm}}|. \tag{3.11'''}$$

Если при этом матрица $A$ — симметрическая (кососимметрическая) относительно двух каких-нибудь индексов, например относительно $i$, $j$, то $A_{\lambda\mu k} = A_{\mu\lambda k}$ $(A_{\lambda\mu k} = -A_{\mu\lambda k})$ и матрица (3.10′), как нетрудно убедиться, также будет симметрической (кососимметрической) относительно индексов $i$, $j$.

Таким образом, *если кубическую матрицу $n$-го порядка $A$, симметрическую (кососимметрическую) относительно двух каких-нибудь индексов, последовательно умножить по тем же индексам (в каком угодно порядке) на квадратную матрицу $n$-го порядка $a$, то произведение будет кубической матрицей того же порядка, симметрической (кососимметрической) относительно тех же двух индексов, причем соответствующий детерминант, в котором эти два индекса предполагаются альтернативными, равен произведению косигнатурного детерминанта матрицы $A$ на квадрат детерминанта матрицы $a$.*

Например, если

$$A=\left\|\begin{array}{cc|cc} 5 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{array}\right\| \begin{array}{l} \rightarrow (k) \\ \ulcorner\!\!\rightarrow (i) \\ \downarrow \\ (j) \end{array}, \qquad a=\left\|\begin{array}{cc} 2 & -3 \\ -2 & 2 \end{array}\right\|,$$

то

$$(A\{i\}a)\{j\}a=\left\|\begin{array}{cc|cc} 24 & -32 & -4 & 10 \\ -32 & 45 & 10 & -17 \end{array}\right\| \begin{array}{l} \rightarrow (k) \\ \ulcorner\!\!\rightarrow (i) \\ \downarrow \\ (j) \end{array}, \qquad |(A\{i\}a)\{j\}a|^{\overset{+}{(k)}}=52;$$

с другой стороны,

$$|A_{\overset{\pm}{i}\overset{\pm}{j}\overset{+}{k}}|=13, \qquad |a|=-2, \qquad |A_{\overset{\pm}{i}\overset{\pm}{j}\overset{+}{k}}|\cdot|a|^2=52.$$

3. Полагая, наконец, в трилинейной форме $F=\sum\limits_{i,j,k=1}^{n} A_{ijk}x_iy_jz_k$

$$\left.\begin{array}{ll} x_\lambda=\sum\limits_{i=1}^{n} a_{\lambda i}X_i & (\lambda=1, 2, \ldots, n), \\ y_\mu=\sum\limits_{j=1}^{n} b_{\mu j}Y_j & (\mu=1, 2, \ldots, n), \\ z_\nu=\sum\limits_{k=1}^{n} c_{\nu k}Z_k & (\nu=1, 2, \ldots, n), \end{array}\right\}, \tag{3.12}$$

получим трилинейную форму $\Psi=\sum\limits_{i,j,k=1}^{n} C_{ijk}X_iY_jZ_k$, где

$$\begin{aligned} C_{ijk} &= \sum_{\nu=1}^{n} c_{\nu k}\sum_{\mu=1}^{n} b_{\mu j}\sum_{\lambda=1}^{n} A_{\lambda\mu\nu}a_{\lambda i}=\sum_{\mu=1}^{n} b_{\mu j}\sum_{\nu=1}^{n} c_{\nu k}\sum_{\lambda=1}^{n} A_{\lambda\mu\nu}a_{\lambda i}= \\ &= \sum_{\nu=1}^{n} c_{\nu k}\sum_{\lambda=1}^{n} a_{\lambda i}\sum_{\mu=1}^{n} A_{\lambda\mu\nu}b_{\mu j}=\sum_{\lambda=1}^{n} a_{\lambda i}\sum_{\nu=1}^{n} c_{\nu k}\sum_{\mu=1}^{n} A_{\lambda\mu\nu}b_{\mu j}= \\ &= \sum_{\mu=1}^{n} b_{\mu j}\sum_{\lambda=1}^{n} a_{\lambda i}\sum_{\nu=1}^{n} A_{\lambda\mu\nu}c_{\nu k}=\sum_{\lambda=1}^{n} a_{\lambda i}\sum_{\mu=1}^{n} b_{\mu j}\sum_{\nu=1}^{n} A_{\lambda\mu\nu}c_{\nu k}. \end{aligned}$$

Следовательно, матрица $C=\|C_{ijk}\|$ формы $\Psi$ может быть представлена в виде следующих произведений матрицы $A$ формы $F$ на матрицы $a$, $b$, $c$ преобразований (3.12):

$$\begin{aligned} [(A\{i\}a)\{j\}b]\{k\}c &= [(A\{i\}a)\{k\}c]\{j\}b=[(A\{j\}b)\{i\}a]\{k\}c= \\ &= [(A\{j\}b)\{k\}c]\{i\}a=[(A\{k\}c)\{i\}a]\{j\}b= \\ &= [(A\{k\}c)\{j\}b]\{i\}a=\Big\|\sum_{\lambda,\mu,\nu=1}^{n} A_{\lambda\mu\nu}a_{\lambda i}b_{\mu j}c_{\nu k}\Big\|. \end{aligned} \tag{3.13}$$

Равенства (3.13) подтверждают сделанное выше замечание о порядке следования квадратных матриц в произведении по различным индексам кубической матрицы на квадратные.

Если матрицы $a$, $b$, $c$ одинаковы, то равенства (3.13) принимают вид

$$A\{ijk\}a=\Big\|\sum_{\lambda,\mu,\nu=1}^{n} A_{\lambda\mu\nu}a^{\lambda i}a_{\mu j}a_{\nu k}\Big\|, \tag{3.14}$$

где $A\{ijk\}a$ — сокращенное обозначение произведений

$$[(A\{i\}a)\{j\}a]\{k\}a=[(A\{i\}a)\{k\}a]\{j\}a=[(A\{j\}a)\{i\}a]\{k\}a=$$
$$=[(A\{j\}a)\{k\}a]\{i\}a=[(A\{k\}a)\{i\}a]\{j\}a=[(A\{k\}a)\{j\}a]\{i\}a.$$

Если при этом матрица $A$ — симметрическая (кососимметрическая), то $A_{\lambda\mu\nu}=A_{\lambda\nu\mu}=A_{\mu\nu\lambda}=A_{\mu\lambda\nu}=A_{\nu\lambda\mu}=A_{\nu\mu\lambda}$

$$(A_{\lambda\mu\nu}=-A_{\lambda\nu\mu}=A_{\mu\nu\lambda}=-A_{\mu\lambda\nu}=A_{\nu\lambda\mu}=-A_{\nu\mu\lambda})$$

и, следовательно, матрица (3.14) также будет симметрической (кососимметрической).

Итак, *если симметрическую (кососимметрическую) кубическую матрицу $n$-го порядка последовательно умножить по всем индексам (в каком угодно порядке) на квадратную матрицу $n$-го порядка, то произведение будет симметрической (кососимметрической) кубической матрицей того же порядка.*

Вообще, подвергая $p$-линейную форму $F=\sum\limits_{i_1,\ldots,i_p=1}^{n} A_{i_1i_2\ldots i_p}x_{i_1}^{(1)}x_{i_2}^{(2)}\ldots x_{i_p}^{(p)}$ с матрицей $A=\|A_{i_1i_2\ldots i_p}\|$ $(i_1, i_2, \ldots, i_p=1, 2, \ldots, n)$ линейным преобразованиям

$$\left.\begin{aligned} x_i^{(1)}&=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{(1)}X_j^{(1)},\\ x_i^{(2)}&=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{(2)}X_j^{(2)},\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\\ x_i^{(m)}&=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{(m)}X_j^{(m)} \end{aligned}\right\}\qquad (i=1, 2, \ldots, m;\ m\leq p)$$

с матрицами

$$a^{(1)}=\|a_{ij}^{(1)}\|,\qquad a^{(2)}=\|a_{ij}^{(2)}\|,\ \ldots,\qquad a^{(m)}=\|a_{ij}^{(m)}\|\qquad (i, j=1, 2, \ldots, n),$$

мы придем к $p$-линейной форме $F^{(m)}=\sum\limits_{i_1,\ldots,i_p=1}^{n} A_{i_1i_2\ldots i_p}^{(m)}X_{i_1}^{(1)}\ldots X_{i_m}^{(m)}x_{i_{m+1}}^{(m+1)}\ldots x_{i_p}^{(p)}$, матрица которой будет представлять произведение

$$[(A\{i_1\}a^{(1)})\{i_2\}a^{(2)}\ldots]\{i_m\}a^{(m)}$$

$p$-мерной матрицы $n$-го порядка $A$ на квадратные матрицы того же порядка $a^{(1)}, a^{(2)}, \ldots, a^{(m)}$ (упражнение 5). Порядок следования квадратных матриц в этом произведении может быть каким угодно.

В частности, подвергая $p$-линейную форму $F=\sum\limits_{i_1=i_2=\ldots=i_p=1}^{n} x_{i_1}^{(1)}x_{i_2}^{(2)}\ldots x_{i_p}^{(p)}$ с $p$-мерной диагональной матрицей $E=\|E_{i_1i_2\ldots i_p}\|$ $(i_1, i_2, \ldots, i_p=1, 2, \ldots, n)$, у которой все диагональные элементы равны единице, невырожденным линейным преобразованиям

$$\left.\begin{aligned} x_i^{(1)}&=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{(1)}X_j,\\ x_i^{(2)}&=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{(2)}X_j,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\\ x_i^{(p)}&=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{(p)}X_j \end{aligned}\right\}\qquad (i=1, 2, \ldots, n)$$

с матрицами

$$A_1=\|a_{ij}^{(1)}\|,\qquad A_2=\|a_{ij}^{(2)}\|,\ \ldots,\qquad A_p=\|a_{ij}^{(p)}\|\qquad (i,\ j=1,\ 2,\ \ldots,\ n),$$

мы получим $p$-линейную форму $F^{(p)}$, матрица которой будет равна произведению

$$[(E\{i_1\}A_1)\{i_2\}A_2\ \ldots]\{i_p\}A_p.$$

Если $F^{(p)}=F$, т. е. если $[(E\{i_1\}A_1)\{i_2\}A_2\ \ldots]\{i_p\}A_p=E$, то преобразование, которому подвергается в этом случае форма $F$ и ее матрица $E$, называется, согласно терминологии Ольденбургера[1]), *подобным.* Нетрудно выяснить структуру матриц $A_1, A_2, \ldots, A_p$, на которые умножается по всем индексам матрица $E$ (упражнение 6).

4. Преобразуем теперь трилинейную форму $F=\sum\limits_{i_1,\ i_2,\ i_3=1}^{n} A_{i_1i_2i_3}x_{i_1}y_{i_2}z_{i_3}$ с матрицей $A=\|A_{i_1i_2i_3}\|$ $(i_1,\ i_2,\ i_3=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$, подвергая ее билинейным преобразованиям

$$\left.\begin{aligned} x_{j_1}&=\sum_{j_2,\ j_3=1}^{n} a_{j_1j_2j_3}X_{j_2}\xi_{j_3},\\ y_{j_1}&=\sum_{j_2,\ j_3=1}^{n} b_{j_1j_2j_3}Y_{j_2}\eta_{j_3}\end{aligned}\right\}\quad (j_1=1,\ 2,\ \ldots,\ n)\qquad (3.15')$$

с матрицами $a=\|a_{j_1j_2j_3}\|$, $b=\|b_{j_1j_2j_3}\|$ $(j_1,\ j_2,\ j_3=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$. Получим в результате пятилинейную форму $\Phi'=\sum\limits_{k_1,\ \ldots,\ k_5=1}^{n} B'_{k_1k_2k_3k_4k_5}X_{k_1}Y_{k_2}z_{k_3}\xi_{k_4}\eta_{k_5}$, где $B'_{k_1k_2k_3k_4k_5}=\sum\limits_{\lambda,\ \mu=1}^{n} A_{\lambda\mu k_3}a_{\lambda k_1k_4}b_{\mu k_2k_5}$. Точно так же, подвергая форму $F$ билинейным преобразованиям

$$\left.\begin{aligned} x_{j_1}&=\sum_{j_2,\ j_3=1}^{n} a_{j_1j_2j_3}X_{j_2}\xi_{j_3},\\ z_{j_1}&=\sum_{j_2,\ j_3=1}^{n} b_{j_1j_2j_3}Z_{j_2}\zeta_{j_3}\end{aligned}\right\}\quad (j_1=1,\ 2,\ \ldots,\ n)\qquad (3.15'')$$

или

$$\left.\begin{aligned} y_{j_1}&=\sum_{j_2,\ j_3=1}^{n} a_{j_1j_2j_3}Y_{j_2}\eta_{j_3},\\ z_{j_1}&=\sum_{j_2,\ j_3=1}^{n} b_{j_1j_2j_3}Z_{j_2}\zeta_{j_3}\end{aligned}\right\}\quad (j_1=1,\ 2,\ \ldots,\ n)\qquad (3.15''')$$

с теми же матрицами $a$ и $b$, как у преобразований (3.15′), получим соответственно пятилинейную форму $\Phi''=\sum\limits_{k_1,\ \ldots,\ k_5=1}^{n} B''_{k_1k_2k_3k_4k_5}X_{k_1}y_{k_2}Z_{k_3}\xi_{k_4}\zeta_{k_5}$ или $\Phi'''=\sum\limits_{k_1,\ \ldots,\ k_5=1}^{n} B'''_{k_1k_2k_3k_4k_5}x_{k_1}Y_{k_2}Z_{k_3}\eta_{k_4}\zeta_{k_5}$, где

$$B''_{k_1k_2k_3k_4k_5}=\sum_{\lambda,\ \mu=1}^{n} A_{\lambda k_2\mu}a_{\lambda k_1k_4}b_{\mu k_3k_5},\qquad B'''_{k_1k_2k_3k_4k_5}=\sum_{\lambda,\ \mu=1}^{n} A_{k_1\lambda\mu}a_{\lambda k_2k_4}b_{\mu k_3k_5}.$$

---

[1]) См. [171], стр. 425 и [170], стр. 652.

Матрицы преобразованных форм $\Phi'$, $\Phi''$, $\Phi'''$ будут тогда соответственно произведениями $(A\{i_1\}a)\{i_2\}b$, $(A\{i_1\}a)\{i_3\}b$, $(A\{i_2\}a)\{i_3\}b$.

Таким образом, имеем:

$$(A\{i_1\}a)\{i_2\}b = \left\| \sum_{\lambda,\mu=1}^{n} A_{\lambda\mu k_3} a_{\lambda k_1 k_4} b_{\mu k_2 k_5} \right\|, \tag{3.16'}$$

$$(A\{i_1\}a)\{i_3\}b = \left\| \sum_{\lambda,\mu=1}^{n} A_{\lambda k_2 \mu} a_{\lambda k_1 k_4} b_{\mu k_3 k_5} \right\|, \tag{3.16''}$$

$$(A\{i_2\}a)\{i_3\}b = \left\| \sum_{\lambda,\mu=1}^{n} A_{k_1 \lambda \mu} a_{\lambda k_2 k_4} b_{\mu k_3 k_5} \right\| \tag{3.16'''}$$

и

$$\left| A_{\substack{\pm\pm+\\ i_1 i_2 i_3}} \right| \cdot \left| a_{\substack{\pm(\pm)s_1\\ j_1\, \overline{j_2 j_3}}} \right| \cdot \left| b_{\substack{\cdot\,(\pm)s_2\\ j_1\, \overline{j_2 j_3}}} \right| = \left| \sum_{\lambda,\mu=1}^{n} A_{\substack{+\\ \lambda\mu k_3}} a_{\substack{(\pm)s_1\\ \lambda\, \overline{k_1 k_4}}} b_{\substack{(\pm)s_2\\ \mu\, \overline{k_2 k_5}}} \right|,$$

$$\left| A_{\substack{\pm+\pm\\ i_1 i_2 i_3}} \right| \cdot \left| a_{\substack{\pm(\pm)s_1\\ j_1\, \overline{j_2 j_3}}} \right| \cdot \left| b_{\substack{\pm(\pm)s_2\\ j_1\, \overline{j_2 j_3}}} \right| = \left| \sum_{\lambda,\mu=1}^{n} A_{\substack{+\\ \lambda k_2 \mu}} a_{\substack{(\pm)s_1\\ \lambda\, \overline{k_1 k_4}}} b_{\substack{(\pm)s_2\\ \mu\, \overline{k_3 k_5}}} \right|,$$

$$\left| A_{\substack{+\pm\pm\\ i_1 i_2 i_3}} \right| \cdot \left| a_{\substack{\pm(\pm)s_1\\ j_1\, \overline{j_2 j_3}}} \right| \cdot \left| b_{\substack{\pm(\pm)s_2\\ j_1\, \overline{j_2 j_3}}} \right| = \left| \sum_{\lambda,\mu=1}^{n} A_{\substack{+\\ k_1 \lambda\mu}} a_{\substack{(\pm)s_1\\ \lambda\, \overline{k_2 k_4}}} b_{\substack{(\pm)s_2\\ \mu\, \overline{k_3 k_5}}} \right|,$$

где символами $(\pm)s_1$ и $(\pm)s_2$ обозначены последовательности в каком угодно порядке двух знаков $+$ и $\pm$ над соответственными индексами.

Вообще, подвергая $p$-линейную форму $F = \sum_{i_1,\ldots,i_p=1}^{n} A_{i_1 i_2 \ldots i_p} x_{i_1}^{(1)} x_{i_2}^{(2)} \ldots x_{i_p}^{(p)}$ с матрицей $A = \| A_{i_1 i_2 \ldots i_p} \|$ $(i_1, i_2, \ldots, i_p = 1, 2, \ldots, n)$ $(q-1)$-линейным преобразованиям:

$$\left.\begin{aligned}
x_{j_1}^{(1)} &= \sum_{j_2,\ldots,j_q=1}^{n} a_{j_1 j_2 j_3 \ldots j_q}^{(1)} X_{j_2}^{(1)} \xi_{j_3}^{(31)} \ldots \xi_{j_q}^{(q1)},\\
x_{j_1}^{(2)} &= \sum_{j_2,\ldots,j_q=1}^{n} a_{j_1 j_2 j_3 \ldots j_q}^{(2)} X_{j_2}^{(2)} \xi_{j_3}^{(32)} \ldots \xi_{j_q}^{(q2)},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
x_{j_1}^{(m)} &= \sum_{j_2,\ldots,j_q=1}^{n} a_{j_1 j_2 j_3 \ldots j_q}^{(m)} X_{j_2}^{(m)} \xi_{j_3}^{(3m)} \ldots \xi_{j_q}^{(qm)}
\end{aligned}\right\} \quad (j_1 = 1, 2, \ldots, n;\ m \leqq p)$$

с матрицами

$$a^{(1)} = \| a_{j_1 j_2 \ldots j_q}^{(1)} \|, \quad a^{(2)} = \| a_{j_1 j_2 \ldots j_q}^{(2)} \|, \ \ldots, \ a^{(m)} = \| a_{j_1 j_2 \ldots j_q}^{(m)} \|$$
$$(j_1, j_2, \ldots, j_q = 1, 2, \ldots, n),$$

мы придем к $[p + (q-2)m]$-линейной форме

$$\Phi^{(m)} = \sum_{k_1,\ldots,k_{p+(q-2)m}=1}^{n} A_{k_1 k_2 \ldots k_{p+(q-2)m}}^{(m)} X_{k_1}^{(1)} \ldots X_{k_m}^{(m)} x_{k_{m+1}}^{(m+1)} \ldots$$
$$\ldots x_{k_p}^{(p)} \xi_{k_{p+1}}^{(31)} \ldots \xi_{k_{p+q-2}}^{(q1)} \ldots \xi_{k_{p+1+(q-2)(m-1)}}^{(3m)} \ldots \xi_{k_{p+(q-2)m}}^{(qm)},$$

матрица которой будет представлять произведение

$$[(A\{i_1\}a^{(1)})\{i_2\}a^{(2)} \ldots]\{i_m\}a^{(m)}$$

$p$-мерной матрицы $A$ на $q$-мерные матрицы $a^{(1)}, a^{(2)}, \ldots, a^{(m)}$ (упражнение 10).

Точно так же, подвергая форму $p$-й степени

$$f=\sum_{i_1, \ldots, i_p=1}^{n} A_{i_1 i_2 \ldots i_p} x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_p}$$

с симметрической матрицей

$$A=\| A_{i_1 i_2 \ldots i_p} \| \qquad (i_1, i_2, \ldots, i_p=1, 2, \ldots, n)$$

преобразованию $(q-1)$-й степени

$$x_{j_1}=\sum_{j_2, \ldots, j_q=1}^{n} a_{j_1 j_2 \ldots j_q} X_{j_2} \xi_{j_3} \ldots \xi_{j_q} \qquad (j_1=1, 2, \ldots, n)$$

с матрицей $a=\| a_{j_1 j_2 \ldots j_q} \|$ $(j_1, j_2, \ldots, j_q=1, 2, \ldots, n)$, мы получим форму $p(q-1)$-й степени $\Psi=\sum\limits_{k_1, \ldots, k_{p(q-1)}=1}^{n} C_{k_1 k_2 \ldots k_{p(q-1)}} \cdot X_{k_1} X_{k_2} \ldots X_{k_p} \xi_{k_{p+1}} \ldots \xi_{k_{p(q-1)}}$, которой соответствует симметрическая $p(q-1)$-мерная матрица, представляющая произведение по всем индексам (в каком угодно порядке) $p$-мерной матрицы $A$ на $q$-мерную матрицу $a$ и обозначаемая сокращенно через $A\{i_1 \ldots i_p\} a$ (упражнение 11).

### Упражнения

1. Если $A=\| A_{i_1 i_2 \ldots i_p} \|$ $(i_1, i_2, \ldots, i_p=1, 2, \ldots, n)$, $a=\| a_{ij} \|$ $(i, j=1, 2, \ldots, n)$ и $a=a^{(1)} a^{(2)} \ldots a^{(q)}$, где $a^{(1)}=\| a_{ij}^{(1)} \|$, $a^{(2)}=\| a_{ij}^{(2)} \|, \ldots, a^{(q)}=\| a_{ij}^{(q)} \|$ $(i, j=1, 2, \ldots, n)$, то $[(A\{i_\alpha\} a^{(1)})\{i_\alpha\} a^{(2)} \ldots] \{i_\alpha\} a^{(q)}=A\{i_\alpha\} a$ $(1 \leq \alpha \leq p)$. Доказать.

2. Доказать равенства (3.8′), (3.8″), (3.8‴), последовательно умножая по одному из индексов кубическую матрицу на квадратную.

3. Если кубическая матрица $n$-го порядка $A=\| A_{ijk} \|$ — симметрическая относительно двух каких-нибудь индексов, например $i$, $j$, то произведение $A\{k\} a$, где $a$ — квадратная матрица $n$-го порядка, есть кубическая матрица, симметрическая относительно тех же двух индексов $i$, $j$. Доказать.

4. Произведения каждого из детерминантов кубической матрицы $n$-го порядка $A$ на детерминанты квадратных матриц того же порядка $a$, $b$, $c$ представить в виде детерминантов с одночленными элементами.

5. Даны матрицы $A=\| A_{i_1 i_2 \ldots i_p} \|$ $(i_1, i_2, \ldots, i_p=1, 2, \ldots, n)$ и $a^{(1)}=\| a_{ij}^{(1)} \|$, $a^{(2)}=\| a_{ij}^{(2)} \|, \ldots, a^{(m)}=\| a_{ij}^{(m)} \|$ $(i, j=1, 2, \ldots, n;\ m \leq p)$. Показать, что

$$[(A\{i_1\} a^{(1)})\{i_2\} a^{(2)} \ldots] \{i_m\} a^{(m)}=$$

$$=\Big\| \sum_{\lambda_1, \ldots, \lambda_m=1}^{n} A_{\lambda_1 \ldots \lambda_m i_{m+1} \ldots i_p} a_{\lambda_1 i_1}^{(1)} \ldots a_{\lambda_m i_m}^{(m)} \Big\| \qquad (i_1, i_2, \ldots, i_p=1, 2, \ldots, n).$$

6. Показать, что квадратные матрицы $n$-го порядка $A_1, A_2, \ldots, A_p$, на которые в случае подобного преобразования умножается по всем индексам $p$-мерная $(p \geqq 3)$ диагональная матрица $E$, имеющая все диагональные элементы, равные единице, суть диагональные матрицы $n$-го порядка, удовлетворяющие условию $A_p=A_1^{-1} A_2^{-1} \ldots A_{p-1}^{-1}$, или матрицы, получающиеся из этих диагональных матриц путем одновременных перестановок в них строк и столбцов, одних и тех же в каждой матрице (Ольденбургер [171]).

7. Если матрица $A=\| A_{i_1 i_2 \ldots i_p} \|$ $(i_1, i_2, \ldots, i_p=1, 2, \ldots, n)$ — симметрическая (кососимметрическая) относительно индексов $i_1, i_2, \ldots, i_m$ $(2 \leqq m \leqq p)$ и $a=\| a_{ij} \|$ $(i, j=1, 2, \ldots, n)$ — квадратная матрица $n$-го порядка, то произведение

$$A\{i_1 i_2 \ldots i_m\} a=\Big\| \sum_{\lambda_1, \ldots, \lambda_m=1}^{n} A_{\lambda_1 \ldots \lambda_m i_{m+1} \ldots i_p} a_{\lambda_1 i_1} \ldots a_{\lambda_m i_m} \Big\|$$

$$(i_1, i_2, \ldots, i_p=1, 2, \ldots, n)$$

представляет $p$-мерную матрицу $n$-го порядка, симметрическую (кососимметрическую) относительно тех же индексов. Доказать.

8. Произведение $p$-мерного детерминанта $n$-го порядка, род которого не меньше $m \leqq p$, на $m$ квадратных детерминантов того же порядка равно косигнатурному детерминанту $p$-мерной матрицы $n$-го порядка, полученной в результате последовательного умножения по $m$ каким-либо альтернативным индексам матрицы данного $p$-мерного детерминанта на матрицы квадратных детерминантов, т. е.

$$|A_{\overset{\pm}{i_1}\dots\overset{\pm}{i_m}\overbrace{i_{m+1}\dots i_p}^{(\pm)s}}|\cdot|a^{(1)}_{\overset{\pm}{i}\overset{\pm}{j}}|\dots|a^{(m)}_{\overset{\pm}{i}\overset{\pm}{j}}| =$$

$$= \Big|\sum_{\lambda_1,\dots,\lambda_m=1}^{n} A_{\lambda_1\dots\lambda_m\overbrace{i_{m+1}\dots i_p}^{(\pm)s}}\, a^{(1)}_{\lambda_1\overset{\pm}{i_1}}\dots a^{(m)}_{\lambda_m\overset{\pm}{i_m}}\Big|$$

Доказать.

9. Показать, что от перемены порядка следования матриц $a$, $b$ в произведениях (3.16′), (3.16″), (3.16‴) матрицы, выражающие эти произведения, транспонируются по индексам $k_4$, $k_5$.

10. Даны матрицы $A=\|A_{i_1i_2\dots i_p}\|$ $(i_1, i_2, \dots, i_p=1, 2, \dots, n)$ и $a^{(1)}=\|a^{(1)}_{j_1j_2\dots j_q}\|$, $a^{(2)}=\|a^{(2)}_{j_1j_2\dots j_q}\|$, $\dots$, $a^{(m)}=\|a^{(m)}_{j_1j_2\dots j_q}\|$ $(j_1, j_2, \dots, j_q=1, 2, \dots, n;\ m\leqq p)$. Показать, что

1) $$[(A\{i_1\}a^{(1)})\{i_2\}a^{(2)}\dots]\{i_m\}a^{(m)}=$$
$$=\Big\|\sum_{\lambda_1,\dots,\lambda_m=1}^{n}{}' A_{\lambda_1\dots\lambda_m k_{m+1}\dots k_p}\, a^{(1)}_{\lambda_1k_1k_{p+1}\dots k_{p+q-2}}\dots$$
$$\dots a^{(m)}_{\lambda_m k_m k_{p+1+(q-2)(m-1)}\dots k_{p+(q-2)m}}\Big\|$$
$$(k_1, k_2, \dots, k_{p+(q-2)m}=1, 2, \dots, n),$$

2) $$|A_{\overset{\pm}{i_1}\dots\overset{\pm}{i_m}\overbrace{i_{m+1}\dots i_p}^{(\pm)s}}|\cdot|a^{(1)}_{\overset{\pm}{j_1}\overbrace{j_2\dots j_q}^{(\pm)s_1}}|\dots|a^{(m)}_{\overset{\pm}{j_1}\overbrace{j_2\dots j_q}^{(\pm)s_m}}|=$$
$$=\Big|\sum_{\lambda_1,\dots,\lambda_m=1}^{n}{}' A_{\lambda_1\dots\lambda_m\overbrace{k_{m+1}\dots k_p}^{(\pm)s}}\, a^{(1)}_{\lambda_1\overbrace{k_1k_{p+1}\dots k_{p+q-2}}^{(\pm)s_1}}\dots$$
$$\dots a^{(m)}_{\lambda_m\overbrace{k_m k_{p+1+(q-2)(m-1)}\dots k_{p+(q-2)m}}^{(\pm)s_m}}\Big|.$$

11. Показать, что произведение по всем индексам симметрической $p$-мерной матрицы $n$-го порядка $A=\|A_{i_1i_2\dots i_p}\|$ $(i_1, i_2, \dots, i_p=1, 2, \dots, n)$ на $q$-мерную матрицу того же порядка $a=\|a_{j_1j_2\dots j_q}\|$ $(j_1, j_2, \dots, j_q=1, 2, \dots, n)$ равно симметрической $p(q-1)$-мерной матрице $n$-го порядка

$$A\{i_1\dots i_p\}a=\Big\|\sum_{\lambda_1,\dots,\lambda_p=1}^{n}{}' A_{\lambda_1\lambda_2\dots\lambda_p}\, a_{\lambda_1k_1k_{p+1}\dots k_{p+q-2}}\cdot a_{\lambda_2k_2k_{p+q-1}\dots k_{p+2q-4}}\dots$$
$$\dots a_{\lambda_pk_pk_{p(q-1)-q+3}\dots k_{p(q-1)}}\Big\|$$
$$(k_1, k_2, \dots, k_{p(q-1)}=1, 2, \dots, n)$$

и что в случае, когда $p$ и $q$ — четные, гипердетерминанты $|A|$, $|a|$, $A\{i_1\dots i_p\}a$ этих матриц связаны соотношением

$$A\{i_1\dots i_p\}a=|a|^{p}\cdot|A|.$$

12. Применяя последовательно правило Кэли — Райса, показать, что произведение $\nu$ детерминантов порядка $n$, измерений $p_1, p_2, \dots, p_\nu$ и родов $m_1, m_2, \dots, m_\nu$ (не равных нулю) можно представить в виде детерминанта того же порядка с многочленными элементами, число измерений которого $\sum_{\lambda=1}^{\nu} p_\lambda-2(\nu-1)$, а род $\sum_{\lambda=1}^{\nu} m_\lambda-2(\nu-1)$. Отметить случай равенства $\nu$ детерминантов (Лека [162]).

**13.** Применяя последовательно правило Скотта—Райса, показать, что произведение $\nu$ детерминантов порядка $n$, измерений $p_1, p_2, \ldots, p_\nu$ и родов $m_1, m_2, \ldots, m_\nu$ (из которых некоторые или даже все могут быть нулями) можно представить в виде детерминанта того же порядка с одночленными элементами, число измерений которого $\sum_{\lambda=1}^{\nu} p_\lambda - \nu + 1$, а род $\sum_{\lambda=1}^{\nu} m_\lambda - 2\mu$, где $\mu$ — число умножений, при которых соединительные индексы перемножаемых детерминантов — альтернативные (Лека [162]).

**14.** Произведение $\nu$ $p$-мерных детерминантов наивысшего рода, имеющих один и тот же порядок, представить в виде $[(p-1)\nu+1]$-мерного детерминанта наивысшего рода (Гегенбауер [84]).

**15.** Произведение $\nu$ квадратных детерминантов одного и того же порядка представить в виде $(\nu+1)$-мерного детерминанта наивысшего рода (Эшерих [73]).

**16.** Показать, что произведение $2\nu$ квадратных детерминантов $n$-го порядка может быть представлено $2\nu$-мерным гипердетерминантом того же порядка с многочленными элементами (Кемпбелл [51]).

**17.** Показать, что произведение квадратного перманента $n$-го порядка на $2\nu$ квадратных детерминантов того же порядка может быть представлено $(2\nu+1)$-мерным детерминантом порядка $n$ и рода $2\nu$ с многочленными элементами (Кемпбелл [51]).

**18.** Показать, что произведение перманента квадратной матрицы на $2\nu$-ю степень детерминанта этой матрицы можно представить в виде симметрического $(2\nu+1)$-мерного детерминанта рода $2\nu$ (Лека [113]).

**19.** Представить произведение перманента квадратной матрицы на квадрат детерминанта этой матрицы в виде симметрического кубического детерминанта. Дать пример.

**20.** Доказать, что $\sum_{i,j,k=1}^{n} A_{ijk}\, x_i x_j x_k = A\{ijk\}X$, где $A$—симметрическая кубическая матрица $\|A_{ijk}\|$ $(i, j, k = 1, 2, \ldots, n)$, а $X$ — одномерная матрица $\|x_1, x_2, \ldots, x_n\|$. Обобщить на случай формы любой степени (Саркар [207]).

**21.** Доказать, что

$$\sum_{i_1, \ldots, i_p=1}^{n} A_{i_1 i_2 \ldots i_p} x_{i_1}^{(1)} x_{i_2}^{(2)} \ldots x_{i_p}^{(p)} = [(A\{i_1\}X^{(1)})\{i_2\}X^{(2)} \ldots]\cdot\{i_p\}X^{(p)},$$

где

$$A = \|A_{i_1 i_2 \ldots i_p}\| \qquad (i_1, i_2, \ldots, i_p = 1, 2, \ldots, n),$$

$$X^{(\alpha)} = \|x_1^{(\alpha)}, x_2^{(\alpha)}, \ldots, x_n^{(\alpha)}\| \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, p).$$

## § 4. Элементарные преобразования пространственной матрицы

1. Невырожденным линейным преобразованиям полилинейной формы, которые сопровождаются, как было показано в предыдущих параграфах, умножением пространственной матрицы этой формы на квадратные матрицы линейных преобразований, соответствуют также элементарные преобразования пространственной матрицы, введенные Райсом [202].

Возьмем какую-нибудь пространственную матрицу, например кубическую матрицу $n$-го порядка $A = \|A_{ijk}\|\,(i, j, k = 1, 2, \ldots, n)$.

*Элементарными преобразованиями по индексу* $i$ матрицы $A$ называются следующие операции:

(а) умножение $l$-го сечения ориентации $(i)$ на произвольное, отличное от нуля число $t$ из поля $P$;

(б) прибавление к $m$-му сечению ориентации $(i)$ умноженного на $t$ $l$-го сечения той же ориентации ($l, m$ — любые из значений $1, 2, \ldots, n$).

Операции (а), (б) в дальнейшем будем обозначать символами

(а) $\boxed{l\,(i)}\cdot t,$

(б) $\boxed{m\,(i)} + \boxed{l\,(i)}\cdot t.$

Замечание 4.1[1]). Элементарными преобразованиями типов (а), (б) можно совершить над матрицей $A$ операцию

$$\text{(в)} \qquad \boxed{l-(i)-m}\,,$$

заключающуюся в перестановке $l$-го и $m$-го сечений ориентации $(i)$.

Именно, операция (в) равносильна цепочке элементарных преобразований по индексу $i$:

$$\boxed{l\,(i)}+\boxed{m\,(i)}\,, \quad \boxed{m\,(i)}+\boxed{l\,(i)}\cdot(-1), \quad \boxed{m\,(i)}\cdot(-1), \quad \boxed{l\,(i)}+\boxed{m\,(i)}\cdot(-1).$$

Аналогично определяются *элементарные преобразования по индексу $j$ или $k$* матрицы $A$.

Будем называть *элементарными* следующие невырожденные квадратные матрицы любого порядка $n$[2]):

1) диагональную матрицу $a'$, у которой все диагональные элементы равны 1, кроме одного элемента, равного произвольному числу $t$, отличному от нуля;

2) матрицу $a''=\|a''_{ij}\|$ $(i, j=1, 2, \ldots, n)$, у которой все элементы — нули, кроме диагональных элементов, равных 1, и элемента $a''_{lm}=t$, где $l$, $m$ — не равные друг другу какие-нибудь два числа из натурального ряда $1, 2, \ldots, n$, а $t$ — произвольное, отличное от нуля число.

Замечание 4.2. К числу элементарных квадратных матриц относят обычно также матрицу $a'''=\|a'''_{ij}\|$ $(i, j=1, 2, \ldots, n)$, у которой все элементы — нули, за исключением $a'''_{lm}=1$, $a'''_{ml}=1$, $a'''_{hh}=1$, где $l$, $m$, как и выше, — не равные друг другу какие-нибудь два числа из натурального ряда $1, 2, \ldots, n$, а $h$ принимает все значения от 1 до $n$, кроме значений, равных $l$, $m$. Однако в дальнейшем матрица $a'''$ не причисляется к элементарным матрицам, поскольку она может быть выражена в виде произведения матриц типов $a'$, $a''$ (упражнение 1).

*Элементарные преобразования* (а) и (б) *матрицы $A$ равносильны умножению ее по индексу $i$ соответственно на элементарные квадратные матрицы $a'$ и $a''$.*

В самом деле, произведение $A\{i\}a'$ представляет кубическую матрицу $n$-го порядка, отличающуюся от $A$ только тем, что ее $l$-е сечение ориентации $(i)$ равно умноженному на $t$ $l$-му сечению той же ориентации в матрице $A$. К этой же матрице приходим, подвергая $A$ элементарному преобразованию (а). Точно так же произведение $A\{i\}a''$ равно кубической матрице $n$-го порядка, отличающейся от $A$ только тем, что ее $m$-е сечение ориентации $(i)$ представляет сумму $m$-го и умноженного на $t$ $l$-го сечений ориентации $(i)$ в матрице $A$. Тот же результат получим, подвергая $A$ элементарному преобразованию (б).

Очевидно также, что элементарные преобразования (а) и (б) матрицы $A$ равносильны соответственно невырожденным линейным преобразованиям

$$\text{(а)} \qquad \begin{cases} x_i=X_i, \\ x_l=tX_l, \end{cases}$$

$$\text{(б)} \qquad \begin{cases} x_i=X_i, \\ x_l=X_l+tX_m \end{cases}$$

$$(i=1, \ldots, l-1, l+1, \ldots, n;\ 1\leq m\leq n;\ l\neq m)$$

[1]) Ср. [20], стр. 152.

[2]) Ср. [6], стр. 111, 112.

трилинейной формы $F=\sum_{i,j,k=1}^{n} A_{ijk}x_iy_jz_k$, ассоциированной с матрицей $A$.

Аналогичные замечания имеют место для элементарных преобразований по индексу $j$ или $k$ матрицы $A$.

2. Всякая невырожденная квадратная матрица $n$-го порядка $a$ может быть представлена, как известно[1]), в виде произведения некоторого конечного числа $q$ элементарных матриц того же порядка

$$a=a^{(1)}a^{(2)}\ \ldots\ a^{(q)}. \tag{4.1}$$

Поэтому произведение по какому-нибудь индексу, например $i$, кубической матрицы $n$-го порядка $A$ на $a$ представимо согласно формуле (3.5) в виде

$$A\{i\}a=[(A\{i\}a^{(1)})\{i\}a^{(2)}\ \ldots\ ]\{i\}a^{(q)},$$

что равносильно конечному числу элементарных преобразований матрицы $A$.

Таким образом, *всякому невырожденному линейному преобразованию по любому ряду переменных трилинейной формы $F$, сопровождающемуся, как показано в § 2, умножением по соответственному индексу матрицы $A$ формы $F$ на невырожденную квадратную матрицу $a$ линейного преобразования, отвечает также конечная последовательность элементарных преобразований по тому же индексу матрицы $A$.*

Например, трилинейная форма

$$F=x_1y_1z_1+4x_1y_1z_2-x_1y_2z_1-2x_1y_2z_2+2x_2y_1z_1+3x_2y_1z_2-3x_2y_2z_1-4x_2y_2z_2$$

приводится невырожденными линейными преобразованиями

$$\left.\begin{aligned} x_1&=X_1+\tfrac{2}{5}X_2,\\ x_2&=\quad\ -\tfrac{1}{5}X_2,\end{aligned}\right\}\qquad \left.\begin{aligned} y_1&=Y_1+5Y_2,\\ y_2&=\quad\ \ 5Y_2,\end{aligned}\right\}\qquad \left.\begin{aligned} z_1&=Z_1-4Z_2,\\ z_2&=Z_2\end{aligned}\right\}$$

к трилинейной форме

$$\Psi=X_1Y_1Z_1+10X_1Y_2Z_2+X_2Y_1Z_2+X_2Y_2Z_1+X_2Y_2Z_2.$$

При этом

$$\left[\left(A\{i\}\begin{Vmatrix}1 & \frac{2}{5}\\ 0 & -\frac{1}{5}\end{Vmatrix}\right)\{j\}\begin{Vmatrix}1 & 5\\ 0 & 5\end{Vmatrix}\right]\{k\}\begin{Vmatrix}1 & -4\\ 0 & 1\end{Vmatrix}=C,$$

где $A$ и $C$ — матрицы форм $F$ и $\Psi$.

Матрица $A$ приводится к $C$ также цепочкой элементарных преобразований

$$\boxed{II(i)}+\boxed{I(i)}\cdot(-2),\qquad \boxed{II(j)}+\boxed{I(j)},\qquad \boxed{II(k)}+\boxed{I(k)}\cdot(-4),$$

$$\boxed{II(i)}\cdot\left(-\frac{1}{5}\right),\qquad \boxed{II(j)}\cdot 5.$$

Две трилинейные формы над полем $P$ называются *эквивалентными* в этом поле, если от одной из них можно перейти к другой при помощи невырожденных линейных преобразований с коэффициентами из поля $P$.

[1]) См., например, [39], стр. 290 или [6], стр. 115.

Соответственно этому две кубические матрицы над полем $P$ называются *эквивалентными* в этом поле, если от одной из них можно перейти к другой при помощи конечного числа элементарных преобразований или, что то же самое, посредством умножения на невырожденные квадратные матрицы с элементами из поля $P$.

Говорят также об эквивалентности в более общем смысле или $g$-эквивалентности трилинейных форм и их матриц[1]). Именно, две трилинейные формы $F$, $\Psi$ (матрицы $A$, $C$) над полем $P$ называют *$g$-эквивалентными* в этом поле, если эквивалентны в поле $P$ формы $F'$, $\Psi$ (матрицы $A'$, $C$), где $F'$ — трилинейная форма, матрица которой $A'$ — одна из шести транспонированных матриц относительно $A$. Таким образом, эквивалентные трилинейные формы (кубические матрицы) являются также $g$-эквивалентными.

Замечание 4.3. Данное выше определение элементарных преобразований по какому-либо индексу кубической матрицы, а также определения эквивалентности и $g$-эквивалентности двух кубических матриц и ассоциированных с ними трилинейных форм очевидным образом распространяются на пространственные матрицы любого числа измерений и ассоциированные с ними полилинейные формы.

3. Возьмем представляемое формулой (3.10′) произведение $A\{ij\}a$ кубической матрицы $n$-го порядка $A$ на невырожденную квадратную матрицу того же порядка $a$. Пользуясь разложением (4.1) матрицы $a$ на элементарные матрицы $a^{(1)}, a^{(2)}, \ldots, a^{(q)}$, получаем:

$$A\{ij\}a = \{[(A\{i\}a^{(1)})\{i\}a^{(2)} \;\cdots\;]\{j\}a^{(1)} \;\cdots\;\}\{j\}a^{(q)},$$

и так как порядок следования квадратных матриц в произведении по различным индексам не влияет на результат умножения, то

$$A\{ij\}a = \{[(A\{i\}a^{(1)})\{j\}a^{(1)} \;\cdots]\{i\}a^{(q)}\}\{j\}a^{(q)}$$

или, в сокращенном обозначении,

$$A\{ij\}a = [(A\{ij\}a^{(1)})\{ij\}a^{(2)} \;\ldots]\{ij\}a^{(q)}. \tag{4.2}$$

Полагая

$$\left.\begin{aligned} A^{(1)} &= A\{ij\}a^{(1)},\\ A^{(2)} &= A^{(1)}\{ij\}a^{(2)},\\ &\cdots\cdots\cdots\\ A^{(q)} &= A^{(q-1)}\{ij\}a^{(q)}, \end{aligned}\right\} \tag{4.3}$$

будем, таким образом, иметь:

$$A\{ij\}a = A^{(q)}.$$

Каждой из операций (4.3) равносильна одна из следующих операций, которые назовем *симметрическими элементарными преобразованиями по индексам* $i$, $j$ матрицы $A$:

(а) умножение $l$-го сечения каждой из ориентаций $(i)$, $(j)$ на одно и то же произвольное, отличное от нуля число $t$ из поля $P$;

(б) прибавление к $m$-му сечению каждой из ориентаций $(i)$, $(j)$ умноженного на $t$ $l$-го сечения соответствующей ориентации ($l$, $m$ — любые из значений $1, 2, \ldots, n$).

Эти операции в дальнейшем будем обозначать символами

(а) $$\boxed{l\,(ij)}\cdot t,$$

(б) $$\boxed{m\,(ij)} + \boxed{l\,(ij)}\cdot t.$$

1) См. [223], стр. 679.

Замечание 4.4. Элементарными преобразованиями типов (а), (б) можно совершить над матрицей $A$ операцию

$$\text{(в)} \qquad \boxed{l-(ij)-m},$$

заключающуюся в перестановке $l$-го и $m$-го сечений каждой из ориентаций $(i)$, $(j)$ (упражнение 2).

Аналогично определяются *симметрические элементарные преобразования по индексам* $i$, $k$ *или* $j$, $k$ матрицы $A$.

Таким образом, подвергая трилинейную форму $F$ с кубической матрицей $A$ невырожденным линейным преобразованиям по двум каким-либо рядам переменных с одной и той же квадратной матрицей $a$, мы придем к трилинейной форме $\Phi$, матрица которой $B$ может быть получена также последовательным умножением по соответствующим двум индексам матрицы $A$ на $a$ или равносильной операцией — симметрическими элементарными преобразованиями по этим двум индексам матрицы $A$, повторенными конечное число раз.

Точно так же, если форму $F'=\sum\limits_{i,j,k=1}^{n} A'_{ijk}x_i y_j y_k$, линейную относительно $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и квадратичную относительно $y_1, y_2, \ldots, y_n$, с кубической матрицей $A'=\|A'_{ijk}\|$ $(i, j, k=1, 2, \ldots, n)$, симметрической относительно индексов $j$, $k$, подвергнем невырожденным линейным преобразованиям

$$\left.\begin{aligned} x_\lambda &= \sum_{i=1}^{n} a_{\lambda i}X_i \qquad (\lambda=1, 2, \ldots, n), \\ y_\mu &= \sum_{j=1}^{n} b_{\mu j}Y_j \qquad (\mu=1, 2, \ldots, n) \end{aligned}\right\}$$

с квадратными матрицами

$$\begin{aligned} a &= \|a_{\lambda i}\| \qquad (\lambda, i=1, 2, \ldots, n), \\ b &= \|b_{\mu j}\| \qquad (\mu, j=1, 2, \ldots, n), \end{aligned}$$

то придем к линейно-квадратичной форме $\Phi'=\sum\limits_{i,j,k=1}^{n} B'_{ijk}X_iY_jY_k$ с кубической матрицей $B'=\|B'_{ijk}\|$ $(i, j, k=1, 2, \ldots, n)$, симметрической относительно тех же индексов $j$, $k$. Матрицу $B'$ можно определять также равенством

$$B'=(A'\{i\}a)\{jk\}b$$

или рассматривать как результат конечного числа элементарных преобразований по индексу $i$ и симметрических элементарных преобразований по индексам $j$, $k$, произведенных в некоторой последовательности над матрицей $A'$.

Аналогичные результаты получим для линейно-квадратичных форм

$$F''=\sum_{i,j,k=1}^{n} A''_{ijk}z_i y_j z_k \quad \text{и} \quad F'''=\sum_{i,j,k=1}^{n} A'''_{ijk}x_i x_j z_k$$

с кубическими матрицами, симметрическими относительно индексов $i$, $k$ и $i$, $j$.

Как и в случае трилинейных форм, две линейно-квадратичные формы над полем $P$ называются *эквивалентными* в этом поле, если от одной из них можно перейти к другой при помощи невырожденных линейных преобразований с коэффициентами поля $P$.

Соответственно этому две кубические матрицы над полем $P$, симметрические относительно одной и той же пары индексов, называются *эквивалентными* в этом поле, если от одной из них можно перейти к другой при помощи конечного числа симметрических элементарных преобразований по индексам этой пары и элементарных преобразований по третьему индексу.

Если две линейно-квадратичные формы $F'$, $\Phi'$ (или их матрицы $A'$, $B'$) эквивалентны в поле $P$, то каждая из линейно-квадратичных форм $F'$, $F''$, $F'''$ (или их матриц $A'$, $A''$, $A'''$, где $A''$, $A'''$ — транспонированные матрицы относительно $A'$ соответственно циклическим подстановкам $(i, j, k)$, $(i, k, j)$) будет *g-эквивалентной* форме $\Phi'$ (или матрице $B'$).

Таким образом, эквивалентные линейно-квадратичные формы (или их матрицы) будут также $g$-эквивалентными.

4. Возьмем теперь представляемое формулой (3.14) произведение $A\{ijk\}a$ кубической матрицы $n$-го порядка $A$ на невырожденную квадратную матрицу $a$ того же порядка. Принимая во внимание разложение (4.1), можем представить это произведение в виде

$$A\{ijk\}a = [(A\{ijk\}a^{(1)})\{ijk\}a^{(2)} \ldots ]\{ijk\}a^{(q)}.$$

Полагая

$$\left.\begin{aligned} A^{(1)} &= A\{ijk\}a^{(1)},\\ A^{(2)} &= A^{(1)}\{ijk\}a^{(2)},\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\\ A^{(q)} &= A^{(q-1)}\{ijk\}a^{(q)}, \end{aligned}\right\} \qquad (4.4)$$

будем, таким образом, иметь:

$$A\{ijk\}a = A^{(q)}.$$

Каждой из операций (4.4) равносильна одна из следующих операций, которые назовем *симметрическими элементарными преобразованиями* матрицы $A$:

(а) умножение $l$-го сечения каждой ориентации на одно и то же произвольное, отличное от нуля число $t$ из поля $P$;

(б) прибавление к $m$-му сечению каждой ориентации умноженного на $t$ $l$-го сечения соответствующей ориентации ($l$, $m$ — любые из значений $1, 2, \ldots, n$).

Эти операции в дальнейшем будем обозначать символами

(а) $$\boxed{l}\cdot t,$$

(б) $$\boxed{m}+\boxed{l}\cdot t$$

Замечание 4.5. Симметрическими элементарными преобразованиями типов (а), (б) можно совершить над матрицей $A$ операцию

(в) $$\boxed{l-m},$$

заключающуюся в перестановке $l$-го и $m$-го сечений каждой ориентации (упражнение 2).

Таким образом, подвергая трилинейную форму $F$ с кубической матрицей $A$ невырожденным линейным преобразованиям по всем трем рядам переменных с одной и той же квадратной матрицей $a$, мы получим трилинейную форму $\Psi$, матрица которой $C$ может быть определена также последовательным умножением по всем индексам матрицы $A$ на $a$ или равносильной операцией — симметрическими элементарными преобразованиями матрицы $A$, повторенными конечное число раз.

Точно так же, подвергая кубическую форму $f=\sum_{i,j,k=1}^{n} A_{ijk}x_ix_jx_k$ с симметрической кубической матрицей $A=\|A_{ijk}\|$ $(i, j, k=1, 2, \ldots, n)$ невырожденному линейному преобразованию

$$x_\lambda=\sum_{i=1}^{n} a_{\lambda i}X_i \qquad (\lambda=1, 2, \ldots, n)$$

с квадратной матрицей $a=\|a_{\lambda i}\|$ $(\lambda,\ i=1, 2, \ldots, n)$, мы придем к кубической форме $\psi=\sum_{i,j,k=1}^{n} C_{ijk}X_iX_jX_k$ с симметрической кубической матрицей $C=\|C_{ijk}\|$ $(i, j, k=1, 2, \ldots, n)$, которая может быть получена также последовательным умножением по всем индексам матрицы $A$ на $a$ или равносильной операцией — симметрическими элементарными преобразованиями матрицы $A$, повторенными конечное число раз.

Две кубические формы над полем $P$ называются *эквивалентными* в этом поле, если от одной из них можно перейти к другой при помощи невырожденного линейного преобразования с коэффициентами из поля $P$.

Соответственно этому две симметрические кубические матрицы над полем $P$ называются *эквивалентными* в этом поле, если от одной из них можно перейти к другой при помощи конечного числа симметрических элементарных преобразований или, что то же самое, посредством умножения по всем индексам на невырожденную квадратную матрицу с элементами из поля $P$.

Замечание 4.6. Данные выше определения симметрических элементарных преобразований по двум или всем трем индексам кубической матрицы, а также определения эквивалентности двух кубических матриц, симметрических относительно двух или всех трех индексов, очевидным образом распространяются на пространственные матрицы любого числа измерений.

5. В заключение рассмотрим элементарные преобразования полиномиальной пространственной матрицы. Не нарушая общности, мы можем ограничиться случаем полиномиальной кубической матрицы $n$-го порядка $M(\lambda)=\|M_{ijk}(\lambda)\|$ $(i, j, k=1, 2, \ldots, n)$ или кубической $\lambda$-матрицы, элементами которой являются полиномы от $\lambda$ с коэффициентами из поля $P$.

*Элементарными преобразованиями по какому-нибудь индексу*, например по индексу $i$, матрицы $M(\lambda)$ называются следующие операции [1]:

(а) умножение $l$-го сечения ориентации $(i)$ на произвольное, отличное от нуля число $t$ из поля $P$;

(б) прибавление к $m$-му сечению ориентации $(i)$ $l$-го сечения той же ориентации, умноженного на произвольный полином $\psi(\lambda)$ с коэффициентами из поля $P$ ($l$, $m$ — любые из значений $1, 2, \ldots, n$).

Замечание 4.7. Элементарными преобразованиями типов (а), (б) можно переставить $l$-е и $m$-е сечения ориентации $(i)$ в матрице $M(\lambda)$.

Нетрудно убедиться, что элементарные преобразования (а), (б) матрицы $M(\lambda)$ равносильны умножению ее по индексу $i$ соответственно на элементарные квадратные матрицы $n$-го порядка $a'$, $a''$, где $a'$ — диагональная матрица, у которой все диагональные элементы равны 1, кроме одного, равного $t$, а матрица $a''$ имеет все элементы — нули, за исключением диагональных элементов, равных 1, и элемента $a''_{lm}=\psi(\lambda)$.

[1] Ср. [20], стр. 151, 152.

Очевидно также, что эти преобразования равносильны соответственно линейным преобразованиям

$$\text{(а)} \qquad \begin{cases} x_i = X_i, \\ x_l = tX_l \end{cases} (i = 1, \ldots, l-1, l+1, \ldots, n;\ 1 \leq m \leq n;\ l \neq m)$$

и

$$\text{(б)} \qquad \begin{cases} x_i = X_i, \\ x_l = X_l + \psi(\lambda) X_m \end{cases}$$

трилинейной формы $F = \sum_{i,j,k=1}^{n} M_{ijk}(\lambda) x_i y_j z_k$, ассоциированной с матрицей $M(\lambda)$, причем детерминанты этих преобразований не зависят от $\lambda$ и отличны от нуля.

Аналогичные замечания имеют место и для элементарных преобразований по индексу $j$ или $k$ матрицы $M(\lambda)$.

Таким образом, подвергая трилинейную форму $F$ с матрицей $M(\lambda)$ линейному преобразованию по какому-либо ряду переменных, например преобразованию

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(\lambda) X_j \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

с матрицей $a(\lambda) = \|a_{ij}(\lambda)\|$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$, элементы которой являются, вообще говоря, полиномами от $\lambda$, а детерминант не зависит от $\lambda$ и не равен нулю, мы придем к трилинейной форме $F'$, матрица которой $M'(\lambda)$, будучи равна произведению $M(\lambda)\{i\}a(\lambda)$, может быть получена также в результате конечного числа элементарных преобразований по индексу $i$ матрицы $M(\lambda)$.

Элементарные преобразования полиномиальной кубической матрицы называются *симметрическими по каким-либо двум индексам*, например по индексам $i$, $j$, если любое из этих преобразований, совершаемое над сечениями ориентации $(i)$, воспроизводится над соответствующими сечениями ориентации $(j)$.

Элементарные преобразования полиномиальной кубической матрицы называются *симметрическими*, если любое из них, совершаемое над сечениями одной ориентации, воспроизводится над соответствующими сечениями остальных двух ориентаций.

Для обозначения элементарных преобразований всех типов полиномиальной кубической матрицы применяются те же символы, как и в случае постоянной (неполиномиальной) кубической матрицы.

Точно так же, как и для постоянных кубических матриц и ассоциированных с ними алгебраических форм, определяется эквивалентность в поле $P$ полиномиальных кубических матриц (асимметрических или симметрических относительно двух или всех трех индексов) и ассоциированных с этими матрицами алгебраических форм.

### Упражнения

1. Показать, что матрица $a'''$ (замечание 4.2) может быть представлена в виде произведения элементарных квадратных матриц $n$-го порядка $a^{(1)}$, $a^{(2)}$, $a^{(3)}$, $a^{(4)}$, у которых все элементы — нули, за исключением $a^{(1)}_{ii} = a^{(3)}_{ii} = a^{(4)}_{ii} = 1$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, $a^{(1)}_{lm} = -1$, $a^{(3)}_{ml} = -1$, $a^{(4)}_{lm} = 1$, $a^{(2)}_{gg} = 1$ $(g = 1, \ldots, m-1, m+1, \ldots, n)$, $a^{(2)}_{mm} = -1$.

2. Показать, что операция $\boxed{l-(ij)-m}$ $\left(\boxed{l-m}\right)$ над кубической матрицей $\|A_{ijk}\|$ $(i, j, k = 1, 2, \ldots, n)$ равносильна конечной последовательности симметрических элементарных преобразований по двум индексам $i$, $j$ (по всем индексам $i$, $j$, $k$) этой матрицы.

3. Показать, что невырожденным линейным преобразованиям

$$x_i^{(1)}=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{(1)}X_j^{(1)}, \ldots, x_i^{(m)}=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{(m)}X_j^{(m)} \quad (i=1, 2, \ldots, n;\ m \leqq p)$$

$p$-линейной формы $F=\sum\limits_{i_1, \ldots, i_p=1}^{n} A_{i_1 i_2 \ldots i_p} x_{i_1}^{(1)} x_{i_2}^{(2)} \ldots x_{i_p}^{(p)}$, сопровождающимся умножением по индексам $i_1, i_2, \ldots, i_m$ $p$-мерной матрицы $A$ формы $F$ на невырожденные квадратные матрицы линейных преобразований (упражнение 5 § 3), соответствует также конечная последовательность элементарных преобразований по тем же индексам матрицы $A$. Дать определение эквивалентности и $g$-эквивалентности двух $p$-линейных форм и их матриц над полем $P$.

4. Показать, что невырожденному линейному преобразованию $x_i=\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}X_j$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ формы $p$-й степени $f=\sum\limits_{i_1, \ldots, i_p=1}^{n} A_{i_1 i_2 \ldots i_p} x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_p}$ с симметрической $p$-мерной матрицей $A$, сопровождающемуся умножением по индексам $i_1, i_2, \ldots, i_p$ матрицы $A$ на невырожденную квадратную матрицу $a$ линейного преобразования (упражнение 7 § 3), соответствует также конечная последовательность симметрических элементарных преобразований матрицы $A$. Дать определение эквивалентности двух таких форм и матриц над полем $P$.

5. В какую эквивалентную матрицу переводится элементарными преобразованиями

$$\boxed{I\,(i)}+\boxed{II\,(ij)}\cdot(-\lambda),\quad \boxed{I\,(k)}+\boxed{II\,(k)}\cdot(-3),\qquad \boxed{II\,(k)}+\boxed{I\,(k)}\cdot\frac{\lambda}{3},\qquad \boxed{II\,(k)}\cdot 3$$

кубическая $\lambda$-матрица

$$M(\lambda)=\left\|\begin{array}{cc|cc} \lambda & 2\lambda+1 & 3\lambda-2 & \lambda-1 \\ 2\lambda+1 & 3\lambda+2 & \lambda-1 & \lambda+2 \end{array}\right\| \begin{array}{l} \xrightarrow{(k)} \\ \xrightarrow{(i)} \\ \downarrow (j) \end{array},$$

симметрическая относительно индексов $i$, $j$? Указать другую матричную операцию, равносильную упомянутым выше элементарным преобразованиям.

6. В какую эквивалентную матрицу переводится симметрическими элементарными преобразованиями

$$\boxed{I}+\boxed{II}\cdot(\lambda-1),\qquad \boxed{II}+\boxed{I}\cdot\frac{1}{3},\qquad \boxed{II}\cdot 3$$

симметрическая кубическая $\lambda$-матрица

$$M(\lambda)=\left\|\begin{array}{cc|cc} 1 & \lambda+1 & \lambda+1 & 0 \\ \lambda+1 & 0 & 0 & \lambda \end{array}\right\| \begin{array}{l} \xrightarrow{(i)} \\ \xrightarrow{(k)} \\ \downarrow (j) \end{array}?$$

Полученный результат проверить, умножая надлежащим образом $M(\lambda)$ на квадратную $\lambda$-матрицу, соответствующую указанным выше элементарным преобразованиям.

## § 5. Клеточные пространственные матрицы и операции над ними

1. Возьмем какую-нибудь пространственную матрицу порядка $n=m\nu$, например кубическую матрицу $A=\|A_{ijk}\|$ $(i, j, k=1, 2, \ldots, n)$, и разобьем ее тремя системами плоскостей, параллельных сечениям ориентаций $(i)$, $(j)$, $(k)$, на $m^3$ кубических матриц порядка $\nu$. Тогда матрицу $A$ можно рассматривать как *клеточную* кубическую матрицу $m$-го порядка, элементами которой являются кубические матрицы $\nu$-го порядка. Очевидно, в зависимости от разложения числа $n$ на множители матрица $A$ может быть разбита на клетки различными способами. Так, например, кубическую матрицу 6-го порядка можно рассматривать как клеточную кубическую матрицу

2-го порядка, у которой каждый элемент есть кубическая матрица 3-го порядка, и ту же матрицу можно рассматривать как клеточную кубическую матрицу 3-го порядка с элементами, являющимися кубическими матрицами 2-го порядка.

Разбиение пространственной матрицы на клетки представляется целесообразным во многих случаях, так как основные операции над клеточными пространственными матрицами совершаются формально по тем же правилам, как и в случае, когда вместо клеток имеем числовые элементы.

Пусть, например, даны две $p$-мерные матрицы $A$, $B$ одного и того же порядка $n=m\nu$ с одинаковыми разбиениями на клетки:

$$A=\| U_{i_1 i_2 \ldots i_p} \|, \qquad B=\| V_{i_1 i_2 \ldots i_p} \| \qquad (i_1, i_2, \ldots, i_p=1, 2, \ldots, m),$$

где $U_{i_1 i_2 \ldots i_p}$, $V_{i_1 i_2 \ldots i_p}$ — $p$-мерные матрицы порядка $\nu$. Чтобы найти сумму матриц $A$ и $B$, надо согласно определению сложить их соответственные элементы. Однако то же самое произойдет и тогда, когда мы сложим соответственные клетки этих матриц. Следовательно,

$$A+B=\| U_{i_1 i_2 \ldots i_p}+V_{i_1 i_2 \ldots i_p} \| \qquad (i_1, i_2, \ldots, i_p=1, 2, \ldots, m).$$

Точно так же, умножая все клетки матрицы $A$ на какое-нибудь число $t$ из поля $P$, мы умножим на $t$ все элементы этой матрицы. Поэтому

$$tA=\| tU_{i_1 i_2 \ldots i_p} \| \qquad (i_1, i_2, \ldots, i_p=1, 2, \ldots, m).$$

Нетрудно, наконец, убедиться в том, что произведение по какому-нибудь индексу $p$-мерной матрицы $A$ порядка $n=m\nu$ на $q$-мерную матрицу $a$ того же порядка равно произведению по тому же индексу клеточной матрицы $U$ порядка $m$, полученной разбиением $A$, на клеточную матрицу $u$ того же порядка, которая подобным разбиением получается из $a$.

Действительно, пусть две какие-нибудь матрицы, например кубическая матрица $A=\|A_{ijk}\|$ $(i, j, k=1, 2, \ldots, n)$ и квадратная матрица $a=\|a_{ij}\|$ $(i, j=1, 2, \ldots, n)$ одного и того же порядка $n=m\nu$, разбиты одинаковым образом на клетки, так что $A$ и $a$ представляются соответственно клеточными матрицами $m$-го порядка

$$U=\| U_{ijk} \| \quad (i, j, k=1, 2, \ldots, m) \text{ и } u=\| u_{ij} \| \qquad (i, j=1, 2, \ldots, m),$$

где

$$U_{ijk}=\left\| \begin{array}{lll|l} A_{(i-1)\nu+1,\ (j-1)\nu+1,\ (k-1)\nu+1} & \ldots & A_{(i-1)\nu+1,\ (j-1)\nu+1,\ k\nu} & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{(i-1)\nu+1,\ j\nu,\ (k-1)\nu+1} & \ldots & A_{(i-1)\nu+1,\ j\nu,\ k\nu} & \ldots \end{array} \right.$$

$$\left. \begin{array}{l|lll} \ldots & A_{i\nu,\ (j-1)\nu+1,\ (k-1)\nu+1} & \ldots & A_{i\nu,\ (j-1)\nu+1,\ k\nu} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & A_{i\nu,\ j\nu,\ (k-1)\nu+1} & \ldots & A_{i\nu,\ j\nu,\ k\nu} \end{array} \right\| \begin{array}{l} \to (i) \\ \to (k) \\ \downarrow (j) \end{array}$$

и

$$u_{ij}=\left\| \begin{array}{lll} a_{(i-1)\nu+1,\ (j-1)\nu+1} & \ldots & a_{(i-1)\nu+1,\ j\nu} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{i\nu,\ (j-1)\nu+1} & \ldots & a_{i\nu,\ j\nu} \end{array} \right\| \begin{array}{l} \to (j) \\ \downarrow (i) \end{array}$$

— матрицы $\nu$-го порядка.

Составим произведение по какому-нибудь из индексов $i$, $j$, $k$, например по индексу $k$, матрицы $U$ на $u$, совершая умножение по тому же правилу, как и в случае матриц с числовыми элементами. Получим:

$$U\{k\}u = \left\| \begin{array}{c|c|c} \begin{matrix} \sum\limits_{\lambda=1}^{m} U_{11\lambda}\{k\}u_{\lambda 1} & \dots & \sum\limits_{\lambda=1}^{m} U_{11\lambda}\{k\}u_{\lambda m} \\ \dots & \dots & \dots \\ \sum\limits_{\lambda=1}^{m} U_{1m\lambda}\{k\}u_{\lambda 1} & \dots & \sum\limits_{\lambda=1}^{m} U_{1m\lambda}\{k\}u_{\lambda m} \end{matrix} & \begin{matrix} \dots \\ \dots \\ \dots \end{matrix} & \begin{matrix} \sum\limits_{\lambda=1}^{m} U_{m1\lambda}\{k\}u_{\lambda 1} & \dots & \sum\limits_{\lambda=1}^{m} U_{m1\lambda}\{k\}u_{\lambda m} \\ \dots & \dots & \dots \\ \sum\limits_{\lambda=1}^{m} U_{mm\lambda}\{k\}u_{\lambda 1} & \dots & \sum\limits_{\lambda=1}^{m} U_{mm\lambda}\{k\}u_{\lambda m} \end{matrix} \end{array} \right\| \begin{array}{l} \to (i) \\ \to (k). \\ \downarrow (j) \end{array}$$

Входящие в последнее выражение произведения вида $U_{\alpha\beta\lambda}\{k\}u_{\lambda\gamma}$, где $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ — любые из значений $1, 2, \dots, m$, представляются кубическими матрицами $\nu$-го порядка:

$$U_{\alpha\beta\lambda}\{k\}u_{\lambda\gamma} =$$

$$= \left\| \begin{array}{c|c|c} \begin{matrix} \sum\limits_{\mu=1}^{\nu} A_{(\alpha-1)\nu+1,\,(\beta-1)\nu+1,\,(\lambda-1)\nu+\mu}a_{(\lambda-1)\nu+\mu,\,(\gamma-1)\nu+1} \dots \\ \dots \sum\limits_{\mu=1}^{\nu} A_{(\alpha-1)\nu+1,\,(\beta-1)\nu+1,\,(\lambda-1)\nu+\mu}a_{(\lambda-1)\nu+\mu,\,\gamma\nu} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \sum\limits_{\mu=1}^{\nu} A_{(\alpha-1)\nu+1,\,\beta\nu,\,(\lambda-1)\nu+\mu}a_{(\lambda-1)\nu+\mu,\,(\gamma-1)\nu+1} \dots \\ \dots \sum\limits_{\mu=1}^{\nu} A_{(\alpha-1)\nu+1,\,\beta\nu,\,(\lambda-1)\nu+\mu}a_{(\lambda-1)\nu+\mu,\,\gamma\nu} \end{matrix} & \begin{matrix} \dots \\ \dots \\ \dots \end{matrix} & \begin{matrix} \sum\limits_{\mu=1}^{\nu} A_{\alpha\nu,\,(\beta-1)\nu+1,\,(\lambda-1)\nu+\mu}a_{(\lambda-1)\nu+\mu,\,(\gamma-1)\nu+1} \dots \\ \dots \sum\limits_{\mu=1}^{\nu} A_{\alpha\nu,\,(\beta-1)\nu+1,\,(\lambda-1)\nu+\mu}a_{(\lambda-1)\nu+\mu,\,\gamma\nu} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \sum\limits_{\mu=1}^{\nu} A_{\alpha\nu,\,\beta\nu,\,(\lambda-1)\nu+\mu}a_{(\lambda-1)\nu+\mu,\,(\gamma-1)\nu+1} \dots \\ \dots \sum\limits_{\mu=1}^{\nu} A_{\alpha\nu,\,\beta\nu,\,(\lambda-1)\nu+\mu}a_{(\lambda-1)\nu+\mu,\,\gamma\nu} \end{matrix} \end{array} \right\| \begin{array}{l} \to (i) \\ \to (k) \\ \downarrow (j) \end{array}$$

Следовательно,

$$
U\{k\}u = \left\| \begin{vmatrix} \sum\limits_{\lambda=1}^{m}\sum\limits_{\mu=1}^{\nu} A_{1,\,1,\,(\lambda-1)\nu+\mu}a_{(\lambda-1)\nu+\mu,\,1} \ \dots \\ \qquad \dots \sum\limits_{\lambda=1}^{m}\sum\limits_{\mu=1}^{\nu} A_{1,\,1,\,(\lambda-1)\nu+\mu}a_{(\lambda-1)\nu+\mu,\,m\nu} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \sum\limits_{\lambda=1}^{m}\sum\limits_{\mu=1}^{\nu} A_{1,\,m\nu,\,(\lambda-1)\nu+\mu}a_{(\lambda-1)\nu+\mu,\,1} \ \dots \\ \qquad \dots \sum\limits_{\lambda=1}^{m}\sum\limits_{\mu=1}^{\nu} A_{1,\,m\nu,\,(\lambda-1)\nu+\mu}a_{(\lambda-1)\nu+\mu,\,m\nu} \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \dots \\ \dots \\ \\ \dots \end{matrix} \right.
$$

$$
\overset{\longrightarrow (i)}{\left. \begin{matrix} \\ \dots \\ \dots \\ \\ \dots \end{matrix} \begin{vmatrix} \sum\limits_{\lambda=1}^{m}\sum\limits_{\mu=1}^{\nu} A_{m\nu,\,1,\,(\lambda-1)\nu+\mu}a_{(\lambda-1)\nu+\mu,\,1} \ \dots \\ \qquad \dots \sum\limits_{\lambda=1}^{m}\sum\limits_{\mu=1}^{\nu} A_{m\nu,\,1,\,(\lambda-1)\nu+\mu}a_{(\lambda-1)\nu+\mu,\,m\nu} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \sum\limits_{\lambda=1}^{m}\sum\limits_{\mu=1}^{\nu} A_{m\nu,\,m\nu,\,(\lambda-1)\nu+\mu}a_{(\lambda-1)\nu+\mu,\,1} \ \dots \\ \qquad \dots \sum\limits_{\lambda=1}^{m}\sum\limits_{\mu=1}^{\nu} A_{m\nu,\,m\nu,\,(\lambda-1)\nu+\mu}a_{(\lambda-1)\nu+\mu,\,m\nu} \end{vmatrix} \right\|} \ \begin{array}{l} \ulcorner\!\longrightarrow (k) \\ \downarrow \\ (j) \end{array} .
$$

Наконец, полагая

$$(\lambda-1)\nu+\mu=\tau$$

и замечая, что $m\nu=n$, имеем:

$U\{k\}u=$

$$
= \overset{\longrightarrow (i)}{\left\| \begin{matrix} \begin{vmatrix} \sum\limits_{\tau=1}^{n} A_{11\tau}a_{\tau 1} & \dots & \sum\limits_{\tau=1}^{n} A_{11\tau}a_{\tau n} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ \sum\limits_{\tau=1}^{n} A_{1n\tau}a_{\tau 1} & \dots & \sum\limits_{\tau=1}^{n} A_{1n\tau}a_{\tau n} \end{vmatrix} & \begin{matrix} \dots \\ \dots \\ \dots \end{matrix} & \begin{vmatrix} \sum\limits_{\tau=1}^{n} A_{n1\tau}a_{\tau 1} & \dots & \sum\limits_{\tau=1}^{n} A_{n1\tau}a_{\tau n} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ \sum\limits_{\tau=1}^{n} A_{nn\tau}a_{\tau 1} & \dots & \sum\limits_{\tau=1}^{n} A_{nn\tau}a_{\tau n} \end{vmatrix} \end{matrix} \right\|} \ \begin{array}{l} \ulcorner\!\longrightarrow (k) \\ \downarrow \\ (j) \end{array} ,
$$

т. е. $U\{k\}u=A\{k\}a$.

2. Образуем из элементов кубической матрицы $n$-го порядка $A=\|A_{ijk}\|$ ($i, j, k=1, 2, \dots, n$) все возможные минорные кубические матрицы порядка $\nu$ ($2\leq\nu\leq n-1$). Число этих матриц равно $(C_n^\nu)^3$. Чтобы из них можно было составить клеточную кубическую матрицу порядка $C_n^\nu$, пронумеруем все $C_n^\nu$ сочетаний из $n$ чисел $1, 2, \dots, n$ по $\nu$ в нормальном, лексикографическом, порядке, в каком, например, следуют сочетания 12, 13, 23 из трех чисел 1, 2, 3 по два. Если сочетания

$$i^{(1)},\ i^{(2)},\ \dots,\ i^{(\nu)}, \tag{5.1}$$

$$j^{(1)},\ j^{(2)},\ \dots,\ j^{(\nu)}, \tag{5.2}$$

$$k^{(1)},\ k^{(2)},\ \dots,\ k^{(\nu)} \tag{5.3}$$

при этой нумерации имеют соответственно номера $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, то минорную кубическую матрицу $\nu$-го порядка, лежащую в сечениях ориентаций $(i)$, $(j)$, $(k)$ матрицы $A$, определяемых последовательностями (5.1), (5.2), (5.3), будем обозначать через $U^{(\nu)}_{\alpha\beta\gamma}$. Тогда клеточная кубическая матрица

$$U^{(\nu)} = \| U^{(\nu)}_{ijk} \| \qquad (i,\ j,\ k = 1,\ 2,\ \ldots,\ C^{\nu}_{n})$$

будет содержать все $(C^{\nu}_{n})^{3}$ минорных кубических матриц $\nu$-го порядка, составленных из элементов матрицы $A$. Согласно терминологии Райса [204], она называется *$\nu$-й составной* матрицей для $A$.

Аналогично определяется *$\nu$-я составная* матрица

$$U^{(\nu)} = \| U^{(\nu)}_{i_1 i_2 \ldots i_p} \| \qquad (i_1,\ i_2,\ \ldots,\ i_p = 1,\ 2,\ \ldots,\ C^{\nu}_{n})$$

для $p$-мерной матрицы

$$A = \| A_{i_1 i_2 \ldots i_p} \| \qquad (i_1,\ i_2,\ \ldots,\ i_p = 1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

Произведение по какому-либо индексу $\nu$-й составной матрицы $U^{(\nu)}$ для $p$-мерной матрицы $A$ порядка $n$ на $\nu$-ю составную матрицу $u^{(\nu)}$ для $q$-мерной матрицы $a$ того же порядка равно числу $C^{\nu-1}_{n-1}$, умноженному на $\nu$-ю составную матрицу для произведения по соответственному индексу матрицы $A$ на $a$.

В самом деле, возьмем две какие-нибудь матрицы одного и того же порядка $n$, например кубическую матрицу $A = \| A_{ijk} \|$ $(i,\ j,\ k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$ и квадратную матрицу $a = \| a_{ij} \|$ $(i,\ j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$, и составим произведение по какому-либо из индексов $i$, $j$, $k$, например по индексу $k$, матрицы $A$ на $a$:

$$A\{k\}a = \Big\| \sum_{\lambda=1}^{n} A_{ij\lambda} a_{\lambda k} \Big\|.$$

Полагая

$$\sum_{\lambda=1}^{n} A_{ij\lambda} a_{\lambda k} = B_{ijk}, \tag{5.4}$$

будем иметь:

$$A\{k\}a = B,$$

где

$$B = \| B_{ijk} \| \qquad (i,\ j,\ k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

Образуем для $B$ $\nu$-ю составную матрицу

$$V^{(\nu)} = \| V^{(\nu)}_{IJK} \| \qquad (I,\ J,\ K = 1,\ 2,\ \ldots,\ C^{\nu}_{n}), \tag{5.5}$$

где

$$V^{(\nu)}_{IJK} = \| B_{ijk} \| \begin{pmatrix} i = i^{(1)},\ i^{(2)},\ \ldots,\ i^{(\nu)} \\ j = j^{(1)},\ j^{(2)},\ \ldots,\ j^{(\nu)} \\ k = k^{(1)},\ k^{(2)},\ \ldots,\ k^{(\nu)} \end{pmatrix}, \tag{5.6}$$

причем значения, пробегаемые индексами $i$, $j$, $k$, являются сочетаниями из $n$ чисел $1,\ 2,\ \ldots,\ n$ по $\nu$, имеющими в упорядоченном ряду $C^{\nu}_{n}$ сочетаний соответственно номера $I$, $J$, $K$.

Точно так же $\nu$-ми составными матрицами для $A$ и $a$ будут:

$$U^{(\nu)} = \| U^{(\nu)}_{IJK} \| \quad (I,\ J,\ K = 1,\ 2,\ \ldots,\ C^{\nu}_{n}), \qquad u^{(\nu)} = \| u^{(\nu)}_{IJ} \| \quad (I,\ J = 1,\ 2,\ \ldots,\ C^{\nu}_{n}), \tag{5.7}$$

где

$$
\left.
\begin{aligned}
U_{IJK}^{(\nu)} &= \| A_{ijk} \| \begin{pmatrix} i = i^{(1)}, & i^{(2)}, & \ldots, & i^{(\nu)} \\ j = j^{(1)}, & j^{(2)}, & \ldots, & j^{(\nu)} \\ k = k^{(1)}, & k^{(2)}, & \ldots, & k^{(\nu)} \end{pmatrix}, \\
u_{IJ}^{(\nu)} &= \| a_{ij} \| \begin{pmatrix} i = i^{(1)}, & i^{(2)}, & \ldots, & i^{(\nu)} \\ j = j^{(1)}, & j^{(2)}, & \ldots, & j^{(\nu)} \end{pmatrix}.
\end{aligned}
\right\} \tag{5.8}
$$

Составим теперь, принимая во внимание равенства (5.7), произведение

$$
U^{(\nu)}\{K\}\, u^{(\nu)} = \Big\| \sum_{\Lambda=1}^{C_n^\nu} U_{IJ\Lambda}^{(\nu)}\{K\}\, u_{\Lambda K}^{(\nu)} \Big\|. \tag{5.9}
$$

На основании равенств (5.8) получаем:

$$
U_{IJ\Lambda}^{(\nu)}\{K\}\, u_{\Lambda K}^{(\nu)} = \Big\| \sum_{\lambda=\lambda^{(1)}}^{\lambda^{(\nu)}} A_{ij\lambda} a_{\lambda k} \Big\| \begin{pmatrix} i = i^{(1)}, & i^{(2)}, & \ldots, & i^{(\nu)} \\ j = j^{(1)}, & j^{(2)}, & \ldots, & j^{(\nu)} \\ k = k^{(1)}, & k^{(2)}, & \ldots, & k^{(\nu)} \end{pmatrix},
$$

где $\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}, \ldots, \lambda^{(\nu)}$ — сочетание из $n$ чисел $1, 2, \ldots, n$ по $\nu$, имеющее номер $\Lambda$ в упорядоченном ряду $C_n^\nu$ сочетаний.

Следовательно,

$$
\sum_{\Lambda=1}^{C_n^\nu} U_{IJ\Lambda}^{(\nu)}\{K\}\, u_{\Lambda K}^{(\nu)} = \Big\| C_{n-1}^{\nu-1} \sum_{\lambda=1}^{n} A_{ij\lambda} a_{\lambda k} \Big\| \begin{pmatrix} i = i^{(1)}, & i^{(2)}, & \ldots, & i^{(\nu)} \\ j = j^{(1)}, & j^{(2)}, & \ldots, & j^{(\nu)} \\ k = k^{(1)}, & k^{(2)}, & \ldots, & k^{(\nu)} \end{pmatrix}
$$

или ввиду равенств (5.4) и (5.6)

$$
\sum_{\Lambda=1}^{C_n^\nu} U_{IJ\Lambda}^{(\nu)}\{K\}\, u_{\Lambda K}^{(\nu)} = C_{n-1}^{\nu-1} V_{IJK}^{(\nu)}. \tag{5.10}
$$

Принимая во внимание равенства (5.10) и (5.5), можем представить матрицу (5.9) в виде

$$
U^{(\nu)}\{K\}\, u^{(\nu)} = C_{n-1}^{\nu-1} V^{(\nu)}.
$$

А это и доказывает наше утверждение.

3. Пусть $|A|$ — какой-либо из детерминантов $p$-мерной матрицы $n$-го порядка $A$. Косигнатурный детерминант $|M^{(\nu)}|$ матрицы $M^{(\nu)}$, составленной из миноров $\nu$-го порядка $(2 \leq \nu \leq n-1)$ детерминанта $|A|$, расположенных по каждому направлению в нормальном порядке, называется $\nu$-м составным детерминантом для $|A|$ (Райс [204]).

Например, для детерминанта $|A_{+\pm\underset{k}{\pm}}|$ $(i, j, k = 1, 2, 3)$ кубической матрицы 3-го порядка $A = \| A_{ijk} \|$ вторым составным детерминантом будет косигнатурный детерминант $|M^{(2)}_{\underset{i}{+}\underset{j}{\pm}\underset{k}{\pm}}|$ $(i, j, k = 1, 2, 3)$, где $M_{ijk}^{(2)}$ есть кубический детерминант с сигнатурой $(\overset{+}{i})$ матрицы $U_{ijk}^{(2)}$, являющейся элементом второй составной матрицы $U^{(2)}$ для $A$.

Детерминант $|\mathfrak{U}|$, получающийся из $|A|$ заменой каждого элемента алгебраическим дополнением его, называется присоединенным детерминантом для $|A|$ (Райс [204]). Нетрудно убедиться, что $|\mathfrak{U}| = |M^{(n-1)}|$ (упражнение 3).

Так, для $|A_{\overset{+}{i}\overset{\pm}{j}\overset{\pm}{k}}|$ $(i,\ j,\ k=1,\ 2,\ 3)$ присоединенный детерминант $|\mathfrak{A}_{\overset{+}{i}\overset{\pm}{j}\overset{\pm}{k}}|$ $(i,\ j,\ k=1,\ 2,\ 3)$ согласно принятым выше обозначениям может быть представлен в виде

$$|\mathfrak{A}_{\overset{+}{i}\overset{\pm}{j}\overset{\pm}{k}}|\ (i,\ j,\ k=1,\ 2,\ 3)=$$

$$=\left|\begin{array}{ccc|ccc|ccc} M^{(2)}_{333} & -M^{(2)}_{332} & M^{(2)}_{331} & M^{(2)}_{233} & -M^{(2)}_{232} & M^{(2)}_{231} & M^{(2)}_{133} & -M^{(2)}_{132} & M^{(2)}_{131} \\ -M^{(2)}_{323} & M^{(2)}_{322} & -M^{(2)}_{321} & -M^{(2)}_{223} & M^{(2)}_{222} & -M^{(2)}_{221} & -M^{(2)}_{123} & M^{(2)}_{122} & -M^{(2)}_{121} \\ M^{(2)}_{313} & -M^{(2)}_{312} & M^{(2)}_{311} & M^{(2)}_{213} & -M^{(2)}_{212} & M^{(2)}_{211} & M^{(2)}_{113} & -M^{(2)}_{112} & M^{(2)}_{111} \end{array}\right| \begin{array}{l} \longrightarrow \overset{+}{(i)} \\ \overset{\longrightarrow (k)}{\downarrow} \\ (j) \end{array} =$$

$$=\left|\begin{array}{ccc|ccc|ccc} M^{(2)}_{111} & M^{(2)}_{112} & M^{(2)}_{113} & M^{(2)}_{211} & M^{(2)}_{212} & M^{(2)}_{213} & M^{(2)}_{311} & M^{(2)}_{312} & M^{(2)}_{313} \\ M^{(2)}_{121} & M^{(2)}_{122} & M^{(2)}_{123} & M^{(2)}_{221} & M^{(2)}_{222} & M^{(2)}_{223} & M^{(2)}_{321} & M^{(2)}_{322} & M^{(2)}_{323} \\ M^{(2)}_{131} & M^{(2)}_{132} & M^{(2)}_{133} & M^{(2)}_{231} & M^{(2)}_{232} & M^{(2)}_{233} & M^{(2)}_{331} & M^{(2)}_{332} & M^{(2)}_{333} \end{array}\right| \begin{array}{l} \longrightarrow \overset{+}{(i)} \\ \overset{\longrightarrow (k)}{\downarrow} \\ (j) \end{array}.$$

### Упражнения

1. $p$-мерная матрица $n$-го порядка называется **клеточно-диагональной**[1]), если ее можно разбить на клетки так, чтобы диагональные клетки, не все равные 0, были $p$-мерными матрицами порядков $\nu_1,\ \nu_2,\ \ldots,\ \nu_m$ $(\nu_1+\nu_2+\ldots+\nu_m=n)$, а все недиагональные клетки состояли целиком из нулей. Показать, что основные операции над клеточно-диагональными пространственными матрицами приводятся к соответственным операциям над их диагональными клетками.

2. Показать, что любой из детерминантов клеточно-диагональной пространственной матрицы равен произведению косигнатурных детерминантов ее диагональных клеток.

3. Дан $p$-мерный детерминант $n$-го порядка $|A|$. Показать, что присоединенный детерминант для $|A|$ может быть получен из $(n-1)$-го составного детерминанта для $|A|$ путем обращения порядка сечений (простых) каждой ориентации и умножения на $-1$ каждого четного сечения каждой альтернативной ориентации (Райс [204]).

4. Даны $p$-мерный и $q$-мерный детерминанты $n$-го порядка $|A|$ и $|a|$, род которых отличен от нуля. Доказать, что $\nu$-й $(2\leqq\nu\leqq n-1)$ составной детерминант (присоединенный детерминант) для произведения детерминантов $|A|\cdot|a|$, составленного по правилу Кэли — Райса, поэлементно равен составленному таким же образом произведению $\nu$-х составных детерминантов (присоединенных детерминантов) для $|A|$ и $|a|$ (Райс [201]).

5. Даны $p$-мерный и $q$-мерный детерминанты $n$-го порядка $|A|$ и $|a|$ с любыми сигнатурами. Доказать, что $\nu$-й $(2\leqq\nu\leqq n-1)$ составной детерминант (присоединенный детерминант) для произведения детерминантов $|A|$, $|a|$, составленного по правилу Скотта — Райса, равен составленному таким же образом произведению $\nu$-х составных детерминантов (присоединенных детерминантов) для $|A|$ и $|a|$ (Райс [200]).

6. Показать, что $\nu$-й $(2\leqq\nu\leqq n-1)$ составной детерминант $|T^{(\nu)}|$ для произведения $|T|$ двух обычных детерминантов $n$-го порядка $|a|$, $|b|$, составленного по правилу Падуа (упражнение 17а § 2), равен $|T|^{C^{\nu-1}_{n-1}}$ (Райс [204]).

7. Показать, что всякий минор $\nu$-го $(2\leqq\nu\leqq n-1)$ порядка присоединенного детерминанта для произведения $|T|$ двух обычных детерминантов $n$-го порядка $|a|$, $|b|$, составленного по правилу Падуа, равен алгебраическому дополнению соответствующего минора детерминанта $|T|$, умноженному на $|T|^{\nu-1}$ (Райс [199]).

8. Пусть дан какой-либо многомерный детерминант $n$-го порядка $|A|$. Замещая в $\nu$-м $(2\leqq\nu\leqq n-1)$ составном детерминанте $|M^{(\nu)}|$ для $|A|$ каждый элемент, являющийся минором $\nu$-го порядка детерминанта $|A|$, его алгебраическим дополнением в $|A|$, мы получим **конформный** $(n-\nu)$-й составной детерминант $|\mathfrak{M}^{(n-\nu)}|$ для $|A|$. Показать, что он равен $(n-\nu)$-му составному детерминанту $|M^{(n-\nu)}|$ для $|A|$ (Райс [204]).

---

[1]) Ср. [20], стр. 44.

## ГЛАВА III

# ИНВАРИАНТЫ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ МАТРИЦ И АССОЦИИРОВАННЫХ С НИМИ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ФОРМ

## § 1. Двумерные ранги

1. Будем рассматривать пространственную матрицу $A$ порядка $n$ над некоторым числовым полем $P$. Начнем с простейшего случая, когда $A$ — кубическая матрица $\|A_{ijk}\|$ $(i, j, k = 1, 2, \ldots, n)$. Фиксируя в ней значения всех индексов, кроме одного из них, например индекса $i$, пробегающего значения $1, 2, \ldots, n$, мы получим строку направления $(i)$. Из $n^2$ строк этого направления составим двумерную матрицу $\|A_{i\underbrace{jk}}\|$, имеющую $n$ строк и $n^2$ столбцов, причем как строки, так и столбцы располагаются в нормальном порядке. Например, при $n=2$ будем иметь:

$$\|A_{i\underbrace{jk}}\| = \left\|\begin{matrix} A_{111} & A_{112} & A_{121} & A_{122} \\ A_{211} & A_{212} & A_{221} & A_{222} \end{matrix}\right\|.$$

Ранг $r_i$ двумерной матрицы $\|A_{i\underbrace{jk}}\|$ называется *двумерным рангом по индексу* $i$ матрицы $A$.

Аналогично определяются *двумерные ранги* $r_j$ (*по индексу* $j$) *и* $r_k$ (*по индексу* $k$) матрицы $A$ [1]).

Теорема 1.1. *Двумерные ранги $r_i$, $r_j$, $r_k$ кубической матрицы $A$ являются арифметическими инвариантами относительно ее элементарных преобразований.* Действительно, операция

(а) $$\boxed{l(\delta)} \cdot t$$

над матрицей $A$ вызывает в двумерной матрице $\|A_{i\underbrace{jk}}\|$ при $\delta = i$ умножение на $t$ $l$-й строки, а при $\delta = j$ или $\delta = k$ — умножение на $t$ соответственно $[\lambda + 1 + (l-1)n]$-х или $(l+\lambda n)$-х столбцов ($\lambda$ пробегает значения $0, 1, \ldots, n-1$). Операция

(б) $$\boxed{m(\delta)} + \boxed{l(\delta)} \cdot t$$

над $A$ сопровождается следующими операциями над $\|A_{i\underbrace{jk}}\|$: прибавлением к $m$-й строке умноженной на $t$ $l$-ой строки, если $\delta = i$; прибавлением к $[\lambda + 1 + (m-1)n]$-м столбцам умноженных на $t$ $[\lambda + 1 + (l-1)n]$-х столбцов, если $\delta = j$; прибавлением к $(m + \lambda n)$-м столбцам умноженных на $t$ $(l + \lambda n)$-х столбцов, если $\delta = k$ ($\lambda$ пробегает значения $0, 1, \ldots, n-1$).

Таким образом, элементарные преобразования кубической матрицы $A$ влекут за собой элементарные преобразования двумерной матрицы $\|A_{i\underbrace{jk}}\|$, при которых, как известно, ее ранг $r_i$ остается неизменным.

---

[1]) Ср. [103], стр. 170.

Аналогично доказывается неизменяемость рангов $r_j$ и $r_k$ матрицы $A$ при ее элементарных преобразованиях.

Теорема 1.2. *Каждый из рангов $r_i, r_j, r_k$ кубической матрицы $A$ не больше, чем произведение двух остальных рангов.*

Заметим, прежде всего, что теорема справедлива, если один из рангов $r_i, r_j, r_k$ равен нулю, так как тогда матрица $A$ — нулевая и, следовательно, остальные два ранга также равны нулю. Поэтому в дальнейшем мы будем предполагать, что все ранги $r_i, r_j, r_k$ отличны от нуля. Пусть, например, $r_i = \lambda$ и $r_j = \mu$, где $\lambda$ и $\mu$ — положительные числа, не превосходящие порядка $n$ матрицы $A$. Докажем, что $r_k \leq \lambda\mu$.

Так как ранг $r_i$ равен $\lambda$ и не меняется при элементарных преобразованиях матрицы $A$, то в последней, так же как и в любой матрице, полученной из $A$ элементарными преобразованиями, всегда существуют $\lambda$ сечений ориентации $(i)$, не состоящих целиком из нулей. Не ограничивая общности, мы можем предположить, что среди элементов 1-го сечения ориентации $(i)$ в матрице $A$ находится по крайней мере один элемент, например $A_{1j(1)k(1)}$, не равный нулю, так как в противном случае достаточно было бы переставить это сечение с каким-нибудь другим параллельным сечением, не состоящим целиком из нулей. Прибавляя теперь 1-е сечение ориентации $(i)$, умножаемое каждый раз на выбранное надлежащим образом число, к каждому из остальных сечений той же ориентации, мы получим матрицу $A^{(1)}$, в которой строка направления $(i)$, содержащая элемент $A_{1j(1)k(1)}$, имеет все остальные элементы, равные нулю. Во 2-м сечении ориентации $(i)$ матрицы $A^{(1)}$ можно, очевидно, также без нарушения общности считать по крайней мере один из элементов, например $A^{(1)}_{2j(2)k(2)}$, отличным от нуля. Поэтому, прибавляя в $A^{(1)}$ 2-е сечение ориентации $(i)$, умножаемое каждый раз на выбранное надлежащим образом число, к 3-му, 4-му, ..., $n$-му сечениям той же ориентации, мы получим матрицу $A^{(2)}$, в которой, кроме строки направления $(i)$

$$A_{1j(1)k(1)}00\ \dots\ 0,$$

встречавшейся уже в матрице $A^{(1)}$, будет также строка того же направления

$$A^{(1)}_{1j(2)k(2)}00\ \dots\ 0.$$

Этот процесс продолжаем до тех пор, пока не придем к матрице $A^{(\lambda)}$, содержащей среди строк направления $(i)$, кроме упомянутых выше строк и им подобных, также строку

$$A^{(\lambda-1)}_{1j(\lambda)k(\lambda)}A^{(\lambda-1)}_{2j(\lambda)k(\lambda)}\ \dots\ A^{(\lambda-1)}_{\lambda j(\lambda)k(\lambda)}00\ \dots\ 0,$$

где элемент $A^{(\lambda-1)}_{\lambda j(\lambda)k(\lambda)}$ не равен нулю, а все следующие за ним элементы—нули.

Так как составленный из элементов этих строк квадратный детерминант порядка $\lambda$

$$\begin{vmatrix} A_{1j(1)k(1)} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ A^{(1)}_{1j(2)k(2)} & A^{(1)}_{2j(2)k(2)} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A^{(\lambda-1)}_{1j(\lambda)k(\lambda)} & A^{(\lambda-1)}_{2j(\lambda)k(\lambda)} & & \dots & A^{(\lambda-1)}_{\lambda j(\lambda)k(\lambda)} \end{vmatrix}$$

не равен нулю и двумерный ранг по индексу $i$ матрицы $A^{(\lambda)}$ равен $\lambda$, то в последней только первые $\lambda$ сечений ориентации $(i)$ содержат элементы, не все равные нулю, тогда как остальные сечения этой ориентации состоят целиком из нулей.

Производя теперь в матрице $A^{(\lambda)}$ аналогичные преобразования над сечениями ориентации $(j)$, мы придем к матрице $A^{(\lambda\mu)}$, у которой двумерный ранг по индексу $j$ равен $\mu$ и все сечения ориентации $(j)$, за исключением первых $\mu$, состоят целиком из нулей. При этом нулевые элементы матрицы $A^{(\lambda)}$ сохраняются и в матрице $A^{(\lambda\mu)}$, так как соответственные элементы двух сечений ориентации $(j)$ принадлежат одному и тому же сечению ориентации $(i)$. Двумерная матрица, составленная из строк направления $(k)$ матрицы $A^{(\lambda\mu)}$, имеет вид

$$\left\| \begin{matrix} A_{111}^{(\lambda\mu)} A_{121}^{(\lambda\mu)} \ldots A_{1\mu 1}^{(\lambda\mu)} A_{211}^{(\lambda\mu)} A_{221}^{(\lambda\mu)} \ldots A_{2\mu 1}^{(\lambda\mu)} \ldots A_{\lambda 11}^{(\lambda\mu)} A_{\lambda 21}^{(\lambda\mu)} \ldots A_{\lambda\mu 1}^{(\lambda\mu)} \, 00 \ldots 0 \\ A_{112}^{(\lambda\mu)} A_{122}^{(\lambda\mu)} \ldots A_{1\mu 2}^{(\lambda\mu)} A_{212}^{(\lambda\mu)} A_{222}^{(\lambda\mu)} \ldots A_{2\mu 2}^{(\lambda\mu)} \ldots A_{\lambda 12}^{(\lambda\mu)} A_{\lambda 22}^{(\lambda\mu)} \ldots A_{\lambda\mu 2}^{(\lambda\mu)} \, 00 \ldots 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ A_{11n}^{(\lambda\mu)} A_{12n}^{(\lambda\mu)} \ldots A_{1\mu n}^{(\lambda\mu)} A_{21n}^{(\lambda\mu)} A_{22n}^{(\lambda\mu)} \ldots A_{2\mu n}^{(\lambda\mu)} \ldots A_{\lambda 1n}^{(\lambda\mu)} A_{\lambda 2n}^{(\lambda\mu)} \ldots A_{\lambda\mu n}^{(\lambda\mu)} \, 00 \ldots 0 \end{matrix} \right\|.$$

Так как число всех нулевых столбцов ее равно $\lambda\mu$, то двумерный ранг по индексу $k$ матрицы $A^{(\lambda\mu)}$ — следовательно, и ранг $r_k$ матрицы $A$ — не больше, чем $\lambda\mu$. Из теоремы 1.2 вытекают очевидные следствия:

Следствие I. *Если один какой-либо из рангов $r_i$, $r_j$, $r_k$ равен* 1, *то остальные два ранга равны между собой.*

Следствие II. *Если два какие-либо из рангов $r_i$, $r_j$, $r_k$ равны* 1, *то третий ранг также равен* 1.

Замечание 1.1. Если кубическая матрица — симметрическая относительно двух каких-нибудь индексов, то ее двумерные ранги по каждому из этих индексов одинаковы.

Замечание 1.2. Если кубическая матрица — симметрическая, то все ее двумерные ранги $r_i$, $r_j$, $r_k$ одинаковы и могут быть объединены в одно понятие *двумерного ранга* $r$.

2. Возьмем теперь $p$-мерную матрицу $n$-го порядка $A = \|A_{i_1 i_2 \ldots i_p}\|$ $(i_1, i_2, \ldots, i_p = 1, 2, \ldots, n)$. Фиксируя в ней значения всех индексов, кроме $\tau$ $(1 \leq \tau \leq p-1)$ каких-нибудь из них, например $i_1, i_2, \ldots i_\tau$, пробегающих независимо друг от друга значения $1, 2, \ldots, n$, мы получим последовательность $n^\tau$ элементов матрицы $A$, которые расположим по вертикали в нормальном порядке. Число таких последовательностей, очевидно, равно $n^{p-\tau}$. Располагая их также в нормальном порядке, составим двумерную матрицу $\|A_{\underbrace{i_1 \ldots i_\tau}\underbrace{i_{\tau+1} \ldots i_p}}\|$, имеющую $n^\tau$ строк и $n^{p-\tau}$ столбцов.

Например, при $p=4$ и $n=2$, полагая последовательно $\tau$ равным 1, 2, 3, имеем:

$$\|A_{\underbrace{i_1}\underbrace{i_2 i_3 i_4}}\| = \left\| \begin{matrix} A_{1111}A_{1112}A_{1121}A_{1122}A_{1211}A_{1212}A_{1221}A_{1222} \\ A_{2111}A_{2112}A_{2121}A_{2122}A_{2211}A_{2212}A_{2221}A_{2222} \end{matrix} \right\|,$$

$$\|A_{\underbrace{i_1 i_2}\underbrace{i_3 i_4}}\| = \left\| \begin{matrix} A_{1111}A_{1112}A_{1121}A_{1122} \\ A_{1211}A_{1212}A_{1221}A_{1222} \\ A_{2111}A_{2112}A_{2121}A_{2122} \\ A_{2211}A_{2212}A_{2221}A_{2222} \end{matrix} \right\|, \quad \|A_{\underbrace{i_1 i_2 i_3}\underbrace{i_4}}\| = \left\| \begin{matrix} A_{1111}A_{1112} \\ A_{1121}A_{1122} \\ A_{1211}A_{1212} \\ A_{1221}A_{1222} \\ A_{2111}A_{2112} \\ A_{2121}A_{2122} \\ A_{2211}A_{2212} \\ A_{2221}A_{2222} \end{matrix} \right\|.$$

Ранг двумерной матрицы $\| A_{\underbrace{i_1 \ldots i_\tau}\underbrace{i_{\tau+1} \ldots i_p}} \|$ называется *двумерным рангом* $r_{\underbrace{i_1 \ldots i_\tau}}$ *по* $\tau$*-кратному индексу* $\underbrace{i_1 \ldots i_\tau}$ матрицы $A$ [1]. Очевидно, этот ранг равен двумерному рангу $r_{\underbrace{i_{\tau+1} \ldots i_p}}$ по $(p-\tau)$-кратному индексу $\underbrace{i_{\tau+1} \ldots i_p}$ матрицы $A$.

В частности, между двумерными рангами кубической матрицы $\| A_{ijk} \|$ имеют место соотношения

$$r_i = r_{\underbrace{jk}}, \quad r_j = r_{\underbrace{ik}}, \quad r_k = r_{\underbrace{ij}},$$

а между двумерными рангами четырехмерной матрицы $\| A_{i_1 i_2 i_3 i_4} \|$ — соотношения

$$r_{i_1} = r_{\underbrace{i_2 i_3 i_4}}, \quad r_{i_2} = r_{\underbrace{i_1 i_3 i_4}}, \quad r_{i_3} = r_{\underbrace{i_1 i_2 i_4}}, \quad r_{i_4} = r_{\underbrace{i_1 i_2 i_3}},$$

$$r_{\underbrace{i_1 i_2}} = r_{\underbrace{i_3 i_4}}, \quad r_{\underbrace{i_1 i_3}} = r_{\underbrace{i_2 i_4}}, \quad r_{\underbrace{i_1 i_4}} = r_{\underbrace{i_2 i_3}}.$$

Теорема 1.3. *Двумерные ранги по* $\tau$*-кратным* $(1 \leq \tau \leq p-1)$ *индексам* $p$*-мерной матрицы* $A$ *являются арифметическими инвариантами относительно ее элементарных преобразований.*

В самом деле, операция

$$\text{(а)} \qquad \boxed{l(\delta)} \cdot t$$

над матрицей $A$ вызывает в двумерной матрице $\| A_{\underbrace{i_1 \ldots i_\tau}\underbrace{i_{\tau+1} \ldots i_p}} \|$ умножение на $t$ $n^{\tau-1}$ строк, если $\delta$ входит в $\tau$-кратный индекс, и $n^{p-\tau-1}$ столбцов, если $\delta$ входит в $(p-\tau)$-кратный индекс.

Операция

$$\text{(б)} \qquad \boxed{m(\delta)} + \boxed{l(\delta)} \cdot t$$

над $A$ сопровождается следующими операциями над $\| A_{\underbrace{i_1 \ldots i_\tau}\underbrace{i_{\tau+1} \ldots i_p}} \|$: прибавлением к $n^{\tau-1}$ строкам умноженных на $t$ других строк, если $\delta$ входит в $\tau$-кратный индекс, и прибавлением к $n^{p-\tau-1}$ столбцам умноженных на $t$ других столбцов, если $\delta$ входит в $(p-\tau)$-кратный индекс.

Таким образом, элементарные преобразования $p$-мерной матрицы $A$, влекущие за собой элементарные преобразования двумерной матрицы $\| A_{\underbrace{i_1 \ldots i_\tau}\underbrace{i_{\tau+1} \ldots i_p}} \|$, не могут изменить ее двумерного ранга по $\tau$-кратному $(1 \leq \tau \leq p-1)$ индексу.

Легко обобщается на случай любой пространственной матрицы и теорема 1.2 (упражнения 4 и 5), а также вытекающие из нее следствия I и II (упражнения 6 и 7), если выразить их в несколько видоизмененной форме, заменяя ранги $r_i, r_j, r_k$ соответственно равными им рангами $r_{\underbrace{jk}}, r_{\underbrace{ik}}, r_{\underbrace{ij}}$.

---

[1] Ср. [103], стр. 174.

Замечание 1.3. Если $p$-мерная матрица — симметрическая, то ее двумерные ранги по каждому из $\tau$-кратных $(1 \leqq \tau \leqq p-1)$ индексов одинаковы.

Замечание 1.4. Все рассмотренные в этом параграфе двумерные ранги пространственной матрицы $A$ называются также *двумерными рангами ассоциированной с ней алгебраической формы* $F$ и являются арифметическими инвариантами относительно ее невырожденных линейных преобразований.

### Упражнения

1. Фиксируя в матрице $\| A_{ijk} \|$ $(i, j, k = 1, 2, 3)$ последовательно значения каждой пары индексов, составить из строк соответствующих направлений двумерные матрицы $\| A_{\underbrace{ij}k} \|$, $\| A_{\underbrace{ji}k} \|$, $\| A_{\underbrace{ki}j} \|$, имеющие по три строки и по девять столбцов, расположенных в нормальном порядке.

2. Фиксируя в матрице $\| A_{ijk} \|$ $(i, j, k = 1, 2, 3)$ последовательно значения каждого индекса, составить из соответствующих элементов, расположенных в нормальном порядке, двумерные матрицы $\| A_{i\underbrace{jk}} \|$, $\| A_{i\underbrace{kj}} \|$, $\| A_{j\underbrace{ki}} \|$, имеющие по три столбца и по девять строк. Сравнить с результатом упражнения 1.

3. Показать, что кубический детерминант $n$-го порядка равен нулю, если двумерный ранг соответствующей кубической матрицы по одному какому-либо из альтернативных индексов меньше, чем $n$. Обобщить для любого многомерного детерминанта порядка $n$.

4. Доказать, что двумерный ранг по любому $\tau$-кратному $(1 \leqq \tau \leqq p-1)$ индексу $p$-мерной матрицы не больше, чем произведение $\tau$ двумерных рангов ее по каждому из простых индексов, входящих в состав $\tau$-кратного индекса (Райс [202]).

5. Разбивая какие-нибудь $\tau$ $(\tau < p)$ индексов $p$-мерной матрицы $A$ на какое-либо число $s$ групп, каждая из которых состоит соответственно из $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_s$ $(\tau_1 + \tau_2 + \ldots \ldots + \tau_s = \tau)$ индексов, и рассматривая эти $\tau$ индексов как $\tau$-кратный индекс, а $s$ групп индексов — как $\tau_\alpha$-кратные $(\alpha = 1, 2, \ldots, s)$ индексы, показать, что двумерный ранг по $\tau$-кратному индексу матрицы $A$ не больше, чем произведение ее $s$ двумерных рангов по каждому из $\tau_\alpha$-кратных индексов (Ольденбургер [170]).

