

А. СОКОЛОВ, Д. ИВАНЕНКО

# КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ ПОЛЯ

(ИЗБРАННЫЕ ВОПРОСЫ)

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО  
ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ  
МОСКВА 1952 ЛЕНИНГРАД

Редактор *К. П. Гуров.*

Техн. редактор *С. С. Гаврилов.*

Корректор *О. А. Сизал.*

---

Подписано к печати 29/VII 1952 г. Бумага 84×108/32. 12,19 бум л.  
39 97 печ. л. 40,9 уч.-изд. л. 41 000 тип. зн. в печ. л. Тираж 10 000 экз.  
Т-02149. Цена книги 12 руб. 30 коп. Переплёт 2 руб. Заказ № 178.

Номинал по преискуранту 1952 г.

---

16-я типография Главполиграфиздата при Совете Министров СССР.  
Москва, Трёхпрудный пер., 9.

## ОГЛАВЛЕНИЕ

От издательства . . . . .	8
---------------------------	---

### ЧАСТЬ ПЕРВАЯ

### КВАНТОВАЯ ЭЛЕКТРОДИНАМИКА

(А. Соколов)

Предисловие . . . . .	13
Введение . . . . .	11

### Глава I

#### Общая теория свободного поля

§ 1.	Инвариантность волновых уравнений и законы преобразования волновых функций . . . . .	20
§ 2.	Скалярное уравнение . . . . .	25
§ 3.	Вариационные методы исследования скалярного поля . . . . .	26
§ 4.	Момент количества движения скалярного поля . . . . .	30
§ 5.	Решение скалярного волнового уравнения . . . . .	33
§ 6.	Классические скобки Пуассона . . . . .	37
§ 7.	Квантовые скобки Пуассона . . . . .	40
§ 8.	Квантование скалярного уравнения . . . . .	41
§ 9.	Перестановочные соотношения для волновых функций . . . . .	51
§ 10.	Комплексное скалярное уравнение . . . . .	54
§ 11.	Квантование комплексного скалярного уравнения . . . . .	58
§ 12.	Волновое уравнение электромагнитного поля . . . . . а) Общая теория уравнений Максвелла (62). б) Калибровочная инвариантность (64). в) Тензор энергии и тензор момента количества движения (66).	62
§ 13.	Решение уравнений Максвелла . . . . .	69
§ 14.	Квантование поперечного электромагнитного поля . . . . .	71
§ 15.	Перестановочные соотношения для квантованных потенциалов поля . . . . .	75
§ 16.	Квантование электромагнитного поля в общем случае . . . . .	76
§ 17.	Полувекторное уравнение . . . . . а) Линеаризация оператора скалярного уравнения (83). б) Механический и магнитный моменты электрона (88). в) Плотность заряда и плотность тока для полувекторных уравнений (92).	81

§ 18	Тензорная размерность волновых функций . . . . .	92
	а) Инвариантность полувекторных уравнений относительно пространственно-временных вращений (преобразование Лорентца) (93). б) Инвариантность полувекторных уравнений относительно пространственных вращений (96). в) Калибровочная инвариантность (96).	
§ 19.	Тензорная размерность матриц Дирака . . . . .	97
§ 20.	Решение полувекторного уравнения . . . . .	100
§ 21	Вычисление матричных элементов . . . . .	107
§ 22.	Вариационные методы . . . . .	113
	а) Функция Лагранжа (114). б) Тензор энергии (115). в) Тензор спина (116). г) Четырёхмерная плотность тока (118)	
§ 23	Квантование полувекторного уравнения . . . . .	119
	а) Энергия, заряд и спин поля (119). б) Вторичное квантование полувекторных уравнений по Бозе-Эйнштейну (120). в) Вторичное квантование полувекторных уравнений по Ферми-Дираку (121). г) Физический смысл решений с положительной и отрицательной энергией (127). д) Поляризационные свойства электронных волн (128). е) Функция от числа частиц (131). ж) Перестановочные соотношения для квантованных волновых функций (132).	

## Г л а в а II

## Квантовая теория взаимодействия и излучения

§ 24.	Взаимодействие между заряженными частицами и электромагнитным полем . . . . .	135
	а) Лагранжиан (135). б) Тензор энергии (138). в) Квантование смешанного поля (133).	
§ 25.	Исключение продольных составляющих. Закон Кулона	143
§ 26.	Формула Брейта. Поперечная собственная энергия . .	154
	а) Формула Брейта (155). б) Собственная поперечная энергия электрона (163).	
§ 27.	Инвариантная форма взаимодействия двух релятивистских частиц (формула Мёллера) . . . . .	166
§ 28.	Дипольное излучение; коэффициенты Эйнштейна . .	172
	а) Постановка вопроса в квантовой механике (172). б) Постановка вопроса в квантовой электродинамике (175). в) Область применения квантовой теории (180). г) Вычисление коэффициентов Эйнштейна (193).	
§ 29.	Фотоэффект. Захват электронов ионизованными атомами . . . . .	197
	а) Квантовая теория фотоэффекта (197). б) Захват электронов ионизованными атомами (202).	
§ 30.	Излучение с учётом затухания. Естественная ширина линии . . . . .	204
	а) Классическая теория (205). б) Квантовая теория (207).	
§ 31.	Мультипольное излучение . . . . .	214

§ 32.	Взаимодействие электронов с полем фотонов . . . . .	219
	а) Вероятность излучения (219) б) Квантовая теория эффекта Черенкова (222).	
§ 33.	Дисперсия света . . . . .	230
	а) Нерелятивистская теория (230). б) Дисперсионные формулы (236) в) Комбинационное рассеяние (242)	
§ 34.	Рассеяние света свободными электронами . . . . .	243
	а) Общие формулы (243). б) Формула Клейна-Шпини (245).	
§ 35.	Рассеяние света с учётом затухания . . . . .	256
	а) Теория затухания для дискретного спектра (256) б) Теория затухания для непрерывного спектра (264).	
§ 36.	Упругое рассеяние заряженных частиц кулоновским центром . . . . .	273
	а) Вывод формулы Резерфорда по классической теории (274). б) Квантовая теория рассеяния (278). в) Учёт электронной оболочки (280)	
§ 37.	Тормозное излучение . . . . .	286
	а) Классическая теория (286). б) Квантовая теория (288). в) Нерелятивистский случай (292). г) Общий случай (294). д) Потери энергии на тормозное излучение (297). е) Ионизационные потери (300). ж) Общая потеря энергии (304).	

### Глава III Теория позитрона

§ 38.	Основы теории позитрона . . . . .	305
	а) Состояния с отрицательной энергией (305). б) Теория вторичного квантования (308).	
§ 39.	Образование пар фотонами . . . . .	310
§ 40.	Аннигиляция позитронов . . . . .	321
	а) Двухфотонная аннигиляция (321). б) Зависимость вероятности аннигиляции от ориентации спинов (329). в) Трёхфотонная аннигиляция (331). г) Позитроний (337).	
§ 41.	Каскадная теория ливней . . . . .	341
	а) Первичная компонента (341). б) Вторичная компонента (344). в) Возникновение электронной компоненты (349). г) Каскадная теория ливней (351).	

### Глава IV Теория электронно-позитронного вакуума

§ 42.	Проблема массы электрона и теория вакуума . . . . .	365
	а) Постановка вопроса (365). б) Теория неполевой массы (372). в) Проблема массы в квантовой электродинамике (375).	
§ 43.	Дополнительное взаимодействие электрона с электромагнитным полем . . . . .	376
	а) Общие формулы для энергии взаимодействия (376).	

	б) Взаимодействие между вторично квантованными состояниями электронов (379). в) Энергия взаимодействия электромагнитного поля с полем электронов и позитронов (382). г) Обменная часть взаимодействия (386) д) Необменная часть взаимодействия (389)	
§ 44.	Исследование обменной части взаимодействия . . . . .	390
	а) Общие формулы (391). б) Полевая масса свободного электрона. Методы регуляризации (396). в) Вычисление полевой части электрического и магнитного моментов электрона (405). г) Вычисление бетевской части энергии взаимодействия (407). д) Устранение инфракрасной катастрофы (410).	
§ 45.	Поляризация электронно-позитронного вакуума . . . . .	414
	а) Общие формулы (414). б) Полевая масса фотона (419). в) Полевой добавок к заряду (420). г) Полевая энергия поляризации (422). д) Общая энергия взаимодействия (422).	
§ 46	Проблема атома водорода и теория вакуума . . . . .	425
	а) Постановка вопроса (425). б) Первоначальная квантовая теория (427). в) Тонкая структура (431). г) Нерелятивистское волновое уравнение (434). д) Релятивистское скалярное уравнение (437). е) Полувекторное уравнение (440). ж) Исследование решений (444). з) Момент количества движения (446). и) Правила отбора (448). к) Тонкая структура (450). л) Сдвиг уровней, обусловленный вакуумными членами (454).	
§ 47	Эффект Зеемана . . . . .	459
	а) Классическая теория Лорентца (459). б) Теория по нерелятивистской волновой механике (460). в) Учёт спиновых эффектов (462). г) Нормальный эффект Зеемана (463). д) Аномальный эффект Зеемана (465). е) Дополнительный магнитный момент электрона (469).	
§ 48.	Влияние ядер на атомные спектры . . . . .	471
	а) Теория сверхтонкой структуры для атома водорода (472). б) Определение дополнительного магнитного момента электрона (477). в) Тонкая структура позитрония (479).	

## ЧАСТЬ ВТОРАЯ

### ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ

(Д. Иваненко)

Предисловие . . . . .	483
-----------------------	-----

#### Глава I

#### Элементарные частицы

1. Строение вещества . . . . .	485
а) Пространство и время (485). б) Свойства элементарных частиц (495). в) Попытки построения единой теории (522).	

§ 2.	Релятивистская квантовая механика . . . . .	527
	а) Основы теории (527). б) Вторичное квантование и статистика (541). в) Теория вакуума (550).	
§ 3.	Попытки обобщения теории . . . . .	566
	а) Классический радиус электрона и компенсирующие поля (566). б) Высшие производные (569). в) Нелинейные теории (572). г) Гипотеза прямого взаимодействия частиц (584). д) Инвариантный форм-фактор (587). е) Феноменологическая модель вакуума (591). ж) Гипотеза квантования пространства—времени (593). з) Гипотеза максимального импульса (601). и) Теория взаимности (602). к) Индивидуальные ошибки (604). л) Теория взаимности и нелокализуемости (607). м) Матрица рассеяния (609). н) Пятимерие (618). о) Теория слияния (626). п) Сложный мезон (632). р) Высшие спиновые состояния (634). с) Заключение (637).	

## Глава II

## Частицы и тяготение

§ 4.	Электрон в поле тяготения . . . . .	641
	а) Геометрический смысл матриц Дирака (641). б) Параллельный перенос спиноров (643).	
§ 5.	Квантовая теория тяготения . . . . .	653
	а) Квантование слабого поля тяготения (657). б) Излучение гравитационного поля (663). в) Закон Ньютона и гравитоны (672). г) Гравитационные превращения (675).	

## Глава III

## Некоторые вопросы теории взаимодействия частиц

§ 6.	Кратные процессы . . . . .	680
	а) Теория $\beta$ -распада (680). б) Двойной $\beta$ -распад (696). в) Кратное порождение мезонов (700). г) Теория кратных сил (715). д) Кратные процессы при взаимодействии (726).	
§ 7.	Изотопическое смещение . . . . .	728
	а) Введение (728). б) Эффект массы (732). в) Влияние объёма (735). г) Притяжение электрона к нейтрону (756). д) Оболочки нуклеонов (768).	

## ОТ ИЗДАТЕЛЬСТВА

Настоящая книга, посвящённая квантовой теории поля, состоит из двух частей. Первая часть, написанная проф. А. Соколовым, посвящена квантовой электродинамике, т. е. квантовой релятивистской теории электрона и электромагнитного поля, которые являются наиболее разработанными главами современной теории поля и элементарных частиц. Значительное внимание уделено здесь не только систематическому развитию общей теории, но также подробным подсчётам отдельных конкретных эффектов, в том числе связанных, например, со сдвигом уровней согласно новейшей теории вакуума и теории позитрония.

Вторая часть книги, написанная проф. Д. Иваненко, посвящена, с одной стороны, анализу трудностей релятивистской квантовой теории и попыткам их преодоления главным образом при помощи введения минимальной длины и нелинейных обобщений и, с другой стороны, содержит изложение ряда вопросов теории элементарных частиц и их систем, которые выходят за рамки электродинамики и связаны с учётом гравитации и мезонного поля.

Использование общих методов, изложение результатов ряда совместных работ и развитие некоторых вопросов, затронутых в ранее вышедшей книге «Классическая теория поля» тех же авторов, делают целесообразным совместную публикацию обеих независимых частей данной книги,

---



ЧАСТЬ ПЕРВАЯ  
**КВАНТОВАЯ**  
**ЭЛЕКТРОДИНАМИКА**



## ПРЕДИСЛОВИЕ

Предлагаемая вниманию читателей первая часть книги представляет собою в основном обработку курса лекций по квантовой электродинамике, читаемых мною в Московском государственном университете им. М. В. Ломоносова с 1945 года для студентов, специализирующихся по теоретической физике, с рядом дополнений, в которых были учтены, в частности, последние работы советских физиков теоретиков.

При изложении материала я стремился не только сообщить начинающим изучать квантовую электродинамику её физические основы, но также ознакомить читателя с вычислительным аппаратом теории и тем самым хотя бы частично заполнить пробел, существующий в литературе по данному разделу физики. При изложении же теории наиболее важных явлений: рассеяния заряженных частиц, атома водорода, эффекта Зеемана и т. д., я останавливался на последовательном развитии теории данного явления в зависимости от накопления экспериментальных фактов, начиная от классической и кончая пока что квантово-электродинамической теорией. Подобный анализ постепенного познания всё более тонких свойств электрона наиболее убедительно подтверждает универсальность положения Ленина о неисчерпаемости электрона, из которого, в частности, следует, что любая теория не является окончательной и требует дальнейшего развития.

Я не ставил перед собой задачи изложить все основные результаты квантовой электродинамики, а ограничился рассмотрением вопросов, связанных главным образом

со взаимодействием отдельных заряженных частиц с электромагнитным полем и электронно-позитронным вакуумом.

Вопросы, связанные с развитием некоторых дальнейших приложений теории вторичного квантования к исследованию поведения элементарных частиц, а также подробный анализ гипотез, связанных с разрешением трудностей квантовой теории поля, рассмотрены во второй части, написанной Дмитрием Дмитриевичем Иваненко, на которую даются соответствующие ссылки.

Я чрезвычайно благодарен аспирантам В. И. Григорьеву, Н. П. Клепикову, И. М. Тернову и В. Н. Цытовичу, внимательно просмотревшим рукопись и сделавшим ряд ценных указаний.

*А. А. Соколов*

Физический факультет  
Московского государственного  
университета им. М. В. Ломоносова  
Ноябрь 1951 г.

## ВВЕДЕНИЕ

Согласно современным воззрениям вещество состоит из элементарных частиц.

Прежде всего заметим, что само понятие элементарности частицы с развитием учения о строении вещества всё время уточнялось. Так, например, в прошлом веке атомы химических элементов считались элементарными. Затем было установлено, что в состав атома входят протоны и нейтроны, образующие атомное ядро (модель Иваненко), и электроны. По современным данным, протоны, нейтроны и электроны не состоят из более мелких частиц, и в этом смысле их можно рассматривать как элементарные.

В настоящее время известны следующие элементарные частицы:

- 1) электрон и позитрон (с массой покоя  $m = 0,9107 \cdot 10^{-27} \text{ г}$ ),
- 2) фотон (с массой покоя, равной нулю),
- 3) протон (с массой покоя  $1836,14 m$ ),
- 4) нейтрон (с массой покоя  $1838,67 m$ ),
- 5)  $\mu$ -мезон (с положительным и отрицательным зарядами, с массой покоя  $\sim 212 m$ ),
- 6)  $\pi$ -мезон (с положительным и отрицательным зарядами, с массой покоя  $\sim 275 m$  и нейтральный с массой покоя  $\sim 265 m$ ).

Удалось также обнаружить тяжёлые нейтральные  $V$ -частицы по их распаду на протон и  $\pi$ -мезон или на  $\pi^+$ - и  $\pi^-$ -мезоны. Точно так же имеется несколько микрофотографий, говорящих о существовании тяжёлых заряженных частиц, распадающихся на три заряженных мезона ( $\tau$ -частица) или на заряженный мезон и какие-то нейтральные частицы ( $k$ -частица).

Кроме того, по всей вероятности, существуют ещё следующие частицы: нейтрино, антинейтрино и гравитоны, которые экспериментально пока не обнаружены.

Возможно, что в дальнейшем будут открыты ещё и другие элементарные частицы. Однако не исключено также, что некоторые частицы, которые сейчас считаются элементарными, окажутся сложными. Одно время усиленно дискутировалась гипотеза о том, что частицы со спином больше  $\frac{1}{2}$  могут быть представлены как результат своеобразного «слияния» частиц со спином  $\frac{1}{2}$  (в единицах  $\hbar$ ). С этой точки зрения фотоны, например, обладающие целым спином, должны были бы состоять из нейтрино и антинейтрино (нейтринная теория света<sup>1)</sup>). Точно так же вполне возможно, что и некоторые мезоны окажутся состоящими из нескольких частиц. Однако вопрос о структуре элементарных частиц находится ещё в самой начальной стадии разработки, и на нём мы здесь останавливаться не будем.

Движение элементарных частиц описывается квантовыми уравнениями, которые отражают корпускулярно-волновые свойства этих частиц. В квантовой теории поставлены следующие основные задачи:

- 1) найти закон движения (волновые уравнения) для элементарных частиц;
- 2) установить связь между волновыми функциями, описывающими движение различных частиц;
- 3) определить вероятность взаимных превращений частиц;
- 4) вычислить энергию взаимодействия между частицами.

Современная теория позволяет написать простейшие волновые уравнения (линейные и без высших производных), если известна масса покоя и спин частицы (см. гл. I): проблема же связи между различными полями сравнительно точно решена лишь в теории взаимодействия электронов с фотонами, т. е. в квантовой электродинамике.

Как известно, в классической теории электроны рассматриваются как частицы, а свет — как волны. Однако ряд экспериментов, и в первую очередь опыты Столетова

---

<sup>1)</sup> О нейтринной теории света см., например, работы А. А. Соколова [ЖЭТФ 7, 1055 (1937); 8 113, 644 (1938)], где приведена литература. Более подробно вопросы, связанные со слиянием, будут рассмотрены во второй части настоящей книги (§ 3).

по фотоэффекту, а также трудности классической физики, связанные с построением теории излучения абсолютно чёрного тела («ультрафиолетовая катастрофа»), привели к необходимости пересмотра классической электродинамики. Оказалось, что и электромагнитному полю присущи некоторые корпускулярные свойства, а именно, было показано, что свет излучается и поглощается некоторыми порциями (квантами), энергия которых связана с частотой соотношением  $\varepsilon = h\nu$  ( $\nu$  — частота,  $h = 2\pi\hbar = 6,62 \cdot 10^{-27}$  эрг сек — постоянная Планка).

После того как были установлены некоторые корпускулярные свойства света, проявляющиеся, как правило, в области больших частот, оказалось также необходимым пересмотреть и вопрос о законах движения электронов в атомах, так как классическая теория оказалась явно недостаточной для решения даже простейшей задачи, связанной со строением и излучением атома водорода. Чтобы построить теорию атома, пришлось заменить классические законы движения электрона некоторыми новыми, а именно, квантовыми законами, отражающими волновой характер движения электронов. Открытие диффракции электронов окончательно подтвердило наличие волновых свойств.

Однако квантовая теория в своём первоначальном виде была внутренне противоречивой. Действительно, эта теория пыталась объяснить квантовый характер излучения, вводя волновые законы движения электронов и в то же самое время оставляя законы электромагнитного поля по существу классическими. Естественно, что такая теория не могла объяснить многие важнейшие явления и в первую очередь не могла решить проблему спонтанного излучения. Поэтому вскоре после появления квантовой механики возникла необходимость проквантовать уравнения Максвелла (соответствующий метод называется вторичным квантованием), т. е. построить квантовую теорию электромагнитного поля, которая бы позволила отразить дуализм волновых и корпускулярных свойств фотонов.

Эта теория может описывать процесс с меняющимся числом частиц, например излучение и поглощение фо-

тонов, которое происходит при переходе электрона из одного состояния ( $e_-$ ) в другое ( $e'_-$ ):

$$e_- \rightleftharpoons e'_- + \gamma.$$

Вначале казалось, что описание корпускулярных свойств света является совершенно несовместимым с волновой оптикой. Однако квантовая электродинамика по существу позволяет одновременно сочетать и корпускулярные и волновые свойства света. Подобный синтез корпускулярных и волновых свойств может быть понят только на основе диалектического материализма, который учит, что в каждом явлении природы наряду с проявлением противоположностей должно существовать также их диалектическое единство.

Вслед за развитием квантовой теории электромагнитного поля был поставлен вопрос о вторичном квантовании и других волновых полей, что позволило бы описать в общем виде превращение одних элементарных частиц в другие.

В результате квантования (точнее, вторичного квантования) уравнения Дирака было показано, что можно построить теорию с меняющимся числом электронов и позитронов. Согласно этой теории электроны могут появляться лишь в паре с позитронами, например, когда фотон с энергией  $\epsilon$ , большей собственной энергии электрона и позитрона, налетает на ядро заряда  $Ze$  (см. § 39)

$$\gamma + Ze \rightarrow e_+ + e_- + Ze.$$

Возможен и обратный процесс, а именно, превращение пары электрон—позитрон в два  $\gamma$ -кванта (см. § 40):

$$e_+ + e_- \rightarrow \gamma + \gamma'.$$

Квантовая электродинамика (т. е. теория вторично квантованного электромагнитного или электронно-позитронного поля) позволяет описать эти процессы в хорошем количественном согласии с экспериментом.

По мере развития теории элементарных частиц и экспериментальной ядерной техники было установлено много других процессов с превращением одних частиц в другие. Отметим среди этих превращений реакцию  $\beta$ -распада, которая трактуется как превращение нейтрона ( $n$ ) в про-



тон ( $p$ ), электрон ( $e$ ) и нейтрино ( $\nu$ ):

$$n \rightarrow p + e + \nu.$$

Теория  $\beta$ -распада, как и теория ряда других превращений частиц, находится ещё в стадии разработки. Тем не менее одним из важнейших достижений квантовой электродинамики является указание, находящееся в согласии с экспериментом, на возможность взаимного превращения элементарных частиц.

Квантовая электродинамика по-новому ставит и проблему взаимодействия. Взаимодействие между частицами по этой теории должно возникать в результате обмена (переноса) квантами третьего поля.

Наряду с взаимодействием посредством квантов электромагнитного поля, что выясняет природу закона Кулона и формулы Брейта (см. § 25 и 26), квантовая электродинамика указывает на возможность существования ещё и других, специфически квантовых взаимодействий, переносимых, например, парами электрон — позитрон, мезонами (мезонная теория ядерных сил) или другими частицами.

После появления квантовой электродинамики можно было определить границу применимости обычной квантовой механики электропа (или без вторичного квантования, или же, когда нас интересует проблема излучения, лишь со вторично проквантованным электромагнитным полем), а именно, стало ясным, что эта теория справедлива лишь при малых энергиях  $\varepsilon$  ( $\varepsilon < 2mc^2$ ), т. е. в тех областях, где процессы порождения электронно-позитронных пар не являются существенными.

Поскольку масса покоя фотона равняется нулю ( $m=0$ ), для фотона не может быть написано нерелятивистское (без вторичного квантования) волновое уравнение, аналогичное нерелятивистскому уравнению Шрёдингера для электрона. Поэтому результаты квантовой электродинамики с уменьшением  $h\nu$  (когда можно считать  $h=0$ ) переходят непосредственно в результаты классической электродинамики.

Наряду с успехами квантовой электродинамики следует остановиться и на некоторых трудностях, которые встретились при её развитии.

Вторично квантованная волновая функция не исчезает даже в том случае, если среднее число частиц равно нулю. Физически это связано с возможностью виртуального испускания и поглощения частиц, например фотонов. Иногда этот процесс называют нулевыми колебаниями или квантовыми флуктуациями электромагнитного поля.

Современная теория этих нулевых колебаний и взаимодействия с ними заряженных частиц приводит к целому ряду трудностей, часть из которых, впрочем имеет ещё классическое происхождение. Так, например, помимо бесконечной продольной массы электрона (известной ещё из классической электродинамики), квантовая электродинамика приводит к бесконечной поперечной массе, которая появляется в результате подсчёта энергии взаимодействия электрона с квантовыми флуктуациями поперечного электромагнитного поля.

Попытки устранения трудностей с расходимостями хотя и не привели ещё к полному решению вопроса, тем не менее позволили объяснить ряд важнейших экспериментов (дополнительный магнитный момент электрона, сдвиг уровней в водородоподобных атомах).

В связи с этими важнейшими открытиями внимание теоретиков было вновь обращено на квантовую теорию поля, которая за самое последнее время достигла заметных успехов.

Квантовая электродинамика подошла также вплотную к вопросу о природе собственной массы электрона. Хотя многие трудности этой проблемы, связанные главным образом с бесконечным значением собственной полевой массы, остаются пока что ещё не разрешёнными, тем не менее установлено, что в проблеме собственной массы существенная роль принадлежит электронно-позитронному вакууму. Все вопросы, связанные с электронно-позитронным вакуумом, будут рассмотрены в гл. IV.

Вокруг открытий современной квантовой теории развернулась большая идеологическая борьба. Мы хорошо знаем, что всякие методологические извращения в науке сильно тормозят её нормальное развитие.

Так, например, последователи Менделя — Моргана пытались завести биологию в тупик. Советские учёные

в 1948 г.<sup>1)</sup> вскрыли порочность этих положений и создали все условия для дальнейшего развития мичуринской биологии.

Известно также, что немарксистская формула, данная Марром насчёт языка, как надстройки, запутала языковедение. Лишь работы И. В. Сталина<sup>2)</sup> вскрыли порочность марровской теории и повернули советское языковедение на истинный марксистский путь исследования.

Незнание физиками диалектического материализма привело в начале двадцатого века к серьёзному кризису в понимании важнейших открытий в области физики. В своей классической работе «Материализм и эмпириокритицизм» В. И. Ленин показал, что только на основе диалектического материализма может быть правильно понято развитие современной физики. «Современная физика,— писал Ленин<sup>3)</sup>,—лежит в родах. Она рождает диалектический материализм. Роды болезненные. Кроме живого и жизнеспособного существа, они дают неизбежно некоторые мёртвые продукты, кое-какие отбросы, подлежащие отправке в помещение для нечистот. К числу этих отбросов относится весь физический идеализм, вся эмпириокритическая философия вместе с эмпириосимволизмом, эмпириомонизмом и пр. и т. п.»

При изложении квантовой теории мы особое внимание уделили работам советских авторов, которым на основе учения Ленина—Сталина удалось вскрыть идеалистические извращения в квантовой механике (например, «принцип дополнительности»), а также показать бесплодность некоторых направлений (например, «теории резонанса Паулингa), развиваемых за рубежом (см. § 28, п. в).

Чем скорее квантовая теория освободится от реакционных влияний, тем успешнее будут развиваться наши знания о микромире.

---

<sup>1)</sup> «О положении в биологической науке», стенографический отчёт сессии ВАСХНИЛ, Сельхозгиз, Москва, 1948.

<sup>2)</sup> И. В. Сталин, Относительно марксизма в языковедении, Госполитиздат, 1950.

<sup>3)</sup> В. И. Ленин, Материализм и эмпириокритицизм, Госполитиздат, 1951, стр. 295.

## ГЛАВА I

### ОБЩАЯ ТЕОРИЯ СВОБОДНОГО ПОЛЯ

#### § 1. Инвариантность волновых уравнений и законы преобразования волновых функций <sup>1)</sup>

Согласно специальной теории относительности волновые уравнения, описывающие движение любых элементарных частиц, не должны зависеть от выбора системы координат, т. е. должны сохранять свою форму при переходе от одной инерциальной системы координат к другой.

Это требование, являющееся обобщением экспериментальных фактов, на современном этапе развития физики должно быть положено в основу построения теории элементарных частиц.

Отсюда мы можем получить законы преобразования волновых функций, т. е. определить тензорную размерность волновой функции  $\psi$ .

При составлении плотности заряда и тока, тензора энергии и т. д., которые для линейных уравнений образуются из квадратичных комбинаций волновой функции  $\psi$ , следует учитывать, что они должны представлять собою четырёхмерные вещественные тензоры.

При переходе от одной системы координат ( $x^\mu = x, y, z, ct$ ) к другой ( $x'^\alpha = x', y', z', ct'$ ) составля-

---

<sup>1)</sup> Более подробно вопросы, связанные с инвариантностью волновых уравнений, изложены в монографии Д. Д. Иваненко и А. А. Соколова «Классическая теория поля». М.—Л., изд. 2, 1951 (далее будет цитироваться как «Классическая теория поля»), стр. 119.

ющие тензоров должны преобразовываться по определённым правилам<sup>1)</sup>.

Так, например, скалярные величины (тензоры нулевого ранга) при таком переходе остаются неизменными:

$$\varphi' = \varphi. \quad (1,1)$$

Векторные величины (тензоры первого ранга) преобразуются по закону

$$A'^{\alpha} = \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\mu}} A^{\mu} \quad (\text{контравариантный вектор}) \quad (1,2)$$

или

$$A'_{\alpha} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\alpha}} A_{\mu} \quad (\text{ковариантный вектор}). \quad (1,3)$$

Величины, образующие тензоры второго ранга, подчиняются следующим законам преобразования:

$$A'^{\alpha\beta} = \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial x'^{\beta}}{\partial x^{\nu}} A^{\mu\nu} \quad (\text{контравариантный тензор}), \quad (1,4)$$

$$A'_{\alpha\beta} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\alpha}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\beta}} A_{\mu\nu} \quad (\text{ковариантный тензор}), \quad (1,5)$$

$$A'^{\alpha}_{\beta} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\alpha}} \frac{\partial x'^{\beta}}{\partial x^{\nu}} A^{\nu}_{\mu} \quad (\text{смешанный тензор}). \quad (1,6)$$

Эти законы преобразования легко обобщить на случай тензоров более высокого ранга. Заметим, что пространственно-временные координаты точки преобразуются по закону (1,2) и поэтому в своей совокупности образуют контравариантный тензор.

Если отвлечься от тяготения, влияние которого на элементарные частицы сравнительно мало, то при исследовании полей можно ограничиться инерциальными системами.

Переход от одной инерциальной системы координат к другой складывается в общем случае из параллельного

<sup>1)</sup> Здесь и в дальнейшем латинские буквы пробегают значения 1, 2, 3, а греческие — 1, 2, 3, 4. Кроме того, если не оговорено особо, наличие в произведении двух величин с одинаковым индексом означает суммирование по этому индексу.

переноса и четырёхмерных поворотов одной системы отсчёта относительно другой.

При параллельном переносе, изменяющем лишь начало отсчёта, координаты связаны между собою соотношениями

$$x'^{\mu} = x^{\mu} + a^{\mu}. \quad (1,7)$$

При пространственных поворотах, например вокруг оси  $z$  на угол  $\varphi$ , мы имеем:

$$\begin{aligned} x' &= x \cos \varphi + y \sin \varphi, \\ y' &= -x \sin \varphi + y \cos \varphi, \\ z' &= z, \quad t' = t. \end{aligned} \quad (1,8)$$

Наконец, преобразования Лорентца имеют вид

$$\begin{aligned} x' &= \frac{x - vt}{k}; \\ y' &= y, \quad z' = z, \\ t' &= \frac{t - \frac{vx}{c^2}}{k}, \end{aligned}$$

где  $k = \sqrt{1 - \beta^2}$ , а  $v = c\beta$  — скорость движения одной системы координат относительно другой.

Вводя гиперболические функции

$$\operatorname{ch} \gamma = \frac{1}{k}, \quad \operatorname{sh} \gamma = \frac{\beta}{k}, \quad (1,9)$$

мы можем последние преобразования представить в виде:

$$\begin{aligned} x' &= x \operatorname{ch} \gamma - ct \operatorname{sh} \gamma, \\ ct' &= ct \operatorname{ch} \gamma - x \operatorname{sh} \gamma. \end{aligned} \quad (1,10)$$

Сравнивая последние формулы с формулами (1,8), мы видим, что преобразования Лорентца эквивалентны «повороту» в пространственно-временной плоскости на некоторый мнимый угол  $i\gamma$ .

Заметим, что при параллельном переносе, а также при пространственных поворотах законы преобразования для контравариантных и ковариантных тензоров будут одинаковыми, поскольку  $\frac{\partial x'}{\partial y} = \frac{\partial y'}{\partial x}$  и т. д., а при про-

странственно-временных вращениях — различны, что видно из соотношения  $\frac{\partial x'}{\partial ct} = -\frac{\partial ct'}{\partial x}$  и т. д.

Если формально ввести вместо времени мнимую составляющую ( $x_\mu = x, y, z, ict$ ), то тогда преобразования (1,10) принимают вид:

$$\begin{aligned} x'_1 &= x_1 \cos \alpha + x_4 \sin \alpha, \\ x'_4 &= x_4 \cos \alpha - x_1 \sin \alpha, \end{aligned} \quad (1,11)$$

где

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + (i\beta)^2}}, \quad \sin \alpha = \frac{i\beta}{\sqrt{1 + (i\beta)^2}}.$$

В этом случае легко показать, что

$$\frac{\partial x'_1}{\partial x_4} = \frac{\partial x'_4}{\partial x_1},$$

т. е. законы преобразования для контравариантных и для ковариантных тензоров будут одинаковыми во всех случаях, и мы можем не делать различия между ними.

Перечислим волновые функции, из квадратичных форм которых мы можем сконструировать вещественные тензоры.

1) Скалярная или псевдоскалярная функции, которые в общем случае могут быть комплексными. Как будет показано ниже, скалярные уравнения применимы для описания движения частиц со спином, равным нулю.

2) Четырёхмерный вещественный или комплексный вектор  $A_\mu (A, A_4)$ , из производных компонент которого можно составить антисимметрический тензор 2-го ранга:

$$H_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu}.$$

Вместо векторных величин мы можем взять также псевдовекторные величины. В частности, вещественное векторное волновое уравнение с массой покоя, равной нулю, описывает поле фотонов (уравнения Максвелла). Спин

частиц, подчиняющихся векторному и псевдовекторному уравнению, равняется (в единицах  $\hbar$ ) единице.

3) Уравнение, волновые функции которого образуют симметричный тензор второго ранга:

$$g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$$

(десять составляющих), описывает поведение частиц со спином, равным двум. В частности, гравитационные поля в линейном приближении подчиняются вещественному волновому уравнению, причём масса покоя частиц гравитонов, сопоставленных полю, равна нулю.

4) В качестве волновых функций могут фигурировать также полувекторы (спиноры), т. е. тензоры полуцелого ранга.

Общий закон преобразования для полувекторов мы исследуем в § 18. Заметим, что он отличен от закона преобразования для обычных тензорных величин. Однако из квадратичной формы полувекторных величин мы можем составить вещественные тензоры. Полувекторное уравнение с комплексными функциями описывает движение электронов, обладающих спином, равным половине.

В настоящей главе мы рассмотрим квантование свободного поля. Мы не предполагаем здесь строить общую теорию частиц с произвольным спином, а ограничиваем нашу задачу исследованием скалярного поля (§§ 2—11), векторного уравнения электромагнитного поля (§§ 12—16) и полувекторного уравнения (§§ 17—23), описывающего движение электронов и позитронов.

Строго говоря, рассматривая в первой части монографии лишь вопросы, связанные с квантовой электродинамикой, мы могли бы ограничиться квантованием уравнений электромагнитного поля и поля электронов и позитронов. Однако на примере скалярного уравнения мы можем в наиболее простой математической форме сформулировать основные законы вторичного квантования. Поэтому изложение теории вторичного квантования мы начнём именно с рассмотрения скалярного уравнения, обобщая затем найденные формулы на уравнения квантовой электродинамики.



## § 2. Скалярное уравнение

Построим теорию скалярного поля, описываемого с помощью одной скалярной волновой функции  $\varphi$ .

Наиболее простой способ получения волнового уравнения для свободного поля сводится к следующему.

В соотношении между энергией  $E$ , импульсом  $\mathbf{p}$  и массой покоя  $m$  частицы

$$E^2 - c^2 p^2 - m^2 c^4 = 0 \quad (2,1)$$

следует подставить операторы для энергии и импульса

$$E = -\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial t}, \quad \mathbf{p} = \frac{\hbar}{i} \nabla \quad (2,2)$$

действующие на волновую функцию  $\varphi$ . Заменяя, кроме того, массу  $m$  величиной  $\frac{\hbar k_0}{c}$ , мы получим после сокращения на величину  $\hbar^2 c^2$  уравнение для волн де-Бройля скалярного поля:

$$\left( \nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - k_0^2 \right) \varphi = \left( \frac{\partial}{\partial x_\mu} \frac{\partial}{\partial x_\mu} - k_0^2 \right) \varphi = 0. \quad (2,3)$$

Этому уравнению удовлетворяют как вещественная, так и комплексная волновые функции  $\varphi$ .

При наличии электромагнитного поля (потенциалы  $\mathbf{A}$  и  $\Phi$ ) вместо оператора (2,2) мы должны ввести новые операторы:

$$\hat{E} = -\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial t} - e_- \Phi; \quad \mathbf{P} = \frac{\hbar}{i} \nabla - \frac{e_-}{c} \mathbf{A}, \quad (2,4)$$

где  $e_- = -e$  ( $e > 0$ ) — заряд электрона, а  $\mathbf{P}$  — оператор обобщенного импульса. В этом случае автоматически будет учтено взаимодействие частицы с электромагнитным полем.

При введении таких операторов волновому уравнению может удовлетворить лишь комплексная волновая функция.

1) Здесь и в дальнейшем под оператором «набла» мы будем понимать векторную величину

$$\nabla = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z},$$

где  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$ ,  $\mathbf{k}$  — орты декартовых осей координат.

Вначале ошибочно предполагалось, что это уравнение применимо для описания релятивистского движения электрона. Однако скалярное уравнение описывает движение частицы со спином, равным нулю, в то время как спин электронов оказался равным  $1/2$  (в единицах  $\hbar$ ). Дальнейшие исследования показали, что движение электронов подчиняется полувекторному уравнению. Возможно, что скалярное (для  $\pi$ -мезона, по всей вероятности, псевдоскалярное) уравнение будет использовано для исследования движения мезонов, если спин мезонов окажется равным нулю.

### § 3. Вариационные методы исследования скалярного поля

Как известно, в классической теории функция действия системы материальных точек равна

$$S = \int L dt, \quad (3,1)$$

где  $L$  — функция Лагранжа, зависящая от обобщённых координат  $q_i$  и скоростей  $\dot{q}_i$ . В общем случае  $L$  может зависеть ещё от времени  $t$ .

Уравнение движения является следствием принципа наименьшего действия и получается в результате варьирования функции действия  $S$ .

Элементарные вычисления приводят тогда к следующим уравнениям движения:

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0. \quad (3,2)$$

Если функция Лагранжа не зависит явно от времени  $t$ , то уравнения (3,2) приводят к простому виду для закона сохранения энергии. Чтобы показать это, воспользуемся следующим тождеством:

$$\begin{aligned} \frac{dL}{dt} &= \sum_i \left( \frac{\partial L}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i \right) = \\ &= \sum_i \left[ \left( \frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \dot{q}_i + \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \right) \right]. \quad (3,3) \end{aligned}$$

Принимая во внимание соотношение (3,2), находим:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - L \right) = 0,$$

откуда следует, что энергия  $E$  (или, точнее, функция Гальмита) является постоянной величиной:

$$E = \sum_i p_i \dot{q}_i - L = \text{const}, \quad (3,4)$$

где обобщённый импульс

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}.$$

При описании поля волновая функция  $\varphi$ , играющая роль обобщённой координаты, зависит не только от времени  $t = \frac{x_4}{ic}$ , но также и от пространственных координат  $\mathbf{r}(x, y, z)$ . Поэтому функция действия принимает вид

$$S = \int L d^4x, \quad (3,5)$$

где  $L$  — функция Лагранжа, являющаяся инвариантом, а  $d^4x = d^3x dt = dx dy dz dt$  представляет собою элемент четырёхмерного объёма.

Уравнения поля мы получим, варьируя  $L$  по  $\varphi$ :

$$\frac{\delta L}{\delta \varphi} = \frac{\partial L}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \frac{\partial L}{\partial \varphi_\alpha} = 0, \quad \text{где } \varphi_\alpha = \frac{\partial \varphi}{\partial x_\alpha}. \quad (3,6)$$

В частности, для получения уравнения скалярного поля мы должны положить

$$L = -\frac{1}{8\pi} (\varphi_\alpha \varphi_\alpha + k_0^2 \varphi^2) = -\frac{1}{8\pi} \left[ (\nabla \varphi)^2 - \frac{1}{c^2} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 + k_0^2 \varphi^2 \right]. \quad (3,7)$$

Тогда с помощью (3,6) находим уравнение для скалярного поля

$$\frac{1}{4\pi} (\varphi_{\alpha\alpha} - k_0^2 \varphi) = \frac{1}{4\pi} \left( \nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - k_0^2 \right) \varphi = 0, \quad (3,8)$$

совпадающее с уравнением (2,3).

Найдём теперь обобщение закона сохранения (3,4) на случай полей. Вместо одного уравнения (3,3) мы будем при этом иметь четыре:

$$\frac{\partial L}{\partial x_\nu} = \frac{\partial L}{\partial \varphi} \varphi_\nu + \frac{\partial L}{\partial \varphi_\mu} \varphi_{\mu\nu} = \varphi_\nu \left( \frac{\partial L}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial x_\mu} \frac{\partial L}{\partial \varphi_\mu} \right) + \frac{\partial}{\partial x_\mu} \left( \varphi_\nu \frac{\partial L}{\partial \varphi_\mu} \right). \quad (3,9)$$

Приимая во внимание уравнение (3,6), находим, что тензор

$$T_{\mu\nu} = \varphi_\nu \frac{\partial L}{\partial \varphi_\mu} - L \delta_{\mu\nu} \quad (3,10)$$

удовлетворяет закону сохранения

$$\frac{\partial T_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = 0. \quad (3,11)$$

Тензор  $T_{\mu\nu}$  получил название канонического тензора энергии (точнее плотности энергии—импульса—натяжений).

Заметим, что компоненты для тензора энергии из уравнения (3,11) определяются неоднозначно.

Закоу сохранения будет удовлетворять также всякий другой тензор

$$T'_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} - \frac{\partial}{\partial x_\lambda} f_{\nu[\gamma\lambda]}, \quad (3,12)$$

в котором некоторая произвольная функция  $f_{\mu[\gamma\lambda]}$  удовлетворяет условию  $\frac{\partial^2 f_{\mu[\gamma\lambda]}}{\partial x_\nu \partial x_\lambda} = 0$ , т. е. является тензором третьего ранга, антисимметричным относительно значков  $\nu$  и  $\lambda$ :

$$f_{\mu[\gamma\lambda]} = -f_{\mu[\lambda\gamma]}.$$

Тензор (3,10) может быть в общем случае несимметричным. Однако для свободного поля оказывается возможным подобрать функцию  $f_{\nu[\gamma\lambda]}$  таким образом, чтобы тензор (3,12) был симметричным ( $T'_{\mu\nu} = T'_{\nu\mu}$ ).

Компоненты тензора  $T_{\mu\nu}$  называются компонентами канонического тензора энергии, а компоненты  $T'_{\mu\nu}$  обра-

зуют так называемый метрический или симметризованный тензор энергии<sup>1)</sup>).

В частности, для скалярного поля мы находим:

$$T_{\mu\nu} = -\frac{1}{4\pi} \varphi_{,\mu} \varphi_{,\nu} - L \delta_{\mu\nu}. \quad (3,13)$$

В силу равенства  $T_{\mu\nu} = T_{\nu\mu}$  компоненты канонического и метрического тензора энергии совпадают друг с другом. Отсюда следует, что функция  $f_{\alpha[\nu\lambda]}$  для скалярного поля является произвольной постоянной, которую можно приравнять нулю.

Покажем, что условие обращения в нуль расходимости от тензора энергии

$$\frac{\partial T_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = 0 \quad (3,14)$$

ведёт к законам сохранения энергии и импульса поля. В самом деле, равенство (3,14) может быть представлено в виде

$$\frac{\partial T_{\mu n}}{\partial x_n} + \frac{1}{ic} \frac{\partial T_{\mu 4}}{\partial t} = 0. \quad (3,15)$$

Умножая всё равенство на элемент трёхмерного объёма и учитывая, что при интегрировании по пространству

$$\int \frac{\partial T_{\nu n}}{\partial x_n} d^3x = 0 \quad (3,16)$$

находим четыре закона сохранения для поля:

$$\frac{d}{dt} \int T_{\mu 4} d^3x = 0. \quad (3,17)$$

Величина

$$G_\mu = \frac{i}{c} \int T_{\mu 4} d^3x$$

представляет собою четырёхмерный импульс поля.

<sup>1)</sup> Метрический тензор энергии может быть получен непосредственно в результате варьирования лагранжиана по компонентам метрического тензора  $g^{\mu\nu}$  (см., например, «Классическая теория поля», стр. 188).

В частности, при  $\mu = 1, 2, 3$  получаем законы сохранения для пространственных составляющих импульса поля:

$$G_n = \frac{i}{c} \int T_{n4} d^3x = \text{const}, \quad (3,18)$$

а при  $\mu = 4$  получаем закон сохранения энергии, или гамильтониана поля:

$$H = U = \frac{c}{i} G_4 = \int T_{44} d^3x = \text{const}. \quad (3,19)$$

Отсюда видно, что плотность энергии  $u$  (временная компонента тензора) и импульса  $g_n$  (пространственно-временная компонента) связаны с тензором энергии соотношениями

$$u = T_{44} = \frac{1}{8\pi} \left[ (\nabla\varphi)^2 + \left( \frac{1}{c} \frac{\partial\varphi}{\partial t} \right)^2 + k_0^2 \varphi^2 \right],$$

$$g_n = \frac{i}{c} T_{n4} = -\frac{1}{4\pi c^2} \frac{\partial\varphi}{\partial x_n} \frac{\partial\varphi}{\partial t}. \quad (3,20)$$

Остальные компоненты тензора поля  $T_{nk}$  (пространственные компоненты) характеризуют натяжения.

#### § 4. Момент количества движения скалярного поля

Как известно, момент количества движения системы материальных точек определяется формулой

$$\mathbf{M} = \sum [\mathbf{r}p], \quad (4,1)$$

где  $\mathbf{r}$  — радиус-вектор,  $\mathbf{p}$  — импульс частицы, а суммирование производится по всем частицам, входящим в состав системы.

Формула (4,1) может быть представлена в виде

$$M_x = M_{23} = \sum (x_2 p_3 - x_3 p_2), \quad (4,2)$$

допускающем простое обобщение на четырёхмерный случай:

$$M_{\mu\nu} = \sum (x_\mu p_\nu - p_\mu x_\nu). \quad (4,3)$$

Четырёхмерный момент обладает, во-первых, тремя пространственными составляющими ( $M_x = M_{23}$ ,  $M_y = M_{31}$ ,  $M_z = M_{12}$ ), представляющими собою компоненты момента

количества движения  $\mathbf{M}$  в трёхмерном пространстве и тремя пространственно-временными составляющими

$$M_{4n} = \sum (x_4 p_n - x_n p_4) = ic \sum_i \left( t p_n - x_n \frac{E}{c^2} \right).$$

Здесь мы учли, что  $x_4 = ict$ , а  $\frac{cp_4}{i} = E$  есть энергия.

В трёхмерных обозначениях последнее соотношение может быть представлено в векторном виде

$$\mathbf{M}' = ic \sum \left( t \mathbf{p} - \mathbf{r} \frac{E}{c^2} \right),$$

где

$$M'_n = M_{4n}.$$

Легко показать, что у замкнутой системы четырёхмерный вектор момента количества движения  $M_{\mu\nu}$  должен сохраняться, т. е.

$$\frac{dM_{\mu\nu}}{dt} = 0 \text{ или } M_{\mu\nu} = \text{const.} \quad (4,4)$$

В самом деле, для пространственных составляющих формула (4,4) выражает известный закон сохранения момента количества движения

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = \frac{d}{dt} \sum [\mathbf{r}\mathbf{p}] = 0,$$

а для пространственно-временных составляющих имеет место соотношение

$$ic \left( \sum \mathbf{p} - \frac{d}{dt} \sum \frac{E\mathbf{r}}{c^2} + t \frac{d}{dt} \sum \mathbf{p} \right) = 0. \quad (4,5)$$

Учитывая для замкнутой системы закон сохранения энергии  $\sum E = \text{const}$  и закон сохранения импульса  $\sum \mathbf{p} = \text{const}$ , найдём, что соотношение (4,5) представляет собой закон движения центра инерции

$$\mathbf{r}_c = \frac{\sum \mathbf{r} E}{\sum E}, \quad (4,6)$$

а именно: при отсутствии внешних сил центр инерции должен перемещаться с постоянной скоростью

$$\mathbf{v}_c = \frac{d\mathbf{r}_c}{dt} = \frac{c^2 \sum \mathbf{p}}{\sum E} = \text{const.} \quad (4,7)$$

Найдём теперь обобщение понятия момента количества движения на волновое поле.

С помощью формул (3,18) и (3,20) находим для пространственных составляющих:

$$M_x = M_{23} = \int (x'_2 g_3 - x_3 g_2) d^3x = \frac{i}{c} \int (x_2 T_{34} - x_3 T_{24}) d^3x \quad (4,8)$$

и т. д.

Введём понятие четырёхмерной плотности момента количества движения  $\mathbf{M}$  поля, представляющей собой тензор третьего ранга, антисимметричный относительно двух значков:

$$M_{[\mu\nu]\lambda} = -M_{[\nu\mu]\lambda} = \frac{i}{c} (x_\mu T_{\nu\lambda} - x_\nu T_{\mu\lambda}). \quad (4,9)$$

Тогда для пространственных компонент имеем следующее выражение:

$$M_x = M_{23} = \int M_{[23]_1} d^3x. \quad (4,10)$$

Найдём условие, при котором выполняется закон сохранения момента количества движения поля.

Для этого вычислим расходимость от тензора момента

$$\frac{\partial M_{[\mu\nu]\lambda}}{\partial x_\lambda} = \frac{i}{c} (T_{\nu\mu} - T_{\mu\nu}). \quad (4,11)$$

Последнее равенство легко может быть проверено, если принять во внимание законы сохранения для тензора энергии

$$\frac{\partial T_{\nu\lambda}}{\partial x_\lambda} = 0$$

а также соотношение

$$\frac{\partial x_\mu}{\partial x_\lambda} = \delta_{\mu\lambda}. \quad (4,12)$$

Расходимость (4,11) будет исчезать, когда канонический тензор энергии является симметричным, или, иными словами, когда метрический и канонический тензоры совпадают друг с другом. Это имеет место, например, для скалярного поля.



При отсутствии симметрии канонического тензора  $T_{\mu\nu}$  мы можем образовать с помощью антисимметрического тензора  $f_{\mu[\nu\lambda]}$  [см. соотношение (3,12)] метрический тензор энергии  $T'_{\mu\nu}$ , который должен быть уже симметричным.

В этом случае соотношение (4,11) принимает вид:

$$\frac{\partial}{\partial x_\lambda} \left[ M_{[\mu\nu]\lambda} + \frac{i}{c} (f_{\mu[\nu\lambda]} - f_{\nu[\mu\lambda]}) \right] = 0. \quad (4,13)$$

Тензор

$$s_{[\mu\nu]\lambda} = \frac{i}{c} (f_{\mu[\nu\lambda]} - f_{\nu[\mu\lambda]}), \quad (4,14)$$

который добавляется к плотности «орбитального» момента количества движения поля  $M_{[\mu\nu]\lambda}$ , носит название тензора плотности собственного, или «спинового» момента количества движения поля и характеризует поляризационные свойства поля, или спин сопоставленных полю частиц.

Терминология «орбитальный» и «спиновый» момент количества движения поля заимствована из теории движения электронов в атомах.

Пространственные компоненты для проекции спина равны

$$S_x = \int s_{[23]_4} d^3x \text{ и т. д.} \quad (4,15)$$

Таким образом, отсутствие симметрии канонического тензора ( $T_{\mu\nu} \neq T_{\nu\mu}$ ) ведёт к выполнению закона сохранения лишь для суммарного (орбитальный плюс собственный) момента количества движения.

Для скалярного поля тензор  $f_{\mu[\nu\lambda]}$  равен нулю, и поэтому мы можем утверждать, что спин скалярных частиц также равен нулю.

## § 5. Решение скалярного волнового уравнения

Скалярное волновое уравнение имеет вид

$$\nabla^2 \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - k_0^2 \varphi = 0. \quad (5,1)$$

Существует два способа решения уравнения (5,1).

При первом способе исследования мы не будем ограничивать положение частицы в пространстве. В этом слу-

чае решение уравнения (5,1) следует искать в виде интеграла Фурье:

$$\varphi = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int A(\mathbf{k}, t) e^{i\mathbf{k}r} d^3k, \quad (5,2)$$

где

$$\mathbf{k}r = k_x x + k_y y + k_z z, \quad d^3k = dk_x dk_y dk_z.$$

Подставляя (5,2) в выражение (5,1), получаем следующее дифференциальное уравнение для определения коэффициентов  $A(\mathbf{k}, t)$ :

$$\ddot{A}(\mathbf{k}, t) + c^2 K^2 A(\mathbf{k}, t) = 0,$$

где

$$K = \sqrt{k^2 + k_0^2}.$$

Отсюда находим:

$$A(\mathbf{k}, t) = A(\mathbf{k}) e^{-icKt} + B(\mathbf{k}) e^{icKt}.$$

Учитывая, что функция  $\varphi$  является вещественной, мы должны положить

$$B(\mathbf{k}) = A^*(-\mathbf{k}).$$

Поэтому общее решение для скалярного уравнения имеет вид:

$$\varphi = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int [A(\mathbf{k}) e^{-icKt + i\mathbf{k}r} + A^*(\mathbf{k}) e^{icKt - i\mathbf{k}r}] d^3k, \quad (5,3)$$

причём в последнем члене квадратных скобок мы заменили вектор  $\mathbf{k}$  на  $-\mathbf{k}$ .

При втором способе исследования мы условно считаем частицу помещённой в пространство ограниченного объёма  $L^3$ . В этом случае следует искать решение в виде ряда Фурье:

$$\varphi = \frac{1}{L^{3/2}} \sum_{\mathbf{k}} A_{\mathbf{k}}(t) e^{i\mathbf{k}r}.$$

Накладывая на волновую функцию  $\varphi$  условие периодичности  $\varphi(x, y, z) = \varphi(x + L, y, z)$ , имеем дискретную последовательность для волнового вектора  $\mathbf{k}$ , так что

$$\mathbf{k}r = \frac{2\pi}{L} (n_x x + n_y y + n_z z), \quad (5,4)$$

где  $n_x, n_y, n_z$  являются целыми числами, принимающими любые положительные и отрицательные значения, включая нуль.

В этом случае разложение ведётся по системе волновых функций  $f(\mathbf{k}) = \frac{1}{L^{3/2}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$ , обладающих периодом  $L$  и подчиняющихся условию ортонормированности:

$$\int f^*(\mathbf{k}') f(\mathbf{k}) d^3x = \frac{1}{L^3} \int e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{r}} d^3x = \\ = \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} = \delta_{n_1 n_1'} \delta_{n_2 n_2'} \delta_{n_3 n_3'}. \quad (5,5)$$

Повторяя предыдущие рассуждения, мы можем решить уравнения (5,1) представить в виде:

$$\varphi = \frac{1}{L^{3/2}} \sum_{\mathbf{k}} (A_{\mathbf{k}} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} + i\omega_{\mathbf{k}} t} + A_{\mathbf{k}}^{\dagger} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - i\omega_{\mathbf{k}} t}). \quad (5,6)$$

Поскольку размеры объёма  $L^3$  мы можем выбрать сколь угодно большими, выражение (5,6) является общим решением волнового уравнения (5,1). Из условия, что решения (5,3) и (5,6) в предельном случае  $L \rightarrow \infty$  должны совпадать друг с другом, найдём соотношение между коэффициентами  $A_{\mathbf{k}}$  и  $A(\mathbf{k})$ .

Как видно из (5,4),

$$\Delta^3 k = \Delta k_x \Delta k_y \Delta k_z = \frac{8\pi^3}{L^3}. \quad (5,7)$$

Сравнивая равенство (5,3) с равенством (5,6), находим соотношение между амплитудами ряда ( $A_{\mathbf{k}}$ ) и интеграла Фурье [ $A(\mathbf{k})$ ]:

$$\frac{\Delta^3 k}{(2\pi)^{3/2}} A(\mathbf{k}) = \frac{1}{L^{3/2}} A_{\mathbf{k}} = \sqrt{\frac{\Delta^3 k}{(2\pi)^3}} A_{\mathbf{k}},$$

откуда

$$|A_{\mathbf{k}}|^2 = \Delta^3 k |A(\mathbf{k})|^2 = \frac{8\pi^3}{L^3} |A(\mathbf{k})|^2.$$

Заметим, что мы можем обратно амплитуды Фурье  $A_{\mathbf{k}}$  выразить через волновые функции.

Умножая равенство (5,6) на  $\frac{1}{L^{3/2}} e^{-ik'r} d^3x$  и интегрируя по всему пространству с учётом соотношения (5,5), имеем:

$$A_k \cdot e^{-icK't} + A_{-k}^+ \cdot e^{icK't} = \frac{1}{L^{3/2}} \int \varphi e^{-ik'r} d^3x.$$

Дифференцируя равенство по  $t$ , мы получаем другое уравнение, связывающее амплитуды  $A_k$  и  $A_{-k}^+$ .

$$A_k \cdot e^{-icK't} - A_{-k}^+ \cdot e^{icK't} = \frac{i}{cK'} \frac{1}{L^{3/2}} \int \frac{\partial \varphi}{\partial t} e^{-ik'r} d^3x,$$

откуда

$$\begin{aligned} A_k e^{-icKt} &= \frac{1}{2L^{3/2}} \int \left( \varphi + \frac{i}{cK} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) e^{-ikr} d^3x, \\ A_k^+ e^{icKt} &= \frac{1}{2L^{3/2}} \int \left( \varphi - \frac{i}{cK} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) e^{ikr} d^3x. \end{aligned} \quad (5,8)$$

Для того чтобы определить физический смысл амплитуд  $A_k$ , мы вычислим полную энергию, или функцию Гамильтона, скалярного поля.

Как видно из равенств (3,19) и (3,20), функция Гамильтона скалярного поля определяется равенством

$$H = \frac{1}{8\pi} \int \left[ (\nabla \varphi)^2 + \frac{1}{c^2} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 + k_0^2 \varphi^2 \right] d^3x. \quad (5,9)$$

Подставляя сюда вместо  $\varphi$  разложение в ряд Фурье (5,6) и учитывая соотношение

$$\frac{1}{L^3} \sum_k \sum_{k'} \int M_k N_{k'} e^{ik'r'} e^{ikr} d^3x = \sum_k M_k N_{-k}, \quad (5,10)$$

найдем:

$$H = \sum_k \frac{K^2}{4\pi} (A_k^+ A_k + A_k A_k^+). \quad (5,11)$$

Как и следовало ожидать, временные члены в выражении для энергии, или функции Гамильтона, поля исчезают, так как согласно законам сохранения (3,17) выражение (5,11) должно оставаться постоянной величиной.

В классическом случае амплитуды  $A_k$  и  $A_k^+$  являются числами, их можно переставлять между собою, и выражение (5,11) принимает вид

$$H = \sum_k \frac{K^2}{2\pi} A_k^+ A_k. \quad (5,12)$$

Если мы в (5,9) подставили разложение  $\varphi$  в виде интеграла Фурье (5,3), то аналогичные преобразования привели бы нас к следующему выражению для  $H$ :

$$H = \int \frac{K^2}{2\pi} A^+(k) A(k) d^3k. \quad (5,13)$$

Отсюда видно, что квадраты модуля амплитуд Фурье пропорциональны спектральной плотности излучения.

## § 6. Классические скобки Пуассона

Как известно, при исследовании движения системы материальных точек функция действия  $S$  связана с функцией Лагранжа  $L$ , зависящей от обобщённых координат  $q_i$  и скоростей  $\dot{q}_i$ , соотношением

$$S = \int L dt. \quad (6,1)$$

Вводя понятие импульса

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}, \quad (6,2)$$

мы можем написать скобки Пуассона для двух произвольных величин  $P$  и  $Q$ , зависящих от обобщённых координат  $q_i$  и импульсов  $p_i$ :

$$[P, Q] = \sum_{i=1}^N \left( \frac{\partial P}{\partial p_i} \frac{\partial Q}{\partial q_i} - \frac{\partial P}{\partial q_i} \frac{\partial Q}{\partial p_i} \right), \quad (6,3)$$

где сумму следует брать по всем степеням свободы системы материальных точек.

В частности, полагая величины  $P$  и  $Q$  равными обобщённым координатам или импульсам, находим:

$$\begin{aligned} [q_n, q_n] &= [p_n, p_n] = 0, \\ [p_n, q_n] &= \delta_{nn}. \end{aligned} \quad (6,4)$$

Отсюда ясно, что скобка Пуассона будет равна единице только для канонически сопряжённых величин.

В частности, если одну величину положим равной координате  $Q = q_n$ , то в качестве канонически сопряжённой величины следует выбрать соответствующий ей импульс  $P = p_n$ .

Заметим, что классические уравнения движения (канонические уравнения Гамильтона), которые являются следствием вариационного принципа, могут быть также представляемы с помощью скобок Пуассона (6,3), а именно:

$$\dot{P} = [H, P] = \sum_{i=1}^N \left( \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial P}{\partial q_i} - \frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{\partial P}{\partial p_i} \right), \quad (6,5)$$

где  $P$  зависит от  $p_i$  и  $q_i$ , а  $H$  является функцией Гамильтона.

Подставляя сюда вместо  $P$  вначале координату  $q_i$ , а затем импульс  $p_i$ , получаем каноническое уравнение Гамильтона:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}; \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}. \quad (6,6)$$

Классические скобки Пуассона могут быть применены также для исследования волновых полей. С этой целью удобно в качестве обобщённых координат  $q_k$  выбрать амплитуды разложения волновой функции  $\varphi$  в ряд Фурье

$$q_k = A_k(t) = A_k e^{-icKt}. \quad (6,7)$$

Тогда, учитывая равенство (5,12)

$$H = \sum_k \frac{K^2}{2\pi} A_k^*(t) A_k(t), \quad (6,8)$$

находим значение для обобщённого импульса

$$\dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k} = -\frac{K^2}{2\pi} A_k^* e^{icKt} \quad (6,9)$$

или

$$p_k = \frac{iK}{2\pi c} A_k^* e^{icKt}. \quad (6,10)$$

Уравнение движения (6,5) может быть представлено в виде

$$\dot{P} = [H, P] = \sum_k \frac{2\pi c}{iK} \left( \frac{\partial H}{\partial A_k^+(t)} \frac{\partial P}{\partial A_k(t)} - \frac{\partial H}{\partial A_k(t)} \frac{\partial P}{\partial A_k^+(t)} \right). \quad (6,11)$$

Подставляя сюда вместо величины  $P$  амплитуды поля  $A_k(t)$  и  $A_k^+(t)$ , получаем следующие соотношения<sup>1)</sup>:

$$\begin{aligned} \dot{A}_k(t) &= -icK A_k(t), \\ \dot{A}_k^+(t) &= icK A_k^+(t), \end{aligned} \quad (6,12)$$

которые являются прямым следствием равенства (6,7).

1) Вводя новые канонические переменные

$$P_k = \frac{Ki}{V 4\pi} [A_k^+(t) - A_k(t)], \quad Q_k = \frac{1}{c V 4\pi} [A_k^+(t) + A_k(t)],$$

мы приведём гамильтониан (6,8) к виду

$$H = \frac{1}{2} \sum_k (P_k^2 + c^2 K^2 Q_k^2), \quad (6,8a)$$

откуда с помощью канонических уравнений Гамильтона

$$\begin{aligned} \dot{P}_k &= -\frac{\partial H}{\partial Q_k}, \\ \dot{Q}_k &= \frac{\partial H}{\partial P_k} \end{aligned}$$

найдем дифференциальное уравнение для определения обобщенных координат  $Q_k$ :

$$\ddot{Q}_k + c^2 K^2 Q_k = 0. \quad (6,12a)$$

Из уравнений (6,8a) и (6,12a) видно, что свободное волновое поле до некоторой степени эквивалентно упругой среде, заполняющей полость и, подобно ей, имеет дискретный спектр частот ( $\omega = cK$ ), пока объем полости ( $L^3$ ) остается конечным. Каждую из этих частот можно рассматривать как собственные частоты гармонического осциллятора. Таким образом, волновое поле приводится к бесконечному числу гармонических осцилляторов.

Таким образом, выбирая за независимые координаты амплитуды ряда Фурье (дискретный спектр<sup>1)</sup>), мы сохраняем в теории поля основные соотношения системы материальных точек.

### § 7. Квантовые скобки Пуассона

Как известно, переход от классической теории к квантовой может быть совершён путём замены классических скобок Пуассона  $[P, Q]$  квантовыми  $\{P, Q\}$ , определяемыми равенством

$$\{P, Q\} = \frac{i}{\hbar} (PQ - QP) = \frac{i}{\hbar} [P, Q]_-, \quad (7,1)$$

т. е. в квантовой теории величины  $P, Q$  рассматриваются как операторы, в общем случае не коммутирующие друг с другом.

Например, переходя от классической механики к квантовой, мы должны в простейшем случае одного измерения ( $q = x$ ) вместо скобок (6,4) написать:

$$\begin{aligned} \{x, x\} &= \{p_x, p_x\} = 0, \\ \{p_x, x\} &= \frac{i}{\hbar} (p_x x - x p_x) = 1. \end{aligned} \quad (7,2)$$

Для того чтобы удовлетворить последнему соотношению, необходимо импульс представить в виде оператора

$$p_x = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x}, \quad (7,3)$$

причём справа мы должны поставить функцию  $\psi$ , на которую действует наш оператор. Тогда операторное соотношение (7,2) будет эквивалентно следующему:

$$\frac{i}{\hbar} (p_x (x\psi) - x (p_x\psi)) = \psi. \quad (7,4)$$

Замена классического импульса его квантовым значением [см. выражение (7,3)] приводит к волновому урав-

<sup>1)</sup> Обобщение классических скобок Пуассона на непрерывный спектр дано, например, в монографии «Классическая теория поля», стр 350.



нению Шрёдингера, описывающему движение одной частицы.

Точно так же, для того чтобы сделать переход от классической теории поля к квантовой, мы должны заменить классические скобки Пуассона (6,3) квантовыми.

В частности, вместо классического уравнения движения (6,5) мы получаем уравнение

$$\dot{P} = \{H, P\} = \frac{i}{\hbar} (HP - PH), \quad (7,5)$$

являющееся основой вторичного квантования.

Квантовая теория поля (или, как её иначе называют, теория вторичного квантования) позволяет, с одной стороны, описывать волновые свойства частиц с учётом возможности их взаимного превращения, а с другой стороны, описывать взаимодействия между частицами как результат обмена квантами промежуточного поля. Более подробно на этом вопросе мы остановимся в гл. II<sup>1</sup>).

## § 8. Квантование скалярного уравнения

Как было показано в § 5, функция Гамильтона  $H$  связана с независимыми амплитудами Фурье соотношением

$$H = \sum_k \frac{K^2}{4\pi} [A_k^*(t) A_k(t) + A_k(t) A_k^*(t)], \quad (8,1)$$

откуда, переставляя местами амплитуды  $A$  и  $A^*$ , находим:

$$H = \sum_{k'} \frac{K'^2}{2\pi} A_{k'}^*(t) A_{k'}(t). \quad (8,2)$$

Подставляя последнее выражение в (7,5), получаем после сокращения временных множителей следующие

---

<sup>1</sup>) Заметим, что теорию вторичного квантования можно сформулировать с помощью так называемой теории «дырок» (более подробно см. § 23). Однако теория «дырок» годится лишь для описания фермионических частиц и не может быть использована для квантования бозевского поля.

уравнения <sup>1)</sup>):

$$\begin{aligned} -icK A_k^- &= \frac{i}{\hbar} (H A_k - A_k H), \\ icK A_k^+ &= \frac{i}{\hbar} (H A_k^+ - A_k^+ H). \end{aligned} \quad (8,3)$$

Мы удовлетворим уравнению (8,3), если положим

$$A_k^+ A_k A_k - A_k A_k^+ A_k = -\frac{2\pi c \hbar}{K'} A_k \delta_{kk'}. \quad (8,4)$$

Левую часть последнего соотношения можно преобразо-

<sup>1)</sup> Квантование поля с помощью перестановочных соотношений (8,3) получило название вторичного квантования.

Происхождение этой терминологии связано со следующим обстоятельством: заменяя в гамильтониане материальной точки классические скобки Пуассона квантовыми, мы должны вместо импульса  $\mathbf{p}$  подставить оператор  $\frac{\hbar}{i} \nabla$  [см. соотношение (7,3)].

В результате получаем волновое уравнение, которое является следствием первого квантования.

Подчиняя далее амплитуды волновой функции перестановочным соотношениям (8,3), т. е. заменяя волновую функцию оператором (см. ниже), мы фактически производим вторичное квантование уравнения движения.

Как известно, волновые уравнения Максвелла являются классическими, и поэтому термин вторичное квантование уравнений Максвелла носит до некоторой степени условный характер и сводится к квантованию классического волнового уравнения.

Если обычное волновое уравнение Шрёдингера описывает движения неизменного числа частиц (например, одного), то вторично квантованное релятивистское уравнение является уравнением переменного числа частиц и может описывать как появление, так и поглощение любых частиц. Мы можем пренебречь явлениями, связанными с появлением и поглощением частиц, когда сумма кинетической и потенциальной энергии меньше собственной энергии  $mc^2$  частицы (например, нерелятивистский случай). Поскольку для фотонов масса покоя равна нулю ( $m=0$ ), нерелятивистской квантовой теории электромагнитного поля (подобно нерелятивистскому волновому уравнению Шрёдингера) не существует. При больших  $h\nu$  мы должны пользоваться законами квантовой электродинамики, которые с уменьшением  $h\nu$  переходят непосредственно в законы классической теории излучения.

вать двояким образом:

$$1) A_k^+ A_k A_k - A_k A_k^+ A_k = A_k^+ [A_k^-, A_k]_- - [A_k, A_k^+]_- A_k,$$

или

$$2) A_k^+ A_k A_k - A_k A_k^+ A_k = A_k^+ [A_k^+, A_k]_+ - [A_k, A_k^+]_+ A_k,$$

где  $[a, b]_- = ab - ba$ ;  $[a, b]_+ = ab + ba$ .

Отсюда видно, что уравнение (8,4) имеет следующие два решения:

$$1) [A_k^-, A_k]_- = [A_k^+, A_k^+]_- = 0; [A_k, A_k^+]_- = \frac{2\pi c\hbar}{K} \delta_{kk'}, \quad (8,5)$$

$$2) [A_k^-, A_k]_+ = [A_k^+, A_k^+]_+ = 0; [A_k, A_k^+]_+ = \frac{2\pi c\hbar}{K} \delta_{kk'}. \quad (8,6)$$

Как будет показано ниже, первое решение соответствует статистике Бозе и пригодно для частиц с целочисленным спином (например, для скалярных частиц). Второе решение соответствует статистике Ферми и пригодно для частиц, обладающих полуцелым спином (например, для электронов).

Легко показать, что в нашем случае второе решение должно быть отброшено. В самом деле, амплитуды  $A_k^+$  и  $A_k$  не коммутируют между собою, и поэтому перестановочные соотношения должны быть согласованы с первоначальной формой гамильтониана (8,1).

Воспользовавшись перестановочными соотношениями (8,5) и (8,6), мы можем гамильтониан (8,1) привести соответственно к виду:

1) для бозевских частиц:

$$H = \sum_k \left( \frac{K^2}{2\pi} A_k^+ A_k + \frac{c\hbar K}{2} \right), \quad (8,7)$$

2) для фермиевских частиц:

$$H = \sum_k \frac{c\hbar K}{2}. \quad (8,8)$$

Выражение для гамильтониана (8,7) находится в полном согласии с перестановочными соотношениями (8,5). В формулу же (8,8) вообще не входят амплитуды,

и поэтому никаких перестановочных соотношений с помощью её получить нельзя. Таким образом, фермиевское решение (8,6) должно быть в данном случае отброшено<sup>1)</sup>.

Для того чтобы удовлетворить равенству (8,5), следует предположить, что амплитуды  $A_k$  носят операторный характер.

Введём новые амплитуды<sup>2)</sup>  $a$  и  $a'$  с помощью формул

$$A_k = \sqrt{\frac{2\pi c\hbar}{K}} a; \quad A_{k'}^* = \sqrt{\frac{2\pi c\hbar}{K'}} a'^*.$$

Эти амплитуды должны подчиняться перестановочным соотношениям

$$[a, a']_- = [a^*, a'^*]_- = 0; \quad [a, a'^*]_- = \delta_{kk'}. \quad (8,10)$$

Для того чтобы удовлетворить этим перестановочным соотношениям, мы должны потребовать, чтобы операторы  $a$  и  $a^*$  действовали на функцию от числа частиц  $N_k$  с импульсом  $\hbar k$  следующим образом:

$$a^* f(N) = \sqrt{N} f(N-1), \quad (8,11)$$

$$a f(N) = \sqrt{N+1} f(N+1). \quad (8,12)$$

Отсюда находим конкретный вид для искомым операторов:

$$a^* = \sqrt{N} e^{-\frac{\partial}{\partial N}} = e^{-\frac{\partial}{\partial N}} \sqrt{N+1}, \quad (8,13)$$

$$a = \sqrt{N+1} e^{\frac{\partial}{\partial N}} = e^{\frac{\partial}{\partial N}} \sqrt{N}.$$

<sup>1)</sup> Мы должны были бы, наоборот, сохранить фермиевское решение, если гамильтониан имел бы вид:

$$H = \sum_k \frac{K^2}{4\pi} (A_k^* A_k - A_k A_k^*). \quad (8,9)$$

Более подробно на этом вопросе мы остановимся в § 23.

<sup>2)</sup> Для сокращённости векторы  $k$  и  $k'$  у амплитуд писать не будем, а последние будем записывать в следующем виде:

$$a = a_k, \quad a' = a_{k'}.$$

Последние равенства легко проверить, если раскрыть действие оператора, стоящего в показателе:

$$e^{\pm \frac{\partial}{\partial x}} f(x) = \left( 1 \pm \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \pm \frac{1}{3!} \frac{\partial^3}{\partial x^3} + \dots \right) f(x) = f(x \pm 1). \quad (8,14)$$

Из равенства (8,13) легко получить операторные соотношения, находящиеся в полном согласии с равенством (8,10):

$$a^+ a = \sqrt{N} e^{-\frac{\partial}{\partial N}} e^{\frac{\partial}{\partial N}} \sqrt{N} = N, \\ a a^+ = 1 + N; \quad a a^+ - a^+ a = 1.$$

Функция от числа частиц  $f(N)$  может быть представлена в виде сложной матрицы, зависящей от начального числа частиц  $N^0$  и от числа частиц  $N$  в конечном состоянии:

$$f(N) = \prod_{k'} \delta_{N_{k'} N_{k'}^0}. \quad (8,15)$$

Произведение (8,15) является тройным произведением и берётся по всем возможным значениям составляющих волнового вектора  $k'$  ( $-\infty < k_x, k_y, k_z < \infty$ ).

Как видно из (8,15), матрица  $f$  обладает единственным матричным элементом, отличным от нуля, для которого все  $N_{k'}$  равны начальному числу частиц  $N_{k'}^0$ . Соответствующий матричный элемент обращается в единицу:

$$f(N) = \prod_{k'} \delta_{N_{k'}^0, N_{k'}^0} = 1. \quad (8,16)$$

Если в начальный момент частицы отсутствуют ( $N_{k'}^0 = 0$ ), то функция (8,15) будет иметь вид

$$f(N) = \prod_{k'} \delta_{N_{k'}, 0}. \quad (8,17)$$

Поддействуем на функцию (8,15) оператором  $a^+$ . Тогда согласно (8,11) найдём:

$$a^+ f(N) = \sqrt{N_k} \delta_{N_k-1, N_k^0} \prod_{k'}' \delta_{N_{k'}, N_{k'}^0}, \quad (8,18)$$

причём штрих у знака произведения  $\prod$  указывает на то, что в произведении отсутствует один множитель ( $k' \neq k$ ).