6. Если двумерный ранг $p$-мерной матрицы по какому-нибудь $\tau$-кратному $(\tau < p)$ индексу равен 1, то ее двумерные ранги по $\tau_1$-кратному и $\tau_2$-кратному $(\tau_1 + \tau_2 = \tau)$ индексам, составленным из индексов упомянутого выше $\tau$-кратного индекса, равны между собой. Доказать (Ольденбургер [170]).

7. Если двумерные ранги $p$-мерной матрицы по каждому из $s$ $\tau_\alpha$-кратных $\left(1 \leqq \tau_\alpha \leqq p-1,\ \sum\limits_{\alpha=1}^{s} \tau_\alpha = \tau < p\right)$ индексов равны 1, то ее двумерный ранг по $\tau$-кратному индексу, составленному из упомянутых выше $s$ индексов, также равен 1. Доказать (Ольденбургер [170]).

8. Даны $p$-линейная форма $F = \sum\limits_{i_1, \ldots, i_p = 1}^{n} A_{i_1 \ldots i_p} x_{i_1}^{(1)} \ldots x_{i_p}^{(p)}$ с $p$ мерной матрицей $n$-го порядка $A = \| A_{i_1 \ldots i_p} \|$ $(i_1, \ldots, i_p = 1, \ldots, n)$ и $(p-1)$-линейная форма $\Phi = \sum\limits_{i_1, \ldots, i_{p-1} = 1}^{n} B_{i_1 \ldots i_{p-1}} x_{i_1}^{(1)} \ldots x_{i_{p-1}}^{(p-1)}$ с $(p-1)$-мерной матрицей $B = \| B_{i_1 \ldots i_{p-1}} \|$ $(i_1, \ldots, i_{p-1} = 1, \ldots, n)$ того же порядка $n$. Полагая $B_{i_1 \ldots i_{p-1}} = A_{i_1 \ldots i_{p-1}(n+1)}$, мы можем рассматривать матрицу $B$ как $(n+1)$-е сечение ориентации $(i_p)$ расширенной $p$-мерной матрицы $\bar{A} = \| A_{i_1 \ldots i_{p-1} i_p} \|$ $(i_1, \ldots, i_{p-1} = 1, \ldots, n;\ i_p = 1, \ldots, n+1)$, полученной присоединением этого сечения к матрице $A$. Доказать, что необходимое и достаточное условие приведения формы $F$ к форме $\Phi$, притом единственным образом, заключается в том, чтобы двумерные ранги по индексу $i_p$ матриц $A$ и $\bar{A}$ были равны $n$ (см. [34]).

9. При выполнении условия упражнения 8 неизвестные $x_\nu^{(p)}$ $(\nu = 1, \ldots, n)$, допускающие приведение $p$-линейной формы $F = \sum\limits_{i_1, \ldots, i_p = 1}^{n} A_{i_1 \ldots i_p} x_{i_1}^{(1)} \ldots x_{i_p}^{(p)}$ к $(p-1)$-линейной

форме $\Phi=\sum\limits_{i_1,\ldots,i_{p-1}=1}^{n} B_{i_1\ldots i_{p-1}} x^{(1)}_{i_1}\ldots x^{(p-1)}_{i_{p-1}}$, определяются, притом единственным образом, из совместной системы $n^{p-1}$ линейных уравнений

$$\sum_{i_p=1}^{n} A_{i_1\ldots i_p} x^{(p)}_{i_p}=B_{i_1\ldots i_{p-1}} \qquad (i_1,\ldots,i_{p-1}=1,\ldots,n). \tag{1.1}$$

Составим $p$-мерные детерминанты $n$-го порядка с альтернативным индексом $i_p$ матрицы $A$ формы $F$

$$|A_{\overset{+}{i_1}\ldots\overset{+}{i}_{\alpha_1-1}\overset{\pm}{i}_{\alpha_1}\overset{+}{i}_{\alpha_1+1}\ldots\overset{+}{i}_{\alpha_m-1}\overset{\pm}{i}_{\alpha_m}\overset{+}{i}_{\alpha_m+1}\ldots\overset{+}{i}_{p-1}\overset{\pm}{i_p}}|,$$

где $i_{\alpha_1},\ldots,i_{\alpha_m}$ — альтернативные индексы, отличные от $i_p$, и где $m$ принимает нечетные значения $1, 3, \ldots, p-1$ или $p-2$, смотря по тому, будет ли $p$ четным или нечетным. Число таких детерминантов равно $2^{p-2}$. Показать, что каждое неизвестное $x^{(p)}_\nu$ $(\nu=1,\ldots,n)$ системы (1.1) может быть представлено любой из тех $2^{p-2}$ формул

$$x^{(p)}_\nu=\frac{|(1-\delta_{i_p,\nu})A_{\overset{+}{i_1}\ldots\overset{+}{i}_{\alpha_1-1}\overset{\pm}{i}_{\alpha_1}\overset{+}{i}_{\alpha_1+1}\ldots\overset{+}{i}_{\alpha_m-1}\overset{\pm}{i}_{\alpha_m}\overset{+}{i}_{\alpha_m+1}\ldots\overset{+}{i}_{p-1}\overset{\pm}{i_p}}+\delta_{i_p,\nu}B_{i_1\ldots i_{p-1}}|}{|A_{\overset{+}{i_1}\ldots\overset{+}{i}_{\alpha_1-1}\overset{\pm}{i}_{\alpha_1}\overset{+}{i}_{\alpha_1+1}\ldots\overset{+}{i}_{\alpha_m-1}\overset{\pm}{i}_{\alpha_m}\overset{+}{i}_{\alpha_m+1}\ldots\overset{+}{i}_{p-1}\overset{\pm}{i_p}}|}, \tag{1.2}$$

которые не имеют неопределенного вида $\frac{0}{0}$; $\delta_{i_p,\nu}$ — символ Кронекера; при помощи его числитель дроби, представляющей $x^{(p)}_\nu$, выражен в виде $p$-мерного детерминанта, косигнатурного с детерминантом, стоящим в знаменателе, и получающегося из него заменой всех элементов $\nu$-го сечения ориентации $(i_p)$ соответственными элементами матрицы $B$ формы $\Phi$ (см. [25]).

**10.** Узнать, согласно критерию упражнения 8, приводится ли трилинейная форма

$$F=x^{(1)}_1x^{(2)}_1x^{(3)}_1+2x^{(1)}_1x^{(2)}_1x^{(3)}_2+3x^{(1)}_1x^{(2)}_2x^{(3)}_1+4x^{(1)}_1x^{(2)}_2x^{(3)}_2-$$
$$-3x^{(1)}_2x^{(2)}_1x^{(3)}_1+2x^{(1)}_2x^{(2)}_1x^{(3)}_2-4x^{(1)}_2x^{(2)}_2x^{(3)}_1+5x^{(1)}_2x^{(2)}_2x^{(3)}_2$$

к билинейной форме $\Phi=5x^{(1)}_1x^{(2)}_1+11x^{(1)}_1x^{(2)}_2+x^{(1)}_2x^{(2)}_1+6x^{(1)}_2x^{(2)}_2$ и если приводится, то для неизвестных $x^{(3)}_1$, $x^{(3)}_2$, допускающих это приведение, указать все виды решений по формулам (1.2).

**11.** Если условие упражнения 8 не выполняется, то система (1.1) несовместна и тогда каждая из $2^{p-2}$ формул (1.2) выражает среднее значение (в смысле Шюке [61])¹) между $(n!)^{p-2}$ значениями неизвестных $x^{(p)}_\nu$ $(\nu=1, 2, \ldots, n)$, определяемыми по правилу Крамера из $(n!)^{p-2}$ систем линейных уравнений

$$\sum_{i_p=1}^{n} A_{\overline{i_1\ldots i_{\alpha_1-1}}\,i_{\alpha_1}\,\overline{i_{\alpha_1+1}\ldots i_{p-1}i_p}}\,x^{(p)}_{i_p}=B_{\overline{i_1\ldots i_{\alpha_1-1}}\,i_{\alpha_1}\,\overline{i_{\alpha_1+1}\ldots i_{p-1}}},$$

где каждая система состоит из $n$ уравнений, у которых коэффициенты при неизвестных образуют двумерное трансверсальное сечение матрицы $A$. Среднее арифметическое из этих $2^{p-2}$ средних, если все они имеют определенные конечные значения, может служить тогда приближенным значением корня $x^{(p)}_\nu$ системы (1.1). Найти таким методом при-

---

¹) Шюке рассматривает дробь $\frac{a_1+a_2}{b_1+b_2}$ как простую среднюю величину между двумя данными дробями $\frac{a_1}{b_1}$ и $\frac{a_2}{b_2}$.

ближенное решение несовместной системы линейных уравнений:

$$2x_1^{(3)}+x_2^{(3)}=8,$$
$$3x_1^{(3)}+2x_2^{(3)}=12,$$
$$7x_1^{(3)}+4x_2^{(3)}=28,$$
$$5x_1^{(3)}+8x_2^{(3)}=27,$$

составленной для приведения трилинейной формы

$$F=2x_1^{(1)}x_1^{(2)}x_1^{(3)}+x_1^{(1)}x_1^{(2)}x_2^{(3)}+3x_1^{(1)}x_2^{(2)}x_1^{(3)}+2x_1^{(1)}x_2^{(2)}x_2^{(3)}+$$
$$+7x_2^{(1)}x_1^{(2)}x_1^{(3)}+4x_2^{(1)}x_1^{(2)}x_2^{(3)}+5x_2^{(1)}x_2^{(2)}x_1^{(3)}+8x_2^{(1)}x_2^{(2)}x_2^{(3)}$$

к билинейной форме $\Phi=8x_1^{(1)}x_1^{(2)}+12x_1^{(1)}x_2^{(2)}+28x_2^{(1)}x_1^{(2)}+27x_2^{(1)}x_2^{(2)}$, и сравнить с приближенным решением той же системы, полученным по способу наименьших квадратов.

## § 2. Многомерные ранги

1. Двумерные ранги по простым и кратным индексам являются частным случаем более общего понятия — *многомерных рангов* пространственной матрицы. Для выяснения этого понятия обратимся снова к кубической матрице $n$-го порядка

$$A=\|A_{ijk}\| \qquad (i,\ j,\ k=1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

Выделим в ней по $\nu$ $(1\leqq\nu\leqq n)$ каких-нибудь сечений каждой из ориентаций $(i)$, $(j)$, $(k)$, располагая их в нормальном порядке, причем некоторые или даже все из $\nu$ сечений одной какой-нибудь ориентации, например $(i)$, могут быть повторными. Кубический детерминант $\nu$-го порядка с сигнатурой $(\overset{+}{i})$, составленный из элементов, общих всем выделенным сечениям, будем называть *трехмерным (кубическим) минором $\nu$-го порядка с сигнатурой* $(\overset{+}{i})$, *порождаемым матрицей* $A$.

Например, кубическими минорами 2-го порядка с сигнатурой $(\overset{+}{i})$, порождаемыми матрицей

$$A=\left\|\begin{array}{cc|cc} A_{111} & A_{112} & A_{211} & A_{212} \\ A_{121} & A_{122} & A_{221} & A_{222} \end{array}\right\| \begin{array}{l} \longrightarrow (i) \\ \ulcorner\!\!\longrightarrow (k) \\ \downarrow \\ (j) \end{array},$$

будут детерминанты

$$\left|\begin{array}{cc|cc} A_{111} & A_{112} & A_{211} & A_{212} \\ A_{121} & A_{122} & A_{221} & A_{222} \end{array}\right| \begin{array}{l} \longrightarrow (\overset{+}{i}) \\ \ulcorner\!\!\longrightarrow (k) \\ \downarrow \\ (j) \end{array} = A_{111}A_{222}-A_{112}A_{221}-A_{121}A_{212}+A_{122}A_{211},$$

$$\left|\begin{array}{cc|cc} A_{111} & A_{112} & A_{111} & A_{112} \\ A_{121} & A_{122} & A_{121} & A_{122} \end{array}\right| \begin{array}{l} \longrightarrow (\overset{+}{i}) \\ \ulcorner\!\!\longrightarrow (k) \\ \downarrow \\ (j) \end{array} = 2(A_{111}A_{122}-A_{112}A_{121}),$$

$$\left|\begin{array}{cc|cc} A_{211} & A_{212} & A_{211} & A_{212} \\ A_{221} & A_{222} & A_{221} & A_{222} \end{array}\right| \begin{array}{l} \longrightarrow (\overset{+}{i}) \\ \ulcorner\!\!\longrightarrow (k) \\ \downarrow \\ (j) \end{array} = 2(A_{211}A_{222}-A_{212}A_{221}).$$

Это понятие несколько шире данного в § 3 гл. I понятия минора кубического детерминанта, где все выделяемые в матрице этого детерминанта сечения берутся без повторений.

Наивысший порядок отличных от нуля кубических миноров с сигнатурой $\overset{+}{(i)}$, порождаемых матрицей $A$, называется ее *трехмерным рангом по индексам* $j$, $k$. Его мы будем обозначать символом $r_{jk}^{(i)}$.

Аналогично определяются *трехмерные ранги* $r_{ik}^{(j)}$ (*по индексам* $i$, $k$) *и* $r_{ij}^{(k)}$ (*по индексам* $i$, $j$) матрицы $A$.

Теорема 2.1. *Трехмерные ранги* $r_{jk}^{(i)}$, $r_{ik}^{(j)}$, $r_{ij}^{(k)}$ *кубической матрицы* $A$ *являются арифметическими инвариантами относительно ее элементарных преобразований.*

В самом деле, операция

(а) $\boxed{l(\delta)}\cdot t$ ($\delta$ — любой из индексов $i$, $j$, $k$)

над матрицей $A$ сопровождается умножением каждого кубического минора $\nu$-го порядка с той или иной сигнатурой, порождаемого матрицей $A$, на $t^\lambda$, где $\lambda$ — одно из чисел $0, 1, \ldots, \nu$, а потому не влияет на равенство или неравенство нулю этого минора и, следовательно, не изменяет трехмерных рангов матрицы $A$.

Операция

(б) $$\boxed{m(\delta)} + \boxed{l(\delta)}\cdot t$$

над $A$ при $\delta = i$, согласно свойству X (гл. I, § 2) многомерных детерминантов, не изменяет порождаемых этой матрицей кубических миноров с сигнатурой $\overset{+}{(j)}$ или $\overset{+}{(k)}$, а следовательно, и рангов $r_{ik}^{(j)}$, $r_{ij}^{(k)}$. Что же касается миноров с сигнатурой $\overset{+}{(i)}$, то они при этой операции могут подвергаться изменениям. Именно, миноры $\nu$-го порядка с сигнатурой $\overset{+}{(i)}$, порождаемые преобразованной матрицей и содержащие $m$-е сечение ориентации $(i)$ исходной матрицы $A$, являются на основании свойства VIII многомерных детерминантов линейными однородными функциями косигнатурных миноров $\nu$-го порядка, порождаемых матрицей $A$. Следовательно, все они при $\nu > r_{jk}^{(i)}$ равны нулю и потому ранг $r_{jk}^{(i)}$ не может увеличиться при рассматриваемой операции. Но он не может и уменьшиться, так как тогда операция

$$\boxed{m(i)} + \boxed{l(i)}\cdot(-t)$$

над преобразованной матрицей, приводящая ее к исходной матрице $A$, вызвала бы увеличение $r_{jk}^{(i)}$, что, как мы видели, невозможно. Следовательно, ранг $r_{jk}^{(i)}$ остается неизменным при операции (б), когда $\delta = i$. Подобным образом доказывается неизменяемость трехмерных рангов матрицы $A$ при операции (б), когда $\delta = j$ или $\delta = k$.

Теорема 2.2. *Трехмерный ранг по каким-нибудь двум индексам кубической матрицы* $A$ *не превышает наименьшего из двумерных рангов ее по каждому из этих индексов.*

Действительно, все кубические миноры любого порядка с какой-нибудь сигнатурой, например $\overset{+}{(i)}$, порождаемые матрицей $A$, представляются, как было показано в § 3 гл. I, суммами обычных детерминантов того же порядка, составленных из строк направления $(j)$ или $(k)$ матрицы $A$. Поэтому согласно определению трехмерный ранг $r_{jk}^{(i)}$ (по индексам $j$, $k$) матрицы $A$ не может быть больше ее двумерных рангов $r_j$ (по индексу $j$) и $r_k$ (по индексу $k$), т. е. $r_{jk}^{(i)}$ не превышает наименьшего из рангов $r_j$, $r_k$.

Из теоремы 2.2 вытекают очевидные следствия.

Следствие I. *Если один из двумерных рангов, например $r_i$, кубической матрицы равен* 1, *то ее трехмерные ранги $r_{ik}^{(j)}$ и $r_{ij}^{(k)}$ также равны* 1.

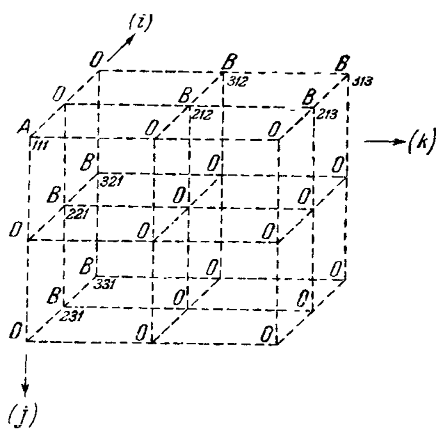
Следствие II. *Если два какие-либо из двумерных рангов кубической матрицы равны* 1, *то все трехмерные ранги ее также равны* 1.

Следствие III. *Если трехмерный ранг по каким-нибудь двум индексам кубической матрицы $n$-го порядка равен $n$, то ее двумерные ранги по каждому из этих индексов также равны $n$.*

Следствие IV. *Если два какие-либо из трехмерных рангов кубической матрицы $n$-го порядка равны $n$, то все двумерные ранги ее также равны $n$.*

Теорема 2.3. *Если трехмерный ранг по одной паре индексов кубической матрицы $A$ равен* 1, *то ее трехмерный ранг по другой какой-либо паре индексов и двумерный ранг по индексу, общему этим двум парам, также равны* 1.

В самом деле, пусть один из трехмерных рангов, например $r_{jk}^{(i)}$, матрицы $A = \| A_{ijk} \| \, (i, j, k = 1, 2, \ldots, n)$ равен 1. Не ограничивая общности, можем предположить, что $A_{111} \neq 0$. Прибавляя тогда в матрице $A$ 1-е сечение каждой ориентации, умножаемое всякий раз на выбранное надлежащим




(2.1)

Рис. 12.

образом число, ко всем параллельным сечениям, мы получим кубическую матрицу $n$-го порядка, у которой все элементы трех строк, имеющих общий элемент $A_{111}$, равны нулю, за исключением одного этого элемента. Так как в силу теоремы 2.1 ранг $r_{jk}^{(i)}$ преобразованной матрицы равен 1, то последняя имеет вид рис. 12, где все элементы, остающиеся после вычеркивания 1-го сечения каждой ориентации, равны нулю. Если другой какой-либо из трехмерных рангов, например $r_{ik}^{(j)}$, матрицы $A$, а следовательно, и матрицы (2.1), равен 1, то в последней все элементы 1-го сечения ориентации $(j)$, за исключением $A_{111}$, равны нулю, а потому двумерный ранг $r_k$ матрицы (2.1), а следовательно и матрицы $A$, равен 1. Если же ранг $r_{ik}^{(j)}$ матрицы $A$ больше, чем 1, то среди элементов 1-го сечения ориентации $(j)$ в матрице (2.1) должен быть, кроме $A_{111}$, по крайней мере еще один элемент, отличный от нуля. Очевидно, не нарушая общности, таким элементом можем считать $B_{212}$, и так как ранг $r_{jk}^{(i)}$ матрицы (2.1) равен 1, то все элементы ее 1-го сечения ориентации $(k)$, за исключением $A_{111}$, должны быть нулями. В этом случае матрица (2.1), а следовательно и $A$, имеет трехмерный ранг $r_{ij}^{(k)}$ и двумерный ранг $r_j$, оба равные 1.

Из теоремы 2.3 вытекает очевидное

Следствие. *Если все трехмерные ранги кубической матрицы равны* 1, *то и все двумерные ранги ее также равны* 1.

Замечание 2.1. Если кубическая матрица — симметрическая относительно двух каких-нибудь индексов, то ее трехмерные ранги по каждой паре индексов, содержащей один из этих двух индексов, одинаковы, а трехмерный ранг по двум индексам симметрии матрицы $A$ не превышает двумерного ранга ее по любому из этих индексов.

Замечание 2.2. Если кубическая матрица — симметрическая, то все ее трехмерные ранги $r_{jk}^{(i)}$, $r_{ik}^{(j)}$, $r_{ij}^{(k)}$ одинаковы и могут быть объединены в одно понятие *трехмерного ранга* $\varrho$, не превышающего ее двумерного ранга $r$.

Замечание 2.3. Из следствий II и III теоремы 2.2 и следствия теоремы 2.3 вытекает, что у симметрической кубической матрицы 2-го порядка $A$ $\varrho = r$.

2. Возьмем теперь $p$-мерную матрицу $n$-го порядка

$$A = \| A_{i_1 i_2 \ldots i_p} \| \qquad (i_1, i_2, \ldots, i_p = 1, 2, \ldots, n).$$

Фиксируя в ней значения $m$ $(1 \leq m \leq p-1)$ каких-нибудь индексов, например последних $m$ индексов $i_{p-m+1}, \ldots, i_p$, в то время как остальные $p-m$ индексов $i_1, \ldots, i_{p-m}$ пробегают независимо друг от друга значения $1, 2, \ldots, n$, мы получим сечение ($m$-кратное) ориентации $(i_{p-m+1} \ldots i_p)$, являющееся $(p-m)$-мерной матрицей $n$-го порядка. Из таких сечений, число которых равно $n^m$, можно составить $(p-m+1)$-мерную матрицу

$$A' = \| A_{i_1 \ldots i_{p-m} \underbrace{i_{p-m+1} \ldots i_p}} \|, \tag{2.2}$$

где строки каждого из направлений $(i_1), \ldots, (i_{p-m})$ содержат по $n$ элементов, тогда как строки $m$-кратного направления $(\underbrace{i_{p-m+1} \ldots i_p})$ содержат по $n^m$ элементов матрицы $A$, расположенных в нормальном порядке. Выделим в матрице $A'$ по $\nu$ $(1 \leq \nu \leq n)$ каких-нибудь сечений каждой из ориентаций $(i_1), \ldots, (i_{p-m}), (\underbrace{i_{p-m+1} \ldots i_p})$, располагая их в нормальном порядке, причем в случае, когда $p-m+1$ — нечетное, некоторые или даже все из $\nu$ сечений ориентации $(\underbrace{i_{p-m+1} \ldots i_p})$ могут быть повторными. Составим затем из элементов, общих всем выделенным сечениям, $(p-m+1)$-мерный детерминант $\nu$-го порядка, в котором все индексы $i_1, \ldots, i_{p-m}$ — альтернативные, а $m$-кратный индекс $\underbrace{i_{p-m+1} \ldots i_p}$ является альтернативным или неальтернативным, смотря по тому, будет ли $p-m+1$ четным или нечетным. Этот детерминант называется *$(p-m+1)$-мерным минором $\nu$-го порядка, порождаемым матрицей* $A$, сигнатура которого будет

$$(\overset{+}{i_1} \ldots \overset{+}{i_{p-m}} \underbrace{i_{p-m+1} \ldots \overset{+}{i_p}}) \quad \text{или} \quad (\overset{\pm}{i_1} \ldots \overset{\pm}{i_{p-m}} \underbrace{i_{p-m+1} \ldots \overset{+}{i_p}})$$

в зависимости от четности $p-m+1$.

Наивысший порядок такого рода детерминантов, отличных от нуля, называется *$(p-m+1)$-мерным рангом* $r_{i_1 \ldots i_{p-m}}^{(i_{p-m+1} \ldots i_p)}$ *по индексам (простым)* $i_1, \ldots, i_{p-m}$ матрицы $A$ [1]). Число $(p-m+1)$-мерных рангов по $p-m$ индексам (простым) матрицы $A$ равно $C_p^m$. В частности, матрица $A$ имеет $p$

---

[1]) Ср. [104], стр. 53.

$p$-мерных рангов, которые, очевидно, все одинаковы, если $p$ — четное, и, следовательно, могут быть объединены в одно понятие $p$-мерного ранга $r^{(p)}$ матрицы четного числа $p$ измерений. Например, четырехмерная матрица имеет один четырехмерный ранг $r^{(4)}$ и шесть трехмерных рангов по двум индексам (простым)

$$r^{(i_3 i_4)}_{i_1 i_2},\quad r^{(i_2 i_4)}_{i_1 i_3},\quad r^{(i_2 i_3)}_{i_1 i_4},\quad r^{(i_1 i_4)}_{i_2 i_3},\quad r^{(i_1 i_3)}_{i_2 i_4},\quad r^{(i_1 i_2)}_{i_3 i_4}.$$

Наибольшее значение $(p-m+1)$-мерного $(1 \leqq m \leqq p-1)$ ранга по любым $p-m$ индексам (простым) $p$-мерной матрицы $n$-го порядка $A$ равно $n$, а наименьшее значение — нулю, когда матрица $A$ — нулевая. Как и при доказательстве теоремы 2.1, нетрудно убедиться, что этот ранг не изменяется при операциях (а) и (б) над матрицей $A$ и, следовательно, имеет место более общая

Теорема 2.4. *Каждый $(p-m+1)$-мерный $(1 \leqq m \leqq p-1)$ ранг по $p-m$ индексам (простым) $p$-мерной матрицы есть арифметический инвариант относительно ее элементарных преобразований.*

Точно так же легко обобщаются для $p$-мерной матрицы теоремы 2.2 (упражнение 2), 2.3 (упражнение 7) и вытекающие из них следствия (упражнения 3—6, 8).

Замечание 2.4. Если $p$-мерная матрица — симметрическая, то ее $(p-m+1)$-мерные $(1 \leqq m \leqq p-1)$ ранги по каждым $p-m$ индексам (простым) одинаковы.

3. Разобьем в $(p-m+1)$-мерной матрице (2.2) $p-m$ индексов $i_1, i_2, \ldots, i_{p-m}$, пробегающих независимо друг от друга значения $1, 2, \ldots, n$, на $\pi-m$ $(1 \leqq \pi-m \leqq p-m \leqq p-1)$ групп из $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_{\pi-m}$ $(1 \leqq \tau_\alpha \leqq p-m,$ $1 \leqq \alpha \leqq \pi-m;$ $\tau_1+\tau_2+\ldots+\tau_{\pi-m}=p-m)$ индексов каждая и будем рассматривать эти группы индексов как кратные индексы $u_1, u_2, \ldots, u_{\pi-m}$ с соответственными кратностями $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_{\pi-m}$; при этом, когда $\tau_\alpha$ $(1 \leqq \alpha \leqq \pi-m)$ индексов какой-либо группы пробегают значения $1, 2, \ldots, n$, соответствующий $\tau_\alpha$-кратный индекс $u_\alpha$ пробегает значения от 1 до $n^{\tau_\alpha}$ в нормальном порядке. Получим тогда $(\pi-m+1)$-мерную $(\pi \leqq p)$ матрицу

$$A'' = \| A_{u_1 \ldots u_{\pi-m} \underbrace{i_{p-m+1} \ldots i_p}} \|,$$

где строки направлений $(u_1), \ldots, (u_{\pi-m}), (\underbrace{i_{p-m+1} \ldots i_p})$ содержат соответственно по $n^{\tau_1}, \ldots, n^{\tau_{\pi-m}}, n^m$ элементов матрицы $A$, расположенных в нормальном порядке.

Выделим в матрице $A''$ по $\nu$ каких-нибудь сечений каждой из ориентаций $(u_1), \ldots, (u_{\pi-m}), (\underbrace{i_{p-m+1} \ldots i_p})$, располагая их в нормальном порядке, причем в случае, когда $\pi-m+1$ — нечетное, некоторые или даже все из $\nu$ сечений ориентации $(\underbrace{i_{p-m+1} \ldots i_p})$ могут быть повторными. Составим затем из элементов, общих всем выделенным сечениям, $(\pi-m+1)$-мерный детерминант $\nu$-го порядка, в котором все индексы $u_1, \ldots, u_{\pi-m}$ — альтернативные, а $m$-кратный индекс $\underbrace{i_{p-m+1} \ldots i_p}$ является альтернативным или неальтернативным, смотря по тому, будет ли $\pi-m+1$ четным или нечетным. Этот детерминант называется $(\pi-m+1)$-*мерным минором* $\nu$-го *порядка, порож-*

*даемым матрицей $A$*, сигнатура которого будет $(\overset{\pm}{u_1}\dots\overset{\pm}{u}_{\pi-m}\underbrace{i_{p-m+1}\dots\overset{\pm}{i_p}})$ или $(\overset{\pm}{u_1}\dots\overset{\pm}{u}_{\pi-m}\underbrace{i_{p-m+1}\dots\overset{+}{i_p}})$ в зависимости от четности $\pi-m+1$.

Наивысший порядок такого рода детерминантов, отличных от нуля, называется $(\pi-m+1)$-*мерным рангом* $r^{(i_{p-m+1}\dots i_p)}_{u_1\dots u_{\pi-m}}$ *по кратным индексам* $u_1,\dots,u_{\pi-m}$ матрицы $A$ [1]). В этом определении ранга, очевидно, содержатся все предыдущие определения различных рангов матрицы $A$, получающиеся из него при различных предположениях относительно чисел $m$ и $\pi$. Число $(\pi-m+1)$-мерных рангов матрицы $A$ равно $C^m_pC^{\pi-m}_{p-m}$. Так, например, четырехмерная матрица имеет двенадцать трехмерных рангов по двум кратным индексам:

$$r^{(i_4)}_{\underbrace{i_1i_2}i_3},\quad r^{(i_4)}_{i_1\underbrace{i_2i_3}},\quad r^{(i_4)}_{\underbrace{i_1i_2i_3}},\quad r^{(i_3)}_{\underbrace{i_1i_2}i_4},\quad r^{(i_3)}_{i_1\underbrace{i_2i_4}},\quad r^{(i_3)}_{\underbrace{i_1i_2i_4}},$$

$$r^{(i_2)}_{\underbrace{i_1i_3}i_4},\quad r^{(i_2)}_{i_1\underbrace{i_3i_4}},\quad r^{(i_2)}_{\underbrace{i_1i_3i_4}},\quad r^{(i_1)}_{\underbrace{i_2i_3}i_4},\quad r^{(i_1)}_{i_2\underbrace{i_3i_4}},\quad r^{(i_1)}_{\underbrace{i_2i_3i_4}}.$$

Подобно теореме 2.4 доказывается более общая

Теорема 2.5. *Каждый* $(\pi-m+1)$-*мерный* $(1\leqq\pi-m\leqq p-m\leqq p-1)$ *ранг $p$-мерной матрицы по $\pi-m$ кратным индексам есть арифметический инвариант относительно ее элементарных преобразований.*

Возможно также дальнейшее обобщение теорем 2.2, 2.3 и вытекающих из них следствий (упражнение 9).

Замечание 2.5. Если $p$-мерная матрица — симметрическая, то ее $(\pi-m+1)$-мерные $(1\leqq\pi-m\leqq p-m\leqq p-1)$ ранги по каждым $\pi-m$ кратным индексам одинаковы.

Замечание 2.6. Все рассмотренные в этом параграфе многомерные ранги пространственной матрицы $A$ называются также *многомерными рангами ассоциированной с ней алгебраической формы $F$* и являются арифметическими инвариантами относительно ее невырожденных линейных преобразований.

### Упражнения

1. Составить трехмерные миноры 2-го порядка с сигнатурой $(\underbrace{\overset{+}{i_1}\overset{\pm}{i_2}}\overset{\pm}{i_3}i_4)$, порождаемые матрицей $\|A_{i_1i_2i_3i_4}\|$ $(i_1,i_2,i_3,i_4=1,2)$.

2. Доказать, что $g$-мерный ранг по $g-1$ индексам $p$-мерной матрицы не превышает наименьшего из $h$-мерных $(2\leqq h<g\leqq p)$ рангов ее по $h-1$ индексам из этих $g-1$ индексов (Хичкокк [104]).

3. Если двумерный ранг по одному какому-либо индексу $p$-мерной матрицы равен 1, то ее трехмерные ранги по двум индексам, из которых один есть упомянутый выше индекс, также равны 1. Доказать (Хичкокк [104]).

4. Показать, что все трехмерные ранги по двум индексам $p$-мерной матрицы равны 1, если $p-1$ каких-нибудь ее двумерных рангов по отдельным индексам равны 1.

5. Если трехмерный ранг по каким-нибудь двум индексам $p$-мерной матрицы $n$-го порядка равен $n$, то ее двумерные ранги по каждому из этих индексов также равны $n$. Доказать.

6. Показать, что все двумерные ранги $p$-мерной матрицы $n$-го порядка $A$ равны $n$, если трехмерные ранги ее по всем парам индексов, охватывающим в своей совокупности все индексы матрицы $A$, равны $n$.

7. Если трехмерный ранг по одной какой-либо паре индексов $p$-мерной матрицы равен 1, то ее трехмерный ранг по другой паре индексов, имеющей общий индекс с первой парой, и двумерный ранг по этому общему индексу также равны 1. Доказать.

8. Показать, что все двумерные ранги $p$-мерной матрицы равны 1, если равны 1 все ее трехмерные ранги.

9. Обобщить упражнения 2—8 на случай рангов по кратным индексам.

---

[1]) Ср. [104], стр. 56.

## § 3. Ранги различных степеней

1. Рассмотренные в предыдущих параграфах двумерные и многомерные ранги пространственной матрицы $A$ могут быть названы *первичными*.[1]) Как увидим далее, существуют матрицы, известным образом составленные из элементов основной матрицы $A$, первичные ранги которых являются арифметическими инвариантами относительно элементарных преобразований матрицы $A$. Эти ранги будем называть *вторичными* рангами матрицы $A$ и ассоциированной с ней алгебраической формы $F$. Подобным образом определяются *третичные*, *четвертичные* и *высших степеней* ранги матрицы $A$ и формы $F$. Число рангов одной и той же степени всегда конечно.

Мы ограничимся рассмотрением вторичных рангов матрицы $A$ в простейших случаях, когда $A$ — кубическая матрица порядка 2 или 3. Более сложные случаи рассматриваются аналогично (упражнения 2—7).

2. Пусть

$$A = \| A_{ijk} \| \qquad (i, j, k, = 1, 2).$$

Введем для кубических миноров 2-го порядка с сигнатурами $(\overset{+}{i}), (\overset{+}{j}), (\overset{+}{k})$, порождаемых матрицей $A$, обозначения

$$A^{(i)}_{\alpha\beta} = \left|\begin{array}{cc|cc} A_{\alpha11} & A_{\alpha12} & A_{\beta11} & A_{\beta12} \\ & & & \\ A_{\alpha21} & A_{\alpha22} & A_{\beta21} & A_{\beta22} \end{array}\right| \begin{array}{l} \to (\overset{+}{i}) \\ \ulcorner\!\to (k) \\ \downarrow \\ (j) \end{array},$$

$$A^{(j)}_{\alpha\beta} = \left|\begin{array}{cc|cc} A_{1\alpha1} & A_{2\alpha1} & A_{1\beta1} & A_{2\beta1} \\ & & & \\ A_{1\alpha2} & A_{2\alpha2} & A_{1\beta2} & A_{2\beta2} \end{array}\right| \begin{array}{l} \to (\overset{+}{j}) \\ \ulcorner\!\to (i) \\ \downarrow \\ (k) \end{array},$$

$$A^{(k)}_{\alpha\beta} = \left|\begin{array}{cc|cc} A_{11\alpha} & A_{12\alpha} & A_{11\beta} & A_{12\beta} \\ & & & \\ A_{21\alpha} & A_{22\alpha} & A_{21\beta} & A_{22\beta} \end{array}\right| \begin{array}{l} \to (\overset{+}{k}) \\ \ulcorner\!\to (j) \\ \downarrow \\ (i) \end{array},$$

где $\alpha, \beta$ — любые из значений 1, 2.

Из этих миноров составим квадратные матрицы 2-го порядка

$$A^{(i)} = \| A^{(i)}_{\alpha\beta} \|, \qquad A^{(j)} = \| A^{(j)}_{\alpha\beta} \|, \qquad A^{(k)} = \| A^{(k)}_{\alpha\beta} \| \qquad (\alpha, \beta = 1, 2), \tag{3.1}$$

которые, в виду свойства III (гл. I, § 2) многомерных детерминантов, будут симметрическими.

Для них имеет место

Теорема 3.1. *Ранги $r_{A^{(i)}}$, $r_{A^{(j)}}$, $r_{A^{(k)}}$, матриц $A^{(i)}$, $A^{(j)}$, $A^{(k)}$ являются арифметическими инвариантами относительно элементарных преобразований кубической матрицы 2-го порядка $A$, и следовательно, будут ее вторичными рангами соответственно по индексам $i$, $j$, $k$.*

---

[1]) Ср. [104], стр. 64.

Действительно, операция

$$\text{(а)} \qquad \boxed{l(\delta)}\cdot t$$

над матрицей $A$ вызывает в матрице $A^{(i)}$ при $\delta = i$ умножение $l$-й строки и $l$-го столбца на $t$, а при $\delta = j$ или $\delta = k$ — умножение всех строк или всех столбцов на $t$, что равносильно умножению всех строк и столбцов на $\sqrt{t}$ или, в случае поля вещественных чисел, умножению всех строк и столбцов на $\sqrt{|t|}$ и самой матрицы на $\operatorname{sign} t$.

Операция

$$\text{(б)} \qquad \boxed{m(\delta)} + \boxed{l(\delta)}\cdot t$$

над $A$ при $\delta = j$ или $\delta = k$ не вызывает изменений в $A^{(i)}$, а при $\delta = i$ сопровождается прибавлением в $A^{(i)}$ к $m$-й строке умноженной на $t$ $l$-й строки и прибавлением к $m$-му столбцу умноженного на $t$ $l$-го столбца.

Таким образом, элементарные преобразования матрицы $A$ влекут за собой симметрические элементарные преобразования матрицы $A^{(i)}$, не нарушающие ее симметричности и не изменяющие ее ранга $r_{A^{(i)}}$.

Точно так же убеждаемся, что аналогичные заключения имеют место для матриц $A^{(j)}$, $A^{(k)}$ и их рангов $r_{A^{(j)}}$, $r_{A^{(k)}}$.

Замечание 3.1. Элементарные преобразования квадратной матрицы [1]) будем называть *симметрическими*, если любое из этих преобразований, совершаемое над строками (столбцами) матрицы, воспроизводится и над соответствующими им столбцами (строками). Элементарные преобразования симметрических квадратных матриц (3.1), вызываемые вещественными элементарными преобразованиями основной матрицы $A$, являются симметрическими вещественными элементарными преобразованиями, сопровождающимися еще, быть может, умножением этих матриц на $-1$. Вводя для симметрической квадратной матрицы с вещественными элементами понятие сигнатуры как разности между числами положительных и отрицательных элементов эквивалентной ей диагональной матрицы, к которой она приводится цепочкой симметрических вещественных элементарных преобразований, отметим, что сигнатура, так же как и ранг матрицы, не изменяется при такого рода преобразованиях. Отсюда заключаем, что в поле вещественных чисел абсолютные величины сигнатур матриц (3.1)

$$|\sigma_{A^{(i)}}|, \qquad |\sigma_{A^{(j)}}|, \qquad |\sigma_{A^{(k)}}|$$

будут арифметическими инвариантами относительно вещественных элементарных преобразований матрицы $A$. Если эти преобразования — симметрические, то инвариантами будут и сигнатуры $\sigma_{A^{(i)}}$, $\sigma_{A^{(j)}}$, $\sigma_{A^{(k)}}$. При вещественных элементарных преобразованиях по индексу $i$ и симметрических вещественных элементарных преобразованиях по индексам $j$, $k$ матрицы $A$ инвариантом будет также сигнатура $\sigma_{A^{(i)}}$. Аналогичные замечания относятся к сигнатурам $\sigma_{A^{(j)}}$ и $\sigma_{A^{(k)}}$.

Теорема 3.2. *Детерминанты матриц* 3.1 *одинаковы, т. е. имеют место тождества*

$$|A^{(i)}| = |A^{(j)}| = |A^{(k)}|. \tag{3.2}$$

[1]) См. [19], стр. 118.

В самом деле, из тождества

$$\begin{vmatrix} A_{111} & A_{112} & A_{111} & A_{112} \\ A_{121} & A_{122} & A_{121} & A_{122} \\ A_{211} & A_{212} & A_{211} & A_{212} \\ A_{221} & A_{222} & A_{221} & A_{222} \end{vmatrix} = 0,$$

разлагая детерминант по первым двум столбцам согласно формуле Лапласа, находим:

$$A_{11}^{(i)}A_{22}^{(i)} - A_{11}^{(j)}A_{22}^{(j)} + (A_{12}^{(j)} + A_{12}^{(i)})(A_{12}^{(j)} - A_{12}^{(i)}) = 0.$$

Отсюда имеем

$$|A^{(i)}| = |A^{(j)}|.$$

Точно так же из тождества

$$\begin{vmatrix} A_{111} & A_{112} & A_{211} & A_{212} \\ A_{121} & A_{122} & A_{221} & A_{222} \\ A_{111} & A_{112} & A_{211} & A_{212} \\ A_{121} & A_{122} & A_{221} & A_{222} \end{vmatrix} = 0$$

находим:

$$|A^{(i)}| = |A^{(k)}|.$$

Между вторичными рангами $r_{A^{(i)}}$, $r_{A^{(j)}}$, $r_{A^{(k)}}$ матрицы $A$, так же как и между этими рангами, с одной стороны, и первичными рангами $r_{jk}^{(i)}$, $r_{ik}^{(j)}$, $r_{ij}^{(k)}$ или $r_i$, $r_j$, $r_k$ той же матрицы, — с другой, существует связь, выражаемая следующими теоремами.

Теорема 3.3. *Если один из рангов $r_{A^{(i)}}$, $r_{A^{(j)}}$, $r_{A^{(k)}}$ равен 2, то и остальные ранги, а также все ранги $r_{jk}^{(i)}$, $r_{ik}^{(j)}$, $r_{ij}^{(k)}$ и $r_i$, $r_j$, $r_k$ равны 2.*

Теорема 3.4. *Если один из рангов $r_{A^{(i)}}$, $r_{A^{(j)}}$, $r_{A^{(k)}}$ равен 1, то остальные ранги не больше, чем 1, и все они на единицу меньше соответствующих рангов $r_{jk}^{(i)}$, $r_{ik}^{(j)}$, $r_{ij}^{(k)}$.*

Теорема 3.5. *Если один из рангов $r_{A^{(i)}}$, $r_{A^{(j)}}$, $r_{A^{(k)}}$ равен нулю, то по крайней мере один из остальных рангов также равен нулю и все они, если матрица $A$ — не нулевая, на единицу меньше соответствующих рангов $r_{jk}^{(i)}$, $r_{ik}^{(j)}$, $r_{ij}^{(k)}$.*

Теоремы 3.3 и 3.4 вытекают из тождеств (3.2); кроме того, при доказательстве теоремы 3.3 надо принять во внимание следствие IV теоремы 2.2. Для доказательства теоремы 3.5 заметим, что в случае, когда один из рангов $r_{A^{(i)}}$, $r_{A^{(j)}}$, $r_{A^{(k)}}$, например $r_{A^{(i)}}$, равен нулю, то $r_{jk}^{(i)}$ не больше, чем 1. Если $r_{jk}^{(i)} = 0$, то матрица $A$ — нулевая и все ее ранги, в том числе и вторичные, — нули. Если же $r_{jk}^{(i)} = 1$, то согласно теореме 2.3 один из рангов $r_{ik}^{(j)}$, $r_{ij}^{(k)}$, например $r_{ik}^{(j)}$, также равен 1, а потому $r_{A^{(j)}} = 0$. Если при этом $r_{A^{(k)}} = 0$, то в случае, когда матрица $A$ — не нулевая, $r_{ij}^{(k)} = 1$; если же $r_{A^{(k)}} = 1$, то на основании теоремы 3.4 $r_{ij}^{(k)} = 2$.

Замечание 3.2. Если матрица $A$ — симметрическая относительно двух каких-нибудь индексов, например $j$, $k$, то матрицы $A^{(j)}$, $A^{(k)}$ одинаковы и, следовательно, $r_{A^{(j)}} = r_{A^{(k)}}$.

Замечание 3.3. Если матрица $A$ — симметрическая, то порождаемые ею кубические миноры $\boldsymbol{A}^{(i)}_{\alpha\beta}$, $\boldsymbol{A}^{(j)}_{\alpha\beta}$, $\boldsymbol{A}^{(k)}_{\alpha\beta}$ равны между собой, так как у симметрической кубической матрицы соответственные сечения ориентаций $(i)$, $(j)$, $(k)$ одинаковы. В дальнейшем эти миноры мы будем обозначать через $\boldsymbol{A}_{\alpha\beta}$, а совпадающие симметрические матрицы (3.1) — через $\boldsymbol{A}$. Для ранга и сигнатуры матрицы $\boldsymbol{A}$ введем обозначения $r_{\boldsymbol{A}}$ и $\sigma_{\boldsymbol{A}}$. Как легко убедиться, симметрические элементарные преобразования матрицы $A$ влекут за собой симметрические элементарные преобразования матрицы $\boldsymbol{A}$, при которых ее ранг $r_{\boldsymbol{A}}$, а в поле вещественных чисел и сигнатура $\sigma_{\boldsymbol{A}}$ остаются неизменными.

3. Образуем, далее, кубические матрицы 2-го порядка

$$\boldsymbol{B}^{(i)} = \| \boldsymbol{B}^{(i)}_{\alpha\beta\gamma} \|, \qquad \boldsymbol{B}^{(j)} = \| \boldsymbol{B}^{(j)}_{\alpha\beta\gamma} \|, \qquad \boldsymbol{B}^{(k)} = \| \boldsymbol{B}^{(k)}_{\alpha\beta\gamma} \| \quad (\alpha,\ \beta,\ \gamma = 1,\ 2),$$

элементы которых — квадратные детерминанты

$$\boldsymbol{B}^{(i)}_{\alpha\beta\gamma} = \begin{vmatrix} A_{1\beta\gamma} A_{2\beta\gamma} \\ \boldsymbol{A}^{(i)}_{1\alpha} \boldsymbol{A}^{(i)}_{2\alpha} \end{vmatrix}, \qquad \boldsymbol{B}^{(j)}_{\alpha\beta\gamma} = \begin{vmatrix} A_{\alpha1\gamma} A_{\alpha2\gamma} \\ \boldsymbol{A}^{(j)}_{1\beta} \boldsymbol{A}^{(j)}_{2\beta} \end{vmatrix}, \qquad \boldsymbol{B}^{(k)}_{\alpha\beta\gamma} = \begin{vmatrix} A_{\alpha\beta1} A_{\alpha\beta2} \\ \boldsymbol{A}^{(k)}_{1\gamma} \boldsymbol{A}^{(k)}_{2\gamma} \end{vmatrix} \qquad (\alpha, \beta, \gamma = 1, 2),$$

составленные из элементов матрицы $A$ и матриц (3.1).

Матрицы $\boldsymbol{B}^{(i)}$, $\boldsymbol{B}^{(j)}$, $\boldsymbol{B}^{(k)}$ одинаковы, так как

$$\boldsymbol{B}^{(i)}_{\alpha\beta\gamma} = \boldsymbol{B}^{(j)}_{\alpha\beta\gamma} = \boldsymbol{B}^{(k)}_{\alpha\beta\gamma} = \boldsymbol{B}_{\alpha\beta\gamma} \quad (\alpha,\ \beta,\ \gamma = 1,\ 2),$$

где

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{B}_{111} &= A^2_{111}A_{222} - A_{111}A_{112}A_{221} - A_{111}A_{121}A_{212} - A_{111}A_{122}A_{211} + 2A_{112}A_{121}A_{211},\\
\boldsymbol{B}_{112} &= A_{111}A_{112}A_{222} - A^2_{112}A_{221} + A_{112}A_{121}A_{212} + A_{112}A_{122}A_{211} - 2A_{111}A_{122}A_{212},\\
\boldsymbol{B}_{121} &= A_{111}A_{121}A_{222} - A^2_{121}A_{212} + A_{112}A_{121}A_{221} + A_{121}A_{122}A_{211} - 2A_{111}A_{122}A_{221},\\
\boldsymbol{B}_{211} &= A_{111}A_{211}A_{222} - A_{122}A^2_{211} + A_{121}A_{211}A_{212} + A_{112}A_{211}A_{221} - 2A_{111}A_{212}A_{221},\\
\boldsymbol{B}_{122} &= -A_{111}A_{122}A_{222} + A^2_{122}A_{211} - A_{121}A_{122}A_{212} - A_{112}A_{122}A_{221} + 2A_{112}A_{121}A_{222},\\
\boldsymbol{B}_{212} &= -A_{111}A_{212}A_{222} + A_{121}A^2_{212} - A_{122}A_{211}A_{212} - A_{112}A_{212}A_{221} + 2A_{112}A_{211}A_{222},\\
\boldsymbol{B}_{221} &= -A_{111}A_{221}A_{222} + A_{112}A^2_{221} - A_{122}A_{211}A_{221} - A_{121}A_{212}A_{221} + 2A_{121}A_{211}A_{222},\\
\boldsymbol{B}_{222} &= -A_{111}A^2_{222} + A_{112}A_{221}A_{222} + A_{121}A_{212}A_{222} + A_{122}A_{211}A_{222} - 2A_{122}A_{212}A_{221}.
\end{aligned}$$

Для этих матриц введем обозначение

$$\boldsymbol{B} = \| \boldsymbol{B}_{\alpha\beta\gamma} \| \qquad (\alpha,\ \beta,\ \gamma = 1,\ 2). \tag{3.3}$$

Теорема 3.6. *Двумерные и трехмерные ранги матрицы* $\boldsymbol{B}$ *являются арифметическими инвариантами относительно элементарных преобразований кубической матрицы 2-го порядка* $A$ *и, следовательно, будут ее вторичными рангами.*

Действительно, операция

(а) $\boxed{l\ (\delta)} \cdot t$ ($\delta$ — любой из индексов $i$, $j$, $k$)

над матрицей $A$ вызывает операции

$\boxed{l\,(\delta)} \cdot t^2$, $\boxed{m\,(\delta)} \cdot t$ ($l$, $m$ — любые из значений 1, 2, различные между собой) над матрицей $\boldsymbol{B}$.

Операция

(б) $\boxed{m(\delta)} + \boxed{l\,(\delta)} \cdot t$

над $A$ сопровождается такой же операцией над $\boldsymbol{B}$.

Таким образом, элементарные преобразования матрицы $A$ влекут за собой элементарные преобразования матрицы $\boldsymbol{B}$, при которых ее двумерные и трехмерные ранги на основании теорем 1.1 и 2.1 остаются неизменными.

Замечание 3.4. Все (двумерные и трехмерные) ранги матрицы $\boldsymbol{B}$ одинаковы. В дальнейшем будем их обозначать через $r_{\boldsymbol{B}}$.

Замечание 3.5. Если матрица $A$ — симметрическая относительно каких-нибудь двух или всех индексов, то и матрица $\boldsymbol{B}$ — соответственно симметрическая относительно тех же двух или всех индексов.

4. Пусть теперь $A = \| A_{ijk} \|$ $(i,\ j,\ k = 1,\ 2,\ 3)$. Обозначим кубические миноры 3-го порядка с сигнатурами $\overset{+}{(i)}$, $\overset{+}{(j)}$, $\overset{+}{(k)}$, порождаемые матрицей $A$, символами

$$\boldsymbol{A}^{(i)}_{\alpha\beta\gamma} = \left| \begin{array}{ccc|ccc|ccc} A_{\alpha 11} & A_{\alpha 12} & A_{\alpha 13} & A_{\beta 11} & A_{\beta 12} & A_{\beta 13} & A_{\gamma 11} & A_{\gamma 12} & A_{\gamma 13} \\ A_{\alpha 21} & A_{\alpha 22} & A_{\alpha 23} & A_{\beta 21} & A_{\beta 22} & A_{\beta 23} & A_{\gamma 21} & A_{\gamma 22} & A_{\gamma 23} \\ A_{\alpha 31} & A_{\alpha 32} & A_{\alpha 33} & A_{\beta 31} & A_{\beta 32} & A_{\beta 33} & A_{\gamma 31} & A_{\gamma 32} & A_{\gamma 33} \end{array} \right| \begin{array}{l} \to \overset{+}{(i)} \\ \longrightarrow (k) \\ \downarrow \\ (j) \end{array},$$

$$\boldsymbol{A}^{(j)}_{\alpha\beta\gamma} = \left| \begin{array}{ccc|ccc|ccc} A_{1\alpha 1} & A_{2\alpha 1} & A_{3\alpha 1} & A_{1\beta 1} & A_{2\beta 1} & A_{3\beta 1} & A_{1\gamma 1} & A_{2\gamma 1} & A_{3\gamma 1} \\ A_{1\alpha 2} & A_{2\alpha 2} & A_{3\alpha 2} & A_{1\beta 2} & A_{2\beta 2} & A_{3\beta 2} & A_{1\gamma 2} & A_{2\gamma 2} & A_{3\gamma 2} \\ A_{1\alpha 3} & A_{2\alpha 3} & A_{3\alpha 3} & A_{1\beta 3} & A_{2\beta 3} & A_{3\beta 3} & A_{1\gamma 3} & A_{2\gamma 3} & A_{3\gamma 3} \end{array} \right| \begin{array}{l} \to \overset{+}{(j)} \\ \longrightarrow (i) \\ \downarrow \\ (k) \end{array},$$

$$\boldsymbol{A}^{(k)}_{\alpha\beta\gamma} = \left| \begin{array}{ccc|ccc|ccc} A_{11\alpha} & A_{12\alpha} & A_{13\alpha} & A_{11\beta} & A_{12\beta} & A_{13\beta} & A_{11\gamma} & A_{12\gamma} & A_{13\gamma} \\ A_{21\alpha} & A_{22\alpha} & A_{23\alpha} & A_{21\beta} & A_{22\beta} & A_{23\beta} & A_{21\gamma} & A_{22\gamma} & A_{23\gamma} \\ A_{31\alpha} & A_{32\alpha} & A_{33\alpha} & A_{31\beta} & A_{32\beta} & A_{33\beta} & A_{31\gamma} & A_{32\gamma} & A_{33\gamma} \end{array} \right| \begin{array}{l} \to \overset{+}{(k)} \\ \longrightarrow (j) \\ \downarrow \\ (i) \end{array},$$

где индексы $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ принимают любые из значений 1, 2, 3.

Составим из этих миноров кубические матрицы 3-го порядка

$$\boldsymbol{A}^{(i)} = \| \boldsymbol{A}^{(i)}_{\alpha\beta\gamma} \|, \qquad \boldsymbol{A}^{(j)} = \| \boldsymbol{A}^{(j)}_{\alpha\beta\gamma} \|, \qquad \boldsymbol{A}^{(k)} = \| \boldsymbol{A}^{(k)}_{\alpha\beta\gamma} \| \qquad (\alpha,\ \beta,\ \gamma = 1,\ 2,\ 3),$$

которые, очевидно, будут симметрическими.

У каждой из них, согласно замечаниям 1.2 и 2.2, все двумерные ранги, так же как и трехмерные, одинаковы. Будем их обозначать соответственно через $r_{\boldsymbol{A}^{(i)}}$, $r_{\boldsymbol{A}^{(j)}}$, $r_{\boldsymbol{A}^{(k)}}$ и $\varrho_{\boldsymbol{A}^{(i)}}$, $\varrho_{\boldsymbol{A}^{(j)}}$, $\varrho_{\boldsymbol{A}^{(k)}}$.

Повторяя те же рассуждения, как и при доказательстве теоремы 3.1, мы убеждаемся в том, что элементарные преобразования матрицы $A$ всегда сопровождаются симметрическими элементарными преобразованиями матриц $\boldsymbol{A}^{(i)}$, $\boldsymbol{A}^{(j)}$, $\boldsymbol{A}^{(k)}$, не нарушающими их симметричности и не изменяющими, согласно теоремам 1.1 и 2.1, их двумерных и трехмерных рангов $r_{\boldsymbol{A}^{(i)}}$, $r_{\boldsymbol{A}^{(j)}}$, $r_{\boldsymbol{A}^{(k)}}$ и $\varrho_{\boldsymbol{A}^{(i)}}$, $\varrho_{\boldsymbol{A}^{(j)}}$, $\varrho_{\boldsymbol{A}^{(k)}}$.

Таким образом, имеет место

Теорема 3.7. *Ранги* $r_{\boldsymbol{A}^{(i)}}$, $r_{\boldsymbol{A}^{(j)}}$, $r_{\boldsymbol{A}^{(k)}}$ *и* $\varrho_{\boldsymbol{A}^{(i)}}$, $\varrho_{\boldsymbol{A}^{(j)}}$, $\varrho_{\boldsymbol{A}^{(k)}}$ *матриц* $\boldsymbol{A}^{(i)}$, $\boldsymbol{A}^{(j)}$, $\boldsymbol{A}^{(k)}$ *являются арифметическими инвариантами относительно элементарных преобразований кубической матрицы 3-го порядка* $A$ *и, следовательно, будут ее вторичными рангами по соответствующим индексам.*

5. Обратимся теперь к рассмотрению квадратных матриц, составленных из алгебраических дополнений элементов в кубических минорах 3-го порядка, порождаемых матрицей $A$.

Выделим в матрице $A$ два сечения ориентации $(i)$ с номерами $\alpha$ и $\beta$, где $\alpha$, $\beta$ — любые из значений 1, 2, 3, и составим из этих сечений кубический детерминант 2-го порядка с сигнатурой $(\overset{+}{i})$, вычеркивая $\mu$-е сечение ориентации $(j)$ и $\nu$-е сечение ориентации $(k)$, где $\mu$, $\nu$ — также любые из значений 1, 2, 3. Обозначим этот детерминант символом

$$\boldsymbol{A}^{(i)}_{(\alpha\beta)\mu\nu} = \begin{array}{c} \longrightarrow (\overset{+}{i}) \\ \left| \begin{array}{cc|cc} A_{\alpha\mu_1\nu_1} & A_{\alpha\mu_1\nu_2} & A_{\beta\mu_1\nu_1} & A_{\beta\mu_1\nu_2} \\ A_{\alpha\mu_2\nu_1} & A_{\alpha\mu_2\nu_2} & A_{\beta\mu_2\nu_1} & A_{\beta\mu_2\nu_2} \end{array} \right| \end{array} \begin{array}{l} \longrightarrow (k) = \\ \downarrow \\ (j) \end{array}$$

$$= A_{\alpha\mu_1\nu_1}A_{\beta\mu_2\nu_2} - A_{\alpha\mu_1\nu_2}A_{\beta\mu_2\nu_1} - A_{\alpha\mu_2\nu_1}A_{\beta\mu_1\nu_2} + A_{\alpha\mu_2\nu_2}A_{\beta\mu_1\nu_1}, \qquad (3.4\text{i})$$

где каждый из рядов индексов

$$\mu,\ \mu_1 < \mu_2,$$
$$\nu,\ \nu_1 < \nu_2$$

образует последовательность в некотором порядке чисел 1, 2, 3.

Точно так же, выделяя в матрице $A$ сечения ориентации $(j)$ с номерами $\alpha$, $\beta$ и вычеркивая в них $\mu$-е сечение ориентации $(k)$ и $\nu$-е сечение ориентации $(i)$, составим кубический детерминант 2-го порядка с сигнатурой $(\overset{+}{j})$

$$\boldsymbol{A}^{(j)}_{\nu(\alpha\beta)\mu} = \begin{array}{c} \longrightarrow (\overset{+}{j}) \\ \left| \begin{array}{cc|cc} A_{\nu_1\alpha\mu_1} & A_{\nu_2\alpha\mu_1} & A_{\nu_1\beta\mu_1} & A_{\nu_2\beta\mu_1} \\ A_{\nu_1\alpha\mu_2} & A_{\nu_2\alpha\mu_2} & A_{\nu_1\beta\mu_2} & A_{\nu_2\beta\mu_2} \end{array} \right| \end{array} \begin{array}{l} \longrightarrow (i) = \\ \downarrow \\ (k) \end{array}$$

$$= A_{\nu_1\alpha\mu_1}A_{\nu_2\beta\mu_2} - A_{\nu_2\alpha\mu_1}A_{\nu_1\beta\mu_2} - A_{\nu_1\alpha\mu_2}A_{\nu_2\beta\mu_1} + A_{\nu_2\alpha\mu_2}A_{\nu_1\beta\mu_1}, \qquad (3.4\text{j})$$

а выделяя в матрице $A$ сечения ориентации $(k)$ с номерами $\alpha$, $\beta$ и вычеркивая в них $\mu$-сечение ориентации $(i)$ и $\nu$-е сечение ориентации $(j)$, составим кубический детерминант 2-го порядка с сигнатурой $(\overset{+}{k})$

$$\boldsymbol{A}^{(k)}_{\mu\nu(\alpha\beta)} = \begin{array}{c} \longrightarrow (\overset{+}{k}) \\ \left| \begin{array}{cc|cc} A_{\mu_1\nu_1\alpha} & A_{\mu_1\nu_2\alpha} & A_{\mu_1\nu_1\beta} & A_{\mu_1\nu_2\beta} \\ A_{\mu_2\nu_1\alpha} & A_{\mu_2\nu_2\alpha} & A_{\mu_2\nu_1\beta} & A_{\mu_2\nu_2\beta} \end{array} \right| \end{array} \begin{array}{l} \longrightarrow (j) = \\ \downarrow \\ (i) \end{array}$$

$$= A_{\mu_1\nu_1\alpha}A_{\mu_2\nu_2\beta} - A_{\mu_1\nu_2\alpha}A_{\mu_2\nu_1\beta} - A_{\mu_2\nu_1\alpha}A_{\mu_1\nu_2\beta} + A_{\mu_2\nu_2\alpha}A_{\mu_1\nu_1\beta}. \qquad (3.4\text{k})$$

Таким образом мы получим все кубические миноры 2-го порядка с сигнатурами $(\overset{+}{i})$, $(\overset{+}{j})$, $(\overset{+}{k})$, порождаемые матрицей $A$. Тогда алгебраические дополнения элементов в кубических минорах 3-го порядка, порождаемых матрицей $A$, можно представить в виде

$$C^{(i)}_{(\alpha\beta)\mu\nu} = (-1)^{\mu+\nu}\boldsymbol{A}^{(i)}_{(\alpha\beta)\mu\nu}, \qquad (3.5\text{i})$$

$$C^{(j)}_{\nu(\alpha\beta)\mu} = (-1)^{\mu+\nu}\boldsymbol{A}^{(j)}_{\nu(\alpha\beta)\mu}, \qquad (3.5\text{j})$$

$$C^{(k)}_{\mu\nu(\alpha\beta)} = (-1)^{\mu+\nu}\boldsymbol{A}^{(k)}_{\mu\nu(\alpha\beta)}, \qquad (3.5\text{k})$$

где индексы $\alpha$, $\beta$, $\mu$, $\nu$ могут принимать любые из значений 1, 2, 3.

Составим из выражений (3.5i), (3.5j), (3.5k) квадратные матрицы 9-го порядка $C^{(i)}$, $C^{(j)}$, $C^{(k)}$, которые напишем в виде клеточных матриц

$$C^{(i)}=\|C^{(i)}_{\alpha\beta}\|,\quad C^{(j)}=\|C^{(j)}_{\alpha\beta}\|,\quad C^{(k)}=\|C^{(k)}_{\alpha\beta}\| \qquad (\alpha, \beta=1, 2, 3), \tag{3.6}$$

где клетки $C^{(i)}_{\alpha\beta}$, $C^{(j)}_{\alpha\beta}$, $C^{(k)}_{\alpha\beta}$ являются также квадратными матрицами

$$C^{(i)}_{\alpha\beta}=\|C^{(i)}_{(\alpha\beta)\mu\nu}\|,\quad C^{(j)}_{\alpha\beta}=\|C^{(j)}_{\nu(\alpha\beta)\mu}\|,\quad C^{(k)}_{\alpha\beta}=\|C^{(k)}_{\mu\nu(\alpha\beta)}\| \qquad (\mu, \nu=1, 2, 3). \tag{3.7}$$

Клеточные матрицы (3.6) — симметрические, так как детерминанты (3.4i), (3.4j), (3.4k), а следовательно, и выражения (3.5i), (3.5j), (3.5k) не меняются от перестановки индексов $\alpha$, $\beta$.

Матрицы $C^{(i)}$, $C^{(j)}$, $C^{(k)}$ будем называть *присоединенными соответственно по индексам* $i$, $j$, $k$ *для матрицы* $A$.

Теорема 3.8. *Ранги* $r_{C^{(i)}}$, $r_{C^{(j)}}$, $r_{C^{(k)}}$ *матриц* $C^{(i)}$, $C^{(j)}$, $C^{(k)}$ *являются арифметическими инвариантами относительно элементарных преобразований кубической матрицы 3-го порядка* $A$ *и, следовательно, будут ее вторичными рангами по соответствующим индексам.*

Действительно, операция

(а) $$\boxed{l(\delta)}\cdot t$$

над матрицей $A$ при $\delta=i$ сопровождается умножением на $t$ $l$-й строки и $l$-го столбца в матрице $\|C^{(i)}_{\alpha\beta}\|$ $(\alpha, \beta=1, 2, 3)$, а при $\delta=j$ или $\delta=k$ вызывает умножение на $t$ соответственно $m$-й и $n$-й строк или $m$-го и $n$-го столбцов в каждой клетке $C^{(i)}_{\alpha\beta}$ этой матрицы ($l$, $m$, $n$ образуют последовательность в некотором порядке чисел 1, 2, 3).

Операция

(б) $$\boxed{m(\delta)}+\boxed{l(\delta)}\cdot t$$

над $A$ при $\delta=i$ вызывает прибавление к $m$-й строке умноженной на $t$ $l$-й строки и к $m$-му столбцу — умноженного на $t$ $l$-го столбца в матрице $\|C^{(i)}_{\alpha\beta}\|$ $(\alpha, \beta=1, 2, 3)$, а при $\delta=j$ или $\delta=k$ сопровождается прибавлением соответственно к $l$-й строке умноженной на $-t$ $m$-й строки или к $l$-му столбцу умноженного на $-t$ $m$-го столбца в каждой клетке $C^{(i)}_{\alpha\beta}$ этой матрицы.

Таким образом, операции (а) и (б) над матрицей $A$ вызывают в матрице 9-го порядка $C^{(i)}$ умножение некоторых строк и столбцов на $t$ и прибавление к некоторым строкам (столбцам) умноженных на $\pm t$ других строк (столбцов), т. е. элементарные преобразования матрицы $A$ влекут за собой элементарные преобразования матрицы $C^{(i)}$, не изменяющие ее ранга $r_{C^{(i)}}$.

Аналогично доказывается неизменяемость рангов $r_{C^{(j)}}$ и $r_{C^{(k)}}$ при элементарных преобразованиях матрицы $A$.

6. Отметим, наконец, случай, когда кубическая матрица 3-го порядка $A$ — симметрическая.

Тогда порождаемые ею кубические миноры 3-го порядка $A^{(i)}_{\alpha\beta\gamma}$, $A^{(j)}_{\alpha\beta\gamma}$, $A^{(k)}_{\alpha\beta\gamma}$ равны между собой. Будем их обозначать сокращенно через $A_{\alpha\beta\gamma}$, а составленные из этих миноров совпадающие симметрические кубические матрицы $\boldsymbol{A}^{(i)}$, $\boldsymbol{A}^{(j)}$, $\boldsymbol{A}^{(k)}$ — через $\boldsymbol{A}$. Двумерный и трехмерный ранги матрицы $\boldsymbol{A}$ будем обозначать соответственно через $r_{\boldsymbol{A}}$ и $\varrho_{\boldsymbol{A}}$. Как нетрудно убедиться, симметрические элементарные преобразования матрицы $A$ влекут за собой такого же рода преобразования матрицы $\boldsymbol{A}$, при которых ее ранги $r_{\boldsymbol{A}}$ и $\varrho_{\boldsymbol{A}}$ остаются неизменными.

Кубические миноры 2-го порядка (3.4i), (3.4j), (3.4k), порождаемые симметрической матрицей $A$, а следовательно, и выражения (3.5i), (3.5j), (3.5k), также равны между собой и не меняются от перестановки не только индексов $\alpha$, $\beta$, но и индексов $\mu$, $\nu$. Вводя для них сокращенные обозначения

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{\alpha\beta}^{(\mu\nu)} &= \mathbf{A}_{(\alpha\beta)\mu\nu} = \mathbf{A}_{\nu(\alpha\beta)\mu} = \mathbf{A}_{\mu\nu(\alpha\beta)}, \\ C_{\alpha\beta}^{(\mu\nu)} &= C_{(\alpha\beta)\mu\nu} = C_{\nu(\alpha\beta)\mu} = C_{\mu\nu(\alpha\beta)} \end{aligned} \qquad (\alpha, \beta, \mu, \nu = 1, 2, 3)$$

напишем для симметрической матрицы $A$ *присоединенную* симметрическую квадратную матрицу 9-го порядка $C$ в виде симметрической клеточной матрицы

$$C = \| C_{\alpha\beta} \| \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, 3), \tag{3.8}$$

где клетки $C_{\alpha\beta}$ представляются также симметрическими матрицами

$$C_{\alpha\beta} = \| C_{\alpha\beta}^{(\mu\nu)} \| \qquad (\mu, \nu = 1, 2, 3), \tag{3.9}$$

причем

$$C_{\alpha\beta}^{(\mu\nu)} = (-1)^{\mu+\nu} (A_{\alpha\mu_1\nu_1} A_{\beta\mu_2\nu_2} - A_{\alpha\mu_1\nu_2} A_{\beta\mu_2\nu_1} - A_{\alpha\mu_2\nu_1} A_{\beta\mu_1\nu_2} + A_{\alpha\mu_2\nu_2} A_{\beta\mu_1\nu_1})$$
$$(\alpha, \beta, \mu, \nu = 1, 2, 3). \tag{3.10}$$

Ранг матрицы $C$ будем обозначать через $r_C$.

Выделим теперь в симметрической матрице $A$ сечение ориентации $(i)$ с номером $\alpha$, а в матрице $\mathbf{A}$ — сечение той же ориентации с номером $\beta$, причем $\alpha$ и $\beta$ могут иметь любые из значений 1, 2, 3, и составим из этих сечений кубический детерминант 2-го порядка с сигнатурой $\overset{+}{(i)}$, вычеркивая $\mu$-е сечение ориентации $(j)$ и $\nu$-е сечение ориентации $(k)$, где $\mu$ и $\nu$ также могут принимать любые из значений 1, 2, 3. Умножив составленный таким образом детерминант на $(-1)^{\mu+\nu}$, обозначим полученное выражение символом

$$K_{\alpha\beta}^{(\mu\nu)} = (-1)^{\mu+\nu} \left| \begin{array}{cc|cc} A_{\alpha\mu_1\nu_1} & A_{\alpha\mu_1\nu_2} & \mathbf{A}_{\beta\mu_1\nu_1} & \mathbf{A}_{\beta\mu_1\nu_2} \\ A_{\alpha\mu_2\nu_1} & A_{\alpha\mu_2\nu_2} & \mathbf{A}_{\beta\mu_2\nu_1} & \mathbf{A}_{\beta\mu_2\nu_2} \end{array} \right| \begin{array}{l} \to \overset{+}{(i)} \\ \to (k) \\ \downarrow (j) \end{array},$$

где каждый из рядов индексов

$$\begin{aligned} &\mu, \quad \mu_1 < \mu_2, \\ &\nu, \quad \nu_1 < \nu_2, \end{aligned}$$

образует последовательность в некотором порядке чисел 1, 2, 3.

Следовательно,

$$K_{\alpha\beta}^{(\mu\nu)} = (-1)^{\mu+\nu} (A_{\alpha\mu_1\nu_1} \mathbf{A}_{\beta\mu_2\nu_2} - A_{\alpha\mu_1\nu_2} \mathbf{A}_{\beta\mu_2\nu_1} - A_{\alpha\mu_2\nu_1} \mathbf{A}_{\beta\mu_1\nu_2} + A_{\alpha\mu_2\nu_2} \mathbf{A}_{\beta\mu_1\nu_1}) \tag{3.11}$$
$$(\alpha, \beta, \mu, \nu = 1, 2, 3).$$

К тому же результату придем, производя в матрицах $A$ и $\mathbf{A}$ аналогичные операции над сечениями ориентации $(j)$ или $(k)$.

Выражения (3.11), очевидно, не меняются от перестановки индексов $\mu$, $\nu$. Непосредственным вычислением убеждаемся, что эти выражения не меняются и от перестановки индексов $\alpha$, $\beta$ [1]).

[1]) Значения выражений $K_{\alpha\beta}^{(\mu\nu)}$, отличающихся порядком индексов $\alpha$, $\beta$, даны в § 5 статьи [28] автора.

Составляя из них симметрическую квадратную матрицу 9-го порядка $K$, подобно тому как была составлена присоединенная матрица $C$, напишем ее в виде симметрической клеточной матрицы

$$K = \| K_{\alpha\beta} \| \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, 3), \tag{3.12}$$

где клетки $K_{\alpha\beta}$ представляются также симметрическими матрицами

$$K_{\alpha\beta} = \| K_{\alpha\beta}^{(\mu\nu)} \| \qquad (\mu, \nu = 1, 2, 3). \tag{3.13}$$

Матрицу $K$ назовем *смешанно-присоединенной* для симметрической матрицы $A$. Ее ранг будем обозначать через $r_K$.

Теорема 3.9. *Ранги $r_A$, $\varrho_A$, $r_C$, $r_K$, так же как и двумерный ранг $r$ и трехмерный ранг $\varrho$ симметрической кубической матрицы 3-го порядка $A$ (ее первичные ранги), являются арифметическими инвариантами относительно симметрических элементарных преобразований матрицы $A$ и будут, следовательно, ее вторичными рангами. В поле вещественных чисел арифметическими инвариантами относительно вещественных симметрических элементарных преобразований матрицы $A$, кроме упомянутых выше рангов, будут также сигнатуры $\sigma_C$ и $\sigma_K$, присоединенной и смешанно-присоединенной для $A$ матриц $C$ и $K$* [1].

Справедливость теоремы для рангов $r$, $\varrho$, $r_A$, $\varrho_A$ вытекает непосредственно из теорем 1.1, 2.1, 3.7. Чтобы убедиться в справедливости ее для рангов и сигнатур матриц $C$, $K$, заметим, что операция

(а) $$\left|\overline{l}\right| \cdot t$$

над матрицей $A$ сопровождается умножением на $t$ $l$-й строки и $l$-го столбца в матрицах (3.8), (3.12), представляющих клеточные матрицы $C$, $K$, причем в клетках этих матриц совершаются еще следующие преобразования: в каждой клетке (3.9) матрицы (3.8) $m$-я и $n$-я строки, а также $m$-й и $n$-й столбцы умножаются на $t$, а в каждой клетке (3.13) матрицы (3.12) $l$-я строка и $l$-й столбец умножаются на $t$, тогда как $m$-я и $n$-я строки, а также $m$-й и $n$-й столбцы умножаются на $t^2$ ($l$, $m$, $n$ образуют последовательность в некотором порядке чисел 1, 2, 3).

Далее, операция

(б) $$\left|\overline{m}\right| + \left|\overline{l}\right| \cdot t$$

над $A$ вызывает в матрицах (3.8), (3.12) прибавление к $m$-й строке умноженной на $t$ $l$-й строки и к $m$-му столбцу умноженного на $t$ $l$-го столбца, а в каждой клетке этих матриц — прибавление к $l$-й строке умноженной на $-t$ $m$-й строки и к $l$-му столбцу умноженного на $-t$ $m$-го столбца.

Нетрудно убедиться, однако, что все эти преобразования в матрицах (3.8), (3.12) и их клетках равносильны симметрическим элементарным преобразованиям симметрических квадратных матриц 9-го порядка $C$, $K$, при которых их ранги $r_C$, $r_K$ не меняются.

В поле вещественных чисел, когда симметрические элементарные преобразования матрицы $A$ вещественны, вызванные ими симметрические элементарные преобразования матриц $C$, $K$ также вещественны, а потому их сигнатуры $\sigma_C$, $\sigma_K$ при этих преобразованиях остаются неизменными.

Замечание 3.6. Вторичные ранги и вообще ранги высших степеней пространственной матрицы $A$ называются также *рангами соответственных степеней ассоциированной с ней алгебраической формы $F$*.

[1]) См. [28], стр. 290.

### Упражнения

1. Если вторичный ранг $r_A$ симметрической кубической матрицы 2-го порядка $A$ равен 2, то и первичный ранг $r$ матрицы $A$ (замечание 2.3) равен 2. Если же $r_A < 2$, то $r$ на единицу больше, чем $r_A$, если только матрица $A$ не нулевая. Доказать.

2. Дана кубическая матрица 4-го порядка $A = \| A_{ijk} \|$ $(i, j, k = 1, 2, 3, 4)$. Пусть

$$A^{(i)}_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4}, \qquad A^{(j)}_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4}, \qquad A^{(k)}_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4} \qquad (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 = 1, 2, 3, 4)$$

— кубические миноры 4-го порядка с сигнатурами $\overset{+}{(i)}$, $\overset{+}{(j)}$, $\overset{+}{(k)}$, порождаемые матрицей $A$.

Доказать, что все ранги (двумерные, трехмерные и четырехмерные) составленных из этих миноров симметрических четырехмерных матриц 4-го порядка

$$A^{(i)} = \left\| A^{(i)}_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4} \right\|, \qquad A^{(j)} = \left\| A^{(j)}_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4} \right\|, \qquad A^{(k)} = \left\| A^{(k)}_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4} \right\|$$

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 = 1, 2, 3, 4)$$

являются арифметическими инвариантами относительно элементарных преобразований матрицы $A$.

3. Кубические миноры 3-го порядка с сигнатурой $\overset{+}{(i)}$, порождаемые матрицей $A = \| A_{ijk} \|$ $(i, j, k = 1, 2, 3, 4)$, могут быть представлены в виде

$$A^{(i)}_{\underbrace{\alpha\beta\gamma\mu\nu}} =$$

$$= \left| \begin{array}{ccc|ccc|ccc} A_{\alpha\mu_1\nu_1} & A_{\alpha\mu_1\nu_2} & A_{\alpha\mu_1\nu_3} & A_{\beta\mu_1\nu_1} & A_{\beta\mu_1\nu_2} & A_{\beta\mu_1\gamma_3} & A_{\gamma\mu_1\nu_1} & A_{\gamma\mu_1\nu_2} & A_{\gamma\mu_1\nu_3} \\ A_{\alpha\mu_2\nu_1} & A_{\alpha\mu_2\nu_2} & A_{\alpha\mu_2\nu_3} & A_{\beta\mu_2\nu_1} & A_{\beta\mu_2\nu_2} & A_{\beta\mu_2\nu_3} & A_{\gamma\mu_2\nu_1} & A_{\gamma\mu_2\nu_2} & A_{\gamma\mu_2\nu_3} \\ A_{\alpha\mu_3\nu_1} & A_{\alpha\mu_3\nu_2} & A_{\alpha\mu_3\nu_3} & A_{\beta\mu_3\nu_1} & A_{\beta\mu_3\nu_2} & A_{\beta\mu_3\nu_3} & A_{\gamma\mu_3\nu_1} & A_{\gamma\mu_3\nu_2} & A_{\gamma\mu_3\nu_3} \end{array} \right| \begin{array}{l} \to \overset{+}{(i)} \\ \to (k), \\ \downarrow (j) \end{array}$$

где индексы $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ принимают любые из значений 1, 2, 3, 4 и каждый из рядов индексов

$$\mu, \quad \mu_1 < \mu_2 < \mu_3,$$
$$\nu, \quad \nu_1 < \nu_2 < \nu_3,$$

образует последовательность в некотором порядке чисел 1, 2, 3, 4. Алгебраическими дополнениями элементов кубических миноров 4-го порядка с сигнатурой $\overset{+}{(i)}$, порождаемых матрицей $A$, будут выражения

$$D^{(i)}_{\underbrace{\alpha\beta\gamma\mu\nu}} = (-1)^{\mu+\nu} A^{(i)}_{\underbrace{\alpha\beta\gamma\mu\nu}},$$

из которых можно составить расширенную кубическую матрицу порядка (64, 4, 4) $D^{(i)} = \left\| D^{(i)}_{\underbrace{\alpha\beta\gamma\mu\nu}} \right\|$. Подобным образом составляются кубические матрицы того же порядка $D^{(j)} = \left\| D^{(j)}_{\underbrace{\nu\alpha\beta\gamma\mu}} \right\|$ и $D^{(k)} = \left\| D^{(k)}_{\mu\,\underbrace{\nu\alpha\beta\gamma}} \right\|$ из алгебраических дополнений элементов кубических миноров 4-го порядка с сигнатурами $\overset{+}{(j)}$ и $\overset{+}{(k)}$, порождаемых матрицей $A$.

Доказать, что все ранги (двумерные и трехмерные) матриц $D^{(i)}$, $D^{(j)}$, $D^{(k)}$ являются арифметическими инвариантами относительно элементарных преобразований матрицы $A$.

4. Алгебраические дополнения кубических миноров 2-го порядка с сигнатурами $\overset{+}{(i)}$, $\overset{+}{(j)}$, $\overset{+}{(k)}$, порождаемых матрицей $A = \| A_{ijk} \|$ $(i, j, k = 1, 2, 3, 4)$, представляются выражениями (3.5i), (3.5j), (3.5k), где индексы $\alpha$, $\beta$ могут принимать любые из значений 1, 2, 3, 4, а $\mu$, так же как и $\nu$, есть любое сочетание из индексов 1, 2, 3, 4 по два, так что каждый из рядов индексов

$$\mu, \quad \mu_1 < \mu_2,$$
$$\nu, \quad \nu_1 < \nu_2,$$

образует последовательность в некотором порядке чисел 1, 2, 3, 4. Составленные из этих выражений квадратные матрицы 24-го порядка $C^{(i)}$, $C^{(j)}$, $C^{(k)}$ можно написать в виде клеточных матриц 4-го порядка (3.6), клетки которых — квадратные матрицы 6-го порядка (3.7), где индексы $\alpha$, $\beta$, $\mu$, $\nu$ имеют указанные выше значения.

Доказать, что ранги матриц $C^{(i)}$, $C^{(j)}$, $C^{(k)}$ будут арифметическими инвариантами относительно элементарных преобразований матрицы $A$.

5. В упражнениях 2, 3, 4 рассмотреть случай, когда матрица $A$ — симметрическая.

**6.** Показать, что в случае, когда $A=\|A_{ijk}\|$ $(i, j, k=1, 2, 3, 4)$ есть симметрическая матрица с вещественными элементами, сигнатура $\sigma_C$ совпадающих в этом случае симметрических квадратных матриц $C^{(i)}$, $C^{(j)}$, $C^{(k)}$ (см. упражнение 4) будет арифметическим инвариантом относительно вещественных симметрических элементарных преобразований матрицы $A$.

**7.** Дана кубическая матрица $n$-го порядка $A=\|A_{ijk}\|$ $(i, j, k=1, 2, \ldots, n)$. Пусть

$$A^{(i)}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}, \quad A^{(j)}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}, \quad A^{(k)}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n} \qquad (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n=1, 2, \ldots, n)$$

— кубические миноры $n$-го порядка с сигнатурами $(\overset{+}{i})$, $(\overset{+}{j})$, $(\overset{+}{k})$, порождаемые матрицей $A$.

Доказать, что все ранги (двумерные, трехмерные, ..., $n$-мерные) составленных из этих миноров симметрических $n$-мерных матриц $n$-го порядка

$$A^{(i)}=\| A^{(i)}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}\|, \qquad A^{(j)}=\| A^{(j)}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}\|, \qquad A^{(k)}=\| A^{(k)}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}\|$$
$$(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n=1, 2, \ldots, n)$$

являются арифметическими инвариантами относительно элементарных преобразований матрицы $A$. Отметить случай, когда матрица $A$ — симметрическая.

## § 4. Инварианты и коварианты алгебраических форм

1. Переходя к рассмотрению инвариантов и ковариантов[1]) форм от одного или нескольких рядов переменных над некоторым числовым полем $P$, начнем с простейшего случая, когда дана двойничная трилинейная форма $F=\sum\limits_{i,j,k=1}^{2} A_{ijk}x_iy_jz_k$ с соответствующей кубической матрицей 2-го порядка $A=\|A_{ijk}\|$ $(i, j, k=1, 2)$.

Нетрудно убедиться, что выражения

$$H_i=2\left|\frac{\partial^2 F}{\partial y_j\,\partial z_k}\right| \qquad (j, k=1, 2),$$
$$H_j=2\left|\frac{\partial^2 F}{\partial x_i\,\partial z_k}\right| \qquad (i, k=1, 2),$$
$$H_k=2\left|\frac{\partial^2 F}{\partial x_i\,\partial y_j}\right| \qquad (i, j=1, 2)$$

являются квадратичными формами, ассоциированными с матрицами (3.1), т. е.

$$H_i=\sum_{\alpha,\beta=1}^{2} A^{(i)}_{\alpha\beta}x_\alpha x_\beta, \qquad H_j=\sum_{\alpha,\beta=1}^{2} A^{(j)}_{\alpha\beta}y_\alpha y_\beta, \qquad H_k=\sum_{\alpha,\beta=1}^{2} A^{(k)}_{\alpha\beta}z_\alpha z_\beta. \tag{4.1}$$

Дискриминанты этих форм представляются равными между собой детерминантами (3.2), общее значение которых обозначим через

$$\Delta=|A^{(i)}_{\alpha\beta}|=|A^{(j)}_{\alpha\beta}|=|A^{(k)}_{\alpha\beta}| \qquad (\alpha, \beta=1, 2) \tag{4.2}$$

и будем называть *дискриминантом* формы $F$.

Теорема 4.1. *Дискриминант $\Delta$ двойничной трилинейной формы $F$ есть относительный инвариант веса 2 для каждого ряда переменных этой формы.*

[1]) Подразумеваются целые рациональные инварианты и коварианты относительно невырожденных линейных преобразований алгебраических форм или равносильных им элементарных преобразований соответствующих матриц.

Действительно, подвергая форму $F$ невырожденному линейному преобразованию

$$x_\lambda = \sum_{i=1}^{2} a_{\lambda i} X_i \qquad (\lambda = 1, 2) \tag{4.3'}$$

с матрицей $a = \|a_{\lambda i}\|$ $(\lambda, i = 1, 2)$, детерминант которой $|a| \neq 0$, мы тем самым соответствующую этой форме кубическую матрицу $A$ умножаем по индексу $i$ на квадратную матрицу $a$. Но умножение на $a$ приводится к последовательным умножениям по индексу $i$ на элементарные квадратные матрицы $a^{(1)}, a^{(2)}, \ldots, a^{(q)}$, произведению которых равна матрица $a$. Умножению же по индексу $i$ на элементарную матрицу $a^{(\nu)}$, где $\nu$ — любое из значений $1, 2, \ldots, q$, равносильна операция

(а) $$\boxed{l(i)} \cdot t,$$

если $a^{(\nu)}$ соответствует линейному преобразованию

$$\left.\begin{aligned} x_l &= tX_l, \\ x_m &= X_m, \end{aligned}\right\}$$

детерминант которого равен $t$, или операция

(б) $$\boxed{m(i)} + \boxed{l(i)} \cdot t,$$

если $a^{(\nu)}$ соответствует линейному преобразованию

$$\left.\begin{aligned} x_l &= X_l + tX_m, \\ x_m &= X_m, \end{aligned}\right\}$$

детерминант которого равен 1 (индексы $l$, $m$ имеют любые из значений 1, 2, различные между собой).

Следовательно, детерминант матрицы $a$, определяемый формулой

$$|a| = \prod_{\nu=1}^{q} |a^{(\nu)}|,$$

равен произведению чисел $t$, фигурирующих в элементарных преобразованиях типа (а), которым подвергается матрица $A$ при невырожденном линейном преобразовании (4.3′) формы $F$.

Повторяя те же рассуждения, как и при доказательстве теоремы 3.1, заключаем, что операция (а) над $A$ вызывает умножение дискриминанта $\Delta$ на $t^2$, тогда как после операции (б) $\Delta$ остается неизменным.

Таким образом, в результате преобразования (4.3′) формы $F$, сопровождающегося элементарными преобразованиями соответствующей матрицы $A$, дискриминант $\Delta$ лишь умножается на квадрат детерминанта $|a|$ этого преобразования.

Подвергая, далее, полученную трилинейную форму последовательно линейным преобразованиям

$$y_\mu = \sum_{j=1}^{2} b_{\mu j} Y_j \qquad (\mu = 1, 2), \tag{4.3''}$$

$$z_\nu = \sum_{k=1}^{2} c_{\nu k} Z_k \qquad (\nu = 1, 2) \tag{4.3'''}$$

с детерминантами $|b| \neq 0$, $|c| \neq 0$, мы придем к двоичной трилинейной форме $F' = \sum_{i,j,k=1}^{2} A'_{ijk} X_i Y_j Z_k$, дискриминант которой $\Delta'$, как легко убедиться рассуждениями, аналогичными предыдущим, имеет вид

$$\Delta' = |a^2|\cdot|b|^2\cdot|c|^2\Delta. \tag{4.4}$$

А это и требовалось доказать.

Замечание 4.1. Из формулы (4.4) следует, что в поле вещественных чисел знак дискриминанта $\Delta$ формы $F$ не меняется при вещественных невырожденных линейных преобразованиях ее.

Теорема 4.2. *Квадратичные формы* (4.1) *являются относительными ковариантами двойничной трилинейной формы $F$, веса которых для трех рядов переменных формы $F$ равны соответственно* 0, 1, 1; 1, 0, 1; 1, 1, 0.

В самом деле, повторяя предыдущие рассуждения, видим, что в результате операции (а) над матрицей $A$ формы $F$ форма $H_i$ остается неизменной, тогда как формы $H_j$ и $H_k$ умножаются на $t$, т. е. на детерминант соответствующего линейного преобразования; операция (б) над $A$ не изменяет $H_i$, $H_j$, $H_k$. Следовательно, квадратичные формы $H'_i$, $H'_j$, $H'_k$, составленные для формы $F'$, в которую переводится $F$ невырожденными линейными преобразованиями (4.3′), (4.3″), (4.3‴), будут иметь вид

$$H'_i = |b|\cdot|c|H_i, \qquad H'_j = |a|\cdot|c|H_j, \qquad H'_k = |a|\cdot|b|H_k. \tag{4.5}$$

Формулы (4.5) и подтверждают теорему.

Нетрудно также убедиться, что выражения

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial x_1} & \frac{\partial F}{\partial x_2} \\ \frac{\partial H_i}{\partial x_1} & \frac{\partial H_i}{\partial x_2} \end{vmatrix}, \qquad \frac{1}{2}\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial y_1} & \frac{\partial F}{\partial y_2} \\ \frac{\partial H_j}{\partial y_1} & \frac{\partial H_j}{\partial y_2} \end{vmatrix}, \qquad \frac{1}{2}\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial z_1} & \frac{\partial F}{\partial z_2} \\ \frac{\partial H_k}{\partial z_1} & \frac{\partial H_k}{\partial z_2} \end{vmatrix}$$

равны между собой и представляются двойничной трилинейной формой

$$Q = \sum_{i,j,k=1}^{2} B_{ijk}x_iy_jz_k, \tag{4.6}$$

ассоциированной с матрицей (3.3).

Теорема 4.3. *Форма $Q$ есть относительный ковариант двойничной трилинейной формы $F$ веса 1 для каждого ряда переменных этой формы.*

Действительно, операция (а) над матрицей $A$ формы $F$ вызывает в матрице $B$ формы $Q$ операции

$$\boxed{l(i)}\cdot t^2, \qquad \boxed{m(i)}\cdot t,$$

в результате которых $Q$ умножается на $t$, т. е. на детерминант линейного преобразования, соответствующего операции (*а*).

Операция (б) над $A$, сопровождающаяся такой же операцией над $B$, не вызывает изменений формы $Q$.

Далее, таким же образом, как и при доказательстве предыдущих теорем, убеждаемся, что трилинейная форма $Q'$, составленная для формы $F'$, в которую переводится $F$ невырожденными линейными преобразованиями (4.3′), (4.3″), (4.3‴) с детерминантами $|a|$, $|b|$, $|c|$, будет иметь вид

$$Q' = |a|\cdot|b|\cdot|c|Q. \tag{4.7}$$

А это и требовалось доказать.

Замечание 4.2. Двойничная трилинейная форма $F$, ее дискриминант $\Delta$ и коварианты $H_i$, $H_j$, $H_k$, $Q$ составляют, как показала Шварц [210], полную[1]) систему комитантов формы $F$, связанных соотношением (сизигией)

$$Q^2+\frac{1}{2}H_iH_jH_k+\Delta F^2=0. \tag{4.8}$$

2. Возьмем, далее, двойничную кубическую форму $f=\sum_{i,j,k=1}^{2}A_{ijk}x_ix_jx_k$ симметрической кубической матрицей 2-го порядка $A=\|A_{ijk}\|$ $(i, j, k=1, 2)$.

Квадратичная форма

$$H=\sum_{\alpha,\beta=1}^{2}\boldsymbol{A}_{\alpha\beta}x_\alpha x_\beta, \tag{4.1'}$$

ассоциированная с матрицей $\boldsymbol{A}=\|\boldsymbol{A}_{\alpha\beta}\|$ $(\alpha, \beta=1, 2)$, составленной из кубических миноров, порождаемых матрицей $A$ (замечание 3.3), равна удвоенному гессиану формы $f$, т. е.

$$H=\frac{1}{18}\left|\frac{\partial^2 f}{\partial x_\alpha\,\partial x_\beta}\right| \qquad (\alpha, \beta=1, 2).$$

Дискриминант $\Delta$ формы $H$, равный детерминанту

$$\begin{vmatrix}\boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12}\\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{22}\end{vmatrix},$$

называют *дискриминантом формы* $f$.

Теорема 4.4. *Дискриминант* $\Delta$ *двойничной кубической формы* $f$ *есть ее относительный инвариант веса* 6.

В самом деле, подвергая форму $f$ невырожденному линейному преобразованию

$$x_\lambda=\sum_{i=1}^{2}a_{\lambda i}X_i \qquad (\lambda=1, 2) \tag{4.9}$$

с матрицей $a=\|a_{\lambda i}\|$ $(\lambda, i=1, 2)$, мы получим двойничную кубическую форму $f'=\sum_{i,j,k=1}^{2}A'_{ijk}X_iX_jX_k$.

Дискриминант $\Delta$ кубической формы $f$ одинаков с дискриминантом полярной ей трилинейной формы $F=\sum_{i,j,k=1}^{2}A_{ijk}x_iy_jz_k$, а дискриминант $\Delta'$ преобразованной кубической формы $f'$ одинаков с дискриминантом полярной ей трилинейной формы $F'=\sum_{i,j,k=1}^{2}A'_{ijk}X_iY_jZ_k$, в которую переходит $F$ с помощью невырожденных линейных преобразований

$$\left.\begin{aligned} x_\lambda&=\sum_{i=1}^{2}a_{\lambda i}X_i \qquad (\lambda=1, 2),\\ y_\mu&=\sum_{j=1}^{2}a_{\mu j}Y_j \qquad (\mu=1, 2),\\ z_\nu&=\sum_{k=1}^{2}a_{\nu k}Z_k \qquad (\nu=1, 2).\end{aligned}\right\} \tag{4.9'}$$

[1]) То есть такую систему целых рациональных комитантов, с помощью которой каждый комитант формы может быть представлен целым рациональным выражением, тогда как ни один из комитантов системы не является целой рациональной функцией остальных (см. [63], стр. 109).

Матрицы этих преобразований одинаковы. Обозначая их детерминант через $|a|$, имеем на основании формулы (4.4)

$$\Delta' = |a|^6 \Delta. \tag{4.4'}$$

Следовательно, **дискриминант формы $f$ есть ее относительный инвариант веса 6**.

Замечание 4.3. Из формулы (4.4') следует, что в поле вещественных чисел знак дискриминанта $\Delta$ формы $f$ не меняется при вещественных невырожденных линейных преобразованиях ее.

Теорема 4.5. *Квадратичная форма $H$ есть относительный ковариант двойничной кубической формы $f$, вес которого равен* 2.

Действительно, квадратичные формы $H_i$, $H_j$, $H_k$, составленные для трилинейной формы $F$, полярной кубической форме $f$, и квадратичные формы $H'_i$, $H'_j$, $H'_k$, составленные для трилинейной формы $F'$, в которую переводится $F$ невырожденными линейными преобразованиями (4.9'), связаны, согласно формулам (4.5), соотношениями

$$H'_i = |a|^2 H_i, \quad H'_j = |a|^2 H_j, \quad H'_k = |a|^2 H_k.$$

Но $H_i$, $H_j$, $H_k$ одинаковы с квадратичной формой $H$, составленной для формы $f$, а $H'_i$, $H'_j$, $H'_k$ одинаковы с квадратичной формой $H'$, составленной для формы $f'$, в которую переводится $f$ невырожденным линейным преобразованием (4.9). Следовательно,

$$H' = |a|^2 H. \tag{4.10}$$

А это и требовалось доказать.

Якобиан двойничной кубической формы $f$ и квадратичной формы $H$, равный

$$\frac{1}{6}\begin{vmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial H}{\partial x_1} & \dfrac{\partial H}{\partial x_2} \end{vmatrix},$$

является, как нетрудно убедиться, двойничной кубической формой $Q = \sum\limits_{\alpha, \beta, \gamma=1}^{2} B_{\alpha\beta\gamma} x_\alpha x_\beta x_\gamma$, ассоциированной с симметрической кубической матрицей 2-го порядка $B = \|B_{\alpha\beta\gamma}\|$ $(\alpha, \beta, \gamma = 1, 2)$, которая представляет частный вид матрицы (3.3), составленной для симметрической матрицы $A$ (замечание 3.6).

Элементы матрицы $B$ — квадратные детерминанты 2-го порядка

$$B_{\alpha\beta\gamma} = \begin{vmatrix} A_{1\beta\gamma} & A_{2\beta\gamma} \\ A_{1\alpha} & A_{2\alpha} \end{vmatrix} \qquad (\alpha, \beta, \gamma = 1, 2),$$

т. е.

$$B_{111} = A_{111}^2 A_{222} - 3A_{111}A_{112}A_{122} + 2A_{112}^3,$$
$$B_{112} = B_{121} = B_{211} = A_{111}A_{112}A_{222} + A_{112}^2 A_{122} - 2A_{111}A_{122}^2,$$
$$B_{122} = B_{212} = B_{221} = -A_{111}A_{122}A_{222} - A_{112}A_{122}^2 + 2A_{112}^2 A_{222},$$
$$B_{222} = -A_{111}A_{222}^2 + 3A_{112}A_{122}A_{222} - 2A_{122}^3.$$

Принимая во внимание, что трилинейные формы, полярные якобиану $Q$ форм $f$, $H$ и якобиану $Q'$ форм $f'$, $H'$, связаны соотношениями (4.7), где $|a| = |b| = |c|$, имеем

$$Q' = |a|^3 Q. \tag{4.7'}$$

Тем самым доказана

Теорема 4.6. *Якобиан $Q$ двойничной кубической формы $f$ и квадратичной формы $H$ есть относительный ковариант формы $f$, вес которого равен* 3.

Замечание 4.4. Двойничная кубическая форма $f$, ее дискриминант $\Delta$ и коварианты $H$, $Q$ составляют полную систему комитантов формы $f$, связанных соотношением

$$Q^2+\frac{1}{2}H^3+\Delta f^2=0, \tag{4.8'}$$

называемым *сизигией Кэли.*

3. Обратимся теперь к тройничной кубической форме $f=\sum\limits_{i,j,k=1}^{3}A_{ijk}x_ix_jx_k$ с симметрической кубической матрицей 3-го порядка $A=\|A_{ijk}\|$ $(i, j, k=1, 2, 3)$.

В присоединенной для нее симметрической квадратной матрице 9-го порядка $C$ переставим 2-ю и 4-ю, 3-ю и 7-ю, 6-ю и 8-ю строки, а также соответствующие этим строкам столбцы. Получим симметрическую матрицу 9-го порядка $C'$, которую напишем в виде симметрической клеточной матрицы

$$C'=\|C^{(\mu\nu)}\| \qquad (\mu,\ \nu=1,\ 2,\ 3), \tag{4.11}$$

где клетки $C^{(\mu\nu)}$ являются также симметрическими матрицами

$$C^{(\mu\nu)}=\|C^{(\mu\nu)}_{\alpha\beta}\| \qquad (\alpha,\ \beta=1,\ 2,\ 3). \tag{4.12}$$

Образуем произведения соответственных клеток матриц $C$ и $C'$, представленных в виде (3.8) и (4.11), и рассмотрим *следы*, т. е. суммы диагональных элементов матриц, выражающих эти произведения. Вводя для следа произведения клеток $C_{\alpha\beta}$, $C^{(\alpha\beta)}$ обозначение

$$\sigma_{\alpha\beta}=\textit{след}\ \|C_{\alpha\beta}C^{(\alpha\beta)}\|=\textit{след}\ \|C^{(\alpha\beta)}C_{\alpha\beta}\|,$$

находим, принимая во внимание равенства (3.9) и (4.12),

$$\sigma_{\alpha\beta}=\sum_{\mu,\nu=1}^{3}C^{(\mu\nu)}_{\alpha\beta}C^{(\alpha\beta)}_{\nu\mu}$$

или

$$\sigma_{\alpha\beta}=\sum_{\mu,\nu=1}^{3}C^{(\mu\nu)}_{\alpha\beta}C^{(\alpha\beta)}_{\mu\nu}, \tag{4.13}$$

где индексы $\alpha$, $\beta$ имеют любые из значений 1, 2, 3. При этом, очевидно, $\sigma_{\alpha\beta}=\sigma_{\beta\alpha}$.

Из формулы (4.13), пользуясь выражениями (3.10), находим

$$\sigma_{11}=2\sigma_{12}=S,$$

где

$$\begin{aligned}S=4\,[&A_{123}^4-2A_{123}^2(A_{112}A_{233}+A_{113}A_{223}+A_{122}A_{133})+\\&+3A_{123}(A_{112}A_{133}A_{223}+A_{113}A_{122}A_{233})-A_{123}A_{111}A_{222}A_{333}+\\&+A_{123}(A_{111}A_{223}A_{233}+A_{112}A_{122}A_{333}+A_{113}A_{133}A_{222})+\\&+(A_{111}A_{122}A_{223}A_{333}+A_{111}A_{133}A_{222}A_{233}+A_{112}A_{113}A_{222}A_{333})-\\&-(A_{112}A_{113}A_{223}A_{233}+A_{112}A_{122}A_{133}A_{233}+A_{113}A_{122}A_{133}A_{223})-\\&-(A_{111}A_{122}A_{233}^2+A_{111}A_{133}A_{223}^2+A_{112}^2A_{223}A_{333}+\\&+A_{112}A_{133}^2A_{222}+A_{113}^2A_{222}A_{233}+A_{113}A_{122}^2A_{333})+\\&+(A_{112}^2A_{233}^2+A_{113}^2A_{223}^2+A_{122}^2A_{133}^2)].\end{aligned} \tag{4.14}$$

Замена в $\sigma_{11}$ обоих индексов 1 индексами 2 или 3, так же как и замена в $\sigma_{12}$ одного из индексов 1,2 индексом 3, приводит, как нетрудно убедиться, к обмену этими индексами в символах $C_{\alpha\beta}^{(\mu\nu)}$, входящих в формулы для определения $\sigma_{11}$ и $\sigma_{12}$, что в свою очередь влечет обмен теми же индексами в выражениях (3.10), определяющих эти символы, а следовательно, и в выражении (4.14). Однако последнее при обмене любыми двумя индексами не меняется. Поэтому имеем также

$$\sigma_{22}=\sigma_{33}=2\sigma_{13}=2\sigma_{23}=S.$$

Таким образом,

$$S=\sigma_{\alpha\alpha}=2\sigma_{\alpha\beta}\,^{1)}, \tag{4.15}$$

где индексы $\alpha$, $\beta$ имеют любые из значений 1, 2, 3, не равные друг другу.

Заметим, что

$$\textit{след}\ \|C'C\|=\textit{след}\ \|CC'\|=\sum_{\alpha,\beta=1}^{3}\sigma_{\alpha\beta}=6S.$$

Найдем теперь следы матриц, выражающих произведения соответственных клеток матриц $K$ и $C'$, представленных в виде (3.12) и (4.11).

Полагая

$$\tau_{\alpha\beta}=\textit{след}\ \|K_{\sigma\beta}C^{(\alpha\beta)}\|=\textit{след}\ \|C^{(\alpha\beta)}K_{\alpha\beta}\|,$$

имеем на основании равенств (3.13) и (4.12)

$$\tau_{\alpha\beta}=\sum_{\mu,\nu=1}^{3}K_{\alpha\beta}^{(\mu\nu)}C_{\nu\mu}^{(\alpha\beta)}$$

или

$$\tau_{\alpha\beta}=\sum_{\mu,\nu=1}^{3}K_{\alpha\beta}^{(\mu\nu)}C_{\mu\nu}^{(\alpha\beta)}, \tag{4.16}$$

где индексы $\alpha$, $\beta$ имеют любые из значений 1, 2, 3.

При этом, очевидно, $\tau_{\alpha\beta}=\tau_{\beta\alpha}$.

Из формулы (4.16), пользуясь выражениями (3.10) и (3.11), находим:

$$\frac{1}{2}(\tau_{11}+\tau_{12}+\tau_{13})=T,$$

где

$$\begin{aligned}
T={}&8A_{123}^{6}-24A_{123}^{4}(A_{112}A_{233}+A_{113}A_{223}+A_{122}A_{133})+\\
&+20A_{123}^{3}A_{111}A_{222}A_{333}+12A_{123}^{3}(A_{111}A_{223}A_{233}+A_{112}A_{122}A_{333}+A_{113}A_{133}A_{222})+\\
&+36A_{123}^{3}(A_{112}A_{133}A_{223}+A_{113}A_{122}A_{233})-\\
&-36A_{123}^{2}(A_{111}A_{122}A_{223}A_{333}+A_{111}A_{133}A_{222}A_{233}+A_{112}A_{113}A_{222}A_{333})-\\
&-12A_{123}^{2}(A_{111}A_{122}A_{233}^{2}+A_{111}A_{133}A_{223}^{2}+A_{112}^{2}A_{223}A_{333}+A_{112}A_{133}^{2}A_{222}+\\
&+A_{113}^{2}A_{222}A_{233}+A_{113}A_{122}^{2}A_{333})+24A_{123}^{2}(A_{112}^{2}A_{233}^{2}+A_{113}^{2}A_{223}^{2}+A_{122}^{2}A_{133}^{2})+\\
&+12A_{123}^{2}(A_{112}A_{113}A_{223}A_{233}+A_{112}A_{122}A_{133}A_{233}+A_{113}A_{122}A_{133}A_{223})-\\
&-12A_{123}A_{111}A_{222}A_{333}(A_{112}A_{233}+A_{113}A_{223}+A_{122}A_{133})+\\
&+24A_{123}(A_{111}A_{112}A_{223}^{2}A_{333}+A_{111}A_{113}A_{222}A_{233}^{2}+A_{111}A_{122}^{2}A_{233}A_{333}+\\
&+A_{111}A_{133}^{2}A_{222}A_{223}+A_{112}^{2}A_{133}A_{222}A_{333}+A_{113}^{2}A_{122}A_{222}A_{333})-\\
&-12A_{123}(A_{111}A_{112}A_{223}A_{233}^{2}+A_{111}A_{113}A_{223}^{2}A_{233}+A_{112}^{2}A_{122}A_{233}A_{333}+\\
&+A_{112}A_{122}^{2}A_{133}A_{333}+A_{113}^{2}A_{133}A_{222}A_{223}+A_{113}A_{122}A_{133}^{2}A_{222})+
\end{aligned}$$

---

1) См. [28], стр. 288.

$$
\begin{aligned}
&+60A_{123}(A_{111}A_{122}A_{133}A_{223}A_{233}+A_{112}A_{113}A_{122}A_{223}A_{333}+A_{112}A_{113}A_{133}A_{222}A_{233})-\\
&-36A_{123}(A_{112}^2A_{133}A_{223}A_{233}+A_{112}A_{113}A_{122}A_{233}^2+A_{112}A_{113}A_{133}A_{223}^2+\\
&+A_{112}A_{122}A_{133}^2A_{223}+A_{113}^2A_{122}A_{223}A_{233}+A_{113}A_{122}^2A_{133}A_{233})-\\
&-A_{111}^2A_{222}^2A_{333}^2-6A_{111}A_{222}A_{333}(A_{112}A_{133}A_{223}+A_{113}A_{122}A_{233})+\\
&+6(A_{111}^2A_{222}A_{223}A_{233}A_{333}+A_{111}A_{112}A_{122}A_{222}A_{333}^2+A_{111}A_{113}A_{133}A_{222}^2A_{333})-\\
&-4(A_{111}^2A_{222}A_{233}^3+A_{111}^2A_{223}^3A_{333}+A_{111}A_{122}^3A_{333}^2+A_{111}A_{133}^3A_{222}^2+A_{112}^3A_{222}A_{333}^2+\\
&+A_{113}^3A_{222}^2A_{333})+3(A_{112}^2A_{223}^2A_{233}^2+A_{112}^2A_{122}^2A_{333}^2+A_{113}^2A_{133}^2A_{222}^2)-\\
&-18(A_{111}A_{112}A_{122}A_{223}A_{233}A_{333}+A_{111}A_{113}A_{133}A_{222}A_{223}A_{233}+\\
&+A_{112}A_{113}A_{122}A_{133}A_{222}A_{333})+12(A_{111}A_{112}A_{122}A_{233}^3+A_{111}A_{113}A_{133}A_{223}^3+\\
&+A_{112}^3A_{223}A_{233}A_{333}+A_{112}A_{122}A_{133}^3A_{222}+A_{113}^3A_{222}A_{223}A_{233}+A_{113}A_{122}^3A_{133}A_{333})+\\
&+12(A_{111}A_{112}A_{133}A_{222}A_{233}^2+A_{111}A_{113}A_{122}A_{223}^2A_{333}+A_{111}A_{122}^2A_{133}A_{223}A_{333}+\\
&+A_{111}A_{122}A_{133}^2A_{222}A_{233}+A_{112}^2A_{113}A_{222}A_{233}A_{333}+A_{112}A_{113}^2A_{222}A_{223}A_{333})-\\
&-6(A_{111}A_{112}A_{133}A_{223}^2A_{233}+A_{111}A_{113}A_{122}A_{223}A_{233}^2+A_{112}^2A_{122}A_{133}A_{223}A_{333}+\\
&+A_{112}A_{113}A_{122}^2A_{233}A_{333}+A_{112}A_{113}A_{133}^2A_{222}A_{223}+A_{113}^2A_{122}A_{133}A_{222}A_{233})-\\
&-24(A_{111}A_{122}A_{133}^2A_{223}^2+A_{111}A_{122}^2A_{133}A_{233}^2+A_{112}^2A_{113}A_{223}^2A_{333}+A_{112}^2A_{133}^2A_{222}A_{233}+\\
&+A_{112}A_{113}^2A_{222}A_{233}^2+A_{113}^2A_{122}^2A_{223}A_{333})-8(A_{112}^3A_{233}^3+A_{113}^3A_{223}^3+A_{122}^3A_{133}^3)+\\
&+12(A_{112}^2A_{113}A_{223}A_{233}^2+A_{112}^2A_{122}A_{133}A_{233}^2+A_{112}A_{113}^2A_{223}^2A_{233}+A_{112}A_{122}^2A_{133}^2A_{233}+\\
&+A_{113}^2A_{122}A_{133}A_{223}^2+A_{113}A_{122}^2A_{133}^2A_{223})+27(A_{112}^2A_{133}^2A_{223}^2+A_{113}^2A_{122}^2A_{233}^2)+\\
&+6A_{112}A_{113}A_{122}A_{133}A_{223}A_{233}.
\end{aligned}
\tag{4.17}
$$

Замена в выражении $\frac{1}{2}(\tau_{11}+\tau_{12}+\tau_{13})$ первого индекса 1 индексом 2 или 3 приводит к выражению $\frac{1}{2}(\tau_{21}+\tau_{22}+\tau_{23})$ или $\frac{1}{2}(\tau_{31}+\tau_{32}+\tau_{33})$. Нетрудно убедиться, что такая операция вызывает обмен индексами 1, 2 или 1, 3 в символах $C_{\alpha\beta}^{(\mu\nu)}$ и $K_{\alpha\beta}^{(\mu\nu)}$, входящих в формулы для определения $\tau_{11}$, $\tau_{12}$, $\tau_{13}$, что в свою очередь влечет обмен теми же индексами в выражениях (3.10) и (3.11), определяющих упомянутые выше символы, а следовательно, и в выражении (4.17). Но последнее не меняется при обмене любыми двумя индексами. Поэтому имеем также

$$\frac{1}{2}(\tau_{21}+\tau_{22}+\tau_{23})=\frac{1}{2}(\tau_{31}+\tau_{32}+\tau_{33})=T.$$

Таким образом,

$$T=\frac{1}{2}\sum_{\beta=1}^{3}\tau_{\alpha\beta}\text{ [1]},\tag{4.18}$$

где $\alpha$ имеет любое из значений 1, 2, 3.

Заметим, что

$$\text{след}\,\|KC'\|=\text{след}\,\|C'K\|=\sum_{\alpha,\beta=1}^{3}\tau_{\alpha\beta}=6T.$$

Выражение $T$ можно написать также в другом виде. Для этого в симметрической матрице 9-го порядка $K$ переставим 2-ю и 4-ю, 3-ю и 7-ю, 6-ю и 8-ю строки, а также соответствующие этим строкам столбцы. Получим симметрическую матрицу 9-го порядка $K'$, которую напишем в виде сим-

[1]) См. [28], стр. 288.

метрической клеточной матрицы

$$K' = \| K^{(\mu\nu)} \| \qquad (\mu, \ \nu = 1, \ 2, \ 3), \tag{4.19}$$

где клетки $K^{(\mu\nu)}$ являются также симметрическими матрицами

$$K^{(\mu\nu)} = \| K^{(\mu\nu)}_{\alpha\beta} \| \qquad (\alpha, \ \beta = 1, \ 2, \ 3). \tag{4.20}$$

Рассматривая следы матриц, выражающих произведения соответствующих клеток матриц $K'$ и $C$, представленных в виде (4.19) и (3.8), и полагая

$$\tau_{\alpha\beta} = \textit{след}\, \| K^{(\alpha\beta)} C_{\alpha\beta} \| = \textit{след}\, \| C_{\alpha\beta} K^{(\alpha\beta)} \|,$$

находим на основании равенств (3.9) и (4.20)

$$\tau'_{\alpha\beta} = \sum_{\mu,\,\nu=1}^{3} K^{(\alpha\beta)}_{\mu\nu} C^{(\nu\mu)}_{\alpha\beta}$$

или

$$\tau'_{\alpha\beta} = \sum_{\mu,\,\nu=1}^{3} K^{(\alpha\beta)}_{\mu\nu} C^{(\mu\nu)}_{\alpha\beta}, \tag{4.16'}$$

где индексы $\alpha$, $\beta$ имеют любые из значений 1, 2, 3.

При этом, очевидно, $\tau'_{\alpha\beta} = \tau'_{\beta\alpha}$.

Из формулы (4.16') получаем аналогично предыдущему

$$T = \frac{1}{2} \sum_{\beta=1}^{3} \tau'_{\alpha\beta} \text{ [1]}, \tag{4.18'}$$

где $\alpha$ имеет любое из значений 1, 2, 3.

Заметим, что

$$\textit{след}\, \| KC' \| = \textit{след}\, \| C'K \| = \sum_{\alpha,\,\beta=1}^{3} \tau_{\alpha\beta} = 6T$$

и

$$\textit{след}\, \| K'C \| = \textit{след}\, \| CK' \| = \sum_{\alpha,\,\beta=1}^{3} \tau'_{\alpha\beta} = 6T.$$

Теорема 4.7. *Выражения $S$ и $T$, представленные формулами* (4.15) *и* (4.18) *или* (4.18'), *являются относительными инвариантами тройничной кубической формы $f$, веса которых равны соответственно* 4 *и* 6 [2].

Действительно, подвергая форму $f$ невырожденному линейному преобразованию

$$x_\lambda = \sum_{i=1}^{3} a_{\lambda i} X_i \qquad (\lambda = 1, \ 2, \ 3) \tag{4.21}$$

с матрицей

$$a = \| a_{\lambda i} \| \qquad (\lambda, \ i = 1, \ 2, \ 3),$$

детерминант которой $|a| \neq 0$, мы тем самым соответствующую этой форме кубическую матрицу $A = \| A_{ijk} \|$ $(i, \ j, \ k = 1, \ 2, \ 3)$ умножаем по всем индексам $i$, $j$, $k$ на квадратную матрицу $a$. Но умножение на $a$ приводится к последовательным умножениям (по всем индексам) на элементарные квадратные матрицы $a^{(1)}, a^{(2)}, \ldots, a^{(q)}$, произведению которых равна матрица $a$.

---

[1] См. [28], стр. 288.

[2] Инварианты $S$ и $T$ указаны Аронгольдом [44], который дал также развернутое выражение $S$ (формула (4.14)). Развернутое выражение $T$ (формула (4.17)) впервые дано было Салмоном [205]. В исследованиях Клебша и Гордана по теории тройничных кубических форм в качестве относительных инвариантов фигурируют $6S$ и $6T$, вычисляемые с помощью так называемой $\delta$-операции (см. [64], стр. 439, 449).

Умножению же (по всем индексам) на элементарную матрицу $a^{(\nu)}$, где $\nu$ — любое из значений 1, 2, ..., $q$, равносильна операция

(а) $$\boxed{l}\cdot t,$$

если $a^{(\nu)}$ соответствует линейному преобразованию

$$\left.\begin{aligned} x_l &= tX_l, \\ x_m &= X_m, \\ x_n &= X_n, \end{aligned}\right\}$$

детерминант которого равен $t$, или операция

(б) $$\boxed{m}+\boxed{l}\cdot t,$$

если $a^{(\nu)}$ соответствует линейному преобразованию

$$\left.\begin{aligned} x_l &= X_l+tX_m, \\ x_m &= X_m, \\ x_n &= X_n, \end{aligned}\right\}$$

детерминант которого равен 1 ($l$, $m$, $n$ образуют последовательность в некотором порядке чисел 1, 2, 3).

Следовательно, детерминант матрицы $a$, определяемый формулой

$$|a| = \prod_{\nu=1}^{q} |a^{(\nu)}|,$$

равен произведению чисел $t$, фигурирующих в симметрических элементарных преобразованиях типа (а), которым подвергается матрица $A$ при невырожденном линейном преобразовании (4.21) формы $f$.

Операция (а) над $A$ вызывает умножение каждого элемента ее $A_{ijk}$ на $t^\lambda$, где $\lambda$ — число индексов элемента, равных $l$. Из выражений (4.14) и (4.17) видно, что каждый из индексов 1, 2, 3 повторяется четыре раза в каждом члене выражения $S$ и шесть раз в каждом члене выражения $T$. Следовательно, операция (а) сопровождается умножением $S$ на $t^4$ и $T$ на $t^6$.

Операция (б) над $A$ приводит к матрице $A' = \|A'_{ijk}\|$ $(i, j, k = 1, 2, 3)$, элементы которой выражаются формулами

$$\begin{aligned} A'_{lll} &= A_{lll}, \\ A'_{llm} &= A_{llm}, \qquad A'_{lmm} = A_{lmm}, \qquad A'_{mmm} = A_{mmm}, \\ A'_{lln} &= A_{lln} + A_{llm}t, \\ A'_{lmn} &= A_{lmn} + A_{lmm}t, \\ A'_{mmn} &= A_{mmn} + A_{mmm}t, \\ A'_{lnn} &= A_{lnn} + 2A_{lmn}t + A_{lmm}t^2, \\ A'_{mnn} &= A_{mnn} + 2A_{mmn}t + A_{mmm}t^2, \\ A'_{nnn} &= A_{nnn} + 3A_{mnn}t + 3A_{mmn}t^2 + A_{mmm}t^3, \end{aligned}$$

где индексы $l$, $m$, $n$ образуют последовательность в некотором порядке чисел 1, 2, 3.

Составив при помощи этих формул для преобразованной матрицы $A'$ выражения (4.14) и (4.17), увидим, что они будут такими же, как и для исходной матрицы $A$. Следовательно, операция (б) не меняет выражений $S$ и $T$.

Таким образом, в результате невырожденного линейного преобразования формы $f$, сопровождающегося симметрическими элементарными преобразованиями ее матрицы $A$, выражения $S$ и $T$ лишь умножаются соответственно на 4-ю и 6-ю степень детерминанта $|a|$ этого преобразования, т. е. $S$ и $T$ есть относительные инварианты формы $f$, веса которых равны соответственно 4 и 6.

Сильвестр [218] доказал, что всякий полином от коэффициентов формы $f$, являющийся ее относительным инвариантом, есть в то же время полином от $S$ и $T$. Так, например, дискриминант $R$ формы $f$ — ее относительный инвариант веса 12 — представляется в виде

$$R = S^3 - T^2 \text{ [1]}. \tag{4.22}$$

Выражение

$$I = \frac{R}{T^2} \text{ [2]}, \tag{4.23}$$

остающееся неизменным при невырожденном линейном преобразовании формы $f$, примем за **абсолютный инвариант** этой формы.

Замечание 4.5. Вводя в рассмотрение в случае поля вещественных чисел символ $\omega(T)$, равный $+1$, $-1$ или 0, смотря по тому, будет ли $T > 0$, $T < 0$ или $T = 0$, видим, что $\omega(T)$ вследствие четного веса относительного инварианта $T$ есть арифметический инвариант по отношению к вещественным невырожденным линейным преобразованиям формы $f$, а следовательно, и по отношению к вещественным симметрическим элементарным преобразованиям соответствующей матрицы $A$.

4. С помощью относительных инвариантов $S$, $T$ формы $f$ и матриц $C$, $K$, — присоединенной и смешанно-присоединенной для матрицы $A$ формы $f$, — мы можем теперь составить симметрическую квадратную матрицу 9-го порядка $\mathfrak{C} = TC - SK$, которую будем называть *сложной квадратной матрицей* для $A$.

Теорема 4.8. *Ранг $r_{\mathfrak{C}}$ сложной квадратной матрицы $\mathfrak{C}$ для $A$ есть арифметический инвариант относительно симметрических элементарных преобразований матрицы $A$. В поле вещественных чисел, кроме ранга $r_{\mathfrak{C}}$, арифметическим инвариантом относительно вещественных симметрических элементарных преобразований матрицы $A$ будет также сигнатура $\sigma_{\mathfrak{C}}$ матрицы $\mathfrak{C}$* [3].

Действительно, операция

(а) $$\boxed{l} \cdot t$$

над матрицей $A$, вызывая умножение $S$ на $t^4$ и $T$ на $t^6$, влечет за собой в матрице $C$ умножение двух строк на $t^2$, пяти строк на $t$, двух строк на 1 и те же операции над соответственными столбцами, а в матрице $K$ — умножение тех же строк и столбцов соответственно на $t^3$, $t^2$, $t$. Следовательно, эта операция сопровождается умножением в матрице $\mathfrak{C}$ двух строк и двух соответственных столбцов на $t^5$, пяти строк и пяти соответственных столбцов на $t^4$, двух строк и двух соответственных столбцов на $t^3$.

Операция

(б) $$\boxed{m} + \boxed{l} \cdot t$$

над $A$, не изменяя $S$ и $T$, вызывает в матрицах $C$ и $K$, а следовательно, и в матрице $\mathfrak{C}$, одни и те же операции, состоящие в прибавлении к некоторым строкам и соответственным столбцам умноженных на $\pm t$ других строк и соответственных столбцов.

---

[1] Это выражение отличается только знаком от выражения дискриминанта $R$, данного Аронгольдом (см. [44], стр. 165).

[2] На единицу меньше абсолютного инварианта Аронгольда (см. [44], стр. 160).

[3] См. [28], стр. 290.

Таким образом, симметрические элементарные преобразования матрицы $A$ влекут за собой симметрические элементарные преобразования матрицы $\mathfrak{C}$, при которых ее ранг $r_{\mathfrak{C}}$ остается неизменным.

В поле вещественных чисел, когда симметрические элементарные преобразования матрицы $A$ вещественны, вызываемые ими симметрические элементарные преобразования матрицы $\mathfrak{C}$ также вещественны, а потому при этих преобразованиях, кроме ранга $r_{\mathfrak{C}}$, не меняется также сигнатура $\sigma_{\mathfrak{C}}$ матрицы $\mathfrak{C}$.

Замечание 4.6. Как мы увидим далее, абсолютный инвариант $I$ тройничной кубической формы $f$, ранг (двумерный $r$ или трехмерный $\varrho$) соответствующей кубической матрицы $A$ и ранги $r_C$, $r_{\mathfrak{C}}$ симметрических квадратных матриц $C$, $\mathfrak{C}$ (а в поле вещественных чисел и сигнатуры $\sigma_C$, $\sigma_{\mathfrak{C}}$ этих матриц, а также $\omega(T)$) образуют *полную* систему инвариантов формы $f$ [1]).

5. Обращаясь к $p$-линейной форме $F = \sum\limits_{i_1, \ldots, i_p=1}^{n} A_{i_1 i_2 \ldots i_p} x_{i_1}^{(1)} x_{i_2}^{(2)} \ldots x_{i_p}^{(p)}$ с соответствующей $p$-мерной матрицей $n$-го порядка $A = \| A_{i_1 i_2 \ldots i_p} \|$ $(i_1, i_2, \ldots, i_p = 1, 2, \ldots, n)$, докажем следующую теорему.

Теорема 4.9. *Гипердетерминант* $| A_{\overset{\pm}{i_1} \overset{\pm}{i_2} \ldots \overset{\pm}{i_p}} |$ *матрицы $A$ $p$-линейной формы $F$ при $p$ четном есть ее относительный инвариант веса* 1 *для каждого ряда переменных* (Кэли [53]) [2]).

Действительно, подвергая форму $F$ невырожденному линейному преобразованию

$$x_i^{(\alpha)} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{(\alpha)} X_j \quad (\alpha \text{ — какой-нибудь из индексов } 1, 2, \ldots, p;\ i = 1, 2, \ldots, n) \qquad (4.24)$$

с матрицей $a^{(\alpha)} = \| a_{ij}^{(\alpha)} \|$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$, детерминант которой $| a^{(\alpha)} | \neq 0$, мы получим форму

$$F^{(\alpha)} = \sum_{i_1, \ldots, i_p=1}^{n} A^{(\alpha)}_{i_1 \ldots i_{\alpha-1} i_\alpha i_{\alpha+1} \ldots i_p} x_{i_1}^{(1)} \ldots x_{i_{\alpha-1}}^{(\alpha-1)} X_{i_\alpha}^{(\alpha)} x_{i_{\alpha+1}}^{(\alpha+1)} \ldots x_{i_p}^{(p)}$$

с матрицей

$$A^{(\alpha)} = \| \sum_{\lambda=1}^{n} A_{i_1 \ldots i_{\alpha-1} \lambda i_{\alpha+1} \ldots i_p} a_{\lambda i_\alpha}^{(\alpha)} \| = A \{ i_\alpha \} a^{(\alpha)}$$

(упражнение 5 § 2 гл. II).

Следовательно, ее гипердетерминант представляется выражением

$$\Big| \sum_{\lambda=1}^{n} A_{\overset{\pm}{i_1} \ldots \overset{\pm}{i_{\alpha-1}} \overset{\pm}{\lambda} \overset{}{i_{\alpha+1}} \ldots \overset{\pm}{i_p}} a^{(\alpha)}_{\overset{\pm}{\lambda} i_\alpha} \Big| = \big| A_{\overset{\pm}{i_1} \ldots \overset{\pm}{i_{\alpha-1}} \overset{\pm}{i_\alpha} \overset{\pm}{i_{\alpha+1}} \ldots \overset{\pm}{i_p}} \big| \cdot \big| a^{(\alpha)} \big|$$

(упражнение 9 § 2 гл. II).

---

[1]) Систему инвариантов формы данного типа над полем $P$ называем *полной*, если две формы рассматриваемого типа, у которых значения всех инвариантов системы совпадают, переводятся одна в другую невырожденными линейными преобразованиями с коэффициентами из поля $P$. В классической теории алгебраических инвариантов это выражение применяется в несколько ином, более узком смысле (см. сноску в замечании 4.2). В этом смысле для тройничной кубической формы с комплексными коэффициентами Горданом [93] дана полная система комитантов, состоящая из 34 форм. Чэнлер [58] указала полную систему комитантов для тройничной трилинейной формы над полем комплексных чисел.

[2]) Обобщение известной теоремы: дискриминант билинейной формы (т. е. детерминант соответствующей матрицы) есть относительный инвариант веса 1 для каждого ряда ее переменных.

Если форму $F$ подвергнем последовательному ряду преобразований (4.24), полагая $\alpha=1, 2, \ldots, p$, то придем к форме $F'=\sum_{i_1,\ldots,i_p=1}^{n} A'_{i_1i_2\ldots i_p}X_{i_1}^{(1)}X_{i_2}^{(2)}\ldots X_{i_p}^{(p)}$ с матрицей $A'=\|A'_{i_1i_2\ldots i_p}\|$ $(i_1, i_2, \ldots, i_p=1, 2, \ldots, n)$, гипердетерминант которой, очевидно, будет связан с гипердетерминантом матрицы $A$ соотношением

$$|A'_{\overset{\pm}{i_1}\overset{\pm}{i_2}\ldots\overset{\pm}{i_p}}|=\prod_{\alpha=1}^{p}|a^{(\alpha)}|\cdot|A_{\overset{\pm}{i_1}\overset{\pm}{i_2}\ldots\overset{\pm}{i_p}}|, \tag{4.25}$$

что и требовалось доказать.

Замечание 4.7. Из всех детерминантов матрицы $A$ только гипердетерминант (если $p$ — четное) является инвариантом формы $F$. Поэтому, например, ни один из детерминантов $|A_{\overset{+}{i}\overset{\pm}{j}k}|$, $|A_{\overset{\pm}{i}\overset{+}{j}\overset{+}{k}}|$, $|A_{\overset{\pm}{i}\overset{+}{j}\overset{+}{k}}|$ кубической матрицы $A$ не будет инвариантом ассоциированной с ней трилинейной формы $F$.

Аналогично доказывается более общая

Теорема 4.10. *Детерминант наивысшего рода* $|A_{\overset{+}{i}\overset{\pm}{i_1}\ldots\overset{\pm}{i_p}}|$ *при* $p$ *четном или* $|A_{\overset{\pm}{i}\overset{\pm}{i_1}\ldots\overset{\pm}{i_p}}|$ *при* $p$ *нечетном* $(p+1)$*-мерной матрицы* $n$*-го порядка* $\|A_{ii_1\ldots i_p}\|$ $(i, i_1, \ldots, i_p=1, 2, \ldots, n)$, *соответствующей системе* $n$ $p$*-линейных форм* $F_i=\sum_{i_1,\ldots,i_p=1}^{n} A_{ii_1\ldots i_p}x_{i_1}^{(1)}\ldots x_{i_p}^{(p)}$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ *есть совместный относительный инвариант этих форм веса* 1 *для каждого из* $p$ *рядов переменных.*

Замечание 4.8. Если все $n$ форм системы одинаковы, то при $p$ четном $|A_{\overset{+}{i}\overset{\pm}{i_1}\ldots\overset{\pm}{i_p}}|=n!\,|A_{\overset{+}{i}i_1\ldots\overset{\pm}{i_p}}|$ (упражнение 4 § 3 гл. I) и мы получаем как частный случай теорему 4.9; при $p$ нечетном $|A_{\overset{+}{i}\overset{\pm}{i_1}\ldots\overset{+}{i_p}}|=0$, что вполне согласуется с тем, что теорема 4.9 тогда не имеет места.

В случае, когда матрица $A$ $p$-линейной формы $F$ — симметрическая и форма $F$ подвергается когредиентным линейным преобразованиям

$$x_i^{(\alpha)}=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}X_j^{(\alpha)} \qquad (i=1, 2, \ldots, n)$$

с одной и той же матрицей $a=\|a_{ij}\|$ $(i, j=1, 2, \ldots, n)$, детерминант которой $|a|\neq 0$, при $\alpha=1, 2, \ldots, p$, мы получим $p$-линейную форму $F'$ с симметрической матрицей $A'$, гипердетерминант которой (если $p$ — четное) на основании формулы (4.25) связан с гипердетерминантом матрицы $A$ соотношением

$$|A'_{\overset{\pm}{i_1}\overset{\pm}{i_2}\ldots\overset{\pm}{i_p}}|=|a|^p\cdot|A_{\overset{\pm}{i_1}\overset{\pm}{i_2}\ldots\overset{+}{i_p}}|. \tag{4.25'}$$

Отождествляя $x_{i_\alpha}^{(\alpha)}$ с $x_{i_\alpha}$ при $\alpha=1, 2, \ldots, p$, мы можем рассматривать $p$-линейные формы $F$ и $F'$ как полярные соответственно форме $p$-й степени $f=\sum_{i_1,\ldots,i_p=1}^{n} A_{i_1i_2\ldots i_p}x_{i_1}x_{i_2}\ldots x_{i_p}$ и форме той же степени $f'=$ $=\sum_{i_1,\ldots,i_p=1}^{n} A'_{i_1i_2\ldots i_p}X_{i_1}X_{i_2}\ldots X_{i_p}$, в которую переводится $f$ невырожденным линейным преобразованием $x_i=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}X_j$, $(i=1, 2, \ldots, n)$ с матрицей $a$.

Следовательно, равенство (4.25′) имеет место и для форм $p$-й степени $f$, $f'$. Тем самым доказана

Теорема 4.11. *Гипердетерминант* $|A_{\overset{\pm}{i_1}\overset{\pm}{i_2}\ldots\overset{\pm}{i_p}}|$ *симметрической $p$-мерной матрицы $n$-го порядка* $\|A_{i_1 i_2 \ldots i_p}\|$ $(i_1, i_2, \ldots, i_p = 1, 2, \ldots, n)$, *соответствующей форме* $f = \sum\limits_{i_1, \ldots, i_p=1}^{n} A_{i_1 i_2 \ldots i_p} x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_p}$ *четной степени $p$, есть относительный инвариант этой формы, вес которого равен $p$* (Цейфус [230]) [1].

Замечание 4.9. Упоминаемый в теореме гипердетерминант $|A_{\overset{\pm}{i_1}\overset{\pm}{i_2}\ldots\overset{\pm}{i_p}}|$, очевидно, равен выражению

$$\frac{1}{(p!)^n}\left|\frac{\partial^p f}{\partial x_{\overset{\pm}{i_1}}\, \partial x_{\overset{\pm}{i_2}} \ldots \partial x_{\overset{\pm}{i_p}}}\right| \qquad (i_1, i_2, \ldots, i_p = 1, 2, \ldots, n),$$

которое будем называть *$p$-мерным гессианом формы $f$ четной степени $p$.*

Так же как и теорема 4.11, доказывается более общая

Теорема 4.12. *Детерминант наивысшего рода* $|A_{\overset{+}{i}\,\overset{\cdot}{i_1}\ldots\overset{\pm}{i_p}}|$ *при $p$ четном или* $|A_{\overset{\pm}{i}\,\overset{\pm}{i_1}\ldots\overset{+}{i_p}}|$ *при $p$ нечетном симметрической относительно индексов $i_1, i_2, \ldots, i_p$ $(p+1)$-мерной матрицы $n$-го порядка* $\|A_{ii_1 \ldots i_p}\|$ $(i, i_1, \ldots, i_p = 1, 2, \ldots, n)$, *соответствующей системе $n$ форм $p$-й степени*

$$f_i = \sum_{i_1, \ldots, i_p=1}^{n} A_{ii_1 \ldots i_p} x_{i_1} \ldots x_{i_p} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

*есть совместный относительный инвариант этих форм, вес которого равен $p$* (Цейфус [230]) [2].

Замечание 4.10. Теорема 4.12 сохраняет силу и в том случае, если среди $n$ форм четной степени будут одинаковые. Поэтому, если рассматривается система различных форм четной степени, число которых меньше числа переменных, то, повторяя всеми возможными способами те или иные из этих форм надлежащее число раз, мы получим семейство относительных инвариантов данной системы. Например, если дана система двух тройничных квадратичных форм $f_1$, $f_2$, то, образуя две системы форм $f_1$, $f_2$, $f_2$ и $f_1$, $f_1$, $f_2$, мы будем иметь два совместных относительных инварианта $\Theta$ и $\Theta'$ Салмона (упражнение 20).

Если все $n$ форм системы одинаковы, то имеет место замечание, аналогичное замечанию 4.8.

Теорема 4.13. *Если $\pi$ — какое-нибудь четное число, не превышающее степени $p$ формы* $f = \sum\limits_{i_1, \ldots, i_p=1}^{n} A_{i_1 i_2 \ldots i_p} x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_p}$, *то $\pi$-мерный гессиан этой формы* [3])

$$\left[\frac{(p-\pi)!}{p!}\right]^n \left|\frac{\partial^\pi f}{\partial x_{\overset{\pm}{i_1}}\, \partial x_{\overset{\pm}{i_2}} \ldots \partial x_{\overset{\pm}{i_\pi}}}\right| \qquad (i_1, i_2, \ldots, i_\pi = 1, 2, \ldots, n)$$

*есть ее относительный ковариант веса $\pi$* (Гегенбауер [84]).

---

[1]) Обобщение известной теоремы: дискриминант квадратичной формы (т. е. детерминант соответствующей матрицы) есть ее относительный инвариант веса 2.

[2]) В частности, квадратный детерминант системы $n$ линейных форм от $n$ переменных есть их совместный относительный инвариант веса 1.

[3]) При $\pi = 2$ имеем, очевидно, обычный гессиан формы $f$.

Действительно, полагая

$$B_{i_1 i_2 \ldots i_p} = \sum_{i_{\pi+1}, \ldots, i_p = 1}^{n} A_{i_1 i_2 \ldots i_\pi i_{\pi+1} \ldots i_p} x_{i_{\pi+1}} \ldots x_{i_p},$$

где $\pi$ — четное число, не превышающее $p$, мы можем представить форму $f$ в виде

$$f = \sum_{i_1, \ldots, i_\pi = 1}^{n} B_{i_1 i_2 \ldots i_\pi} x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_\pi}.$$

Соответствующая форма $f_\pi = \sum_{i_1, \ldots, i_\pi = 1}^{n} B_{i_1 i_2 \ldots i_\pi} \xi_{i_1} \xi_{i_2} \ldots \xi_{i_\pi}$, рассматриваемая как форма степени $\pi$ от переменных $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$, имеет на основании теоремы 4.11 относительный инвариант веса $\pi$, равный гипердетерминанту $n$-го порядка $|B_{\overset{\pm}{i_1}\overset{\pm}{i_2}\ldots\overset{\pm}{i_\pi}}|$, который, как известно, будет также относительным ковариантом веса $\pi$ формы $f$[1]). Согласно замечанию 4.9,

$$|B_{\overset{\pm}{i_1}\overset{\pm}{i_2}\ldots\overset{\pm}{i_\pi}}| = \frac{1}{(\pi!)^n} \left| \frac{\partial^\pi f_\pi}{\partial \xi_{\overset{\pm}{i_1}} \partial \xi_{\overset{\pm}{i_2}} \ldots \partial \xi_{\overset{\pm}{i_\pi}}} \right| \qquad (i_1, i_2, \ldots, i_\pi = 1, 2, \ldots, n).$$

Но, как нетрудно убедиться,

$$\frac{\partial^\pi f_\pi}{\partial \xi_{i_1} \partial \xi_{i_2} \ldots \partial \xi_{i_\pi}} = \frac{\pi!\,(p-\pi)!}{p!} \cdot \frac{\partial^\pi f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \ldots \partial x_{i_\pi}}.$$

Следовательно,

$$|B_{\overset{\pm}{i_1}\overset{\pm}{i_2}\ldots\overset{\pm}{i_\pi}}| = \left[\frac{(p-\pi)!}{p!}\right]^n \left| \frac{\partial^\pi f}{\partial x_{\overset{\pm}{i_1}} \partial x_{\overset{\pm}{i_2}} \ldots \partial x_{\overset{\pm}{i_\pi}}} \right| \qquad (i_1, i_2, \ldots, i_\pi = 1, 2, \ldots, n).$$

Следствие. *Если степень $p$ формы $f$ — нечетная ($p = 2q+1$), то, давая $\pi$ все возможные значения, мы получим $q$ ковариантов формы $f$, степени которых относительно переменных будут:*

$$n,\ 3n,\ \ldots,\ (2q-1)\,n.$$

*Если же степень $p$ — четная ($p = 2q$), то, кроме инварианта формы $f$, который получим при $\pi = p$, мы будем иметь еще $q-1$ ковариантов этой формы, степени которых относительно переменных будут*

$$2n,\ 4n,\ \ldots,\ (2q-2)\,n.$$

Пусть дана система $n$ форм $f_1, f_2, \ldots, f_n$ от $n$ переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, степени которых равны соответственно $p_1, p_2, \ldots, p_n$, и пусть $\pi$ — какое-нибудь число, не превышающее наименьшего из чисел $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Выражение

$$\frac{(p_1-\pi)!\,(p_2-\pi)!\,\ldots\,(p_n-\pi)!}{p_1!\,p_2!\,\ldots\,p_n!} \left| \frac{\partial^\pi f_{\overset{(\pm)s}{i}}}{\partial x_{\overset{\pm}{i_1}} \partial x_{\overset{\pm}{i_2}} \ldots \partial x_{\overset{\pm}{i_\pi}}} \right| (i, i_1, \ldots, i_\pi = 1, 2, \ldots, n), \quad (4.26)$$

где в $(\pi+1)$-мерном детерминанте наивысшего рода символ $(\pm)s$ обозначает $+$ или $\pm$ в зависимости от четности числа $\pi$ и каждое из $n$ сечений первой ориентации $(i)$ представляет симметрическую $\pi$-мерную матрицу, элементами которой являются частные производные $\pi$-го порядка соответствующей

[1]) См., например, [226], стр. 218.

формы, будем называть $(\pi+1)$-*мерным якобианом системы* $n$ *форм* $f_1, f_2, \ldots, f_n$. При $\pi=1$ получаем, очевидно, обычный якобиан этой системы.

Так же как и теорема 4.13, доказывается более общая

Теорема 4.14. $(\pi+1)$-*мерный якобиан* (4.26) *системы форм* $f_1, f_2, \ldots$ $\ldots, f_n$ *есть их совместный относительный ковариант веса* $\pi$ (Эшерих [73]).

Из этой теоремы, если все $n$ форм будут одной и той же степени $p$ и $\pi=p$, вытекает теорема 4.12, так как в этом случае $(p+1)$-мерный якобиан системы этих форм будет равен

$$\frac{1}{(p!)^n}\left|\frac{\partial^p f_{\underset{i}{(\pm)s}}}{\partial x_{\underset{i_1}{\pm}}\partial x_{\underset{i_2}{\pm}}\ldots\partial x_{\underset{i_p}{\pm}}}\right| \qquad (i, i_1, \ldots, i_p = 1, 2, \ldots, n),$$

т. е. $\left|A_{\underset{i}{(\pm)s}\underset{i_1}{\pm}\ldots\underset{i_p}{\pm}}\right|$.

Если же все формы одинаковы, т. е. $f_i=f$ $(i=1, 2, \ldots, n)$, и число $\pi$ — четное, не превышающее степени $p$ формы $f$, то получаем теорему 4.13, так как тогда в $(\pi+1)$-мерном детерминанте выражения (4.26) все $n$ сечений 1-й ориентации $(i)$ одинаковы и, следовательно, это выражение будет равно $\pi$-мерному гессиану формы $f$, умноженному на $n!$ (упражнение 4 § 3 гл. I).

Вообще, если число данных форм, предполагаемых различными, меньше числа переменных, мы получим систему относительных ковариантов этих форм, повторяя те или иные из них всеми возможными способами надлежащее число раз. Можно заменить ту или иную форму данной системы одной из ее степеней или даже однородной функцией данных форм, — все равно обобщенный якобиан, составленный по формуле (4.26), будет относительным ковариантом первоначальных форм.

### Упражнения

1. Дискриминант $\Delta$ двойничной линейно-квадратичной формы $F=\sum\limits_{i,j,k=1}^{2} A_{ijk}x_iy_jy_k$, определяемый равенствами (4.2), есть ее относительный инвариант веса 2 для ряда переменных $x_1$, $x_2$ и веса 4 для ряда переменных $y_1$, $y_2$. Доказать.

2. Квадратичные формы (4.1), составленные для двойничной линейно-квадратичной формы $F=\sum\limits_{i,j,k=1}^{2} A_{ijk}x_iy_jy_k$, представляют два различных относительных ковариантa $H_i$ и $H_j=H_k$, веса которых для двух рядов переменных этой формы равны соответственно 0,2 и 1,1. Доказать.

3. Двойничная линейно-квадратичная форма $Q=\sum\limits_{\alpha,\beta,\gamma=1}^{2} B_{\alpha\beta\gamma}x_\alpha y_\beta y_\gamma$, ассоциированная с кубической матрицей 2-го порядка $B=\|B_{\alpha\beta\gamma}\|$ $(\alpha, \beta, \gamma=1, 2)$, симметрической относительно индексов $\beta$, $\gamma$ и представляющей частный вид матрицы (3.3), которая составлена для матрицы двойничной линейно-квадратичной формы $F=\sum\limits_{i,j,k=1}^{2} A_{ijk}x_iy_jy_k$, есть относительный ковариант этой формы веса 1 для ряда переменных $x_1$, $x_2$ и веса 2 для ряда переменных $y_1$, $y_2$. Доказать.

4. Двойничная линейно-квадратичная форма $F$, ее дискриминант $\Delta$ и ковариантьі $H_i$, $H_j$, $Q$ составляют полную систему комитантов формы $F$. Каким соотношением (сизигией) они связаны?

5. Доказать, что дискриминант якобиана $Q$ двойничной кубической формы $f$ и квадратичной формы $H$, представленной формулой (4.1′), равен кубу дискриминанта формы $f$.

6. С помощью относительных инвариантов $S$, $T$ тройничной кубической формы $f=\sum\limits_{i,j,k=1}^{3} A_{ijk}x_ix_jx_k$, ее матрицы $A$ и матрицы $\boldsymbol{A}$, составленной из кубических миноров 3-го порядка, порождаемых матрицей $A$, образуем симметрическую кубическую

матрицу 3-го порядка $\mathfrak{U}=TA-SA$, которую будем называть *сложной кубической матрицей* для $A$. Доказать, что двумерный и трехмерный ранги $r_{\mathfrak{U}}$ и $\varrho_{\mathfrak{U}}$ сложной кубической матрицы $\mathfrak{U}$ для $A$ являются арифметическими инвариантами относительно элементарных преобразований матрицы $A$.

**7.** Тройничная кубическая форма $H=\sum\limits_{\alpha,\beta,\gamma=1}^{3} A_{\alpha\beta_\gamma} x_\alpha x_\beta x_\gamma$, ассоциированная с матрицей $A$ (упражнение 6), равна ушестеренному гессиану формы $f=\sum\limits_{i,j,k=1}^{3} A_{ijk}x_ix_jx_k$, т. е. $H=\frac{1}{36}\left|\frac{\partial^2 f}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}\right|$ $(\alpha, \beta=1, 2, 3)$. Доказать, что $H$ есть относительный ковариант формы $f$, вес которого равен 2.

**8.** Пусть

$$H_i=\sum_{\alpha,\beta,\gamma=1}^{3} A^{(i)}_{\alpha\beta\gamma}x_\alpha x_\beta x_\gamma,\quad H_j=\sum_{\alpha,\beta,\gamma=1}^{3} A^{(j)}_{\alpha\beta\gamma}y_\alpha y_\beta y_\gamma,\quad H_k=\sum_{\alpha,\beta,\gamma=1}^{3} A^{(k)}_{\alpha\beta\gamma}z_\alpha z_\beta z_\gamma$$

— тройничные кубические формы, ассоциированные с кубическими матрицами 3-го порядка $A^{(i)}$, $A^{(j)}$, $A^{(k)}$, которые составлены из кубических миноров 3-го порядка с сигнатурами $\left(\overset{+}{i}\right)$, $\left(\overset{+}{j}\right)$, $\left(\overset{+}{k}\right)$, порождаемых матрицей $A$ тройничной трилинейной формы $F=\sum\limits_{i,j,k=1}^{3} A_{ijk}x_iy_jz_k$. Относительные инварианты веса 4 и 6 форм $H_i$, $H_j$, $H_k$ обозначим соответственно через $S_i$, $S_j$, $S_k$ и $T_i$, $T_j$, $T_k$.

Доказать, что выражения $S_i$, $S_j$, $S_k$, так же как и выражения $T_i$, $T_j$, $T_k$, равны между собой и являются относительными инвариантами формы $F$, веса которых для каждого ряда переменных этой формы равны соответственно 4 и 6.

**9.** Доказать, что детерминант

$$D=\begin{vmatrix}
0 & 0 & 0 & A_{111} & A_{112} & A_{113} & -A_{211} & -A_{212} & -A_{213}\\
0 & 0 & 0 & A_{121} & A_{122} & A_{123} & -A_{221} & -A_{222} & -A_{223}\\
0 & 0 & 0 & A_{131} & A_{132} & A_{133} & -A_{231} & -A_{232} & -A_{233}\\
-A_{111} & -A_{112} & -A_{113} & 0 & 0 & 0 & A_{311} & A_{312} & A_{313}\\
-A_{121} & -A_{122} & -A_{123} & 0 & 0 & 0 & A_{321} & A_{322} & A_{323}\\
-A_{131} & -A_{132} & -A_{133} & 0 & 0 & 0 & A_{331} & A_{332} & A_{333}\\
A_{211} & A_{212} & A_{213} & -A_{311} & -A_{312} & -A_{313} & 0 & 0 & 0\\
A_{221} & A_{222} & A_{223} & -A_{321} & -A_{322} & -A_{323} & 0 & 0 & 0\\
A_{231} & A_{232} & A_{233} & -A_{331} & -A_{332} & -A_{333} & 0 & 0 & 0
\end{vmatrix}$$

есть относительный инвариант тройничной трилинейной формы $F=\sum\limits_{i,j,k=1}^{3} A_{ijk}x_iy_jz_k$, вес которого для каждого ряда переменных равен 3 (Паш [187]).

**10.** Обозначая через $S$ и $T$ относительные инварианты тройничной трилинейной формы $F$, веса которых для каждого ряда переменных этой формы равны соответственно 4 и 6 (упражнение 8), показать, что выражения $I=\frac{R}{T^2}$, где $R=S^3-T^2$, и $J=\frac{D^2}{T}$ (упражнение 9) являются абсолютными инвариантами формы $F$.

**11.** Вычислить, применяя теорему 4.11, относительные инварианты двойничных форм 4-й и 6-й степени, веса которых равны соответственно 4 и 6.

**12.** Найти относительный инвариант веса 6 двойничной формы 4-й степени

$$A_{1111}x_1^4+4A_{1112}x_1^3x_2+6A_{1122}x_1^2x_2^2+4A_{1222}x_1x_2^3+A_{2222}x_2^4,$$

умножая ее на $x_3^2$ и вычисляя гипердетерминант матрицы полученной тройничной формы 6-й степени (Бартер [46]).

**13.** Дана двойничная $p$-линейная форма ($p$ — нечетное)

$$F=\sum_{i_1,\ldots,i_p=1}^{2} A_{i_1i_2\ldots i_p}x^{(1)}_{i_1}x^{i}{}_{2}\ldots x^{(p}_{i_p}$$

с $p$-мерной матрицей 2-го порядка $A = \| A_{i_1 i_2 \ldots i_p} \|$ $i_1, i_2, \ldots, i_p = 1, 2$). Обозначим через $A_{\alpha\beta}^{(i_\nu)}$ ($\alpha$, $\beta$ — любые из значений 1, 2; $\nu$ — любое из значений 1, 2, ..., $p$) $p$-мерные миноры 2-го порядка с сигнатурой $\left(\overset{+}{i_\nu}\right)$, порождаемые матрицей $A$. Доказать, что составленные из этих миноров симметрические квадратные детерминанты 2-го порядка $\left| A_{\alpha\beta}^{(i_\nu)} \right|$ ($\alpha$, $\beta = 1, 2$), различные между собой при $p \geqq 5$, будут относительными инвариантами веса 2 для каждого ряда переменных формы $F$ (Кэли [53]).

**14.** Если $p$-линейную форму $F = \sum_{i_1, \ldots, i_p = 1}^{n} A_{i_1 i_2 \ldots i_p} x_{i_1}^{(1)} x_{i_2}^{(2)} \ldots x_{i_p}^{(p)}$ с $p$-мерной матрицей $A = \| A_{i_1 i_2 \ldots i_p} \|$ $(i_1, i_2, \ldots, i_p = 1, 2, \ldots, n)$ при $p$ четном подвергнуть $(q-1)$-линейному преобразованию $x_{j_1}^{(\alpha)} = \sum_{j_2, \ldots, j_q = 1}^{n} a_{j_1 j_2 \ldots j_q}^{(\alpha)} X_{j_2}^{(\alpha)} \xi_{j_3}^{(3)} \ldots \xi_{j_q}^{(q)}$ ($\alpha$ — какой-нибудь из индексов 1, 2, ..., $p$; $j_1 = 1, 2, \ldots, n$) с $q$-мерной матрицей

$$a^{(\alpha)} = \| a_{j_1 j_2 \ldots j_q}^{(\alpha)} \| \qquad (j_1, j_2, \ldots, j_q = 1, 2, \ldots, n)$$

при $q$ четном, то гипердетерминант преобразованной формы будет равен произведению гипердетерминантов матриц $A$ и $a^{(\alpha)}$. Доказать.

**15.** Инвариант алгебраической формы по отношению к нелинейным преобразованиям ее будем называть о б о б щ е н н ы м. Пользуясь разультатом упражнения 14, показать, что гипердетерминант матрицы $p$-линейной формы при $p$ четном есть ее обобщенный относительный инвариант веса 1 для каждого ряда переменных по отношению к невырожденным $(q-1)$-линейным преобразованиям ее, если $q$ — четное.

**16.** Доказать, что гипердетерминант матрицы $A$ формы

$$f = \sum_{i_1, \ldots, i_p = 1}^{n} A_{i_1 i_2 \ldots i_p} x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_p}$$

четной степени $p$ есть ее обобщенный относительный инвариант веса $p$ по отношению к невырожденному преобразованию нечетной $(q-1)$-й степени

$$x_{j_1} = \sum_{j_2, \ldots, j_q = 1}^{n} a_{j_1 j_2 \ldots j_q} X_{j_2} \xi_{j_3} \ldots \xi_{j_q} \qquad (j_1 = 1, 2, \ldots, n)$$

(Бартер [46]).

**17.** Показать, что кубический детерминант $| A_{\overset{+}{i}\overset{\pm}{j}\overset{\pm}{k}} |_2$ есть совместный относительный инвариант двух двоичных билинейных форм

$$F_i = \sum_{j, k = 1}^{2} A_{ijk} x_j y_k \qquad (i = 1, 2),$$

вес которого для каждого ряда переменных равен 1.

**18.** Указать систему двух двоичных трилинейных форм, у которых совместным относительным инвариантом веса 1 для каждого ряда переменных будет четырехмерный гипердетерминант 2-го порядка

$$\left|\begin{array}{cc|cc} A_{1111} & A_{1112} & A_{1211} & 0 \\ A_{1121} & 0 & 0 & A_{1222} \\ \hline 1 & 0 & 0 & A_{2212} \\ 0 & A_{2122} & A_{2221} & 1 \end{array}\right| \qquad \begin{array}{l} \overset{\pm}{(i_2)} \\ \overset{\mp}{(i_4)} \\ \overset{\pm}{(i_3)} \\ \overset{\pm}{(i_1)} \end{array} .$$

**19.** Показать, что кубический детерминант $| A_{\overset{+}{i}\overset{\pm}{j}\overset{\pm}{k}} |_2$, симметрический относительно двух индексов $j$, $k$, есть совместный относительный инвариант веса 2 двух двоичных квадратичных форм

$$f_i = A_{i11}x_1^2 + 2A_{i12}x_1x_2 + A_{i22}x_2^2 \qquad (i=1,\ 2).$$

**20.** Показать, что симметрический относительно индексов $j$, $k$ кубический детерминант $|A_{\overset{+}{i}\overset{\pm}{j}\overset{\pm}{k}}|_3$ есть совместный относительный инвариант веса 2 трех тройничных квадратичных форм $f_i = \sum\limits_{j,\,k=1}^{3} A_{ijk}x_jx_k$ $(i=1,\ 2,\ 3)$ (инвариант $(abc)$ Аронгольда).

Вывести отсюда в случае, когда все три формы одинаковы, выражение $\frac{1}{6}A_{111}$ для дискриминанта тройничной квадратичной формы $f_1$, а в случае, когда одинаковы только две формы, найти выражения двух совместных относительных инвариантов Салмона двух тройничных квадратичных форм $f_1$, $f_2$:

$$\theta = \frac{1}{2}A_{122} \quad \text{и} \quad \theta' = \frac{1}{2}A_{112}$$

(Брааш [47]).

**21.** Указать систему двух двойничных кубических форм, у которых совместным относительным инвариантом веса 3 будет четырехмерный гипердетерминант 2-го порядка

$$\left|\begin{array}{cc|cc} A_{1111} & 0 & 0 & A_{1122} \\ 0 & A_{1122} & A_{1122} & 1 \\ \hline 1 & A_{2112} & A_{2112} & 0 \\ A_{2112} & 0 & 0 & A_{2222} \end{array}\right| \qquad \overset{\pm}{(i_2)},\ \overset{\pm}{(i_4)},\ \overset{\pm}{(i_3)},\ \overset{\pm}{(i_1)}$$

**22.** Вычислить, применяя теорему 4.12:

а) совместный относительный инвариант веса 4 двух двойничных форм 4-й степени

$$f_i = \sum_{i_1,\,\dots,\,i_4=1}^{2} A_{ii_1i_2i_3i_4}x_{i_1}x_{i_2}x_{i_3}x_{i_4} \qquad (i=1,\ 2);$$

б) совместный относительный инвариант веса 6 двух двойничных форм 6-й степени

$$f_i = \sum_{i_1,\,\dots,\,i_6=1}^{2} A_{ii_1i_2\dots i_6}x_{i_1}x_{i_2}\dots x_{i_6} \qquad (i=1,\ 2).$$

**23.** Вычислить, применяя теорему 4.13, все относительные коварианты каждой из форм $\sum\limits_{i_1,\,\dots,\,i_4=1}^{2} A_{i_1i_2i_3i_4}x_{i_1}x_{i_2}x_{i_3}x_{i_4}$, $\sum\limits_{i_1,\,\dots,\,i_5=1}^{2} A_{i_1i_2i_3i_4i_5}x_{i_1}x_{i_2}x_{i_3}x_{i_4}x_{i_5}$, представляемые ее гессианами.

**24.** Доказать, что всякая форма нечетной степени $2q+1$ от четного числа $n$ переменных имеет $q$ инвариантов степени $n^2$ относительно коэффициентов данной формы (Гегенбауер [84]).

**25.** Если форма приводится к любой степени линейной формы, то все ее гессианы, начиная с двумерного гессиана, равны нулю. Доказать (Лека [113]).

**26.** Доказать, что $(p+1)$-мерный якобиан системы $n$ ковариантов $f_1$, $f_2$, $\dots$, $f_n$ формы $f$ от $n$ переменных, веса которых равны соответственно $\pi_1$, $\pi_2$, $\dots$, $\pi_n$, есть новый ковариант формы $f$ веса $p + \sum\limits_{i=1}^{n} \pi_i$ (Гегенбауер [84]).

**27.** Пусть дана система $n^{p-\pi+1}$ форм $f_{ii_{\pi+1}\dots i_p}$ $(p \geqq \pi;\ i,\ i_{\pi+1},\ \dots,\ i_p = 1, 2, \dots, n)$ от $n$ переменных $x_1$, $x_2$, $\dots$, $x_n$ степеней $p_{ii_{\pi+1}\dots i_p} \geqq \pi$. Выражение

$$\frac{\prod\limits_1^n (p_{ii_{\pi+1}\dots i_p} - \pi)!}{\prod\limits_1^n (p_{ii_{\pi+1}\dots i_p}!)} \left| \frac{\partial^\pi f_{(\pm)s\,\overset{\pm}{i}\,i_{\pi+1}\dots \overset{\pm}{i_p}}}{\partial x_{\overset{\pm}{i_1}}\,\partial x_{\overset{\pm}{i_2}}\dots\partial x_{\overset{\pm}{i_\pi}}} \right| \qquad (i,\ i_1,\ \dots,\ i_p = 1,\ 2,\ \dots,\ n),$$

где в $(p+1)$-мерном детерминанте наивысшего рода символ $(\pm)s$ обозначает $+$ или $\pm$ в зависимости от четности числа $p$, будем называть *$(p+1)$-мерным якобианом системы $n^{p-\pi+1}$ форм $f_{ii_{\pi+1}\ldots i_p}$.*

Доказать, что этот якобиан есть совместный относительный ковариант системы $n^{p-\pi+1}$ форм $f_{ii_{\pi+1}\ldots i_p}$, вес которого равен $\pi$ (Эшерих [73]).

28. Дана система $n$ различных форм $f_1, f_2, \ldots, f_n$ от $n$ переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Доказать, что кубический детерминант $n$-го порядка

$$\left|\frac{\partial f_{\overset{+}{i}}}{\partial x_{\underset{j}{\pm}}}\cdot\frac{\partial f_i}{\partial x_{\underset{k}{\pm}}}\right| \quad (i,\ j,\ k=1,\ 2,\ \ldots,\ n),$$

где каждое сечение ориентации $(i)$ представляет симметрическую квадратную матрицу, элементами которой являются произведения двух частных производных 1-го порядка соответствующей формы, есть совместный относительный ковариант веса 2 форм данной системы (Гедрик [98]).

29. Даны две системы форм $f_i^{(1)}, f_i^{(2)}$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ от $n$ переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, причем формы каждой системы различны между собой. Доказать, что кубический детерминант $n$-го порядка

$$\left|\frac{\partial f^{(1)}_{\overset{+}{i}}}{\partial x_{\underset{j}{\pm}}}\cdot\frac{\partial f^{(2)}_i}{\partial x_{\underset{k}{\pm}}}\right| \quad (i,\ j,\ k=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$$

есть совместный относительный ковариант веса 2 данных $2n$ форм (Гедрик [98]).

30. Упражнения 28 и 29 распространить на $(p+1)$-мерные $(p \geqq 3)$ детерминанты $n$-го порядка.

## § 5. Инвариантные множители и элементарные делители полиномиальной пространственной матрицы

1. Переходя к вопросу об инвариантах полиномиальной пространственной матрицы, мы для ясности изложения будем рассматривать кубическую $\lambda$-матрицу $M(\lambda)=\|M_{ijk}(\lambda)\|$ $(i, j, k=1, 2, \ldots, n)$. Полученные результаты нетрудно уже будет распространить на полиномиальные матрицы высших измерений (упражнения 8—12).

Понятие рангов пространственной матрицы с постоянными, т. е. неполиномиальными элементами и их инвариантные свойства естественным образом обобщаются и на полиномиальные матрицы.

Так, *двумерным рангом матрицы $M(\lambda)$ по одному из индексов $i, j, k$, например $r_i(\lambda)$, называем ранг прямоугольной матрицы*

$$\|M_{ijk}(\lambda)\|=\left\|\begin{matrix} M_{111}(\lambda) & M_{112}(\lambda) & \ldots & M_{11n}(\lambda) & \ldots & M_{1n1}(\lambda) & M_{1n2}(\lambda) & \ldots & M_{1nn}(\lambda) \\ M_{211}(\lambda) & M_{212}(\lambda) & \ldots & M_{21n}(\lambda) & \ldots & M_{2n1}(\lambda) & M_{2n2}(\lambda) & \ldots & M_{2nn}(\lambda) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ M_{n11}(\lambda) & M_{n12}(\lambda) & \ldots & M_{n1n}(\lambda) & \ldots & M_{nn1}(\lambda) & M_{nn2}(\lambda) & \ldots & M_{nnn}(\lambda) \end{matrix}\right\|,$$

составленной из строк направления $(i)$ матрицы $M(\lambda)$.

*Трехмерным рангом матрицы $M(\lambda)$ по двум каким-нибудь из индексов $i, j, k$*, например $r_{jk}^{(i)}(\lambda)$, называем наивысший порядок не равных тождественно нулю кубических миноров с сигнатурой $(\overset{+}{i})$, порождаемых матрицей $M(\lambda)$.

Матрицу $M(\lambda)$ будем называть *регулярной*, если все ее трехмерные ранги равны ее порядку[1]), и *иррегулярной* — в противном случае.

[1]) В этом случае, как вытекает из следствия IV теоремы 2.2, и все двумерные ранги матрицы $M(\lambda)$ равны ее порядку.

Ранги полиномиальной пространственной матрицы, так же как и ранги пространственной матрицы с постоянными элементами, являются арифметическими инвариантами относительно ее элементарных преобразований.

Кроме рангов, однако, существуют еще и другие величины, обладающие инвариантными свойствами. Чтобы показать это, докажем следующую теорему.

Теорема 5.1. *Наибольший общий делитель* $D_\nu^{(i)}(\lambda)$ *(со старшим коэффициентом, равным единице) порождаемых матрицей* $M(\lambda)$ *кубических миноров* $\nu$*-го порядка с сигнатурой* $\overset{+}{(i)}$, *где* $\nu$ *не превышает трехмерного ранга* $r_{jk}^{(i)}(\lambda)$ *матрицы* $M(\lambda)$, *остается неизменным при элементарных преобразованиях этой матрицы.*

Действительно, преобразования типа

$$\text{(а)} \qquad \boxed{l(\delta)}\cdot t \qquad (\delta \text{ — любой из индексов } i,\ j,\ k)$$

или

$$\text{(б)} \qquad \boxed{m(\delta)}+\boxed{l(\delta)}\cdot\psi(\lambda) \qquad (\delta \text{ — любой из индексов } j,\ k)$$

матрицы $M(\lambda)$, очевидно, не меняют полинома $D_\nu^{(i)}(\lambda)$.

Преобразование же типа

$$\text{(б)} \qquad \boxed{m(i)}+\boxed{l(i)}\cdot\psi(\lambda)$$

матрицы $M(\lambda)$ приводит к новой матрице, у которой все порождаемые ею кубические миноры $\nu$-го порядка ($\nu \leqq r_{jk}^{(i)}(\lambda)$) с сигнатурой $\overset{+}{(i)}$, содержащие элементы $m$-го сечения ориентации $(i)$ исходной матрицы $M(\lambda)$, являются линейными однородными функциями от косигнатурных миноров $\nu$-го порядка, порождаемых матрицей $M(\lambda)$, тогда как все остальные из упомянутых выше миноров остаются без изменения. Таким образом, и в этом случае полином $D_\nu^{(i)}(\lambda)$ остается неизменным.

Тем же свойством обладают наибольшие общие делители $D_\nu^{(j)}(\lambda)$ и $D_\nu^{(k)}(\lambda)$ порождаемых матрицей $M(\lambda)$ кубических миноров $\nu$-го порядка с сигнатурами $\overset{+}{(j)}$ и $\overset{+}{(k)}$, причем соответственно

$$\nu \leqq r_{ik}^{(j)}(\lambda) \quad \text{и} \quad \nu \leqq r_{ij}^{(k)}(\lambda).$$

Вместо $D_\nu^{(i)}(\lambda)$, $D_\nu^{(j)}(\lambda)$, $D_\nu^{(k)}(\lambda)$ можно ввести другие инварианты, которые мы назовем *инвариантными множителями* матрицы $M(\lambda)$. Для определения их воспользуемся следующей теоремой.

Теорема 5.2. $D_\nu^{(i)}(\lambda)$ *делится на* $D_{\nu-1}^{(i)}(\lambda)$ $(2 \leqq \nu \leqq r_{jk}^{(i)}(\lambda))$,

$D_\nu^{(j)}(\lambda)$ *делится на* $D_{\nu-1}^{(j)}(\lambda)$ $(2 \leqq \nu \leqq r_{ik}^{(j)}(\lambda))$,

$D_\nu^{(k)}(\lambda)$ *делится на* $D_{\nu-1}^{(k)}(\lambda)$ $(2 \leqq \nu \leqq r_{ij}^{(k)}(\lambda))$.

Теорема очевидна, так как всякий многомерный детерминант порядка $\nu$ ($\nu \geqq 2$) с той или иной сигнатурой является линейной однородной функцией от косигнатурных детерминантов порядка $\nu-1$.

Введем обозначения

$$E_\nu^{(i)}(\lambda) = \frac{D_\nu^{(i)}(\lambda)}{D_{\nu-1}^{(i)}(\lambda)} \qquad (\nu = 1,\ 2,\ \ldots,\ r_{jk}^{(i)}(\lambda)), \tag{5.1}$$

полагая $D_0^{(i)}(\lambda) \equiv 1$, и будем называть полиномы $E_\nu^{(i)}(\lambda)$ со старшими коэффициентами, равными единице, *инвариантными множителями по двум индексам $j$, $k$ матрицы $M(\lambda)$.*

Аналогично определяются *инвариантные множители матрицы $M(\lambda)$ по двум индексам $j$, $k$ или $i$, $j$.*

Из этих определений и теоремы 5.2 вытекает

Теорема 5.3. *Инвариантные множители по любым двум индексам матрицы $M(\lambda)$ являются инвариантами этой матрицы относительно ее элементарных преобразований.*

Замечание 5.1. Из равенств (5.1) и аналогичных им, составленных для индексов $j$ и $k$, вытекают очевидные равенства

$$D_\nu^{(i)}(\lambda) = E_1^{(i)}(\lambda) E_2^{(i)}(\lambda) \ldots E_\nu^{(i)}(\lambda) \qquad (\nu = 1,\ 2,\ \ldots,\ r_{jk}^{(i)}(\lambda)),$$

$$D_\nu^{(j)}(\lambda) = E_1^{(j)}(\lambda) E_2^{(j)}(\lambda) \ldots E_\nu^{(j)}(\lambda) \qquad (\nu = 1,\ 2,\ \ldots,\ r_{ik}^{(j)}(\lambda)),$$

$$D_\nu^{(k)}(\lambda) = E_1^{(k)}(\lambda) E_2^{(k)}(\lambda) \ldots E_\nu^{(k)}(\lambda) \qquad (\nu = 1,\ 2,\ \ldots,\ r_{ij}^{(k)}(\lambda)),$$

оправдывающие смысл термина «инвариантный множитель».

Разложим инвариантные множители по двум индексам $j$, $k$ матрицы $M(\lambda)$ на неприводимые в поле $P$ множители:

$$E_\nu^{(i)}(\lambda) = [e_1^{(i)}(\lambda)]^{\varepsilon_{\nu 1}^{(i)}} [e_2^{(i)}(\lambda)]^{\varepsilon_{\nu 2}^{(i)}} \ldots [e_s^{(i)}(\lambda)]^{\varepsilon_{\nu s}^{(i)}} \qquad (\nu = 1,\ 2,\ \ldots,\ r_{jk}^{(i)}(\lambda)). \tag{5.2}$$

Здесь $e_1^{(i)}(\lambda)$, $e_2^{(i)}(\lambda)$, $\ldots$, $e_s^{(i)}(\lambda)$ — все различные между собой неприводимые в поле $P$ полиномы (со старшими коэффициентами, равными единице), входящие в состав

$$E_1^{(i)}(\lambda),\ E_2^{(i)}(\lambda),\ \ldots,\ E_{r_{jk}^{(i)}(\lambda)}^{(i)}(\lambda) \text{ и } \varepsilon_{\nu 1}^{(i)} \geqq 0, \quad \varepsilon_{\nu 2}^{(i)} \geqq 0,\ \ldots,\ \varepsilon_{\nu s}^{(i)} \geqq 0.$$

Все отличные от единицы степени среди $[e_\tau^{(i)}(\lambda)]^{\varepsilon_{\nu\tau}^{(i)}}$ ($\tau = 1,\ 2,\ \ldots,\ s$; $\nu = 1,\ 2,\ \ldots,\ r_{jk}^{(i)}(\lambda)$) в разложении (5.2) будем называть *элементарными делителями по двум индексам $j$, $k$ матрицы $M(\lambda)$ в поле $P$.*

Аналогично определяются *элементарные делители по двум индексам $i$, $k$ или $i$, $j$ матрицы $M(\lambda)$ в поле $P$.*

Из этих определений и теоремы 5.3 вытекает

Теорема 5.4. *Элементарные делители по любым двум индексам матрицы $M(\lambda)$ являются инвариантами этой матрицы относительно ее элементарных преобразований.*

Замечание 5.2. Обычные инвариантные множители и элементарные делители двумерных $\lambda$-матриц $\|M_{\underset{\smile}{i}jk}(\lambda)\|$, $\|M_{i\underset{\smile}{j}k}(\lambda)\|$, $\|M_{ij\underset{\smile}{k}}(\lambda)\|$, составленных соответственно из строк направлений $(i)$, $(j)$, $(k)$ матрицы $M(\lambda)$, также будут инвариантами этой матрицы относительно ее элементарных преобразований. Все они являются делителями соответственных инвариантных множителей и элементарных делителей матрицы $M(\lambda)$, упомянутых выше.

Замечание 5.3. Если матрица $M(\lambda)$ — симметрическая, то ее ранги (двумерные или трехмерные) по различным индексам одинаковы и могут быть объединены в одно понятие *ранга (двумерного или трехмерного) этой матрицы.* Точно так же инвариантные множители или элементарные делители по различным парам индексов, будучи соответственно одинаковыми, объединяются в одно понятие *инвариантных множителей или элементарных делителей симметрической матрицы $M(\lambda)$.*

2. Обратимся теперь к частному случаю, когда все элементы $\lambda$-матрицы $M(\lambda)$ представляются линейными полиномами над полем комплексных (или вещественных) чисел.

Имеем тогда пучок кубических матриц $\lambda A + B$, где матрицы

$$A = \| A_{ijk} \|, \qquad B = \| B_{ijk} \| \qquad (i, j, k = 1, 2, \ldots, n)$$

образуют базис пучка.

В дальнейшем, однако, мы будем рассматривать пучок более общего вида — полиномиальную кубическую матрицу $n$-го порядка $\mathfrak{M}(\lambda, \mu) = \lambda A + \mu B$, у которой все элементы являются линейными формами от переменных параметров $\lambda$, $\mu$ над полем комплексных (или вещественных) чисел.

Составляя тогда выражения, аналогичные (5.1), для каждого из индексов $i$, $j$, $k$, мы получим инвариантные множители матрицы $\mathfrak{M}(\lambda, \mu)$, а затем и элементарные делители ее по любым двум индексам в виде степеней линейных множителей, входящих в состав инвариантных множителей. Пусть, например,

$$(a_1^{(i)}\lambda + b_1^{(i)}\mu)^{\varepsilon_1^{(i)}}, \quad (a_2^{(i)}\lambda + b_2^{(i)}\mu)^{\varepsilon_2^{(i)}}, \ldots, (a_m^{(i)}\lambda + b_m^{(i)}\mu)^{\varepsilon_m^{(i)}} \tag{5.3}$$

— все элементарные делители по двум индексам $j$, $k$ матрицы $\mathfrak{M}(\lambda, \mu)$, причем среди линейных множителей $a_h^{(i)}\lambda + b_h^{(i)}\mu$ $(h = 1, 2, \ldots, m)$ могут быть и пропорциональные друг другу, считаемые в этом случае одинаковыми. Особо важным во многих случаях является вопрос о показателях $\varepsilon_1^{(i)}, \varepsilon_2^{(i)}, \ldots, \varepsilon_m^{(i)}$ степеней линейных множителей. Для обозначения этих показателей, не пользуясь явной формой элементарных делителей, введем символ $[\varepsilon_1^{(i)} \varepsilon_2^{(i)} \ldots \varepsilon_m^{(i)}]$, который будем называть *характеристикой по индексам $j$, $k$ матрицы* $\mathfrak{M}(\lambda, \mu)$ [1]). При этом в характеристике будем заключать в круглые скобки те из чисел $\varepsilon_1^{(i)}, \varepsilon_2^{(i)}, \ldots, \varepsilon_m^{(i)}$, которые являются показателями степеней одинаковых линейных множителей, и помещать маленькие нули над показателями степеней одночленных элементарных делителей; кроме того (в случае поля вещественных чисел), будем ставить черточку над каждым $\varepsilon_h^{(i)}$, являющимся показателем степени мнимого линейного множителя. Так, например, характеристика по индексам $j$, $k$ матрицы $\mathfrak{M}(\lambda, \mu)$, имеющей элементарные делители по тем же индексам

$$(\lambda + 3\mu)^2, \quad \lambda - 2\mu, \quad \lambda - 2\mu, \quad \mu,$$

напишется в виде $[2\,(11)\,\overset{\circ}{1}]$. Если матрица $\mathfrak{M}(\lambda, \mu)$ не имеет элементарных делителей по индексам $j$, $k$, то ее характеристика по этим индексам есть $[0]$.

Аналогично определяется характеристика по индексам $i$, $k$ или $i$, $j$ матрицы $\mathfrak{M}(\lambda, \mu)$.

Замечание 5.4. Если матрица $\mathfrak{M}(\lambda, \mu)$ — симметрическая, то ее характеристики по различным парам индексов одинаковы и могут быть объединены в одно понятие *характеристики* $[\varepsilon_1 \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_m]$ *этой матрицы*.

Замечание 5.5. Данное выше определение элементарных делителей по каким-либо двум индексам матрицы $\mathfrak{M}(\lambda, \mu)$ можно заменить следующим определением, в которое не входит понятие об инвариантных множителях. Пусть $r$ — трехмерный ранг по каким-нибудь двум индексам, например $j$, $k$, матрицы $\mathfrak{M}(\lambda, \mu)$ и $D_\nu(\lambda, \mu)$, где $1 \leqslant \nu \leqslant r$, есть наибольший общий делитель порождаемых этой матрицей кубических миноров $\nu$-го порядка с соответствующей рангу $r$ сигнатурой $(i)$. Пусть, далее, $a\lambda + b\mu$ — один из линейных множителей $D_r(\lambda, \mu)$, а $l_\nu$ — показатель наивысшей степени этого

---

1) Ср. [167], стр. 88.

множителя, входящей в разложение $D_\nu(\lambda, \mu)$, причем $l_0 = 0$. Введем в рассмотрение целые неотрицательные числа $\varepsilon_\nu$, определяемые равенствами

$$\varepsilon_\nu = l_\nu - l_{\nu-1} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, r).$$

Тогда те из выражений $(a\lambda + b\mu)^{\varepsilon_\nu}$, в которых показатели $\varepsilon_\nu$ отличны от нуля, будут *элементарными делителями по двум индексам* $j$, $k$ *матрицы* $\mathfrak{M}(\lambda, \mu)$, *соответствующими линейному множителю* $a\lambda + b\mu$ [1]).

В качестве примера найдем все инвариантные множители, элементарные делители и характеристики полиномиальной кубической матрицы 2-го порядка

$$\mathfrak{M}(\lambda, \mu) = \left\| \begin{array}{cc|cc} \lambda+\mu & 0 & 0 & \lambda+2\mu \\ 0 & \lambda-\mu & 0 & \lambda-\mu \end{array} \right\| \quad \begin{array}{l} \to (i) \\ \to (k) \\ \downarrow (j) \end{array}.$$

Так как элементы матрицы $\mathfrak{M}(\lambda, \mu)$ — взаимно простые и порождаемые ею кубические миноры 2-го порядка с сигнатурами $(\overset{+}{i})$, $(\overset{+}{j})$, $(\overset{+}{k})$ равны соответственно

$$\begin{array}{ccc} 2(\lambda^2-\mu^2), & 0, & \lambda^2-\mu^2, \\ 2(\lambda+\mu)(\lambda+2\mu), & 0, & \lambda^2-\mu^2, \\ 0, & -2(\lambda-\mu)(\lambda+2\mu), & \lambda^2-\mu^2, \end{array}$$

то матрица $\mathfrak{M}(\lambda, \mu)$ имеет:

| Инвариантные множители | Элементарные делители | Характеристики | По индексам |
|---|---|---|---|
| $1,\ \lambda^2-\mu^2$ | $\lambda+\mu,\ \lambda-\mu$ | [11] | $j,\ k$ |
| $1,\ \lambda+\mu$ | $\lambda+\mu$ | [1] | $i,\ k$ |
| $1,\ \lambda-\mu$ | $\lambda-\mu$ | [1] | $i,\ j$ |

3. Все понятия, связанные с пучком кубических матриц $\mathfrak{M}(\lambda, \mu) = \lambda A + \mu B$, естественно переносятся и на пару матриц $A$, $B$, являющуюся базисом пучка.

Так, пара матриц $A$, $B$ называется *регулярной* или *иррегулярной*, смотря по тому, будет ли пучок $\lambda A + \mu B$ регулярным или иррегулярным. Одинаково определяются также *инвариантные множители, элементарные делители и характеристики* (*по той или иной паре индексов*) *пучка* $\lambda A + \mu B$ *и пары* $A$, $B$.

Рассматривая пучок $\lambda A + \mu B$, мы можем любые две матрицы

$$A' = \lambda_1 A + \mu_1 B, \qquad B' = \lambda_2 A + \mu_2 B \tag{5.4}$$

этого пучка, соответствующие значениям $\lambda_1$, $\lambda_2$ и $\mu_1$, $\mu_2$ параметров $\lambda$ и $\mu$, принять за его базис, если только

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & \mu_1 \\ \lambda_2 & \mu_2 \end{vmatrix} \neq 0. \tag{5.5}$$

Между элементарными делителями двух регулярных пар матриц, принадлежащих пучку $\lambda A + \mu B$, существует простое соотношение, выражаемое следующей теоремой.

---

[1]) Ср. [227], стр. 321.

Теорема 5.5. *Если регулярная пара кубических матриц $n$-го порядка $A$, $B$ имеет элементарные делители по каким-либо двум индексам*

$$(a_h\lambda + b_h\mu)^{\varepsilon_h} \qquad (h=1,\ 2,\ \ldots,\ m), \tag{5.6}$$

*то пара матриц* (5.4), *также регулярная при условии* (5.5), *имеет такого же типа элементарные делители*

$$(a'_h\lambda + b'_h\mu)^{\varepsilon_h} \qquad (h=1,\ 2,\ \ldots,\ m), \tag{5.7}$$

*где*

$$\left.\begin{aligned} a'_h &= a_h\lambda_1 + b_h\mu_1, \\ b'_h &= a_h\lambda_2 + b_h\mu_2 \end{aligned} \quad (h=1,\ 2,\ \ldots,\ m). \right\}^{1)} \tag{5.8}$$

Действительно, образуем пучок матриц $\lambda A' + \mu B'$ и, пользуясь выражением (5.4), представим его в виде

$$\lambda A' + \mu B' = (\lambda_1\lambda + \lambda_2\mu)\, A + (\mu_1\lambda + \mu_2\mu)\, B. \tag{5.9}$$

Так как $\lambda$ и $\mu$ не предполагаются одновременно равными нулю, то $\lambda_1\lambda + {}$ ${}+ \lambda_2\mu$ и $\mu_1\lambda + \mu_2\mu$ при условии (5.5) также не равны одновременно нулю. Не нарушая общности, можно считать $\lambda \neq 0$ и $\lambda_1\lambda + \lambda_2\mu \neq 0$. Тогда пучок (5.9) переписывается в виде

$$\lambda A' + \mu B' = \frac{\lambda_1\lambda + \lambda_2\mu}{\lambda}\,(\lambda A + \mu' B), \tag{5.10}$$

где

$$\mu' = \frac{\lambda(\mu_1\lambda + \mu_2\mu)}{\lambda_1\lambda + \lambda_2\mu}.$$

Возьмем один из линейных множителей, входящих в состав элементарных делителей (5.6) регулярной пары матриц $A$, $B$, и обозначим его через $a\lambda + b\mu$. Пусть $l_\nu$ — показатель наивысшей степени этого множителя, входящей в разложение наибольшего общего делителя $D_\nu(\lambda,\ \mu)$ порождаемых матрицей $\lambda A + \mu B$ кубических миноров порядка $\nu \leqq n$ с соответствующей сигнатурой, причем, очевидно, $l_\nu \leqq \nu$. Тогда каждый минор $\nu$-го порядка с такой же сигнатурой, порождаемый матрицей $\lambda A + \mu' B$, входящей в выражение (5.10), можно представить в виде

$$(a\lambda + b\mu')^{l_\nu} F(\lambda,\ \mu'),$$

где $F(\lambda,\ \mu')$ — двойничная форма от $\lambda$, $\mu'$ степени $\nu - l_\nu$. Поэтому на основании равенства (5.10) соответствующий минор $\nu$-го порядка, порождаемый матрицей $\lambda A' + \mu B'$, имеет вид

$$(a'\lambda + b'\mu)^{l_\nu} F_1(\lambda,\ \mu),$$

где

$$a' = a\lambda_1 + b\mu_1, \qquad b' = a\lambda_2 + b\mu_2 \tag{5.11}$$

и $F_1(\lambda,\ \mu)$ — двойничная форма от $\lambda$, $\mu$ степени $\nu - l_\nu$.

Следовательно, выражение

$$(a'\lambda + b'\mu)^{l_\nu} \tag{5.12}$$

входит в разложение наибольшего общего делителя $D'_\nu(\lambda,\ \mu)$ порождаемых упомянутой выше матрицей кубических миноров $\nu$-го порядка с той же сигнатурой, как и раньше.

Проводя эти рассуждения в обратном порядке, убеждаемся, что выражение (5.12) является наивысшей степенью линейного множителя $a'\lambda + b'\mu$,

1) Ср. [4], стр. 282.

входящей в разложение $D'_\nu(\lambda, \mu)$. Таким образом, согласно замечанию 5.5 элементарные делители по каким-либо двум индексам пары матриц (5.4) отличаются от элементарных делителей такого же типа пары матриц $A$, $B$ только тем, что линейные множители $a\lambda + b\mu$ заменены линейными множителями $a'\lambda + b'\mu$, причем имеют место соотношения (5.11). Следовательно, выражения (5.7) при условиях (5.8) действительно являются элементарными делителями рассматриваемого типа пары матриц (5.4).

Из доказанной теоремы в предположении, что

$$\lambda_1 = p \neq 0, \qquad \mu_1 = 0,$$
$$\lambda_2 = 0, \qquad \mu_2 = q \neq 0,$$

вытекают такие следствия:

Следствие I. *Если регулярная пара кубических матриц n-го порядка $A$, $B$ имеет элементарные делители по каким-либо двум индексам*

$$(a_h\lambda + b_h\mu)^{\varepsilon_h} \qquad (h = 1,\ 2,\ \ldots,\ m),$$

*то регулярная пара матриц $A' = pA$, $B' = qB$, где $p$, $q$ — отличные от нуля постоянные, имеет такого же типа элементарные делители*

$$(pa_h\lambda + qb_h\mu)^{\varepsilon_h} \qquad (h = 1,\ 2,\ \ldots,\ m).$$

Следствие II. *Пары матриц $A$, $B$ и $A'$, $B'$, упоминаемые в теореме 5.5 и следствии* 1, *обладают одной и той же характеристикой* (*того или иного типа*), *притом также и тогда, когда в нее введены круглые скобки или черточки*[1]).

Замечание 5.6. Если пучок матриц $\lambda A + \mu B$ — регулярный, то на основании следствия II для каждой пары матриц (5.4) этого пучка, удовлетворяющей условию (5.5), существует одна и та же характеристика по каким-либо двум индексам, притом также и тогда, когда в нее введены круглые скобки или черточки. Поэтому об этой характеристике будем говорить как о характеристике регулярного пучка матриц $\lambda A + \mu B$, рассматриваемого как бесчисленное множество кубических матриц, которые получим, давая частные значения параметрам $\lambda$ и $\mu$. Характеристика (того или иного типа) этого пучка, очевидно, остается неизменной при постоянных, т. е. не зависящих от параметров $\lambda$, $\mu$, элементарных преобразованиях его.

Согласно общему определению эквивалентности полиномиальных кубических матриц (гл. II, § 5), пучки кубических матриц $\lambda A + \mu B$ и $\lambda A_1 + \mu B_1$ называются *эквивалентными* в поле комплексных (или вещественных) чисел, если от одного из них можно перейти к другому при помощи конечного числа элементарных преобразований в этом поле. Для эквивалентности пар матриц $A$, $B$ и $A_1$, $B_1$, являющихся базисами этих пучков, необходимо, чтобы эти преобразования не зависели от параметров $\lambda$, $\mu$, т. е. были постоянными. В этом случае пучки $\lambda A + \mu B$ и $\lambda A_1 + \mu B_1$ будем называть *строго* эквивалентными[2]).

Из предыдущих теорем вытекает очевидная

Теорема 5.6. *Если пары кубических матриц $A$, $B$ и $A_1$, $B_1$ эквивалентны в поле комплексных* (*или вещественных*) *чисел, то ранги* (*двумерные и трехмерные*) *ассоциированных с ними пучков $\lambda A + \mu B$ и $\lambda A_1 + \mu B_1$, строго*

---

[1]) Но не маленькие нули, так как равенство нулю одного из коэффициентов $a_h$, $b_h$ в выражении (5.6) еще не обеспечивает обращения в нуль одного из коэффициентов $a'_h$, $b'_h$ в выражении (5.7).

[2]) Ср. [6], стр. 300.

*эквивалентных в этом случае, их инвариантные множители, элементарные делители и характеристики (по одной и той же паре индексов) — одни и те же.*

4. Отметим частные случаи, когда пучок $\mathfrak{M}(\lambda, \mu) = \lambda A + \mu B$ является симметрической полиномиальной кубической матрицей 2-го или 3-го порядка. Если

$$\mathfrak{M}(\lambda, \mu) = \| \mathfrak{M}_{ijk}(\lambda, \mu) \| \qquad (i, j, k = 1, 2),$$

то квадратный детерминант

$$\Delta(\lambda, \mu) = | \mathfrak{M}_{\alpha\beta}(\lambda, \mu) | \qquad (\alpha, \beta = 1, 2),$$

составленный из кубических миноров 2-го порядка $\mathfrak{M}_{\alpha\beta}(\lambda, \mu)$, порождаемых пучком $\lambda A + \mu B$, будем называть *дискриминантом* пучка кубических двойничных форм $\lambda f + \mu\varphi$, ассоциированного с $\lambda A + \mu B$.

В развернутом его выражении

$$\Delta(\lambda, \mu) = \Delta\lambda^4 + L_1\lambda^3\mu + L_2\lambda^2\mu^2 + L_3\lambda\mu^3 + \Delta'\mu^4 \tag{5.13}$$

коэффициенты $\Delta$ и $\Delta'$ есть соответственно дискриминанты форм $f$ и $\varphi$, а

$$L_m = \frac{1}{m!}\Big(\sum_{i,\,j,\,k=1}^{2} B_{ijk}\frac{\partial}{\partial A_{ijk}}\Big)^m \Delta =$$
$$= \frac{1}{(4-m)!}\Big(\sum_{i,\,j,\,k=1}^{2} A_{ijk}\frac{\partial}{\partial B_{ijk}}\Big)^{4-m}\Delta' \qquad (m = 1, 2, 3).$$

Легко убедиться, что имеет место

Теорема 5.7. *Дискриминант* $\Delta(\lambda, \mu)$, *а также коэффициенты* $\Delta$, $L_1$, $L_2$, $L_3$, $\Delta'$ *в развернутом его выражении* (5.13) *являются относительными инвариантами веса* 6, *тогда как линейные делители дискриминанта* $\Delta(\lambda, \mu)$, *считающиеся одинаковыми в случае их пропорциональности, являются абсолютными алгебраическими инвариантами и кратности их — арифметическими инвариантами по отношению к симметрическим элементарным преобразованиям пучка* $\lambda A + \mu B$.

Замечание 5.7. Из теоремы (5.7) следует, что у коэффициентов $\Delta$, $L_1$, $L_2$, $L_3$, $\Delta'$ полинома (5.13) при симметрических элементарных преобразованиях пучка $\lambda A + \mu B$ сохраняется равенство нулю или отличие от него, а также знаки в случае вещественных преобразований вещественного пучка.

Замечание 5.8. Число линейных делителей полинома $\Delta(\lambda, \mu)$, а также их кратности, очевидно, не меняются при замене базиса $A$, $B$ регулярного пучка $\lambda A + \mu B$ каким-либо другим базисом (5.4) при условии (5.5).

В случае, если

$$\mathfrak{M}(\lambda, \mu) = \| \mathfrak{M}_{ijk}(\lambda, \mu) \| \qquad (i, j, k = 1, 2, 3),$$

составим для $\mathfrak{M}(\lambda, \mu)$ присоединенную матрицу $C(\lambda, \mu)$. Далее, из кубических миноров 3-го порядка, порождаемых матрицей $\mathfrak{M}(\lambda, \mu)$, образуем симметрическую полиномиальную кубическую матрицу 3-го порядка

$$\overline{\mathfrak{M}}(\lambda, \mu) = \| \overline{\mathfrak{M}}_{ijk}(\lambda, \mu) \| \qquad (i, j, k = 1, 2, 3),$$

а из элементов матриц $\mathfrak{M}(\lambda, \mu)$, $\overline{\mathfrak{M}}(\lambda, \mu)$ — смешанно-присоединенную матрицу $K(\lambda, \mu)$ для $\mathfrak{M}(\lambda, \mu)$.

Теперь из элементов матриц $C(\lambda, \mu)$ и $K(\lambda, \mu)$ можно составить относительные инварианты Аронгольда $S(\lambda, \mu)$ веса 4 и $T(\lambda, \mu)$ веса 6, затем относительный инвариант $R(\lambda, \mu) = S^3(\lambda, \mu) - T^2(\lambda, \mu)$ веса 12 и абсолютный инвариант

$$I(\lambda, \mu)=\frac{R(\lambda, \mu)}{T^2(\lambda, \mu)}.$$

При симметрических элементарных преобразованиях полиномиальной матрицы $\boldsymbol{\mathfrak{M}}(\lambda, \mu)$ относительные инварианты, как в этом легко убедиться, воспроизводятся с точностью до некоторых постоянных, отличных от нуля множителей. Поэтому имеет место

Теорема 5.8. *Линейные делители относительных инвариантов $S(\lambda, \mu)$, $T(\lambda, \mu)$, $R(\lambda, \mu)$, считаемые одинаковыми в случае пропорциональности, являются абсолютными инвариантами, а кратности их — арифметическими инвариантами относительно симметрических элементарных преобразований матрицы $\boldsymbol{\mathfrak{M}}(\lambda, \mu)$.*

При помощи инвариантов $S(\lambda, \mu)$ и $T(\lambda, \mu)$ образуем для $\boldsymbol{\mathfrak{M}}(\lambda, \mu)$ из матриц $C(\lambda, \mu)$ и $K(\lambda, \mu)$ сложную квадратную матрицу

$$\mathfrak{C}(\lambda, \mu)=T(\lambda, \mu)\,C(\lambda, \mu)-S(\lambda, \mu)\,K(\lambda, \mu),$$

а из матриц $\mathfrak{M}(\lambda, \mu)$ и $\boldsymbol{\mathfrak{M}}(\lambda, \mu)$ — сложную кубическую матрицу

$$\mathfrak{U}(\lambda, \mu)=T(\lambda, \mu)\,\boldsymbol{\mathfrak{M}}(\lambda, \mu)-S(\lambda, \mu)\,\mathfrak{M}(\lambda, \mu)$$

(см. упражнение 6 § 4).

Как и при рассмотрении кубических матриц с постоянными элементами (§§ 3, 4), нетрудно убедиться, что симметрические элементарные преобразования полиномиальной матрицы $\boldsymbol{\mathfrak{M}}(\lambda, \mu)$ вызывают такого же рода преобразования симметрических полиномиальных матриц $C(\lambda, \mu)$, $K(\lambda, \mu)$, $\mathfrak{C}(\lambda, \mu)$, $\mathfrak{U}(\lambda, \mu)$.

Таким образом, имеет место

Теорема 5.9. *Эквивалентность в поле комплексных (или вещественных) чисел двух симметрических полиномиальных кубических матриц 3-го порядка над этим полем влечет за собой такого же рода эквивалентность соответствующих присоединенных, смешанно-присоединенных и сложных (квадратных и кубических) матриц.*

Замечание 5.9. Относительные инварианты $S(\lambda, \mu)$, $T(\lambda, \mu)$, $R(\lambda, \mu)$ пучка $\lambda A+\mu B$ являются, вообще говоря, формами от $\lambda$, $\mu$ соответственно 4-й, 6-й, 12-й степени, и числа их линейных делителей, так же как и кратности последних, очевидно, не меняются при замене базиса $A$, $B$ регулярного пучка $\lambda A+\mu B$ каким-либо другим базисом (5.4) при условии (5.5).

Замечание 5.10. Так как замена базиса $A$, $B$ пучка $\lambda A+\mu B$ каким-либо другим базисом (5.4) при условии (5.5) не меняет состава пучка, то при такой замене остается неизменной и совокупность инвариантов, составляющих полную систему

$$I(\lambda, \mu), \quad r(\lambda, \mu) \text{ или } \varrho(\lambda, \mu), \quad r_{C(\lambda, \mu)}, \quad r_{\mathfrak{C}(\lambda, \mu)}$$

(а в поле вещественных чисел и $\sigma_{C(\lambda, \mu)}$, $\sigma_{\mathfrak{C}(\lambda, \mu)}$, а также $\omega(T(\lambda, \mu))$ для всех значений параметров $\lambda$, $\mu$ (см. замечание 4.6).

Это замечание относительно последней совокупности инвариантов сохраняет силу также для пучков, эквивалентных $\lambda A+\mu B$ в поле комплексных (или вещественных) чисел.

### Упражнения

1. Найти двумерные и трехмерные ранги кубической $\lambda$-матрицы 3-го порядка

$$\longrightarrow (i)$$

$$\left\|\begin{array}{ccc|ccc|ccc} \lambda+1 & \lambda & 1 & \lambda-1 & 1 & 0 & 2\lambda & \lambda+1 & 1 \\ 0 & \lambda & \lambda & \lambda & 1 & \lambda+1 & 1 & 0 & 1 \\ \lambda+1 & 2\lambda & \lambda+1 & 2\lambda-1 & 2 & \lambda+1 & 2\lambda+1 & \lambda+1 & 2 \end{array}\right\| \begin{array}{l} \longrightarrow (k). \\ \downarrow \\ (j) \end{array}$$

**2.** Найти в поле вещественных чисел все инвариантные множители и элементарные делители кубической матрицы 4-го порядка

$$\left\|\begin{array}{cccc|cccc|cccc|cccc} \lambda^2-1 & \lambda-1 & 0 & 0 & \lambda+1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ \lambda^3-1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda+1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda+1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda^2+1 \end{array}\right\| \begin{array}{l} \to (i)\\ \to (k).\\ \downarrow (j) \end{array}$$

**3.** Если кубическая $\lambda$-матрица $M(\lambda)$ — диагональная и каждый диагональный элемент ее, отличный от постоянной, представлен в виде произведения степеней различных полиномиальных множителей, неприводимых в поле $P$, на некоторую постоянную, то степени эти в точности равны элементарным делителям матрицы в поле $P$. Доказать.

4. Показать, что симметрическая полиномиальная кубическая матрица 3-го порядка

$$\left\|\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 0 & \lambda & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ \lambda & 0 & 0 & 0 & -\lambda & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{array}\right\| \begin{array}{l} \to (i)\\ \to (k)\\ \downarrow (j) \end{array}$$

имеет инвариантные множители $1$, $\lambda$, $\lambda\mu$, элементарные делители $\lambda$, $\lambda$, $\mu$ и характеристику $[(\mathring{1}\mathring{1})\mathring{1}]$.

5. Показать, что симметрическая полиномиальная кубическая матрица 3-го порядка

$$\left\|\begin{array}{ccc|ccc|ccc} \mu & \lambda & 0 & \lambda & -\mu & 0 & 0 & 0 & 0\\ \lambda & -\mu & 0 & -\mu & -\lambda & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda+\mu \end{array}\right\| \begin{array}{l} \to (i)\\ \to (k)\\ \downarrow (j) \end{array}$$

**имеет инвариантные множители** $1$, $1$, $(\lambda^2+\mu^2)(\lambda+\mu)$, элементарные делители $\lambda+\mu i$, $\lambda-\mu i$, $\lambda+\mu$ и характеристику $[\bar{1}\bar{1}1]$.

6. Квадратные детерминанты $|\mathfrak{M}^{(i)}_{\alpha\beta}(\lambda,\ \mu)|$, $|\mathfrak{M}^{(j)}_{\alpha\beta}(\lambda,\ \mu)|$, $|\mathfrak{M}^{(k)}_{\alpha\beta}(\lambda,\ \mu)|$ $(\alpha,\ \beta=1,\ 2)$, составленные **из кубических** миноров 2-го порядка с сигнатурами $(\overset{+}{i})$, $(\overset{+}{j})$, $(\overset{+}{k})$, порождаемых пучком асимметрических кубических матриц 2-го порядка $\mathfrak{M}(\lambda,\ \mu)=\lambda A+\mu B$, **тождественно равны между собой, и общее значение их** $\Delta(\lambda,\ \mu)$ — **дискриминант пучка** двойничных трилинейных форм $\lambda F+\mu\Phi$, ассоциированного с $\lambda A+\mu B$, — есть относительный инвариант веса 2 для **каждого** ряда переменных этого пучка. Доказать.

**7. Распространить теорему 5.7 на пучки двойничных трилинейных форм.**

8. Пусть $M(\lambda)$—$p$-мерная $\lambda$-матрица $n$-го порядка $\|M_{i,\ \dots,\ i_p}(\lambda)\|$ $(i_1,\ \dots,\ i_p=1,\ \dots,\ n)$ и $D^{(\sigma)}_{\nu}(\lambda)$ — наибольший общий делитель (со старшим коэффициентом, равным единице) порождаемых матрицей $M(\lambda)$ $(p-m+1)$-мерных $(1\leqq m\leqq p-1)$ миноров $\nu$-го порядка с сигнатурой $\sigma=(\overset{\pm}{i}_{\alpha_1}\ \dots\ \overset{\pm}{i}_{\alpha_{p-m}}\underbrace{i_{\alpha_{p-m+1}}\ \dots\ \overset{\pm}{i}_{\alpha_p}})$ или $\sigma=(\overset{\pm}{i}_{\alpha_1}\ \dots\ \overset{\pm}{i}_{\alpha_{p-m}}\underbrace{i_{\alpha_{p-m+1}}\ \dots\ \overset{+}{i}_{\alpha_p}})$ в зависимости от четности $p-m+1$ $(\alpha_1,\ \dots,\ \alpha_p$ — совокупность чисел $1,\ 2,\ \dots,\ p$, расположенных в некотором порядке), где $\nu$ не превышает $(p-m+1)$-мерного ранга $r=r^{(i_{\alpha_{p-m+1}}\ \dots\ i_{\alpha_p})}_{i_{\alpha_1}\ \dots\ i_{\alpha_{p-m}}}(\lambda)$ по $p-m$ индексам $i_{\alpha_1},\ \dots,\ i_{\alpha_{p-m}}$ матрицы $M(\lambda)$ (см. § 2, п. 2). Доказать, что $D^{(\sigma)}_{\nu}(\lambda)$ остается неизменным при элементарных преобразованиях матрицы $M(\lambda)$.

9. Показать, что $D^{(\sigma)}_{\nu}(\lambda)$ делится на $D^{(\sigma)}_{\nu-1}(\lambda)$ $(2\leqq\nu\leqq r)$ (см. упражнение 8).

**10. Полиномы**

$$E^{(\sigma)}_{\nu}(\lambda)=\frac{D^{(\sigma)}_{\nu}(\lambda)}{D^{(\sigma)}_{\nu-1}(\lambda)}\qquad(\nu=1,\ 2,\ \dots,\ r),$$

где $D^{(\sigma)}_{0}(\lambda)\equiv 1$ (см. упражнение 9), будем называть инвариантными множителями по $p-m$ индексам $i_{\alpha_1},\ \dots,\ i_{\alpha_{p-m}}$ матрицы $M(\lambda)$. Доказать, что эти множители являются инвариантами относительно элементарных преобразований матрицы $M(\lambda)$.

**11.** Разложим инвариантные множители по $p-m$ индексам $i_{\alpha_1}, \ldots, i_{\alpha_{p-m}}$ матрицы $M(\lambda)$ (см. упражнение (10) на неприводимые в поле $P$ множители

$$E_\nu^{(\sigma)}(\lambda)=[e_1^{(\sigma)}(\lambda)]^{\varepsilon_{\nu 1}^{(\sigma)}} \ldots [e_s^{(\sigma)}(\lambda)]^{\varepsilon_{\nu s}^{(\sigma)}} \qquad (\nu=1,\ 2,\ \ldots,\ r), \tag{5.14}$$

где $e_1^{(\sigma)}(\lambda), \ldots, e_s^{(\sigma)}(\lambda)$ — все различные между собой неприводимые в поле $P$ полиномы (со старшими коэффициентами, равными единице), входящие в состав $E_1^{(\sigma)}(\lambda), \ldots, E_r^{(\sigma)}(\lambda)$ и $\varepsilon_{\nu 1}^{(\sigma)} \geqq 0, \ldots, \varepsilon_{\nu s}^{(\sigma)} \geqq 0$.

Все отличные от единицы степени среди $[e_\tau^{(\sigma)}(\lambda)]^{\varepsilon_{\nu\tau}^{(\sigma)}}$ $(\tau=1, \ldots, s;\ \nu=1, \ldots, r)$ в разложении (5.14) будем называть *элементарными делителями по $p-m$ индексам* $i_{\alpha_1}, \ldots, i_{\alpha_{p-m}}$ *матрицы* $M(\lambda)$ *в поле* $P$. Доказать, что эти делители являются инвариантами относительно элементарных преобразований матрицы $M(\lambda)$.

**12.** Обобщая понятия инвариантных множителей и элементарных делителей по $p-m$ простым индексам $i_{\alpha_1}, \ldots, i_{\alpha_{p-m}}$ матрицы $M(\lambda)$ (упражнения 10 и 11), дать определения инвариантных множителей и элементарных делителей по $\pi-m$ $(1 \leqq \pi-m \leqq p-m \leqq p-1)$- кратным индексам $u_{\alpha_1}, \ldots, u_{\alpha_{\pi-m}}$ матрицы $M(\lambda)$ (см. § 2, п. 3) и доказать, что эти инвариантные множители и элементарные делители остаются неизменными при ее элементарных преобразованиях.

ГЛАВА IV

# КЛАССИФИКАЦИЯ ТРИЛИНЕЙНЫХ, ЛИНЕЙНО-КВАДРАТИЧНЫХ И КУБИЧЕСКИХ ДВОЙНИЧНЫХ ФОРМ

## § 1. Классификация двойничных трилинейных форм

1. В 1920 г. Шварц [210] впервые получила классы всех двойничных трилинейных форм, эквивалентных в поле комплексных чисел, и указала, пользуясь комитантами, для каждого класса представляющую его каноническую форму.

К тому же результату на основании геометрических соображений пришел Душек [72]. Ольденбургер [169, 173, 174] с помощью арифметических

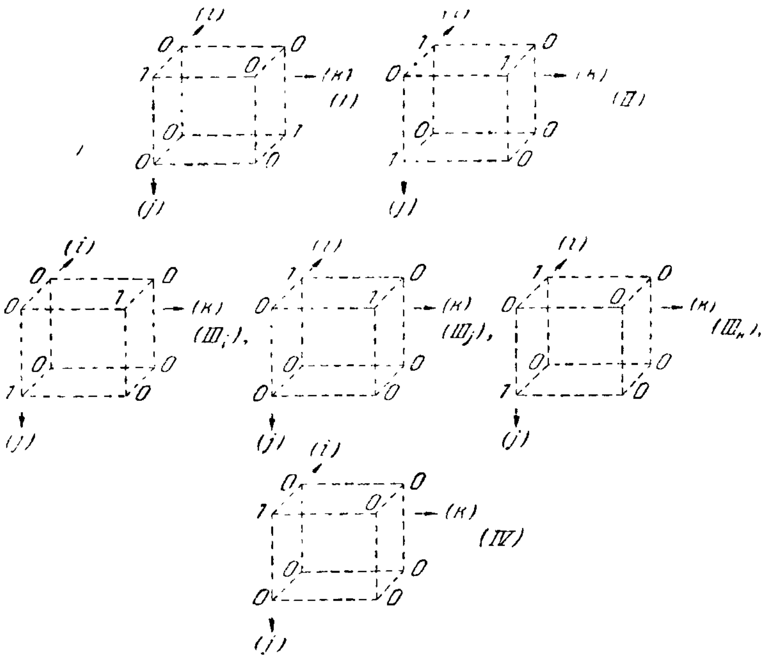



Рис. 13.

инвариантов указал канонические виды двойничных трилинейных форм в комплексной и вещественной областях. Автором [26] были получены канонические виды этих форм путем элементарных преобразований соответствующих кубических матриц.

Из более ранних работ по теории двойничных трилинейных форм отметим мемуары Лепежа [184—186] и Дедекинда [69]. Вопросу о классификации трилинейных форм (главным образом тройничных) над полем комплексных чисел посвящены работы Тролла и Чэнлер [222, 223].

2. Приводимая ниже классификация двойничных трилинейных форм основывается на следующей теореме.

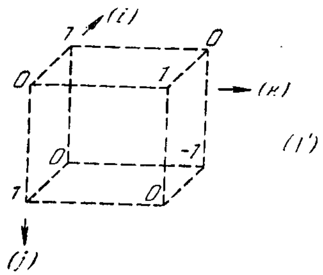


Рис. 14.

Теорема 1.1. *Всякая ненулевая кубическая матрица 2-го порядка эквивалентна в поле комплексных чисел одной и только одной из следующих канонических матриц* (рис. 13). *В поле вещественных чисел к каноническим матрицам, кроме указанных выше, относится также матрица $I'$* (рис. 14).

Действительно, предполагая, что не все элементы матрицы $A = \| A_{ijk} \|$ $(i,\ j,\ k = 1,\ 2)$ двойничной трилинейной формы $F = \sum_{i,j,k=1}^{2} A_{ijk} x_i y_j z_k$ равны нулю, мы можем, не ограничивая общности, считать $A_{111} \neq 0$.

Подвергая тогда матрицу $A$ последовательно элементарным преобразованиям

$$\boxed{I(i)}\,\frac{1}{A_{111}}, \quad \boxed{II(i)}+\boxed{I(i)}(-A_{211}), \boxed{II(j)}+\boxed{I(j)}\left(-\frac{A_{121}}{A_{111}}\right),$$
$$\boxed{II(k)}+\boxed{I(k)}\left(-\frac{A_{112}}{A_{111}}\right),$$

получим матрицу вида

$$\left\|\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & B_{212} \\ 0 & B_{121} & B_{221} & B_{222} \end{array}\right\| . \tag{1.1}$$

Будем различать следующие случаи.

I. $B_{222} \neq 0, \quad B_{221} \neq 0.$

Тогда матрица (1.1) операциями $\boxed{II(j)}\,\frac{1}{B_{221}}$, $\boxed{II(k)}\,\frac{B_{221}}{B_{222}}$ приводится к матрице вида

$$\left\|\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & C_{212} \\ 0 & C_{122} & 1 & 1 \end{array}\right\| . \tag{1.2}$$

Тут возможны такие варианты.

1) Оба элемента $C_{122}$, $C_{212}$ отличны от нуля. Совершая тогда над матрицей (1.2) операции

$$\boxed{I(j)}\,\frac{1}{C_{212}}, \qquad \boxed{I(i)}\,C_{212},$$

получим матрицу вида

$$\left\|\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & D_{122} & 1 & 1 \end{array}\right\| , \tag{1.3}$$

где $D_{122} \neq 0$.

Составим из элементов матрицы (1.3) по формулам (4.1) гл. III квадратичные формы $H_i$ и $H_j$. Приравнивая их нулю и полагая $\frac{x_1}{x_2}=\lambda$, $\frac{y_1}{y_2}=\mu$, получим уравнения

$$D_{122}\lambda^2+\lambda-1=0, \qquad \mu^2+\mu-D_{122}=0.$$

Пусть дискриминант $-\delta=-(1+4D_{122})$ квадратичных форм $H_i$, $H_j$ не равен нулю.

Тогда упомянутые выше уравнения имеют конечные, отличные от нуля, простые корни:

$$\left.\begin{aligned} \lambda_1&=\frac{-1+\sqrt{\delta}}{2D_{122}}, \quad & \lambda_2&=\frac{-1-\sqrt{\delta}}{2D_{122}}, \\ \mu_1&=\frac{-1+\sqrt{\delta}}{2}, \quad & \mu_2&=\frac{-1-\sqrt{\delta}}{2}. \end{aligned}\right\} \tag{1.4}$$

Обращаясь теперь к матрице (1.3), подвергнем ее операциям

$$\boxed{II\,(i)}+\boxed{I\,(i)}\,\lambda_2, \qquad \boxed{I\,(i)}\,(\lambda_1-\lambda_2), \qquad \boxed{I\,(i)}+\boxed{II\,(i)}\,;$$

$$\boxed{II\,(j)}+\boxed{I\,(j)}\,\mu_2, \qquad \boxed{I\,(j)}\,(\mu_1-\mu_2), \qquad \boxed{I\,(j)}+\boxed{II\,(j)}\,.$$

В результате получим матрицу

$$\left\|\begin{array}{cc|cc} 1+\lambda_1\mu_1 & 1+\mu_1+D_{122}\lambda_1 & 1+\lambda_2\mu_1 & 1+\mu_1+D_{122}\lambda_2 \\ 1+\lambda_1\mu_2 & 1+\mu_2+D_{122}\lambda_1 & 1+\lambda_2\mu_2 & 1+\mu_2+D_{122}\lambda_2 \end{array}\right\| \begin{array}{l} \to (i) \\ \to (k) \\ \downarrow (j) \end{array},$$

которая после подстановки выражений (1.4) примет вид

$$\left\|\begin{array}{cc|cc} \dfrac{2\sqrt{\delta}}{\sqrt{\delta}+1} & \sqrt{\delta} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{2\sqrt{\delta}}{\sqrt{\delta}-1} & -\sqrt{\delta} \end{array}\right\| \begin{array}{l} \to (i) \\ \to (k) \\ \downarrow (j) \end{array}.$$

Производя над последней матрицей операции

$$\boxed{I\,(k)}\,\frac{\sqrt{\delta}+1}{2\sqrt{\delta}}, \qquad \boxed{II\,(k)}+\boxed{I\,(k)}\,(-\sqrt{\delta}),$$

$$\boxed{II\,(k)}\,\frac{1-\sqrt{\delta}}{2\delta}, \quad \boxed{I\,(k)}+\boxed{II\,(k)}\,\frac{1+\sqrt{\delta}}{1-\sqrt{\delta}},$$

придем к канонической матрице ($I$), которой будет эквивалентна в поле комплексных чисел матрица $A$ при сделанных нами предположениях. В поле вещественных чисел эквивалентность будет иметь место лишь в том случае, когда дискриминант $\Delta$ формы $F$, ассоциированной с матрицей $A$, — отрицательный, так как тогда, согласно замечанию 4.1 гл. III, $\delta>0$.

Если же $\Delta > 0$, то $\delta < 0$ и для нахождения эквивалентной канонической матрицы подвергаем матрицу (1.3) операциям

$$\boxed{II(i)} + \boxed{I(i)}\left(-\frac{1}{2D_{122}}\right), \quad \boxed{I(i)}\sqrt{-\delta}, \quad \boxed{II(i)}\cdot 2D_{122};$$
$$\boxed{II(j)} + \boxed{I(j)}\left(-\frac{1}{2}\right), \quad \boxed{I(j)}\sqrt{-\delta}, \quad \boxed{II(j)}\cdot 2;$$
$$\boxed{II(k)}\frac{1}{2D_{122}\sqrt{-\delta}}, \quad \boxed{I(k)} + \boxed{II(k)}\sqrt{-\delta}, \quad \boxed{I(k)}\left(-\frac{1}{\delta}\right),$$
$$\boxed{I-(k)-II}.$$

В результате получим каноническую матрицу $(I')$.

Пусть теперь дискриминант $-\delta$ равен нулю, т. е. $D_{122} = -\frac{1}{4}$. Совершая тогда над матрицей (1.3) операции

$$\boxed{II(j)}(-4), \quad \boxed{II(i)} + \boxed{I(i)}\cdot 2, \quad \boxed{II(j)} + \boxed{I(j)}\cdot 2,$$
$$\boxed{I(k)} + \boxed{II(k)}(-2), \quad \boxed{I-(k)-II},$$

придем к канонической матрице $(II)$, которой будет, таким образом, эквивалентна матрица $A$ как в поле комплексных, так и в поле вещественных чисел.

2) По крайней мере один из элементов $C_{122}$, $C_{212}$ равен нулю. Тогда, как нетрудно убедиться, матрица (1.2) приводится к каноническому виду (I).