Как видно из (8,18), единственным матричным элементом, отличным от нуля, будет матричный элемент, для которого

$$\begin{aligned} N_{k'} &= N_{k'}^0, & (k \neq k'), \\ N_k &= N_k^0 + 1. \end{aligned} \quad (8,19)$$

Абсолютное значение этого матричного элемента равно

$$a_k^+ f(N) = \sqrt{N_k^0 + 1}. \quad (8,20)$$

Таким образом, оператор  $a_k^+$  является оператором появления частиц.

Если в начальный момент частицы отсутствуют ( $N_{k'}^0 = 0$ ) и мы поддействуем на функцию  $f$  несколько раз ( $n$  раз) оператором  $a^+$ , то в конечном состоянии ( $N_{k'} = 0$  ( $k' \neq k$ ),  $N_k = n$ ) мы будем иметь отличный от нуля матричный элемент при

$$(a_k^+)^n f(n, 0, \dots) = \sqrt{n!}.$$

Отсюда следует, что в каждом квантовом состоянии может находиться любое число частиц. Иными словами, перестановочные соотношения (8,6) характерны для бозевской статистики.

Поддействуем теперь на функцию (8,15) оператором  $a_k$ . Согласно равенству (8,12) будем иметь в этом случае для матричных элементов<sup>1)</sup>:

<sup>1)</sup> Из формулы (8,15) видно, что функция от числа частиц  $f(N)$  разбивается на произведение функций  $\delta_{NN_0}$ , каждая из которых характеризует число частиц, обладающих импульсом  $\hbar k$ .

$$a_k f(N) = \sqrt{N_k + 1} \delta_{N_k+1, N_k^0} \prod_{k'}' \delta_{N_{k'}, N_{k'}^0}. \quad (8,21)$$

Отличным от нуля будет матричный элемент, для которого

$$N_{k'} = N_{k'}^0 \quad (k' \neq k); \quad N_k = N_k^0 - 1.$$

Абсолютное его значение будет равно

$$a_k f(N) = \sqrt{N_k^0}, \quad (8,22)$$

т. е. оператор  $a_k$  является оператором поглощения частиц.

Придавая числам  $N$  и  $N^0$  различные значения, мы можем функцию  $\delta_{NN^0}$  представить в виде бесконечной единичной матрицы:

$$(\delta_{NN^0}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

Тогда, учитывая формулы (8,18) и (8,21), мы имеем для операторов:

$$a^+ = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \sqrt{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{4} & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}, \quad a = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{1} & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{4} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix},$$

отсюда следует:

$$aa^+ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 2 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 3 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 4 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}, \quad a^+a = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 2 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 3 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix},$$

т. е. в согласии с основным правилом квантования (8,10):

$$aa^+ - a^+a = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}.$$

Если в начальный момент частицы отсутствуют ( $N_k^0 = 0$ ), то единственный отличный от нуля матричный элемент (8,22) также обращается в нуль, т. е., как и следовало ожидать, отрицательного числа частиц существовать не может. Поэтому при отсутствии частиц в начальный момент мы можем упростить перестановочные соотношения (8,6), положив

$$a_k^+ a_{k'} = 0.$$

Тогда отличными от нуля могут быть лишь члены, содержащие произведение

$$a_k a_{k'}^+ = \delta_{kk'}. \quad (8,23)$$

Найдём теперь собственные значения операторов  $a_k^+ a_k$  и  $a_k a_k^+$ .

Для этого на функцию (8,21) подействуем оператором  $a_k^+$ , а на функцию (8,18) — оператором  $a_k$ .

Тогда, принимая во внимание равенства (8,11) и (8,12), получаем:

$$\begin{aligned} a_k^+ a_k \prod_{k'} \delta_{N_{k'}, N_{k'}^0} &= N_k \prod_{k'} \delta_{N_{k'}, N_{k'}^0}, \\ a_k a_k^+ \prod_{k'} \delta_{N_{k'}, N_{k'}^0} &= (1 + N_k) \prod_{k'} \delta_{N_{k'}, N_{k'}^0}, \end{aligned} \quad (8,24)$$

**т. е.** собственные значения искомым операторов равны

$$\begin{aligned} a_k^+ a_k &= N_k^0, \\ a_k a_k^+ &= 1 + N_k^0. \end{aligned} \quad (8,25)$$

Подставляя эти значения в равенство (8,1) и принимая во внимание соотношения (8,5), найдём следующее выражение для собственного значения оператора энергии:

$$H = \sum_k \hbar c K \left( N_k^0 + \frac{1}{2} \right). \quad (8,26)$$



Предполагая, что частицы отсутствуют ( $N_k^0 = 0$ ), мы найдём значение для нулевой энергии

$$H_0 = \frac{1}{2} \sum_k \hbar c K. \quad (8,27)$$

Нулевая энергия  $H_0$  бесконечна, так как сумма (8,27) расходится.

Нулевая энергия может быть также найдена с помощью следующих простых соображений. Согласно соотношениям (6,7) и (6,9) вторичное квантование волнового уравнения мы можем свести к бесконечно большому числу гармонических осцилляторов.

Из квантовой механики известно, что энергия гармонического осциллятора частоты  $\nu$  определяется выражением

$$E_n = h\nu \left( n + \frac{1}{2} \right),$$

где  $n = 0, 1, 2, \dots$

Нулевая, т. е. наименьшая энергия гармонического осциллятора равна

$$E_{0k} = h\nu \frac{1}{2} = \frac{1}{2} c \hbar K,$$

откуда, суммируя по всевозможным состояниям поля, находим общую нулевую энергию бесконечного числа осцилляторов

$$H_0 = \sum_k E_{0k} = \sum_k \frac{1}{2} c \hbar K,$$

совпадающую с выражением (8,27).

Наличие бесконечной нулевой энергии, бесспорно, является большим дефектом квантовой электродинамики и, к сожалению, появляется не только при вычислении энергии поля. В данном конкретном примере эта бесконечность не представляет особых трудностей. В самом деле, задавая энергию системы, мы всегда можем выбрать произвольно аддитивную постоянную. Поэтому, сделав определённую перенормировку шкалы энергии таким

образом, чтобы энергия одного осциллятора отсчитывалась не от обычного нуля, а от энергии  $E_{0k}$ , мы сможем отбросить бесконечную нулевую энергию. Поэтому в дальнейшем при квантовании других полей мы также будем отбрасывать бесконечную нулевую энергию. Что касается других бесконечных членов, которые появляются, например, при исследовании собственной массы частицы, то на их анализе мы остановимся в § 44.

Аналогичным путём вычислим импульс поля, для которого согласно (3,18) и (3,20) имеем:

$$G = -\frac{1}{4\pi c^2} \int \frac{\partial \varphi}{\partial t} \text{grad } \varphi d^3x. \quad (8,28)$$

Принимая во внимание, что волновая функция  $\varphi$  связана с оператором числа частиц  $a^+$  и  $a$  соотношением

$$\varphi = \frac{1}{L^{3/2}} \sum_k \sqrt{\frac{2\pi c \hbar}{K}} (a_k e^{-icKt + ikr} + a_k^* e^{icKt - ikr}), \quad (8,29)$$

найдем с помощью (5,10):

$$G = \sum_k \frac{\hbar k}{2} (a_k a_k^* + a_k^* a_k),$$

откуда, учитывая собственные значения операторов  $aa^+$  и  $a^+a$ , получим:

$$G = \sum_k \hbar k \left( N_k^0 + \frac{1}{2} \right). \quad (8,30)$$

Нетрудно видеть, что суммарный импульс нулевых состояний исчезает:

$$G_0 = \frac{1}{2} \sum_k \hbar k = 0.$$

Поэтому окончательно можем написать:

$$G = \sum_k \hbar k N_k^0. \quad (8,31)$$

С точки зрения корпускулярного истолкования последняя формула соответствует наличию  $N_k^0$  частиц с импульсом  $\hbar k$ , что вполне согласуется с выражением (8,26), определяющим связь полей энергии с числом частиц.

### § 9. Перестановочные соотношения для волновых функций

Зная перестановочные соотношения для амплитуд Фурье, мы легко можем найти также перестановочные соотношения для волновых функций.

Для этой цели напомним следующие равенства:

$$\begin{aligned}\varphi(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{L^{3/2}} \sum_{\mathbf{k}} \sqrt{\frac{2\pi c\hbar}{K}} (a_{\mathbf{k}} e^{-icKt + i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} + a_{\mathbf{k}}^{\dagger} e^{icKt - i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}), \\ \varphi(\mathbf{r}', t') &= \frac{1}{L^{3/2}} \sum_{\mathbf{k}'} \sqrt{\frac{2\pi c\hbar}{K'}} (a_{\mathbf{k}'} e^{-icK't' + i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{r}'} + a_{\mathbf{k}'}^{\dagger} e^{icK't' - i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{r}'}).\end{aligned}\tag{9,1}$$

Отсюда имеем:

$$\begin{aligned}[\varphi(\mathbf{r}, t), \varphi(\mathbf{r}', t')]_{-} &= \varphi(\mathbf{r}, t)\varphi(\mathbf{r}', t') - \varphi(\mathbf{r}', t')\varphi(\mathbf{r}, t) = \\ &= \frac{1}{L^3} \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} \frac{2\pi c\hbar}{\sqrt{KK'}} ([a_{\mathbf{k}}, a_{\mathbf{k}'}]_{-} e^{-ic(Kt - K't') + i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \mathbf{k}'\mathbf{r}')} + \\ &\quad + [a_{\mathbf{k}}^{\dagger}, a_{\mathbf{k}'}]_{-} e^{ic(Kt - K't') - i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \mathbf{k}'\mathbf{r}')}).\end{aligned}$$

Здесь мы положили перестановочные соотношения между амплитудами  $a_{\mathbf{k}}$  и  $a_{\mathbf{k}'}$  (а также  $a_{\mathbf{k}}^{\dagger}$  и  $a_{\mathbf{k}'}^{\dagger}$ ) равными нулю.

Учитывая соотношения (8,10), найдём после суммирования по  $\mathbf{k}'$ :

$$[\varphi(\mathbf{r}, t), \varphi(\mathbf{r}', t')]_{-} = \frac{1}{L^3} \sum_{\mathbf{k}} \frac{4\pi c\hbar}{i} e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r} - \mathbf{r}')} \frac{\sin cK(t - t')}{K}.\tag{9,2}$$

Сделаем переход к интегралу Фурье с помощью формулы (5,7)

$$\frac{1}{L^3} = \frac{\Delta^3 k}{8\pi^3}.\tag{9,3}$$

Подставляя (9,3) в (9,2) и совершая затем переход к пределу  $L \rightarrow \infty$  ( $\Delta^3 k \rightarrow d^3 k$ ), получаем:

$$[\varphi(\mathbf{r}, t), \varphi(\mathbf{r}', t')]_{-} = \frac{4\pi c\hbar}{i} D(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t'),\tag{9,4}$$

где так называемая перестановочная  $D$ -функция определяется формулой<sup>1)</sup>

$$D(\mathbf{R}, T) = \frac{1}{8\pi^3} \int e^{i\mathbf{k}\mathbf{R}} \frac{\sin c\mathbf{k}T}{K} d^3k. \quad (9,5)$$

Как известно,  $D$ -функция является первым релятивистски инвариантным решением скалярного уравнения (2,3), в чём нетрудно убедиться, подставляя непосредственно в скалярное уравнение решение (9,5).

Второе релятивистски инвариантное решение имеет вид

$$D_1(\mathbf{R}, T) = \frac{1}{8\pi^3} \int e^{i\mathbf{k}\mathbf{R}} \frac{\cos c\mathbf{k}T}{K} d^3k. \quad (9,6)$$

Из четырёхмерных перестановочных соотношений легко получить также трёхмерные перестановочные соотношения, устанавливающие связь между волновыми функциями  $\varphi(\mathbf{r}, t)$  и плотностью импульсов [см. соотношение (6,2)]

$$p(\mathbf{r}', t) = \frac{1}{4\pi c^2} \frac{\partial \varphi(\mathbf{r}', t)}{\partial t},$$

которые могут относиться к различным точкам пространства, но содержат одно и то же значение времени  $t$ . С помощью равенств (9,4) и (9,5) находим:

$$\begin{aligned} [\varphi(\mathbf{r}, t), \varphi(\mathbf{r}', t)]_- &= \frac{4\pi c \hbar}{i} D(\mathbf{r} - \mathbf{r}', 0) = 0, \\ [p(\mathbf{r}, t), p(\mathbf{r}', t)]_- &= \frac{\hbar}{4\pi i c^3} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial t \partial t'} D(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') \right\}_{t' \rightarrow t} = 0, \\ [p(\mathbf{r}, t), \varphi(\mathbf{r}', t)]_- &= \\ &= \frac{\hbar}{ic} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} D(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') \right\}_{t' \rightarrow t} = \frac{\hbar}{i} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \end{aligned} \quad (9,7)$$

причём трёхмерная  $\delta$ -функция задаётся формулой

$$\delta(\mathbf{R}) = \frac{1}{8\pi^3} \int e^{i\mathbf{k}\mathbf{R}} d^3k. \quad (9,8)$$

<sup>1)</sup> Более подробно о перестановочной функции см. «Классическая теория поля», стр. 101.

Как видно из формулы (9,1), в квантовой теории поля волновая функция  $\varphi$ , так же как и амплитуды Фурье поля, должна быть оператором.

В заключение покажем, что уравнение движения для волновой функции  $\varphi$ , т. е. скалярное уравнение (2,3), может быть получено из квантового уравнения движения (7,5), если вместо переменной  $P$  подставить плотность импульса поля  $p(\mathbf{r}, t)$ .

Тогда, учитывая выражение для функции Гамильтона (5,9), получим:

$$\frac{\partial p(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \frac{i}{8\pi\hbar} \int \{[(\nabla' \varphi(\mathbf{r}', t))^2, p(\mathbf{r}, t)]_- + k_0^2 [(\varphi(\mathbf{r}', t))^2, p(\mathbf{r}, t)]_-\} d^3x', \quad (9,9)$$

где

$$\nabla'_x = \frac{\partial}{\partial x'}.$$

Воспользуемся, далее, следующими двумя тождественными соотношениями:

$$\begin{aligned} [\varphi^2(\mathbf{r}', t), p(\mathbf{r}, t)]_- &= -\varphi [p, \varphi]_- - [p, \varphi]_- \varphi = \\ &= -2\varphi(\mathbf{r}', t) \frac{\hbar}{i} \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}), [(\nabla' \varphi(\mathbf{r}', t))^2, p(\mathbf{r}, t)]_- = \\ &= -\nabla'_n \varphi \nabla'_n [p, \varphi]_- - (\nabla'_n [p, \varphi]_-) \nabla'_n \varphi = \\ &= -2\nabla'_n \varphi(\mathbf{r}', t) \frac{\hbar}{i} \nabla'_n \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \end{aligned} \quad (9,10)$$

Подставляя (9,10) в (9,9) и учитывая правила интегрирования при наличии под знаком интеграла трёхмерной  $\delta$ -функции<sup>1)</sup>, получим искомое скалярное волновое уравнение

$$\frac{1}{4\pi c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \frac{1}{4\pi} \nabla^2 \varphi - \frac{k_0^2}{4\pi} \varphi. \quad (9,11)$$

С помощью аналогичных рассуждений легко показать, что, подставляя в квантовое уравнение движения вместо переменной  $P$  волновую функцию  $\varphi(\mathbf{r}, t)$ , мы получим второе тождественное соотношение, связывающее между

<sup>1)</sup> Более подробно о  $\delta$ -функции см. «Классическая теория поля», стр. 80.

собою плотность импульса  $p$  с волновой функцией  $\varphi$ :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 4\pi c^2 p.$$

Таким образом, замена классических скобок Пуассона квантовыми ведёт к обобщению ряда соотношений классической теории поля на квантовый случай.

### § 10. Комплексное скалярное уравнение

Теория комплексного скалярного поля строится с помощью двух независимых функций: основной  $\varphi$  и комплексно сопряжённой  $\varphi^+$ , удовлетворяющих в случае свободного поля одному и тому же уравнению

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - k_0^2\right)\varphi = 0. \quad (10,1)$$

Варьируя лагранжиан скалярного поля с комплексными волновыми функциями

$$L = -\frac{1}{4\pi} (\varphi_\alpha^+ \varphi_\alpha + k_0^2 \varphi^+ \varphi) \quad (10,2)$$

по координате  $\varphi^+$ :

$$\frac{\delta L}{\delta \varphi^+} = \frac{\partial L}{\partial \varphi^+} - \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \frac{\partial L}{\partial \varphi_\alpha^+} = 0, \quad (10,3)$$

получаем уравнение (10,1) для волновой функции  $\varphi$ .

Точно так же варьирование по  $\varphi$  даёт нам аналогичное волновое уравнение для  $\varphi^+$ .

Для канонического тензора энергии мы будем иметь выражение

$$T_{\mu\nu} = -\frac{1}{4\pi} (\varphi_\mu^+ \varphi_\nu + \varphi_\nu^+ \varphi_\mu) - L \delta_{\mu\nu}. \quad (10,4)$$

Поскольку канонический тензор является симметричным, то, очевидно, он будет равняться метрическому тензору энергии, т. е. спин сопоставленных полю частиц должен равняться нулю.

Для плотности энергии и плотности импульса находим выражения:

$$u = T_{44} = \frac{1}{4\pi} \left[ (\nabla\varphi^+ \nabla\varphi) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial\varphi^+}{\partial t} \frac{\partial\varphi}{\partial t} + k_0^2 \varphi^+ \varphi \right],$$

$$g_n = \frac{i}{c} T_{n4} = -\frac{1}{4\pi c^2} \left( \frac{\partial\varphi^+}{\partial x_n} \frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{\partial\varphi^+}{\partial t} \frac{\partial\varphi}{\partial x_n} \right). \quad (10,5)$$

В отличие от вещественного скалярного поля комплексное поле может описывать поведение заряженных частиц (например, заряженных мезонов).

Как обычно, взаимодействие заряженных частиц (например, электронов) с электромагнитным полем описывается путём замены компоненты импульса  $p_\mu$  на обобщённый импульс<sup>1)</sup>

$$P_\mu = p_\mu - \frac{e_-}{c} A_\mu = p_\mu + \frac{e}{c} A_\mu, \quad (10,6)$$

т. е. путём замены  $\frac{\partial}{\partial x_\mu}$  на

$$\widehat{\nabla}_\mu = \frac{\partial}{\partial x_\mu} + \frac{i}{\hbar} \frac{e}{c} A_\mu, \quad (10,7)$$

где  $A_\mu$  — потенциал электромагнитного поля.

Поэтому в общем случае лагранжиана функция имеет вид

$$L = -\frac{1}{4\pi} \left\{ \left( \frac{\partial}{\partial x_\mu} - \frac{ie}{\hbar c} A_\mu \right) \varphi^+ \left( \frac{\partial}{\partial x_\mu} + \frac{ie}{\hbar c} A_\mu \right) \varphi + k_0^2 \varphi^+ \varphi \right\}. \quad (10,8)$$

Отсюда с помощью уравнения (10,3) получаем уравнение для волновых функций в электромагнитном поле, а также тензор энергии и все другие основные величины, характеризующие поле.

В частности, волновая функция  $\varphi$  будет удовлетворять уравнению

$$\frac{\delta L}{\delta \varphi^+} = -\frac{\partial}{\partial x_\mu} \frac{\partial L}{\partial \varphi_\mu^+} + \frac{\partial L}{\partial \varphi^+} = \frac{1}{4\pi} \left[ \left( \frac{\partial}{\partial x_\mu} + \frac{ie}{\hbar c} A_\mu \right)^2 - k_0^2 \right] \varphi = 0. \quad (10,9)$$

<sup>1)</sup> Под величиной  $e$  мы будем понимать положительную величину; тогда заряд электрона  $e_-$  будет равен  $-e$ .

Заметим, что, несмотря на явное включение электромагнитных потенциалов, уравнения поля являются инвариантными относительно преобразования калибровки.

В самом деле, при калибровочных преобразованиях потенциалы изменяются по закону:

$$A_{\mu} = A'_{\mu} - \frac{\partial f}{\partial x_{\mu}},$$

где  $f$  — калибровочная функция.

Полагая  $\varphi = \varphi' e^{\frac{ie}{\hbar c} f}$ , находим:

$$\left( \frac{\partial}{\partial x_{\mu}} + \frac{ie}{\hbar c} A_{\mu} \right) \varphi = e^{\frac{ie}{\hbar c} f} \left( \frac{\partial}{\partial x_{\mu}} + \frac{ie}{\hbar c} A'_{\mu} \right) \varphi'.$$

Отсюда легко показать, что функция  $\varphi'$  будет удовлетворять волновому уравнению (10,9), в котором следует заменить потенциалы  $A_{\mu}$  на потенциалы  $A'_{\mu}$ .

Комплексно-сопряжённая волновая функция будет удовлетворять комплексно-сопряжённому уравнению

$$\frac{\delta L}{\delta \varphi} = \frac{1}{4\pi} \left[ \left( \frac{\partial}{\partial x_{\mu}} - \frac{ie}{\hbar c} A_{\mu} \right)^2 - k_0^2 \right] \varphi^+ = 0. \quad (10,10)$$

Как известно, заряженные частицы являются источником электромагнитного поля, и поэтому соответствующие значения для плотности заряда и плотности тока необходимо включить в правые части уравнений Максвелла-Лорентца.

Так как уравнения Максвелла-Лорентца получаются путём вариации функции Лагранжа по электромагнитным потенциалам, то вариация лагранжиана (10,8) по потенциалам должна дать четырёхмерный вектор плотности тока:

$$j_{\mu} = \frac{\delta L}{\delta A_{\mu}} = \frac{\partial L}{\partial A_{\mu}} = -\frac{ie}{4\pi\hbar c} \left( \frac{\partial \varphi^+}{\partial x_{\mu}} \varphi - \varphi^+ \frac{\partial \varphi}{\partial x_{\mu}} \right) - \frac{e^2}{2\pi\hbar^2 c^2} \varphi^+ \varphi A_{\mu}$$

или при отсутствии электромагнитного поля

$$j_{\mu} = -\frac{ie}{4\pi\hbar c} \left( \frac{\partial \varphi^+}{\partial x_{\mu}} \varphi - \varphi^+ \frac{\partial \varphi}{\partial x_{\mu}} \right). \quad (10,11)$$



Отсюда видно, что для вещественного поля ( $\varphi^+ = \varphi$ ) плотность заряда и тока обращается в нуль, и поэтому, как было указано выше, подобное поле описывает поведение лишь нейтральных частиц<sup>1)</sup>.

Согласно (10,11) находим для плотности заряда  $\rho = \frac{j_4}{i}$  выражение

$$\rho = -\frac{ie}{4\pi\hbar c^2} \left( \varphi^+ \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{\partial \varphi^+}{\partial t} \varphi \right). \quad (10,12)$$

Заметим, что выражение для плотности  $\rho$  является индексным (т. е. может принимать как положительные, так и отрицательные значения), в противоположность нерелятивистскому выражению для плотности заряда<sup>2)</sup>

$$\rho = -e\psi^+\psi, \quad (10,13)$$

могущему иметь лишь отрицательные (электроны) значения.

Если в нерелятивистской волновой механике плотность  $\psi^+\psi$  можно трактовать как плотность вероятности, то в релятивистском случае скалярного уравнения вели-

<sup>1)</sup> Если уравнения с вещественными функциями должны всегда описывать движение нейтральных частиц, то уравнения с комплексными функциями могут описывать движение как заряженных, так и нейтральных частиц ( $e = 0$ ).

Возможно, что движение ряда незаряженных частиц — нейтрона, нейтрино и антинейтрино — описывается комплексными (правда, не скалярными, а полувекторными) волновыми функциями (см. § 17). В этом случае частицы и античастицы (например, нейтрино и антинейтрино) могут отличаться между собою не электрическим, а другим зарядом, определяющим их взаимодействие, например, с нуклонами. Этот вопрос находится пока в стадии изучения.

<sup>2)</sup> Соотношение (10,13) является нерелятивистским приближением формулы (10,12), если в последней сделать замену

$$\begin{aligned} \varphi &\cong \sqrt{\frac{2\pi\hbar^2}{m}} e^{-\frac{i}{\hbar} mc^2 t} \psi, \\ \varphi^+ &\cong \sqrt{\frac{2\pi\hbar^2}{m}} e^{\frac{i}{\hbar} mc^2 t} \psi^+. \end{aligned}$$

чина  $\rho$  не может быть истолкована как плотность вероятности, так как в ряде случаев она принимает отрицательные значения. Физический смысл indefinitности выражения для плотности заряда может быть понят только при использовании метода вторичного квантования, согласно которому наряду с частицами одного заряда должны существовать также частицы с противоположными зарядами.

Закон сохранения четырёхмерного тока в трёхмерных обозначениях ( $\rho = j_4/i$ ;  $\mathbf{j}$ ,  $j_{1,2,3}$ ) принимает вид хорошо известного из классической электродинамики уравнения непрерывности

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j} = 0. \quad (10,14)$$

Умножая последнее уравнение на элемент объёма  $d^3x$  и интегрируя по всему пространству, найдём:

$$\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int \rho d^3x = - \oint j_n dS.$$

В частности, когда токи в бесконечно удалённых точках пространства отсутствуют, уравнение непрерывности приводит к закону сохранения заряда:

$$\int \rho d^3x = \text{const.} \quad (10,15)$$

## § 11. Квантование комплексного скалярного уравнения

В этом параграфе мы ограничимся исследованием свободного поля, когда электромагнитные потенциалы мы можем положить равными нулю ( $A_i = 0$ )<sup>1)</sup>.

Тогда решение уравнений

$$\begin{aligned} \left( \nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - k_0^2 \right) \varphi &= 0, \\ \left( \nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - k_0^2 \right) \varphi^+ &= 0 \end{aligned} \quad (11,1)$$

<sup>1)</sup> Квантование при наличии электромагнитных полей будет рассмотрено нами в гл. II, § 24.

может быть представлено в виде

$$\begin{aligned}\varphi &= \frac{1}{L^{3/2}} \sum_k (A_k e^{-icKt+ikr} + B_k e^{icKt+ikr}), \\ \varphi^+ &= \frac{1}{L^{3/2}} \sum_k (A_k^+ e^{icKt-ikr} + B_k^+ e^{-icKt-ikr}).\end{aligned}\quad (11,2)$$

Для дальнейшего анализа введём следующие обозначения:

$$A_k = \sqrt{\frac{2\pi c \hbar}{K}} a; \quad B_{-k} = \sqrt{\frac{2\pi c \hbar}{K}} b^+ \text{ и т. д.,}$$

причём, так же как и в случае вещественного поля, значков  $k$  у амплитуд  $a$  и  $b^+$  мы писать не будем. Мы приписываем значок сопряжённой величины амплитудам, стоящим у множителя  $e^{icKt}$ .

Решение (11,2) принимает тогда вид

$$\begin{aligned}\varphi &= \frac{1}{L^{3/2}} \sum_k \sqrt{\frac{2\pi c \hbar}{K}} (a e^{-icKt+ikr} + b^+ e^{icKt-ikr}), \\ \varphi^+ &= \frac{1}{L^{3/2}} \sum_k \sqrt{\frac{2\pi c \hbar}{K}} (a^+ e^{icKt-ikr} + b e^{-icKt+ikr}).\end{aligned}\quad (11,3)$$

При этом мы будем иметь следующее выражение для полной энергии, или функции Гамильтона:

$$H = \int u d^3x = \frac{1}{4\pi} \int \left[ (\nabla \varphi^+ \nabla \varphi) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \varphi^+}{\partial t} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + k_0^2 \varphi^+ \varphi \right] d^3x,$$

для полного импульса:

$$\mathbf{G} = \int \mathbf{g} d^3x = -\frac{1}{4\pi c^2} \int \left( \nabla \varphi^+ \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial \varphi^+}{\partial t} \nabla \varphi \right) d^3x,$$

и для полного заряда

$$e_{\text{полн}} = \int \rho d^3x = -\frac{ie}{4\pi c^2 \hbar} \int \left( \varphi^+ \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{\partial \varphi^+}{\partial t} \varphi \right) d^3x.$$

В последних равенствах, учитывая возможную некоммутативность функций  $\varphi^+$  и  $\varphi$ , мы всюду функцию  $\varphi^+$  пишем слева.

Подставляя сюда решения (11,3) и принимая во внимание равенства (5,10), получаем:

$$\begin{aligned} H &= \sum_k \hbar c K (a^+ a + b b^+), \\ G &= \sum_k \hbar l^i (a^+ a + b b^+), \\ e_{\text{полн}} &= -e \sum_k (a^+ a - b b^+). \end{aligned} \quad (11,4)$$

Как и следовало ожидать, все эти величины в согласии с законами сохранения являются постоянными и поэтому не зависят от времени (точнее, коэффициенты при временных членах  $e^{\pm 2icKt}$  обращаются в нуль).

С помощью квантового уравнения движения (8,3) получаем:

$$\begin{aligned} -icKa &= \frac{i}{\hbar} (Ha - aH), \\ -icKb &= \frac{i}{\hbar} (Hb - bH) \end{aligned} \quad (11,5)$$

и т. д.

Отсюда находим:

$$\begin{aligned} [a_k, a_{k'}^+]_- &= \delta_{kk'}, \\ [b_k, b_{k'}^+]_- &= \delta_{kk'}. \end{aligned} \quad (11,6)$$

Перестановочные соотношения для других комбинаций амплитуд обращаются в нуль.

Перестановочные соотношения (11,6) соответствуют статистике Бозе.

Уравнения (11,5) имеют также второе решение, связанное со статистикой Ферми:

$$[a_k, a_{k'}^+]_+ = a_k a_{k'}^+ + a_{k'}^+ a_k = \delta_{kk'}, \quad (11,7)$$

$$[b_k, b_{k'}^+]_+ = b_k b_{k'}^+ + b_{k'}^+ b_k = -\delta_{kk'}. \quad (11,8)$$

Как будет показано ниже, при квантовании уравнения Дирака перестановочные соотношения (11,7) отражают тот факт, что в каждом квантовом состоянии может находиться не более одной частицы (статистика Ферми). Соотношение же (11,8), имеющее в правой части знак минус, соответствует не реальному случаю, а именно, случаю, когда каждое квантовое состояние может иметь нуль или минус одну частицу. Ввиду абсурдности последнего результата приходим к выводу, что заряженные частицы скалярного уравнения должны подчиняться статистике Бозе.

В полной аналогии с квантованием вещественного поля мы должны потребовать, чтобы операторы  $a$ ,  $a^+$ ,  $b$  и  $b^+$  действовали на соответствующие функции от числа частиц.

Действие операторов  $a_k^+$  или  $b_k^+$  должно приводить к появлению частиц сорта  $N_k$  или  $\hat{N}_k$ , а действие операторов  $a_k$  и  $b_k$  — соответственно к их поглощению.

Подобно равенству (8,25) находим следующие собственные значения для квадратов операторов:

$$\begin{aligned} a_k^+ a_k &= N_k^0; & b_k^+ b_k &= \hat{N}_k^0; \\ a_k a_k^+ &= 1 + N_k^0; & b_k b_k^+ &= 1 + \hat{N}_k^0, \end{aligned} \quad (11,9)$$

где  $N_k^0$  и  $\hat{N}_k^0$  — число частиц в начальном состоянии.

Подставляя (11,9) в (11,4), получаем следующие собственные значения для оператора энергии, импульса и полного заряда:

$$H = \sum_k c\hbar K (N_k^0 + \hat{N}_k^0 + 1), \quad (11,10)$$

$$G = \sum_k \hbar k (N_k^0 + \hat{N}_k^0 + 1), \quad (11,11)$$

$$e_{\text{полн}} = -e \sum_k (N_k^0 - \hat{N}_k^0 - 1). \quad (11,12)$$

Отсюда видно, что частицы сорта  $a$  и  $b$  обладают положительной энергией ( $\hbar cK$ ), импульсом  $\hbar k$  и равными,

но противоположными по знаку зарядами  $e$ , т. е. если частицы сорта  $a$  обладают отрицательным зарядом (например, отрицательные мезоны), то частицы сорта  $b$  будут обладать положительным зарядом (например, положительные мезоны). Отсюда ясно, что в релятивистском случае скалярное уравнение может описывать сразу и положительные и отрицательные заряды, и поэтому плотность заряда  $\rho$  не является дефинитной величиной.

Из последних формул находим полные значения для нулевой энергии, импульса и заряда:

$$H_0 = \sum_k c\hbar K,$$

$$G_0 = \sum_k \hbar k = 0,$$

$$e_0 = \sum_k e,$$

которые, так же как и в случае скалярного поля с вещественными волновыми функциями [см. (8,27)], будем пока что отбрасывать.

## § 12. Волновое уравнение электромагнитного поля

а) **Общая теория уравнений Максвелла.** Как известно, электромагнитное поле характеризуется четырьмя волновыми функциями, образующими четырёхмерный потенциал  $A_\mu$  ( $\mathbf{A}$ ,  $i\Phi$ ), составленный из векторного  $\mathbf{A}$  и скалярного  $\Phi$  потенциалов. С компонентами  $A_\mu$  четырёхмерного потенциала связаны компоненты антисимметрического тензора  $H_{\mu\nu}$  электромагнитного поля:

$$H_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu} = A_{\nu,\mu} - A_{\mu,\nu}, \quad (12,1)$$

где

$$A_{\mu,\nu} = \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu}.$$

Составляющие векторов магнитного  $\mathbf{H}$  и электрического  $\mathbf{E}$  полей даются выражениями

$$H_x = H_{23} = \frac{\partial A_3}{\partial x_2} - \frac{\partial A_2}{\partial x_3} = \text{rot}_x A, \quad (12,2)$$

$$E_x = iH_{14} = i \left( \frac{\partial A_4}{\partial x_1} - \frac{\partial A_1}{\partial x_4} \right) = -\frac{\partial \Phi}{\partial x} - \frac{1}{c} \frac{\partial A_x}{\partial t} \quad (12,3)$$

и т. д.

С помощью составляющих электромагнитного поля можно образовать следующие инварианты:

$$I_1 = -\frac{1}{2} H_{\mu\nu} H_{\mu\nu} = (E^2 - H^2), \quad (12,4)$$

$$I_2 = (\mathbf{E}\mathbf{H})^2, \quad (12,5)$$

$$I_3 = -A_\mu A_\mu = \Phi^2 - A^2. \quad (12,6)$$

К уравнениям Максвелла приводит лишь инвариант  $I_1$  (первый инвариант поля). Второй инвариант поля  $I_2$  приводит к нелинейным уравнениям. Третий инвариант поля  $I_3$  даёт явную зависимость уравнений поля от потенциалов, т. е. приводит к уравнениям, не удовлетворяющим требованиям калибровочной инвариантности<sup>1)</sup>. Ограничиваясь здесь исследованием свободного электромагнитного поля, мы должны функцию Лагранжа положить равной

$$L = -\frac{1}{8\pi} I_1 = -\frac{1}{16\pi} H_{\mu\nu} H_{\mu\nu} = \frac{1}{8\pi} (E^2 - H^2). \quad (12,7)$$

Тогда, варьируя функцию действия

$$S = \int L d^4x \quad (12,8)$$

по потенциалам, находим:

$$\frac{\delta L}{\delta A_\mu} = \frac{\partial L}{\partial A_\mu} - \frac{\partial}{\partial x_\nu} \frac{\partial L}{\partial A_{\mu,\nu}} = 0. \quad (12,9)$$

<sup>1)</sup> Инвариант  $I_3$  используется при построении мезодинамики. Более подробно см. «Классическая теория поля», стр. 375.

Поскольку

$$\frac{\partial L}{\partial A_\mu} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial A_{\mu,\nu}} = \frac{1}{4\pi} H_{\mu\nu}, \quad (12,10)$$

уравнение (12,9) можно представить в виде

$$\frac{\partial H_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = 0. \quad (12,11)$$

Последнее уравнение представляет собою уравнение электромагнитного поля (вторая группа уравнений Максвелла) в вакууме.

Первая же группа уравнений Максвелла

$$\frac{\partial H_{\mu\nu}}{\partial x_\lambda} + \frac{\partial H_{\nu\lambda}}{\partial x_\mu} + \frac{\partial H_{\lambda\mu}}{\partial x_\nu} = 0 \quad (12,12)$$

является прямым следствием равенства (12,1).

При переходе к трёхмерным обозначениям первая и вторая группы уравнений Максвелла принимают соответственно вид:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{H} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} &= 0, \\ \operatorname{div} \mathbf{E} &= 0, \end{aligned} \quad (12,13)$$

и

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} &= 0 \\ \operatorname{div} \mathbf{H} &= 0. \end{aligned} \quad (12,14)$$

**б) Калибровочная инвариантность.** Функция Лагранжа  $L$ , а также уравнения поля обладают калибровочной инвариантностью. В самом деле, вводя новые потенциалы:

$$A_\mu = A'_\mu - \frac{\partial f}{\partial x_\mu}, \quad (12,15)$$

где  $f$  — скалярная функция калибровки, нетрудно убедиться, что электромагнитные поля  $H_{\mu\nu}$  будут связаны одинаковым



соотношением как со старыми ( $A_\mu$ ), так и новыми ( $A'_\mu$ ) потенциалами:

$$H_{\mu\nu} = A'_{\nu, \mu} - A'_{\mu, \nu} = A_{\nu, \mu} - A_{\mu, \nu}. \quad (12,16)$$

Функция Лагранжа не содержит в явном виде потенциалов и поэтому не зависит от выбора калибровочной функции  $f$ .

Неспрделённость выбора значений для потенциалов приводит к тому, что мы не можем однозначно задать потенциалы  $A_\mu$ , не наложив дополнительного условия на калибровочную функцию  $f$ .

Допустим, что мы выбрали потенциалы  $A'_\mu$ , для которых расходимость не равняется нулю

$$A'_{\mu, \mu} \neq 0.$$

Тогда с помощью калибровочных преобразований (12,15) мы получаем:

$$A'_{\mu, \mu} = A_{\mu, \mu} + \square f. \quad (12,17)$$

Подберём калибровочную функцию таким образом, чтобы <sup>1)</sup>

$$f = \frac{A'_{\mu, \mu}}{\square}. \quad (12,18)$$

Тогда потенциалы  $A_\mu$  будут связаны между собою условием Лорентца

$$A_{\mu, \mu} = 0, \quad (12,19)$$

которое в трёхмерных обозначениях принимает вид

$$\operatorname{div} \mathbf{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0. \quad (12,20)$$

Подставляя (12,16) в равенство (12,11) и принимая во внимание условие калибровки (12,19), находим, что потенциалы электромагнитного поля в вакууме подчиняются уравнениям Даламбера без правой части

$$\frac{\partial^2 A_\mu}{\partial x_\nu \partial x_\nu} = \square A_\mu = 0. \quad (12,21)$$

<sup>1)</sup> Операция деления на оператор объясняется в монографии «Классическая теория поля», стр. 36 и 85.

Заметим, что выбор калибровочной функции из (12,17) не является однозначным. К решению (12,17) мы всегда можем добавить произвольную функцию  $f_0$ , удовлетворяющую уравнению Даламбера

$$\square f_0 = 0. \quad (12,22)$$

Если к потенциалу  $A_\mu$ , подчиняющемуся условию Лорентца, добавить калибровочный потенциал  $\frac{\partial f_0}{\partial x_\mu}$ , то в силу равенства (12,22) новый потенциал также будет подчиняться условию Лорентца.

В частности, когда заряды отсутствуют, т. е. когда потенциалы, так же как и функция  $f_0$ , подчиняются уравнению Даламбера, мы можем выбрать калибровочную функцию  $f_0$  таким образом, чтобы скалярный потенциал обратился в нуль ( $\Phi = 0$ ). Тогда в пространстве, свободном от зарядов, будут существовать лишь одни поперечные волны, для которых

$$\Phi = 0, \quad \text{div } \mathbf{A} = 0. \quad (12,23)$$

**в) Тензор энергии и тензор момента количества движения.** Компоненты тензора энергии и тензора момента количества движения электромагнитного поля могут быть найдены теми же способами, какие использовались при анализе скалярного поля.

В частности, вычисляя четырёхмерный градиент  $L$  по  $x_\mu$ , мы найдём закон сохранения для тензора энергии:

$$\frac{\partial L}{\partial x_\mu} = \frac{\partial L}{\partial A_{\lambda, \nu}} \frac{\partial A_{\lambda, \nu}}{\partial x_\mu} = \frac{\partial}{\partial x_\nu} \left( \frac{1}{4\pi} H_{\lambda\nu} A_{\lambda, \mu} \right) - \frac{1}{4\pi} \frac{\partial H_{\lambda\nu}}{\partial x_\nu} A_{\lambda, \mu},$$

откуда, принимая во внимание уравнение поля (12,11), получаем:

$$\frac{\partial T_{\mu, \nu}}{\partial x_\nu} = 0, \quad (12,24)$$

причём компоненты тензора энергии равны

$$T_{\mu, \nu} = \frac{1}{4\pi} A_{\lambda, \mu} H_{\lambda\nu} - L \delta_{\mu\nu}. \quad (12,25)$$

Как видно из формулы (12,25), канонический тензор не является симметричным. Для того чтобы его симметризовать, т. е. получить компоненты метрического тензора энергии, мы должны подобрать тензор третьего ранга  $f_{\mu[\nu\lambda]}$ , антисимметричный относительно индексов  $\nu$  и  $\lambda$  таким образом, чтобы тензор

$$T'_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} - \frac{\partial}{\partial x_\lambda} f_{\mu[\nu\lambda]} \quad (12,26)$$

был симметричным [см. также соотношение (3,12)]. Нетрудно показать, что такими компонентами тензора  $f_{\mu[\nu\lambda]}$  будут

$$f_{\mu[\nu\lambda]} = -\frac{1}{4\pi} A_\mu H_{\nu\lambda}. \quad (12,27)$$

Тогда найдём компоненты для симметричного метрического тензора энергии:

$$T'_{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi} H_{\mu\lambda} H_{\lambda\nu} - L\delta_{\mu\nu}. \quad (12,28)$$

Отсутствие симметрии канонического тензора указывает на поляризационные свойства светового поля или наличие спина у сопоставленных световому полю частиц (фотонов).

Согласно формуле (4,14) компоненты «собственного» момента количества движения поля (спин фотона) равны <sup>1)</sup>

$$s_{[\mu\nu]\lambda} = \frac{i}{c} (f_{\mu[\nu\lambda]} - f_{\nu[\mu\lambda]}) = -\frac{i}{4\pi c} (A_\mu H_{\nu\lambda} - A_\nu H_{\mu\lambda}). \quad (12,29)$$

Найдём теперь выражения для энергии, количества движения и момента количества движения светового поля в вакууме, когда можно положить

$$\Phi = 0; \quad \operatorname{div} \mathbf{A} = 0. \quad (12,30)$$

В этом случае

$$E_x = iH_{14} = -iH_{41} = -iA_{1,4}, \quad H_x = A_{3,2} - A_{2,3} \text{ и т. д.}$$

или в трёхмерных обозначениях

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad \mathbf{H} = \operatorname{rot} \mathbf{A}. \quad (12,31)$$

<sup>1)</sup> См, например, «Классическая теория поля», стр. 191.

Подставляя эти выражения в функцию Лагранжа, получим:

$$L = -\frac{1}{16\pi} H_{\mu\nu} H_{\mu\nu} = \frac{1}{8\pi} (E^2 - H^2), \quad (12,32)$$

откуда находим выражения для плотности энергии

$$u = T_{44} = \frac{1}{4\pi} A_{n,4} H_{n4} - L = \frac{1}{8\pi} (E^2 + H^2) \quad (12,33)$$

(аналогичное выражение мы также получим, если определим энергию  $u$  как временную составляющую метрического тензора энергии, т. е. положим  $u = T'_{44}$ ) и для плотности импульса

$$g_x = \frac{i}{c} T_{14} = \frac{1}{4\pi c} \left( \frac{\partial A_x}{\partial x} E_x + \frac{\partial A_y}{\partial x} E_y + \frac{\partial A_z}{\partial x} E_z \right). \quad (12,34)$$

Если мы определим плотность импульса поля через компоненты метрического тензора энергии, то найдём:

$$g'_x = \frac{1}{4\pi c} (E_y H_z - E_z H_y). \quad (12,35)$$

Выражения (12,34) и (12,35) отличаются друг от друга на величину трёхмерной расходимости:

$$g'_x = g_x - \frac{1}{4\pi c} \operatorname{div} A_x \mathbf{E},$$

и поэтому при вычислении полных значений приводят к тождественным результатам.

Наконец, для плотности собственного момента количества движения поля находим:

$$s_x = s_{[23]4} = \frac{1}{4\pi c} (E_y A_z - E_z A_y). \quad (12,36)$$

Отсюда мы будем иметь следующие выражения: для полной энергии, или гамильтониана поля

$$H = U = \frac{1}{8\pi} \int (E^2 + H^2) d^3x, \quad (12,37)$$

для импульса поля

$$G = \frac{1}{4\pi c} \int E_n \nabla A_n d^3x = \frac{1}{4\pi c} \int [\mathbf{E}\mathbf{H}] d^3x, \quad (12,38)$$

для спина фотона

$$S = \frac{1}{4\pi c} \int [\mathbf{E}\mathbf{A}] d^3x. \quad (12,39)$$

В заключение заметим, что поскольку световое поле является вещественным, заряд и плотность тока фотонов равняются нулю.

### § 13. Решение уравнений Максвелла

Согласно (12,23) свободное электромагнитное поле является поперечным:

$$A_4 = i\Phi = 0; \quad \operatorname{div} \mathbf{A} = 0. \quad (13,1)$$

Для вектор-потенциала имеем следующее дифференциальное уравнение:

$$\left( \nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathbf{A} = 0. \quad (13,2)$$

Электромагнитные поля  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  связаны с вектор-потенциалом  $\mathbf{A}$  соотношениями

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}; \quad \mathbf{H} = \operatorname{rot} \mathbf{A}. \quad (13,3)$$

Уравнение (13,2) является частным случаем уравнения (2,3) ( $\dot{k}_0 = 0$ ), и поэтому, накладывая на функцию  $\mathbf{A}$  условие периодичности

$$\mathbf{A}(x, y, z) = \mathbf{A}(x + L, y, z) \quad \text{и т. д.},$$

можем представить его решение в виде:

$$\mathbf{A} = \frac{1}{L^{3,2}} \sum_{\mathbf{x}} \sqrt{\frac{2\pi c h}{\kappa}} (a e^{-i\kappa x t + i\mathbf{x}r} + a^+ e^{i\kappa x t - i\mathbf{x}r}), \quad (13,4)$$

где составляющие волнового вектора  $\mathbf{x}$  ( $\kappa_x, \kappa_y, \kappa_z$ ) принимают значения:

$$\kappa_x = \frac{2\pi n_x}{L} \quad (n_x = 0, \pm 1, \pm 2, \pm \dots) \text{ и т. д.}$$

Здесь по аналогии со скалярным полем введён нормировочный коэффициент  $\sqrt{\frac{2\pi c h}{\kappa}}$ .

Условие поперечности электромагнитного поля ( $\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$ ) накладывает на амплитуды  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{a}^+$  условие

$$(\mathbf{x}^0 \mathbf{a}) = (\mathbf{x}^0 \mathbf{a}^+) = 0, \quad (13,5)$$

где  $\mathbf{x}^0 = \frac{\mathbf{x}}{x}$ .

Отсюда видно, что из трёх составляющих вектор-потенциала независимыми остаются только две, характеризующие два возможных состояния поляризации.

Вычислим теперь значения для полной энергии, полного импульса и полного момента количества движения электромагнитного поля, которые согласно законам сохранения остаются постоянными, т. е. не должны зависеть от временных членов, пропорциональных  $e^{\pm 2icx t}$ .

Согласно равенствам (12,37) и (13,3) имеем для полной энергии (т. е. гамильтониана) электромагнитного поля:

$$H = \frac{1}{8\pi} \int \left[ \left( \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right)^2 + (\operatorname{rot} \mathbf{A})^2 \right] d^3x. \quad (13,6)$$

Отбрасывая временные члены, коэффициенты при которых обращаются в нуль, получим:

$$H = \sum_{\mathbf{x}} \frac{2\pi c \hbar}{8\pi x} [\mathbf{x}^2 (\mathbf{a} \mathbf{a}^+) + ([\mathbf{x} \mathbf{a}] [\mathbf{x} \mathbf{a}^+]) + \mathbf{x}^2 (\mathbf{a}^+ \mathbf{a}) + ([\mathbf{x} \mathbf{a}^+] [\mathbf{x} \mathbf{a}])].$$

С помощью соотношения (13,5) легко показать, что

$$([\mathbf{x} \mathbf{a}] [\mathbf{x} \mathbf{a}^+]) = \mathbf{x}^2 (\mathbf{a} \mathbf{a}^+) - (\mathbf{x} \mathbf{a}) (\mathbf{x} \mathbf{a}^+) = \mathbf{x}^2 (\mathbf{a} \mathbf{a}^+),$$

благодаря чему выражение для  $H$  принимает вид

$$H = \sum_{\mathbf{x}} \frac{c \hbar x}{2} [(\mathbf{a} \mathbf{a}^+) + (\mathbf{a}^+ \mathbf{a})]. \quad (13,7)$$

В частности, для неквантованных амплитуд, когда  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{a}^+$  не являются операторами и, следовательно, переставимы между собою, имеем:

$$H = \sum_{\mathbf{x}} c \hbar x (\mathbf{a}^+ \mathbf{a}). \quad (13,8)$$

Импульс электромагнитного поля согласно (12,38) и (13,3) равен

$$\mathbf{G} = -\frac{1}{4\pi c} \int \left[ \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \operatorname{rot} \mathbf{A} \right] d^3 x. \quad (13,9)$$

Подставляя сюда вместо вектор-потенциала выражение (13,4), найдём:

$$\mathbf{G} = \sum_{\mathbf{x}} \frac{2\pi c \hbar}{4\pi c \mathbf{x}} \times ([\mathbf{a} [\mathbf{x} \mathbf{a}^*]] + [\mathbf{a}^* [\mathbf{x} \mathbf{a}]]) ,$$

откуда, принимая во внимание условие поперечности электромагнитного поля (13,5), получаем:

$$\mathbf{G} = \sum_{\mathbf{x}} \frac{\hbar \mathbf{x}}{2} [(\mathbf{a} \mathbf{a}^*) + (\mathbf{a}^* \mathbf{a})]. \quad (13,10)$$

В частности, для неквантованных амплитуд находим:

$$\mathbf{G} = \sum_{\mathbf{x}} \hbar \mathbf{x} (\mathbf{a}^* \mathbf{a}).$$

Согласно (12,39) и (13,3) для момента количества движения поля (т. е. спина фотона) имеем:

$$\mathbf{S} = \sum_{\mathbf{x}} i \frac{\hbar}{2} ([\mathbf{a} \mathbf{a}^*] - [\mathbf{a}^* \mathbf{a}]). \quad (13,11)$$

Последнее соотношение в случае неквантованных амплитуд можно представить в виде

$$\mathbf{S} = - \sum_{\mathbf{x}} i \hbar [\mathbf{a}^* \mathbf{a}]. \quad (13,12)$$

## § 14. Квантование поперечного электромагнитного поля

Как было показано в предыдущем параграфе, в вакууме может существовать поперечное электромагнитное (световое) поле, вектор-потенциал (т. е. волновая функция)

которого может быть представлен в виде

$$\mathbf{A} = \frac{1}{L^{3/2}} \sum_{\mathbf{x}} \sqrt{\frac{2\pi c \hbar}{x}} (a e^{-i\mathbf{x}\mathbf{r}} + i\mathbf{x}r + a^+ e^{i\mathbf{x}\mathbf{r}} - i\mathbf{x}r), \quad (14,1)$$

причём на амплитуды должно быть наложено условие поперечности

$$(\mathbf{x}^0 \mathbf{a}) = (\mathbf{x}^0 \mathbf{a}^+) = 0. \quad (14,2)$$

Выпишем также выражения для полной энергии  $H$  и полного спина  $S$  фотонов, найденные нами в предыдущем параграфе:

$$H = \sum_{\mathbf{x}} c \hbar x (\mathbf{a}^+ \mathbf{a}), \quad (14,3)$$

$$S = - \sum_{\mathbf{x}} i \hbar [\mathbf{a}^+ \mathbf{a}]. \quad (14,4)$$

Последние выражения написаны при условии, что между амплитудами имеют место бозевские перестановочные соотношения, когда перемена местами амплитуд  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{a}^+$  даёт лишь дополнительный постоянный член, ведущий к нулевой энергии (более подробно см. § 8). Фермиевское решение, так же как и в случае скалярного поля, приводит к противоречивым результатам.

Мы сможем удовлетворить как условию (14,2), так и произвести разделение амплитуд по спиновым состояниям, если положим

$$\mathbf{a} = \sum_{l=-1}^1 a_l g_l, \quad (14,5)$$

где

$$a_l = a_{-l}^* = \frac{1}{\sqrt{2}} (\beta + il [\mathbf{x}^0 \beta]), \quad (14,6)$$

а  $\beta$  является единичным вектором, направленным перпендикулярно к движению фотона, т. е.

$$(\mathbf{x}^0 \beta) = 0. \quad (14,7)$$



Амплитуды  $g_l$  характеризуют вероятность пребывания фотонов с импульсом  $\mathbf{x}$  в состоянии  $l$ .

С помощью формулы (14,6) легко доказать соотношения

$$(a_l^\dagger a_{l'}) = \delta_{ll'}, \quad (14,8)$$

$$[a_l^\dagger a_{l'}] = i\hbar \mathbf{x}^0 \delta_{ll'}, \quad (14,9)$$

$$[\mathbf{x}^0 a_l] = -i\hbar a_l, \quad (\mathbf{x}^0 a_l) = 0, \quad (14,10)$$

которыми мы воспользуемся в дальнейшем.

Подставляя (14,5) в равенства (14,3), (14,4) и принимая во внимание последние соотношения, найдём:

$$H = \sum_{\mathbf{x}} c\hbar \mathbf{x} (g_l^\dagger g_l + g_{-l}^\dagger g_{-l}), \quad (14,11)$$

$$S = \sum_{\mathbf{x}} \hbar \mathbf{x}^0 (g_l^\dagger g_l - g_{-l}^\dagger g_{-l}), \quad (14,12)$$

откуда с помощью квантового уравнения движения (8,3) получаем бозевские перестановочные соотношения для амплитуд фотонного поля:

$$g_l g_{l'}^\dagger - g_{l'}^\dagger g_l = \delta_{ll'} \delta_{\mathbf{x}\mathbf{x}'}. \quad (14,13)$$

Таким образом, амплитуды  $g$  будут связаны с числом частиц (фотонов) следующими равенствами:

$$g_l^\dagger g_l = N_l, \quad g_l g_l^\dagger = 1 + N_l. \quad (14,14)$$

Подставляя (14,14) в формулы (14,11) и (14,12), получаем:

$$H = \sum_{\mathbf{x}} c\hbar \mathbf{x} (N_1 + N_{-1}), \quad (14,15)$$

$$S = \sum_{\mathbf{x}} \hbar \mathbf{x}^0 (N_1 - N_{-1}). \quad (14,16)$$

Таким образом, оба сорта фотонов  $N_1$  и  $N_{-1}$  обладают одинаковой энергией  $c\hbar \mathbf{x}$  и единичным (в единицах  $\hbar$ ) значением спина, причём спин фотонов  $N_1$  направлен по волновому вектору  $\mathbf{x}$  (правая круговая поляризация),

а фотонов  $N_{-1}$  — в противоположном направлении (левая круговая поляризация)<sup>1)</sup>

С помощью формул (14,13) и (14,5) найдём теперь перестановочные соотношения для амплитуд. Обозначая через  $\mathbf{s}$  и  $\mathbf{s}'$  единичные векторы каких-либо двух осей декартовых координат, будем иметь:

$$a_s a_{s'}^{'+} - a_{s'}^{'+} a_s = \left( \delta_{ss'} - \frac{\mathbf{x}_s \mathbf{x}_{s'}}{\chi^2} \right) \delta_{\mathbf{x}\mathbf{x}'}. \quad (14,17)$$

При выводе последнего равенства принято во внимание известное условие ортонормированности между единичными векторами двух прямоугольных систем координат:

$$(\mathbf{s}\beta)(\mathbf{s}'\beta) + (\mathbf{s}[\mathbf{x}^0\beta])(\mathbf{s}'[\mathbf{x}^0\beta]) + (\mathbf{s}\mathbf{x}^0)(\mathbf{s}'\mathbf{x}^0) = \delta_{ss'}.$$

Таким образом, перестановочные соотношения для амплитуд фотонного поля имеют вид

$$[a_s, a_{s'}^{'+}]_- = [a_s^{+}, a_{s'}^{'+}]_- = 0, \quad (14,18)$$

$$[a_s, a_{s'}^{'+}]_- = Q_{ss'} \delta_{\mathbf{x}\mathbf{x}'},$$

где

$$Q_{ss'} = \delta_{ss'} - \frac{\mathbf{x}_s \mathbf{x}_{s'}}{\chi^2}. \quad (14,19)$$

Появление множителя  $Q_{ss'}$  в соотношении (14,18) связано с поперечностью электромагнитных волн, т. е. с условием Лорентца

$$a_s \mathbf{x}_s = 0.$$

В самом деле, уравнение (14,18) находится в согласии с условием Лорентца, поскольку мы имеем тождественное соотношение

$$\mathbf{x}_s Q_{ss'} = 0. \quad (14,20)$$

---

<sup>1)</sup> Более подробно вопросы, связанные с поляризацией электромагнитных волн, мы здесь рассматривать не будем, так как все они достаточно полно изложены в классических монографиях по оптике. Связь между амплитудами, характеризующими круговую и линейную поляризацию, будет рассмотрена нами в § 23, п. д).

### § 15. Перестановочные соотношения для квантованных потенциалов поля

Найдём четырёхмерные перестановочные соотношения для вектор-потенциала  $A$ .

Для этого с помощью (13,4) найдем значения компонент вектор-потенциала:

$$A_s(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{L^{3/2}} \sum_{\mathbf{x}} \sqrt{\frac{2\pi c \hbar}{x}} (a_s e^{-icx t + ixr} + a_s^* e^{icx t - ixr}),$$

$$A_{s'}(\mathbf{r}', t') = \frac{1}{L^{3/2}} \sum_{\mathbf{x}'} \sqrt{\frac{2\pi c \hbar}{x'}} (a_{s'} e^{-icx' t' + ix'r'} + a_{s'}^* e^{icx' t' - ix'r'}).$$
(15,1)

Учитывая перестановочные соотношения (14,18), найдём [см. также (9,2)]:

$$\begin{aligned} [A_s(\mathbf{r}, t), A_{s'}(\mathbf{r}', t')]_- &= \\ &= A_s(\mathbf{r}, t) A_{s'}(\mathbf{r}', t') - A_{s'}(\mathbf{r}', t') A_s(\mathbf{r}, t) = \\ &= \frac{1}{L^3} \sum_{\mathbf{x}} \frac{4\pi c \hbar}{i} \left( \delta_{ss'} - \frac{x_s x_{s'}}{x^2} \right) e^{ix(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \frac{\sin cx(t-t')}{x}}. \end{aligned}$$
(15,2)

Сделаем в последнем соотношении переход от суммы к интегралу, вводя новую перестановочную функцию  $\Delta(\mathbf{R}, T)$ :

$$\Delta(\mathbf{R}, T) = \frac{1}{8\pi^3} \int e^{ix\mathbf{R}} \frac{\sin cxT}{x} d^3x.$$
(15,3)

Здесь перестановочная  $\Delta$ -функция является частным случаем перестановочной  $D$ -функции [см. соотношение (9.5)], если в последней массу покоя частиц, сопоставленных полю, положить равной нулю, т. е.

$$\Delta(\mathbf{R}, T) = \lim_{k_0 \rightarrow 0} D(\mathbf{R}, T).$$

Для искомым перестановочных соотношений (15,2) теперь имеем:

$$[A_s(\mathbf{r}, t), A_{s'}(\mathbf{r}', t')]_- = \frac{4\pi c \hbar}{i} \left( \delta_{ss'} - \frac{\nabla_s \nabla_{s'}}{\nabla^2} \right) \Delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}', t-t'),$$
(15,4)

где  $\nabla_1 = \frac{\partial}{\partial x}$  и т. д.,  $\nabla^2 = \nabla_s \nabla_s$ , а действие оператора  $\frac{1}{\nabla^2}$  на функцию  $e^{ikr}$  определяется формулой

$$\frac{1}{\nabla^2} e^{ikr} = -\frac{e^{ikr}}{k^2}.$$

Заметим, что появление множителя  $\delta_{ss'} - \frac{\nabla_s \nabla_{s'}}{\nabla^2}$  в равенстве (15,4) связано с поперечностью электромагнитного поля.

В самом деле, найдём расхожимость от правой и левой частей равенства (15,4):

$$\begin{aligned} \left[ \frac{\partial A_s(\mathbf{r}, t)}{\partial x_s}, A_{s'}(\mathbf{r}', t') \right]_- &= \\ &= \frac{4\pi c \hbar}{i} \nabla_s \left( \delta_{ss'} - \frac{\nabla_s \nabla_{s'}}{\nabla^2} \right) \Delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t'). \end{aligned}$$

В силу соотношения

$$\left( \delta_{ss'} \nabla_s - \nabla_{s'} \frac{\nabla_s \nabla_{s'}}{\nabla^2} \right) = 0$$

правая часть последнего равенства обращается в нуль что находится в полном согласии с условием Лорентца

$$\frac{\partial A_s}{\partial x_s} = \text{div } \mathbf{A} = 0,$$

благодаря которому левая часть равенства также обращается в нуль.

## § 16. Квантование электромагнитного поля в общем случае

Как известно, при наличии зарядов наряду с поперечным электромагнитным полем должно существовать продольное поле, которое, в частности, обуславливает кулоновское взаимодействие.

Поэтому в общем случае мы не имеем права отбрасывать продольную составляющую поля ( $\Phi \neq 0$ ) и должны сформу-

лизовать правила квантования электромагнитного поля с учётом также и продольных составляющих.

Как будет показано ниже, в общем случае все компоненты вектор-потенциала будут содержать продольные составляющие, и чтобы подчеркнуть это обстоятельство, мы введём для них иные обозначения ( $\Phi_\mu$ ), чем в предыдущем параграфе.

Если выбрать функцию Лагранжа в виде

$$L = -\frac{1}{16\pi} H_{\mu\nu} H_{\mu\nu}, \quad (16,1)$$

где

$$H_{\mu\nu} = \Phi_{\nu, \mu} - \Phi_{\mu, \nu}, \quad \Phi_{\nu, \mu} = \frac{\partial \Phi_\nu}{\partial x_\mu},$$

то для потенциалов получается уравнение

$$\square \Phi_\mu - \frac{\partial}{\partial x_\mu} \Phi_{\nu, \nu} = 0. \quad (16,2)$$

В предыдущем параграфе мы проквантовали это уравнение с помощью двух дополнительных условий (условия Лорентца  $\Phi_{\mu, \mu} = 0$  и условия отсутствия продольной составляющей  $\Phi = 0$ ). Оказывается, что квантование уравнения (16,2) при наличии лишь одного классического условия Лорентца является невозможным<sup>1)</sup>. Поэтому Фок и

<sup>1)</sup> В самом деле, если проквантовать нейтральное векторное поле (поле Прока) с отличной от нуля массой покоя ( $k_0 \neq 0$ ) сопоставленных полю частиц, у которых условие Лорентца выполняется автоматически, то мы получим следующие перестановочные соотношения для волновых функций ( $A_4 = i\Phi$ ):

$$[A_\mu(r, t), A_\nu(r', t')]_- = a_{\mu\nu} D(r - r', t - t'),$$

где

$$a_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu} + \frac{1}{k_0^2} \frac{\partial^2}{\partial x_\mu \partial x'_\nu}$$

(см «Классическая теория поля», стр. 380).

Отсюда видно, что при переходе к квантованному электромагнитному полю ( $k_0 \rightarrow 0$ ) в случае, когда на потенциалы наложено условие Лорентца, но не исключена продольная составляющая, мы получаем для коэффициента  $a_{\mu\nu}$  бесконечно большое значение.

Подольский<sup>1)</sup> предложили при квантовании электромагнитного поля в общем случае выбрать лагранжиан в таком виде:

$$L = -\frac{1}{16\pi} H_{\mu\nu} H_{\mu\nu} - \frac{1}{8\pi} \Phi_{\mu,\mu} \Phi_{\nu,\nu}, \quad (16,3)$$

чтобы уравнение движения

$$\frac{\delta L}{\delta \Phi_{\mu}} = \frac{\partial L}{\partial \Phi_{\mu}} - \frac{\partial^2 L}{\partial x_{\nu} \partial \Phi_{\mu,\nu}} = 0 \quad (16,4)$$

привело непосредственно к уравнению Даламбера

$$\square \Phi_{\mu} = 0 \quad (16,5)$$

для потенциалов, не связанных уже между собою условием Лорентца.

Последнее соотношение легко проверить, если принять во внимание, что

$$\frac{\partial L}{\partial \Phi_{\mu}} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial \Phi_{\mu,\nu}} = \frac{1}{4\pi} H_{\mu\nu} - \frac{1}{4\pi} \delta_{\mu\nu} \Phi_{\lambda,\lambda}. \quad (16,6)$$

В этом случае электромагнитные поля подчиняются более общим уравнениям, чем уравнения Максвелла, а именно:

$$\frac{1}{4\pi} \frac{\partial H_{\mu\nu}}{\partial x_{\nu}} - \frac{1}{4\pi} \Phi_{\lambda,\lambda\mu} = 0, \quad (16,7)$$

откуда, принимая во внимание соотношение  $H_{\mu\nu} = \Phi_{\nu,\mu} - \Phi_{\mu,\nu}$ , получаем дифференциальное уравнение (16,5).

Подставляя (16,6) в уравнение  $T_{\mu\nu} = \frac{\partial L}{\partial \Phi_{\lambda,\nu}} \Phi_{\lambda,\mu} - L \delta_{\mu\nu}$ , находим следующее выражение для компонент канонического тензора энергии:

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi} \Phi_{\lambda,\mu} H_{\lambda\nu} - \frac{1}{4\pi} \Phi_{\nu,\mu} \Phi_{\rho,\rho} - \delta_{\mu\nu} L. \quad (16,8)$$

<sup>1)</sup> В. Фок и Б. Подольский, Sow. Phys. 1, 801 (1932).

В частности, для компоненты, отвечающей плотности энергии, получаем:

$$T_{44} = \frac{1}{8\pi} \left[ (\text{rot } \Phi)^2 + (\text{div } \Phi)^2 + \right. \\ \left. + \frac{1}{c^2} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right)^2 - (\text{grad } \Phi)^2 - \frac{1}{c^2} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right)^2 \right]. \quad (16,9)$$

Из уравнения (15,5) находим следующее решение для потенциалов:

$$\Phi = \frac{1}{L^{3/2}} \sum_{\mathbf{x}} \sqrt{\frac{2\pi c \hbar}{x}} (q e^{-i c x t + i \mathbf{x} \cdot \mathbf{r}} + q^+ e^{i c x t - i \mathbf{x} \cdot \mathbf{r}}), \\ \Phi = \frac{1}{L^{3/2}} \sum_{\mathbf{x}} \sqrt{\frac{2\pi c \hbar}{x}} (q e^{-i c x t + i \mathbf{x} \cdot \mathbf{r}} + q^+ e^{i c x t - i \mathbf{x} \cdot \mathbf{r}}), \quad (16,10)$$

откуда выражение для энергии поля принимает вид

$$H = \int T_{44} d^3x = \sum_{\mathbf{x}} c \hbar x (q^+ q - q q^+). \quad (16,11)$$

В выражении (16,11) мы переставили у некоторых членов амплитуды  $q$  и  $q^+$ , а также  $q$  и  $q^+$ , что эквивалентно отбрасыванию нулевой энергии.

С помощью квантовых уравнений движения (8,3)

$$-i c x q = \frac{i}{\hbar} (H q - q H)$$

и т. д. находим следующие отличные от нуля перестановочные соотношения:

$$q_s q_s^+ - q_s^+ q_s = 1, \quad (16,12)$$

$s = 1, 2, 3$  (суммирование по  $s$  нет),

$$q^+ q - q q^+ = 1, \quad (16,13)$$

т. е. для амплитуд скалярного потенциала мы получаем перестановочные соотношения с обратным знаком.

Поэтому, чтобы удовлетворить перестановочным соотношениям (16,12), мы должны положить

$$q_s^+ q_s = n_s; \quad q_s q_s^+ = 1 + n_s,$$

где  $n_s$  — число частиц в заданном квантовом состоянии. Для  $q$  и  $q^+$  из равенства (16,13) следует

$$qq^+ = n; \quad q^+q = 1 + n.$$

Подставляя последние соотношения в равенство (16,14), имеем:

$$H = \sum_{\mathbf{x}} \hbar c \kappa (n_1 + n_2 + n_3 - n). \quad (16,14)$$

Из соотношения (16,14) следует, что частицы сорта  $n$  (продольное электромагнитное поле) обладают отрицательной энергией, и поэтому в виде квантов наподобие фотонов существовать не могут. Частицы, сопоставленные продольному электромагнитному полю, получили поэтому название «псевдофотоны».

Компоненты электромагнитного поля могут быть разбиты на поперечные составляющие (число независимых компонент равно двум)

$$a_s = q_s - \kappa_s \frac{(q\mathbf{x})}{\kappa},$$

связанные между собою одним соотношением

$$a_s \kappa_s = 0,$$

и две продольные составляющие

$$q \text{ и } q_0 = \frac{(q\mathbf{x})}{\kappa^2}.$$

Как видно из (16,12) и (16,13), отличными от нуля будут следующие комбинации:

для поперечных составляющих

$$a_s a_{s'}^+ - a_{s'}^+ a_s = \delta_{ss'} - \frac{\kappa_s \kappa_{s'}}{\kappa^2}, \quad (16,15)$$

для продольных составляющих

$$\begin{aligned} q^+q - qq^+ &= 1, \\ q_0 q_0^+ - q_0^+ q_0 &= 1. \end{aligned} \quad (16,16)$$

Перестановочные соотношения (16,15), как и следовало ожидать, совпадают с перестановочными соотношениями (14,17), найденными нами для компонент поля фотонов.



В предыдущем параграфе было показано, что в вакууме продольные составляющие поля могут быть исключены с помощью введения условия Лорентца и условий калибровки. Как будет показано в следующей главе (см. § 25), при наличии зарядов продольные составляющие также могут быть исключены, но это будет приводить к появлению дополнительной энергии электромагнитного поля, соответствующей кулоновскому взаимодействию между зарядами.

В заключение найдём перестановочные соотношения для квантованных потенциалов электромагнитного поля.

С этой целью введём четырёхмерные составляющие потенциалов  $\Phi_\mu(\Phi, i\Phi)$  и его амплитуд  $q_\mu(\mathbf{q}, iq)$ ,  $q_\mu^+(\mathbf{q}^+, iq)$ :

$$\Phi_\mu = \frac{1}{L^{3/2}} \sum_{\mathbf{x}} \sqrt{\frac{2\pi c \hbar}{x}} (q_\mu e^{-ixt + i\mathbf{x}\mathbf{r}} + q_\mu^+ e^{ixt - i\mathbf{x}\mathbf{r}}). \quad (16,17)$$

Перестановочные соотношения (16,12) и (16,13) для амплитуд  $q_\mu$  могут быть записаны в виде

$$[q_\mu, q_{\mu'}^+]_- = \delta_{\mu\mu'} \delta_{\mathbf{x}\mathbf{x}'}. \quad (16,18)$$

Отсюда находим перестановочные соотношения для квантованных потенциалов:

$$[\Phi_\mu(\mathbf{r}, t), \Phi_{\mu'}(\mathbf{r}', t')]_- = \frac{4\pi c \hbar}{i} \delta_{\mu\mu'} \Delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t'), \quad (16,19)$$

причём перестановочная  $\Delta$ -функция задаётся формулой (15,3).

## § 17. Полувекторное уравнение<sup>1)</sup>

Как было указано в § 2, в основе построения квантовой механики лежит известное релятивистское соотношение между энергией  $E$ , импульсом  $\mathbf{p}$  и массой частицы  $m$ :

$$E = c \sqrt{p^2 + m^2 c^2}. \quad (17,1)$$

<sup>1)</sup> Это название для уравнения, как и в предыдущих параграфах, связано с соответствующим законом преобразования для волновых функций  $\psi$  (см. § 18). Полувекторные величины называются также тензорами половинного ранга, или спинорами.

Для того чтобы сделать переход к квантовым уравнениям движения свободных частиц, мы должны в указанное соотношение подставить соответствующие операторные величины

$$E = -\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial t}, \quad \mathbf{p} = \frac{\hbar}{i} \nabla \quad (17,2)$$

и подействовать ими на волновую функцию.

В выражение же (17,1) мы не можем непосредственно подставить операторные величины хотя бы потому, что использование операторов, стоящих под квадратным корнем, представляет большие затруднения. Поэтому мы должны прежде всего избавиться от квадратного корня.

Для этой цели можно уравнение (17,1) возвести в квадрат. Тогда получаем следующее волновое уравнение (скалярное уравнение):

$$(E^2 - c^2 p^2 - m^2 c^4) \varphi = 0, \quad (17,3)$$

которое мы подробно рассмотрели в § 10.

Плотность заряда частиц определяется соотношением (10,12)

$$\rho = -\frac{ei}{4\pi\hbar c^2} \left( \varphi^+ \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{\partial \varphi^+}{\partial t} \varphi \right). \quad (17,4)$$

Как известно, уравнение (17,3) вначале предназначалось для описания движения электрона. Однако с его помощью нельзя объяснить явления, связанные со спином электрона (формула тонкой структуры, аномальный эффект Зеемана, заполнение оболочек атома и т. д.).

Дирак вначале предположил, что эти трудности связаны с наличием второй производной по времени в основном уравнении (17,3) и связанной с этим индефинитностью (т. е. возможностью принимать как положительные, так и отрицательные значения) плотности заряда (17,4), которая должна, как и в нерелятивистской волновой теории, всё время сохранять один и тот же знак (напомним, что в теории Шрёдингера  $\psi^* \psi > 0$ ).

Однако дефинитность плотности заряда с точки зрения квантовой теории поля не должна быть обязательной для всех случаев и с формальной стороны скалярное уравнение

является «безукоризненным» в рамках существующей волновой теории. В самом деле, в релятивистском случае, как было показано в § 10, уравнение (17,3) описывает частицы с обоими знаками заряда, и поэтому плотность заряда (17,4) может иметь как положительные, так и отрицательные значения.

Дело заключается в том, что уравнению (17,3) соответствует однокомпонентная волновая функция, которая позволяет описывать движение лишь бесспиновых частиц. Скалярное уравнение оказалось неприменимым к частицам с отличным от нуля спином (например, электронам), и поэтому, естественно, описание тонкой структуры или других спиновых явлений с помощью уравнения (17,3) не привело к ожидаемым результатам. Очевидно, для электронов, обладающих спином, равным половине (в единицах  $\hbar$ ), необходимо уравнение с несколькими волновыми функциями<sup>1)</sup>, описывающими состояние с различными ориентациями спина.

а) **Линеаризация оператора скалярного уравнения.** Для линеаризации оператора (17,1), или символического извлечения из него квадратного корня<sup>2)</sup>, представим соотношение (17,1) в следующем операторном виде:

$$E = c \sum_{\mu=0}^3 \alpha_{\mu} p_{\mu}, \quad (17,5)$$

где

$$p_0 = mc, \quad p_1 = p_x = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x} \text{ и т. д., } E = -\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial t}. \quad (17,6)$$

Принимая во внимание, что

$$E^2 = c^2 \sum_{\mu=0}^3 p_{\mu}^2,$$

<sup>1)</sup> Волновое векторное уравнение оказалось также непригодным для описания движения электрона, поскольку спин векторных частиц оказался равным единице.

<sup>2)</sup> Более подробно см. часть II, § 4, п. а.

получаем следующие соотношения, которым должны удовлетворять величины  $\alpha_\mu$ :

$$\alpha_\mu \alpha_{\mu'} + \alpha_{\mu'} \alpha_\mu = 2\delta_{\mu\mu'}. \quad (17,7)$$

Аналогичным условиям удовлетворяют, например, двухрядные матрицы:

$$\sigma'_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma'_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma'_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (17,8)$$

с помощью которых Паули в нерелятивистском приближении удалось написать волновое уравнение для частиц, обладающих спином.

Из формулы (17,8) легко найти правила умножения для матриц Паули:

$$\sigma'_1 \sigma'_2 = -\sigma'_2 \sigma'_1 = i\sigma' \quad \text{и т. д.} \quad (17,9)$$

или

$$\sigma'_n \sigma_{n'} + \sigma_{n'} \sigma'_n = 2\delta_{nn'}, \quad (17,10)$$

где  $n, n' = 1, 2, 3$ . Однако для извлечения квадратного корня из четырёхчлена необходимо иметь четыре соотношения ( $\mu = 0, 1, 2, 3$ ), а не три, которым удовлетворяют матрицы (17,8). Поэтому необходимо найти соответствующее обобщение для матриц Паули на случай (17,7).

В связи с этим Дирак предложил взять две системы четырёхрядных матриц: матрицы  $\sigma$  и матрицы  $\rho$ .

Матрицы  $\sigma$  выберем в виде

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad (17,11)$$

$$\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

т. е.

$$\sigma_n = \begin{pmatrix} \sigma'_n & 0 \\ 0 & \sigma'_n \end{pmatrix},$$

где символом  $O'$  обозначена двухрядная матрица  $O' = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

Матрицы  $\rho$  зададим в виде

$$\rho_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \rho_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (17,11a)$$

$$\rho_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

т. е.

$$\rho_1 = \begin{pmatrix} O' & I' \\ I' & O' \end{pmatrix}, \quad \rho_2 = \begin{pmatrix} O' & -iI' \\ iI' & O' \end{pmatrix}, \quad \rho_3 = \begin{pmatrix} I' & O' \\ O' & -I' \end{pmatrix},$$

где  $I'$  — двухрядная единичная матрица,  $I' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

Легко показать, что матрицы  $\sigma$  и  $\rho$  удовлетворяют следующим соотношениям:

$$\sigma_n^2 = \rho_n^2 = I, \quad \sigma_1\sigma_2 = -\sigma_2\sigma_1 = i\sigma_3, \quad \rho_1\rho_2 = -\rho_2\rho_1 = i\rho_3 \text{ и т. д.} \\ \sigma_n\rho_{n'} = \rho_{n'}\sigma_n, \quad (17,12)$$

где  $I$  является единичной четырёхрядной матрицей

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (17,13)$$

Отсюда следует

$$\sigma_n\sigma_{n'} + \sigma_{n'}\sigma_n = \rho_n\rho_{n'} + \rho_{n'}\rho_n = 2\delta_{nn'},$$

т. е. различные матрицы  $\sigma$  антикоммутируют между собою. Аналогичное заключение относится также к

системе матриц  $\rho$ . В то же время матрицы  $\sigma$  коммутируют с матрицами  $\rho$ . Вводя матрицы  $\alpha_\mu$ , связанные с  $\sigma$  и  $\rho$  равенствами

$$\alpha_n = \rho_1 \sigma_n, \quad \alpha_0 = \rho_3, \quad (17,14)$$

найдем, что матрицы  $\alpha_\mu$  будут удовлетворять искомым соотношениям (17,7), т. е. они представляют собой как раз те операторы, с помощью которых можно «извлечь квадратный корень» из четырёхчлена.

На основе равенства (17,14) находим для матриц  $\alpha$  ( $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3$ ):

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (17,15)$$

$$\alpha_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Отсюда «линеаризованное» уравнение Дирака принимает вид:

$$(\mathbf{E} - c(\mathbf{p}\alpha) - \rho_3 mc^2)\psi = 0. \quad (17,16)$$

Поскольку матрицы  $\alpha$  и  $\rho_3$  являются четырёхрядными, то и волновая функция  $\psi$  также должна представлять собою четырёхрядную матрицу. В нашем случае матрица  $\psi$ , оказываясь, имеет отличным от нуля лишь один столбец, т. е.

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 & 0 & 0 & 0 \\ \psi_2 & 0 & 0 & 0 \\ \psi_3 & 0 & 0 & 0 \\ \psi_4 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix}. \quad (17,17)$$

Таким образом, уравнение (17,16) эквивалентно системе четырёх линейных уравнений:

$$\begin{aligned} (E - mc^2) \psi_1 - c(p_x - ip_y) \psi_4 - cp_z \psi_3 &= 0, \\ (E - mc^2) \psi_2 - c(p_x + ip_y) \psi_3 + cp_z \psi_4 &= 0, \\ (E + mc^2) \psi_3 - c(p_x - ip_y) \psi_2 - cp_z \psi_1 &= 0, \\ (E + mc^2) \psi_4 - c(p_x + ip_y) \psi_1 + cp_z \psi_2 &= 0, \end{aligned} \quad (17,18)$$

где операторные выражения энергии  $E$  и импульса  $p$  определены равенством (17,6).

Комплексно сопряжённые уравнения могут быть представлены в виде одного матричного уравнения

$$\psi^+ (E - c(\mathbf{p}\boldsymbol{\alpha}) - mc^2\rho_3) = 0, \quad (17,19)$$

где  $\psi^+$  является четырёхрядной матрицей с одной строкой

$$\psi^+ = (\psi_1^+ \psi_2^+ \psi_3^+ \psi_4^+), \quad (17,20)$$

а действие операторов  $-\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial t}$  и  $\frac{\hbar}{i} \nabla$  на волновую функцию, стоящую слева от них, следует понимать в таком же смысле, как и в уравнении (17,16), но только с обратным знаком, т. е.

$$\psi^+ \frac{\hbar}{i} \nabla \rightarrow -\frac{\hbar}{i} \nabla \psi^+. \quad (17,21)$$

Последняя схема обращается в равенство при вычислении матричных элементов:

$$\int (\nabla \psi^+) F d^3x = - \int \psi^+ (\nabla F) d^3x.$$

При движении электрона в электромагнитном поле, характеризуемом четырёхмерным потенциалом  $A_\mu = \mathbf{A}, i\Phi$ , мы также можем пользоваться уравнением (17,16) или (17,19), только в качестве операторов энергии и импульса

согласно общим законам квантовой механики должны быть выбраны следующие:

$$\hat{E} = -\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial t} + e\Phi, \quad \mathbf{P} = \frac{\hbar}{i} \nabla + \frac{e}{c} \mathbf{A}, \quad (17,22)$$

где  $-e$  является зарядом электрона.

С помощью этих соотношений можно найти как механический, так и магнитный момент электрона.

**б) Механический и магнитный моменты электрона.** Для определения механического момента электрона запишем полувекторное уравнение Дирака, учитывая наличие лишь электрического поля с центральной симметрией:

$$(E - H) \psi(\mathbf{r}) = 0, \quad (17,23)$$

где  $E$  — энергия электрона, а оператор Гамильтона  $H$  имеет вид

$$H = V(r) + c(\mathbf{p}\boldsymbol{\alpha}) + mc^2\beta, \quad (17,24)$$

причём потенциальная энергия  $V = -e\Phi(r)$  есть функция только расстояния до начала координат.

Нетрудно показать, что оператор момента количества движения

$$\mathbf{M} = [\mathbf{r}\mathbf{p}]$$

не коммутирует с оператором Гамильтона  $H$  и поэтому не является константой движения.

В самом деле,

$$\begin{aligned} H M_x - M_x H &= c(\mathbf{p}\boldsymbol{\alpha})(y p_z - z p_y) - c(y p_z - z p_y)(\mathbf{p}\boldsymbol{\alpha}) = \\ &= -c(\alpha_2 p_z - \alpha_3 p_y) i\hbar. \end{aligned}$$

Точно так же легко показать, что

$$H \sigma_1 - \sigma_1 H = c((\mathbf{p}\boldsymbol{\alpha}) \sigma_1 - \sigma_1 (\mathbf{p}\boldsymbol{\alpha})) = 2ic(\alpha_2 p_z - \alpha_3 p_y).$$

Отсюда следует, что оператор

$$\mathbf{I} = \mathbf{M} + \frac{1}{2} \hbar \boldsymbol{\sigma} \quad (17,25)$$

коммутирует с оператором Гамильтона  $H$  и поэтому является константой движения.



Этот результат может быть истолкован следующим образом: электрон обладает «собственным» моментом количества движения (спином), равным  $\frac{1}{2} \hbar \sigma$ , который сохраняется лишь в сумме с орбитальным моментом количества движения  $\mathbf{M}$ .

Если орбитальный момент обращается в нуль ( $\mathbf{M} = 0$ ), то электрон будет обладать только спином, проекция которого на ось  $z$  даётся выражением

$$S_z = \frac{1}{2} \hbar \sigma_3. \quad (17,26)$$

Отсюда, принимая во внимание, что собственные значения матрицы  $\sigma_3$  равны  $\pm 1$ , находим собственные значения для проекции спина на ось  $z$ :

$$\bar{S}_z = \pm \frac{1}{2} \hbar, \quad (17,27)$$

т. е. полувекторные уравнения описывают частицы со спином, равным  $\frac{1}{2}$  (в единицах  $\hbar$ ).

Чтобы вычислить магнитный момент электрона, сведём полувекторное уравнение к нерелятивистскому уравнению и найдём дополнительную энергию, связанную с наличием магнитного момента электрона.

Для этой цели умножим уравнение (17,16) слева на оператор

$$\hat{E} + c(\mathbf{P}\boldsymbol{\alpha}) + mc^2\beta_3. \quad (17,28)$$

В случае отсутствия поля ( $\mathbf{A} = \Phi = 0$ ), когда операторы  $\hat{E}$  и  $\mathbf{p}$  коммутируют между собой, мы получим уравнение, в котором каждая из составляющих  $\psi$ -функций будет подчиняться релятивистскому скалярному уравнению. При наличии же электромагнитного поля операторы  $\hat{E}$  и  $\mathbf{P}$ , даваемые выражениями (17,22), не будут коммутировать между собою.

В этом случае, принимая во внимание соотношение, которое легко проверить с помощью равенств (17,14) и (17,12),

$$(\mathbf{a}\boldsymbol{\alpha})(\mathbf{b}\boldsymbol{\alpha}) = (\mathbf{a}\boldsymbol{\sigma})(\mathbf{b}\boldsymbol{\sigma}) = (\mathbf{a}\mathbf{b}) + i(\boldsymbol{\sigma}[\mathbf{a}\mathbf{b}]), \quad (17,29)$$

приводим уравнение (17,16) к виду

$$\{\hat{E}^2 - c^2 P^2 - m^2 c^4 - ic^2(\sigma[PP] - c(\alpha(\hat{E}P - P\hat{E})))\} \psi = 0. \quad (17,30)$$

Из равенств (17,28) следуют операторные соотношения

$$\hat{E}P - P\hat{E} = -e\hbar i \mathbf{E}, \quad [PP] = -\frac{i\hbar e}{c} \mathbf{H},$$

где  $\mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \text{grad } \Phi$  и  $\mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{A}$  являются соответственно векторами напряжённости электрического и магнитного полей.

Таким образом, получаем следующее волновое уравнение:

$$(\hat{E}^2 - c^2 P^2 - m^2 c^4 - \hbar e c(\sigma \mathbf{H}) + ce\hbar i(\alpha \mathbf{E})) \psi = 0. \quad (17,31)$$

Чтобы исследовать нерелятивистский случай, сделаем переход к новой волновой функции  $\psi'$ , в которой выделен член, связанный с собственной энергией. С этой целью необходимо провести следующее преобразование волновых функций

$$\psi \rightarrow \psi' e^{-\frac{imc^2 t}{\hbar}}.$$

Оператор энергии преобразуется по следующему закону:

$$\hat{E}\psi = e^{-\frac{imc^2 t}{\hbar}} \left( mc^2 - \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial t} + e\Phi \right) \psi',$$

т. е.

$$\hat{E} = mc^2 - \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial t} + e\Phi.$$

Отсюда

$$\hat{E}^2 - m^2 c^4 \cong 2mc^2 \left( -\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial t} + e\Phi \right).$$

В нерелятивистском приближении уравнение (17,30) принимает вид

$$\left( -\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial t} - H \right) \psi' = 0,$$

причём гамильтониан  $H$  будет складываться из двух частей

$$H = H_0 + H_1.$$

Часть

$$H_0 = -e\Phi + \frac{1}{2m} P^2$$

в точности совпадает с гамильтонианом шрёдингеровского уравнения, а вторая часть

$$H_1 = \frac{\hbar e}{2mc} (\boldsymbol{\sigma} \mathbf{H}) - i\rho_1 \frac{\hbar e}{2mc} (\boldsymbol{\sigma} \mathbf{E})$$

является специфической лишь для полувекторного уравнения.

Мы можем интерпретировать появление дополнительной энергии  $H_1$  наличием у дираковской частицы магнитного  $\boldsymbol{\mu} = -\frac{e\hbar}{2mc} \boldsymbol{\sigma}$  и электрического  $\boldsymbol{\mu}' = i\rho_1 \frac{e\hbar}{2mc} \boldsymbol{\sigma}$  моментов.

Наличие магнитного момента у электрона находится в полном согласии с опытными данными; существование электрического момента электрона было предсказано Френкелем из соображений релятивистской инвариантности; однако в нерелятивистском случае он может быть отброшен, так как матрица  $\rho_1$ , как будет показано ниже, имеет порядок  $\frac{v}{c}$ .

Таким образом, с точностью до величин  $\frac{v}{c}$  функция Гамильтона в электромагнитном поле имеет вид

$$H = -e\Phi + \frac{p^2}{2m} + \frac{\hbar e}{2mc} (\boldsymbol{\sigma} \mathbf{H}).$$

В этом случае мы можем ограничиться волновым уравнением Паули с двухрядными матрицами:

$$\psi' = \left(1 + \frac{P^2}{8m^2 c^2}\right) \cdot \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}.$$

Матричные элементы будут преобразовываться при этом по схеме:

$$\psi^+ \boldsymbol{\alpha} f(\mathbf{r}) \psi = \frac{1}{mc} \psi'^+ \left(\mathbf{p}' + \frac{1}{2} \hbar \boldsymbol{\pi} + \frac{i\hbar}{2} [\boldsymbol{\sigma}' \boldsymbol{\pi}]\right) f(\mathbf{r}) \psi', \quad (17,32)$$

причём операторы  $\mathbf{p}' = \frac{\hbar}{i} \nabla$  и  $\boldsymbol{\pi} = \frac{1}{i} \nabla$  действуют соответственно только на функции  $\psi'$  и  $f(\mathbf{r})$ . Последнее соотношение легко получить, если в левой части равенства (17,32) исключить функции  $\psi_3$  и  $\psi_4$  с помощью двух последних уравнений (17,18), положив там  $E \cong mc^2$ .

в) **Плотность заряда и плотность тока для полувекторных уравнений.** Найдём теперь для полувекторных уравнений выражения плотности заряда  $\rho$  и плотности тока  $\mathbf{j}$ , которые должны быть связаны между собою условием непрерывности

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j} = 0. \quad (17,33)$$

Запишем уравнения для  $\psi$  и  $\psi^+$  при наличии электромагнитного поля. Согласно (17,16), (17,19), (17,22) и (17,21) имеем:

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \psi}{\partial t} - \frac{ie\Phi}{\hbar c} \psi + (\boldsymbol{\alpha} \nabla) \psi + \frac{ie(\mathbf{A}\boldsymbol{\alpha})}{c\hbar} \psi + \frac{imc}{\hbar} \rho_3 \psi = 0, \quad (17,34)$$

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \psi^+}{\partial t} + \frac{ie\Phi}{c\hbar} \psi^+ + (\nabla \psi^+ \boldsymbol{\alpha}) - \frac{ie\psi^+ (\mathbf{A}\boldsymbol{\alpha})}{c\hbar} - \frac{imc}{\hbar} \psi^+ \rho_3 = 0. \quad (17,35)$$

Умножая уравнения (17,34) слева и (17,35) справа соответственно на функции  $\psi^+$  и  $\psi$  и складывая их, получим:

$$\frac{\partial \psi^+ \psi}{c \partial t} + \operatorname{div} \psi^+ \boldsymbol{\alpha} \psi = 0. \quad (17,36)$$

Сравнивая между собой (17,33) и (17,36), можем положить

$$\begin{aligned} \rho &= -e\psi^+ \psi = -e(\psi_1^+ \psi_1 + \psi_2^+ \psi_2 + \psi_3^+ \psi_3 + \psi_4^+ \psi_4), \\ \mathbf{j} &= -e^+ \psi \boldsymbol{\alpha} \psi. \end{aligned} \quad (17,37)$$

## § 18. Тензорная размерность волновых функций

Как мы указывали в § 1, волновые уравнения должны быть инвариантными (т. е. должны сохранять свою форму) при переходе от одной инерциальной системы координат к другой. Из этого условия мы можем найти тензорную

размерность волновой функции  $\psi$ . Переход от одной инерциальной системы координат к другой сводится к пространственно-временным вращениям (преобразование Лорентца) и пространственным вращениям.

а) **Инвариантность полувекторных уравнений относительно пространственно-временных вращений (преобразование Лорентца).** Прежде всего найдём законы преобразования волновой функции при пространственно-временных вращениях, когда координаты связаны между собой соотношениями Лорентца:

$$ct = \frac{ct' + \beta x'}{k}, \quad x = \frac{x' + \beta ct'}{k}, \quad y = y', \quad z = z', \quad (18,1)$$

где  $k = \sqrt{1 - \beta^2}$ ,  $\beta = \frac{v}{c}$ .

Легко получить законы преобразования для импульса и энергии частицы, образующие в совокупности компоненты четырёхмерного контравариантного вектора:

$$\frac{E}{c} = \frac{\frac{E'}{c} + \beta p'_x}{k}, \quad p_x = \frac{p'_x + \beta \frac{E'}{c}}{k}, \quad p_y = p'_y, \quad p_z = p'_z. \quad (18,2)$$

Подставляя последние соотношения в полувекторное уравнение (17,16), т. е. делая переход к штрихованным координатам, имеем:

$$\left[ (E' - c\alpha_1 p'_x) \frac{(1 - \beta x_1)}{k} - c\alpha_2 p'_y - c\alpha_3 p'_z - mc^2 \rho_3 \right] \psi = 0. \quad (18,3)$$

Умножая слева последнее выражение на величину  $a + \alpha_1 b$  и учитывая антикоммутативность матриц  $\alpha_1$  с матрицами  $\alpha_2$ ,  $\alpha_3$  и  $\rho_3$ , найдём:

$$\left[ (E' - c\alpha_1 p'_x) \left( \frac{a - \beta b}{k} - \alpha_1 \frac{a\beta - b}{k} \right) - (c\alpha_2 p'_y + c\alpha_3 p'_z + mc^2 \rho_3) (a - \alpha_1 b) \right] \psi = 0.$$

Принимая во внимание, что в штрихованной системе координат полувекторные уравнения должны сохранять свой вид

$$(E' - c(\alpha \mathbf{p}') - \rho_3 mc^2) \psi' = 0,$$

находим соотношение для определения коэффициентов  $a$  и  $b$ :

$$\frac{a - \beta b}{k} = a, \quad \frac{a\beta - b}{k} = b. \quad (18,4)$$

Это дает:

$$b = \frac{a\beta}{1+k}$$

или

$$\psi' = a \left( 1 - \frac{\beta\alpha_1}{1+k} \right) \psi.$$

При обратном переходе мы должны скорость  $v$  заменить на  $-v$ , т. е.

$$\psi = a \left( 1 + \frac{\beta\alpha_1}{1+k} \right) \psi'.$$

Отсюда получаем условие для определения величины  $a$ :

$$a^2 \left( 1 - \frac{\beta^2}{(1+k)^2} \right) = 1,$$

из которого следует

$$a = \sqrt{\frac{1+k}{2k}}, \quad b = \frac{\beta}{|\beta|} \sqrt{\frac{1-k}{2k}}.$$

Вводя обозначения (см. § 1)

$$\operatorname{ch} \gamma = \frac{1}{k}, \quad \operatorname{sh} \gamma = \frac{\beta}{k},$$

т. е. рассматривая  $\gamma$  как мнимый угол поворота в плоскости  $xt$ , имеем:

$$a = \operatorname{ch} \frac{\gamma}{2}, \quad b = \operatorname{sh} \frac{\gamma}{2}.$$

Закон преобразования волновых функций при вращении в плоскости  $xt$  (преобразования Лорентца) принимает вид

$$\psi' = \left( \operatorname{ch} \frac{\gamma}{2} - \alpha_1 \operatorname{sh} \frac{\gamma}{2} \right) \psi, \quad \psi = \left( \operatorname{ch} \frac{\gamma}{2} + \alpha_1 \operatorname{sh} \frac{\gamma}{2} \right) \psi'. \quad (18,5)$$

Найдём теперь закон преобразования для четырёхмерной плотности тока:

$$\rho = -e\psi^+\psi, \quad j_x = -e\psi^+\alpha_1\psi. \quad (18,6)$$

С помощью равенства (18,5) мы можем написать:

$$\psi = \Omega_{xt}\psi'; \quad \psi^+ = \psi'^+\Omega_{xt}^+. \quad (18,7)$$

Здесь операторы преобразования имеют вид

$$\Omega_{xt} = \Omega_{xt}^+ = \text{ch } \frac{\gamma}{2} + \alpha_1 \text{sh } \frac{\gamma}{2}. \quad (18,8)$$

Подставляя (18,7) в (18,6), получаем:

$$\rho = \rho' \text{ch } \gamma + j'_x \text{sh } \gamma,$$

$$j_x = j'_x \text{ch } \gamma + \rho' \text{sh } \gamma;$$

как и следовало ожидать, четырёхмерная плотность тока преобразуется по законам для контравариантного вектора. На основе равенства

$$\psi^+\psi = \psi'^+\Omega_{xt}^2\psi' = \psi'^+Q_{xt}\psi',$$

где

$$Q_{xt} = \text{ch } \gamma + \alpha_1 \text{sh } \gamma,$$

мы можем рассматривать оператор  $Q_{xt}$  как оператор преобразования для векторных величин. Оператор же  $\Omega_{xt}$  равняется корню квадратному из оператора  $Q_{xt}$ :

$$\Omega_{xt} = \sqrt{Q_{xt}}. \quad (18,9)$$

Следовательно, волновая функция не является тензорной величиной в обычном понимании, однако «наблюдаемые» физические величины, представляющие собою квадратичные комбинации из волновых функций, являются вещественными тензорами.

Согласно равенству (18,9) мы можем назвать закон преобразования для волновых функций законом преобразования для полуекторных величин, а уравнение, которому они подчиняются, — полуекторным уравнением.

б) **Инвариантность полувекторных уравнений относительно пространственных вращений.** Найдём теперь закон преобразования волновых функций при пространственном вращении системы координат вокруг оси  $z$  на угол  $\varphi$ .

В этом случае четырёхмерный импульс преобразуется по закону:

$$E = E', \quad p_x = p'_x \cos \varphi - p'_y \sin \varphi, \\ p_y = p'_y \cos \varphi + p'_x \sin \varphi, \quad p_z = p'_z. \quad (18,10)$$

Подставляя эти выражения в полувекторное уравнение, найдём закон преобразования для  $\psi$ -функции:

$$\psi = \Omega_{xy} \psi',$$

где оператор  $\Omega_{xy}$  имеет вид

$$\Omega_{xy} = \cos \frac{\varphi}{2} - i\sigma_3 \sin \frac{\varphi}{2}. \quad (18,11)$$

С помощью оператора (18,11) легко найти законы преобразования (18,10) для четырёхмерного тока.

в) **Калибровочная инвариантность.** Заметим, что полувекторные уравнения обладают также и калибровочной инвариантностью.

При наличии поля полувекторные уравнения имеют вид

$$\left( -\alpha_{\mu} \left( \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x_{\mu}} + \frac{e}{c} A_{\mu} \right) - \rho_3 mc^2 \right) \psi = 0, \quad (18,12)$$

где

$$A_4 = i\Phi, \quad x_4 = ict, \quad \alpha_4 = iI.$$

При калибровочных преобразованиях потенциалы изменяются по закону:

$$A_{\mu} = A'_{\mu} - \frac{\partial f}{\partial x_{\mu}}, \quad (18,13)$$

где  $f$  — произвольная калибровочная функция.

Полувекторные уравнения остаются инвариантными, если мы сделаем переход к новой волновой функции:

$$\psi = \psi' e^{\frac{ie}{\hbar c} f}. \quad (18,14)$$



В самом деле, в этом случае

$$\left( \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x_\mu} + \frac{e}{c} A_\mu \right) \psi = e^{\frac{ie}{\hbar c} f} \left( \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x'_\mu} + \frac{e}{c} A'_\mu \right) \psi'. \quad (18,15)$$

Поэтому функция  $\psi'$  будет также удовлетворять уравнению (18,12), но со штрихованными потенциалами.

### § 19. Тензорная размерность матриц Дирака

Из матриц Дирака мы можем составить шестнадцать независимых матриц, образующих группу, в том смысле, что, умножая друг на друга две любые матрицы, мы всегда получим одну из шестнадцати матриц.

Эти шестнадцать матриц представим в следующем виде:

$$\gamma = \begin{cases} iI, & \rho_1 \sigma_n, \\ i\rho_1, & \sigma_n, \\ \rho_2, & \rho_3 \sigma_n, \\ \rho_3, & \rho_2 \sigma_n, \end{cases} \quad (19,1)$$

где значок  $n$  принимает значения 1, 2, 3.

Найдём тензорную размерность этих независимых матриц, т. е. закон преобразования для матричного элемента вида

$$\bar{\psi} = \psi^+ \gamma \psi. \quad (19,2)$$

Для исследования тензорной размерности матриц Дирака удобно ввести систему координат с мнимой четвёртой составляющей. В этом случае, как было показано в предыдущем параграфе, матрицы  $\alpha_\mu$  ( $iI$ ,  $\mathbf{a}$ ) образуют четырёхмерный вектор.

Запишем полувекторное уравнение в виде

$$\alpha_\mu \psi_\mu = -ik_0 \rho_3 \psi, \quad (19,3)$$

где

$$k_0 = \frac{mc}{\hbar}, \quad \psi_\mu = \frac{\partial \psi}{\partial x_\mu} = \nabla_\mu \psi.$$

Умножая равенство (19,3) слева на  $\psi^+$ , имеем:

$$\psi^+ \rho_3 \psi = \frac{i}{k_0} \psi^+ \alpha_\mu \nabla_\mu \psi. \quad (19,4)$$

В правой части равенства (19,4) стоит скалярная величина. Поэтому матрица  $\rho_3$  является также скаляром.

Умножая далее равенство (19,3) слева на величину  $\psi^+ \alpha_{\nu} \rho_3$ , имеем:

$$k_0 \psi^+ \alpha_{\nu} \psi = i \psi^+ \alpha_{\nu} \rho_3 \alpha_{\mu} \nabla_{\mu} \psi$$

или, принимая во внимание, что при  $\mu = \nu$

$$\alpha_{\nu} \rho_3 \alpha_{\nu} \nabla_{\nu} = -\rho_3 \nabla_{\nu},$$

получаем:

$$\psi^+ (k_0 \alpha_{\nu} + i \rho_3 \nabla_{\nu}) \psi = i \sum'_{\mu \neq \nu} \psi^+ \alpha_{\nu} \rho_3 \alpha_{\mu} \nabla_{\mu} \psi. \quad (19,5)$$

В левой части равенства (19,5) стоит векторная величина. Поэтому величина

$$-\alpha_{\mu\nu} = \alpha_{\nu\mu} = \begin{cases} i \alpha_{\nu} \rho_3 \alpha_{\mu} & (\mu \neq \nu), \\ 0 & (\mu = \nu) \end{cases} \quad (19,6)$$

является антисимметрическим тензором второго ранга.

Принимая во внимание, что  $\alpha_{\mu} = \rho_1 \sigma_{\mu}$ , мы можем антисимметрический тензор (19,6) представить в виде

$$\alpha_{\mu\nu} = \begin{cases} -i \sigma_{\mu} \rho_3 \sigma_{\nu} & (\mu \neq \nu), \\ 0 & (\mu = \nu). \end{cases} \quad (19,7)$$

Его составляющие будут следующими:

$$\begin{pmatrix} \alpha_{23} & \alpha_{31} & \alpha_{12} \\ \alpha_{14} & \alpha_{24} & \alpha_{34} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho_3 \sigma_1 & \rho_3 \sigma_2 & \rho_3 \sigma_3 \\ i \rho_2 \sigma_1 & i \rho_2 \sigma_2 & i \rho_2 \sigma_3 \end{pmatrix}. \quad (19,8)$$

Вместо компонент антисимметрического тензора  $\alpha_{\mu\nu}$  можно ввести компоненты дуального тензора (псевдотензора второго ранга)

$$\tilde{\alpha}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \tilde{\epsilon}_{\mu\nu\epsilon\zeta} \alpha_{\zeta\rho},$$

или

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}_{23} &= \alpha_{14} = i \rho_2 \sigma_1, \\ \tilde{\alpha}_{14} &= \alpha_{23} = \rho_3 \sigma_1, \end{aligned} \quad (19,9)$$

где антисимметрический псевдотензор четвёртого ранга имеет составляющие<sup>1)</sup>

$$\hat{\varepsilon}_{1234} = -\tilde{\varepsilon}_{2134} = 1, \quad \tilde{\varepsilon}_{1134} = 0.$$

Аналогичным способом можно показать, что компоненты тензора, которые при разных значках  $\mu, \nu, \varepsilon$  равны

$$\alpha_{\mu\nu\varepsilon} = -\rho_1 \sigma_\mu \rho_3 \sigma_\nu \rho_3 \sigma_\varepsilon, \quad (19,10)$$

а при равных хотя бы двух значках обращаются в нуль, образуют антисимметрический тензор третьего ранга.

Вместо антисимметрического тензора третьего ранга можно ввести ещё псевдовектор

$$\alpha_{\mu\nu\varepsilon} = \hat{\varepsilon}_{\rho\mu\nu\varepsilon} \tilde{\alpha}_\rho. \quad (19,11)$$

Четыре составляющие псевдовектора  $\tilde{\alpha}_\rho$  равны

$$\tilde{\alpha}_\rho = \sigma_\rho = \sigma_n, \quad i\rho_1,$$

причём, как мы уже показали, пространственные составляющие этого псевдотензора характеризуют вектор спина  $\sigma$ .

Наконец, чтобы найти тензорную размерность матрицы  $\rho_2$ , умножим уравнение (19,3) справа на величину  $\psi^+ \rho_1$ :

$$\psi^+ k_0 \rho_2 \psi = -\psi^+ \sigma_\mu \nabla_\mu \psi. \quad (19,12)$$

В правой части равенства (19,12) стоит скалярное произведение псевдовектора  $\sigma_\mu$  на вектор  $\nabla_\mu$ , т. е. псевдоскаляр. Поэтому матрица  $\rho_2$  является псевдотензором, связанным с отличными от нуля компонентами антисимметрического тензора четвёртого ранга соотношением

$$\tilde{\varepsilon}_{\mu\nu\varepsilon\rho} \rho_2 = i \sigma_\mu \rho_3 \sigma_\nu \rho_3 \sigma_\varepsilon \rho_3 \sigma_\rho. \quad (19,13)$$

Таким образом, 16 четырёхрядных матриц обладают следующими тензорными размерностями:  $\rho_3$  — скаляр,  $I, \alpha_n$  — четырёхмерный вектор,  $\alpha_{23} = \rho_3 \sigma_1$  и т. д.,  $\alpha_{14} = i\rho_2 \sigma_1$  и т. д. — тензор второго ранга,  $\rho_1, \sigma_n$  — четырёхмерный псевдовектор,  $\rho_2$  — псевдоскаляр.

<sup>1)</sup> Более подробно см., например, «Классическая теория поля», стр. 357.

## § 20. Решение полувекторного уравнения

В случае отсутствия внешних полей полувекторное уравнение принимает вид

$$\left( -\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\hbar c}{i} (\boldsymbol{\alpha} \nabla) - \rho_3 m c^2 \right) \psi = 0.$$

Деля последнее выражение на величину  $\hbar c$  и вводя обозначение  $k_0 = \frac{mc}{\hbar}$ , получаем:

$$\left( -\frac{1}{ci} \frac{\partial}{\partial t} - H_k \right) \psi = 0, \quad (20,1)$$

где  $H_k$  — оператор Гамильтона (точнее, гамильтониан, делённый на  $\hbar c$ )

$$H_k = \frac{1}{i} (\boldsymbol{\alpha} \nabla) + \rho_3 k_0. \quad (20,2)$$

Нетрудно показать, что оператор<sup>1)</sup>

$$S = \frac{(\boldsymbol{\sigma} \nabla)}{ki} \quad (20,3)$$

коммутирует с оператором Гамильтона  $H$  ( $k^2$  — собственные значения оператора  $\left( \frac{1}{i} \nabla \right)^2$ ).

В самом деле, учитывая соотношение (17,29), а также коммутативность матриц  $\sigma$  и  $\rho$  друг с другом, имеем:

$$H_k S - S H_k = -\frac{1}{k} [\rho_1 (\boldsymbol{\sigma} \nabla) (\boldsymbol{\sigma} \nabla) - (\boldsymbol{\sigma} \nabla) (\boldsymbol{\sigma} \nabla) \rho_1] = 0. \quad (20,4)$$

Общее решение уравнения (20,1) должно складываться из суммы частных решений, каждое из которых должно подчиняться уравнению

$$\left( k_s - \frac{(\boldsymbol{\sigma} \nabla)}{i} \right) \psi_k = 0, \quad (20,5)$$

<sup>1)</sup> Как указано в § 17, оператор проекции спина на ось  $z$  имеет вид  $\frac{1}{2} \sigma_3 \hbar$ . Поэтому оператор  $S$  мы можем рассматривать как удвоенное произведение проекции спина (в единицах  $\hbar$ ) на направление движения.

где  $s$  представляет собою собственное значение оператора  $S$ . Совместное решение уравнений (20,4) и (20,5) будем искать в виде

$$\psi_k = \frac{1}{L^{3/2}} b e^{-i\epsilon K t + i k r}, \quad (20,6)$$

где  $b$  — четырёхрядная матрица

$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix}, \quad (20,7)$$

$L^3$  — объём основного параллелепипеда; вектор  $k$  ( $k_x, k_y, k_z$ ) связан с целыми числами  $n_x, n_y, n_z = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  соотношениями  $k_x = \frac{2\pi}{L} n_x$  и т. д.;  $K = \sqrt{k^2 + k_0^2}$ ,  $\epsilon K$  — собственное

значение оператора  $-\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}$ :  $-\frac{1}{c} \frac{\partial \psi_k}{\partial t} = \epsilon K \psi_k$ . Если  $\epsilon > 0$ ,

то мы будем иметь положительное значение для энергии, а при  $\epsilon < 0$  — отрицательное.

Подставляя (20,6) в уравнения (20,5) и (20,4), мы получаем следующие уравнения для определения искомой матрицы  $b$ , а также значений величин  $\epsilon$  и  $s$ :

$$\begin{aligned} (ks - (\sigma k))b &= 0, \\ (\epsilon K - s\rho_1 k - \rho_3 k_0)b &= 0. \end{aligned} \quad (20,8)$$

Для решения системы уравнений (20,8) повернём оси координат таким образом, чтобы ось  $k'_z$  была направлена по вектору  $k$  (положение конца которого характеризуется сферическими координатами  $k, \theta$  и  $\varphi$ ; см. рис. 1). Переход от системы  $(k_x, k_y, k_z)$  к системе  $(k'_x, k'_y, k'_z)$  может быть совершён путём двух поворотов. Первый поворот следует сделать вокруг оси  $k_z$  (т. е.  $k'_z = k_z$ ) на угол  $\varphi$  так, чтобы ось  $k'_x$  совпала с проекцией вектора  $k$  на плоскость  $(k_x, k_y)$ ; ось

$k'_y$  будет лежать тогда в плоскости  $(k_x k_y)$ , перпендикулярной к плоскости  $(k_z k)$ . В результате будем иметь:

$$\begin{aligned} k_x &= k'_x \cos \varphi - k'_y \sin \varphi, \\ k_y &= k'_y \cos \varphi + k'_x \sin \varphi, \\ k_z &= k'_z, \quad k'' = k, \\ K'' &= K. \end{aligned} \quad (20,9)$$

Согласно равенству (18,11) волновая функция будет при этом преобразовываться по закону:

$$b = \Omega_{xy} b'', \quad \Omega_{xy} = \cos \frac{\varphi}{2} - i\sigma_3 \sin \frac{\varphi}{2}. \quad (20,10)$$

Второй поворот мы должны совершить вокруг оси  $k'_y$  ( $k'_y = k'_y$ )

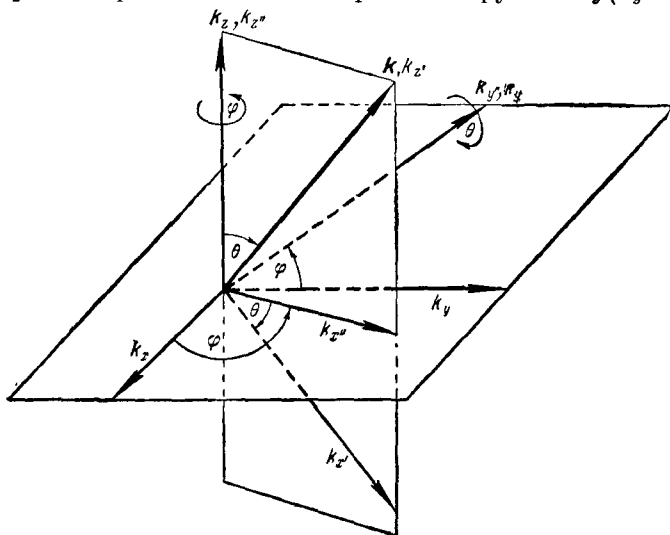


Рис. 1. Переход от одной системы координат к другой.

на угол  $\theta$ , таким образом, чтобы ось  $k'_z$  совпала с вектором  $k$ . Ось  $k'_x$  будет лежать в плоскости  $(k_z k)$ , составляя

угол  $\theta$  с плоскостью  $(k_x k_y)$ . В результате будем иметь:

$$\begin{aligned} k''_z &= k'_z \cos \theta - k'_x \sin \theta, & k'' &= k', \\ k''_x &= k'_x \cos \theta + k'_z \sin \theta, & K'' &= K', \end{aligned} \quad (20,11)$$

причём

$$b'' = \Omega_{x'z'} b', \quad \Omega_{x'z'} = \cos \frac{\theta}{2} - i\sigma_2 \sin \frac{\theta}{2}. \quad (20,12)$$

Сопоставляя равенства (20,12) и (20,11) с равенствами (20,10) и (20,9), находим:

$$\begin{aligned} k' &= k, & K' &= K. \\ b &= \Omega b', \end{aligned} \quad (20,13)$$

где

$$\begin{aligned} \Omega &= \Omega_{xy} \Omega_{x'z'} = \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{\varphi}{2} + \\ &+ i \left( \sigma_1 \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{\varphi}{2} - \sigma_2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\varphi}{2} - \sigma_3 \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\varphi}{2} \right). \end{aligned} \quad (20,14)$$

В штрихованной системе координат матричные уравнения (20,8) принимают вид

$$\begin{aligned} (s - \sigma_3) b' &= 0, \\ (\varepsilon K - s\rho_1 k - \rho_3 k_0) b' &= 0. \end{aligned} \quad (20,15)$$

Уравнения (20,15) эквивалентны системе следующих уравнений:

$$\begin{aligned} (s - 1) b'_1 &= 0, \\ (s + 1) b'_2 &= 0, \\ (s - 1) b'_3 &= 0, \\ (s + 1) b'_4 &= 0; \end{aligned} \quad (20,16)$$

$$\begin{aligned} (\varepsilon K - k_0) b'_1 &= sk b'_3, \\ (\varepsilon K - k_0) b'_2 &= sk b'_4, \\ (\varepsilon K + k_0) b'_3 &= sk b'_1, \\ (\varepsilon K + k_0) b'_4 &= sk b'_2. \end{aligned} \quad (20,17)$$

Из уравнений (20,16) находим собственное значение для величины  $s$ . Отличные от нуля коэффициенты будут лишь при двух значениях  $s$ : при  $s=1$  и при  $s=-1$ . В первом случае ( $s=1$ ) отличными от нуля будут амплитуды  $b'_1$  и  $b'_3$ , соотношения между которыми могут быть найдены из уравнений (20,17):

$$\begin{aligned} (\varepsilon K - k_0) b'_1 - k b'_3, \\ (\varepsilon K + k_0) b'_3 = k b'_1 \end{aligned} \quad (20,18)$$

и из условия нормировки

$$b_1'^2 + b_3'^2 = 1. \quad (20,19)$$

Во втором же случае ( $s=-1$ ) отличными от нуля будут амплитуды  $b'_2$  и  $b'_4$ , связанные соотношениями

$$\begin{aligned} (\varepsilon K - k_0) b'_2 = -k b'_4, \\ (\varepsilon K + k_0) b'_4 = -k b'_2, \\ b_2'^2 + b_4'^2 = 1. \end{aligned} \quad (20,20)$$

Отсюда находим значения для величины  $\varepsilon$ :

$$\varepsilon = \pm 1, \quad (20,21)$$

а также значения для матричных элементов  $b'_\mu$ :

$$\begin{aligned} b'_1 = B_1 &= \frac{\sqrt{1+s}}{2} \left( 1 + \frac{\varepsilon k_0}{K} \right)^{\frac{1}{2}}, \\ b'_2 = B_2 &= \frac{\sqrt{1-s}}{2} \left( 1 + \frac{\varepsilon k_0}{K} \right)^{\frac{1}{2}}, \\ b'_3 = B_3 &= \varepsilon \frac{\sqrt{1+s}}{2} \left( 1 - \frac{\varepsilon k_0}{K} \right)^{\frac{1}{2}}, \\ b'_4 = B_4 &= -\varepsilon \frac{\sqrt{1-s}}{2} \left( 1 - \frac{\varepsilon k_0}{K} \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (20,22)$$

Таким образом, при заданном значении импульса электрона матричные элементы зависят от собственных



значений проекции спина на направление движения  $\left(\frac{1}{2} s\right)$  и от знака величины  $\varepsilon$ .

В нерелятивистском приближении ( $K \cong k_0$ ) при  $s = 1$ ,  $\varepsilon = 1$  (спин направлен по оси  $z$ , энергия электрона положительна) матрица  $B$  имеет вид

$$B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};$$

при  $s = -1$ ,  $\varepsilon = 1$

$$B = - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};$$

при  $s = 1$ ,  $\varepsilon = -1$

$$B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix};$$

наконец, при  $s = -1$ ,  $\varepsilon = -1$

$$B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, в нерелятивистском приближении волновые функции, соответствующие отрицательной энергии, не зависят от волновых функций состояний с положительной энергией и поэтому при рассмотрении движения электронов состояния с  $\varepsilon = -1$  могут быть отброшены.

В релятивистском же случае мы не можем отделить волновые функции с положительной энергией от волновых функций с отрицательной энергией, и поэтому при решении

любой задачи следует учитывать все четыре состояния. Физический смысл состояний с отрицательной энергией мы рассмотрим в § 23 в связи с теорией позитрона.

Согласно равенствам (20,22) и (20,13) частное решение для волновой функции  $\psi_k(s, \varepsilon)$  равно

$$\psi_k(s, \varepsilon) = \frac{1}{L^{3/2}} \Omega B(s, \varepsilon) e^{-icsKt + ikr}, \quad (20,23)$$

где величина  $B(s, \varepsilon)$  образует следующую матрицу:

$$B(s, \varepsilon) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{1 + sf(\varepsilon)} \\ \sqrt{1 - sf(\varepsilon)} \\ \varepsilon \sqrt{1 + sf(-\varepsilon)} \\ -\varepsilon \sqrt{1 - sf(-\varepsilon)} \end{pmatrix}, \quad (20,24)$$

$$f(\varepsilon) = \sqrt{1 + \varepsilon \frac{k_0}{K}}, \quad (20,25)$$

а вид матрицы  $\Omega$  определяется формулой (20,14).

Точно так же для комплексно сопряжённых функций мы находим:

$$\psi_k^+(s, \varepsilon) = \frac{1}{L^{3/2}} B^+(s, \varepsilon) \Omega^+ e^{icsKt - ikr}, \quad (20,26)$$

где

$$\begin{aligned} \Omega^+ = & \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{\varphi}{2} - \\ & - i \left( \sigma_1 \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{\varphi}{2} - \sigma_2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\varphi}{2} - \sigma_3 \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\varphi}{2} \right), \end{aligned} \quad (20,27)$$

$$\begin{aligned} B^+(s, \varepsilon) = & \\ = & \frac{1}{2} \left( \sqrt{1 + sf(\varepsilon)}, \sqrt{1 - sf(\varepsilon)}, \varepsilon \sqrt{1 + sf(-\varepsilon)}, \right. \\ & \left. -\varepsilon \sqrt{1 - sf(-\varepsilon)} \right). \end{aligned} \quad (20,28)$$

С помощью последних формул легко доказать следующие равенства:

$$\Omega^+ \Omega = 1, \quad B_\mu^+(s, \varepsilon) = B_\mu(s, \varepsilon), \quad (20,29)$$

$$B^+(s', \varepsilon') B(s, \varepsilon) = \delta_{ss'} \delta_{\varepsilon\varepsilon'}, \quad (20,30)$$

$$\sum_{s, \varepsilon} B_\mu(s, \varepsilon) B_{\mu'}(s, \varepsilon) = \delta_{\mu\mu'} \quad (20,31)$$

Отсюда следует условие ортонормированности для волновых функций:

$$\int \psi_{k'}^+(s', \varepsilon') \psi_k(s, \varepsilon) d^3x = \delta_{kk'} \delta_{ss'} \delta_{\varepsilon\varepsilon'}. \quad (20,32)$$

Таким образом, при заданном  $k$  возможны четыре состояния для волновых функций ( $s = \pm 1, \varepsilon = \pm 1$ ), которые являются ортогональными друг к другу.

Общее решение уравнения Дирака в случае отсутствия внешнего поля может быть представлено в виде

$$\psi = \frac{1}{L^{3/2}} \sum_{s, \varepsilon, k} C(k, s, \varepsilon) b(k, s, \varepsilon) e^{-icsKt + ikr}, \quad (20,33)$$

причём величина  $C^+C$  характеризует вероятность нахождения частицы в состоянии  $k, s, \varepsilon$ .

## § 21. Вычисление матричных элементов

При исследовании вопросов, связанных с переходом частицы из одного состояния ( $k, s, \varepsilon$ ) в другое ( $k', s', \varepsilon'$ ), нам необходимо будет вычислять следующие квадратичные формы матричных элементов:

$$\langle \gamma', \gamma \rangle = b^+(k, s, \varepsilon) \gamma' b(k', s', \varepsilon') b^+(k', s', \varepsilon') \gamma b(k, s, \varepsilon), \quad (21,1)$$

где  $\gamma'$  и  $\gamma$  являются любыми из 16 матриц полувекторных уравнений.

Как было показано в предыдущем параграфе, амплитуды  $b$  удовлетворяют следующим уравнениям:

$$\begin{aligned} \left(1 - \rho_1 \varepsilon s \frac{k}{K} - \varepsilon \rho_3 \frac{k_0}{K}\right) b(\mathbf{k}, s, \varepsilon) &= 0, \\ \left(1 - s \frac{(\sigma k)}{k}\right) b(\mathbf{k}, s, \varepsilon) &= 0. \end{aligned} \quad (21,2)$$

Отсюда следует

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \left(1 + \rho_1 \varepsilon s \frac{k}{K} + \varepsilon \rho_3 \frac{k_0}{K}\right) \left(1 + s \frac{(\sigma k)}{k}\right) b(\mathbf{k}, s_1, \varepsilon_1) &= \\ = \delta_{ss_1} \delta_{\varepsilon\varepsilon_1} b(\mathbf{k}, s, \varepsilon). \end{aligned} \quad (21,3)$$

Поэтому формула (21,1) может быть представлена в виде

$$\begin{aligned} \langle \gamma', \gamma \rangle &= \frac{1}{16} \sum_{s_1 \varepsilon_1 s'_1 \varepsilon'_1} b^+(\mathbf{k}, s_1, \varepsilon_1) \gamma' \left(1 + \rho_1 \varepsilon' s' \frac{k'}{K'} + \right. \\ &\quad \left. + \varepsilon' \rho_3 \frac{k'_0}{K'}\right) \left(1 + s' \frac{(\sigma k')}{k'}\right) \times \\ &\quad \times b(\mathbf{k}', s'_1, \varepsilon'_1) b^+(\mathbf{k}', s'_1, \varepsilon'_1) \gamma \left(1 + \rho_1 \varepsilon s \frac{k}{K} + \right. \\ &\quad \left. + \varepsilon \rho_3 \frac{k_0}{K}\right) \left(1 + s \frac{(\sigma k)}{k}\right) b(\mathbf{k}, s_1, \varepsilon_1). \end{aligned} \quad (21,4)$$

Для вычисления выражения (21,4) прежде всего найдём сумму вида

$$\sum_{s'_1 \varepsilon'_1} B'(s'_1, \varepsilon'_1) B'^+(s'_1, \varepsilon'_1) = \sum_{s'_1 \varepsilon'_1} \begin{pmatrix} B'_1 \\ B'_2 \\ B'_3 \\ B'_4 \end{pmatrix} (B'_1 B'_2 B'_3 B'_4). \quad (21,5)$$

Согласно (20,31) имеем:

$$B_{\mu\mu'} = \sum_{s'_1 \varepsilon'_1} B'_\mu B'_{\mu'} = \delta_{\mu\mu'}, \quad (21,6)$$

т. е. матрица (21,5) представляет собою единичную матрицу. Далее, принимая во внимание, что  $\Omega\Omega^+ = 1$ , находим:

$$\sum_{s'_1, \varepsilon'_1} b' b'^+ = \Omega \sum_{s'_1, \varepsilon'_1} B' B'^+ \Omega^+ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (21,7)$$

Таким образом, соотношение (21,4) принимает более простой вид:

$$\langle \gamma', \gamma \rangle = \sum_{s_1, \varepsilon_1} b^+(k, s_1, \varepsilon_1) \beta b(k, s_1, \varepsilon_1), \quad (21,8)$$

где

$$\beta = \frac{1}{16} \gamma' \left( 1 + \rho_1 \varepsilon' s' \frac{k'}{K'} + \rho_3 \varepsilon' \frac{k_0}{K'} \right) \left( 1 + s' \frac{(\sigma k')}{k'} \right) \gamma \times \\ \times \left( 1 + \rho_1 \varepsilon s \frac{k}{K} + \rho_3 \varepsilon \frac{k_0}{K} \right) \left( 1 + s \frac{(\sigma k)}{k} \right). \quad (21,9)$$

Найдём, далее, матричные элементы выражения (21,8):

$$\langle \gamma', \gamma \rangle_{\mu\mu'} = \sum_{s_1, \varepsilon_1} (b^+ \beta)_{\mu\nu} b_{\nu\mu'} = \sum_{s_1, \varepsilon_1} b_{\mu\nu}^+ \beta_{\nu\nu'} b_{\nu\mu'}. \quad (21,10)$$

Принимая во внимание, что матрица  $b^+$  состоит из одной строки, а матрица  $b$  -- из одного столбца, т. е.

$$b_{\mu\nu}^+ = \delta_{\mu 1} B_{\nu}^+ \Omega^+, \quad b_{\nu\mu'} = \delta_{\mu' 1} \Omega B_{\nu},$$

находим:

$$\langle \gamma', \gamma \rangle_{\mu\mu'} = \delta_{\mu 1} \delta_{\mu' 1} \beta_{\nu\nu'} \sum_{s_1, \varepsilon_1} B_{\nu}^+ (s_1 \varepsilon_1) B_{\nu} (s_1 \varepsilon_1). \quad (21,11)$$

Отсюда мы видим, что у искомого матричного элемента отличным от нуля будет лишь один элемент ( $\mu = \mu' = 1$ ), т. е. выражение  $\langle \gamma', \gamma \rangle$  является числом. С помощью соотношения (20,31) находим:

$$\langle \gamma', \gamma \rangle = \langle \gamma', \gamma \rangle_{11} = \beta_{\nu\nu'} \delta_{\nu\nu} = \beta_{\nu\nu} = \text{след } \beta,$$

где след  $\beta$ , по определению, есть сумма диагональных членов матрицы  $\beta$ .

Подставляя сюда вместо матрицы  $\beta$  выражение (21,9), получаем:

$$\begin{aligned} \langle \gamma', \gamma \rangle = \text{след} \frac{1}{16} \gamma' \left( 1 + \rho_1 \varepsilon' s' \frac{k'}{K'} + \rho_3 \varepsilon' \frac{k_0}{K'} \right) \times \\ \times \left( 1 + s' \frac{(\sigma k')}{k'} \right) \gamma \left( 1 + \rho_1 \varepsilon s \frac{k}{K} + \rho_3 \varepsilon \frac{k_0}{K} \right) \left( 1 + s \frac{(\sigma k)}{k} \right). \end{aligned} \quad (21,12)$$

Нетрудно показать, что из всех шестнадцати матриц Дирака диагональная сумма только единичной матрицы отлична от нуля и равняется четырём. Поэтому после перемножения всех матриц в правой части равенства (21,12) мы должны оставить лишь члены, пропорциональные единичной матрице.

Мы сможем составить таблицу для вычисления равенства (21,12), если введём следующие обозначения для независимых шестнадцати матриц:

$$\gamma_{\mu\nu} = \rho_{\mu} \sigma_{\nu} = \sigma_{\nu} \rho_{\mu}, \quad (21,13)$$

причём  $\rho_4 = \sigma_4 = I$  (единичная матрица), а под матрицей  $\sigma_n$  будем понимать выражение  $(\sigma n)$ , где  $n$  — единичный вектор любого трёхмерного направления. Обычные матрицы  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  можно получить, если направить вектор  $n$  соответственно по осям  $x, y$  или  $z$ . Как видно из (21,13), матрицы  $\rho_{\mu}$  должны коммутировать с матрицами  $\sigma_{\nu}$ .

Заменим матрицы  $\gamma'$  и  $\gamma$  матрицами, представленными в виде (21,13), а также примем во внимание соотношение

$$\text{след} \rho_{\mu} \sigma_{\nu} = \frac{1}{4} \text{след} \rho_{\mu} \text{след} \sigma_{\nu}, \quad (21,14)$$

которое легко получить из равенств

$$\text{след} \rho_{\mu} = 4\delta_{4\mu},$$

$$\text{след} \sigma_{\nu} = 4\delta_{4\nu},$$

$$\text{след} \rho_{\mu} \sigma_{\nu} = 4\delta_{4\mu} \delta_{4\nu}.$$

Тогда выражение (21,12) можно разбить на произведение двух диагональных сумм вида (21,14):

$$\langle \gamma_{\mu'\nu'}, \gamma_{\mu\nu} \rangle = \frac{1}{4} \rho_{\mu'\mu} \sigma_{\nu'\nu}. \quad (21,15)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \rho_{\mu'\mu} &= \frac{1}{4} \text{след } \rho_{\mu'} \left( 1 + \varepsilon' s' \rho_1 \frac{k'}{K'} + \varepsilon' \rho_3 \frac{k_0}{K'} \right) \rho_{\mu} \times \\ &\quad \times \left( 1 + \varepsilon s \rho_1 \frac{k}{K} + \varepsilon \rho_3 \frac{k_0}{K} \right); \\ \sigma_{\nu'\nu} &= \frac{1}{4} \text{след } \sigma_{\nu'} \left( 1 + s' \frac{(\sigma k')}{k'} \right) \sigma_{\nu} \left( 1 + s \frac{(\sigma k)}{k} \right). \end{aligned} \quad (21,16)$$

В зависимости от различных комбинаций индексов  $\mu'$  и  $\mu$  величина  $\rho_{\mu'\mu}$  может принимать шестнадцать значений, которые мы расположим в следующую таблицу:

$$\begin{aligned} \left. \begin{array}{l} \rho_{11} \\ \rho_{22} \\ \rho_{33} \\ \rho_{44} \end{array} \right\} &= 1 \pm \varepsilon \varepsilon' s s' \frac{k k'}{K K'} \mp \frac{\varepsilon \varepsilon'}{\mp} \frac{k_0^2}{K K'}, \\ \left. \begin{array}{l} -i\rho_{12} = i\rho_{21} \\ \rho_{34} = \rho_{43} \end{array} \right\} &= \frac{\varepsilon k_0}{K} \mp \frac{\varepsilon' k_0}{K'}, \\ \left. \begin{array}{l} \rho_{13} = \rho_{31} \\ -i\rho_{24} = i\rho_{42} \end{array} \right\} &= \frac{\varepsilon \varepsilon' s k_0 k}{K K'} \pm \frac{\varepsilon \varepsilon' s' k_0 k'}{K K'}, \\ \left. \begin{array}{l} \rho_{14} = \rho_{41} \\ -i\rho_{23} = i\rho_{32} \end{array} \right\} &= \frac{\varepsilon s k}{K} \pm \frac{\varepsilon' s' k'}{K'}. \end{aligned} \quad (21,17)$$

Для  $\sigma_{\nu'\nu}$  аналогичным способом найдём:

$$\sigma_{44} = 1 + s s' \frac{(k k')}{k k'}, \quad (21,18)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{nn'} &= (n n') \left( 1 - s s' \frac{(k k')}{k k'} \right) + \frac{i}{k k'} ((s k' k - s' k k') [n n']) + \\ &\quad + s s' \frac{k_n k'_n + k_n' k_n}{k k'}. \end{aligned}$$

$$\left. \begin{array}{l} \sigma_{n4} \\ \sigma_{4n} \end{array} \right\} = \frac{s k' k_n + s' k k'_n}{k k'} \mp \frac{i s s' (n [k k'])}{k k'}.$$

Отсюда видно, что при переходе к нерелятивистскому приближению полезно учесть следующие правила:

1) Если частица переходит из одного состояния в другое с тем же знаком энергии ( $\varepsilon\varepsilon' = 1$ ), то матричные элементы, пропорциональные матрицам  $\rho_1$  или  $\rho_2$ , имеют порядок  $\frac{v}{c}$  по сравнению с матричными элементами, пропорциональными матрицам  $\rho_3$  и  $\rho_4 = I$ , и следовательно, в нерелятивистском случае величины, пропорциональные  $\rho_{11}$  и  $\rho_{22}$ , пренебрежимо малы. В самом деле, как видно из формул (21,17)

$$\rho_{33} \sim \rho_{44} \sim 1, \quad \rho_{11} \sim \rho_{22} \sim \frac{k^2}{K^2}.$$

2) Если частица переходит из одного состояния в другое с противоположным знаком энергии ( $\varepsilon\varepsilon' = -1$ ), т. е. из состояния с положительной энергией в состояние с отрицательной энергией, или наоборот, то легко показать, что матричные элементы, пропорциональные  $\rho_3$  и  $I$ , будут иметь порядок  $\frac{v}{c}$  по сравнению с матричными элементами, пропорциональными  $\rho_1$  и  $\rho_2$ .

В самом деле, как следует из формул (21,17), при  $\varepsilon\varepsilon' = -1$

$$\rho_{11} \sim \rho_{22} \sim 1, \quad \rho_{33} \sim \rho_{44} \sim \frac{k^2}{K^2}.$$

Если в рассматриваемой задаче электрон обладает равновероятными значениями для направления спина, то мы должны усреднить квадратичную форму матричного элемента по спиновым состояниям  $s$  и  $s'$  по формуле

$$\bar{f} = \frac{1}{4} \sum_{s, s' = -1, +1} f(s, s'). \quad (21,19)$$

Отсюда видно, что при усреднении члены, пропорциональные  $s, s'$  и  $ss'$ , обращаются в нуль, а члены, не зависящие от  $s$  и  $s'$ , дадут единицу.

В качестве примера вычислим среднее значение матричного элемента  $\langle I, I \rangle$ . Согласно выведенным форму-



лам имеем:

$$\begin{aligned} \overline{\langle I, I \rangle} &= \frac{1}{4} \overline{\rho_{44} \sigma_{44}} = \\ &= \frac{1}{16} \sum_{s, s' = -1, +1} \left( 1 + \varepsilon \varepsilon' s s' \frac{k k'}{K K'} + \varepsilon \varepsilon' \frac{k_0^2}{K K'} \right) \cdot \left( 1 + s s' \frac{(k k')}{k k'} \right), \end{aligned}$$

или, окончательно,

$$\overline{\langle I, I \rangle} = \frac{1}{4} \left( 1 + \varepsilon \varepsilon' \frac{(k k') + k_0^2}{K K'} \right). \quad (21,20)$$

Аналогичным способом могут быть найдены другие средние значения квадратичных форм матричных элементов.

Заметим, что для вычисления средних значений квадратов матричных элементов мы можем произвести усреднение с помощью формулы (21,19) непосредственно в выражении (21,12). Тогда будем иметь:

$$\begin{aligned} \overline{\langle \gamma', \gamma \rangle} &= \\ &= \frac{1}{16} \text{след } \gamma' \left( 1 + \varepsilon' \frac{(\alpha k') + \rho_3 k_0}{K'} \right) \gamma \left( 1 + \varepsilon \frac{(\alpha k) + \rho_3 k_0}{K} \right). \quad (21,21) \end{aligned}$$

В частности, подставляя сюда вместо матриц  $\gamma'$  и  $\gamma$  единичные матрицы, мы вновь получим формулу (21,20).

## § 22. Вариационные методы

Для изложения вопросов, связанных со вторичным квантованием, необходимо развить вариационные методы для полувекторных уравнений, точно так же, как это было сделано при квантовании скалярных и максвелловских уравнений.

Для составления функции Лагранжа, тензора энергии и тензора спина полувекторных уравнений проще всего ввести систему координат с мнимой четвёртой составляющей ( $x_4 = ict$ ). Тогда уравнение Дирака можно записать в виде

$$- \hbar c \left( \frac{1}{i} \alpha_\mu \psi_\mu + k_0 \rho_3 \psi \right) = 0, \quad (22,1)$$

где

$$\psi_\mu = \frac{\partial \psi}{\partial x_\mu}, \quad k_0 = \frac{mc}{\hbar}. \quad (22,2)$$

Из уравнения (22,1) следует

$$\alpha_\mu \psi_\mu = -ik_0 \rho_3 \psi. \quad (22,3)$$

Аналогично для комплексно сопряжённого уравнения имеем:

$$\psi_\mu^\dagger \alpha_\mu = ik_0 \psi^\dagger \rho_3. \quad (22,4)$$

**а) Функция Лагранжа.** Подберём функцию Лагранжа таким образом, чтобы полувекторные уравнения явились следствием вариационного принципа

$$\delta \int L d^4 x = 0, \quad (22,5)$$

т. е. уравнение для волновых функций  $\psi$  и  $\psi^\dagger$  получится бы соответственно из условий

$$\begin{aligned} \frac{\delta L}{\delta \psi^\dagger} &= \frac{\partial L}{\partial \psi^\dagger} - \frac{\partial}{\partial x_\mu} \frac{\partial L}{\partial \psi_\mu^\dagger} = 0, \\ \frac{\delta L}{\delta \psi} &= \frac{\partial L}{\partial \psi} - \frac{\partial}{\partial x_\mu} \frac{\partial L}{\partial \psi_\mu} = 0. \end{aligned} \quad (22,6)$$

Для этого можно выбрать следующие функции Лагранжа:

$$\begin{aligned} L' &= -\hbar c \psi^\dagger \left( \frac{1}{i} \alpha_\mu \psi_\mu + k_0 \rho_3 \psi \right), \\ L'' &= -\hbar c \left( -\frac{1}{i} \psi_\mu^\dagger \alpha_\mu + k_0 \psi^\dagger \rho_3 \right) \psi. \end{aligned} \quad (22,7)$$

Поскольку оба наши лагранжиана отличаются друг от друга на величину, равную четырёхмерной расходимости

$$L' - L'' = -\hbar c \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_\mu} \psi^\dagger \alpha_\mu \psi,$$

которая, как известно, может быть отброшена, мы можем положить функцию Лагранжа равной любой линейной комбинации функций  $L'$  и  $L''$ .

В частности, оказывается удобным принять

$$L = \frac{1}{2}(L' + L'') = \\ = -\hbar c \left( \frac{1}{2i} \psi^+ \alpha_\mu \psi_\mu - \frac{1}{2i} \psi_\mu^+ \alpha_\mu \psi + k_0 \psi^+ \rho_3 \psi \right). \quad (22,8)$$

Отсюда с помощью уравнений (22,6) получаем полувекторные уравнения (22,3) и (22,4).

Заметим, что для реальных движений, подчиняющихся уравнениям (22,3) и (22,4), функция Лагранжа обращается в нуль; однако это ни в коей мере не означает, что все вариации лагранжиана по функциям  $\psi$  и  $\psi_\mu$  также обращаются в нуль.

**б) Тензор энергии.** Найдём компоненты тензора энергии, связанные с лагранжианом соотношением [см., например, (3,11)]

$$T_{\mu\nu} = \psi_\mu^+ \frac{\partial L}{\partial \psi_\nu^+} + \frac{\partial L}{\partial \psi_\nu} \psi_\mu - L \delta_{\mu\nu}, \quad (22,9)$$

и удовлетворяющие закону сохранения

$$\frac{\partial T_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = 0. \quad (22,10)$$

Принимая во внимание соотношения

$$\frac{\partial L}{\partial \psi_\nu^+} = \frac{\hbar c}{2i} \alpha_\nu \psi, \quad \frac{\partial L}{\partial \psi_\nu} = -\frac{\hbar c}{2i} \psi^+ \alpha_\nu, \quad L = 0,$$

имеем для искоемых компонент следующие выражения:

$$T_{\mu\nu} = -\frac{\hbar c}{2i} (\psi^+ \alpha_\nu \psi_\mu - \psi_\mu^+ \alpha_\nu \psi). \quad (22,11)$$

В частности, из (22,11) находим компоненты для плотности энергии  $u$  и плотности импульса  $g_n$  системы

$$u = T_{44} = -\frac{\hbar c}{2i} (\psi^+ \alpha_4 \psi_4 - \psi_4^+ \alpha_4 \psi) = \\ = -\frac{\hbar c}{2i} \left( \psi^+ \frac{\partial \psi}{c \partial t} - \frac{\partial \psi^+}{c \partial t} \psi \right), \quad (22,12) \\ g_n = \frac{i}{c} T_{n4} = \frac{\hbar}{2i} (\psi^+ \psi_n - \psi_n^+ \psi),$$

причём для полной энергии

$$U = \int T_{44} d^3x \quad (22,13)$$

и полного импульса поля

$$G_n = \int \frac{i}{c} T_{n4} d^3x \quad (22,13a)$$

имеют место законы сохранения.

**в) Тензор спина.** Наряду с компонентами канонического тензора энергии, которые в данном случае не являются симметричными ( $T_{\mu\nu} \neq T_{\nu\mu}$ ), мы можем получить компоненты метрического тензора энергии  $T'_{\mu\nu}$ , которые всегда должны быть симметричными. Эти компоненты могут быть получены путём добавления к компонентам канонического тензора расходимости от некоторого тензора третьего ранга (см. также § 4):

$$f_{\mu[\nu\lambda]} = -f_{\mu[\lambda\nu]},$$

образованного таким образом, чтобы величины

$$T'_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} - \frac{\partial}{\partial x_\lambda} f_{\mu[\nu\lambda]} \quad (22,14)$$

представляли собой симметричный тензор. Тогда в силу тождественного соотношения

$$\frac{\partial^2}{\partial x_\nu \partial x_\lambda} f_{\mu[\nu\lambda]} \equiv 0$$

компоненты метрического тензора энергии будут также удовлетворять законам сохранения:

$$\frac{\partial T'_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = 0.$$

Для решения указанной задачи функцию  $f$  мы должны выбрать в виде антисимметрического тензора третьего ранга

$$f_{\mu[\nu\lambda]} = \frac{\hbar c}{4i} \psi^+ \alpha_{\mu\nu\lambda} \psi, \quad (22,15)$$

где

$$\alpha_{\mu\nu\lambda} = \begin{cases} -\rho_1 \sigma_\mu \rho_3 \sigma_\nu \rho_3 \sigma_\lambda, & \text{когда все три значка разные,} \\ 0, & \text{когда хотя бы два значка одинаковые.} \end{cases} \quad (22,16)$$

Из (22,16) видно, что

$$\alpha_{\mu\nu\lambda} = -\alpha_{\mu\lambda\nu} = -\alpha_{\nu\mu\lambda}.$$

Найдём расходимость тензора (22,15), учитывая последние соотношения:

$$\frac{\partial f_{[\mu\nu\lambda]}}{\partial x_\lambda} = -\frac{\hbar c}{4i} \sum_{\lambda}'' (\psi_{\lambda}^{\dagger} \alpha_{\lambda} \rho_3 \sigma_{\nu} \rho_3 \sigma_{\nu} \psi + \psi^{\dagger} \sigma_{\mu} \rho_3 \sigma_{\nu} \rho_3 \alpha_{\lambda} \psi_{\lambda}). \quad (22,17)$$

Два штриха, поставленные у суммы, означают, что в этой сумме согласно (22,16) мы должны исключить два члена, для которых  $\lambda = \mu$  и  $\lambda = \nu$ .

Из равенств (22,3) и (22,4) следует

$$\begin{aligned} \sum_{\lambda}'' \alpha_{\lambda} \psi_{\lambda} &= -\alpha_{\mu} \psi_{\mu} - \alpha_{\nu} \psi_{\nu} - ik_0 \rho_3 \psi, \\ \sum_{\lambda}'' \psi_{\lambda}^{\dagger} \alpha_{\lambda} &= -\psi_{\mu}^{\dagger} \alpha_{\mu} - \psi_{\nu}^{\dagger} \alpha_{\nu} + ik_0 \psi^{\dagger} \rho_3, \end{aligned} \quad (22,18)$$

причём в правых частях суммирования по значкам  $\mu$  и  $\nu$  нет.

Подставляя (22,18) в (22,17) и принимая во внимание тождество

$$\alpha_{\mu} \rho_3 \sigma_{\mu} \rho_3 = \rho_1, \quad (22,19)$$

получаем:

$$\frac{\partial f_{[\mu\nu\lambda]}}{\partial x_\lambda} = \frac{\hbar c}{4i} (\psi^{\dagger} \alpha_{\mu} \psi_{\nu} - \psi_{\nu}^{\dagger} \alpha_{\mu} \psi - \psi^{\dagger} \alpha_{\nu} \psi_{\mu} + \psi_{\mu}^{\dagger} \alpha_{\nu} \psi). \quad (22,20)$$

Отсюда с помощью (12,14) находим выражение для метрического тензора энергии:

$$T'_{\mu\nu} = -\frac{\hbar c}{4i} (\psi^{\dagger} \alpha_{\nu} \psi_{\mu} - \psi_{\mu}^{\dagger} \alpha_{\nu} \psi + \psi^{\dagger} \alpha_{\mu} \psi_{\nu} - \psi_{\nu}^{\dagger} \alpha_{\mu} \psi). \quad (22,21)$$

Для плотности энергии из (22,21) получим старое выражение (22,12).

Поскольку компоненты канонического тензора энергии не являются симметричными, мы должны ожидать, что поле полувекторных частиц обладает «собственным» моментом.

Согласно (4,14) для тензора плотности «собственного» момента количества движения поля имеем:

$$s_{[\mu\nu]\lambda} = \frac{i}{c} (f_{\mu[\nu\lambda]} - f_{\nu[\mu\lambda]}) = \frac{\hbar}{2} \psi^{\dagger} \alpha_{\mu\nu\lambda} \psi. \quad (22,22)$$

Отсюда для пространственных составляющих тензора спина имеем:

$$s_x = s_{[23]4} = \frac{\hbar}{2} \psi^{\dagger} \alpha_{234} \psi \quad \text{и т. д.}$$

Из формулы (22,16) находим:

$$\alpha_{234} = -\rho_1 \sigma_2 \rho_3 \sigma_3 \rho_3 i \rho_1 = -i \sigma_2 \sigma_3 = \sigma_1. \quad (22,23)$$

Поэтому

$$s_x = \frac{\hbar}{2} \psi^\dagger \sigma_1 \psi. \quad (22,24)$$

Аналогичным способом получаем:

$$\begin{aligned} s_y &= \frac{\hbar}{2} \psi^\dagger \sigma_2 \psi, \\ s_z &= \frac{\hbar}{2} \psi^\dagger \sigma_3 \psi. \end{aligned} \quad (22,25)$$

г) **Четырёхмерная плотность тока.** Мы можем с помощью функции Лагранжа найти также плотность четырёхмерного тока. Для этого следует включить в лагранжиан полувекторного уравнения электромагнитные потенциалы [по правилу (10,7)], т. е.

$$\begin{aligned} L = -\hbar c \left[ \frac{1}{2i} \psi^\dagger \alpha_\mu \left( \nabla_\mu + \frac{ie}{\hbar c} A_\mu \right) \psi - \right. \\ \left. - \frac{1}{2i} \left( \nabla_\mu - \frac{ie}{\hbar c} A_\mu \right) \psi^\dagger \alpha_\mu \psi + k_0 \psi^\dagger \rho_3 \psi \right]. \end{aligned} \quad (22,26)$$

Тогда, варьируя лагранжиан  $L$  по потенциалам  $A_\mu$ , найдём компоненты четырёхмерной плотности тока:

$$j_\mu = \frac{\partial L}{\partial A_\mu} = -e \psi^\dagger \alpha_\mu \psi.$$

Отсюда для плотности заряда и плотности тока получим:

$$\rho = \frac{j_4}{i} = -e \psi^\dagger \psi, \quad \mathbf{j} = -e \psi^\dagger \boldsymbol{\alpha} \psi, \quad (22,27)$$

что совпадает с результатом, найденным нами в § 17.

С помощью закона сохранения для четырёхмерной плотности тока

$$\frac{\partial j_\mu}{\partial x_\mu} = 0$$

легко показать, что полный заряд будет оставаться величиной постоянной:

$$\int \rho d^3x = -e. \quad (22,28)$$

## § 23. Квантование полувекторного уравнения

а) Энергия, заряд и спин поля. Прежде чем произвести вторичное квантование полувекторного уравнения, определим полную энергию (функцию гамильтона  $H$ ), полный заряд  $e_{\text{полн}}$ , спин  $S$  и импульс  $G$  поля.

Согласно формуле (22,13) имеем для функции гамильтона  $H$  следующее выражение:

$$H = -\frac{\hbar c}{2i} \int \left( \psi^+ \frac{\partial \psi}{c \partial t} - \frac{\partial \psi^+}{c \partial t} \psi \right) d^3x. \quad (23,1)$$

Подставляя сюда общее решение для волновых функций [см. (20,33)]

$$\begin{aligned} \psi^+ &= \frac{1}{L^{3/2}} \sum_{s', \varepsilon', k'} C^+(s', \varepsilon', k') b^+(s', \varepsilon', k') e^{ics'K't - ik'r}, \\ \psi &= \frac{1}{L^{3/2}} \sum_{s', \varepsilon', k'} C(s', \varepsilon', k') b(s', \varepsilon', k') e^{-ics'K't + ik'r} \end{aligned} \quad (23,2)$$

и принимая во внимание условия (20,30) и (5,10), получаем:

$$H = \sum_{s, \varepsilon, k} c\hbar \varepsilon K C^+(s, \varepsilon, k) C(s, \varepsilon, k). \quad (23,3)$$

Аналогичным способом с помощью формулы (22,28) находим полный заряд поля:

$$e_{\text{полн}} = -e \sum_{s, \varepsilon, k} C^+(s, \varepsilon, k) C(s, \varepsilon, k). \quad (23,4)$$

С помощью формул (20,3) и (5,10) находим выражение для проекции полного спина на направление движения:

$$S = \frac{\hbar}{2} \int \psi^+ \frac{(\sigma \nabla)}{ik} \psi d^3x, \quad (23,5)$$

где величина  $k^2$  есть собственное значение оператора  $\left(\frac{\nabla}{i}\right)^2$ . Подставляя сюда вместо  $\psi$  разложение (23,2) и прини-

мая во внимание соотношение (20,5), найдём:

$$S = \sum_{s, \varepsilon, k} \frac{\hbar s}{2} C^+(s, \varepsilon, k) C(s, \varepsilon, k). \quad (23,6)$$

Согласно (22,12) и (22,13а) имеем для полного импульса поля:

$$G = \frac{\hbar}{2i} \int (\psi^+ (\nabla \psi) - (\nabla \psi^+) \psi) d^3x$$

или в компонентах Фурье:

$$G = \sum_{s, \varepsilon, k} \hbar k C^+(s, \varepsilon, k) C(s, \varepsilon, k). \quad (23,7)$$

Из этих формул видно, что произведение  $C^+C$  характеризует вероятность нахождения частицы в рассматриваемом состоянии, причём для заданного значения импульса  $\hbar k$  имеем четыре различных состояния:

- 1)  $\varepsilon = 1, \quad s = 1,$
- 2)  $\varepsilon = 1, \quad s = -1,$
- 3)  $\varepsilon = -1, \quad s = 1,$
- 4)  $\varepsilon = -1, \quad s = -1.$

Состояния с отрицательной энергией ( $\varepsilon = -1$ ) при переходе к нерелятивистской квантовой теории не имеют особого физического смысла и поэтому, как правило, просто отбрасываются, т. е. соответствующие амплитуды приравниваются нулю. Однако в теории вторичного квантования состояния с отрицательной энергией получают вполне определённый физический смысл и указывают на существование наряду с обычными частицами также и так называемых античастиц, обладающих противоположным знаком заряда. Учитывая состояния с отрицательной энергией, Дираку удалось предсказать существование новой элементарной частицы — позитрона, которая была впоследствии открыта экспериментально.