II. $$B_{222} = 0, \quad B_{221} \neq 0.$$

В этом случае матрица (1.1) операцией $\boxed{II(i)}\frac{1}{B_{221}}$ приводится к матрице вида

$$\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & E_{212} \\ 0 & E_{122} & 1 & 0 \end{Vmatrix} \begin{array}{l} \to (i) \\ \to (k) \\ \downarrow (j) \end{array}. \tag{1.5}$$

Здесь различаем следующие варианты.

1) Оба элемента — $E_{122}$, $E_{212}$ — отличны от нуля.

Производя тогда над матрицей (1.5) операцию $\boxed{II(k)}\frac{1}{E_{212}}$, приходим к матрице вида

$$\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & F_{122} & 1 & 0 \end{Vmatrix} \begin{array}{l} \to (i) \\ \to (k) \\ \downarrow (j) \end{array}, \tag{1.6}$$

где $F_{122} \neq 0$.

Подвергнем теперь матрицу (1.6) операциям

$$\boxed{II(i)}\sqrt{F_{122}}, \quad \boxed{II(i)} + \boxed{I(i)}(-1), \quad \boxed{I(i)}\cdot 2, \quad \boxed{I(i)} + \boxed{II(i)},$$
$$\boxed{II(j)}\frac{1}{\sqrt{F_{122}}}, \quad \boxed{II(k)}\frac{1}{\sqrt{F_{122}}}, \quad \boxed{I(j)} + \boxed{II(j)},$$
$$\boxed{II(j)} + \boxed{I(j)}\left(-\frac{1}{2}\right),$$
$$\boxed{I(k)} + \boxed{II(k)}, \quad \boxed{II(k)} + \boxed{I(k)}\left(-\frac{1}{2}\right), \quad \boxed{I(i)}\cdot\frac{1}{4}, \quad \boxed{II(i)}(-1).$$

В результате получим каноническую матрицу ($I$), которой будет эквивалентна в поле комплексных чисел матрица $A$ при упомянутых выше условиях. В поле вещественных чисел эквивалентность будет иметь место только при $F_{122} > 0$. Если же $F_{122} < 0$, то матрицу (1.6) подвергаем операциям

$$\boxed{II\,(i)}\cdot\sqrt{-F_{122}}, \quad \boxed{II\,(j)}\cdot\frac{1}{\sqrt{-F_{122}}}, \quad \boxed{II\,(k)}\,\frac{1}{\sqrt{-F_{122}}}, \quad \boxed{I-(i)-II}$$

и приходим к канонической матрице ($I'$).

2) Один из элементов $E_{122}$, $E_{212}$ равен нулю. Тогда матрица (1.5) приводится к каноническому виду ($II$).

3) Оба элемента $E_{122}$, $E_{212}$ равны нулю.

Матрица (1.5) принимает тогда после операции $\boxed{I-j-II}$ вид канонической матрицы ($III_k$), которой будет, таким образом, эквивалентна матрица $A$ как в поле комплексных, так и в поле вещественных чисел.

III. $$B_{222} \neq 0, \quad B_{221} = 0.$$

В этом случае матрица (1.1) после надлежащих преобразований переходит в каноническую матрицу ($I$).

IV. $$B_{222} = 0, \quad B_{221} = 0.$$

Если при этом $B_{122} = 0$ и $B_{212} = 0$, то матрица (1.1) имеет канонический вид ($IV$).

Если же $B_{122} = 0$, $B_{212} \neq 0$, то операциями

$$\boxed{II\,(i)}\,\frac{1}{B_{212}}, \quad \boxed{I-(i)-II}$$

матрица (1.1) приводится к каноническому виду ($III_j$).

Точно так же, если $B_{122} \neq 0$, $B_{212} = 0$, то матрица (1.1) после операций

$$\boxed{II\,(j)}\,\frac{1}{B_{122}}, \quad \boxed{I-(j)-II}$$

принимает канонический вид ($III_i$).

Наконец, если $B_{122} \neq 0$ и $B_{212} \neq 0$, то, подвергая матрицу (1.1) операциям

$$\boxed{II\,(i)}\,\frac{1}{B_{212}}, \quad \boxed{II\,(j)}\,\frac{1}{B_{122}}, \quad \boxed{I-(k)-II},$$

приходим к канонической матрице ($II$).

В рассматриваемом случае матрица $A$ эквивалентна одной из указанных канонических матриц, очевидно, как в поле комплексных, так и в поле вещественных чисел.

Определив все канонические виды кубических матриц 2-го порядка, составим для них матрицы (3.1) и (3.3) гл. III.

Будем иметь:

Таблица I

<table>
<tr><th>$A$</th><th>$A^{(i)}$</th><th>$A^{(j)}$</th><th>$A^{(k)}$</th><th>$B$</th></tr>
<tr><td>$(I)$</td><td>$\begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix}$</td><td>$\begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix}$</td><td>$\begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix}$</td><td>$\left\Vert\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right\Vert \begin{array}{l} \to (i) \\ \to (k) \\ \downarrow (j) \end{array}$</td></tr>
<tr><td>$(II)$</td><td>$\begin{Vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}$</td><td>$\begin{Vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}$</td><td>$\begin{Vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}$</td><td>$\left\Vert\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right\Vert \begin{array}{l} \to (i) \\ \to (k) \\ \downarrow (j) \end{array}$</td></tr>
<tr><td>$(III_i)$</td><td>$\begin{Vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}$</td><td>$O$</td><td>$O$</td><td>$O$</td></tr>
<tr><td>$(III_j)$</td><td>$O$</td><td>$\begin{Vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}$</td><td>$O$</td><td>$O$</td></tr>
<tr><td>$(III_k)$</td><td>$O$</td><td>$O$</td><td>$\begin{Vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}$</td><td>$O$</td></tr>
<tr><td>$(IV)$</td><td>$O$</td><td>$O$</td><td>$O$</td><td>$O$</td></tr>
<tr><td>$(I')$</td><td>$\begin{Vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{Vmatrix}$</td><td>$\begin{Vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{Vmatrix}$</td><td>$\begin{Vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{Vmatrix}$</td><td>$\left\Vert\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \end{array}\right\Vert \begin{array}{l} \to (i) \\ \to (k) \\ \downarrow (j) \end{array}$</td></tr>
</table>

Арифметические инварианты канонических матриц указаны в нижеследующей таблице.

Таблица II

| $A$ | $r_i$ | $r_j$ | $r_k$ | $r_{jk}^{(i)}$ | $r_{ik}^{(j)}$ | $r_{ij}^{(k)}$ | $r_{A^{(i)}}$ | $r_{A^{(j)}}$ | $r_{A^{(k)}}$ | $\lvert\sigma_{A^{(i)}}\rvert$ | $\lvert\sigma_{A^{(j)}}\rvert$ | $\lvert\sigma_{A^{(k)}}\rvert$ | $r_B$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (I) | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 0 | 0 | 0 | 2 |
| $(II)$ | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| $(III_i)$ | 1 | 2 | 2 | 2 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | | | 0 |
| $(III_j)$ | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 0 | 1 | 0 | | 1 | | 0 |
| $(III_k)$ | 2 | 2 | 1 | 1 | 1 | 2 | 0 | 0 | 1 | | | 1 | 0 |
| $(IV)$ | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | | | | 0 |
| $(I')$ | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 |

Из таблицы II видим, что среди канонических матриц $(I)$, $(II)$, $(III_i)$, $(III_j)$, $(III_k)$, $(IV)$ нет эквивалентных ни в поле комплексных, ни в поле вещественных чисел и что ни одна из этих матриц не эквивалентна в поле вещественных чисел канонической матрице $(I')$.

Теорема, таким образом, доказана полностью.

Замечание 1.1. Если кубическая матрица 2-го порядка $A$ и одна из канонических матриц $(III_i)$, $(III_j)$, $(III_k)$ эквивалентны (в обычном смысле) в поле комплексных или вещественных чисел, то $A$ и любая из этих канонических матриц $g$-эквивалентны в том же поле.

3. Вводя для двойничных трилинейных форм, ассоциированных с каноническими матрицами $(I)$, $(II)$, $(III_i)$, $(III_j)$, $(III_k)$, $(IV)$, $(I')$, соответственно обозначения $F_1$, $F_2$, $F_{3i}$, $F_{3j}$, $F_{3k}$, $F_4$, $F_1'$, будем иметь в поле комплексных чисел следующие канонические виды форм рассматриваемого типа

$$F_1 = X_1Y_1Z_1 + X_2Y_2Z_2, \tag{1.7}$$

$$F_2 = X_1Y_1Z_2 + X_1Y_2Z_1 + X_2Y_1Z_1, \tag{1.8}$$

$$F_{3i} = X_1Y_1Z_2 + X_1Y_2Z_1, \tag{1.9i}$$

$$F_{3j} = X_1Y_1Z_2 + X_2Y_1Z_1, \tag{1.9j}$$

$$F_{3k} = X_1Y_2Z_1 + X_2Y_1Z_1, \tag{1.9k}$$

$$F_4 = X_1Y_1Z_1. \tag{1.10}$$

В поле вещественных чисел к каноническим формам, кроме указанных выше, относится также форма

$$F_1' = X_1Y_1Z_2 + X_1Y_2Z_1 + X_2Y_1Z_1 - X_2Y_2Z_2. \tag{1.7'}$$

Приняв во внимание таблицу I, получим для каждой канонической формы полную систему комитантов (замечание 4.2 гл. III), сведенных в таблице III.

Таблица III

| $F$ | $\Delta$ | $H_i$ | $H_j$ | $H_k$ | $Q$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $F_1$ | $-1$ | $2X_1X_2$ | $2Y_1Y_2$ | $2Z_1Z_2$ | $X_1Y_1Z_1 - X_2Y_2Z_2$ |
| $F_2$ | 0 | $-2X_1^2$ | $-2Y_1^2$ | $-2Z_1^2$ | $2X_1Y_1Z_1$ |
| $F_{3i}$ | 0 | $-2X_1^2$ | 0 | 0 | 0 |
| $F_{3j}$ | 0 | 0 | $-2Y_1^2$ | 0 | 0 |
| $F_{3k}$ | 0 | 0 | 0 | $-2Z_1^2$ | 0 |
| $F_4$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $F_1'$ | 4 | $-2(X_1^2+X_2^2)$ | $-2(Y_1^2+Y_2^2)$ | $-2(Z_1^2+Z_2^2)$ | $2(X_1Y_1Z_1 - X_1Y_2Z_2 - X_2Y_1Z_2 - X_2Y_2Z_1)$ |

Изложенное выше дает возможность следующим образом классифицировать двойничные трилинейные формы, относя к одному и тому же классу все эквивалентные друг другу формы.

В комплексной области различаем, прежде всего, неособенные формы, у которых дискриминант $\Delta$ не равен нулю, т. е. вторичные ранги $r_{A^{(i)}}$, $r_{A^{(j)}}$, $r_{A^{(k)}}$ (или $r_B$) равны 2, и особенные формы, у которых $\Delta = 0$, т. е. все вышеупомянутые вторичные ранги меньше, чем 2. Представителем неособенных форм является каноническая форма (1.7).

Среди особенных форм выделяем те, которые не равны тождественно нулю, т. е. те, у которых двумерные ранги $r_i$, $r_j$, $r_k$ (или трехмерные ранги $r_{jk}^{(i)}$, $r_{ik}^{(j)}$, $r_{ij}^{(k)}$) отличны от нуля, и формы, тождественно

Таблица IV

| Классы | | | | Канонические виды | Алгебраическая характеристика | Арифметическая характеристика | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | $r_i$ | $r_j$ | $r_k$ | $r_{A^{(i)}}$ | $r_{A^{(j)}}$ | $r_{A^{(k)}}$ | $(r_B)$ |
| | | I. Неособенные формы | | (1.7) | $\Delta \neq 0$ | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 |
| Особенные формы | Не равные тождественно нулю | II. Неприводимые | | (1.8) | $\Delta = 0$; $H_i \neq 0$, $H_j \neq 0$, $H_k \neq 0$ $(Q \neq 0)$ | 2 | 2 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| | | III. Частично приводимые | по индексу $i$ | (1.9i) | $\Delta = 0$; $H_i \neq 0$, $H_j = 0$, $H_k = 0$, $(Q=0)$ | 1 | 2 | 2 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| | | | по индексу $j$ | (1.9j) | $\Delta = 0$; $H_i = 0$, $H_j \neq 0$, $H_k = 0$, $(Q=0)$ | 2 | 1 | 2 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| | | | по индексу $k$ | (1.9k) | $\Delta = 0$; $H_i = 0$, $H_j = 0$, $H_k \neq 0$; $(Q=0)$ | 2 | 2 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| | | IV. Полностью приводимые | | (1.10) | $\Delta = 0$; $H_i = 0$, $H_j = 0$, $H_k = 0$; $F \neq 0$ $(Q=0)$ | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| | V. Тождественно равные нулю | | | | $\Delta = 0$, $F = 0$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

равные нулю, у которых эти ранги — нули. Затем особенные формы, не равные тождественно нулю, делим на два рода: I) неприводимые, представителем которых является каноническая форма (1.8) и у которых все коварианты $H_i$, $H_j$, $H_k$ (или $Q$) не равны тождественно нулю, т. е. все вторичные ранги $r_{A^{(i)}}$, $r_{A^{(j)}}$, $r_{A^{(k)}}$ (или $r_B$) равны 1; II) приводимые, у которых некоторые или даже все коварианты $H_i$, $H_j$, $H_k$ равны тождественно нулю (или $Q=0$), т. е. некоторые или даже все из вторичных рангов $r_{A^{(i)}}$, $r_{A^{(j)}}$, $r_{A^{(k)}}$ — нули (или $r_B=0$).

Далее, особенные приводимые формы подразделяем на два вида: 1) частично приводимые, представителями которых являются канонические формы (1.9i), (1.9j), (1.9k) и у которых только один из ковариантов $H_i$, $H_j$, $H_k$ не равен тождественно нулю, т. е. один из вторичных рангов $r_{A^{(i)}}$, $r_{A^{(j)}}$, $r_{A^{(k)}}$ равен 1, а остальные два равны нулю; 2) полностью приводимые, которые представляются канонической формой (1.10) и у которых все коварианты $H_i$, $H_j$, $H_k$ равны тождественно нулю, т. е. все вторичные ранги $r_{A^{(i)}}$, $r_{A^{(j)}}$, $r_{A^{(k)}}$ — нули.

Наконец, среди особенных частично приводимых форм различаем три типа форм в зависимости от того, какой из ковариантов $H_i$, $H_j$, $H_k$ не равен тождественно нулю, т. е. смотря по тому, какой из вторичных рангов $r_{A^{(i)}}$, $r_{A^{(j)}}$, $r_{A^{(k)}}$ равен 1, в то время как остальные два равны нулю.

Результаты классификации двойничных трилинейных форм в комплексной области представлены в таблице IV.

Та же классификация будет иметь место и в вещественной области, если только допустим распадение неособенных форм на два класса: Iа и Iб, в зависимости от знака дискриминанта $\Delta$, т. е. в зависимости от абсолютных значений сигнатур $\sigma_{A^{(i)}}$, $\sigma_{A^{(j)}}$, $\sigma_{A^{(k)}}$ матриц $\boldsymbol{A}^{(i)}$, $\boldsymbol{A}^{(j)}$, $\boldsymbol{A}^{(k)}$. К классу Iа отнесем неособенные формы, для которых $\Delta<0$, т. е. $|\sigma_{A^{(i)}}|=|\sigma_{A^{(j)}}|=|\sigma_{A^{(k)}}|=0$. Представителем их является каноническая форма (1.7). К классу Iб отнесем неособенные формы, для которых $\Delta>0$, т. е. $|\sigma_{A^{(i)}}|=|\sigma_{A^{(j)}}|=|\sigma_{A^{(k)}}|=2$. Представителем их будет форма (1.7′).

Эти дополнительные результаты классификации двойничных трилинейных форм в вещественной области сведены в таблице V.

Таблица V

| Классы | | Канонические виды | Алгебраическая характеристика | Арифметическая характеристика | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | $\lvert\sigma_{A^{(i)}}\rvert$ | $\lvert\sigma_{A^{(j)}}\rvert$ | $\lvert\sigma_{A^{(k)}}\rvert$ |
| Неособенные формы | Iа | (1.7) | $\Delta<0$ | 0 | 0 | 0 |
| | Iб | (1.7′) | $\Delta>0$ | 2 | 2 | 2 |

Замечание 1.2. Двойничные трилинейные формы можно классифицировать также, относя к одному и тому же классу все $g$-эквивалентные друг другу формы. Тогда особенные частично приводимые формы, подразделявшиеся на три класса, составят один $g$-класс, представителем которого может быть любая из трех канонических форм III таблицы IV.

4. В заключение остановимся на геометрической интерпретации комитантов $F$, $\Delta$, $H_i$, $H_j$, $H_k$, $Q$ полной системы для двойничной трилинейной

формы, являющихся ее алгебраической характеристикой при определении класса, которому принадлежит эта форма.

Геометрическую интерпретацию упомянутых выше комитантов мы установим, приравнивая их нулю и рассматривая переменные в каждом из трех рядов

$$\begin{array}{ll} x_1, & x_2, \\ y_1, & y_2, \\ z_1, & z_2 \end{array}$$

как однородные координаты точки на прямой.

Известно, что уравнение

$$\sum_{i,j=1}^{2} A_{ij}x_iy_j = 0,$$

полученное приравниванием нулю неособенной двойничной билинейной формы, характеризует билинейное проективное соответствие между двумя системами точек прямой. Если билинейная форма — симметрическая, то это соответствие будет инволюционным.

Подобно этому уравнение

$$F = 0, \tag{1.11}$$

полученное приравниванием нулю неособенной или особенной неприводимой двойничной трилинейной формы $F = \sum\limits_{i,j,k=1}^{2} A_{ijk}x_iy_jz_k$, характеризует трилинейное проективное соответствие между тремя системами точек прямой, заключающееся в том, что каждой паре систем точек, произвольно выбранных на прямой, отвечает определенная третья система точек этой прямой [1]). Для особенной приводимой (частично или полностью) двойничной трилинейной формы это соответствие, очевидно, не имеет места.

Смотря по тому, является ли форма $F$ неособенной или особенной неприводимой, задаваемое ею трилинейное проективное соответствие будем называть *неособенным* или *особенным*.

Кроме того, будем различать три рода трилинейных проективных соответствий: I рода, если матрица $A$ формы $F$ — асимметрическая; II рода, если эта матрица — симметрическая относительно двух каких-либо индексов, и III рода (трилинейная инволюция), если $A$ — симметрическая матрица.

Вводя неоднородные координаты $x = \frac{x_1}{x_2}$, $y = \frac{y_1}{y_2}$, $z = \frac{z_1}{z_2}$, мы можем переписать уравнение (1.11) в виде

$$A_{111}xyz + A_{112}xy + A_{121}xz + A_{211}yz + A_{122}x + A_{212}y + A_{221}z + A_{222} = 0, \tag{1.12}$$

если оно характеризует трилинейное проективное соответствие I рода, или в любом из трех видов

$$\left.\begin{aligned} &A_{111}xyz + A_{112}(xy + xz) + A_{211}yz + A_{122}x + A_{212}(y + z) + A_{222} = 0, \\ &A_{111}xyz + A_{112}(xy + yz) + A_{121}xz + A_{212}y + A_{122}(x + z) + A_{222} = 0, \\ &A_{111}xyz + A_{121}(xz + yz) + A_{112}xy + A_{221}z + A_{122}(x + y) + A_{222} = 0 \end{aligned}\right\} \tag{1.13}$$

в случае трилинейного проективного соответствия II рода и, наконец, в виде

$$A_{111}xyz + A_{112}(xy + xz + yz) + A_{122}(x + y + z) + A_{222} = 0 \tag{1.14}$$

в случае трилинейной инволюции.

---

1) Ср. [184], стр. 17.

Каждый из этих видов уравнения (1.11) относит двум из точек $x$, $y$, $z$ третью точку. Однако в отличие от уравнения (1.12) остальные уравнения представляют некоторые особенности. Именно, если в одном из уравнений (1.13), например в первом, точкам $x$, $y$ отвечает точка $z$, то точкам $x$, $z$ отвечает точка $y$. Точно так же, если в уравнении (1.14) точкам $x$, $y$ соответствует точка $z$, то точкам $x$, $z$ соответствует точка $y$, а точкам $y$, $z$ — точка $x$.

В каждой из трех систем точек прямой, между которыми существует трилинейное проективное соответствие того или иного рода, имеется предельная точка, соответствующая несобственным точкам двух других систем. Предельные точки трех систем определяются в случае проективного соответствия I рода координатами (неоднородными)

$$x_0 = -\frac{A_{211}}{A_{111}}, \quad y_0 = -\frac{A_{121}}{A_{111}}, \quad z_0 = -\frac{A_{112}}{A_{111}}.$$

В случае проективного соответствия II рода две из предельных точек совпадают. Так, например, первое из уравнений (1.13) дает:

$$x_0 = -\frac{A_{211}}{A_{111}}, \quad y_0 = z_0 = -\frac{A_{112}}{A_{111}}.$$

При инволюции все предельные точки совпадают, образуя центр трилинейной инволюции

$$x_0 = y_0 = z_0 = -\frac{A_{112}}{A_{111}}.$$

Полагая в уравнениях (1.12), (1.13), (1.14) $x=y=z$, найдем три тройные точки трилинейного проективного соответствия каждого рода. Эти три точки либо различны между собой, либо две из них (или даже все три) совпадают (упражнение 8).

Равенство $\Delta=0$ указывает, что трилинейное проективное соответствие, характеризуемое уравнением (1.11), является особенным.

Уравнения $H_i=0$, $H_j=0$, $H_k=0$, имеющие в неоднородных координатах вид

$$\left.\begin{aligned} A_{11}^{(i)}x^2+2A_{12}^{(i)}x+A_{22}^{(i)}&=0,\\ A_{11}^{(j)}y^2+2A_{12}^{(j)}y+A_{22}^{(j)}&=0,\\ A_{11}^{(k)}z^2+2A_{12}^{(k)}z+A_{22}^{(k)}&=0,\end{aligned}\right\} \tag{1.15}$$

определяют двойные точки билинейных инволюций

$$\left.\begin{aligned} A_{11}^{(i)}xx'+A_{12}^{(i)}(x+x')+A_{22}^{(i)}&=0,\\ A_{11}^{(j)}yy'+A_{12}^{(j)}(y+y')+A_{22}^{(j)}&=0,\\ A_{11}^{(k)}zz'+A_{12}^{(k)}(z+z')+A_{22}^{(k)}&=0.\end{aligned}\right\} \tag{1.16}$$

Если форма $F$ — неособенная, то ее дискриминант $\Delta$ не равен нулю и, следовательно, двойные точки каждой из инволюций (1.16) различны. В вещественной области, смотря по тому, принадлежит ли неособенная форма $F$ классу Iа или Iб, обе двойные точки — вещественные или мнимые. В первом случае мы имеем гиперболические инволюции, во втором — эллиптические. Если же форма $F$ — особенная неприводимая ($\Delta=0$), то инволюции (1.16) — параболические, двойные точки которых совпадают.

Уравнение $Q=0$, имеющее в неоднородных координатах вид

$$B_{111}xyz+B_{112}xy+B_{121}xz+B_{211}yz+B_{122}x+B_{212}y+B_{221}z+B_{222}=0, \tag{1.17}$$

характеризует трилинейное соответствие между тремя системами точек прямой, если форма $F$ — неособенная.

Это проективное соответствие — неособенное, род которого таков же, как у проективного соответствия, задаваемого формой $F$.

Основные свойства трилинейных проективных соответствий выражаются следующими теоремами.

Теорема 1.2. *Тройные точки трилинейного проективного соответствия I рода находятся в трилинейной инволюции с тремя различными тройками точек*

$$a_1,\ b_1,\ c_1; \qquad a_2,\ b_2,\ c_2; \qquad a_3,\ b_3,\ c_3,$$

*если каждая из шести троек*

$$a_1,\ b_2,\ c_3;\quad a_1,\ b_3,\ c_2;\quad a_2,\ b_1,\ c_3;\quad a_2,\ b_3,\ c_1;\quad a_3,\ b_1,\ c_2;\quad a_3,\ b_2,\ c_1$$

*принадлежит упомянутому проективному соответствию*[1].

В самом деле, при условиях теоремы проективное соответствие, о котором идет речь, можно представить в виде

$$\sum_{i=1}^{3} k_i (x-a_i)(y-b_i)(z-c_i) = 0.$$

Его тройные точки $a_0$, $b_0$, $c_0$ определяются уравнением

$$\sum_{i=1}^{3} k_i x^3 - \sum_{i=1}^{3} k_i (a_i+b_i+c_i)x^2 + \sum_{i=1}^{3} k_i (a_ib_i+a_ic_i+b_ic_i) - \sum_{i=1}^{3} k_i a_i b_i c_i = 0. \quad (1.18)$$

Как нетрудно убедиться,

$$\begin{vmatrix} \sum\limits_{i=1}^{3} k_ia_ib_ic_i & \sum\limits_{i=1}^{3} k_i(a_ib_i+a_ic_i+b_ic_i) & \sum\limits_{i=1}^{3} k_i(a_i+b_i+c_i) & \sum\limits_{i=1}^{3} k_i \\ a_1b_1c_1 & a_1b_1+a_1c_1+b_1c_1 & a_1+b_1+c_1 & 1 \\ a_2b_2c_2 & a_2b_2+a_2c_2+b_2c_2 & a_2+b_2+c_2 & 1 \\ a_3b_3c_3 & a_3b_3+a_3c_3+b_3c_3 & a_3+b_3+c_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Отсюда на основании уравнения (1.18) заключаем, что

$$\begin{vmatrix} a_0b_0c_0 & a_0b_0+a_0c_0+b_0c_0 & a_0+b_0+c_0 & 1 \\ a_1b_1c_1 & a_1b_1+a_1c_1+b_1c_1 & a_1+b_1+c_1 & 1 \\ a_2b_2c_2 & a_2b_2+a_2c_2+b_2c_2 & a_2+b_2+c_2 & 1 \\ a_3b_3c_3 & a_3b_3+a_3c_3+b_3c_3 & a_3+b_3+c_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Следовательно, имеют место равенства

$$\begin{gathered} Aa_0b_0c_0 + B(a_0b_0+a_0c_0+b_0c_0) + C(a_0+b_0+c_0) + D = 0, \\ Aa_1b_1c_1 + B(a_1b_1+a_1c_1+b_1c_1) + C(a_1+b_1+c_1) + D = 0, \\ Aa_2b_2c_2 + B(a_2b_2+a_2c_2+b_2c_2) + C(a_2+b_2+c_2) + D = 0, \\ Aa_3b_3c_3 + B(a_3b_3+a_3c_3+b_3c_3) + C(a_3+b_3+c_3) + D = 0, \end{gathered}$$

где $A$, $B$, $C$, $D$ не равны одновременно нулю.

Тем самым доказано существование определяемой уравнением

$$Axyz + B(xy+xz+yz) + C(x+y+z) + D = 0$$

трилинейной инволюции, которой принадлежат тройки точек

$$a_0,\ b_0,\ c_0; \qquad a_1,\ b_1,\ c_1; \qquad a_2,\ b_2,\ c_2; \qquad a_3,\ b_3,\ c_3.$$

[1] Ср. [185], стр. 52.

Аналогично доказывается

Теорема 1.3. *Тройные точки трилинейного проективного соответствия II рода, среди которых нет одинаковых, находятся в трилинейной инволюции с тремя различными между собой тройками точек*

$$a_1, b_1, b_1; \qquad a_2, b_2, b_2; \qquad a_3, b_3, b_3,$$

*если каждая из трех троек точек*

$$a_1, b_2, b_3; \qquad a_2, b_1, b_3; \qquad a_3, b_1, b_2$$

*принадлежит упомянутому проективному соответствию.*

Замечание 1.3. Теоремы 1.2 и 1.3 являются распространением на трилинейные проективные соответствия следующего, хорошо известного свойства: различные между собой двойные точки билинейного проективного соответствия находятся в инволюции (билинейной) с двумя неодинаковыми парами точек $a_1$, $b_1$ и $a_2$, $b_2$, если каждая пара точек $a_1$, $b_2$ и $a_2$, $b_1$ принадлежит упомянутому проективному соответствию.

Теорема 1.4. *Если $\lambda_1$ и $\lambda_2$, $\mu_1$ и $\mu_2$, $\nu_1$ и $\nu_2$ — двойные точки инволюций, задаваемых билинейными формами, полярными ковариантам $H_i$, $H_j$, $H_k$ неособенной двойничной трилинейной формы $F$, то каждая из троек точек*

$$\lambda_1, \mu_1, \nu_2; \qquad \lambda_1, \mu_2, \nu_1; \qquad \lambda_1, \mu_2, \nu_2;$$
$$\lambda_2, \mu_2, \nu_1; \qquad \lambda_2, \mu_1, \nu_2; \qquad \lambda_2, \mu_1, \nu_1$$

принадлежит проективным соответствиям, задаваемым формой $F$ и ее ковариантом $Q$[1]).

Действительно, пусть

$$\left.\begin{aligned} x_\alpha &= \sum_{i=1}^{2} a_{\alpha i} X_i \qquad (\alpha = 1, 2), \\ y_\beta &= \sum_{j=1}^{2} b_{\beta j} Y_j \qquad (\beta = 1, 2), \\ z_\gamma &= \sum_{k=1}^{2} c_{\gamma k} Z_k \qquad (\gamma = 1, 2) \end{aligned}\right\} \tag{1.19}$$

— невырожденные линейные преобразования, которыми неособенная двойничная трилинейная форма $F$[2]) переводится в каноническую форму $X_1Y_1Z_1 + X_2Y_2Z_2$, для которой

$$H_i = 2X_1X_2, \qquad H_j = 2Y_1Y_2, \qquad H_k = 2Z_1Z_2,$$
$$Q = X_1Y_1Z_1 - X_2Y_2Z_2.$$

Тогда, обозначая через

$$\left.\begin{aligned} X_\alpha &= \sum_{i=1}^{2} a'_{\alpha i} x_i \qquad (\alpha = 1,2), \\ Y_\beta &= \sum_{j=1}^{2} b'_{\beta j} y_j \qquad (\beta = 1,2), \\ Z_\gamma &= \sum_{k=1}^{2} c'_{\gamma k} z_k \qquad (\gamma = 1,2) \end{aligned}\right\} \tag{1.20}$$

---

1) Ср. [186], стр. 1103.

2) В вещественной области форма $F$ предполагается принадлежащей классу Iа, так как для формы класса Iб двойные точки инволюций — мнимые.

линейные преобразования, обратные преобразованиям (1.19), и полагая

$$\lambda_1 = -\frac{a'_{12}}{a'_{11}}, \quad \lambda_2 = -\frac{a'_{22}}{a'_{21}},$$
$$\mu_1 = -\frac{b'_{12}}{b'_{11}}, \quad \mu_2 = -\frac{b'_{22}}{b'_{21}},$$
$$\nu_1 = -\frac{c'_{12}}{c'_{11}}, \quad \nu_2 = -\frac{c'_{22}}{c'_{21}},$$

можем представить уравнения, определяющие двойные точки упоминаемых в теореме билинейных инволюций в виде

$$(x-\lambda_1)(x-\lambda_2)=0, \quad (y-\mu_1)(y-\mu_2)=0, \quad (z-\nu_1)(z-\nu_2)=0, \tag{1.21}$$

а уравнения, характеризующие трилинейные проективные соответствия, о которых идет речь, в виде

$$k_1(x-\lambda_1)(y-\mu_1)(z-\nu_1)+k_2(x-\lambda_2)(y-\mu_2)(z-\nu_2)=0, \tag{1.22}$$
$$k_1(x-\lambda_1)(y-\mu_1)(z-\nu_1)-k_2(x-\lambda_2)(y-\mu_2)(z-\nu_2)=0, \tag{1.23}$$

где $k_1 = a'_{11}b'_{11}c'_{11}$, $k_2 = a'_{21}b'_{21}c'_{21}$.

Из уравнений (1.21), (1.22), (1.23) непосредственно вытекают перечисляемые в теореме свойства трилинейных проективных соответствий.

Теорема 1.5. *Двойные точки $\lambda$, $\mu$, $\nu$ параболических инволюций, задаваемых билинейными формами, полярными ковариантам $H_i$, $H_j$, $H_k$ особенной неприводимой двойничной трилинейной формы $F$, принадлежат проективному соответствию, задаваемому формой $F$.*

В самом деле, если преобразования (1.20) обратны невырожденным линейным преобразованиям (1.19), переводящим особенную неприводимую двойничную трилинейную форму $F$ в каноническую форму

$$X_1Y_1Z_2+X_1Y_2Z_1+X_2Y_1Z_1,$$

для которой $H_i=-2X_1^2$, $H_j=-2Y_1^2$, $H_k=-2Z_1^2$, то уравнения, определяющие двойные точки упоминаемых в теореме параболических инволюций, будут иметь вид

$$(x-\lambda)^2=0, \quad (y-\mu)^2=0, \quad (z-\nu)^2=0, \tag{1.24}$$

а уравнение, характеризующее проективное соответствие, задаваемое формой $F$, представится в виде

$$k_1(x-\lambda)(y-\mu)(z-\nu')+k_2(x-\lambda)(y-\mu')(z-\nu)+ \\ +k_3(x-\lambda')(y-\mu)(z-\nu)=0, \tag{1.25}$$

где

$$\lambda = -\frac{a'_{12}}{a'_{11}}, \quad \lambda' = -\frac{a'_{22}}{a'_{21}};$$
$$\mu = -\frac{b'_{12}}{b'_{11}}, \quad \mu' = -\frac{b'_{22}}{b'_{21}};$$
$$\nu = -\frac{c'_{12}}{c_{11}}, \quad \nu' = -\frac{c'_{22}}{c'_{21}};$$
$$k_1 = a'_{11}b'_{11}c'_{21}, \quad k_2 = a'_{11}b'_{21}c'_{11}, \quad k_3 = a'_{21}b'_{11}c'_{11}.$$

Уравнениями (1.24), (1.25) и подтверждается теорема.

Теорема 1.6. *Если $x$ и $x'$, $y$ и $y'$, $z$ и $z'$ — соответственные точки инволюций, задаваемых билинейными формами, полярными ковариантам $H_i$, $H_j$, $H_k$ неособенной двойничной трилинейной формы $F$, и тройка точек*

*$x, y, z$ принадлежит проективному соответствию, задаваемому формой $F$, то каждая из точек $x', y', z'$; $x', y, z$; $x, y', z$; $x, y, z'$ принадлежит проективному соответствию, задаваемому ковариантом $Q$ этой формы*[1].

Действительно, если неособенная двойничная трилинейная форма $F$ невырожденными линейными преобразованиями (1.19) приводится к каноническому виду (1.7), то уравнение (1.12), характеризующее трилинейное проективное соответствие, которому принадлежит тройка точек $x, y, z$, обратится в

$$XYZ+1=0, \tag{1.12а}$$

а уравнения (1.16), характеризующие билинейные инволюции, примут вид

$$X+X'=0, \qquad Y+Y'=0, \qquad Z+Z'=0. \tag{1.16а}$$

Исключая $X, Y, Z$ из уравнений (1.12а) и (1.16а), получим уравнение $X'Y'Z'-1=0$, соответствующее коварианту $Q=X_1Y_1Z_1-X_2Y_2Z_2$ канонической формы (1.7) и принимающее вид

$$B_{111}x'y'z'+B_{112}x'y'+B_{121}x'z'+B_{211}y'z'+B_{122}x'+B_{212}y'+B_{221}z'+B_{222}=0 \tag{1.17'}$$

после преобразований (1.20), обратных преобразованиям (1.19).

Если же (в вещественной области) форма $F$ преобразованиями (1.19) приводится к каноническому виду (1.7′), то вместо уравнений (1.12а), (1.16а) будем иметь:

$$XY+XZ+YZ-1=0, \tag{1.12б}$$

$$XX'+1=0, \qquad YY'+1=0, \qquad ZZ'+1=0. \tag{1.16б}$$

Исключая $X, Y, Z$ из уравнений (1.12б) и (1.16б), получим уравнение

$$X'Y'Z'-X'-Y'-Z'=0,$$

соответствующее коварианту

$$Q=2(X_1Y_1Z_1-X_1Y_2Z_2-X_2Y_1Z_2-X_2Y_2Z_1)$$

канонической формы (1.7′) и принимающее вид (1.17′) после преобразований (1.20).

Таким образом, при условиях теоремы тройка точек $x', y', z'$ во всех случаях принадлежит проективному соответствию, задаваемому ковариантом $Q$ формы $F$.

Тем же свойством обладает каждая из троек точек

$$x', y, z; \qquad x, y', z; \qquad x, y, z',$$

в чем легко убеждаемся, исключая только одну из переменных $X, Y, Z$ из уравнения (1.12а) и одного из уравнений (1.16а) или (в вещественной области) из уравнения (1.12б) и одного из уравнений (1.16б)

### Упражнения

1. Пользуясь таблицей III, проверить соотношение (4.8) гл. III, связывающее между собой основные комитанты двойничной трилинейной формы, данной в каноническом виде, и показать, что оно справедливо для любой формы каждого класса.

2. Показать, что для каждой пары классов (I, V), (II, IV), (IIIб, IIIб) двойничных трилинейных форм (табл. IV) сумма $r_\delta+r_{A(\delta)}$ первичного двумерного ранга $r_\delta$ форм одного из классов пары и вторичного ранга $r_{A(\delta)}$ форм другого равна 2 ($\delta$ — любой из индексов $i, j, k$).

[1]) Ср. [185], стр. 53.

3. Указать классы, которым принадлежат в вещественной области формы

α) $-x_1y_1z_1+2x_1y_1z_2-10x_1y_2z_1-x_1y_2z_2+5x_2y_1z_1+4x_2y_1z_2+x_2y_2z_1-2x_2y_2z_2$,

β) $8x_1y_1z_1+7x_1y_1z_2+10x_1y_2z_1-5x_2y_1z_1+6x_2y_2z_1+7x_2y_2z_2$,

γ) $5x_1y_1z_1+7x_1y_1z_2+x_1y_2z_1-4x_2y_1z_1+9x_2y_2z_1+7x_2y_2z_2$,

δ) $-x_1y_1z_1+x_1y_1z_2+4x_1y_2z_1+3x_1y_2z_2-2x_2y_1z_1+2x_2y_1z_2+8x_2y_2z_1+6x_2y_2z_2$,

ε) $4x_1y_1z_1+6x_1y_1z_2-2x_1y_2z_1-3x_1y_2z_2-6x_2y_1z_1-2x_2y_1z_2+3x_2y_2z_1+x_2y_2z_2$,

ζ) $x_1y_1z_1+x_1y_1z_2+x_2y_2z_1+x_2y_2z_2$,

η) $2x_1y_1z_1+2x_1y_1z_2-x_1y_2z_1-x_1y_2z_2+4x_2y_1z_1+4x_2y_1z_2-2x_2y_2z_1-2x_2y_2z_2$.

4. Приняв во внимание указанные при доказательстве теоремы 1.1 элементарные преобразования кубической матрицы, приводящие ее к каноническому виду, найти невырожденные квадратные матрицы, на которые надо умножить по индексам $i$, $j$, $k$ матрицу каждой из форм упражнения 3, чтобы получить матрицу эквивалентной канонической формы.

5. На прямой даны $r$ троек точек, у которых неоднородные координаты $x^{(\alpha)}$, $y^{(\alpha)}$, $z^{(\alpha)}$ $(\alpha=1, 2, \ldots, r)$ удовлетворяют условию: ранг матрицы

$$\left\|\begin{matrix} x^{(1)}y^{(1)}z^{(1)} & x^{(1)}y^{(1)} & x^{(1)}z^{(1)} & y^{(1)}z^{(1)} & x^{(1)} & y^{(1)} & z^{(1)} & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x^{(r)}y^{(r)}z^{(r)} & x^{(r)}y^{(r)} & x^{(r)}z^{(r)} & y^{(r)}z^{(r)} & x^{(r)} & y^{(r)} & z^{(r)} & 1 \end{matrix}\right\|$$

равен $r$. Доказать, что трилинейное проективное соответствие I рода определяется этими $r$ тройками точек, где $r=7$ или $r=6$, смотря по тому, будет ли это проективное соответствие неособенным или особенным.

6. На прямой даны $r$ троек точек, неоднородные координаты которых удовлетворяют условию: ранг одной из матриц

$$\left\|\begin{matrix} x^{(1)}y^{(1)}z^{(1)} & x^{(1)}y^{(1)}+x^{(1)}z^{(1)} & y^{(1)}z^{(1)} & x^{(1)} & y^{(1)}+z^{(1)} & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x^{(r)}y^{(r)}z^{(r)} & x^{(r)}y^{(r)}+x^{(r)}z^{(r)} & y^{(r)}z^{(r)} & x^{(r)} & y^{(r)}+z^{(r)} & 1 \end{matrix}\right\|$$

$$\left\|\begin{matrix} x^{(1)}y^{(1)}z^{(1)} & x^{(1)}y^{(1)}+y^{(1)}z^{(1)} & x^{(1)}z^{(1)} & y^{(1)} & x^{(1)}+z^{(1)} & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x^{(r)}y^{(r)}z^{(r)} & x^{(r)}y^{(r)}+y^{(r)}z^{(r)} & x^{(r)}z^{(r)} & y^{(r)} & x^{(r)}+z^{(r)} & 1 \end{matrix}\right\|$$

$$\left\|\begin{matrix} x^{(1)}y^{(1)}z^{(1)} & x^{(1)}z^{(1)}+y^{(1)}z^{(1)} & x^{(1)}y^{(1)} & z^{(1)} & x^{(1)}+y^{(1)} & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x^{(r)}y^{(r)}z^{(r)} & x^{(r)}z^{(r)}+y^{(r)}z^{(r)} & x^{(r)}y^{(r)} & z^{(r)} & x^{(r)}+y^{(r)} & 1 \end{matrix}\right\|$$

равен $r$. Доказать, что трилинейное проективное соответствие II рода определяется этими $r$ тройками точек, где $r=5$ или $r=4$, смотря по тому, будет ли проективное соответствие неособенным или особенным.

7. На прямой даны $r$ троек точек, неоднородные координаты которых удовлетворяют условию: ранг матрицы

$$\left\|\begin{matrix} x^{(1)}y^{(1)}z^{(1)} & x^{(1)}y^{(1)}+x^{(1)}z^{(1)}+y^{(1)}z^{(1)} & x^{(1)}+y^{(1)}+z^{(1)} & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x^{(r)}y^{(r)}z^{(r)} & x^{(r)}y^{(r)}+x^{(r)}z^{(r)}+y^{(r)}z^{(r)} & x^{(r)}+y^{(r)}+z^{(r)} & 1 \end{matrix}\right\|$$

равен $r$. Доказать, что трилинейная инволюция определяется этими $r$ тройками точек, где $r=3$ или $r=2$ в зависимости от того, будет ли инволюция неособенной или особенной.

8. Найти предельные и тройные точки трилинейных проективных соответствий

а) $$xyz-xy+3xz-3yz-4x+6y-2z+2=0,$$

б) $$xyz+2xy-xz-5yz+3x-2y+6=0,$$

в) $$xyz+2xy+5xz-4yz+3x-y-2z-4=0,$$

г) $$xyz-6xy+2xz-2yz+3x+5y+4z-8=0.$$

9. Показать, что тройные точки трилинейной инволюции различны между собой, если инволюция — неособенная, и две из них совпадают, если инволюция — особенная.

10. Показать, что все тройные точки инволюции, задаваемой симметрической двойничной трилинейной формой над полем вещественных чисел, вещественны, если дискриминант формы $\Delta \geqq 0$, и одна из этих точек вещественна, а две — мнимые сопряженные, если $\Delta < 0$.

## § 2. Классификация двойничных линейно-квадратичных форм

1. Классификация двойничных линейно-квадратичных форм в комплексной и вещественной областях впервые была дана Ольденбургером [175]. Приводимая ниже классификация этих форм отличается от классификации Ольденбургера как методом приведения форм к каноническому виду, в основу

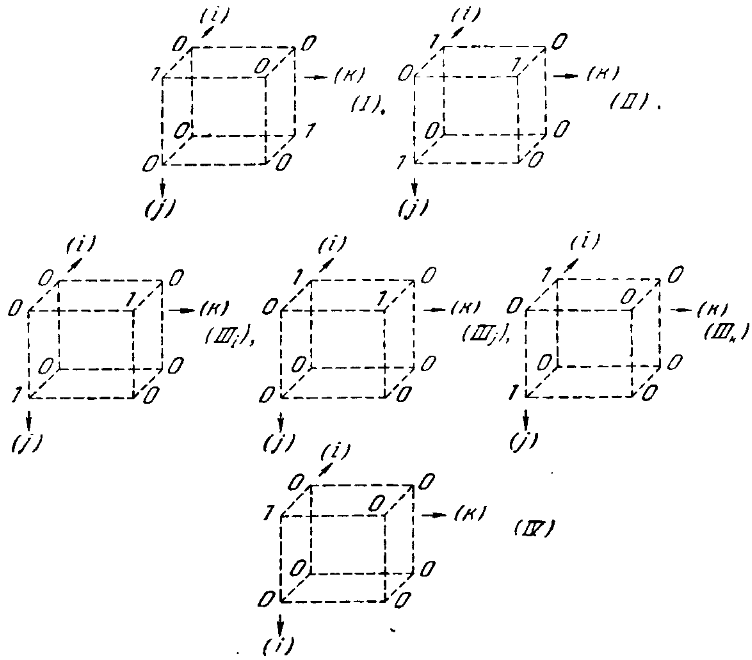



Рис. 15.

которого положены элементарные преобразования соответственных кубических матриц, так и инвариантной характеристикой полученных классов, более естественной для исследуемых форм.

Теорема 2.1. *Всякая ненулевая кубическая матрица 2-го порядка, симметрическая относительно двух каких-нибудь индексов, эквивалентна в поле комплексных чисел одной и только одной из следующих канонических матриц* (рис. 15). *В поле вещественных чисел к каноническим матрицам, кроме указанных выше, относятся также матрицы* рис. 16.

В самом деле, возьмем кубическую матрицу 2-го порядка

$$A = \left\| \begin{array}{cc|cc} A_{111} & A_{112} & A_{211} & A_{212} \\ A_{112} & A_{122} & A_{212} & A_{222} \end{array} \right\| \quad \begin{array}{l} \longrightarrow (i) \\ \longrightarrow (k), \\ \downarrow (j) \end{array}$$

симметрическую относительно индексов $j$, $k$.

Если эта матрица не нулевая, но все элементы ее $A_{111}$, $A_{122}$, $A_{211}$, $A_{222}$ равны нулю, то по крайней мере один из элементов $A_{112}$, $A_{212}$ отличен от нуля.

Если $A_{112} \neq 0$, то, подвергая матрицу $A$ последовательно операциям

$$\boxed{I(i)}\,\frac{1}{A_{112}}, \qquad \boxed{II(i)} + \boxed{I(i)}\,(-A_{212}),$$

получим каноническую матрицу ($IIIi$).

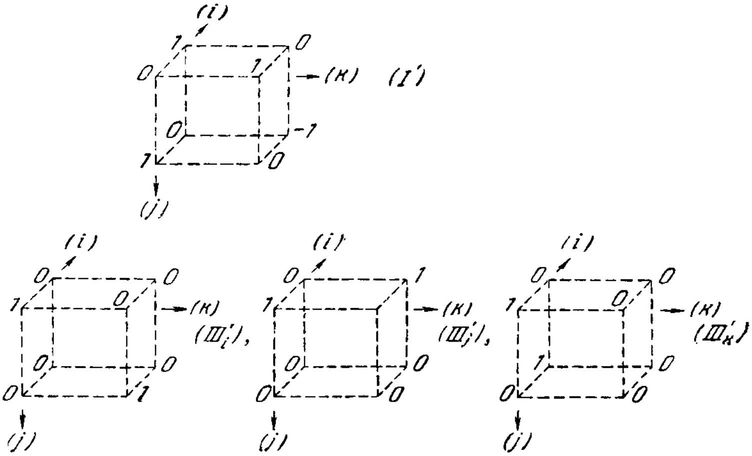



Рис. 16.

Если же $A_{112} = 0$, то $A_{212} \neq 0$ и после операций

$$\boxed{II(i)}\,\frac{1}{A_{212}}, \qquad \boxed{I-(i)-II}$$

приходим к тому же результату.

Предполагая теперь, что не все элементы $A_{111}$, $A_{122}$, $A_{211}$, $A_{222}$ равны нулю, мы можем, не ограничивая общности, считать $A_{111} \neq 0$.

Подвергая тогда матрицу $A$ операциям

$$\boxed{I(i)}\,\frac{1}{A_{111}}, \qquad \boxed{II(i)} + \boxed{I(i)}\,(-A_{211}), \qquad \boxed{II(jk)} + \boxed{I(jk)}\left(-\frac{A_{112}}{A_{111}}\right),$$

получим матрицу вида

$$\begin{array}{l} \qquad\qquad\qquad\qquad \longrightarrow (i) \\ \left\|\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & B_{212} \\ 0 & B_{122} & B_{212} & B_{222} \end{array}\right\| \begin{array}{l} \longrightarrow (k). \\ \downarrow (j) \end{array} \end{array} \tag{2.1}$$

Если в матрице (2.1) оба элемента — $B_{222}$, $B_{212}$ — отличны от нуля, то операциями

$$\boxed{I(i)}\,\frac{B_{212}^2}{B_{222}^2}, \qquad \boxed{II(i)}\,\frac{1}{B_{222}}, \qquad \boxed{I(jk)}\,\frac{B_{222}}{B_{212}}$$

она приводится к матрице вида

$$\begin{array}{l} \qquad\qquad\qquad \longrightarrow (i) \\ \left\|\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & C_{122} & 1 & 1 \end{array}\right\| \begin{array}{l} \longrightarrow (k). \\ \downarrow (j) \end{array} \end{array} \tag{2.2}$$

Если $C_{122} \neq 0$, то составляем из элементов матрицы (2.2) по второй из формул (4.1) гл. III квадратичную форму $H_j$. Приравнивая ее нулю и полагая $\frac{y_1}{y_2} = \mu$, получим уравнение

$$\mu^2 + \mu - C_{122} = 0. \tag{2.3}$$

Пусть дискриминант $-\delta = -(1 + 4C_{122})$ квадратичной формы $H_j$ не равен нулю.

Тогда уравнение (2.3) имеет конечные, отличные от нуля, простые корни

$$\mu_1 = \frac{-1 + \sqrt{\delta}}{2}, \quad \mu_2 = \frac{-1 - \sqrt{\delta}}{2}. \tag{2.4}$$

Подвергнем теперь матрицу (2.2) операциям

$$\boxed{II\,(jk)} + \boxed{I\,(jk)}\,\mu_2, \quad \boxed{I\,(jk)}\,(\mu_1 - \mu_2), \quad \boxed{I\,(jk)} + \boxed{II\,(jk)}, \quad \boxed{II\,(i)}\,\frac{1}{\sqrt{\delta}},$$

$$\boxed{I\,(i)} + \boxed{II\,(i)}\,\frac{\sqrt{\delta} - \delta}{2}, \quad \boxed{I\,(i)}\,\frac{1}{\delta}, \quad \boxed{II\,(i)} + \boxed{I\,(i)}, \quad \boxed{I - (i) - II}.$$

В результате получим каноническую матрицу ($I$), которой будет эквивалентна в поле комплексных чисел матрица $A$ при сделанных нами предположениях. В поле вещественных чисел эквивалентность будет иметь место, если дискриминант $\Delta$ двойничной линейно-квадратичной формы $F$ (см. упражнение 1 § 4 гл. III), ассоциированной с матрицей $A$, — отрицательный и, следовательно, $\delta > 0$. Если же $\Delta > 0$, то $\delta < 0$ и для нахождения эквивалентной канонической матрицы подвергаем матрицу (2.2) операциям

$$\boxed{II\,(jk)} + \boxed{I\,(jk)}\left(-\frac{1}{2}\right), \quad \boxed{I\,(i)} + \boxed{II\,(i)} \cdot \frac{1}{2}, \quad \boxed{I\,(i)}\left(-\frac{4}{\delta}\right),$$

$$\boxed{I\,(jk)}\,\frac{\sqrt{-\delta}}{2}, \quad \boxed{II\,(i)}\,\frac{2}{\sqrt{-\delta}}, \quad \boxed{I - (i) - II},$$

в результате которых получим каноническую матрицу ($I'$).

Пусть теперь дискриминант $-\delta$ равен нулю, т. е. $C_{122} = -\frac{1}{4}$.

Совершая тогда над матрицей (2.2) операции

$$\boxed{II\,(jk)} + \boxed{I\,(jk)}\left(-\frac{1}{2}\right), \quad \boxed{I\,(i)} + \boxed{II\,(i)} \cdot \frac{1}{2}, \quad \boxed{I - (i) - II},$$

придем к канонической матрице ($II$), которой будет, таким образом, эквивалентна матрица $A$ как в поле комплексных, так и в поле вещественных чисел.

Если же в матрице (2.2) элемент $C_{122}$ равен нулю, то после надлежащих преобразований получаем каноническую матрицу ($I$).

В случае, когда только один из элементов $B_{222}$, $B_{212}$ матрицы (2.1) отличен от нуля, мы приходим, как легко убедиться, в поле комплексных или вещественных чисел к канонической матрице ($I$), если $B_{222} \neq 0$, или к канонической матрице ($I$) в поле комплексных чисел и к одной из канонических матриц ($I$), ($I'$) в поле вещественных чисел, если $B_{212} \neq 0$.

Наконец, в случае, когда $B_{222} = 0$, $B_{212} = 0$, но $B_{122} \neq 0$, матрица (2.1) очевидными операциями приводится в поле комплексных чисел к каноническому виду ($III_i$), а в поле вещественных чисел к одному из канонических видов ($III_i$), ($III'_i$).

При $B_{222} = 0$, $B_{212} = 0$, $B_{122} = 0$ матрица (2.1) имеет канонический вид ($IV$) как в поле комплексных, так и в поле вещественных чисел.

Если мы теперь обратимся к приведению кубической матрицы 2-го порядка, симметрической относительно индексов $i$, $k$ или $i$, $j$, то получим канонические виды $(I)$, $(II)$, $(IV)$, $(I')$ и соответственно $(III_j)$, $(III'_j)$ или $(III_k)$, $(III'_k)$.

Составляя, далее, матрицы (3.1) и (3.3) гл. III для всех полученных канонических матриц, мы можем воспользоваться таблицей I § 1, дополнив ее следующим образом.

Таблица I

| $A$ | $A^{(i)}$ | $A^{(j)}$ | $A^{(k)}$ | $B$ |
|---|---|---|---|---|
| $(III'_i)$ | $\begin{Vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}$ | $O$ | $O$ | $O$ |
| $(III'_j)$ | $O$ | $\begin{Vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}$ | $O$ | $O$ |
| $(III'_k)$ | $O$ | $O$ | $\begin{Vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}$ | $O$ |

Арифметические инварианты канонических матриц указаны в таблице II.

Таблица II

| $A$ | $r_i$ | $r_j$ | $r_k$ | $r_{jk}^{(i)}$ | $r_{ik}^{(j)}$ | $r_{ij}^{(k)}$ | $r_{A^{(i)}}$ | $r_{A^{(j)}}$ | $r_{A^{(k)}}$ | $\sigma_{A^{(i)}}$ | $\sigma_{A^{(j)}}$ | $\sigma_{A^{(k)}}$ | $r_B$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $(I)$ | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 0 | 0 | 0 | 2 |
| $(II)$ | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 1 | 1 | 1 | −1 | −1 | −1 | 1 |
| $(III_i)$ | 1 | 2 | 2 | 2 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | −1 | | | 0 |
| $(III_j)$ | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 0 | 1 | 0 | | −1 | | 0 |
| $(III_k)$ | 2 | 2 | 1 | 1 | 1 | 2 | 0 | 0 | 1 | | | −1 | 0 |
| $(IV)$ | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | | | | 0 |
| $(I')$ | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | −2 | −2 | −2 | 2 |
| $(III'_i)$ | 1 | 2 | 2 | 2 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | | | 0 |
| $(III'_j)$ | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 0 | 1 | 0 | | 1 | 1 | 0 |
| $(III'_k)$ | 2 | 2 | 1 | 1 | 1 | 2 | 0 | 0 | 1 | | | | 0 |

Из таблицы II видим, что среди канонических матриц $(I)$, $(II)$, $(III_i)$, $(III_j)$, $(III_k)$, $(IV)$ нет эквивалентных ни в поле комплексных, ни в поле вещественных чисел и что ни одна из этих матриц не эквивалентна в поле вещественных чисел ни одной из канонических матриц $(I')$, $(III'_i)$, $(III'_j)$, $(III'_k)$, среди которых также нет эквивалентных.

Теорема доказана.

Замечание 2.1. Если кубическая матрица 2-го порядка $A$, симметрическая относительно какой-нибудь пары индексов, и одна из канонических матриц $(III_i)$, $(III_j)$, $(III_k)$ эквивалентны (в обычном смысле) в поле комплексных или вещественных чисел, то $A$ и любая из этих канонических матриц $g$-эквивалентны в том же поле. Аналогичное замечание относится к каноническим матрицам $(III'_i)$, $(III'_j)$, $(III'_k)$.

Аналогом доказанной теоремы является

Теорема 2.2. *Всякая двойничная линейно-квадратичная форма, не равная тождественно нулю, $g$-эквивалентна в поле комплексных чисел одной и только одной из следующих канонических форм*:

$$F_1 = X_1Y_1^2 + X_2Y_2^2, \tag{2.5}$$

$$F_2 = 2X_1Y_1Y_2 + X_2Y_1^2, \tag{2.6}$$

$$F_3 = 2X_1Y_1Y_2, \tag{2.7}$$

$$F_4 = X_1Y_1^2. \tag{2.8}$$

*В поле вещественных чисел к каноническим формам, кроме указанных выше, относятся также формы*

$$F_1' = 2X_1Y_1Y_2 + X_2Y_1^2 - X_2Y_2^2, \tag{2.5'}$$

$$F_3' = X_1Y_1^2 + X_1Y_2^2. \tag{2.7'}$$

Приняв во внимание таблицу I § 1, дополненную таблицей I настоящего параграфа, получим для каждой канонической формы полную систему комитантов (см. упражнение 4 § 4 гл. III), сведенных в следующей таблице.

Таблица III

| $F$ | $\Delta$ | $H_i$ | $H_j = H_k$ | $Q$ |
|---|---|---|---|---|
| $F_1$ | $-1$ | $2X_1X_2$ | $2Y_1Y_2$ | $X_1Y_1^2 - X_2Y_2^2$ |
| $F_2$ | $0$ | $-2X_1^2$ | $-2Y_1^2$ | $2X_1Y_1^2$ |
| $F_3$ | $0$ | $-2X_1^2$ | $0$ | $0$ |
| $F_4$ | $0$ | $0$ | $0$ | $0$ |
| $F_1'$ | $4$ | $-2(X_1^2+X_2^2)$ | $-2(Y_1^2+Y_2^2)$ | $2(X_1Y_1^2 - X_1Y_2^2 - 2X_2Y_1Y_2)$ |
| $F_3'$ | $0$ | $2X_1^2$ | $0$ | $0$ |

2. Рассматривая двойничную линейно-квадратичную форму с соответствующей кубической матрицей $A$, симметрической относительно какой-либо пары индексов, мы будем обозначать ее двумерные ранги через $r'$ и $r''$, считая $r''$ рангом по любому из индексов пары, а $r'$ — рангом по третьему индексу. Аналогично этому для трехмерных рангов введем обозначения $\varrho'$ и $\varrho''$. Две совпадающие из матриц $A^{(i)}$, $A^{(j)}$, $A^{(k)}$ будем обозначать через $A''$ и третью из них — через $A'$, а ранги и сигнатуры их — соответственно через $r_{A''}$, $\sigma_{A''}$ и $r_{A'}$, $\sigma_{A'}$.

Ассоциированные с этими матрицами квадратичные формы пусть будут $H''$ и $H'$.

Пользуясь этими обозначениями, мы можем провести следующую $g$-классификацию двойничных линейно-квадратичных форм.

В комплексной области различаем, прежде всего, неособенные формы, у которых дискриминант $\Delta$ не равен нулю, т. е. вторичные ранги $r_{A'}$, $r_{A''}$ (или $r_B$) равны 2, и особенные формы, у которых $\Delta = 0$, т. е. упомянутые выше вторичные ранги меньше, чем 2. Представителем неособенных форм является каноническая форма (2.5).

Среди особенных форм выделяем те, которые не равны тождественно нулю, т. е. те, у которых двумерные ранги $r'$, $r''$ (или трехмерные ранги $\varrho'$, $\varrho''$) отличны от нуля, и формы, тождественно равные нулю, у которых эти ранги — нули. Далее, особенные формы, не равные тождественно нулю, делим на два рода.

I) Формы, разлагающиеся в произведение двух форм — линейной (относительно одного из двух рядов переменных) и билинейной (относительно обоих рядов переменных), представителем которых является каноническая форма (2.6) и у которых оба ковариапта $H'$, $H''$ (или $Q$) не равны тождественно нулю, т. е. оба вторичных ранга $r_{A'}$, $r_{A''}$ (или $r_B$) равны 1.

II) Формы, разлагающиеся в произведение трех линейных форм: одной, линейной относительно одного из двух рядов переменных, и двух, линейных относительно другого ряда переменных. У форм этого рода ковариант $H''$ (или $Q$) тождественно равен нулю, т. е. $r_{A''} = 0$ (или $r_B = 0$).

Наконец, среди форм II рода различаем два вида форм в зависимости от того, будут ли упомянутые выше две линейные формы линейно независимы или зависимы. Представителями форм этих двух видов являются канонические формы (2.7) и (2.8). У форм первого вида ковариант $H'$ не равен тождественно нулю, т. е. $r_{A'} = 1$, тогда как у форм второго вида $H' = 0$, т. е. $r_{A'} = 0$.

Результаты $g$-классификации двойничных линейно-квадратичных форм в комплексной области представлены в таблице IV.

Таблица IV

| Классы | | Канонические виды | Алгебраическая характеристика | $r'$ | $r''$ | $r_{A'}$ | $r_{A''}$ | $(r_B)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | I. Неособенные формы | (2.5) | $\Delta\neq 0$ | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 |
| Особенные формы; Не равные тождественно нулю | II. Разлагающиеся в произведение линейной и билинейной форм | (2.6) | $\Delta=0$, $H'\neq 0$, $H''\neq 0$ $(Q\neq 0)$ | 2 | 2 | 1 | 1 | 1 |
| Особенные формы; Не равные тождественно нулю | III. Разлагающиеся в произведение трех линейных форм: одной, линейной относительно одного из двух рядов переменных, и двух (линейно независимых), линейных относительно другого ряда переменных | (2.7) | $\Delta=0$, $H'\neq 0$, $H''=0$ $(Q=0)$ | 1 | 2 | 1 | 0 | 0 |
| Особенные формы; Не равные тождественно нулю | IV. Разлагающиеся в произведение линейной формы относительно одного из двух рядов переменных и квадрата линейной формы относительно другого ряда переменных | (2.8) | $\Delta=0$, $H'=0$, $H''=0$, $F\neq 0$ $(Q=0)$ | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| Особенные формы | V. Тождественно равные нулю | | $\Delta=0$, $F=0$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

Эта классификация распространяется и на вещественную область, если только допустим распадение класса I на два: Iа и Iб в зависимости от знака дискриминанта $\Delta$, и распадение класса III на два: IIIа и IIIб в зависимости от того, будет ли ковариант $H'$ отрицательной или положительной полуопределенной[1]) квадратичной формой. Можно также сказать, что распадение классов I и III обусловливается значениями сигнатуры $\sigma_{A'}$, не меняющейся при вещественных элементарных преобразованиях, которыми матрица $A$ в рассматриваемых случаях приводится к каноническому виду[2]).

К классу Iа относятся неособенные формы, для которых $\Delta < 0$, т. е. $\sigma_{A'} = 0$. Их представителем является каноническая форма (2.5). К классу Iб относятся неособенные формы, для которых $\Delta > 0$, т. е. $\sigma_{A'} = -2$. Они представляются канонической формой (2.5′).

Класс IIIа составляют особенные формы, разлагающиеся в произведение трех вещественных линейных форм: одной, линейной относительно одного из двух рядов переменных, и двух (линейно независимых), линейных относительно другого ряда переменных. У форм этого класса ковариант $H'$ есть отрицательная полуопределенная квадратичная форма, т. е. $\sigma_{A'} = -1$. Представитель их — каноническая форма (2.7). Класс IIIб составляют особенные формы, разлагающиеся в произведение вещественной линейной формы относительно одного из двух рядов переменных и двух мнимых сопряженных линейных форм относительно другого ряда переменных. У форм этого класса ковариант $H'$ есть положительная полуопределенная квадратичная форма, т. е. $\sigma_{A'} = 1$. Представитель их — каноническая форма (2.7′).

Эти дополнительные результаты $g$-классификации двойничных линейно-квадратичных форм в вещественной области сведены в таблице V.

Таблица V

| Классы | | | Канонические виды | Алгебраическая характеристика | Арифметическая характеристика $\sigma_{A'}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| Неособенные формы | Iа | | (2.5) | $\Delta<0$ | 0 |
| | Iб | | (2.5′) | $\Delta>0$ | $-2$ |
| Особенные формы | IIIа. | Разлагающиеся в произведение трех вещественных линейных форм: одной, линейной относительно одного из двух рядов переменных, и двух (линейно независимых), линейных относительно другого ряда переменных | (2.7) | $H'<0$ | $-1$ |
| | IIIб. | Разлагающиеся в произведение вещественной линейной формы относительно одного из двух рядов переменных и двух мнимых сопряженных линейных форм относительно другого ряда переменных | (2.7′) | $H'>0$ | 1 |

3. Так же как и для двойничной трилинейной формы, геометрическую интерпретацию комитантов $F$, $\Delta$, $H'$, $H''$, $Q$ полной системы для линейно-квадратичной формы (упражнение 4 § 4 гл. III) устанавливаем, приравнивая

[1]) См. [19], стр. 161.

[2]) См. замечание 3.1 гл. III.

эти комитанты нулю и рассматривая переменные каждого из рядов

$$x_1,\ x_2,$$
$$y_1,\ y_2$$

как однородные координаты точки на прямой.

Уравнение $F=0$, которое получим, приравнивая нулю неособенную двойничную линейно-квадратичную форму

$$F = A_{111}x_1y_1^2 + 2A_{112}x_1y_1y_2 + A_{211}x_2y_1^2 + A_{122}x_1y_2^2 + 2A_{212}x_2y_1y_2 + A_{222}x_2y_2^2, \tag{2.9}$$

характеризует проективное соответствие между тремя системами точек прямой в случае, когда две из этих систем совпадают. Такого рода проективное соответствие будем называть **линейно-квадратичным**. Оно, очевидно, не имеет места для особенных двойничных линейно-квадратичных форм, для которых $\Delta=0$ (упражнение 1 § 4 гл. III).

В неоднородных координатах линейно-квадратичное проективное соответствие определяется уравнением

$$A_{111}xy^2 + 2A_{112}xy + A_{211}y^2 + A_{122}x + 2A_{212}y + A_{222} = 0, \tag{2.10}$$

встречающимся при образовании кривых 3-го порядка, данном Шалем [186], с помощью пучка прямых и пучка конических сечений.

*Предельные* точки линейно-квадратичного проективного соответствия в неоднородных координатах даются выражениями

$$-\frac{A_{211}}{A_{111}},\qquad \frac{-A_{112}+\sqrt{A_{112}^2-A_{111}A_{122}}}{A_{111}},\qquad \frac{-A_{112}-\sqrt{A_{112}^2-A_{111}A_{122}}}{A_{111}}.$$

Для определения его тройных точек в тех же координатах служит уравнение

$$A_{111}x^3 + (2A_{112}+A_{211})x^2 + (A_{122}+2A_{212})x + A_{222} = 0.$$

Если матрица $A$ неособенной двойничной линейно-квадратичной формы $F$ — симметрическая, то проективное соответствие, задаваемое формой $F$, будем называть **линейно-квадратичной инволюцией**. В неоднородных координатах она определяется уравнением

$$A_{111}xy^2 + A_{112}(2xy+y^2) + A_{122}(x+2y) + A_{222} = 0. \tag{2.10'}$$

Предельные и тройные точки линейно-квадратичной инволюции определяются так же, как и в случае линейно-квадратичного проективного соответствия.

Уравнение $Q=0$, имеющее в неоднородных координатах вид

$$B_{111}xy^2 + 2B_{112}xy + B_{211}y^2 + B_{122}x + 2B_{212}y + B_{222} = 0 \tag{2.11}$$

(упражнение 3 § 4 гл. III), характеризует линейно-квадратичное проективное соответствие (в частности, инволюцию) между системами точек прямой, если форма $F$ — неособенная.

Геометрическое значение уравнений $H'=0$, $H''=0$ (упражнение 2 § 4 гл. III) было уже рассмотрено в § 1.

Основные свойства линейно-квадратичных проективных соответствий и инволюций аналогичны свойствам трилинейных проективных соответствий, выражаемых теоремами 1.3, 1.4, 1.6 (упражнения 9, 10, 11).

### Упражнения

1. Пользуясь таблицей III, проверить соотношение $Q^2+\frac{1}{2}H_iH_j^2+\Delta F^2=0$ между основными комитантами двойничной линейно-квадратичной формы, данной в каноническом виде, и показать, что оно справедливо для любой формы каждого класса.

2. Показать, что для каждой пары классов (I, V), (II, IV), (III, III) двойничных линейно-квадратичных форм (табл. IV) сумма $r'+r_{A'}$ (или $r''+r_{A''}$) первичного ранга $r'$ (или $r''$) форм одного из классов пары и вторичного ранга $r_{A'}$ (или $r_{A''}$) форм другого равна 2.

3. Каким классам в вещественной области принадлежат формы

α) $4x_1y_1^2+8x_1y_1y_2+8x_2y_1^2+6x_1y_2^2+12x_2y_1y_2+7x_2y_2^2$,

β) $2x_1y_1^2+8x_1y_1y_2+2x_2y_1^2+3x_1y_2^2+6x_2y_1y_2-2x_2y_2^2$,

γ) $4x_1y_1^2+7x_2y_1^2-4x_1y_2^2+2x_2y_1y_2-5x_2y_2^2$,

δ) $2x_1y_1^2+3x_2y_1^2-2x_1y_2^2-3x_2y_2^2$,

ε) $2x_1y_1^2-4x_1y_1y_2+3x_2y_1^2+4x_1y_2^2-6x_2y_1y_2+6x_2y_2^2$,

ζ) $2x_1y_1^2+4x_1y_1y_2+3x_2y_1^2+2x_1y_2^2+6x_2y_1y_2+3x_2y_2^2$.

4. Приняв во внимание указанные при доказательстве теоремы 2.1 элементарные преобразования, приводящие к каноническому виду кубическую матрицу, симметрическую относительно индексов $j$, $k$, найти невырожденные квадратные матрицы, на которые надо умножить по индексам $i$ и $j$, $k$ матрицу каждой из форм упражнения 3, чтобы получить матрицу эквивалентной канонической формы.

5. В поле вещественных чисел представителем класса IIIa (табл. V) вместо канонической формы $F_3=2X_1Y_1Y_2$ можно взять форму $X_1Y_1^2-X_1Y_2^2$. Какими вещественными элементарными преобразованиями матрица этой формы может быть получена из матрицы формы $F_3$? Указать равносильное этим преобразованиям умножение матрицы формы $F_3$ на невырожденную квадратную матрицу.

6. Доказать, что линейно-квадратичное проективное соответствие определяется пятью тройками точек прямой, у которых координаты (неоднородные) $x^{(\alpha)}$, $y^{(\alpha)}$, $y^{(\alpha)}$ ($\alpha=1, 2, \ldots, 5$) удовлетворяют условию: ранг двумерной матрицы

$$\begin{Vmatrix} x^{(1)}y^{(1)^2} & x^{(1)}y^{(1)} & y^{(1)^2} & x^{(1)} & y^{(1)} & 1 \\ x^{(2)}y^{(2)^2} & x^{(2)}y^{(2)} & y^{(2)^2} & x^{(2)} & y^{(2)} & 1 \\ \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot \\ x^{(5)}y^{(5)^2} & x^{(5)}y^{(5)} & y^{(5)^2} & x^{(5)} & y^{(5)} & 1 \end{Vmatrix}$$

равен 5.

7. Две совпадающие системы точек $y$, определяемые линейно-квадратичным проективным соответствием (2.10) по данной системе любых вещественных точек $x$, тогда и только тогда вещественны, когда соответствующая линейно-квадратичная форма (2.9) вещественна и принадлежит классу Iб (табл. V). Доказать.

8. Найти предельные и тройные точки линейно-квадратичных проективных соответствий

а) $xy^2-4xy+y^2+3x-2y+5=0$,

б) $xy^2-4xy+y^2+6x-4y=0$,

в) $xy^2-4xy+3y^2-8y+12=0$,

г) $xy^2-4xy-5y^2+7x+20y-27=0$.

9. Тройные точки (из которых две или все три одинаковы) проективного соответствия, задаваемого двойничной линейно-квадратичной формой (2.9), находятся в линейно-квадратичной инволюции с тремя различными тройками точек

$$a_1,\ b_1,\ b_1; \quad a_2,\ b_2,\ b_2; \quad a_3,\ b_3,\ b_3,$$

если каждая из трех троек точек

$$a_1,\ b_2,\ b_3; \quad a_2,\ b_1,\ b_3; \quad a_3,\ b_1,\ b_2$$

принадлежит проективному соответствию, задаваемому двойничной трилинейной формой, полярной форме (2.9). Доказать.

10. Если $\lambda_1$ и $\lambda_2$, $\mu_1$ и $\mu_2$ — двойные точки инволюций, задаваемых билинейными формами, полярными ковариантам $H_i$ и $H_j$ неособенной двойничной линейно-квадратичной формы (2.9), то каждая тройка точек $\lambda_1$, $\mu_2$, $\mu_2$ и $\lambda_2$, $\mu_1$, $\mu_1$, принадлежит линейно-квадратичным проективным соответствиям, задаваемым формой (2.9) и ее ковариантом $Q$, а каждая пара точек $\lambda_1$, $\mu_2$ и $\lambda_2$, $\mu_1$ принадлежит билинейному проективному соответствию, характеризующемуся уравнением $\sum\limits_{\alpha,\beta=1}^{2} A_{\alpha 1\beta}x_\alpha y_\beta=0$. Доказать.

11. Если $x$ и $x'$, $y$ и $y'$ — соответственные точки инволюций, задаваемых билинейными формами, полярными ковариантами $H_i$ и $H_j$ неособенной двойничной линейно-

квадратичной формы (2.9), и тройка точек $x$, $y$, $y$ принадлежит проективному соответствию, задаваемому формулой (2.9), то каждая из троек точек $x'$, $y'$, $y'$ и $x'$, $y$, $y$ принадлежит проективному соответствию, задаваемому ковариантом $Q$ этой формы. Доказать.

## § 3. Классификация двойничных кубических форм

1. Классификация двойничных кубических форм, так же как и изложенная в предыдущих параграфах классификация двойничных трилинейных и линейно-квадратичных форм, может быть связана с классификацией

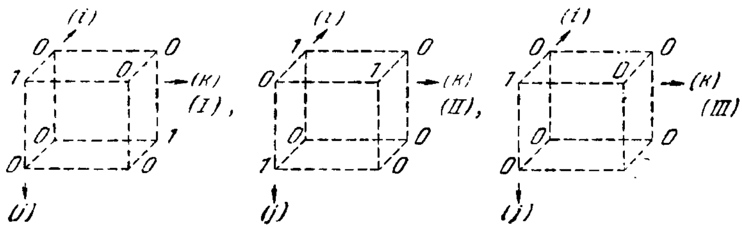



Рис. 17.

соответствующих кубических матриц. Канонические виды симметрических кубических матриц, с которыми ассоциируются кубические формы, находим с помощью симметрических элементарных преобразований этих матриц.

Теорема 3.1. *Всякая ненулевая симметрическая кубическая матрица 2-го порядка эквивалентна в поле комплексных чисел одной и только одной из следующих канонических матриц* (рис. 17). *В поле вещественных чисел к каноническим матрицам, кроме указанных выше, относится также матрица* рис. 18.

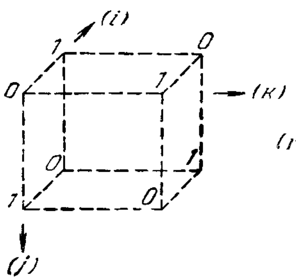


Рис. 18.

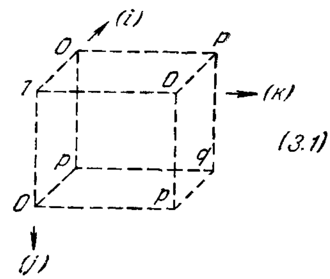



Рис. 19.

Действительно, если у симметрической кубической матрицы 2-го порядка $A = \| A_{ijk} \|$ $(i, j, k = 1, 2)$ двойничной кубической формы $f = A_{111}x_1^3 + 3A_{112}x_1^2x_2 + 3A_{122}x_1x_2^2 + A_{222}x_2^3$ первичный ранг $r$ (двумерный или трехмерный) [1]) равен 1, то элементы $A_{111}$ и $A_{222}$ не равны одновременно нулю. Не нарушая общности, можем считать $A_{111} \neq 0$. Тогда матрица $A$ после операций

$$\boxed{I}\ \frac{1}{\sqrt[3]{A_{111}}}, \qquad \boxed{II} + \boxed{I}\left(-\frac{A_{112}}{\sqrt[3]{A_{111}^2}}\right)$$

переходит в матрицу вида рис. 19.

[1]) См. замечание 2.3 гл. III.

Так как ранг $r$ матрицы (3.1) также равен 1, то $p=0$, $q=0$. Следовательно, в рассматриваемом случае матрица $A$ эквивалентна канонической матрице ($III$) как в поле комплексных, так и в поле вещественных чисел.

Пусть теперь первичный ранг матрицы $A$ равен 2.

Будем различать случаи, когда элементы $A_{111}$ и $A_{222}$ матрицы $A$ не равны одновременно нулю и когда $A_{111}=A_{222}=0$.

В первом случае матрица $A$ приводится теми же операциями, как и раньше, к матрице (3.1). Из элементов последней составим по формуле (4.1′) гл. III квадратичную форму $H$. Приравнивая ее нулю и полагая $\frac{x_1}{x_2}=t$, получим уравнение

$$pt^2+qt-p^2=0. \tag{3.2}$$

Если дискриминант $-\delta=-(q^2+4p^3)$ квадратичной формы $H$ равен нулю, то $q\neq 0$, так как в противном случае ранг $r$ матрицы (3.1), а следовательно, и матрицы $A$ будет равен 1, что противоречит предположению. Подвергая тогда матрицу (3.1) операциям

$$\boxed{II}\sqrt[3]{\frac{2}{q}},\quad \boxed{I}+\boxed{II},\quad \boxed{II}+\boxed{I}\left(-\frac{2}{3}\right),\quad \boxed{I-II},$$

придем к канонической матрице ($II$), которой будет, таким образом, эквивалентна матрица $A$ как в поле комплексных, так и в поле вещественных чисел.

Пусть теперь $\delta\neq 0$. Если при этом $p=0$, то $q\neq 0$ и матрица (3.1) после операции

$$\boxed{II}\,\frac{1}{\sqrt[3]{q}}$$

переходит в каноническую матрицу ($I$), которой, следовательно, будет эквивалентна матрица $A$ как в поле комплексных, так и в поле вещественных чисел.

Если же $p\neq 0$, то матрицу (3.1) подвергаем операциям

$$\boxed{I}\,t_1,\quad \boxed{I}+\boxed{II},\quad \boxed{II}\,(-t_2\sqrt{\delta}),\quad \boxed{II}+\boxed{I}\,\frac{t_2}{t_1}p^2,$$

$$\boxed{I}\sqrt[3]{\frac{p^2}{\delta t_1}},\quad \boxed{II}\,\frac{1}{\sqrt[3]{\delta t_2 p^4}},$$

где

$$t_1=\frac{-q+\sqrt{\delta}}{2p},\quad t_2=\frac{-q-\sqrt{\delta}}{2p}$$

— конечные, отличные от нуля, простые корни уравнения (3.2).

В результате получим ту же каноническую матрицу ($I$), которой при сделанных нами предположениях будет эквивалентна в поле комплексных чисел матрица $A$. В поле вещественных чисел эквивалентность будет иметь место, если дискриминант $\Delta$ формы $F$ — отрицательный и, следовательно, $\delta>0$. Если же $\Delta>0$, то $\delta<0$, а потому $p<0$. Тогда для нахождения эквивалентной канонической матрицы поступаем следующим образом. Прежде всего, матрицу (3.1) операцией

$$\boxed{II}\,\frac{1}{\sqrt{-p}}$$

приводим к виду рис. 20, где $h$, очевидно, всегда можем считать неотрицательным и вследствие неравенства $\Delta>0$ меньшим, чем 2.

Если $h=0$, то после операций

$$\boxed{I-II}\,,\qquad \boxed{II}\,(-1)$$

над матрицей (3.3) получим каноническую матрицу $(I')$. Если же $h>0$,

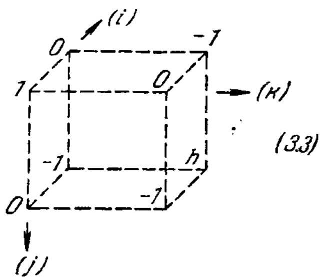



Рис. 20.

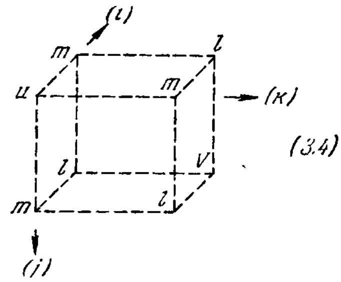



Рис. 21.

то матрица (3.3) операциями

$$\boxed{I}+\boxed{II}\lambda,\qquad \boxed{II}\,(\mu-\lambda),\qquad \boxed{II}+\boxed{I}\,,$$

где $\lambda$, $\mu$ — различные между собой вещественные числа, приводится к матрице рис. 21, где

$$u=h\lambda^3-3\lambda^2+1,\qquad v=h\mu^3-3\mu^2+1$$

$$l=(\mu-\lambda)\,(h\lambda\mu-\lambda-\mu)+m,\qquad m=h\lambda^2\mu-\lambda^2-2\lambda\mu+1.$$

Определим теперь $\lambda$ и $\mu$ так, чтобы они удовлетворяли уравнениям $v=0$, $m=0$.

Полагая в этих уравнениях

$$\mu=\nu+\frac{1}{h}\,, \tag{3.5}$$

перепишем их в виде

$$\nu^3-\frac{3}{h^2}\nu+\frac{h^2-2}{h^3}=0, \tag{3.6}$$

$$h\nu\lambda^2-2\left(\nu+\frac{1}{h}\right)\lambda+1=0. \tag{3.7}$$

Так как $h<2$, то уравнение (3.6) имеет три вещественных различных корня, среди которых есть по крайней мере один положительный корень. Полагая $\nu$ равным любому положительному корню уравнения (3.6), находим из уравнения (3.7)

$$\lambda=\frac{\nu+\frac{1}{h}\pm\sqrt{\nu^2-\frac{h^2-2}{h}\nu+\frac{1}{h^2}}}{h\nu}\,. \tag{3.8}$$

Отсюда, приняв во внимание равенство $\frac{h^2-2}{h}=3\nu-h^2\nu^3$, вытекающее из (3.6), получаем два вещественных значения $\lambda$, которые ввиду $0<h<2$ различны между собой. Одно из них равно $\mu$, а другое, отличное от $\mu$, равно $\frac{1}{h}-\nu+\frac{2}{h^2\nu}$.

Полагая $\lambda=\frac{1}{h}-\nu+\frac{2}{h^2\nu}$ и пользуясь выражением (3.5), получаем:

$$l=-\frac{2(h^2\nu^2-1)^2}{h^3\nu}<0, \qquad u=\frac{2(4-h^2)}{h^3\nu^3}>0.$$

Подвергнув теперь матрицу (3.4) операциям

$$\boxed{I}\left(-\frac{1}{\sqrt[3]{u}}\right), \qquad \boxed{II}\,\frac{\sqrt[6]{u}}{\sqrt{-l}}, \qquad \boxed{I-II},$$

приведем ее к каноническому виду $(I')$.

Рассматривая, наконец, второй случай, когда $A_{111}=A_{222}=0$, легко убеждаемся в том, что матрица $A$ приводится к каноническому виду $(I)$ или $(II)$ в поле комплексных чисел и к каноническому виду $(I')$ или $(II)$ в поле вещественных чисел.

Составим теперь для всех указанных выше канонических матриц, пользуясь выражениями (3.1) и (3.3) гл. III, матрицы $A$ (замечание 3.3 гл. III) и $B$. Будем иметь:

Таблица I

| $A$ | $\mathcal{A}$ | $B$ |
|---|---|---|
| $(I)$ | $\begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix}$ | $\left\Vert\begin{array}{cc\|cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right\Vert$ |
| $(II)$ | $\begin{Vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}$ | $\left\Vert\begin{array}{cc\|cc} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right\Vert$ |
| $(III)$ | $O$ | $O$ |
| $(I')$ | $\begin{Vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{Vmatrix}$ | $\left\Vert\begin{array}{cc\|cc} 2 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \end{array}\right\Vert$ |

Арифметические инварианты канонических матриц указаны в таблице II.

Таблица II

| $A$ | $r$ | $r_{\mathcal{A}}$ | $\sigma_{\mathcal{A}}$ | $r_B$ |
|---|---|---|---|---|
| $(I)$ | 2 | 2 | 0 | 2 |
| $(II)$ | 2 | 1 | $-1$ | 1 |
| $(III)$ | 1 | 0 | | 0 |
| $(I')$ | 2 | 2 | $-2$ | 2 |

Из последней таблицы заключаем, что среди канонических матриц $(I)$, $(II)$, $(III)$ нет эквивалентных ни в поле комплексных, ни в поле вещественных чисел и что ни одна из этих матриц не эквивалентна в поле вещественных чисел канонической матрице $(I')$.

Теорема доказана.

2. Вводя для двойничных кубических форм, ассоциированных с каноническими матрицами $(I)$, $(II)$, $(III)$, $(I')$, соответственно обозначения $f_1$, $f_2$, $f_3$, $f_1'$, будем иметь в поле комплексных чисел следующие канонические

виды форм рассматриваемого типа:

$$f_1 = X_1^3 + X_2^3, \tag{3.9}$$

$$f_2 = 3X_1^2 X_2, \tag{3.10}$$

$$f_3 = X_1^3. \tag{3.11}$$

В поле вещественных чисел к каноническим формам, кроме указанных выше, относится также форма

$$f_1' = 3X_1^2 X_2 - X_2^3. \tag{3.9$'$}$$

Приняв во внимание таблицу I, получим для каждой канонической формы полную систему комитантов (замечание 4.4 гл. III), сведенных в таблице III.

Таблица III

| $f$ | $\Delta$ | $H$ | $Q$ |
|---|---|---|---|
| $f_1$ | $-1$ | $2X_1X_2$ | $X_1^3-X_2^3$ |
| $f_2$ | $0$ | $-2X_1^2$ | $2X_1^3$ |
| $f_3$ | $0$ | $0$ | $0$ |
| $f_1'$ | $4$ | $-2(X_1^2+X_2^2)$ | $2(X_1^3-3X_1X_2^2)$ |

На основании полученных результатов мы можем теперь установить следующую классификацию двойничных кубических форм.

В комплексной области различаем, прежде всего, неособенные формы, у которых дискриминант $\Delta$ не равен нулю, т. е. вторичный ранг $r_A$ (или $r_B$) равен 2, и особенные формы, у которых $\Delta = 0$, т. е. $r_A$ (или $r_B$) меньше, чем 2. Неособенные формы разлагаются в произведение трех линейно зависимых линейных форм, являющихся попарно линейно независимыми. Представителем их служит каноническая форма (3.9).

Среди особенных форм выделяем те, которые не равны тождественно нулю, т. е. те, у которых первичный ранг $r$ не равен нулю, и формы, тождественно равные нулю, у которых $r = 0$. Далее, особенные формы, не равные тождественно нулю, делим на два рода.

I. Формы, разлагающиеся в произведение линейной формы и квадрата такой же формы, линейно независимой от первой. У форм этого рода ковариант $H$ (или $Q$) не равен тождественно нулю, т. е. вторичный ранг $r_A$ (или $r_B$) равен 1. Представителем их является каноническая форма (3.10).

II. Формы, являющиеся кубом линейной формы. У форм этого рода ковариант $H$ (или $Q$) тождественно равен нулю, т. е. $r_A = 0$ (или $r_B = 0$). Представитель их — каноническая форма (3.11).

Результаты классификации двойничных кубических форм в комплексной области представлены в таблице IV.

Та же классификация будет иметь место и в вещественной области, если допустим распадение класса I на два: Iа и Iб в зависимости от знака дискриминанта $\Delta$, т. е. в зависимости от значений сигнатуры $\sigma_A$, не меняющейся при симметрических вещественных элементарных преобразованиях матрицы $A$[1]). К классу Iа отнесем неособенные формы, для которых

[1]) См. замечание 3.1 гл. III.

Таблица V

| | | Классы | Канонические виды | Алгебраическая характеристика | Арифметическая характеристика | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | $r$ | $r_A$ | $r_B$ |
| | | I. Неособенные формы, разлагающиеся в произведение трех линейно зависимых линейных форм, являющихся попарно линейно независимыми | (3.9) | $\Delta\neq 0$ | 2 | 2 | 2 |
| Особенные формы | Не равные тождественно нулю | II. Разлагающиеся в произведение линейной формы и квадрата такой же формы, линейно независимой от первой | (3.10) | $\Delta=0,\ H\neq 0,\ (Q\neq 0)$ | 2 | 1 | 1 |
| Особенные формы | Не равные тождественно нулю | III. Представляющие куб линейной формы | (3.11) | $\Delta=0, H=0, (Q=0) f\neq 0$ | 1 | 0 | 0 |
| Особенные формы | | IV. Тождественно равные нулю | | $\Delta=0,\ f=0$ | 0 | 0 | 0 |

$\Delta<0$, т. е. $\sigma_A=0$. Эти формы, приводящиеся к каноническому виду (3.9), разлагаются в произведение трех линейных форм, из которых одна вещественна, а две — мнимые сопряженные. К классу Iб отнесем **неособенные формы**, для которых $\Delta>0$, т. е. $\sigma_A=-2$. Эти формы, приводящиеся к каноническому виду (3.9′), разлагаются в произведение трех вещественных линейных форм.

Упомянутые выше дополнительные результаты классификации двойничных кубических форм в вещественной области сведены в таблице V.

Таблица V

| Классы | Канонические виды | Алгебраическая характеристика | Арифметическая характеристика |
|---|---|---|---|
| | | | $\sigma_A$ |
| Iа. Неособенные формы, разлагающиеся в произведение трех линейных форм, из которых одна вещественна, а две—мнимые сопряженные | (3.9) | $\Delta<0$ | 0 |
| Iб. Неособенные формы, разлагающиеся в произведение трех вещественных линейных форм | (3.9′) | $\Delta>0$ | $-2$ |

3. Геометрическую интерпретацию комитантов $f$, $\Delta$, $H$, $Q$ полной системы для двойничной кубической формы мы получим, приравнивая эти комитанты нулю и исследуя взаимное расположение точек на прямой, однородные координаты которых удовлетворяют полученным уравнениям. При этом, не ограничивая общности, можно рассматривать комитанты канонических форм, сведенные в таблице III.

Если двойничная кубическая форма $f$ не равна тождественно нулю, то уравнение $f=0$ определяет три точки на прямой. Если форма $f$ принадлежит классу I, то все эти точки различны между собой. В вещественной области, смотря по тому, принадлежит ли форма $f$ классу Iа или Iб, одна из точек, определяемых уравнением $f=0$, вещественна и две — мнимые сопряженные или все три точки вещественны.

Если форма $f$ принадлежит классу II, то из трех точек, задаваемых этой формой, две совпадают, а третья от них отлична.

Наконец, форма $f$, принадлежащая классу III, задает три совпадающие точки прямой.

Равенство $\Delta=0$ указывает, что среди трех точек, определяемых уравнением $f=0$, есть совпадающие, поскольку в этом случае форма $f$ — особенная.

Геометрическую интерпретацию ковариантов $H$ и $Q$ формы $f$ дадим лишь для того случая, когда эта форма — неособенная.

Интерпретация остальных случаев тривиальна и не представляет интереса.

Уравнение $H=0$, составленное для канонической формы (3.9), определяет две различные точки $L_1$ (1, 0) и $L_2$ (0, 1) прямой. Вместе с тем сама форма (3.9) задает на той же прямой три различные точки $M_1(-1, 1)$, $M_2(-\varepsilon, 1)$, $M_3(-\varepsilon^2, 1)$, где $\varepsilon=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Составим двойное отношение четырех точек: $M_1$, $M_2$, $M_3$ и любой из точек $L_1$, $L_2$. Как известно[1]), двойное отношение четырех точек $A_1(x_1^{(1)}, x_2^{(1)})$, $A_2(x_1^{(2)}, x_2^{(2)})$, $A_3(x_1^{(3)}, x_2^{(3)})$, $A_4(x_1^{(4)}, x_2^{(4)})$ прямой выражается формулой

$$(A_1A_2A_3A_4)=\frac{\begin{vmatrix} x_1^{(1)} & x_2^{(1)} \\ x_1^{(3)} & x_2^{(3)} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1^{(1)} & x_2^{(1)} \\ x_1^{(4)} & x_2^{(4)} \end{vmatrix}} : \frac{\begin{vmatrix} x_1^{(2)} & x_2^{(2)} \\ x_1^{(3)} & x_2^{(3)} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1^{(2)} & x_2^{(2)} \\ x_1^{(4)} & x_2^{(4)} \end{vmatrix}}.$$

Следовательно,

$$(L_1M_1M_2M_3)=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -\varepsilon & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -\varepsilon^2 & 1 \end{vmatrix}} : \frac{\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -\varepsilon & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -\varepsilon^2 & 1 \end{vmatrix}}=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$(L_2M_1M_2M_3)=\frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -\varepsilon & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -\varepsilon^2 & 1 \end{vmatrix}} : \frac{\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -\varepsilon & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -\varepsilon^2 & 1 \end{vmatrix}}=\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Коварианту $H$ канонической формы (3.9′) отвечают точки $L_1'(1, i)$ и $L_2'(1, -i)$ прямой, тогда как сама форма (3.9′) задает точки $M_1'(1, 0)$, $M_2'(1, -\sqrt{3})$, $M_3'(1, \sqrt{3})$ той же прямой. В этом случае, как легко убедиться, также имеем

$$(L_1'M_1'M_2'M_3')=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad (L_2'M_1'M_2'M_3')=\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

---

[1]) См., например, [24], стр. 264 или [17], стр. 411.

Таким образом доказана

Теорема 3.2. *Каждая из двух точек, отвечающих коварианту $H$ неособенной двойничной кубической формы $f$, составляет с тремя точками, задаваемыми формой $f$, эквиангармоническую четверку* [1]).

Уравнение $Q=0$, составленное для канонической формы (3.9), определяет три различные точки $N_1(1, 1)$, $N_2\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right)$, $N_3\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right)$ прямой.

Составляя двойное отношение четырех точек, из которых три — точки $M_1$, $M_2$, $M_3$, задаваемые формой (3.9), а четвертая — одна из точек $N_1$, $N_2$, $N_3$, получаем:

$$(N_1M_1M_2M_3)=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1\\ -\varepsilon & 1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1\\ -\varepsilon^2 & 1\end{vmatrix}}:\frac{\begin{vmatrix} -1 & 1\\ -\varepsilon & 1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -1 & 1\\ -\varepsilon^2 & 1\end{vmatrix}}=-1,$$

$$(N_2M_1M_2M_3)=\frac{\begin{vmatrix} \varepsilon & 1\\ -\varepsilon & 1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \varepsilon & 1\\ -\varepsilon^2 & 1\end{vmatrix}}:\frac{\begin{vmatrix} -1 & 1\\ -\varepsilon & 1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -1 & 1\\ -\varepsilon^2 & 1\end{vmatrix}}=2,$$

$$(N_3M_1M_2M_3)=\frac{\begin{vmatrix} \varepsilon^2 & 1\\ -\varepsilon & 1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \varepsilon^2 & 1\\ -\varepsilon^2 & 1\end{vmatrix}}:\frac{\begin{vmatrix} -1 & 1\\ -\varepsilon & 1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -1 & 1\\ -\varepsilon^2 & 1\end{vmatrix}}=\frac{1}{2}.$$

Коварианту $Q$ канонической формы (3.9′) отвечают точки $N_1'(0, 1)$, $N_2'(\sqrt{3}, 1)$, $N_3'(-\sqrt{3}, 1)$ прямой.

Составляя в этом случае двойное отношение четырех точек, из которых три — точки $M_1'$, $M_2'$, $M_3'$, задаваемые формой (3.9′), а четвертая — одна из точек $N_1'$, $N_2'$, $N_3'$, находим аналогичным образом:

$$(N_1'M_1'M_2'M_3')=-1,$$
$$(N_2'M_1'M_2'M_3')=2,$$
$$(N_3'M_1'M_2'M_3')=\frac{1}{2}.$$

Тем самым доказана

Теорема 3.3. *Каждая из трех точек, отвечающих коварианту $Q$ неособенной двойничной кубической формы $f$ вместе с одной из трех точек, задаваемых формой $f$, делит гармонически остальные две* [1]).

Комитантам $f$, $\Delta$, $H$, $Q$ можно дать и другую геометрическую интерпретацию, рассматривая трилинейные инволюции, задаваемые формами, полярными двойничным кубическим формам $f$, $Q$, и билинейную инволюцию, задаваемую формой, полярной квадратичной форме $H$ (упражнения 7 — 10).

[1]) Ср. [12], стр. 259.

### Упражнения

1. Пользуясь таблицей III, проверить сизигию Кэли [см. (4.8′) гл. III] для двойничной кубической формы, данной в каноническом виде, и показать, что она справедлива для любой формы каждого класса.

2. Показать, что для каждой пары классов (I, IV), (II, III) двойничных кубических форм (табл. IV) сумма $r+r_A$ первичного ранга $r$ форм одного из классов пары и вторичного ранга $r_A$ форм другого—равна 2 (Г. Б. Гуревич [12]).

3. Каким классам в вещественной области принадлежат формы

$$\alpha)\ 8x_1^3+36x_1^2x_2+42x_1x_2^2+15x_2^3, \qquad \beta)\ 8x_1^3+12x_1^2x_2+(\sqrt{2}-2)\,x_2^3,$$
$$\gamma)\ x_1^3+6x_1^2x_2+9x_1x_2^2+4x_2^3, \qquad \delta)\ 8x_1^3-12x_1^2x_2+6x_1x_2^2-x_2^3.$$

4. Приняв во внимание указанные при доказательстве теоремы 3.1 элементарные преобразования симметрической кубической матрицы, приводящие ее к каноническому виду, найти для каждой из форм упражнения 3 невырожденную квадратную матрицу, на которую надо умножить по индексам $i$, $j$, $k$ матрицу рассматриваемой формы, чтобы получить матрицу эквивалентной канонической формы.

5. Показать, что симметрическая кубическая матрица 2-го порядка, эквивалентная в поле комплексных или вещественных чисел канонической матрице $(I)$, эквивалентна в том же поле матрице

$$A_0=\left\|\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right\| \qquad \longrightarrow (i),\quad \longrightarrow (k),\quad \downarrow (j).$$

6. Какими симметрическими элементарными преобразованиями матрица $A_0$ (см. упражнение 5) может быть приведена к канонической матрице $(I)$? Указать равносильное этим преобразованиям умножение по индексам $i$, $j$, $k$ матрицы $A_0$ на невырожденную квадратную матрицу.

7. Приравнивая нулю двойничную кубическую форму $f$, принадлежащую классу I или II, мы получим тройные точки трилинейной инволюции, задаваемой формой $F$, полярной форме $f$. Какое свойство тройных точек этой инволюции характеризует равенство $\Delta=0$?

8. Если двойничная кубическая форма $f$—неособенная, то уравнение $H=0$ определяет двойные точки билинейной инволюции, задаваемой формой, полярной коварианту $H$. Показать, что каждая из этих точек составляет с тройными точками трилинейной инволюции, задаваемой формой $F$ (см. упражнение 7), эквиангармоническую четверку (ср. с теоремой 3.2).

9. Если двойничная кубическая форма $f$—неособенная, то уравнение $Q=0$ определяет тройные точки трилинейной инволюции, задаваемой формой, полярной коварианту $Q$. Показать, что эти точки различны между собой и что каждая из них вместе с одной из тройных точек трилинейной инволюции, задаваемой формой $F$ (см. упражнение 7), делит гармонически остальные две (ср. с теоремой 3.3).

10. Если $x$ и $x'$—соответственные точки инволюции, задаваемой билинейной формой, полярной коварианту $H$ неособенной двойничной кубической формы $f$, и тройка точек $x$, $y$, $z$ принадлежит трилинейной инволюции, задаваемой формой $F$ (см. упражнение 7), то тройка точек $x'$, $y$, $z$ принадлежит трилинейной инволюции, задаваемой формой, полярной коварианту $Q$ формы $f$. Доказать.

## ГЛАВА V

# КЛАССИФИКАЦИЯ КУБИЧЕСКИХ ТРОЙНИЧНЫХ ФОРМ

## § 1. Проективная классификация кубических тройничных форм

1. Будем называть кубическую тройничную форму $f=\sum_{i,j,k=1}^{3} A_{ijk}x_ix_jx_k$ с соответствующей симметрической кубической матрицей $A=\|A_{ijk}\|$ $(i, j, k = 1, 2, 3)$ *неособенной*, если ее дискриминант $R=S^3-T^2$ [(4.22) гл. III] отличен от нуля, и *особенной*, если $R=0$. Рассмотрим сперва неособенные формы. У таких форм абсолютный инвариант $I=\frac{R}{T^2}$ может иметь любое значение, не равное нулю и не являющееся неопределенностью вида $\frac{0}{0}$. Как показал Гессе [99], всякая неособенная кубическая тройничная форма невырожденным линейным преобразованием

$$x_\lambda=\sum_{i=1}^{3} a_{\lambda i}X_i \qquad (\lambda=1,\ 2,\ 3)$$

приводится к канонической форме

$$\varphi=X_1^3+X_2^3+X_3^3+6mX_1X_2X_3. \tag{1.1}$$

Известны различные методы нахождения коэффициентов этого преобразования, данные, помимо Гессе, также Аронгольдом [43], Споттисвудом [214], Клебшем [62], Гундельфингером [97]. Мы покажем, следуя Пуанкаре [190] и Гордану [95], что к канонической форме (1.1) можно прийти на основании геометрических соображений.

Будем рассматривать переменные $x_1$, $x_2$, $x_3$ формы $f$ как проективные координаты точки на проективной плоскости. Тогда уравнение

$$A_{111}x_1^3+3A_{112}x_1^2x_2+3A_{113}x_1^2x_3+3A_{122}x_1x_2^2+6A_{123}x_1x_2x_3+$$
$$+3A_{133}x_1x_3^2+A_{222}x_2^3+3A_{223}x_2^2x_3+3A_{233}x_2x_3^2+A_{333}x_3^3=0, \tag{1.2}$$

соответствующее форме $f$, определит плоскую линию третьего порядка $C_3$, о которой будем говорить, что она п р е д с т а в л е н а формой $f$. Пусть линия $C_3$ не имеет особых точек. Тогда, как известно[1]), у нее имеется девять точек перегиба, расположенных по три на двенадцати прямых, причем через каждую точку перегиба проходят по четыре прямых из этих двенадцати; последние образуют четыре с и з и г е т и ч е с к и х треугольника, каждый из которых содержит все девять точек перегиба, имея их по три на каждой стороне.

---

[1]) См. [100], стр. 104—106.

В вещественной области[1]) из девяти точек перегиба три вещественны и лежат на одной вещественной прямой, а остальные шесть — мнимые, попарно сопряженные, лежащие на трех вещественных прямых, из которых каждая содержит, кроме двух мнимых сопряженных точек перегиба, также одну из трех вещественных точек перегиба. Эти три вещественные прямые образуют единственный вещественный сизигетический треугольник. Таким образом, из двенадцати прямых, на которых лежат девять точек перегиба, только четыре вещественны, остальные же восемь — мнимые, попарно сопряженные. Именно, через каждую из трех вещественных точек перегиба проходят, кроме вещественной прямой, на которой лежат эти точки, другая вещественная прямая — сторона вещественного сизигетического треугольника — и две мнимые сопряженные прямые из упомянутых выше двенадцати; последняя же пара мнимых сопряженных прямых входит в состав сизигетического треугольника, третья сторона которого есть вещественная прямая, содержащая все три вещественные точки перегиба.

Выберем проективную систему координат так, чтобы координатным треугольником служил один из четырех сизигетических треугольников (вещественный в случае вещественной области) и чтобы две из точек перегиба линии $C_3$ получили координаты $(0, 1, -1)$ и $(1, 0, -1)$. Тогда, как нетрудно убедиться, остальные семь точек перегиба будут иметь координаты

$$(1, -1, 0),\ (0, \varepsilon, -1),\ (\varepsilon, 0, -1),\ (\varepsilon, -1, 0),\ (0, \varepsilon^2, -1),\ (\varepsilon^2, 0, -1),\ (\varepsilon^2, -1, 0),$$

где $\varepsilon$, $\varepsilon^2$ — мнимые кубические корни из 1.

Так как координаты каждой точки перегиба должны удовлетворять уравнению

$$A'_{111}\xi_1^3 + 3A'_{112}\xi_1^2\xi_2 + 3A'_{113}\xi_1^2\xi_3 + 3A'_{122}\xi_1\xi_2^2 + 6A'_{123}\xi_1\xi_2\xi_3 + \\ + 3A'_{133}\xi_1\xi_3^2 + A'_{222}\xi_2^3 + 3A'_{223}\xi_2^2\xi_3 + 3A'_{233}\xi_2\xi_3^2 + A'_{333}\xi_3^3 = 0,$$

в которое переходит уравнение (1.2) в результате проективного преобразования, то

$$\begin{aligned}
A'_{111} - 3A'_{112} + 3A'_{122} - A'_{222} &= 0,\\
A'_{111} - 3A'_{112}\varepsilon^2 + 3A'_{122}\varepsilon - A'_{222} &= 0,\\
A'_{111} - 3A'_{112}\varepsilon + 3A'_{122}\varepsilon^2 - A'_{222} &= 0,\\
A'_{111} - 3A'_{113} + 3A'_{133} - A'_{333} &= 0,\\
A'_{111} - 3A'_{113}\varepsilon^2 + 3A'_{133}\varepsilon - A'_{333} &= 0,\\
A'_{111} - 3A'_{113}\varepsilon + 3A'_{133}\varepsilon^2 - A'_{333} &= 0,\\
A'_{222} - 3A'_{223} + 3A'_{233} - A'_{333} &= 0,\\
A'_{222} - 3A'_{223}\varepsilon^2 + 3A'_{233}\varepsilon - A'_{333} &= 0,\\
A'_{222} - 3A'_{223}\varepsilon + 3A'_{233}\varepsilon^2 - A'_{333} &= 0.
\end{aligned}$$

Отсюда находим:

$$A'_{112} = 0, \quad A'_{122} = 0, \quad A'_{113} = 0, \quad A'_{133} = 0, \\ A'_{223} = 0, \quad A'_{233} = 0, \quad A'_{111} = A'_{222} = A'_{333}.$$

Следовательно, форма $f$, представляющая линию $C_3$, упомянутым выше проективным преобразованием приводится к виду

$$A'_{111}(\xi_1^3 + \xi_2^3 + \xi_3^3) + 6A'_{123}\xi_1\xi_2\xi_3,$$

где, очевидно, $A'_{111} \neq 0$.

---

[1]) См. [209], стр. 231.

Полагая

$$\xi_i = \frac{X_i}{\sqrt[3]{A'_{111}}} \qquad (i = 1,\ 2,\ 3),$$

приходим к канонической форме $\varphi$, определяемой равенством (1.1).

Для относительных инвариантов $S$ и $T$ формы $\varphi$ находим по формулам (4.14) и (4.17) гл. III выражения

$$S = 4(m^4 - m), \qquad T = 8m^6 + 20m^3 - 1.$$

Тогда дискриминант $R$ и абсолютный инвариант $I$ формы $\varphi$ представляются согласно формулам (4.22) и (4.23) гл. III в виде

$$R = -(8m^3 + 1)^3 \tag{1.3}$$

и

$$I = -\frac{(8m^3+1)^3}{(8m^6+20m^3-1)^2}. \tag{1.4}$$

Из равенства (1.3) заключаем, что каноническая форма $\varphi$, представляющая, так же как и данная форма $f$, линию без особых точек, — неособенная.