**б) Вторичное квантование полувекторных уравнений по Бозе-Эйнштейну.** Квантование полувекторных уравнений мы можем произвести с помощью квантовых урав-



нений движения (8,3), которые для нашего случая принимают вид:

$$\begin{aligned}
 -icK \in C(s, \epsilon, \mathbf{k}) &= \frac{i}{\hbar} (HC(s, \epsilon, \mathbf{k}) - C(s, \epsilon, \mathbf{k})H), \\
 icK \in C^+(s, \epsilon, \mathbf{k}) &= \frac{i}{\hbar} (HC^+(s, \epsilon, \mathbf{k}) - C^+(s, \epsilon, \mathbf{k})H).
 \end{aligned}
 \tag{23,8}$$

Учитывая ещё выражение для функции Гамильтона:

$$H = \sum_{s', \epsilon', \mathbf{k}'} c\hbar \epsilon' C^+(s', \epsilon', \mathbf{k}') C(s', \epsilon', \mathbf{k}'), \tag{23,9}$$

легко видеть, что уравнение (23,8) имеет два решения.

Первое решение связано со статистикой Бозе. В этом случае перестановочные соотношения равны

$$[C(s, \epsilon, \mathbf{k}), C^+(s', \epsilon', \mathbf{k}')]_- = \delta_{\epsilon\epsilon'} \delta_{ss'} \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}. \tag{23,9a}$$

Связь между амплитудами  $C$  и числом частиц  $N$  в случае статистики Бозе нами подробно исследована в § 8.

Из соотношения (23,9a) легко найти следующие собственные значения для квадратов амплитуд:

$$\begin{aligned}
 C^+(s, 1, \mathbf{k}) C(s, 1, \mathbf{k}) &= N_1(s, \mathbf{k}), \\
 C(s, 1, \mathbf{k}) C^+(s, 1, \mathbf{k}) &= 1 + N_1(s, \mathbf{k}), \\
 C(s, -1, \mathbf{k}) C^+(s, -1, \mathbf{k}) &= 1 + N_{-1}(s, \mathbf{k}), \\
 C^+(s, -1, \mathbf{k}) C(s, -1, \mathbf{k}) &= N_{-1}(s, \mathbf{k}).
 \end{aligned}
 \tag{23,10}$$

Подставляя (23,10) в выражение для полной энергии (23,9), имеем:

$$H = \sum_{s, \mathbf{k}} c\hbar K (N_1(s, \mathbf{k}) - N_{-1}(s, \mathbf{k})). \tag{23,10a}$$

Отсюда видно, что квантование полувекторных уравнений по Бозе-Эйнштейну приводит к трудности, связанной с отрицательной энергией, которую принимают античастицы ( $\epsilon = -1$ ).

**в) Вторичное квантование полувекторных уравнений по Ферми-Дираку.** Для устранения трудностей с отрицательной энергией Дирак предложил воспользоваться

принципом запрета Паули, согласно которому в каждом состоянии может находиться не более одной частицы.

Согласно этому представлению состояния с отрицательной энергией должны быть все заняты электронами (более подробно см. § 38). Свободный же отрицательный уровень, или так называемая «дырка» ведёт себя по отношению к вакууму как частица с положительной энергией, но противоположным зарядом (античастица, например, позитрон, см. ниже).

Теория «дырок» не вполне симметрична относительно знака заряда. Метод вторичного квантования, связанный со статистикой Ферми-Дирака, позволяет, оставляя математическую сторону теории «дырок» без изменений, придать всей теории симметричную форму.

Для того чтобы при квантовании полувекторных уравнений найти решение, связанное со статистикой Ферми-Дирака, преобразуем уравнения (23,8) к виду

$$\begin{aligned}
 -icK\epsilon C &= \sum_{s', \epsilon', k'} icK'\epsilon' (C'^+ (C'C + CC') - (C'^+ C + CC'^+) C'), \\
 icK\epsilon C^+ &= \sum_{s', \epsilon', k'} icK'\epsilon' (C'^+ (C'C^+ + C^+C') - \\
 &\quad - (C'^+ C^+ + C^+C'^+) C'),
 \end{aligned} \tag{23,11}$$

где

$$\begin{aligned}
 C &= C(s, \epsilon, \mathbf{k}), \\
 C' &= C(s', \epsilon', \mathbf{k}').
 \end{aligned}$$

Отсюда находим:

$$\begin{aligned}
 [C'^+, C]_+ &= C^+(s', \epsilon', \mathbf{k}') C(s, \epsilon, \mathbf{k}) + \\
 &\quad + C(s, \epsilon, \mathbf{k}) C^+(s', \epsilon', \mathbf{k}') = \delta_{ss'} \delta_{\epsilon\epsilon'} \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}, \tag{23,12} \\
 [C', C]_+ &= [C'^+, C^+]_+ = 0.
 \end{aligned}$$

Последние соотношения имеют два решения:

Первое решение имеет вид

$$C = \sqrt{1-N} \lambda F, \quad C^+ = F \lambda \sqrt{1-N}. \tag{23,13}$$

Второе решение

$$C = F\lambda\sqrt{1-N}, \quad C^* = \sqrt{1-N}\lambda F \quad (23,14)$$

может быть получено путём замены амплитуды  $C$  амплитудой  $C^*$ , и наоборот, поскольку в основное уравнение (23,12) оба эти коэффициента входят совершенно симметрично. Здесь функция  $\lambda$  может принимать два значения ( $\lambda = \pm 1$ );  $N$  — число частиц в состоянии  $s$ ,  $\epsilon$ ,  $\mathbf{k}$ , а  $F$  — оператор, действующий на функцию от числа частиц следующим образом:

$$\begin{aligned} Ff(N) &= f(1-N)F, \\ Ff(1-N) &= f(N)F. \end{aligned} \quad (23,15)$$

В качестве конкретного вида для оператора  $F$  мы можем выбрать выражение

$$\begin{aligned} F = 1 + (1-2N) \frac{\partial}{\partial N} + \frac{(1-2N)^2}{2!} \frac{\partial^2}{\partial N^2} + \\ + \frac{(1-2N)^3}{3!} \frac{\partial^3}{\partial N^3} + \dots \end{aligned} \quad (23,16)$$

Тогда мы сможем удовлетворить равенствам (23,15), если примем во внимание тождественное соотношение

$$f(N+\alpha) = \left( 1 + \alpha \frac{\partial}{\partial N} + \frac{\alpha^2}{2!} \frac{\partial^2}{\partial N^2} + \frac{\alpha^3}{3!} \frac{\partial^3}{\partial N^3} + \dots \right) f(N) \quad (23,17)$$

и положим величину  $\alpha$  равной  $1-2N$ .

С помощью формулы (23,16) легко получить следующие правила действия оператора  $F$  на постоянную величину  $A$ :

$$FA = A. \quad (23,18)$$

Далее, согласно (23,15) имеем:

$$F^2f(N) = Ff(1-N)F = f(N)F^2.$$

Отсюда видно, что собственные значения оператора  $F^2$  равны единице:

$$F^2 = 1. \quad (23,19)$$

Для того чтобы определить функцию  $\lambda$ , мы должны перенумеровать все квантовые состояния. Волновые числа  $\mathbf{k}$  ( $k_x, k_y, k_z$ ) связаны с целыми числами  $n_x, n_y, n_z = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$  соотношениями

$$k_x = \frac{2\pi}{L} n_x, \quad k_y = \frac{2\pi}{L} n_y, \quad k_z = \frac{2\pi}{L} n_z, \quad (23,20)$$

где  $L^3$  — объём основного параллелепипеда. Для дальнейшого нам важно лишь показать, что подобные перенумерования мы принципиально можем произвести. Например, в основу перенумерования мы можем положить сумму абсолютных значений:

$$|n_x| + |n_y| + |n_z| = n. \quad (23,21)$$

Вначале мы перенумеруем все состояния, когда эта сумма равняется нулю, затем единице, двум, трём и т. д. Так, для первого квантового состояния ( $\nu = 1$ )

$$n_x = n_y = n_z = 0, \quad s = 1, \quad \varepsilon = 1,$$

для второго ( $\nu = 2$ )

$$n_x = n_y = n_z = 0, \quad s = -1, \quad \varepsilon = 1$$

и т. д. Тогда величину  $\lambda$  мы выберем следующим образом:

$$\lambda = \prod_1^{\nu} (1 - 2N(s, \varepsilon, n_x, n_y, n_z)). \quad (23,22)$$

Как будет показано ниже, число частиц  $N$  в каждом состоянии может равняться только нулю или единице; тогда нетрудно проверить, что функция  $\lambda$  может принимать лишь два значения:  $\lambda = \pm 1$ .

Пусть одно квантовое состояние ( $s', \varepsilon', \mathbf{k}'$ ) характеризуется числом  $\nu'$ , а второе ( $s, \varepsilon, \mathbf{k}$ ) — числом  $\nu$ . Тогда имеем следующий закон коммутативности между оператором  $F'$ , зависящим от  $N'$ , и знаковой функцией  $\lambda$ :

$$F'\lambda = \begin{cases} \lambda F' & \text{при } \nu' > \nu \\ -\lambda F' & \text{при } \nu' \leq \nu. \end{cases} \quad (23,23)$$

Здесь оператор  $F'$  действует на функцию от числа частиц.

Наконец, мы должны сделать выбор между двумя возможными решениями (23,13) и (23,14) для искомым амплитуд  $C$ .

Для того чтобы энергия частиц была положительной величиной, мы должны для состояний  $\epsilon = 1$  взять решение (23,13) а для состояний  $\epsilon = -1$  взять решение (23,14).

В связи с этим введём следующие обозначения:

$$\begin{aligned} C(s, 1, \mathbf{k}) &= C(s, \mathbf{k}) = C, \\ C^+(s, 1, \mathbf{k}) &= C^+(s, \mathbf{k}) = C^+, \\ C(-s, -1, -\mathbf{k}) &= \hat{C}^+(s, \mathbf{k}) = \hat{C}^+, \\ C^+(-s, -1, -\mathbf{k}) &= \hat{C}(s, \mathbf{k}) = \hat{C}, \end{aligned} \quad (23,24)$$

т. е. отнесём решения с отрицательной энергией к комплексно сопряжённому состоянию, обладающему противоположным импульсом и спином.

Попытаемся удовлетворить соотношениям (23,12), выбрав следующие значения для амплитуд  $C$  и  $\hat{C}$  (см. также решения (23,13) и (23,14)):

для  $\epsilon = 1$

$$\begin{aligned} C &= \sqrt{1 - \bar{N}} \lambda F = -F \lambda \sqrt{\bar{N}}, \\ C^+ &= F \lambda \sqrt{1 - \bar{N}} = -\sqrt{\bar{N}} \lambda F; \end{aligned} \quad (23,25)$$

для  $\epsilon = -1$

$$\begin{aligned} \hat{C} &= \sqrt{1 - \hat{N}} \lambda \hat{F}, \\ \hat{C}^+ &= \hat{F} \lambda \sqrt{1 - \hat{N}}, \end{aligned} \quad (23,26)$$

где угловой значок над амплитудами показывает, что у аргументов  $s, \mathbf{k}$  (при  $\epsilon = -1$ ) следует поставить знак минус.

Покажем, что решение (23,25) удовлетворяет перестановочным соотношениям (23,12). Для этого мы должны доказать существование следующих равенств:

$$C^+C + CC^+ = 1, \quad (23,27)$$

$$CC = 0, \quad (23,28)$$

$$C^+C + CC^+ = 0 \quad (23,29)$$

и т. д.

Принимая во внимание, что

$$F^2 = \lambda^2 = 1,$$

находим согласно равенству (23,25) следующие собственные значения для квадратичных комбинаций, составленных из амплитуд

$$\begin{aligned} C^+C &= N, \\ CC^+ &= 1 - N, \end{aligned}$$

откуда получаем соотношение (23,27)

$$C^+C + CC^+ = 1.$$

Далее имеем:

$$CC = -\sqrt{(1-N)N}.$$

Согласно равенству (23,28) это выражение должно обращаться в нуль. Отсюда следует, что в каждом квантовом состоянии может быть или нуль ( $N=0$ ) или одна ( $1-N=0$ ) частица. Таким образом, перестановочные соотношения (23,12) автоматически приводят к статистике Ферми-Дирака.

Наконец, определим левую часть равенства (23,29)

$$\begin{aligned} C'^+C + CC'^+ &= \\ &= \sqrt{N'}\lambda'F' \sqrt{1-N}\lambda F + \sqrt{1-N}\lambda F \sqrt{N'}\lambda'F'. \end{aligned}$$

Учтём, что все штрихованные величины коммутируют с нештрихованными, за исключением знаковой функции  $\lambda$ , закон коммутативности для которой с оператором  $F'$  определяется равенством (23,23).

Полагая для конкретности  $\nu' > \nu$  (случай  $\nu' = \nu$  был нами только что рассмотрен), имеем:

$$C'^+C + CC'^+ = \sqrt{N'(1-N)}(-\lambda'\lambda F'F + \lambda'\lambda FF') = 0.$$

Аналогичным путём легко показать, что

$$C'^+C^+ + C^+C'^+ = C'C + CC' = 0.$$

Таким образом, с помощью введения функции  $\lambda$  мы смогли удовлетворить требованию, чтобы амплитуды, отнесённые к различным квантовым состояниям, антикоммутировали между собою.

Для амплитуд  $\hat{C}(\varepsilon = -1)$  мы можем получить аналогичные формулы. В частности, для их квадратов мы находим:

$$\begin{aligned}\hat{C}^+\hat{C} &= \hat{N}, \\ \hat{C}\hat{C}^+ &= 1 - \hat{N}.\end{aligned}$$

г) **Физический смысл решений с положительной и отрицательной энергией.** С помощью последних равенств, а также соотношений (23,3), (23,4) (23,6) и (23,7), мы находим следующие значения для полной энергии, полного заряда, полного спина и полного импульса:

$$\begin{aligned}H &= \sum_{\mathbf{k}} cK\hbar (N(1, \mathbf{k}) + N(-1, \mathbf{k}) + \\ &\quad + \hat{N}(1, \mathbf{k}) + \hat{N}(-1, \mathbf{k}) - 2), \\ e_{\text{полн}} &= -e \sum_{\mathbf{k}} (N(1, \mathbf{k}) + N(-1, \mathbf{k}) - \\ &\quad - \hat{N}(1, \mathbf{k}) - \hat{N}(-1, \mathbf{k}) + 2), \\ S &= \sum_{\mathbf{k}} \frac{\hbar}{2} (N(1, \mathbf{k}) - N(-1, \mathbf{k}) + \\ &\quad + \hat{N}(1, \mathbf{k}) - \hat{N}(-1, \mathbf{k})), \\ \mathbf{G} &= \sum_{\mathbf{k}} \hbar\mathbf{k} (N(1, \mathbf{k}) + N(-1, \mathbf{k}) + \\ &\quad + \hat{N}(1, \mathbf{k}) + \hat{N}(-1, \mathbf{k})). \quad (23,30)\end{aligned}$$

Отсюда мы можем сделать следующее заключение: только решения, соответствующие статистике Ферми-Дирака, ведут к тому, что оба сорта частиц  $N$  и  $\hat{N}$  будут обладать положительной энергией. Знак заряда для обоих сортов частиц будет противоположным, т. е. если, например, частицы  $N$  соответствуют электронам, то частицы  $\hat{N}$  будут описывать позитроны (античастицы). Величина  $s = \pm 1$  характеризует спин частицы. Как у электрона, так и у позитрона возможны две ориентации спина. При введении обозначе-

ний (23,24) нам удалось добиться того, что аргументы  $s$  и  $\mathbf{k}$ , стоящие в скобках и характеризующие состояние частицы, совпадают с соответствующими полными значениями.

Так, например, частица  $\hat{N}(1, \mathbf{k})$  обладает положительной энергией  $c\hbar K$  и зарядом  $+e$ ; удвоенная проекция её спина на направление движения равна единице (в единицах  $\hbar$ ), а её импульс равен  $\hbar\mathbf{k}$ .

Заметим, что в случае полувекторных уравнений бесконечная нулевая энергия имеет отрицательное значение:

$$H_0 = \sum_{\mathbf{k}} c\hbar K (-2);$$

кроме того, появляется нулевой заряд<sup>1)</sup>

$$e_0 = -e \sum_{\mathbf{k}} 2;$$

нулевое же значение спина  $S_0$  и нулевое значение импульса  $G_0$  исчезают. Более подробно вопросы, связанные с энергией вакуума, мы разберём в гл. IV.

**д) Поляризационные свойства электронных волн.** Точно так же, как и в случае электромагнитного поля, поляризационные свойства полувекторного поля связаны с наличием спина у сопоставленных полю частиц, т. е. в рассматриваемом случае — электронов.

Для рассмотрения поляризационных свойств оставим решения лишь с положительной энергией

$$\psi = \frac{1}{L^{3/2}} \sum_{\mathbf{k}} \sum_{s=\pm 1} C(s) b(s) e^{-icKt + i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}},$$

<sup>1)</sup> Если с движением частиц мы сопоставим не электроны, а позитроны ( $e_+ = e$ ), то мы найдём, что полный нулевой заряд будет равняться положительной величине

$$e'_0 = e \sum_{\mathbf{k}} 2.$$

Поскольку теория должна быть симметричной относительно замены частиц на античастицы (см. также § 43), мы приходим к выводу, что нулевой заряд должен равняться нулю.



поскольку учёт позитронов не может изменить суть дела. Гамильтониан и проекция полного спина поля на направление вектора  $\mathbf{k}$  будут при этом иметь вид

$$H = \sum_k c\hbar K (C^*(1)C(1) + C^*(-1)C(-1)),$$

$$S = \frac{1}{2}\hbar \sum_k (C^*(1)C(1) - C^*(-1)C(-1)).$$

С помощью квантового уравнения движения (23,8) мы нашли следующие перестановочные соотношения для амплитуд  $C$ :

$$C^*(s)C'(s') + C'(s')C^*(s) = \delta_{ss'}\delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}, \quad (23,31)$$

где со штрихом взяты амплитуды, зависящие от волнового числа  $\mathbf{k}'$ . Отсюда была установлена связь между амплитудами и числом частиц:

$$C^*(s)C(s) = N_s, \quad C(s)C^*(s) = 1 - N_s.$$

Для состояний, в которых частицы отсутствуют ( $N_s = 0$ ), вычисления следует производить в предположении, что

$$C^*(s)C'(s') = 0, \quad C'(s')C^*(s) = \delta_{ss'}\delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}$$

Несколько сложнее обстоит дело при наличии в заданном состоянии одного электрона. Если проекция спина на направление движения равняется  $\frac{1}{2}$ , то мы должны положить

$$C^*(1)C(1) = 1, \quad C^*(-1)C(-1) = 0.$$

Точно так же можно написать перестановочные соотношения, когда проекция спина равна  $-\frac{1}{2}$ . Оба эти случая мы можем сопоставить с круговой поляризацией электромагнитных волн (см. § 14).

Заметим, что наряду с решением (23,31) существуют другие перестановочные соотношения, также удовлетворяющие квантовому уравнению движения:

$$C^*(s)C'(s') + C'(s')C^*(s) = \frac{1}{2}\delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}e^{i(\varphi_s - \varphi_{s'})}, \quad (23,32)$$

где  $\varphi = \varphi_s - \varphi_{s'}$  является некоторой фазой, которая для одинаковых спиновых состояний ( $s = s'$ ) обращается в нуль.

Последние равенства ведут к следующим соотношениям между амплитудами и числом частиц:

$$C^+(1)C(1) = C^+(-1)C(-1) = \frac{1}{2}(N_1 + N_{-1}),$$

$$C^+(1)C(-1) = \frac{1}{2}(N_1 + N_{-1})e^{i\varphi}.$$

В частности, при наличии одной частицы ( $N_1 + N_{-1} = 1$ ) имеем:

$$C^+(1)C(1) = C^+(-1)C(-1) = \frac{1}{2}, \quad (23,32a)$$

$$C^+(1)C(-1) = \frac{1}{2}e^{i\varphi}.$$

В этом случае оба состояния круговой поляризации равновероятны (полная проекция спина на направление движения равна нулю  $s = 0$ ), и поэтому последнее равенство эквивалентно линейной поляризации (спин сопоставленных полю частиц направлен перпендикулярно к движению).

Вообще говоря, фаза  $\varphi$  изменяется в пределах от 0 до  $2\pi$ . Поэтому для неполяризованных волн, когда все значения фазы равновероятны, имеем:

$$C^+(1)C(-1) = 0,$$

$$C^+(1)C(1) = C^+(-1)C(-1) = \frac{1}{2}, \quad (23,32 б)$$

т. е. произведения амплитуд смешанных состояний обращаются в нуль.

Поляризационные эффекты пучка электронов могут быть обнаружены в опытах с двухкратным рассеянием. В самом деле, в результате однократного рассеяния неполяризованный первичный пучок электронов (с полной аналогией со световыми явлениями) становится частично поляризованным. Благодаря этому при вторичном рас-

сеянии интенсивность должна зависеть не только от угла рассеяния, но также и от степени поляризации <sup>1)</sup>.

е) **Функция от числа частиц.** В качестве функции от числа частиц выберем выражение (8,15), которое в нашем случае принимает вид <sup>2)</sup>

$$f(N) = \prod_{s',k'} \delta_{N_{k's'} N_{k's'}^0} \prod_{s',k'} \delta_{\hat{N}_{k's'} \hat{N}_{k's'}^0}, \quad (23,33)$$

где  $N_{k's'}^0$  — число частиц в состоянии  $k's'$  до действия на эту функцию операторов. В случае статистики Ферми величина  $N_{k's'}^0$  может принимать два значения:  $N_{k's'}^0 = 0$ , если в начальный момент частица в состоянии  $k's'$  отсутствует, и  $N_{k's'}^0 = 1$ , если в начальный момент в состоянии  $k's'$  имеется одна частица.

<sup>1)</sup> Н. Мотт и Г. Месси, Теория атомных столкновений. М., 1951, стр. 99, см. также А. А. Соколов, Journal of Physics USSR 9, 363 (1945). Слабые поляризационные эффекты наблюдались также экспериментально (см., например, C. G. Shull, Phys. Rev. 61, 198 (1942)).

<sup>2)</sup> В случае статистики Ферми-Дирака функция от числа частиц  $\delta_{NN^0}$  представляет собою двухрядную единичную матрицу ( $N.N^0 = 0, 1$ ):

$$\left( \delta_{NN^0} \right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Амплитуды, характеризующие соответственно появление  $C^+$  и поглощение  $C$ -частицы, могут быть записаны тогда также в виде двухрядных матриц:

$$C^+ = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

откуда следует

$$C^+C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad CC^+ = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

т. е. амплитуды  $C$  и  $C^+$  удовлетворяют перестановочным соотношениям статистики Ферми:

$$C^+C + CC^+ = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Подействуем теперь операторами  $C$  и  $C^+$  на функцию от числа частиц (23,33). Опуская знаковую функцию  $\lambda$ , имеем:

$$\begin{aligned} C\delta_{NN^0} &= \sqrt{1-N}\delta_{1-N, N^0}, \\ C^+\delta_{NN^0} &= \sqrt{N}\delta_{1-N, N^0}, \end{aligned} \quad (23,34)$$

причём амплитуды  $C$ , а также  $N$  и  $N^0$  зависят от квантового состояния  $\mathbf{k}$ ,  $s$ .

Полагая, что в начальном состоянии частиц нет ( $N^0=0$ ), мы находим следующие правила действия операторов  $C$  и  $C^+$ :

$$C\delta_{N^0} = 0, \quad C^+\delta_{N^0} = 1. \quad (23,35)$$

Аналогично при наличии в начальный момент одной частицы ( $N^0=1$ ) имеем:

$$\begin{aligned} C\delta_{N^1} &= 1, \\ C^+\delta_{N^1} &= 0. \end{aligned} \quad (23,36)$$

Отсюда видно, что действие амплитуды  $C^+$  приводит к появлению частицы (оператор появления), а амплитуды  $C$  — к её поглощению (оператор поглощения).

**ж) Перестановочные соотношения для квантованных волновых функций.** Найдём перестановочные соотношения между квантованными волновыми функциями  $\psi_p(\mathbf{r}, t)$  и  $\psi_p^+(\mathbf{r}', t')$ .

Согласно равенству (20,33) волновые функции мы можем записать в виде:

$$\begin{aligned} \psi_p^+(\mathbf{r}', t') &= \\ &= \frac{1}{L^{3/2}} \sum_{s', \varepsilon', \mathbf{k}'} C^+(s', \varepsilon', \mathbf{k}') b_p^+(s', \varepsilon', \mathbf{k}') e^{ic\varepsilon' \mathbf{K}' t' - i\mathbf{k}' \mathbf{r}'}, \\ \psi_p(\mathbf{r}, t) &= \\ &= \frac{1}{L^{3/2}} \sum_{s, \varepsilon, \mathbf{k}} C(s, \varepsilon, \mathbf{k}) b_p(s, \varepsilon, \mathbf{k}) e^{-ic\varepsilon \mathbf{K} t + i\mathbf{k} \mathbf{r}}, \end{aligned} \quad (23,37)$$

откуда находим:

$$\begin{aligned} [\psi_p^+(\mathbf{r}', t'), \psi_p(\mathbf{r}, t)]_+ &= \\ &= \frac{1}{L^3} \sum_{s, \varepsilon, \mathbf{k}} \sum_{s', \varepsilon', \mathbf{k}'} [C^+(s', \varepsilon', \mathbf{k}'), C(s, \varepsilon, \mathbf{k})]_+ \times \\ &\times b_p^+(s', \varepsilon', \mathbf{k}') b_p(s, \varepsilon, \mathbf{k}) e^{-ic(\varepsilon \mathbf{K} t - \varepsilon' \mathbf{K}' t') + i(\mathbf{k} \mathbf{r} - \mathbf{k}' \mathbf{r}')}. \end{aligned} \quad (23,38)$$

Принимая во внимание перестановочные соотношения для амплитуд

$$[C^+(s', \varepsilon', \mathbf{k}'), C(s, \varepsilon, \mathbf{k})]_+ = \delta_{ss'} \delta_{\varepsilon\varepsilon'} \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}, \quad (23,39)$$

находим после суммирования по величинам  $s'$ ,  $\varepsilon'$ ,  $\mathbf{k}'$ :

$$[\psi_{\rho'}^+(r', t'), \psi_{\rho}(r, t)]_+ = \frac{1}{L^3} \sum_{\varepsilon, \mathbf{k}} b_{\rho'\rho} e^{-ic\varepsilon K(t-t') + i\mathbf{k}(r-r')}, \quad (23,40)$$

причём здесь введено обозначение

$$b_{\rho'\rho} = \sum_s b_{\rho'}^+(s, \varepsilon, \mathbf{k}) b_{\rho}(s, \varepsilon, \mathbf{k}). \quad (23,41)$$

Эту сумму можно представить в виде:

$$\begin{aligned} b_{\rho'\rho} &= \sum_{s, \varepsilon'} b_{\rho'}^+(s, \varepsilon', \mathbf{k}) \left( \frac{K + \varepsilon(\boldsymbol{\alpha}\mathbf{k}) + \varepsilon\rho_3 k_0}{2K} \right) b_{\rho}(s, \varepsilon', \mathbf{k}) = \\ &= \frac{\varepsilon K + (\boldsymbol{\alpha}\mathbf{k}) + \rho_3 k_0}{2K\varepsilon} \sum_{s, \varepsilon'} b_{\rho'}^+(s, \varepsilon', \mathbf{k}) b_{\rho}(s, \varepsilon', \mathbf{k}). \end{aligned}$$

причём матрицы  $\boldsymbol{\alpha}$  и  $\rho_3$  действуют только на значки  $\rho$  (а не  $\rho'$ ) по закону:

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_4 \\ b_3 \\ b_2 \\ b_1 \end{pmatrix},$$

т. е.  $\alpha_1 b_1 = b_4$ ; аналогично  $\alpha_2 b_1 = -ib_4$  и т. д.

Согласно (21,6) имеем:

$$\sum_{s, \varepsilon'} b_{\rho'}^+(s, \varepsilon', \mathbf{k}) b_{\rho}(s, \varepsilon', \mathbf{k}) = \delta_{\rho\rho'},$$

откуда для искоемых перестановочных соотношений (23,40) получаем:

$$\begin{aligned} [\psi_{\rho'}^+(r', t'), \psi_{\rho}(r, t)]_+ &= - \left( \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} - (\boldsymbol{\alpha}\nabla) - i\rho_3 k_0 \right) \times \\ &\times \frac{1}{L^3} \sum_{\mathbf{k}} \frac{e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{R}}}{K} \left( \frac{-e^{icKT} + e^{-icKT}}{2i} \right) \delta_{\rho\rho'}, \end{aligned}$$

где  $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$ ,  $T = t - t'$ .

Учитывая, что перестановочная  $D(\mathbf{R}, T)$ -функция имеет вид [см. формулу (9,5)]

$$D(\mathbf{R}, T) = \frac{1}{L^3} \sum_{\mathbf{k}} \frac{e^{i\mathbf{k}\mathbf{R}}}{K} \sin cKT = \frac{1}{8\pi^3} \int e^{i\mathbf{k}\mathbf{R}} \frac{\sin cKT}{K} d^3k,$$

находим окончательно:

$$[\psi_p^+(\mathbf{r}', t') \psi_p(\mathbf{r}, t)]_+ = i \left( \frac{1}{ic} \frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{i} (\boldsymbol{\alpha}\nabla) - \rho_3 k_0 \right) D(\mathbf{R}, T) \delta_{\mathbf{r}\mathbf{r}'}. \quad (23,42)$$

Появление множителя

$$\frac{\hat{D}}{c\hbar} = \left( \frac{1}{ic} \frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{i} (\boldsymbol{\alpha}\nabla) - \rho_3 k_0 \right)$$

в правой части равенства (23,42) связано с тем обстоятельством, что волновая функция  $\psi_p$  должна подчиняться полувекторному уравнению Дирака, в то время как функция  $D(\mathbf{R}, T)$  подчиняется скалярному уравнению. В самом деле, действуя слева на равенство (23,42) оператором Дирака  $D$

$$\frac{D}{c\hbar} = -\frac{1}{ic} \frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{i} (\boldsymbol{\alpha}\nabla) - \rho_3 k_0$$

и принимая во внимание, что

$$\frac{D\hat{D}}{c^2\hbar^2} = -(\square - k_0^2),$$

получим, что как левая, так и правая части равенства обращаются в нуль в силу соотношений

$$\begin{aligned} D\psi_p &= 0, \\ (\square - k_0) D(\mathbf{R}, T) &= 0. \end{aligned}$$

## ГЛАВА II

### КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ И ИЗЛУЧЕНИЯ

#### § 24. Взаимодействие между заряженными частицами и электромагнитным полем

В предыдущей главе мы показали, что при исследовании свободного поля нам достаточно было определить функцию Лагранжа, которая должна представлять собою инвариант. Далее с помощью разработанного математического формализма мы могли автоматически получить все основные величины, характеризующие поле (волновое уравнение, тензор энергии, тензор момента количества движения и т. д.), а также произвести квантование поля.

Попробуем использовать этот же метод при построении теории двух взаимодействующих полей, а именно: поля полувекторных частиц (электронов) и электромагнитного поля.

**а) Лагранжиан.** Функция Лагранжа должна состоять из трёх частей:

$$L = L_1 + L_2 + L', \quad (24,1)$$

где  $L_1$  является лагранжианом первого поля,  $L_2$  — второго поля, а  $L'$  является смешанным лагранжианом (пропорциональным энергии взаимодействия), который обуславливает связь между полями.

Смешанная часть лагранжиана  $L'$ , так же как и лагранжиан свободного поля, должна представлять собою инвариант, образованный в простейшем случае в виде суммы скалярных произведений: скаляра первого поля

на скаляр второго, вектора первого поля на вектор второго, тензора на тензор и т. д.

В частности, при взаимодействии полуторных частиц (электронов, нуклеонов и т. д.) с электромагнитным полем лагранжиан полуторных частиц имеет вид [см. формулу (22,8)]:

$$L_1 = -\hbar c \left( \frac{1}{2i} \psi^\dagger \alpha_\mu \psi_\mu - \frac{1}{2i} \psi_\mu^\dagger \alpha_\mu \psi + k_0 \psi^\dagger \rho_3 \psi \right), \quad (24,2)$$

а лагранжиан электромагнитного поля [см. формулу (16,3)]

$$L_2 = -\frac{1}{16\pi} H_{\mu\nu} H_{\mu\nu} - \frac{1}{8\pi} \Phi_{\mu,\mu} \Phi_{\nu,\nu}. \quad (24,3)$$

Лагранжиан взаимодействия может быть составлен как сумма произведений вектора частиц со спином половина  $e_- \psi^\dagger \alpha_\mu \psi$  на вектор электромагнитного поля  $\Phi_\mu$  ( $\Phi$ ,  $\Phi$ ) и тензора частиц со спином половина  $\mu \psi^\dagger \alpha_{\mu\nu} \psi$  на тензор электромагнитного поля  $H_{\mu\nu}$ :

$$L' = -e \psi^\dagger \alpha_\mu \Phi_\mu \psi + \frac{1}{2} \mu \psi^\dagger \alpha_{\mu\nu} H_{\mu\nu} \psi, \quad (24,4)$$

где

$$H_{\mu\nu} = \Phi_{\nu,\mu} - \Phi_{\mu,\nu}.$$

Член, соответствующий произведению скаляра полуторных частиц  $\psi^\dagger \rho_3 \psi$  на скаляр поля, мы можем не учитывать, поскольку скаляр электромагнитного поля  $\Phi_{\mu,\mu}$  в окончательном результате обращается в нуль.

С помощью формул (12,2), (12,3) и (19,8) лагранжиан взаимодействия (24,4) можно представить в виде

$$L' = -e_- \psi^\dagger (\Phi - (\boldsymbol{\alpha}\Phi)) \psi + \mu \psi^\dagger [\rho_3 (\boldsymbol{\sigma}\mathbf{H}) + \rho_2 (\boldsymbol{\sigma}\mathbf{E})] \psi. \quad (24,5)$$

Величина  $e_- = -e$  есть заряд электрона, а  $\mu$  — возможный его собственный магнитный момент.

Как было показано в § 17, электроны в нерелятивистском приближении обладают кинематическим магнитным моментом, равным по абсолютной величине магнетону Бора  $\mu_0$ , точнее

$$\mu_e = -\mu_0 = -\frac{eh}{2mc},$$



который в релятивистском приближении исчезает. Поэтому в общем случае при лагранжиане взаимодействия (24,5) заряженные частицы в нерелятивистском приближении могут иметь два магнитных момента: кинематический  $\mu_0$  и собственный  $\mu$ .

В частности, для электронов собственный момент равен нулю ( $\mu = 0$ )<sup>1</sup>), и поэтому лагранжиан взаимодействия принимает вид:

$$L' = -e\psi^+ \alpha_\mu \Phi_\mu \psi = e\psi^+ (\Phi - (\boldsymbol{\alpha}\Phi)) \psi. \quad (24,6)$$

Магнитный момент протона равен  $\mu_p = 2,7925 \mu_N$  ( $\mu_N = \frac{1}{1836,14} \mu_0$  — ядерный магнетон), таким образом, протон наряду с кинематическим магнитным моментом, связанным с наличием заряда  $e$ , обладает ещё собственным моментом, равным  $\mu'_p = 1,7925 \mu_N$ . Наконец, у нейтрона заряд  $e_n$  равен нулю. Однако его собственный магнитный момент отличен от нуля и равен  $\mu_n = -1,9128 \mu_N$ <sup>2</sup>).

Суммарный лагранжиан электронов и электромагнитного поля имеет вид:

$$L = -hc \left( \frac{1}{2i} \psi^+ \alpha_\mu \psi_{,\mu} - \frac{1}{2i} \psi_{,\mu}^+ \alpha_\mu \psi + k_0 \psi^+ \rho_3 \psi \right) - \\ - \frac{1}{16\pi} H_{\mu\nu} H_{\mu\nu} - \frac{1}{8\pi} \Phi_{\mu,\nu} \Phi_{\nu,\mu} - e\psi^+ \alpha_\mu \Phi_\mu \psi. \quad (24,7)$$

<sup>1</sup>) Взаимодействие электрона с электронно-позитронным вакуумом приводит к появлению у электрона (наряду с кинематическим) ещё дополнительного магнитного момента, который по порядку величины равен  $-\frac{\alpha}{2\pi} \mu_0$ ,  $\left( \alpha = \frac{1}{137,04} \right)$ . Однако в § 43 будет показано, что этот дополнительный магнитный момент вовсе не следует вводить в первоначальный лагранжиан взаимодействия (24,5), поскольку он автоматически (так же, как и кинематический момент) появляется в нерелятивистском приближении при учёте влияния электронно-позитронного вакуума.

<sup>2</sup>) Природа дополнительного магнитного момента протона и магнитного момента нейтрона является ещё не выясненной. По всей вероятности их возникновение связано с взаимодействием нуклонов с мезонным полем.

Варьируя лагранжиан  $L$  по функциям  $\psi^+$

$$\frac{\delta L}{\delta \psi^+} = \frac{\partial L}{\partial \psi^+} - \frac{\partial}{\partial x_\mu} \frac{\partial L}{\partial \psi_\mu^+},$$

получаем уравнение, описывающее движение заряженных частиц в электромагнитном поле:

$$-\hbar c \left( \frac{1}{i} \alpha_\mu \psi_\mu + k_0 \rho_3 \psi \right) - e \alpha_\mu \Phi_\mu \psi = 0, \quad (24,8)$$

которое в трёхмерных обозначениях принимает вид:

$$\left( -\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial t} + e\Phi - \frac{c\hbar}{i} (\boldsymbol{\alpha}\nabla) - e(\boldsymbol{\alpha}\Phi) - \rho_3 mc^2 \right) \psi = 0, \quad (24,9)$$

совпадающий с видом уравнения (17,16).

Варьируя уравнение (24,7) по функции  $\psi$ , мы получим уравнение для комплексно сопряжённой функции  $\psi^+$ .

Для того чтобы получить дифференциальное уравнение для потенциалов, мы должны проварьировать лагранжиан по потенциалам

$$\frac{\delta L}{\delta \Phi_\mu} = \frac{\partial L}{\partial \Phi_\mu} - \frac{\partial}{\partial x_\nu} \frac{\partial L}{\partial \Phi_{\mu,\nu}}.$$

Принимая во внимание соотношения

$$\frac{\partial L}{\partial \Phi_\lambda} = -e\psi^+ \alpha_\lambda \psi, \quad \frac{\partial L}{\partial \Phi_{\lambda,\nu}} = \frac{1}{4\pi} (\Phi_{\nu,\lambda} - \Phi_{\lambda,\nu}) - \frac{1}{4\pi} \delta_{\lambda\nu} \Phi_{\lambda,\lambda}, \quad (24,10)$$

находим известное уравнение для потенциалов в присутствии зарядов:

$$\square \Phi_\mu = 4\pi e \psi^+ \alpha_\mu \psi \quad (24,11)$$

или в трёхмерных обозначениях:

$$\begin{aligned} \square \Phi &= 4\pi e \psi^+ \psi, \\ \square \mathbf{\Phi} &= 4\pi e \psi^+ \boldsymbol{\alpha} \psi. \end{aligned} \quad (24,12)$$

**б) Тензор энергии.** Для тензора энергии находим следующее выражение:

$$T_{\mu\nu} = \Phi_{\lambda,\mu} \frac{\partial L}{\partial \Phi_{\lambda,\nu}} + \psi_\mu^+ \frac{\partial L}{\partial \psi_\nu^+} + \frac{\partial L}{\partial \psi_\nu} \psi_\mu - L \delta_{\mu\nu}.$$

Поскольку лагранжиан взаимодействия  $L'$  не зависит от функций  $\Phi_{\lambda, \nu}$ ,  $\psi_{\nu}^+$  и  $\psi_{\nu}$ , произведение функций от различных полей появляется лишь в последнем члене. Поэтому для тензора энергии мы будем иметь выражение

$$T_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}^1 + T_{\mu\nu}^2 + \delta_{\mu\nu} e\psi^+ \alpha_{\lambda} \Phi_{\lambda} \psi, \quad (24,13)$$

где  $T_{\mu\nu}^1$  — компоненты тензора энергии полуторных частиц [см. формулу (22,12)] и  $T_{\mu\nu}^2$  — компоненты тензора энергии электромагнитного поля [см. формулу (16,8)].

Отсюда находим следующее выражение для плотности энергии:

$$T_{44} = -\frac{\hbar c}{2i} \left( \psi^+ \frac{\partial \psi}{c \partial t} - \frac{\partial \psi^+}{c \partial t} \psi \right) + \frac{1}{8\pi} \left[ (\text{rot } \Phi)^2 + (\text{div } \Phi)^2 + \right. \\ \left. + \frac{1}{c^2} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right)^2 - (\text{grad } \Phi)^2 - \frac{1}{c^2} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right)^2 \right] - e\psi^+ (\Phi - (\alpha \Phi)) \psi. \quad (24,14)$$

Следовательно, полная энергия обоих полей равна

$$H = \int T_{44} d^3x. \quad (24,15)$$

**в) Квантование смешанного поля.** Квантование смешанного поля (электроны плюс электромагнитное поле) мы можем произвести для следующих двух случаев: 1) поле электронов является не квантованным, а электромагнитное поле — квантованным, 2) оба поля являются квантованными.

Первый случай имеет место, когда можно пренебречь как возможностью появления пар, так и влиянием вакуумных членов.

Как известно, переход от классического поля к квантованному сводится к замене классических скобок Пуассона квантовыми. В частности, квантовое уравнение движения имеет вид [см. формулу (7,5)]:

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{i}{\hbar} (HF - FH), \quad (24,16)$$

где  $H$  является оператором Гамильтона.

Покажем, что перестановочные соотношения, найденные нами для волновых функций свободных полей, остаются без изменения также для случая смешанных полей.

Для этой цели мы должны показать, что квантовое уравнение движения (24,16) при подстановке туда функции Гамильтона (24,15) ведёт к уравнениям поля (24,8) и (24,12).

Докажем это прежде всего для скалярного потенциала  $\Phi$ .

Как видно из формулы (16,19), четырёхмерные перестановочные соотношения для скалярного потенциала имеют вид:

$$[\Phi(\mathbf{r}, t), \Phi(\mathbf{r}', t')]_- = -\frac{4\pi c \hbar}{i} \Delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t'), \quad (24,17)$$

где

$$\Delta(\mathbf{R}, T) = \frac{1}{8\pi^3} \int e^{i\mathbf{x}\mathbf{R}} \frac{\sin c\mathbf{x}T}{x} d^3x.$$

При переходе к трёхмерным перестановочным соотношениям ( $t = t'$ ) мы должны учесть равенства

$$\begin{aligned} \lim_{T \rightarrow 0} \Delta(\mathbf{R}, T) &= 0; & \lim_{T \rightarrow 0} \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial T^2} \Delta(\mathbf{R}, T) &= 0, \\ \lim_{T \rightarrow 0} \frac{\partial \Delta(\mathbf{R}, T)}{c \partial T} &= \delta(\mathbf{R}). \end{aligned} \quad (24,18)$$

Тогда находим следующие перестановочные соотношения для скалярного потенциала:

$$\begin{aligned} [\Phi, \Phi']_- &= [\Phi_t, \Phi'_t]_- = 0, \\ [\Phi_t, \Phi']_- &= -\frac{4\pi c^2 \hbar}{i} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \\ [\Phi_t, \nabla' \Phi']_- &= -\frac{4\pi c^2 \hbar}{i} \nabla' \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \end{aligned} \quad (24,19)$$

где

$$\begin{aligned} \nabla' &= \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x'} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y'} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z'}, \\ \Phi &= \Phi(\mathbf{r}, t); \quad \Phi' = \Phi(\mathbf{r}', t), \quad \Phi_t = \frac{\partial \Phi(\mathbf{r}, t)}{\partial t}. \end{aligned}$$

Последние квантовые скобки Пуассона (трёхмерные) составлены из двух волновых функций, которые могут относиться к различным пространственным координатам, но содержат одно и то же значение времени  $t$ .

Волновые функции и их производные следует теперь рассматривать в качестве операторов, действующих на функцию от числа частиц, сопоставленных полю, что было подробно рассмотрено нами в предыдущей главе. Оставляя в гамильтониане члены, зависящие лишь от скалярного потенциала, поскольку с остальными функциями потенциал  $\Phi$  коммутирует, получаем:

$$H' = -\frac{1}{8\pi} \int \left( (\nabla' \Phi')^2 + \frac{1}{c^2} \Phi'_i \Phi'_i + 8\pi e \psi'^+ \psi' \Phi' \right) d^3x', \quad (24,20)$$

откуда с помощью квантового уравнения движения (24,16) находим:

$$\begin{aligned} \frac{1}{c^2} \Phi_{tt} = & -\frac{i}{8\pi\hbar c^2} \int \left\{ \nabla' \Phi' [\nabla' \Phi', \Phi_t]_- + [\nabla' \Phi', \Phi_t]_- \nabla' \Phi' + \right. \\ & + \frac{1}{c^2} \Phi'_i [\Phi'_i, \Phi_t]_- + \frac{1}{c^2} [\Phi'_i, \Phi_t]_- \Phi'_i + \\ & \left. + 8\pi e \psi'^+ \psi' [\Phi', \Phi_t]_- \right\} d^3x'. \end{aligned}$$

Далее, принимая во внимание перестановочные соотношения (24,19) и учитывая правила интегрирования при наличии под интегралом  $\delta$ -функции и её производной, находим:

$$\frac{1}{c^2} \Phi_{tt} = \nabla^2 \Phi - 4\pi e \psi^+ \psi,$$

т. е. потенциал  $\Phi$  удовлетворяет уравнению Даламбера (24,12)

$$\square \Phi = 4\pi e \psi^+ \psi. \quad (24,21)$$

Аналогичным способом легко показать, что с помощью перестановочных соотношений (16,19) получаем дифференциальное уравнение (24,12) для вектор-потенциала, а с помощью перестановочных соотношений для волновых функций  $\psi^+$  и  $\psi$  [см. формулы (23,42)] получим волновое уравнение для полувекторных частиц (24,9). Таким образом, перестановочные соотношения для волновых функций, найденные для свободного поля, сохраняют также свою силу при учёте взаимодействия между полями.

Общее решение уравнения (24,21) мы можем представить в виде суммы решений для свободного электро-

магнитного поля и для поля, создаваемого зарядами, т. е.

$$\Phi = \frac{1}{L^{3/2}} \sum_{\mathbf{x}} \sqrt{\frac{2\pi c \hbar}{x}} (q e^{-i c x t + i x r} + q^+ e^{i c x t - i x r}) + \\ + 4\pi e \square^{-1} \psi^+ \psi, \quad (24,22)$$

где  $\square^{-1}$  — оператор, обратный оператору Даламбера, — соответствует известному интегральному выражению, определяющему решение уравнения Даламбера.

Умножая последнее выражение на  $\frac{1}{L^{3/2}} e^{-i x' r}$  и интегрируя по всему объёму, получаем:

$$q(\mathbf{x}') e^{-i c x' t} + q^+(-\mathbf{x}') e^{i c x' t} = \quad (24,23) \\ = \sqrt{\frac{x'}{2\pi c \hbar}} \frac{1}{L^{3/2}} \int (\Phi - 4\pi e \square^{-1} \psi^+ \psi) e^{-i x' r} d^3 x.$$

Дифференцируя последнее выражение по времени  $t$ , мы найдём второе уравнение для определения амплитуды  $q^+$  и  $q$ . Из этих уравнений легко найти:

$$q(\mathbf{x}) = \frac{1}{L^{3/2}} e^{i c x t} \sqrt{\frac{x}{8\pi c \hbar}} \int \left\{ \left[ \Phi + \frac{i}{c x} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right] - \right. \\ \left. - 4\pi e \square^{-1} \left( 1 + \frac{i}{c x} \frac{\partial}{\partial t} \right) \psi^+ \psi \right\} e^{-i x r} d^3 x, \\ q^+(\mathbf{x}) = \frac{1}{L^{3/2}} e^{-i c x t} \sqrt{\frac{x}{8\pi c \hbar}} \int \left\{ \left[ \Phi - \frac{i}{c x} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right] + \right. \\ \left. + 4\pi e \square^{-1} \left( 1 - \frac{i}{c x} \frac{\partial}{\partial t} \right) \psi^+ \psi \right\} e^{i x r} d^3 x.$$

Если волновые функции  $\psi$  и  $\psi^+$  являются некантованными функциями, т. е. они коммутируют между собою, то с помощью (24,19) находим перестановочные соотношения для амплитуд:

$$[q, q'^+]_- = -\delta_{\mathbf{x}\mathbf{x}'}. \quad (24,24)$$

Аналогичным способом мы можем найти перестановочные соотношения для амплитуд вектор-потенциала:

$$[q_s, q_{s'}^+]_- = \delta_{\mathbf{x}\mathbf{x}'} \delta_{ss'}, \quad (24,25)$$

т. е. в случае некантованного поля электронов перестановочные соотношения для амплитуд потенциалов также сохраняют свою силу [см. формулу (16,18)].

Когда уравнения для электронов и позитронов являются кантованными, то к перестановочным соотношениям для амплитуд поля фотонов следует добавить члены, учитывающие влияние электронно-позитронного поля (более подробно см. гл. IV).

## § 25. Исключение продольных составляющих. Закон Кулона

Для того чтобы исследовать уравнение Дирака (некантованное), описывающее движение нескольких электронов, взаимодействующих лишь с кантованным электромагнитным полем, мы должны для каждого электрона ввести свои пространственные координаты (или радиус-вектор  $\mathbf{r}_s$ ). Вместе с тем, чтобы сохранить релятивистскую инвариантность теории, необходимо придать ей такую формулировку, в которой каждой частице приписывается ещё и своё собственное время  $t_s$ . Кроме того, мы должны задать пространственно-временные координаты  $\mathbf{r}, t$  поля. Таким образом, некантованное уравнение Дирака, описывающее движение  $\nu$ -электронов (заряд  $e_- = -e$ ) в электромагнитном поле должно иметь вид:

$$D\psi = \sum_{s=1}^{\nu} \left( -\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial t_s} + e\Phi(s) - \frac{c\hbar}{i} (\boldsymbol{\alpha}_s \nabla_s) - e (\boldsymbol{\alpha}_s \Phi(s)) - \rho_{3s} mc^2 \right) \psi = 0, \quad (25,1)$$

где

$$\nabla_s = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x_s} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y_s} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z_s}; \quad \Phi(s) = \Phi(\mathbf{r}_s, t_s);$$

$$\Phi(s) = \Phi(\mathbf{r}_s, t_s); \quad \Phi = \Phi(\mathbf{r}, t); \quad \Phi = \Phi(\mathbf{r}, t).$$

Матрицы  $\alpha_s, \rho_{3s}$  действуют на спинорные функции частицы с индексом  $s$ ; кроме того, в точке взаимодействия заряда с полем мы приписываем полю координаты и время заряда.

Рассматривая электромагнитное поле квантованным, мы должны включить в волновую функцию  $\psi$  не только пространственные  $(\mathbf{r}_s, t_s)$  и спинорные координаты всех электронов, но также функцию от числа частиц электромагнитного поля, которая при отсутствии фотонов имеет вид:

$$f(N) = \prod_{\mathbf{x}} \delta_{N_{\mathbf{x}}0}.$$

Согласно (16,19) потенциалы удовлетворяют следующим перестановочным соотношениям:

$$\begin{aligned} [\Phi, \Phi(s)]_- &= -\frac{4\pi c \hbar}{i} \Delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_s, t - t_s), \\ [\Phi_n, \Phi_n(s)]_- &= \frac{4\pi c \hbar}{i} \delta_{nn'} \Delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_s, t - t_s), \\ [\Phi, \Phi_n(s)]_- &= 0, \end{aligned} \quad (25,2)$$

где перестановочная  $\Delta$ -функция равна

$$\Delta(\mathbf{R}, T) = \frac{1}{8\pi^3} \int e^{i\mathbf{x}\cdot\mathbf{R}} \frac{\sin c\mathbf{x}T}{x} d^3\mathbf{x}. \quad (25,3)$$

Заметим, что при наличии перестановочных соотношений (25,2) на потенциалы не может быть наложено дополнительное условия Лорентца  $L=0$ , где

$$L = \frac{1}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \operatorname{div} \Phi, \quad (25,4)$$

поскольку оператор  $L$  не коммутирует с оператором Дирака  $D$  (см. ниже).

Следуя Ферми<sup>1)</sup>, мы можем наложить на оператор  $L$  условие, менее сильное, чем условие Лорентца:

$$F\psi = \left( \frac{1}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \operatorname{div} \Phi - 4\pi \sum_{s=1}^{\nu} e \Delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_s, t - t_s) \right) \psi = 0, \quad (25,5)$$

<sup>1)</sup> E. Fermi, Rev. of Mod. Phys. 4, 98 (1932); см. также В. А. Фок, Sov. Phys. 6, 425 (1934).



Здесь необходимо заметить, что при введении всякого дополнительного условия следует проверить, не является ли оно слишком жёстким, т. е. таким, при котором система уравнений не будет совместной. Как известно из квантовой теории, уравнения  $U\psi = 0$ ,  $V\psi = 0$  могут иметь общее решение только в том случае, когда операторы  $U$  и  $V$  коммутируют между собой, т. е.  $UV = VU$ . Оператор  $F$  подобран таким образом, что он коммутирует с оператором Дирака  $D$ . В самом деле,

$$\begin{aligned} \left[ D, \frac{1}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \operatorname{div} \Phi \right]_- &= \\ &= \left[ \sum_{s=1}^{\nu} (e\Phi(s) - e(\alpha_s \Phi(s))), \left( \frac{1}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \operatorname{div} \Phi \right) \right]_- = \\ &= \frac{4\pi c \hbar}{i} \sum_{s=1}^{\nu} e \left( \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} + (\alpha_s \nabla) \right) \Delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_s, t - t_s). \end{aligned}$$

Точно так же легко показать, что

$$\begin{aligned} \left[ D, \sum_{s'=1}^{\nu} \Delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{s'}, t - t_{s'}) \right]_- &= \left[ \sum_{s=1}^{\nu} \left( -\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial t_s} - \frac{c\hbar}{i} (\alpha_s \nabla_s) \right) \right. \\ \left. \sum_{s'=1}^{\nu} \Delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{s'}, t - t_{s'}) \right]_- &= \frac{c\hbar}{i} \sum_{s=1}^{\nu} \left( \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} + (\alpha_s \nabla) \right) \Delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_s, t - t_s). \end{aligned}$$

Отсюда следует, что оператор

$$F = \frac{1}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \operatorname{div} \Phi - 4\pi e \sum_{s=1}^{\nu} \Delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_s, t - t_s) \quad (25,6)$$

коммутирует с оператором  $D$  и дополнительное уравнение (25,5) совместимо с основным уравнением (25,1).

Заметим, что волновая функция  $\psi$  не зависит от координат поля  $\mathbf{r}$ ,  $t$ , и поэтому в уравнении (25,5) координаты  $\mathbf{r}$  и  $t$  следует рассматривать как параметры, благодаря чему соотношение (25,5) должно иметь место как для потенциалов, так и для их амплитуд Фурье.

Четырёхмерные потенциалы мы можем разбить на поперечные  $\mathbf{A}$  и продольные составляющие  $\Phi$  и  $\Phi_0$ :

$$\mathbf{A} = \Phi - \frac{\nabla(\nabla\Phi)}{\nabla^2} = \Phi + \frac{\nabla\Phi_0}{\left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}\right)}, \quad (25,7)$$

$$\Phi = \Phi, \quad \Phi_0 = -\frac{(\nabla\Phi)}{\left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}\right)}.$$

Представляя потенциалы в виде разложения в ряд Фурье, мы можем деление на оператор  $\left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}\right)$  определить следующим образом:

$$\frac{e^{-icx}}{\left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}\right)} = \frac{e^{-icx}}{-ix}, \quad (25,8)$$

Согласно (25,7) составляющие поля  $\mathbf{A}$  связаны между собою условием поперечности

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = 0, \quad (25,9)$$

и поэтому число независимых функций равняется двум. Для продольных составляющих мы имеем также две независимые функции  $\Phi$  и  $\Phi_0$ .

Из перестановочных соотношений (25,2) следует, что продольные составляющие коммутируют с поперечными:

$$[A_n, \Phi(s)]_- = [A_n \Phi_0(s)]_- = 0, \quad (25,10)$$

а между двумя поперечными или двумя продольными составляющими имеют место следующие перестановочные соотношения:

$$\begin{aligned} [A_n, A_{n'}(s)]_- &= \frac{4\pi c \hbar}{i} \left( \delta_{nn'} - \frac{\nabla_n \nabla_{n'}}{\nabla^2} \right) \Delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_s, t - t_s), \\ [\Phi, \Phi(s)]_- &= -[\Phi_0, \Phi_0(s)]_- = \\ &= -\frac{4\pi c \hbar}{i} \Delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_s, t - t_s), \\ [\Phi, \Phi_0(s)]_- &= 0. \end{aligned} \quad (25,11)$$

Отсюда видно, что перестановочные соотношения для амплитуд поперечного поля совпадают с перестановочными соотношениями (14,18), найденными нами для электромагнитного поля в вакууме.

Отделение продольной части электромагнитного поля от поперечной мы можем сделать также и в самих уравнениях (21,1) и (25,5):

$$D\psi = \left\{ \sum_{s=1}^{\nu} \left( -\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial t_s} + e\Phi(s) \right) - \left( \frac{c\hbar}{i} (\alpha_s \nabla_s) - e \frac{(\alpha_s \nabla_s) \Phi_0(s)}{\left( \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t_s} \right)} \right) - e(\alpha_s \mathbf{A}(s)) - \rho_{3s} mc^2 \right\} \psi = 0, \quad (25,12)$$

$$\left[ \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\Phi - \Phi_0) - 4\pi \sum_{s=1}^{\nu} e\Delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_s, t - t_s) \right] \psi = 0. \quad (25,13)$$

Покажем, что мы можем избавиться от продольных составляющих  $\Phi(s)$  и  $\Phi_0(s)$  в уравнении Дирака (25,12) с помощью калибровочного преобразования. При калибровочном преобразовании  $\psi = e^\gamma \psi'$  волновое уравнение преобразуется по схеме

$$D\psi = e^{-\gamma} D e^\gamma \psi' = 0. \quad (25,14)$$

Закон перестановки функции  $e^\gamma$  с операторами, которые действуют на величину  $\chi$ , определяется равенством

$$D e^\gamma = e^\gamma (D + [D, \gamma]_-). \quad (25,15)$$

Это можно показать для случая, когда перестановочное соотношение между функциями  $D$  и  $\chi$  имеет вид

$$D\chi - \chi D = \lambda,$$

причём величина  $\lambda$  является числом, а не оператором. Действительно, отсюда следует:

$$D\chi^2 - \chi^2 D = (D\chi - \chi D)\chi + \chi(D\chi - \chi D) = 2\chi\lambda.$$

Последняя формула может быть обобщена на любую степень:

$$D\chi^n - \chi^n D = n\chi^{n-1}\lambda. \quad (25,16)$$

Разлагая выражение  $e^\chi$  в ряд

$$e^\chi = 1 + \chi + \frac{\chi^2}{2!} + \frac{\chi^3}{3!} + \dots$$

и применяя к каждому члену формулу (25,16), получаем равенство (25,15)

$$De^\chi - e^\chi D = e^\chi [D, \chi]_-.$$

Выбирая величину  $\chi$  в виде линейной комбинации функции  $\Phi(s)$  и  $\Phi_0(s)$

$$\chi = \sum_{s'=1}^{\nu} (a_{s'} \Phi(s') + b_{s'} \Phi_0(s')),$$

находим с помощью (25,15):

$$-\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial t} e^\chi = e^\chi \left( -\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial t_s} - a_s \frac{\hbar}{i} \frac{\partial \Phi(s)}{\partial t_s} - b_s \frac{\hbar}{i} \frac{\partial \Phi_0(s)}{\partial t_s} \right),$$

$$e\Phi(s) e^\chi = e^\chi \left( e\Phi(s) + e \sum_{s'=1}^{\nu} [\Phi(s), a_{s'} \Phi(s')]_- \right),$$

т. е.

$$\begin{aligned} & \left( -\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial t_s} + e\Phi(s) \right) e^\chi = \\ & = e^\chi \left[ -\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial t_s} - \left( \frac{\hbar}{i} a_s \frac{\partial \Phi(s)}{\partial t_s} + \frac{\hbar}{i} b_s \frac{\partial \Phi_0(s)}{\partial t_s} - e\Phi(s) \right) + \right. \\ & \quad \left. + e \sum_{s'=1}^{\nu} [\Phi(s), a_{s'} \Phi(s')]_- \right]. \quad (25,17) \end{aligned}$$

Аналогичным способом получаем для другого члена, не коммутирующего с функцией  $\chi$ :

$$\begin{aligned} & \left( -\frac{c\hbar}{i} \nabla_s + e \left( \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t_s} \right)^{-1} \nabla_s \Phi_0(s) \right) e^\chi = \\ & = e^\chi \left[ -\frac{\hbar c}{i} \nabla_s - \left( \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t_s} \right)^{-1} \times \right. \\ & \quad \times \nabla_s \left( \frac{\hbar}{i} a_s \frac{\partial \Phi(s)}{\partial t_s} + \frac{\hbar}{i} b_s \frac{\partial \Phi_0(s)}{\partial t_s} - e\Phi_0(s) \right) + \\ & \quad \left. + e \sum_{s'=1}^{\nu} \left[ \left( \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t_s} \right)^{-1} (\nabla_s \Phi_0(s)), b_{s'} \Phi_0(s') \right]_- \right]. \quad (25,18) \end{aligned}$$

Все остальные члены оператора  $D$  коммутируют с функцией  $e^\lambda$ .

Оператор, входящий в обобщённое условие Лоренца (25,13), преобразуется в данном случае согласно уравнению

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\Phi - \Phi_0) e^\lambda = \\ = e^\lambda \left\{ \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\Phi - \Phi_0) + \sum_{s'=1}^{\nu} \left[ \frac{1}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial t}, a_{s'} \Phi(s') \right]_- - \right. \\ \left. - \left[ \frac{1}{c} \frac{\partial \Phi_0}{\partial t}, b_{s'} \Phi_0(s') \right]_- \right\}. \quad (25,19) \end{aligned}$$

Принимая во внимание перестановочные соотношения (25,11), приводим уравнение (25,13) к виду

$$\begin{aligned} \left[ \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\Phi - \Phi_0) - 4\pi \sum_{s'=1}^{\nu} \left( e + \frac{\hbar c}{i} \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (a_{s'} + b_{s'}) \right) \times \right. \\ \left. \times \Delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{s'}, t - t_{s'}) \right] \psi' = 0. \quad (25,20) \end{aligned}$$

Для того чтобы исключить квашированные амплитуды продольного поля из уравнения (25,17) и (25,18), мы должны положить

$$a_{s'} + b_{s'} = \frac{ie}{c\hbar} \left( \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t_{s'}} \right)^{-1}. \quad (25,21)$$

Учитывая при этом соотношение

$$\left( \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t_{s'}} \right)^{-1} \Delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{s'}, t - t_{s'}) = - \left( \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right)^{-1} \Delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{s'}, t - t_{s'}),$$

найдем:

$$\left( e + \frac{c\hbar}{i} \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (a_{s'} + b_{s'}) \right) \Delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{s'}, t - t_{s'}) = 0.$$

Тогда условие Лоренца-Ферми (25,20) сводится к

$$\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\Phi - \Phi_0) \psi' = 0. \quad (25,22)$$

Подставляя сюда вместо  $\Phi_0$  выражение (25,7), получим обобщённое на квантовую электродинамику условие Лорентца

$$\left( \frac{1}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{\Phi} \right) \psi' = 0. \quad (25,23)$$

С помощью равенства (25,21) и (25,22) находим:

$$\begin{aligned} \left( \frac{\hbar}{i} a_s \frac{\partial \Phi(s)}{\partial t_s} + \frac{\hbar}{i} b_s \frac{\partial \Phi_0(s)}{\partial t_s} - e \Phi(s) \right) \psi' = \\ = \left[ \left( \frac{\hbar}{i} (a_s + b_s) \frac{\partial}{\partial t_s} - e \right) \Phi(s) \right] \psi' = 0, \end{aligned} \quad (25,24)$$

откуда следуют преобразования для обобщённого оператора энергии и обобщённого импульса:

$$\begin{aligned} \left( -\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial t} + e \Phi \right) e^{\lambda} = e^{\lambda} \left( -\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial t} + e \left( \frac{1}{2} + \gamma \right) \frac{\partial U}{c \partial t} \right), \\ \left( -\frac{\hbar c}{i} \nabla - e \mathbf{\Phi} \right) e^{\lambda} = e^{\lambda} \left[ -\frac{\hbar c}{i} \nabla - e \left( \mathbf{A} + \left( \frac{1}{2} - \gamma \right) \nabla U \right) \right], \end{aligned} \quad (25,25)$$

где

$$\begin{aligned} U = 4\pi \sum_{s'=1}^{\nu} e \frac{\Delta(r-r_{s'}, t-t_{s'})}{\left( \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right)^2} = \\ = -\frac{1}{2\pi^2} \sum_{s'=1}^{\nu} e \int e^{i\mathbf{x}(r-r_{s'})} \frac{\sin c\mathbf{x}(t-t_{s'})}{x^3} d^3x, \end{aligned} \quad (25,26)$$

$\mathbf{A}$  является потенциалом поперечного поля, т. е.  $\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$ .

Заметим, что с помощью одного соотношения (25,21) невозможно однозначно определить значение коэффициентов  $a_{s'}$  и  $b_{s'}$ . Поэтому мы положили:

$$a_{s'} = \left( \frac{1}{2} + \gamma \right) \frac{ie}{c\hbar} \left( \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t_{s'}} \right)^{-1}, \quad b_{s'} = \left( \frac{1}{2} - \gamma \right) \frac{ie}{c\hbar} \left( \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t_{s'}} \right)^{-1},$$

где  $\gamma$  является пока что неопределённой постоянной величиной.

Дополнительные потенциалы продольного поля  $\gamma \frac{1}{c} \frac{\partial U}{\partial t}$  (скалярный потенциал) и  $\gamma \nabla U$  (вектор-потенциал) не

являются операторами, и подчиняются условию Лорентца в обычном понимании:

$$\gamma \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - \gamma \nabla^2 U = 0.$$

Эти потенциалы (пропорциональные  $\gamma$ ) могут быть исключены с помощью обычных калибровочных преобразований (см. § 18, п. в), благодаря чему мы можем положить  $\gamma = 0$ .

Таким образом, преобразования (25,25) принимают вид:

$$\begin{aligned} \left( -\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial t} + e\Phi \right) e^{\lambda} &= e^{\lambda} \left( -\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{e}{2c} \frac{\partial U}{\partial t} \right) \\ \left( -\frac{\hbar c}{i} \nabla - e\mathbf{A} \right) e^{\lambda} &= e^{\lambda} \left( -\frac{\hbar c}{i} \nabla - e\mathbf{A} - \frac{e\gamma U}{2} \right). \end{aligned} \quad (25,27)$$

Для того чтобы найти функцию  $U$ , нам необходимо прежде всего вычислить интеграл

$$I = \frac{1}{2\pi^2} \int e^{i\mathbf{c}\mathbf{R}} \frac{\sin c\mathbf{x}T}{x^3} d^3\mathbf{x}.$$

Переходя к полярным координатам, находим:

$$I = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty \sin c\mathbf{x}T \frac{d\mathbf{x}}{x} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\theta \sin \theta e^{i\mathbf{x}\mathbf{R} \cos \theta}$$

После элементарных вычислений получим:

$$\begin{aligned} I &= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin c\mathbf{x}T \sin \mathbf{x}R}{R\mathbf{x}^2} d\mathbf{x} = \\ &= \frac{1}{\pi R} \int_0^\infty (\cos \mathbf{x} (R - cT) - \cos \mathbf{x} (R + cT)) \frac{d\mathbf{x}}{\mathbf{x}^2}. \end{aligned}$$

Интегрируя последнее выражение по частям, имеем:

$$I = \frac{1}{\pi R} \int_0^\infty [(R + cT) \sin \mathbf{x} (R + cT) - (R - cT) \sin \mathbf{x} (R - cT)] \frac{d\mathbf{x}}{\mathbf{x}}$$

С помощью известного интеграла

$$\int_0^{\infty} \sin ax \frac{dx}{x} = \frac{\pi}{2} \frac{|a|}{a},$$

получим выражение для искомой функции  $U$ :

$$U = - \sum_{s'=1}^{\nu} e \frac{1}{2R_{s'}} (|R_{s'} + cT_{s'}| - |R_{s'} - cT_{s'}|), \quad (25,28)$$

где

$$R_{s'} = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_{s'}|, \quad T_{s'} = t - t_{s'}.$$

Подставляя последнее выражение в формулу (25,27), при  $cT_{s'} < R_{s'}$ , получим:

$$\left( -\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial t} + e\Phi \right) e^{\lambda} = e^{\lambda} \left( -\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial t} - \sum_{s'=1}^{\nu} \frac{e^2}{2|\mathbf{r} - \mathbf{r}_{s'}|} \right), \quad (25,29)$$

$$\begin{aligned} & \left( -\frac{\hbar c}{i} \nabla - e\Phi \right) e^{\lambda} = \\ & = e^{\lambda} \left( -\frac{\hbar c}{i} \nabla - e\mathbf{A} - \sum_{s'=1}^{\nu} \frac{e^2 (\mathbf{r} - \mathbf{r}_{s'}) c (t - t_{s'})}{2|\mathbf{r} - \mathbf{r}_{s'}|^3} \right). \quad (25,30) \end{aligned}$$

Наконец, мы должны установить соотношение между собственными временами отдельных электронов.

Дирак, Фок и Подольский<sup>1)</sup> показали, что можно получить из инвариантной формулировки квантовой электродинамики [см. уравнение (25,1)] теорию с одним временем, если положить все времена  $t_s$  электронов равными времени поля  $t$ , т. е.  $t_s = t$ .

В этом случае

$$\frac{\partial}{\partial t} = \sum_{s=1}^{\nu} \frac{\partial t_s}{\partial t} \frac{\partial}{\partial t_s} = \sum_{s=1}^{\nu} \frac{\partial}{\partial t_s},$$

<sup>1)</sup> П. Дирак, В. Фок и Б. Подольский, *Sov. Phys.* 2, 468 (1932).



а время  $T_{s'} = t - t_{s'}$  обращается в нуль, т. е. условие, при котором были вычислены интегралы, будет удовлетворено, а та часть потенциальной энергии продольного поля, которая пропорциональна времени  $T_{s'} = t - t_{s'}$ , обращается в нуль.

Таким образом, уравнение Дирака (25,1) для системы электронов после исключения квантовых амплитуд продольного поля принимает вид

$$\left\{ -\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial t} - V - \sum_{s=1}^{\nu} \left[ \left( \alpha_s \left( \frac{c\hbar}{i} \nabla_s + e\mathbf{A}(\mathbf{r}_s, t) \right) \right) + \rho_{3s} mc^2 \right] \right\} \psi = 0. \quad (25,31)$$

Потенциальная энергия взаимодействия  $V$  между электронами в этом случае даётся известным кулоновским выражением

$$V = \sum_{s=1}^{\nu} \sum_{\substack{s'=1 \\ s > s'}}^{\nu} V_{ss'}, \quad (25,32)$$

где

$$V_{ss'} = \frac{e^2}{|\mathbf{r}_s - \mathbf{r}_{s'}|}.$$

Кроме того, к выражению (25,32) мы должны добавить энергию

$$V_0 = \sum_{s=1}^{\nu} V_{ss}, \quad \text{где } V_{ss} = \frac{e^2}{2|\mathbf{r}_s - \mathbf{r}_{s'}|} = \frac{e^2}{4\pi^2} \int \frac{d^3x}{x^2} = \frac{e^2}{\pi} \int_0^{\infty} dx, \quad (25,33)$$

соответствующую бесконечности собственной энергии электронов—«продольная собственная энергия». Происхождение бесконечной собственной энергии связано с тем обстоятельством, что сопоставленные полю частицы в указанном формализме мы рассматривали как точечные, и поэтому в квантовой электродинамике, естественно,

должна остаться трудность с бесконечной энергией точечных частиц, которая имеет место также и в классической теории точечных электронов. Это говорит нам прежде всего о том, что квантовая электродинамика на первой стадии своего развития была далека от разрешения вопросов, связанных со строением элементарных частиц.

К проблеме собственной массы мы вернёмся в конце нашей книги (см. § 44), а пока, за пеннием лучшего, бесконечную собственную энергию будем просто отбрасывать.

## § 26. Формула Брейта. Поперечная собственная энергия

В предыдущем параграфе, исключая продольное электромагнитное поле, мы получили кулоновское взаимодействие между зарядами в предположении, что все собственные времена электронов равны друг другу:

$$t_1 = t_2 = \dots = t. \quad (26,1)$$

Продольное поле мы предварительно проквантовали и сопоставили ему частицы — псевдофотоны. Кулоновское взаимодействие до некоторой степени можно рассматривать как результат виртуального испускания псевдофотона<sup>1)</sup> одним зарядом с последующим его поглощением другим.

После исключения квантованного продольного поля, остаётся ещё взаимодействие зарядов с квантованным поперечным полем, которое не обращается в нуль даже в том случае, если фотоны (частицы, сопоставленные поперечному полю) отсутствуют. Поэтому естественно ожидать, что поперечное поле должно привести к дополнительному взаимодействию, связанному с виртуальным испусканием фотона одним электроном с последующим его поглощением другим.

---

<sup>1)</sup> Отметим, что псевдофотоны излучаться не могут, так как при отсутствии зарядов продольное электромагнитное поле обращается в нуль.

Поперечное поле не может быть полностью исключено из уравнений для системы электронов, так что проблема электромагнитного взаимодействия в общем случае имеет лишь приближённое решение.

При сравнительно малых скоростях движения электронов ( $v_1 \ll c, v_2 \ll c$ ) энергию взаимодействия удобно представить в виде разложения по величине  $\beta^2$  ( $\beta^2 \sim \frac{v_1 v_2}{c^2}$ ). Тогда первый член разложения, пропорциональный  $\beta^0$ , определяется кулоновским взаимодействием; второй член разложения, пропорциональный  $\beta^2$  и связанный с полем поперечных фотонов, приводит к так называемой брейтовской части взаимодействия. Такое разложение не годится в релятивистском случае ( $\beta^2 \sim 1$ ). В этом случае энергию связи следует искать в виде разложения по постоянной тонкой структуре  $\alpha$  (см. следующий параграф).

а) **Формула Брейта.** Найдём второй член разложения, пропорциональный  $\frac{v_1 v_2}{c^2}$  для энергии взаимодействия двух движущихся со сравнительно малой скоростью зарядов.

Оставляя в уравнении Дирака величины порядка  $\frac{p}{mc}$  ( $p$  — импульс частицы), находим:

$$\left( -\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial t} - H \right) \psi = 0, \quad (26,2)$$

где

$$H = -e\Phi + \frac{1}{2m} \left( \mathbf{p} + \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2 - (\boldsymbol{\mu} \mathbf{H}) \quad (26,3)$$

есть гамильтониан частицы,  $\mathbf{p} = \frac{\hbar}{i} \nabla$  — оператор импульса, а  $\boldsymbol{\mu} = -\frac{e\hbar}{2mc} \boldsymbol{\sigma}$  — кинематический магнитный момент.

Отбрасывая величины, пропорциональные  $c^{-2}$ , и учитывая, что для поперечного поля  $\text{div } \mathbf{A} = 0$ , а также пренебрегая магнитным взаимодействием, которое становится заметным лишь на малом расстоянии (порядка  $\frac{\hbar}{mc}$ ), найдём:

$$H = -e\Phi + \frac{p^2}{2m} + \frac{e}{mc} (\mathbf{A} \mathbf{p}). \quad (26,4)$$

Таким образом, для системы из двух заряженных частиц мы можем написать следующее уравнение:

$$\left( -\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial t} - \frac{e^2}{|r_1 - r_2|} + e\Phi(1) + e\Phi(2) - \frac{p_1^2}{2m} - \frac{p_2^2}{2m} - \frac{e}{mc} (\mathbf{A}(1) \mathbf{p}_1) - \frac{e}{mc} (\mathbf{A}(2) \mathbf{p}_2) \right) \psi = 0, \quad (26,5)$$

являющееся приближением с точностью до величины  $\frac{p}{mc}$  к уравнению (25,31). Здесь  $\Phi(1)$  и  $\Phi(2)$  — скалярные потенциалы внешних полей, действующих соответственно на первую и вторую заряженные частицы.

При отсутствии внешнего магнитного поля вектор-потенциал  $\mathbf{A}$  содержит лишь поперечную квантованную часть поля:

$$\mathbf{A} = \frac{1}{L^{3/2}} \sum_{\mathbf{x}} \sqrt{\frac{2\pi c \hbar}{x}} (\mathbf{a} e^{-i\mathbf{x}t + i\mathbf{x}r} + \mathbf{a}^+ e^{i\mathbf{x}t - i\mathbf{x}r}). \quad (26,6)$$

Между его амплитудами имеют место следующие перестановочные соотношения:

$$a_n a_{n'}^+ - a_{n'}^+ a_n = \left( \delta_{nn'} - \frac{x_n x_{n'}}{x^2} \right) \delta_{\mathbf{x}\mathbf{x}'}, \quad (26,7)$$

которые следует, как и обычно, понимать в смысле действия на функцию от числа частиц, включённых в волновую функцию  $\psi$ .

Согласно формуле (8,15) при отсутствии фотонов функция от числа частиц должна иметь вид

$$f(N) = \prod_{l=\pm 1} \prod_{\mathbf{x}'} \delta_{N' l 0}, \quad (26,8)$$

где величина  $l = \pm 1$  характеризует два возможных состояния поляризации электромагнитного поля (см. § 14); амплитуды  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{a}^+$  действуют по законам (8,16) и (8,18) на числа частиц  $N'$ , зависящих от волнового вектора  $\mathbf{x}'$ .

Рассматривая члены, пропорциональные  $\frac{p}{mc}$ , как возмущение, мы можем уравнение (26,5) представить в виде

$$\left( -\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial t} - H \right) \psi = \frac{e}{mc} \sum_{s=1}^2 (\mathbf{A}(s) \mathbf{p}_s) \psi, \quad (26,9)$$

где

$$H = \frac{e^2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} + \sum_{s=1}^2 \left( \frac{p_s^2}{2m} - e\Phi(s) \right). \quad (26,10)$$

Будем искать решение уравнения (26,9) по методу теории возмущений:

$$\psi = \psi_0 + \psi_1 + \psi_2 + \dots, \quad (26,11)$$

причём для определения волновых функций мы имеем систему приближённых уравнений:

$$\left( -\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial t} - H \right) \psi_0 = 0, \quad (26,12)$$

$$\left( -\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial t} - H \right) \psi_1 = \sum_{s=1}^2 U^+(s) \psi_0, \quad (26,13)$$

$$\left( -\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial t} - H \right) \psi_2 = \sum_{s=1}^2 U(s) \psi_1 \quad (26,14)$$

и т. д.

Функция взаимодействия частиц с полем имеет вид:

$$U(\mathbf{r}, t) = \frac{e}{mcL^{3/2}} \sum_{\mathbf{x}} \sqrt{\frac{2\pi c \hbar}{\kappa}} e^{-i\kappa t + i\mathbf{x} \cdot \mathbf{r}} (\mathbf{a} \cdot \mathbf{p}), \quad (26,15)$$

$$U^+(\mathbf{r}, t) = \frac{e}{m\alpha L^{3/2}} \sum_{\mathbf{x}} \sqrt{\frac{2\pi c \hbar}{\kappa}} e^{i\kappa t - i\mathbf{x} \cdot \mathbf{r}} (\mathbf{a}^+ \cdot \mathbf{p}), \quad (26,16)$$

**a**

$$U(s) = U(\mathbf{r}_s, t).$$

Поскольку действие операторов  $a$  на функцию от числа частиц соответствует поглощению частицы, то согласно (26,8) при отсутствии в начальный момент фотонов

$$af(N) = 0. \quad (26,17)$$

Поэтому в уравнении (26,13) мы оставили лишь члены, пропорциональные оператору порождения частиц  $a^+$ .

Функция  $\psi_1$  описывает состояние, в котором имеется один фотон. Функция  $\psi_2$  описывает состояние, в котором испущенный фотон поглощается. Поэтому в уравнении (26,14) мы должны оставить члены, пропорциональные оператору поглощения частиц  $a$ .

Таким образом, в уравнении

$$\left( -\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial t} - H \right) \psi_2 = V \psi_0 \quad (26,18)$$

величину  $V$  мы можем рассматривать как дополнительную потенциальную энергию взаимодействия между электронами.

Выразим теперь взаимодействие  $V$  между двумя частицами через взаимодействие  $U$  между полем и частицей. С этой целью из (26,13) определим функцию  $\psi_1$  и подставим найденное значение в (26,14).

Приближённое решение уравнения (26,13) имеет вид:

$$\psi_1 = \sum_{s=1}^2 \frac{U^+(s)}{-\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial t}} \psi_0. \quad (26,19)$$

В самом деле, подставляя (26,19) в левую часть равенства (26,13), находим:

$$\begin{aligned} & \sum_{s=1}^2 \left( U^+(s) \psi_0 - \frac{U^+(s)}{-\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial t}} \left( -\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial t} - H \right) \psi_0 \right) - \\ & - \frac{1}{2m} \sum_{s=1}^2 \left( \frac{2\mathbf{p}_s U^+(s) \mathbf{p}_s}{-\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial t}} + \frac{\mathbf{p}_s^2 U^+(s)}{-\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial t}} \right) \psi_0 = \sum_{s=1}^2 U^+(s) \psi_0. \end{aligned} \quad (26,20)$$

Оценим порядок последнего члена левой части равенства по сравнению с первым. С этой целью учтём соотношения

$$p_s = \frac{\hbar}{i} \nabla_s, \quad p_s \psi_0 \sim v_s m \psi_0, \quad (26,21)$$

где  $v_s$  — скорость  $s$ -й частицы. Дифференцирование по координатам функции  $U^+$  сводится к появлению в разложении Фурье (26,15) множителя  $\kappa$ , который в конечном результате в знаменателе увеличивает на единицу степень  $R$  ( $R$  — расстояние между двумя частицами), т. е.

$$(\nabla_s U^+(s)) \sim \frac{1}{R} U^+(s). \quad (26,22)$$

Кроме того, легко показать, что

$$\frac{p_s U^+(s)}{-\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial t}} \sim U^+(s) \frac{1}{c}.$$

Учитывая последние соотношения, имеем:

$$\frac{p_s U^+(s) p_s}{m \left( -\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial t} \right)} \sim \frac{v_s}{c} U^+(s), \quad (26,23)$$

$$\frac{p_s^2 U^+(s)}{2m \left( -\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial t} \right)} \sim \frac{\hbar}{mcR} U^+(s). \quad (26,24)$$

Таким образом, пренебрегая в разложении членами порядка  $\beta^3$ , а также принимая расстояние между частицами много большим комптоновской длины волны ( $R \gg \frac{\hbar}{mc}$ ), мы можем в левой части равенства (26,20) отбросить члены, стоящие во второй сумме.

Подставляя (26,19) в уравнение (26,14), а также принимая во внимание соотношения (26,18), находим следующее приближённое выражение для энергии взаимодействия двух частиц:

$$V_{12} = U(1) \frac{U^+(2)}{-\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial t}} + U(2) \frac{U^+(1)}{-\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial t}}. \quad (26,25)$$

Кроме взаимодействия (26,25), функция  $V$  должна содержать энергии самодействия (т. е. собственные энергии)  $V_{11}$  и  $V_{22}$ , возникновение которых связано с испусканием частицей фотона с последующим его поглощением той же частицей. Однако выражение (26,25) не может быть использовано для определения функций  $V_{11}$  и  $V_{22}$ , поскольку в этом случае мы должны положить  $R = 0$ , благодаря чему условие законности приближённого выражения (26,19)  $(R \gg \frac{\hbar}{mc})$  не будет выполнено. Поэтому для вычисления энергии самодействия нами будет использован другой метод (см. ниже).

Подставляя в формулу (26,25) разложения для функций  $U$  и  $U^+$  и принимая во внимание, что при отсутствии в начальный момент частиц мы имеем следующие значения для квадратичных комбинаций амплитуд электромагнитного поля:

$$a_n'^+ a_n f(N) = 0,$$

$$a_n a_n'^+ f(N) = \left( \delta_{nn'} - \frac{x_n x_{n'}}{x^2} \right) \delta_{xx'} f(N),$$

находим:

$$V_{12} = - \frac{2\pi e^2}{L^3 m^2 c^2} \times \\ \times \sum_x \frac{1}{x^2} [e^{ixR} (a_{\mathbf{p}_1}) (a^+ \mathbf{p}_2) + e^{-ixR} (a_{\mathbf{p}_2}) (a^+ \mathbf{p}_1)], \quad (26,26)$$

причём в последнем выражении проведено суммирование по  $x'$ . Принимая во внимание

$$a_n a_n^+ = \delta_{nn'} - \frac{x_n x_{n'}}{x^2}, \quad (26,27)$$

имеем:

$$(a_{\mathbf{p}_1}) (a^+ \mathbf{p}_2) = a_n p_{1n} a_n^+ p_{2n'} = (p_1 p_2) - \frac{(x p_1)(x p_2)}{x^2}.$$

откуда, переходя в выражении (26,26) от ряда Фурье к интегралу, т. е. полагая

$$\frac{1}{L^3} \sum_x \rightarrow \frac{1}{8\pi^3} \int d^3x,$$



находим:

$$V_{12} = -\frac{e^2}{2\pi^2 m^2 c^2} \int e^{i\mathbf{x}\mathbf{R}} \left( (\mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2) - \frac{(\mathbf{x}\mathbf{p}_1)(\mathbf{x}\mathbf{p}_2)}{x^2} \right) \frac{d^3x}{x^2}. \quad (26,28)$$

Вводя интеграл

$$I(R) = \int \frac{1}{2\pi^2 x^4} (1 - e^{i\mathbf{x}\mathbf{R}}), d^3x, \quad (26,29)$$

мы можем взаимодействие (26,28) представить в виде

$$V_{12} = -\frac{e^2}{m^2 c^2} (\nabla^2 I(R) (\mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2) - \nabla_n \nabla_{n'} I(R) p_{1n} p_{1n'}). \quad (26,30)$$

При вычислении функции  $I(R)$  вводим сферические координаты вектора  $\mathbf{x}$ :

$$I(R) = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty \frac{dx}{x^2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin \theta d\theta (1 - e^{i\mathbf{x}\mathbf{R} \cos \theta}).$$

Интегрируя последнее выражение по углам  $\varphi$  и  $\theta$ , находим:

$$I(R) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty (xR - \sin xR) \frac{dx}{x^3 R} = \frac{2}{\pi} R \int_0^\infty (x - \sin x) \frac{dx}{x^3}.$$

Интегрируя далее по частям, имеем:

$$\int_0^\infty (x - \sin x) \frac{dx}{x^3} = \frac{1}{2} \int_0^\infty (1 - \cos x) \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{4},$$

откуда

$$I(R) = \frac{R}{2}. \quad (26,31)$$

Подставляя значение  $I(R)$  в (26,30) и принимая во внимание соотношение

$$\nabla_n \nabla_{n'} R = \frac{\delta_{nn'}}{R} - \frac{R_n R_{n'}}{R^3},$$

получим выражение для брейтовской части взаимодействия:

$$V_{12} = -\frac{e^2}{2m^2 c^2} \left( \frac{(\mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2)}{R} + \frac{R_n R_{n'} p_{1n} p_{2n'}}{R^3} \right), \quad (26,32)$$

где  $\mathbf{R} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ .

Брейтовская поправка к взаимодействию точно соответствует классической релятивистской поправке и опре-

деляет взаимодействие между двумя бесспиновыми частицами. При учёте же спиновых эффектов, когда  $U = e(\alpha A)$ , мы с помощью формулы (26,25) находим следующее выражение для энергии взаимодействия между двумя электронами, обусловленное переносом виртуальными фотонами:

$$V = e^2 ([\alpha_1 \pi] [\alpha_2 \pi]) \frac{R}{2} = -e^2 \frac{(\alpha_1 \alpha_2) R^2 + (\alpha_1 R) (\alpha_2 R)}{2R^3}. \quad (26,33)$$

Сделаем переход к волновому уравнению Паули. Согласно (17,32) матрицы  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  будут преобразовываться по закону:

$$\alpha_{1,2} = \frac{1}{mc} \left( \mathbf{p}'_{1,2} \pm \frac{\hbar}{2} \pi \pm \frac{i\hbar}{2} [\sigma'_{1,2} \pi] \right).$$

Оставляя в кулоновской части члены, пропорциональные  $\beta^2$ , будем иметь:

$$\psi^+ \frac{1}{R} \psi = \psi'^+ \left( 1 - \frac{\hbar^2 \pi^2}{8m^2 c^2} - \frac{i\hbar}{4m^2 c^2} (\sigma' [\mathbf{p}' \pi]) \frac{1}{R} \right) \psi'.$$

Это соотношение легко получить, если в левой части последнего равенства исключить  $\psi_3$  и  $\psi_4$ , так же как это было сделано при выводе соотношения (17,32).

Отсюда, принимая во внимание равенство

$$\pi_n \pi_{n'} \frac{1}{R} = \frac{4\pi}{3} \delta(\mathbf{R}) \delta_{nn'} + \frac{1}{R^5} (\delta_{nn'} R^2 - 3x_n x_{n'}),$$

находим следующее выражение для взаимодействия между двумя электронами:

$$\begin{aligned} V'_{12} = & -4\pi\mu_0^2 \delta(\mathbf{R}) + \frac{e\mu_0}{2mc} \{ (\sigma'_2 [\mathbf{R}\mathbf{p}'_2]) - (\sigma'_1 [\mathbf{R}\mathbf{p}'_1]) + \\ & + 2(\sigma'_1 [\mathbf{R}\mathbf{p}'_2]) - 2(\sigma'_2 [\mathbf{R}\mathbf{p}'_1]) \} \frac{1}{R^3} + \\ & + \mu_0^2 \left\{ -\frac{8\pi}{3} (\sigma'_1 \sigma'_2) \delta(\mathbf{R}) + \frac{(\sigma'_1 \sigma'_2) R^2 - (\sigma'_1 \mathbf{R}) (\sigma'_2 \mathbf{R})}{R^5} \right\}, \end{aligned}$$

дополнительное к кулоновскому и брейтовскому взаимодействию. Второй и третий члены в последнем выражении определяют соответственно спин-орбитальное и спин-спиновое взаимодействия.

Заметим, что эти формулы не исчерпывают величину взаимодействия в нашем приближении между электроном и позитроном, так как в них не учтены обменные силы, связанные с возможной аннигиляцией электрона и позитрона (см. § 48, п. в).

б) Собственная поперечная энергия электрона. Как мы уже заметили в предыдущем параграфе, энергия самодействия  $V_{11}$  не может рассматриваться как предел выражения энергии взаимодействия (26,32), когда расстояние между частицами стремится к нулю ( $R \rightarrow 0$ ).

Для нахождения собственной поперечной энергии мы можем ограничиться рассмотрением уравнения для одного свободного электрона, взаимодействующего с полем поперечных фотонов:

$$\left( -\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\hbar c}{i} (\boldsymbol{\alpha} \nabla) - \rho_3 mc^2 \right) \psi = +e (\boldsymbol{\alpha} \mathbf{A}) \psi. \quad (26,34)$$

Решая последнее уравнение по методу теории возмущений в предположении, что в начальный момент фотоны отсутствуют, имеем:

$$\psi = \psi_0 + \psi_1 + \psi_2 + \dots, \\ D \psi_0 = 0, \quad D \psi_1 = U^+ \psi_0, \quad D \psi_2 = U \psi_1, \quad (26,35)$$

где

$$U^+ = \frac{e}{L^{3/2}} \sum_{\mathbf{x}} \sqrt{\frac{2\pi c \hbar}{x}} (\boldsymbol{\alpha} \mathbf{a}^+) e^{i\mathbf{x}t - i\mathbf{x}r}, \\ U = \frac{e}{L^{3/2}} \sum_{\mathbf{x}} \sqrt{\frac{2\pi c \hbar}{x}} (\boldsymbol{\alpha} \mathbf{a}) e^{-i\mathbf{x}t + i\mathbf{x}r},$$

а  $D$  — оператор Дирака:

$$D = -\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\hbar c}{i} (\boldsymbol{\alpha} \nabla) - \rho_3 mc^2 \quad (26,36)$$

Выберем такую систему координат, в которой электрон покоится. Тогда уравнение для  $\psi_0$  принимает вид

$$\left( -\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial t} - \rho_3 mc^2 \right) \psi_0 = 0.$$

Его решение есть

$$\psi_0 = \frac{1}{L^{3/2}} b e^{-ick_0 t}, \quad (26,37)$$

причём амплитуда  $b$  удовлетворяет уравнению

$$(1 - \rho_3) b = 0. \quad (26,38)$$

Отсюда для определения функции  $\psi_1$  имеем уравнение

$$D\psi_1 = \frac{e}{L^{3/2}} \sqrt{\frac{2\pi\hbar}{c}} \sum_x \frac{(\alpha\alpha^+)}{\sqrt{x}} b e^{ict(x-k_0) - ixr}. \quad (26,39)$$

Определим действие оператора  $D^{-1}$  на показательную функцию так, чтобы оператор  $DD^{-1}$  равнялся единице:

$$DD^{-1} = 1. \quad (26,40)$$

Нетрудно убедиться, что действие оператора  $D^{-1}$  будет следующим:

$$D^{-1} b e^{-icKt + ikr} = \frac{K + (\alpha k) + \rho_3 k_0}{c\hbar(K^2 - k^2 - k_0^2)} b e^{-icKt + ikr}. \quad (26,41)$$

Последнее соотношение легко может быть проверено, если учесть равенства

$$\begin{aligned} D e^{-icKt + ikr} b' &= c\hbar (K - (\alpha k) - \rho_3 k_0) e^{-icKt + ikr} b', \\ (K - (\alpha k) - \rho_3 k_0) (K + (\alpha k) + \rho_3 k_0) b' &= (K^2 - k^2 - k_0^2) b' \end{aligned}$$

и вспомнить свойства матриц  $\alpha_n$  и  $\rho_3$ , изложенные в § 17.

Учитывая равенство (26,41), находим выражение для волновой функции  $\psi_1$ :

$$\psi_1 = e \sqrt{\frac{2\pi}{c\hbar L^3}} \sum_x \frac{k_0 - x - (\alpha x) + \rho_3 k_0}{((x - k_0)^2 - x^2 - k_0^2)} \cdot \frac{(\alpha\alpha^+)}{\sqrt{x}} b e^{-ict(k_0 - x) - ixr}.$$

Для дальнейших вычислений воспользуемся следующими равенствами:

$$(x - k_0)^2 - x^2 - k_0^2 = -2xk_0,$$

$$(k_0 + \rho_3 k_0) (\alpha\alpha^+) b = (\alpha\alpha^+) k_0 (1 - \rho_3) b = 0, \quad (26,42)$$

$$(\alpha x) (\alpha\alpha^+) = (\sigma x) (\sigma\alpha^+) = (x\alpha^+) + i(\sigma[x\alpha^+]). \quad (26,43)$$

Последнее равенство легко может быть проверено, если вспомнить, что  $\sigma_1^2 = 1$ ,  $\sigma_1\sigma_2 = -\sigma_2\sigma_1 = i\sigma_3$ , и т. д.

Принимая во внимание ещё условие поперечности электромагнитного поля  $(\boldsymbol{\kappa}\mathbf{a}) = 0$ , получаем:

$$\psi_1 = e \sqrt{\frac{2\pi}{c\hbar L^3}} \sum_{\boldsymbol{\kappa}} \frac{(\boldsymbol{\kappa}\mathbf{a}^+)_{\boldsymbol{\kappa}} + i(\boldsymbol{\sigma}[\boldsymbol{\kappa}\mathbf{a}^+])}{2k_0 \boldsymbol{\kappa} \sqrt{\boldsymbol{\kappa}}} b e^{-i\boldsymbol{\kappa}t(k_0 - \boldsymbol{\kappa}) - i\boldsymbol{\kappa}\mathbf{r}}. \quad (26,44)$$

Подставляя (26,44) в (26,35) и учитывая соотношение (26,43), а также то, что при отсутствии в начальный момент фотонов

$$a_n a_{n'}^{\dagger} = \left( \delta_{nn'} - \frac{\boldsymbol{\kappa}_n \boldsymbol{\kappa}_{n'}}{\boldsymbol{\kappa}^2} \right) \delta_{\boldsymbol{\kappa}\boldsymbol{\kappa}'}, \quad (26,40)$$

находим для собственной поперечной энергии следующее выражение:

$$V_{11} b = \frac{\pi e^2}{L^3 k_0} \sum_{\boldsymbol{\kappa}} \frac{\boldsymbol{\kappa}(\mathbf{a}\mathbf{a}^+) + i(\boldsymbol{\sigma}[\mathbf{a}\mathbf{a}^+])_{\boldsymbol{\kappa}} - i\rho_1(\boldsymbol{\kappa}[\mathbf{a}\mathbf{a}^+]) - (\boldsymbol{\kappa}\boldsymbol{\kappa})(\mathbf{a}\mathbf{a}^+)}{\boldsymbol{\kappa}^2} b.$$

Из (26,45) следует:

$$(\mathbf{a}\mathbf{a}^+) = 2, \quad [\mathbf{a}\mathbf{a}^+] = 0.$$

Переходя к интегралу

$$\frac{1}{L^3} \sum_{\boldsymbol{\kappa}} \rightarrow \frac{1}{8\pi^3} \int d^3\boldsymbol{\kappa} = \frac{1}{8\pi^3} \int_0^{\infty} \boldsymbol{\kappa}^2 d\boldsymbol{\kappa} \oint d\omega,$$

а также принимая во внимание, что при интегрировании по углам

$$\oint f(\boldsymbol{\kappa}) d\omega = 4\pi f(\boldsymbol{\kappa}),$$

$$\oint (\boldsymbol{\kappa}\boldsymbol{\kappa}) f(\boldsymbol{\kappa}) d\omega = 0,$$

находим для собственной поперечной энергии следующее выражение:

$$V_{11} = \frac{e^2 \hbar}{\pi m c} \int_0^{\infty} \boldsymbol{\kappa} d\boldsymbol{\kappa}. \quad (26,46)$$

Таким образом, второе приближение для энергии взаимодействия электрона с полем излучения расходится. Эта поперечная собственная энергия электрона существует независимо от электростатической (продольной) собственной энергии (25,33)

$$V_{11}^e = \frac{e^2}{\pi} \int_0^{\infty} dx.$$

В противоположность электростатической собственной энергии, имеющей классическую природу, поперечная собственная энергия представляет собою квантовый эффект. Это можно видеть непосредственно из последних соотношений: собственная электростатическая энергия не зависит от  $\hbar$ , а поперечная энергия при  $\hbar \rightarrow 0$ , т. е. при переходе к классической теории, исчезает.

Отсутствие сходимости во втором (и выше) приближении является характерной чертой теории вторичного квантования. Таким образом, в квантовой электродинамике появляются новые бесконечности, которые отсутствовали в классической теории. В дальнейших вычислениях, связанных с эффектами второго порядка, мы эту бесконечную энергию будем просто отбрасывать. Более подробно к вопросу о поперечной энергии мы вернёмся в гл. IV, § 44 при исследовании ряда проблем, связанных с вопросом собственной массы электрона.

### § 27. Инвариантная форма взаимодействия двух релятивистских частиц (формула Мёллера)

В предыдущем параграфе мы нашли приближённое (с точностью до членов порядка  $\frac{v^2}{c^2}$ ) выражение для энергии взаимодействия двух электронов. Мы можем ограничиться добавлением брейтовской поправки к энергии взаимодействия при исследовании лишь сравнительно медленных движений электронов (например, в атоме гелия, лития и т. д.). При рассеянии быстрых электронов ( $v \sim c$ ) разложение взаимодействия по величине  $\left(\frac{v}{c}\right)^2$  теряет

свой смысл. В этом случае необходимо пользоваться формулой Мёллера, также учитывающей запаздывающее взаимодействие, но представляющей собой инвариантное относительно скоростей выражение, являющееся результатом разложения по степеням постоянной тонкой структуры

$$\alpha = \frac{e^2}{\hbar c}.$$

В нулевом приближении мы будем считать электроны свободными, а кулоновское взаимодействие и взаимодействие через поперечное поле, имеющие в релятивистском случае один и тот же порядок, будем рассматривать как возмущение.

Вычислим матричный элемент взаимодействия, приводящий к переходу системы, состоящей из двух электронов, из начального состояния (энергию и импульс каждого из электронов обозначим соответственно через  $c\hbar K_1^0$ ,  $\hbar k_1^0$  и  $c\hbar K_2^0$ ,  $\hbar k_2^0$ ) в конечное (энергия и импульс становятся равными  $c\hbar K_1$ ,  $\hbar k_1$  и  $c\hbar K_2$ ,  $\hbar k_2$ ).

Для нулевого приближения имеем уравнение

$$\left( -\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial t} - H_1 - H_2 \right) \psi_0 = 0, \quad (27,1)$$

где

$$H_1 = \frac{\hbar c}{i} (\alpha_1 \nabla_1) + \rho_{31} mc^2.$$

$$H_2 = \frac{\hbar c}{i} (\alpha_2 \nabla_2) + \rho_{32} mc^2.$$

Решение его имеет вид:

$$\psi_0 = \psi_{01} \psi_{02} = \frac{1}{L^3} b_1^0 b_2^0 e^{-ict} (K_1^0 + K_2^0) + i k_1^0 r_1 + i k_2^0 r_2, \quad (27,2)$$

причём функции  $\psi_{01}$ ,  $\psi_{02}$  удовлетворяют соответственно уравнениям

$$\begin{aligned} \left( -\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial t} - H_1 \right) \psi_{01} &= 0, \\ \left( -\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial t} - H_2 \right) \psi_{02} &= 0. \end{aligned} \quad (27,3)$$

Учитывая прежде всего кулоновское взаимодействие между двумя электронами

$$V = \frac{e^2}{|r_1 - r_2|} = \frac{4\pi e^2}{L^3} \sum_{\mathbf{x}} \frac{e^{i\mathbf{c}\mathbf{x} \cdot (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)}}{x^2}, \quad (27,4)$$

мы можем уравнение Дирака для двух частиц записать в виде

$$\left( -\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial t} - H_1 - H_2 \right) \psi = V\psi.$$

Поскольку величина энергии кулоновского взаимодействия имеет второй (относительно  $e$ ) порядок ( $V \sim e^2$ ), решение последнего уравнения будем искать в виде

$$\psi = \psi_0 + \psi_2 + \dots,$$

где

$$\left( -\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial t} - H_1 - H_2 \right) \psi_2 = V\psi_0, \quad (27,5)$$

и нулевое приближение  $\psi_0$  определяется формулой (27,2). Полагая

$$\psi_2 = \sum_{k_1, k_2} C''_{k_1 k_2}(t) \frac{1}{L^3} b_1 b_2 e^{-i\mathbf{c}\mathbf{t} \cdot (\mathbf{K}_1 + \mathbf{K}_2) + i\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r}_1 + i\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r}_2} \quad (27,6)$$

и подставляя (27,6) в (27,5), получаем уравнение для определения коэффициентов  $C''$ :

$$\sum_{k_1, k_2} \left( -\frac{\hbar}{i} \frac{\partial C''}{\partial t} \frac{1}{L^3} b_1 b_2 e^{-i\mathbf{c}\mathbf{t} \cdot (\mathbf{K}_1 + \mathbf{K}_2) + i\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r}_1 + i\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r}_2} \right) = V\psi_0.$$

Умножая последнее выражение на

$$\frac{1}{L^3} b_1^+ b_2^+ e^{i\mathbf{c}\mathbf{t} \cdot (\mathbf{K}_1 + \mathbf{K}_2) - i\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r}_1 - i\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r}_2}$$

и интегрируя обе части равенств по всему пространству, получаем:

$$\begin{aligned} -\frac{\hbar}{i} \dot{C}'' &= \\ &= \frac{4\pi e^2}{L^3} \sum_{\mathbf{x}} \frac{(b_1^+ b_1^0)(b_2^+ b_2^0)}{x^2} \delta_{\mathbf{x}, -(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_1^0)} \delta_{\mathbf{x}, (\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_2^0)} e^{i\mathbf{c}\mathbf{t} \cdot (\mathbf{K}_1 + \mathbf{K}_2 - \mathbf{K}_1^0 - \mathbf{K}_2^0)}. \end{aligned}$$



Отсюда видно, что коэффициенты  $C''$  не обращаются в нуль только в том случае, если имеет место сохранение импульса:

$$\mathbf{x} = \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_2^0 = -(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_1^0);$$

матричный элемент взаимодействия, характеризующий этот переход, имеет в этом случае вид:

$$V''_{\mathbf{k}\mathbf{k}^0} = \frac{4\pi e^2 (b_1^\dagger b_1^0) (b_2^\dagger b_2^0)}{L^3 |\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_1^0|^2}. \quad (27,7)$$

Соответствующие значения для коэффициентов  $C''$ , определяющие волновую функцию  $\psi_2$ , связаны с  $V''_{\mathbf{k}\mathbf{k}^0}$  соотношением

$$-\frac{\hbar}{i} \dot{C}'' = V''_{\mathbf{k}\mathbf{k}^0} e^{-ict} (K_1^0 + K_2^0 - K_1 - K_2) \delta_{\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_2^0, -(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_1^0)}. \quad (27,8)$$

Мы получим в релятивистском случае матричный элемент того же порядка, если учтём так же, как и при выводе формулы Брейта, возможность испускания фотона одним электроном с последующим его поглощением другим электроном.

Запишем систему приближённых уравнений, считая что в начальный момент фотоны отсутствуют, т. е.  $a_n'^+ a_n = 0$ :

$$\left( -\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial t} - H_1 - H_2 \right) \psi_0 = 0, \quad (27,9)$$

$$\left( -\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial t} - H_1 - H_2 \right) \psi_1 = (U^+(1) + U^+(2)) \psi_0, \quad (27,10)$$

$$\left( -\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial t} - H_1 - H_2 \right) \psi_2 = (U(1) + U(2)) \psi_1, \quad (27,11)$$

где

$$U = \frac{e}{L^{3/2}} \sum_{\mathbf{x}} \sqrt{\frac{2\pi c \hbar}{\mathbf{x}}} (\alpha \alpha) e^{-i\mathbf{x}t + i\mathbf{x}r};$$

$$U^+ = \frac{e}{L^{3/2}} \sum_{\mathbf{x}} \sqrt{\frac{2\pi c \hbar}{\mathbf{x}}} (\alpha \alpha^+) e^{i\mathbf{x}t - i\mathbf{x}r}. \quad (27,12)$$

Так же, как и в предыдущем случае, решение для  $\psi_0$  может быть представлено в виде

$$\psi_0 = \psi_{01} \psi_{02}, \quad (27,13)$$

причём  $\psi_{01}$  и  $\psi_{02}$  удовлетворяют уравнениям (27,3), а функция от числа частиц  $f(N) = \prod \delta_{N0}$  включена в  $\psi_0$ .

Из формулы (27,10) мы находим решение для  $\psi_1$  в виде

$$\psi_1 = \psi_{02} \frac{U^+(1) \psi_{01}}{-\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial t} - H_1} + \psi_{01} \frac{U^+(2) \psi_{02}}{-\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial t} - H_2}, \quad (27,14)$$

которое проще всего проверить, подставляя непосредственно (27,14) в (27,10).

Полагая

$$\psi_2 = \sum_{k_1, k_2} C'_{k_1 k_2}(t) \frac{1}{L^3} b_1 b_2 e^{-ict(K_1 + K_2) + ik_1 r_1 + ik_2 r_2} \quad (27,15)$$

и подставляя в правую часть равенства (27,11) вместо  $\psi_1$  значение (27,14), находим следующее уравнение для определения коэффициентов:

$$\begin{aligned} -\frac{\hbar}{i} \dot{C}' = \frac{2\pi e^2}{L^3} \sum_{\mathbf{x}} \frac{1}{\mathbf{x}} b_1^\dagger b_2^\dagger \left\{ (\mathbf{a}_2 \mathbf{a}) \frac{K_1^0 - \mathbf{x} + (\mathbf{a}_1 (k_1^0 - \mathbf{x})) + \rho_{31} k_0}{(K_1^0 - \mathbf{x})^2 - (k_1^0 - \mathbf{x})^2 - k_3^2} (\mathbf{a}_1 \mathbf{a}^\dagger) + \right. \\ \left. + (\mathbf{a}_1 \mathbf{a}) \frac{K_2 - \mathbf{x} + (\mathbf{a}_2 (k_2^0 + \mathbf{x})) + \rho_{32} k_0}{(K_2^0 - \mathbf{x})^2 - (k_2^0 + \mathbf{x})^2 - k_3^2} (\mathbf{a}_2 \mathbf{a}^\dagger) \right\} b_1^0 b_2^0 \times \\ \times \delta_{\mathbf{x}, -(k_1 - k_1^0)} \delta_{\mathbf{x}, (k_2 - k_2^0)} e^{ict(K_1^0 + K_2^0 - K_1 - K_2)}, \end{aligned}$$

причём в правой части последнего равенства мы отбросили бесконечные члены, связанные с поперечной энергией самодействия.

На основании последнего соотношения мы заключаем, что отличными от нуля будут только такие значения коэффициентов  $C'$ , для которых имеет место закон сохранения импульса:

$$\mathbf{x} = -(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_1^0) = (\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_2^0).$$

В этом случае матричный элемент  $V'_{kk_0}$  принимает вид:

$$V'_{kk_0} = \frac{2\pi e^2}{L^3 \chi} b_1^+ b_2^+ \left\{ (\alpha_2 \alpha) \frac{K_1^0 - \chi + (\alpha_1 k_1) + \rho_{31} k_0}{(K_1^0 - \chi)^2 - K_1^2} (\alpha_1 \alpha^+) - \right. \\ \left. - (\alpha_1 \alpha) \frac{K_2^0 - \chi + (\alpha_2 k_2) + \rho_{32} k_0}{(K_2^0 - \chi)^2 - K_2^2} (\alpha_2 \alpha^+) \right\} b_1^0 b_2^0. \quad (27,16)$$

Для дальнейших упрощений учтём следующие равенства:

$$b_1^+ (K_1 - (\alpha_1 k_1) - \rho_{31} k_0) = 0, \quad (K_1^0 - (\alpha_1 k_1^0) - \rho_{31} k_0) b_1^0 = 0, \\ (\alpha_2 \alpha) (\alpha_1 \alpha^+) = (\alpha_1 \alpha_2) - \frac{(\chi \alpha_1) (\chi \alpha_2)}{\chi^2},$$

$$b_1^+ (\chi \alpha_1) b_1^0 = b_1^+ ((k_1^0 \alpha_1) - (k_1 \alpha_1)) b_1^0 = b_1^+ (K_1^0 - K_1) b_1^0.$$

С учётом этих равенств находим:

$$V'_{kk_0} = \frac{2\pi e^2}{L^3 \chi} \left( \frac{1}{K_1^0 - K_1 - \chi} + \frac{1}{K_2^0 - K_2 - \chi} \right) \times \\ \times b_1^+ b_2^+ \left( (\alpha_1 \alpha_2) + \frac{(K_1^0 - K_1)(K_2^0 - K_2)}{\chi^2} \right) b_1^0 b_2^0. \quad (27,17)$$

Рассмотрим теперь случай упругого рассеяния двух свободных частиц, когда отсутствует излучение. В этом случае закон сохранения энергии имеет вид

$$\varepsilon = -(K_1 - K_1^0) = (K_2 - K_2^0).$$

Выражение (27,17) легко может быть приведено к виду:

$$V'_{kk_0} = \frac{4\pi e^2}{L^3} \frac{1}{\chi^2 - \varepsilon^2} b_1^+ b_2^+ \left( \frac{\varepsilon^2}{\chi^2} - (\alpha_1 \alpha_2) \right) b_1^0 b_2^0. \quad (27,18)$$

Отсюда следует, что суммарная вероятность перехода будет связана с коэффициентом  $C = C' + C''$ :

$$-\frac{\hbar}{i} \dot{C} = V_{kk_0} e^{-ict} (K_1^0 + K_2^0 - K_1 - K_2) \delta_{k_2 - k_2^0, -(k_1 - k_1^0)}.$$

где матричный элемент энергии взаимодействия даётся формулой

$$V_{kk_0} = V''_{kk_0} + V'_{kk_0} = \\ = \frac{4\pi e^2}{L^3} \frac{1}{\chi^2 - \varepsilon^2} b_1^+ b_2^+ (1 - (\alpha_1 \alpha_2)) b_1^0 b_2^0. \quad (27,19)$$

Это выражение и есть формула Мёллера; оно является релятивистским инвариантным, поскольку как и числитель, так и знаменатель представляют собою скалярное произведение двух четырёхмерных векторов. Инвариантность разложения (27,19) можно было предвидеть с самого начала наших расчётов, поскольку функцию взаимодействия, образующую инвариант, мы раскладывали по инвариантной величине постоянной тонкой структуры  $\alpha$ .

Определение следующих приближений для энергии взаимодействия является весьма сложным и до сих пор сделано не было.

В частном случае сравнительно малых скоростей ( $\frac{\epsilon^2}{\chi^2} \sim \beta^2$ ) выражение (27,19) принимает вид:

$$V_{kk_0} = \frac{4\pi e^2}{L^3} b_1^+ b_2^+ \left( 1 + \frac{\epsilon^2}{\chi^2} - (\alpha_1 \alpha_2) \right) b_1^0 b_2^0. \quad (27,20)$$

Последнюю формулу мы могли бы получить, рассматривая переход электронов из одного состояния в другое под действием кулоновского и брейтовского взаимодействий. Таким образом, если в разложении Мёллера ограничиться членами порядка  $\frac{v^2}{c^2}$ , мы получаем формулу Брейта (26,33) как дополнение к кулоновскому взаимодействию.

Представление энергии взаимодействия в форме (27,19) является весьма удобным для вычислений различных эффективных сечений, которые зависят от матричных элементов. В частности, Мёллером с помощью этой формулы было исследовано рассеяние быстрых электронов электронами. За подробностями мы отсылаем читателя к специальной литературе<sup>1)</sup>.

## § 28. Дипольное излучение; коэффициенты Эйнштейна

**а) Постановка вопроса в квантовой механике.** Согласно квантовой теории излучение и поглощение фотонов атомом связано с переходом электронов из одного энергетического состояния в другое. Для простоты рас-

<sup>1)</sup> См., например, Н. Мотт и Г. Месси, Теория атомных столкновений (1. с.), стр. 430.

смотрим атомы, имеющие только два энергетических состояния  $a$  и  $b$  ( $E_a < E_b$ ).

Ещё в 1917 г. Эйнштейн показал, что в атоме должны существовать спонтанные и вынужденные переходы электронов. Вероятность спонтанного (самопроизвольного) перехода в единицу времени характеризуется коэффициентом  $A_{ba}$ . Спонтанный переход возможен только с верхнего уровня на нижний. При этом испускается квант, частота которого может быть найдена из закона сохранения энергии:

$$h\nu = E_b - E_a; \quad \nu = \frac{E_b - E_a}{h}. \quad (28,1)$$

Вероятность спонтанного излучения  $A_{ba}$  связана с соответствующей интенсивностью излучения  $W_{ba}$  соотношением<sup>1)</sup>

$$W_{ba} = h\nu A_{ba} N_b, \quad (28,2)$$

где  $N_b$  — число атомов в состоянии  $b$ , а  $h\nu$  является энергией, которую теряет атом при переходе из одного энергетического состояния в другое.

Далее, под действием излучения возможны вынужденные (индуцированные) переходы как  $a \rightarrow b$  (с поглощением фотона), так и  $b \rightarrow a$  (с испусканием фотона).

Вероятность вынужденного излучения, отнесённая к единице времени и единице спектральной плотности излучения, называется коэффициентом вынужденного излучения и обозначается через  $B$ .

Первоначально связь между этими коэффициентами была установлена из рассмотрения статистического равновесия атомов с излучением (формула Планка). Число атомов в состояниях  $a$  и  $b$  при температуре  $T$  пропорционально

<sup>1)</sup> При  $h \rightarrow 0$  формула (28,2) должна переходить в классическую формулу, определяющую количество энергии, которую излучает электрон в среднем в единицу времени:

$$\lim_{h \rightarrow 0} W_{ba} = W = \frac{2}{3} \frac{e^2 \omega^2}{c^3},$$

где  $\omega$  — ускорение электрона.

соответственно экспонентам  $e^{-\frac{E_a}{kT}}$  и  $e^{-\frac{E_b}{kT}}$ , где  $k$  — постоянная Больцмана. Приравнявая число переходов  $b \rightarrow a$  в единицу времени к числу переходов  $a \rightarrow b$ , мы получаем условие статистического равновесия:

$$(A_{ba} + \rho_\nu B_{ba}) e^{-\frac{E_b}{kT}} = \rho_\nu B_{ab} e^{-\frac{E_a}{kT}},$$

где  $\rho_\nu B_{ba}$  и  $\rho_\nu B_{ab}$  — вероятности вынужденных переходов ( $\rho_\nu$  — плотность излучения), откуда находим:

$$\rho_\nu = \frac{\frac{A_{ba}}{B_{ba}}}{\frac{B_{ab}}{B_{ba}} e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}, \quad (28,3)$$

причём

$$\nu = \frac{E_b - E_a}{h}.$$

Как известно, формула Планка имеет вид

$$\rho_\nu = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3 (e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1)}. \quad (28,4)$$

Сравнивая две последние формулы, Эйнштейн нашёл соотношение между коэффициентами  $A$  и  $B$ :

$$A_{ba} = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} B_{ba}, \quad (28,5)$$

причём он считал  $B_{ba} = B_{ab}$ , что было в дальнейшем доказано (см. ниже).

Вероятность вынужденного перехода  $B$  может быть вычислена с помощью обычных методов квантовой механики без квантовой теории излучения, если рассматривать электромагнитное поле как возмущение, приводящее к вынужденным переходам. Что же касается энергии возмущения, заставляющей атомы спонтанно переходить из одного энергетического состояния в другое, то квантовая механика в начале своего развития не могла объ-

яснить её происхождения: поэтому для определения коэффициента  $A$  приходилось вводить ряд необоснованных предположений.

б) **Постановка вопроса в квантовой электродинамике.** Спонтанное излучение получило удовлетворительное объяснение только в квантовой электродинамике. Согласно квантовой электродинамике электроны и поле излучения образуют две квантовомеханические системы, взаимодействие между которыми не исчезает даже в том случае, когда в начальный момент фотоны отсутствуют. Это взаимодействие обуславливает спонтанные переходы невозмущённой системы с последующим испусканием фотонов.

Для нахождения коэффициентов  $A$  и  $B$  прежде всего запишем уравнение Дирака, учитывающее движение электрона в квантованном электромагнитном поле:

$$\left( -\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial t} - H \right) \psi(N') = (U + U^+) \psi(N), \quad (28,6)$$

где гамильтониан  $H$  связан с потенциальной энергией  $V$  электрона в атоме соотношением

$$H = \frac{\hbar}{i} (\boldsymbol{\alpha} \nabla) + \rho_3 mc^2 + V,$$

а функция взаимодействия электронов атома с полем фотонов даётся выражениями

$$\begin{aligned} U &= \frac{e}{L^{3/2}} \sum_{\mathbf{x}} \sqrt{\frac{2\pi c \hbar}{x}} (\boldsymbol{\alpha} \mathbf{a}) e^{-icx t + ixr}, \\ U^+ &= \frac{e}{L^{3/2}} \sum_{\mathbf{x}} \sqrt{\frac{2\pi c \hbar}{x}} (\boldsymbol{\alpha} \mathbf{a}^+) e^{icx t - ixr}. \end{aligned} \quad (28,7)$$

Кроме того, следует заметить, что функция  $\psi$  зависит не только от числа фотонов  $N$ , но также и от координат  $\mathbf{r}$  и  $t$ . Амплитуды  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{a}^+$  действуют на функцию от числа частиц  $f(N)$ , которая включена в волновую функцию  $\psi(N)$  ( $\psi(N) = f(N) \psi$ ), причём действие амплитуд  $\mathbf{a}^+$  и  $\mathbf{a}$  приводит соответственно к появлению и поглощению частицы.

Уравнение (28,6) эквивалентно системе следующих двух уравнений:

$$\begin{aligned} \left( -\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial t} - H \right) \psi(N+1) &= U^+ \psi(N), \\ \left( -\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial t} - H \right) \psi(N) &= U \psi(N+1), \end{aligned} \quad (28,8)$$

где  $N$  — общее число частиц. Отсюда видно, что при действии оператора  $U^+$  на функцию от числа фотонов общее число частиц увеличивается на единицу, при действии оператора  $U$  — уменьшится на единицу.

Перестановочные соотношения для амплитуд  $a$  и  $a^+$  имеют вид:

$$a_s a_s'^+ - a_s'^+ a_s = \left( \delta_{ss'} - \frac{x_s x_{s'}}{x^2} \right) \delta_{xx'}, \quad (28,9)$$

т. е. квадратичные комбинации амплитуд имеют следующие собственные значения:

$$\begin{aligned} a_s a_s'^+ &= \left( \delta_{ss'} - \frac{x_s x_{s'}}{x^2} \right) (n+1) \delta_{xx'}, \\ a_s'^+ a_s &= \left( \delta_{ss'} - \frac{x_s x_{s'}}{x^2} \right) n \delta_{xx'}, \end{aligned} \quad (28,10)$$

где  $n$  — число частиц, обладающих импульсом  $\hbar \mathbf{x}$ , усреднённых по двум возможным состояниям поляризации. В частности, если в состоянии  $\mathbf{x}$  частицы отсутствуют, то  $n=0$ . При наличии же одной частицы  $n = \frac{0+1}{2} = \frac{1}{2}$ .

Общее число частиц  $N$  будет равно

$$N = \sum_{\mathbf{x}} 2n. \quad (28,11)$$

Решение основного уравнения

$$\left( -\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial t} - H \right) \psi = 0. \quad (28,12)$$



представим в виде

$$\psi = e^{-\frac{iE_s}{\hbar} t} \psi_s, \quad (28,13)$$

причём

$$(E_s - H) \psi_s = 0. \quad (28,14)$$

а функции  $\psi_s$  удовлетворяют условиям ортонормированности

$$\int \psi_s^\dagger \psi_s d^3x = \delta_{ss'}. \quad (28,15)$$

В нашем случае при наличии двух квантовых состояний  $b$  и  $a$  ( $E_b > E_a$ ) решение системы (28,8) будем искать в виде:

$$\psi(N) = C_b(t) e^{-\frac{iE_b}{\hbar} t} \psi_b f(N), \quad (28,16)$$

$$\psi(N+1) = C_a(t) e^{-\frac{iE_a}{\hbar} t} \psi_a f(N+1),$$

причём величины  $|C_b|^2$  и  $|C_a|^2$  характеризуют вероятность нахождения частицы соответственно в состояниях  $b$  и  $a$ .

Подставляя (28,16) в (28,8) и принимая во внимание действие операторов  $U$  и  $U^+$  на функцию  $f(N)$ :

$$U^+ f(N) \rightarrow f(N+1), \quad U f(N+1) \rightarrow f(N),$$

получим следующее уравнение для определения коэффициентов  $C_a$  и  $C_b$ :

$$\begin{aligned} -\frac{\hbar}{i} \frac{\partial C_a}{\partial t} e^{-\frac{iE_a}{\hbar} t} \psi_a &= U^+ C_b \psi_b e^{-\frac{iE_b}{\hbar} t}, \\ -\frac{\hbar}{i} \frac{\partial C_b}{\partial t} e^{-\frac{iE_b}{\hbar} t} \psi_b &= U C_a \psi_a e^{-\frac{iE_a}{\hbar} t}, \end{aligned} \quad (28,17)$$

причём мы опустили функцию от числа частиц, поскольку её влияние будет полностью учтено перестановочными соотношениями (28,10).

Умножая последние уравнения соответственно на  $e^{i\frac{E_a}{\hbar}} \psi_a^+$  и  $e^{i\frac{E_b}{\hbar}} \psi_b^+$  и интегрируя по всему пространству, получаем:

$$\dot{C}_a = -\frac{i}{\hbar} C_b e^{-icx_{ba}t} \int \psi_a^+ U^+ \psi_b d^3x, \quad (28,18)$$

$$\dot{C}_b = -\frac{i}{\hbar} C_a e^{icx_{ba}t} \int \psi_b^+ U \psi_a d^3x, \quad (28,19)$$

где

$$x_{ba} = \frac{E_b - E_a}{c\hbar} = \frac{2\pi\nu}{c} > 0. \quad (28,20)$$

Уравнения (28,18) и (28,19) мы должны решать при определённых условиях, которые зависят от начального состояния атома. Прежде всего рассмотрим переходы с излучением, т. е. переходы из состояния  $b$  в состояние  $a$  ( $b \rightarrow a$ ). Тогда мы должны предположить, что при  $t=0$  электрон с достоверностью находится в состоянии  $b$ , в то время как состояние  $a$  не занято электроном:

$$C_b(0) = 1 \text{ и } C_a(0) = 0. \quad (28,21)$$

Решим систему уравнений (28,18) и (28,19) по методу теории возмущений, рассматривая  $U$  и  $U^+$  как возмущение.

Согласно (28,18) коэффициент  $C_a$  будет пропорционален возмущению  $U$ . Поэтому, ограничиваясь членами первого порядка малости, мы можем правую часть соотношения (28,19) положить равной нулю. Тогда находим, что в течение всего процесса излучения коэффициент  $C_b$  останется равным единице:

$$C_b(t) = C_b(0) = 1. \quad (28,22)$$

Этот метод решения задачи носит название метода теории возмущений. К сожалению, за редким исключением точная математическая теория квантовых процессов, как правило, является невозможной, поэтому при рассмотрении конкретных задач приходится пользоваться приближёнными методами. С помощью метода теории воз-

мущений мы ищем по существу решение в виде ряда, причём малым параметром разложения чаще всего является постоянная тонкой структуры.

Однако не всегда теория возмущения приводит к цели. Например, при исследовании явлений, связанных с условиями резонанса, или рассеянии при больших энергиях, приближённые значения для эффективных сечений расходятся. Поэтому при исследовании подобных явлений мы должны пользоваться более точными способами решения уравнений (см. § 30 и 35).

Ограничиваясь в этом параграфе приближённым методом теории возмущений, мы найдём следующее выражение для коэффициента  $C_a$ , если в формулу (28,18) вместо  $U^+$  подставим разложение (28,7):

$$C_a = \frac{ei}{\hbar L^{3/2}} \sum_{\mathbf{x}} \sqrt{\frac{2\pi c \hbar}{\mathbf{x}}} (\boldsymbol{\alpha}_{ab} \boldsymbol{\alpha}^+) \int_0^t e^{-ict (\mathbf{x}_{ba} - \mathbf{x})} dt, \quad (28,23)$$

причём матричный элемент  $\boldsymbol{\alpha}_{ab}$  имеет вид

$$\boldsymbol{\alpha}_{ab} = \int \psi_a^+ e^{-i\mathbf{v} \cdot \mathbf{r}} \boldsymbol{\alpha} \psi_b d^3 x. \quad (28,24)$$

Как известно, вероятность пребывания электрона в состоянии  $a$  равна  $C_a^+ C_a$ . Поэтому вероятность перехода  $b \rightarrow a$  в единицу времени определяется формулой

$$w_{ba} = \frac{\partial}{\partial t} C_a^+ C_a = \frac{e^2 c}{4\pi^2 \hbar} \int (n+1) \frac{d^3 \mathbf{x}}{\mathbf{x}} \times \\ \times \left( (\boldsymbol{\alpha}_{ab}^+ \boldsymbol{\alpha}_{ab}) - \frac{(\boldsymbol{\alpha}_{ab}^+ \mathbf{x})(\boldsymbol{\alpha}_{ab} \mathbf{x})}{\mathbf{x}^2} \right) \frac{\partial}{\partial t} \left| \int_0^t e^{-ict (\mathbf{x}_{ba} - \mathbf{x})} dt \right|^2. \quad (28,25)$$

В этой формуле мы сделали переход к интегралу Фурье  $\left( \frac{1}{L^3} \sum_{\mathbf{x}} \rightarrow \frac{1}{8\pi^3} \int d^3 \mathbf{x} \right)$  и использовали равенство

$$(\boldsymbol{\alpha}_{ab}^+ \boldsymbol{a})(\boldsymbol{\alpha}_{ab} \boldsymbol{a}^+) = (\boldsymbol{\alpha}_{ab}^+ \boldsymbol{\alpha}_{ab}) - \frac{(\boldsymbol{\alpha}_{ab}^+ \mathbf{x})(\boldsymbol{\alpha}_{ab} \mathbf{x})}{\mathbf{x}^2}. \quad (28,26)$$

Для дальнейших вычислений воспользуемся равенством

$$\frac{\partial}{\partial t} \left| \int_0^t e^{-ict(x_{ba}-x)} dt \right|^2 = \frac{2\pi}{c} \delta(x_{ba}-x), \quad (28,27)$$

которое имеет место для достаточно больших значений времени  $t$ . В самом деле, легко показать, что

$$\frac{\partial}{\partial t} \left| \int_0^t e^{-ict(x_{ab}-x)} dt \right|^2 = \frac{2 \sin ct(x-x_{ba})}{c(x-x_{ba})}, \quad (28,28)$$

а из формулы Дирихле

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_{-a}^a f(x) \frac{\sin ct x}{x} dx = f(0)$$

следует равенство (28,27)

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\sin ct x}{x} = \pi \delta(x).$$

Равенство (28,27) приводит к закону сохранения энергии. Действительно, благодаря наличию  $\delta$ -функции производится замена энергии  $c\hbar x$  излучаемого фотона на энергию  $c\hbar x_{ba}$ , которую теряет атом.

**в) Область применения квантовой теории.** Как мы только что выяснили, равенство (28,27) имеет место лишь для больших значений  $t$ . В противном случае функция (28,28) будет практически отлична от нуля для всех значений  $x$ , удовлетворяющих условию

$$ct(x-x_{ba}) \sim 1.$$

Принимая во внимание, что величина  $t = t - 0 = \Delta t$  есть время, которое прошло после начала процесса, а величина  $c\hbar(x-x_{ba}) \sim \Delta E$  представляет собой «размазывание» энергии фотонов, мы находим связь между этими величинами:

$$\Delta t \Delta E \sim \hbar. \quad (28,29)$$

Заметим, что «размазывание» энергии никоим образом не противоречит закону сохранения энергии даже в рассматриваемой приближённой теории переходных процес-

сов. В самом деле, увеличивая время  $t$ , мы можем с любой точностью определить энергию фотона. Неточность, связанная с определением энергии фотона, является весьма характерной для любого волнового процесса и представляет собой (по существу) уширение уровня энергии, связанное с конечным значением длительности излучения.

Принимая во внимание, что  $\frac{\Delta E}{\hbar} = \Delta\omega$ , мы имеем вместо (28,29):

$$\Delta t \Delta\omega \sim 1.$$

Последнее выражение, определяющее связь между шириной спектральной линии  $\Delta\omega$  и длительностью  $\Delta t$  излучения, хорошо известно из классической оптики. Соотношение (28,29) называется четвёртым соотношением неточностей.

Остальные три соотношения неточностей

$$\Delta p_x \Delta x \sim \hbar \quad \text{и т. д.} \quad (28,29a)$$

являются следствием волновых свойств частиц<sup>1)</sup>.

<sup>1)</sup> Волновой характер соотношения (28,29a) легко показать следующим образом. Допустим, что мы имеем гармоническую функцию, ограниченную участком  $\Delta x$ :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < -\frac{\Delta x}{2}, \\ e^{ikh_0 x} & \text{при } -\frac{\Delta x}{2} < x < \frac{\Delta x}{2}, \\ 0 & \text{при } x > \frac{\Delta x}{2}. \end{cases}$$

Разложим функцию  $f(x)$  в интеграл Фурье

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} f(k) dk,$$

т. е. представим её как результат наложения бесконечного числа

Соотношение (28,29а) показывает, что чем точнее задана координата ( $\Delta x$ ), тем менее точно мы можем вычислить импульс частицы ( $\Delta p \sim \frac{\hbar}{\Delta x}$ ), и наоборот.

Некоторые представители реакционного махистского направления, исходя из субъективно-идеалистического понимания опыта, который, по их мнению, приводит лишь к «комплексу ощущений» безотносительно к объективной реальности, пытались связать соотношение неточностей с невозможностью познания реального микромира.

В связи с этим покажем полную несостоятельность одной попытки обосновать некоторые основные положения квантовой механики с помощью «мысленного» (т. е. воображаемого) эксперимента, который был предложен Гейзенбергом и усиленно в различных вариантах развивается вплоть до наших дней.

Мысленный эксперимент Гейзенберга<sup>1)</sup> сводится к следующему. Для того чтобы определить положение электрона в микроскопе, необходимо осветить его светом

неограниченных волн со всевозможными волновыми числами. Амплитуда  $f(k)$  имеет вид

$$f(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx = \frac{\sin(k - k_0) \frac{\Delta x}{2}}{\pi(k - k_0)}.$$

Отсюда видно, что максимальная амплитуда соответствует значению  $k$ , равному  $k_0$ :

$$f(k_0) = \frac{\Delta x}{2\pi}.$$

Кроме того, мы можем считать отличными от нуля те амплитуды, для которых  $\Delta k \Delta x \sim 1$ , где  $\Delta k = k - k_0$ , откуда, принимая во внимание, что

$$k = \frac{p_x}{\hbar},$$

получаем волновое соотношение неточностей (28,29а). Более строго соотношение неточностей может быть получено из волнового уравнения (см., например, Д. И. Б л о х и н ц е в, Основы квантовой механики, изд. 2, М.—Л., 1949, стр. 63).

<sup>1)</sup> В. Гейзенберг, Физические принципы квантовой теории, Л.—М., 1932, стр. 21.

длиной волны  $\lambda$ , причём согласно известным законам оптики координату в лучшем случае можно измерить с точностью до величины  $\lambda$ , т. е.

$$\Delta x \sim \lambda.$$

Для более точного определения координаты следует освещать электрон светом малой длины волны. Однако чем меньше длина волны, тем больше импульс фотона  $\frac{h}{\lambda}$ , который при соударении может передаваться электрону. Поэтому импульс электрона можно определить с точностью до величины

$$\Delta p \sim \frac{h}{\lambda},$$

откуда видно, что для более точного определения импульса, наоборот, следует освещать электрон светом большей длины волны.

Из двух последних выражений Гейзенберг находит соотношение неточностей

$$\Delta x \Delta p \sim \hbar,$$

которое, по его мнению, является следствием взаимодействия объекта (электрона) и прибора (наблюдателя).

Последнее понимание соотношения неточностей Бор возводит даже в особый принцип, так называемый «принцип дополнителности». Согласно принципу «дополнителности» должны существовать два класса экспериментальных установок, одновременное использование которых для исследования одного и того же объекта исключается<sup>1)</sup>. Один класс допускает измерение с любой точностью лишь импульса и энергии частиц (в приведённом примере следовало бы построить приборы с  $\lambda \rightarrow \infty$ ). Другой класс установок допускает измерение с любой точностью лишь пространственно-временных координат (следовало бы построить установки с  $\lambda \rightarrow 0$ ). По мнению Бора<sup>2)</sup>, это связано с тем обстоятельством, что экспериментальная

<sup>1)</sup> Н. Бор, УФН 16, вып. 4 (1936), стр. 449.

<sup>2)</sup> См. швейцарский журнал «Dialectica», № 7/8 (1948).

установка вносит «источники неконтролируемого взаимодействия между объектом и измерительными приборами».

«Принцип дополнительности», согласно которому волновые свойства частиц рассматриваются не как объективная характеристика микромира, а как результат неконтролируемого взаимодействия объекта микроскопического и прибора макроскопического, непосредственно ведёт к субъективно идеалистическому толкованию явлений в микромире<sup>1)</sup>.

Согласно концепции диалектического материализма квантовая механика должна прежде всего отражать объективные закономерности микромира. Эти закономерности совершенно не зависят от вида приборов, с помощью которых производится измерение. Сам же «принцип дополнительности» является порочным идеалистическим положением, исходя из которого нельзя ни построить квантовую механику, ни правильно объяснить какие-либо свойства микромира. Так, например, при взаимодействии электрона и света, имеющего длину волны порядка радиуса электрона ( $\lambda \sim 10^{-13}$  см) возможно появление пары электрон—позитрон, что совершенно не следует из «принципа дополнительности».

«Копенгагенская школа» физиков (Бор, Гейзенберг и др.), связавшая себя с махизмом, не учитывает, что наши представления о внешнем мире складываются не только на основе непосредственного показания приборов. Человек способен обобщить результаты наблюдений путём всестороннего изучения явления, путём установления взаимосвязи между различными явлениями, открывая тем самым общую закономерность, присущую многим явлениям. Поэтому различные свойства внешнего мира мы можем познать с помощью ряда косвенных экспериментальных данных. Как известно, ряд закономерностей, связанных с атомами, был открыт задолго до непосредственного экспериментального обнаружения самих атомов. Так, например, ещё Ломоносов более чем

---

<sup>1)</sup> Более подробно см. М. Э. Омельяновский, Против идеализма и идеалистических шатаний в квантовой механике. Вопросы философии, № 4, 151 (1951).



двести лет тому назад на основе атомной теории успешно развил кинетические взгляды на природу тепла<sup>1)</sup>.

Перейдём к более подробному анализу волновых свойств элементарных частиц.

Одна из первых интерпретаций корпускулярно-волнового дуализма сводилась к попытке рассматривать частицу как образование из волны (гипотеза размазанного электрона). Теоретически возможно с помощью группы волн образовать частицу (точнее волновой пакет) с размерами порядка радиуса электрона. Однако такая частица будет неустойчива. Волновой пакет быстро расплывзается. Кроме того, невозможно объяснить явление диффракции электронов, если монохроматическую волну, описывающую движение многих электронов, заменить множеством волновых пакетов.

В настоящее время принята другая, а именно статистическая интерпретация волновой функции, согласно которой величина  $\psi^*\psi$  описывает вероятность нахождения электрона в различных точках пространства. Волновые свойства элементарных частиц особенно ярко должны проявляться при наличии многих независимых частиц, находящихся в одинаковом квантовом состоянии (кван-

---

<sup>1)</sup> Кстати сказать, Мах и Оствальд даже в начале XX века, исходя из «наблюдаемости», пытались доказать, что атомы не существуют, поскольку им ничего не соответствует в общем «комплексе ощущений». Эти взгляды Маха и Оствальда были вскоре опровергнуты, и существование атомов было окончательно доказано.

Не случайной оказалась также ошибка, допущенная последователями «копенгагенской школы» при интерпретации  $\beta$ -распада. Как известно, опыты с достоверностью показали, что при  $\beta$ -распаде электроны вылетают с самыми разнообразными энергиями, начиная практически от нуля и кончая энергией, которую теряет ядро. Интерпретируя этот результат, исходя из махистской концепции, они пришли к отрицанию закона сохранения энергии для микромира, поскольку об этом якобы говорят «наши ощущения». Однако это заключение не вскрыло каких-либо закономерностей микромира, а фактически привело к реакционной, оторванной от действительности теории. В то же самое время теория Паули, согласно которой при  $\beta$ -распаде вместе с электроном вылетает также и нейтрино, так что закон сохранения энергии при этом выполняется, правильно вскрыла многие закономерности в атомном ядре и в настоящее время получила научное признание.

товый ансамбль)<sup>1)</sup>, когда согласно закону больших чисел отклонение реальных величин от их математического ожидания ничтожно мало. Типичную картину мы получим при рассмотрении, например, диффракции электронов, которая наблюдается при прохождении пучка электронов через диффракционную систему.

Л. Биберман, Н. Сушкин и В. Фабрикант<sup>2)</sup> исследовали диффракцию поочередно летящих электронов. Они показали, что когда один электрон проходит через диффракционную систему, он даёт на экране (например, фотопластинке) не диффракционную картину, а изображение точки (небольшого пятнышка). Однако если вслед за этим электроном пропускать и другие, то при достаточной продолжительности опыта эти одиночные точки образуют типичную для волновой механики диффракционную картину. Эти опыты с полной убедительностью говорят нам о том, что проявление волновых свойств не связано с одновременным наличием большого числа частиц.

Волновая механика применима также и для исследования движения отдельного электрона. Однако в последнем случае она позволяет вычислить лишь вероятность того или иного процесса. Только в том случае, когда эта вероятность имеет острый максимум, соответствующая величина может быть вычислена сравнительно точно.

Несмотря на то, что волновая механика объясняет многие свойства частиц микромира, она не вскрывает до конца всех особенностей их движения. В связи с этим появились реакционные выводы о том, что «в рациональной окончательной теории детерминизм обязательно должен отсутствовать»<sup>3)</sup>. Эти идеалистические выводы связаны в первую очередь с сохранившимся до сих пор среди зару-

---

<sup>1)</sup> См., например, К. В. Никольский, Квантовые процессы, М.—Л., 1940; Я. П. Терлецкий, Вопросы философии, № 3, 228 (1948); Д. И. Блохинцев, Основы квантовой механики, М.—Л., 1949, стр. 54; см. также УФН 44, 104 (1951).

<sup>2)</sup> Л. Биберман, Н. Сушкин и В. Фабрикант, ДАН 66, 185 (1949).

<sup>3)</sup> П. А. М. Дирак, Основы квантовой механики, Л.—М., 1937, стр. 12.

бежных буржуазных учёных метафизическим пониманием детерминизма с его односторонней «механичностью».

Детерминизм они признают только в той форме, в какой он сформулирован в классической механике: по заданной силе и начальным условиям (координата и скорость) с любой степенью точности предвычислить движение материальной точки.

Связь реакционного учения об индетерминизме с другим реакционным учением о дополнительности выявляется особенно ярко у Гейзенберга, который пишет<sup>1)</sup>: «пространственно-временное описание процессов с одной стороны и классический закон причинности с другой представляют дополнительные, исключают друг друга черты физических процессов». Далее Гейзенберг приходит к выводу, что закономерные процессы, позволяющие осуществлять контроль над балансом энергии и количеством движения, могут происходить лишь вне пространства и времени. Все эти ошибочные выводы связаны также с попытками абсолютизировать выводы квантовой механики.

В. И. Ленин ещё в 1908 г. самым решительным образом восстал против подобного метафизического понимания основных законов природы. Он писал: «...законы вполне познаваемы для человека, но никогда не могут быть им познаемы *до конца*»<sup>2)</sup>. Дальнейшее развитие физики показало, что законы классической механики имеют ограниченную применимость. Классическая механика позволяет, например, с большой точностью предвычислить движение планет, но в то же самое время её «точные расчёты» совершенно неприменимы для исследования движения электрона в атоме.

Квантовая механика является следующим этапом познания движения частиц и применима к микромиру. С помощью квантовой теории мы можем исследовать движение электронов в атоме. Было бы новым повторением ошибок механистов, если бы мы стали считать, что квантовая

<sup>1)</sup> В. Гейзенберг, Физические принципы квантовой теории (1. с.), стр. 51; см. также N. Bohr, *Dialectica*, № 7/8 (1948).

<sup>2)</sup> В. И. Ленин, Материализм и эмпириокритицизм, 1951, стр. 173.

механика является последним этапом познания закономерностей микромира.

Согласно ленинской теории отражения «Мир есть закономерное движение материи, и наше познание, будучи высшим продуктом природы, в состоянии только *отражать* эту закономерность»<sup>1</sup>). Поэтому любая теория может дать познание объекта лишь приблизительно верно, и это никоим образом не противоречит детерминизму, так как «Действительно важный теоретико-познавательный вопрос, разделяющий философские направления, состоит не в том, какой степени точности достигли наши описания причинных связей и могут ли эти описания быть выражены в точной математической формуле,— а в том, является ли источником нашего познания этих связей объективная закономерность природы или свойства нашего ума»<sup>2</sup>).

Перейдём далее к вопросу, почему современная теория о микромире в применении к исследованию движения отдельного электрона является вероятностной, т. е. явно сохраняет статистический отпечаток? Оставаясь в рамках одноэлектронной квантовой механики, на этот вопрос ответить довольно трудно.

После же появления теории вторичного квантования во всяком случае стало ясно, что проблема движения одной элементарной частицы может быть поставлена лишь приближённо. Так, например, согласно квантовой электродинамике электрон окружён облаком фотонов, находящихся в особом виртуальном состоянии, которые движутся вместе с электроном и могут при известных условиях отрываться от него. Далее, в современной квантовой теории поля поставлен вопрос о вторичном квантовании любых волновых функций, в том числе волновых функций электрона (см. § 23). Вторично квантованная волновая функция электрона отлична от нуля даже при отсутствии электронов. В этом случае она описывает частицы в особом виртуальном состоянии, связанном с так называемым электронно-позитронным вакуумом (см. гл. IV).

---

<sup>1</sup>) В. И. Ленин, *Материализм и эмпириокритицизм*, 1951, стр. 152.

<sup>2</sup>) В. И. Ленин, там же, стр. 142.

Заметим, что движение элементарной частицы в некоторых случаях напоминает собою движение броуновской частицы. Как известно, движение броуновской частицы связано с флуктуациями, т. е. с отклонениями от среднего нулевого значения равнодействующих сил, происходящих от ударов множества молекул окружающей среды. Современная же теория позволяет вычислить лишь вероятность того или иного смещения броуновской частицы. Точно так же на движение элементарной частицы, согласно квантовой электродинамике, должны оказывать влияние своеобразные «удары» множества виртуальных частиц различных полей, образующих вакуум.

В связи с этим интересно остановиться на рассуждениях Вельтона<sup>1)</sup> при вычислении сдвига уровней, обусловленного вакуумными поправками. Вельтон считает, что даже в случае отсутствия фотонов могут быть флуктуации электромагнитного поля (за счёт вакуумных членов), которые заставляют электрон колебаться в некоторой конечной области. Это меняет взаимодействие электрона с зарядом ядра, что в свою очередь приводит к дополнительной энергии связи, т. е. к сдвигу уровней.

Все эти качественные выводы нашли затем своё подтверждение в более полной теории (см. § 46, п. л). Таким образом, квантовая теория поля, являющаяся по существу дальнейшим обобщением (правда, далеко ещё незаконченным) волновой механики, фактически всегда имеет дело с системой частиц и полей, что до некоторой степени объясняет появление статистической теории о микромире.

Трудно в настоящее время предвидеть дальнейшее развитие теории о микромире, однако мы можем утверждать, «что мир и его закономерности вполне познаваемы, что наши знания о законах природы, проверенные опытом, практикой, являются достоверными знаниями, имеющими значение объективных истин, что нет в мире непознаваемых вещей, а есть только вещи, ещё не познанные, которые

---

<sup>1)</sup> Расчёты Вельтона, позволяющие определить лишь порядок для сдвига уровней, приведены, например, в монографии «Классическая теория поля», стр. 445.

будут раскрыты и познаны силами науки и практики»<sup>1)</sup>. В частности, законы как классической, так и квантовой теории бесспорно правильно выражают многие свойства простейших движений.

Однако следует помнить, что квантовая теория описывает с достаточной точностью движение элементарных частиц лишь в простейших случаях, например: движение электронов в атомах или простейших молекулах (молекула водорода, гелия и т. д.). В связи с этим следует упомянуть, что за рубежом начинает получать всё большее развитие новый вариант механистического направления, который по существу воскрешает старую идею Лапласа о том, что все высшие формы движения должны целиком сводиться к элементарным. Как известно, Лаплас утверждал, что с помощью законов классической механики можно предсказать будущее и определить прошлое всего мира. Лишь сложность математических расчётов, по его мнению, мешает учёным это сделать. Современные неомеханисты фактически предлагают сделать то же самое, положив только в основу расчётов законы не классической, а квантовой теории. Так, например, Эйринг, Уолтер и Кимбал<sup>2)</sup> начинают изложение квантовой химии словами: «Квантовая механика сводит проблемы химии к задачам прикладной математики». Подобная постановка проблемы является принципиально порочной, а не связана лишь с трудной вычислительной задачей. Этот вопрос был подробно рассмотрен ещё Энгельсом, который показал, что в каждой высшей форме движения могут содержаться свои специфические особенности.

Энгельс писал<sup>3)</sup>: «Движение в применении к материи, — это изменение вообще... Этим отнюдь не утверждается, будто каждая из высших форм движения не бывает всегда необходимым образом связана с каким-нибудь действительным механическим (внешним или молекулярным) дви-

---

<sup>1)</sup> И. В. Сталин, Вопросы ленинизма, Госполитиздат, 1945, стр. 543.

<sup>2)</sup> Г. Эйринг, Д. Уолтер и Д. Кимбалл, Квантовая химия, М., 1948, стр. 6.

<sup>3)</sup> Ф. Энгельс, Диалектика природы, Госполитиздат, 1950, стр. 197.

жением, подобно тому как высшие формы движения производят одновременно и другие формы движения и подобно тому как химическое действие невозможно без изменения температуры и электрического состояния, а органическая жизнь невозможна без механического, молекулярного, химического, термического, электрического и т. д. изменения. Но наличие этих побочных форм не исчерпывает существа главной формы в каждом рассматриваемом случае».

Поэтому попытки свести лишь к квантовой механике основные процессы в сложных молекулах органических соединений (например, теория резонанса Паулинга) и, в особенности, в биологии (теория Шрёдингера) были заведомо обречены на неудачу.

«Теория резонанса пытается свести всё богатство связей и взаимоотношений атомов внутри молекул к движению электронов, пытается подменить химизм, как форму движения материи, механикой электрона»<sup>1)</sup>.

Советские учёные доказали<sup>2)</sup>, что в теории резонанса Паулинга приходится реальные молекулы подменять мысленными образами. Поэтому эта теория относится к категории тех теорий, о которых В. И. Ленин ещё в 1908 г. писал: «Материя исчезает», остаются одни уравнения»<sup>3)</sup>.

Таким образом, теория резонанса Паулинга представляет собою оторванную от действительности идеалистическую теорию. Дальнейшая плодотворная работа по развитию органической химии может идти по пути, указанному Бутлеровым, установившим основные законы образования молекул органических соединений<sup>4)</sup>.

<sup>1)</sup> Ю. А. Жданов, Большевик № 3, 70 (1951).

<sup>2)</sup> В. М. Татевский и М. И. Шапаронов, Об одной махистской теории в химии и её пропагандистах. Вопросы философии, № 3, 176 (1949); О. А. Реутов, К итогам Всесоюзного совещания по теории химического строения в органической химии. Вопросы философии № 4, 167 (1951); Резолюция совещания по теории химического строения в органической химии [см. ЖФХ 25, 978 (1951)].

<sup>3)</sup> В. И. Ленин, Материализм и эмпириокритицизм, 1951, стр. 290.

<sup>4)</sup> Это никоим образом не означает, что между движением элементарных частиц и другими формами движения вещества

Реакционную попытку сведения основ биологии к физическим явлениям предпринял Шрёдингер, который пытался подвести под биологические процессы квантовомеханический фундамент. Шрёдингер пишет <sup>1)</sup>: «В свете современного знания механизм наследственности тесно связан с самой основой квантовой теории и даже более того, опирается на неё».