Действительно, в противном случае из равенства $R = 0$ следует, что параметр $m$ имеет значения, равные $-\frac{1}{2}$, $-\frac{\varepsilon}{2}$, $-\frac{\varepsilon^2}{2}$. А тогда форма $\varphi$ разлагается соответственно в произведения линейных множителей

$$(X_1 + X_2 + X_3)(X_1 + \varepsilon X_2 + \varepsilon^2 X_3)(X_1 + \varepsilon^2 X_2 + \varepsilon X_3),$$
$$(\varepsilon X_1 + X_2 + X_3)(X_1 + \varepsilon X_2 + X_3)(X_1 + X_2 + \varepsilon X_3)\varepsilon^2,$$
$$(\varepsilon^2 X_1 + X_2 + X_3)(X_1 + \varepsilon^2 X_2 + X_3)(X_1 + X_2 + \varepsilon^2 X_3)\varepsilon,$$

представляющие тройки прямых, образующих три сизигетических треугольника [1]), и точки пересечения сторон каждого из этих треугольников являются особыми точками.

Таким образом, форма $\varphi$, а следовательно, и приводящаяся к ней форма $f$ — неособенные.

2. Если абсолютный инвариант $I$ неособенной формы $f$ имеет конечное значение, то ему соответствуют в комплексной области двенадцать различных значений параметра $m$ канонической формы $\varphi$, являющихся корнями уравнения 12-й степени

$$I(8m^6 + 20m^3 - 1)^2 + (8m^3 + 1)^3 = 0, \tag{1.5}$$

к которому приводится выражение (1.4).

Все эти корни рационально выражаются через любой из них.

Именно, выражения

$$\varepsilon^n m_0, \quad \frac{\varepsilon^n(1 - m_0)}{1 + 2m_0}, \quad \frac{\varepsilon^n(\varepsilon^2 - m_0)}{1 + 2\varepsilon m_0}, \quad \frac{\varepsilon^n(\varepsilon - m_0)}{1 + 2\varepsilon^2 m_0} \qquad (n = 0,\ 1,\ 2), \tag{1.6}$$

где $m_0$, отличное от $-\frac{1}{2}$, $-\frac{\varepsilon}{2}$, $-\frac{\varepsilon^2}{2}$ вследствие неравенства нулю дискриминанта $R$, есть любой корень уравнения (1.5), представляют все двенадцать корней этого уравнения. В этом легко убедиться, подвергая матрицу формы $\varphi$ симметрическим элементарным преобразованиям, приводящим ее к матрице того же вида, в которой параметр $m$ может иметь любое из значений (1.6) (упражнение 1).

[1]) Четвертый сизигетический треугольник, представляемый произведением $X_1X_2X_3$, принят за координатный.

Таким образом, все неособенные кубические тройничные формы с одним и тем же конечным значением абсолютного инварианта $I$ эквивалентны[1]) в поле комплексных чисел канонической форме (1.1), у которой параметр $m$ равен любому из корней уравнения (1.5). В частности, при $S=0$, когда $I=-1$, параметру $m$ можно дать любое из значений 0, 1, $\varepsilon$, $\varepsilon^2$, являющихся корнями уравнения

$$m^4-m=0. \tag{1.7}$$

При $I=\infty$ параметр $m$ в канонической форме $\varphi$ согласно формуле (1.4) имеет в комплексной области шесть различных значений, являющихся корнями уравнения 6-й степени

$$8m^6+20m^3-1=0. \tag{1.8}$$

Эти корни равны

$$m_1, \quad \varepsilon m_1, \quad \varepsilon^2 m_1, \tag{1.9}$$

$$m_2, \quad \varepsilon m_2, \quad \varepsilon^2 m_2, \tag{1.10}$$

где

$$m_1=-\frac{\sqrt{3}+1}{2}, \quad m_2=\frac{\sqrt{3}-1}{2}. \tag{1.11}$$

Давая $m$ какое-нибудь из значений (1.9), (1.10), всегда можно указать невырожденное линейное преобразование формы $\varphi$, приводящее ее к форме того же вида, в которой параметр $m$ имеет любое из шести его значений (упражнение 3).

Итак, неособенные кубические тройничные формы над полем комплексных чисел можно разбить на три *типа* в зависимости от значений абсолютного инварианта $I$. К 1-му типу отнесем *формы, у которых $I$ имеет конечное значение, отличное от* $-1$, ко 2-му типу — *формы, у которых* $I=-1$, и к 3-му типу — *формы с абсолютным инвариантом* $I=\infty$. Представителями этих трех типов являются канонические формы вида (1.1), где параметр $m$ равен соответственно любому корню уравнений (1.5), (1.7), (1.8).

3. В вещественной области конечному значению абсолютного инварианта $I$ неособенной формы $f$ соответствуют два вещественных значения параметра $m$ канонической формы $\varphi$, поскольку уравнение (1.5) имеет тогда два и только два вещественных корня. Обозначая их через $m_0$ и $m_0'$, имеем:

$$m_0'=\frac{1-m_0}{1+2m_0}.$$

При этом, очевидно, оба корня отличны от $-\frac{1}{2}$.

Так как значения $T_0$, $T_0'$ относительного инварианта $T$ формы $\varphi$ при значениях $m_0$ и $m_0'$ параметра $m$ связаны соотношением

$$T_0'=-\frac{27}{(1+2m_0)^6}T_0,$$

---

[1]) Здесь и в дальнейшем эквивалентность двух кубических тройничных форм (или их матриц) может быть названа *проективной*, поскольку невырожденные линейные преобразования формы (или соответствующие симметрические элементарные преобразования ее матрицы), при помощи которых одна из форм (или их матриц) переводится в другую, равносильны проективным преобразованиям плоскости.

то соответственные значения инварианта $\omega(T)$ (замечание 4.5 гл. III) различны и, следовательно, канонические формы

$$X_1^3+X_2^3+X_3^3+6m_0X_1X_2X_3, \tag{1.12}$$

$$X_1^3+X_2^3+X_3^3+6m_0'X_1X_2X_3 \tag{1.13}$$

не являются проективно эквивалентными в поле вещественных чисел.

Пусть $\omega(T_0)=-1$, $\omega(T_0')=+1$.

Тогда параметры $m_0$ и $m_0'$ этих форм в зависимости от значения их абсолютного инварианта $I$ принимают, как легко убедиться, следующие значения

| | | |
|---|---|---|
| $0<m_0<\frac{\sqrt{3}-1}{2}$ | $I<-1$ | $\frac{\sqrt{3}-1}{2}<m_0'<1$ |
| $m_0=0$ | $I=-1$ | $m_0'=1$ |
| $-\frac{1}{2}<m_0<0$ | $-1<I<0$ | $m_0'>1$ |
| $-\frac{\sqrt{3}+1}{2}<m_0<-\frac{1}{2}$ | $I>0$ | $m_0'<-\frac{\sqrt{3}+1}{2}$ |

При $I=-1$, когда $m_0=0$ и $m_0'=1$, формы (1.12), (1.13) принимают соответственно вид

$$X_1^3+X_2^3+X_3^3, \qquad X_1^3+X_2^3+X_3^3+6X_1X_2X_3.$$

Последнюю форму можно упростить, подвергая соответствующую матрицу операциям

$$\boxed{I}+\boxed{II}(-1), \quad \boxed{II}+\boxed{I}\cdot\frac{1}{2}, \quad \boxed{III}+\boxed{II}\cdot 2, \quad \boxed{II}+\boxed{III}\left(-\frac{1}{3}\right),$$
$$\boxed{III}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{9}}, \quad \boxed{II}\cdot\sqrt[3]{12}, \quad \boxed{I}\,\frac{1}{\sqrt[6]{12}}.$$

В результате получим каноническую форму

$$3X_1^2X_2-X_2^3+X_3^3.$$

При $I=+\infty$ параметр $m$ формы $\varphi$ в вещественной области имеет, как это видно из формул (1.4) и (1.11), только одно вещественное значение $-\frac{\sqrt{3}+1}{2}$; точно так же при $I=-\infty$ существует единственное вещественное значение параметра $m$, равное $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$.

Соответственные канонические формы

$$X_1^3+X_2^3+X_3^3-3(\sqrt{3}+1)X_1X_2X_3,$$
$$X_1^3+X_2^3+X_3^3+3(\sqrt{3}-1)X_1X_2X_3$$

в поле вещественных чисел уже не будут проективно эквивалентными. Их можно упростить, подвергая соответствующие матрицы операциям

$$\boxed{II}+\boxed{III}\cdot(-1),\qquad \boxed{III}+\boxed{II}\cdot\frac{1}{2},$$

$$\boxed{I}+\boxed{III}\cdot 2m,\qquad \boxed{III}+\boxed{I}\cdot\left(-\frac{3m^2}{1+8m^3}\right),$$

$$\boxed{I}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{1+8m^3}},\qquad \boxed{III}\cdot\sqrt{\frac{|m-m^4|}{\sqrt[3]{(1+8m^3)^4}}},\qquad \boxed{II}\sqrt[4]{\frac{\sqrt[3]{(1+8m^3)^4}}{|m-m^4|}},$$

где $m$ имеет упомянутые выше вещественные значения.

В результате получим канонические формы

$$X_1^3+3X_2^2X_3-3X_1X_3^2 \quad \text{при } I=+\infty$$

и

$$X_1^3+3X_2^2X_3+3X_1X_3^2 \quad \text{при } I=-\infty.$$

Итак, неособенные кубические тройничные формы над полем вещественных чисел можно классифицировать следующим образом в зависимости от значений их инвариантов $I$ и $\omega(T)$.

Различаем, прежде всего, два рода неособенных форм, смотря по тому, будет ли $I>0$ или $I<0$. Далее, формы I рода, у которых $I>0$, подразделяем на два вида в зависимости от того, отличается ли $I$ от $+\infty$ или же $I=+\infty$; формы 1-го вида разбиваем на два типа, смотря по тому, будет ли $\omega(T)=-1$ или $\omega(T)=+1$. Формы II рода, у которых $I<0$, подразделяем на три вида в зависимости от того, будет ли $-1\neq I\neq-\infty$, $I=-1$, $I=-\infty$; среди форм 1-го вида различаем формы, у которых $I>-1$ или $I<-1$, и каждую из этих двух категорий форм, так же как и формы 2-го вида, у которых $I=-1$, разбиваем на два типа, смотря по тому, будет ли $\omega(T)=-1$ или $\omega(T)=+1$.

Представителями полученных таким образом типов неособенных форм являются канонические формы вида (1.1), у которых параметр $m$ принимает нижеследующие значения:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $I>0$ | $I\neq+\infty$ | | $\omega(T)=-1$ | $-\frac{\sqrt{3}+1}{2}<m<-\frac{1}{2}$ |
| | | | $\omega(T)=+1$ | $m<-\frac{\sqrt{3}+1}{2}$ |
| | $I=+\infty$ | | | $m=-\frac{\sqrt{3}+1}{2}$ |
| $I<0$ | $-1\neq I\neq-\infty$ | $I>-1$ | $\omega(T)=-1$ | $-\frac{1}{2}<m<0$ |
| | | | $\omega(T)=+1$ | $m>1$ |
| | | $I<-1$ | $\omega(T)=-1$ | $0<m<\frac{\sqrt{3}-1}{2}$ |
| | | | $\omega(T)=+1$ | $\frac{\sqrt{3}-1}{2}<m<1$ |
| | $I=-1$ | | $\omega(T)=-1$ | $m=0$ |
| | | | $\omega(T)=+1$ | $m=1$ |
| | $I=-\infty$ | | | $m=\frac{\sqrt{3}-1}{2}$ |

4. Приведенной выше классификации неособенных кубических тройничных форм в комплексной и вещественной областях соответствует проективная классификация плоских линий 3-го порядка, не имеющих особых точек.

Как известно[1]), через всякую точку $M$ линии $C_3$, не имеющей особых точек, можно провести пучок четырех касательных к этой линии, точки касания которых не совпадают с точкой $M$, называемой в этом случае *тангенциальной*. Двойное отношение пучка этих четырех касательных, как показал Салмон [206], является постоянным, не зависящим от положения тангенциальной точки $M$. Оно при всех изменениях порядка четырех касательных может иметь вообще лишь шесть различных значений

$$w, \quad \frac{1}{w}, \quad 1-\frac{1}{w}, \quad \frac{1}{1-\frac{1}{w}}, \quad 1-w, \quad \frac{1}{1-w}, \tag{1.14}$$

где $w$ — одно из этих значений.

Если же $w$ равно кубическому корню (вещественному или мнимому) из $-1$, то среди величин (1.14) различными будут либо три

$$-1, \quad 2, \quad \frac{1}{2}, \tag{1.15}$$

либо две

$$\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}. \tag{1.16}$$

В первом случае имеем *гармонический* пучок касательных, во втором случае — *эквиангармонический*[2]).

При определении двойного отношения рассматриваемого пучка четырех касательных последний можно заменить параллельным ему пучком четырех прямых, проходящих через точку (0, 0, 1), так как двойное отношение в обоих пучках одно и то же. Для такого пучка, пользуясь известными формулами[3]), находим шесть значений двойного отношения

$$\frac{\theta_1-\theta_2}{\theta_1-\theta_3}, \quad \frac{\theta_1-\theta_3}{\theta_1-\theta_2}, \quad \frac{\theta_2-\theta_3}{\theta_2-\theta_1}, \quad \frac{\theta_2-\theta_1}{\theta_2-\theta_3}, \quad \frac{\theta_3-\theta_2}{\theta_3-\theta_1}, \quad \frac{\theta_3-\theta_1}{\theta_3-\theta_2}. \tag{1.17}$$

где $\theta_1$, $\theta_2$, $\theta_3$ — корни уравнения

$$\theta^3-3S\theta-2T=0, \tag{1.18}$$

т. е.

$$\theta_1=\sqrt[3]{T}\left(\sqrt[3]{1+\sqrt{-I}}+\sqrt[3]{1-\sqrt{-I}}\right),$$

$$\theta_2=-\frac{\sqrt[3]{T}}{2}\Big[\sqrt[3]{1+\sqrt{-I}}+\sqrt[3]{1-\sqrt{-I}}+ \\ +i\sqrt{3}\left(\sqrt[3]{1+\sqrt{-I}}-\sqrt[3]{1-\sqrt{-I}}\right)\Big],$$

$$\theta_3=-\frac{\sqrt[3]{T}}{2}\Big[\sqrt[3]{1+\sqrt{-I}}+\sqrt[3]{1-\sqrt{-I}}- \\ -i\sqrt{3}\left(\sqrt[3]{1+\sqrt{-I}}-\sqrt[3]{1-\sqrt{-I}}\right)\Big].$$

Следовательно, отношения (1.17) не зависят от положения тенгенциальной точки, а зависят только от значения абсолютного инварианта $I$.

Если $-1 \neq I \neq \infty$, то все шесть отношений (1.17) различны между собой. Будем называть тогда пучок четырех касательных и линию $C_3$ *ангармоническими*.

---

1) См. [5], стр. 46.
2) См. [206], стр. 284, 285.
3) См. [5], стр. 49.

Если $I = -1$, то отношения (1.17) приводятся к двум мнимым сопряженным значениям (1.16). В этом случае мы имеем *эквиангармонический* пучок четырех касательных и линию $C_3$ назовем *эквиангармонической.*

Наконец, если $I = \infty$, то $T = 0$, $S \neq 0$ и уравнение (1.18) имеет корни

$$\theta_1 = 0, \quad \theta_2 = \sqrt{3S}, \quad \theta_3 = -\sqrt{3S}.$$

Отношения (1.17) приводятся тогда к трем различным вещественным значениям (1.15) и мы имеем *гармонический* пучок четырех касательных к *гармонической* линии $C_3$.

Таким образом, плоские линии 3-го порядка, не имеющие особых точек, в комплексной области можно разбить, так же как и неособенные кубические тройничные формы, на три типа в зависимости от значений абсолютного инварианта $I$: линии ангармонические ($-1 \neq I \neq \infty$), эквиангармонические ($I = -1$) и гармонические ($I = \infty$).

5. В вещественной области, как нетрудно убедиться, пучок касательных к линии $C_3$ с общей тангенциальной точкой состоит либо из четырех вещественных прямых, либо из двух пар мнимых сопряженных прямых, если абсолютный инвариант $I > 0$, и из двух вещественных и из двух мнимых сопряженных прямых, если $I < 0$.

В случае, когда $I = \pm\infty$, мы имеем, как уже было указано, гармонический пучок четырех касательных к гармонической линии $C_3$, *простой* при $I = -\infty$ и *сложной* при $I = +\infty$, согласно терминологии Кэли [56].

При конечном значении абсолютного инварианта $I$, отличном от $-1$, когда мы имеем ангармонический пучок четырех касательных, все шесть отношений (1.17) — либо вещественные, если $I > 0$, либо мнимые попарно сопряженные, если $I < 0$ (упражнение 5). Ангармоническую линию $C_3$ в первом случае будем называть *сложной*, а во втором случае — *простой.*

Рассмотрим более подробно случай, когда $-\infty < I < 0$. Тогда из отношений (1.17) одна пара мнимых сопряженных имеет модуль, равный 1. Действительно, приняв во внимание значения вещественного и мнимых корней уравнения (1.18), имеем:

$$w = \frac{\theta_1 - \theta_2}{\theta_1 - \theta_3} = \frac{1 - v^2}{1 + v^2} + \frac{2v}{1 + v^2}\, i,$$

где

$$v = \frac{\sqrt[3]{1 + \sqrt{-I}} - \sqrt[3]{1 - \sqrt{-I}}}{\sqrt{3}\left(\sqrt[3]{1 + \sqrt{-I}} + \sqrt[3]{1 - \sqrt{-I}}\right)}. \tag{1.19}$$

Далее, полагая

$$\sin\tau = \frac{2v}{1 + v^2}, \qquad \cos\tau = \frac{1 - v^2}{1 + v^2}, \tag{1.20}$$

имеем:

$$w = \cos\tau + i\sin\tau, \qquad \frac{1}{w} = \cos\tau - i\sin\tau.$$

Следовательно, модули мнимых сопряженных величин $w$ и $\frac{1}{w}$ равны 1.

Если $-1 < I < 0$, то из равенства (1.19), (1.20) находим:

$$\sin\tau > 0, \qquad \frac{1}{2} < \cos\tau < 1.$$

Беря главное значение аргумента мнимого числа, заключающееся в промежутке $(-\pi, +\pi)$, и обозначая через $\Omega$ абсолютную величину аргумента мнимого двойного отношения, модуль которого равен 1, имеем в данном случае

$$0 < \Omega < \frac{\pi}{3}.$$

Точно так же, если $-\infty < I < -1$, то из равенств (1.19), (1.20) находим:

$$\sin\tau > 0, \quad -1 < \cos\tau < \frac{1}{2}.$$

Следовательно,

$$\frac{\pi}{3} < \Omega < \pi.$$

Если же $I = -1$, то $\sin\tau = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos\tau = \frac{1}{2}$ и поэтому $\Omega = \frac{\pi}{3}$.

В последнем случае линия $C_3$ — эквиангармоническая, которую будем называть *эквиангармонической линией* 1-*го типа*, если $\omega(T) = -1$, и 2-*го типа*, если $\omega(T) = +1$. Касательные в вещественных точках перегиба у линии 1-го типа не пересекаются в одной точке, тогда как у линии 2-го типа эти касательные пересекаются в одной точке.

В самом деле, определяя точки пересечения линии

$$X_1^3 + X_2^3 + X_3^3 = 0,$$

которой проективно эквивалентны эквиангармонические линии 1-го типа, с ее *гессианом* [1]) $X_1X_2X_3 = 0$, находим три вещественные точки перегиба $(0, -1, 1)$, $(-1, 0, 1)$, $(-1, 1, 0)$ (упражнение 6).

Касательные в этих точках, определяемые уравнениями

$$X_2 + X_3 = 0, \quad X_1 + X_3 = 0, \quad X_1 + X_2 = 0,$$

очевидно, не пересекаются в одной точке.

Точно так же, определяя точки пересечения линии

$$X_1^3 + X_2^3 + X_3^3 + 6X_1X_2X_3 = 0,$$

которой проективно эквивалентны эквиангармонические линии 2-го типа, с ее гессианом

$$X_1^3 + X_2^3 + X_3^3 - 3X_1X_2X_3 = 0,$$

получаем три вещественные точки перегиба $(0, -1, 1)$, $(-1, 0, 1)$, $(-1, 1, 0)$.

Касательные в этих точках, определяемые уравнениями

$$\begin{aligned} -2X_1 + X_2 + X_3 &= 0, \\ X_1 - 2X_2 + X_3 &= 0, \\ X_1 + X_2 - 2X_3 &= 0, \end{aligned}$$

пересекаются в одной точке $(1, 1, 1)$.

Таким образом, вещественные плоские линии 3-го порядка, не имеющие особых точек, в соответствии с классификацией вещественных неособенных кубических тройничных форм можно разделить на два р о д а. Л и н и и I р о д а $(I > 0)$ характеризуются тем, что всякий пучок касательных с общей тангенциальной точкой относительно всех точек касания состоит либо из четырех вещественных прямых, либо из двух пар мнимых сопряженных прямых, тогда как л и н и и II р о д а $(I < 0)$ обладают тем свойством, что этот пучок касательных состоит из двух вещественных и двух мнимых сопряженных прямых [2]). Далее, линии I рода подразделяем на два в и д а: *сложные ангармонические* $(I \neq \infty)$ *и сложные гармонические*

---

[1]) То есть линией, уравнение которой получим, приравнивая нулю гессиан формы, представляющей рассматриваемую линию (см. [12], стр. 309).

[2]) На такое разделение линий 3-го порядка указывали еще Кремона [66] и Дюреж [70, 71].

($I = +\infty$). Линии II рода разбиваем на три вида: *простые ангармонические* ($-1 \neq I \neq -\infty$), *эквиангармонические* ($I = -1$) *и простые гармонические* ($I = -\infty$). Наконец, среди простых ангармонических линий различаем линии, для которых $0 < \Omega < \frac{\pi}{3}$ ($I > -1$) или $\frac{\pi}{3} < \Omega < \pi$ ($I < -1$); эквиангармонические линии также подразделяем на два типа в зависимости от того, не пересекаются ($\omega(T) = -1$) или пересекаются ($\omega(T) = +1$) в одной точке касательные в вещественных точках перегиба.

6. Полученные результаты проективной классификации в комплексной и вещественной областях неособенных кубических тройничных форм и представляемых ими плоских линий 3-го порядка, не имеющих особых точек, сведены в таблицах I и II.

Таблица I

| Неособенные кубические тройничные формы над полем комплексных чисел ($R \neq 0$, т. е. $0 \neq I \neq \frac{0}{0}$) | Уравнения, любой корень которых может служить значением параметра $m$ в канонической форме $X_1^3+X_2^3+X_3^3+6mX_1X_2X_3$ | Комплексные плоские линии 3-го порядка, не имеющие особых точек |
|---|---|---|
| $-1 \neq I \neq \infty$ | $I(8m^6+20m^3-1)^2+(8m^3+1)^3=0$ | Ангармонические линии |
| $I=-1$ | $m^4-m=0$ | Эквиангармонические линии |
| $I=\infty$ | $8m^6+20m^3-1=0$ | Гармонические линии |

7. Обратимся теперь к установлению канонических видов особенных кубических тройничных форм, у которых согласно определению дискриминант $R = 0$, т. е. абсолютный инвариант $I$ равен нулю или имеет неопределенный вид $\frac{0}{0}$; при этом, как и в случае неособенных форм, мы будем исходить из геометрических соображений.

Пусть линия $C_3$, представляемая формой $f$, имеет особые точки. Будем различать случаи, когда $C_3$ не распадается на линии низших порядков и когда $C_3$ распадается на коническое сечение и прямую или на тройку прямых.

Случай I. Линия $C_3$ — нераспадающаяся.

Известно[1]), что всякая нераспадающаяся линия 3-го порядка, имеющая двойную точку с двумя различными касательными, обладает тремя точками перегиба, лежащими на одной прямой, тогда как у линии с двойной точкой, где касательные совпадают, имеется только одна точка перегиба.

Предположим сперва, что касательные в двойной точке линии $C_3$ различны. Выберем проективную систему координат так, чтобы эти касательные были сторонами $\xi_1 = 0$ и $\xi_2 = 0$ координатного треугольника, а прямая, проходящая через три точки перегиба, была стороной $\xi_3 = 0$ этого треугольника. Пусть в выбранной таким образом системе координат линия $C_3$ представляется формой

$$f' = \sum_{i,\,j,\,k=1}^{3} A'_{ijk}\xi_i\xi_j\xi_k.$$

[1]) См., например, [5], стр. 80, 81.

Таблица II

| Неособенные кубические тройничные формы над полем вещественных чисел ($R \neq 0$, т. е. $0 \neq I \neq \frac{0}{0}$) | | | Значения параметра $m$ в канонической форме $X_1^3+X_2^3+X_3^3+6mX_1X_2X_3$ | Вещественные плоские линии 3-го порядка, не имеющие особых точек | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $I > 0$ | $I \neq +\infty$ | $\omega(T) = -1$ | $-\frac{\sqrt{3}+1}{2} < m < -\frac{1}{2}$ | Сложные ангармонические линии | | Линии, у которых пучок касательных с общей тангенциальной точкой состоит либо из четырех вещественных прямых, либо из двух пар мнимых сопряженных прямых |
| | | $\omega(T) = +1$ | $m < -\frac{\sqrt{3}+1}{2}$ | | | |
| | $I = +\infty$ | | $m = -\frac{\sqrt{3}+1}{2}$ (или $X_1^3+3X_2^2X_3-3X_1X_3^2$) | Сложные гармонические линии | | |
| $I < 0$ | $-1 \neq I \neq -\infty$, $I > -1$ | $\omega(T) = -1$ | $-\frac{1}{2} < m < 0$ | Линии, для которых $0 < \Omega < \frac{\pi}{3}$ | Простые ангармонические линии | Линии, у которых пучок касательных с общей тангенциальной точкой состоит из двух вещественных и двух мнимых сопряженных прямых |
| | | $\omega(T) = +1$ | $m > 1$ | | | |
| | $-1 \neq I \neq -\infty$, $I < -1$ | $\omega(T) = -1$ | $0 < m < \frac{\sqrt{3}-1}{2}$ | Линии, для которых $\frac{\pi}{3} < \Omega < \pi$ | | |
| | | $\omega(T) = +1$ | $\frac{\sqrt{3}-1}{2} < m < 1$ | | | |
| | $I = -1$ | $\omega(T) = -1$ | $m = 0$ | Линии 1-го типа, у которых касательные в вещественных точках перегиба не пересекаются в одной точке. | Эквиангармонические линии ($\Omega = \frac{\pi}{3}$) | |
| | | $\omega(T) = +1$ | $m = 1$ (или $3X_1^2X_2 - X_2^3 + X_3^3$) | Линии 2-го типа, у которых касательные в вещественных точках перегиба пересекаются в одной точке | | |
| | $I = -\infty$ | | $m = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$ (или $X_1^3+3X_2^2X_3+3X_1X_3^2$) | Простые гармонические линии | | |

Тогда двойная точка будет иметь координаты (0, 0, 1), а три точки перегиба — координаты

$$(a_1,\ 1,\ 0),\qquad (a_2,\ 1,\ 0),\qquad (a_3,\ 1,\ 0),$$

где $a_1$, $a_2$, $a_3$ удовлетворяют условиям

$$A'_{111}a_i^3+3A'_{112}a_i^2+3A'_{122}a_i+A'_{222}=0\qquad (i=1,\ 2,\ 3). \tag{1.21}$$

Так как коническая поляра точки (0, 0, 1), определяемая уравнением

$$A'_{113}\xi_1^2+2A'_{123}\xi_1\xi_2+A'_{223}\xi_2^2+2A'_{133}\xi_1\xi_3+2A'_{233}\xi_2\xi_3+A'_{333}\xi_3^2=0, \tag{1.22}$$

вырождается в рассматриваемом случае в совокупность двух прямых $\xi_1\xi_2=0$, то

$$A'_{113}=0,\qquad A'_{133}=0,\qquad A'_{223}=0,\qquad A'_{233}=0,\qquad A'_{333}=0,\qquad A'_{123}\neq 0.$$

Приняв это во внимание и замечая, что координаты точек перегиба должны обращать в нуль гессиан формы $f'$, получаем:

$$\begin{vmatrix} A'_{111}a_i+A'_{112} & A'_{112}a_i+A'_{122} & 1\\ A'_{112}a_i+A'_{122} & A'_{122}a_i+A'_{222} & a_i\\ 1 & a_i & 0\end{vmatrix}=0,$$

т. е.

$$A'_{111}a_i^3-A'_{112}a_i^2-A'_{122}a_i+A'_{222}=0\qquad (i=1,\ 2,\ 3). \tag{1.23}$$

Из равенств (1.21), (1.23) находим:

$$a_i\,(A'_{112}a_i+A'_{122})=0\qquad (i=1,\ 2,\ 3),$$

и так как из трех различных чисел $a_1$, $a_2$, $a_3$ по крайней мере два отличны от нуля, то $A'_{112}=0$, $A'_{122}=0$.

Таким образом, форма $f'$ имеет вид

$$A'_{111}\xi_1^3+A'_{222}\xi_2^3+6A'_{123}\xi_1\xi_2\xi_3,$$

где, очевидно, $A'_{111}$ и $A'_{222}$, так же как $A'_{123}$, отличны от нуля.

Невырожденным линейным преобразованием

$$\xi_1=\frac{X_1}{\sqrt[3]{A'_{111}}},\qquad \xi_2=\frac{X_2}{\sqrt[3]{A'_{222}}},\qquad \xi_3=\frac{\sqrt[3]{A'_{111}A'_{222}}}{A'_{123}}X_3$$

она приводися к каноническому виду

$$X_1^3+X_2^3+6X_1X_2X_3. \tag{1.24}$$

В вещественной области двойная точка с двумя различными касательными будет **у з л о в о й**, если эти касательные вещественны, и **и з о л и р о в а н н о й**, если они — мнимые сопряженные. Все три точки перегиба, из которых по крайней мере одна вещественна, лежат на одной и той же вещественной прямой. В случае узловой точки все сказанное раньше сохраняет силу и мы приходим к той же канонической форме (1.24). В случае изолированной точки выбираем проективную систему координат так, чтобы уравнения касательных в этой точке имели вид

$$\xi_1+i\xi_3=0,\qquad \xi_1-i\xi_3=0,$$

где

$$\xi_1=0,\qquad \xi_3=0$$

— уравнения двух сторон координатного треугольника, третья сторона которого $\xi_2=0$ направлена по касательной в вещественной точке перегиба, принятой за вершину (1, 0, 0) координатного треугольника. Изолированная точка будет иметь тогда координаты (0, 1, 0) и ее конической полярой будет совокупность двух мнимых сопряженных прямых $\xi_1^2+\xi_3^2=0$.

Так как последнее уравнение должно совпадать с уравнением

$$A'_{112}\xi_1^2+2A'_{122}\xi_1\xi_2+A'_{222}\xi_2^2+2A'_{123}\xi_1\xi_3+2A'_{223}\xi_2\xi_3+A'_{233}\xi_3^2=0,$$

то

$$A'_{122}=0,\quad A'_{123}=0,\quad A'_{222}=0,\quad A'_{223}=0,\quad A'_{112}=A'_{233}\neq 0.$$

Далее, уравнение касательной в точке перегиба (1, 0, 0) $\xi_2=0$ должно совпадать с уравнением $A'_{111}\xi_1+A'_{112}\xi_2+A'_{113}\xi_3=0$.

Следовательно, $A'_{111}=0$, $A'_{113}=0$ и гессиан формы $f'$ с точностью до постоянного множителя представляется в виде

$$A'_{133}\xi_1^3+A'_{112}\xi_1^2\xi_2+A'_{333}\xi_1^2\xi_3-2A'_{133}\xi_1\xi_3^2+A'_{112}\xi_2\xi_3^2.$$

Так как координаты точки перегиба должны обращать это выражение в нуль, то $A'_{133}=0$.

Таким образом, линия $C_3$ в данном случае представляется формой $3A'_{112}\xi_1^2\xi_2+3A'_{112}\xi_2\xi_3^2+A'_{333}\xi_3^3$, где, очевидно, $A'_{333}$, так же как и $A'_{112}$, отличается от нуля.

Полагая

$$\xi_1=\frac{X_1}{\sqrt[3]{A'_{333}}},\qquad \xi_2=\frac{\sqrt[3]{A'^2_{333}}}{A'_{112}}X_2,\qquad \xi_3=\frac{X_3}{\sqrt[3]{A'_{333}}},$$

получаем каноническую форму $3X_1^2X_2+3X_2X_3^2+X_3^3$.

Предполагая теперь, что касательные в двойной точке линии $C_3$ совпадают, выберем проективную систему координат таким образом, чтобы сторонами координатного треугольника были: прямая $\xi_1=0$, соединяющая двойную точку с точкой перегиба, прямая $\xi_2=0$, с которой совпадают касательные в двойной точке, и прямая $\xi_3=0$, касательная в точке перегиба. Тогда двойная точка будет иметь координаты (0, 0, 1), а точка перегиба — (0, 1, 0).

Так как коническая поляра точки (0, 0, 1) вырождается в данном случае в пару совпадающих прямых $\xi_2^2=0$, то из ее уравнения, имеющего вид (1.22), если линия $C_3$ представляется формой $f'$, находим:

$$A'_{113}=0,\quad A'_{123}=0,\quad A'_{133}=0,\quad A'_{233}=0,\quad A'_{333}=0,\quad A'_{223}\neq 0.$$

Далее, поскольку касательная в точке (0, 1, 0), имеющая уравнение $A'_{122}\xi_1+A'_{222}\xi_2+A'_{223}\xi_3=0$, совпадает с прямой $\xi_3=0$, то $A'_{122}=0$, $A'_{222}=0$ и гессиан формы $f'$ с точностью до постоянного множителя представляется в виде

$$A'_{111}\xi_1\xi_2^2-A'_{112}\xi_2^3.$$

Так как координаты точки перегиба должны обращать это выражение в нуль, то $A'_{112}=0$.

Таким образом, форма $f'$ в рассматриваемом случае имеет вид

$$A'_{111}\xi_1^3+3A'_{223}\xi_2^2\xi_3,$$

где, очевидно, $A'_{111}$, так же как и $A'_{223}$, отлично от нуля.

Невырожденным линейным преобразованием

$$\xi_1=\frac{X_1}{\sqrt[3]{A'_{111}}},\qquad \xi_2=X_2,\qquad \xi_3=\frac{X_3}{A'_{223}}$$

она приводится к каноническому виду

$$X_1^3+3X_2^2X_3. \tag{1.25}$$

В вещественной области точка перегиба будет вещественной, так же как и двойная точка — *точка возврата*. Вещественным будет и координатный треугольник, выбранный как указано выше. Таким образом, мы приходим к одной и той же канонической форме (1.25) как в комплексной, так и в вещественной области.

Случай II. Линия $C_3$ — распадающаяся на коническое сечение и прямую.

Предположим сперва, что коническое сечение $C_2$ и прямая $C_1$, на которые распадается линия $C_3$, пересекаются в двух точках.

Тогда прямую $C_1$ принимаем за сторону $\xi_1=0$ координатного треугольника, у которого две другие стороны, $\xi_2=0$ и $\xi_3=0$, направлены по касательным к коническому сечению $C_2$ в точках пересечения его с прямой $C_1$. Линия $C_3$ относительно выбранной таким образом системы координат представляется, как легко в этом убедиться, формой $A'_{111}\xi_1^3+6A'_{123}\xi_1\xi_2\xi_3$, которая невырожденным линейным преобразованием

$$\xi_1=\frac{X_1}{\sqrt[3]{A'_{111}}},\qquad \xi_2=\frac{\sqrt[3]{A'_{111}}}{A'_{123}}X_2,\qquad \xi_3=X_3$$

приводится к каноническому виду

$$X_1^3+6X_1X_2X_3. \tag{1.26}$$

В вещественной области коническое сечение $C_2$, входящее в состав линии $C_3$, может быть вещественным или мнимым, причем обе точки пересечения его с прямой $C_1$ могут быть вещественными или мнимыми сопряженными.

Если $C_2$ вещественно и пересекается прямой $C_1$ в двух вещественных точках, то все сказанное раньше сохраняет силу и каноническая форма (1.26) имеет место как в комплексной, так и в вещественной области.

Если же $C_2$ пересекается прямой $C_1$ в двух мнимых сопряженных точках $M_1$ и $M_2$, то координатную систему выбираем так, чтобы полюс прямой $C_1$ относительно $C_2$ имел координаты $(0, 1, 0)$, а точки $M_1$, $M_2$ — координаты $(1, 0, i)$, $(1, 0, -i)$. Тогда, поскольку $\xi_2=0$ должно быть уравнением прямой $C_1$, линия $C_3$ будет представлена формой

$$\xi_2(3A'_{112}\xi_1^2+3A'_{122}\xi_1\xi_2+A'_{222}\xi_2^2+3A'_{223}\xi_2\xi_3+3A'_{233}\xi_3^2+6A'_{123}\xi_1\xi_3).$$

Но поляра точки $(0, 1, 0)$ относительно $C_2$ и касательные к $C_2$ в точках $M_1$, $M_2$ имеют уравнения

$$3A'_{122}\xi_1+2A'_{222}\xi_2+3A'_{223}\xi_3=0,$$
$$(A'_{112}+iA'_{123})\,\xi_1+\frac{1}{2}(A'_{122}+iA'_{223})\,\xi_2+(A'_{123}+iA'_{233})\,\xi_3=0,$$
$$(A'_{112}-iA'_{123})\,\xi_1+\frac{1}{2}(A'_{122}-iA'_{223})\,\xi_2+(A'_{123}-iA'_{233})\,\xi_3=0,$$

совпадающие соответственно с уравнениями

$$\xi_2=0,\qquad \xi_1+i\xi_3=0,\qquad \xi_1-i\xi_3=0.$$

Следовательно, $A'_{122}=0$, $A'_{223}=0$, $A'_{123}=0$, $A'_{222}\neq 0$, $A'_{112}=A'_{233}\neq 0$.

Таким образом, форма, представляющая линию $C_3$, имеет в данном случае вид

$$3A'_{112}\xi_1^2\xi_2+A'_{222}\xi_2^3+3A'_{112}\xi_2\xi_3^2$$

и невырожденным линейным преобразованием

$$\xi_1=\sqrt[6]{\left|\frac{A'_{222}}{A'^3_{112}}\right|}\,X_1,\qquad \xi_2=\frac{\operatorname{sig}\dfrac{A'_{222}}{A'_{112}}}{\sqrt[3]{A'_{222}}}\,X_2,\qquad \xi_3=\sqrt[6]{\left|\frac{A'_{222}}{A'^3_{112}}\right|}\,X_3$$

приводится к канонической форме

$$3X_1^2X_2-X_2^3+3X_2X_3^2$$

или

$$3X_1^2X_2+X_2^3+3X_2X_3^2,$$

смотря по тому, вещественным или мнимым будет $C_2$.

Пусть теперь прямая $C_1$ касается конического сечения $C_2$. Тогда $C_1$ принимаем за сторону $\xi_2=0$ координатного треугольника, у которого сторона $\xi_1=0$ направлена по какой-нибудь прямой $C_1'$, проходящей через точку касания линий $C_1$ и $C_2$, а сторона $\xi_3=0$ по касательной к $C_2$ в другой точке пересечения линий $C_1'$ и $C_2$. Легко видеть, что линия $C_3$ относительно выбранной системы координат представляется формой $3A'_{112}\xi_1^2\xi_2+3A'_{223}\xi_2^2\xi_3$, где $A'_{112}$ и $A'_{223}$ отличны от нуля.

Последняя невырожденным линейным преобразованием

$$\xi_1=X_1, \qquad \xi_2=\frac{X_2}{A'_{112}}, \qquad \xi_3=\frac{A'^2_{112}}{A'_{223}}X_3$$

приводится к канонической форме

$$3X_1^2X_2+3X_2^2X_3,$$

имеющей, таким образом, место как в комплексной, так и в вещественной области.

Случай III. Линия $C_3$ — распадающаяся на тройку прямых.

Если тройка прямых, на которые распадается линия $C_3$, не пересекается в одной точке, то ее можно принять за координатный треугольник и линия $C_3$ будет представлена формой $6A'_{123}\xi_1\xi_2\xi_3$, легко приводящейся к каноническому виду

$$6X_1X_2X_3.$$

Последняя форма имеет место не только в комплексной, но и в вещественной области, если все прямые тройки вещественны. Если же одна из прямых вещественна, а две — мнимые сопряженные, то систему координат выбираем так, чтобы уравнения мнимых прямых имели вид $\xi_1+i\xi_3=0$, $\xi_1-i\xi_3=0$, где $\xi_1=0$, $\xi_3=0$ — уравнения двух сторон координатного треугольника, третья сторона которого $\xi_2=0$ направлена по вещественной прямой рассматриваемой тройки. Линия $C_3$ будет представлена тогда формой $3A'_{112}\xi_1^2\xi_2+3A'_{233}\xi_2\xi_3^2$, где $A'_{112}=A'_{233}\neq 0$.

Последняя очевидным вещественным невырожденным линейным преобразованием приводится к канонической форме

$$3X_1^2X_2+3X_2X_3^2.$$

Если тройка прямых, на которые распадается линия $C_3$, пересекается в одной точке, то могут представиться три варианта.

Вариант 1-й: все прямые тройки — различные.

Принимая тогда какую-нибудь пару из тройки прямых за стороны $\xi_1=0$ и $\xi_2=0$ координатного треугольника, получим для третьей прямой уравнение

$$\lambda_1\xi_1+\lambda_2\xi_2=0, \tag{1.27}$$

где $\lambda_1$, $\lambda_2$ отличны от нуля.

Следовательно, линия $C_3$ представляется двойничной кубической формой $3A'_{112}\xi_1^2\xi_2+3A'_{122}\xi_1\xi_2^2$, где $A'_{112}$, $A'_{122}$ не равны нулю.

Так как дискриминант $\Delta=3A'^2_{112}A'^2_{122}$ этой формы отличен от нуля, то, как показано в § 3 гл. IV, она приводится в комплексной области к каноническому виду

$$X_1^3+X_2^3, \tag{1.28}$$

а в вещественной области, если все прямые рассматриваемой тройки вещественны, к каноническому виду

$$3X_1^2X_2-X_2^3,$$

поскольку тогда $\Delta>0$.

Если же одна из тройки прямых вещественна, а две — мнимые сопряженные, то координатную систему выбираем так, чтобы уравнения мнимых прямых имели вид $\xi_1+i\xi_2=0$, $\xi_1-i\xi_2=0$, где $\xi_1=0$, $\xi_2=0$ — уравнения двух сторон координатного треугольника. Тогда для вещественной прямой тройки получим уравнение (1.27) и, следовательно, линия $C_3$ представляется формой

$$3A'_{122}\xi_1^3+3A'_{112}\xi_1^2\xi_2+3A'_{122}\xi_1\xi_2^2+3A'_{112}\xi_2^3,$$

приводящейся к каноническому виду (1.28), поскольку ее дискриминант $\Delta=-12(A'^2_{112}+A'^2_{122})^2<0$.

Вариант 2-й: две из тройки прямых — совпадающие.

Принимаем тогда совпадающие прямые за сторону $\xi_1=0$ координатного треугольника, а третью прямую — за сторону $\xi_2=0$ этого треугольника. Тогда линия $C_3$ представляется формой $3A'_{112}\xi_1^2\xi_2$, приводящейся к каноническому виду $3X_1^2X_2$ как в комплексной, так и в вещественной области.

Вариант 3-й: все прямые тройки — совпадающие.

Принимая их за сторону $\xi_1=0$ координатного треугольника, придем к представлению линии $C_3$ формой $A'_{111}\xi_1^3$, приводящейся в комплексной и вещественной областях к каноническому виду $X_1^3$.

Имеем, таким образом, в комплексной области следующие канонические виды особенных кубических тройничных форм, не равных тождественно нулю

$$X_1^3+X_2^3+6X_1X_2X_3, \tag{I}$$
$$X_1^3+6X_1X_2X_3, \tag{II}$$
$$6X_1X_2X_3, \tag{III}$$
$$X_1^3+3X_2^2X_3, \tag{IV}$$
$$3X_1^2X_2+3X_2^2X_3, \tag{V}$$
$$X_1^3+X_2^3, \tag{VI}$$
$$3X_1^2X_2, \tag{VII}$$
$$X_1^3. \tag{VIII}$$

В вещественной области к числу канонических видов особенных кубических тройничных форм, кроме указанных выше, относятся также следующие:

$$3X_1^2X_2+3X_2X_3^2+X_3^3, \tag{I$'$}$$
$$3X_1^2X_2-X_2^3+3X_2X_3^2, \tag{II$'$}$$
$$3X_1^2X_2+X_2^3+3X_2X_3^2, \tag{II$''$}$$
$$3X_1^2X_2+3X_2X_3^2, \tag{III$'$}$$
$$3X_1^2X_2-X_2^3. \tag{VI$'$}$$

8. Вычисляя относительные инварианты $S$ и $T$ установленных нами канонических форм, составив предварительно для соответствующих им кубических матриц присоединенные и смешанно-присоединенные матрицы $C$ и $K$, а затем образуя сложные квадратные матрицы $\mathfrak{C}=TC-SK$

(гл. III, §§ 3, 4)[1]), определим инварианты $I$ и $\omega(T)$ канонических форм, их ранги (двумерный $r$ и трехмерный $\varrho$), а также ранги $r_C$, $r_{\mathfrak{C}}$ и сигнатуры $\sigma_C$, $\sigma_{\mathfrak{C}}$ матриц $C$ и $\mathfrak{C}$. Получим следующие результаты:

| Канонические формы | $I$ | $\omega(T)$ | $r$ | $\varrho$ | $r_C$ | $\sigma_C$ | $r_{\mathfrak{C}}$ | $\sigma_{\mathfrak{C}}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (I) | 0 | +1 | 3 | 3 | 8 | —2 | 4 | 0 |
| (II) | 0 | +1 | 3 | 3 | 8 | —2 | 2 | 0 |
| (III) | 0 | +1 | 3 | 3 | 8 | —2 | 0 | |
| (IV) | $\frac{0}{0}$ | 0 | 3 | 3 | 5 | —1 | 0 | |
| (V) | $\frac{0}{0}$ | 0 | 3 | 3 | 4 | —2 | 0 | |
| (VI) | $\frac{0}{0}$ | 0 | 2 | 2 | 2 | 0 | 0 | |
| (VII) | $\frac{0}{0}$ | 0 | 2 | 2 | 1 | —1 | 0 | |
| (VIII) | $\frac{0}{0}$ | 0 | 1 | 1 | 0 | | 0 | |
| (I′) | 0 | —1 | 3 | 3 | 8 | —2 | 4 | 0 |
| (II′) | 0 | —1 | 3 | 3 | 8 | —2 | 2 | 2 |
| (II″) | 0 | —1 | 3 | 3 | 8 | —2 | 2 | —2 |
| (III′) | 0 | —1 | 3 | 3 | 8 | —2 | 0 | |
| (VI′) | $\frac{0}{0}$ | 0 | 2 | 2 | 2 | —2 | 0 | |

В зависимости от указанных выше значений инвариантов особенных кубических тройничных форм мы можем классифицировать их следующим образом.

Различаем, прежде всего, четыре **рода** особенных форм в зависимости от их ранга $r$ (двумерного или трехмерного).

Формы I рода ($r=3$) не приводятся к формам с меньшим числом переменных. Представляемые ими линии 3-го порядка обладают двойными точками.

Формы II рода ($r=2$) приводятся к двойничным кубическим формам. Они представляют линии 3-го порядка с тройной точкой.

Форма III рода ($r=1$) являются кубом линейной формы и представляют тройки совпадающих прямых.

Формы IV рода ($r=0$) тождественно равны нулю.

В комплексной области формы I рода делим на два **вида** в зависимости от того, будет ли их абсолютный инвариант $I=0$ или $I=\frac{0}{0}$. Формы 1-го вида ($I=0$) представляют линии, у которых касательные в двойной точке различны, тогда как у линий, представляемых формами 2-го вида $\left(I=\frac{0}{0}\right)$, касательные в двойной точке совпадают. Далее, формы 1-го вида подразделяем на три **типа**, смотря по тому, будет ли ранг $r_{\mathfrak{C}}$ матрицы $\mathfrak{C}$ равен 4, 2 или 0. Формы 1-го типа ($r_{\mathfrak{C}}=4$) — неприводимые и представляют нераспадающиеся линии с двойной точкой. Формы 2-го типа ($r_{\mathfrak{C}}=2$)

[1]) Выражения матриц $C$, $K$, $\mathfrak{C}$ и значения инвариантов $S$, $T$ для форм (I)—(VIII), (I′)—(VI′) приведены в § 2 статьи [29] автора.

разлагаются в произведение линейной и неприводимой квадратичной форм. Они представляют совокупности конического сечения и пересекающей его прямой. Формы 3-го типа ($r_{\mathfrak{C}} = 0$) разлагаются в произведение трех линейно независимых линейных форм и представляют тройки прямых, не пересекающихся в одной точке. Формы 2-го вида подразделяем на два типа, смотря по тому, будет ли ранг $r_C$ матрицы $C$ равен 5 или 4. Формы 1-го типа ($r_C = 5$) — неприводимые и представляют нераспадающиеся линии с двойной точкой. Формы 2-го типа ($r_C = 4$) разлагаются в произведение линейной и неприводимой квадратичной форм. Они представляют совокупности конического сечения и касательной к нему прямой.

Среди форм II рода различаем два вида в зависимости от того, будет ли ранг $r_C$ равен 2 или 1. Формы 1-го вида ($r_C = 2$) разлагаются в произведение трех линейно зависимых линейных форм, являющихся попарно линейно независимыми. Они представляют тройки различных прямых, пересекающихся в одной точке. Формы 2-го вида ($r_C = 1$) разлагаются в произведение линейной формы и квадрата такой же формы, линейно независимой от первой. Представляемые ими тройки прямых, пересекающихся в одной точке, содержат по две совпадающие прямые.

В вещественной области формы I рода делим на три вида в зависимости от значений инварианта $\omega(T)$. Формы 1-го вида ($\omega(T) = +1$) представляют линии, обладающие тем свойством, что касательные в двойной точке различны и вещественны. Формы 2-го вида ($\omega(T) = -1$) представляют линии, характеризующиеся тем, что касательные в двойной точке различны и обе (или одна из них) — мнимые. Формы 3-го вида ($\omega(T) = 0$) представляют линии, у которых касательные в двойной точке вещественны и совпадают. Дальнейшее подразделение форм 1-го и 2-го видов зависит от ранга $r_{\mathfrak{C}}$ и сигнатуры $\sigma_{\mathfrak{C}}$ матрицы $\mathfrak{C}$, а форм 3-го вида — от ранга $r_C$ матрицы $C$. Формы 1-го вида, смотря по тому, будет ли ранг $r_{\mathfrak{C}}$ равен 4, 2 или 0, делятся на три типа: неприводимые, разлагающиеся в произведение двух вещественных форм — линейной и неприводимой квадратичной, или разлагающиеся в произведение трех линейно независимых вещественных линейных форм. Они представляют соответственно линии с узловой точкой, совокупности конического сечения и прямой, пересекающей его в двух вещественных точках, или тройки вещественных прямых, не пересекающихся в одной точке. Точно так же формы 2-го вида, смотря по тому, будет ли ранг $r_{\mathfrak{C}}$ равен 4, 2 или 0, делятся на три типа: неприводимые, разлагающиеся в произведение двух вещественных форм — линейной и неприводимой квадратичной (неопределенной, если $\sigma_{\mathfrak{C}} = 2$, и определенной, если $\sigma_{\mathfrak{C}} = -2$), или разлагающиеся в произведение трех линейно независимых линейных форм, из которых одна вещественна, а две — мнимые сопряженные. Они представляют соответственно линии с изолированной точкой, совокупности конического сечения (вещественного, если $\sigma_{\mathfrak{C}} = 2$, или мнимого, если $\sigma_{\mathfrak{C}} = -2$) и прямой, пересекающей его в двух мнимых сопряженных точках, или тройки непересекающихся в одной точке прямых, из которых одна вещественна, а две — мнимые сопряженные. Наконец, формы 3-го вида, смотря по тому, будет ли ранг $r_C$ равен 5 или 4, подразделяются на два типа: неприводимые, представляющие линии с точкой возврата, и разлагающиеся в произведение двух вещественных форм — линейной и неприводимой квадратичной, — представляющие совокупности конического сечения и касательной к нему прямой.

Далее, среди форм II рода различаем два вида в зависимости от ранга $r_C$. Формы 1-го вида ($r_C = 2$) разлагаются в произведение трех линейных форм и представляют тройки различных прямых, пересекающихся в одной точке. Формы 2-го вида ($r_C = 1$) разлагаются в произведение вещественной линейной формы и квадрата такой же формы, линейно независимой от первой.

Они представляют тройки пересекающихся в одной точке вещественных прямых, из которых две совпадают. Формы 1-го вида подразделяются на два типа в зависимости от сигнатуры $\sigma_C$. У форм 1-го типа ($\sigma_C = 0$), так же как у представляемых ими троек прямых, одна из линейных форм, в произведение которых разлагаются формы этого типа, вещественна, а две — мнимые сопряженные. У форм 2-го типа ($\sigma_C = -2$) все эти линейные формы, так же как и представляемые ими прямые, вещественны.

Наконец, формы III рода являются кубом вещественной линейной формы и представляют тройки совпадающих вещественных прямых.

Результаты произведенной таким образом проективной классификации в комплексной и в вещественной областях особенных кубических тройничных форм и представляемых ими плоских линий 3-го порядка, обладающих особыми точками, сведены в таблицах III и IV [1]).

Относя все проективно эквивалентные в комплексной или вещественной области формы (линии) к одному и тому же классу таким образом, что две формы (линии), принадлежащие различным классам, не являются проективно эквивалентными в соответствующей области, видим из таблиц I, III и II, IV, что совокупность всех кубических тройничных форм (всех плоских линий 3-го порядка) в каждой из этих областей разбивается на бесконечное число непересекающихся проективных классов неособенных форм (линий, не имеющих особых точек) и конечное число непересекающихся проективных классов особенных форм (линий, обладающих особыми точками). Представляющие все эти классы канонические формы указаны в упомянутых таблицах. Тем самым подтверждается замечание 4.6 гл. III о полной системе инвариантов кубической тройничной формы над полем комплексных (или вещественных) чисел по отношению к группе всех комплексных (или вещественных) проективных преобразований.

### Упражнения

1. Показать, что матрица формы (1.1) приводится к матрице того же вида, у которой параметр $m$ имеет любое из значений (1.6), с помощью соответственных симметрических элементарных преобразований одной из следующих двенадцати групп:

$$\boxed{I}\,\varepsilon^n; \qquad (\alpha)$$

$$\left.\begin{array}{lll}
\boxed{I}\,\dfrac{\varepsilon^n}{\sqrt[3]{3+6m_0}}, & \boxed{I}+\boxed{II}\,\dfrac{\varepsilon^n}{\sqrt[3]{3+6m_0}}, & \boxed{I}+\boxed{III}\,\dfrac{\varepsilon^n}{\sqrt[3]{3+6m_0}}, \\
\boxed{II}\,\dfrac{\varepsilon-1}{\sqrt[3]{3+6m_0}}, & \boxed{II}+\boxed{I}\,\varepsilon^{-n}, & \boxed{II}+\boxed{III}\left(-\dfrac{\varepsilon+2}{\sqrt[3]{3+6m_0}}\right), \\
\boxed{III}\,\dfrac{3\varepsilon}{\sqrt[3]{3+6m_0}}, & \boxed{III}+\boxed{I}\,(-\varepsilon^{1-n}), & \boxed{III}+\boxed{II}\,(-\varepsilon^2);
\end{array}\right\} \qquad (\beta)$$

$$\left.\begin{array}{lll}
\boxed{I}\,\dfrac{\varepsilon^{n+2}}{\sqrt[3]{3+6\varepsilon m_0}}, & \boxed{I}+\boxed{II}\,\dfrac{\varepsilon^{n+1}}{\sqrt[3]{3+6\varepsilon m_0}}, & \boxed{I}+\boxed{III}\,\dfrac{\varepsilon^{n+1}}{\sqrt[3]{3+6\varepsilon m_0}}, \\
\boxed{II}\,\dfrac{\varepsilon+2}{\sqrt[3]{3+6\varepsilon m_0}}, & \boxed{II}+\boxed{I}\,\varepsilon^{1-n}, & \boxed{II}+\boxed{III}\,\dfrac{1+2\varepsilon}{\sqrt[3]{3+6\varepsilon m_0}}, \\
\boxed{III}\,\dfrac{3}{\sqrt[3]{3+6\varepsilon m_0}}, & \boxed{III}+\boxed{I}\,(-\varepsilon^{2-n}), & \boxed{III}+\boxed{II}\,(-\varepsilon^2);
\end{array}\right\} \qquad (\gamma)$$

---

[1]) Ср. [94], стр. 632 и [96], стр. 562 – 571.

**Особенные кубические тройничные формы над полем комплексных чисел**
($R=0$, т. е. $I=0$ или $I=\frac{0}{0}$)

- I. Не приводящиеся к формам с меньшим числом переменных $[r=3]$
  - $I=0$
    - Неприводимые $[r_{\mathfrak{C}}=4]$
    - Разлагающиеся в произведение линейной и неприводимой квадратичной форм $[r_{\mathfrak{C}}=2]$
    - Разлагающиеся в произведение трех линейно независимых линейных форм $[r_{\mathfrak{C}}=0]$
  - $I=\frac{0}{0}$
    - Неприводимые $[r_C=5]$
    - Разлагающиеся в произведение линейной и неприводимой квадратичной форм $[r_C=4]$
- II. Приводящиеся к двойничным кубическим формам $[r=2]$
  - Разлагающиеся в произведение трех линейно зависимых линейных форм, являющихся попарно линейно независимыми $[r_C=2]$
  - Разлагающиеся в произведение линейной формы и квадрата такой же формы, линейно независимой от первой $[r_C=1]$
- III. Представляющие куб линейной формы $[r=1]$
- IV. Тождественно равные нулю $[r=0]$

(Для II, III, IV: $I=\frac{0}{0}$)

Таблица III

| Канонические виды | Комплексные плоские линии 3-го порядка, обладающие особыми точками | | |
|---|---|---|---|
| $X_1^3+X_2^3+$ $+6X_1X_2X_3$ | Нераспадающиеся линии с двойной точкой | Линии, у которых касательные в двойной точке различны | Линии с двойными точками |
| $X_1^3+6X_1X_2X_3$ | Совокупности конического сечения и пересекающей его прямой | | |
| $6X_1X_2X_3$ | Тройки прямых, не пересекающихся в одной точке | | |
| $X_1^3+3X_2^2X_3$ | Нераспадающиеся линии с двойной точкой | Линии, у которых касательные в двойной точке совпадают | |
| $3X_1^2X_2+3X_2^2X_3$ | Совокупности конического сечения и касательной к нему прямой | | |
| $X_1^3+X_2^3$ | Тройки различных прямых, пересекающихся в одной точке | | Линии с тройной точкой |
| $3X_1^2X_2$ | Тройки пересекающихся в одной точке прямых, из которых две совпадают | | |
| $X_1^3$ | Тройки совпадающих прямых | | |

Особенные кубические тройничные формы над полем вещественных чисел ($R=0$, т. е. $I=0$ или $\frac{0}{0}$)

- I. Не приводящиеся к вещественным формам с меньшим числом переменных [$r=3$]
  - [$\omega(T)=+1$]
    - Неприводимые [$r_{\mathfrak{C}}=4$]
    - Разлагающиеся в произведение двух вещественных форм—линейной и неприводимой квадратичной [$r_{\mathfrak{C}}=2$]
    - Разлагающиеся в произведение трех линейно независимых вещественных линейных форм [$r_{\mathfrak{C}}=0$]
  - [$\omega(T)=-1$]
    - Неприводимые ($r_{\mathfrak{C}}=4$)
    - Разлагающиеся в произведение двух вещественных форм—линейной и неприводимой квадратичной [$r_{\mathfrak{C}}=2$]
      - Квадратичная форма—неопределенная [$\sigma_{\mathfrak{C}}=2$]
      - Квадратичная форма—определенная [$\sigma_{\mathfrak{C}}=-2$]
    - Разлагающиеся в произведение трех линейно независимых линейных форм, из которых одна вещественная, а две—мнимые сопряженные [$r_{\mathfrak{C}}=0$]

  $I=0$

  - [$\omega(T)=0$]
    - Неприводимые [$r_C=5$]
    - Разлагающиеся в произведение двух вещественных форм—линейной и неприводимой квадратичной [$r_C=4$]
- II. Приводящиеся к вещественным двойничным кубическим формам [$r=2$]
  - Разлагающиеся в произведение трех линейных форм [$r_C=2$]
    - Одна из линейных форм вещественная, а две—мнимые сопряженные [$\sigma_C=0$]
    - Все три линейные формы вещественные [$\sigma_C=-2$]
  - Разлагающиеся в произведение вещественной линейной формы и квадрата такой же формы, линейно независимой от первой [$r_C=1$]
- III. Представляющие куб вещественной линейной формы [$r=1$]
- IV. Тождественно равные нулю [$r=0$]

$I=\frac{0}{0}$

Таблица IV

| Канонические виды | Вещественные плоские линии 3-го порядка, обладающие особыми точками | | |
|---|---|---|---|
| $X_1^3+X_2^3+6X_1X_2X_3$ | Линии с узловой точкой | Линии, у которых касательные в двойной точке различны и вещественны | Линии с двойными точками |
| $X_1^3+6X_1X_2X_3$ | Совокупности конического сечения и прямой, пересекающей его в двух вещественных точках | | |
| $6X_1X_2X_3$ | Тройки вещественных прямых, не пересекающихся в одной точке | | |
| $3X_1^2X_2+3X_2X_3^2+X_3^3$ | Линии с изолированной точкой | Линии, у которых касательные в двойной точке различны и обе (или одна из них)—мнимые | |
| $3X_1^2X_2-X_2^3+3X_2X_3^2$ | Коническое сечение—вещественное — Совокупности конического сечения и прямой, пересекающей его в двух мнимых сопряженных точках | | |
| $3X_1^2X_2+X_2^3+3X_2X_3^2$ | Коническое сечение—мнимое — Совокупности конического сечения и прямой, пересекающей его в двух мнимых сопряженных точках | | |
| $3X_1^2X_2+3X_2X_3^2$ | Тройки пересекающихся в одной точке прямых, из которых одна—вещественная, а две—мнимые сопряженные | | |
| $X_1^3+3X_2^2X_3$ | Линии с точкой возврата | Линии, у которых касательные в двойной точке вещественны и совпадают | |
| $3X_1^2X_2+3X_2^2X_3$ | Совокупности конического сечения и касательной к нему прямой | | |
| $X_1^3+X_2^3$ | Одна из прямых вещественная, а две—мнимые сопряженные | Тройки различных прямых, пересекающихся в одной точке | Линии с тройной точкой |
| $3X_1^2X_2-X_2^3$ | Все три прямые вещественные | | |
| $3X_1^2X_2$ | Тройки пересекающихся в одной точке вещественных прямых, из которых две совпадают | | |
| $X_1^3$ | Тройки совпадающих вещественных прямых | | |

$$\left.\begin{array}{lll}
\boxed{I}\,\dfrac{\varepsilon^{n+1}}{\sqrt[3]{3+6\varepsilon^2 m_0}}, & \boxed{I}+\boxed{II}\,\dfrac{\varepsilon^{n+2}}{\sqrt[3]{3+6\varepsilon^2 m_0}}, & \boxed{I}+\boxed{III}\,\dfrac{\varepsilon^{n+2}}{\sqrt[3]{3+6\varepsilon^2 m_0}}, \\
\boxed{II}\,\dfrac{1-\varepsilon}{\sqrt[3]{3+6\varepsilon^2 m_0}}, & \boxed{II}+\boxed{I}\,\varepsilon^{2-n}, & \boxed{II}+\boxed{III}\left(-\dfrac{1+2\varepsilon}{\sqrt[3]{3+6\varepsilon^2 m_0}}\right), \\
\boxed{III}\,\dfrac{3}{\sqrt[3]{3+6\varepsilon^2 m_0}}, & \boxed{III}+\boxed{I}\,(-\varepsilon^{1-n}), & \boxed{III}+\boxed{II}\,(-\varepsilon),
\end{array}\right\}\quad (\delta)$$

где $\varepsilon$ — любой из мнимых кубических корней из 1, а $n=0, 1, 2$.

2. Указать невырожденные квадратные матрицы, умножение на которые по индексам $i$, $j$, $k$ матрицы формы (1.1) равносильно элементарным преобразованиям ($\alpha$), ($\beta$), ($\gamma$), ($\delta$) упражнения 1.

3. Пусть $m_0$ — любой из корней (1.9) или (1.10) уравнения (1.8), а $m_0'$ — соответственно любой из корней (1.10) или (1.9) того же уравнения. Показать, что операции ($\alpha$) или ($\beta$) (см. упражнение 1) над матрицей формы (1.1) с параметром $m_0$ приводит ее к трем матрицам того же вида с параметрами $m_0$, $\varepsilon m_0$, $\varepsilon^2 m_0$, тогда как операции ($\gamma$) или ($\delta$) дают три матрицы с параметрами $m_0'$, $\varepsilon m_0'$, $\varepsilon^2 m_0'$ ($\varepsilon$, $\varepsilon^2$ — мнимые кубические корни из 1).

4. Рассматривая параметр $m$ формы (1.1) как абсциссу точки некоторой оси, показать, что пары точек $m_0$, $m_0'$ (вещественные корни уравнения (1.5)) и $-\frac{\sqrt{3}+1}{2}$, $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$ (значения параметра $m$ при $I=\pm\infty$) образуют гармоническую четверку.

5. Показать, что все корни уравнения (1.18) вещественны, если $I>0$, и один из этих корней — вещественный, а два — мнимые сопряженные, если $I<0$.

6. Каждая из точек пересечения плоской линии 3-го порядка с ее гессианом является точкой перегиба или особой точкой. Наоборот, каждая точка перегиба или особая точка линии 3-го порядка лежит также на ее гессиане. Доказать (Гессе [100]).

7. Форма (1.1) при любом значении параметра $m$, удовлетворяющем условию $8m^3+1=0$, проективно эквивалентна в комплексной области канонической форме ($III$). Доказать.

8. Форма (1.1) при $m=-\frac{1}{2}$ проективно эквивалентна в вещественной области канонической форме ($III'$). Доказать.

9. Произвести проективную классификацию в комплексной области особенных кубических тройничных форм, не приводящихся к формам с меньшим числом переменных, в зависимости от рангов (двумерных или трехмерных) $r_A$ и $r_{\mathfrak{U}}$ матриц $A$ и $\mathfrak{U}$ (гл. III, § 4, упражнение 6), составленных для этих форм.

10. Кубическая тройничная форма тогда и только тогда разлагается в произведение трех линейных форм, когда составленные для нее матрицы $C$ и $K$ (или $A$ и $\mathcal{A}$) пропорциональны. Доказать.

## § 2. Аффинно-проективная классификация кубических тройничных форм

1. Возьмем кубическую тройничную форму $f=\sum_{i,j,k=1}^{3} A_{ijk}x_ix_jx_k$ с соответствующей симметрической кубической матрицей 3-го порядка $A=\|A_{ijk}\|$ ($i, j, k=1, 2, 3$).

Симметрические элементарные преобразования матрицы $A$ будем называть **аффинно-проективными**, если в операциях

(а) $\qquad \boxed{m}\,t,$

(б) $\qquad \boxed{m}+\boxed{n}\,t,$

где $t$ — произвольное, отличное от нуля число, индекс $m$ может иметь любое из значений 1, 2, 3, тогда как индекс $n$ принимает лишь какое-нибудь из значений 1, 2.

Преобразованиями типов (а), (б), очевидно, можно совершить операцию

(в) $\qquad \boxed{l-n}\,,$

где $l$, подобно $n$, принимает любое из значений 1, 2.

Легко убедиться, что аффинно-проективные преобразования матрицы $A$ равносильны невырожденным линейным преобразованиям формы $f$, которые представляются формулами

$$\begin{cases} x_1 = a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + a_{13}X_3, \\ x_2 = a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + a_{23}X_3, \\ x_3 = \qquad\qquad\qquad a_{33}X, \end{cases}$$

выражающими аффинно-проективные преобразования плоскости.

Так как эти преобразования являются частным случаем невырожденных линейных преобразований

$$x_\lambda = \sum_{\lambda=1}^{3} a_{\lambda i}X_i \qquad (\lambda = 1, 2, 3),$$

выражающих проективные преобразования плоскости, то все рассматривавшиеся в § 1 инварианты относительно проективных преобразований матрицы $A$ сохраняют силу и относительно аффинно-проективных преобразований ее.

В дальнейшем мы будем говорить об инвариантах формы $f$ и матрицы $A$ относительно лишь аффинно-проективных преобразований.

2. Обозначим через $A_0 = \|A_{ijk}\|$ $(i, j, k = 1, 2)$ укороченную симметрическую кубическую матрицу 2-го порядка, полученную из основной матрицы $A$ вычеркиванием 3-го сечения каждой ориентации. Аффинно-проективные преобразования матрицы $A$ являются для $A_0$ проективными, при которых, как известно, двумерный и трехмерный ранги ее остаются неизменными. Таким образом, имеет место

Теорема 2.1. *Ранг (двумерный или трехмерный) укороченной матрицы $A_0$ есть арифметический инвариант относительно аффинно-проективных преобразований основной матрицы $A$.*

Составим теперь из элементов матрицы $C$, присоединенной для $A$, квадратные симметрические матрицы

$$C_0 = \|C_{\alpha\beta}^{(33)}\| \qquad (\alpha, \beta = 1, 2),$$
$$C_1 = \|C_{\alpha\beta}^{(33)}\| \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, 3)$$

и симметрическую клеточную матрицу $C_2 = \|C_{\alpha\beta}\|$ $(\alpha, \beta = 1, 2)$, где клетки $C_{\alpha\beta}$ — также симметрические матрицы $C_{\alpha\beta} = \|C_{\alpha\beta}^{(\mu\nu)}\|$ $(\mu, \nu = 1, 2, 3)$. Далее, из элементов матрицы $K$, смешанно-присоединенной для $A$, составим квадратные симметрические матрицы

$$K_0 = \|K_{\alpha\beta}^{(33)}\| \ (\alpha, \beta = 1, 2), \qquad K_1 = \|K_{\alpha\beta}^{(33)}\| \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, 3).$$

Наконец, из элементов матрицы $\mathbf{C}$, присоединенной для матрицы $\mathbf{A}$, которая составляется из кубических миноров 3-го порядка, порождаемых матрицей $A$, образуем квадратные симметрические матрицы

$$\mathbf{C}_0 = \|\mathbf{C}_{\alpha\beta}^{(33)}\| \ (\alpha, \beta = 1, 2), \qquad \mathbf{C}_1 = \|\mathbf{C}_{\alpha\beta}^{(33)}\| \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, 3).$$

Для всех этих матриц имеет силу

Теорема 2.2. *Ранги (а в поле вещественных чисел и сигнатуры) матриц*

$$C_0, C_1, C_2, K_0, K_1, \mathbf{C}_0, \mathbf{C}_1$$

*являются арифметическими инвариантами относительно аффинно-проективных преобразований матрицы $A$.*

Для доказательства теоремы отметим прежде всего, что операция $\boxed{m}\,t$ над $A$ вызывает в $\boldsymbol{A}$ операции

$$\boxed{l}\,\sqrt[3]{t^2},\qquad \boxed{m}\,t\sqrt[3]{t^2},\qquad \boxed{n}\,\sqrt[3]{t^2},$$

где $l$, $m$, $n$ — последовательность в некотором порядке чисел 1, 2, 3; операция же $\boxed{m}+\boxed{n}\,t$ над $A$ вызывает ту же операцию над $\boldsymbol{A}$.

Обращаясь теперь к матрицам 2-го порядка $C_0$, $K_0$, $\mathbf{C}_0$, видим, что операция $\boxed{m}\,t$ над $A$ не изменяет $C_0$, если $m=3$, а при $m=1$ или $m=2$ сопровождается умножением в $C_0$ на $t^2$ $m$-й строки и $m$-го столбца и умножением $n$-й строки и $n$-го столбца, где соответственно $n=2$ или $n=1$ на $t$.

Та же операция над $A$ вызывает в $K_0$ при $m=3$ умножение всех строк и столбцов на $t$, а при $m=1$ или $m=2$ — умножение $m$-й строки и $m$-го столбца на $t^3$ и умножение $n$-й строки и $n$-го столбца, где соответственно $n=2$ или $n=1$, на $t^2$. При этом в $\mathbf{C}_0$ все строки и столбцы умножаются на $t^2$, если $m=3$; если же $m=1$ или $m=2$, то $m$-я строка и $m$-й столбец умножаются на $t^4$, а $n$-я строка и $n$-й столбец, где соответственно $n=2$ или $n=1$, умножаются на $t^3$.

Операция $\boxed{m}+\boxed{n}\,t$ над $A$ не изменяет матриц $C_0$, $K_0$, $\mathbf{C}_0$, если $m=3$ и вызывает в каждой из них прибавление к $m$-й строке $n$-й строки, умноженной на $t$, и аналогичную операцию со столбцами, если $m=1$ или $m=2$.

Таким образом, аффинно-проективные преобразования матрицы $A$ влекут за собой симметрические элементарные преобразования матриц $C_0$, $K_0$, $\mathbf{C}_0$ или вовсе не изменяют их. В обоих случаях ранги (а в поле вещественных чисел и сигнатуры) этих матриц остаются неизменными.

Относительно матриц 3-го порядка $C_1$, $K_1$, $\mathbf{C}_1$ замечаем, что операция $\boxed{m}\,t$ над $A$ сопровождается при $m=3$ умножением 3-й строки и 3-го столбца на $t$ в $C_1$, на $t^2$ в $K_1$ и на $t^3$ в $\mathbf{C}_1$, а также умножением остальных строк и столбцов на $t$ в $K_1$ и на $t^2$ в $\mathbf{C}_1$; если же $m=1$ или $m=2$, то $m$-я строка и $m$-й столбец умножаются на $t^2$ в $C_1$, на $t^3$ в $K_1$ и на $t^4$ в $\mathbf{C}_1$, тогда как $l$-я и $n$-я строки, а также $l$-й и $n$-й столбцы умножаются на $t$ в $C_1$, на $t^2$ в $K_1$ и на $t^3$ в $\mathbf{C}_1$, причем $n=3$, а $l=2$ при $m=1$ и $l=1$ при $m=2$.

Операция $\boxed{m}+\boxed{n}\,t$ над $A$ всегда вызывает в каждой из матриц $C_1$, $K_1$, $\mathbf{C}_1$ прибавление к $m$-й строке $n$-й строки, умноженной на $t$, и аналогичную операцию со столбцами.

Таким образом, аффинно-проективные преобразования матрицы $A$ не изменяют рангов (а в поле вещественных чисел и сигнатур) матриц $C_1$, $K_1$, $\mathbf{C}_1$.

Обращаясь, наконец, к матрице $C_2$, видим, что операция $\boxed{m}\,t$ над $A$ сопровождается умножением на $t$ $l$-й и $n$-й строк, а также $l$-го и $n$-го столбцов в каждой клетке $C_{\alpha\beta}$ матрицы $C_2$ (причем $l$, $m$, $n$ образуют последовательность в некотором порядке чисел 1, 2, 3) и, кроме того, умножением $m$-й строки и $m$-го столбца в матрице $\|C_{\alpha\beta}\|$ $(\alpha,\ \beta=1,\ 2)$ на $t$ при $m=1$ или $m=2$.

Операция $\boxed{m}+\boxed{n}\,t$ над $A$ вызывает в каждой клетке $C_{\alpha\beta}$ матрицы $C_2$ прибавление к $n$-й строке умноженной на $-t$ $m$-й строки и аналогичную операцию со столбцами, а кроме того, если $m=1$ или $m=2$, прибавление к $m$-й строке $n$-й строки, умноженной на $t$, и аналогичную операцию со столбцами в матрице $\|C_{\alpha\beta}\|$ $(\alpha,\ \beta=1,\ 2)$.

Все эти операции являются, как нетрудно убедиться, симметрическими элементарными преобразованиями матрицы 6-го порядка $C_2$, которые не оказывают влияния на ее ранг (а в поле вещественных чисел и сигнатуру).

Теорема 2.3. *Ранг, а следовательно, и дефект матрицы*

$$R_0 = \left\| \begin{matrix} A_{111} & 3A_{112} & 3A_{122} & A_{222} & 0 & 0 \\ 0 & A_{111} & 3A_{112} & 3A_{122} & A_{222} & 0 \\ 0 & 0 & A_{111} & 3A_{112} & 3A_{122} & A_{222} \\ A_{111} & 3A_{112} & 3A_{122} & A_{222} & 0 & 0 \\ 0 & A_{111} & 3A_{112} & 3A_{122} & A_{222} & 0 \\ 0 & 0 & A_{111} & 3A_{112} & 3A_{122} & A_{222} \end{matrix} \right\|,$$

*есть арифметический инвариант относительно аффинно-проективных преобразований матрицы $A$.*

В самом деле, принимая во внимание замечание в начале доказательства предыдущей теоремы, видим, что операция $\overline{m}|\,t$ в $A$ сопровождается умножением строк и столбцов матрицы $R_0$ на целые (положительные и отрицательные) степени множителя $t$; при операции $\overline{m}| + |\overline{n}\ t$ в $A$ матрица $R_0$ не меняется, если $m = 3$, или, если $m < 3$, подвергается элементарным преобразованиям, заключающимся в прибавлении к ее строкам (столбцам) других строк (столбцов), умноженных на числа вида $at^k$, где $k$ — целое.

Таким образом, аффинно-проективные преобразования матрицы $A$ влекут за собой элементарные преобразования матрицы $R_0$, не влияющие на ее ранг.

Теорема 2.4. *Выражения*

$$I_0 = \frac{S\,|C_0|^2}{9\,|C_1|^2}, \qquad I_1 = \frac{T\,|C_0|^2}{27\,|C_1|^3}, \qquad I_2 = \frac{|C_0|\,|K_0|}{9\,|C_1|^2},$$
$$J_0 = \frac{2T\,|C_0|}{3\,|C_1|}, \qquad J_1 = \frac{3^9\,|K_0|^3}{8\,|R_0|^2}, \qquad J_2 = \frac{|K_1|}{4\,|C_2|},$$

*где $S$ и $T$ — относительные инварианты веса 4 и 6 формы $f$, являются абсолютными алгебраическими инвариантами по отношению к аффинно-проективным преобразованиям формы $f$ и соответствующей матрицы $A$.*

Действительно, операция $\overline{m}|\,t$ над матрицей $A$, равносильная невырожденному линейному преобразованию формы $f$:

$$x_l = X_l, \qquad x_m = tX_m, \qquad x_n = X_n,$$

где $l$, $m$, $n$ образуют последовательность в некотором порядке чисел 1, 2, 3, сопровождается умножением $S$ на $t^4$, $T$ на $t^6$, а также умножением $|C_0|$ на $t^6$, $|C_1|$ на $t^8$, $|K_0|$ на $t^{10}$, $|K_1|$, $|C_2|$ и $|C_0|$ на $t^{14}$, $|C_1|$ на $t^{20}$, $|R_0|$ на $t^{15}$ при $m = 1$ или $m = 2$ и умножением $|C_0|$ на $t^0$, $|C_1|$ на $t^2$, $|K_0|$ на $t^4$, $|K_1|$, $|C_2|$ и $|C_0|$ на $t^8$, $|C_1|$ на $t^{14}$, $|R_0|$ на $t^6$ при $m = 3$.

А это не изменяет выражений, упоминаемых в теореме.

Операция $\overline{m}| + |\overline{n}\ t$ над матрицей $A$, равносильная невырожденному линейному преобразованию

$$x_l = X_l, \qquad x_m = X_m, \qquad x_n = X_n + tX_m,$$

не вызывает изменений $S$, $T$, $|C_0|$, $|C_1|$, $|K_0|$, $|K_1|$, $|C_2|$, $|C_0|$, $|C_1|$, $|R_0|$, а следовательно, и выражений $I_0$, $I_1$, $I_2$, $J_0$, $J_1$, $J_2$.

Замечание 2.1. Абсолютные инварианты $I_0$, $I_1$, $I_2$, $J_0$, $J_1$, $J_2$ не являются независимыми между собой (упражнение 1) и, как увидим далее, входят в состав полной системы инвариантов формы $f$ по отношению к группе всех аффинно-проективных преобразований.

3. Указанные выше аффинно-проективные инварианты (арифметические и алгебраические) дают возможность произвести аффинно-проективную классификацию кубических тройничных форм, разбивая проективные классы этих форм на аффинно-проективные подклассы. Установим предварительно канонические виды форм, представляющих эти подклассы. Для этого воспользуемся аффинно-проективными преобразованиями матрицы $A$ формы $f$, приводящими ее к каноническому виду.

В комплексной области различаем четыре возможных случая в зависимости от четырех канонических видов укороченной матрицы $A_0$. Эти канонические виды (гл. IV, § 3, табл. IV) обусловлены следующими значениями ранга (двумерного или трехмерного) $r_0$ матрицы $A_0$ и ранга $r_{C_0}$ матрицы $C_0$:

(а) $r_0 = 2, \quad r_{C_0} = 2;$

(б) $r_0 = 2, \quad r_{C_0} = 1;$

(в) $r_0 = 1;$

(г) $r_0 = 0.$

Рассмотрим эти случаи.

Случай (а), когда $r_0 = 2$, $r_{C_0} = 2$.

Подвергая тогда матрицу $A$ аффинно-проективным преобразованиям, приводящим матрицу $A_0$ к виду (гл. IV, § 3, упражнение 5)

$$\left\| \begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right\| \quad \begin{array}{l} \to (i) \\ \to (k) \\ \downarrow (j) \end{array},$$

мы получим матрицу

$$\left\| \begin{array}{ccc|ccc|ccc} 0 & 1 & B_{113} & 1 & 0 & B_{123} & B_{113} & B_{123} & B_{133} \\ 1 & 0 & B_{123} & 0 & 1 & B_{223} & B_{123} & B_{223} & B_{233} \\ B_{113} & B_{123} & B_{133} & B_{123} & B_{223} & B_{233} & B_{133} & B_{233} & B_{333} \end{array} \right\| \quad \begin{array}{l} \to (i) \\ \to (k) \\ \downarrow (j) \end{array},$$

которая операциями

$$\boxed{III} + \boxed{II}\,(-B_{113}), \qquad \boxed{III} + \boxed{I}\,(-B_{123})$$

приводится к виду

$$\left\| \begin{array}{ccc|ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_{133} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & D_{223} & 0 & D_{223} & D_{233} \\ 0 & 0 & D_{133} & 0 & D_{223} & D_{233} & D_{133} & D_{233} & D_{333} \end{array} \right\| \quad \begin{array}{l} \to (i) \\ \to (k) \\ \downarrow (j) \end{array}. \tag{2.1}$$

Если ранг (двумерный или трехмерный) $r$ матрицы $A$ равен 2, то все элементы $D_{ijk}$ матрицы (2.1) — нули и последняя приводится к каноническому виду (гл. IV, § 3, упражнение 6), которому соответствует каноническая форма

(1а) $$X_1^3 + X_2^3.$$

Заметим, что ранг $r_C$ присоединенной матрицы $C$ для этой формы равен 2. Кроме того, для формы (1а), очевидно, $I = \frac{0}{0}$.

Если же $r=3$, то различаем два варианта, смотря по тому, будет ли матрица

$$C_1=\left\|\begin{matrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & D_{223} \\ 0 & D_{223} & 0 \end{matrix}\right\|,$$

составленная для матрицы (2.1), иметь ранг $r_{C_1}=3$ или $r_{C_1}=2$.

Вариант 1: $r_{C_1}=3$.

Тогда в матрице (2.1) $D_{223}\neq 0$ и после операции $\boxed{III}\,\Big|\frac{1}{D_{223}}$ она принимает вид

$$\begin{array}{l} \\ \left\|\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & n \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & p \\ 0 & 0 & n & 0 & 1 & p & n & p & q \end{array}\right\| \end{array}\begin{array}{l} \longrightarrow (i) \\ \longrightarrow (k) \\ \downarrow \\ (j) \end{array}. \qquad (2.2)$$

Для матрицы (2.2) находим:

$$|C_0|=-4, \qquad |C_1|=2.$$

Если в матрице (2.2) $n=p=q=0$, то соответствующая форма имеет канонический вид

(2a) $$3X_1^2X_2+X_2^3+3X_2^2X_3.$$

Для нее $S=0$, $T=0$.

Следовательно, $I=\frac{0}{0}$.

Кроме того, присоединенная матрица $C$ для формы (2a) имеет ранг $r_C=4$.

Если же в матрице (2.2) $n=q=0$, а $p\neq 0$, то

$$S=4p^2, \qquad T=-8p^3.$$

Следовательно, $I=0$.

Далее, находим $I_0=\frac{16}{9}p^2$, $I_1=\frac{64}{27}p^3$.

Отсюда получаем

$$p=\frac{3I_1}{4I_0},$$

где $I_0$ и $I_1$ имеют, очевидно, конечные значения, отличные от нуля.

Таким образом, матрице (2.2) соответствует каноническая форма

(3a) $$3X_1^2X_2+X_2^3+3X_2^2X_3+\frac{9I_1}{4I_0}X_2X_3^2.$$

Для нее сложная квадратная матрица $\mathfrak{C}$ имеет ранг $r_{\mathfrak{C}}=2$, если $I_0\neq I_1$, и $r_{\mathfrak{C}}=0$, если $I_0=I_1$, когда форма (3a) принимает вид

(4a) $$3X_1^2X_2+X_2^3+3X_2^2X_3+\frac{9}{4}X_2X_3^2.$$

Рассмотренные частные случаи имеют место, когда форма $f$ приводима. Обращаясь к общему случаю, когда форма $f$ неприводима, составим для матрицы (2.2) крадратную матрицу

$$R_0=\left\|\begin{matrix} 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 1 \\ -6n & -6p & 6n & 6(p-1) & 0 & 0 \\ 0 & -6n & -6p & 6n & 6(p-1) & 0 \\ 0 & 0 & -6n & -6p & 6n & 6(p-1) \end{matrix}\right\|,$$

детерминант которой равен

$$|R_0| = -2^7 \cdot 3^3 n (n^2 + 3\pi^2),$$

где

$$\pi = p - \frac{3}{4}. \tag{2.3}$$

С помощью элементарных преобразований $R_0$ приводится к матрице

$$\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & n & \pi \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3\pi & n \end{Vmatrix},$$

откуда заключаем, что дефект $\delta$ матрицы $R_0$ может иметь три значения: 0, 1, 3.

Далее, для матрицы (2.2) образуем квадратную матрицу

$$K_0 = \begin{Vmatrix} 4p & -4n \\ -4n & 4p-6 \end{Vmatrix},$$

детерминант которой равен

$$|K_0| = -8(2n^2 - 2p^2 + 3p),$$

и определим относительные инварианты

$$S = 4(p^2 - n^2 - q), \quad T = -8p^3 - 24n^2 p + 27n^2 + 12pq - 4q^2.$$

Следовательно,

$$I_0 = \frac{16}{9}(p^2 - n^2 - q),$$

$$I_1 = \frac{8}{27}(8p^3 + 24n^2 p - 27n^2 - 12pq + 4q^2),$$

$$I_2 = \frac{8}{9}(2n^2 - 2p^2 + 3p).$$

Отсюда и из (2.3) находим:

$$\left.\begin{aligned} p &= \pi + \frac{3}{4}, \\ q &= \frac{3}{16}[8\pi - 3(I_0 + I_2) + 6], \\ n &= +\sqrt{\pi^2 - \frac{9}{16}(1 - I_2)}\ ^{1)}, \end{aligned}\right\} \tag{2.4}$$

причем $\pi$ определяется из уравнения

$$\pi^3 - \frac{27}{64}(1 - I_2)\pi - \frac{27}{256}N = 0, \tag{2.5}$$

[1]) Мы ограничиваемся одним значением квадратного корня, так как, подвергнув матрицу (2.2) операции $\boxed{I}$ $(-1)$, получим новую матрицу, отличающуюся от прежней только знаками элементов $n$.

где
$$N = I_1 + \frac{3}{2} I_2 - \frac{3}{8}(I_0 + I_2)^2 - 1.$$

Таким образом $p$, $q$, $n$ зависят лишь от инвариантов $I_0$, $I_1$, $I_2$ и даже только от одного инварианта $I_2$, если $I = \frac{0}{0}$, так как тогда $I_0 = 0$, $I_1 = 0$.

В дальнейшем исследовании будем принимать во внимание дефект $\delta$ матрицы $R_0$.

n° 1. Пусть $\delta = 0$.

Тогда $n \neq 0$, $n^2 + 3\pi^2 \neq 0$ и дискриминант уравнения (2.5), который с точностью до числового множителя равен $(1 - I_2)^3 - \Lambda^2$, отличен от нуля. Следовательно, уравнение (2.5) имеет три различных корня, которым соответствуют три различных системы значений $p$, $q$, $n$, определяемых формулами (2.4). Подставляя любую из этих систем в матрицу (2.2) и подвергая последнюю операциям
$$\boxed{I} + \boxed{II}\, t, \quad \boxed{II} + \boxed{I}\, \frac{t}{4}, \quad \boxed{I}\, \frac{1}{2}, \quad \boxed{II}\, (-2), \quad \boxed{III} + \boxed{II}\, \frac{3}{4},$$
$$\boxed{III} + \boxed{I}\, \frac{t}{4},$$
где
$$t = \pm i \sqrt{3},$$
мы получим соответственно двум значениям $t$ две матрицы того же вида, в которых элементы $p$, $q$, $n$ представляют остальные две из упомянутых выше систем. Таким образом, для канонического вида матрицы (2.2) можно взять систему значений $p$, $q$, $n$, определяемых в зависимости от любого корня уравнения (2.5). Соответствующая каноническая форма имеет вид

(5a) $$3X_1^2X_2 + X_2^3 + 3X_2^2X_3 + 3nX_1X_3^2 + 3pX_2X_3^2 + qX_3^3.$$

Ее инвариант $I$ может иметь любое значение, причем, если $I = 0$, то $r_{\mathfrak{C}} = 4$, а если $I = \frac{0}{0}$, то $r = 3$ и $r_C = 5$.

n° 2. Пусть $\delta = 1$.

Тогда $n = 0$, $\pi \neq 0$ или $n = \pm i\pi\sqrt{3} \neq 0$. В обоих случаях дискриминант уравнения (2.5) равен нулю, так как
$$N^2 = (1 - I_2)^3. \tag{2.6}$$

Следовательно, уравнение (2.5) имеет кратный корень. Значению $n = 0$ соответствует простой корень этого уравнения
$$\pi = \frac{3N}{4(1 - I_2)},$$
тогда как значениям $n = \pm i\pi\sqrt{3}$ соответствует двукратный корень
$$\pi = -\frac{3N}{8(1 - I_2)}.$$

При этом, очевидно,
$$I_2 \neq 1, \quad N \neq 0. \tag{2.7}$$

Таким образом, на основании формул (2.4) имеем в первом случае
$$\left.\begin{aligned} p &= \frac{3}{4}\left(1 + \frac{N}{1 - I_2}\right), \\ q &= \frac{9}{16}\left(2 - I_0 - I_2 + \frac{2N}{1 - I_2}\right), \\ n &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{2.8}$$

а во втором случае

$$
\left.\begin{aligned}
p &= \frac{3}{8}\left(2-\frac{N}{1-I_2}\right),\\
q &= \frac{9}{16}\left(2-I_0-I_2-\frac{N}{1-I_2}\right),\\
n &= +\frac{3}{8}\sqrt{-3(1-I_2)}.
\end{aligned}\right\} \tag{2.8'}
$$

Легко, однако, убедиться, что матрица (2.2) при системе (2.8') значений $p$, $q$, $n$ может быть приведена аффинно-проективными преобразованиями к матрице того же вида, в которой элементы $p$, $q$, $n$, определяются формулами (2.8). Последнюю матрицу и примем за каноническую. Тогда соответствующая каноническая форма будет иметь вид

$$
(6а)\quad 3X_1^2X_2+X_2^3+3X_2^2X_3+\frac{9}{4}\left(1+\frac{N}{1-I_2}\right)X_2X_3^2+ \\
+\frac{9}{16}\left(2-I_0-I_2+\frac{2N}{1-I_2}\right)X_3^3,
$$

причем кроме условий (2.6), (2.7) выполняется вследствие неприводимости формы также условие

$$
N\neq\frac{I_0+3I_2-I_0I_2-I_2^2}{2}-1. \tag{2.9}
$$

Инвариант $I$ может иметь те же значения, как и при $\delta=0$. Заметим, что при $I=\frac{0}{0}$ будет $I_0=0$, $I_1=0$, $I_2=\frac{8}{9}$. Следовательно, $N=\frac{1}{27}$. А потому $p=1$, $q=1$, $n=0$.

Подставляя эти значения в матрицу (2.2) и подвергая ее операции

$$
\overline{III}+\overline{II}\,|(-1),
$$

приведем ее к более простому виду, которому соответствует каноническая форма

$$
(7а)\qquad 3X_1^2X_2+X_2^3-3X_1^2X_3.
$$

Присоединенная матрица $C$ имеет тогда ранг $r_C=5$.

n° 3. Пусть $\delta=3$. Тогда $n=0$, $\pi=0$ и последняя из формул (2.4) дает $I_2=1$ [1]).

Из первых двух формул (2.4) получаем:

$$
p=\frac{3}{4},\quad q=\frac{9}{16}(1-I_0).
$$

В этом случае имеем для матрицы (2.2)

$$
S=\frac{9}{4}-4q,\qquad T=-\left(4q^2-9q+\frac{27}{8}\right).
$$

Следовательно,

$$
I=\frac{8q^3(1-2q)}{\left(4q^2-9q+\frac{27}{8}\right)^2}.
$$

---

[1]) В уравнении (2.5) тогда $N=0$ и, следовательно, $\pi=0$ является его трехкратным корнем.

Отсюда заключаем, что $I$ может иметь любое значение, отличное от $\frac{0}{0}$, причем нулевое значение ввиду неприводимости формы возможно лишь при $q=\frac{1}{2}$, когда $I_0=\frac{1}{9}$.

Для неприводимой формы всегда $I_0 \neq 1$; кроме того, $I_0 \neq \frac{1}{9}$, если $I \neq 0$.

Полагая в матрице (2.2)

$$n=0, \quad p=\frac{3}{4}, \quad q=\frac{9}{16}(1-I_0) \qquad \left(1 \neq I_0 \neq \frac{1}{9}\right)$$

и совершая над ней операции

$$\boxed{II}+\boxed{I}, \quad \boxed{I}+\boxed{II}\left(-\frac{1}{2}\right), \quad \boxed{III}+\boxed{II}\left(-\frac{1}{2}\right), \quad \boxed{III}+\boxed{I},$$
$$\boxed{I}\,(-\sqrt[3]{2}), \quad \boxed{II}\,\frac{1}{\sqrt[3]{4}}, \quad \boxed{III}\,\sqrt[3]{\frac{2}{1-9I_0}},$$

получим матрицу, которой соответствует каноническая форма

(8a) $$X_1^3+X_2^3+X_3^3+\frac{6}{\sqrt[3]{1-9I_0}}X_1X_2X_3.$$

Для нее $I \neq 0$.

Полагая же в матрице (2.2) $n=0$, $p=\frac{3}{4}$, $q=\frac{1}{2}$ и подвергая ее тем же операциям, как и раньше, заменив только последнюю из них операцией

$$\boxed{III}\,\sqrt[3]{2},$$

придем к матрице, которой соответствует каноническая форма

(9a) $$X_1^3+X_2^3+6X_1X_2X_3$$

с инвариантом $I=0$.

Сложная квадратная матрица $\mathfrak{C}$ имеет тогда ранг $r_{\mathfrak{C}}=4$.

Вариант 2: $r_{C_1}=2$.

Тогда в матрице (2.1) $D_{223}=0$ и для нее имеем:

$$|C_0|=-4, \quad |C_1|=0\,^{1)}.$$

Если при этом $D_{133}=D_{333}=0$, $D_{233} \neq 0$, то после операции

$$\boxed{III}\,\frac{1}{\sqrt[3]{D_{233}}}$$

матрица будет иметь вид, которому соответствует приводимая каноническая форма

(10a) $$3X_1^2X_2+X_2^3+3X_2X_3^2.$$

Для нее $I=0$ и $r_{\mathfrak{C}}=2$.

---

[1]) В этом случае инварианты $I_0$, $I_1$, $I_2$ обращаются в $\infty$.

Переходя к общему случаю, когда форма $f$ неприводима, составим для матрицы (2.1) квадратную матрицу

$$R_0=\left\|\begin{matrix} 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 1\\ -6D_{133} & -6D_{233} & 6D_{133} & 6D_{233} & 0 & 0\\ 0 & -6D_{133} & -6D_{233} & 6D_{133} & 6D_{233} & 0\\ 0 & 0 & -6D_{133} & -6D_{233} & 6D_{133} & 6D_{233}\end{matrix}\right\|,$$

детерминант которой равен

$$|R_0|=2^7\cdot 3^3 D_{133}(D_{133}^2+3D_{233}^2).$$

С помощью элементарных преобразований $R_0$ приводится к матрице

$$\left\|\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & D_{133} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -D_{133} & D_{233}\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3D_{233} & D_{133}\end{matrix}\right\|,$$

откуда заключаем, что дефект $\delta$ матрицы $R_0$ может иметь три значения: 0, 1, 3.

Примем это во внимание в дальнейшем исследовании.

n° 1. Пусть $\delta=0$.

Тогда $0\neq D_{133}\neq i\sqrt{3}\,D_{233}$ и матрица (2.1) операцией $\boxed{III}\,\frac{1}{\sqrt{D_{133}}}$ приводится к виду

$$\begin{array}{c} \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \to (i) \\ \left\|\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & p\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & p & 1 & p & q\end{array}\right\| \begin{array}{l} \to (k) \\ \downarrow \\ (j)\end{array}\end{array}, \tag{2.10}$$

где

$$p\neq\pm\frac{i}{\sqrt{3}}. \tag{2.11}$$

Для матрицы (2.10) имеем:

$$S=4(p^2-1),\qquad T=-4(2p^3+6p+q^2). \tag{2.12}$$

Следовательно,

$$I+1=\frac{4(p^2-1)^3}{(2p^3+6p+q^2)^2}. \tag{2.13}$$

Далее находим:

$$|C_0|=\begin{vmatrix} -24-8p^2 & -32p\\ -32p & -24p^2-8\end{vmatrix}=192(p^2-1)^2,$$

$$|C_1|=\begin{vmatrix} -24-8p^2 & -32p & -16q\\ -32p & -24p^2-8 & -16pq\\ -16q & -16pq & -8q^2\end{vmatrix}=512q^2(p^2-1)^2.$$

Следовательно,

$$J_0+1=-\frac{2p(p^2+3)}{q^2}. \tag{2.14}$$

Пусть $J_0$ имеет определенное конечное значение. Полагая тогда

$$\pi=p^2, \quad L_0=(J_0+1)^2, \quad L=IJ_0^2-2J_0-1,$$

где вследствие неравенства (2.11) $L\neq 0$, находим из (2.13) и (2.14)

$$L\pi^3+3(2L+3L_0)\pi^2+3(3L+2L_0)\pi+L_0=0. \tag{2.15}$$

Дискриминант уравнения (2.15) с точностью до числового множителя равен $LL_0(L+L_0)^2$. Если $0\neq L_0\neq -L$ и, следовательно, инвариант $J_0$ отличен от $-1$ и 0, а $I$ от $-1$, то этот дискриминант не равен нулю и уравнение (2.15) имеет три различных корня, которым соответствуют три различные пары значений $p$, $q$, определяемых формулами

$$p=+\sqrt{\pi}, \quad q=+\sqrt{-\frac{2p(p^2+3)}{J_0+1}}\,^{1)}. \tag{2.16}$$

Подставляя любую из этих пар в матрицу (2.10) и подвергая последнюю операциям

$$\boxed{I}+\boxed{II}\,t, \quad \boxed{II}+\boxed{I}\,\frac{t}{4}, \quad \boxed{I}\,\frac{1}{2}, \quad \boxed{II}\,(-2), \quad \boxed{III}\sqrt{\frac{2}{1+pt}}, \tag{2.17}$$

где $t=\pm i\sqrt{3}$, получим соответственно двум значениям $t$ две матрицы того же вида, в которых элементы $p$, $q$ представляют остальные две из упомянутых выше пар. Таким образом, для канонического вида матрицы (2.10) можно взять пару значений $p$, $q$, определяемых в зависимости от любого корня уравнения (2.15). Соответствующая каноническая форма имеет вид

(11a) $$3X_1^2X_2+X_2^3+3X_1X_3^2+3pX_2X_3^2+qX_3^3.$$

Ее абсолютный инвариант $I$ может иметь любое значение, отличное от $-1$ и $\frac{0}{0}$, причем, если $I=0$, то $r_{\mathfrak{C}}=4$.

Дискриминант уравнения (2.15) равен нулю, и оно, следовательно, имеет кратный корень, если $L_0=0$ или $L_0=-L$.

При $L_0=0$, когда $J_0=-1$, уравнение (2.15) имеет простой корень $\pi=0$ и двукратный корень $\pi=-3$. В этом случае $L=I+1\neq 0$ и мы имеем:

$$p=0, \quad q=\sqrt[4]{-\frac{4}{I+1}} \tag{2.18}$$

и

$$p=\pm i\sqrt{3}, \quad q=4\sqrt[4]{-\frac{1}{I+1}}. \tag{2.18'}$$

Однако, если элементам $p$, $q$ в матрице (2.10) мы дадим значения (2.18'), то операциями (2.17), где $t=-p=\mp i\sqrt{3}$, получим новую матрицу того же вида, в которой элементы $p$, $q$ определяются формулами (2.18),

[1]) Мы ограничиваемся выбранными значениями квадратных корней, так как при других значениях их достаточно подвергнуть матрицу (2.10) операциям $\boxed{III}\,i$, $\boxed{I}\,(-1)$ и, быть может, еще операции $\boxed{III}\,(-1)$, чтобы получить матрицу того же вида, в которой элементы $p$, $q$ имеют вышеуказанные значения.

причем в выражении для $q$ можно ограничиться одним значением корня 4-й степени, так как, подвергая полученную матрицу операции $\boxed{III}\,(-1)$ или операциям

$$\boxed{III}\,(\pm i), \qquad \boxed{I}\,(-1),$$

мы изменим в ней только элемент $q$, умножаемый в первом случае на $-1$, а во втором — на $\pm i$. Таким образом, каноническая форма сохраняет вид (11a), где только элементы $p$, $q$ определяются формулами (2.18).

При $L_0 = -L$, когда $J_0^2(I+1) = 0$, уравнение (2.15) имеет трехкратный корень $\pi = 1$. Если $J_0 = 0$, то $I = \frac{0}{0}$ и мы можем ограничиться одной парой значений элементов $p$, $q$ в матрице (2.10): $p = -1$, $q = 2\sqrt{2}$.

Но тогда матрица (2.10) операциями

$$\boxed{II}+\boxed{I}, \quad \boxed{I}+\boxed{II}\left(-\frac{1}{2}\right), \quad \boxed{III}+\boxed{I}\,(-\sqrt{2}),$$

$$\boxed{I}\,(-\sqrt[3]{2}), \quad \boxed{II}\,\frac{1}{\sqrt[3]{4}}, \quad \boxed{III}\,\frac{\sqrt{2}}{\sqrt[3]{4}}, \quad \boxed{I}-\boxed{II}$$

приводится к виду, которому соответствует каноническая форма

(12a) $$X_1^3 + X_2^3 + 3X_2^2X_3.$$

Для нее $r_C = 5$.

Если $I = -1$, то $J_0 \neq -1$ и каноническая форма сохраняет вид (11a), где $p$ и $q$ определяются формулами (2.16), в которых надо положить $\pi = 1$.

Предполагая теперь, что $J_0$ не имеет определенного конечного значения, находим при $J_0 = \infty$ из формулы (2.14)

$$q = 0, \qquad \pi \neq 0 \quad \text{и} \quad \pi \neq -3.$$

А тогда из формулы (2.13) получим:

$$I = -\frac{(3\pi+1)^2}{\pi(\pi+3)^2}, \tag{2.19}$$

откуда следует, что $I$ имеет определенное конечное значение, не равное нулю.

Переписывая выражение (2.19) в виде

$$I\pi^3 + 3(2I+3)\pi^2 + 3(3I+2)\pi + 1 = 0 \tag{2.19'}$$

и повторяя те же рассуждения, что и при исследовании корней уравнения (2.15), мы снова придем к канонической форме (11a) с коэффициентами $p$ и $q$, определяемыми формулами (2.16), где $q = 0$ вследствие $J_0 = \infty$.

При $J_0 = \frac{0}{0}$ из формулы (2.14) находим $p = 0$, $q = 0$ и $p = \pm i\sqrt{3}$, $q = 0$. В этом случае, так же как и раньше, можно ограничиться одной парой значений $p = 0$, $q = 0$ в матрице (2.10). Тогда имеем каноническую форму (11a), в которой коэффициенты $p$, $q$ — нули.

Для нее $I = \infty$.

n° 2. Пусть $\delta = 1$.

Тогда в матрице (2.1), кроме $D_{223} = 0$, имеем $D_{133} = 0$, $D_{233} \neq 0$ или $D_{133} = \pm i\sqrt{3}\, D_{233} \neq 0$.

Если при $D_{223} = 0$ будет $D_{133} = 0$, $D_{233} \neq 0$, то $D_{333} \neq 0$ вследствие неприводимости соответствующей формы. Подвергая тогда матрицу (2.1) операции $\boxed{III}\frac{1}{\sqrt{D_{233}}}$, приведем ее к виду

$$\left\|\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & q \end{array}\right\| \begin{array}{l} \to (i) \\ \to (k) \\ \downarrow (j) \end{array}, \tag{2.20}$$

где $q \neq 0$.

Для матрицы (2.20) имеем:

$$I = -\frac{q^2(q^2+4)}{(q^2+2)^2},$$

откуда заключаем, что $I \neq \frac{0}{0}$.

Далее находим:

$$J_0 + 1 = -\frac{2}{q^2} \neq 0.$$

Отсюда получаем:

$$q = +\sqrt{-\frac{2}{J_0+1}},$$

где можно ограничиться, очевидно, одним значением квадратного корня.

Таким образом, каноническая форма соответствующая матрице (2.20), имеет вид

(13а) $$3X_1^2X_2 + X_2^3 + 3X_2X_3^2 + \sqrt{-\frac{2}{J_0+1}}X_3^3,$$

где $J_0$ может иметь любое значение, отличное от $-1$, $\infty$, $\frac{0}{0}$; кроме того, $J_0 \neq -\frac{1}{2}$, если $I \neq 0$, так как $IJ_0^2 - 2J_0 - 1 = 0$. Если же $I = 0$, то $J_0 = -\frac{1}{2}$ и мы имеем каноническую форму

(14а) $$3X_1^2X_2 + X_2^3 - 3X_2X_3^2 + 2X_3^3.$$

Для нее $r_{\mathfrak{C}} = 4$.

Если в матрице (2.1), кроме $D_{223} = 0$, будет $D_{133} = \pm i\sqrt{3}\, D_{233} \neq 0$, то, как нетрудно убедиться, она приводится к рассмотренному уже виду (2.20).

n° 3. Пусть $\delta = 3$.

Тогда в матрице (2.1), кроме $D_{223} = 0$, будет $D_{133} = D_{233} = 0$. При этом, как и раньше, $D_{333} \neq 0$. После операции

$$\boxed{III}\frac{1}{\sqrt[3]{D_{333}}}$$

получаем матрицу:

$$\left\|\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right\| \begin{array}{l} \to (i) \\ \to (k) \\ \downarrow (j) \end{array},$$

приводящуюся (гл. IV, § 3, упражнение 6) к матрице, которой соответствует каноническая форма

(15а) $$X_1^3 + X_2^3 + X_3^3.$$

Для нее $I = -1$.

Случай (б), когда $r_0 = 2$, $r_{C_0} = 1$.

Тогда по крайней мере один из элементов $C_{11}^{(33)}$, $C_{22}^{(33)}$ матрицы $C_0$ не равен нулю. Пусть $C_{\alpha\alpha}^{(33)} \neq 0$, где $\alpha = 1$ или $\alpha = 2$.