Как и следовало ожидать, Шрёдингеру не удалось с помощью квантовой теории получить объяснение какого-либо биологического явления. Реакционность попыток Шрёдингера обосновать с помощью квантовой механики «теорию непознаваемости» наследственного вещества, которая до некоторой степени напоминает собой «учение» махистов о непознаваемости микромира, была вскрыта Т. Д. Лысенко <sup>2)</sup>.

Резюмируя, можем сказать, что квантовая теория, бесспорно, правильно отражает многие закономерности простейших движений. К сожалению, буржуазные учёные стараются засорить новую теорию рядом реакционных

---

(например, химическими) нет никакой взаимосвязи. Эта взаимосвязь, безусловно, существует и по мере развития науки будет всё более раскрываться. Однако мы с полной уверенностью можем заключить, что все химические формы движения не будут сводиться только к простому сложению элементарных движений. Более того, даже многие физические явления не могут быть сведены только к элементарным движениям частиц. Как известно, системе многих взаимодействующих частиц (например, совокупности электронов в кристаллической решётке) свойственна температура и необратимость процессов, что никоим образом не может быть получено лишь из уравнения движения отдельной частицы или ансамбля частиц (т. е. независимых частиц), поскольку последние уравнения являются обратимыми и в них не заложено понятие температуры. Движение системы взаимодействующих частиц описывается с помощью введения ещё квантовой или классической статистики. Ряд закономерностей, свойственных наличию лишь многих взаимодействующих электронов, был найден А. А. Власовым (см. Учёные записки Московского университета, раздел физика, вып. 75 (1945).

<sup>1)</sup> Э. Шрёдингер, Что такое жизнь с точки зрения физики, М., 1947, стр. 71.

<sup>2)</sup> О положении в биологической науке, Стенографический отчёт сессии ВАСХНИЛ. Доклад академика Т. Д. Лысенко, стр. 17 и 18, Сельхозгиз, М., 1948.



положений, часть из которых мы только что рассмотрели. Эти реакционные положения сильно тормозят развитие науки и уводят учёных в сторону от правильного изучения явлений. Только с позиций диалектического материализма мы можем вскрыть идеалистические вывихи и подливно оценить научную значимость создаваемой теории о микромире.

г) **Вычисление коэффициентов Эйнштейна.** Подставляя (28,27) в равенство (28,25), найдём после интегрирования по  $\kappa$  следующее выражение для вероятности излучения:

$$w_{ba} = \frac{e^2 \kappa_{ba}}{2\pi\hbar} (n+1) \oint \left( (\alpha_{ab}^+ \alpha_{ab}) - \frac{(\alpha_{ab}^+ \kappa)(\alpha_{ab} \kappa)}{\kappa^2} \right) d\Omega, \quad (28,30)$$

где  $\kappa_{ba} = \frac{2\pi\nu}{c}$ , а  $d\Omega$  — элементарный телесный угол в направлении вектора  $\kappa$ .

Для атомов длина волны испускаемого света составляет  $\lambda = \frac{2\pi}{\kappa} \sim 10^{-5}$  см, а размеры атома имеют порядок величины  $r \sim 10^{-8}$  см. Поэтому величина  $\kappa r = 2\pi \frac{r}{\lambda} \ll 1$ .

В этом случае в матричном элементе

$$\alpha_{ab} = \int \psi_a^+ \alpha e^{-i\kappa r} \psi_b d^3x$$

величину  $e^{-i\kappa r}$  мы можем разложить в ряд ( $r\kappa \approx \frac{r}{\lambda} \ll 1$ ):

$$e^{-i\kappa r} = 1 - i(\kappa r) + \frac{(i(\kappa r))^2}{2!} + \dots$$

Ограничиваясь в последнем разложении первым членом, для матричного элемента получим:

$$\alpha_{ab}^0 = \int \psi_a^+ \alpha \psi_b d^3x.$$

Это выражение характеризует дипольное излучение. Отброшенные члены будут много меньше основного.

Предполагая, что плотность фотонов  $n$  не зависит от углов  $\theta$  и  $\varphi$  (изотропное излучение), найдём следующее выражение для вероятности дипольного излучения:

$$w_{ba} = \frac{4e^2\gamma_{ba}}{3\hbar} (n+1) |\alpha_{ab}^0|^2. \quad (28,31)$$

Вероятность дипольного излучения складывается из двух частей: из части, не зависящей от первоначальной плотности фотонов (спонтанного излучения) и из части, пропорциональной плотности фотонов (вынужденное излучение), т. е.

$$w_{ba} = \rho_{\nu} B_{ba} + A_{ba}.$$

Для того чтобы найти вероятность спонтанного излучения, мы должны положить в формуле (28,31)  $n=0$ . Тогда имеем:

$$A_{ba} = \frac{4e^2\gamma_{ba}}{3\hbar} |\alpha_{ab}^0|^2. \quad (28,32)$$

В нерелятивистском приближении матричный элемент  $\alpha_{ab}^0$  мы можем записать в виде (см. (17,32)):

$$\alpha_{ab}^0 = \frac{1}{mc} \int \psi_a^+ \mathbf{p} \psi_b d^3x,$$

где оператор импульса имеет вид

$$p_x = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x} \quad \text{и т. д.}$$

Согласно теореме Эренфеста [см. ниже (31,5а)]

$$\int \psi_a^+ p_x \psi_b d^3x = -2\pi i \nu m x_{ab},$$

причём матричный элемент  $x_{ab}$  имеет вид

$$x_{ab} = \int \psi_a^+ x \psi_b d^3x.$$

Отсюда для вероятности спонтанного излучения находим:

$$A_{ba} = \frac{64\pi^4 e^2 \nu^3}{3c^3 \hbar} (|x_{ab}|^2 + |y_{ab}|^2 + |z_{ab}|^2). \quad (28,33)$$

Соответствующее выражение для интенсивности излучения может быть получено с помощью формулы (28,2).

Как видно из формулы (28,31) и (28,32), вероятность вынужденного излучения при переходе с верхнего энергетического уровня на нижний ( $b \rightarrow a$ ) определяется формулой

$$B_{ba} = A_{ba} \frac{n}{\rho_\nu}. \quad (28,34)$$

Для её использования необходимо установить соотношение между величинами  $n$  и  $\rho_\nu$ . С одной стороны, плотность энергии излучения  $u$  связана со спектральной плотностью  $\rho_\nu$  формулой

$$u = \int_0^\infty \rho_\nu d\nu,$$

а с другой стороны, равняется отношению общей энергии частиц  $\sum_x c\hbar x 2n$  (множитель 2 соответствует двум возможным значениям поляризации) к объёму  $L^3$ :

$$u = \sum_x \frac{c\hbar x 2n}{L^3} = \frac{2c\hbar}{8\pi^3} \int_0^\infty x^3 dx \oint n d\omega;$$

последнее выражение для изотропного излучения принимает вид:

$$u = \int_0^\infty \frac{8\pi\nu^3 h}{c^3} n d\nu.$$

Сравнивая между собою эти два выражения для  $u$ , находим:

$$\rho_\nu = \frac{8\pi\nu^3 h}{c^3} n, \quad (28,35)$$

откуда согласно (28,34)

$$B_{ba} = \frac{c^3}{8\pi\nu^3 h} A_{ba} = \frac{8\pi^3 e^2}{3h^2} (|x_{ab}|^2 + |y_{ab}|^2 + |z_{ab}|^2). \quad (28,36)$$

Определим теперь вероятности перехода с нижнего энергетического уровня на верхний ( $a \rightarrow b$ ), т. е. перехода, связанного с поглощением света. В этом случае мы

должны решить систему уравнений (28,18) и (28,19) при других начальных условиях, а именно:

$$C_a(0) = 1, \quad C_b(0) = 0. \quad (28,37)$$

Используя вновь метод теории возмущений, получаем вместо уравнений (28,22) и (28,23):

$$C_a(t) = 1, \quad (28,38)$$

$$C_b(t) = \frac{ei}{\hbar L^{3/2}} \sum_{\mathbf{x}} V \sqrt{\frac{2\pi c \hbar}{\kappa}} (\alpha_{ba} \mathbf{a}) \int_0^t e^{ict(\mathbf{x}_{ba} - \mathbf{x})} dt. \quad (28,39)$$

Тогда для вероятности перехода мы получаем выражение

$$w_{ab} = \frac{e^2 (2\pi)^2}{L^3 \hbar} \sum_{\mathbf{x}} \frac{n(\mathbf{x})}{\kappa} \left( (\alpha_{ba}^+ \alpha_{ba}) - \frac{(\alpha_{ba}^+ \mathbf{x})(\alpha_{ba} \mathbf{x})}{\kappa^2} \right) \delta(\mathbf{x}_{ba} - \mathbf{x}). \quad (28,40)$$

Переходя, далее, к непрерывному спектру, находим в случае изотропного излучения [ $n(\mathbf{x}) = n(\kappa)$ ] следующее выражение для вероятности дипольного перехода:

$$w_{ab} = \frac{4e^2 \kappa_{ba} n}{3\hbar} |\alpha_{ba}^0|^2. \quad (28,41)$$

Сравнивая между собою формулы (28,41) и (28,31) и принимая во внимание, что

$$|\alpha_{ab}^0|^2 = |\alpha_{ba}^0|^2,$$

мы заключаем, что вероятность вынужденного перехода  $a \rightarrow b$  будет равняться вероятности вынужденного перехода  $b \rightarrow a$ , т. е.

$$B_{ab} = B_{ba}. \quad (28,42)$$

Подставляя соотношения для коэффициентов (28,36) и (28,42) в формулу (28,3), мы находим формулу Планка (28,4). В этом выводе отсутствуют внутренние противоречия, содержащиеся в полуклассических выводах. Кроме того, мы видим, что перестановочные соотношения для амплитуд фотонного поля ведут в случае статистического равновесия к формуле Планка, т. е. к функции распределения Бозе-Эйнштейна для фотонов.

## § 29. Фотоэффект. Захват электронов ионизованными атомами

К числу явлений, связанных с поглощением света атомами, принадлежит фотоэффект, т. е. вырывание электронов из вещества под действием света. Ещё Герц заметил, что проскакивание искры между шариками разрядника несколько облегчается, когда один из шариков осветить ультрафиолетовым светом. Благодаря классическим опытам Столетова удалось установить, что это явление связано с удалением носителя отрицательного электричества — электрона с катода под действием ультрафиолетовых лучей.

**а) Квантовая теория фотоэффекта.** Согласно квантовой теории явление фотоэффекта связано с поглощением кванта света ( $h\nu = c\hbar\kappa$ ) атомом, вследствие чего электрон с внутренней устойчивой орбиты ( $E_a < 0$ ) переходит в область непрерывного спектра ( $E_b > 0$ ), т. е. происходит ионизация атома.

Кинетическая энергия  $T$ , с которой электрон вылетает из атома, определяется из закона сохранения энергии:

$$T = c\hbar\kappa - I, \quad (29,1)$$

где  $I$  — энергия ионизации атома.

Рассмотрим теорию фотоэффекта в простейшем случае, а именно, когда в начальном состоянии электроны находятся в  $K$ -слое, а затем вырываются из атома и начинают двигаться с кинетической энергией:

$$T = \frac{p^2}{2m} = c\hbar \frac{k^2}{2k_0}.$$

Тогда для начального состояния мы имеем<sup>1)</sup>:

$$E_a = -I = -\frac{Ze^2}{2a} = -\frac{\alpha Zk_0'}{2} c\hbar,$$

$$\psi_a = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{r}{a}} = \frac{8\sqrt{\pi} (k_0')^{\frac{5}{2}}}{L^3} \sum_k \frac{e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}}{(k'^2 + k_0'^2)^2}, \quad (29,2)$$

<sup>1)</sup> Собственные значения и волновые функции водородоподобного атома будут найдены нами в § 46.

где радиус  $a$  орбиты  $K$ -слоя связан с величиной  $k_0 = \frac{mc}{\hbar}$  соотношением

$$\frac{1}{a} = k'_0 = Z\alpha k_0. \quad (29,3)$$

Для конечного состояния  $b$  мы выберем плоские волны

$$E_b = T = c\hbar \frac{k^2}{2k_0}; \quad \psi_b = \frac{1}{L^{3/2}} e^{ikr} \quad (29,4)$$

(т. е. ограничимся борновским приближением). Это мы можем сделать, когда параметр столкновения

$$r_{\text{макс}} = \frac{1}{k}$$

будет много меньше радиуса  $K$ -слоя [см. также (29,18)], т. е.

$$r_{\text{макс}} \ll a.$$

Отсюда находим условие для скорости  $v$  вылетевших электронов, при которой мы можем описывать конечное состояние плоской волной:

$$\xi = \frac{Ze^2}{v\hbar} \ll 1 \quad (29,5)$$

или

$$\beta \gg Z\alpha. \quad (29,5a)$$

Для вычисления вероятности фотоэффекта воспользуемся уравнением (28,40):

$$w_{ab} = \frac{4\pi^2 e^2}{\hbar L^3} \sum_{\mathbf{x}'} \frac{n(\mathbf{x}')}{x'} \left( (\alpha_{ba}^+ \alpha_{ba}) - \frac{(\alpha_{ba}^+ \mathbf{x}') (\alpha_{ba} \mathbf{x}')}{x^2} \right) \delta(x_{ba} - x'), \quad (29,6)$$

При наличии в начальный момент лишь одного фотона с импульсом  $\hbar \mathbf{x}$  мы согласно (28,10) имеем:

$$n(\mathbf{x}') = \frac{1}{2} \delta_{\mathbf{x}\mathbf{x}'},$$

$$x_{ba} = \frac{E_b - E_a}{c\hbar} = \frac{k^2}{2k_0} + \frac{\alpha Z k'_0}{2}.$$

В нашем случае последний член  $\left(\frac{\alpha Z k'_0}{2}\right)$  будет много меньше первого  $\left(\frac{k^2}{2k_0}\right)$ , и поэтому мы можем положить

$$\kappa_{ba} = \frac{k^2}{2k_0}. \quad (29,7)$$

Далее, в нерелятивистском приближении мы имеем:

$$\alpha = \frac{\mathbf{p}}{mc} = \frac{1}{ik_0} \nabla.$$

Поэтому матричный элемент  $\alpha_{ba}^0$  при  $(\kappa r) \ll 1$  будет иметь вид

$$\alpha_{ba}^0 = \frac{1}{ik_0} \int \psi_b^\dagger \nabla \psi_a d^3x = \frac{8\sqrt{\pi} k'_0{}^{5/2}}{L^{3/2} k_0} \frac{\mathbf{k}}{(k^2 + k_0'^2)^2} \quad (29,8)$$

или для борновского приближения ( $k \gg k'_0$ ):

$$\alpha_{ab}^0 = \frac{8\sqrt{\pi} k'_0{}^{5/2}}{L^{3/2}} \frac{\mathbf{k}}{k_0 k^4}, \quad (29,9)$$

Наконец, чтобы получить полную вероятность перехода, мы должны выражение (29,6) просуммировать по конечным состояниям волнового числа электрона  $\mathbf{k}$  и умножить всё выражение на 2, поскольку  $K$ -слой содержит два электрона:

$$\omega = 2 \sum_{\mathbf{k}} \omega_{ab} = \frac{256\pi^3 \alpha^6 Z^5}{L^3 \kappa} c k_0^3 \sum_{\mathbf{k}} \delta(\kappa_{ba} - \kappa) \frac{\kappa^2 k^2 - (\mathbf{k}\kappa)^2}{\kappa^2 k^8}. \quad (29,10)$$

Переходя далее к непрерывному спектру, получаем после интегрирования по вектору  $\mathbf{k}$ :

$$\omega = \frac{256\pi}{3} \frac{\alpha^6 Z^5 k_0^3 c}{L^3 \kappa k^4} \frac{\partial \kappa_{ba}}{\partial k}, \quad (29,11)$$

причём

$$\kappa_{ba} = \frac{k^2}{2k_0} = \kappa. \quad (29,12)$$

Найдём теперь эффективное сечение  $\sigma$  для фотоэффекта. Эффективное сечение  $\sigma$  равняется отношению вероятности вырывания электрона  $w$  к числу частиц (т. е. фотонов), которые падают в единицу времени на единицу поверхности, расположенную перпендикулярно к движению фотонов. В единицу времени на единицу площади  $S = 1 \text{ см}^2$  попадут фотоны, которые находятся в объёме  $V_0 = cS = c$ . Вероятность нахождения первичного фотона в объёме основного параллелепипеда ( $L^3$ ) равняется единице. Поэтому вероятность нахождения в объёме  $c$  будет равняться  $N_\gamma = \frac{c}{L^3}$ . Отсюда находим значение для эффективного сечения:

$$\sigma = \frac{w}{N_\gamma} = \frac{256\pi}{3} \frac{\alpha^6 Z^5 k_0^3}{\chi k^4 \frac{\partial \chi_{ba}}{\partial k}}. \quad (29,13)$$

Тогда с помощью (29,12) имеем в нерелятивистском случае

$$\sigma = \frac{32\sqrt{2}}{3} \pi r_0^2 \alpha^4 Z^5 \left( \frac{k_0}{\chi} \right)^{\frac{7}{2}}, \quad (29,14)$$

причём последнее выражение имеет место при условии:

$$k_0 \gg k \gg Z\alpha k_0. \quad (29,15)$$

Принимая во внимание соотношение

$$\frac{k_0}{\chi} = \frac{2I}{\alpha^2 Z^2 \varepsilon} \quad (29,16)$$

( $\varepsilon = c\hbar\chi = h\nu$  — энергия фотона), которое легко получить на основе формул (29,2) и (29,3), можем представить эффективное сечение в виде отношения  $I$  к  $\varepsilon$ :

$$\sigma = \frac{512}{3} \pi r_0^2 \frac{1}{\alpha^3 Z^2} \left( \frac{I}{\varepsilon} \right)^{\frac{7}{2}} \quad (29,17)$$

при условии, что

$$mc^2 \gg \varepsilon \gg I.$$

Если в формулы подставить волновую функцию конечного состояния, принадлежащую к непрерывному спектру кулоновского притяжения, то можно показать, что эффек-



тивное сечение (29,17) должно быть умножено на функцию  $f(\xi)^1$ :

$$f(\xi) = \frac{2\pi\xi}{\sqrt{1+\xi^2}} \frac{e^{-4\xi \operatorname{arccotg}\xi}}{1-e^{-2\pi\xi}},$$

где [см. (29,5)]

$$\xi = \sqrt{\frac{I}{\varepsilon - I}} = \frac{Ze^2}{v\hbar}.$$

Для сравнительно больших энергий ( $\varepsilon \gg I$ ) величина  $\xi$  стремится к нулю ( $\xi \ll 1$ ). Тогда

$$f(\xi) \rightarrow 1. \quad (29,18)$$

Отсюда мы получаем более строгое обоснование соотношения (29,5), определяющее возможность использования плоских волн для описания конечного состояния. Напротив, при малых скоростях фотоэлектронов ( $\varepsilon \approx I + 0$ ) величина  $\xi$  стремится к бесконечности; тогда множитель  $f(\xi)$  уменьшает эффективное сечение. В предельном случае  $\xi \rightarrow \infty$  ( $\varepsilon = I$ ) этот множитель достигает своего минимального значения

$$f(\infty) = 2\pi e^{-4} = 0,12.$$

Наконец, при  $\varepsilon < I$  фотоэффект вообще невозможен, поскольку энергия фотона  $\varepsilon$  будет недостаточной для вырывания электрона из атома. Однако в этом случае может наблюдаться поглощение света с возбуждением атома.

При очень больших энергиях  $\kappa \sim h \gg h_0$  (ультрарелятивистский случай) имеем <sup>2)</sup>:

$$\sigma = 4\pi r_0^2 \alpha^4 Z^5 \frac{mc^2}{\varepsilon}. \quad (29,19)$$

Полученные выражения для  $\sigma$  определяют эффективное сечение фотоэффекта лишь с  $K$ -слоя. Чтобы получить выражение для полного эффективного сечения с учётом фотоэффекта с других слоёв, мы должны соответствующие выражения для эффективного сечения с  $K$ -слоя умножить на множитель, равный примерно  $5/4$ .

<sup>1)</sup> M. Stobbe, Ann. d. Phys. 7, 661 (1930).

<sup>2)</sup> F. Sauter, Ann. d. Phys. 11, 454 (1931).

Умножая  $\sigma$  на число атомов  $N_a$  в единице объёма, мы найдём коэффициент поглощения для фотонов при прохождении 1 см вещества:

$$\tau = N_a \sigma. \quad (29,20)$$

Таким образом, мы видим, что с увеличением энергии падающих фотонов эффективное сечение фотоэффекта уменьшается обратно пропорционально энергии. Поэтому для больших энергий ( $\epsilon \gg 10 mc^2$ ) поглощением  $\gamma$ -лучей вследствие фотоэффекта можно вообще пренебречь. Это связано с тем обстоятельством, что энергия связи электронов в атоме становится по сравнению с  $\epsilon$  настолько малой величиной, что электроны мы можем рассматривать как свободные. Свободные же электроны не могут поглощать  $\gamma$ -кванты. Более подробно см. § 32, п. б.

Заметим, что при больших энергиях поглощение  $\gamma$ -квантов будет происходить главным образом за счёт эффекта Комптона и рождения пар (см. §§ 34 и 39).

**б) Захват электронов ионизованными атомами.** В противоположность фотоэффекту при захвате электронов ионизованными атомами электрон с уровня, принадлежащего непрерывному спектру, переходит на дискретный уровень, например на уровень  $K$ -оболочки. В этом случае формула (29,4) будет характеризовать начальное квантовое состояние электрона, а формула (29,2) — конечное. Полагая в формуле (28,25)  $n=0$ , мы найдём вероятность захвата

$$\omega_{ba} = \frac{e^2}{2\pi\hbar} \int \left( (\alpha_{ab}^+ \alpha_{ab}) - \frac{(\alpha_{ab}^+ x)(\alpha_{ab} x)}{x^2} \right) \delta(x_{ba} - x) \frac{d^3x}{x}, \quad (29,21)$$

причём в нерелятивистском случае, но для сравнительно больших скоростей [см. также (29,5а)]:

$$1 \gg \beta \gg Z\alpha$$

или

$$k_0 \gg k \gg Z\alpha k_0, \quad (29,22)$$

мы можем положить  $x_{ba} = \frac{k^2}{2k_0}$ , так что

$$\alpha_{ab}^0 = \frac{1}{ik_0} \int \psi_a^+ \nabla \psi_b d^3x = \frac{8\sqrt{\pi} k_0'^{5/2}}{L^{3/2}} \frac{k}{k_0} \frac{k}{k^4}. \quad (29,23)$$

Подставляя (29,23) в (29,21), получаем после интегрирования следующее выражение для эффективного сечения захвата:

$$\sigma = \frac{L^3 \omega}{v} = \frac{128\pi}{3} r_0^2 \alpha^4 Z^5 \left(\frac{c}{v}\right)^5, \quad (29,24)$$

где первоначальная скорость электронов равна  $v = c\beta = c \frac{k}{k_0}$ .

Если учесть, что электрон может быть захвачен не только  $K$ -оболочкой (квантовое число  $n' = 1$ ), но и другими оболочками ( $n' = 2, 3, 4, \dots$ ), то формула (29,24) принимает вид<sup>1)</sup>

$$\sigma = \frac{128\pi}{3} r_0^2 \alpha^4 Z^5 \left(\frac{c}{v}\right)^5 \sum_{n'=1}^{\infty} \frac{1}{n'^3}, \quad (29,25)$$

т. е. учёт захвата другими оболочками даёт небольшую поправку к основной формуле (29,24).

В случае малых скоростей электрона ( $v < Zac$ , или  $\xi = \frac{Ze^2}{v\hbar} < 1$ ) эффективное сечение захвата должно быть модифицировано так, чтобы учесть искривление плоских волн кулоновским центром, а именно выражение (29,25) должно быть умножено на функцию  $f(\xi)$ :

$$f(\xi) = \frac{2\pi\xi}{(1+\xi^2)^2} \frac{e^{-4\xi \operatorname{arctg} \xi}}{1 - e^{-2\pi\xi}}. \quad (29,26)$$

При  $v \gg Zac$  ( $\xi \ll 1$ ) функция  $f(\xi)$  обращается в единицу. Тогда мы получаем старый результат. В другом предельном случае, т. е. при  $v \rightarrow 0$  ( $\xi \gg 1$ ), мы имеем:

$$f(\xi) = \frac{2\pi}{\xi^3} e^{-4},$$

откуда для эффективного сечения захвата находим:

$$\sigma = \frac{256\pi^2}{3} e^{-4} r_0^2 \alpha^4 Z^2 \left(\frac{c}{v}\right)^2. \quad (29,27)$$

Наконец, в ультрарелятивистском случае мы вновь получаем для  $\sigma$  выражение (29,19), в котором, однако, энергию фотона  $\epsilon$  следует заменить энергией электрона.

<sup>1)</sup> W. Wessel, Ann. d. Phys. 5, 611 (1930); J. Oppenheimer, Phys. Rev. 31, 349 (1928).

Захват электронов можно наблюдать при прохождении положительно заряженных частиц через вещество. В этом случае удобно сделать переход к системе координат, в которой электрон покоится, а положительный заряд движется. В нерелятивистском случае это сводится к тому, что под  $v$  мы должны понимать скорость движения положительного заряда.

Нейтрализация положительно заряженных частиц наблюдается при движении  $\alpha$ -частиц или протонов, которые, захватывая электроны, превращаются в атомы гелия или водорода. Наконец, уместно упомянуть, что при прохождении позитронов через вещество последние могут не только аннигилировать, но также и захватывать на свои орбиты электроны, образуя тем самым легчайшие «водородоподобные» атомы позитрония<sup>1)</sup>. Для определения эффективного сечения образования позитрония мы можем воспользоваться нашими последними формулами, полагая в них  $Z = 1$ , а вместо массы электрона подставляя приведённую массу  $\frac{m}{2}$ . В этом случае радиус  $r_0$  следует положить равным

$$r_0 = \frac{2e^2}{mc^2}.$$

При прохождении через вещество других положительно заряженных частиц (например, мезонов) возможны образования мезоэлектрония (положительный мезон плюс электрон) и т. д.

Заметим, что вероятность образования атомов сравнительно велика лишь при нерелятивистских скоростях, в релятивистском же случае она быстро стремится к нулю.

### § 30. Излучение с учётом затухания.

#### Естественная ширина линии

Как известно, спектральная линия не является бесконечно тонкой, а обладает определённой шириной. Этот факт находит своё объяснение как в классической, так и в более точной квантовой теории.

<sup>1)</sup> См., например, Д. Д. Иваненко и А. А. Соколов, ДАН 58, 1329 (1947). Более подробно на вопросах, связанных с позитронием, мы остановимся в § 40.

Рассматривая с классической точки зрения гармонический осциллятор как простейшую модель источника света, мы получили бы строго монохроматическую линию только в том случае, если осциллятор колебался бы с одной частотой в течение бесконечно долгого времени. Тогда

$$x = x_0 e^{2\pi i \nu_0 t} = x_0 \int \delta(\nu - \nu_0) e^{2\pi i \nu t} d\nu. \quad (30,1)$$

В этом случае в интеграле Фурье отличной от нуля будет амплитуда, для которой  $\nu = \nu_0$  ( $x(\nu) = x_0 \delta(\nu - \nu_0)$ ).

Всякое отклонение от периодического движения (учёт соударений, влияние силы радиационного трения и т. д.) приводит к размазанному спектру, т. е. в разложении Фурье (30,1) отличными от нуля будут также амплитуды, для которых  $\nu \neq \nu_0$ . Как известно, подобное размазывание ведёт к уширению линий.

Найдём уширение спектральных линий, которое происходит благодаря наличию силы радиационного трения. Соответствующее уширение получило название естественного уширения линий.

**а) Классическая теория.** По классической теории простейшим источником электромагнитного излучения является гармонический осциллятор, уравнение движения которого с учётом силы радиационного трения (силы реакции) имеет вид

$$m\ddot{x} = -4\pi^2 m\nu_0^2 x + \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \dddot{x}.$$

Поскольку сила реакции ( $\sim \dddot{x}$ ) мала, мы можем в первом приближении положить производную  $\dddot{x}$  равной

$$\dddot{x} = -4\pi^2 \nu_0^2 \dot{x}.$$

В этом случае для описания колебания осциллятора имеем уравнение

$$\ddot{x} = -4\pi^2 \nu_0^2 x - \gamma \dot{x}, \quad (30,2)$$

где

$$\gamma = \frac{8\pi^2}{3} \frac{e^2 \nu_0^2}{mc^3}. \quad (30,3)$$

При  $\gamma \ll \nu_0$  решение уравнения (30,2) можно приближённо

представить в виде

$$x = x_0 e^{-\frac{\gamma t}{2}} e^{2\pi i \nu_0 t}. \quad (30,4)$$

Вектор электрической напряжённости  $\mathbf{E}$ , характеризующий испускаемый свет, в нашем приближении можно положить пропорциональным амплитуде<sup>1)</sup>:

$$\mathbf{E} = \begin{cases} \mathbf{E}_0 e^{-\frac{\gamma t}{2}} e^{2\pi i \nu_0 t} & \text{при } t \geq 0, \\ 0 & \text{при } t < 0. \end{cases}$$

Отсюда видно, что электромагнитная волна не будет монохроматической, а представляет собой набор волн с различными частотами:

$$\mathbf{E} = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}(\nu) e^{2\pi i \nu t} d\nu. \quad (30,5)$$

Таким образом, находим:

$$E(\nu) = \int_0^{\infty} E e^{-2\pi i \nu t} dt = -E_0 \frac{1}{2\pi i (\nu_0 - \nu) - \frac{\gamma}{2}}.$$

В этом случае распределение излучаемой энергии по частотам будет характеризоваться выражением

$$U(\nu) = U_0 \frac{\gamma}{4\pi^2 (\nu - \nu_0)^2 + \frac{\gamma^2}{4}}, \quad (30,6)$$

которое может быть найдено из следующих соображений: во-первых, мы должны положить

$$U(\nu) \sim |E(\nu)|^2;$$

во-вторых, общую излучаемую энергию  $U_0 = \frac{1}{4\pi} \int E^2 d^3x$  необходимо выбрать таким образом, чтобы

$$U_0 = \int_{-\infty}^{\infty} U(\nu) d\nu.$$

<sup>1)</sup> Более строго,  $\mathbf{E} \sim \ddot{x}$ .

При  $\nu = \nu_0$  функция  $U(\nu)$  достигает своего максимального значения:

$$U_{\text{макс}}(\nu) = \frac{4U_0}{\gamma},$$

а при  $2\pi(\nu_{1,2} - \nu_0) = \pm \frac{\gamma}{2}$  интенсивность излучения уменьшается вдвое по сравнению со своим максимальным значением. Поэтому величину  $\gamma = 2\pi(\nu_1 - \nu_2) = -2\pi\Delta\nu$  называют шириной линии. Легко видеть, что эта ширина равняется обратному значению для среднего времени жизни  $\tau = \frac{1}{\gamma}$ .

Мы можем выразить ширину в длинах волн, учитывая, что

$$\Delta\lambda = -\frac{c\Delta\nu}{\nu_0^2} = \frac{\gamma c}{2\pi\nu_0^2} = \frac{4\pi}{3}r_0 = 1,17 \cdot 10^{-4} \text{ \AA},$$

т. е. ширина линии в длинах волн не зависит от собственной частоты колебаний и имеет порядок радиуса электрона.

**б) Квантовая теория.** Найдём теперь естественную ширину линии по квантовой теории. С этой целью попробуем решить систему уравнений (28,18) и (28,19), не прибегая к методу теории возмущений.

Подставляя вместо функций  $U$  и  $U^*$  выражения (28,7), мы найдём:

$$\dot{C}_a = \frac{ei}{\hbar L^{3/2}} \sum_x \sqrt{\frac{2\pi c\hbar}{x}} (\alpha_{ab}^0 a^+) e^{-ict(x_{ba}-x)} C_b, \quad (30,7)$$

$$\dot{C}_b = \frac{ei}{\hbar L^{3/2}} \sum_x \sqrt{\frac{2\pi c\hbar}{x}} (\alpha_{ba}^0 a) e^{ict(x_{ba}-x)} C_a, \quad (30,8)$$

причём для дипольного излучения можем положить:

$$\alpha_{ab}^0 = \int \psi_a^+ \alpha \psi_b d^3x. \quad (30,9)$$

Ограничимся вычислением ширины линий для спонтанного излучения, когда мы можем считать, что в начальный момент фотоны отсутствуют ( $n=0$ ).

В этом случае согласно (28,10) для квадратичных комбинаций квантованных амплитуд поля фотонов имеем следующие значения:

$$a_s a_s'^{\dagger} = \left( \delta_{ss'} - \frac{x_s x_{s'}}{x^2} \right) \delta_{\mathbf{x}\mathbf{x}'}, \quad (30,10)$$

$$a_s'^{\dagger} a_s = 0,$$

а начальные условия можем представить в виде

$$C_b(0) = 1, \quad C_a(0) = 0. \quad (30,11)$$

Попробуем решить систему уравнений (30,7) и (30,8), положив

$$C_b = e^{-\frac{\gamma t}{2}}. \quad (30,12)$$

Подставляя (30,12) в (30,7), находим:

$$C_a = \frac{e}{c\hbar L^{3/2}} \sum_{\mathbf{x}} \sqrt{\frac{2\pi c\hbar}{x}} (\alpha_{ab}^0 \alpha^+) e^{\frac{-ict(x_{ba}-x) - \frac{\gamma t}{2} - 1}{x - x_{ba} + \frac{i\gamma}{2c}}}. \quad (30,13)$$

Тогда из уравнения (30,8) получаем выражение для коэффициента  $\gamma$ :

$$\gamma = -\frac{e^2 i}{2\pi^2 \hbar} \int \frac{d^3 \mathbf{x}}{x} \left( (\alpha_{ab}^{0+} \alpha_{ab}^0) - \frac{(\alpha_{ab}^{0+} \mathbf{x})(\alpha_{ab}^0 \mathbf{x})}{x^2} \right) \frac{1 - e^{\frac{-ict(x-x_{ba}) + \frac{\gamma t}{2}}}{x - x_{ba} + \frac{i\gamma}{2c}}}. \quad (30,14)$$

При интегрировании по  $\mathbf{x}$  воспользуемся следующим соотношением, имеющим место для достаточно больших значений времени  $t$ :

$$\frac{1 - e^{\frac{-ict(x-x_{ba}) + \frac{\gamma t}{2}}}{x - x_{ba} + \frac{i\gamma}{2c}} = \pi i \delta(x - x_{ba}). \quad (30,15)$$

Для того чтобы проверить последнее равенство, прежде



всего вычислим интеграл

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - e^{-ict(x-x_{ba}) + \frac{\gamma t}{2}}}{x - x_{ba} + \frac{i\gamma}{2c}} f(x) dx. \quad (30,16)$$

Рассматривая при этом  $t$  как параметр, сделаем следующую замену переменных:

$$(x - x_{ba}) = \frac{y}{ct}; \quad \frac{\gamma}{2c} = \frac{\alpha}{ct}.$$

Тогда

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - e^{-iy + \alpha}}{y + i\alpha} f\left(x_{ba} + \frac{y}{ct}\right) dy.$$

Разбивая интеграл на вещественную и мнимую части и принимая во внимание, что интеграл в пределах от  $-\infty$  до  $\infty$  от нечётной функции равняется нулю, а от чётной — удвоенному интегралу, взятому в пределах от 0 до  $\infty$ , получим для достаточно больших значений времени  $t$  ( $t \gg \frac{1}{c\alpha_{ba}}$ ):

$$I = -2if(x_{ba}) \int_0^{\infty} \frac{\alpha - e^{\alpha} (\alpha \cos y + y \sin y)}{y^2 + \alpha^2} dy = i\pi f(x_{ba}).$$

Последнее соотношение эквивалентно равенству (30,15).

Подставляя (30,15) в (30,14), находим после перехода к сферическим координатам и интегрированию по величине  $\chi$ :

$$\gamma = \frac{e^2}{2\pi\hbar} x_{ba} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} (1 - \cos^2\theta) \sin\theta |\alpha_{ab}^0|^2 d\theta. \quad (30,17)$$

Сравнивая между собою формулы (30,17) и (28,32), мы видим, что коэффициент  $\gamma$  точно равняется вероятности спонтанного излучения:

$$\gamma = A_{ba} = \frac{4e^2 x_{ba}}{3\hbar} |\alpha_{ab}^0|^2. \quad (30,18)$$

Этот результат является вполне естественным, поскольку величина  $\gamma$  является обратной величиной среднего времени жизни атома в возбуждённом состоянии.

Согласно (30,13) и (30,10) для полной вероятности перехода из состояния  $b$  в состояние  $a$  мы получаем выражение

$$C_a^+ C_a = \frac{e^2}{4\pi^2 c \hbar} \int_0^\infty x dx \left| \frac{e^{ict(x-x_{ba}) - \frac{\gamma t}{2}} - 1}{x - x_{ba} + \frac{i\gamma}{2c}} \right|^2 \times \\ \times \oint \left( (\alpha_{ab}^{0+} \alpha_{ab}^0) - \frac{(\alpha_{ab}^{0+} \mathbf{x})(\alpha_{ab}^0 \mathbf{x})}{x^2} \right) d\Omega. \quad (30,19)$$

Интегрируя последнее выражение по углам и учитывая, что подинтегральная функция имеет острый максимум при  $x = x_{ba}$ , найдём:

$$C_a^+ C_a = \int_{-\infty}^\infty \gamma \frac{1 + e^{-\gamma t} - 2e^{-\frac{\gamma t}{2}} \cos 2\pi(\nu - \nu_{ba})t}{4\pi^2(\nu - \nu_{ba})^2 + \frac{\gamma^2}{4}} d\nu, \quad (30,20)$$

где  $x = \frac{2\pi\nu}{c}$ ,  $x_{ba} = \frac{2\pi\nu_{ba}}{c}$ , а пределы интегрирования мы продолжили от 0 до  $-\infty$ , поскольку при отрицательных значениях подинтегральное выражение практически исчезает.

С помощью формулы (30,20) можно определить полную вероятность перехода для любого момента времени  $t$ :

$$C_a^+ C_a = 1 - e^{-\gamma t} = 1 - C_b^+ C_b.$$

Как и следовало ожидать, сумма вероятностей пребывания электрона в состоянии  $b$  и в состоянии  $a$  для каждого момента времени  $t$  равняется единице:

$$C_a^+ C_a + C_b^+ C_b = 1. \quad (30,21)$$

В частности, для сравнительно малых значений времени  $t$  ( $t\gamma \ll 1$ ) имеем:

$$C_a^+ C_a = \gamma t, \quad (30,22)$$

откуда для вероятности спонтанного перехода, отнесённого к единице времени, мы вновь получаем согласно (30,20)

коэффициент Эйнштейна  $A$ :

$$\frac{\partial}{\partial t} C_a^+ C_a = \gamma = A_{ba}. \quad (30,23)$$

Кроме того, выражение (30,20) позволяет найти спектральное распределение энергии излучения для больших значений времени ( $t \gg \frac{1}{\gamma}$ ), когда атом уже наверняка должен перейти в более низкое энергетическое состояние. В этом случае общая энергия, теряемая атомом, равняется энергии излучённого кванта:

$$U_0 = h\nu_{ba} \lim_{t \rightarrow \infty} C_a^+ C_a = h\nu_{ba},$$

и связана со спектральной плотностью излучения соотношением

$$U_0 = \int_{-\infty}^{\infty} U(\nu) d\nu = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\gamma h \nu_{ba}}{4\pi^2 (\nu - \nu_{ba})^2 + \frac{\gamma^2}{4}} d\nu,$$

откуда находим распределение энергии по частотам:

$$U(\nu) = \frac{\gamma h \nu_{ba}}{4\pi^2 (\nu - \nu_{ba})^2 + \frac{\gamma^2}{4}}, \quad (30,24)$$

совпадающее по форме с соответствующим классическим выражением (30,6), с тем уточнением, что общая энергия равняется кванту энергии излучения  $h\nu_{ba}$ , а величина  $\gamma$  является вероятностью перехода, отнесённой к единице времени:

$$\gamma = \frac{64\pi^4 e^2 \nu_{ba}^3}{3c^3 h} (|x_{ab}|^2 + |y_{ab}|^2 + |z_{ab}|^2), \quad (30,25)$$

в то время как в классической теории величина  $\gamma$  определяется соотношением (30,3):

$$\gamma = \frac{8\pi^2 e^2 \nu_0^2}{3 mc^3}.$$

Ширину линии по квантовой теории мы можем также найти, исходя из четвертого соотношения неточностей:

$$\Delta E \Delta t \cong \frac{h}{2\pi}.$$

В нашем случае время жизни атома равно  $\Delta t = \frac{1}{\gamma}$ . Поэтому энергия излучения обладает размазанностью

$$\Delta E \cong \frac{h}{2\pi} \gamma,$$

так что ширина испускаемой линии будет равняться

$$\Delta \nu = \frac{\Delta E}{h} \cong \frac{\gamma}{2\pi}. \quad (30,26)$$

В качестве примера атома с двумя энергетическими уровнями мы можем взять гармонический осциллятор, спектр энергии которого связан с механической частотой  $\nu_0$  колебаний соотношением

$$E_{n'} = h\nu_0 \left( n' + \frac{1}{2} \right),$$

где  $n' = 0, 1, 2, \dots$  — квантовые числа. Как известно, у гармонического осциллятора разрешены переходы между соседними уровнями ( $n' \rightarrow n' - 1$ ), причём соответствующий матричный элемент равен

$$|x_{n', n'-1}|^2 = \frac{n'h}{8\pi^2\nu_0 m},$$

а для квантовой частоты излучения имеет место выражение

$$\nu_{n', n'-1} = \frac{E_{n'} - E_{n'-1}}{h} = \nu_0,$$

совпадающее с механической частотой колебаний.

Для того чтобы с уровня  $a$  электрон не мог переходить на более низкие уровни, мы должны предположить, что уровень  $a$  является наимизшим ( $n' = 0$ ). Тогда, полагая для уровня  $b$  квантовое число  $n' = 1$ , находим:

$$|x_{ab}|^2 = |x_{01}|^2 = \frac{h}{8\pi^2\nu_0 m},$$

откуда согласно (30,25) получаем для коэффициента  $\gamma$  выражение

$$\gamma = \frac{8\pi^2}{3} \frac{e^2\nu_0^2}{mc^3}, \quad (30,27)$$

совпадающее с соответствующим классическим выражением.

Таким образом, затухание в квантовой теории связано с учётом влияния поля излучения на первоначальное состояние атома.

Аналогичным способом мы можем рассмотреть и другие причины, приводящие к уширению линий. Так, например, теория ширины спектральных линий в однородном разреженном газе была окончательно разработана А. А. Власовым и В. С. Фурсовым<sup>1)</sup>. Рассматривая атомы газа как гармонические осцилляторы, связанные между собою дипольным взаимодействием, они показали, что ширина линий возникает благодаря перекачиванию энергии от возбуждённых атомов к невозбуждённым.

Исследуя явление с помощью классической теории, они нашли следующее выражение для ширины линии:

$$\gamma' = \frac{2}{3} \frac{e^2}{m\nu_0} N,$$

где  $\nu_0$  — собственная частота колебаний осцилляторов, а  $N$  — число атомов в  $1 \text{ см}^3$ .

Сопоставление этого выражения для  $\gamma'$  с выражением (30,27) показывает, что при сравнительно малых плотностях  $\left[ N \ll \left( \frac{c}{\nu_0} \right)^3 \right]$  уширением линии, обусловленным взаимодействием атомов, можно пренебречь по сравнению с естественной шириной линии.

При переходе к квантовому случаю классическую частоту колебаний  $\nu_0$  следует заменить квантовой  $\nu_{ba}$ , а вместо величины  $N$  подставить  $Nf_{ba}$ , где  $f_{ba}$  — сила осциллятора (см. § 33). Впоследствии эта теория была обобщена на случай однородного газа при весьма больших плотностях<sup>2)</sup>.

Значительно будет также уширение линии, обусловленное эффектом Доплера. В самом деле, число атомов массы  $M$ , движущихся со скоростью  $v_x$  по направлению к наблюдателю, пропорционально функции распределения

$\frac{Mv_x^2}{e^{-2\kappa T}}$ , где  $T$  — температура газа. Вследствие эффекта

<sup>1)</sup> А. А. Власов и В. С. Фурсов, ЖЭТФ 6, 751 (1936).

<sup>2)</sup> А. А. Власов и В. С. Фурсов, ЖЭТФ 9, 783 (1939).

Доплера линия будет смещена на величину  $\Delta\nu = \frac{v_x}{c} \nu_0$ .

Определяя ширину линии таким значением  $\Delta\nu'' = \frac{\gamma''}{2\pi}$ , при котором интенсивность уменьшается вдвое, мы находим для величины  $\frac{\gamma''}{2\pi}$  следующее значение:

$$\frac{\gamma''}{2\pi} = \nu_0 \sqrt{\frac{2kT}{Mc^2} \ln 2}.$$

Даже при очень низких температурах ширина линии  $\frac{\gamma''}{2\pi}$  в видимой области спектра, обусловленная эффектом Доплера, будет значительно больше, чем естественная ширина линии. Однако интенсивность линии естественной ширины убывает лишь обратно пропорционально  $(\Delta\nu)^2$ , в то время как интенсивность доплеровской линии убывает с увеличением  $\Delta\nu$  по экспоненциальному закону. Поэтому интенсивность, наблюдаемая при сравнительно больших смещениях  $\Delta\nu$  ( $\Delta\nu \gg \Delta\nu''$ ), обусловлена главным образом естественной шириной.

Другие уширения линий для очень малых плотностей ничтожно малы, и мы их здесь рассматривать не будем.

### § 31. Мультипольное излучение

В § 28 мы нашли, что вероятность спонтанного излучения определяется выражением [см. формулу (28,30)]

$$A_{ba} = \frac{e^2 \kappa_{ba}}{2\pi \hbar} \int [(\alpha_{ab}^+ \alpha_{ab}) - (\kappa^0 \alpha_{ab}^+) (\kappa^0 \alpha_{ab})] d\Omega, \quad (31,1)$$

причём в нерелятивистском случае матричный элемент  $\alpha_{ab}$  согласно (17,32) равен

$$\alpha_{ab} = \int \psi_a'^+ \frac{1}{mc} (p' + \frac{1}{2} \hbar \pi + \frac{i\hbar}{2} [\sigma' \pi]) e^{-i\kappa r} \psi_b' d^3x, \quad (31,2)$$

где

$$\kappa = \kappa_{ba} = \frac{2\pi\nu}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}.$$

В том случае, когда длина волны  $\frac{\lambda}{2\pi}$  много больше размеров атома ( $\sim r$ ), мы можем экспоненциальный множитель разложить в ряд

$$e^{-ixr} = 1 - i(\mathbf{xr}) + \dots \quad (31,3)$$

В § 28 мы, учитывая лишь первый член разложения, вычислили вероятность так называемого дипольного излучения. Рассмотрим теперь излучение, описываемое первыми двумя членами разложения (31,3). Матричный элемент в этом случае будет иметь вид

$$\alpha_{ab} = \frac{1}{mc} (\mathbf{p} - i(\mathbf{xr})\mathbf{p} + \frac{i\hbar}{2} [\mathbf{x}\boldsymbol{\sigma}'])_{ab}. \quad (31,4)$$

Для дальнейших вычислений воспользуемся следующим тождеством:

$$\begin{aligned} -\frac{(E_b - E_a)}{c\hbar} (f(\mathbf{r}))_{ab} &= \frac{1}{c\hbar} (\mathbf{H}f(\mathbf{r}) - f(\mathbf{r})\mathbf{H})_{ab} = \\ &= \frac{1}{mc\hbar} \left( \mathbf{p}f(\mathbf{r})\mathbf{p} + \frac{1}{2}\mathbf{p}^2f(\mathbf{r}) \right)_{ab}, \end{aligned} \quad (31,5)$$

которое легко получить, если принять во внимание, что в нерелятивистском приближении волновая функция удовлетворяет уравнению

$$(E - \mathbf{H})\psi_b = 0, \quad (31,6)$$

где

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + V(\mathbf{r}).$$

Полагая в формуле (31,5) функцию  $f$  соответственно равной  $\mathbf{r}$  и  $\mathbf{r}(\mathbf{xr})$ , будем иметь:

$$(\mathbf{p})_{ab} = -imxc(\mathbf{r})_{ab}, \quad (31,5a)$$

$$((\mathbf{xr})\mathbf{p})_{ab} = -imxc(\mathbf{r}(\mathbf{xr}))_{ab} - (\mathbf{r}(\mathbf{xp}))_{ab}. \quad (31,5b)$$

Отсюда легко вывести следующее равенство:

$$e\alpha_{ab} = -ixe\mathbf{r}_{ab} - \frac{ex}{2} (\mathbf{r}(\mathbf{xr}))_{ab} - i([\boldsymbol{\mu}])_{ab}, \quad (31,7)$$

причём оператор  $\boldsymbol{\mu}$  магнитного момента атома (включая собственный магнитный момент электрона) равен

$$\boldsymbol{\mu} = -\frac{e}{2mc} [\mathbf{r}\mathbf{p}] - \mu_0\boldsymbol{\sigma}'.$$

Подставляя (31,7) в (31,1) и проведя интегрирование по углам вектора  $\mathbf{x}^0$  с помощью соотношений:

$$\oint d\Omega = 4\pi,$$

$$\oint (\mathbf{x}^0 \mathbf{A}) d\Omega = 0,$$

$$\oint (\mathbf{x}^0 \mathbf{A}) (\mathbf{x}^0 \mathbf{B}) d\Omega = \frac{4\pi}{3} (\mathbf{AB}), \quad (31,8)$$

$$\oint (\mathbf{x}^0 \mathbf{A}) (\mathbf{x}^0 \mathbf{B}) (\mathbf{x}^0 \mathbf{C}) (\mathbf{x}^0 \mathbf{D}) d\Omega =$$

$$= \frac{4\pi}{15} [(\mathbf{AB})(\mathbf{CD}) + (\mathbf{AC})(\mathbf{BD}) + (\mathbf{AD})(\mathbf{BC})],$$

получаем выражение для вероятности спонтанного излучения в рассматриваемом приближении:

$$A_{b,a} = \frac{64\pi^4 \nu^3}{3c^3 h} [(d_n)_{ab}^* (d_n)_{ab} + (\mu_n)_{ab} (\mu_n)_{ab}^* +$$

$$+ \frac{1}{30} \frac{\pi^2 \nu^2}{c^2} (D_{nn'})_{ab}^* (D_{nn'})_{ab}], \quad (31,9)$$

где

$$(\mathbf{d})_{ab} = -e(\mathbf{r})_{ab}, \quad (\boldsymbol{\mu})_{ab} = -\left(\frac{e}{2mc}([\mathbf{r}\mathbf{p}] + \mu_0 \boldsymbol{\sigma}')\right)_{ab} \quad (31,10)$$

представляют собой соответственно дипольный электрический и дипольный магнитный моменты системы, а

$$(D_{nn'})_{ab} = -e(3r_n r_{n'} - r^2 \delta_{nn'})_{ab} \quad (31,11)$$

есть её квадрупольный момент. Если частица не обладает спиновым магнитным моментом, то величину  $\mu_0$  следует положить равной нулю.

Таким образом, полное излучение состоит из трёх независимых частей: электрического дипольного, магнитного дипольного и электрического квадрупольного.

Полная интенсивность излучения  $W_{ba}$ , обусловленная спонтанными переходами, будет определяться формулой (28,2).

При переходе к классическому случаю ( $h \rightarrow 0$ ) мы должны матричные элементы (31,10) и (31,11) положить равными  $(\mathbf{d})_{ab} = -e\mathbf{r}$  и т. д., поскольку остальная часть формулы не зависит от постоянной Планка  $h$ .



Оценим относительные порядки интенсивностей излучений:

$$\begin{aligned} |(\mathbf{d})_{ab}|^2 &\sim (er_0)^2 \sim 10^{-35} \text{ CGS}, \\ |(\mathbf{p}_{ab})|^2 &\sim \left(\frac{e\hbar}{2mc}\right)^2 \sim 10^{-40} \text{ CGS}, \\ \frac{v^2}{c^2} |(D)_{ab}|^2 &\sim (er_0)^2 \left(\frac{r_0}{\lambda}\right)^2 \sim 10^{-42} \text{ CGS} \end{aligned} \quad (31,12)$$

(при  $\lambda \sim 5000 \text{ \AA}$ ).

Таким образом, вероятность перехода, связанная с магнитным дипольным или электрическим квадрупольным излучением, будет величиной малой по сравнению с вероятностью перехода, связанной с электрическим дипольным излучением.

Поэтому электрическое квадрупольное или магнитное дипольное излучения будут иметь существенные значения только в том случае, когда матричный элемент  $(\mathbf{d})_{ab}$  дипольного электрического момента равен нулю.

Вычисляя матричные элементы (31,10) и (31,11), мы можем найти правила отбора для различных атомов.

В частности, в атоме водорода при электрическом дипольном излучении правила отбора для орбитального  $l$ , внутреннего  $j$  и магнитного  $m$  квантовых чисел гласят (см. более подробно § 46):

$$\Delta l = \pm 1, \quad \Delta j = 0, \pm 1, \quad \Delta m = 0, \pm 1; \quad (31,13)$$

для электрического квадрупольного излучения мы имеем:

$$\begin{aligned} \Delta l = 0, \pm 2; \quad \Delta j = 0 (j \neq 1/2), \pm 1, \pm 2; \\ \Delta m = 0, \pm 1, \pm 2. \end{aligned} \quad (31,14)$$

В случае магнитного дипольного излучения имеем:

$$\Delta l = 0, \quad \Delta j = 0, \pm 1, \quad \Delta m = \pm 1, \quad \Delta n = 0. \quad (31,15)$$

Если атом находится в метастабильном состоянии, т. е. в таком состоянии, из которого возможен переход на основной уровень только путём квадрупольного излучения, то время жизни такого возбуждённого атома увеличивается примерно в  $\left(\frac{\lambda}{2\pi r_0}\right)^2$  раз по сравнению с временем жизни возбуждённого атома, находящегося в состоянии с разрешённым дипольным переходом.

Так, например, время жизни возбуждённого атома водорода имеет вообще порядок  $10^{-8}$  сек., а время жизни метастабильного атома водорода увеличивается примерно до  $10^{-2}$  сек. Более подробно этот вопрос мы разберём в § 46.

Заметим, что дипольное излучение отсутствует в системе, состоящей из частиц, которые обладают одинаковым отношением заряда к массе. Действительно, у такой системы электрический дипольный момент будет пропорционален координате центра тяжести и поэтому должен оставаться величиной постоянной. Это условие имеет место, например, для гравитационного излучения, поскольку гравитационный заряд (точнее, гравитационная масса) пропорционален инертной массе  $m$ . Поэтому гравитационное излучение может происходить лишь квадрупольным путём<sup>1)</sup>.

Квадрупольное излучение имеет большое значение в физике атомного ядра, поскольку заряженные частицы последнего (протоны) обладают одинаковым зарядом и массой.

Как видно из формулы (31,3), интенсивность квадрупольного излучения, грубо говоря, равняется интенсивности дипольного излучения, умноженной на величину

$$(\kappa r)^2 \sim \left(\frac{2\pi r}{\lambda}\right)^2. \quad (31,16)$$

Точно так же мы можем оценить интенсивность излучения высших мультиполей (номера  $n$ ), которая будет равняться интенсивности дипольного излучения, умноженной на величину

$$(\kappa r)^{2(n-1)} \sim \left(\frac{2\pi r}{\lambda}\right)^{2(n-1)}. \quad (31,17)$$

Рассматривая, в частности, движение электрона по окружности радиуса  $r$  со скоростью  $v$ , мы найдём следующее значение для длины волны  $\lambda$  испускаемого света:

$$\lambda = \frac{2\pi r v}{v}, \quad (31,18)$$

<sup>1)</sup> См. «Классическая теория поля», стр. 446, а также вторую часть настоящей книги.

т. е. величина, по которой идёт разложение интенсивности излучения, определяется выражением

$$(\chi r)^2 \sim \left(\frac{v}{c}\right)^2. \quad (31,19)$$

Отсюда видно, что в ультрарелятивистском случае ( $v \sim c$ ) исследование интенсивности излучения с помощью разложения по величине (31,16) теряет смысл.

Анализ с помощью классических уравнений излучения электрона, движущегося с релятивистской скоростью по окружности, показывает, что интенсивность излучения в этом случае следует раскладывать не по мультипольным моментам (т. е. по величине  $(\chi r)^2$ ), а по номерам излучаемых гармоник. Тогда легко показать, что максимум интенсивности излучения приходится на высшие гармоники, имеющие порядок

$$n \sim \left(\frac{E}{mc^2}\right)^3,$$

где  $E$  — энергия электрона, движущегося по окружности.

Классическая теория подобного излучения («светящийся электрон»), а также вопросы, связанные с историей его обнаружения, подробно изложены в монографии, посвящённой классической теории <sup>1)</sup>.

Там же весьма кратко приведены квантовые расчёты, которые подтверждают классические результаты. Квантовые же поправки пока что ещё не обнаружены экспериментально.

## § 32. Взаимодействие электронов с полем фотонов

**а) Вероятность излучения.** Прежде всего установим некоторые общие формулы теории переходных процессов для случая, когда в нулевом приближении электроны можно рассматривать как свободные, движение которых описывается уравнением

$$D\psi_0 = \left(-\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial t} - H\right) \psi_0 = 0, \quad (32,1)$$

<sup>1)</sup> См. «Классическая теория поля», стр. 279.

причём

$$H = \frac{c\hbar}{i} (\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\nabla}) + \rho_3 mc^2.$$

Если в начальный момент свободный электрон обладает импульсом  $\hbar\mathbf{k}$ , то решение для функции  $\psi_0$  принимает вид

$$\psi_0 = \frac{1}{L^{3/2}} b e^{-icKt + i\mathbf{k}r}. \quad (32,2)$$

Представим энергию возмущения поля  $W^+$  в виде

$$W^+(\mathbf{r}, t) = \sum_{l_s} W^+(l_s) e^{icLt - i\mathbf{k}r}. \quad (32,3)$$

При рассмотрении эффектов первого порядка с функцией возмущения  $W^+(l_s)$  величина  $\hbar l$  есть импульс излучаемого (или поглощаемого) фотона. При вычислении же эффектов второго и выше порядков (например, испускание двух фотонов) функция  $W^+(l_s)$  будет иметь более сложный вид, причём величина  $\hbar l$  складывается из геометрической суммы импульсов всех испускаемых и поглощаемых частиц.

С учётом энергии возмущения  $W^+(\mathbf{r}, t)$  решение волнового уравнения следует искать в виде

$$\psi = \psi_0 + \psi_1 + \dots$$

Решение  $\psi_0$  невозмущённого уравнения определяется формулой (32,2), а для нахождения следующего приближения, т. е. функции  $\psi_1$ , мы имеем, как обычно, уравнение <sup>1)</sup>

$$D\psi_1 = W^+(\mathbf{r}, t)\psi_0. \quad (32,4)$$

Согласно теории возмущений решение уравнения (32,4) следует искать в виде суммы решений невозмущённого

<sup>1)</sup> В том случае, когда  $W^+(\mathbf{r}, t)$  зависит от квантованных амплитуд поля фотонов, следует в  $\psi_0$  и  $\psi_1$  включить функцию от числа фотонов  $f(N)$ . Однако, как было отмечено в § 28, эта функция будет автоматически учитываться в окончательном результате с помощью квантовых нерелятивистских соотношений.

уравнения

$$\psi_1 = \frac{1}{L^{3/2}} \sum'_{k'} C'(t) b' e^{-icK't + ik'r}, \quad (32,5)$$

причём коэффициенты  $C'$ , определяющие вероятность пребывания электрона в состоянии  $k'$ , необходимо считать зависящими от времени  $t$ .

В начальный момент времени ( $t=0$ ) электрон находится в состоянии  $k$ , описываемом волновой функцией  $\psi_0$ . Поэтому в сумме (32,5) мы должны исключить состояние, для которого  $k' = k$ , и положить для начального момента времени ( $t=0$ ) коэффициенты  $C'$  равными нулю:

$$C'(0) = 0.$$

Подставляя (32,5) в равенство (32,4) и принимая во внимание соотношение

$$Db'e^{-icK't + ik'r} = 0,$$

получаем уравнение для определения неизвестных коэффициентов  $C'$ :

$$-\frac{\hbar}{i} \sum'_{k'} \dot{C}' b'' e^{-icK''t + ik''r} = \sum_{l_s} W^+(l_s) b e^{-ict(K-k) + ir(k-l)}.$$

Умножая последнее уравнение на  $\frac{1}{L^{3/2}} b'^+ e^{icK't - ik'r}$  и принимая во внимание начальное условие ( $C'(0) = 0$ ), а также условие ортонормированности, находим:

$$C' = -\frac{i}{\hbar} \sum_{l_s} b'^+ W^+(l_s) b \delta_{k-l, k'} \int_0^t e^{-ict(K-L-K')} dt,$$

причём символ  $\delta$  в последнем выражении появился в результате интегрирования по всему объёму:

$$\frac{1}{L^3} \int e^{i(k-l-k')r} d^3x = \delta_{k-l, k'}. \quad (32,6)$$

Последнее выражение показывает, что отличными от нуля будут только такие матричные элементы, для которых

имеет место закон сохранения импульса:

$$\mathbf{k}' = \mathbf{k} - \mathbf{l}.$$

Далее, с помощью равенства (28,25) находим для полной вероятности перехода электрона из состояния  $\mathbf{k}$  следующее выражение <sup>1)</sup>:

$$w = \frac{\partial}{\partial t} \sum_{\mathbf{k}'} C'^* C' = \frac{2\pi}{c\hbar^3} \sum_{\mathbf{k}'} \sum_{l_s} R^* R \delta_{\mathbf{k}-\mathbf{l}, \mathbf{k}} \delta(K-L-K'), \quad (32,7)$$

где

$$R = b'^* W^+(l_s) b. \quad (32,8)$$

При выводе соотношения (32,7) мы приняли во внимание равенство (28,27)

$$\frac{\partial}{\partial t} \left| \int_0^t e^{-ict(K-L-K')} dt \right|^2 = \frac{2\pi}{c} \delta(K-L-K'), \quad (32,9)$$

которое приводит к закону сохранения энергии:

$$K' = K - L. \quad (32,10)$$

**б) Квантовая теория эффекта Черенкова.** С помощью только что выведенных формул рассмотрим прежде всего вопрос о возможности спонтанного излучения фотонов свободно движущимся электроном.

Пусть свободный электрон движется с импульсом  $\hbar\mathbf{k}$ . Тогда его энергия будет равняться величине  $c\hbar K = c\hbar \sqrt{k^2 + k_0^2}$ . Найдём квантовое условие, при котором он может излучать частицы (например, фотоны) с энергией  $c\hbar L$  и с импульсом  $\hbar\mathbf{l}$ .

Излучая фотоны, электрон должен перейти в новое квантовое состояние  $(\mathbf{k}', K' = \sqrt{k'^2 + k_0^2})$ . Как было указано в § 32, п. а, подобное излучение возможно, когда

<sup>1)</sup> При переходе к непрерывному спектру ( $L \rightarrow \infty$ ) сумма по вектору  $\mathbf{k}'$  может быть распространена на все значения вектора  $\mathbf{k}'$ , поскольку один отбрасываемый член ( $\mathbf{k}' = \mathbf{k}$ ) будет иметь порядок  $\frac{1}{L^3}$ , и поэтому им можно будет пренебречь

имеют место законы сохранения энергии и импульса:

$$\sqrt{k^2 + k_0^2} - L = \sqrt{k'^2 + k_0^2}, \quad (32,11)$$

$$\mathbf{k} - \mathbf{l} = \mathbf{k}'. \quad (32,12)$$

Возводя оба равенства в квадрат и вычитая одно из другого, найдём следующее выражение для косинуса угла между первоначальным направлением движения электрона  $\mathbf{k}$  и направлением  $\mathbf{l}$ , по которому излучается фотон:

$$\cos \vartheta = \frac{1}{\beta} \frac{L}{l} + \frac{l}{2k} \left(1 - \frac{L^2}{l^2}\right), \quad (32,13)$$

причём величина  $\beta$  равняется отношению скорости движения электрона к скорости света в вакууме:

$$\beta = \frac{k}{K} = \frac{v}{c}.$$

Напомним, что в вакууме у фотонов энергия ( $E = c\hbar L$ ) и импульс ( $\mathbf{p} = \hbar \mathbf{l}$ ) связаны соотношением  $E = cp$ , т. е. величины  $L$  и  $l$  равны друг другу ( $L = l$ ). Отсюда для косинуса угла находим:

$$\cos \vartheta = \frac{1}{\beta}. \quad (32,13a)$$

Согласно теории относительности скорость электрона не может превышать скорость света в вакууме, т. е. величина  $\beta$  всегда должна оставаться меньше единицы, благодаря чему равенство (32,13a) становится невозможным. Это означает, что движущийся по инерции электрон не может излучать свет, поскольку не могут быть одновременно удовлетворены законы сохранения энергии и импульса, и поэтому вероятность подобного процесса, согласно (32,7), обращается в нуль.

При движении электрона в какой-либо среде его скорость  $v$  всегда должна быть меньше скорости света  $c$  в вакууме. Однако скорость  $v$  может стать больше фазовой скорости света в данной среде:  $c' = \frac{c}{n} < c$  ( $n$  — показатель преломления), т. е. возможен случай, когда  $\frac{c}{n} < v < c$ . Классическое исследование подобного явления,

данное Франком и Таммом<sup>1)</sup>, показало, что при этом должно иметь место излучение. Подобное излучение наблюдалось несколько ранее экспериментально Черенковым<sup>2)</sup> в лаборатории Вавилова («сверхсветовой» электрон).

Найдём квантовое обобщение теории эффекта Черенкова. С этой целью мы должны прежде всего построить феноменологическую квантовую теорию электромагнитного поля в диэлектриках.

Поперечное электромагнитное поле в диэлектриках подчиняется следующим уравнениям:

$$\begin{aligned} \mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{A}, \quad \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \\ \left( \nabla^2 - \frac{n^2}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathbf{A} = 0, \quad \text{div } \mathbf{A} = 0. \end{aligned} \quad (32,14)$$

Гамильтониан (или полная энергия) имеет вид:

$$\begin{aligned} H = \frac{1}{8\pi} \int (n^2 \mathbf{E}^2 + \mathbf{H}^2) d^3x = \\ = \frac{1}{8\pi} \int \left( \frac{n^2}{c^2} \left( \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right)^2 + (\text{rot } \mathbf{A})^2 \right) d^3x. \end{aligned}$$

Вводя скорость света в диэлектрике  $c' = \frac{c}{n}$ , мы приведём все эти уравнения к виду, совпадающему с уравнениями поля в вакууме:

$$\begin{aligned} \text{div } \mathbf{A} = 0, \quad \left( \nabla^2 - \frac{1}{c'^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathbf{A} = 0; \\ H = \frac{1}{8\pi} \int \left( \frac{1}{c'^2} \left( \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right)^2 + (\text{rot } \mathbf{A})^2 \right) d^3x, \end{aligned} \quad (32,15)$$

в которых только скорость  $c$  заменена на фазовую скорость  $c' = \frac{c}{n}$ . Поэтому при квантовании поля в диэлек-

<sup>1)</sup> И. М. Франк и И. Е. Тамм, ДАН СССР 14, 107 (1937). Подробное изложение классической теории эффекта Черенкова дано также в монографии «Классическая теория поля», стр. 154.

<sup>2)</sup> П. А. Черенков, ДАН СССР 2, 451 (1934); С. И. Вавилов, ДАН СССР 2, 457 (1934).



триках мы можем воспользоваться результатами, найденными нами при квантовании поперечного поля в вакууме (см. § 14), заменив в последних скорость  $c$  на скорость  $c'$ .

В соответствии с этим для вектора потенциала мы найдем выражение

$$A = \frac{1}{L^{3/2}} \sum_{\mathbf{x}} \sqrt{\frac{2\pi c' \hbar}{x}} (a e^{-ic' \mathbf{x} t + i \mathbf{x} r} + a^\dagger e^{ic' \mathbf{x} t - i \mathbf{x} r}) \quad (32,16)$$

с перестановочными соотношениями для амплитуд

$$a_n a_{n'}^\dagger - a_{n'}^\dagger a_n = \delta_{\mathbf{x}\mathbf{x}'} \left( \delta_{nn'} - \frac{x_n x_{n'}}{x^2} \right). \quad (32,17)$$

В частности, если в начальный момент фотоны отсутствуют, мы можем положить

$$a_n^\dagger a_n = 0,$$

$$a_n a_n^\dagger = \delta_{\mathbf{x}\mathbf{x}'} \left( \delta_{nn'} - \frac{x_n x_{n'}}{x^2} \right). \quad (32,18)$$

Тогда энергия взаимодействия (32,3) электрона с полем фотонов дается выражением

$$W^+(\mathbf{r}, t) = \frac{e}{L^{3/2}} \sum_{\mathbf{x}} \sqrt{\frac{2\pi c' \hbar}{x}} (\boldsymbol{\alpha} \boldsymbol{\alpha}^\dagger) e^{ic' \mathbf{x} t - i \mathbf{x} r}. \quad (32,19)$$

Полагая

$$W^+(l_s) = \frac{e}{L^{3/2}} \sqrt{\frac{2\pi c' \hbar}{x}} (\boldsymbol{\alpha} \boldsymbol{\alpha}^\dagger), \quad (32,20)$$

$$l = \mathbf{x}, \quad L = \frac{c'}{c} x = \frac{x}{n},$$

мы найдём с помощью формул (32,7) и (32,13) следующее выражение для вероятности излучения:

$$\omega = \frac{2\pi}{c\hbar^2} \sum_{\mathbf{k}'} \sum_{\mathbf{x}} R^+ R \delta_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'+\mathbf{x}} \delta \left( K' + \frac{x}{n} - K \right), \quad (32,21)$$

где

$$R = \frac{e}{L^{3/2}} \sqrt{\frac{2\pi c' \hbar}{x}} b'^+ (\alpha \alpha^+) b, \quad (32,22)$$

$$\cos \vartheta = \frac{1}{\beta n} + \frac{x}{2k} \left( 1 - \frac{1}{n^2} \right). \quad (32,23)$$

Отсюда видно, что излучение возможно, когда выполняется условие  $\beta n > 1$ , т. е. когда скорость электрона становится больше скорости света в диэлектрике

$$v > \frac{c}{n}.$$

Это соотношение совпадает с классическим условием появления излучения Черенкова.

Как видно из формулы (32,23), величина  $\cos \vartheta$  лежит в интервале

$$\frac{1}{\beta n} \leq \cos \vartheta \leq 1;$$

соответствующее же значение для волнового числа  $x$  будет при этом изменяться в пределах

$$0 \leq x \leq x_{\text{макс}},$$

где

$$x_{\text{макс}} = 2k \frac{1 - \frac{1}{\beta n}}{1 - \frac{1}{n^2}} \quad (32,24)$$

Согласно формуле (32,22) произведение  $R^+ R$  может быть представлено в виде

$$\begin{aligned} R^+ R &= \frac{2\pi c \hbar e^2}{L^3 n x} b^+ (\alpha \alpha) b' b'^+ (\alpha \alpha^+) b = \\ &= \frac{2\pi c \hbar e^2}{L^3 n x} \frac{1}{2} \sum_{s, s'} a_n a_n^+ \frac{\rho_{11} \sigma_{nn'}}{4}. \end{aligned} \quad (32,25)$$

При вычислении величин  $\rho_{11}$  и  $\sigma_{nn'}$  по формулам (21,17) и (21,18) мы должны положить  $\epsilon = \epsilon' = 1$ , затем полученное выражение следует просуммировать по конечным

состояниям спина  $s' = \pm 1$  и усреднить по начальным, т. е. добавить множитель  $\frac{1}{2}$  перед знаком суммы. Тогда имеем:

$$\sum_{s, s'} a_n a_{n'}^+ \frac{\rho_{11}^0 n n'}{4} = \\ = \frac{1}{4} \sum_{s, s'} \left( 1 + s s' \frac{k k'}{K K'} - \frac{k_0^2}{K K'} \right) \left[ (a a^+) \left( 1 - s s' \frac{(k k')}{k k'} \right) + \right. \\ \left. + \frac{i}{k k'} \left( (s k' k - s' k k') [a a^+] \right) + 2 s s' \frac{(a k)(a^+ k')}{k k'} \right]. \quad (32,26)$$

С помощью перестановочных соотношений (32,18) находим:

$$(a a^+) = 2, [a a^+] = 0, (a k)(a^+ k') = (k k') - \frac{(k x)(k' x)}{x^2}.$$

Отсюда выражение (32,25) принимает вид

$$R^+ R = \frac{2\pi c \hbar e^2}{L^3 n x} \left( 1 - \frac{k_0^2}{K K'} - \frac{(k x)(k' x)}{x^2 K K'} \right). \quad (32,27)$$

Подставляя (32,27) в (32,21), найдём после суммирования по вектору  $k'$  и перехода к непрерывному спектру:

$$w = \frac{e^2}{2\pi \hbar} \int \left( 1 - \frac{k_0^2}{K K'} - \frac{(k x)(k' x)}{x^2 K K'} \right) \delta \left( K' + \frac{x}{n} - K \right) \frac{d^3 x}{n x}. \quad (32,28)$$

Перейдём далее к сферическим координатам, а интегрирование по углу  $\theta$  произведём с помощью соотношения<sup>1)</sup>

$$\int \varphi(x) \delta(f(x)) dx = \frac{\varphi(x_0)}{|f'(x_0)|}, \quad (32,29)$$

причём значение для  $x_0$  следует определить из уравнения

$$f(x_0) = 0.$$

Тогда находим:

$$dw = \frac{e^2}{\hbar n} \frac{1 - \frac{k_0^2}{K K'} - \frac{(k x)(k' x)}{x^2 K K'}}{\frac{x k}{K'}} x dx, \quad (32,30)$$

<sup>1)</sup> См. «Классическая теория поля», стр. 31.

где  $k' = k - \alpha$ ,  $K' = K - \frac{\alpha}{n}$ , а значение для величины  $\frac{(k\alpha)}{k\alpha} = \cos \vartheta$  определяется выражением (32,23).

С помощью (32,30) после ряда преобразований мы находим следующее выражение для энергии, излучаемой электроном в единицу времени<sup>1)</sup>:

$$W = \int c\hbar \frac{\alpha}{n} d\omega = \\ = \frac{e^2 \beta^2}{c} \int_0^{\omega_m} \omega \left[ 1 - \frac{1}{n^2 \beta^2} - \frac{\omega \hbar}{pc \beta^2} \left( 1 - \frac{1}{n^2} \right) - \frac{n^2 \omega^2 \hbar^2}{4p^2 c^2} \left( 1 - \frac{1}{n^2} \right) \right] d\omega, \quad (32,31)$$

а также для направления излучения:

$$\cos \vartheta = \frac{1}{\beta n} + \frac{n\omega \hbar}{2pc} \left( 1 - \frac{1}{n^2} \right), \quad (32,32)$$

где  $\omega$  является круговой частотой излучаемого света ( $\omega = \frac{c\alpha}{n}$ ). Максимальную частоту излучения  $\omega_m$  мы найдём, полагая  $\cos \vartheta = 1$ :

$$\omega_m = \frac{2pc}{n\hbar} \frac{1 - \frac{1}{\beta n}}{1 - \frac{1}{n^2}}. \quad (32,33)$$

Последние соотношения приобретают более простой вид в нерелятивистском квантовом случае  $\frac{v}{c} \ll 1$ . Поскольку излучение возможно лишь при условии  $\frac{vn}{c} > 1$ , мы должны при переходе к нерелятивистскому приближению положить  $n^2 \gg 1$ . Тогда вместо последних выражений имеем:

$$W = \frac{e^2 \beta^2}{c} \int_0^{\omega_m} \omega \left( 1 - \cos^2 \vartheta + \frac{n^2 \omega^2 \hbar^2}{2p^2 c^2} \right) d\omega, \\ \cos \vartheta = \frac{1}{\beta n} + \frac{n\omega \hbar}{2mc^2 \beta}, \quad \omega_m = \frac{2mc^2 \beta}{n\hbar} \left( 1 - \frac{1}{\beta n} \right).$$

<sup>1)</sup> А. Соколов, ДАН 28, 415 (1940). Квантовая теория эффекта Черенкова для предельных случаев (нерелятивистского и ультрарелятивистского) была разработана также В. Гинзбургом, ЖЭТФ 10, 589 (1940).