В этом случае существует двукратный корень $t$ уравнения

$$A_{\alpha\alpha\alpha}t^3 + 3A_{\alpha\alpha\beta}t^2 + 3A_{\alpha\beta\beta}t + A_{\beta\beta\beta} = 0 \qquad \left(\alpha \neq \beta = \begin{cases} 1 \\ \text{или} \\ 2 \end{cases}\right).$$

Следовательно,

$$A_{\alpha\alpha\alpha}t^2 + 2A_{\alpha\alpha\beta}t + A_{\alpha\beta\beta} = 0, \qquad m = A_{\alpha\alpha\alpha}t + A_{\alpha\alpha\beta} \neq 0$$

и

$$t = -\frac{C_{12}}{C_{\alpha\alpha}^{(33)}}.$$

Подвергая матрицу $A$ операциям

$$\boxed{\beta} + \boxed{\alpha}\, t, \qquad \boxed{\alpha} + \boxed{\beta}\left(-\frac{A_{\alpha\alpha\alpha}}{3m}\right),$$

получим матрицу $B$ с элементами

$$B_{\alpha\alpha\alpha} = B_{\beta\beta\beta} = B_{\alpha\beta\beta} = 0, \qquad B_{\alpha\alpha\beta} = m, \qquad B_{333} = A_{333}, \qquad B_{123} = A_{123} + A_{\alpha\alpha3}t,$$
$$B_{\beta33} = A_{\alpha33}t + A_{\beta33}, \qquad B_{\beta\beta3} = A_{\alpha\alpha3}t^2 + 2A_{123}t + A_{\beta\beta3},$$
$$B_{\alpha33} = \frac{1}{3m}\left(2A_{\alpha\alpha\alpha}A_{\alpha23}t - A_{\alpha\alpha\alpha}A_{\beta33} + 3A_{\alpha\alpha\beta}A_{\alpha33}\right),$$
$$B_{\alpha\alpha3} = \frac{1}{3m}\left(A_{\alpha\alpha\alpha}A_{\alpha\alpha3}t - 2A_{\alpha\alpha\alpha}A_{123} + 3A_{\alpha\alpha\beta}A_{\alpha\alpha3}\right).$$

Наконец, после операций

$$\boxed{III} + \boxed{\alpha}\left(-\frac{B_{123}}{m}\right), \qquad \boxed{III} + \boxed{\beta}\left(-\frac{B_{\alpha\alpha3}}{m}\right)$$

придем к матрице $D$ с элементами

$$\left.\begin{aligned} &D_{\alpha\alpha\alpha} = D_{\beta\beta\beta} = D_{\alpha\beta\beta} = D_{\alpha\alpha3} = D_{123} = 0; \; D_{\alpha\alpha\beta} = m, \; D_{\beta\beta3} = B_{\beta\beta3}, \\ &D_{\alpha33} = B_{\alpha33} - \frac{2B_{123}B_{\alpha\alpha3}}{m}, \; D_{\beta33} = B_{\beta33} - \frac{B_{123}^2 + 2B_{\alpha\alpha3}B_{\beta\beta3}}{m}, \\ &D_{333} = B_{333} - \frac{3(B_{123}B_{\alpha33} + B_{\alpha\alpha3}B_{\beta33})}{m} + \frac{3B_{\alpha\alpha3}(B_{\alpha\alpha3}B_{\beta\beta3} + 2B_{123}^2)}{m^2}. \end{aligned}\right\} \tag{2.21}$$

Для нее

$$C_0 = \begin{Vmatrix} -2m^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}, \qquad C_1 = \begin{Vmatrix} -2m^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & mD_{\beta\beta3} \\ 0 & mD_{\beta\beta3} & 0 \end{Vmatrix}.$$

Если ранг $r$ матрицы $A$ равен 2, то в матрице $D$ все элементы — нули, кроме $D_{\alpha\alpha\beta} = m$, и после операций

$$\boxed{\beta}\,\frac{1}{m} \text{ и (если } \alpha = 2) \; \boxed{\alpha - \beta}$$

получим матрицу, которой соответствует каноническая форма

(1б) $$3X_1^2X_2.$$

Присоединенная матрица $C$ имеет в этом случае ранг $r_C = 1$.

Для формы (1б), очевидно, $I = \frac{0}{0}$.

Если же ранг $r$ матрицы $A$ равен 3, то различаем два варианта, смотря по тому, будет ли ранг $r_{C_1}$ матрицы $C_1$ равен 3 (когда $D_{\beta\beta3} \neq 0$) или 1 (когда $D_{\beta\beta3} = 0$).

Вариант 1: $r_{C_1}=3$.

Тогда $D_{\beta\beta3}\neq 0$ и матрица $D$ операциями

$$\boxed{\beta}\,\frac{1}{m},\qquad \boxed{III}\,\frac{m^2}{D_{\beta\beta3}}\quad\text{и (если } \alpha=2)\quad \boxed{\alpha-\beta}$$

приводится к виду

$$\left\|\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_{133} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & E_{233} \\ 0 & 0 & E_{133} & 0 & 1 & E_{233} & E_{133} & E_{233} & E_{333} \end{array}\right\| \begin{array}{l} \longrightarrow (i) \\ \longrightarrow (k) \\ \downarrow (j) \end{array}. \qquad (2.22)$$

Для матрицы (2.22) имеем:

$$|C_0|=0,\qquad |C_1|=2\text{ [1]}.$$

Если в матрице (2.22) $E_{133}=E_{233}=E_{333}=0$, то соответствующая форма имеет канонический вид

(2б) $$3X_1^2X_2+3X_2^2X_3.$$

При этом $S=0$, $T=0$. Следовательно, $I=\frac{0}{0}$. Кроме того, $r_C=4$.

Если же в матрице (2.22) $E_{133}=E_{333}=0$, $E_{233}\neq 0$, то после очевидных операций получим матрицу, которой соответствует каноническая форма

(3б) $$3X_1^2X_2+3X_2^2X_3+3X_2X_3^2.$$

Для нее $S=4$, $T=-8$. Следовательно, $I=0$. Кроме того, $r_{\mathfrak{C}}=2$.

Рассмотренные частные случаи имеют место, когда форма $f$ приводима. В общем случае, когда форма $f$ неприводима, принимаем во внимание матрицу

$$R_0=\begin{Vmatrix} 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ -6E_{133} & -6E_{233} & 0 & -6 & 0 & 0 \\ 0 & -6E_{133} & -6E_{233} & 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & -6E_{133} & -6E_{233} & 0 & -6 \end{Vmatrix},$$

составленную для матрицы (2.22). Ее детерминант равен

$$|R_0|=2^3\cdot 3^6E_{133}.$$

С помощью элементарных преобразований $R_0$ приводится к матрице

$$\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_{133} \end{Vmatrix},$$

откуда заключаем, что дефект $\delta$ матрицы $R_0$ может иметь два значения: 0, 1.

n° 1. Пусть $\delta=0$.

[1] В этом случае инварианты $I_0$, $I_1$, $I_2$ обращаются в нуль.

Тогда матрица (2.22) легко приводится к виду, которому соответствует каноническая форма

$$(4б)\qquad 3X_1^2X_2+3X_2^2X_3+3X_1X_3^2+3pX_2X_3^2+qX_3^3.$$

Для нее имеем:

$$I+1=\frac{64\,(p^2-q)^3}{(27+12pq-8p^3)^2}\,. \tag{2.23}$$

Далее находим:

$$J_1=-p^3, \tag{2.24}$$

$$J_2+1=\frac{3\,(4pq+27)}{4p^3+27}\,. \tag{2.25}$$

Из формул (2.23), (2.24), (2.25) заключаем, что значения $I$ и $J_2$ могут быть какими угодно, тогда как $J_1$ может принимать только конечные значения, не имеющие неопределенного вида $\frac{0}{0}$.

Если $J_1=0$, то из выражений (2.24), (2.23) получаем:

$$p=0,\qquad q=-\frac{9}{4}\sqrt{I+1}\ {}^{1)}. \tag{2.26}$$

Если же $J_1\neq 0$, то при определенном конечном значении $J_2$ из выражений (2.24), (2.25) находим:

$$p=-\sqrt[3]{J_1}\ {}^{2)},\qquad q=\frac{27\,(J_2-2)-4J_1\,(J_2+1)}{12p}\,. \tag{2.26$'$}$$

При $J_2=\infty$ формулы (2.25) и (2.23) дают:

$$p=-\frac{3}{2}\sqrt[3]{2},\qquad q=-\frac{(9I+5)\,p^2}{4}\,. \tag{2.26$''$}$$

Наконец, при $J_2=\frac{0}{0}$ из равенства (2.25) имеем:

$$p=-\frac{3}{2}\sqrt[3]{2},\qquad q=p^2.$$

При последних значениях $p$, $q$ матрица формы (4б) после легких преобразований принимает вид, которому соответствует каноническая форма

$$(5б)\qquad X_1^3+3X_1^2X_2+3X_2^2X_3.$$

Для нее $I=\frac{0}{0}$ и $r_C=5$. Для формы (4б), у которой коэффициенты $p$, $q$ определяются формулами (2.26), (2.26′) или (2.26″), значение $I=\frac{0}{0}$ исключается, а при $I=0$ имеем $r_{\mathfrak{C}}=4$.

n° 2. Пусть $\delta=1$[3].

---

[1]) Мы ограничиваемся одним каким-либо значением кубического корня, так как, подвергая матрицу формы (4б) операциям

$$\boxed{I}\left(\cos\frac{14}{9}\eta\pi+i\sin\frac{14}{9}\eta\pi\right),\quad \boxed{II}\left(\cos\frac{8}{9}\eta\pi+i\sin\frac{8}{9}\eta\pi\right),$$

$$\boxed{III}\left(\cos\frac{2}{9}\eta\pi+i\sin\frac{2}{9}\eta\pi\right),$$

где, $\eta=\pm 1$, получим матрицу того же вида, в которой вместо $q$ будет

$$q\left(\cos\frac{2}{3}\eta\pi+i\sin\frac{2}{3}\eta\pi\right).$$

[2]) Здесь и в дальнейших выражениях $p$ также можем, не нарушая общности, ограничиться одним значением кубического корня.

[3]) В этом случае $J_1=\infty$ или $J_1=\frac{0}{0}$.

Тогда $E_{133}=0$, но $E_{333}\neq 0$ и матрица (2.22) очевидными операциями приводится к виду, которому соответствует каноническая форма

(6б) $$3X_1^2X_2+3X_2^2X_3+3pX_2X_3^2+X_3^3.$$

Для нее имеем:

$$I=\frac{3p^2-4}{p^2(3-2p^2)^2}, \tag{2.27}$$

откуда заключаем, что $I$ может иметь любое значение, отличное от $\frac{0}{0}$.

Далее находим:

$$J_2=\frac{p(3-p^2)}{p^3}. \tag{2.28}$$

Отсюда, если $p\neq 0$, получаем:

$$J_2+1=\frac{3}{p^2}. \tag{2.29}$$

Таким образом, $J_2$, кроме неопределенного значения $\frac{0}{0}$, может иметь любое конечное значение, отличное от $-1$.

Если $J_2=\frac{0}{0}$, то из выражения (2.28) имеем $p=0$.

Тогда, как видно из формулы (2.27), $I=\infty$. Если же $-1\neq J_2\neq\frac{0}{0}$, то из выражения (2.29) находим:

$$p=\sqrt{\frac{3}{J_2+1}}\,^{1)}.$$

Если при этом $I=0$, то из выражения (2.27) получаем:

$$p=\frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Подставляя последнее выражение для $p$ в матрицу формы (6б), приходим после легких преобразований к матрице, которой соответствует каноническая форма

(7б) $$3X_1^2X_2+3X_2^2X_3+3X_1^2X_3.$$

Для нее $r_{\mathfrak{C}}=4$

Вариант 2: $r_{C_1}=1$.

Тогда элементы (2.21) матрицы $D$ имеют следующие значения:

$$\left.\begin{aligned}
&D_{\alpha\alpha\alpha}=D_{\beta\beta\beta}=D_{\alpha\beta\beta}=D_{\alpha\alpha3}=D_{\beta\beta3}=D_{123}=0, \qquad D_{\alpha\alpha\beta}=m,\\
&D_{\alpha33}=B_{\alpha33}-\frac{2B_{123}B_{\alpha\alpha3}}{m}, \qquad D_{\beta33}=B_{\beta33}-\frac{B_{123}^2}{m},\\
&D_{333}=B_{333}-\frac{3(B_{123}B_{\alpha33}+B_{\alpha\alpha3}B_{\beta33})}{m}+\frac{6B_{123}^2B_{\alpha\alpha3}}{m^2}.
\end{aligned}\right\} \tag{2.30}$$

Если $D_{\alpha33}=D_{333}=0$, то $D_{\beta33}\neq 0$ и после очевидных операций получим матрицу, которой соответствует каноническая форма

(8б) $$3X_1^2X_2+3X_2X_3^2.$$

Для нее $I=0$ и $r_{\mathfrak{C}}=0$.

---

[1]) Здесь и в дальнейшем выражении $p$ можем, очевидно, ограничиться одним значением квадратного корня.

Если же $D_{\beta 33} = D_{333} = 0$, то $D_{\alpha 33} \neq 0$ и мы приходим к матрице, которой соответствует каноническая форма

(9б) $$3X_1^2X_2 + 3X_1X_3^2.$$

Для нее $I = \frac{0}{0}$ и $r_C = 4$.

В случае, когда $D_{333}$ не обращается в нуль одновременно с $D_{\alpha 33}$ или $D_{\beta 33}$, составляем матрицу

$$R_0 = \begin{Vmatrix} 0 & 3m & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3m & 0 & 0 \\ -6mD_{\alpha 33} & -6mD_{\beta 33} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6mD_{\alpha 33} & -6mD_{\beta 33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6mD_{\alpha 33} & -6mD_{\beta 33} & 0 & 0 \end{Vmatrix},$$

у которой дефект $\delta$ может иметь два значения: 3, 2.

Если $\delta = 3$, то среди элементов (2.30) $D_{\alpha 33} = 0$, но $D_{333} \neq 0$ и мы приходим при $D_{\beta 33} = 0$ к канонической форме

(10б) $$3X_1^2X_2 + X_3^3,$$

для которой $I = \frac{0}{0}$ и $r_C = 5$, а при $D_{\beta 33} \neq 0$ — к канонической форме

(11б) $$3X_1^2X_2 + 3X_2X_3^2 + X_3^3,$$

для которой $I = 0$ и $r_{\mathfrak{C}} = 4$.

Если же $\delta = 2$, то среди элементов (2.30) $D_{\alpha 33} \neq 0$ и мы приходим при $D_{\beta 33} = 0$ (тогда $D_{333} \neq 0$) к канонической форме

(12б) $$3X_1^2X_2 + 3X_1X_3^2 + X_3^3,$$

для которой $I = \frac{0}{0}$, и $r_C = 5$, а при $D_{\beta 33} \neq 0$ — к канонической форме

(13б) $$3X_1^2X_2 + 3X_1X_3^2 + 3X_2X_3^2 + \sqrt{Q}\,X_3^3,$$

причем

$$Q = \frac{9P_{333}^2}{4P_{\alpha 33}^2 P_{\beta 33}}, \tag{2.31}$$

где

$$\left.\begin{aligned} P_{\beta 33} &= \begin{vmatrix} C_{\alpha 3}^{(\beta 3)} & C_{\beta 3}^{(\beta 3)} \\ C_{\alpha\alpha}^{(33)} & C_{12}^{(33)} \end{vmatrix}, \\ P_{\alpha 33} &= \begin{Vmatrix} \begin{vmatrix} C_{\alpha\alpha}^{(\beta 3)} & C_{\alpha 3}^{(\beta 3)} \\ A_{\alpha\alpha\alpha} & A_{\alpha\alpha 3} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} C_{\alpha\alpha}^{(\beta\beta)} & C_{12}^{(\beta\beta)} \\ A_{\alpha\alpha\beta} & A_{\alpha\beta\beta} \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} C_{\alpha\alpha}^{(\beta 3)} & C_{\alpha 3}^{(\beta 3)} \\ A_{\alpha\alpha\beta} & A_{123} \end{vmatrix} \\ C_{\alpha\alpha}^{(33)} & C_{12}^{(33)} \end{Vmatrix}, \\ P_{333} &= \begin{vmatrix} 3C_{12}^{(33)} & \begin{matrix} C_{\beta 3}^{(\beta\beta)}C_{\alpha\alpha}^{(33)} + C_{12}^{(\beta\beta)}C_{\alpha\alpha}^{(\alpha 3)} + 2C_{\beta\beta}^{(\beta\beta)}C_{\alpha\alpha}^{(\beta 3)} - \\ - C_{\alpha\alpha}^{(\beta\beta)}C_{\beta\beta}^{(\beta 3)} - C_{\alpha 3}^{(\beta\beta)}C_{12}^{(33)} - 2C_{\alpha\alpha}^{(\beta\beta)}C_{\beta 3}^{(33)} \end{matrix} \\ C_{\alpha\alpha}^{(33)} & C_{\alpha\alpha}^{(\beta\beta)}C_{\alpha\alpha}^{(\alpha 3)} + C_{12}^{(\beta\beta)}C_{\alpha\alpha}^{(\beta 3)} \end{vmatrix}. \end{aligned}\right\} \tag{2.32}$$

Для формы (13б) имеем:

$$I = 0 \quad \text{и} \quad r_{\mathfrak{C}} = \begin{cases} 4\,(Q \neq -9), \\ 2\,(Q = -9). \end{cases}$$

При $Q=-9$ форма (13б) легкó приводится к эквивалентной ей, более простой канонической форме

(14б) $$3X_1^2X_2+3X_1X_3^2+6X_1X_2X_3.$$

Нетрудно убедиться, что выражение $Q$, определяемое формулой (2.31), является абсолютным инвариантом тех форм, которые принадлежат к типу, характеризующемуся инвариантами $I=0$, $r=4$ или 2, $r_0=2$, $r_{C_0}=1$, $r_{C_1}=1$, $\delta=2$.

Случай (в), когда $r_0=1$.

Тогда по крайней мере один из элементов $A_{111}$, $A_{222}$ не равен нулю. Пусть $A_{\alpha\alpha\alpha}\neq 0$, где $\alpha=1$ или $\alpha=2$.

Подвергая матрицу $A$ операциям

$$\boxed{\beta}+\boxed{\alpha}\left(-\frac{A_{\alpha\alpha\beta}}{A_{\alpha\alpha\alpha}}\right),\qquad \boxed{III}+\boxed{\alpha}\left(-\frac{A_{\alpha\alpha3}}{A_{\alpha\alpha\alpha}}\right),\qquad \boxed{\alpha}\frac{1}{\sqrt[3]{A_{\alpha\alpha\alpha}}},$$

где $\beta\neq\alpha$ имеет одно из значений 1, 2, получим матрицу с элементами

$$B_{\alpha\alpha\alpha}=1,\qquad B_{\alpha\alpha\beta}=B_{\alpha\beta\beta}=B_{\beta\beta\beta}=B_{\alpha\alpha3}=0,\qquad B_{\alpha33}=\frac{A_{\alpha\alpha\alpha}A_{\alpha33}-A_{\alpha\alpha3}^2}{\sqrt[3]{A_{\alpha\alpha\alpha}^4}},$$

$$B_{333}=\frac{A_{\alpha\alpha\alpha}^2A_{333}-3A_{\alpha\alpha\alpha}A_{\alpha\alpha3}A_{\alpha33}+2A_{\alpha\alpha3}^3}{A_{\alpha\alpha\alpha}^2},\qquad B_{123},\ B_{\beta\beta3},\ B_{\beta33}.$$

Если ранг $r$ матрицы $A$ равен 1, то все элементы матрицы $B$, кроме $B_{\alpha\alpha\alpha}$, равны нулю и мы имеем, совершая операцию $\boxed{\alpha-\beta}$ при $\alpha=2$, матрицу, которой соответствует каноническая форма

(1в) $$X_1^3.$$

Если, далее, $r=2$, то $B_{123}=B_{\beta\beta3}=B_{\beta33}=0$. Если при этом $B_{\alpha33}=0$, то $B_{333}\neq 0$ и матрица $B$ после очевидных операций принимает вид, которому соответствует каноническая форма

(2в) $$X_2^3+X_3^3.$$

Для нее ранги матриц $C$ и $C_2$ имеют значения $r_C=2$ и $r_{C_2}=0$.

Если же $B_{\alpha33}\neq 0$, то матрица $B$ приводится к виду, которому соответствует каноническая форма

(3в) $$X_2^3+3X_2X_3^2+\sqrt{Q_0}X_3^3,$$

где

$$Q_0=\frac{8\begin{vmatrix} C_{\alpha\alpha}^{(\beta\beta)} & C_{\alpha3}^{(\beta\beta)} \\ A_{\alpha\alpha\alpha} & A_{\alpha\alpha3}\end{vmatrix}^2}{\left(C_{\alpha\alpha}^{(\beta\beta)}\right)^3}. \tag{2.33}$$

Если $B_{333}=0$, то $Q_0=0$ и форма (3в) имеет вид

(4в) $$X_2^3+3X_2X_3^2.$$

Для каждой из форм (3в), где $Q_0\neq -4$, (4в) матрицы $C$ и $C_2$ имеют ранги $r_C=2$ и $r_{C_2}=1$.

При $Q_0=-4$ форма (3в) легко приводится к эквивалентной ей, более простой канонической форме

(5в) $$X_2^3+3X_2^2X_3.$$

Для нее $r_C=1$.

Выражение $Q_0$, определяемое формулой (2.33), является абсолютным инвариантом тех форм, которые принадлежат к типу, характеризующемуся инвариантами $r=2$, $r_0=1$, $r_{C_2}=1$. Для форм (1в)—(5в) $I=\frac{0}{0}$.

Если, наконец, $r=3$, то матрица $B$, подвергнутая при $\alpha=2$ операции $\boxed{\alpha-\beta}$, имеет вид

$$\left\|\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & B_{123} & 0 & B_{123} & B_{133} \\ 0 & 0 & B_{123} & 0 & 0 & B_{223} & B_{123} & B_{223} & B_{233} \\ 0 & B_{123} & B_{133} & B_{123} & B_{223} & B_{233} & B_{133} & B_{233} & B_{333} \end{array}\right\| \begin{matrix} \longrightarrow (i) \\ \longrightarrow (k). \\ \downarrow (j) \end{matrix} \tag{2.34}$$

Составим для нее матрицу

$$C_1=\left\|\begin{matrix} 0 & 0 & B_{223} \\ 0 & 0 & 0 \\ B_{223} & 0 & -2B_{123}^2 \end{matrix}\right\|.$$

Ранг $r_{C_1}$ этой матрицы может иметь три значения: 2, 1, 0.

Если $r_{C_1}=2$, то, подвергая матрицу (2.34) надлежащим операциям, получим либо каноническую форму

(6в) $$X_1^3+3X_2^2X_3-3\sqrt[3]{\frac{I+1}{4}}\,X_1X_3^2+X_3^3,$$

приводящуюся при $I=0$ к эквивалентной ей, более простой канонической форме

(7в) $$X_1^3+3X_1^2X_3+3X_2^2X_3,$$

для которой $r_{\mathfrak{C}}=4$, либо каноническую форму

(8в) $$X_1^3+3X_2^2X_3,$$

для которой $I=\frac{0}{0}$ и $r_C=5$, либо, наконец, каноническую форму

(9в) $$X_1^3+3X_1X_3^2+3X_2^2X_3,$$

для которой $I=\infty$.

Если же $r_{C_1}=1$, то после легких преобразований матрицы (2.34) приходим к канонической форме

(10в) $$X_1^3+6X_1X_2X_3,$$

для которой $I=0$ и $r_{\mathfrak{C}}=2$, или к канонической форме

(11в) $$X_2^3+X_3^3+6X_1X_2X_3,$$

для которой $I=0$ и $r_{\mathfrak{C}}=4$.

Если, наконец, $r_{C_1}=0$, то подобным же образом получаем каноническую форму

(12в) $$X_1^3+3X_2X_3^2.$$

Для нее $I=\frac{0}{0}$ и $r_C=5$.

С л у ч а й (г), к о г д а $r_0=0$.

Тогда $f=x_3\varphi$, где

$$\varphi=3A_{113}x_1^2+3A_{223}x_2^2+A_{333}x_3^2+6A_{123}x_1x_2+3A_{133}x_1x_3+3A_{233}x_2x_3.$$

Как известно, совокупность всех комплексных квадратичных тройничных форм разбивается на семь аффинно-проективных классов[1]).

---

[1]) См. [17], стр. 451.

Соответственно этому имеем семь канонических видов формы $f$:

| Канонические формы | | Характеризующие их инварианты | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| (1г) | $6X_1X_2X_3+X_3^3$ | $r=3,$ | $I=0,$ | | $r_{\mathfrak{C}}=2$ |
| (2г) | $6X_1X_2X_3$ | $r=3,$ | $I=0,$ | | $r_{\mathfrak{C}}=0$ |
| (3г) | $3X_1X_2^2+$ $+3X_2^2X_3$ | $r=3,$ | $I=\frac{0}{0},$ | $r_C=4$ | |
| (4г) | $3X_2^2X_3+X_3^3$ | $r=2,$ | $I=\frac{0}{0},$ | $r_C=2$ | |
| (5г) | $3X_2^2X_3$ | $r=2,$ | $I=\frac{0}{0},$ | $r_C=1,$ | $r_{C_2}=1$ |
| (6г) | $3X_2X_3^2$ | $r=2,$ | $I=\frac{0}{0},$ | $r_C=1,$ | $r_{C_2}=0$ |
| (7г) | $X_3^3$ | $r=1,$ | $I=\frac{0}{0}$ | | |

4. Мы установили 48 канонических видов комплексных кубических тройничных форм: (1а) — (15а), (1б) — (14б), (1в) — (12в), (1г) — (7г). При установлении канонических видов вещественных кубических тройничных форм различаем пять возможных случаев в зависимости от пяти канонических видов вещественной укороченной матрицы $A_0$, обусловливаемых значениями ее ранга $r_0$, а также ранга $r_{C_0}$ и сигнатуры $\sigma_{C_0}$ матрицы $C_0$ (гл. IV, § 3, табл. IV, V):

(а) $r_0=2,\quad r_{C_0}=2,\quad \sigma_{C_0}=0,$

(а′) $r_0=2,\quad r_{C_0}=2,\quad \sigma_{C_0}=-2,$

(б) $r_0=2,\quad r_{C_0}=1,$

(в) $r_0=1,$

(г) $r_0=0.$

Применяя в каждом из этих случаев вещественные аффинно-проективные преобразования матрицы $A$ формы $f$, приводящие ее к каноническому виду, мы получим 79 канонических видов вещественных кубических тройничных форм: (1а) — (17а), (1а′) — (13а′), (15а′) — (17а′) (упражнение 4); (1б) — (19б) (упражнение 5); (1в) — (16в) (упражнение 6); (1г) — (11г) (упражнение 7).

5. Переходя к геометрической интерпретации полученных результатов, отметим, прежде всего, геометрическое значение инвариантов, рассмотренных в п. 2.

Для четырех основных типов нераспадающихся линий 3-го порядка, установленных Ньютоном [168] в случае вещественной области, им даны известные простейшие уравнения, которые, очевидно, могут быть распространены и на комплексную область. В однородных координатах эти уравнения имеют вид

$$ax_1^3+bx_1^2x_3+cx_1x_3^2+dx_3^3-x_1x_2^2-ex_2x_3^2=0 \quad (a\neq 0 \text{ или } a=0), \tag{2.35}$$

$$ax_1^3+bx_1^2x_3+cx_1x_3^2+dx_3^3-x_2^2x_3=0 \quad (a\neq 0), \tag{2.36}$$

$$ax_1^3+bx_1^2x_3+cx_1x_3^2+dx_3^3-x_1x_2x_3=0 \quad (a\neq 0), \tag{2.37}$$

$$ax_1^3+bx_1^2x_3+cx_1x_3^2+dx_3^3-x_2x_3^2=0 \quad (a\neq 0). \tag{2.38}$$

Ранг $r$ матрицы $A$, соответствующей каждому из уравнений (2.35) — (2.38), равен 3.

Далее, для уравнения (2.35) находим:

$$A_0 = \left\| \begin{array}{cc|cc} a & 0 & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \end{array} \right\| \begin{array}{l} \to (i) \\ \to (k) \\ \downarrow (j) \end{array} \text{ и } r_0 = 2,$$

$$C_0 = \left\| \begin{array}{cc} -\frac{2}{3}a & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3} \end{array} \right\| \text{ и } r_{C_0} = \begin{cases} 2 & (a \neq 0), \\ 1 & (a = 0), \end{cases}$$

$$C_1 = \left\| \begin{array}{ccc} -\frac{2}{3}a & 0 & -\frac{b}{9} \\ 0 & -\frac{2}{9} & 0 \\ -\frac{b}{9} & 0 & 0 \end{array} \right\| \text{ и } r_{C_1} = \begin{cases} 3 & (b \neq 0), \\ 2 & (b = 0,\ a \neq 0), \\ 1 & (b = 0,\ a = 0). \end{cases}$$

Если в уравнении (2.35) $a \neq 0$, то имеем *центральные кубические гиперболы*[1]).

Тогда $r_0 = 2$, $r_{C_0} = 2$. Если при этом $b \neq 0$, т. е. $r_{C_1} = 3$, то три асимптоты каждой линии не пересекаются в одной точке; если же $b = 0$, т. е. $r_{C_1} = 2$, то они пересекаются в одной точке[2]).

В вещественной области центральные кубические гиперболы делятся на *избыточные гиперболы*[2]), для которых $a > 0$, т. е. $\sigma_{C_0} = -2$, и *недостаточные гиперболы*[3]), для которых $a < 0$, т. е. $\sigma_{C_0} = 0$. У первых все три асимптоты вещественны, тогда как у вторых одна из асимптот вещественна, а две — мнимые сопряженные.

Если в уравнении (2.35) $a = 0$, то при $b \neq 0$ имеем *параболические гиперболы*[4]), и тогда $r_0 = 2$, $r_{C_0} = 1$, $r_{C_1} = 3$, а при $b = 0$ — *гиперболизмы конических сечений*[5]), и тогда $r_0 = 2$, $r_{C_0} = 1$, $r_{C_1} = 1$, причем имеем *гиперболизмы центральных конических сечений* или *гиперболизмы параболы*, смотря по тому, будет ли $c \neq 0$ или $c = 0$.

Заметим, что при $a = b = 0$ будет:

$$S = \frac{4}{81}c^2; \quad T = \frac{8}{729}c^3.$$

Следовательно, $I = 0$, $r_{\mathfrak{C}} = 4$ для гиперболизмов центральных конических сечений и $I = \frac{0}{0}$, $r_C = 5$ для гиперболизмов параболы.

В вещественной области гиперболизмы центральных конических сечений делятся на *гиперболизмы гиперболы*, для которых $c > 0$, т. е. $\omega(T) = +1$, и *гиперболизмы эллипса*, для которых $c < 0$, т. е. $\omega(T) = -1$.

---

1) Ср. [45], п. 18.
2) См. [168], стр. 145.
3) См. [168], стр. 150.
4) См. [168], стр. 152.
5) См. [168], стр. 154.

Для избыточных, недостаточных и параболических гипербол инвариант $I$ может иметь любое значение.

Уравнению (2.36) соответствуют расходящиеся параболы[1]). В этом случае

$$A_0=\begin{array}{l} \qquad\qquad\quad\longrightarrow (i) \\ \left\|\begin{array}{cc|cc} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right\| \longrightarrow (k) \\ \qquad\qquad\qquad\quad\ \downarrow (j) \end{array} \text{ и } r_0=1.$$

Далее находим:

$$C_1=\left\|\begin{array}{ccc} 0 & 0 & -\frac{a}{3} \\ 0 & 0 & 0 \\ -\frac{a}{3} & 0 & -\frac{2}{9}b \end{array}\right\| \text{ и } r_{C_1}=2.$$

Инвариант $I$ может иметь любое значение.

Уравнению (2.37) соответствуют трезубцы[1]). Тогда матрица $A_0$ та же, как и в предыдущем случае, и ее ранг $r_0=1$. Далее имеем:

$$C_1=\left\|\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{18} \end{array}\right\| \text{ и } r_{C_1}=1.$$

Кроме того, $I=0$ и $r_{\mathfrak{C}}=4$.

Уравнению (2.38) соответствуют кубические параболы[2]). Тогда $r_0=1$, $r_{C_1}=0$. Кроме того, $I=\frac{0}{0}$ и $r_C=5$.

Для дальнейшего подразделения линий, представляемых уравнением (2.35), принимаем во внимание их диаметры[3]).

Как известно[4]), диаметр линии 3-го порядка, заданной в однородных координатах уравнением

$$\sum_{i,\,j,\,k=1}^{3} A_{ijk}x_ix_jx_k=0,$$

сопряжен с хордами углового коэффициента $m$, который надо искать среди общих корней уравнений

$$A_{111}+3A_{112}m+3A_{122}m^2+A_{222}m^3=0 \tag{2.39}$$

и

$$\left|\begin{array}{ccc} A_{111}+A_{112}m & A_{112}+A_{122}m & A_{113}+A_{123}m \\ A_{112}+A_{122}m & A_{122}+A_{222}m & A_{123}+A_{223}m \\ A_{113}+A_{123}m & A_{123}+A_{223}m & A_{133}+A_{233}m \end{array}\right|=0.$$

---

[1]) См. [168], стр. 156.

[2]) См. [168], стр. 157.

[3]) Подразумеваются такие же диаметры, как и у конических сечений.

[4]) См. [5], стр. 40.

Переписывая последнее уравнение в виде

$$A_{111}+3A_{112}m+3A_{122}m^2+A_{222}m^3=0, \tag{2.40}$$

представим результант уравнений (2.39), (2.40) как детерминант $|R_0|$ матрицы

$$R_0=\left\|\begin{matrix} A_{111} & 3A_{112} & 3A_{122} & A_{222} & 0 & 0 \\ 0 & A_{111} & 3A_{112} & 3A_{122} & A_{222} & 0 \\ 0 & 0 & A_{111} & 3A_{112} & 3A_{122} & A_{222} \\ A_{111} & 3A_{112} & 3A_{122} & A_{222} & 0 & 0 \\ 0 & A_{111} & 3A_{112} & 3A_{122} & A_{222} & 0 \\ 0 & 0 & A_{111} & 3A_{112} & 3A_{122} & A_{222} \end{matrix}\right\|.$$

Тогда существование диаметров и число их будут обусловлены значением дефекта $\delta$ матрицы $R_0$.

Для линий, соответствующих уравнению (2.35), матрица $R_0$ приводится элементарными преобразованиями (вещественными в случае вещественной области) к виду

$$\left\|\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b^2-4ac & 4ae \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4a^2e & b^2-4ac \end{matrix}\right\|.$$

Следовательно, результант уравнений (2.39), (2.40) с точностью до числового множителя равен

$$e\,[(b^2-4ac)^2-16a^3e^2],$$

т. е.

$$e\,(b^2-4ac+4ea\sqrt{a})\,(b^2-4ac-4ea\sqrt{a}).$$

Как известно[1]), у центральных кубических гипербол не существует диаметра, если ни один из множителей последнего разложения не равен нулю, т. е. если $\delta=0$; существует лишь один диаметр, если только один из этих множителей равен нулю, т. е. если $\delta=1$; существуют три диаметра, если каждый множитель есть нуль, т. е. если $\delta=3$. В вещественной области все эти диаметры вещественны лишь у избыточных гипербол; у недостаточных гипербол вещественным может быть лишь один диаметр, тогда как остальные два (если только они существуют) — мнимые сопряженные.

У параболических гипербол диаметра нет, если $e\neq 0$, т. е. если $\delta=0$, и существует только один диаметр (вещественный в случае вещественной области), если $e=0$, т. е. если $\delta=1$[2]).

У гиперболизмов конических сечений нет диаметра, если $e\neq 0$, т. е. если $\delta=2$, и существует только один диаметр (вещественный в случае вещественной области), если $\delta=3$[3]).

---

[1]) См [168], стр. 145, 146, 150.

[2]) См. [168], стр. 152.

[3]) См. [168], стр. 154—156.

Таким образом, указанные Ньютоном свойства нераспадающихся линий 3-го порядка вполне характеризуются проективными инвариантами $I$, $r$, $r_C$, $r_{\mathfrak{C}}$ (а также $\omega(T)$ в случае вещественной области) и аффинно-проективными инвариантами $r_0$, $r_{C_0}$, $r_{C_1}$, $\delta$ (а также $\sigma_{C_0}$ в случае вещественной области).

Для характеристики свойств распадающихся линий 3-го порядка служат проективные инварианты

$$I,\ r,\ r_C,\ r_{\mathfrak{C}}$$

(а также $\omega(T)$, $\sigma_C$, $\sigma_{\mathfrak{C}}$ в случае вещественной области) и аффинно-проективные инварианты

$$r_0,\ r_{C_0},\ r_{C_1},\ r_{C_2},\ I_0,\ Q_0$$

(а также $\sigma_{C_0}$, $\sigma_{C_2}$ в случае вещественной области). Каждому значению инварианта $Q_0$ соответствует простое отношение трех точек пересечения какой-нибудь прямой с пересекающейся в несобственной точке тройкой различных собственных прямых, представляемой канонической формой (3в), где $Q_0 \neq -4$.

Простое отношение трех точек прямой имеет при всех изменениях их порядка, вообще, шесть различных значений

$$\theta,\ \frac{1}{\theta},\ -\left(1+\frac{1}{\theta}\right),\ -\frac{1}{1+\frac{1}{\theta}},\ -(1+\theta),\ -\frac{1}{1+\theta}, \tag{2.41}$$

где $\theta$ — одно из этих значений

Если же $\theta$ является корнем уравнения $\theta^3=1$, то среди величин (2.41) различными будут либо три

$$1,\ -2,\ -\frac{1}{2}, \tag{2.42}$$

либо две

$$-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2},\ -\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}. \tag{2.43}$$

Нетрудно убедиться, что для тройки прямых (3в) простое отношение трех точек имеет шесть различных значений (2.41) при $Q_0 \neq 0$ и только три различных значения (2.42) при $Q_0=0$; для тройки пересекающихся в несобственной точке различных собственных прямых, представляемой формой (2в), это отношение имеет лишь два различных значения (2.43).

6. Как установлено в § 1, кубические тройничные формы (и представляемые ими плоские линии 3-го порядка) в комплексной или в вещественной области разбиваются на бесконечное число непересекающихся проективных классов неособенных форм (линий, не имеющих особых точек) и конечное число непересекающихся проективных классов особенных форм (линий, обладающих особыми точками). Пользуясь результатами, полученными в пп. 2—5 настоящего параграфа, мы можем далее разбить каждый проективный класс на непересекающиеся аффинно-проективные подклассы, состоящие из форм (линий), находящихся в аффинно-проективной эквивалентности между собой, т. е. переводящихся друг в друга с помощью аффинно-проективных преобразований. Число аффинно-проективных подклассов, составляющих проективный класс, может быть и бесконечным, если они характеризуются значениями абсолютных алгебраических инвариантов. *Такого рода классификация кубических тройничных форм и представляемых ими плоских линий 3-го порядка в комплексной области* дается в нижеследующей таблице 1.

Таблица 1

| Кубические тройничные формы над полем комплексных чисел | | | | | Комплексные плоские линии 3-го порядка | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| проективные инварианты | аффинно-проективные инварианты | | | канонические виды | аффинно-проективные подклассы и их группы | | | проективные классы |
| (I) $0 \neq I \neq \frac{0}{0}$ | $r_0=2$, $r_{C_0}=2$ | $r_{C_1}=3$ | $\delta=0$ | (5а) | Без диаметра | С тремя асимптотами, не пересекающимися в одной точке | Центральные кубические гиперболы | Линии, не имеющие особых точек |
| | | | $\delta=1$ | (6а) | С одним диаметром | | | |
| | | | $\delta=3$ | (8а) | С тремя диаметрами | | | |
| | | $r_{C_1}=2$ | $\delta=0$ | (11а) | Без диаметра | С тремя асимптотами, пересекающимися в одной точке | | |
| | | | $\delta=1$ | (13а) | С одним диаметром | | | |
| | | | $\delta=3$ | (15а) | С тремя диаметрами | | | |
| | $r_0=2$, $r_{C_0}=1$ | | $\delta=0$ | (4б) | Без диаметра | Параболические гиперболы | | |
| | | | $\delta=1$ | (6б) | С одним диаметром | | | |
| | $r_0=1$, $r_{C_1}=2$ | | $I \neq \infty$ | (6в) | Ангармонические ($I \neq -1$) и эквиангармонические ($I=-1$) | Расходящиеся параболы | | |
| | | | $I=\infty$ | (9в) | Гармонические | | | |

Продолжение табл. 1

| Кубические тройничные формы над полем комплексных чисел | | | | Комплексные плоские линии 3-го порядка | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| проективные инварианты | аффинно-проективные инварианты | | | канонические виды | аффинно-проективные подклассы и их группы | | | проективные классы |
| (11) $I=0$, $r=3$, $r_{\mathfrak{S}}=4$ | $r_0=2$, $r_{C_0}=2$ | $r_{C_1}=3$ | $\delta=0$ | (5а) | Без диаметра | С тремя асимптотами, не пересекающимися в одной точке | Центральные кубические гиперболы | Нераспадающиеся линии с двойной точкой, в которой касательные различны |
| | | | $\delta=1$ | (6а) | С одним диаметром | | | |
| | | | $\delta=3$ | (9а) | С тремя диаметрами | | | |
| | | $r_{C_1}=2$ | $\delta=0$ | (11а) | Без диаметра | С тремя асимптотами, пересекающимися в одной точке | | |
| | | | $\delta=1$ | (14а) | С одним диаметром | | | |
| | $r_0=2$, $r_{C_0}=1$, $r_{C_1}=3$ | | $\delta=0$ | (4б) | Без диаметра | Параболические гиперболы | | |
| | | | $\delta=1$ | (7б) | С одним диаметром | | | |
| | $r_0=2$, $r_{C_0}=1$, $r_{C_1}=1$ | | $\delta=2$ | (13б) | Без диаметра | Гиперболизмы центральных конических сечений | | |
| | | | $\delta=3$ | (11б) | С одним диаметром | | | |
| | $r_0=1$, $r_{C_1}=2$ | | | (7в) | Расходящиеся параболы | | | |
| | $r_0=1$, $r_{C_1}=1$ | | | (11в) | Трезубцы | | | |

Продолжение табл. 1

| Кубические тройничные формы над полем комплексных чисел | | | Комплексные плоские линии 3-го порядка | |
|---|---|---|---|---|
| проективные инварианты | аффинно-проективные инварианты | канонические виды | аффинно-проективные подклассы и их группы | проективные классы |
| (III) $I=0$, $r=3$, $r_{\mathfrak{C}}=2$ | $r_0=2$, $r_{C_0}=2$: $r_{C_1}=3$ | (3а) | Центральное коническое сечение и собственная прямая, не проходящая через его центр | Совокупности конического сечения и прямой, пересекающей его в двух точках |
| | $r_0=2$, $r_{C_0}=2$: $r_{C_1}=2$ | (10а) | Центральное коническое сечение и собственная прямая, проходящая через его центр | |
| | $r_0=2$, $r_{C_0}=1$: $r_{C_1}=3$ | (3б) | Парабола и собственная прямая | |
| | $r_0=2$, $r_{C_0}=1$: $r_{C_1}=1$ | (14б) | Центральное коническое сечение и прямая асимптотического направления | |
| | $r_0=1$ | (10в) | Парабола и один из ее диаметров | |
| | $r_0=0$ | (1г) | Центральное коническое сечение и несобственная прямая | |
| (IV) $I=0$, $r=3$, $r_{\mathfrak{C}}=0$ | $r_0=2$: $r_{C_0}=2$ | (4а) | Три собственные прямые, попарно пересекающиеся в собственных точках | Совокупности трех прямых, не пересекающихся в одной точке |
| | $r_0=2$: $r_{C_0}=1$, | (8б) | Три собственные прямые, из которых две пересекаются в несобственной точке | |
| | $r_0=0$ | (2г) | Две собственные прямые и одна несобственная | |

Продолжение табл. 1

| Кубические тройничные формы над полем комплексных чисел | | | Комплексные плоские линии 3-го порядка | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| проективные инварианты | аффинно-проективные инварианты | канонические виды | аффинно-проективные подклассы и их группы | | | проективные классы |
| (V) $I=\frac{0}{0}$, $r=3$, $r_C=5$ | $r_0=2,\ r_{C_0}=2$; $r_{C_1}=3$, $\delta=0$ | (5а) | Без диаметра | С тремя асимптотами, не пересекающимися в одной точке | Центральные кубические гиперболы | Нераспадающиеся линии с двойной точкой, в которой касательные совпадают |
| | $r_0=2,\ r_{C_0}=2$; $r_{C_1}=3$, $\delta=1$ | (7а) | С одним диаметром | | | |
| | $r_0=2,\ r_{C_0}=2$; $r_{C_1}=2,\ \delta=0$ | (12а) | Без диаметра | С тремя асимптотами, пересекающимися в одной точке | | |
| | $r_0=2,\ r_{C_0}=1,\ r_{C_1}=3,\ \delta=0$ | (5б) | Без диаметра | Параболические гиперболы | | |
| | $r_0=2,\ r_{C_0}=1,\ r_{C_1}=1$; $\delta=2$ | (12б) | Без диаметра | Гиперболизмы параболы | | |
| | $r_0=2,\ r_{C_0}=1,\ r_{C_1}=1$; $\delta=3$ | (10б) | С одним диаметром | | | |
| | $r_0=1,\ r_{C_1}=2$, | (8в) | Расходящиеся параболы | | | |
| | $r_0=1,\ r_{C_1}=0$ | (12в) | Кубические параболы | | | |
| (VI) $I=\frac{0}{0}$, $r=3$, $r_C=4$ | $r_0=2,\ r_{C_0}=2$ | (2а) | Центральное коническое сечение и собственная прямая, не являющаяся его асимптотой | | | Совокупности конического сечения и прямой, касательной к нему |
| | $r_0=2$; $r_{C_0}=1,\ r_{C_1}=1$ | (9б) | Центральное коническое сечение и одна из его асимптот | | | |
| | $r_0=2$; $r_{C_0}=1,\ r_{C_1}=3$ | (2б) | Парабола и собственная прямая | | | |
| | $r_0=0$ | (3г) | Парабола и несобственная прямая | | | |

Продолжение табл. 1

| Кубические тройничные формы над полем комплексных чисел | | | Комплексные плоские линии 3-го порядка | |
|---|---|---|---|---|
| проективные инварианты | аффинно-проективные инварианты | канонические виды | аффинно-проективные подклассы и их группы | проективные классы |
| (VII) $I = \frac{0}{0}$, $r = 2$, $r_C = 2$ | $r_0 = 2$ | (1а) | Три собственные прямые, пересекающиеся в собственной точке | Совокупности трех различных прямых, пересекающихся в одной точке |
| | | | Простое отношение трех точек имеет: | |
| | $r_0 = 1$: $r_{C_2} = 0$ | (2в) | два различных значения, — Три собственные прямые, пересекающиеся в несобственной точке | |
| | $r_0 = 1$: $r_{C_2} = 1$, $Q_0 = 0$ | (4в) | три различных значения, — Три собственные прямые, пересекающиеся в несобственной точке | |
| | $r_0 = 1$: $r_{C_2} = 1$, $-4 \neq Q_0 \neq 0$ | (3в) | шесть различных значений — Три собственные прямые, пересекающиеся в несобственной точке | |
| | $r_0 = 0$ | (4г) | Две собственные прямые и одна несобственная | |
| (VIII) $I = \frac{0}{0}$, $r = 2$, $r_C = 1$ | $r_0 = 2$ | (1б) | Три собственные прямые, пересекающиеся в собственной точке | Совокупности трех прямых, из которых две совпадают |
| | $r_0 = 1$ | (5в) | Три собственные прямые, пересекающиеся в несобственной точке | |
| | $r_0 = 0$: $r_{C_2} = 1$ | (5г) | Несобственная прямая и пара совпадающих собственных прямых | |
| | $r_0 = 0$: $r_{C_2} = 0$ | (6г) | Собственная прямая и дважды взятая несобственная прямая | |
| (IX) $I = \frac{0}{0}$, $r = 1$ | $r_0 = 1$ | (1в) | Тройка совпадающих собственных прямых | Совокупности трех совпадающих прямых |
| | $r_0 = 0$ | (7г) | Трижды взятая несобственная прямая | |

Аффинно-проективная классификация кубических тройничных форм и представляемых ими плоских линий 3-го порядка в вещественной области производится аналогично (упражнение 9)[1]).

В таблице 1 канонические формы представляют аффинно-проективные подклассы или их группы. В последнем случае параметры канонических форм, как показано в п. 2, однозначно выражаются через их абсолютные алгебраические инварианты, вследствие чего каждой данной системе возможных значений этих инвариантов соответствует одна и только одна каноническая форма. Таким образом, фигурирующие в таблице инварианты

$$I,\ r,\ r_C,\ r_{\mathfrak{C}};$$

$$r_0,\ r_{C_0},\ r_{C_1},\ r_{C_2},\ \delta;\ I_0,\ I_1,\ I_2,\ J_0,\ J_1,\ J_2,\ Q,\ Q_0$$

составляют полную систему инвариантов кубической тройничной формы над полем комплексных чисел по отношению к группе всех комплексных аффинно-проективных преобразований.

Присоединяя к этой системе инвариант $\omega(T)$ и сигнатуры $\sigma_C$, $\sigma_{\mathfrak{C}}$, $\sigma_{C_0}$, $\sigma_{C_2}$ матриц $C$, $\mathfrak{C}$, $C_0$, $C_2$, получим, используя результаты упражнения 9, полную систему инвариантов кубической тройничной формы над полем вещественных чисел по отношению к группе всех вещественных аффинно-проективных преобразований.

### Упражнения

1. Доказать, что в общем случае $I+1=\dfrac{I_0^3}{I_1^2}$,

$$J_0=\frac{8I_1(3I_0^2+6I_0I_2-8I_1)}{(3I_0^2+3I_0I_2-8I_1)^2},\qquad J_1=\frac{54I_2^3}{64(1-I_2)^3-[3(I_0+I_2)^2-4(2I_1+3I_2-2)]^2},$$

$$J_2=\frac{3I_0^2+3I_0I_2-8I_1}{3I_0^2+6I_0I_2-8I_1}.$$

2. У форм, обладающих абсолютным инвариантом $Q$, определяемым формулой (2.31), инварианты $I_0$, $I_1$, $I_2$, $J_0$ имеют неопределенный вид $\frac{0}{0}$, а инварианты $J_1$ $J_2$ равны $\infty$. Доказать.

3. У форм, обладающих абсолютным инвариантом $Q_0$, определяемым формулой (2.33), инварианты $I$, $I_0$, $I_1$, $I_2$, $J_0$, $J_1$, $J_2$ имеют неопределенный вид $\frac{0}{0}$. Доказать.

4. Показать, что в случаях (a), когда $r_0=2$, $r_{C_0}=2$, $\sigma_{C_0}=0$, и (a′), когда $r_0=2$, $r_{C_0}=2$, $\sigma_{C_0}=-2$, имеют место следующие вещественные канонические формы. При $r=2$:

$$\left.\begin{array}{lll}(1\text{a}) & X_1^3+X_2^3, & \text{если}\quad \sigma_C=0,\\ (1\text{a}') & 3X_1^2X_2-X_2^3, & \text{если}\quad \sigma_C=-2\end{array}\right\}\ \text{и если}\ r_C=2.$$

---

[1]) Чрезвычайное обилие и разнообразие открытых и изученных линий 3-го порядка вызывает в настоящее время, по замечанию Д. М. Синцова [23], потребность не столько в установлении новых индивидуальных кривых, сколько в более полной систематизации уже изученного материала. Вопросу классификации линий 3-го порядка посвящены работы Ньютона [168], Стирлинга [217], Мардоча [166], Эйлера [74], Плюккера [189], Шаля [59], Мёбиуса [165], Кэли [55, 56], к которым примыкают более новые исследования по этому вопросу В. П. Вельмина [5], И. И. Белянкина [2], А. А. Адамова [1], Барингтона [48], С. А. Богомолова [3], Е. С. Столовой [38], Н. А. Никулина [21] и других геометров. Данные этими авторами классификации линий 3-го порядка исходят непосредственно из тех или иных геометрических свойств и потому до известной степени произвольны. В отличие от них приведенная в упражнении 9 схема рассматривается как геометрическая интерпретация результатов классификации кубических тройничных форм, данной автором в статьях [31, 35].

При $r=3$, $r_{C_1}=3$:

$$\begin{array}{ll} (2a) & 3X_1^2X_2+X_2^3+3X_2^2X_3, \\ (2a') & 3X_1^2X_2-X_2^3+3X_2^2X_3, \end{array} \Bigg\} \text{ если } I=\frac{0}{0}, \quad r_C=4.$$

$$\left.\begin{array}{ll} (3a) & 3X_1^2X_2+X_2^3+3X_2^2X_3-\frac{9}{4}\sqrt{I_0}X_2X_3^2 \ (0<I_0<+\infty), \\ (3a') & 3X_1^2X_2-X_2^3+3X_2^2X_3-\frac{9}{4}\sqrt{I_0}X_2X_3^2 \begin{pmatrix} 0<I_0<1 \\ \text{или} \\ 1<I_0<+\infty \end{pmatrix}, \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{если } I=0, \\ \omega(T)=+1, \\ r_{\mathfrak{C}}=2, \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{ll} (4a) & 3X_1^2X_2+X_2^3+3X_2^2X_3+\frac{9}{4}\sqrt{I_0}X_2X_3^2 \begin{pmatrix} 0<I_0<1 \\ \text{или} \\ 1<I_0<+\infty \end{pmatrix}, \\ & \text{если } \sigma_{\mathfrak{C}}=2\,(0<I_0<1) \text{ или } \sigma_{\mathfrak{C}}=-2\,(1<I_0<+\infty), \\ (4a') & 3X_1^2X_2-X_2^3+3X_2^2X_3+\frac{9}{4}\sqrt{I_0}X_2X_3^2 \ (0<I_0<+\infty), \\ & \text{если } \sigma_{\mathfrak{C}}=2. \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{и если } I=0, \\ \omega(T)=-1, \\ r_{\mathfrak{C}}=2. \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{ll} (5a) & 3X_1^2X_2+X_2^3+3X_2^2X_3+\frac{9}{4}X_2X_3^2, \text{ если } \omega(T)=-1, \\ (5a') & 3X_1^2X_2-X_2^3+3X_2^2X_3-\frac{9}{4}X_2X_3^2, \text{ если } \omega(T)=+1 \end{array}\right\} \text{ и если } I=0, \ r_{\mathfrak{C}}=0.$$

$$\begin{array}{ll} (6a) & 3X_1^2X_2+X_2^3+3X_2^2X_3+3nX_1X_3^2+3pX_2X_3^2+qX_3^3, \\ (6a') & 3X_1^2X_2-X_2^3+3X_2^2X_3+3nX_1X_3^2+3pX_2X_3^2+qX_3^3, \end{array} \Bigg\} \text{ если } \delta=0$$

$$\left(I \gtrless 0 \text{ или } I=0 \text{ при } \omega(T)=\pm 1 \text{ и } r_{\mathfrak{C}}=4, \text{ или } I=\frac{0}{0} \text{ при } r_C=5\right),$$

причем $p=\pi+\frac{3}{4}\eta$, $q=\frac{3}{16}[8\pi\eta-3(I_0+I_2)+6]$, $n=\sqrt{\eta\left[\pi^2-\frac{9}{16}(1-I_2)\right]}$, где $\pi$ определяется из уравнения $\pi^3-\frac{27}{64}(1-I_2)\pi-\frac{27}{256}N\eta=0$ ($\eta=+1$ в случае (a) и $\eta=-1$ в случае (a′)) как единственный вещественный корень в случае (a) или удовлетворяющий условию $\omega(\pi)=-\omega(N)$ в случае (a′), где $N=I_1+\frac{3}{2}I_2-\frac{3}{8}(I_0+I_2)^2-1$.

$$\left.\begin{array}{ll} (7a) & 3X_1^2X_2+X_2^3+3X_2^2X_3+\frac{9}{4}(1+\sqrt[3]{N})X_2X_3^2+ \\ & +\frac{9}{8}\left(1+\sqrt[3]{N}-\frac{I_0+I_2}{2}\right)X_3^3, \\ (7a') & 3X_1^2X_2-X_2^3+3X_2^2X_3-\frac{9}{4}(1+\sqrt[3]{N})X_2X_3^2+ \\ & +\frac{9}{8}\left(1+\sqrt[3]{N}-\frac{I_0+I_2}{2}\right)X_3^3, \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{если } \delta=1 \ (I \lessgtr 0 \text{ или } I=0 \text{ при} \\ \omega(T)=\pm 1 \text{ и } r_{\mathfrak{C}}=4), \end{array}$$

причем $N^2=(1-I_2)^3$ и $0\neq N\neq\frac{(I_0+I_2-2)^3}{8}$.

$$\begin{array}{ll} (8a) & 3X_1^2X_2+X_2^3-3X_1^2X_3, \\ (8a') & 3X_1^2X_2-X_2^3+3X_1^2X_3, \end{array} \Bigg\} \text{ если } I=\frac{0}{0}, \quad r_C=5, \quad \delta=1.$$

$$\left.\begin{array}{ll} (9a) & X_1^3+X_2^3+X_3^3+\frac{6}{\sqrt[3]{1-9I_0}}X_1X_2X_3, \\ (9a') & 3X_1^2X_2-X_2^3+3X_2^2X_3-\frac{9}{4}X_2X_3^2+\frac{9}{16}(1-I_0)X_3^3, \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{если } I\gtrless 0, \ \delta=3 \\ \left(1\neq I_0\neq\frac{1}{9}\right). \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{ll} (10a) & X_1^3+X_2^3+6X_1X_2X_3, \text{ если } \omega(T)=+1, \\ (10a') & 3X_1^2X_2-X_2^3+3X_2^2X_3-\frac{9}{4}X_2X_3^2+\frac{1}{2}X_3^3, \text{ если } \omega(T)=-1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{и если } I=0, \\ r_{\mathfrak{C}}=4, \ \delta=3. \end{array}$$

При $r=3$, $r_{C_1}=2$:

$$\left.\begin{array}{ll}(11a) & 3X_1^2X_2+X_2^3-3X_2X_3^2,\\ (11a') & 3X_1^2X_2-X_2^3-3X_2X_3^2,\end{array}\right\}\text{ если } I=0,\ \omega(T)=+1,\ r_{\mathfrak{C}}=2.$$

$$\left.\begin{array}{ll}(12a) & 3X_1^2X_2+X_2^3+3X_2X_3^2,\text{ если } \sigma_{\mathfrak{C}}=-2,\\ (12a') & 3X_1^2X_2-X_2^3+3X_2X_3^2,\text{ если } \sigma_{\mathfrak{C}}=+2\end{array}\right\}\text{ и если } r_{\mathfrak{C}}=2,\ I=0,\ \omega(T)=-1.$$

$$\left.\begin{array}{ll}(13a) & 3X_1^2X_2+X_2^3+3X_1X_3^2+3pX_2X_3^2+qX_3^3,\\ & \text{если } I\gtrless 0 \text{ или } I=0 \text{ при } \omega(T)=\pm 1,\\ (13a') & 3X_1^2X_2-X_2^3+3X_1X_3^2+3pX_2X_3^2+qX_3^3,\\ & \text{если } I\lessgtr 0 \text{ или } I=0 \text{ при } \omega(T)=+1\end{array}\right\}\text{ и если } r_{\mathfrak{C}}=4,\ \delta=0,$$

причем в случае (a) $p=-\sqrt{\pi}\omega(J_0+1)$, $q=+\sqrt[4]{-\frac{4(3\pi+1)^2}{L}}$ $(L<0)$, где $\pi$ — единственный неотрицательный корень уравнения

$$L\pi^3+3(2L+3L_0)\pi^2+3(3L+2L_0)\pi+L_0=0,$$

а в случае (a′) $p=+\sqrt{\pi}\omega\left(\frac{J_0+1}{\pi-3}\right)$, $q=+\sqrt[4]{\frac{4(3\pi-1)^2}{L}}$ $(L>0)$, где $\pi$ — наименьший корень уравнения

$$L\pi^3-3(2L+3L_0)\pi^2+3(3L+2L_0)\pi-L_0=0,$$

у которого все корни вещественны и неотрицательны

$$(L=IJ_0^2-2J_0-1,\qquad L_0=(J_0+1)^2).$$

$$(14a)\qquad X_1^3+X_2^3+3X_2^2X_3,\qquad \text{если } I=\frac{0}{0},\quad r_C=5,\quad \delta=0.$$

$$\left.\begin{array}{ll}(15a) & 3X_1^2X_2+X_2^3-3X_2X_3^2\operatorname{sig}(J_0+1)+\sqrt{\frac{2}{|J_0+1|}}X_3^3,\\ (15a') & 3X_1^2X_2-X_2^3+3X_2X_3^2\operatorname{sig}(J_0+1)+\sqrt{\frac{2}{|J_0+1|}}X_3^3\end{array}\right\}\begin{array}{l}\left(-1\neq J_0\neq-\frac{1}{2}\right),\text{ если}\\ 0\neq I\neq\frac{0}{0},\ I>-1,\ \delta=1.\end{array}$$

$$\left.\begin{array}{ll}(16a) & 3X_1^2X_2+X_2^3-3X_2X_3^2+2X_3^3,\text{ если } \omega(T)=-1,\\ (16a') & 3X_1^2X_2-X_2^3+3X_2X_3^2+2X_3^3,\text{ если } \omega(T)=+1\end{array}\right\}\text{ и если } I=0,\ r_{\mathfrak{C}}=4,\ \delta=1.$$

$$\left.\begin{array}{ll}(17a) & X_1^3+X_2^3+X_3^3,\text{ если } \omega(T)=-1,\\ (17a') & 3X_1^2X_2-X_2^3+X_3^3,\text{ если } \omega(T)=+1\end{array}\right\}\text{ и если } I=-1,\ \delta=3$$

(см. [35]).

5. Показать, что в случае (б), когда $r_0=2$, $r_{C_0}=1$, имеют место следующие канонические формы. При $r=2$:

$$(1б)\qquad 3X_1^2X_2,\ \text{если } r_C=1.$$

При $r=3$, $r_{C_1}=3$:

$$(2б)\qquad 3X_1^2X_2+3X_2^2X_3,\ \text{если } I=\frac{0}{0},\ r_C=4.$$

$$(3б)\qquad 3X_1^2X_2+3X_2^2X_3+3X_2X_3^2,\ \text{если } I=0,\ \omega(T)=-1,\ r_{\mathfrak{C}}=2,\ \sigma_{\mathfrak{C}}=2.$$

$$(4б)\qquad 3X_1^2X_2+3X_2^2X_3-3X_2X_3^2,\ \text{если } I=0,\ \omega(T)=+1,\ r_{\mathfrak{C}}=2.$$

$$(5б)\qquad 3X_1^2X_2+3X_2^2X_3+3X_1X_3^2+3pX_2X_3^2+qX_3^3,\ \text{если } I\gtrless 0$$

или $I=0$ (при $\omega(T)=\pm 1$, $r_{\mathfrak{C}}=4$), $\delta=0$, причем $p$ и $q$ определяются формулами (2.26), если $J_1=0$, или (2.26′), если $J_1\neq 0$ при определенном конечном значении $J_2$, или (2.26″), если $J_1\neq 0$, при $J_2=\pm\infty$.

$$(6б)\qquad X_1^3+3X_1^2X_2+3X_2^2X_3,\ \text{если } I=\frac{0}{0},\ r_C=5,\ \delta=0.$$

(7б) $3X_1^2X_2+3X_2^2X_3+3pX_2X_3^2+qX_3^3$, если $\frac{0}{0}\neq I\gtrless 0$, $\delta=1$,

причем $p=0$ и $q=-\operatorname{sig} I$, если $J_2=\frac{0}{0}$, или $p=+\sqrt{\frac{3}{|J_2+1|}}\operatorname{sig}|C_2|$ и $q=\operatorname{sig}(J_2+1)$, если $J_2\neq\frac{0}{0}$ (в этом случае $J_2+1\neq 0$ и детерминант $|C_2|$, отличный от нуля, сохраняет знак при вещественных аффинно-проективных преобразованиях).

(8б) $3X_1^2X_2+3X_2^2X_3+3X_1^2X_3$, если $\omega(T)=-1$,
(9б) $3X_1^2X_2+3X_2^2X_3-3X_1^2X_3$, если $\omega(T)=+1$ } и если $I=0$, $r_{\mathfrak{C}}=4$, $\delta=1$.

При $r=3$, $r_{C_1}=1$:

(10б) $3X_1^2X_2+3X_2X_3^2$, если $\omega(T)=-1$,
(11б) $3X_1^2X_2-3X_2X_3^2$, если $\omega(T)=+1$ } и если $I=0$, $r_{\mathfrak{C}}=0$.

(12б) $3X_1^2X_2+3X_1X_3^2$, если $I=\frac{0}{0}$, $r_C=4$.

(13б) $3X_1^2X_2+X_3^3$, если $I=\frac{0}{0}$, $r_C=5$, $\delta=3$.

(14б) $3X_1^2X_2+3X_2X_3^2+X_3^3$, если $\omega(T)=-1$,
(15б) $3X_1^2X_2-3X_2X_3^2+X_3^3$, если $\omega(T)=+1$ } и если $I=0$, $r_{\mathfrak{C}}=4$, $\delta=3$.

(16б) $3X_1^2X_2+3X_1X_3^2+X_3^3$, если $I=\frac{0}{0}$, $r_C=5$, $\delta=2$.

(17б) $3X_1^2X_2+3X_1X_3^2+3X_2X_3^2+\sqrt{|Q|}\,X_3^3$, если $\omega(T)=-1$,
(18б) $3X_1^2X_2+3X_1X_3^2-3X_2X_3^2+\sqrt{|Q|}\,X_3^3$, если $\omega(T)=+1$ } и если $I=0$, $r_{\mathfrak{C}}=4$, $\delta=2$,

причем $Q$ выражается формулой (2.31) и $|Q|\neq 9$.

(19б) $3X_1^2X_2+3X_1X_3^2+6X_1X_2X_3$, если $I=0$, $\omega(T)=+1$, $r_{\mathfrak{C}}=2$, $\delta=2\,(|Q|-9)$

(см. [35]).

6. Показать, что в случае (в), когда $r_0=1$, имеют место следующие вещественные канонические формы. При $r=1$:

(1в) $X_1^3$.

При $r=2$, $r_C=2$:

(2в) $X_2^3+X_3^3$, если $\sigma_C=0$, $r_{C_2}=0$.

(3в) $X_2^3+3X_2X_3^2+\sqrt{|Q_0|}\,X_3^3$, если $\sigma_{C_2}=+1$, $\sigma_C=0$ при $0\neq|Q_0|\neq 4$,
(4в) $X_2^3-3X_2X_3^2+\sqrt{|Q_0|}\,X_3^3$, если $\sigma_{C_2}=-1$, $\sigma_C=0$ при $|Q_0|>4$
или $\sigma_C=-2$ при $4>|Q_0|>0$ } и если $r_{C_2}=1$,

причем $Q_0$ выражается формулой (2.33)

(5в) $X_2^3+3X_2X_3^2$, если $\sigma_{C_2}=+1$, $\sigma_C=0$,
(6в) $X_2^3-3X_2X_3^2$, если $\sigma_{C_2}=-1$, $\sigma_C=-2$ } и если $r_{C_2}=1$ $(Q_0=0)$.

При $r=2$, $r_C=1$:

(7в) $X_2^3+3X_2^2X_3$ $(|Q_0|=4)$.

При $r=3$, $r_{C_1}=2$:

(8в) $X_1^3+3X_2^2X_3-3\sqrt[3]{\frac{I+1}{4}}\,X_1X_3^2-\omega(T)\,X_3^3$ $\left(I\gtrless 0,\ \frac{0}{0}\neq I\neq\pm\infty\right)$.

(9в) $X_1^3+3X_1^2X_3+3X_2^2X_3$, если $\omega(T)=-1$,
(10в) $X_1^3-3X_1^2X_3+3X_2^2X_3$, если $\omega(T)=+1$ } и если $I=0$, $r_{\mathfrak{C}}=4$.

(11в) $X_1^3+3X_2^2X_3$, если $I=\frac{0}{0}$, $r_C=5$.

(12в) $X_1^3+3X_1X_3^2+3X_2^2X_3$, если $I=-\infty$.

(13в) $X_1^3-3X_1X_3^2+3X_2^2X_3$, если $I=+\infty$.

При $r=3$, $r_{C_1}=1$:

(14в) $X_1^3+6X_1X_2X_3$, если $I=0$, $\omega(T)=+1$, $r_{\mathfrak{C}}=2$.

(15в) $X_2^3+X_3^3+6X_1X_2X_3$, если $I=0$, $\omega(T)=+1$, $r_{\mathfrak{C}}=4$.

При $r=3$, $r_{C_1}=0$:

(16в) $X_1^3+3X_2X_3^2$, если $I=\frac{0}{0}$, $r_C=5$

(см. [35]).

7. Показать, что в случае (г), когда $r_0=0$, имеют место следующие канонические формы. При $r=3$:

$$\left.\begin{array}{ll}(1г) & 3X_1^2X_3+3X_2^2X_3+X_3^3, \text{ если } r_{\mathfrak{C}}=2,\ \sigma_{\mathfrak{C}}=-2,\\ (2г) & 3X_1^2X_3+3X_2^2X_3-X_3^3, \text{ если } r_{\mathfrak{C}}=2,\ \sigma_{\mathfrak{C}}=+2,\\ (3г) & 3X_1^2X_3+3X_2^2X_3, \text{ если } r_{\mathfrak{C}}=0\end{array}\right\} \text{ и если } I=0,\ \omega(T)=-1.$$

$$\left.\begin{array}{ll}(4г) & 6X_1X_2X_3+X_3^3, \text{ если } r_{\mathfrak{C}}=2,\\ (5г) & 6X_1X_2X_3, \text{ если } r_{\mathfrak{C}}=0\end{array}\right\} \text{ и если } I=0,\ \omega(T)=+1.$$

(6г) $3X_1X_3^2+3X_2^2X_3$, если $I=\frac{0}{0}$, $r_C=4$.

При $r=2$:

$$\left.\begin{array}{ll}(7г) & 3X_2^2X_3+X_3^3, \text{ если } \sigma_C=0,\\ (8г) & 3X_2^2X_3-X_3^3, \text{ если } \sigma_C=-2\end{array}\right\} \text{ и если } r_C=2.$$

$$\left.\begin{array}{ll}(9г) & 3X_2^2X_3, \text{ если } r_{C_2}=1,\\ (10г) & 3X_2X_3^2, \text{ если } r_{C_2}=0\end{array}\right\} \text{ и если } r_C=1.$$

При $r=1$:

(11г) $X_3^3$

(см. [35]).

8. В вещественной области каждому значению инварианта $Q_0$ (см. упражнение 6) соответствует простое отношение трех точек пересечения какой-нибудь вещественной прямой с пересекающейся в несобственной точке тройкой различных собственных прямых, представляемой канонической формой (3в) или (4в). Все прямые тройки (4в) вещественны, если $0 \leqq |Q_0| < 4$, и две из них — мнимые сопряженные, если $|Q_0| > 4$; у тройки (3в), где $|Q_0| \neq 4$, две прямые — мнимые сопряженные. Доказать, что

α) для тройки (4в) простое отношение трех точек (при всех изменениях их порядка) имеет шесть различных значений, вещественных при $0 < |Q_0| < 4$ и мнимых, попарно сопряженных при $|Q_0| > 4$, так же как шесть различных мнимых, попарно сопряженных значений имеет это отношение для тройки (3в), если $Q_0 \neq 0$, причем в случае мнимых значений будет $\frac{2}{3}\pi < \Omega < \pi$ для тройки (4в) и $0 < \Omega < \frac{2}{3}\pi$ для тройки (3в), где $\Omega$ — абсолютная величина взятого в промежутке $(-\pi, +\pi)$ главного значения аргумента мнимого отношения, модуль которого равен 1;

β) для троек (3в) и (4в) при $Q_0=0$ простое отношение трех точек имеет только три различных значения: $1$, $-2$, $-\frac{1}{2}$ (см. [35]).

9. Пользуясь результатами упражнений 4—8, показать, что в вещественной области разбиение проективных классов кубических тройничных форм и представляемых ими плоских линий 3-го порядка на аффинно-проективные подклассы может быть произведено следующим образом (см. [35]):

| Кубические тройничные формы над полем вещественных чисел | | | | | Вещественные плоские линии 3-го порядка | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| проективные инварианты | аффинно-проективные инварианты | | | канонические виды | аффинно-проективные подклассы и их группы | | | проективные классы |
| (I) $I>0$ | $r_0=2,\ r_{C_0}=2,\ \sigma_{C_0}=-2$ | $r_{C_1}=3$ | $\delta=0$ | (5a′) | Без диаметра | С тремя асимптотами, образующими треугольник | Избыточные гиперболы | Линии, которые не имеют особых точек и у которых пучок касательных с общей тангенциальной точкой состоит либо из четырех вещественных прямых, либо из двух пар мнимых сопряженных прямых |
| | | | $\delta=1$ | (7a′) | С одним диаметром | | | |
| | | | $\delta=3$ | (9a′) | С тремя диаметрами | | | |
| | | $r_{C_1}=2$ | $\delta=0$ | (13a′) | Без диаметра | С тремя асимптотами, пересекающимися в одной точке | | |
| | | | $\delta=1$ | (15a′) | С одним диаметром | | | |
| | $r_0=2,\ r_{C_0}=2,\ \sigma_{C_0}=0$ | $r_{C_1}=3$ | $\delta=0$ | (6a) | Без диаметра | С тремя асимптотами (из которых две — мнимые сопряженные), образующими треугольник | Недостаточные гиперболы | |
| | | | $\delta=1$ | (7a) | С одним диаметром | | | |
| | | | $\delta=3$ | (9a) | С тремя диаметрами (из которых два — мнимые сопряженные) | | | |
| | | $r_{C_1}=2$ | $\delta=0$ | (13a) | Без диаметра | С тремя асимптотами (из которых две — мнимые сопряженные), пересекающимися в одной точке | | |
| | | | $\delta=1$ | (15a) | С одним диаметром | | | |
| | $r_0=2,\ r_{C_0}=1$ | | $\delta=0$ | (5б) | Без диаметра | Параболические гиперболы | | |
| | | | $\delta=1$ | (7б) | С одним диаметром | | | |
| | $r_0=1,\ r_{C_1}=2$ | | $I\neq+\infty$ | (8в) | Сложные ангармонические | Расходящиеся параболы | | |
| | | | $I=+\infty$ | (13в) | Сложные гармонические | | | |
| | $r_0=2,\ r_{C_0}=2,\ \sigma_{C_0}=-2$ | $r_{C_1}=3$ | $\delta=0$ | (6a′) | Без диаметра | С тремя асимптотами, образующими треугольник | Избыточные гиперболы | |
| | | | $\delta=1$ | (7a′) | С одним диаметром | | | |
| | | | $\delta=3$ | (9a′) | С тремя диаметрами | | | |
| | | $r_{C_1}=2$ | $\delta=0$ | (13a′) | Без диаметра | С тремя асимптотами, пересекающимися в одной точке | | |
| | | | $\delta=1$ | (15a′) | С одним диаметром | | | |
| | | | $\delta=3$ | (17a′) | С тремя диаметрами | | | |

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (II) $I < 0$ | $r_0 = 2,\ r_{C_0} = 2,\ \sigma_{C_0} = 0$ | $r_{C_1} = 3$ | $\delta = 0$ | (6a) | Без диаметра | С тремя асимптотами (из которых две — мнимые сопряженные), образующими треугольник | Недостаточные гиперболы | Линии, которые не имеют особых точек и у которых пучок касательных с общей тангенциальной точкой состоит из двух вещественных и двух мнимых сопряженных прямых |
| | | | $\delta = 1$ | (7a) | С одним диаметром | | | |
| | | | $\delta = 3$ | (9a) | С тремя диаметрами (из которых два — мнимые сопряженные) | | | |
| | | $r_{C_1} = 2$ | $\delta = 0$ | (13a) | Без диаметра | С тремя асимптотами (из которых две — мнимые сопряженные), пересекающимися в одной точке | | |
| | | | $\delta = 1$ | (15a) | С одним диаметром | | | |
| | | | $\delta = 3$ | (17a) | С тремя диаметрами (из которых два — мнимые сопряженные) | | | |
| | $r_0 = 2,\ r_{C_0} = 1$ | | $\delta = 0$ | (5б) | Без диаметра | Параболические гиперболы | | |
| | | | $\delta = 1$ | (7б) | С одним диаметром | | | |
| | $r_0 = 1,\ r_{C_1} = 2$ | | $I \neq -\infty$ | (8в) | Простые ангармонические ($I \neq -1$) и эквиангармонические ($I = -1$) | Расходящиеся параболы | | |
| | | | $I = -\infty$ | (12в) | Простые гармонические | | | |
| (III) $I = 0$, $\omega(T) = +1$, $r = 3$, $r_{\mathfrak{C}} = 4$ | $r_0 = 2,\ r_{C_0} = 2,\ \sigma_{C_0} = -2$ | $r_{C_1} = 3$ | $\delta = 0$ | (6a′) | Без диаметра | С тремя асимптотами, образующими треугольник | Избыточные гиперболы | Линии с узловой точкой |
| | | | $\delta = 1$ | (7a′) | С одним диаметром | | | |
| | | $r_{C_1} = 2$ | $\delta = 0$ | (13a′) | Без диаметра | С тремя асимптотами, пересекающимися в одной точке | | |
| | | | $\delta = 1$ | (16a′) | С одним диаметром | | | |
| | $r_0 = 2,\ r_{C_0} = 2,\ \sigma_{C_0} = 0$ | $r_{C_1} = 3$ | $\delta = 0$ | (6a) | Без диаметра | С тремя асимптотами (из которых две — мнимые сопряженные), образующими треугольник | Недостаточные гиперболы | |
| | | | $\delta = 1$ | (7a) | С одним диаметром | | | |
| | | | $\delta = 3$ | (10a) | С тремя диаметрами (из которых два — мнимые сопряженные) | | | |

Продолжение

| Кубические тройничные формы над полем вещественных чисел: проективные инварианты | аффинно-проективные инварианты | канонические виды | Вещественные плоские линии 3-го порядка: аффинно-проективные подклассы и их группы | | | проективные классы |
|---|---|---|---|---|---|---|
| (III) $I=0$, $\omega(T)=+1$, $r=3$, $r_{\mathfrak{C}}=4$ | $r_0=2,\ r_{C_0}=2,\ \sigma_{C_0}=0$; $r_{C_1}=2,\ \delta=0$ | (13а) | Без диаметра | С тремя асимптотами (из которых две — мнимые сопряженные), пересекающимися в одной точке | Недостаточные гиперболы | Линии с узловой точкой |
| | $r_0=2,\ r_{C_0}=1,\ r_{C_1}=3$; $\delta=0$ | (5б) | Без диаметра | Параболические гиперболы | | |
| | $\delta=1$ | (9б) | С одним диаметром | | | |
| | $r_0=2,\ r_{C_0}=1,\ r_{C_1}=1$; $\delta=2$ | (18б) | Без диаметра | Гиперболизмы гиперболы | | |
| | $\delta=3$ | (15б) | С одним диаметром | | | |
| | $r_0=1,\ r_{C_1}=2$ | (10в) | Расходящиеся параболы | | | |
| | $r_0=1,\ r_{C_1}=1$ | (15в) | Трезубцы | | | |
| | $r_0=2,\ r_{C_0}=2,\ \sigma_{C_0}=-2,\ r_{C_1}=3$; $\delta=0$ | (6а′) | Без диаметра | С тремя асимптотами, образующими треугольник | Избыточные гиперболы | |
| | $\delta=1$ | (7а′) | С одним диаметром | | | |
| | $\delta=3$ | (10а′) | С тремя диаметрами | | | |
| (IV) $I=0$, $\omega(T)=-1$, $r=3$, $r_{\mathfrak{C}}=4$ | $r_0=2,\ r_{C_0}=2,\ \sigma_{C_0}=0$; $r_{C_1}=3$; $\delta=0$ | (6а) | Без диаметра | С тремя асимптотами (из которых две — мнимые сопряженные), образующими треугольник | Недостаточные гиперболы | Линии с изолированной точкой |
| | $\delta=1$ | (7а) | С одним диаметром | | | |
| | $r_{C_1}=2$; $\delta=0$ | (13а) | Без диаметра | С тремя асимптотами (из которых две — мнимые сопряженные), пересекающимися в одной точке | | |
| | $\delta=1$ | (16а) | С одним диаметром | | | |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | $r_0=2,\ r_{C_0}=1,\ r_{C_1}=3$, $\delta=0$ | (5б) | **Без диаметра** — Параболические гиперболы | |
| | $r_0=2,\ r_{C_0}=1,\ r_{C_1}=3$, $\delta=1$ | (8б) | С одним диаметром — Параболические гиперболы | |
| | $r_0=2,\ r_{C_0}=1,\ r_{C_1}=1$, $\delta=2$ | (17б) | Без диаметра — Гиперболизмы эллипса | |
| | $r_0=2,\ r_{C_0}=1,\ r_{C_1}=1$, $\delta=3$ | (14б) | С одним диаметром — Гиперболизмы эллипса | |
| | $r_0=1,\ r_{C_1}=2$ | (9в) | Расходящиеся параболы | |
| (V) $I=0$, $\omega(T)=+1$, $r=3$, $r_{\mathfrak{C}}=2$ | $r_0=2,\ r_{C_0}=2,\ \sigma_{C_0}=0$, $r_{C_1}=3$ | (3а) | Эллипс и прямая, не проходящая через его центр | Совокупности конического сечения и прямой, пересекающей его в двух вещественных точках |
| | $r_0=2,\ r_{C_0}=2,\ \sigma_{C_0}=0$, $r_{C_1}=2$ | (11а) | Эллипс и прямая, проходящая через его центр | |
| | $r_0=2,\ r_{C_0}=2,\ \sigma_{C_0}=-2,\ r_{C_1}=3$, $0<I_0<1$ | (3а′) | Гипербола и прямая (не асимптотического направления), пересекающая только одну ветвь гиперболы | |
| | $r_0=2,\ r_{C_0}=2,\ \sigma_{C_0}=-2,\ r_{C_1}=3$, $1<I_0<+\infty$ | (3а′) | Гипербола и прямая, не проходящая через центр гиперболы и пересекающая обе ее ветви | |
| | $r_0=2,\ r_{C_0}=2,\ \sigma_{C_0}=-2,\ r_{C_1}=2$ | (11а′) | Гипербола и прямая, проходящая через ее центр | |
| | $r_0=2,\ r_{C_0}=1,\ r_{C_1}=1$ | (19б) | Гипербола и прямая асимптотического направления | |
| | $r_0=2,\ r_{C_0}=1,\ r_{C_1}=3$ | (4б) | Парабола и прямая, не являющаяся ее диаметром | |
| | $r_0=1$ | (14в) | Парабола и один из ее диаметров | |
| | $r_0=0$ | (4г) | Гипербола и несобственная прямая | |
| (VI) $I=0$, $\omega(T)=-1$, $r=3$, $r_{\mathfrak{C}}=2$, $\sigma_{\mathfrak{C}}=2$ | $r_0=2,\ r_{C_0}=2,\ \sigma_{C_0}=0\ (0<I_0<1)$ | (4а) | Эллипс и собственная прямая | Совокупности конического сечения и прямой, пересекающей его в двух мнимых сопряженных точках |
| | $r_0=2,\ r_{C_0}=2,\ \sigma_{C_0}=-2$, $r_{C_1}=3$ | (4а′) | Гипербола и собственная прямая, не проходящая через ее центр | |
| | $r_0=2,\ r_{C_0}=2,\ \sigma_{C_0}=-2$, $r_{C_1}=2$ | (12а′) | Гипербола и прямая, проходящая через ее центр | |
| | $r_0=2,\ r_{C_0}=1$ | (3б) | Парабола и собственная прямая | |
| | $r_0=0$ | (2г) | Эллипс и несобственная прямая | |
| (VII) $I=0$, $\omega(T)=-1$, $r=3$, $r_{\mathfrak{C}}=2$, $\sigma_{\mathfrak{C}}=-2$ | $r_0=2,\ r_{C_0}=2,\ \sigma_{C_0}=0$, $r_{C_1}=3\ (1<I_0<+\infty)$ | (4а) | Мнимый эллипс и собственная прямая, не проходящая через его центр | Совокупности мнимого конического сечения и прямой, пересекающей его в двух мнимых сопряженных точках |
| | $r_0=2,\ r_{C_0}=2,\ \sigma_{C_0}=0$, $r_{C_1}=2$ | (12а) | Мнимый эллипс и прямая, проходящая через его центр | |
| | $r_0=0$ | (1г) | Мнимый эллипс и несобственная прямая | |

Продолжение

| Кубические тройничные формы над полем вещественных чисел: проективные инварианты | аффинно-проективные инварианты | канонические виды | Вещественные плоские линии 3-го порядка: аффинно-проективные подклассы и их группы | проективные классы |
|---|---|---|---|---|
| (VIII) $I=0$, $\omega(T)=+1$, $r=3$, $r_{\mathfrak{S}}=0$ | $r_0=2$, $r_{C_0}=2$ $(I_0=1)$ | (5а′) | Три собственные прямые, попарно пересекающиеся в собственных точках | Тройки прямых, образующих треугольник |
| | $r_0=2$, $r_{C_0}=1$ | (11б) | Три собственные прямые, из которых две пересекаются в несобственной точке | |
| | $r_0=0$ | (5г) | Две собственные прямые и одна несобственная | |
| (IX) $I=0$, $\omega(T)=-1$, $r=3$, $r_{\mathfrak{S}}=0$ | $r_0=2$, $r_{C_0}=2$ $(I_0=1)$ | (5а) | Вещественная собственная прямая и две мнимые сопряженные прямые, пересекающиеся в собственной точке | Тройки прямых, образующих треугольник, одна сторона которого вещественна, а две — мнимые сопряженные |
| | $r_0=2$, $r_{C_0}=1$ | (10б) | Вещественная собственная прямая и две мнимые сопряженные прямые, пересекающиеся в несобственной точке | |
| | $r_0=0$ | (3г) | Вещественная несобственная прямая и две мнимые сопряженные прямые, пересекающиеся в собственной точке | |
| (X) $I=\frac{0}{0}$, $r=3$, $r_C=5$ | $r_0=2$, $r_{C_0}=2$, $\sigma_{C_0}=-2$, $r_{C_1}=3$, $\delta=0$ | (6а′) | Без диаметра — С тремя асимптотами, образующими треугольник — Избыточные гиперболы | Линии с точкой возврата |
| | $r_0=2$, $r_{C_0}=2$, $\sigma_{C_0}=-2$, $r_{C_1}=3$, $\delta=1$ | (8а′) | С одним диаметром — С тремя асимптотами, образующими треугольник — Избыточные гиперболы | |
| | $r_0=2$, $r_{C_0}=2$, $\sigma_{C_0}=0$, $r_{C_1}=3$, $\delta=0$ | (6а) | Без диаметра — С тремя асимптотами (из которых две — мнимые сопряженные), образующими треугольник — Недостаточные гиперболы | |
| | $r_0=2$, $r_{C_0}=2$, $\sigma_{C_0}=0$, $r_{C_1}=3$, $\delta=1$ | (8а) | С одним диаметром — С тремя асимптотами (из которых две — мнимые сопряженные), образующими треугольник — Недостаточные гиперболы | |
| | $r_0=2$, $r_{C_0}=2$, $\sigma_{C_0}=0$, $r_{C_1}=2$, $\delta=0$ | (14а) | Без диаметра — С тремя асимптотами (из которых две — мнимые сопряженные), пересекающимися в одной точке — Недостаточные гиперболы | |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | $r_0=2,\ r_{C_0}=1,\ r_{C_1}=3,\ \delta=0$ | (6б) | Без диаметра — Параболические гиперболы | |
| | $r_0=2,\ r_{C_0}=1,\ r_{C_1}=1$, $\delta=2$ | (16б) | Без диаметра — Гиперболизмы параболы | |
| | $r_0=2,\ r_{C_0}=1,\ r_{C_1}=1$, $\delta=3$ | (13б) | С одним диаметром — Гиперболизмы параболы | |
| | $r_0=1,\ r_{C_1}=2$ | (11в) | Расходящиеся параболы | |
| | $r_0=1,\ r_{C_1}=0$ | (16в) | Кубические параболы | |
| (XI) $I=\frac{0}{0}$, $r=3$, $r_C=4$ | $r_0=2,\ r_{C_0}=2$, $\sigma_{C_0}=0$ | (2а) | Эллипс и прямая | Совокупности конического сечения и прямой, касательной к нему |
| | $r_0=2,\ r_{C_0}=2$, $\sigma_{C_0}=-2$ | (2а′) | Гипербола и собственная прямая, не являющаяся ее асимптотой | |
| | $r_0=2,\ r_{C_0}=1$, $r_{C_1}=1$ | (12б) | Гипербола и одна из ее асимптот | |
| | $r_0=2,\ r_{C_0}=1$, $r_{C_1}=3$ | (2б) | Парабола и собственная прямая | |
| | $r_0=0$ | (6г) | Парабола и несобственная прямая | |
| (XII) $I=\frac{0}{0}$, $r=2$, $r_C=2$, $\sigma_C=-2$ | $r_0=2$ | (1а′) | Три собственные прямые, пересекающиеся в собственной точке | Тройки различных прямых, пересекающихся в одной точке |
| | | | Простое отношение трех точек имеет: | |
| | $r_0=1$, $0<\lvert Q_0\rvert<4$ | (4в) | шесть различных вещественных значений; — Три собственные прямые, пересекающиеся в несобственной точке | |
| | $r_0=1$, $Q_0=0$ | (6в) | три различных значения, все вещественные (т. е. средняя прямая есть линия центров) — Три собственные прямые, пересекающиеся в несобственной точке | |
| | $r_0=0$ | (8г) | Две собственные прямые и одна несобственная | |

Продолжение

| Кубические тройничные формы над полем вещественных чисел | | | Вещественные плоские линии 3-го порядка | | |
|---|---|---|---|---|---|
| проективные инварианты | аффинно-проективные инварианты | канонические виды | аффинно-проективные подклассы и их группы | | проективные классы |
| (XIII) $I=\frac{0}{0}$, $r=2$, $r_C=2$, $\sigma_C=0$ | $r_0=2$ | (1а) | Три собственные прямые, пересекающиеся в собственной точке | | Тройки различных непересекающихся в одной точке прямых, из которых одна вещественна, а две — мнимые сопряженные |
| | | | Простое отношение трех точек имеет: | Вещественная собственная прямая и две мнимые сопряженные прямые, пересекающиеся все три в несобственной точке | |
| | $r_0=1$: $r_{C_2}=0$ | (2в) | два различных значения, оба мнимые; | | |
| | $r_0=1$: $r_{C_2}=1$, $\sigma_{C_2}=1$, $Q_0=0$ | (5в) | три различных значения, все вещественные (т. е. вещественная прямая есть линия центров); | | |
| | $r_0=1$: $r_{C_2}=1$, $\sigma_{C_2}=1$, $-4\neq Q_0\neq 0$ | (3в) | шесть различных мнимых значений, причем $0<\Omega<\frac{2}{3}\pi$; | | |
| | $r_0=1$: $r_{C_2}=1$, $\sigma_{C_2}=-1$, $(\lvert Q_0\rvert>4)$ | (4в) | шесть различных мнимых значений, причем $\frac{2}{3}\pi<\Omega<\pi$ | | |
| | $r_0=0$ | (7г) | Вещественная несобственная прямая и две мнимые сопряженные прямые | | |
| (XIV) $I=\frac{0}{0}$, $r=2$, $r_C=1$ | $r_0=2$ | (1б) | Собственные прямые, пересекающиеся в собственной точке | | Тройки прямых, из которых две совпадают |
| | $r_0=1$ $(\lvert Q_0\rvert=4)$ | (7в) | Собственные прямые, пересекающиеся в несобственной точке | | |
| | $r_0=0$: $r_{C_2}=1$ | (9г) | Несобственная прямая и пара совпадающих собственных прямых | | |
| | $r_0=0$: $r_{C_2}=0$ | (10г) | Собственная прямая и дважды взятая несобственная прямая | | |
| (XV) $I=\frac{0}{0}$, $r=1$ | $r_0=1$ | (1в) | Тройка совпадающих собственных прямых | | Тройки совпадающих прямых |
| | $r_0=0$ | (11г) | Трижды взятая несобственная прямая | | |

## ГЛАВА VI

# ПУЧКИ ДВОЙНИЧНЫХ И ТРОЙНИЧНЫХ КУБИЧЕСКИХ ФОРМ

Результаты, полученные в главах IV и V, дополним классификацией пучков двойничных и тройничных кубических форм в зависимости от элементарных делителей соответствующих полиномиальных кубических матриц.

## § 1. Классификация пучков кубических двойничных форм

1. Возьмем пучок кубических двойничных форм над полем комплексных (или вещественных) чисел

$$\lambda f + \mu\varphi, \tag{1.1}$$

где $\lambda$, $\mu$ — переменные параметры, а формы

$$f = \sum_{i,\, j,\, k=1}^{2} A_{ijk} x_i x_j x_k, \qquad \varphi = \sum_{i,\, j,\, k=1}^{2} B_{ijk} x_i x_j x_k$$

с соответствующими симметрическими кубическими матрицами

$$A = \| A_{ijk} \|, \qquad B = \| B_{ijk} \| \qquad (i,\ j,\ k = 1,\ 2),$$

не являющимися одновременно нулевыми, образуют базис пучка.

Пучок (1.1) называем *неособенным*, если его дискриминант $\Delta(\lambda,\ \mu)$ не обращается в нуль тождественно, т. е. при всех значениях параметров $\lambda$, $\mu$, и *особенным*, если $\Delta(\lambda,\ \mu) \equiv 0$.

Рассматривая неособенный пучок (1.1), будем различать четыре случая в зависимости от того, являются ли обе формы $f$, $\varphi$ его базиса неособенными (т. е. имеющими дискриминанты $\Delta$, $\Delta'$ не равные нулю) или одна из них, например $f$, — особенная (т. е. $\Delta = 0$), имеющая ранг (двумерный или трехмерный) $r = 2$ при том же значении ранга $r'$ формы $\varphi$, либо $r = 1$ при $r' \geqq 1$, либо, наконец, $r = 0$.

Случай I, когда $\Delta \neq 0$ и $\Delta' \neq 0$.

Тогда пучок матриц $\lambda A + \mu B$, соответствующий пучку форм (1.1), подвергаем симметрическим элементарным преобразованиям, приводящим матрицу $A$ к каноническому виду ($I$) (гл. IV, § 3).

В результате получим полиномиальную матрицу вида

$$\left\| \begin{matrix} \lambda + a\mu & c\mu \\ c\mu & d\mu \end{matrix} \right\| \begin{matrix} c\mu & d\mu \\ d\mu & \lambda + b\mu \end{matrix} \right\| \quad \begin{matrix} \rightarrow (i) \\ \downarrow \rightarrow (k). \\ (j) \end{matrix} \tag{1.2}$$

Порождаемые ею кубические миноры 2-го порядка представляются выражениями

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{M}_{11}(\lambda,\ \mu) &= 2\mu\,[d\lambda + (ad - c^2)\,\mu], \\ \mathfrak{M}_{22}(\lambda,\ \mu) &= 2\mu\,[c\lambda + (bc - d^2)\,\mu], \\ \mathfrak{M}_{12}(\lambda,\ \mu) &= \lambda^2 + (a + b)\,\lambda\mu + (ab - cd)\,\mu^2. \end{aligned} \right\} \tag{1.3}$$

Таким образом, число элементарных делителей матрицы (1.2) может быть равным 2, 1 или 0. Сообразно с этим будем рассматривать следующие три варианта.

Вариант 1: матрица (1.2) имеет два элементарных делителя.

Тогда $d=0$, $c=0$, и если $0 \neq a \neq b \neq 0$, то, полагая $a=-m_1$, $b=-m_2$, мы будем иметь каноническую матрицу (рис. 22) с двумя различными элементарными делителями $\lambda-m_1\mu$, $\lambda-m_2\mu$ и характеристикой [11].

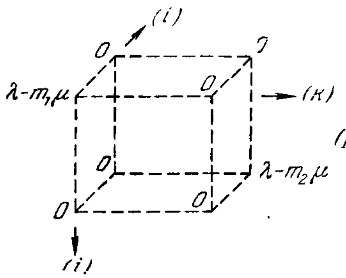



Рис. 22.

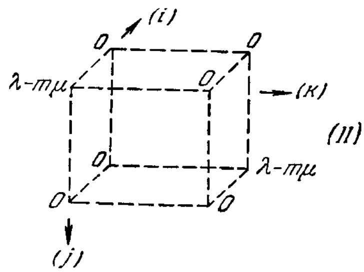



Рис. 23.

Если же $a=b\neq 0$, то, полагая $a=b=-m$, мы получим каноническую матрицу (рис. 23), имеющую два одинаковых элементарных делителя: $\lambda-m\mu$, $\lambda-m\mu$. Ее характеристика — [(11)].

Вариант 2: матрица (1.2) имеет только один элементарный делитель.

Тогда детерминанты (1.3) должны иметь общий делитель вида $\lambda-m\mu$, который и будет элементарным делителем матрицы (1.2).

Следовательно,

$$\left.\begin{aligned} dm+ad-c^2&=0,\\ cm+bc-d^2&=0,\\ m^2+(a+b)\,m+ab-cd&=0.\end{aligned}\right\} \tag{1.4}$$

Кроме того, $\lambda-m\mu$ будет делителем соответствующего матрице (1.2) дискриминанта

$$\begin{aligned}\Delta(\lambda,\mu)= -[\lambda^4&+2(a+b)\lambda^3\mu+(a^2+b^2+4ab-6cd)\lambda^2\mu^2+\\ &+2(a^2b+ab^2+2c^3+2d^3-3acd-3bcd)\lambda\mu^3+\\ &+(a^2b^2-3c^2d^2-6abcd+4ad^3+4bc^3)\mu^4],\end{aligned} \tag{1.5}$$

причем кратность этого делителя не меньше двух.

Пусть элементарный делитель $\lambda-m\mu$ матрицы (1.2) является двукратным делителем дискриминанта (1.5) и $\lambda-m_1\mu$, $\lambda-m_2\mu$ — остальные его делители.

Тогда

$$\left.\begin{aligned} 2(a+b)&=-(2m+m_1+m_2),\\ a^2+b^2+4ab-6cd&=m^2+2m(m_1+m_2)+m_1m_2.\end{aligned}\right\} \tag{1.6}$$

Из равенств (1.4), (1.6) находим:

$$a+b=-\left(m+\frac{m_1+m_2}{2}\right),$$

$$ab=\frac{(m_1-m_2)^2+8m(m_1+m_2)}{16},$$

$$c^3=\frac{(a+m)(m_1-m_2)^2}{16},$$

$$d^3=\frac{(b+m)(m_1-m_2)^2}{16}.$$

Отсюда получаем две системы значений для $a$, $b$, $c$, $d$:

$$a=\alpha, \quad b=\beta, \quad c=\gamma, \quad d=\delta \tag{1.7}$$

и

$$a=\beta, \quad b=\alpha, \quad c=\delta, \quad d=\gamma, \tag{1.7'}$$

где

$$\left.\begin{aligned}
\alpha &= -\frac{2m+m_1+m_2}{4}+\frac{1}{2}\sqrt{(m-m_1)(m-m_2)},\\
\beta &= -\frac{2m+m_1+m_2}{4}-\frac{1}{2}\sqrt{(m-m_1)(m-m_2)},\\
\gamma &= \frac{1}{4}\sqrt[3]{[2m-m_1-m_2+2\sqrt{(m-m_1)(m-m_2)}]\,(m_1-m_2)^2},\\
\delta &= \frac{1}{4}\sqrt[3]{[2m-m_1-m_2-2\sqrt{(m-m_1)(m-m_2)}]\,(m_1-m_2)^2}.
\end{aligned}\right\} \tag{1.8}$$

Для канонической матрицы выбираем любую из этих систем, например (1.7), так как соответствующие им матрицы операцией $\boxed{I-II}$ переводятся друг в друга. При этом мы ограничиваемся одним каким-либо значением каждого из кубических корней (вещественным в случае поля вещественных чисел), так как $c$ и $d$, кроме значений $\gamma$ и $\delta$, определяемых формулами (1.8), могут еще иметь только значения $\varepsilon\gamma$ и $\varepsilon^2\delta$ (где $\varepsilon$ — любой из мнимых кубических корней из 1), в чем легко убедиться, сравнивая выражения произведения $cd$, определяемые из равенств (1.4) и (1.8); но тогда операция $\boxed{II}\cdot\varepsilon$ над матрицей (1.2) приводит к матрице того же вида, где только $c$ заменяется на $\varepsilon c$ и $d$ на $\varepsilon^2 d$.

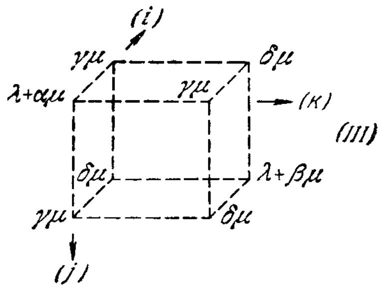



Рис. 24.

Таким образом, если элементарный делитель $\lambda-m\mu$ матрицы (1.2) является двукратным делителем дискриминанта (1.5), то каноническая матрица имеет вид (рис. 24), причем $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ определяются формулами (1.8), где

$$m_1\neq m\neq m_2\neq m_1.$$

Если же элементарный делитель $\lambda-m\mu$ матрицы (1.2) является трехкратным делителем дискриминанта (1.5) и $\lambda-m_1\mu$ — его простой делитель, то мы приходим к матрице

$$\left\|\begin{array}{cc|cc}
\lambda-\frac{(3m+m_1)\mu}{4} & \frac{(m-m_1)\mu}{4} & \frac{(m-m_1)\mu}{4} & \frac{(m-m_1)\mu}{4}\\
\frac{(m-m_1)\mu}{4} & \frac{(m-m_1)\mu}{4} & \frac{(m-m_1)\mu}{4} & \lambda-\frac{(3m+m_1)\mu}{4}
\end{array}\right\| \begin{array}{l}\to(i)\\ \to(k),\\ \downarrow(j)\end{array}$$

которая после операций

$$\boxed{I}+\boxed{II}\cdot(-1),\qquad \boxed{II}+\boxed{I}\cdot\frac{1}{2},\qquad \boxed{II}\cdot\sqrt[3]{4},\qquad \boxed{I}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$$

принимает канонический вид (рис. 25).

Характеристика матриц (*III*) и (*IV*) есть [1].

Вариант 3: матрица (1.2) не имеет элементарных делителей.

Обозначим через $\lambda - m_i\mu$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ делители дискриминанта $\Delta(\lambda, \mu)$, представляемого выражением (1.5), а через $Sj$ $(j = 1, 2, 3, 4)$ сумму сочетаний из $m_1$, $m_2$, $m_3$, $m_4$ по $j$.

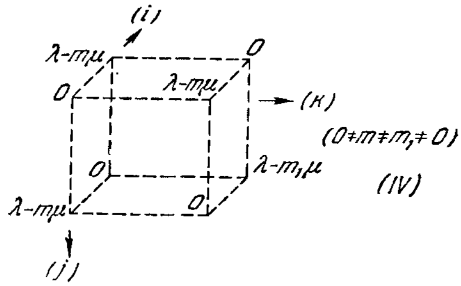



Рис. 25.

Тогда имеем:

$$\begin{cases} 2(a+b) = -S_1, \\ a^2 + b^2 + 4ab - 6cd = S_2, \\ 2(a^2b + ab^2 + 2c^3 + 2d^3 - 3acd - 3bcd) = -S_3, \\ a^2b^2 - 3c^2d^2 - 6abcd + 4ad^3 + 4bc^3 = S_4. \end{cases}$$

Отсюда находим:

$$a + b = T_1, \tag{1.9}$$

$$ab - 3cd = T_2, \tag{1.10}$$

$$c^3 + d^3 = T_3, \tag{1.11}$$

$$ad^3 + bc^3 - 3c^2d^2 = T^4, \tag{1.12}$$

где

$$T_1 = -\frac{S_1}{2}, \quad T_2 = \frac{4S_2 - S_1^2}{8}, \quad T_3 = \frac{4S_1S_2 - S_1^3 - 8S_3}{32}, \quad T_4 = \frac{64S_4 - (4S_2 - S_1^2)^2}{256}.$$

Полагая

$$cd = \tau, \tag{1.13}$$

получим из уравнений (1.9) — (1.12)

$$3\tau^4 + (4T_2 - T_1^2)\tau^3 + 3(T_1T_3 - 2T_4)\tau^2 - 3T_3^2\tau + T_1T_3T_4 - T_2T_3^2 - T_4^2 = 0. \tag{1.14}$$

Пусть $\tau_0$ — один из корней уравнения (1.14). Тогда из (1.11) и (1.13) находим две системы значений для $c$, $d$:

$$c = \gamma_0, \quad d = \delta_0 \tag{1.15}$$

и

$$c = \delta_0, \quad d = \gamma_0, \tag{1.15'}$$

где

$$\gamma_0 = \sqrt[3]{\frac{T_3 + \sqrt{T_3^2 - 4\tau_0^3}}{2}}, \quad \delta_0 = \sqrt[3]{\frac{T_3 - \sqrt{T_3^2 - 4\tau_0^3}}{2}} \text{ [1]}. \tag{1.16}$$

[1]) Здесь, как и в формулах (1.8), мы ограничиваемся одним каким-либо значением каждого из кубических корней.

Соответственно с этим из (1.9) и (1.12) получаем две системы значений для $a$, $b$:

$$a=\alpha_0, \qquad b=\beta_0 \tag{1.17}$$

и

$$a=\beta_0, \qquad b=\alpha_0, \tag{1.17'}$$

где

$$\alpha_0=\frac{1}{2}\left(T_1+\frac{T_1T_3-2T_4-6\tau_0^2}{\sqrt{T_3^2-4\tau_0^3}}\right), \qquad \beta_0=\frac{1}{2}\left(T_1-\frac{T_1T_3-2T_4-6\tau_0^2}{\sqrt{T_3^2-4\tau_0^3}}\right). \tag{1.18}$$

Две матрицы, соответствующие двум системам значений для $a$, $b$, $c$, $d$, представляемым формулами (1.17), (1.15) и (1.17′), (1.15′), переводятся друг в друга операцией $\boxed{I-II}$. Канонической матрицей можем считать любую из них, например матрицу (рис. 26), где $\alpha_0$, $\beta_0$, $\gamma_0$, $\delta_0$ определяются формулами (1.18), (1.16), причем в этих формулах $\tau_0$ обозначает тот корень уравнения (1.14), которому соответствует двойное отношение четырех точек прямой, задаваемых якобианом форм $f'$ и $\varphi'$ — базиса преобразованного пучка, ассоциированного с матрицей ($V$), — равное двойному отношению четырех точек прямой, задаваемых якобианом форм $f$ и $\varphi$ — базиса исходного пучка (1.1). Характеристика матрицы ($V$) есть [0].

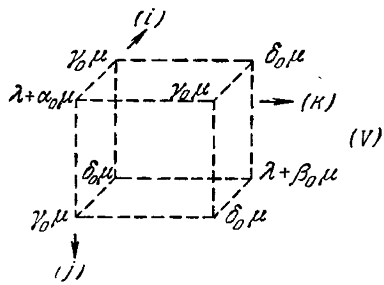



Рис. 26.

Канонические матрицы ($I$) — ($V$) имеют место в поле комплексных чисел, а также в поле вещественных чисел, если дискриминант $\Delta$ формы $f$ — отрицательный. Если же этот дискриминант — положительный, то пучок матриц $\lambda A+\mu B$ подвергаем вещественным симметрическим элементарным преобразованиям, приводящим матрицу $A$ формы $f$ к каноническому виду ($I'$) (гл. IV, § 3). В результате получим полиномиальную матрицу вида

$$\left\|\begin{array}{cc|cc} a\mu & \lambda+c\mu & \lambda+c\mu & d\mu \\ \lambda+c\mu & d\mu & d\mu & -\lambda+b\mu \end{array}\right\| \begin{array}{l} \to (i) \\ \to (k). \\ \downarrow (j) \end{array} \tag{1.19}$$

Так как порождаемые матрицей (1.19) кубические миноры 2-го порядка имеют вид

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{M}_{11}(\lambda,\mu) &= -2\left[\lambda^2+2c\lambda\mu+(c^2-ad)\mu^2\right], \\ \mathfrak{M}_{22}(\lambda,\mu) &= -2\left[\lambda^2+(c-b)\lambda\mu+(d^2-bc)\mu^2\right], \\ \mathfrak{M}_{12}(\lambda,\mu) &= -\mu\left[(a+d)\lambda+(cd-ab)\mu\right], \end{aligned}\right\} \tag{1.20}$$

то число ее элементарных делителей может быть равным 2,1 или 0.