Заметим, что при  $\hbar \rightarrow 0$  формулы (32,31) и (32,32) для излучения «сверхсветового» электрона переходят в классические:

$$W = \frac{e^2 \beta}{c} \int_0^{\omega_m} \omega (1 - \cos^2 \vartheta) d\omega,$$

$$\cos \vartheta = \frac{1}{\beta n},$$

причём при  $n = \text{const}$   $\omega_m$  обращается в бесконечность, и поэтому выражение для интенсивности излучения будет расходиться. Вообще же случай  $n = \text{const}$  является нереальным, поскольку показатель преломления в области больших частот быстро спадает примерно до единицы, и поэтому в формулах излучения следует считать величину  $n$  зависящей от частоты  $\omega$ , а верхний предел интеграла должен быть определён из уравнения

$$\beta n(\omega'_m) = 1.$$

Благодаря наличию этого условия в квантовом случае мы также должны обрывать интеграл (32,31) на значительно меньших частотах  $\omega'_m$ , чем соответствующее значение для  $\omega_m$ , определяемое формулой (32,33) ( $\omega'_m \ll \omega_m$ ), иными словами, при анализе экспериментов Черенкова мы можем вообще пренебречь квантовыми поправками, т. е. отдачей, получаемой электроном при излучении.

Физическая причина возможности отбрасывания квантовых поправок при реально наблюдаемом излучении связана с тем обстоятельством, что де-Бройлевская длина волны электрона  $\left(\frac{2\pi\hbar}{mv}\right)$  оказывается много меньшей даже минимальных длин волн  $\left(\lambda_m = \frac{2\pi c}{n\omega'_m}\right)$ , которые излучает электрон при своём движении в диэлектриках.

Заметим, что феноменологическая теория эффекта Черенкова как при классическом, так и при квантовом рассмотрении не является строгой, поскольку черенковское излучение возникает благодаря взаимодействию движущихся электронов с атомами диэлектрика в целом, которое в указанных теориях учитывается лишь путём

формального введения некоторого среднего показателя преломления. Рассмотренный феноменологический метод подсчёта, помимо выяснения ряда принципиальных вопросов, связанных с излучением свободных частиц, оказался весьма продуктивным также и при вычислении общей потери энергии движущимися в среде электронами (более подробно см. § 37).

### § 33. Дисперсия света

При прохождении сквозь вещество свет претерпевает рассеяние. В теории рассеяния следует различать два случая: 1) Энергия фотонов имеет тот же порядок, что и энергия связи электронов в атоме. Это условие примерно соответствует области видимого света вплоть до мягких рентгеновских лучей. В этом случае рассеяние зависит от дискретных состояний атома, что приводит к дисперсии или к комбинационному рассеянию света. 2) Энергия фотонов во много раз превышает энергию связи электронов в атоме. При этом мы вообще можем пренебречь энергией связи и рассматривать электроны атома как свободные.

**а) Нерелятивистская теория.** В первом случае, т. е. при рассеянии света сравнительно большой длины волны, мы можем пренебречь релятивистскими и спиновыми поправками и ограничиться при построении теории нерелятивистским уравнением Шрёдингера

$$\left( -\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial t} - H \right) \psi = \left( \frac{e}{mc} (\mathbf{A}\mathbf{p}) + \frac{e^2}{2mc^2} A^2 \right) \psi, \quad (33,1)$$

где

$$\mathbf{A} = \frac{1}{L^{3/2}} \sum_{\mathbf{x}} \sqrt{\frac{2\pi c \hbar}{\kappa}} (\mathbf{a} e^{-i\kappa t + i\mathbf{x}r} + \mathbf{a}^+ e^{i\kappa t - i\mathbf{x}r}) \quad (33,2)$$

является вектор-потенциалом квантованного поля фотонов.

Рассеяние света является процессом второго порядка и сводится к поглощению атомом первичного фотона ( $\mathbf{x}$ ) с последующим испусканием вторичного (рассеянного) фотона ( $\mathbf{x}'$ ).

Первый член правой части уравнения (33,1) описывает два процесса первого порядка, а именно: поглощение света

$$\left(-\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial t} - H\right) \psi(N-1) = \frac{e}{mc} \frac{1}{L^{3/2}} \sqrt{\frac{2\pi c \hbar}{\chi}} e^{-icx't + ix'r} (\mathbf{a}\mathbf{p}) \psi(N) \quad (33,3)$$

и испускание света

$$\begin{aligned} \left(-\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial t} - H\right) \psi(N+1) = \\ = \frac{e}{mc} \frac{1}{L^{3/2}} \sqrt{\frac{2\pi c \hbar}{\chi'}} e^{icx't - ix'r} (\mathbf{a}'^+\mathbf{p}) \psi(N). \end{aligned} \quad (33,4)$$

Второй же член правой части уравнения (33,1) описывает три различных процесса второго порядка, а именно: рассеяние света

$$\begin{aligned} \left(-\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial t} - H\right) \psi(N) = \\ = \frac{e^2}{2mc^2} \frac{1}{L^3} \frac{4\pi c \hbar}{\sqrt{\chi\chi'}} (\mathbf{a}\mathbf{a}'^+) e^{-ict(x-x') + ir(x-x')} \psi(N), \end{aligned} \quad (33,5)$$

а также непосредственное испускание ( $\sim (\mathbf{a}^+\mathbf{a}'^+)$ ) или поглощение ( $\sim (\mathbf{a}\mathbf{a}')$ ) двух фотонов. Два последних процесса в данном случае нас не интересуют, и поэтому мы их здесь рассматривать не будем.

Из уравнений (33,3) и (33,4), описывающих процессы первого порядка: поглощение и испускание света, мы можем составить два уравнения, которые наряду с уравнением (33,5) будут также описывать процессы дисперсии, т. е. процессы второго порядка.

При отсутствии возмущающей силы (т. е. когда вектор-потенциал  $\mathbf{A}$  равняется нулю) собственные значения (т. е. возможные значения энергии  $E_b$  электрона в атоме) и собственные функции ( $\psi_b$ ) связаны между собою уравнением Шрёдингера (невозмущённое состояние)

$$(E_b - H) \psi_b = 0. \quad (33,6)$$

Если при  $t=0$  электрон находится в некотором состоянии  $a$  ( $b=a$ ), то начальная волновая функция будет

иметь вид

$$\psi_0 = e^{-\frac{E_a t}{\hbar}} \psi_a(\mathbf{r}) = e^{-i\epsilon x_a t} \psi_a(\mathbf{r}).$$

Обозначим через  $\hbar \mathbf{x}$  и  $\hbar \mathbf{x}'$  импульсы фотонов соответственно в начальном (до рассеяния) и в конечном (после рассеяния) состоянии. Процесс рассеяния, складываясь из двух процессов первого порядка, может происходить двояким путём: во-первых, атом вначале может поглотить фотон  $\mathbf{x}$  (в промежуточном состоянии фотоны отсутствуют) и затем испускает рассеянный фотон  $\mathbf{x}'$ ; во-вторых, атом вначале может испустить рассеянный фотон  $\mathbf{x}'$  (в промежуточном состоянии будет два фотона  $\mathbf{x}$  и  $\mathbf{x}'$ ), после чего он поглощает первичный фотон  $\mathbf{x}$ .

Исследуем прежде всего процесс рассеяния первым способом.

Соответствующие выражения для волновой функции найдём по методу теории возмущений:

$$\psi = \psi_0 + \psi'_1 + \psi'_2 + \dots,$$

причём согласно (33,3) и (33,4) имеем:

$$\begin{aligned} \left( -\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial t} - H \right) \psi'_1 = \\ = \frac{e}{mc} \frac{1}{L^{3/2}} \sqrt{\frac{2\pi c \hbar}{x}} e^{-i\epsilon x t + i\mathbf{x} \cdot \mathbf{r}} (\mathbf{a} \mathbf{p}) \psi_0, \end{aligned} \quad (33,7)$$

$$\begin{aligned} \left( -\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial t} - H \right) \psi'_2 = \\ = \frac{e}{mc} \frac{1}{L^{3/2}} \sqrt{\frac{2\pi c \hbar}{x'}} e^{i\epsilon x' t - i\mathbf{x}' \cdot \mathbf{r}} (\mathbf{a}'^+ \mathbf{p}) \psi'_1. \end{aligned} \quad (33,8)$$

Функция от числа фотонов должна быть включена в волновые функции  $\psi$ . Так, например, волновая функция  $\psi_0$  описывает состояние, в котором имеется лишь первоначальный фотон  $\mathbf{x}$ ; функция  $\psi'_1$  описывает состояние, в котором фотоны отсутствуют; наконец, состояние  $\psi'_2$  соответствует наличию одного рассеянного фотона  $\mathbf{x}'$ . Учитывая правила действия вторично квантованных ампли-



туд  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{a}'^+$  на функцию от числа частиц, мы получим, что в правых и левых частях последних равенств будет стоять одно и то же выражение для функции от числа фотонов, которую, таким образом, мы можем не принимать во внимание при дальнейших вычислениях.

Решение для промежуточного состояния  $\psi'_1$  будем искать в виде

$$\psi'_1 = C'_b(t) e^{-i\mathbf{x}_b t} \psi_b(\mathbf{r}),$$

где

$$\mathbf{x}_b = \frac{E_b}{c\hbar}.$$

Подставляя выражение для  $\psi'_1$  в уравнение (33,7) и принимая во внимание соотношение (33,6), а также условие ортонормированности, получаем:

$$-\frac{\hbar}{i} \dot{C}'_b = \frac{e}{mc} \frac{1}{L^{3/2}} \sqrt{\frac{2\pi c\hbar}{x}} (\mathbf{a}\mathbf{p}_{ba}) e^{-i\mathbf{c}t(\mathbf{x}-\mathbf{x}_{ba})}, \quad (33,8a)$$

где

$$\mathbf{x}_{ba} = \mathbf{x}_b - \mathbf{x}_a = \frac{E_b - E_a}{c\hbar}, \quad \mathbf{p}_{ba} = \int \psi_b^\dagger e^{i\mathbf{x}r} \mathbf{p} \psi_a d^3x.$$

Если длина волны  $\lambda \sim \frac{1}{x}$  фотона велика по сравнению с размерами атома, то экспоненциальный множитель  $e^{i\mathbf{x}r}$  можно положить равным единице (дипольное излучение; см. более подробно § 28). Тогда матричный элемент принимает вид

$$\mathbf{p}_{ba} = \int \psi_b^\dagger \mathbf{p} \psi_a d^3x. \quad (33,9)$$

Из уравнения (33,8a) находим:

$$C'_b = -\frac{e}{\hbar mc} \frac{1}{L^{3/2}} \sqrt{\frac{2\pi c\hbar}{x}} (\mathbf{a}\mathbf{p}_{ba}) \frac{e^{-i\mathbf{c}(\mathbf{x}-\mathbf{x}_{ba})t}}{c(\mathbf{x}_{ba}-\mathbf{x})}. \quad (33,10)$$

Подставляя функцию  $\psi'_1$  с найденным выражением для коэффициента  $C'_b$  в уравнение (33,8), получаем уравнение

второго порядка, описывающее процесс рассеяния:

$$\begin{aligned} \left( -\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial t} - H \right) \psi'_2 = \\ = -\frac{e^2}{m^2 c^2} \frac{1}{L^3} \frac{2\pi}{\sqrt{\mathbf{x}\mathbf{x}'}} (\mathbf{a}' + \mathbf{p}) (\mathbf{a}\mathbf{p}_{ba}) e^{-ict} (x-x'+x_a) \frac{\psi_b}{x_{ba} - x}. \end{aligned} \quad (33,11)$$

Аналогичным способом мы можем найти уравнение, описывающее другой процесс рассеяния (вначале испускается фотон  $\mathbf{x}'$ ):

$$\begin{aligned} \left( -\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial t} - H \right) \psi'' = \\ = -\frac{e^2}{m^2 c^2} \frac{1}{L^3} \frac{2\pi}{\sqrt{\mathbf{x}\mathbf{x}'}} (\mathbf{a}\mathbf{p}) (\mathbf{a}' + \mathbf{p}_{ba}) e^{-ict} (x-x'+x_a) \frac{\psi_b}{x_{ba} + x'}. \end{aligned} \quad (33,12)$$

Наконец, третий возможный процесс рассеяния определяется непосредственно уравнением (33,5)

$$\begin{aligned} \left( -\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial t} - H \right) \psi'''_2 = \\ = \frac{e^2}{mc} \frac{1}{L^3} \frac{2\pi\hbar}{\sqrt{\mathbf{x}\mathbf{x}'}} (\mathbf{a}\mathbf{a}' +) e^{-ict} (x-x'+x_a) \psi_a, \end{aligned} \quad (33,13)$$

причём в последнем выражении мы положили, как и в предыдущих случаях, экспоненциальные члены  $e^{i\mathbf{x}\mathbf{r}}$  и  $e^{-i\mathbf{x}'\mathbf{r}}$  равными единице (дипольное излучение).

Общая волновая функция  $\psi_2$ , описывающая все три возможных процесса рассеяния, будет равна сумме

$$\psi_2 = \psi'_2 + \psi''_2 + \psi'''_2.$$

Для её нахождения мы имеем уравнение

$$\begin{aligned} \left( -\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial t} - H \right) \psi_2 = \frac{2\pi\hbar e^2}{mcL^3 \sqrt{\mathbf{x}\mathbf{x}'}} \left[ -\frac{(\mathbf{a}' + \mathbf{p})(\mathbf{a}\mathbf{p}_{ba})\psi_b}{c\hbar m (x_{ba} - x)} - \right. \\ \left. - \frac{(\mathbf{a}\mathbf{p})(\mathbf{a}' + \mathbf{p}_{ba})\psi_b}{c\hbar m (x_{ba} + x')} + (\mathbf{a}\mathbf{a}' +) \psi_a \right] e^{-ict} (x-x'+x_a). \end{aligned} \quad (33,14)$$

Решение уравнения (33,14) ищем в виде

$$\psi_2 = C_{a'}(t) e^{-icx_{a'}t} \psi_{a'}(\mathbf{r}).$$

Заметим, что конечное состояние  $a'$  отличается от начального  $a$  даже в том случае, когда  $E_a = E_{a'}$  (когерентное

рассеяние). В самом деле, в состоянии  $a$  мы имеем фотон с импульсом  $\hbar\mathbf{x}$ , а в состоянии  $a'$  — с импульсом  $\hbar\mathbf{x}'$ .

На коэффициент  $C_{a'}(t)$  мы должны наложить условие

$$C_{a'}(0) = 0, \quad (33,15)$$

отражающее то обстоятельство, что при  $t = 0$  вся система с достоверностью находится в состоянии  $a$ .

Заметим, что мы не ввели начального условия (33,15) при вычислении коэффициентов  $C_b$  промежуточных состояний, что является допустимым лишь в случае отсутствия резонанса ( $\mathbf{x} \neq |\mathbf{x}_{ba}|$ ,  $\mathbf{x}' \neq |\mathbf{x}_{ba}|$ ), когда вероятности процессов первого порядка практически обращаются в нуль<sup>1)</sup>.

Повторяя вычисления, которые мы произвели при выводе формулы (33,10), получаем для коэффициента  $C_{a'}(t)$  выражение

$$C_{a'}(t) = \frac{2\pi e^2}{icmL^3 \sqrt{\mathbf{x}\mathbf{x}'}} R \int_0^t e^{-ict(\mathbf{x}-\mathbf{x}'+\mathbf{x}_{aa'})} dt,$$

где

$$R = -\frac{(\mathbf{a}'^+ \mathbf{p}_{a'b})(\mathbf{a} \mathbf{p}_{ba})}{c\hbar m(\mathbf{x}_{ba} - \mathbf{x})} - \frac{(\mathbf{a} \mathbf{p}_{a'b})(\mathbf{a}'^+ \mathbf{p}_{ba})}{c\hbar m(\mathbf{x}_{ba} + \mathbf{x}')} + (\mathbf{a} \mathbf{a}'^+) \delta_{aa'}. \quad (33,16)$$

Отсюда с помощью соотношений (29,13) и (28,27) находим эффективное сечение:

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{L^3}{c} \frac{\partial}{\partial t} \sum_{\mathbf{x}'} C_a^+ C_{a'} = \\ &= r_0 \oint d\Omega' \int_0^\infty R^+ R \delta(\mathbf{x}' - \mathbf{x} - \mathbf{x}_{aa'}) \frac{\mathbf{x}' d\mathbf{x}'}{\mathbf{x}}. \quad (33,17) \end{aligned}$$

При вычислении эффективного сечения мы произвели суммирование по всем импульсам  $\hbar\mathbf{x}'$  рассеянного фотона. При вычислении же этой суммы мы сделали переход к непрерывному спектру.

<sup>1)</sup> Вычисление вероятности процессов первого порядка при наличии резонанса (спонтанное испускание и поглощение) были рассмотрены нами в § 28. Исследование же рассеяния при наличии резонанса будет произведено нами в § 35.

б) **Дисперсионные формулы.** В случае когерентного рассеяния, т. е. дисперсии света, атом после рассеяния переходит в первоначальное энергетическое состояние ( $E_{a'} = E_a$ ,  $\kappa_{aa'} = 0$ ).

В результате интегрирования по  $\delta$ -функции мы найдём частоту рассеянного фотона, которая будет совпадать с частотой первоначального фотона ( $\kappa = \kappa'$ ).

Согласно (33,17) для дисперсионной формулы будем иметь:

$$\sigma = r_0^2 \oint R^+ R d\Omega', \quad (33,18)$$

причём в случае вещественных матричных элементов ( $p_{ab} = p_{ba}$ )

$$R = \frac{2\kappa_{ba}(\mathbf{a}p_{ba})(\mathbf{a}'^+p_{ba})}{c\hbar m(\kappa^2 - \kappa_{ba}^2)} + (\mathbf{a}\mathbf{a}'^+). \quad (33,19)$$

Если частота падающего света сравнима с квантовой частотой излучения ( $\kappa \sim |\kappa_{ba}|$ ), но не равна ей<sup>1)</sup>, то в равенстве (33,19) вторым членом мы можем пренебречь по сравнению с первым.

Перестановочные соотношения амплитуд неполяризованного света имеют вид:

$$\begin{aligned} a_s^+ a_s &= \frac{1}{2} (\delta_{ss'} - \kappa_s^0 \kappa_s'^0), \\ a_s' a_s'^+ &= \delta_{ss'} - \kappa_s'^0 \kappa_s^0. \end{aligned} \quad (33,20)$$

Появление множителя  $\frac{1}{2}$  связано с усреднением по состояниям поляризации падающего фотона.

С помощью последних перестановочных соотношений легко показать, что

$$(\mathbf{a}'p_{ba})(\mathbf{a}'^+p_{ba}) = p_{ba}^2 \sin^2 \theta',$$

где  $\theta'$  — угол между направлением распространения рассеянного фотона и вектором  $p_{ba}$ .

Рассмотрим далее частный случай, когда падающий фотон линейно поляризован, благодаря чему вектор элек-

<sup>1)</sup> Случай резонанса ( $\kappa = |\kappa_{ba}|$ ) будет рассмотрен нами в § 35.

трической напряжённости будет совпадать с вектором  $\mathbf{p}_{ba}$ . Тогда вместо перестановочных соотношений (33,20) будем иметь  $a_p^* a_p = 1$ . В этом случае

$$(\mathbf{a}^* \mathbf{p}_{ba})(\mathbf{a} \mathbf{p}_{ba}) = p_{ba}^2.$$

Отсюда

$$R^* R = \frac{\sin^2 \theta' \gamma_{ba}^4}{(\gamma_{ba} - x^2)^2} f_{ba}^2. \quad (33,21)$$

Величина

$$f_{ba} = \frac{2p_{ba}}{c \hbar m x_{b_1}} \quad (33,22)$$

получила название «силы осциллятора».

Подставляя (33,21) в (33,18), найдём после интегрирования по телесному углу  $\Omega'$  и суммирования по всем промежуточным состояниям  $b$  следующее выражение для эффективного сечения:

$$\sigma = \frac{8\pi}{3} r_0^2 \sum_b \frac{f_{ba}^2 \gamma_{ba}^4}{(\gamma_{ba}^2 - x^2)^2}. \quad (33,23)$$

Как было отмечено выше, случай резонанса  $x = |\gamma_{ba}|$  требует дополнительного рассмотрения.

Сравним дисперсионную формулу, полученную по квантовой теории, с классической.

Как известно, эффективное сечение рассеяния света гармоническим осциллятором, вычисленное по классической теории, имеет вид

$$\sigma = \frac{8\pi}{3} r_0^2 \frac{x^4}{(\gamma_0^2 - x^2)^2 + \frac{x^2 \gamma^2}{c^2}}, \quad (33,24)$$

где  $\gamma_0$  — круговая частота колебания гармонического осциллятора, а  $\gamma = \frac{2}{3} r_0 c \gamma_0^2$  — коэффициент затухания (см. также § 30). В областях, для которых  $x \sim \gamma_0$ , но лежащих вне резонанса ( $c|x - \gamma_0| \gg \gamma$ ), мы имеем:

$$\sigma = \frac{8\pi}{3} r_0^2 \frac{\gamma_0^4}{(\gamma_0^2 - x^2)^2}. \quad (33,25)$$

Из сопоставления формулы (33,23) с формулой (33,25) мы видим, что квантовая формула переходит в классическую, если квантовую частоту колебания заменить классической, а «силу осциллятора» положить равной числу рассеивающих частиц, т. е. в данном случае единице:

$$\left. \begin{aligned} x_{ba} &\rightarrow x_0, \\ f_{ba} &\rightarrow N_a = 1. \end{aligned} \right\} \quad (33,26)$$

Найдём, в частности, значение для величины  $f_{ba}$  невозбуждённого гармонического осциллятора ( $a = 0$ ).

Принимая во внимание известное из квантовой механики соотношение

$$|p_{ba}| = cx_{ba}m |x_{ba}|, \quad (33,27)$$

мы можем «силу осциллятора» представить в виде

$$f_{ba} = \frac{2cx_{ba}m |x_{ba}|^2}{\hbar}. \quad (33,28)$$

В частности, когда состояние  $b$  соответствует  $n'$ , а состояние  $a$  соответствует 0, имеем

$$f_{n'0} = \frac{2cx_{n'0}m |x_{n'0}|^2}{\hbar}.$$

В квантовой теории энергия гармонического осциллятора может принимать значения:

$$E_{n'} = \hbar x_0 c \left( n' + \frac{1}{2} \right),$$

где  $cx_0$  — круговая частота его колебания, а отличными от нуля могут быть только квантовые переходы между соседними уровнями. Поэтому для невозбуждённого гармонического осциллятора ( $a = 0$ ) единственным отличным от нуля будет матричный элемент при  $n' = 1$ :

$$|x_{01}|^2 = \frac{\hbar}{2cx_0m}. \quad (33,29)$$

Соответствующее значение для квантовой частоты излучения равно

$$x_{10} = \frac{E_1 - E_0}{c\hbar} = x_0,$$

т. е. совпадает с классической частотой излучения

Отсюда для «силы осциллятора», т. е. в терминологии классической электродинамики для числа рассеивающих частиц, мы получаем значение

$$f_{10} = 1. \quad (33,30)$$

Таким образом, нерелятивистская квантовая теория рассеяния на невозбуждённых гармонических осцилляторах приводит к классическому результату (33,25).

Несмотря на то, что общая структура квантовой и классической формул дисперсии совпадают друг с другом, между ними имеются следующие различия.

В классической теории в «резонансном знаменателе» стоит механическая частота колебаний  $\omega_0 = c\kappa_0$ ; в квантовой же теории—частота перехода  $\omega_{ba} = \frac{E_b - E_a}{\hbar}$ . Обе эти частоты в частном случае гармонического осциллятора совпадают друг с другом. В общем же случае опыты по аномальной дисперсии (наблюдаемой вблизи резонансной частоты) целиком подтвердили квантовые выводы. Наиболее убедительными в этом отношении оказались опыты Д. С. Рождественского, который применил для исследования аномальной дисперсии особый метод крюков<sup>1)</sup>.

Второе отличие квантового результата от классического заключается в следующем. Значение для числа  $N_a$  рассеивающих частиц в единице объёма заменяется в квантовом случае силой осциллятора  $N_a f_{ba}$ . Заметим, что величины  $N_a$  и  $N_a f_{ba}$  связаны между собою соотношением<sup>2)</sup>

$$N_a \sum_b f_{ba} = N_a. \quad (33,31)$$

Однако величина  $N_a$  является целым положительным числом, в то время как сила осциллятора  $N_a f_{ba}$  может при-

<sup>1)</sup> Д. С. Рождественский, ЖРФХО (часть физическая) 42 (1910).

<sup>2)</sup> Доказательство равенства  $\sum_b f_{ba} = 1$  в общем случае дано в книге: Г. Бете, Квантовая механика простейших систем, ОНТИ, 1935, стр. 223. В частном случае гармонического осциллятора это условие мы только что доказали [см. формулу (33, 30)].

нимать не только дробные, но даже и отрицательные значения.

Особенно отчётливо это различие проявляется при исследовании величины показателя преломления. Как известно, электронная теория Лорентца приводит к следующей формуле для показателя преломления:

$$n^2 - 1 = \frac{4\pi e^2}{m} \frac{N_a}{\omega_0^2 - \omega^2}, \quad (33,32)$$

В квантовом же случае мы имеем:

$$n^2 - 1 = \frac{4\pi e^2}{m} \sum_b \frac{N_a f_{ba}}{\omega_{ba}^2 - \omega^2}. \quad (33,33)$$

Классическая формула (33,32) написана для частного случая, когда колебания всех электронов происходят с одной и той же частотой  $\omega_0$ , а квантовая (33,33)—когда все электроны находятся в состоянии  $a$ . В противном случае мы должны были бы ещё взять сумму по частотам (классический случай) или по начальным состояниям электрона (квантовый случай). Для гармонического осциллятора квантовая частота излучения равняется классической  $\omega_{ba} = \omega_0$ . Поэтому, принимая во внимание ещё соотношение (33,31), мы найдём, что при рассеянии на гармонических осцилляторах квантовая формула дисперсии переходит в классическую.

Как видно из формулы (33,28), при  $E_b > E_a$  (например, дисперсия на невозбуждённых атомах) сила осциллятора  $f_{ba}$  будет величиной положительной ( $f_{ba} > 0$ ), и мы получаем кривую для положительной дисперсии (рис. 2)<sup>1)</sup>. В этом случае по внешнему виду кривая дисперсии по квантовой теории целиком повторяет классическую.

Наоборот, при  $E_b < E_a$  (эти члены могут появиться при рассмотрении дисперсии на возбуждённых атомах) сила осциллятора принимает отрицательное значение, и мы получаем кривую для отрицательной дисперсии

---

<sup>1)</sup> Пунктиром проведена кривая, характеризующая аномальную дисперсию. Для её получения необходимо учесть члены с затуханием.



(см. рис. 2), которую совершенно нельзя объяснить с помощью классической теории. Обнаружение в опытах Ладенбурга явлений отрицательной дисперсии окончательно подтвердили выводы квантовой теории.

Все рассмотренные выше выводы справедливы только в случае рассеяния света с частотой, имеющей порядок

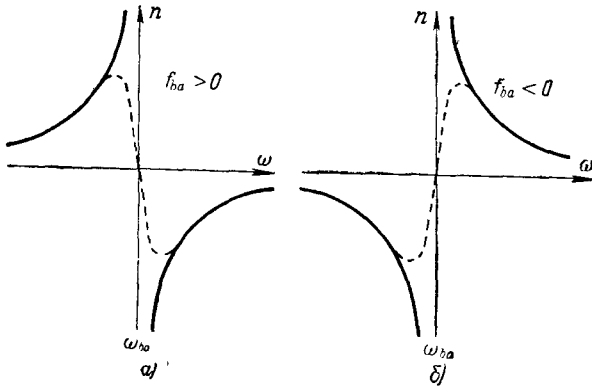


Рис. 2. Кривая дисперсии:  
а) положительная дисперсия, б) отрицательная дисперсия.

частоты, излучаемой атомом. С увеличением частоты падающих фотонов до значений  $\omega \gg |\omega_{ba}|$  (например, рассеяние рентгеновских лучей) наше приближение для вычисления матричного элемента  $R$  становится непригодным.

В этом случае мы можем пренебречь в равенстве (33,19) первым членом по сравнению со вторым и написать для величины  $R$  следующее приближённое выражение:

$$R = (aa'^+),$$

откуда, принимая во внимание перестановочные соотношения (33,20), находим:

$$R^+ R = \frac{1}{2} (1 + \cos^2 \theta), \quad (33,24)$$

где  $\theta$  — угол между направлениями движения падающего и рассеянного фотонов. Подставляя (33,24) в (33,18), найдём после интегрирования по сферическим углам

выражение для эффективного сечения (формула Томсона):

$$\sigma = \frac{8\pi}{3} r_0^2. \quad (33,25)$$

Формула Томсона была получена также и в классической теории для рассеяния света свободными электронами, т. е. когда можно пренебречь энергией связи электронов в атоме. Формула Томсона имеет весьма узкие границы применимости. С одной стороны, она ограничена, как мы только что показали, малыми частотами колебаний электронов в атоме, а с другой—большими частотами, соответствующими собственной энергии электрона ( $\nu = \frac{mc^2}{h}$ ). В самом деле, формула Томсона описывает когерентное рассеяние ( $\lambda' = \lambda$ ), если же энергия первичного фотона  $h\nu$  сравнима с энергией электрона  $mc^2$ , то при рассеянии мы должны наблюдать изменение частоты (эффект Комптона). В этом случае следует учитывать эффект отдачи, что будет подробно рассмотрено нами в следующем параграфе.

**в) Комбинационное рассеяние.** Если после рассеяния электрон в атоме переходит на уровень  $a'$ , не совпадающий с первоначальным уровнем  $a$  ( $E_a \neq E_{a'}$ ), то согласно (33,16) и (33,17) частота рассеянного света ( $\nu' = \frac{c\lambda'}{2\pi}$ ) будет отличаться от частоты падающего ( $\nu = \frac{c\lambda}{2\pi}$ ), причём

$$\lambda' = \lambda - \lambda_{a'a} = \lambda - \frac{E_{a'} - E_a}{c\hbar}. \quad (33,26)$$

Такое рассеяние с изменением частоты называется комбинационным.

При  $E_{a'} > E_a$  мы должны наблюдать красное смещение ( $\lambda' < \lambda$ ), а при  $E_{a'} < E_a$ —фиолетовое ( $\lambda' > \lambda$ ).

Комбинационное рассеяние было обнаружено экспериментально в твёрдых телах Мандельштамом и Ландсбергом, а в жидкостях Раманом<sup>1)</sup>. Комбинационное рассея-

<sup>1)</sup> Г. С. Ландсберг и Л. И. Мандельштам, *Naturwissenschaften* 16, 557 (1928); С. V. Raman and K. S. Krishan, *Nature* 121, 501 (1928).

ние играет важную роль при исследовании строения молекул. В самом деле, многие частоты колебаний молекул, лежащие в инфракрасной части, трудно было обнаружить оптическим путём, а некоторые вообще являлись оптически неактивными.

При исследовании же комбинационного рассеяния частоты молекулярных колебаний накладываются на основную частоту, и поэтому могут быть обнаружены (включая даже оптически неактивные) в видимой части спектра. Комбинационное рассеяние представляет собою большую и важную главу современной физики, связанную с изучением строения молекул.

### § 34. Рассеяние света свободными электронами

а) **Общие формулы.** Как было показано в предыдущем параграфе, при рассеянии света веществом в том случае,

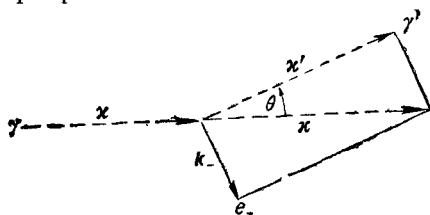


Рис. 3. Эффект Комптона.

когда энергия фотонов во много раз превышает энергию связи электронов в атоме, оказывается возможным рассматривать электроны как свободные. Исследуя подобную задачу в нерелятивистском случае, мы нашли, что частота рассеянного света равняется частоте падающего ( $\lambda' = \lambda$ ), а для эффективного сечения получили формулу Томсона.

Однако такое приближение годится лишь в том случае, когда энергия фотонов  $\varepsilon$  много меньше собственной энергии электронов  $mc^2$  ( $\varepsilon \ll mc^2$  или  $\lambda \ll \lambda_0$ ). В противном случае мы должны решать всю проблему с помощью релятивистских уравнений. Релятивистское уравнение позволяет при любых энергиях учитывать отдачу (эффект Комптона; см. рис. 3), а также найти более точное

значение для эффективного сечения  $\sigma$  (формула Клейна-Нишины).

Частота рассеянного света может быть найдена с помощью законов сохранения энергии и импульса. Выбирая, в частности, систему координат, в которой до рассеяния электрон покоится ( $\mathbf{k}' = 0$ ,  $K = k_0$ ), мы имеем:

$$\alpha - \alpha' = K' - k_0, \quad (34,1)$$

$$\mathbf{x} - \mathbf{x}' = \mathbf{k}', \quad (34,2)$$

где величины  $\hbar \mathbf{k}'$  и  $c\hbar(K' - k_0)$  являются импульсом и энергией, которую получает электрон в результате рассеяния.

Возводя равенства (34,1) и (34,2) в квадрат и вычитая из второго равенства первое, находим:

$$\alpha \alpha' (1 - \cos \theta) = k_0 (K' - k_0) = k_0 (\alpha - \alpha'), \quad (34,3)$$

где  $\theta$  — угол рассеяния. Отсюда получаем:

$$\alpha' = \frac{k_0 \alpha}{k_0 + \alpha (1 - \cos \theta)}. \quad (34,4)$$

Из последнего равенства видно, что в нерелятивистском случае ( $\alpha \ll k_0$ ) частоты падающего и рассеянного излучений совпадают ( $\alpha' = \alpha$ ). В ультрарелятивистском же случае ( $\alpha \gg k_0$ ) лишь для очень малых углов рассеяния ( $1 - \cos \theta \ll \frac{k_0}{\alpha}$ ) имеем совпадение частот ( $\alpha' = \alpha$ ). Для больших же углов рассеяния  $\left[ (1 - \cos \theta) \gg \frac{k_0}{\alpha} \right]$  частота  $\alpha'$  не будет зависеть от частоты падающего света и определяется выражением

$$\alpha' = \frac{k_0}{1 - \cos \theta}. \quad (34,5)$$

Вводя вместо волнового числа  $\alpha$  длину волны  $\lambda = \frac{2\pi}{\alpha}$ , мы легко преобразуем формулу (34,4) к известному виду:

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \lambda_0 (1 - \cos \theta), \quad (34,6)$$

где  $\lambda_0 = \frac{2\pi}{k_0} = \frac{h}{mc} = 2,4 \cdot 10^{-10}$  см — комптоновская длина волны. Заметим, что эффективное сечение можно рассматривать как площадку, расположенную перпендикулярно к направлению скорости фотона. Поэтому при переходе к системе координат, в которой покоится центр инерции (соответствующие величины мы будем обозначать со звездочкой), поперечные размеры, а следовательно, и эффективное сечение, должны оставаться инвариантными.

Общий импульс системы (электрон—фотон) до рассеяния, а значит (согласно закону сохранения импульса), и после рассеяния, должен равняться нулю:

$$\mathbf{x}^* + \mathbf{k}^* = \mathbf{x}'^* + \mathbf{k}'^* = 0. \quad (34,7)$$

Из закона сохранения энергии находим:

$$x^* + \sqrt{(x^*)^2 + k_0^2} = x'^* + \sqrt{(x'^*)^2 + k_0^2},$$

т. е. частота рассеянного света будет равняться частоте падающего:

$$x'^* = x^*. \quad (34,7a)$$

Направляя ось  $x$  по движению частиц, найдём формулы преобразования начальных импульсов фотона и электрона при изменении системы координат:

$$k_x^* = \frac{-k_0\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}; \quad x_x^* = \frac{x_x(1-\beta)}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

причём  $x_x = x$ . Приравнивая сумму импульсов  $x_x^*$  и  $k_x^*$  нулю, находим:

$$\beta = \frac{x}{k_0 + x}. \quad (34,8)$$

Отсюда получаем связь между частотами первичных фотонов, а также углами рассеяния в обеих системах координат:

$$x^* = \frac{xk_0}{\sqrt{2k_0x + k_0^2}}, \quad \cos \theta^* = \frac{(k_0 + x) \cos \theta - x}{k_0 + x - x \cos \theta}. \quad (34,9)$$

**б) Формула Клейна-Нишины.** Вычислим в общем случае эффективное сечение для рассеяния света свободными электронами, т. е. найдём обобщение формулы

Томсона на случай релятивистской квантовой механики частиц со спином  $1/2$ .

Выберем систему координат, в которой первоначальный электрон покоится ( $k=0$ ). Уравнение движения для свободных электронов, взаимодействующих с поперечным полем фотонов, может быть представлено в виде:

$$\begin{aligned} D\psi(N+1) &= U^+\psi(N), \\ D\psi(N-1) &= U\psi(N). \end{aligned} \quad (34,10)$$

Здесь энергия взаимодействия  $U$  и  $U^+$  определена формулами (28,7), а оператор Дирака  $D$  для свободных частиц имеет вид

$$D = c\hbar \left( -\frac{1}{ic} \frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{i} (\boldsymbol{\alpha}\nabla) - \rho_3 k_0 \right). \quad (34,11)$$

В дальнейшем в скобках мы будем указывать зависимость волновой функции лишь от числа фотонов  $N$ , подразумевая, что  $\psi$ , кроме того, является функцией от координат  $\mathbf{r}$  и времени  $t$  электрона.

Как правило, рассмотрение процессов второго порядка требует введения промежуточного состояния. Однако мы можем воспользоваться операторным методом, позволяющим непосредственно написать уравнение Дирака, в котором функция  $U$  будет входить в виде квадратичных комбинаций<sup>1)</sup>. Именно из уравнений (34,10) находим:

$$\left. \begin{aligned} \psi(N+1) &= D^{-1}U^+\psi(N), \\ \psi(N-1) &= D^{-1}U\psi(N), \end{aligned} \right\}$$

причём действие оператора  $D^{-1}$  на показательную функцию определено формулой (26,41).

Подставляя найденные значения для  $\psi$  в правую часть уравнений (34,10), имеем:

$$D\psi(N+2) = U^+ D^{-1}U^+\psi(N), \quad (34,12a)$$

$$D\psi(N-2) = U D^{-1}U\psi(N), \quad (34,12б)$$

$$D\psi'(N) = U^+ D^{-1}U\psi(N), \quad (34,12в)$$

$$D\psi''(N) = U D^{-1}U^+\psi(N). \quad (34,12г)$$

<sup>1)</sup> А. Соколов Journ. of Phys. USSR 5, 231 (1941).

Общая волновая функция процесса второго порядка имеет вид

$$\psi = \psi(N+2) + \psi(N-2) + \psi'(N) + \psi''(N). \quad (34,13)$$

Функция  $\psi(N+2)$  описывает появление двух фотонов. Нетрудно показать, что для свободных электронов, обладающих только положительной энергией, вероятность такого процесса обращается в нуль, так как невозможно удовлетворить двум законам сохранения (энергии и импульса). Функция  $\psi(N-2)$  описывает поглощение двух фотонов. При наличии одного фотона вероятность этого процесса также равна нулю. Наконец, функции  $\psi'(N)$  и  $\psi''(N)$  описывают процессы рассеяния, которые, как было указано в предыдущем параграфе, могут происходить двояким путём: сначала первичный фотон поглощается, а затем испускается рассеянный (функция  $\psi'$ ) или, наоборот, сначала происходит испускание рассеянного фотона с последующим поглощением падающего (функция  $\psi''$ ).

Отбрасывая функции  $\psi(N+2)$  и  $\psi(N-2)$ , мы найдём для определения волновой функции, описывающей рассеяние ( $\psi = \psi' + \psi''$ ), следующее уравнение:

$$D\psi(N) = W^+\psi(N), \quad (34,14)$$

где

$$W^+ = U^+D^{-1}U + UD^{-1}U^+.$$

Будем решать уравнение (34,14) по методу теории возмущений, полагая<sup>1)</sup>

$$\psi = \psi_0 + \psi_2 + \dots \quad (34,15)$$

Отбрасывая функцию от числа частиц, которая будет автоматически учитываться перестановочными соотношениями (34,27) и (34,28), имеем:

$$\psi_0 = \frac{1}{L^{3/2}} b e^{-ick_0 t}, \quad (34,16)$$

<sup>1)</sup> В разложении (34,15), очевидно, должна отсутствовать функция  $\psi_1$ , описывающая процесс первого порядка.

причём амплитуда  $b$  должна подчиниться уравнению

$$(1 - \rho_3) b = 0. \quad (34,17)$$

При наличии в начальный момент фотона с волновым вектором  $\mathbf{x}$  энергия возмущения будет иметь вид:

$$U = \frac{e}{L^{3/2}} \sqrt{\frac{2\pi c \hbar}{\mathbf{x}}} (\mathbf{a}\mathbf{a}) e^{-i\mathbf{x}\mathbf{t} + i\mathbf{x}\mathbf{r}},$$

$$U^+ = \frac{e}{L^{3/2}} \sum_{\mathbf{x}'} \sqrt{\frac{2\pi c \hbar}{\mathbf{x}'}} (\mathbf{a}\mathbf{a}'^+) e^{i\mathbf{x}'\mathbf{t} - i\mathbf{x}'\mathbf{r}}. \quad (34,18)$$

Подставляя в правую часть уравнения (34,14) выражения для  $U$  и  $U^+$  и принимая во внимание правило деления на оператор, данное формулой (26,41), найдём уравнение для  $\psi_2$ :

$$D\psi_2 = W^+\psi_0, \quad (34,19)$$

где

$$W^+ = \sum_{\mathbf{x}'} \frac{\pi e^2}{L^3 k_0 \sqrt{\mathbf{x}\mathbf{x}'}} [(\mathbf{a}\mathbf{a}'^+) (1 + (\mathbf{a}\mathbf{x}^0)) (\mathbf{a}\mathbf{a}) +$$

$$+ (\mathbf{a}\mathbf{a}) (1 + (\mathbf{a}\mathbf{x}'^0)) (\mathbf{a}\mathbf{a}'^+)] e^{i\mathbf{c}(\mathbf{x}' - \mathbf{x})\mathbf{t} - i(\mathbf{x}' - \mathbf{x})\mathbf{r}};$$

$$\mathbf{x}^0 = \frac{\mathbf{x}}{c}, \quad (\mathbf{x}^0 \mathbf{x}'^0) = \cos \theta. \quad (34,20)$$

При выводе последнего соотношения было принято во внимание тождество

$$\frac{(\mathbf{x} + k_0) + (\mathbf{a}\mathbf{x}) + \rho_3 k_0}{(\mathbf{x} + k_0)^2 - \mathbf{x}^2 - k_0^2} (\mathbf{a}\mathbf{a}) b = \frac{1 + (\mathbf{a}\mathbf{x}^0)}{2k_0} (\mathbf{a}\mathbf{a}) b,$$

которое легко получить, учитывая равенство (34,17).

С помощью соотношений

$$\mathbf{a} = \rho_1 \boldsymbol{\sigma},$$

$$(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{b})(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{c}) = (\mathbf{b}\mathbf{c}) + i(\boldsymbol{\sigma}[\mathbf{b}\mathbf{c}]), \quad (34,21)$$

$$(\mathbf{x}^0 \mathbf{a}) = 0$$



выражение (34,20) легко привести к виду

$$W^+ = \sum_{\mathbf{x}'} \frac{\pi e^2}{L^3 k_0 V_{\mathbf{x}\mathbf{x}'}} (A^+ + (\boldsymbol{\alpha}\mathbf{B}^+) + i\rho_1 C^+) e^{ict(\mathbf{x}'-\mathbf{x})-ir(\mathbf{x}'-\mathbf{x})}, \quad (34,22)$$

где

$$\begin{aligned} A^+ &= 2(\mathbf{a}\mathbf{a}'^+), \\ \mathbf{B}^+ &= [\mathbf{h}'^+\mathbf{a}] + [\mathbf{h}\mathbf{a}'^+], \\ C^+ &= (\mathbf{h}'^+\mathbf{a}) + (\mathbf{h}\mathbf{a}'^+), \\ \mathbf{h} &= [\mathbf{x}^0\mathbf{a}], \quad \mathbf{h}'^+ = [\mathbf{x}^0\mathbf{a}'^+]. \end{aligned} \quad (34,23)$$

Вероятность рассеяния мы можем определить с помощью формулы (32,7), полагая в последней

$$\mathbf{k} = 0, \quad \mathbf{l} = \mathbf{x}' - \mathbf{x}, \quad L = x' - x, \quad l_s = x'_s.$$

В результате получаем:

$$\omega = \frac{2\pi}{c\hbar^2} \sum_{k'} \sum_{\mathbf{x}'} R^+ R \delta_{0, k'+\mathbf{x}'-\mathbf{x}} \delta(k_0 - K' - x' + x), \quad (34,24)$$

где

$$R^+ R = \frac{\pi^2 e^4}{L^6 k_0^2 k x'} F,$$

$$F = b^+ (A + (\boldsymbol{\alpha}\mathbf{B}) - i\rho_1 C) b' b'^+ (A^+ + (\boldsymbol{\alpha}\mathbf{B}^+) + i\rho_1 C^+) b. \quad (34,25)$$

При вычислении величины  $F$  мы воспользуемся методом, изложенным в § 21. Суммируя по конечным спиновым состояниям ( $s' = \pm 1$ ) и усредняя по начальным состояниям (в начальном состоянии имеется один электрон), находим:

$$\begin{aligned} F = \frac{1}{8} \sum_{s, s' = \pm 1} & (AA^+ \rho_{44} \sigma_{41} + B_n B_n^+ \rho_{11} \sigma_{nn'} + \\ & + CC^+ \rho_{11} \sigma_{44} + AB_n^+ \rho_{41} \sigma_{4n} + B_n A^+ \rho_{14} \sigma_{n4} + \\ & + AC^+ i \rho_{41} \sigma_{44} - iCA^+ \rho_{14} \sigma_{44} + iB_n C^+ \rho_{11} \sigma_{n1} - iCB_n^+ \rho_{11} \sigma_{1n}). \end{aligned}$$

С помощью формул (21,17) и (21,18) легко показать, что при  $k = 0$ :

$$\begin{aligned} \frac{1}{8} \sum_{s, s'} \rho_{44} \sigma_{44} &= \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{k_0}{K'} \right), \\ \frac{1}{8} \sum_{s, s'} \rho_{11} \sigma_{nn'} &= \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{k_0}{K'} \right) \delta_{nn'}, \\ \frac{1}{8} \sum_{s, s'} \rho_{11} \sigma_{44} &= \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{k_0}{K'} \right), \\ \frac{1}{8} \sum_{s, s'} \rho_{41} \sigma_{4n} &= \frac{1}{8} \sum_{s, s'} \rho_{14} \sigma_{n4} = \frac{1}{2} \frac{k'_n}{K'}, \\ \frac{1}{8} \sum_{s, s'} \rho_{41} \sigma_{44} &= \frac{1}{8} \sum_{s, s'} \rho_{14} \sigma_{44} = \frac{1}{8} \sum_{s, s'} \rho_{11} \sigma_{n4} = \frac{1}{8} \sum_{s, s'} \rho_{11} \sigma_{4n} = 0, \end{aligned}$$

откуда

$$F = \frac{1}{2} \left\{ AA^+ \left( 1 + \frac{k_0}{K'} \right) + [(BB^+) + CC^+] \left( 1 - \frac{k_0}{K'} \right) + \frac{A(k'B^+) + (k'B)A^+}{K'} \right\}. \quad (34,26)$$

При вычислении квадратичных форм квантованных фотонных амплитуд мы должны учесть отсутствие в начальный момент времени рассеянного фотона:

$$a'_s a_{s'}^+ = \delta_{ss'} - \chi_s^0 \chi_{s'}^0. \quad (34,27)$$

Кроме того, следует также произвести усреднение по двум возможным состояниям поляризации первичного фотона:

$$a_s^+ a_s = \frac{1}{2} (\delta_{ss} - \chi_s^0 \chi_s^0). \quad (34,28)$$

С помощью формул (34,23), (34,27) и (34,28) получаем:

$$AA^+ = 4a_s^+ a_s a'_s a_{s'}^+ = 2[1 + \cos^2 \theta].$$

Аналогичным способом находим:

$$(BB^+) + CC^+ = 4,$$

$$\begin{aligned} A(k'B^+) + (k'B)A^+ &= 2A((\mathbf{x}' - \mathbf{x})\mathbf{B}^+) = \\ &= -2(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \cdot (1 + 2\cos\theta + \cos^2\theta). \end{aligned}$$

Принимая во внимание ещё закон сохранения энергии

$$k_0 + \alpha - K' - \alpha' = 0,$$

мы можем преобразовать функцию  $F$  к виду

$$F = \frac{1}{K'} [4k_0 + 2(\alpha - \alpha')(1 - \cos \theta) - 2k_0(1 - \cos^2 \theta)].$$

Согласно формуле (34,4) имеем:

$$1 - \cos \theta = \frac{k_0(\alpha - \alpha')}{\alpha\alpha'}, \quad (34,29)$$

откуда получаем:

$$F = \frac{2k_0}{K'} \left( \frac{\alpha}{\alpha'} + \frac{\alpha'}{\alpha} - \sin^2 \theta \right). \quad (34,30)$$

Суммируя выражение (34,24) по вектору  $\mathbf{k}'$  и переходя далее от суммы к интегралу  $\left( \frac{1}{L^3} \sum_{\mathbf{x}'} \rightarrow \frac{1}{8\pi^3} \int d^3\mathbf{x}' \right)$ , находим:

$$w = \frac{r_0^2 c}{2L^3} \oint d\Omega \int_0^\infty \frac{\alpha' k_0}{\alpha K'} \left( \frac{\alpha}{\alpha'} + \frac{\alpha'}{\alpha} - \sin^2 \theta \right) \delta(\alpha' + K' - \alpha - k_0) d\alpha', \quad (34,31)$$

где  $K' = \sqrt{(\alpha' - \alpha)^2 + k_0^2}$ , а  $r_0 = \frac{e^2}{mc^2}$  является классическим радиусом электрона.

Учитывая, что  $K'$  является функцией от  $\alpha'$ , интегрирование по  $\alpha'$  мы можем произвести с помощью следующей формулы:

$$\int_0^\infty f(\alpha') \delta(\alpha' + K' - \alpha - k_0) d\alpha' = \frac{f(\alpha')}{\left| \frac{\partial(\alpha' + K')}{\partial \alpha'} \right|} = \frac{K' \alpha'}{k_0 \alpha} f(\alpha'),$$

причём в правой части равенства величина  $\alpha'$  определяется формулой (34,29) как функция  $\cos \theta$ . Тогда для вероятности излучения внутри телесного угла

$d\Omega = \sin \theta d\theta d\varphi$  находим:

$$d\omega = \frac{r_0^2 c \kappa'^2}{2L^3 \kappa^2} \left( \frac{\kappa}{\kappa'} + \frac{\kappa'}{\kappa} - \sin^2 \theta \right) d\Omega. \quad (34,32)$$

Дифференциальное эффективное сечение  $d\sigma$  равняется вероятности рассеяния  $d\omega$ , отнесённой к числу частиц  $N_\gamma$  (фотонов), которые падают на единицу площади, расположенной перпендикулярно к направлению их движения. Само собой разумеется, что  $d\omega$  и  $N_\gamma$  должны быть отнесены к единице времени.

В единицу времени на единичную площадь  $S$  ( $S = 1$ ) попадут частицы, которые находятся в объёме  $V_0 = cS = c$ . Вероятность нахождения первичного фотона в объёме  $L^3$  основного параллелепипеда равняется единице. Поэтому вероятность нахождения в объёме  $c$  (что соответствует искомому числу  $N_\gamma$ ) будет равняться

$$N_\gamma = \frac{c}{L^3},$$

откуда получаем для дифференциального эффективного сечения формулу Клейна-Нишины<sup>1)</sup>:

$$d\sigma = \frac{d\omega}{N_\gamma} = \frac{r_0^2 \kappa'^2}{2\kappa^2} \left( \frac{\kappa}{\kappa'} + \frac{\kappa'}{\kappa} - \sin^2 \theta \right) d\Omega. \quad (34,33)$$

В частности, при переходе к нерелятивистскому случаю, когда можно пренебречь отдачей ( $\kappa = \kappa'$ ), формула (34,33) переходит в классическую формулу Томсона

$$d\sigma_0 = \frac{r_0^2}{2} (1 + \cos^2 \theta) d\Omega \quad (34,34)$$

**или**

$$\sigma_0 = \frac{8\pi}{3} r_0^2.$$

Подставляя в (34,33) вместо  $\kappa'$  выражение (34,4), получаем явную зависимость дифференциального эффек-

<sup>1)</sup> O. Klein und I. Nischina, Zs. f. Phys. 52, 853 (1929); см. также И. Е. Тамм, Zs. f. Phys. 62, 545 (1930).

тивного сечения от угла рассеяния:

$$d\sigma = \frac{r_0^2}{2} \left[ \frac{[\gamma(1-\cos\theta) + \cos^2\theta][1 + \gamma(1-\cos\theta)] + 1}{[1 + \gamma(1-\cos\theta)]^3} \right] d\Omega, \quad (34,35)$$

где

$$\gamma = \frac{z}{k_0} = \frac{\varepsilon}{mc^2}.$$

Интегрируя выражение (34,35) по телесному углу  $d\Omega$ , находим эффективное сечение в релятивистском случае:

$$\sigma = \sigma_0 \frac{3}{4} \left\{ \frac{1+\gamma}{\gamma^3} \left[ \frac{2\gamma(1+\gamma)}{1+2\gamma} - \ln(1+2\gamma) \right] + \frac{1}{2\gamma} \ln(1+2\gamma) - \frac{1+3\gamma}{(1+2\gamma)^2} \right\}. \quad (34,36)$$

Асимптотические выражения формулы (34,36) имеют вид:

для малых значений энергии ( $\gamma \ll 1$ )

$$\sigma = \sigma_0 \left( 1 - 2\gamma + \frac{26}{5}\gamma^2 - \dots \right); \quad (34,36a)$$

для больших значений энергии ( $\gamma \gg 1$ ; ультрарелятивистский случай)

$$\sigma = \frac{3}{8} \sigma_0 \frac{1}{\gamma} \left( \ln 2\gamma + \frac{1}{2} \right). \quad (34,36b)$$

Из формулы (34,36a) видно, что в нерелятивистском случае  $\gamma = 0$  мы вновь получаем формулу Томсона

$$\sigma = \sigma_0. \quad (34,37)$$

Таким образом, в нерелятивистском случае эффективное сечение остаётся величиной постоянной и не зависит от частоты падающего света. В этом случае величина  $\sigma_0$  имеет порядок площади поперечника электрона  $\sim r_0^2$ , хотя с самого начала никаких размеров электрону не приписывалось.

С увеличением величины  $\gamma$ , когда  $\gamma$  становится порядка единицы или больше, начинают сказываться квантовые поправки, которые приводят к уменьшению числа рассеянных фотонов по сравнению с классической формулой Томсона.

Кривая, изображающая отношение  $\sigma$  к  $\sigma_0$ , приведена на рис. 4. Из этой кривой видно, что релятивистские и спиновые эффекты объясняют большую проникающую способность жёстких фотонов.

Экспериментальной проверкой результатов квантовой теории являются опыты, связанные с измерением коэффициентов поглощения рентгеновских лучей, а также  $\gamma$ -лучей в различных веществах.

Коэффициент поглощения  $\tau$  на один сантиметр вещества благодаря комптоновскому рассеянию равняется

$$\tau_c = N_a Z \sigma, \quad (34,38)$$

где  $N_a$  — число атомов в единице объёма (в  $1 \text{ см}^3$ ),  $Z$  — порядковый номер элемента, равный числу электронов в атоме.

Рис. 4. Рассеяние  $\gamma$ -квантов свободными электронами.

Подставляя в (34,38) значение для эффективных сечений, найдём:

для нерелятивистского случая

$$\tau_c = \frac{8\pi}{3} r_0^2 N_a Z, \quad (34,39)$$

для ультрарелятивистского случая

$$\tau_c = \pi r_0^2 \frac{1}{4} \left( \ln 2\gamma + \frac{1}{2} \right) N_a Z. \quad (34,40)$$

Заметим, что для рентгеновских лучей сильное поглощение даёт также фотоэффект. Коэффициент поглощения рентгеновских лучей связан с эффективным сечением фотоэффекта с  $K$ -слоя соотношением

$$\tau_f = \frac{5}{4} N_a \sigma, \quad (34,41)$$

где коэффициент  $\frac{5}{4}$  даёт грубую оценку увеличения вероятности фотозффекта с учётом всех слоёв атома (см. § 29).

Подставляя сюда значение  $\sigma$  для фотозффекта [см. соотношения (29,14) и (29,20)], имеем:

в нерелятивистском случае

$$\tau_f = \frac{40\sqrt{2}}{3} \pi r_0^2 \alpha^4 Z^5 \left(\frac{1}{\gamma}\right)^{\frac{1}{2}} N_a, \quad (34,42)$$

в ультрарелятивистском случае

$$\tau_f = 5\pi r_0^2 \alpha^4 Z^5 \frac{1}{\gamma} N_a. \quad (34,43)$$

Сравнивая между собою нерелятивистские формулы (34,42) и (34,39), находим:

$$\frac{\tau_f}{\tau_c} = 5\sqrt{2} (\alpha Z)^4 \left(\frac{1}{\gamma}\right)^{\frac{7}{2}}. \quad (34,44)$$

Приравнивая последнее отношение к единице, находим критическую энергию фотонов:

$$\varepsilon_c = mc^2 (5\sqrt{2})^{\frac{2}{7}} (\alpha Z)^{\frac{8}{7}}. \quad (34,45)$$

При энергии фотона  $\varepsilon$ , меньшей критической ( $\varepsilon < \varepsilon_c$ ), поглощение рентгеновских лучей будет происходить главным образом за счёт фотозффекта. Напротив, в другом случае ( $\varepsilon > \varepsilon_c$ ) поглощение будет обязано главным образом комптоновскому рассеянию. Для углерода ( $Z = 6$ ) эта критическая энергия равняется примерно  $0,1 mc^2$ . С увеличением  $Z$  критическая энергия возрастает примерно по линейному закону.

Сравнение формул (34,40) и (34,43) показывает, что в ультрарелятивистском случае отношение

$$\frac{\tau_f}{\tau_c} = \frac{5\alpha^4 Z^4}{\ln 2\gamma + \frac{1}{2}}$$

будет много меньше единицы, т. е. поглощением на фотозффект мы можем вообще пренебречь. Это связано с тем обстоятельством, что при очень больших энергиях

падающих фотонов электроны атома можно рассматривать свободными. Свободные же электроны не могут поглощать фотоны.

Следует, однако, заметить, что формула Клейна-Нишины получила экспериментальное подтверждение вплоть до энергий первичных  $\gamma$ -лучей порядка  $10 mc^2$ . При более высоких энергиях, в особенности при прохождении  $\gamma$ -лучей сквозь тяжёлые элементы, их поглощение будет связано главным образом с порождением пар электронов и позитронов (более подробно см. § 37).

### § 35. Рассеяние света с учётом затухания

В § 33 и 34 мы исследовали рассеяние света, пренебрегая обратным воздействием поля. Как видно из формулы (33,23), в случае дисперсии света, когда частота падающего света приближается к резонансной частоте атома ( $\chi \sim \chi_{ab}$ ), эффективное сечение неограниченно возрастает. В классической теории эта трудность устраняется путём учёта лучистого трения [см. формулу (33,24)]. Точно так же в квантовой теории учёт обратного действия рассеянного света (затухание) на атом оказывается особенно существенным в области резонанса, где обычная теория возмущения приводит к расходящимся интегралам.

При рассмотрении рассеяния света свободными электронами явление резонанса будет отсутствовать, и поэтому мы как будто бы можем вообще пренебречь затуханием. Однако в области больших энергий падающих фотонов учёт обратного воздействия поля становится весьма существенным. Более того, этот вопрос оказывается самым тесным образом связанным с проблемой собственной массы частицы и поэтому имеет большое принципиальное значение. При рассмотрении дисперсии следует развить теорию затухания для дискретного спектра, а при рассмотрении рассеяния света на свободных электронах — для непрерывного. Рассмотрим более подробно каждый из этих случаев в отдельности.

**а) Теория затухания для дискретного спектра.** В основу теории положим уравнения (33,3) и (33,4), решение которых будем искать в виде:



для начального состояния

$$\psi_0 = C_a^{\chi}(t) e^{-iczat} \psi_a, \quad (35,1)$$

для промежуточных состояний

$$\psi_1 = \sum_b' C_b^0(t) e^{-ix_b ct} \psi_b; \quad \psi_1' = \sum_b' C_b^{\chi\chi'}(t) e^{-ix_b ct} \psi_b, \quad (35,2)$$

для конечного состояния

$$\psi_2 = \sum_{\chi'} C_a^{\chi'}(t) e^{-ix_a ct} \psi_a, \quad (35,3)$$

где  $\chi_a = \frac{E_a}{c\hbar}$  и т. д.

Наличие двух возможных типов промежуточных состояний связано с двумя возможными способами рассеяния, на которых мы подробно останавливались при рассмотрении дисперсии (см. § 33). При первом способе рассеяния (волновая функция  $\psi_1$ ) в промежуточном состоянии фотоны должны отсутствовать (поглощается первичный фотон). При втором ( $\psi_1'$ ) — в промежуточном состоянии должно появляться два фотона (испускается рассеянный фотон).

Рассмотрим случай рассеяния света на невозбуждённых атомах, когда для нерелятивистского приближения существен лишь первый способ рассеяния<sup>1)</sup>. В самом деле, невозбуждённые атомы не могут вначале испустить рассеянный фотон  $\chi'$ , и поэтому мы должны положить  $\psi_1' = 0$ .

Подставляя последние соотношения (35,1) и (35,3) в (33,7) и (33,8), получаем следующую систему уравне-

<sup>1)</sup> Точнее, мы рассматриваем случай сравнительно малых энергий фотона, когда электроны атома нельзя рассматривать как свободные.

ний для определения искоемых коэффициентов  $C$ :

$$-\frac{1}{ic} \dot{C}_a = \frac{1}{L^{3/2}} (\mathbf{a}^+ \mathbf{P}) C_b e^{ict(x-x_{ba})}, \quad (35,4)$$

$$-\frac{1}{ic} \dot{C}_b = \frac{1}{L^{3/2}} (\mathbf{a} \mathbf{P}) C_a e^{-ict(x-x_{ba})} +$$

$$+ \frac{1}{L^{3/2}} \sum'_{\mathbf{x}'} \sqrt{\frac{x}{x'}} (\mathbf{a}' \mathbf{P}) C'_a e^{-ict(x'-x_{ba})}, \quad (35,5)$$

$$-\frac{1}{ic} \dot{C}'_a = \frac{1}{L^{3/2}} \sqrt{\frac{x}{x'}} (\mathbf{a}'^+ \mathbf{P}) C_b e^{ict(x'-x_{ba})}, \quad (35,6)$$

где  $C_a = C_a^*$ ;  $C_b = C_b^0$  и  $C'_a = C_a^{*'}$ . Кроме того, при выводе последних уравнений мы ограничились рассмотрением дипольного излучения, когда можно положить  $e^{i\mathbf{x}r} \approx 1$ , а также предположением, что рассматриваемые волновые функции являются вещественными. В этом случае величина  $\mathbf{P}$  становится равной:

$$\mathbf{P} = \frac{e}{mc} \sqrt{\frac{2\pi}{c\hbar x}} \mathbf{p}_{ba}, \quad (35,7)$$

где

$$\mathbf{p}_{ba} = \mathbf{p}_{ab} = \int \psi_b \mathbf{p} \psi_a d^3x. \quad (35,8)$$

При определении коэффициентов  $C$  следует ввести начальные условия

$$C_a(0) = 1; \quad C'_a(0) = 0; \quad C_b(0) = 0, \quad (35,9)$$

которые соответствуют достоверному нахождению электрона при  $t=0$  в состоянии  $a$ , а фотона — в состоянии  $\mathbf{x}$ . Как мы отмечали, условие  $C_b(0) = 0$  для промежуточных состояний следует вводить лишь в том случае, когда вероятность для промежуточного процесса будет отлична от нуля.

При рассмотрении дисперсии в области резонанса вероятность для поглощения света (процесс первого порядка) становится заметной величиной. Поэтому мы должны

были на коэффициент  $C_b$  наложить условие (35,9), поскольку при наличии резонанса он автоматически в нуль не обращается.

При решении задачи по методу теории возмущений (см. § 33) мы полагали в правой части уравнения (35,5)

$$C_a = 1, \quad C'_a = 0,$$

т. е. считали, что вероятность перехода системы в состояние  $a'$  является малой величиной.

При этом методе исследования в области резонанса коэффициенты  $C'_a$  неограниченно возрастают, благодаря чему наше приближение становится незаконным. В этом случае мы должны решить систему дифференциальных уравнений (35,4), (35,5) и (35,6) относительно коэффициента  $C$ , т. е. следует учитывать возможность обратного влияния конечного состояния  $a'$  на начальное  $a$  (квантовая теория затухания).

Попробуем решения дифференциальных уравнений (35,4) и (35,5) искать в виде<sup>1)</sup>

$$C_a = e^{-\frac{\gamma_a t}{2}}, \quad (35,10)$$

$$C_b = \beta \left( e^{-\frac{\gamma_a t}{2} - i c t (x - x_{ba})} - e^{-\frac{\gamma_b t}{2}} \right), \quad (35,11)$$

удовлетворяющем начальным условиям (35,9). Тогда для коэффициента  $C'_a$  (35,6) находим:

$$C'_a = \frac{1}{L^{3/2}} \beta \sqrt{\frac{x}{x'}} (a' + P) \left[ \frac{e^{-\frac{\gamma_a t}{2} - i c t (x - x')}}{x - x' - \frac{i \gamma_a}{2c}} - 1 \right. \\ \left. - \frac{e^{-\frac{\gamma_b t}{2} - i c t (x_{ba} - x')}}{x_{ba} - x' - \frac{i \gamma_b}{2c}} - 1 \right]. \quad (35,12)$$

Подставляя эти выражения для коэффициентов  $C$  в уравнение (35,5), мы должны получить тождественные

<sup>1)</sup> V. Weisskopf, Ann. d. Phys. 9, 23 (1931).

соотношения, имеющие место для любых значений времени  $t$ . Приравнявая друг другу в обеих частях уравнения (35,5) коэффициенты при одинаковых временных множителях, находим два уравнения для определения величин  $\gamma_b$  и  $\beta$ :

$$\gamma_b = \frac{c}{4\pi^2} \int \frac{x}{x'} (\mathbf{a}' \mathbf{P}) (\mathbf{a}'^+ \mathbf{P}) \delta(x' - x_{ba}) d^3x', \quad (35,13)$$

$$\begin{aligned} \beta \left( x - x_{ba} + \frac{\gamma_a}{2ic} \right) = \\ = \frac{1}{L^{3/2}} (\mathbf{a} \mathbf{P}) - \beta \frac{i}{8\pi^2} \int \frac{x}{x'} (\mathbf{a}' \mathbf{P}) (\mathbf{a}'^+ \mathbf{P}) \delta(x' - x) d^3x'. \end{aligned} \quad (35,14)$$

При выводе последних соотношений мы сделали переход к непрерывному спектру  $\left( \frac{1}{L^3} \sum_{x'} = \frac{1}{8\pi^3} \int d^3x' \right)$ . Кроме того, мы воспользовались равенством

$$\frac{1 - e^{\frac{\gamma t}{2} - ict(x' - x_{ba})}}{x' - x_{ba} + \frac{i\gamma}{2c}} = \pi i \delta(x' - x_{ba}), \quad (35,15)$$

причём в формулах (35,13) и (35,14) мы соответственно положили  $\gamma = \gamma_b$  и  $\gamma = \gamma_a$ .

Принимая во внимание перестановочные соотношения (33,20), получаем:

$$(\mathbf{a}' \mathbf{P}) (\mathbf{a}'^+ \mathbf{P}) = \frac{2\pi e^2}{c\hbar x} (\alpha_{ba}^{02} - (\mathbf{x}'^0 \alpha_{ba}^0)^2),$$

причём в нашем случае

$$\alpha_{ba}^0 = \frac{1}{mc} \mathbf{p}_{ba} = \alpha_{ab}^0.$$

Тогда после интегрирования с учётом наличия  $\delta$ -функции находим:

$$\gamma_b = \frac{e^2 x_{ba}}{2\pi\hbar} \oint (\alpha_{ab}^{02} - (\mathbf{x}'^0 \alpha_{ab}^0)^2) d\Omega,$$

т. е. величина  $\gamma_b$  равняется вероятности спонтанного перехода с промежуточного уровня ( $b$ ) на начальный ( $a$ ) [см. (28,30)]:

$$\gamma_b = \omega_{ba}.$$

Далее, с помощью формулы (35,14) находим:

$$\beta = -\frac{1}{L^{3/2}} (\mathbf{aP}) \frac{1}{\kappa_{ba} - \kappa + \frac{i}{2c} (\gamma_a - \gamma_b)}, \quad (35,16)$$

где

$$\gamma_b' = \frac{c}{4\pi^2} \int \frac{\kappa}{\kappa'} (\mathbf{a}'\mathbf{P}) (\mathbf{a}'+\mathbf{P}) \delta(\kappa' - \kappa) d^3\kappa'.$$

Сопоставляя последнее выражение с формулой (35,13), мы видим, что для области, близкой к резонансу  $\kappa \sim \kappa_{ba}$ , коэффициент  $\gamma_b'$  можно приравнять коэффициенту  $\gamma_b$ .

Наконец, для определения коэффициента  $\gamma_a$  мы должны подставить (35,10) и (35,11) в (35,4). Тогда, полагая в (35,15)  $\gamma = \gamma_a - \gamma_b$ , находим:

$$\gamma_a = \frac{2\pi c}{L^3} \sum_{\kappa} (\mathbf{a}^+\mathbf{P}) (\mathbf{aP}) \delta(\kappa - \kappa_{ba}). \quad (35,17)$$

Как мы указывали в § 30, строго монохроматических спектральных линий нет. Поэтому первичное излучение частоты  $\kappa$  должно также обладать определённой шириной, благодаря чему в выражение (35,17) мы поставили знак суммы.

Переход к  $\delta$ -функции в формуле (35,17) имеет смысл проделывать лишь в том случае, когда интенсивность первичного излучения в области естественной ширины является постоянной. Тогда сумма по волновому вектору  $\kappa$  первичного излучения может быть заменена интегралом<sup>1)</sup>.

Принимая во внимание перестановочные соотношения (28,10), имеем:

$$(\mathbf{a}^+\mathbf{P}) (\mathbf{aP}) = \frac{2\pi e^2 n(\kappa)}{c\hbar\kappa} [\boldsymbol{\kappa}^0 \boldsymbol{\alpha}_{ab}^0]^2.$$

Переходя в выражении (35,17) к интегралу  $\left(\frac{1}{L^3} \rightarrow \frac{d^3\kappa}{8\pi^3}\right)$ , получаем:

$$\gamma_a = \frac{e^2}{2\pi\hbar} \int n(\kappa) [\boldsymbol{\kappa}^0 \boldsymbol{\alpha}_{ab}^0]^2 \delta(\kappa - \kappa_{ba}) \frac{d^3\kappa}{\kappa}.$$

<sup>1)</sup> Случай, когда первичная линия резка по сравнению с естественной шириной, рассмотрен в только что цитированной работе Вейскопфа, см. также В. Гайтлер, Квантовая теория излучения, стр. 160.

Отсюда видно [см. (28,40)], что величина  $\gamma_a$  равняется вероятности поглощения первичного фотона

$$\gamma_a = \omega_{ab}$$

и обуславливает естественную ширину линии поглощения. Величина  $\gamma_a$  пропорциональна плотности  $n(\mathbf{x})$ , и поэтому, когда интенсивность первичного пучка мала, соответствующая линия поглощения является практически резкой.

Найдём теперь распределение интенсивности излучения для момента  $t = \infty$ , когда процесс рассеяния заведомо окончился. С помощью формул (35,12) и (35,16) получаем:

$$\sum_{\mathbf{x}, \mathbf{x}'} |C'_a(\infty)|^2 = \sum_{\mathbf{x}, \mathbf{x}'} \frac{1}{L^6} \frac{\mathbf{x}}{\mathbf{x}'} \frac{(a^+ \mathbf{P})(a \mathbf{P})(a' \mathbf{P})(a' + \mathbf{P})}{\left[ (\mathbf{x} - \mathbf{x}')^2 + \frac{\gamma_a^2}{4c^2} \right] \left[ (\mathbf{x}_{ba} - \mathbf{x}')^2 + \frac{\gamma_b^2}{4c^2} \right]}. \quad (35,18)$$

Заметим, что при малых значениях коэффициентов  $\gamma_a$  и  $\gamma_b$  мы имеем для функции, стоящей под знаком суммы, острый максимум при  $\mathbf{x} = \mathbf{x}' = \mathbf{x}_{ba}$ . Поэтому, переходя к непрерывному спектру, мы можем положить согласно (35,13) и (35,17):

$$\gamma_b = \frac{c}{4\pi^2} \mathbf{x}_{ba}^2 \oint (a' \mathbf{P})(a' + \mathbf{P}) d\Omega',$$

$$\gamma_a = \frac{c}{4\pi^2} \mathbf{x}_{ba}^2 \oint (a^+ \mathbf{P})(a \mathbf{P}) d\Omega,$$

где  $\Omega'$  и  $\Omega$  — телесные углы векторов  $\mathbf{x}'$  и  $\mathbf{x}$ . Выражение (35,18) мы можем представить в виде

$$\sum_{\mathbf{x}, \mathbf{x}'} |C'_a(\infty)|^2 = \int_0^\infty d\mathbf{x} \int_0^\infty d\mathbf{x}' f(\mathbf{x}, \mathbf{x}'),$$

причём функция  $f(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ , характеризующая распределение интенсивности излучения, имеет вид

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \frac{\gamma_a \gamma_b}{4\pi^2 c^2 \left[ (\mathbf{x} - \mathbf{x}')^2 + \frac{\gamma_a^2}{4c^2} \right] \left[ (\mathbf{x}_{ba} - \mathbf{x}')^2 + \frac{\gamma_b^2}{4c^2} \right]}. \quad (35,19)$$

Для того чтобы получить кривую, характеризующую распределение интенсивности рассеянного света по частотам, мы должны выражение (35,19) проинтегрировать

по частотам первичного излучения:

$$f(x') = \int_0^{\infty} f(x, x') dx = \frac{\gamma_b}{2\pi c \left[ (x_b - x')^2 + \frac{\gamma_b^2}{4c^2} \right]}. \quad (35,20)$$

Эта формула совпадает с формулой распределения интенсивности спонтанного излучения. Таким образом, распределение интенсивности рассеянного света по частотам не зависит от способа возбуждения атома.

Интегрируя, далее, выражение (35,20) по частотам  $x'$  рассеянного света, находим:

$$\int_0^{\infty} f(x') dx' = 1.$$

Отсюда видно, что по прошествии бесконечного времени, как и следовало ожидать, вероятность рассеяния стремится к единице.

Аналогичным способом мы можем получить формулу кривой поглощения. С этой целью выражение (35,19) следует проинтегрировать по  $x'$  рассеянного света:

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^{\infty} f(x, x') dx' = \\ &= \int_0^{\infty} \frac{\gamma_a \gamma_b dx'}{4\pi^2 c^2 \left[ (x - x')^2 + \frac{\gamma_a^2}{4c^2} \right] \left[ (x_b - x')^2 + \frac{\gamma_b^2}{4c^2} \right]}. \quad (35,21) \end{aligned}$$

Интегрирование последнего выражения сильно упрощается в том случае, когда вероятность вынужденного излучения будет много меньше спонтанного:

$$\gamma_a \ll \gamma_b. \quad (35,22)$$

Это имеет место при сравнительно слабой интенсивности первичного излучения. Тогда во втором множителе знаменателя величину  $x'$  мы можем заменить на  $x$ , при которой всё подынтегральное выражение достигает резкого

максимума. В этом случае находим:

$$f(x) = \frac{\gamma b}{4\pi c \left[ (x_{ba} - x)^2 + \frac{\gamma_b^2}{4c^2} \right]}. \quad (35,23)$$

Таким образом, для непрерывного спектра первичного излучения формы кривых поглощения и рассеяния совпадают друг с другом.