Если матрица (1.19) имеет два элементарных делителя, то

$$a=-d, \qquad ab=cd. \tag{1.21}$$

Тогда, если $a\neq 0$, имеем, полагая

$$a=-d=-v, \qquad b=-c=u,$$

каноническую матрицу (рис. 27) с двумя мнимыми сопряженными элементарными делителями

$$\lambda-(u+iv)\mu, \qquad \lambda-(u-iv)\mu,$$

где $u$ и $v\neq 0$ — вещественные числа.

Таким образом, характеристика матрицы ($I'$) есть $[\bar{1}\,\bar{1}]$.

Если же в матрице (1.19) $a=0$, то на основании первого из равенств (1.21) будет $d=0$ и для существования двух элементарных делителей необходимо, чтобы $c=-b\neq 0$.

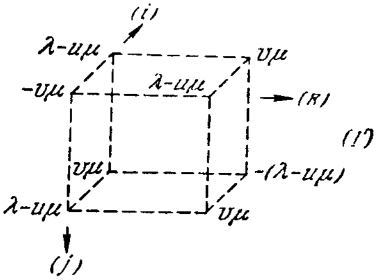



Рис. 27.

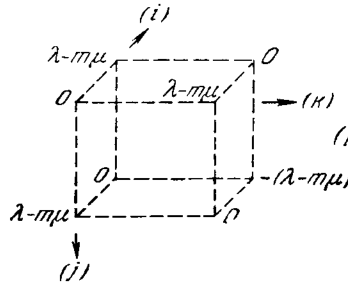



Рис. 28.

Полагая $c=-b=-m$, получаем каноническую матрицу (рис. 28), имеющую два одинаковых элементарных делителя $\lambda-m\mu$, $\lambda-m\mu$ и характеристику $[(11)]$.

Далее, если матрица (1.19) имеет только один элементарный делитель вида $\lambda-m\mu$, то последний будет единственным общим делителем детерминантов (1.20). Следовательно,

$$\left.\begin{aligned} m^2+2cm+c^2-ad&=0,\\ m^2+(c-b)\,m+d^2-bc&=0,\\ (a+d)\,m+cd-ab&=0.\end{aligned}\right\}\qquad(1.22)$$

Кроме того, $\lambda-m\mu$ будет делителем соответствующего матрице (1.19) дискриминанта

$$\begin{aligned}\Delta(\lambda,\mu)=4\lambda^4+4\,(3c-b)\,\lambda^3\mu+(12c^2-12bc+3d^2-6ad-a^2)\,\lambda^2\mu^2+\\ +(4c^3-12bc^2+6cd^2-6acd+2a^2b+6abd)\,\lambda\mu^3+\\ +(a^2b^2-3c^2d^2-6abcd+4ad^3+4bc^3)\,\mu^4,\end{aligned}\qquad(1.23)$$

причем кратность этого делителя не меньше двух.

Если $\lambda-m\mu$ будет трехкратным делителем дискриминанта (1.23), простой делитель которого есть $\lambda-m_1\mu$, то

$$\left.\begin{aligned} &3c-b=-(3m+m_1),\\ &12c^2-12bc+3d^2-6ad-a^2=12m\,(m+m_1).\end{aligned}\right\}\qquad(1.24)$$

Из первых двух равенств (1.22) и из равенств (1.24) находим:

$$a-3d=0,\qquad(1.25)$$

а тогда последнее из равенств (1.22) дает:

$$(c-3b+4m)\,d=0.\qquad(1.26)$$

Если $d=0$, то из равенства (1.25) следует, что $a=0$ и первые из равенств (1.22), (1.24) дают:

$$c=-m,\quad b=m_1.$$

Имеем тогда каноническую матрицу (рис. 29).

Если же $d\neq 0$, то из равенства (1.26) вытекает

$$c-3b+4m=0.$$

Отсюда, принимая во внимание первое из равенств (1.24), получаем:

$$b=\frac{9m-m_1}{8},\qquad c=-\frac{5m+3m_1}{8},$$

а затем, пользуясь равенством (1.25), находим с помощью первого из

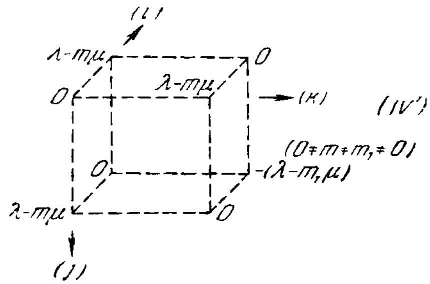



Рис. 29.

равенств (1.22)

$$a=\frac{3\sqrt{3}}{8}(m-m_1),\qquad d=\frac{\sqrt{3}}{8}(m-m_1)\,^{1)}.$$

Подвергая в этом случае матрицу (1.19) операциям

$$\boxed{I}+\boxed{II}\cdot(-\sqrt{3}),\qquad \boxed{II}+\boxed{I}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4},\qquad \boxed{II}\cdot(-2),\qquad \boxed{I}\cdot\frac{1}{2},$$

снова получаем каноническую матрицу ($IV'$).

В случае, если $\lambda-m\mu$ будет двукратным делителем дискриминанта (1.23), остальные делители которого $\lambda-m_1\mu$ и $\lambda-m_2\mu$ различны между

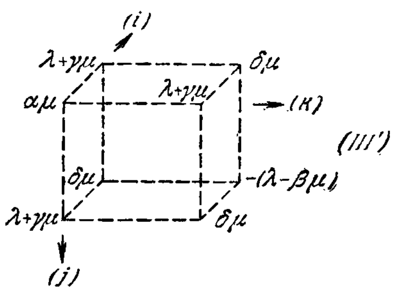



Рис. 30.

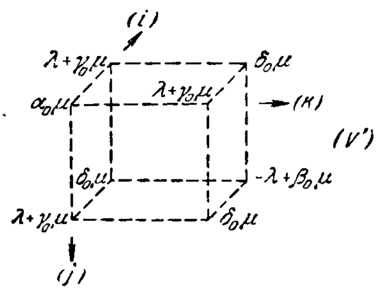



Рис. 31.

собой, мы приходим к канонической матрице (рис. 30), где $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ выражаются через $m$, $m_1$, $m_2$ (упражнение 1).

Характеристика матриц ($III'$) и ($IV'$) есть [1].

Наконец, если у матрицы (1.19) нет элементарных делителей, т. е. характеристика ее — [0], то каноническая матрица имеет вид (рис. 31), где $\alpha_0$, $\beta_0$, $\gamma_0$, $\delta_0$ могут быть выражены через $m_i$ ($i=1, 2, 3, 4$), если $\lambda-m_i\mu$ ($i=1, 2, 3, 4$) — делители дискриминанта (1.23) (упражнение 2).

Случай II, когда $\Delta=0$, $r=2$, $r'=2$.

---

1) Мы ограничиваемся положительным значением квадратных корней, так как операция $\boxed{I}\cdot(-1)$ над матрицей (1.19) приводит только к перемене знака у элементов $a$ и $d$, не изменяя остальных элементов матрицы.

Подвергаем тогда пучок матриц $\lambda A+\mu B$ симметрическим элементарным преобразованиям (вещественным в случае поля вещественных чисел), приводящим матрицу $A$ формы $f$ к каноническому виду $(II)$ (гл. IV, § 3).

В результате получим матрицу вида

$$\begin{array}{c} \longrightarrow (i) \\ \left\| \begin{array}{cc|cc} a\mu & \lambda+c\mu & \lambda+c\mu & d\mu \\ \lambda+c\mu & d\mu & d\mu & b\mu \end{array} \right\| \begin{array}{l} \to (k). \\ \downarrow \end{array} \\ (j) \end{array} \tag{1.27}$$

Порождаемые ею кубические миноры 2-го порядка представляются выражениями

$$\mathfrak{M}_{11}(\lambda,\ \mu) = -2\,[\lambda^2+2c\lambda\mu-(ad-c^2)\,\mu^2],$$
$$\mathfrak{M}_{22}(\lambda,\ \mu) = 2\mu\,[b\lambda+(bc-d^2)\,\mu],$$
$$\mathfrak{M}_{12}(\lambda,\ \mu) = -\mu\,[d\lambda-(ab-cd)\,\mu].$$

Следовательно, число элементарных делителей матрицы (1.27) равно 1 или 0.

В первом случае $b\neq 0$ и после легких преобразований матрицы (1.27) приходим к матрице вида (рис. 32).

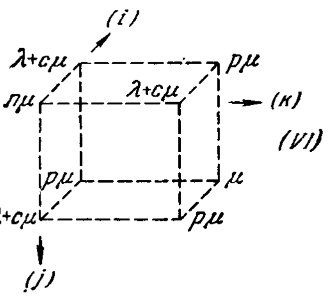



Рис. 32.

Так как матрица $(VI)$ имеет также один элементарный делитель, то порождаемые ею кубические миноры 2-го порядка

$$-2\,[\lambda^2+2c\lambda\mu-(np-c^2)\,\mu^2],\quad 2\mu\,[\lambda+(c-p^2)\,\mu],$$
$$-\mu\,[p\lambda-(n-cp)\,\mu]$$

должны делиться на $\lambda+(c-p^2)\,\mu$, что возможно лишь при условии

$$n=p^3. \tag{1.28}$$

Полагая $m=p^2-c,\quad m_1=-\left(c+\frac{5}{4}p^2\right)$, будем иметь тогда единственный элементарный делитель $\lambda-m\mu$ матрицы $(VI)$, который при $m\neq m_1$ будет двукратным делителем соответствующего дискриминанта

$$\Delta(\lambda,\ \mu) = -4\mu\,(\lambda-m\mu)^2\,(\lambda-m_1\mu),$$

имеющего также простой двучленный делитель $\lambda-m_1\mu$ (другой простой делитель $\mu$ — одночленный).

Из указанных выше выражений для $m$ и $m_1$ находим:

$$p=+\frac{2}{3}\sqrt{m-m_1}\ ^{1)}, \tag{1.29}$$

$$c=-\frac{5m+4m_1}{9}. \tag{1.30}$$

Таким образом, при $m_1\neq m\neq 0$ имеем каноническую матрицу $(VI)$, которой $n$, $p$, $c$ определяются формулами (1.28), (1.29), (1.30). Ее характеристика — [1].

---

1) Здесь, не нарушая общности, можем ограничиться положительным значением квадратного корня.

При $m_1 = m \neq 0$ имеем согласно предыдущим формулам каноническую матрицу (рис. 33), где $\lambda - m\mu$ есть элементарный делитель этой матрицы и трехкратный делитель соответствующего дискриминанта

$$\Delta(\lambda, \mu) = -4\mu(\lambda - m\mu)^3.$$

Характеристика матрицы ($VII$) есть [1].

Если $m = 0$, то при $m_1 \neq 0$ получаем каноническую матрицу (рис. 34) с единственным элементарным делителем $\lambda$, который будет двукратным

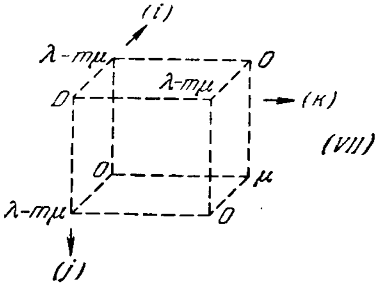



Рис. 33.

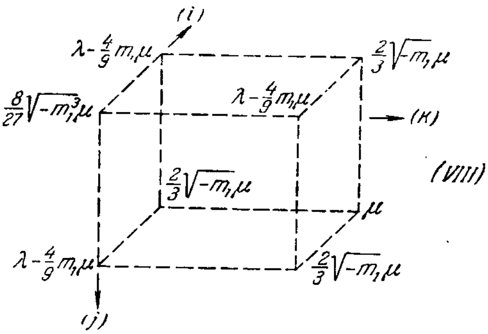



Рис. 34.

делителем соответствующего дискриминанта

$$\Delta(\lambda, \mu) = -4\lambda^2\mu(\lambda - m_1\mu),$$

имеющего также единственный двучленный делитель $\lambda - m_1\mu$.

Характеристика матрицы ($VIII$) есть [1].

В поле вещественных чисел канонические матрицы ($VI$), ($VII$), ($VIII$) также имеют место, если относительный инвариант $L_1$ пучка (1.1) (коэффициент при $\lambda^3\mu$ в разложении дискриминанта $\Delta(\lambda, \mu)$ пучка) — отрицательный (гл. III, замечание 5.7). В противном случае матрица (1.27) очевидными вещественными операциями приводится к канонической матрице (рис. 35), где

$$n = p^3, \tag{1.28'}$$

$$p = +\frac{2}{3}\sqrt{m_1 - m}, \tag{1.29'}$$

$$c = -\frac{5m + 4m_1}{9}. \tag{1.30'}$$

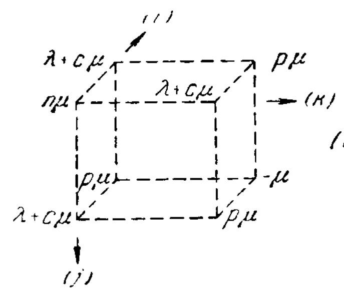



Рис. 35.

Матрица ($VI'$), где $m \neq 0$, имеет единственный элементарный делитель $\lambda - m\mu$, который при $m_1 \neq m$ будет двукратным, а $\lambda - m_1\mu$ простым двучленным делителем (другой простой делитель $\mu$ — одночленный) соответствующего дискриминанта

$$\Delta(\lambda, \mu) = 4\mu(\lambda - m\mu)^2(\lambda - m_1\mu).$$

Характеристика матрицы ($VI'$) есть [1].

При $m_1 = m \neq 0$ имеем каноническую матрицу (рис. 36) с единственным элементарным делителем $\lambda - m\mu$, являющимся также трехкратным делителем соответствующего дискриминанта

$$\Delta(\lambda, \mu) = 4\mu(\lambda - m\mu)^3.$$

Характеристика матрицы $(VII')$ есть $[1]$.

Если $m=0$, то при $m_1 \neq 0$ получаем каноническую матрицу (рис. 37) с единственным элементарным делителем $\lambda$, который будет двукратным делителем соответствующего дискриминанта

$$\Delta(\lambda, \mu) = 4\lambda^2\mu(\lambda - m_1\mu),$$

имеющего также единственный двучленный делитель $\lambda - m_1\mu$.

Характеристика матрицы $(VIII')$ есть $[\mathring{1}]$.

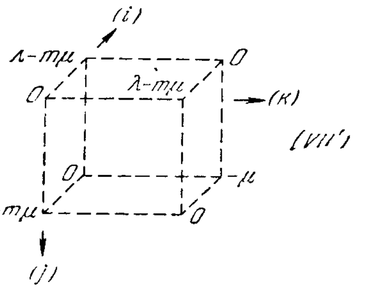


Рис. 36.

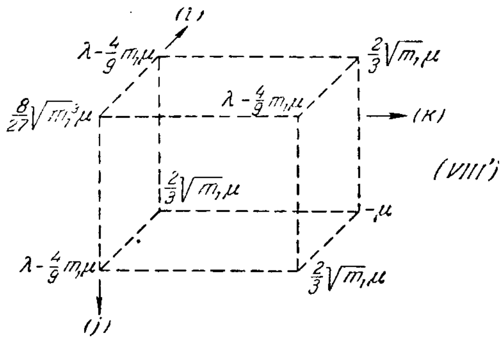


Рис. 37.

В случае, когда элементарных делителей у матрицы (1.27) нет, т. е. ее характеристика — $[0]$, различаем два варианта, смотря по тому, будет ли $b=0$ или $b \neq 0$.

Вариант 1: $b=0$.

Тогда $d \neq 0$ и матрица (1.27) после очевидных операций принимает вид (рис. 38).

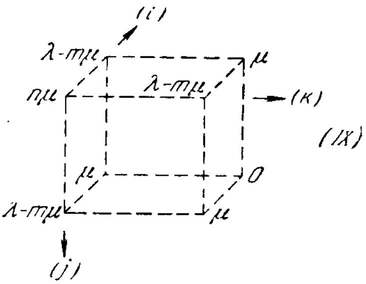


Рис. 38.

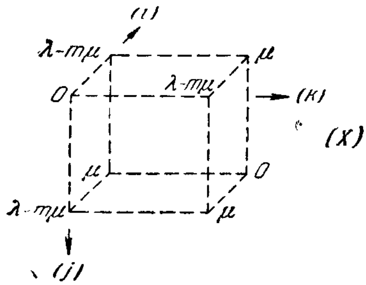


Рис. 39.

Соответствующий дискриминант равен

$$\Delta(\lambda, \mu) = 3\mu^2(\lambda - m_1\mu)(\lambda - m_2\mu),$$

где

$$m_1 = m + 2\sqrt{\frac{n}{3}}, \qquad m_2 = m - 2\sqrt{\frac{n}{3}} \qquad (m_1 \neq m_2).$$

Отсюда находим:

$$n = \frac{3}{16}(m_1 - m_2)^2, \qquad m = \frac{m_1 + m_2}{2}. \tag{1.31}$$

Если у дискриминанта $\Delta(\lambda, \mu)$ есть простые делители, т. е. $m_1 \neq m_2$, то мы имеем каноническую матрицу $(IX)$, у которой $n \neq 0$ и $m$ определяются формулами (1.31).

Если же дискриминант $\Delta(\lambda, \mu)$ имеет только двукратные делители, т. е. $m_1 = m_2$, то $n=0$. Тогда каноническая матрица принимает вид (рис. 39), где $\lambda - m\mu$ есть двукратный делитель дискриминанта $\Delta(\lambda, \mu)$, отличный от другого двукратного делителя его $\mu$.

Отметим, что относительный инвариант $L_1$, составленный для матрицы $(IX)$ или $(X)$, равен нулю.

Вариант 2: $b \neq 0$.

Тогда, как и в случае характеристики [1], приходим к матрице вида $(VI)$, для которой, однако, условие (1.28) уже не выполняется.

Выражение соответствующего дискриминанта

$$\Delta(\lambda, \mu) = -4\mu\left[\lambda^3 + 3\left(c - \frac{p^2}{4}\right)\lambda^2\mu + 3\left(c^2 - \frac{np}{2} - \frac{cp^2}{2}\right)\lambda\mu^2 + \right. \\ \left. + \left(c^3 + \frac{n^2}{4} - \frac{3}{2}cnp - \frac{3}{4}c^2p^2 + np^3\right)\mu^3\right]$$

показывает, что у него, кроме $\mu$, имеются еще три делителя вида $\lambda - m_i\mu$ $(i = 1, 2, 3)$.

Полагая

$$S_1 = m_1 + m_2 + m_3, \qquad S_2 = m_1m_2 + m_1m_3 + m_2m_3, \qquad S_3 = m_1m_2m_3,$$

имеем:

$$\left.\begin{aligned} \frac{p^2}{4} - c &= \frac{S_1}{3}, \\ c^2 - \frac{np}{2} - \frac{cp^2}{2} &= \frac{S_2}{3}, \\ c^3 + \frac{n^2}{4} - \frac{3}{2}cnp^2 - \frac{3}{4}c^2p^2 + np^3 &= -S_3. \end{aligned}\right\}$$

Отсюда, полагая

$$P = m_1(m_2 - m_1) + m_2(m_3 - m_2) + m_3(m_1 - m_3),$$
$$Q = 3(m_1^3 + m_2^3 + m_3^3 + 6m_1m_2m_3) - (m_1 + m_2 + m_3)^3,$$

находим $p = p_0$, $c = c_0$, $n = n_0$, где

$$\left.\begin{aligned} p_0 &= +\sqrt{\pi}, \\ c_0 &= \frac{\pi}{4} - \frac{m_1 + m_2 + m_3}{3}, \\ n_0 &= -\frac{16P + 9\pi^2}{72\sqrt{\pi}}\left(\text{или } n_0 = 2\sqrt{\left(\frac{m_1 + m_2 + m_3}{3}\right)^3 - m_1m_2m_3} \text{ при } \pi = 0\right), \end{aligned}\right\} \quad (1.32)$$

причем $\pi$ есть один из корней уравнения

$$\frac{27}{64}\pi^4 + \frac{P}{2}\pi^2 - \frac{4}{27}Q\pi - \frac{4}{81}P^2 = 0, \quad (1.33)$$

выбираемый аналогично корню $\tau_0$ уравнения (1.14) и являющийся в случае поля вещественных чисел неотрицательным корнем[1]).

Таким образом, имеем каноническую матрицу (рис. 40), где $p_0$, $c_0$, $n_0$ определяются формулами (1.32).

Соответствующий относительный инвариант $L_1$, как видно из выражения дискриминанта $\Delta(\lambda, \mu)$, не равен нулю.

---

[1]) Уравнение (1.33) имеет тогда на основании теоремы Декарта по крайней мере один неотрицательный корень.

Канонические матрицы ($IX$), ($X$), ($XI$), очевидно, имеют место как в поле комплексных, так и в поле вещественных чисел.

Случай III, когда $r=1$, $r' \geqq 1$.

Подвергая тогда пучок матриц $\lambda A + \mu B$ симметрическим элементарным преобразованиям (вещественным в случае поля вещественных чисел), приво-

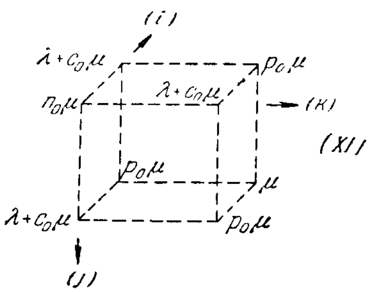



Рис. 40.

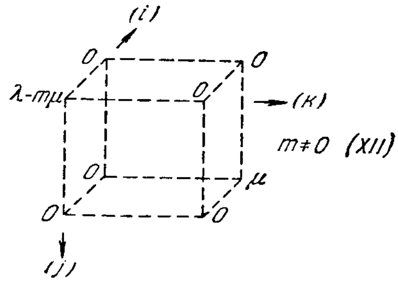



Рис. 41.

дящим матрицу $A$ к каноническому виду ($III$) (гл. IV, § 3), получим матрицу вида

$$\begin{array}{c} \longrightarrow (i) \\ \left\| \begin{array}{cc|cc} \lambda + a\mu & c\mu & c\mu & d\mu \\ \\ c\mu & d\mu & d\mu & b\mu \end{array} \right\| \end{array} \quad (k),\ (j) \tag{1.34}$$

порождающую кубические миноры 2-го порядка

$$\mathfrak{M}_{11}(\lambda, \mu) = 2\mu\,[d\lambda + (ad - c^2)\,\mu],$$
$$\mathfrak{M}_{22}(\lambda, \mu) = 2\mu^2\,(bc - d^2),$$
$$\mathfrak{M}_{12}(\lambda, \mu) = \mu\,[b\lambda + (ab - cd)\,\mu].$$

Следовательно, число элементарных делителей у матрицы (1.34) равно 2 или 1.

В первом случае, как нетрудно убедиться, приходим к канонической матрице (рис. 41), у которой элементарные делители: $\lambda - m\mu$, $\mu$ и характе-

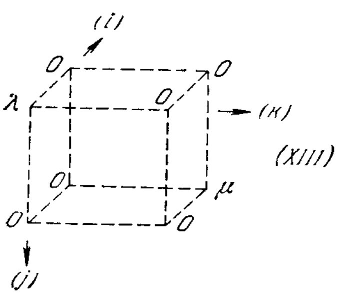



Рис. 42.

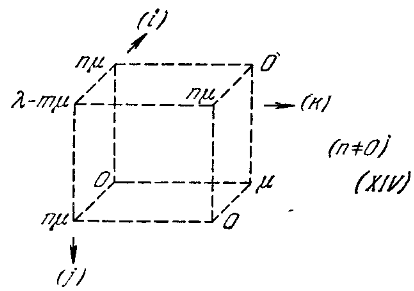



Рис. 43.

ристика $[1\mathring{1}]$, или к канонической матрице (рис. 42), обладающей элементарными делителями $\lambda$, $\mu$ и характеристикой $[\mathring{1}\mathring{1}]$.

Во втором случае, когда матрица (1.34) имеет только один элементарный делитель, получаем (при $b \neq 0$) каноническую матрицу (рис. 43),

где

$$m=\frac{m_1+m_2}{2}, \qquad n=-\frac{1}{4}\sqrt[3]{4(m_1-m_2)^2}\ ^{1)},$$

а $\lambda-m_1\mu$, $\lambda-m_2\mu$ — простые делители соответствующего дискриминанта $\Delta(\lambda,\mu)=-\mu^2[(\lambda-m\mu)^2+4n^3\mu^2]$, имеющего также двукратный делитель $\mu$, или (при $b=0$) каноническую матрицу (рис. 44), где $\lambda-m\mu$ — единственный простой делитель соответствующего дискриминанта $\Delta(\lambda,\mu)=-4\mu^3(\lambda-m\mu)$, имеющего также трехкратный делитель $\mu$.

Каждая из матриц $(XIV)$, $(XV)$ имеет элементарный делитель $\mu$ и характеристику $[\overset{\circ}{1}]$.

Канонические матрицы $(XII)$, $(XIII)$, $(XIV)$ имеют, очевидно, место как в поле комплексных, так и в поле вещественных чисел.

Что же касается матрицы $(XV)$, имеющей место в поле комплексных чисел, то она сохраняет силу в поле вещественных чисел лишь в том слу-

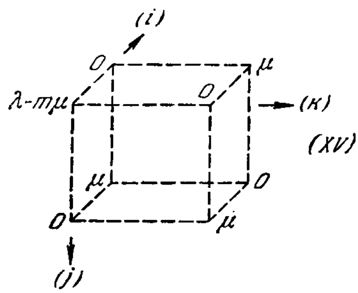



Рис. 44.

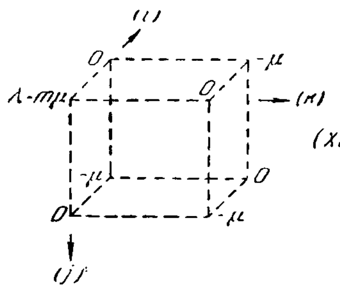



Рис. 45.

чае, если $d>0$, т. е. если относительный инвариант $L_3$ пучка (1.1) (коэффициент при $\lambda\mu^3$ в разложении дискриминанта $\Delta(\lambda,\mu)$ пучка) — отрицательный (гл. III, замечание 5.7). В противном случае матрица (1.34) очевидными вещественными операциями приводится к канонической матрице (рис. 45) с элементарным делителем $\mu$ и характеристикой [1], причем $\lambda-m\mu$ — единственный простой делитель соответствующего дискриминанта

$$\Delta(\lambda,\mu)=4\mu^3(\lambda-m\mu),$$

имеющего также трехкратный делитель $\mu$.

Случай IV, когда $r=0$.

Тогда $f\equiv 0$, форма $\varphi$ — неособенная, и мы придем, как показано в § 3 гл. IV, к канонической матрице (рис. 46), имеющей место в поле комплексных чисел, а также в поле вещественных чисел, если дискриминант $\Delta'$ формы $\varphi$ — отрицательный; при $\Delta'>0$ получаем каноническую матрицу (рис. 47).

Матрицы $(XVI)$ и $(XVI')$ имеют элементарные делители $\mu$, $\mu$ и характеристику $[(\overset{\circ}{1}\overset{\circ}{1})]$.

2. Обратимся теперь к рассмотрению особенного пучка форм (1.1). Так как дискриминант $\Delta(\lambda,\mu)$ этого пучка тождественно равен нулю, то на

¹) Мы ограничиваемся одним значением кубического корня, так как операция $\boxed{II}\cdot\varepsilon$ над матрицей $(XIV)$ вызывает в ней только замену $n$ на $\varepsilon n$ ($\varepsilon$ — любой мнимый кубический корень из 1). В случае поля вещественных чисел берем вещественное значение кубического корня.

основании формулы (5.13) гл. III дискриминанты $\Delta$, $\Delta'$ форм $f$, $\varphi$ базиса пучка равны нулю и, следовательно, обе эти формы — особенные. Поэтому различаем три случая в зависимости от того, будут ли оба ранга $r$, $r'$

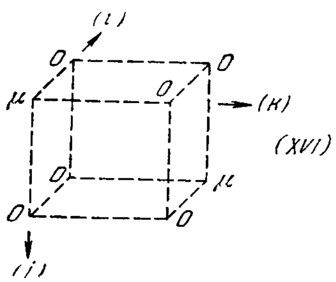



Рис. 46.

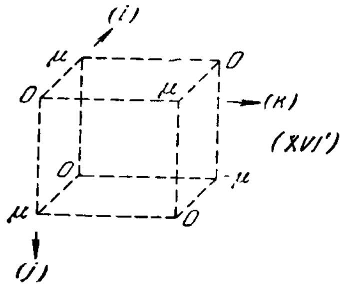



Рис. 47.

особенных форм $f$, $\varphi$ равны 2, либо один из них, например $r$, равен 1 при $r' \geqq 1$ или $r = 0$ при $r' > 0$.

Случай I, когда $\Delta = 0$, $r = 2$ и $\Delta' = 0$, $r' = 2$.

Тогда, как и в случае II при рассмотрении неособенного пучка, мы приходим к матрице (1.27), для которой

$$\Delta(\lambda, \mu) = -4b\lambda^3\mu + 3(d^2 - 4bc)\lambda^2\mu^2 + 6(abd + cd^2 - 2bc^2)\lambda\mu^3 + \\ + [4(ad - c^2)(bc - d^2) - (ab - cd)^2]\mu^4 \equiv 0.$$

Следовательно, $b = 0$, $d = 0$ и матрица (1.27) приводится (при $a = 0$) к канонической матрице (рис. 48), обладающей элементарными делителями

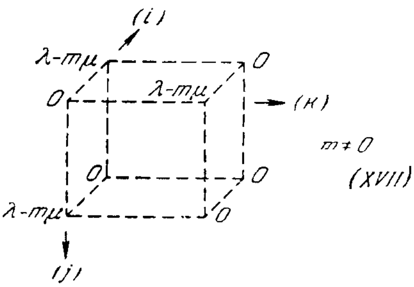



Рис. 48.

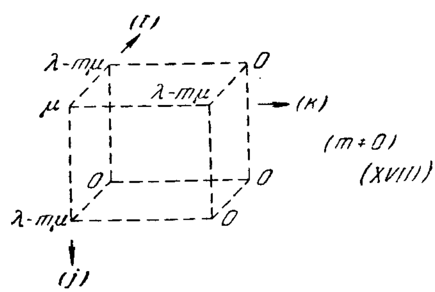



Рис. 49.

$\lambda - m\mu$, $\lambda - m\mu$ и характеристикой [(11)], или (при $a \neq 0$) к канонической матрице (рис. 49), имеющей элементарный делитель $(\lambda - m\mu)^2$ и характеристику [2].

Случай II, когда $r = 1$, $r' \geqq 1$.

Тогда, как и в случае III при рассмотрении неособенного пучка, мы приходим к матрице (1.34), для которой

$$\Delta(\lambda, \mu) = -b^2\lambda^2\mu^2 + 2(3bcd - 2d^3 - ab^2)\lambda\mu^3 + \\ + [4(ad - c^2)(bc - d^2) - (ab - cd)^2]\mu^4 \equiv 0.$$

Следовательно, $b = 0$, $d = 0$ и матрица (1.34) приводится (при $r' = 1$) к канонической матрице (рис. 50) с элементарным делителем $\lambda - m\mu$ и характеристикой [1] или (при $r' = 2$) к канонической матрице (рис.51), обладающей элементарным делителем $\mu^2$ и характеристикой $[\mathring{2}]$.

Канонические матрицы ($XVII$), ($XVIII$), ($XIX$), ($XX$), очевидно, имеют место как в поле комплексных, так и в поле вещественных чисел.

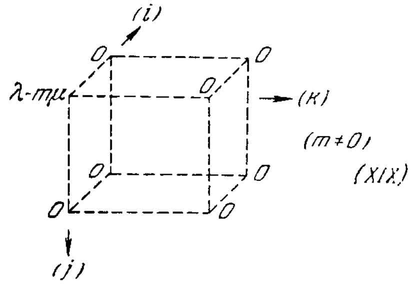



Рис. 50.

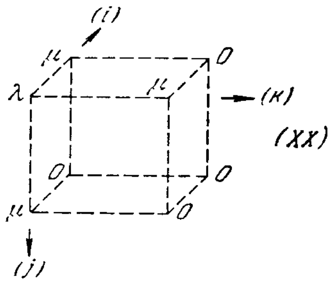



Рис. 51.

Случай III, когда $r=0$, $r'>0$.

Тогда $f\equiv 0$ и мы приходим, как показано в § 3 гл. IV, к канонической матрице (рис. 52) с элементарными делителями $\mu$, $\mu$ и характеристи-

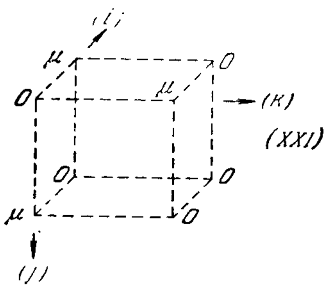



Рис. 52.

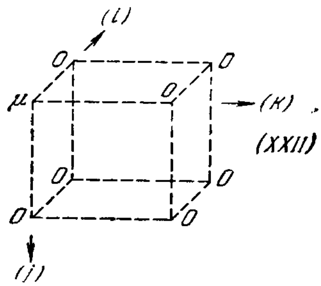



Рис. 53.

кой $[(\overset{\circ}{1}\overset{\circ}{1})]$, если $r'=2$, или к канонической матрице (рис. 53) с элементарным делителем $\mu$ и характеристикой $[\overset{\circ}{1}]$, если $r'=1$.

Канонические матрицы ($XXI$), ($XXII$) имеют место как в поле комплексных, так и в поле вещественных чисел.

Замечание 1.1. Элементарные делители и характеристика в поле комплексных или вещественных чисел каждой из упомянутых выше канонических полиномиальных матриц являются согласно теореме 5.6 гл. III также элементарными делителями и характеристикой строго эквивалентной ей в соответственном поле исходной полиномиальной матрицы $\lambda A+\mu B$. То же замечание относится к делителям дискриминантов $\Delta(\lambda, \mu)$ ассоциированных с этими матрицами пучков кубических двойничных форм. В дальнейшем для краткости элементарные делители и характеристику пучка матриц $\lambda A+\mu B$ будем называть также элементарными делителями и характеристикой ассоциированного с ним пучка форм $\lambda f+\mu\varphi$.

3. На основании полученных в пп. 1, 2 результатов мы можем установить следующие теоремы, ассоциируя канонические пучки кубических матриц с пучками кубических двойничных форм и называя два пучка этих форм строго эквивалентными в поле комплексных или вещественных чисел, если строго эквивалентны в том же поле соответствующие пучки кубических матриц.

Теорема 1.1. *Неособенный пучок кубических двойничных форм $\lambda f+\mu\varphi$ в случае, когда дискриминанты $\Delta$, $\Delta'$ форм $f$, $\varphi$ базиса не равны* *нулю, строго эквивалентен в поле комплексных чисел одному и только одному из следующих канонических пучков:*

(I) $(\lambda - m_1\mu) X_1^3 + (\lambda - m_2\mu) X_2^3$,

(II) $(\lambda - m\mu)(X_1^3 + X_2^3)$,

(III) $(\lambda + \alpha\mu) X_1^3 + 3\gamma\mu X_1^2 X_2 + 3\delta\mu X_1 X_2^2 + (\lambda + \beta\mu) X_2^3$, 159

(IV) $3(\lambda - m\mu) X_1^2 X_2 + (\lambda - m_1\mu) X_2^3$,

(V) $(\lambda + \alpha_0\mu) X_1^3 + 3\gamma_0\mu X_1^2 X_2 + 3\delta_0\mu X_1 X_2^2 + (\lambda + \beta_0\mu) X_2^3$;

*в поле вещественных чисел к каноническим пучкам, кроме вышеупомянутых, относятся также пучки:*

(I′) $-v\mu X_1^3 + 3(\lambda - u\mu) X_1^2 X_2 + 3v\mu X_1 X_2^2 - (\lambda - u\mu) X_2^3$,

(II′) $(\lambda - m\mu)(3X_1^2 X_2 - X_2^3)$,

(III′) $\alpha\mu X_1^3 + 3(\lambda + \gamma\mu) X_1^2 X_2 + 3\delta\mu X_1 X_2^2 - (\lambda - \beta\mu) X_2^3$,

(IV′) $3(\lambda - m\mu) X_1^2 X_2 - (\lambda - m_1\mu) X_2^3$,

(V′) $\alpha_0\mu X_1^3 + 3(\lambda + \gamma_0\mu) X_1^2 X_2 + 3\delta_0\mu X_1 X_2^2 - (\lambda - \beta_0\mu) X_2^3$.

Теорема 1.2. *Неособенный пучок кубических двойничных форм в случае, когда у одной из форм базиса, например $f$, дискриминант $\Delta = 0$ и ранг $r = 2$, а у другой формы $\varphi$ ранг $r' = 2$, строго эквивалентен в поле комплексных чисел одному и только одному из канонических пучков:*

(VI) $n\mu X_1^3 + 3(\lambda + c\mu) X_1^2 X_2 + 3p\mu X_1 X_2^2 + \mu X_2^3$,

(VII) $3(\lambda - m\mu) X_1^2 X_2 + \mu X_2^3$,

(VIII) $\frac{8}{27}\sqrt{-m_1^3}\mu X_1^3 + 3\left(\lambda - \frac{4}{9} m_1\mu\right) X_1^2 X_2 + 2\sqrt{-m_1}\mu X_1 X_2^2 + \mu X_2^3$,

(IX) $n\mu X_1^3 + 3(\lambda - m\mu) X_1^2 X_2 + 3\mu X_\mu X_2^2$,

(X) $3(\lambda - m\mu) X_1^2 X_2 + 3\mu X_1 X_2^2$,

(XI) $n_0\mu X_1^3 + 3(\lambda + c_0\mu) X_1^2 X_2 + 3p_0\mu X_1 X_2^2 + \mu X_2^3$;

*в поле вещественных чисел к каноническим пучкам, кроме вышеупомянутых, относятся также пучки*

(VI′) $n\mu X_1^3 + 3(\lambda + c\mu) X_1^2 X_2 + 3p\mu X_1 X_2^2 - \mu X_2^3$,

(VII′) $3(\lambda - m\mu) X_1^2 X_2 - \mu X_2^3$,

(VIII′) $\frac{8}{27}\sqrt{m_1^3}\mu X_1^3 + 3\left(\lambda - \frac{4}{9} m_1\mu\right) X_1^2 X_2 + 2\sqrt{m_1}\mu X_1 X_2^2 - \mu X_2^3$.

Теорема 1.3. *Неособенный пучок кубических двойничных форм $\lambda f + \mu\varphi$ в случае, когда у одной из форм базиса, например $f$, ранг $r = 1$, а у другой формы $\varphi$ ранг $r' \geqq 1$, строго эквивалентен в поле комплексных чисел одному и только одному из следующих канонических пучков:*

(XII) $(\lambda - m\mu) X_1^3 + \mu X_2^3$,

(XIII) $\lambda X_1^3 + \mu X_2^3$,

(XIV) $(\lambda - m\mu) X_1^3 + 3n\mu X_1^2 X_2 + \mu X_2^3$,

(XV) $(\lambda - m\mu) X_1^3 + 3\mu X_1 X_2^2$;

*в поле вещественных чисел к каноническим пучкам, кроме вышеупомянутых, относится также пучок*

(XV′) $(\lambda - m\mu) X_1^3 - 3\mu X_1 X_2^2$.

Теорема 1.4. *Неособенный пучок кубических двойничных форм, у которого одна из форм базиса, например $f$, имеет ранг $r=0$, строго эквивалентен в поле комплексных чисел каноническому пучку*

$$\text{(XVI)} \qquad \mu(X_1^3+X_2^3),$$

*а в поле вещественных чисел — одному и только одному из канонических пучков* (XVI) *и*

$$\text{(XVI}'\text{)} \qquad \mu(3X_1^2X_2-X_2^3).$$

Теорема 1.5. *Особенный пучок кубических двойничных форм $\lambda f+\mu\varphi$ строго эквивалентен в поле комплексных или вещественных чисел одному и только одному из канонических пучков*

$$\text{(XVII)} \qquad 3(\lambda-m\mu)X_1^2X_2,$$

$$\text{(XVIII)} \qquad \mu X_1^3+3(\lambda-m\mu)X_1^2X_2,$$

*если у форм $f$, $\varphi$ базиса дискриминанты $\Delta=0$, $\Delta'=0$ и ранги $r=2$, $r'=2$; если же одна из этих форм, например $f$, имеет ранг $r=1$ при $r'\geqq 1$, то пучок строго эквивалентен в поле комплексных или вещественных чисел одному и только одному из канонических пучков*

$$\text{(XIX)} \qquad (\lambda-m\mu)X_1^3,$$

$$\text{(XX)} \qquad \lambda X_1^3+3\mu X_1^2X_2;$$

*наконец, если одна из форм $f$, $\varphi$, например $f$, имеет ранг $r=0$, при $r'>0$, то пучок строго эквивалентен в поле комплексных или вещественных чисел одному и только одному из канонических пучков*

$$\text{(XXI)} \qquad 3\mu X_1^2X_2,$$

$$\text{(XXII)} \qquad \mu X_1^3.$$

4. Объединяя в одну категорию пучки кубических двойничных форм с одной и той же характеристикой, мы будем иметь в поле комплексных чисел десять категорий соответственно характеристикам

$$[11],\ [1\mathring{1}],\ [\mathring{1}\mathring{1}],\ [2],\ [\mathring{2}],\ [(11)],\ [(\mathring{1}\mathring{1})],\ [1],\ [\mathring{1}],\ [0];$$

в поле вещественных чисел, кроме этих категорий, существует еще одна категория, соответствующая характеристике $[\overline{1}\overline{1}]$.

Пучки, принадлежащие различным категориям, не являются строго эквивалентными, тогда как пучки одной и той же категории с характеристикой $[\mathring{1}\mathring{1}]$ строго эквивалентны в поле комплексных или вещественных чисел, так же как строго эквивалентны пучки, принадлежащие категории с любой из характеристик $[11]$, $[1\mathring{1}]$, $[2]$, $[\mathring{2}]$ (а также $[\overline{1}\overline{1}]$ в случае поля вещественных чисел), если элементарные делители этих пучков одни и те же. Эти категории представлены каноническими пучками

(I), (XII), (XIII), (XVIII), (XX), (I′).

Что же касается категорий с характеристиками $[(11)]$, $[(\mathring{1}\mathring{1})]$, $[1]$, $[\mathring{1}]$, $[0]$, то каждую из них можно подразделить на конечное число типов таким образом, что пучки, принадлежащие различным типам, не будут строго эквивалентными, тогда как пучки одного и того же типа будут строго эквивалентны в поле комплексных или вещественных чисел, если они имеют одни и те же элементарные делители или вовсе их не имеют и одновременно являются особенными или неособенными, обладая в последнем случае пропорциональными дискриминантами (одного и того же знака в случае поля вещественных чисел). Так, в поле комплексных чисел категория с характеристикой $[(11)]$ в зависимости от того, будут ли дискриминанты $\Delta$, $\Delta'$ форм $f$, $\varphi$ отличны от нуля или же $\Delta=0$, $\Delta'=0$ при $r=2$, $r'=2$, подразделяется на два типа, представителями которых являются канонические пучки (II) и (XVII).

Точно так же категория с характеристикой $[(\mathring{1}\mathring{1})]$, смотря по тому, будет ли при $r=0$ дискриминант $\Delta'$ отличным от нуля или же $\Delta'=0$ при $r'=2$, подразделяется на два типа, представляемых каноническими пучками (XVI) и (XXI).

Категория с характеристикой $[1]$ может быть подразделена на пять типов в зависимости от того, будут ли ранги $r$, $r'$ форм $f$, $\varphi$ равны 2 или 1, причем в случае, когда $r=2$ и $r'=2$, отмечаем, обе ли формы $f$, $\varphi$ имеют дискриминанты, не равные нулю, или только одна из них и является ли тогда элементарный делитель пучка двукратным или трехкратным делителем его дискриминанта $\Delta(\lambda, \mu)$. Эти типы представлены каноническими формами (III), (IV), (VI), (VII), (XIX). Категория с характеристикой $[\mathring{1}]$ подразделяется на четыре типа, смотря по тому, будет ли ранг одной из форм $f$, $\varphi$, например $f$, имеющей дискриминант $\Delta=0$ (дискриминант $\Delta'$ другой формы $\varphi$ может равняться или не равняться нулю), равен 2, 1 или 0, причем в случае, когда $r=1$, отмечаем, является ли элементарный делитель пучка двукратным или трехкратным делителем его дискриминанта $\Delta(\lambda, \mu)$. Эти типы представлены каноническими пучками (VIII), (XIV), (XV), (XXII). Наконец, категорию с характеристикой $[0]$ можно подразделить на четыре типа, различая случаи, когда обе формы, $f$ и $\varphi$, обладающие рангами $r=2$ и $r'=2$, будут иметь дискриминанты, не равные нулю, или только одна из них, и отмечая во втором случае, равен или не равен нулю инвариант $L_1$, причем в случае, когда $L_1=0$, отмечаем также, имеет ли дискриминант $\Delta(\lambda, \mu)$ пучка простые делители или все его делители — кратные. Представителями этих типов являются канонические пучки (V), (IX), (X), (XI).

То же подразделение категорий кубических двойничных форм на типы будет иметь место и в поле вещественных чисел, если только допустим распадение некоторых типов форм.

Так, в категории с характеристикой $[(11)]$ тип, у которого дискриминанты $\Delta$, $\Delta'$ форм $f$, $\varphi$ отличны от нуля, распадается на два: тип с каноническим видом (II), если $\Delta<0$, и тип с каноническим видом (II$'$), если $\Delta>0$. В категории с характеристикой $[(\mathring{1}\mathring{1})]$, тип, у которого одна из форм $f$, $\varphi$, например $f$, имеет ранг $r=0$, а другая форма $\varphi$ обладает дискриминантом $\Delta'\neq 0$, распадается на два: тип с каноническим видом (XVI), если $\Delta'<0$, и тип с каноническим видом (XVI$'$), если $\Delta'>0$. В категории с характеристикой $[1]$ каждый из двух типов, у которых $\Delta\neq 0$ и $\Delta'\neq 0$, распадается на два: тип с каноническим видом (III) или (IV), если $\Delta<0$, и тип с каноническим видом (III$'$) или (IV$'$), если $\Delta>0$; точно так же каждый из двух типов, у которых одна из форм $f$, $\varphi$, например $f$, имеет дискриминант $\Delta=0$ и ранг $r=2$, а у другой формы $\varphi$ дискриминант $\Delta'\neq 0$ распадается на два: тип с каноническим видом (VI) или (VII), если $L_1<0$, и тип с каноническим видом (VI$'$) или (VII$'$), если $L_1>0$. В категории с характеристикой $[\mathring{1}]$ тип, у которого одна из форм $f$, $\varphi$, например $f$, имеет дискриминант $\Delta=0$ и ранг $r=2$, распадается на два: тип с каноническим видом (VIII), если $L_1<0$, и тип с каноническим видом (VIII$'$), если $L_1>0$: точно так же тип, у которого одна из форм $f$, $\varphi$, например $f$, имеет дискриминант $\Delta=0$ и ранг $r=1$, причем элементарный делитель пучка есть трехкратный делитель его дискриминанта, распадается на два: тип с каноническим видом (XV), если $L_3<0$, и тип с каноническим видом

(XV′), если $L_3 > 0$. В категории с характеристикой [0] тип, у которого $\Delta \neq 0$ и $\Delta' \neq 0$, распадается на два: тип с каноническим видом (V), если $\Delta < 0$, и тип с каноническим видом (V′), если $\Delta > 0$.

Результаты классификации пучков кубических двойничных форм (у которых не все формы равны тождественно нулю) в комплексной и вещественной областях сведены в нижеследующих таблицах[1]).

5. Полученным результатам дадим геометрическую интерпретацию; с этой точки зрения представляют интерес лишь неособенные пучки кубических двойничных форм, принадлежащие категориям с характеристиками $[11]$, $[\overline{1}\overline{1}]$, $[1\overset{\circ}{1}]$, $[\overset{\circ}{1}\overset{\circ}{1}]$, а также тем типам из категорий с характеристиками $[1]$, $[\overset{\circ}{1}]$, у которых элементарный делитель пучка является трехкратным делителем его дискриминанта.

Теорема 1.6. *Каждая из троек различных точек прямой, задаваемых кубическими двойничными формами неособенного пучка $\lambda f + \mu\varphi$, принадлежащего любой из категорий с характеристиками $[11]$, $[\overline{1}\overline{1}]$, $[1\overset{\circ}{1}]$, $[\overset{\circ}{1}\overset{\circ}{1}]$, составляет с каждой из точек, задаваемых якобианом форм $f$, $\varphi$ базиса пучка, эквиангармоническую четверку.*

Действительно, беря канонический пучок (I), представляющий неособенные пучки кубических двойничных форм, принадлежащие категории с характеристикой [11], находим задаваемые этим пучком тройки различных точек прямой

$$M_1(\alpha,\ 1),\qquad M_2(\varepsilon\alpha,\ 1),\qquad M_3(\varepsilon^2\alpha,\ 1), \tag{1.35}$$

где

$$\alpha = \sqrt[3]{-\frac{\lambda - m_2\mu}{\lambda - m_1\mu}} \neq 0,\qquad \varepsilon = -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\qquad (0 \neq m_1 \neq m_2 \neq 0).$$

Якобиан форм $X_1^3 + X_2^3$ и $-m_1X_1^3 - m_2X_2^3$, образующих базис пучка (I), равен

$$(m_1 - m_2)\,X_1^2X_2^2 \tag{1.36}$$

и определяет две различные точки прямой

$$N_1(0,\ 1)\quad \text{и}\quad N_2(1,\ 0). \tag{1.37}$$

Составляя двойное отношение каждой из этих точек с тремя точками (1.35), будем иметь:

$$(N_1M_1M_2M_3) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ \varepsilon\alpha & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ \varepsilon^2\alpha & 1 \end{vmatrix}} : \frac{\begin{vmatrix} \alpha & 1 \\ \varepsilon\alpha & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \alpha & 1 \\ \varepsilon^2\alpha & 1 \end{vmatrix}} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$(N_2M_1M_2M_3) = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \varepsilon\alpha & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \varepsilon^2\alpha & 1 \end{vmatrix}} : \frac{\begin{vmatrix} \alpha & 1 \\ \varepsilon\alpha & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \alpha & 1 \\ \varepsilon^2\alpha & 1 \end{vmatrix}} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

[1]) Эту классификацию можно назвать строгой, поскольку принадлежность двух пучков одному и тому же классу влечет за собой принадлежность одному и тому же классу двух пар кубических двойничных форм, образующих базисы рассматриваемых пучков. Строгая классификация пучков равносильна классификации пар кубических двойничных форм, чего нельзя сказать о нестрогой классификации, допускающей принадлежность одному и тому же классу двух пучков, базисы которых $f$, $\varphi$ и $f'$, $\varphi'$ связаны соотношениями $f' = \lambda_1 f + \mu_1\varphi$, $\varphi' = \lambda_2 f + \mu_2\varphi$ при условии, что $\begin{vmatrix} \lambda_1 & \mu_1 \\ \lambda_2 & \mu_2 \end{vmatrix} \neq 0$ (упражнения 3, 4).

Таблица I

**Пучки кубических двойничных форм над полем комплексных чисел**

| категории | типы | канонические виды |
|---|---|---|
| $[11]$ | | (I) |
| $[1\mathring{1}]$ | | (XII) |
| $[\mathring{1}\mathring{1}]$ | | (XIII) |
| $[2]$ | | (XVIII) |
| $[\mathring{2}]$ | | (XX) |
| $[(11)]$ | $\Delta \neq 0$ и $\Delta' \neq 0$ | (II) |
| | $\Delta = 0,\ r = 2$ и $\Delta' = 0,\ r' = 2$ | (XVII) |
| $[(\mathring{1}\mathring{1})]$ | $r = 0$: $\Delta' \neq 0$ | (XVI) |
| | $r = 0$: $\Delta' = 0,\ r' = 2$ | (XXI) |
| $[1]$ | $\Delta \neq 0$ и $\Delta' \neq 0$: Элементарный делитель пучка есть двукратный делитель его дискриминанта | (III) |
| | $\Delta \neq 0$ и $\Delta' \neq 0$: Элементарный делитель пучка есть трехкратный делитель его дискриминанта | (IV) |
| | $\Delta = 0$ и $r = 2$, $\Delta' \neq 0$: Элементарный делитель пучка есть двукратный делитель его дискриминанта | (VI) |
| | $\Delta = 0$ и $r = 2$, $\Delta' \neq 0$: Элементарный делитель пучка есть трехкратный делитель его дискриминанта | (VII) |
| | $r = 1,\ r' = 1$ | (XIX) |
| $[\mathring{1}]$ | $\Delta = 0$: $r = 2$ | (VIII) |
| | $\Delta = 0$: $r = 1$: Элементарный делитель пучка есть двукратный делитель его дискриминанта | (XIV) |
| | $\Delta = 0$: $r = 1$: Элементарный делитель пучка есть трехкратный делитель его дискриминанта | (XV) |
| | $\Delta = 0$: $r = 0$ | (XXII) |
| $[0]$ | $\Delta \neq 0$ и $\Delta' \neq 0$ | (V) |
| | $\Delta = 0$ и $r = 2$, $\Delta' \neq 0$: $L_1 = 0$: Существуют простые делители дискриминанта пучка | (IX) |
| | $\Delta = 0$ и $r = 2$, $\Delta' \neq 0$: $L_1 = 0$: Все делители дискриминанта пучка — кратные | (X) |
| | $\Delta = 0$ и $r = 2$, $\Delta' \neq 0$: $L_1 \neq 0$ | (XI) |

Таблица II

**Пучки кубических двойничных форм над полем вещественных чисел**

| категории | типы | канонические виды |
|---|---|---|
| $[11]$ | | (I) |
| $[1\mathring{1}]$ | | (XII) |
| $[\mathring{1}\mathring{1}]$ | | (XIII) |
| $[2]$ | | (XVIII) |
| $[\mathring{2}]$ | | (XX) |
| $[\overline{11}]$ | | (I′) |
| $[(11)]$ | $\Delta \neq 0$ и $\Delta' \neq 0$; $\Delta < 0$ | (II) |
| | $\Delta \neq 0$ и $\Delta' \neq 0$; $\Delta > 0$ | (II′) |
| | $\Delta = 0,\ r = 2$ и $\Delta' = 0,\ r' = 2$ | (XVII) |
| $[(\mathring{1}\mathring{1})]$ | $r = 0$; $\Delta' \neq 0$; $\Delta' < 0$ | (XVI) |
| | $r = 0$; $\Delta' \neq 0$; $\Delta' > 0$ | (XVI′) |
| | $r = 0$; $\Delta' = 0 \quad r' = 2$ | (XXI) |
| $[1]$ | $\Delta \neq 0$ и $\Delta' \neq 0$; Элементарный делитель пучка есть двукратный делитель его дискриминанта $\Delta(\lambda, \mu)$; $\Delta < 0$ | (III) |
| | $\Delta \neq 0$ и $\Delta' \neq 0$; Элементарный делитель пучка есть двукратный делитель его дискриминанта $\Delta(\lambda, \mu)$; $\Delta > 0$ | (III′) |
| | $\Delta \neq 0$ и $\Delta' \neq 0$; Элементарный делитель пучка есть трехкратный делитель его дискриминанта $\Delta(\lambda, \mu)$; $\Delta < 0$ | (IV) |
| | $\Delta \neq 0$ и $\Delta' \neq 0$; Элементарный делитель пучка есть трехкратный делитель его дискриминанта $\Delta(\lambda, \mu)$; $\Delta > 0$ | (IV′) |
| | $\Delta = 0$ и $r = 2,\ \Delta' \neq 0$; Элементарный делитель пучка есть двукратный делитель его дискриминанта $\Delta(\lambda, \mu)$; $L_1 < 0$ | (VI) |
| | $\Delta = 0$ и $r = 2,\ \Delta' \neq 0$; Элементарный делитель пучка есть двукратный делитель его дискриминанта $\Delta(\lambda, \mu)$; $L_1 > 0$ | (VI′) |
| | $\Delta = 0$ и $r = 2,\ \Delta' \neq 0$; Элементарный делитель пучка есть трехкратный делитель его дискриминанта $\Delta(\lambda, \mu)$; $L_1 < 0$ | (VII) |
| | $\Delta = 0$ и $r = 2,\ \Delta' \neq 0$; Элементарный делитель пучка есть трехкратный делитель его дискриминанта $\Delta(\lambda, \mu)$; $L_1 > 0$ | (VII′) |
| | $r = 1,\ r' = 1$ | (XIX) |
| $[\mathring{1}]$ | $\Delta = 0$; $r = 2$; $L_1 < 0$ | (VIII) |
| | $\Delta = 0$; $r = 2$; $L_1 > 0$ | (VIII′) |
| | $\Delta = 0$; $r = 1$; Элементарный делитель пучка есть двукратный делитель его дискриминанта $\Delta(\lambda, \mu)$ | (XIV) |
| | $\Delta = 0$; $r = 1$; Элементарный делитель пучка есть трехкратный делитель его дискриминанта $\Delta(\lambda, \mu)$; $L_3 < 0$ | (XV) |
| | $\Delta = 0$; $r = 1$; Элементарный делитель пучка есть трехкратный делитель его дискриминанта $\Delta(\lambda, \mu)$; $L_3 > 0$ | (XV′) |
| | $\Delta = 0$; $r = 0$ | (XXII) |
| $[0]$ | $\Delta \neq 0$ и $\Delta' \neq 0$; $\Delta < 0$ | (V) |
| | $\Delta \neq 0$ и $\Delta' \neq 0$; $\Delta > 0$ | (V′) |
| | $\Delta = 0$ и $r = 2,\ \Delta' \neq 0$; $L_1 = 0$; Существуют простые делители дискриминанта пучка | (IX) |
| | $\Delta = 0$ и $r = 2,\ \Delta' \neq 0$; $L_1 = 0$; Все делители дискриминанта пучка—кратные | (X) |
| | $\Delta = 0$ и $r = 2,\ \Delta' \neq 0$; $L_1 \neq 0$ | (XI) |

Таким образом, получаем эквиангармонические четверки

$$N_1,\ M_1,\ M_2,\ M_3 \quad \text{и} \quad N_2,\ M_1,\ M_2,\ M_3.$$

Для канонического пучка (I′), представляющего неособенные пучки кубических двойничных форм, принадлежащие категории с характеристикой $[\bar{1}\bar{1}]$, находим тройки задаваемых им различных точек прямой

$$M_1(\alpha_1,\ 1),\qquad M_2(\alpha_2,\ 1),\qquad M_3(\alpha_3,\ 1),$$

где

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= l+gh(g+h),\\
\alpha_2 &= l+\frac{gh}{2}\left[\left(i\sqrt{3}-1\right)g-\left(i\sqrt{3}+1\right)h\right],\\
\alpha_3 &= l+\frac{gh}{2}\left[-\left(i\sqrt{3}+1\right)g+\left(i\sqrt{3}-1\right)h\right],
\end{aligned}$$

причем

$$l=\frac{\lambda-u\mu}{v\mu},\qquad g=\sqrt[3]{l+i},\qquad h=\sqrt[3]{l-i}.$$

Якобиан $v(X_1^2+X_2^2)^2$ форм

$$3X_1^2X_2-X_2^3,\qquad -vX_1^3-3uX_1^2X_2+3vX_1X_2^2+uX_2^3$$

базиса пучка (I′) определяет две различные точки прямой

$$N_1(i,\ 0)\quad \text{и}\quad N_2(-i,\ 0).$$

В этом случае также имеем:

$$(N_1M_1M_2M_3)=\frac{\begin{vmatrix} i & 1\\ \alpha_2 & 1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} i & 1\\ \alpha_3 & 1\end{vmatrix}}:\frac{\begin{vmatrix} \alpha_1 & 1\\ \alpha_2 & 1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \alpha_1 & 1\\ \alpha_3 & 1\end{vmatrix}}=\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$(N_2M_1M_2M_3)=\frac{\begin{vmatrix} -i & 1\\ \alpha_2 & 1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -i & 1\\ \alpha_3 & 1\end{vmatrix}}:\frac{\begin{vmatrix} \alpha_1 & 1\\ \alpha_2 & 1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \alpha_1 & 1\\ \alpha_3 & 1\end{vmatrix}}=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Аналогичный результат получим, рассматривая канонические пучки (XII), (XIII), представляющие неособенные пучки кубических двойничных форм, принадлежащие соответственно категориям с характеристиками $[\mathring{1}1]$, $[\mathring{1}\mathring{1}]$, и якобиан $X_1^2X_2^2$ форм базиса каждого из пучков (XII), (XIII).

Теорема 1.7. *Каждая из троек различных точек прямой, задаваемых кубическими двойничными формами неособенного пучка $\lambda f+\mu\varphi$, принадлежащего тем типам из категорий с характеристиками* $[1]$, $[\mathring{1}]$, *у которых элементарный делитель пучка является трехкратным делителем его дискриминанта, составляет гармоническую четверку с каждой точкой, задаваемой якобианом форм $f$, $\varphi$ базиса пучка, отличной от точек рассматриваемой тройки.*

Для доказательства рассмотрим канонические пучки (IV) и (IV′), (VII) и (VII′), (XV) и (XV′), представляющие типы пучков, упоминаемые в теореме.

Беря канонический пучок (IV) или (IV′), получим задаваемые этим пучком тройки различных точек прямой

$$L_1(1,\ 0),\qquad L_2(\beta,\ 1),\qquad L_3(-\beta,\ 1), \tag{1.38}$$

где

$$\beta=\sqrt{-\frac{\lambda-m_1\mu}{3(\lambda-m\mu)}}\quad \text{для пучка (IV)}$$

или $(\beta\neq 0)$.

$$\beta=\sqrt{\frac{\lambda-m_1\mu}{3(\lambda-m\mu)}}\quad \text{для пучка (IV')}$$

Якобианы форм $3X_1^2X_2+X_2^3$, $-3mX_1^2X_2-m_1X_2^3$ базиса пучка (IV) и форм $3X_1^2X_2-X_2^3$, $-3mX_1^2X_2+m_1X_2^3$ базиса пучка (IV') с точностью до числового множителя равны

$$X_1X_2^3. \tag{1.39}$$

Каждый из якобианов определяет две различные точки (1.37), из которых только одна точка $N_1(0,\ 1)$ отлична от точек (1.38).

Составляя двойное отношение этих четырех точек, находим:

$$(N_1L_1L_2L_3)=\frac{\begin{vmatrix}0&1\\ \beta&1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}0&1\\ -\beta&1\end{vmatrix}}:\frac{\begin{vmatrix}1&0\\ \beta&1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1&0\\ -\beta&1\end{vmatrix}}=-1.$$

Имеем, таким образом, гармонические четверки $N_1$, $L_1$, $L_2$, $L_3$.

Возьмем теперь канонический пучок (VII) или (VII'). Получим тогда тройки различных точек прямой

$$P_1(1,\ 0),\qquad P_2(\gamma,\ 1),\qquad P_3(-\gamma,\ 1), \tag{1.40}$$

где

$$\gamma=\sqrt{-\frac{\mu}{3(\lambda-m\mu)}}\quad \text{для пучка (VII)}$$

или

$$\gamma=\sqrt{\frac{\mu}{3(\lambda-m\mu)}}\quad \text{для пучка (VII')}.$$

Так как якобианы форм базиса каждого из рассматриваемых канонических пучков с точностью до числового множителя представляются выражением (1.39), то из двух различных точек (1.37), задаваемых этими якобианами, только точка $N_1(0,\ 1)$ отлична от точек (1.40). Составляя двойное отношение этих четырех точек, получаем $(N_1P_1P_2P_3)=-1$.

Имеем, следовательно, гармонические четверки $N_1$, $P_1$, $P_2$, $P_3$.

Беря, наконец, канонический пучок (XV) или (XV'), будем иметь тройки различных точек прямой

$$Q_1(0,\ 1),\qquad Q_2(\delta,\ 1),\qquad Q_3(-\delta,\ 1), \tag{1.41}$$

где

$$\delta=\sqrt{-\frac{3\mu}{\lambda-m\mu}}\quad \text{для пучка (XV)}$$

или $(\delta\neq 0)$,

$$\delta=\sqrt{\frac{3\mu}{\lambda-m\mu}}\quad \text{для пучка (XV')}$$

Из двух различных точек (1.37), задаваемых якобианами форм базиса каждого из пучков (XV), (XV'), равными с точностью до числового множителя выражению (1.39), только точка $N_2(1,\ 0)$ отлична от точек (1.41), и так как $(N_2Q_1Q_2Q_3)=-1$, то четверки $N_2$, $Q_1$, $Q_2$, $Q_3$ — гармонические.

6. Другую геометрическую интерпретацию получим, рассматривая инволюции, задаваемые пучком трилинейных двойничных форм, полярным неособенному пучку кубических двойничных форм $\lambda f+\mu\varphi$ (в предположении, что параметры $\lambda$, $\mu$ не принимают значений, одновременно равных нулю).

Теорема 1.8. *Каждая из троек тройных точек инволюций, задаваемых пучком трилинейных двойничных форм, полярным неособенному пучку кубических двойничных форм $\lambda f+\mu\varphi$, относящемуся к любой из категорий с характеристиками* $[11]$, $[\bar{1}\bar{1}]$, $[1\mathring{1}]$, $[\mathring{1}\mathring{1}]$, *вместе с любой из четверных точек инволюции, задаваемой четырехлинейной двойничной формой, полярной якобиану форм $f$, $\varphi$ базиса пучка, принадлежит этой четырехлинейной инволюции* [1]).

Действительно, точки (1.35) являются тройными точками трилинейных инволюций, задаваемых неособенным пучком трилинейных двойничных форм, полярным каноническому пучку (I) кубических двойничных форм, относящемуся к категории с характеристикой [11], а точки (1.41) будут четверными точками четырехлинейной инволюции, характеризуемой уравнением

$$x_1y_1z_2t_2+x_1y_2z_1t_2+x_1y_2z_2t_1+x_2y_1z_1t_2+x_2y_1z_2t_1+x_2y_2z_1t_1=0, \tag{1.42}$$

которое получим, приравнивая нулю четырехлинейную форму, полярную якобиану (1.36) форм базиса пучка (I).

Тройка точек (1.35) вместе с любой из точек (1.37), очевидно, принадлежит инволюции (1.42).

К тому же результату придем, рассматривая трилинейные инволюции, задаваемые неособенным пучком трилинейных двойничных форм, полярным каноническому пучку кубических двойничных форм (I′), (XII) или (XIII), относящемуся соответственно к категории с характерстикой $[\bar{1}\bar{1}]$, $[1\mathring{1}]$ или $[\mathring{1}\mathring{1}]$.

Теорема 1.9. *Каждая из троек тройных точек инволюций, задаваемых пучком трилинейных двойничных форм, полярным неособенному пучку кубических двойничных форм $\lambda f+\mu\varphi$, относящемуся к тем типам из категорий с характеристиками* $[1]$, $[\mathring{1}]$, *у которых элементарный делитель является трехкратным делителем его дискриминанта, вместе с совпадающей с одной из точек рассматриваемой тройки четверной точкой инволюции, задаваемой четырехлинейной формой, полярной якобиану форм $f$, $\varphi$ базиса пучка, принадлежит этой четырехлинейной инволюции.*

Для доказательства рассмотрим тройки тройных точек инволюций, задаваемых неособенным пучком трилинейных двойничных форм, полярным одному из канонических пучков кубических двойничных форм (IV) и (IV′), (VII) и (VII′), (XV) и (XV′), представляющих типы пучков, упоминаемых в теореме.

Такими тройками являются точки (1.38), (1.40), (1.41).

Точки (1.37) будут четверными точками четырехлинейной инволюции, характеризуемой уравнением

$$x_1y_2z_2t_2+x_2y_1z_2t_2+x_2y_2z_1t_2+x_2y_2z_2t_1=0, \tag{1.43}$$

которое получим, приравнивая нулю четырехлинейную форму, полярную якобиану форм базиса каждого из упомянутых выше канонических пучков, представляемому с точностью до числового множителя выражением (1.39).

Инволюции (1.43), очевидно, принадлежит каждая из троек (1.38), (1.40) вместе с совпадающей с одной из точек каждой тройки точкой $N_2$ (1, 0) пары (1.37), а также тройка (1.41) вместе с совпадающей с одной из точек этой тройки точкой $N_1$ (0, 1) той же пары (1.37). А это и требовалось доказать.

---

[1]) В однородных координатах четырехлинейная инволюция характеризуется уравнением вида

$$A_{1111}x_1y_1z_1t_1+A_{1112}(x_1y_1z_1t_2+x_1y_1z_2t_1+x_1y_2z_1t_1+x_2y_1z_1t_1)+$$
$$+A_{1122}(x_1y_1z_2t_2+x_1y_2z_1t_2+x_1y_2z_2t_1+x_2y_1z_1t_2+x_2y_1z_2t_1+x_2y_2z_1t_1)+$$
$$+A_{1222}(x_1y_2z_2t_2+x_2y_1z_2t_2+x_2y_2z_1t_2+x_2y_2z_2t_1)+A_{2222}x_2y_2z_2t_2=0.$$

**Упражнения**

1. Выразить коэффициенты $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ в элементах канонической полиномиальной матрицы ($III'$), обладающей характеристикой [1], через $m$, $m_1$, $m_2$, если элементарный делитель $\lambda-m\mu$ является двукратным делителем соответствующего дискриминанта, остальные делители которого есть $\lambda-m_1\mu$ и $\lambda-m_2\mu$ ($m_1\neq m_2$).

2. Коэффициенты $\alpha_0$, $\beta_0$, $\gamma_0$, $\delta_0$ в элементах канонической полиномиальной матрицы ($V'$), обладающей характеристикой [0], выразить через $m_i$ ($i=1, 2, 3, 4$), если $\lambda-m_i\mu$ — делители соответствующего дискриминанта.

3. Используя таблицу I, дать классификацию пар кубических двойничных форм в комплексной области.

4. Используя таблицу II, дать классификацию пар кубических двойничных форм в вещественной области.

5. Показать, что пучок кубических двойничных форм $\lambda f+\mu Q$, где форма $f$ — неособенная и $Q$ — якобиан форм $f$ и $H$ [гл. III, (4.1')], строго эквивалентен в поле комплексных, а также и вещественных чисел, если дискриминант $\Delta$ формы $f$ — отрицательный, каноническому пучку

$$(\lambda+\sqrt{-\Delta}\mu)X_1^3+(\lambda-\sqrt{-\Delta}\mu)X_2^3. \tag{1.44}$$

6. Показать, что пучок $\lambda f+\mu Q$ (см. упражнение 5) в поле вещественных чисел в случае, когда дискриминант $\Delta$ формы $f$ — положительный, строго эквивалентен каноническому пучку

$$\sqrt{\Delta}\mu X_1^3+3\lambda X_1^2X_2-3\sqrt{\Delta}\mu X_1X_2^2-\lambda X_2^3. \tag{1.45}$$

7. Каковы элементарные делители и характеристики пучков (1.44), (1.45)?

8. Доказать, что три точки прямой, задаваемые любой из форм пучка $\lambda f+\mu Q$ (см. упражнение 5), либо различны между собой, либо совпадают с одной из точек, задаваемых гессианом формы $f$.

9. Пусть $M_1$, $M_2$, $M_3$ — одна из троек различных точек прямой, задаваемых формами пучка $\lambda f+\mu Q$ (см. упражнение 5), а $N_1$, $N_2$ — точки, задаваемые гессианом формы $f$. Показать, что пятерки точек $N_1$, $M_1$, $M_2$, $M_3$, $N_2$; $N_1$, $M_2$, $M_3$, $M_1$, $N_2$; $N_1$, $M_3$, $M_1$, $M_2$, $N_2$ проективно эквивалентны (Г. Б. Гуревич [12]).

10. Доказать, что три точки прямой, задаваемые какой-либо кубической двойничной формой неособенного пучка $\lambda f+\mu\varphi$, принадлежащего любой из категорий с характеристиками $[11]$, $[\bar{1}\bar{1}]$, $[1\mathring{1}]$, $[1\ddot{1}]$, либо различны между собой, либо совпадают и в последнем случае сливаются с одной из точек, задаваемых якобианом форм $f$, $\varphi$ базиса пучка.

## § 2. Классификация пучков кубических тройничных форм

1. Пусть дан пучок кубических тройничных форм над полем комплексных чисел

$$\lambda f+\mu\varphi, \tag{2.1}$$

где $\lambda$, $\mu$ — переменные параметры, а формы

$$f=\sum_{i,j,k=1}^{3}A_{ijk}x_ix_jx_k, \qquad \varphi=\sum_{i,j,k=1}^{3}B_{ijk}x_ix_jx_k$$

с соответствующими симметрическими кубическими матрицами

$$A=\|A_{ijk}\|, \qquad B=\|B_{ijk}\| \qquad (i, j, k=1, 2, 3)$$

образуют базис пучка.

Исследование этого пучка ограничим наиболее интересным случаем, когда его характеристика $[\varepsilon_1\dots\varepsilon_m]$ — наивысшая, т. е. $\varepsilon_1+\dots+\varepsilon_m=3$.

Для этого необходимо и достаточно, чтобы наибольший общий делитель $D_3(\lambda, \mu)$ кубических миноров 3-го порядка, порождаемых матрицей $\lambda A+\mu B$ пучка (2.1) был кубической формой от $\lambda$, $\mu$, что возможно только тогда, когда ранг (двумерный или трехмерный) $r(\lambda, \mu)$ этой матрицы равен 3, т. е. когда пучок (2.1) — регулярный.

В этом случае, если формы $f$, $\varphi$ базиса пучка линейно зависимы, то характеристика его, как нетрудно убедиться, будет $[(111)]$. Тогда все формы пучка являются попарно линейно зависимыми и представляемые ими плоские линии 3-го порядка совпадают.

Если же формы $f$ и $\varphi$ линейно независимы, то, принимая за базис пучка (2.1) его формы

$$f_1 = \lambda_1 f + \mu_1\varphi, \qquad \varphi_1 = \lambda_2 f + \mu_2\varphi,$$

где

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & \mu_1 \\ \lambda_2 & \mu_2 \end{vmatrix} \neq 0$$

и $\lambda_1$, $\mu_1$ удовлетворяют условию

$$S(\lambda_1, \mu_1) = 0,$$

можно представить этот пучок в виде

$$\lambda f_1 + \mu\varphi_1. \tag{2.2}$$

Подвергая полиномиальную кубическую матрицу, соответствующую пучку (2.2), постоянным симметрическим элементарным преобразованиям, приводящим матрицу формы $f_1$ к каноническому виду, соответствующему каноническому виду $F$ формы $f_1$, получим регулярный пучок вида

$$\lambda F + \mu\Phi, \tag{2.3}$$

проективно эквивалентный пучку (2.2).

Форма $F$ будет тогда одной из следующих канонических форм (см. таблицы I и III § 1 гл. V):

$$X_1^3 + X_2^3 + X_3^3, \tag{I}$$

$$X_1^3 + 3X_2^2X_3, \tag{II}$$

$$3X_1^2X_2 + 3X_2^2X_3. \tag{III}$$

В соответствии с этим различаем три типа пучков с наивысшей характеристикой.

2. Пусть

$$F = X_1^3 + X_2^3 + X_3^3. \tag{I}$$

Соответствующая пучку (2.3) полиномиальная матрица

$$\mathfrak{M}(\lambda, \mu) = \lambda\mathfrak{U} + \mu\mathfrak{B},$$

где $\mathfrak{U}$ — матрица формы $F$, а $\mathfrak{B}$ — матрица формы $\Phi$, порождает кубические миноры 3-го порядка, представляемые следующими выражениями:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{M}_{123}(\lambda, \mu) &= \lambda^3 + P_{123}^{(3)}(\lambda, \mu),\\
\mathfrak{M}_{112}(\lambda, \mu) &= 2\mu\,[\mathfrak{B}_{133}\lambda^2 + P_{112}^{(2)}(\lambda, \mu)],\\
\mathfrak{M}_{113}(\lambda, \mu) &= 2\mu\,[\mathfrak{B}_{122}\lambda^2 + P_{113}^{(2)}(\lambda, \mu)],\\
\mathfrak{M}_{122}(\lambda, \mu) &= 2\mu\,[\mathfrak{B}_{233}\lambda^2 + P_{122}^{(2)}(\lambda, \mu)],\\
\mathfrak{M}_{133}(\lambda, \mu) &= 2\mu\,[\mathfrak{B}_{223}\lambda^2 + P_{133}^{(2)}(\lambda, \mu)],\\
\mathfrak{M}_{223}(\lambda, \mu) &= 2\mu\,[\mathfrak{B}_{112}\lambda^2 + P_{223}^{(2)}(\lambda, \mu)],\\
\mathfrak{M}_{233}(\lambda, \mu) &= 2\mu\,[\mathfrak{B}_{113}\lambda^2 + P_{233}^{(2)}(\lambda, \mu)],\\
\mathfrak{M}_{111}(\lambda, \mu) &= 6\mu^2\,[(\mathfrak{B}_{122}\mathfrak{B}_{133} - \mathfrak{B}_{123}^2)\,\lambda + P_{111}^{(1)}(\lambda, \mu)],\\
\mathfrak{M}_{222}(\lambda, \mu) &= 6\mu^2\,[(\mathfrak{B}_{112}\mathfrak{B}_{233} - \mathfrak{B}_{123}^2)\,\lambda + P_{222}^{(1)}(\lambda, \mu)],\\
\mathfrak{M}_{333}(\lambda, \mu) &= 6\mu^2\,[(\mathfrak{B}_{113}\mathfrak{B}_{223} - \mathfrak{B}_{123}^2)\,\lambda + P_{333}^{(1)}(\lambda, \mu)],
\end{aligned}$$

где через $P_{ijk}^{(l)}(\lambda, \mu)$ обозначены формы $l$-й степени от $\lambda$, $\mu$, не содержащие $\lambda^l$.

Так как все эти миноры, кроме $\mathfrak{M}_{123}(\lambda, \mu)$, делятся на $\mu$, то для того, чтобы их наибольший общий делитель $D_3(\lambda, \mu)$ был кубической формой от $\lambda$, $\mu$, а следовательно, пучок (2.3) имел наивысшую характеристику, необходимо, чтобы все они, кроме $\mathfrak{M}_{123}(\lambda, \mu)$, тождественно равнялись нулю.

Поэтому

$$\mathfrak{B}_{133}=0, \quad \mathfrak{B}_{122}=0, \quad \mathfrak{B}_{233}=0, \quad \mathfrak{B}_{223}=0, \quad \mathfrak{B}_{112}=0, \quad \mathfrak{B}_{113}=0, \quad \mathfrak{B}_{123}=0$$

и пучок (2.3) имеет вид

$$(\lambda+\mathfrak{B}_{111}\mu)X_1^3+(\lambda+\mathfrak{B}_{222}\mu)X_2^3+(\lambda+\mathfrak{B}_{333}\mu)X_3^3. \tag{2.4}$$

Здесь возможны следующие три случая.

**Случай I.** Среди $\mathfrak{B}_{111}$, $\mathfrak{B}_{222}$, $\mathfrak{B}_{333}$ нет равных.

Тогда, полагая в пучке (2.4) последовательно

$$\left.\begin{array}{ll} \lambda=\dfrac{\mathfrak{B}_{333}}{\mathfrak{B}_{333}-\mathfrak{B}_{111}}, & \mu=-\dfrac{1}{\mathfrak{B}_{333}-\mathfrak{B}_{111}} \\ \text{и} & \\ \lambda=-\dfrac{\mathfrak{B}_{111}}{\mathfrak{B}_{333}-\mathfrak{B}_{111}}, & \mu=\dfrac{1}{\mathfrak{B}_{333}-\mathfrak{B}_{111}}, \end{array}\right\} \tag{2.5}$$

получим формы

$$X_1^3+lX_2^3, \qquad nX_2^3+X_3^3,$$

где

$$l=\frac{\mathfrak{B}_{333}-\mathfrak{B}_{222}}{\mathfrak{B}_{333}-\mathfrak{B}_{111}}, \qquad n=\frac{\mathfrak{B}_{222}-\mathfrak{B}_{111}}{\mathfrak{B}_{333}-\mathfrak{B}_{111}}.$$

Принимая эти формы за базис, мы можем представить пучок (2.4) в виде

$$\lambda(X_1^3+lX_2^3)+\mu(nX_2^3+X_3^3). \tag{2.6}$$

Подвергнем матрицу пучка (2.6) операции

$$\boxed{II}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{l}}.$$

Получим тогда канонический пучок

$$\lambda X_1^3+(\lambda+m\mu)X_2^3+\mu X_3^3, \tag{2.7}$$

где

$$m=\frac{\mathfrak{B}_{222}-\mathfrak{B}_{111}}{\mathfrak{B}_{333}-\mathfrak{B}_{222}}$$

отлично от 0 и $-1$.

Кубические миноры 3-го порядка, порождаемые матрицей пучка (2.7), тождественно равны нулю, кроме минора

$$\mathfrak{M}_{123}(\lambda, \mu)=\lambda(\lambda+m\mu)\mu.$$

Следовательно, их наибольший общий делитель

$$D_3(\lambda, \mu)=\lambda(\lambda+m\mu)\mu.$$

Кубические миноры 2-го порядка, порождаемые той же матрицей, имеют, кроме значений, тождественно равных нулю, также значения, равные

$$\lambda\mu, \quad \lambda(\lambda+m\mu), \qquad (\lambda+m\mu)\mu.$$

Поэтому их наибольший общий делитель $D_2(\lambda, \mu)=1$.

Таким образом, элементарные делители пучка (2.7) равны

$$\lambda, \ \lambda+m\mu, \ \mu$$

и его характеристика — $[111]$[1]).

[1]) См. сноску в следствии II теоремы 5.5 гл. III.

Относительные инварианты пучка (2.7) имеют вид

$$S(\lambda, \mu) = 0, \quad T(\lambda, \mu) = -\lambda^2(\lambda + m\mu)^2\mu^2, \quad R(\lambda, \mu) = -\lambda^4(\lambda + m\mu)^4\mu^4,$$

откуда заключаем, что $T(\lambda, \mu)$ и $R(\lambda, \mu)$ могут обращаться в нуль лишь одновременно, и это будет тогда и только тогда, когда $\mu = 0$ или $\lambda = 0$ или $\lambda = -m\mu$.

Соответствующие этим значениям параметров $\lambda, \mu$ формы пучка (2.7) пропорциональны формам

$$X_1^3 + X_2^3, \quad mX_2^3 + X_3^3, \quad -mX_1^3 + X_3^3,$$

причем $I(\lambda, \mu) = \frac{0}{0}$, $r(\lambda, \mu) = 2$, $r_{C(\lambda, \mu)} = 2$.

При всех остальных значениях параметров $\lambda, \mu$ имеем:

$$I(\lambda, \mu) = -1. \tag{2.8}$$

Обращаясь к геометрической интерпретации пучка кубических тройничных форм (2.7), видим, что соответствующий пучок плоских линий 3-го порядка состоит из эквиангармонических линий и трех троек прямых, пересекающихся в одной точке (см. таблицы I и III гл. V). Точки пересечения прямых в каждой тройке отличны одна от другой, а также и от точек, общих всем линиям пучка. Эти общие точки, число которых равно девяти, расположены по три на прямых каждой тройки.

Случай II. Среди $\mathfrak{B}_{111}$, $\mathfrak{B}_{222}$, $\mathfrak{B}_{333}$ имеется пара равных.

Пусть, например $\mathfrak{B}_{111} = \mathfrak{B}_{222} \neq \mathfrak{B}_{333}$. Давая тогда в пучке (2.4) параметрам $\lambda, \mu$ значения (2.5), получим две формы этого пучка:

$$X_1^3 + X_2^3, \quad X_3^3. \tag{2.9}$$

Принимая их за базис, приходим к каноническому пучку

$$\lambda(X_1^3 + X_2^3) + \mu X_3^3. \tag{2.10}$$

Для соответствующей матрицы имеем:

$$D_3(\lambda, \mu) = \lambda^2\mu, \quad D_2(\lambda, \mu) = \lambda, \quad D_1(\lambda, \mu) = 1,$$

а потому элементарные делители пучка (2.10) равны $\lambda, \lambda, \mu$ и его характеристика $[(11)\,1]$.

Вместе с тем находим:

$$S(\lambda, \mu) = 0, \quad T(\lambda, \mu) = -\lambda^4\mu^2, \quad R(\lambda, \mu) = -\lambda^8\mu^4,$$

откуда следует, что $T(\lambda, \mu)$ и $R(\lambda, \mu)$ могут обращаться в нуль лишь одновременно, именно тогда и только тогда, когда $\mu = 0$ или $\lambda = 0$. Из пучка (2.10) при этих значениях параметров получаем формы (2.9), причем

$$I(\lambda, \mu) = \frac{0}{0} \left(r(\lambda, \mu) = 2, \quad r_{C(\lambda, \mu)} = 2; \quad r(\lambda, \mu) = 1\right).$$

При значениях $\lambda, \mu$, отличных от нуля, выполняется условие (2.8). Следовательно, пучок плоских линий 3-го порядка, соответствующий пучку кубических тройничных форм (2.10), состоит из эквиангармонических линий, тройки пересекающихся в одной точке прямых и тройки совпадающих прямых.

Все линии пучка имеют три общие точки. Каждая из этих точек есть точка соприкасания всех нераспадающихся линий пучка. Все три точки лежат на тройной прямой пучка; касательными в этих точках являются прямые первой тройки, точка пересечения которых отлична от точек, общих всем линиям пучка.

Случай III. $\mathfrak{B}_{111}=\mathfrak{B}_{222}=\mathfrak{B}_{333}\neq 0$.

Тогда пучок (2.4) можно представить в каноническом виде

$$(\lambda+\mu)(X_1^3+X_2^3+X_3^3). \tag{2.11}$$

Его характеристика будет [(111)], причем выполняется условие (2.8) при всех значениях параметров $\lambda$, $\mu$ для которых $\lambda\neq-\mu$. Все формы пучка попарно линейно зависимы, и представляемые ими линии сливаются в одну эквиангармоническую линию.

3. Пусть, далее,

$$F=X_1^3+3X_2^2X_3. \tag{II}$$

Соответствующая пучку (2.3) полиномиальная матрица

$$\mathfrak{M}(\lambda,\mu)=\lambda\mathfrak{A}+\mu\mathfrak{B}$$

порождает кубические миноры 3-го порядка, представляемые выражениями

$$\begin{aligned}
\mathfrak{M}_{122}(\lambda,\mu)&=2[-\lambda^3+P^{(3)}_{122}(\lambda,\mu)],\\
\mathfrak{M}_{222}(\lambda,\mu)&=6\mu[-\mathfrak{B}_{122}\lambda^2+P^{(2)}_{222}(\lambda,\mu)],\\
\mathfrak{M}_{123}(\lambda,\mu)&=\mu[-2\mathfrak{B}_{233}\lambda^2+P^{(2)}_{123}(\lambda,\mu)],\\
\mathfrak{M}_{223}(\lambda,\mu)&=2\mu[-\mathfrak{B}_{113}\lambda^2+P^{(2)}_{223}(\lambda,\mu)],\\
\mathfrak{M}_{113}(\lambda,\mu)&=2\mu[\mathfrak{B}_{133}\lambda^2+P^{(2)}_{113}(\lambda,\mu)],\\
\mathfrak{M}_{133}(\lambda,\mu)&=2\mu[\mathfrak{B}_{333}\lambda^2+P^{(2)}_{133}(\lambda,\mu)],\\
\mathfrak{M}_{112}(\lambda,\mu)&=2\mu[-2\mathfrak{B}_{123}\lambda^2+P^{(2)}_{112}(\lambda,\mu)],\\
\mathfrak{M}_{111}(\lambda,\mu)&=6\mu^2[(\mathfrak{B}_{122}\mathfrak{B}_{133}-\mathfrak{B}_{123}^2)\lambda+P^{(1)}_{111}(\lambda,\mu)],\\
\mathfrak{M}_{333}(\lambda,\mu)&=6\mu^2[(\mathfrak{B}_{113}\mathfrak{B}_{333}-\mathfrak{B}_{133}^2)\lambda+P^{(1)}_{333}(\lambda,\mu)],\\
\mathfrak{M}_{233}(\lambda,\mu)&=2\mu^2[(\mathfrak{B}_{112}\mathfrak{B}_{333}-\mathfrak{B}_{113}\mathfrak{B}_{233})\lambda+P^{(1)}_{233}(\lambda,\mu)].
\end{aligned}$$

Так как все эти миноры, кроме $\mathfrak{M}_{122}(\lambda,\mu)$, делятся на $\mu$, то их наибольший общий делитель $D_3(\lambda,\mu)$ будет кубической формой от $\lambda$, $\mu$ только тогда, когда все они, за исключением $\mathfrak{M}_{122}(\lambda,\mu)$, тождественно равны нулю. Поэтому

$$\mathfrak{B}_{112}=0,\quad \mathfrak{B}_{233}=0,\quad \mathfrak{B}_{113}=0,\quad \mathfrak{B}_{133}=0,\quad \mathfrak{B}_{333}=0,\quad \mathfrak{B}_{123}=0$$

и пучок (2.3) будет иметь вид

$$(\lambda+\mathfrak{B}_{111}\mu)X_1^3+3(\lambda+\mathfrak{B}_{223}\mu)X_2^2X_3+3\mathfrak{B}_{122}\mu X_1X_2^2+\mathfrak{B}_{222}\mu X_2^3. \tag{2.12}$$

Будем различать два случая: когда $\mathfrak{B}_{111}\neq\mathfrak{B}_{223}$ и когда $\mathfrak{B}_{111}=\mathfrak{B}_{223}$.

Случай I. $\mathfrak{B}_{111}\neq\mathfrak{B}_{223}$. Тогда, полагая в пучке (2.12) последовательно

$$\lambda=-\frac{\mathfrak{B}_{223}}{\mathfrak{B}_{111}-\mathfrak{B}_{223}},\qquad \mu=\frac{1}{\mathfrak{B}_{111}-\mathfrak{B}_{223}}$$

и

$$\lambda=\frac{\mathfrak{B}_{111}}{\mathfrak{B}_{111}-\mathfrak{B}_{223}},\qquad \mu=-\frac{1}{\mathfrak{B}_{111}-\mathfrak{B}_{223}},$$

получим две формы этого пучка

$$X_1^3+mX_2^3+3nX_1X_2^2,\qquad 3X_2^2X_3-mX_2^3-3nX_1X_2^2,$$

где

$$m=\frac{\mathfrak{B}_{222}}{\mathfrak{B}_{111}-\mathfrak{B}_{223}},\qquad n=\frac{\mathfrak{B}_{122}}{\mathfrak{B}_{111}-\mathfrak{B}_{223}}.$$

Приняв эти формы за базис, представим пучок в виде

$$\lambda X_1^3+m(\lambda-\mu)X_2^3+3n(\lambda-\mu)X_1X_2^2+3\mu X_2^2X_3. \tag{2.13}$$

Рассмотрим два возможных варианта.

Вариант 1. Пусть $m$ и $n$ не равны одновременно нулю. Тогда подвергнем матрицу пучка (2.13) операциям

$$\boxed{I}+\boxed{III}\cdot n \qquad \boxed{II}+\boxed{III}\cdot\frac{m}{3}.$$

В результате получим матрицу (рис. 54), которую можно считать канонической, если $m^2+4n^3\neq 0$.

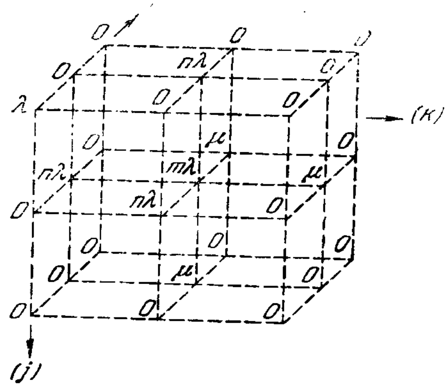



Рис. 54.

В этом случае ей соответствует канонический пучок

$$\lambda(X_1^3+mX_2^3+3nX_1X_2^2)+3\mu X_2^2X_3 \tag{2.15}$$

с базисом

$$X_1^3+mX_2^3+3nX_1X_2^2, \qquad 3X_2^2X_3.$$

Кубические миноры 3-го порядка, порождаемые матрицей (2.14), тождественно равны нулю, кроме минора $\mathfrak{M}_{122}(\lambda,\ \mu)=-2\lambda\mu^2$.

Следовательно, $D_3(\lambda,\ \mu)=\lambda\mu^2$.

Далее, $D_2(\lambda,\ \mu)=1$, поскольку среди кубических миноров 2-го порядка, порождаемых той же матрицей, имеются равные $2n\lambda^2$, $m\lambda^2$, $-2\mu^2$.

Таким образом, элементарные делители пучка (2.15) равны $\mu^2$, $\lambda$, и характеристика его будет [21]. Для матрицы (2.14) при всех значениях параметров $\lambda$, $\mu$ имеем:

$$r(\lambda,\ \mu)=\begin{cases}3 & (\lambda\neq 0,\quad \mu\neq 0),\\ 2 & (\lambda=0,\quad \mu\neq 0 \text{ или } \lambda\neq 0,\ \mu=0),\end{cases}$$

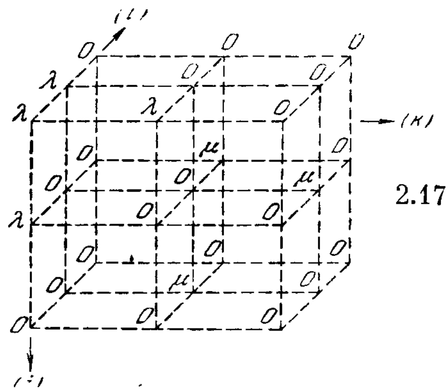
$$r_{C(\lambda,\mu)}=\begin{cases}5 & (\lambda\neq 0,\quad \mu\neq 0),\\ 1 & (\lambda=0,\quad \mu\neq 0),\\ 2 & (\lambda\neq 0,\quad \mu=0).\end{cases}$$

При этом относительные инварианты $S(\lambda,\ \mu)$, $T(\lambda,\ \mu)$, $R(\lambda,\ \mu)$ тождественно равны нулю, следовательно,

$$I(\lambda,\ \mu)=\frac{0}{0}. \tag{2.16}$$

Таким образом, пучок плоских линий 3-го порядка, представляемых формами пучка (2.15), состоит из нераспадающихся линий с двойной точкой, у которых касательные в этой точке совпадают, из тройки прямых, из которых две совпадают, и из тройки различных, пересекающихся в одной точке прямых.

Все линии пучка имеют четыре общие точки, из которых одна является двойной точкой нераспадающихся линий пучка. Двойная прямая первой тройки касается нераспадающихся линий пучка в их двойной точке, а простая прямая этой тройки проходит через остальные общие точки; точка пересечения этих прямых отлична от точек, общих всем линиям пучка.




2.17

Рис. 55.

Прямые второй тройки пересекаются в двойной точке нераспадающихся линий пучка и каждая проходит через одну из остальных общих точек.

Если $m^2+4n^3=0$, то, подвергая матрицу (2.14) операциям

$$\boxed{II}+\boxed{I}\cdot\sqrt[3]{\frac{m}{2}},\qquad \boxed{II}\cdot\sqrt[3]{\frac{2}{m}},\qquad \boxed{III}\cdot\sqrt[3]{\frac{m^2}{4}},$$

приводим ее к виду (рис. 55), которому соответствует канонический пучок

$$\lambda(X_1^3+3X_1^2X_2)+3\mu X_2^2X_3 \tag{2.18}$$

с такой же характеристикой, как и у пучка (2.15). Для матрицы (2.17) при всех значениях параметров $\lambda$, $\mu$ имеем:

$$r(\lambda,\ \mu)=\begin{cases}3 & (\lambda\neq 0,\quad \mu\neq 0),\\ 2 & (\lambda=0,\quad \mu\neq 0 \text{ или } \lambda\neq 0,\ \mu=0),\end{cases}$$

$$r_{C(\lambda,\mu)}=\begin{cases}5 & (\lambda\neq 0,\quad \mu\neq 0),\\ 1 & (\lambda=0,\quad \mu\neq 0 \text{ или } \lambda\neq 0,\ \mu=0).\end{cases}$$

При этом выполняется условие (2.16).

Следовательно, пучок плоских линий 3-го порядка, соответствующий пучку кубических тройничных форм (2.18), состоит из нераспадающихся линий с двойной точкой, у которых касательные в этой точке совпадают, и из двух троек прямых, в каждой из которых две прямые совпадают. Все линии пучка имеют три общие точки. Одна из них — двойная точка нераспадающихся линий пучка, другая — точка взаимного касания этих линий, третья — точка их пересечения. Двойная прямая одной тройки касается нераспадающихся линий пучка в их двойной точке, а простая прямая этой тройки — в их точке взаимного касания; вместе с тем последняя прямая проходит через третью общую точку линий пучка. Прямые другой тройки пересекаются в двойной точке нераспадающихся линий пучка, причем двойная прямая этой тройки проходит через общую точку взаимного касания, а простая прямая — через общую точку пересечения.

Вариант 2. Пусть $m=n=0$ в пучке (2.13).

Тогда он имеет канонический вид

$$\lambda X_1^3+3\mu X_2^2X_3. \tag{2.19}$$

Кубические миноры 3-го порядка, порождаемые соответствующей матрицей, тождественно равны нулю, кроме минора

$$\mathfrak{M}_{122}(\lambda,\ \mu)=-2\lambda\mu^2.$$

Из кубических миноров 2-го порядка, порождаемых той же матрицей, имеем, кроме тождественно равных нулю, также равные $\lambda\mu$, $-2\mu^2$.

Следовательно, $D_3(\lambda,\ \mu)=\lambda\mu^2$, $D_2(\lambda,\ \mu)=\mu$, $D_1(\lambda,\ \mu)=1$, и элементарные делители пучка (2.19) равны $\mu$, $\mu$, $\lambda$, а потому характеристика его будет $[(11)\ 1]$.

Для матрицы пучка (2.19) при всех значениях параметров $\lambda$, $\mu$ имеем:

$$r(\lambda,\ \mu)=\begin{cases}3 & (\lambda\neq 0,\quad \mu\neq 0),\\ 2 & (\lambda=0,\quad \mu\neq 0),\\ 1 & (\lambda\neq 0,\quad \mu=0),\end{cases}\qquad r_{C(\lambda,\ \mu)}=\begin{cases}5 & (\lambda\neq 0,\quad \mu\neq 0),\\ 1 & (\lambda=0,\quad \mu\neq 0),\\ 0 & (\lambda\neq 0,\quad \mu=0).\end{cases}$$

При этом выполняется условие (2.16).

Таким образом, пучок плоских линий 3-го порядка, соответствующий пучку (2.19), состоит из нераспадающихся линий с двойной точкой, у которых касательные в этой точке совпадают, и из двух троек прямых, причем в одной тройке совпадают две прямые, а в другой — все три. Все линии пучка имеют две общие точки; одна из них — двойная точка нераспадающихся линий пучка, другая—их точка соприкасания. Тройная прямая пучка проходит через эти две точки, двойная прямая касается нераспадающихся линий пучка в их двойной точке, а простая прямая — в точке соприкасания; точка пересечения этих касательных отлична от точек, общих всем линиям пучка.

Случай II. $\mathfrak{B}_{111}=\mathfrak{B}_{223}$. Пусть при этом $\mathfrak{B}_{122}$ и $\mathfrak{B}_{222}$ не равны одновременно нулю.

Здесь возможны два варианта в зависимости от того, будет ли $\mathfrak{B}_{122}\neq 0$ или $\mathfrak{B}_{122}=0$.

Вариант 1. $\mathfrak{B}_{122}\neq 0$.

Тогда, полагая в пучке (2.12) последовательно

$$\lambda=1,\qquad \mu=0$$

и

$$\lambda=-\frac{\mathfrak{B}_{111}}{\mathfrak{B}_{122}},\qquad \mu=\frac{1}{\mathfrak{B}_{122}},$$

получим две формы пучка: $X_1^3+3X_2^2X_3$, $3X_1X_2^2+lX_2^3$, где $l=\dfrac{\mathfrak{B}_{222}}{\mathfrak{B}_{122}}$.

Принимая их за базис, представим пучок (2.12) в каноническом виде

$$\lambda(X_1^3+3X_2^2X_3)+\mu(3X_1X_2^2+lX_2^3) \tag{2.20}$$

с соответствующей матрицей (рис. 56).

Порождаемые матрицей (2.21) кубические миноры 3-го порядка тождественно равны нулю, кроме минора $\mathfrak{M}_{122}(\lambda,\ \mu)=-2\lambda^3$.

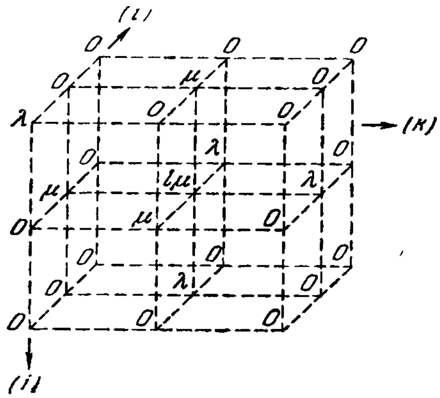
Следовательно, $D_3(\lambda,\ \mu)=\lambda^3$.

Далее, $D_2(\lambda,\ \mu)=1$, поскольку среди кубических миноров 2-го порядка, порождаемых той же матрицей, имеются равные $\lambda^2$, $-2\mu^2$. Поэтому пучок (2.20) имеет единственный элементарный делитель $\lambda^3$ и характеристика его будет [3].

Для матрицы (2.21) при всех значениях параметров $\lambda$, $\mu$ имеем:

$$r(\lambda, \mu)=\begin{cases} 3 & (\lambda\neq 0), \\ 2 & (\lambda=0, \quad \mu\neq 0), \end{cases} \qquad r_{C,(\lambda,\mu)}=\begin{cases} 5 & (\lambda\neq 0), \\ 1 & (\lambda=0, \quad \mu\neq 0). \end{cases}$$

Таким образом, пучок плоских линий 3-го порядка, соответствующий пучку (2.20), содержит, кроме нераспадающихся линий с двойной точкой, у которых касательные в этой точке совпадают, также тройку прямых, из которых две совпадают. Все линии пучка имеют две общие точки; одна из



(2.21)

Рис. 56.

них — двойная точка нераспадающихся линий пучка. Эти точки лежат на простой прямой упомянутой выше тройки, двойная прямая которой касается нераспадающихся линий пучка в их двойной точке.

При $l=0$ пучок (2.20) будет **сизигетическим**[1]) (упражнения 10, 11), так как тогда форма $3X_1X_2^2$ с точностью до постоянного множителя является гессианом любой формы пучка, соответствующей значению параметра $\lambda$, отличному от нуля (ср. [225], стр. 236).

Вариант 2. $\mathfrak{B}_{122}=0$.

В этом случае $\mathfrak{B}_{222}\neq 0$. Полагая в пучке (2.12) последовательно

$$\lambda=1, \qquad \mu=0$$

и

$$\lambda=-\frac{\mathfrak{B}_{111}}{\mathfrak{B}_{222}}, \qquad \mu=\frac{1}{\mathfrak{B}_{222}},$$

получим две формы этого пучка:

$$X_1^3+3X_2^2X_3, \qquad X_2^3.$$

Принимая их за базис, представим пучок (2.12) в каноническом виде

$$\lambda(X_1^3+3X_2^2X_3)+\mu X_2^3 \tag{2.22}$$

с соответствующей матрицей рис. 57.

Кубические миноры 3-го порядка, порождаемые матрицей (2.23), тождественно равны нулю, кроме минора $\mathfrak{M}_{122}(\lambda, \mu)=-2\lambda^3$.

Следовательно, $D_3(\lambda, \mu)=\lambda^3$.

---

[1]) Пучок кубических тройничных форм называем **сизигетическим**, если за базис его можно взять такие две формы пучка, что одна из них является гессианом другой с точностью до числового множителя (ср. [54], стр. 416).

Кубические миноры 2-го порядка, порождаемые той же матрицей, кроме значений, тождественно равных нулю, имеют также значения, равные $\lambda\mu$, $\lambda^2$, $-2\lambda^2$. Следовательно, $D_2(\lambda, \mu) = \lambda$.

Далее, $D_1(\lambda, \mu) = 1$.

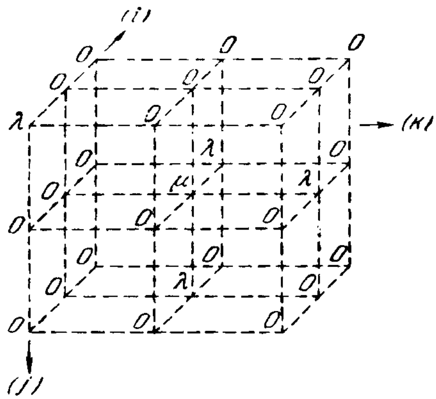
Поэтому элементарные делители пучка (2.22) равны $\lambda^2$, $\lambda$, и характеристика его будет [(21)].

Для соответствующей матрицы при всех значениях параметров $\lambda$, $\mu$ имеем:

$$r(\lambda, \mu) = \begin{cases} 3 & (\lambda \neq 0), \\ 1 & (\lambda = 0, \ \mu \neq 0), \end{cases} \qquad r_{C(\lambda, \mu)} = \begin{cases} 5 & (\lambda \neq 0), \\ 0 & (\lambda = 0, \ \mu \neq 0). \end{cases}$$

При этом выполняется условие (2.16).

Таким образом, пучок плоских линий 3-го порядка, соответствующий пучку (2.22), содержит, кроме нераспадающихся линий с двойной точкой,




(2.23)

Рис. 57.

у которых касательные в этой точке совпадают, также тройку совпадающих прямых. Все линии пучка имеют только одну общую точку, являющуюся двойной точкой нераспадающихся линий пучка; касательная в этой точке — тройная прямая пучка.

Пусть теперь $\mathfrak{B}_{122} = \mathfrak{B}_{222} = 0$. Тогда пучок (2.12), в котором, очевидно, $\mathfrak{B}_{111} = \mathfrak{B}_{223} \neq 0$, может быть представлен в каноническом виде

$$(\lambda + \mu)(X_1^3 + 3X_2^2X_3). \tag{2.24}$$

Его характеристика будет [(111)], и для соответствующей матрицы при всех значениях параметров $\lambda$, $\mu$, удовлетворяющих условию $\lambda \neq -\mu$, имеем:

$$r(\lambda, \mu) = 3, \qquad r_{C(\lambda, \mu)} = 5.$$

При этом выполняется условие (2.16).

Все линии пучка сливаются в одну нераспадающуюся линию с двойной точкой, в которой касательные совпадают.

4. Пусть, наконец,

$$F = 3X_1^2X_2 + 3X_2^2X_3. \tag{III}$$

Соответствующая пучку (2.3) полиномиальная матрица

$$\mathfrak{M}(\lambda, \mu) = \lambda\mathfrak{A} + \mu\mathfrak{B}$$

порождает кубические миноры 3-го порядка, представляемые выражениями

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{M}_{222}(\lambda, \mu) = 6[-\lambda^3 + P_{222}^{(3)}(\lambda, \mu)],\\
&\mathfrak{M}_{111}(\lambda, \mu) = 6\mu[-\mathfrak{B}_{133}\lambda^2 + P_{111}^{(2)}(\lambda, \mu)],\\
&\mathfrak{M}_{113}(\lambda, \mu) = 2\mu[-\mathfrak{B}_{333}\lambda^2 + P_{113}^{(2)}(\lambda, \mu)],\\
&\mathfrak{M}_{112}(\lambda, \mu) = 2\mu[(2\mathfrak{B}_{113} - \mathfrak{B}_{233})\lambda^2 + (\mathfrak{B}_{123}^2 - 2\mathfrak{B}_{111}\mathfrak{B}_{123} - \mathfrak{B}_{122}\mathfrak{B}_{133} -\\
&\qquad - 2\mathfrak{B}_{112}\mathfrak{B}_{333} + 2\mathfrak{B}_{112}\mathfrak{B}_{113} + 2\mathfrak{B}_{113}\mathfrak{B}_{223})\lambda\mu + P_{112}^{(2)}(\lambda, \mu)],\\
&\mathfrak{M}_{223}(\lambda, \mu) = 2\mu[-(\mathfrak{B}_{113} + \mathfrak{B}_{233})\lambda^2 + P_{223}^{(2)}(\lambda, \mu)],\\
&\mathfrak{M}_{122}(\lambda, \mu) = 2\mu[(2\mathfrak{B}_{123} - \mathfrak{B}_{111})\lambda^2 + P_{122}^{(2)}(\lambda, \mu)],\\
&\mathfrak{M}_{333}(\lambda, \mu) = 6\mu^2[(\mathfrak{B}_{113}\mathfrak{B}_{333} - \mathfrak{B}_{133}^2)\lambda + P_{333}^{(1)}(\lambda, \mu)],\\
&\mathfrak{M}_{233}(\lambda, \mu) = 2\mu[\mathfrak{B}_{333}\lambda^2 + P_{233}^{(2)}(\lambda, \mu)],\\
&\mathfrak{M}_{133}(\lambda, \mu) = 2\mu^2[(\mathfrak{B}_{111}\mathfrak{B}_{333} - \mathfrak{B}_{113}\mathfrak{B}_{133} - 2\mathfrak{B}_{123}\mathfrak{B}_{333} +\\
&\qquad + 2\mathfrak{B}_{133}\mathfrak{B}_{233})\lambda + P_{133}^{(1)}(\lambda, \mu)],\\
&\mathfrak{M}_{123}(\lambda, \mu) = \mu[3\mathfrak{B}_{133}\lambda^2 + P_{123}^{(2)}(\lambda, \mu)].
\end{aligned}$$

Отсюда заключаем, что $D_3(\lambda, \mu)$ будет кубической формой от $\lambda$, $\mu$ только тогда, когда все миноры, кроме $\mathfrak{M}_{222}(\lambda, \mu)$, тождественно равны нулю. Следовательно,

$$\mathfrak{B}_{133} = 0, \quad \mathfrak{B}_{333} = 0, \quad \mathfrak{B}_{233} = 0, \quad \mathfrak{B}_{113} = 0, \quad \mathfrak{B}_{123} = 0, \quad \mathfrak{B}_{111} = 0,$$

и пучок (2.3) имеет вид

$$3(\lambda + \mathfrak{B}_{112}\mu) X_1^2 X_2 + 3(\lambda + \mathfrak{B}_{233}\mu) X_2^2 X_3 + 3\mathfrak{B}_{122}\mu X_1 X_2^2 + \mathfrak{B}_{222}\mu X_2^3. \tag{2.25}$$

Рассмотрим два случая: когда $\mathfrak{B}_{112} \neq \mathfrak{B}_{223}$ и когда $\mathfrak{B}_{112} = \mathfrak{B}_{223}$.

Случай I. $\mathfrak{B}_{112} \neq \mathfrak{B}_{223}$.

Подвергая тогда матрицу пучка (2.25) операциям

$$\boxed{II} + \boxed{I} \cdot p, \qquad \boxed{II} + \boxed{III} \cdot (-p^2), \qquad \boxed{I} + \boxed{III} \cdot (-2p),$$

где

$$p = -\frac{\mathfrak{B}_{122}}{2(\mathfrak{B}_{112} - \mathfrak{B}_{223})},$$

мы приведем ее к виду, которому соответствует пучок

$$3(\lambda + \mathfrak{B}_{112}\mu) X_1^2 X_2 + 3(\lambda + \mathfrak{B}_{223}\mu) X_2^2 X_3 + n\mu X_2^3. \tag{2.26}$$

Полагая в пучке (2.26) последовательно

$$\lambda = -\frac{\mathfrak{B}_{223}}{\mathfrak{B}_{112} - \mathfrak{B}_{223}}, \qquad \mu = \frac{1}{\mathfrak{B}_{112} - \mathfrak{B}_{223}}$$

и

$$\lambda = \frac{\mathfrak{B}_{112}}{\mathfrak{B}_{112} - \mathfrak{B}_{223}}, \qquad \mu = -\frac{1}{\mathfrak{B}_{112} - \mathfrak{B}_{223}},$$

получим две формы этого пучка:

$$3X_1^2 X_2 + mX_2^3, \qquad 3X_2^2 X_3 - mX_2^3,$$

где

$$m = \frac{n}{\mathfrak{B}_{112} - \mathfrak{B}_{223}}.$$

Принимая их за базис, представим пучок в виде

$$3\lambda X_1^2 X_2 + 3\mu X_2^2 X_3 + m(\lambda - \mu) X_2^3. \tag{2.27}$$

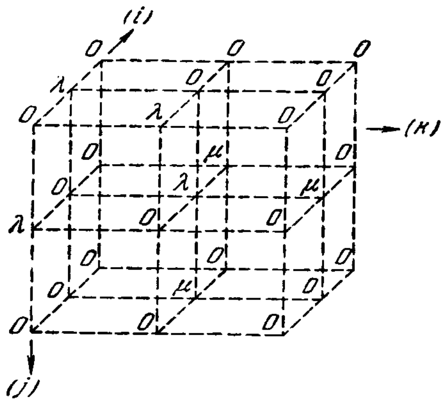
Далее, различаем два варианта в зависимости от того, будет $m \neq 0$ или $m = 0$.

Вариант 1. $m \neq 0$.

Тогда соответствующая пучку (2.27) матрица после операций

$$\boxed{II} + \boxed{III}\cdot\frac{m}{3}, \quad \boxed{III}\cdot\sqrt[3]{m^2}, \quad \boxed{II}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{m}}, \quad \boxed{I}\cdot\sqrt[6]{m}$$

принимает канонический вид (рис. 58).




(2.28)

Рис. 58.

Матрице (2.28) соответствует канонический пучок

$$\lambda\,(3X_1^2X_2 + X_2^3) + 3\mu X_2^2X_3, \tag{2.29}$$

имеющий базисом формы

$$3X_1^2X_2 + X_2^3, \qquad 3X_2^2X_3.$$

Кубические миноры 3-го порядка, порождаемые матрицей (2.28), тождественно равны нулю, кроме минора

$$\mathfrak{M}_{222}(\lambda, \mu) = -6\lambda\mu^2.$$

Следовательно, $D_3(\lambda, \mu) = \lambda\mu^2$.

Далее, $D_2(\lambda, \mu) = 1$, поскольку среди кубических миноров 2-го порядка, порождаемых той же матрицей, имеются равные $-2\lambda^2$, $-2\mu^2$.

Поэтому элементарные делители пучка (2.29) равны $\mu^2$, $\lambda$, и характеристика его будет [21].

Для матрицы (2.28) при всех значениях параметров $\lambda$, $\mu$ имеем:

$$r(\lambda, \mu) = \begin{cases} 3 & (\lambda \neq 0, \quad \mu \neq 0), \\ 2 & (\lambda = 0, \quad \mu \neq 0 \text{ или } \lambda \neq 0, \quad \mu = 0), \end{cases}$$

$$r_{C(\lambda, \mu)} = \begin{cases} 4 & (\lambda \neq 0, \quad \mu \neq 0), \\ 1 & (\lambda = 0, \quad \mu \neq 0), \\ 2 & (\lambda \neq 0, \quad \mu = 0). \end{cases}$$

При этом выполняется условие (2.16).

Следовательно, пучок (2.29) представляет совокупности конического сечения и касательной к нему прямой, а также тройку прямых, из которых две совпадают, и тройку различных пересекающихся в одной точке прямых. Все линии пучка имеют общую прямую, совпадающую с двойной прямой первой тройки и с одной из прямых второй тройки. Конические сечения пучка имеют три общие точки; одна из них есть точка касания, другие две — точки пересечения конических сечений. Двойная прямая тройки пучка касается всех конических сечений в точке их взаимного касания, а простая прямая этой тройки проходит через две общие точки их пересечения.

Вариант 2. $m=0$.

Тогда пучок (2.27) имеет канонический вид

$$3\lambda X_1^2X_2+3\mu X_2^2X_3. \tag{2.30}$$

Характеристика его та же, как и у пучка (2.29), и для соответствующей матрицы при всех значениях параметров $\lambda$, $\mu$ имеем:

$$r(\lambda,\mu)=\begin{cases}3 & (\lambda\neq 0,\quad \mu\neq 0),\\ 2 & (\lambda=0,\quad \mu\neq 0 \text{ или } \lambda\neq 0,\ \mu=0),\end{cases}$$

$$r_{C(\lambda,\mu)}=\begin{cases}4 & (\lambda\neq 0,\quad \mu\neq 0),\\ 1 & (\lambda=0,\quad \mu\neq 0 \quad \text{или } \lambda\neq 0,\quad \mu=0).\end{cases}$$

При этом выполняется условие (2.16).

Следовательно, пучок (2.30) представляет совокупности конического сечения и касательной к нему прямой, а также две тройки прямых; в каждой тройке две прямые совпадают, и все прямые этих троек составляют треугольник, у которого одна сторона — простая прямая, другая — двойная прямая, а третья тройная прямая. Последняя является общей прямой для всех линий пучка. Конические сечения пучка имеют две общие точки взаимных касаний. Простая и тройная прямые упомянутого выше треугольника касаются в этих точках конических сечений, а двойная прямая его проходит через них.

Случай II. $\mathfrak{B}_{112}=\mathfrak{B}_{223}$.

Здесь возможны два варианта, в зависимости от того, будет $\mathfrak{B}_{122}\neq 0$ или $\mathfrak{B}_{122}=0$.

Вариант 1. $\mathfrak{B}_{122}\neq 0$. Тогда, совершая над матрицей пучка (2.25) операции

$$\boxed{II}+\boxed{I}\cdot l,\qquad \boxed{II}+\boxed{III}\cdot(-l^2),\qquad \boxed{I}+\boxed{III}\cdot(-2l),$$

где

$$l=-\frac{\mathfrak{B}_{222}}{3\mathfrak{B}_{122}},$$

приведем ее к виду, которому соответствует пучок

$$3(\lambda+\mathfrak{B}_{112}\mu)(X_1^2X_2+X_2^2X_3)+3\mathfrak{B}_{122}\mu X_1X_2^2.$$

Полагая в нем последовательно

$$\lambda=1,\qquad \mu=0$$

и

$$\lambda=-\frac{\mathfrak{B}_{112}}{\mathfrak{B}_{122}},\qquad \mu=\frac{1}{\mathfrak{B}_{122}},$$

получим две формы этого пучка: $3X_1^2X_2+3X_2^2X_3$, $3X_1X_2^2$.

Принимая их за базис, будем иметь канонический вид пучка

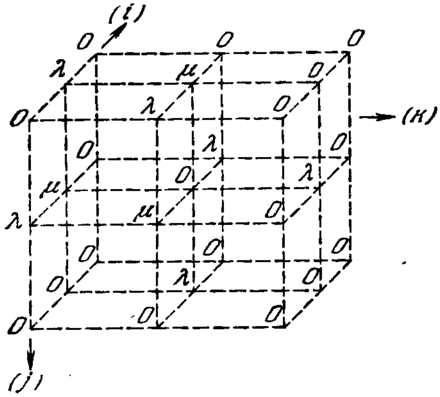
$$3\lambda(X_1^2X_2+X_2^2X_3)+3\mu X_1X_2^2, \tag{2.31}$$

которому соответствует матрица рис. 59.

Кубические миноры 3-го порядка, порождаемые матрицей (2.32), тождественно равны нулю, кроме минора $\mathfrak{M}_{222}(\lambda, \mu) = -6\lambda^3$.

Следовательно, $D_3(\lambda, \mu) = \lambda^3$.

Далее, $D_2(\lambda, \mu) = 1$, поскольку среди кубических миноров 2-го порядка, порождаемых той же матрицей, существуют равные $-2\lambda^2$, $-2\mu^2$.




(2.32)

Рис. 59.

Поэтому пучок (2.31) имеет единственный элементарный делитель $\lambda^3$ и характеристика его будет [3].

Для матрицы (2.32) при всех значениях параметров $\lambda$, $\mu$ имеем:

$$r(\lambda, \mu) = \begin{cases} 3 & (\lambda \neq 0), \\ 2 & (\lambda = 0, \quad \mu \neq 0), \end{cases}$$

$$r_{C(\lambda, \mu)} = \begin{cases} 4 & (\lambda \neq 0), \\ 1 & (\lambda = 0, \quad \mu \neq 0). \end{cases}$$

При этом выполняется условие (2.16).

Таким образом, в состав пучка (2.31), кроме совокупностей конического сечения и касательной к нему прямой, входит также тройка прямых, из которых две совпадают. Все линии пучка имеют общую прямую, совпадающую с двойной прямой этой тройки.

Конические сечения пучка имеют две общие точки; в одной из них имеется соприкасание. Простая прямая тройки пучка проходит через эти точки, а двойная прямая касается конических сечений в их точке соприкасания.

Вариант 2. $\mathfrak{B}_{122} = 0$. Если при этом $\mathfrak{B}_{222} \neq 0$, то, полагая в пучке (2.25) последовательно

$$\lambda = 1, \quad \mu = 0$$

и

$$\lambda = -\frac{\mathfrak{B}_{112}}{\mathfrak{B}_{222}}, \quad \mu = \frac{1}{\mathfrak{B}_{222}},$$

получим две формы этого пучка: $3X_1^2X_2 + 3X_2^2X_3$, $X_2^3$. Приняв их за базис, приходим к каноническому виду

$$3\lambda(X_1^2X_2 + X_2^2X_3) + \mu X_2^3 \tag{2.33}$$

сизигетического пучка (упражнения 16, 17).

Для матрицы пучка (2.33) при всех значениях параметров $\lambda$, $\mu$ имеем:

$$r(\lambda, \mu)=\begin{cases} 3 & (\lambda\neq 0), \\ 1 & (\lambda=0, \quad \mu\neq 0), \end{cases} \qquad r_{C(\lambda,\mu)}=\begin{cases} 4 & (\lambda\neq 0), \\ 0 & (\lambda=0, \quad \mu\neq 0). \end{cases}$$

При этом выполняется условие (2.16).

При $\mathfrak{B}_{222}=0$ замечаем, что пучок (2.25), в котором, очевидно, $\mathfrak{B}_{112}=\mathfrak{B}_{223}\neq 0$, можно представить в каноническом виде

$$3(\lambda+\mu)(X_1^2X_2+X_2^2X_3). \tag{2.34}$$

Его характеристика будет [(111)] и для соответствующей матрицы при всех значениях параметров $\lambda$, $\mu$, удовлетворяющих условию $\lambda\neq-\mu$, имеем:

$$r(\lambda, \mu)=3, \qquad r_{C(\lambda,\mu)}=4.$$

При этом выполняется условие (2.16).

Следовательно, все линии, представляемые пучком (2.34), совпадают, образуя совокупность конического сечения и касательной к нему прямой.

6. Все сказанное до сих пор о составе канонических видов пучков кубических тройничных форм и представляемых ими плоских линий 3-го порядка, о проективных свойствах этих линий и характеризующих их признаках сохраняет силу на основании замечаний 5.9 и 5.10 гл. III и для данного пучка (2.1) во всех рассматривавшихся случаях.

Объединяя в одну *категорию* пучки с одной и той же характеристикой, находим пять категорий пучков кубических тройничных форм, обладающих наивысшей характеристикой (характеристика [(111)] исключена).

Вместе с тем в зависимости от значений инвариантов $I(\lambda, \mu)$ и $r_{C(\lambda,\mu)}$ эти категории могут быть подразделены на *типы*. В прилагаемой таблице I приведены результаты такой классификации.

## Упражнения

1. Провести классификацию пучков вещественных кубических тройничных форм с наивысшей характеристикой и дать геометрическую интерпретацию полученных результатов (см. [32]).

2. Доказать, что сизигетический пучок кубических тройничных форм $\lambda f+\mu\varphi$ при невырожденных линейных преобразованиях (с постоянными, т. е. не зависящими от $\lambda$, $\mu$ коэффициентами) пары форм $f$, $\varphi$ остается сизигетическим.

3. Если форма $f$ сизигетического пучка $\lambda f+\mu\varphi$ — неособенная, то пучок приводится к каноническому виду

$$\lambda(X_1^3+X_2^3+X_3^3)+6\mu X_1X_2X_3 \tag{I}$$

с характеристикой [0] как в комплексной, так и в вещественной области. Доказать.

4. Пучок (I) (упражнение 3) представляет плоские линии 3-го порядка, не имеющие особых точек, а также четыре сизигетических треугольника, каждый из которых является гессианом самого себя (в вещественной области — два сизигетических треугольника; у одного из них все стороны вещественны, у другого одна сторона вещественна, а две — мнимые сопряженные). Среди нераспадающихся линий пучка содержатся четыре эквиангармонические линии, гессианами которых являются упомянутые выше сизигетические треугольники, и три пары гармонических линий, причем в каждой паре одна линия является гессианом другой (в вещественной области — по одной паре эквиангармонических и гармонических линий) (ср. [65], art. 140 b, 145).

Все линии пучка имеют девять точек пересечения, являющихся точками перегиба и расположенных по три на каждой из сторон сизигетических треугольников (в вещественной области — из девяти точек перегиба три — вещественные, а шесть — мнимые, попарно сопряженные; на каждой стороне вещественного сизигетического треугольника лежит по одной вещественной и по паре мнимых сопряженных точек, тогда как у другого сизигетического треугольника на вещественной стороне лежит тройка вещественных точек, а на мнимых сторонах — сопряженные тройки мнимых точек). Доказать.

5. Показать, что в вещественной области каждая из линий, представляемых пучком (I) (упражнение 3), с положительным абсолютным инвариантом является гессианом трех различных линий того же пучка, обладающих отрицательными абсолютными

Таблица I

| Пучки кубических тройничных форм над полем комплексных чисел | | | Пучки комплексных плоских линий 3-го порядка |
|---|---|---|---|
| категории | типы | канонические виды | состав пучков |
| I. [111] | | (2.7) | Эквиангармонические линии.<br>Три тройки прямых, пересекающихся в одной точке. |
| II. [(11)1] | $I(\lambda, \mu) = \begin{cases} -1 \; (\lambda \neq 0, \; \mu \neq 0) \\ \frac{0}{0} \; (\lambda = 0, \; \mu \neq 0 \\ \text{или} \\ \lambda \neq 0, \; \mu = 0) \end{cases}$ | (2.10) | Эквиангармонические линии.<br>Тройка прямых пересекающихся в одной точке.<br>Тройка совпадающих прямых. |
| | $I(\lambda, \mu) = \frac{0}{0}$ | (2.19) | Нераспадающиеся линии с двойной точкой, у которых касательные в этой точке совпадают.<br>Тройка прямых, из которых две совпадают.<br>Тройка совпадающих прямых. |
| III. [21] | $r_{C(\lambda, \mu)} = \begin{cases} 5 \; (\lambda \neq 0, \; \mu \neq 0) \\ 1 \; (\lambda = 0, \; \mu \neq 0) \\ 2 \; (\lambda \neq 0, \; \mu = 0) \end{cases}$ | (2.15) | Нераспадающиеся линии с двойной точкой, у которых касательные в этой точке совпадают.<br>Тройка прямых, из которых две совпадают.<br>Тройка различных пересекающихся в одной точке прямых. |
| | $r_{C(\lambda, \mu)} = \begin{cases} 5 \; (\lambda \neq 0, \; \mu \neq 0) \\ 1 \; (\lambda = 0, \; \mu \neq 0 \\ \text{или} \\ \lambda \neq 0, \; \mu = 0) \end{cases}$ | (2.18) | Нераспадающиеся линии с двойной точкой, у которых касательные в этой точке совпадают.<br>Две тройки прямых, в каждой из которых две прямые совпадают. |
| | $r_{C(\lambda, \mu)} = \begin{cases} 4 \; (\lambda \neq 0, \; \mu \neq 0) \\ 1 \; (\lambda = 0, \; \mu \neq 0) \\ 2 \; (\lambda \neq 0, \; \mu = 0) \end{cases}$ | (2.29) | Совокупности конического сечения и касательной к нему прямой.<br>Тройка прямых, из которых две совпадают.<br>Тройка различных пересекающихся в одной точке прямых. |
| | $r_{C(\lambda, \mu)} = \begin{cases} 4 \; (\lambda \neq 0, \; \mu \neq 0) \\ 1 \; (\lambda = 0, \; \mu \neq 0 \\ \text{или} \\ \lambda \neq 0, \; \mu = 0) \end{cases}$ | (2.30) | Совокупности конического сечения и касательной к нему прямой.<br>Две тройки прямых, в каждой из которых две прямые совпадают, и все прямые образуют треугольник. |

Продолжение табл. I

| Пучки кубических тройничных форм над полем комплексных чисел | | | Пучки комплексных плоских линий 3-го порядка |
| --- | --- | --- | --- |
| категории | типы | канонические виды | состав пучков |
| IV. [(21)] | $^{r}C(\lambda,\mu)=\begin{cases}5 & (\lambda\neq 0)\\ 0 & (\lambda=0,\ \mu\neq 0)\end{cases}$ | (2.22) | Нераспадающиеся линии с двойной точкой, у которых касательные в этой точке совпадают. Тройка совпадающих прямых. |
| | $^{r}C(\lambda,\mu)=\begin{cases}4 & (\lambda\neq 0)\\ 0 & (\lambda=0,\ \mu\neq 0)\end{cases}$ | (2.33) | Совокупности конического сечения и касательной к нему прямой. Тройка прямых, совпадающих с общей прямой пучка. |
| V. [3] | $^{r}C(\lambda,\mu)=\begin{cases}5 & (\lambda\neq 0)\\ 1 & (\lambda=0,\ \mu\neq 0)\end{cases}$ | (2.20) | Нераспадающиеся линии с двойной точкой, у которых касательные в этой точке совпадают. Тройка прямых, из которых две совпадают. |
| | $^{r}C(\lambda,\mu)=\begin{cases}4 & (\lambda\neq 0)\\ 1 & (\lambda=0,\ \mu\neq 0)\end{cases}$ | (2.31) | Совокупности конического сечения и касательной к нему прямой. Тройка прямых, из которых две совпадают. |

инвариантами, тогда как каждая из линий пучка (I) с отрицательным абсолютным инвариантом является гессианом только одной линии этого пучка, обладающей положительным абсолютным инвариантом.

6. Если форма $f$ сизигетического пучка $\lambda f+\mu\varphi$ — особенная неприводимая с абсолютным инвариантом $I=0$, то пучок приводится к каноническому виду

$$\lambda(X_1^3+X_2^3)+6\mu X_1X_2X_3 \qquad \text{(II)}$$

с характеристикой [2] в комплексной области, а также и в вещественной, если

$$\omega(T)=\begin{cases}+1,\\ \phantom{+}0;\end{cases}$$

если же

$$\omega(T)=\begin{cases}-1,\\ \phantom{-}0,\end{cases}$$

то пучок приводится к каноническому виду

$$3\lambda(X_1^2X_2+X_2X_3^2)+3\mu X_1^2X_3+(\lambda-\mu)X_3^3 \qquad \text{(II}')$$

с той же характеристикой. Доказать.

7. Пучок (II) (упражнение 6) представляет нераспадающиеся линии 3-го порядка с двойной точкой, у которых касательные в этой точке различны (в вещественной области линии с узловой точкой), сизигетический треугольник и тройку прямых, пересекающихся в одной точке (в вещественной области этот треугольник — вещественный, а из тройки пересекающихся в одной точке прямых одна — вещественная и две — мнимые сопряженные). Все линии пучка имеют четыре общие точки; одна из них — двойная точка нераспадающихся линий пучка (вещественная в вещественной области), в которой пересекаются прямые упомянутой выше тройки, остальные же три точки являются точками перегиба (в вещественной области одна из них вещественная, а две — мнимые

сопряженные), лежащими на одной из сторон сизигетического треугольника, другие две стороны которого касаются нераспадающихся линий пучка в их двойной точке. Доказать.

8. Пучок (II′) (упражнение 6) представляет вещественные линии 3-го порядка с изолированной точкой, сизигетический треугольник, у которого одна сторона — вещественная, а две — мнимые сопряженные, и тройку вещественных прямых, пересекающихся в одной точке.

Все линии пучка имеют четыре общие точки. Эти точки вещественны; одна из них — изолированная, в которой пересекаются прямые упомянутой выше тройки, остальные же три точки являются точками перегиба, лежащими на вещественной стороне сизигетического треугольника, мнимые стороны которого касаются нераспадающихся линий пучка в их изолированной точке. Доказать.

9. Показать, что каждой из линий, представляемых пучком (II) или (II′) (упражнение 6), кроме тройки пересекающихся в одной точке прямых, соответствует в том же пучке одна линия, являющаяся гессианом данной, и одна линия, для которой данная есть гессиан.

10. Если форма $f$ сизигетического пучка $\lambda f+\mu\varphi$ — особенная неприводимая с абсолютным инвариантом $I=\frac{0}{0}$, то пучок в комплексной и вещественной областях приводится к каноническому виду

$$\lambda(X_1^3+3X_2^2X_3)+3\mu X_1X_2^2 \tag{III}$$

с характеристикой [3]. Доказать.

11. Пучок (III) (упражнение 10) представляет нераспадающиеся линии 3-го порядка с двойной точкой, у которых касательные в этой точке совпадают, и тройку прямых, из которых две совпадают (в вещественной области все эти линии — вещественные). Все линии пучка имеют две общие точки (вещественные в вещественной области); одна из них — двойная точка нераспадающихся линий пучка, другая — точка перегиба. Они лежат на простой прямой упомянутой выше тройки, двойная прямая которой касается нераспадающихся линий пучка в их двойной точке. Эта тройка прямых есть гессиан остальных линий пучка. Доказать.

12. Если форма $f$ сизигетического пучка $\lambda f+\mu\varphi$ — особенная, разлагающаяся в произведение линейной и неприводимой квадратичной форм с абсолютным инвариантом $I=0$, то пучок приводится к каноническому виду

$$\lambda X_1^3+6\mu X_1X_2X_3 \tag{IV}$$

с характеристикой [(11)] в комплексной области, а также и в вещественной, если $\omega(T(\lambda,\mu))=\left\{\begin{matrix}+1\\0\end{matrix}\right.$, если же $\omega(T(\lambda,\mu))=\left\{\begin{matrix}-1\\0\end{matrix}\right.$, то пучок приводится к каноническому виду

$$3\lambda(X_1^2X_2+X_2X_3^2)+\mu X_2^3 \tag{IV′}$$

с той же характеристикой. Доказать.

13. Пучок (IV) (упражнение 12) представляет совокупности конического сечения и пересекающей его прямой, сизигетический треугольник и тройку прямых, совпадающих с одной из сторон этого треугольника (в вещественной области все эти линии вещественны). Последняя является общей прямой для всех линий пучка, пересекающей все конические сечения пучка в двух точках (вещественных в вещественной области), где конические сечения касаются друг друга; две другие стороны сизигетического треугольника являются касательными к коническим сечениям пучка в точках их взаимного касания. Доказать.

14. Пучок (IV′) (упражнение 12) представляет совокупности конического сечения (как вещественного, так и мнимого) и вещественной прямой, пересекающей его в двух мнимых сопряженных точках, сизигетический треугольник, одна сторона которого — вещественная, а две — мнимые сопряженные, и тройку прямых, совпадающих с вещественной стороной этого треугольника. Последняя является общей прямой для всех линий пучка, пересекающей конические сечения пучка в двух мнимых сопряженных точках, где эти сечения касаются друг друга; мнимые стороны сизигетического треугольника являются касательными к коническим сечениям пучка в точках их взаимного касания. Доказать.

15. Показать, что каждой из линий, представляемых пучком (IV) или (IV′) (упражнение 12), кроме тройки совпадающих прямых, соответствует в том же пучке одна линия, являющаяся гессианом данной, и одна линия, для которой данная есть гессиан.

16. Если форма $f$ сизигетического пучка $\lambda f+\mu\varphi$ — особенная, разлагающаяся в произведение линейной и неприводимой квадратичной форм с абсолютным инвариантом $I=\frac{0}{0}$, то пучок в комплексной и вещественной области приводится к каноническому

виду

$$3\lambda(X_1^2X_2+X_2^2X_3)+\mu X_2^3 \tag{V}$$

с характеристикой [(21)]. Доказать.

**17.** Пучок (V) (упражнение 16) представляет совокупности конического сечения и прямой, общей всем линиям пучка и касающейся конических сечений в точке их гиперсоприкасания, а также тройку прямых, совпадающих с общей прямой пучка (в вещественной области все эти линии — вещественные). Тройка совпадающих прямых есть гессиан остальных линий пучка. Доказать.

**18.** Если форма $f$ сизигетического пучка $\lambda f+\mu\varphi$ — особенная, разлагающаяся в произведение трех линейно независимых линейных форм (с абсолютным инвариантом $I=0$), то пучок приводится к каноническому виду

$$6(\lambda+\mu)X_1X_2X_3 \tag{VI}$$

с характеристикой [(111)] в комплексной области, а также и в вещественной, если $\omega(T(\lambda,\mu))=+1$; если же $\omega(T(\lambda,\mu))=-1$, то пучок приводится к каноническому виду

$$3(\lambda+\mu)(X_1^2X_2+X_2X_3^2) \tag{VI$'$}$$

с той же характеристикой. Все линии, представляемые пучком (VI), совпадают, образуя сизигетический треугольник (вещественный в вещественной области), так же как совпадают и все линии пучка (VI′), образуя сизигетический треугольник, одна сторона которого — вещественная, а две — мнимые сопряженные. Доказать.

**19.** Объединяя в одну категорию сизигетические пучки кубических тройничных форм с одной и той же характеристикой, показать, что в комплексной и вещественной областях существует всего шесть категорий этих пучков, соответственно шести характеристикам

$$[0],\quad [2],\quad [(11)],\quad [3],\quad [(21)],\quad [(111)].$$

# ОТВЕТЫ И УКАЗАНИЯ К УПРАЖНЕНИЯМ

## Глава I

### § 1

**1.** Показать сначала, что число $m$-кратных ($m=1, 2, \ldots, p-1$) сечений матрицы равно $C_p^m n^m$. *Отв.* $N=(n+1)^p-(n^p+1)$.

**2.** Доказываемое свойство следует из того, что число $m$-кратных ($1 \leqq m \leqq p-1$) сечений расширенной матрицы равно $C_p^m n^m + C_{p-1}^{m-1} \nu n^{m-1}$, а сжатой — $C_p^m n^m - C_{p-1}^{m-1} \nu n^{m-1}$.

**3.** а) Главная диагональ $A_{1111}$, $A_{2222}$. Побочные диагонали:

$$A_{1112},\ A_{2221};\quad A_{1121},\ A_{2212};\quad A_{1211},\ A_{2122};\quad A_{2111},\ A_{1222};\quad A_{1122},\ A_{2211};$$
$$A_{1212},\ A_{2121};\quad A_{1221},\ A_{2112}.$$

б) $$\left\|\begin{matrix} A_{1111} & A_{2111} \\ A_{1222} & A_{2222}\end{matrix}\right\|,\quad \left\|\begin{matrix} A_{1111} & A_{1211} \\ A_{2122} & A_{2222}\end{matrix}\right\|,\quad \left\|\begin{matrix} A_{1111} & A_{1121} \\ A_{2212} & A_{2222}\end{matrix}\right\|,\quad \left\|\begin{matrix} A_{1111} & A_{1112} \\ A_{2221} & A_{2222}\end{matrix}\right\|,$$

в) $$\left\|\begin{array}{cc|cc} A_{1111} & A_{1112} & A_{2211} & A_{2212} \\ A_{1121} & A_{1122} & A_{2221} & A_{2222}\end{array}\right\|,\quad \left\|\begin{array}{cc|cc} A_{1111} & A_{1112} & A_{2121} & A_{2122} \\ A_{1211} & A_{1212} & A_{2221} & A_{2222}\end{array}\right\|,$$

$$\left\|\begin{array}{cc|cc} A_{1111} & A_{1121} & A_{2112} & A_{2122} \\ A_{1211} & A_{1221} & A_{2212} & A_{2222}\end{array}\right\|,\quad \left\|\begin{array}{cc|cc} A_{1111} & A_{1112} & A_{1221} & A_{1222} \\ A_{2111} & A_{2112} & A_{2221} & A_{2222}\end{array}\right\|,$$

$$\left\|\begin{array}{cc|cc} A_{1111} & A_{1121} & A_{1212} & A_{1222} \\ A_{2111} & A_{2121} & A_{2212} & A_{2222}\end{array}\right\|,\quad \left\|\begin{array}{cc|cc} A_{1111} & A_{1211} & A_{1122} & A_{1222} \\ A_{2111} & A_{2211} & A_{2122} & A_{2222}\end{array}\right\|.$$

**4.** а) $$\left\|\begin{array}{cc|cc} A_{111} & A_{121} & A_{112} & A_{122} \\ A_{121} & A_{221} & A_{122} & A_{222}\end{array}\right\|^{\longrightarrow (k)}_{\longrightarrow (j),\ \downarrow (i)} \quad \text{или} \quad \left\|\begin{array}{cc|cc} A_{111} & A_{112} & A_{121} & A_{122} \\ A_{112} & A_{212} & A_{122} & A_{222}\end{array}\right\|^{\longrightarrow (j)}_{\longrightarrow (i),\ \downarrow (k)}$$

б) $$\left\|\begin{array}{ccc|ccc|ccc} A_{111} & A_{112} & A_{113} & A_{112} & A_{122} & A_{123} & A_{113} & A_{123} & A_{133} \\ A_{112} & A_{122} & A_{123} & A_{122} & A_{222} & A_{223} & A_{123} & A_{223} & A_{233} \\ A_{113} & A_{123} & A_{133} & A_{123} & A_{223} & A_{233} & A_{133} & A_{233} & A_{333}\end{array}\right\|^{\longrightarrow (i)}_{\longrightarrow (k),\ \downarrow (j)}.$$

**5.** $$\left\|\begin{array}{cc|cc} A_{1111} & A_{1112} & A_{1211} & A_{1212} \\ A_{1112} & A_{1122} & A_{1212} & A_{1222} \\ \hline A_{1211} & A_{1212} & A_{2211} & A_{2212} \\ A_{1212} & A_{1222} & A_{2212} & A_{2222}\end{array}\right\|_{\longrightarrow (i_2),\ \downarrow (i_1);\ \longrightarrow (i_4),\ \downarrow (i_3)}.$$

**6.** $$\left\|\begin{array}{cc|cc} 0 & A_{121} & 0 & A_{122} \\ -A_{121} & 0 & -A_{122} & 0\end{array}\right\|^{\longrightarrow (k)}_{\longrightarrow (j),\ \downarrow (i)}$$

или

$$\left\| \begin{array}{cc|cc} 0 & -A_{112} & 0 & -A_{122} \\ & & & \\ A_{112} & 0 & A_{122} & 0 \end{array} \right\| \begin{array}{l} \longrightarrow (j) \\ \longrightarrow (i) \\ \downarrow (k) \end{array} .$$

8. Каждому сочетанию (из $n$ элементов $1, 2, \ldots, n$ по $p$ с повторениями) $i_1, i_2, \ldots, i_p$ ($i_1 \leqq i_2 \leqq \ldots \leqq i_p$) сопоставить сочетание (из $n+p-1$ элементов по $p$ без повторений) $i_1, i_2+1, i_3+2, \ldots, i_p+p-1$. Искомое число равно $C_{n+p-1}^{p}$.

9. $\dfrac{p!}{m_1!\, m_2! \ldots m_q!}$. 10. $C_n^p$ (при $n < p$ все элементы матрицы равны нулю).

14. Показать сначала, что $N_{\alpha\beta}$ и $I_\alpha + I_\beta$, где $\beta = \alpha + \mu$ ($\mu \geqq 1$), имеют одну и ту же четность.

16. $-A_{133424}\, A_{214312}\, A_{342131}\, A_{421243}$.

17.

а) $\left| A_{\underset{i_1}{\pm}\underset{i_2}{\pm}\underset{i_3}{+}\underset{i_4}{\pm}\underset{i_5}{\pm}} \right|_3$, $\left| A_{\underset{i_1}{\pm}\underset{i_2}{\pm}\underset{i_3}{\pm}\underset{i_4}{+}\underset{i_5}{+}} \right|_3$, $\left| A_{\underset{i_1}{\pm}\underset{i_2}{\pm}\underset{i_3}{\pm}\underset{i_4}{\pm}\underset{i_5}{+}} \right|_3$;

б) $\left| A_{\underset{i_1}{+}\underset{i_2}{\pm}\underset{i_3}{\pm}\underset{i_4}{\pm}\underset{i_5}{\pm}} \right|_3$, $\left| A_{\underset{i_1}{\pm}\underset{i_2}{+}\underset{i_3}{\pm}\underset{i_4}{\pm}\underset{i_5}{\pm}} \right|_3$.

18. Принять во внимание, что $(p+1)$-мерный перманент $n$-го порядка, у которого все элементы равны 1, имеет значение $(n!)^p$.

## § 2

1. Разложить подстановку $S$ в произведение транспозиций и использовать свойство II многомерных детерминантов.

14. $1+E\left(\dfrac{p}{2}\right)$.

15. Умножить в рассматриваемом детерминанте каждое сечение (простое) какой-нибудь ориентации на $-1$ и принять во внимание свойства II и IV многомерных детерминантов.

16. Представить многомерный детерминант на основании свойства VIII в виде суммы косигнатурных детерминантов с одночленными элементами сначала в первых сечениях какой-нибудь ориентации, затем во вторых и т. д.

## § 3

2. $\left| A_{\underset{i}{+}\underset{j}{\pm}\underset{k}{\pm}} \right| = -21$, $\left| A_{\underset{i}{\pm}\underset{j}{+}\underset{k}{\pm}} \right| = -57$, $\left| A_{\underset{i}{\pm}\underset{j}{\pm}\underset{k}{+}} \right| = -15$ $\left| A_{\underset{i}{+}\underset{j}{+}\underset{k}{+}} \right| = 157$.

3. $\left| A_{\underset{i_1}{\pm}\underset{i_2}{\pm}\underset{i_3}{\pm}\underset{i_4}{\pm}} \right| = -8$, $\left| A_{\underset{i_1}{\pm}\underset{i_2}{\pm}\underset{i_3}{+}\underset{i_4}{+}} \right| = 14$, $\left| A_{\underset{i_1}{\pm}\underset{i_2}{+}\underset{i_3}{+}\underset{i_4}{+}} \right| = -44$, $\left| A_{\underset{i_1}{\pm}\underset{i_2}{+}\underset{i_3}{+}\underset{i_4}{\pm}} \right| = -30$,

$\left| A_{\underset{i_1}{+}\underset{i_2}{+}\underset{i_3}{\pm}\underset{i_4}{\pm}} \right| = 26$, $\left| A_{\underset{i_1}{+}\underset{i_2}{\pm}\underset{i_3}{+}\underset{i_4}{\pm}} \right| = 16$, $\left| A_{\underset{i_1}{+}\underset{i_2}{\pm}\underset{i_3}{\pm}\underset{i_4}{+}} \right| = -10$, $\left| A_{\underset{i_1}{+}\underset{i_2}{+}\underset{i_3}{+}\underset{i_4}{+}} \right| = 60$.

4. Использовать разложение $p$-мерного детерминанта на алгебраическую сумму $(p-1)$-мерных детерминантов.

5. Применить результат упражнения 4. 6. Воспользоваться результатом упражнения 5. 7. Применить теорему 3.2. 9. $(C_n^\nu)^p$.

10. Пополнить в данном детерминанте сечения каждой ориентации $\nu$ новыми параллельными им сечениями, все элементы которых равны нулю, кроме элементов, лежащих на главной диагонали и равных 1.

11. Предварительно рассмотреть кубический детерминант $n$-го порядка, в котором все элементы $\nu$ ($\nu < n$) сечений одной и той же ориентации равны нулю, кроме $\nu^3$ элементов, образующих кубическую матрицу $\nu$-го порядка, и показать, что этот детерминант равен произведению его единственного отличного от нуля минора $\nu$-го порядка, расположенного в упомянутых выше $\nu$ сечениях, на соответственное алгебраическое дополнение.

14. Показать, во-первых, что рассматриваемая сумма содержит члены данного детерминанта и, во-вторых, что число слагаемых в этой сумме равно $(n!)^2$.

## Глава II

### § 1

**1.** $n^3$. **2.** $n^p$. **3.**
$$\left\|\begin{array}{cc|cc} 0 & \frac{(-1)^n-1}{2} & 0 & \frac{(-1)^n(2n+1)-1}{4} \\ n & -\frac{n(n+1)}{2} & \frac{n(n+1)}{2} & -\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \end{array}\right\| \begin{array}{l} \to (i) \\ \to (k) \\ \downarrow (j) \end{array}.$$

**4.** Принять во внимание, что всякий член детерминанта матрицы $A$ есть сумма $h^n$ одночленов с одним и тем же знаком и что каждый из этих одночленов является множителем в произведении миноров одной и только одной смешанной трансверсальной совокупности их, а каждое такое произведение состоит целиком из одночленов указанного типа.

### § 2

**1.**
$$\left\|\begin{array}{cc|cc} 14 & -15 & 7 & -7 \\ 0 & 11 & -7 & 21 \end{array}\right\| \begin{array}{l} (i) \\ \to (k) \\ \downarrow (j) \end{array}.$$

**2.**
$$\left\|\begin{array}{cc|cc} -1 & 16 & -10 & 6 \\ -9 & 13 & 8 & -10 \end{array}\right\| \begin{array}{l} (i) \\ \to (k) \\ \downarrow (j) \end{array}.$$

**7.**
$$A\{i\}a=\left\|\begin{array}{cc|cc} 4 & 2 & 2 & 5 \\ -2 & 0 & 5 & -6 \\ \hline -2 & 5 & 0 & -6 \\ 10 & -9 & -9 & 9 \end{array}\right\|, \quad A\{j\}a=\left\|\begin{array}{cc|cc} 4 & 4 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & -1 & 0 \\ \hline 0 & 6 & -4 & -8 \\ 9 & -9 & -7 & 9 \end{array}\right\|,$$

$$A\{k\}a=\left\|\begin{array}{cc|cc} 4 & 0 & -2 & -1 \\ -5 & 3 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 4 & -6 & -9 \\ 6 & -6 & -6 & 9 \end{array}\right\| \begin{array}{l} \to (i_2) \\ \to (i_4) \\ \downarrow (i_3) \\ \downarrow (i_1) \end{array}.$$

**10.**
$$\left|\sum_{\lambda=1}^{n} a_{\overset{\pm}{i_1}\overset{\pm}{i_2}\overset{\pm}{i_3}\lambda}\, b_{\lambda\overset{\pm}{i_4}}\right|, \quad \left|\sum_{\lambda=1}^{n} a_{\overset{\pm}{i_1}\overset{\pm}{i_2}\lambda\overset{\pm}{i_3}}\, b_{\lambda i_4}\right| \text{ и т. д.}$$

**11.** Использовать полное разложение многомерных детерминантов.

**12.** $m_1m_2$ ($m_1$ и $m_2$ — числа, характеризующие род детерминантов).

**13.** Представить матрицу $B$ в виде суммы $n$ матриц $B_\lambda$ ($\lambda=1, 2, \ldots, n$) и применить к детерминанту $|B|$ разложение Альбеджиани (упражнение 4, § 1), показав предварительно, что все миноры 2-го и высших порядков каждого из детерминантов $|B_\lambda|$ равны нулю.

**16.** $pq$.

**17.**

а) $\left|a_{\overset{\pm}{i}\overset{+}{j}} b_{j\overset{\pm}{k}}\right|_n$, $\left|a_{\overset{\pm}{i}\overset{+}{j}} b_{\overset{\pm}{k}j}\right|_n$, $\left|a_{\overset{+}{i}\overset{+}{j}} b_{i\overset{\pm}{k}}\right|_n$, $\left|a_{\overset{+}{i}\overset{\pm}{j}} b_{\overset{\pm}{k}i}\right|_n$;

б) $\left|a_{\overset{\pm}{i}\overset{\pm}{j}} b_{j\overset{+}{k}}\right|_n$, $\left|a_{\overset{\pm}{i}\overset{\pm}{j}} b_{\overset{+}{k}j}\right|_n$, $\left|a_{\overset{\pm}{i}\overset{\pm}{j}} b_{i\overset{+}{k}}\right|_n$, $\left|a_{\overset{\pm}{i}\overset{\pm}{j}} b_{\overset{+}{k}i}\right|_n$;

в) $\left|a_{\overset{+}{i}\overset{+}{j}} b_{j\overset{+}{k}}\right|_n$, $\left|a_{\overset{+}{i}\overset{+}{j}} b_{\overset{+}{k}j}\right|_n$, $\left|a_{\overset{+}{i}\overset{+}{j}} b_{i\overset{+}{k}}\right|_n$, $\left|a_{\overset{+}{i}\overset{+}{j}} b_{\overset{+}{k}i}\right|_n$.

**18.**
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}^2 = \left|\begin{array}{cc|cc} a_{11}^2 & a_{11}a_{12} & a_{21}^2 & a_{21}a_{22} \\ a_{11}a_{12} & a_{12}^2 & a_{21}a_{22} & a_{22}^2 \end{array}\right| \begin{array}{l} \to \overset{+}{(i)} \\ \to (k) \\ \downarrow (j) \end{array}.$$

**19.** $$\left|A_{\overset{+}{i_1}\overset{\pm}{i_2}\overset{\pm}{i_3}}\right|_n\cdot\left|a_{\overset{\pm}{i}\overset{\pm}{j}}\right|_n=\left|A_{\overset{+}{k_1}\overset{+}{k_2}\overset{+}{k_3}}\,a_{k_3\overset{\pm}{k_4}}\right|_n=\left|A_{\overset{+}{k_1}\overset{+}{k_2}\overset{\pm}{k_3}}\,a_{k_2\overset{\pm}{k_4}}\right|_n=$$

$$=\left|A_{\overset{\pm}{k_1}\overset{\pm}{k_2}\overset{\pm}{k_3}}\,a_{k_1\overset{\pm}{k_4}}\right|_n=\left|A_{\overset{+}{k_1}\overset{\pm}{k_2}\overset{+}{k_3}}\,a_{\overset{+}{k_4}k_3}\right|=\left|A_{\overset{+}{k_1}\overset{+}{k_2}\overset{\pm}{k_3}}\,a_{\overset{+}{k_1}k_2}\right|_n=\left|A_{\overset{\pm}{k_1}\overset{\pm}{k_2}\overset{\pm}{k_3}}\,a_{\overset{\pm}{k_4}k_1}\right|_n.$$

**21.** Использовать результат упражнения 20, полагая в нем $A_{\alpha i_2}=\sum\limits_{i_3=1}^{n}B_{\alpha i_3}x^{(3)}_{i_2+i_3-1}$ и принимая во внимание, что

$$\left|\sum_{i_3=1}^{n}B_{\overset{\pm}{\alpha}i_3}\,x^{(3)}_{\overset{+}{i_2+i_3-1}}\,x^{(2)}_{\overset{\pm}{i_1+i_2-1}}\right|=\left|B_{\overset{\pm}{\alpha}\overset{+}{i_3}}\,x^{(3)}_{\overset{+}{i_2+i_3-1}}\,x^{(2)}_{i_1+i_2-1}\right|.$$

## § 3

**4.** Последовательно применять правило Скотта — Райса умножения кубического детерминанта на квадратный.

**8.** Последовательно применять правило Кэли — Райса умножения $p$-мерного детерминанта на квадратный.

**16.** Применить $2\nu-2$ раз правило Скотта — Райса и один раз правило Кэли — Райса.

**19.** $$\begin{array}{cc}(+) & (+)\\ \begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}\end{array}\!\!\!\!\!\!\!\!\!\!\!\!\!\!\!\!\!\!\!\!\!\!\!\!\!\!\!\!\!\!\!\!\!\!\!\!\!\!\!\!\!\!\!\!\!\!\!\!\!\!\!\!\cdot\qquad\qquad\quad^2=\left|\begin{array}{cc|cc}A_{111} & A_{112} & A_{112} & A_{122}\\ A_{112} & A_{122} & A_{122} & A_{222}\end{array}\right|\begin{array}{l}\to(\overset{+}{i})\\ \to(k),\\ \downarrow(j)\end{array}$$

где

$$A_{111}=a_{11}^3+a_{21}^3,\quad A_{112}=a_{11}^2a_{12}+a_{21}^2a_{22},\quad A_{122}=a_{11}a_{12}^2+a_{21}a_{22}^2,\quad A_{222}=a_{12}^3+a_{22}^3.$$

## § 4

**2.** Операция $\boxed{l-(ij)-m}$ равносильна цепочке симметрических элементарных преобразований по индексам $i$, $j$:

$$\boxed{l\,(ij)}+\boxed{m\,(ij)},\quad \boxed{m\,(ij)}+\boxed{l\,(ij)}\cdot(-1),\quad \boxed{m\,(ij)}\cdot(-1),\quad \boxed{l\,(ij)}+\boxed{m\,(ij)}\,(-1).$$

Операция $\boxed{l-m}$ равносильна аналогичной цепочке симметрических элементарных преобразований.

**5.** $$\left\|\begin{array}{cc|cc}-2\lambda^2-16\lambda+6 & \lambda^3-16\lambda^2+21\lambda-6 & 3\lambda+4 & \lambda-3\\ 3\lambda+4 & \lambda-3 & -4 & -\lambda+6\end{array}\right\|\begin{array}{l}\to(i)\\ \to(k);\\ \downarrow(j)\end{array}$$

$$M(\lambda)\,\{ij\}\left\|\begin{matrix}1 & 0\\ -\lambda & 1\end{matrix}\right\|\{k\}\left\|\begin{matrix}1 & \lambda\\ -3 & 3-3\lambda\end{matrix}\right\|.$$

**6.** $$\left\|\begin{array}{cc|cc}\lambda^4-3\lambda^3+6\lambda^2-\lambda-2 & \lambda^4+5\lambda+1 & \lambda^4+5\lambda+1 & \lambda^4+3\lambda^3+3\lambda^2+2\lambda+4\\ \lambda^4+5\lambda+1 & \lambda^4+3\lambda^3+3\lambda^2+2\lambda+4 & \lambda^4+3\lambda^3+3\lambda^2+2\lambda+4 & \lambda^4+6\lambda^3+15\lambda^2+17\lambda+7\end{array}\right\|\begin{array}{l}\to(i)\\ \to(k);\\ \downarrow(j)\end{array}$$

$$M(\lambda)\,\{ijk\}\left\|\begin{matrix}1 & 1\\ \lambda-1 & \lambda+2\end{matrix}\right\|.$$

§ 5

2. Применить результаты упражнений 13 и 14 § 3 гл. I.

4. Использовать обобщенную формулу Бине—Коши (упражнение 13 § 2).

6. Из результата упражнения 5 и теории обычных детерминантов следует, что

$$|T^{(\nu)}| = |a^{(\nu)}| \cdot |b^{(\nu)}| = |a|^{C_{n-1}^{\nu-1}} \cdot |b|^{C_{n-1}^{\nu-1}}.$$

8. Показать предварительно, что $|\mathfrak{M}^{(n-\nu)}|$ можно получить из $|M^{(n-\nu)}|$ путем обращения порядка сечений (простых) каждой ориентации и умножения на $-1$ одних и тех же сечений (простых) каждой альтернативной ориентации.

## Глава III

§ 1

3. Принять во внимание разложения кубического детерминанта (3.5) и (3.9) § 3 гл. I.

4. Применить тот же метод, как и при доказательстве теоремы 1.2.

6. Использовать результат упражнения 5.

8. Принять во внимание необходимое и достаточное условие совместности системы $n^{p-1}$ линейных уравнений с $n$ неизвестными, устанавливаемое при помощи теоремы Кронекера—Капелли.

9. С помощью системы (1.1) составить $(n!)^{p-2}$ систем линейных уравнений

$$\sum_{i_p=1}^{n} A_{\overline{i_1 \cdots i_{\alpha_1-1}}\, i_{\alpha_1}\, \overline{i_{\alpha_1+1} \cdots i_{p-1}}\, i_p}\, x_{i_p}^{(p)} = B_{\overline{i_1 \cdots i_{\alpha_1-1}}\, i_{\alpha_1}\, \overline{i_{\alpha_1+1} \cdots i_{p-1}}}$$

так, чтобы каждая система состояла из $n$ уравнений, у которых коэффициенты при неизвестных образуют двумерное трансверсальное сечение матрицы $A$, соответствующее направлению $i_p$, и найти для каждого неизвестного $x_\nu^{(p)}$ этих систем $(n!)^{p-2}$ значений выражения

$$x_\nu^{(p)} = \Big| (1-\delta_{i_p,\nu}) A_{\overline{i_1 \cdots i_{\alpha_1-1}}\, \overset{\pm}{i_{\alpha_1}}\, \overline{i_{\alpha_1+1} \cdots i_{p-1}}\, \overset{\pm}{i_p}} + \\ + \delta_{i_p,\nu} B_{\overline{i_1 \cdots i_{\alpha_1-1}}\, i_{\alpha_1}\, \overline{i_{\alpha_1+1} \cdots i_{p-1}}} \Big| \times \Big| A_{\overline{i_1 \cdots i_{\alpha_1-1}}\, \overset{\pm}{i_{\alpha_1}}\, \overline{i_{\alpha_1+1} \cdots i_{p-1}}\, \overset{\pm}{i_p}} \Big|^{-1}.$$

Тогда корни уравнений (1.1) могут быть представлены в виде

$$x_\nu^{(p)} = \sum (-1)^{\sum\limits_{\mu=2}^{m} I_\mu} \Big| (1-\delta_{i_p,\nu}) A_{\overline{i_1 \cdots i_{\alpha_1-1}}\, \overset{\pm}{i_{\alpha_1}}\, \overline{i_{\alpha_1+1} \cdots i_{p-1}}\, \overset{\pm}{i_p}} + \\ \pm \delta_{i_p,\nu} B_{\overline{i_1 \cdots i_{\alpha_1-1}}\, i_{\alpha_1}\, \overline{i_{\alpha_1+1} \cdots i_{p-1}}} \Big| \times \Big[ \sum (-1)^{\sum\limits_{\mu=2}^{m} I_\mu} \Big| A_{\overline{i_1 \cdots i_{\alpha_1-1}}\, \overset{\pm}{i_{\alpha_1}}\, \overline{i_{\alpha_1+1} \cdots i_{p-1}}\, \overset{\pm}{i_p}} \Big| \Big]^{-1},$$

где $I_\mu$ — число инверсий в перестановке, образуемой значениями индекса $i_{\alpha_\mu}$. Числитель и знаменатель этой дроби являются полным разложением $p$-мерных детерминантов, входящих в выражение (1.2).

10. Да; $x_1^{(3)} = 1$, $x_2^{(3)} = 2$.

11. $x_1^{(3)} = 3{,}34$; $x_2^{(3)} = 1{,}32$. Это решение отличается от приближенного решения $x_1^{(3)} = 3{,}21$; $x_2^{(3)} = 1{,}36$, найденного по способу наименьших квадратов, менее чем на 5%.

## § 2

1. **Сечения ориентации $(\underbrace{i_1 i_2})$ кубической матрицы**

$$\left\|\begin{array}{cc|cc|cc|cc} A_{1111} & A_{1112} & A_{1211} & A_{1212} & A_{2111} & A_{2112} & A_{2211} & A_{2212} \\ A_{1121} & A_{1122} & A_{1221} & A_{1222} & A_{2121} & A_{2122} & A_{2221} & A_{2222} \end{array}\right\| \begin{array}{l} \longrightarrow (\underbrace{i_1 i_2}) \\ \longrightarrow (i_4) \\ \downarrow (i_3) \end{array}$$

являются сечениями неальтернативной ориентации (с повторениями) десяти трехмерных миноров.

2. Использовать возможность представления многомерного детерминанта в виде алгебраической суммы детерминантов меньшего числа измерений.
3. Применить результат упражнения 2.
8. Использовать результат упражнения 7.
9. У матрицы

$$\left\|\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right\| \begin{array}{l} \longrightarrow (i) \\ \longrightarrow (k) \\ \downarrow (j) \end{array} \qquad \begin{array}{l} r_{ij}^{(k)} = 2, \\ r_i = r_j = 3. \end{array}$$

## § 3

1. Принять во внимание теоремы 3.3, 3.4, 3.5.
2. Показать предварительно, что элементарные преобразования матрицы $A$ вызывают симметрические элементарные преобразования матриц $A^{(i)}$, $A^{(j)}$, $A^{(k)}$.
5. См. замечание 2.4.

## § 4

4. $Q^2 + \frac{1}{2} H_i H_j^2 + \Delta F^2 = 0.$

8. Принять во внимание, что детерминант невырожденного линейного преобразования формы $F$ по какому-либо ряду ее переменных — например, $x_1$, $x_2$, $x_3$ — равен произведению чисел $t$, которые фигурируют в сопутствующих этому преобразованию операциях типа $\boxed{l(i)} \cdot t$ над матрицей $A$, и что каждая такая операция вызывает умножение $S_i$ на $t^4$ и $T_i$ на $t^6$, тогда как операции типа $\boxed{m(i)} + \boxed{l(i)} \cdot t$ не изменяют $S_i$ и $T_i$.

9. Показать предварительно, что операция типа $\boxed{l(i)} \cdot t$ над матрицей $A$ формы $F$ вызывает умножение $D$ на $t^3$, тогда как операция типа $\boxed{m(i)} + \boxed{l(i)} \cdot t$ над $A$ не изменяет $D$.

11. $A_{1111}A_{2222} - 4A_{1112}A_{1222} + 3A_{1122}^2$, $A_{111111}A_{222222} - 6A_{111112}A_{122222} + 15A_{111122}A_{112222} - 10A_{111222}^2$.
12. $A_{1111}A_{1122}A_{2222} + 2A_{1112}A_{1122}A_{1222} - A_{1111}A_{1222}^2 - A_{1112}^2A_{2222} - A_{1122}^3$.
14. См. упражнение 6 § 2 гл. II.
16. Использовать результат упражнения 11 § 3 гл. II.
18. $F_1 = A_{1111}x_1y_1z_1 + A_{1112}x_1y_1z_2 + A_{1121}x_1y_2z_1 + A_{1211}x_2y_1z_1 + A_{1222}x_2y_2z_2$, $F_2 = x_1y_1z_1 + A_{2122}x_1y_2z_2 + A_{2212}x_2y_1z_2 + A_{2221}x_2y_2z_1 + x_2y_2z_2$.
21. $f_1 = A_{1111}x_1^3 + 3A_{1122}x_1x_2^2 + x_2^3$, $f_2 = x_1^3 + 3A_{2112}x_1^2x_2 + A_{2222}x_2^3$.
22. а) $A_{11111}A_{22222} - 4A_{11112}A_{21222} + 6A_{11122}A_{21122} - 4A_{11222}A_{21112} + A_{12222}A_{21111}$;
    б) $A_{1111111}A_{2222222} - 6A_{1111112}A_{2122222} + 15A_{1111122}A_{2112222} - 20A_{1111222}A_{2111222} + 15A_{1112222}A_{2111122} - 6A_{1122222}A_{2111112} + A_{1222222}A_{2111111}$.
23. $(A_{1111}A_{1122} - A_{1112}^2)\, x_1^4 + 2(A_{1111}A_{1222} - A_{1112}A_{1122})\, x_1^3x_2 + (A_{1111}A_{2222} + 2A_{1112}A_{1222} - 3A_{1122}^2)\, x_1^2x_2^2 + 2(A_{1112}A_{2222} - A_{1122}A_{1222})\, x_1x_2^3 + (A_{1122}A_{2222} - A_{1222}^2)\, x_2^4$; $(A_{11111}A_{12222} - 4A_{11112}A_{11222} + 3A_{11122}^2)\, x_1^2 + (A_{11111}A_{22222} - 3A_{11112}A_{12222} + 2A_{11122}A_{11222})\, x_1x_2 + (A_{11112}A_{22222} - 4A_{11122}A_{12222} + 3A_{11222}^2)\, x_2^2$, $(A_{11111}A_{11122} - A_{11112}^2)\, x_1^6 + 3(A_{11111}A_{11222} - A_{11112}A_{11122})\, x_1^5x_2 + 3(A_{11111}A_{12222} + A_{1111}\ A_{11222} - 2A_{11122}^2)\, x_1^4x_2^2 + (A_{11111}A_{22222} + 7A_{11112}A_{12222} - 8A_{11122}A_{11222})\, x_1^3x_2^3 + 3(A_{11112}A_{22222} + A_{11122}A_{12222} - 2A_{11222}^2)\, x_1^2x_2^4 + 3(A_{11122}A_{22222} - A_{11222}A_{12222})\, x_1x_2^5 + (A_{11222}A_{22222} - A_{12222}^2)\, x_2^6$.

**25.** Показать предварительно, что каждый гессиан такой формы содержит множителем детерминант, все элементы которого равны 1.

**26.** Применить теорему 4.14 и принять во внимание, что ковариант системы ковариантов данной формы является тоже ковариантом этой формы.

§ 5

**1.** $r_i(\lambda)=r_k(\lambda)=3,\ r_j(\lambda)=2;\ r_{jk}^{(i)}(\lambda)=r_{ij}^{(k)}(\lambda)=2,\ r_{ik}^{(j)}(\lambda)=3.$

**2.**

| Инвариантные множители | Элементарные делители | По индексам |
|---|---|---|
| $1,\ 1,\ \lambda+1,\ \lambda^4-1;$<br>$1,\ 1,\ 1,\ (\lambda+1)(\lambda^2+1)$ | $\lambda+1,\ \lambda+1,\ \lambda-1,\ \lambda^2+1;$<br>$\lambda+1,\ \lambda^2+1$ | $i,\ j$ или $i,\ k;$<br>$j,\ k$ |

## Глава IV

§ 1

**1.** Принять во внимание теоремы 4.1, 4.2, 4.3 гл. III.

**2.** Воспользоваться таблицей IV.

**3.** α) *I*а, β) *I*б, γ) *II*, δ) *IIIi*, ε) *IIIj*, ζ) *IIIk*, η) *IV*.

**4.**

$$\alpha)\ \begin{Vmatrix} \frac{1}{3} & -2 \\ 1 & 1 \end{Vmatrix},\quad \begin{Vmatrix} \frac{3}{49} & -\frac{1}{98} \\ -\frac{1}{49} & -\frac{1}{49} \end{Vmatrix},\quad \begin{Vmatrix} 0 & -2 \\ 3 & 2 \end{Vmatrix};$$

$$\beta)\ \begin{Vmatrix} -\frac{35}{36} & -\frac{5}{36} \\ 0 & -\frac{25}{18} \end{Vmatrix},\quad \begin{Vmatrix} -\frac{8}{35} & -\frac{8}{245} \\ 0 & \frac{8}{49} \end{Vmatrix},\quad \begin{Vmatrix} -\frac{63}{100} & \frac{9}{100} \\ \frac{18}{25} & \frac{27}{50} \end{Vmatrix};$$

$$\gamma)\ \begin{Vmatrix} -\frac{7}{5} & -2 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix},\quad \begin{Vmatrix} -\frac{1}{7} & -\frac{10}{49} \\ 0 & -\frac{20}{49} \end{Vmatrix},\quad \begin{Vmatrix} \frac{7}{4} & -\frac{5}{2} \\ -\frac{5}{4} & \frac{5}{2} \end{Vmatrix};$$

$$\delta)\ \begin{Vmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix},\quad \begin{Vmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix},\quad \begin{Vmatrix} -\frac{1}{7} & 1 \\ -\frac{1}{7} & 0 \end{Vmatrix};$$

$$\varepsilon)\ \begin{Vmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{4} \\ 1 & 0 \end{Vmatrix},\quad \begin{Vmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{Vmatrix},\quad \begin{Vmatrix} 1 & -\frac{3}{2} \\ 0 & \frac{1}{7} \end{Vmatrix};$$

$$\zeta)\ \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix},\quad \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix},\quad \begin{Vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix};$$

$$\eta)\ \begin{Vmatrix} \frac{1}{2} & -2 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix},\quad \begin{Vmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{Vmatrix},\quad \begin{Vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}.$$

8. Предельные точки: а) $x_0=3$, $y_0=-3$, $z_0=1$; б) $x_0=5$, $y_0=1$, $z_0=-2$; в) $x_0=4$, $y_0=-5$, $z_0=-2$; г) $x_0=2$, $y_0=-2$, $z_0=6$.

Тройные точки: а) $-1$, $1+i$, $1-i$; б) $-1$, 2, 3; в) 1, $-2$, $-2$; г) 2, 2, 2.

## § 2

1. См. упражнения 1, 2, 3 § 4 гл. III.
3. α) *I*a, β) *I*б, γ) *II*, δ) *III*a, ε) *III*б, ζ) *IV*.
4.

$$\alpha)\ \left\|\begin{matrix}\frac{5}{9} & -\frac{1}{9}\\ -\frac{2}{9} & \frac{1}{9}\end{matrix}\right\|,\quad \left\|\begin{matrix}-\frac{1}{2} & -2\\ 1 & 1\end{matrix}\right\|;\qquad \beta)\ \left\|\begin{matrix}\frac{2}{3} & \frac{4}{9}\\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{9}\end{matrix}\right\|,\quad \left\|\begin{matrix}\frac{3}{2} & -\frac{5}{2}\\ 0 & 1\end{matrix}\right\|;$$

$$\gamma)\ \left\|\begin{matrix}-\frac{7}{8} & -\frac{3}{8}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4}\end{matrix}\right\|,\quad \left\|\begin{matrix}2 & -1\\ 0 & 1\end{matrix}\right\|;\qquad \delta)\ \left\|\begin{matrix}\frac{1}{2} & -\frac{3}{2}\\ 0 & 1\end{matrix}\right\|,\quad \left\|\begin{matrix}\frac{1}{2} & 1\\ -\frac{1}{2} & 1\end{matrix}\right\|;$$

$$\varepsilon)\ \left\|\begin{matrix}\frac{1}{2} & -\frac{3}{2}\\ 0 & 1\end{matrix}\right\|,\quad \left\|\begin{matrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{matrix}\right\|;\qquad \zeta)\ \left\|\begin{matrix}\frac{1}{2} & -\frac{3}{2}\\ 0 & 1\end{matrix}\right\|,\quad \left\|\begin{matrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{matrix}\right\|.$$

$$\boxed{I\,(jk)}+\boxed{II\,(jk)}\cdot\frac{1}{2},\qquad \boxed{II\,(jk)}+\boxed{I\,(jk)}\cdot(-1);$$

$$\left\|\begin{array}{cc|cc}0 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\end{array}\right\| \xrightarrow{\ (i)\ } (k)\ \{jk\}\ \left\|\begin{matrix}1 & -1\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{matrix}\right\| = \left\|\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0\end{array}\right\| \xrightarrow{\ (i)\ } (k).\quad \downarrow (j)$$

8. Предельные точки: а) $x_0=-1$, $y_0=1$, $y_0'=3$; б) $x_0=-1$, $y_0=2+i\sqrt{2}$, $y_0'=2-i\sqrt{2}$; в) $x_0=-3$, $y_0=0$, $y_0'=4$; г) $x_0=5$, $y_0=2+i\sqrt{3}$, $y_0'=2-i\sqrt{3}$.

Тройные точки: а) $-1$, $2+i$, $2-i$; б) 0, 1, 2; в) $-3$, 2, 2; г) 3, 3, 3.

10. В вещественной области линейно-квадратичная форма предполагается принадлежащей классу *I*a (табл. V), так как для формы класса *I*б двойные точки инволюции — мнимые.

## § 3

1. Принять во внимание теоремы 4.4, 4.5, 4.6 гл. III.
3. α) *I*a, β) *I*б, γ) *II*, δ) *III*.
4.

$$\alpha)\ \left\|\begin{matrix}-1 & -\frac{1}{2\sqrt[3]{2}}\\ 1 & \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\end{matrix}\right\|;\qquad \beta)\ \left\|\begin{matrix}\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}-1}{4\sqrt[6]{2}} & \frac{-\sqrt{6}+\sqrt{3}-1}{4\sqrt[6]{2}}\\ \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt[6]{2}} & \frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt[6]{2}}\end{matrix}\right\|;$$

$$\gamma)\ \left\|\begin{matrix}-\frac{4}{3} & -1\\ \frac{1}{3} & 1\end{matrix}\right\|;\qquad \delta)\ \left\|\begin{matrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ 0 & 1\end{matrix}\right\|.$$

6. $\boxed{II}+\boxed{I}$, $\quad \boxed{I}+\boxed{II}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)$, $\quad \boxed{I}\cdot(-\sqrt[3]{2})$, $\quad \boxed{II}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{4}}$;

$$\left\|\begin{array}{cc|cc}0 & 1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right\| \xrightarrow{\ (i)\ } (k)\ \{ijk\}\ \left\|\begin{matrix}-\frac{\sqrt[3]{2}}{2} & \frac{\sqrt[3]{2}}{2}\\ \frac{\sqrt[3]{2}}{2} & \frac{\sqrt[3]{2}}{2}\end{matrix}\right\|.\quad \downarrow (j)$$

7. Две из них совпадают.

## Глава V

2.

$$(\alpha)\ \left\|\begin{matrix}\varepsilon^n & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{matrix}\right\|, \qquad (\beta)\ \frac{1}{\sqrt[3]{3+6m_0}}\left\|\begin{matrix}\varepsilon^n & 1 & 1\\ \varepsilon^n & \varepsilon & \varepsilon^2\\ \varepsilon^n & \varepsilon^2 & \varepsilon\end{matrix}\right\|,$$

$$\gamma)\ \frac{1}{\sqrt[3]{3+6\varepsilon m_0}}\left\|\begin{matrix}\varepsilon^{n+2} & 1 & 1\\ \varepsilon^{n+2} & 1 & \varepsilon\\ \varepsilon^{n+1} & \varepsilon & 1\end{matrix}\right\|, \qquad \delta)\ \frac{1}{\sqrt[3]{3+6\varepsilon^2 m_0}}\left\|\begin{matrix}\varepsilon^{n+1} & 1 & 1\\ \varepsilon^{n+2} & 1 & \varepsilon^2\\ \varepsilon^{n+2} & \varepsilon^2 & 1\end{matrix}\right\|.$$

7. Произведение по индексам $i, j, k$ матрицы формы (1.1) при $m=-\frac{1}{2}$ на

$$\frac{\sqrt[3]{6}}{3}\left\|\begin{matrix}1 & 1 & 1\\ 1 & \varepsilon^2 & \varepsilon\\ 1 & \varepsilon & \varepsilon^2\end{matrix}\right\|$$

равно матрице формы (III) и т. д.

8. Произведение по индексам $i, j, k$ матрицы формы (1.1) при $m=-\frac{1}{2}$ на

$$\left\|\begin{matrix}-\frac{1}{\sqrt{3}} & 1 & -\frac{1}{3}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 1 & -\frac{1}{3}\\ 0 & 1 & \frac{2}{3}\end{matrix}\right\|$$

равно матрице формы (III′).

9.

| Канонические виды | I | II | III | IV | V |
|---|---|---|---|---|---|
| $r_A$ | 3 | 3 | 3 | 2 | 1 |
| $r_\mathfrak{U}$ | 2 | 1 | 0 | 0 | 0 |

## Глава VI

### § 1

7. $\lambda+\sqrt{-\Delta}\mu,\ \lambda-\sqrt{-\Delta}\mu$; [11] для пучка (1.44).
$\lambda+i\sqrt{\Delta}\mu,\ \lambda-i\sqrt{\Delta}\mu$; $[\bar{1}\bar{1}]$ для пучка (1.45).

### § 2

1. К категориям пучков, данных в таблице I, добавляется категория с характеристикой $[\bar{1}\bar{1}1]$, представляемая каноническим пучком

$$\lambda(3X_1^2X_2-X_2^3+X_3^3)+\mu(X_1^3-3X_1X_2^2+nX_3^3).$$

Кроме того, в категории с характеристикой [(11) 1] тип, характеризуемый инвариантом

$$I(\lambda,\mu)=\begin{cases}-1 & (\lambda\neq 0,\ \mu\neq 0),\\ \frac{0}{0} & (\lambda=0,\ \mu\neq 0 \text{ или } \lambda\neq 0,\ \mu=0),\end{cases}$$

распадается на два типа, соответственно характеризуемые инвариантами

$$\omega(T(\lambda, \mu)) = \begin{cases} -1 & (\lambda \neq 0,\ \mu \neq 0) \\ 0 & (\lambda = 0,\ \mu \neq 0 \text{ или } \lambda \neq 0,\ \mu = 0) \end{cases}$$

$$\omega(T(\lambda, \mu)) = \begin{cases} +1 & (\lambda \neq 0,\ \mu \neq 0) \\ 0 & (\lambda = 0,\ \mu \neq 0 \text{ или } \lambda \neq 0,\ \mu = 0) \end{cases}$$

и представляемые каноническими пучками (2.10) и

$$\lambda(3X_1^2X_2 - X_2^3) + \mu X_3^3.$$

2. Показать предварительно, что матрица $\lambda A + \mu B$, соответствующая пучку $\lambda f + \mu\varphi$, при симметрических элементарных преобразованиях ее переходит в матрицу $\lambda A' + \mu B'$, где $B'$ может отличаться лишь постоянным множителем от матрицы гессиана формы $f'$, ассоциированной с матрицей $A'$.

3. Привести сначала пучок $\lambda f + \mu\varphi$ к виду $\lambda F + \mu\Phi$, где

$$F = X_1^3 + X_2^3 + X_3^3 + 6mX_1X_2X_3,\quad \Phi = -m^2(X_1^3 + X_2^3 + X_3^3) + (2m^3 + 1)X_1X_2X_3.$$

4. Формы пучка (I) при $\lambda = 0$, $\lambda = -2\mu$, $\lambda = -2\varepsilon\mu$, $\lambda = -2\varepsilon^2\mu$, где $\varepsilon$, $\varepsilon^2$ — мнимые кубические корни из 1, представляют сизигетические треугольники; при $\mu = 0$, $\mu = \lambda$, $\mu = \varepsilon\lambda$, $\mu = \varepsilon^2\lambda$ — эквиангармонические линии; при

$$\mu = \frac{\sqrt{3}-1}{2}\lambda,\quad \mu = -\frac{\sqrt{3}+1}{2}\lambda,\quad \mu = \frac{\sqrt{3}-1}{2}\varepsilon\lambda,$$

$$\mu = -\frac{\sqrt{3}+1}{2}\varepsilon\lambda,\quad \mu = \frac{\sqrt{3}-1}{2}\varepsilon^2\lambda,\quad \mu = -\frac{\sqrt{3}+1}{2}\varepsilon^2\lambda$$

— гармонические линии.

5. Принять во внимание, что гессиан формы пучка (I) при данных значениях параметров $\lambda$, $\mu$ имеет вид

$$\lambda_H(X_1^3 + X_2^3 + X_3^3) + 6\mu_H X_1X_2X_3,\ \text{где}\ \frac{\mu_H}{\lambda_H} = -\frac{\lambda^3 + 2\mu^3}{6\lambda\mu^2}.$$

6. Привести сначала пучок $\lambda f + \mu\varphi$ к виду $\lambda F + \mu\Phi$, где

$$F = X_1^3 + X_2^3 + 6X_1X_2X_3,\qquad \Phi = X_1^3 + X_2^3 - 2X_1X_2X_3$$

в случае комплексной области, а также и вещественной, если

$$\omega(T(\lambda, \mu)) = \begin{cases} +1 \\ 0 \end{cases},\quad \text{или}\quad F = 3X_1^2X_2 + 3X_2X_3^2 + X_3^3,$$

$\Phi = 3X_1^2X_2 + 3X_2X_3^2 + 3X_1^2X_3$, если в случае вещественной области

$$\omega(T(\lambda, \mu)) = \begin{cases} -1 \\ 0 \end{cases}.$$

9. Принять во внимание соотношение $3\lambda\mu_H + \mu\lambda_H = 0$, или $\lambda\mu_H + (3\mu - \lambda)\lambda_H = 0$ между значениями $\lambda$, $\mu$ любой формы пучка (II), исключая случай $\mu = 0$, или пучка (II′), исключая случай $\lambda = 0$, и значениями $\lambda_H$, $\mu_H$ гессиана этой формы.

12. Привести сначала пучок $\lambda f + \mu\varphi$ к виду $\lambda F + \mu\Phi$, где $F = X_1^3 + 6X_1X_2X_3$, $\Phi = X_1^3 - 2X_1X_2X_3$ в случае комплексной области, а также и вещественной, если $\omega(T(\lambda, \mu)) = \begin{cases} +1 \\ 0 \end{cases}$, или

$$F = 3X_1^2X_2 \mp X_2^3 + 3X_2X_3^2,\quad \Phi = 3X_1^2X_2 \pm X_2^3 + 3X_2X_3^2,$$

если в случае вещественной области $\omega(T(\lambda, \mu)) = \begin{cases} -1 \\ 0 \end{cases}$ и $\sigma_{\mathfrak{C}} = \pm 2$.

15. Принять во внимание соотношение $3\lambda\mu_H + \mu\lambda_H = 0$ или $\lambda\mu_H + 3\mu\lambda_H = 0$ между значениями $\lambda$, $\mu$ любой формы пучка (IV), исключая случай $\mu = 0$, или пучка (IV′), исключая случай $\lambda = 0$, и значениями $\lambda_H$, $\mu_H$ гессиана этой формы.

19. Принять во внимание, что пучок кубических тройничных форм может быть сизигетическим лишь в том случае, когда ранг его равен 3.

# ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА


1. Адамов А. А., Элементарный способ изучения очертаний кривых третьего порядка по данному уравнению в декартовых координатах (диссертация), Петроград, 1918.
2. Белянкин И. И., Приведение общего уравнения кривой третьего порядка к простейшему виду, Киев, 1907.
3. Богомолов С. А., Метод Грассмана и его применение к исследованию и классификации кривых третьего порядка, Уч. зап. Ленингр. пед. ин-та им. Герцена **28** (1939), 1—56.
4. Бохер М., Введение в высшую алгебру, М.—Л., ГТТИ, 1934.
5. Вельмин В. П., О кривых линиях третьего порядка, Киев, 1906.
6. Гантмахер Ф. Р., Теория матриц, М., Гостехиздат, 1953.
7. Гуревич Г. Б., О ранге тривектора, Уч. зап. МГУ, Матем. **1** (1933), 22—25.
8. Гуревич Г. Б., О некоторых арифметических инвариантах тривектора и кубической формы, ДАН СССР **3**, № 5 (1934), 317—318.
9. Гуревич Г. Б., О тривекторах в пространстве 7 измерений, там же **3**, № 8—9 (1934), 564—569.
10. Гуревич Г. Б., Классификация тривекторов восьмого ранга, там же **2**, № 5—6 (1935), 353—356.
11. Гуревич Г. Б., О некоторых арифметических инвариантах произвольной матричной алгебры Ли, там же **45** (1944), 51—53.
12. Гуревич Г. Б., Основы теории алгебраических инвариантов, М.—Л., Гостехиздат, 1948.
13. Гуревич Г. Б., Некоторые арифметические инварианты матричных алгебр Ли и критерий их полной приводимости, Изв. АН СССР, сер. матем. **13** (1949), 403—416.
14. Гуревич Г. Б., О некоторых линейных преобразованиях симметрических тензоров или поливекторов, Матем. сб. **26** (68), № 3 (1950), 468—470.
15. Гуревич Г. Б., Полные системы симметрических и кососимметрических тензоров, там же **27** (69), № 1 (1950), 103—116.
16. Гуревич Г. Б., О включении любой линейной системы поливекторов или симметрических тензоров в полную систему, там же **30** (72), № 2 (1952), 225—232.
17. Делоне Б. Н. и Райков Д. А., Аналитическая геометрия, т. II, М.—Л., Гостехиздат, 1949.
18. Каган В. Ф., Основания теории определителей, Одесса, Госиздат, 1922.
19. Курош А. Г., Курс высшей алгебры, М., Гостехиздат, 1955.
20. Мальцев А. И., Основы линейной алгебры, М.—Л., Гостехиздат, 1948.
21. Никулин Н. А., О рациональных преобразованиях в связи с построением алгебраических кривых, Изв. Крымск. пед. ин-та **20** (1954), 5—166.
22. Петровский И. Г., Лекция по теории обыкновенных дифференциальных уравнений, М.—Л., Гостехиздат, 1952.
23. Синцов Д. М., Этюды по теории плоских кривых, Наукові зап. науково-дослід. матем. катедр України **2** (1926), 71—78.
24. Смогоржевский А. С., Основи геометрії, Радянська школа (1947).
25. Соколов Н. П. (Sokoloff N.P.), Sur l'application des déterminants supérieurs à la résolution de certains systemes d'équations lineaires, Ann. Soc. scient. Bruxelles, (I). 57 (1937), 60—66.
26. Соколов Н. П., О приведении бинарных трилинейных форм, Тр. Киевск. технол. ин-та силикатов **I** (1939), 253—274.
27. Соколов Н. П., О применении пространственных матриц к исследованию кубических тройничных форм над полем вещественных чисел, Доповіді АН УРСР **3** (1954), 159—164.
28. Соколов Н. П., Об инвариантах кубической тройничной формы над полем вещественных чисел, Укр. матем. журн. **6**, № 3 (1954), 282—294.

29. Соколов Н. П., Проективная классификация кубических тройничных форм в вещественной области, там же 6, № 4 (1954), 405—417.
30. Соколов Н. П., Проективная классификация вещественных плоских линий третьего порядка, там же 7, № 3 (1955), 295—304.
31. Соколов Н. П., Аффинно-проективная классификация кубических тройничных форм в вещественной области, Доповіді АН УРСР 4 (1955), 315—317.
32. Соколов Н. П., О пучках вещественных кубических тройничных форм, Изв. АН СССР, сер. матем. 19 (1955), 201—232.
33. Соколов Н. П., Об одном признаке обращения кубического детерминанта в нуль, Тр. Киевск. гидромелиор. ин-та 5 (1956), 185—189.
34. Соколов Н. П., К решению систем линейных уравнений с помощью многомерных детерминантов, там же 6 (1956), 277—283.
35. Соколов Н. П., Аффинно-проективная классификация вещественных плоских линий третьего порядка, Укр. матем. журн. 9, № 2 (1957), 196—214.
36. Соколов Н. П., Классификация пучков вещественных кубических двойничных форм, Тр. Киевск. ин-та инж. вод. хоз. 7 (1957), 323—330.
37. Сомов И. И. (Somoff J.), Mémoire sur les accélérations des divers ordres, Mém. Acad. sci. St.-Pétersbourg, VII sér., 8, № 5 (1864), 1—54.
38. Столова Е. С., Некоторые вопросы теории кривых третьего порядка, Тр. Киевск. гидромелиор. ин-та 4 (1954), 173—180.
39. Сушкевич А. К., Основы высшей алгебры, ОНТИ—НКТП—СССР, 1937.
40. Шилов Г. Е., Опыт изложения теории детерминантов без теории подстановок, Успехи матем. наук V, вып. 5 (39), (1950), 177—179.
41. Шилов Г. Е., Введение в теорию линейных пространств, М.—Л., Гостехиздат, 1952.
42. Armenante A., Sui determinanti cubici, Giorn. mat. Battaglini, (I) 6 (1868), 175—181.
43. Aronhold S., Zur Theorie der homogenen Functionen dritten Grades von drei Variabeln, Journ. reine und angew. Math. 39 (1850), 140—159.
44. Aronhold S., Theorie der homogenen Functionen dritten Grades von drei Veränderlichen, ibid. 55 (1858), 97—191.
45. Ball W. W. R., On Newton's classification of cubic curves, Proc. London Math. Soc. 22 (1891), 104—143.
46. Barter J. D., The homogeneous vector function and determinants of the $p^{-th}$ class, Univ. California publs in math. 1 (1920), 321—343.
47. Braasch J. H., Determinanten höheren Ranges, Höhere Bürgerschule Hamburg, Programme nr 599 (1878).
48. Burington R. S., A classification of plane cubic curves under the affine group by means of arithmetic invariants, Tôhoku Math. Journ. 41, Part. I (1935), 188—202.
49. Calegari A., I determinanti di specie superiore, Matemat. pure ed appl. 2 (1902), 177—184, 199—203, 217—221.
50. Calegari A., I determinanti di ordine infinito e di specie superiore, Period. mat (3), 2 (1904/5), 107—118.
51. Campbell J. E., Notes on determinants, Proc. London Math. Soc. (I), 24 (1892/3), 67—79.
52. Cayley A., On the notations and properties of certain functions resolvable into a series of determinants, Trans. Cambridge Philos. Soc. 8 (1842/9), 85—88.
53. Cayley A., Mémoire sur les hyperdéterminants, Journ. reine und angew. Math. 30 (1846), 1—37.
54. Cayley A., A memoir on curves of the third order, Philos. Trans. Roy. Soc. London 147 (1857), 415—446.
55. Cayley A., On the classification of the cubic curves, Trans. Cambridge Philos. Soc. 11, Part I (1866), 81—128.
56. Cayley A., On cubic cones and curves, ibid. 11, Part. I (1866), 129—144.
57. Cazzaniga T., Précis d'une théorie élémentaire des déterminants cubiques d'ordre infini, Math. Ann. 59 (1900), 272—290.
58. Chanler J. H., The invariant theory of the ternary trilinear form, Duke Math. Journ. 5, № 3 (1939), 552—568.
59. Chasles M., Aperçu historique, Note XX, Bruxelles, 1837.
60. Chasles M., Traité des sections coniques, Paris, 1865.
61. Chuquet N., Triparty en la science des nombres, Paris, 1484.
62. Clebsch A., Ueber die Bestimmung der Wendepunkte einer Curve dritter Ordnung, Math. Ann. 2 (1869), 382—384.
63. Clebsch A., Theorie der binären algebraischen Formen, Leipzig, 1872.
64. Clebsch A. und Gordan P., Ueber cubische ternäre Formen, Math. Ann. 6 (1873), 436—512.
65. Cremona L., Introduzione ad una teoria geometrica delle curve piane, Bologna, 1862.

66. Cremona L., Considerazioni sulla curve piane del terz'ordine, Giorn. mat. Battaglini 2 (1864), 78—85.
67. Dahlander G. R., On en klass funktioner, hvilka ega flera egenskaper analoga med determinanternes, Öfversigt Vetensk. Akad., Stockholm 20 (1863), 295—304.
68. Davis E. W., The maximum value of a certain determinant, Johns Hopkins Univ. Circulars 2 (1882), 22—23.
69. Dedekind R., Ueber binäre trilineare Formen und die Komposition der binären quadratischen Formen, Journ. reine und angew. Math. 129 (1905), 1—34.
70. Durège H., Ueber die Formen der Curven dritter Ordnung, ibid. 75 (1873). 153—165.
71. Durège H., Ergänzung zu dem Aufsatze «Ueber die Formen der Curven dritter Ordnung», ibid. 76 (1873), 59—60.
72. Duschek A., Eine Abbildung der binären Trilinearform, Jahresber. Dtsch. Math. Ver. 32 (1923), 234—239.
73. Escherich G., Die Determinanten höheren Ranges und ihre Verwendung zur Bildung von Invarianten, Denkschr. Akad. Wiss. Wien (Math.-naturwiss. Cl.) 43, II (1882), 1—12.
74. Euler L., Introductio in Analysin infinitorum, II (1797), 114—138.
75. Fellini D., Determinanti cubici ed equazioni lineari, Period. mat. (3), 11 (1913/4), 110—113.
76. Garbieri G., Determinanti formati di elementi con un numero qualunque d'indici, Giorn. mat. Battaglini (1), 15 (1877), 89—100.
77. Garbieri G., Determinanti formati di $n^i$ elementi, Atti R. Istituto Veneto Sc. Lett. Arti (5), 4 (1877/8), 37—59.
78. Gáspár J., Eine axiomatische Theorie der kubischen Determinanten, Publs mathematicae 4 (1956), 126—130.
79. De Gasparis A. (Sous le pseudonyme Jean-Blaise Grandpas), Sur les déterminants dont les éléments ont plusieurs indices, Naples (1861). Réimpr.: Giorn. mat. Battaglini (3), 1 (1910), 64—71.
80. De Gasparis A., Sopra due teoremi dei determinanti a tre indici ed un'altra maniera di formazione degli elementi d'un determinante ad m indici, Rend. Accad. Sci. fis. ed mat. Napoli (1), 7 (1868), 118—121.
81. De Gasparis A., Prodotto di due determinanti a tre indici, espresso con un determinante ordinario, Atti R. Accad. Lincei. Transunti (3), 3 (1878/9), 44—45.
82. Gavrilović A. B., Sarus-ovo pravilo u teoriji prostornih determinanata, Rad. jugoslav. Akad. znanosti umjetnosti (Agram), 147 (1900), 132—138.
83. Gavrilović A. B., O jednoj osibini prostornih determinanata, Glas srpske kral. Akad. (Belgrad) 66 (1902), 53—58.
84. Gegenbauer L., Ueber Determinanten höheren Ranges, Denkschr. Akad. Wiss. Wien Math.-naturwiss. Cl. 43, II (1882), 17—32.
85. Gegenbauer L., Ueber Determinanten höheren Ranges, ibid. 46, II (1883), 291—298.
86. Gegenbauer L., Ueber Determinanten höheren Ranges, ibid. 49, II (1885), 224—230.
87. Gegenbauer L., Determinanten höheren Ranges welche sich als Product von Determinanten derselben Ranges, aber niedriger Ordnung darstellen lassen, ibid. 50, 1 (1885), 145—152.
88. Gegenbauer L., Ueber windschiefe Determinanten höheren Ranges, ibid. 55, 1 (1889), 39—48.
89. Gegenbauer L., Einige Sätze über Determinanten höheren Ranges, ibid. 57 (1890), 735—752.
90. Gegenbauer L., Ueber einige arithmetische Determinanten höheren Ranges, Sitzungsber. Akad. Wiss. Wien. Math.-naturwiss. Cl. II a, 101 (1892), 425—484.
91. Gegenbauer L., Ueber den grössten gemeinsamen Theiler, ibid. 101 (1892), 1143—1221.
92. Gegenbauer L., Einige mathematische Theoreme, ibid. 102 (1893), 549—564.
93. Gordan P., Ueber ternäre Formen dritten Grades, Math. Ann. 1 (1869), 90—128.
94. Gordan P., Ueber Curven dritter Ordnung mit zwei Doppelpunkten, ibid. 3 (1871), 631—632.
95. Gordan P., Die Hessesche und die Cayleysche Curve Trans. Amer. Math. Soc. 1, № 1 (1900), 402—413.
96. Gundelfinger S., Ueber die Ausartungen einer Curve dritter Ordnung, Math. Ann. 4 (1871), 561—572.
97. Gundelfinger S., Ueber die Wendepunktdreiseite einer Curve dritter Ordnung, ibid. 5 (1872), 442—447.
98. Hedrick E. R., On three-dimensional determinants, Ann. Math. (2), 1 (1899/ /1900), 49—67.

99. Hesse O., Ueber die Elimination der Variabeln aus drei algebraischen Gleichungen vom zweiten Grade mit zwei Variabeln, Journ. reine und angew. Math. **28** (1844), 68—96.
100. Hesse O., Ueber die Wendepunkte der Curven dritter Ordnung, ibid. **28** (1844), 97—107.
101. Hitchcock F. L., A theory of ordered determinants with application to polyadics, Journ. Math. and Phys. **4** (1925), 205—237.
102. Hitchcock F. L., A new method in the theory of quantics, ibid. **4** (1925), 238—256; **8** (1929), 81—105.
103. Hitchcock F. L., The expression of a tensor or a polyadic as a sum of products, ibid. **6** (1927), 164—189.
104. Hitchcock F. L., Multiple invariants and generalized rank of a p-way matrix or tensor, ibid. **7** (1927), 40—79.
105. Hitchcock F. L. and Rice L. H., The miltiple complement of one or more polyadics, ibid. **4** (1925), 179—187.
106. Lecat M., Leçons sur la théorie des déterminants à n dimensions, Gand, Paris, 1910.
107. Lecat M., Sur un théorème inexact de L. Gegenbauer, relatif au déterminant adjoint d'un déterminant général, Ann. Soc. scient. Bruxelles, **35** (1910/1), 1-e partie, fasc. 1, 74—78.
108. Lecat M., Sur une généralisation d'un théorème de Brioschi, ibid. **35** (1910/1), 1-e partie, fasc. 2, 122—125.
109. Lecat M., Sur la multiplication des déterminants—permanents, ibid. **35** (1910/1), 2-e partie, fasc. 3/4, 339—350.
110. Lecat M., Valeur d'un déterminant, Intermédiaire Mathém. (1), **18** (1911), 152—153, 283—284.
111. Lecat M., Valeur d'un déterminant trigonométrique, ibid (1), **18** (1911), 207—208.
112. Lecat M., Histoire de la théorie des déterminants à plusieurs dimensions, depuis les origines jusqu'à 1910. Gand, 1911.
113. Lecat M., Abrégé de la théorie des déterminants à n dimensions, Gand, 1911.
114. Lecat M., Sur les déterminants de classe impaire uniformes, Ann. Soc. scient. Bruxelles **36** (1911/2), 2-e partie, fasc. 1, 118—132.
115. Lecat M., Généralisation des notions de permanent et de déterminant, ibid. **36** (1911/2), 1-e partie, fasc. 2, 119—124.
116. Lecat M., Quelques applications nouvelles du principe de l'addition des tranches, particulièrement a l'étude de déterminants dont l'uniformité dépend de l'ordre, ibid. **36** (1911/2), 2-e partie, fasc. 2, 286—297.
117. Lecat M., Sur les déterminants à plusieurs dimensions, Enseign. math. **14** (1912), 345—361.
118. Lecat M., Déterminants uniformes, Intermédiaire Mathém. (1), **19** (1912), 204—205.
119. Lecat M., Les déterminants à plusieurs dimensions, Exposé, succinct de leurs principales propriétés, Tôhoku Mat. Journ. **2** (1912/3), 173—181; **3** (1913), 1—8.
120. Lecat M., Sur la multiplication des déterminants, Ann. Soc. scient. Bruxelles **37** (1912/3), 2-e partie, fasc. 2, 285—291.
121. Lecat M., Sur les permanents, ibid **37** (1912/3), 2-e partie, fasc. 3/4, 436—455.
122. Lecat M., Unisignants à plusieurs dimensions, Rend. Circolo mat. Palermo **36** (1913), 317—326.
123. Lecat M., Sur les déterminants mérogénes, Ann. Soc. scient. Bruxelles **38** (1913/4), 2-e partie, fasc. 2, 115—155.
124. Lecat M., Some merogeneous superdeterminants, Tôhoku Math. Journ. **5** (1914), 117—135.
125. Lecat M., Sur l'emploi du symbole de Kronecker dans l'étude des déterminants et des permanents, Giorn. mat. Battaglini (3), **5** (1914), 118—163.
126. Lecat M., Produit de déterminants de classes impaires, Intermédiaire Mathém. (1) **26** (1919), 140—143.
127. Lecat M., Généralisation de la règle de Sarrus au cas des déterminants à n dimensions, Ann. Soc. scient. Bruxelles **39** (1919/20), 1-e partie, fasc. 1, 65—67.
128. Lecat M., Sur une généralisation des déterminants, qui permet la multiplication par files, même quand les classes des facteurs sont impaires, ibid. 39 (1919/20), 2-e partie, fasc. 1, 10—20.
129. Lecat M., Sur les déterminants généraux ou fonctions analogues, à premiers mineurs nuls, ibid. **39** (1919/20), 2-e partie, fasc. 3, 39—67.
130. Lecat M., Sur un problème posé par Cayley, ibid. **39** (1919/20), 1-e partie, fasc. 4, 197—203.
131. Lecat M., Sur la décomposition des pénédéterminants et déterminants, Rend. Circolo mat. Palermo, **44** (1920), 69—81.
132. Lecat M., Un déterminant de permanents. Relations de Cayley généralisées, Intermédiaire Mathém. (1), **27** (1920), 69—72.

133. Lecat M., Déterminants d'éléments X et 1, Ann. Soc. scient. Bruxelles 40 (1920/1), 2-e partie, fasc. 1, 1—22.
134. Lecat M., Sur les permanents d'éléments 1 et X, ibid. 40 (1920/1), 1-e partie, fasc. 2, 148—152.
135. Lecat M., Sur diverses formes remarquables des produits et puissances de trois codéterminants cubiques, ibid. 41 (1921/2), 1-e partie, fasc. 2, 186—198; 1-e partie, fasc. 3/4, 305—315.
136. Lecat M., Déterminant des mineurs d'un déterminant à n dimensions, Intermédiaire Mathém. (2), 1 (1922), 82—85.
137. Lecat M., Cayléens anormaux, ibid. (2), 1 (1922), 138—140.
138. Lecat M., Sur les déterminants cayléens et bicayléens anormaux, Math. Zeitschr. 15 (1922), 291—308.
139. Lecat M., Sur les cayléens et bicayléens anormaux, C. r. Acad. sci. Paris 174 (1922), 728—731.
140. Lecat M., Sur l'adjoint d'un déterminant, Ann. Soc. scient Bruxelles 42 (1922/3), 1-e partie, fasc. 1, 67—76.
141. Lecat M., Sur les permanents cayléens et sur les déterminants cayléens anormaux, provenant de deux matrices de classes quelconques, ibid. 42 (1922/3), 1-e partie, fasc. 1, 76—81.
142. Lecat M., Développement des déterminants en fonction de déterminants à espace axial vide, ibid. 42 (1922/3), 1-e partie, fasc. 2, 205—215.
143. Lecat M., Remarques sur divers points de la théorie des déterminants, ibid. 42 (1922/3), 1-e partie, fasc. 2, 215—225.
144. Lecat M., Généralisations et modifications d'un théorème de Frobenius, ibid. 42 (1922/3), 1-e partie, fasc. 3/4, 322—329.
145. Lecat M., Expression des déterminants les plus généraux d'une matrice en fonction des sections, C. r. Acad. sci. Paris, 176 (1923), 557—559.
146. Lecat M., Généralisation et modification d'un théorème de Frobenius sur un déterminant troué, ibid. 176 (1923), 972—975.
147. Lecat M., Extension d'un théorème de Boehm généralisant la loi de multiplication de deux déterminants ordinaires, Rend. Circolo mat. Palermo 47 (1923), 255—260.
148. Lecat M., Contribution à la théorie de la multiplication de déterminants généraux, Tôhoku Math. Journ. 23 (1923/4), 137—156.
149. Lecat M., Sur les matrices mérogènes, Ann. Soc. scient. Bruxelles 43 (1923/4), 1-e partie, fasc. 1, 60—64.
150. Lecat M., Sur les sections d'un déterminant, ibid. 43 (1923/4), 2-e partie, fasc. 1, 21—32.
151. Lecat M., Bibliographie des déterminants à plus de deux dimensions, Extrait de la Bibliographie de la Relativité, Bruxelles, 1924.
152. Lecat M., Sur l'addition des déterminants, Ann. Soc. scient. Bruxelles 44 (1924/5), 1-e partie, fasc. 1, 10—17.
153. Lecat M., Notes diverses sur les déterminants, ibid. 44 (1924/5), 1-e partie, fasc. 2, 142—143; 2-e partie, fasc. 3, 129—146.
154. Lecat M., Effet, sur un déterminant, de son altération dans un domaine quelconque, ibid. 44 (1924/5), 1-e partie, fasc. 2, 143—151.
155. Lecat M., Sur les déterminants symétriques gauches à n dimensions, ibid. 44 (1924/5), 1-e partie, fasc. 4, 471—476.
156. Lecat M., Recherches diverses sur les déterminants supérieurs, ibid. 44 (1924/5), 2-e partie, fasc. 4, 209—220.
157. Lecat M., Permanent composé des déterminants d'une matrice, Messenger Mathem. (2), 54 (1924/5), 172—173.
158. Lecat M., Déterminants arithmétiquement progressifs, ibid. (2), 54 (1924/5), 174—177.
159. Lecat M., Déterminant symétrique gauche à n dimensions et généralisation, Intermédiaire Mathem. (2), 4 (1925), 129—133.
160. Lecat M., Sur les déterminants d'éléments x, y et O, Rend. Circolo mat. Palermo 49 (1925), 247—251.
161. Lecat M., Quelques propriétés des déterminants supérieurs, orthosymétriques, circulants et cycliques, Math. Zeitschr. 25 (1926), 121—131.
162. Lecat M., Coup d'œil sur la théorie des déterminants supérieurs dans son état actuel, Ann. Soc. scient. Bruxelles 45 (1926), II, fasc. $^1/_2$, 1—98; fasc. $^3/_4$, 141—168; 46 (1926), 15—54; 47 (1927), série A, II, fasc. 1, 1—37.
163. Lecat M., Coup d'oeil sur les applications des déterminants supérieurs, ibid. 49 (1929), série A, fasc. 1, 23—46; fasc. 2, 87—110.
164. Lecat M., Le déterminant supérieur, qué est-il exactement, Rev. gén. Sci. 40, № 8 (1929), 231—241.
165. Möbius A. F., Ueber die Grundformen der Linien der dritten Ordnung, Abhandl. math.-phys. Cl. der K. Sächs., Ges. Wiss. 1 (1852), 1—82.
166. Murdoch P., Newtonii genesis curvarum per umbras, London, 1746.

167. Muth P., Theorie und Anwendung der Elementartheiler, Leipzig, 1899.
168. Newton I., Enumeratio linearum tertii ordinis, Optics, London, 1704, 139—163.
169. Oldenburger R., On canonical binary trilinear forms, Bull. Amer. Math. Soc. 38 (1932), 385—387.
170. Oldenburger R., Composition and rank of n-way matrices and multilinear forms, Ann. Math. 35 (1934), 622—657.
171. Oldenburger R., Non-singular multilinear forms and certain p-way matrix factorisations, Trans. Amer. Math. Soc. **39** (1936), 422—455.
172. Oldenburger R., Equivalence of multilinear forms single on one index-Duke Math. Journ. 2 (1936), 671—680.
173. Oldenburger R., On arithmetic invariants of binary cubic and binary trilinear forms, Bull. Amer. Math. Soc. 42 (1936), 871—873.
174. Oldenburger R., Real canonical binary trilinear forms, Amer. Journ. Math. **59** (1937), 427—435.
175. Oldenburger R., Real canonical binary symmetric trilinear forms, Bull. Amer. Math. Soc. 59 (1937), 546—553.
176. Oldenburger R., Relations between ranks of a general matrix, Ann. Math. **39** (1938), 172—177.
177. Oldenburger R., Representation and equivalence of forms, Proc. Nat. Acad. Sci. USA **24** (1938), 193—198.
178. Oldenburger R., Rational equivalence of a form to a sum of $p^{th}$ powers, Trans. Amer. Math. Soc. 44 (1938), 2 9—249.
179. Oldenburger R., Factorability of general symmetric matrices, Compositio math. **7** (1939), 223—228.
180. Oldenburger R., Complete reducibility of forms, Bull. Amer. Math. Soc. **46** (1940), 88—92.
181. Oldenburger R., Binary forms, Proc. Nat. Acad. Sci. USA **26** (1940), 497—499.
182. Oldenburger R., Higher dimensional determinants, Amer. Math. Monthly **47** (1940), 25—33.
183. Padova E., Sui determinanti cubici, Giorn. mat. Battaglini (1), **6** (1868), 182—189.
184. Le Paige C., Mémoire sur quelques applications de la théorie des formes algebriques à la geometrie, Mém. couronnés et mém. savants étrang. publiés Acad. Roy. sci. Belgique 42 (1879), 1—71.
185. Le Paige C., Sur la théorie des formes binaires à plusieurs séries de variables, Bull. Acad. Roy. sci. Belgique (3), **2** (1881), 40—53.
186. Le Paige C., Sur les formes trilinéaires, C. r. Acad. sci. Paris **92** (1881), 1103—1105.
187. Pasch M., Ueber eine Invariante der trilinearen ternären Form, Math. Ann. **52** (1899), 127—129.
188. Petersen H., Die Bedeutung kubischer Determinanten für die Klassifikation der binären und ternären kubischen Formen, Inaugural Dissertation Univ. Freiburg, Leipzig, 1914.
189. Plücker J., System der Analytischen Geometrie und der Theorie der Kurven dritter Ordnung, Berlin, 1835.
190. Poincaré H., Sur les formes cubiques ternaires et quaternaires, Journ. Ecole polytechn. **XXXI**, 50 (1881), 199—253.
191. Puccio L., I determinanti cubici in relazione alla teoria invariantiva delle forme, Palermo, 1923.
192. Rice L. H., P-way determinants with an application to transvectants, Amer. Journ. Math. **40** (1918), 242—262.
193. Rice L. H., Some determinant expansions, ibid. **42** (1920), 237—242.
194. Rice L. H., On the expression of the sum of any two determinants as a determinant of more dimensions, Journ. Math. and Phys. **1** (1922), 160—166.
195. Rice L. H., A contribution to the generalization of a determinantal Theorem of Frobenius, ibid. **3** (1923/4), 118—126.
196. Rice L. H., A Taylor's expansion of a determinant, ibid. **4** (1925), 62—63.
197. Rice L. H., A determinantal expression of multiple cross and dot products of polyadics in three dimensions, ibid. **4** (1925), 130—132.
198. Rice L. H., File multiplication of ordered determinants, ibid. **4** (1925), 200—204.
199. Rice L. H., Adjoint and inverse determinants and matrices, ibid. **5** (1925/6), 55—64.
200. Rice L. H., Compounds of Scott products determinants, ibid. 5 (1925/6), 238—250.
201. Rice L. H., Compounds of Cayley products of determinants of higher class, ibid. 6 (1926), 33—38.
202. Rice L. H., Couche ranks in general matrix, ibid. **7**, (1928), 93—96.
203. Rice L. H., Decomposition of determinants, ibid. 8 (1929), 56—64.

204. R i c e L. H., Introduction to higher determinants, ibid. 9 (1930), 47—71.
205. S a l m o n G., Théorèmes sur les courbes de 3-ème degré, Journ. reine und angew. Math. 42 (1851), 274—276.
206. S a l m o n G., Traité de Géometrie analytique (Courbes planes), Paris, 1884.
207. S a r c a r S. S., On a matrix representation of homogeneous algebraic forms, Bull. Calcutta Math. Soc. 47 (1955), 227—230.
208. S c h e n d e l L., Die r-stufige Determinanten $n^{ten}$ Grades, Zeitschr. Math. und Phys. 32 (1887), 185—188.
209. S c h r o e t e r H., Die Theorie der ebenen Kurven dritter Ordnung, Leipzig, 1888.
210. S c h w a r t z E., Ueber binäre trilineare Formen, Math. Zeitschr. 12 (1922), 18—35.
211. S c o t t R. F., On cubic determinants and other determinants of higher klass and on determinants of alternate numbers, Proc. London Math. Soc. (1), 11 (1879/80), 17—29.
212. S c o t t R. F., On some forms of cubic determinants, ibid. (1), 13 (1881/2), 33—42.
213. S c o t t R. F., Notes on determinants, Messenger Mathem. (2), 12 (1882/3), 105—118.
214. S p o t t i s w o o d e W., Note sur la transformation de la cubique ternaire en sa forme canonique, Journ. reine und angew. Math. 63 (1864), 244—246.
215. S t e r n e c k R., Ausdehnung eines Kronecker'schen Satzes auf Determinanten höheren Ranges, Rend. Circolo mat. Palermo 30 (1910), 58—64.
216. S t e t s o n O. S., On the expansion of devertebrated threedimensional determinants and the extension of Cayley's expansion theorem, Amer. Math. Monthly 13 (1906), 76—80.
217. S t i r l i n g J., Lineae tertii ordinis Newtonianae, Parisies, 1717.
218. S y l v e s t e r J. J., A proof that all the invariants to a cubic ternary form are rational fonctions of Aronholds invariants and of a cognate theorem for biquadratic binary forms, London, Edinburgh and Dublin Philos. Magasine and Journ. Sci. 5 (1853), 299—303, 367—372.
219. S z ü t s N., Zur Theorie der kubischen Determinanten, Math. und naturwiss. Ber. aus Ungarn 8 (1889/90), 199—217.
220. S z ü t s N., Zur Theorie der Determinanten höheren Ranges, Zeitschr. Math. und Phys. 40 (1895), 113—117.
221. T a n n e r H. W., Notes on determinants of n dimensions, Proc. London Math. Soc. (1), 10 (1878/9), 167—180.
222. T h r a l l R. M., On projective equivalence of trilinear forms, Ann. Math. 42, № 2 (1941), 469—485.
223. T h r a l l R. M., and C h a n l e r J. H., Ternary trilinear forms in the field of complex numbers, Duke Math. Journ. 4, № 4 (1938), 678—690.
224. V a i d y a n a t h a s w a m y R., On mixed determinants, Proc. Roy. Soc. Edinburgh 44 (1923/4), 168—184.
225. V a n d e r m o n d e A. T., Remarques sur les problèmes de situation, Mém. Acad. sci. Paris (1774), 566—574.
226. W e b e r H., Lehrbuch der Algebra, 1 Braunschweig, 1898.
227. W e i e r s t r a s s K., Zur Theorie der bilinearen und quadratischen Formen, Monatsber. Königl. Preussisch. Akad. Wiss. Berlin (1868), 310—338.
228. W e i s s E. A., Die Autopolokoniken der singulären Kurven 3. Ordnung, Journ. reine und angew. Math. 173 (1935), 233—242.
229. Z a j a c z k o w s k i W., Teoryja waznaczników o p wymiarach a rzędu $n^{go}$, Ramiętnik Akad. Umiejętnosci w Krakowie 6 (1881), 1—31.
230. Z e h f u s s J. G., Ueber eine Erweiterung des Begriffes der Determinanten, Programme Gewerbeschule Frankfurt a/M. 1868, 21—28.
231. Ш а о П и н ь-ц у н, К вопросу о перестановках, (Шусюэ тунбао), № 4 (1954), 17—22.