б) Теория затухания для непрерывного спектра<sup>1)</sup>. При рассмотрении рассеяния света свободными электронами мы должны учесть, что квантовые состояния электронов образуют непрерывный спектр (свободные состояния). В этом случае ни о каких резонансных частотах речи быть не может. Однако при очень больших частотах первичного излучения члены с затуханием начинают оказывать своё влияние. Теория затухания для непрерывного спектра является далеко ещё незаконченной теорией. К тому же вычисление эффективных сечений с учётом затухания в релятивистском случае оказалось весьма сложной задачей, в связи с чем мы здесь ограничимся рассмотрением нерелятивистского приближения, позволяющего в наиболее простом виде ознакомить читателя с новыми идеями. В конце параграфа мы дадим оценку результата в общем случае.

В нерелятивистском случае движение электрона характеризуется уравнением

$$\left[ -\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{2m} \left( \frac{\hbar}{i} \nabla + \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2 \right] \psi = 0. \quad (35,24)$$

Ограничиваясь членами второго порядка ( $\sim A^2$ ), которые приводят к рассеянию, имеем<sup>2)</sup>:

$$\left( -\frac{1}{ic} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\nabla^2}{2k_0} \right) \psi = \frac{e^2}{2k_0 \hbar^2 c^2} A^2 \psi, \quad (35,25)$$

<sup>1)</sup> А. Соколов, Journ. of Phys. USSR 5, 231 (1941). W. Heitler, Proc. Cambr. Phil. Soc. 37, 291 (1941); A. H. Wilson, Proc. Cambr. Phil. Soc. 37, 301 (1941); см. также В. Паули, Мезонная теория ядерных сил, М., 1947.

<sup>2)</sup> Члены первого порядка малости [пропорциональные  $(\mathbf{A}p)$ ], которые во втором приближении могут привести к рассеянию, в данном случае нас не интересуют, поскольку при малых значениях импульса электрона ( $p \rightarrow 0$ ) их можно вообще отбросить.



где

$$A^2 = \frac{1}{L^3} \sum_{\mathbf{x}', \mathbf{x}''} \frac{2\pi c \hbar}{\sqrt{\mathbf{x}' \mathbf{x}''}} [(\mathbf{a}'' \mathbf{a}'^+) + (\mathbf{a}'^+ \mathbf{a}'')] e^{-ict(\mathbf{x}'' - \mathbf{x}') + i\mathbf{r}(\mathbf{x}'' - \mathbf{x}')}. \quad (35,26)$$

Решение уравнения (35,25) будем искать в виде

$$\psi = \sum_{k''} C''(t) \psi_{k''} f(N), \quad (35,27)$$

причём величина  $\psi_{k''} = \frac{1}{L^{3/2}} e^{-ict \frac{k''^2}{2k_0} + ik''r}$  является решени-

ем уравнения (35,25) без правой части, а  $f(N)$  — функция от числа фотонов.

Подставляя (35,26) и (35,27) в (35,25), находим уравнение для определения коэффициентов  $C$ :

$$\begin{aligned} -\frac{1}{ic} \dot{C}' f(N) &= \\ &= \frac{\pi e^2}{ch k_0} \frac{1}{L^3} \sum_{\mathbf{x}', \mathbf{x}''} \frac{1}{\sqrt{\mathbf{x}' \mathbf{x}''}} [(\mathbf{a}'' \mathbf{a}'^+) + (\mathbf{a}'^+ \mathbf{a}'')] C'' f(N) e^{ict(\Gamma' - \Gamma'')}, \end{aligned} \quad (35,28)$$

где

$$\Gamma' = \mathbf{x}' + \frac{k'^2}{2k_0} - \mathbf{x}, \quad \mathbf{x}' + \mathbf{k}' = \mathbf{x}'' + \mathbf{k}'' = \mathbf{x}.$$

Последнее соотношение выражает собою закон сохранения импульса, причём сумма импульсов рассеянного фотона и электрона равняется импульсу начального фотона ( $\sim \mathbf{x}$ ), поскольку первоначальный импульс электрона мы полагаем равным нулю ( $\mathbf{k} = 0$ ).

Функцию  $f(N)$  от числа частиц при рассеянии следует выбрать в виде

$$f(N) = \delta_{N1} \prod' \delta_{N'0}. \quad (35,29)$$

Мы получим в обеих частях равенства (35,28) одно и то же значение для функции от числа частиц, если положим:

$$\begin{aligned} C'' &\sim aa''^+, \\ C' &\sim aa'^+. \end{aligned}$$

Выделяя в уравнении (35,28) коэффициент  $C$ , соответствующий начальному состоянию ( $\mathbf{k}=0$ ) и сокращая обе части равенства на функцию от числа частиц, находим:

$$-\frac{i}{ic} \dot{C}' = k_0^\perp C' + \frac{2\pi e^2}{c\hbar k_0} \frac{1}{L^3} e^{ict\Gamma} \left( \frac{(aa'^+)}{\sqrt{\chi'\chi}} C + \sum_{\mathbf{x}''} \frac{(a''a'^+)}{\sqrt{\chi'\chi''}} C'' e^{-ict\Gamma''} \right), \quad (35,30)$$

$$-\frac{1}{ic} \dot{C} = k_0^\perp C + \frac{2\pi e^2}{c\hbar k_0} \frac{1}{L^3} \sum_{\mathbf{x}''} \frac{(a^+a'')}{\sqrt{\chi\chi''}} C'' e^{-ict\Gamma''}, \quad (35,31)$$

где

$$k_0^\perp = \frac{\pi e^2}{c\hbar k_0} \frac{1}{L^3} \sum_{\mathbf{x}'} \frac{(a'a'^+)}{\chi'}.$$

Последнее уравнение мы должны решать при условии, что в начальный момент в состоянии  $\mathbf{x}$  имеется один фотон:

$$a_s^+ a_{s'} = \frac{1}{2} \left( \delta_{ss'} - \frac{\chi_s \chi_{s'}}{\chi^2} \right), \quad (35,32)$$

а во всех других состояниях ( $\mathbf{x}' \neq \mathbf{x}$ ) фотоны отсутствуют:

$$a_s^+ a_{s'}' = 0, \quad a_{s'}' a_s^+ = \delta_{ss'} - \frac{\chi_s \chi_{s'}}{\chi'^2}. \quad (35,33)$$

Для коэффициентов  $C$  мы должны ввести условия, соответствующие наличию в начальный момент  $t=0$  электрона в состоянии  $\mathbf{k}=0$ :

$$C(0) = 1, \quad C'(0) = 0. \quad (35,34)$$

В теории затухания мы должны учесть, что на изменение коэффициента  $C'$  влияет не только первоначальное состояние  $C$ , но также все другие состояния  $C''$ , которые могут возникнуть в результате рассеяния, т. е. рассматриваемая амплитуда конечного состояния  $C'$  связана с амплитудой бесчисленного множества других возможных конечных состояний (затухание для непрерывного спектра). Кроме того, в этих уравнениях учитывается уменьшение вероятности пребывания электрона в первоначальном состоянии,

Прежде всего заметим, что члены, пропорциональные бесконечной собственной поперечной массе:

$$k_0^\perp = \frac{m^\perp c}{h} = \frac{e^2}{c\hbar k_0 \pi} \int_0^\infty \kappa d\kappa,$$

должны, как было указано в § 26, появляться при вычислении любых эффектов второго порядка, связанных с квантованным электромагнитным полем. Эта бесконечная масса совершенно не зависит от присутствия в начальный момент фотонов и представляет собою специфическую трудность квантовой теории, которая отсутствовала в классической электродинамике.

Значение для величины  $k_0^\perp$  должно в будущей теории или стать конечным (полевая теория массы) или обратиться в нуль (неполевая теория). Однако этот вопрос до настоящего времени является ещё окончательно не разрешённым, тем не менее теория собственной массы за последнее время достигла определённых успехов, причём появляется всё большее число аргументов за то, что продольную и поперечную массы частиц следует полагать равными нулю<sup>1)</sup>.

Отбрасывая в (35,30) поперечную массу, получаем:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{ic} \dot{C}' &= \\ &= \frac{2\pi e^2}{c\hbar k_0 L^3} e^{icl\Gamma'} \left( \frac{(aa'^+)}{\sqrt{\kappa\kappa'}} C + \sum_{\kappa''} \frac{(a''a'^+)}{\sqrt{\kappa''\kappa''}} C'' e^{-icl\Gamma''} \right), \quad (35,35) \\ -\frac{1}{ic} \dot{C} &= \frac{2\pi e^2}{c\hbar k_0 L^3} \sum_{\kappa''} \frac{(a^+a'')}{\sqrt{\kappa\kappa''}} C'' e^{-icl\Gamma''}. \end{aligned}$$

<sup>1)</sup> Кроме продольной и поперечной масс, возникающих благодаря взаимодействию электрона с виртуальным электромагнитным полем, может появиться ещё третья полевая масса, связанная с наличием электронно-позитронного вакуума. Последняя полевая масса не может превосходить  $1/137$  часть собственной массы электрона и поэтому на данные расчёты не может оказать существенного влияния (более подробно см. §§ 42 и 44).

Решение уравнений (35,35) будем искать в виде:

$$C = e^{-c\beta t} = e^{-c\beta_1 t + ict\beta_2},$$

$$C' = \frac{2\pi e^2}{ch k_0 L^3} \varepsilon \frac{(aa' +) 1 - e^{-c\beta_1 t + ict(\Gamma' + \beta_2)}}{\sqrt{\chi\chi'} \Gamma' + \beta_2 + i\beta_1}. \quad (35,36)$$

Подставляя (35,36) в (35,35), получаем уравнение для определения коэффициентов  $\varepsilon$  и  $\beta$ :

$$(aa' +) (\varepsilon - 1) = \frac{2\pi e^2}{ch k_0 L^3} \varepsilon \sum_{\chi''}' \frac{(a''a'' +) (aa'' +)}{\chi''} \frac{e^{\beta_1 ct - ict(\Gamma'' + \beta_2)} - 1}{\Gamma'' + \beta_2 + i\beta_1},$$

$$\frac{\beta}{i} = \frac{4\pi^2 e^4 \varepsilon}{c^2 \hbar^2 k_0^2 L^6} \sum_{\chi''} \frac{(a''a'' +) (aa'' +)}{\chi\chi''} \frac{e^{\beta_1 ct - ict(\Gamma'' + \beta_2)} - 1}{\Gamma'' + \beta_2 + i\beta_1}.$$

Переходя к непрерывному спектру и интегрируя по телесному углу  $d\Omega''$  вектора  $\chi''$  с помощью соотношения

$$\oint (\mathbf{A}a'') (a'' + \mathbf{B}) d\Omega'' = \frac{8\pi}{3} (\mathbf{A}\mathbf{B}) \quad (35,37)$$

и учитывая, кроме того, равенство (35,15), находим:

$$(\varepsilon - 1) = \frac{2e^2 \varepsilon}{3ch k_0 i} \int_0^\infty \chi'' \delta(\Gamma'' + \beta_2) d\chi'', \quad (35,38)$$

$$\beta = \frac{4\pi e^4 \varepsilon}{3c^2 \hbar^2 k_0^2} \frac{1}{L^3} \int_0^\infty \frac{\chi''}{\chi} \delta(\Gamma'' + \beta_2) d\chi''.$$

Принимая во внимание, что в нерелятивистском случае  $\Gamma'' = \chi'' - \chi$ , мы получим после интегрирования по  $\chi''$ :

$$\varepsilon - 1 \approx \frac{2r_0 \varepsilon \chi}{3i}, \quad (35,39)$$

$$c\beta \approx \frac{4\pi \varepsilon r_0^2}{3} N_0, \quad (35,40)$$

где  $r_0 = \frac{e^2}{mc^2} = \frac{e^2}{ch k_0}$ , а  $N_0 = \frac{c}{L^3}$  — число падающих частиц в начальный момент времени на единицу поверхности. Как видно из формулы (35,40), величина  $\beta_2$ , определяющая по существу ширину линии, имеет порядок  $\frac{1}{L^3} \rightarrow 0$ .

Из формул (35,39) и (35,40) получаем:

$$\varepsilon = \frac{1}{1 + \frac{2i}{3} r_0 \kappa}, \quad c\beta_1 = \frac{4\pi r_0^2 N_0}{3 \left(1 + \frac{4}{9} r_0^2 \kappa^2\right)},$$

$$c\beta_2 = c\beta_1 \frac{2}{3} r_0 \kappa. \quad (35.41)$$

Согласно формуле (35,36) для вероятности рассеяния имеем:

$$w = \frac{\partial}{\partial t} \sum_{\mathbf{x}'} C'^+ C' =$$

$$= \frac{r_0^2 \varepsilon^+ \varepsilon}{2\pi L^3} \int \left\{ \frac{(a^+ a') (a a'^+)}{\mathbf{x} \mathbf{x}'} \frac{\partial}{\partial t} \left| \frac{1 - e^{-c\beta_1 t + i c t (\Gamma' + \beta_2)}}{\Gamma' + \beta_2 + i\beta_1} \right|^2 \right\} d^3 \mathbf{x}'.$$

Учитывая равенство

$$\frac{\partial}{\partial t} \left| \frac{1 - e^{-c\beta_1 t + i c t (\Gamma' + \beta_2)}}{\Gamma' + \beta_2 + i\beta_1} \right|^2 =$$

$$= 2\pi c e^{-2c\beta_1 t} \delta(\Gamma' + \beta_2) \approx 2\pi c e^{-2c\beta_1 t} \delta(\Gamma'), \quad (35.42)$$

которое может быть доказано подобно равенству (30,15), а также принимая во внимание, что

$$(a^+ a') (a a'^+) = \frac{1}{2} (1 + \cos^2 \theta),$$

где  $\theta$  — угол рассеяния, находим:

$$w = \frac{8\pi}{3} \frac{r_0^2 \varepsilon^+ \varepsilon c}{L^3} e^{-2c\beta_1 t}. \quad (35.43)$$

Как известно, эффективное сечение  $\sigma$  равняется отношению вероятности  $w$  к числу  $N_\gamma$  фотонов, которое падает в единицу времени на единицу поверхности:

$$N_\gamma = N_0 C^+ C = \frac{c}{L^3} e^{-2c\beta_1 t}.$$

Отсюда имеем:

$$\sigma = \frac{\sigma_0}{1 + \frac{2\pi}{3} \frac{\sigma_0}{\lambda^2}}, \quad (35.44)$$

где  $\sigma_0 = \frac{8\pi r_0^2}{3}$  — эффективное сечение без учёта затухания, а  $\lambda = \frac{2\pi}{\kappa}$  — длина волны падающего света.

Как видно из формулы (35,44), при больших значениях  $\lambda$ ,

$$\lambda^2 \gg \sigma_0, \quad (35,45)$$

мы можем пренебречь членом, характеризующим затухание. Тогда для  $\sigma$  мы получаем известную формулу Томсона:

$$\sigma = \sigma_0. \quad (35,46)$$

В другом предельном случае, когда  $\lambda^2 \ll \sigma_0$ , эффективное сечение  $\sigma$  становится равным

$$\sigma = \frac{3}{2\pi} \lambda^2. \quad (35,47)$$

Заметим, что аналогичное выражение для эффективного сечения получается также и по классической теории <sup>1)</sup>, если пренебречь в последней полевой массой. Экспериментальная проверка формулы (35,47) позволила бы в значительной мере разъяснить вопрос о природе собственной массы электрона.

В пользу формулы (35,44), т. е. в пользу неполевой собственной массы говорит ещё следующее теоретическое обстоятельство.

Несмотря на то, что вероятность пребывания электрона в первоначальном состоянии экспоненциально спадает,

$$C^+C = e^{-\sigma N_0 t},$$

сумма вероятностей начального и конечного состояний всегда точно равна единице. В самом деле, для вероятности пребывания в конечном состоянии мы имеем:

$$\sum_{z'}' C'^+C' = \int_0^t \sigma N_0 e^{-\sigma N_0 t} dt = 1 - e^{-\sigma N_0 t}.$$

Отсюда находим, что сумма обеих вероятностей равна единице:

$$C^+C + \sum_{z'}' C'^+C' = 1. \quad (35,48)$$

<sup>1)</sup> См., например, «Классическая теория поля», стр. 249.

Следует заметить, что при  $\lambda \ll r_0$ , т. е. при  $\lambda \ll \alpha \frac{1}{k_0}$  ( $\alpha = \frac{1}{137}$ ), энергия падающего света достигает порядка  $h\nu = 137 mc^2$ , и поэтому мы должны рассматривать всю проблему с учётом комптоновского изменения длины волны. Однако если производить вычисления в системе координат, где покоится центр инерции системы (электрон плюс фотон), то при рассеянии мы не получим изменения частоты [см. (34,7а)], благодаря чему при  $\lambda \ll \sigma_0$  выражение для эффективного сечения должно сохранить вид (35,47), т. е.

$$\sigma = \text{const} \cdot \lambda^2.$$

Значение же для  $\sigma_0$  может быть определено из формул (34,37) и (34,9):

$$\sigma_0 = \frac{\alpha^2}{4\pi} \lambda^2 \left( \ln \frac{2\lambda_c}{\lambda} + \frac{1}{4} \right),$$

где  $\alpha = \frac{e^2}{\hbar c}$  — постоянная тонкой структуры, а  $\lambda_c = \frac{2\pi\hbar}{mc}$  — комптоновская длина волны.

Условие, при котором начинает сказываться затухание,

$$\lambda^2 \sim \sigma_0, \quad (35,49)$$

приводит к слишком большим значениям для энергии падающих фотонов. Эти значения энергии находятся пока что вне пределов экспериментальных наблюдений; кроме того, основные потери в этом случае должны быть обусловлены рождением пар.

Заметим, что условие (35,49) наступает значительно быстрее при магнитном взаимодействии. Например, квази-магнитное взаимодействие нуклеона с полем векторных мезонов

$$U = -f(\sigma\mathbf{H}),$$

где  $f$  — квазимагнитный заряд нуклеона, связанный с квази-электрическим зарядом соотношением  $f = \frac{g}{x_0} \left( \frac{\hbar x_0}{c} = \mu - \text{масса мезона} \right)$ , приводит при нерелятивистских скоростях

нуклеона к следующему значению для эффективного сечения рассеяния мезонов:

$$\sigma_0 = \frac{64}{3} \frac{\pi f^4}{c^2 \hbar^2} \frac{\kappa^4}{\kappa^2 + \kappa_0^2}; \quad (35,50)$$

здесь  $\frac{2\pi}{\kappa} = \Lambda$  — длина волны падающих мезонов.

Как видно из формулы (35,50), эффективное сечение неограниченно возрастает с увеличением частоты мезонных волн. Подобное возрастание является совершенно недопустимым, так как число рассеянных мезонов стремится стать больше числа падающих.

Один из вариантов разрешения подобной трудности сводится к учёту затухания при рассеянии. Как видно из формулы (35,48), при учёте затухания общее число рассеянных и падающих частиц для любого момента времени равняется единице, и поэтому указанная трудность не может возникнуть. В этом случае условие (35,49), при котором необходимо учитывать затухание, наступает при сравнительно малых значениях энергии падающих мезонов:

$$E \sim \sqrt{\frac{1}{\alpha_\mu}} \mu c^2, \quad (35,51)$$

где  $\alpha_\mu = \frac{g^2}{c\hbar} \cong \frac{1}{6}$  — мезонная постоянная тонкой структуры.

Отсюда видно, что при энергиях, превышающих лишь в несколько раз собственную энергию мезона, мы уже должны учитывать влияние затухания.

При энергиях мезона, превышающих значение (35,51), эффективное сечение становится равным

$$\sigma = \frac{3}{2\pi} \lambda^2, \quad (35,52)$$

т. е. учёт силы трения устраняет указанную трудность, которая возникла при построении квазимагнитного рассеяния мезонов.



### § 36. Упругое рассеяние заряженных частиц кулоновским центром

Развитие теории прохождения заряженных частиц через вещество всегда было самым тесным образом связано с развитием учения об атоме. Большая часть методов экспериментального исследования строения атома основана на прохождении быстрых частиц через вещество. Достаточно указать, что классические опыты Резерфорда 1911 г. по прохождению  $\alpha$ -частиц позволили окончательно установить планетарную модель атома, а также определить заряд атомного ядра. Опыты по прохождению пучка электронов, например через поликристаллы, позволили, с одной стороны, проверить существование волновых свойств пучка электронов (диффракция электронов), а с другой — наблюдать электронограмму, которая наряду с рентгенограммой играет исключительно важную роль в изучении строения поликристаллов. С помощью электронного просвечивания паров ртути удалось экспериментально обнаружить существование дискретных состояний в атоме (опыты Франка-Герца). Эксперименты, связанные с прохождением частиц через вещество, играют значительную роль в изучении космических лучей и строения атомных ядер. Открытие деления ядер позволило изучать прохождение частиц с массой и зарядом, во много раз большими, чем у частиц, которые могли быть использованы ранее (протоны,  $\alpha$ -частицы и т. д.). В настоящей монографии мы не собираемся останавливаться особенно подробно на всех этих вопросах<sup>1)</sup>.

Прежде всего мы рассмотрим теорию упругого рассеяния электронов и  $\alpha$ -частиц кулоновским центром, которая сыграла существенную роль при интерпретации классических опытов Резерфорда. Далее мы рассмотрим неупругое рассеяние и найдём потери энергии быстрых электронов. Теория неупругих столкновений, в частности, играет весьма важную роль при исследовании космических

---

<sup>1)</sup> Более подробно см. Н. Бор, Прохождение атомных частиц через вещество, М., 1950; см. также Э. Ферми, Ядерная физика, М., 1951.

лучей и позволяет установить ряд закономерностей, связанных с взаимным превращением элементарных частиц (более подробно см. § 41).

а) **Вывод формулы Рёзерфорда по классической теории.** При построении теории взаимодействия заряженных частиц с веществом большое значение имеет задача о столкновении двух частиц, между которыми действуют кулоновские силы.

В классической механике (нерелятивистский случай) задача столкновения двух частиц, между которыми дей-

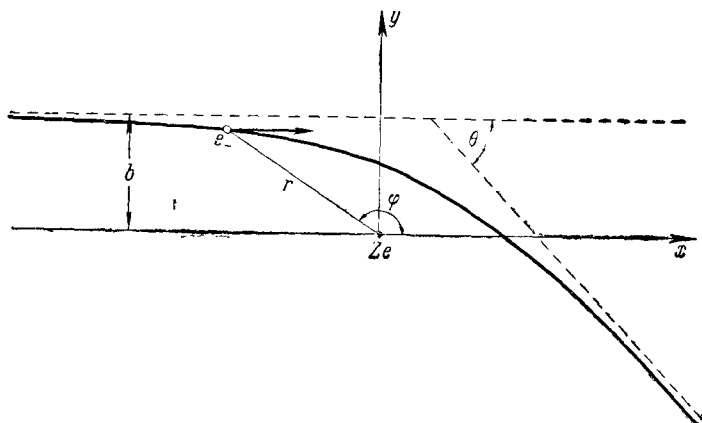


Рис. 5. Рассеяние быстрого электрона ядром.

ствуют силы, обратно пропорциональные квадрату расстояния, имеет весьма простое решение, а именно: в системе координат, в которой центр инерции покоится, обе частицы будут двигаться по гиперболическим траекториям с общим фокусом в центре инерции.

Пусть рассеивающее ядро заряда  $Ze$  находится в начале координат (рис. 5). По направлению к нему из бесконечности со скоростью  $v$  движется электрон заряда  $e_- = -e$ . В том случае, когда масса  $M$  ядра много больше массы  $m$  электрона ( $M \gg m$ ), рассеивающее ядро можно принять за неподвижный центр (совпадающий с центром инерции). Получаемые при этом результаты могут

быть использованы также в общем случае ( $M \sim m$ ), если вместо массы  $m$  электрона в окончательные формулы подставить приведённую массу:

$$\mu = \frac{Mm}{M+m},$$

которая в случае  $M \gg m$  будет равняться массе  $m$  ( $\mu = m$ ).

Если пренебречь взаимодействием, то электрон будет двигаться по прямой (пунктирная прямая на рис. 5) и пройдёт на расстоянии  $b$  (называемом прицельным расстоянием) от ядра. При наличии же кулоновского взаимодействия траектория электрона будет представлять собой гиперболу, причём в нашем случае, когда между частицами действуют силы притяжения (рассеяние  $\beta$ -частиц), ядро будет являться фокусом основной гиперболы, а для сил отталкивания (рассеяние  $\alpha$ -частиц) — фокусом сопряжённой гиперболы. На рис. 5 мы изобразили траекторию для сил притяжения, хотя, как будет показано ниже, общее выражение для эффективного сечения не зависит от знака заряда.

Для нахождения траектории мы имеем следующие два уравнения, выражающие собою законы сохранения энергии и момента количества движения:

$$\frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) - \frac{Ze^2}{r} = E, \quad (36,1)$$

$$r^2 \dot{\varphi} = -vb, \quad (36,2)$$

где  $r$  и  $\varphi$  — полярные координаты,  $\dot{r} = \frac{dr}{dt}$ ,  $\dot{\varphi} = \frac{d\varphi}{dt}$ , а  $v$  является начальной скоростью, связанной с энергией  $E$  соотношением

$$\frac{mv^2}{2} = E. \quad (36,3)$$

Кроме того, мы учли, что при движении частицы угол  $\varphi$  уменьшается, и поэтому угловая скорость  $\dot{\varphi}$  должна быть отрицательной величиной.

Вводя новую переменную

$$u = \frac{1}{r} \quad (36,4)$$

и исключая из уравнений (36,1) и (36,2) время  $t$  с помощью соотношений

$$\begin{aligned}\dot{\varphi} &= -\frac{vb}{r^2} = -vbu^2, \\ \dot{r} &= \frac{dr}{d\varphi} \dot{\varphi} = vbu',\end{aligned}$$

где  $u' = \frac{du}{d\varphi}$ , найдём уравнение для определения траектории движения:

$$u'' + u = \frac{Ze^2}{mb^2v^2}. \quad (36,5)$$

Решение последнего уравнения имеет вид:

$$u = A \cos \varphi + B \sin \varphi + \frac{Ze^2}{mb^2v^2}. \quad (36,6)$$

Постоянные  $A$  и  $B$  могут быть найдены из начальных условий:

$$\begin{aligned}\lim_{\varphi \rightarrow \pi} r &= \lim_{\varphi \rightarrow \pi} \frac{1}{u} = \infty, \\ \lim_{\varphi \rightarrow \pi} r \sin \varphi &= \lim_{\varphi \rightarrow \pi} \frac{\sin \varphi}{u} = b.\end{aligned}$$

Отсюда находим:

$$A = \frac{Ze^2}{mb^2v^2}, \quad B = \frac{1}{b}. \quad (36,7)$$

Угол рассеяния  $\theta$  равняется углу  $\varphi$  ( $\varphi \neq \pi$ ), при котором радиус обращается в бесконечность ( $u = \frac{1}{r} = 0$ ). Учитывая соотношения (36,7), получаем связь между углом рассеяния  $\theta$  и прицельным расстоянием  $b$ :

$$\operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} = \frac{1 + \cos \theta}{\sin \theta} = -\frac{B}{A} = -\frac{mbv^2}{Ze^2}. \quad (36,8)$$

Для того чтобы обобщить эту формулу на рассеяние  $\alpha$ -частиц заряда  $2e$ , мы должны в формуле сделать следующую замену:

$$Ze^2 \rightarrow -2Ze^2.$$

Тогда находим:

$$\operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} = \frac{mbv^2}{2Ze^2}. \quad (36,8a)$$

Из формулы (36,8) видно, что чем меньше прицельное расстояние  $b$ , тем больше угол рассеяния  $\theta$ . Эта формула непосредственно проверялась опытным путём Блэкетом, заснявшим пути  $\alpha$ -частиц в камере Вильсона. Блэкет определил наименьшее прицельное расстояние  $b$ , при котором имеет место ещё взаимодействие по закону Кулона. Для воздуха это прицельное расстояние оказалось примерно равным  $3 \cdot 10^{-12}$  см. Для других ядер оно имеет тот же порядок величины. На расстояниях, меньших, чем  $10^{-12}$  см, обнаруживается действие быстро убывающих с расстоянием ядерных сил притяжения.

В опытах Рёзерфорда определялось среднее число частиц, рассеиваемых на угол  $\theta$ , точнее, внутри телесного угла:

$$d\Omega = 2\pi \sin \theta d\theta.$$

Относительное число рассеиваемых частиц характеризуется дифференциальным эффективным сечением  $d\sigma$ , равным отношению числа отклоняемых частиц  $dN$  в единицу времени на угол  $\theta$  к числу падающих частиц  $N$  в единицу времени на единицу поверхности, расположенной перпендикулярно к направлению их первоначального движения,

$$d\sigma = \frac{dN}{N}.$$

Для того чтобы отклониться на угол  $\theta$ , электроны должны до взаимодействия проходить внутри кольца между кругами с радиусами  $b$  и  $b - db$ . Площадь такого кольца равна  $2\pi b db$ . Поэтому мы можем утверждать, что число  $\alpha$ -частиц, попадающих в единицу времени на эту площадь, а затем летящих после рассеяния внутри телесного угла  $d\Omega$ , будет равно

$$dN = N2\pi |b db|.$$

Поэтому для дифференциального эффективного сечения  $d\sigma$  имеем значение

$$d\sigma = \pi |db^2| = \pi \left( \frac{Ze^2}{mv^2} \right)^2 \left| d \operatorname{ctg}^2 \frac{\theta}{2} \right|.$$

Отсюда получаем формулу Рёзерфорда для упругого рас-

сеяния заряженных частиц:

$$d\sigma = \left( \frac{Ze^2}{4E} \right)^2 \frac{d\Omega}{\sin^4 \frac{\theta}{2}}, \quad (36,9)$$

где  $E = \frac{mv^2}{2}$  является энергией частиц.

Формула Рёзерфорда подвергалась дальнейшей экспериментальной проверке в опытах по рассеянию  $\alpha$ -частиц ( $Ze^2 \rightarrow -2Ze^2$ ). Соотношение

$$\sin^4 \frac{\theta}{2} d\sigma = \text{const}, \quad (36,10)$$

определяющее зависимость числа рассеянных частиц от угла  $\theta$ , было полностью подтверждено рядом классических экспериментов. Было также показано, что заряд ядра равняется  $Ze$ , где  $Z$  — порядковый номер элемента, введённый Менделеевым. Опыты Рёзерфорда в целом подтвердили теорию планетарной модели атома, доказав, что положительный заряд атома сосредоточен в ядре, имеющем размеры  $10^{-12}$  см, и что внутри атома действуют кулоновские силы, которые удерживают вращающиеся электроны в атоме, наподобие планет, удерживаемых силой притяжения Солнца<sup>1)</sup>.

**б) Квантовая теория рассеяния.** Рассмотрим упругое рассеяние потока заряженных частиц (электронов) тяжёлым ядром с зарядом  $Ze$ , по квантовой теории.

Потенциальную энергию взаимодействия

$$V = -\frac{Ze^2}{r}$$

представим в виде разложения в ряд Фурье:

$$V = -\frac{4\pi Ze^2}{L^3} \sum_x \frac{e^{-ixr}}{x^2}. \quad (36,11)$$

Для определения вероятности рассеяния мы можем воспользоваться формулой (32,7), положив в ней:  $l = x$ ,

<sup>1)</sup> Более подробно об экспериментальной проверке формулы Рёзерфорда см., например, Э. В. Шпольский, Атомная физика, т. I, М—Л., 1951, стр. 107.

$L = 0^1$ ), а

$$W^+(l_s) = -\frac{4\pi Ze^2}{L^3 \chi^2}. \quad (36,12)$$

Тогда для вероятности рассеяния находим:

$$\omega = \frac{2\pi}{c\hbar^2} \sum_{k'} \sum_{\chi} R^+ R \delta_{k, k'+\chi} \delta(K - K'), \quad (36,13)$$

где

$$R = -b'^+ \frac{4\pi Ze^2}{L^3 \chi^2} b. \quad (36,14)$$

Проведя суммирование в выражении (36,13) по величине  $\chi$  и переходя при суммировании по  $k'$  к непрерывному спектру, получаем:

$$\omega = \frac{4Z^2 e^4}{c\hbar^2 L^3} \int \frac{b^+ b' b'^+ b}{(k - k')^4} \delta(K' - K) d^3 k'. \quad (36,15)$$

Суммируя по конечным состояниям спина и усредняя по возможным начальным [см. соотношения (21,17) и (21,18)], имеем:

$$b^+ b' b'^+ b = \frac{1}{2} \sum_{s, s'} b^+ b' b'^+ b = \frac{1}{8} \sum_{s, s'} \rho_{44} \sigma_{44} = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{k_0^2}{KK'} + \frac{(kk')}{KK'} \right).$$

Переходя, далее, к полярным координатам вектора  $k'$ , найдём после интегрирования по переменной  $k'$ :

$$\omega = \frac{Z^2 e^4}{2c\hbar^2 L^3} \oint \frac{2k_0^2 + k^2 (1 + \cos \theta)}{Kk^3 (1 - \cos \theta)^2} d\Omega, \quad (36,16)$$

где  $d\Omega$  — элемент телесного угла, а  $\theta$  — угол рассеяния.

Отсюда для дифференциального эффективного сечения, равного отношению вероятности рассеяния внутри телесного угла  $d\Omega$  к числу частиц  $N_e$ , падающих в единицу времени на единицу поверхности, причём

$$N_e = \frac{ck}{L^3 K}, \quad (36,17)$$

<sup>1)</sup> Просьба не спутать энергию  $c\hbar L$  с объёмом основного параллелепипеда  $L^3$ .

находим следующее выражение:

$$d\sigma = \frac{Z^2 e^4 m^2}{4p^4 \sin^4 \frac{\theta}{2}} \left( 1 + \frac{p^2}{m^2 c^2} \cos^2 \frac{\theta}{2} \right) d\Omega, \quad (36,18)$$

где  $\mathbf{p} = \hbar \mathbf{k}$  — начальный импульс электрона.

В нерелятивистском случае ( $p \ll mc$ ) последнее выражение переходит в обычную формулу Резерфорда для сравнительно малых скоростей [см. соотношение (36,9)]<sup>1)</sup>.

Таким образом, квантовомеханическое рассмотрение задачи о столкновении двух частиц в нерелятивистском приближении без учёта обменного эффекта даёт тот же результат, что и классическое рассмотрение.

Напротив, в ультрарелятивистском случае ( $p \gg mc$ ) получаем:

$$d\sigma \cong \frac{Z^2 e^4 \cos^2 \frac{\theta}{2}}{4c^2 p^2 \sin^4 \frac{\theta}{2}} d\Omega. \quad (36,19)$$

Следовательно, эффективное сечение в ультрарелятивистском случае, так же как и в нерелятивистском случае, обратно пропорционально квадрату кинетической энергии, однако угловая зависимость, определяемая формулой Резерфорда, сохраняется лишь при малых углах  $\theta$ , а при больших углах спадание становится более быстрым. В обратном же направлении ( $\theta = \pi$ ) электроны вообще не рассеиваются.

В наших вычислениях мы предполагали, что как начальные, так и конечные состояния описываются плоской волной. Более строгое решение задачи<sup>2)</sup> с волновыми функциями непрерывного спектра приводит к тем же результатам.

**в) Учёт электронной оболочки.** Эффективное сечение (36,9) при малых углах  $\theta$  ( $\theta \rightarrow 0$ ) расходится. В этом

<sup>1)</sup> Энергия  $E$  и импульс  $\mathbf{p}$  связаны между собой в нерелятивистском приближении соотношением  $E = p^2/2m$ . При исследовании рассеяния  $\alpha$ -частиц в формуле (36,18) величину  $Z^2 e^4$  следует заменить на  $4Z^2 e^4$ .

<sup>2)</sup> См., например, Г. Бете, Квантовая механика простейших систем (1. с.), стр. 310.



случае следует учитывать поле, создаваемое электронной оболочкой атома. Влияние электронной оболочки может быть учтено лишь приближённо или с помощью самосогласованного поля Фока-Хартри или с помощью метода Томаса-Ферми. Оба метода приводят в основном к одинаковым результатам. Остановимся кратко на последнем способе расчёта, являющимся более простым.

Мы предположим, что распределение электронов вокруг ядра обладает шаровой симметрией. Тогда потенциальная энергия электронов

$$V = -e\Phi \quad (36,20)$$

будет функцией только расстояния  $r$  от ядра.

Нормируя потенциал  $\Phi$  таким образом, чтобы он исчезал при  $r \rightarrow \infty$ , мы найдём, что в атоме могут удерживаться электроны, обладающие отрицательной энергией:

$$E = \frac{p^2}{2m} - e\Phi \leq 0. \quad (36,21)$$

Отсюда находим максимальный импульс ( $E = 0$ ):

$$P = \sqrt{2me\Phi}. \quad (36,22)$$

Таким образом, концы вектора импульса будут заключены внутри сферы объёма:

$$\frac{4}{3} \pi P^3 = \frac{4}{3} \pi (2me\Phi)^{\frac{3}{2}}. \quad (36,23)$$

Как известно, согласно принципу Паули в каждом квантовом состоянии, фазовый объём которого равняется  $h^3$ , может находиться не более двух электронов, обладающих противоположным спином. Предполагая, что все фазовые клетки в атоме заполнены (полное вырождение), найдём число электронов в единице объёма:

$$n = 2 \frac{\frac{4}{3} \pi P^3}{h^3} = \frac{8\pi}{3h^3} (2me\Phi)^{\frac{3}{2}}. \quad (36,24)$$

Отсюда плотность электрических зарядов будет равна:

$$\rho = -en = -\frac{8\pi e}{3h^3} (2me\Phi)^{\frac{3}{2}}. \quad (36,25)$$

Подставляя эти значения в уравнение Пуассона

$$\nabla^2 \Phi = -4\pi\rho, \quad (36,26)$$

получим дифференциальное уравнение для определения искомого потенциала  $\Phi$  (уравнение Томаса-Ферми):

$$\frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} (r\Phi) = \frac{32\pi^2 e}{3h^3} (2me\Phi)^{\frac{3}{2}}, \quad (36,27)$$

которое мы должны решить при следующих граничных условиях. При  $r \rightarrow 0$  потенциал  $\Phi$  должен переходить в кулоновский:

$$\lim_{r \rightarrow 0} r\Phi(r) = Ze, \quad (36,28)$$

а при  $r \rightarrow \infty$  потенциал должен обращаться в нуль. Второе граничное условие может быть сформулировано более точно. В самом деле, для нейтрального атома мы имеем:

$$4\pi \int_0^{\infty} \rho r^2 dr = -Ze. \quad (36,29)$$

Как видно из формулы (36,25), последнее условие может иметь место, если на бесконечности

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r^2 \Phi \rightarrow 0. \quad (36,30)$$

Уравнение Томаса-Ферми (36,27) с граничными условиями (36,28) и (36,30) не может быть точно решено аналитическим путём. Однако довольно хорошее приближение может быть найдено с помощью численного интегрирования. При этом решение ищется в виде

$$\Phi(r) = \frac{Ze}{r} f(x), \quad (36,31)$$

где  $x = \frac{r}{a}$ , а величина  $a$  связана с радиусом первой боровской орбиты  $a_0 = \frac{\hbar^2}{me^2} = 0,53 \cdot 10^{-8}$  соотношением

$$a = a_0 \left( \frac{9\pi^2}{128Z} \right)^{\frac{1}{3}} = \frac{0,885a_0}{Z^{1/3}}. \quad (36,32)$$

Легко показать, что функция  $f$  будет удовлетворять уравнению

$$\sqrt{x} \frac{d^2 f}{dx^2} = f^{\frac{3}{2}} \quad (36,33)$$

с граничными условиями

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} x f(x) = 0. \quad (36,34)$$

Уравнение (36,33) имеет следующее частное решение:

$$f = \frac{144}{x^3}, \quad (36,35)$$

которое удовлетворяет граничному условию на бесконечности и определяет поэтому поведение функции при  $x \rightarrow \infty$ . Однако при  $x = 0$  это решение обладает особенностью, и поэтому другое граничное условие при  $x = 0$  не выполняется.

При малых  $x$  ( $r \ll a$ ) хорошим приближением решения уравнения (36,33), удовлетворяющим граничному условию при  $x = 0$ , является выражение

$$f = 1 + \frac{4}{3} x^{\frac{3}{2}}. \quad (36,36)$$

С помощью существующих приближенных методов можно несколько уточнить, а затем и сшить оба крайних решения<sup>1)</sup>.

Для того чтобы исследовать рассеяние заряженных частиц атомом с учётом электронной оболочки, мы должны амплитуду Фурье кулоновского потенциала заменить амплитудой Фурье потенциала Томаса-Ферми:

$$\frac{Ze}{x^2} \rightarrow \int_0^{\infty} r'^2 \frac{\sin xr'}{xr'} \Phi(r') dr' = I. \quad (36,37)$$

Благодаря законам сохранения величина  $x$  принимает значение

$$x = \sqrt{(k - k')^2} = 2k \sin \frac{\theta}{2} = \frac{2p}{\hbar} \sin \frac{\theta}{2}. \quad (36,38)$$

<sup>1)</sup> См., например, П. Гамбош (P. Gombas), Статистическая теория атома и её применение, М., 1951, стр. 52.

Из формул (36,32) и (36,34) видно, что в качестве эффективного радиуса, характеризующего экранирование, следует выбрать длину

$$a \sim \frac{a_0}{Z^{1/3}}. \quad (36,39)$$

Это означает, что при  $r < a$  мы можем ограничиться кулоновским выражением для потенциала  $\Phi(r)$  и только при  $r \sim a$  и  $r > a$  учитывать поправку на экранирование.

Поэтому, принимая во внимание осциллирующий характер функции  $\frac{\sin y}{y}$ , в силу чего интеграл при  $y \gg 1$  практически обрывается, мы можем в формуле (36,37) при  $\chi a \gg 1$  вообще пренебречь влиянием экранирования.

Отсюда следует, что при сравнительно больших скоростях  $\left(p \gg \frac{\hbar Z^{1/3}}{2a_0}\right)$  существует такая область углов

$$\sin \frac{\theta}{2} \gg \frac{\hbar Z^{1/3}}{2a_0 p}, \quad (36,40)$$

при которых  $d\sigma$  определяется формулой Рёзерфорда.

Для малых же скоростей  $\left(p \ll \frac{\hbar Z^{1/3}}{2a_0}\right)$  для любых углов рассеяния имеет место неравенство

$$\chi a \ll 1, \quad (36,41)$$

при котором в формуле (36,37) мы вообще можем положить

$$\frac{\sin \chi r'}{\chi r'} = 1.$$

Подставляя тогда в матричный элемент (36,37) вместо потенциала  $\varphi$  выражение (36,31), найдём:

$$I = Zea^2 \int_0^\infty x f(x) dx. \quad (36,42)$$

Таким образом, переход от формул для рассеяния кулоновским центром к формулам для рассеяния полностью экранированным атомом может быть совершён путём замены

$$\frac{1}{x^2} \rightarrow a^2 \int_0^{\infty} x f(x) dx. \quad (36,43)$$

Эффективное сечение (36,18) при отсутствии экранирования может быть представлено в виде

$$d\sigma = \frac{4Z^2 d\Omega}{x^4 a_0^2}. \quad (36,44)$$

Поэтому в случае полного экранирования мы получаем<sup>1)</sup>:

$$\begin{aligned} d\sigma &= \frac{1}{4} \left(\frac{3\pi}{4}\right)^{\frac{8}{3}} a_0^2 Z^{\frac{2}{3}} \left| \int_0^{\infty} x f(x) dx \right|^2 d\Omega = \\ &= 21,6 \cdot 10^{-16} Z^{\frac{2}{3}} d\Omega, \end{aligned} \quad (36,45)$$

т. е. в случае полного экранирования мы будем иметь изотропное (по направлениям) рассеяние, что является весьма характерным при рассеянии под влиянием короткодействующих сил.

При больших скоростях эффект экранирования будет заметен лишь при малых углах  $\theta$ , удовлетворяющих неравенству

$$\sin \frac{\theta}{2} < \frac{\hbar Z^{\frac{1}{3}}}{2a_0 p}.$$

При  $\theta = 0$  эффект экранирования приводит к тому, что вместо расходящегося эффективного сечения (36,18), следует взять его предельное значение (36,45).

В заключение заметим, что при столкновении одинаковых частиц следует учитывать ещё дополнительную, так называемую обменную энергию, связанную с невозмож-

<sup>1)</sup> См. Мотт и Месси, Теория атомных столкновений, стр. 229.

ностью различить одинаковые частицы. Формула Рёзерфорда в этом случае должна быть заменена выражением

$$d\sigma = \frac{e^4 m^2}{p^4} \left\{ \frac{1}{\sin^4 \frac{\theta}{2}} + \frac{1}{\cos^4 \frac{\theta}{2}} + \left[ \begin{array}{c} 2 \\ -1 \end{array} \right] \frac{\cos \left( \frac{2e^2}{\hbar v} \ln \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} \right)}{\cos^2 \frac{\theta}{2} \sin^2 \frac{\theta}{2}} \right\},$$

причём верхний или нижний множители следует брать в зависимости от того, рассматриваются ли частицы со спином 0 или  $\frac{1}{2}$ .

Учёт обменных сил приводит к тому, что при замене частиц местами, т. е. замене угла  $\theta$  на угол  $\pi - \theta$  величина эффективного сечения не изменяется.

Более подробно с затронутыми вопросами можно ознакомиться по цитированной монографии Мотта и Месси.

### § 37. Тормозное излучение

При рассеянии кулоновским центром электроны претерпевают отклонение, т. е. получают ускорение. Согласно классической теории ускоренно движущиеся электроны должны излучать. Аналогичным образом и по квантовой теории при рассеянии электрона должна существовать известная вероятность перехода в его более низкие энергетические состояния, сопровождающегося испусканием фотонов.

Рассмотрим некоторые вопросы, связанные с тормозным излучением как по классической, так и по квантовой теории.

а) **Классическая теория.** Электрон, пролетающий в поле ядра (рис. 6) заряда  $Ze$ , испытывает ускорение

$$w = -\frac{eE}{m} = -\frac{Ze^2}{mr^2} r^0,$$

благодаря чему в течение времени  $dt$  испускает электромагнитную энергию

$$dE = \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \frac{Z^2 e^4}{m^2 r^4} dt.$$

Из уравнений (36,1) и (36,2), определяющих движение электрона, находим:

$$\dot{r} = \mp c \sqrt{\beta^2 + \frac{2Zr_0}{r} - \frac{\beta^2 b^2}{r^2}},$$

где  $\beta = \frac{v}{c}$ ,  $r_0 = \frac{e^2}{mc^2}$ . При движении электрона к ядру вплоть до минимального расстояния, которое определяется из условия ( $\dot{r} = 0$ ), мы должны перед корнем взять знак минус (радиус  $r$  уменьшается), а после прохождения ядра — знак плюс.

Тогда для полной энергии излучения мы находим выражение

$$\Delta E = \frac{4}{3} e^2 Z^2 r_0^2 \int_a^{\infty} \frac{dr}{r^4 \sqrt{\beta^2 + \frac{2Zr_0}{r} - \frac{\beta^2 b^2}{r^2}}},$$

где  $a$  определяется из условия  $\dot{r}(a) = 0$ , т. е. является положительным корнем уравнения

$$\beta^2 + \frac{2Zr_0}{a} - \frac{\beta^2 b^2}{a^2} = 0.$$

Вычисляя интеграл в предположении, что прицельное расстояние  $b$  много больше, чем отношение  $\frac{r_0}{\beta} Z$ , найдём:

$$\Delta E = \frac{\pi}{3} \frac{e^2 Z^2 r_0^2}{\beta b^3}.$$

Для того чтобы получить эффективное сечение тормозного излучения, необходимо это выражение умножить на вероятность попадания электрона на площадку  $2\pi b db$ , разделить на полную начальную энергию, которая в нерелятивистском случае будет равняться  $E_0 = mc^2$ , и, наконец, проинтегрировать по возможным значениям прицельного расстояния:

$$\sigma_r = \frac{2\pi^2}{8} r_0^2 Z^2 \frac{g}{\beta} \int_{b_0}^{\infty} \frac{db}{b^2}.$$

Нижнюю границу мы положили равной тому расстоянию, при котором законы классической механики перестают иметь место. Как известно из квантовой механики, эта граница определяется условием, что расстояния  $b_0$  становятся сравнимыми с де-бройлевской длиной волны  $\left(\frac{h}{mv}\right)$ .

Полагая

$$b_0 = \frac{h}{mv},$$

находим порядок величины эффективного сечения по классической теории

$$\sigma_r \approx r_0^2 Z^2 \alpha. \quad (37,1)$$

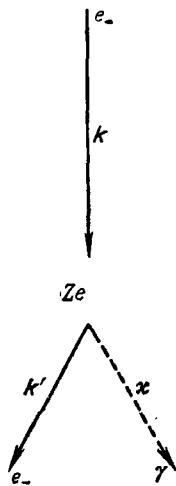
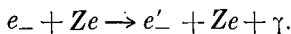


Рис. 6. Тормозное излучение.

Квантовая теория в нерелятивистском приближении даёт аналогичное выражение для  $\sigma_r$ , но позволяет вместе с тем вычислить значение численного коэффициента, оставшегося в классической теории неопределённым [см. формулу (37,30)].

б) Квантовая теория. Пусть электрон с импульсом  $p = \hbar k$  пролетает около ядра  $Ze$ . В результате рассеяния, когда импульс электрона становится равным  $p' = \hbar k'$ , он может испустить фотон с волновым вектором  $x$  (рис. 6), т. е. произойдёт реакция появления фотона по схеме



Найдём энергию, теряемую электроном посредством излучения фотонов. При вычислении эффективного сечения по квантовой теории мы должны учесть, что электрон взаимодействует, с одной стороны, с кулоновским полем ядра [см. соотношение (36,11)]

$$V = -\frac{4\pi Ze^2}{L^3} \sum_{x'} \frac{e^{-ix'r}}{x'^2}, \quad (37,2)$$



а с другой стороны — с полем виртуальных фотонов:

$$U^+ = \frac{e}{L^{3/2}} \sum_{\mathbf{x}} \sqrt{\frac{2\pi c \hbar}{x}} (\mathbf{a} \mathbf{a}^+) e^{i c x t - i \mathbf{x} \cdot \mathbf{r}}. \quad (37,2a)$$

Поскольку кулоновское взаимодействие (37,2) уже представляет собой эффект второго порядка (испускание «продольного» фотона одним зарядом с последующим его поглощением другим), мы должны тормозное излучение рассматривать как эффект третьего порядка, поскольку соответствующее выражение для матричного элемента будет пропорционально  $e^3$ .

Волновое уравнение, определяющее движение электрона при взаимодействии с двумя полями, будет следующим:

$$D\psi(N+1) = W^+ \psi(N), \quad (37,3)$$

причем оператор энергии взаимодействия имеет вид

$$W^+ = (U^+ D^{-1} V + V D^{-1} U^+). \quad (37,4)$$

Как было указано в § 29, мы можем пренебречь кулоновским искажением волновых функций, когда выполняются условия

$$\xi = \frac{Ze^2}{\hbar v} \ll 1, \quad \xi' = \frac{Ze^2}{\hbar v'} \ll 1, \quad (37,5)$$

где  $v = c \frac{k}{K}$  и  $v' = c \frac{k'}{K'}$  — скорости электрона до и после соударения. Решая нашу задачу по методу теории возмущений, мы можем выбрать начальную  $\psi_0 = \psi(N)$  и конечную  $\psi' = \psi(N+1)$  волновые функции в следующем виде:

$$\psi_0 = \frac{1}{L^{3/2}} b e^{-i c K t + i k \cdot \mathbf{r}} f(N),$$

$$\psi' = \frac{1}{L^{3/2}} \sum_{K'} C'(t) b' e^{-i c K' t + i k' \cdot \mathbf{r}} f(N+1), \quad (37,6)$$

причём в функции от числа частиц  $f(N)$  мы должны положить  $N$  равным нулю ( $N=0$ ). В начальный момент времени мы имеем:

$$C'(0) = 0. \quad (37,7)$$

Подставляя (37,6) в (37,3), найдём для энергии взаимодействия следующее выражение:

$$W^+ = \sum_{\mathbf{x}, \mathbf{x}'} W^+(\mathbf{x}, \mathbf{x}') e^{i\mathbf{x}\mathbf{x}t - i\mathbf{r}(\mathbf{x}+\mathbf{x}'), \quad (37,8)$$

где

$$W^+(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = - \left( \frac{2\pi e^2}{c\hbar L^3} \right)^{\frac{3}{2}} 2Zc\hbar \frac{1}{x'^2 \sqrt{x}} \times \\ \times \left[ \frac{K - x + (\alpha(k - \mathbf{x})) + \rho_3 k_0}{(K - x)^2 - (k - \mathbf{x})^2 - k_0^2} (\alpha\alpha^+) + (\alpha\alpha^+) \frac{K + (\alpha(k - \mathbf{x}') + \rho_3 k_0)}{K^2 - (k - \mathbf{x}')^2 - k_0^2} \right]. \quad (37,9)$$

Отсюда для вероятности тормозного излучения согласно формуле (32,8) имеем:

$$\omega = \frac{2\pi}{c\hbar^2} \sum_{k', \mathbf{x}, \mathbf{x}'} R^+ R \delta_{k, \mathbf{x}+\mathbf{x}'+k'} \delta(K - K' - x); \quad (37,10)$$

здесь

$$R = b'^+ W^+(\mathbf{x}, \mathbf{x}') b = \left( \frac{2\pi e^2}{c\hbar L^3} \right)^{\frac{3}{2}} 2Zc\hbar \frac{1}{x'^2 \sqrt{x}} S.$$

Для дальнейших преобразований величины  $R$  воспользуемся законами сохранения<sup>1)</sup>

$$\begin{aligned} K - K' - x &= 0, \\ k - x - \mathbf{x}' - k' &= 0, \end{aligned} \quad (37,11)$$

<sup>1)</sup> Заметим, что при отсутствии кулоновского поля ( $\mathbf{x}'=0$ ) тормозное излучение становится невозможным, поскольку в этом случае одновременно не могут выполняться два закона сохранения (37,11). Более подробно см. § 32. В кулоновском же поле ( $\mathbf{x}' \neq 0$ ) некоторый импульс принимает на себя ядро.

а также уравнениями, которым должны удовлетворять амплитуды  $b$  и  $b'^+$

$$\begin{aligned} (K - (\alpha k) - \rho_3 k_0) b &= 0, \\ b'^+ (K' - (\alpha' k') - \rho_3 k'_0) &= 0. \end{aligned} \quad (37,12)$$

Тогда находим:

$$\begin{aligned} S = -b'^+ \left( \frac{-2(k\alpha^+) + i(\sigma[\alpha\alpha^+]) + \chi(\alpha\alpha^+)}{2(K\chi - (k\chi))} + \right. \\ \left. + \frac{2(k'\alpha'^+) - i(\sigma[\alpha'\alpha'^+]) + \chi(\alpha'\alpha'^+)}{2(K'\chi - (k'\chi))} \right) b, \end{aligned} \quad (37,13)$$

откуда

$$\omega = \frac{64\pi^4 Z^2 e^6}{c^2 \hbar^3 L^9} \sum_{k', \chi} \frac{S^+ S}{\chi'^4 \chi} \delta(K' - K + \chi), \quad (37,14)$$

где

$$\chi'^2 = k^2 + k'^2 + \chi^2 - 2(k\chi) + 2(k'\chi) - 2(kk'). \quad (37,15)$$

Найдём эффективное сечение  $\sigma$ , которое связано с вероятностью излучения  $\omega$  и числом частиц, падающих в единицу времени на единицу поверхности,  $N_e = \frac{ck}{L^3 K}$  соотношением

$$\sigma = \frac{\omega}{N_e} = \frac{L^3 \omega K}{ck}.$$

Переходя к непрерывному спектру

$$\left( \frac{1}{L^6} \sum_{k', \chi} \rightarrow \frac{1}{(2\pi)^6} \int d^3 k' d^3 \chi \right),$$

а затем к сферическим координатам  $k'$  ( $k', \vartheta', \varphi'$ ) и  $\chi$  ( $\chi, \vartheta, \varphi$ ), получаем:

$$\sigma = \frac{Z^2}{\pi^2} \left( \frac{e^2}{c\hbar} \right)^3 \int \frac{KK'k'\chi}{k\chi'^4} \sin \vartheta \sin \vartheta' S^+ S d\vartheta d\vartheta' d\varphi d\varphi' dx; \quad (37,16)$$

здесь при интегрировании по переменной  $k'$  мы воспользовались равенством

$$\int_0^\infty f(k') \delta(K' - K + \chi) dk' = \frac{f(k')}{\frac{\partial K'}{\partial k'}} = \left( \frac{K' f(k')}{k'} \right)_{K' = K - \chi}.$$

в) **Нерелятивистский случай.** Дальнейшие вычисления мы произведём для нерелятивистского случая, когда матричные элементы, пропорциональные  $\alpha$ , будут иметь порядок  $\frac{v}{c}$  относительно матричных элементов, пропорциональных  $I$  и  $\sigma$  (см. § 21). Тогда мы можем положить

$$S = b' + \frac{((k - k') \alpha^+)}{k_0 x} b.$$

С помощью формулы (21,15) находим для квадрата матричного элемента:

$$S^+ S = \frac{1}{k_0^2 x^2} ((k - k') \alpha) ((k - k') \alpha^+) \frac{1}{8} \sum_{s, s'} \rho_{44} \sigma_{44}. \quad (37,17)$$

Согласно формулам (21,17) и (21,18) после суммирования по конечным значениям спина ( $s' = -1, 1$ ) и усреднения по возможным начальным получаем:

$$\frac{1}{8} \sum_{s, s'} \rho_{44} \sigma_{44} = \frac{1}{8} \sum_{s, s'} \left( 1 + ss' \frac{k k'}{K K'} + \frac{k_0^2}{K K'} \right) \left( 1 + ss' \frac{k k'}{k k'} \right) \cong 1.$$

Далее, из соотношения

$$a_n a_{n'}^+ = \delta_{nn'} - \frac{x_n x_{n'}}{x^2}$$

находим:

$$\begin{aligned} S^+ S &= \frac{1}{k_0^2 x^2} ((k - k') \alpha) ((k - k') \alpha^+) = \\ &= \frac{1}{k_0^2 x^2} \left[ (k - k')^2 - \frac{((k - k') x)^2}{x^2} \right] = \\ &= \frac{1}{k_0^2 x^2} (k^2 + k'^2 - 2(kk') - (kx^0)^2 - (k'x^0)^2 + 2(kx^0)(k'x^0)), \end{aligned} \quad (37,18)$$

где  $x^0 = \frac{x}{x}$  — единичный вектор, характеризующий направление вылета тормозного фотона.

Волновое число тормозного фотона

$$x = K - K' = \frac{k^2 - k'^2}{2k_0}$$

имеет порядок  $\beta k$ , и поэтому в равенстве (37,15) мы можем положить

$$\chi'^2 = k^2 + k'^2 - 2(kk').$$

Тогда дифференциальное эффективное сечение тормозного испускания фотона с энергией  $c\hbar\chi$  примет вид

$$d\sigma = \frac{Z^2}{\pi^2} \left( \frac{e^2}{c\hbar} \right)^3 \frac{d\chi}{\chi} \frac{k'}{k} \oint \frac{k^2 + k'^2 - 2(kk') - (k'\chi^0)^2 - (k\chi^0)^2 + 2(k\chi^0)(k'\chi^0)}{(k^2 + k'^2 - 2(kk'))^2} \times \\ \times \sin \vartheta \sin \vartheta' d\vartheta d\vartheta' d\varphi d\varphi'. \quad (37,19)$$

Полное же эффективное сечение может быть найдено в результате интегрирования (37,19) ещё по величине  $\chi$ :

$$\sigma = \int_0^{\infty} \frac{d\sigma}{d\chi} d\chi.$$

Раскрывая интегралы в выражении (37,19), находим:

$$d\sigma = \frac{16Z^2}{3k^2} \left( \frac{e^2}{c\hbar} \right)^3 \ln \frac{k+k'}{k-k'} \frac{d\chi}{\chi}. \quad (37,20)$$

Вводя кинетическую энергию падающего и рассеянного электронов:

$$T = E - mc^2 = \hbar c \frac{k^2}{2k_0},$$

$$T' = E' - mc^2 = \hbar c \frac{k'^2}{2k_0}$$

а также энергию тормозного фотона

$$\varepsilon = \hbar c \chi = T - T',$$

имеем:

$$d\sigma = \frac{8}{3} \alpha r_0^2 Z^2 \frac{mc^2}{\varepsilon} \ln \frac{(\sqrt{T} + \sqrt{T-\varepsilon})^2}{\varepsilon} d \frac{\varepsilon}{T}, \quad (37,21)$$

где

$$r_0 = \frac{e^2}{mc^2}, \quad \alpha = \frac{e^2}{c\hbar}.$$

Из формулы (37,21) видно, что вероятность испускания фотона в основном обратно пропорциональна энергии  $\varepsilon$ .

В предельном случае больших частот (когда  $\varepsilon = T$ ) эффективное сечение  $d\sigma$  просто исчезает, для малых частот ( $\varepsilon \rightarrow 0$ ) величина  $\varepsilon d\sigma$  логарифмически расходится.

При малых энергиях падающего электрона мы не можем пользоваться плоскими волнами, формула (37,21) остаётся справедливой, лишь если соблюдаются условия (37,5). При очень малых скоростях падающего или рассеянного электронов выражение (37,21) мы должны умножить на поправочную функцию, определяющую искажение плоских волн кулоновским полем (см. также § 29). Эта функция имеет вид <sup>1)</sup>

$$f(\xi, \xi') = \frac{2\pi\xi \cdot 2\pi\xi'}{(e^{2\pi\xi} - 1)(1 - e^{-2\pi\xi'})}, \quad (37,22)$$

где

$$\xi = \frac{Ze^2}{\hbar v}, \quad \xi' = \frac{Ze^2}{\hbar v'};$$

распределение по углам остаётся прежним.

При больших скоростях  $v$  ( $\xi \ll 1$ ) электрона в начальном состоянии функция  $f$  обращается в единицу, если скорость рассеянного электрона также велика ( $\xi' \ll 1$ ). Тогда мы получаем старый результат. Влияние поправочной функции становится существенным, когда электрон излучает всю свою энергию, и поэтому скорость рассеянного электрона  $v'$  свадает до нуля ( $\xi' \rightarrow \infty$ ). Тогда функция  $f$  обращается в бесконечность. Однако в этом случае эффективное сечение  $d\sigma$  обращается в нуль, а произведение  $d\sigma$  на  $f(\xi, \xi')$  стремится к некоторому постоянному пределу. Наконец, при  $v \rightarrow 0$  функция  $f$ , а вместе с тем и значение для эффективного сечения стремятся к нулю по экспоненциальному закону.

г) **Общий случай.** При вычислении эффективного сечения в общем случае мы должны выражение (37,13) представить в виде

$$S = b'^+ (A^+ + \rho_1(\sigma B^+) + i(\sigma C^+)) b.$$

<sup>1)</sup> Как было отмечено в § 36, поправочная функция при упругом рассеянии даже в области малых скоростей равна единице.

Аналогичным способом находим:

$$S^+ = b^+ (A + \rho_1 (\sigma B) - i (\sigma C)) b'.$$

Тогда вместо соотношения (37,17) мы будем иметь:

$$\begin{aligned} S^+ S = \frac{1}{2} \sum_{s, s'} \frac{1}{4} (\rho_{44} \sigma_{44} A A^+ + \rho_{11} \sigma_{nn} B_n B_n^+ + \rho_{44} \sigma_{nn} C_n C_n^+ + \\ + \rho_{41} \sigma_{4n} A B_n^+ + \rho_{14} \sigma_{n4} B_n A^+ + i \rho_{44} \sigma_{4n} A C_n^+ - \\ - i \rho_{44} \sigma_{n4} C_n A^+ + i \rho_{14} \sigma_{nn} B_n C_n^+ - i \rho_{41} \sigma_{nn} C_n B_n^+), \end{aligned}$$

где

$$A^+ = -2((k' R' - k R) a^+); \quad B^+ = -\kappa (R + R') a^+,$$

$$C^+ = -(R - R') [\kappa a^+],$$

$$R' = \frac{1}{2(K' \kappa - (k' \kappa))}, \quad R = \frac{1}{2(K \kappa - (k \kappa))},$$

а множитель  $\frac{1}{2}$  перед знаком суммы связан с усреднением по возможным начальным значениям спина.

Подставляя сюда вместо  $\rho_{\mu\mu'}$  и  $\sigma_{\mu\mu'}$  значения из формул (21,17) и (21,18) и принимая во внимание соотношения

$$\sum_{s, s'} s^2 = \sum_{s, s'} s'^2 = \sum_{s, s'} 1 = 4, \quad \sum_{s, s'} s = \sum_{s, s'} s' = \sum_{s, s'} s s' = 0,$$

находим выражение

$$\begin{aligned} S^+ S = \frac{1}{K K' \kappa^2} \left\{ \frac{k^2 - (k \kappa^0)^2}{(K - (k \kappa^0))^2} \left( K'^2 - \frac{\kappa'^2}{4} \right) + \frac{k'^2 - (k' \kappa^0)^2}{(K' - (k' \kappa^0))^2} \left( K^2 - \frac{\kappa^2}{4} \right) - \right. \\ \left. - 2 \frac{[(k k') - (k \kappa^0)(k' \kappa^0)] \left( K K' - \frac{\kappa'^2}{4} + \frac{\kappa^2}{2} \right)}{(K - (k \kappa^0))(K' - (k' \kappa^0))} + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \frac{\kappa^2 [k^2 - (k \kappa^0)^2 + k'^2 - (k' \kappa^0)^2]}{(K - (k \kappa^0))(K' - (k' \kappa^0))} \right\}, \quad (37,23) \end{aligned}$$

которое, как и следовало ожидать, в нерелятивистском случае сводится к (37,18). Подставляя (37,23) в (37,16),

получим после интегрирования по сферическим углам  $\vartheta$ ,  $\varphi$ ,  $\vartheta'$  и  $\varphi'$  следующее выражение для эффективного сечения в ультрарелятивистском случае ( $E = c\hbar K$ ,  $E' = c\hbar K' > mc^2$ ,  $\varepsilon = c\hbar\kappa$ ):

$$d\sigma = 2\alpha r_0^2 Z^2 \frac{E'}{\varepsilon} \left( \frac{E^2 + E'^2}{E'E} - \frac{2}{3} \right) \left( 2 \ln \frac{2EE'}{\varepsilon mc^2} - 1 \right) \frac{d\varepsilon}{E}. \quad (37,24)$$

Отсюда видно, что в случае малых значений энергии тормозного фотона  $\varepsilon d\sigma$  логарифмически расходится.

Все эти формулы были выведены в предположении, что поле ядра является строго кулоновским, т. е. при вычислении вероятности тормозного излучения мы пренебрегали электрическим полем, создаваемым электронной оболочкой. Оценим порядок параметра соударения  $r_{\text{макс}}$ , при котором следует начинать учитывать эффект экранирования (т. е. электростатическое поле, создаваемое электронной оболочкой)<sup>1)</sup>.

Как видно из формулы (37,1)  $r_{\text{макс}}$  связан с величиной  $\kappa'$  соотношением [см. также (36,41)]

$$r_{\text{макс}} \sim \frac{1}{\kappa'_{\text{мин}}}.$$

Из формулы (37,11) следует, что

$$\kappa'_{\text{мин}} = k - \kappa' - \kappa.$$

В частности, для ультрарелятивистского случая ( $K' \gg k_0$ ) мы имеем:

$$\kappa'_{\text{мин}} = \sqrt{K^2 - k_0^2} - \sqrt{K'^2 - k_0^2} - (K - K') \approx \frac{k_0^2 \kappa}{2KK'},$$

откуда

$$r_{\text{макс}} \approx \frac{KK'}{\kappa k_0^2}. \quad (37,25)$$

В качестве эффективного радиуса, характеризующего экранирование, возьмём соответствующую величину из

<sup>1)</sup> См. В. Гайтлер. Квантовая теория излучения, стр. 187.



теории Томаса-Ферми:

$$a \sim a_0 Z^{-\frac{1}{3}} \sim \frac{137}{k_0} Z^{-\frac{1}{3}},$$

где  $a_0$  — радиус первой боровской орбиты.

Мы можем пренебречь влиянием экранирования, когда  $r_{\text{макс}} < a$ ; или

$$\frac{EE'}{\varepsilon mc^2} \ll 137Z^{-\frac{1}{3}}. \quad (37,26)$$

В другом крайнем случае, когда

$$\frac{EE'}{\varepsilon mc^2} \gg 137Z^{-\frac{1}{3}}, \quad (37,27)$$

мы должны экранирование считать полным. В этом случае, грубо говоря, следует в формуле (37,24) величину  $\ln \frac{2EE'}{\varepsilon mc^2}$  заменить величиной  $\ln(137Z^{-\frac{1}{3}})$ .

Более точные вычисления тормозного излучения с помощью модели Томаса-Ферми приводят в случае полного экранирования к выражению

$$d\sigma = 4\alpha r_0^2 Z^2 \frac{E'}{\varepsilon} \left[ \left( \frac{E^2 + E'^2}{EE'} - \frac{2}{3} \right) \ln(183Z^{-\frac{1}{3}}) + \frac{1}{9} \right] \frac{d\Omega}{E}. \quad (37,28)$$

Отсюда видно, что при  $E \rightarrow \infty$  эффективное сечение не расходится, а стремится к некоторому постоянному пределу. Более того, для малых частот фотона интенсивность излучения, пропорциональная  $\varepsilon d\sigma$  не будет уже расходиться по логарифмическому закону, как это имело место без учёта экранирования [см. соотношение (37,24)], а стремится к постоянному пределу.

Из условия (37,27) следует, что поправки на экранирование скорее дают о себе знать для тяжёлых элементов, чем для лёгких.

д) Потери энергии на тормозное излучение. Благодаря тормозному излучению при прохождении электронов

сквозь вещество должны наблюдаться потери энергии. Потерю энергии при одном соударении мы получим, интегрируя  $\varepsilon d\sigma$  по возможным энергиям излучения ( $0 \leq \varepsilon \leq E - mc^2 = T$ ).

Если мы обозначим через  $N_a$  число атомов в  $1 \text{ см}^3$ , то средняя энергия, теряемая на единице пути, будет равна

$$-\left(\frac{\partial E}{\partial x}\right)_r = N_a \int_0^T \varepsilon d\sigma. \quad (37,29)$$

В частности, при нерелятивистских скоростях движения электрона мы будем иметь согласно (37,21):

$$-\left(\frac{\partial E}{\partial x}\right)_r = \frac{8}{3} N_a mc^2 ar_0^2 Z^2 \int_0^1 \ln \frac{1 + \sqrt{1-\xi}}{1 - \sqrt{1-\xi}} d\xi,$$

где  $\xi$  является отношением энергии, излучаемой электроном, и его первоначальной энергии ( $\xi = \frac{\varepsilon}{T}$ ). Вычисляя последний интеграл, находим:

$$-\left(\frac{\partial E}{\partial x}\right)_r = N_a E \sigma_r, \quad (37,29a)$$

$$\text{где } E = mc^2, \text{ а величина } \sigma_r = \frac{16}{3} ar_0^2 Z^2 \quad (37,30)$$

характеризует относительную потерю энергии при одном столкновении. Как видно из формулы (37,30),  $\sigma_{\text{rad}}$  в нерелятивистском случае не зависит от первоначальной энергии электрона и даёт тот же порядок для эффективного сечения, который был найден по классической теории [см. соотношение (37,1)].

В ультрарелятивистском же случае с помощью формулы (37,28) можно получить:

$$-\left(\frac{\partial E}{\partial x}\right)_r = N_a E \sigma_r, \quad (37,31)$$

причём

$$\sigma_r = 4ar_0^2 Z^2 \left( \ln \frac{2E}{mc^2} - \frac{1}{3} \right) \quad (37,30a)$$

будет возрастать логарифмически с увеличением  $E$ .

Применимость формулы (37,30 а) ограничена условием экранирования, которое начинает сказываться при энергиях  $E \sim 137Z^{-\frac{1}{3}}mc^2$  и выше. В случае полного экранирования мы получаем, что  $\sigma_r$  вновь будет постоянной величиной

$$\sigma_r = \alpha r_0^2 Z^2 \left[ 4 \ln \left( 183Z^{-\frac{1}{3}} \right) + \frac{2}{9} \right]. \quad (37,32)$$

В случае полного экранирования мы можем ввести так называемую радиационную длину  $l$ :

$$l = \frac{1}{N_a \sigma_r} \approx \frac{1}{4\alpha r_0^2 Z^2 N_a \ln(183Z^{-\frac{1}{3}})}. \quad (37,28a)$$

Приближённо мы можем записать

$$l \sim \frac{1}{ZAN_a} \sim \frac{1}{Z\rho},$$

где  $A \cong 2Z$  — атомный вес вещества. При прохождении быстрых электронов через вещество, когда другими потерями, кроме радиационных, мы можем пренебречь [см. соотношение (37,37)], дифференциальное уравнение (37,31) принимает вид:

$$dE = -\frac{E dx}{l},$$

откуда

$$E = E_0 e^{-\frac{x}{l}}, \quad (37,28б)$$

т. е. при прохождении электроном единицы радиационного пути теряется в среднем на излучение  $1/2,7$  часть энергии, причём для тяжёлых элементов величина  $l$  меньше и радиационные потери увеличиваются. Так, например, для воздуха (при нормальной температуре и давлении)  $l = 33\,000$  см, причём для атмосферы, которая эквивалентна 8 км воздуха при нормальных температуре и давлении, средняя радиационная длина увеличивается в 20 раз, для свинца радиационная длина равна 0,517 см.

е) **Ионизационные потери.** При прохождении заряженных частиц (электронов) через вещество наряду с потерями на тормозное излучение имеются ещё и другие потери, связанные с передачей части энергии проходящих электронов атомам вещества. Эти неупругие столкновения приводят, с одной стороны, к возбуждению дискретных уровней атомов, что, в частности, наблюдалось в опытах Франка-Герца, которые экспериментальным путём определили расстояние между энергетическими уровнями в атомах ртути, а с другой стороны — к иони-

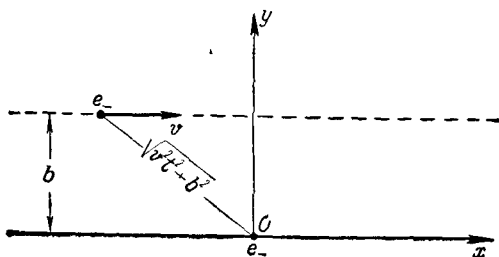


Рис. 7. Ионизационные потери.

зации атома. Оба типа возбуждения мы в дальнейшем будем называть термином «ионизация».

Средняя потеря энергии благодаря ионизации была подсчитана Бором с помощью полуклассической теории.

Рассмотрим электрон атома, расположенный на расстоянии  $b$  (прицельное расстояние) от траектории другого электрона (пунктирная линия на рис. 7), движущегося со скоростью  $v$  (рассеянием электрона пренебрегаем).

Пусть электрон атома может колебаться с частотой  $\nu = \frac{1}{T}$  около точки равновесия  $O$ . Найдём энергию, которую приобретает электрон атома за время взаимодействия.

Электрическую силу

$$F = e_- E = -eE$$

мы можем разложить на две составляющие: параллельную и перпендикулярную к траектории движения элект-

трона. Суммарный импульс, который получит электрон атома от составляющей силы  $F_x$ , параллельной траектории, будет, очевидно, равняться нулю. Энергию электрону атома может сообщить лишь составляющая силы

$$F_y = \frac{e^2 b}{(v^2 t^2 + b^2)^{3/2}},$$

перпендикулярная к траектории. Колебание электрона атома будет описываться уравнением

$$m\ddot{y} + 4\pi^2\nu^2 y = \frac{e^2 b}{(v^2 t^2 + b^2)^{3/2}}.$$

Отсюда видно, что взаимодействие между зарядами будет происходить практически в течение времени

$$t_1 \approx \frac{2b}{v}.$$

Если это время будет много больше времени колебания электрона в атоме, т. е.

$$t_1 = \frac{2b}{v} > \frac{1}{\nu},$$

то под действием силы  $F$  электрон будет совершать движения как в одном, так и в другом направлениях. Поэтому средняя энергия, передаваемая атому, будет близка к нулю. В другом крайнем случае

$$\frac{2b}{v} < \frac{1}{\nu} \quad (37,33)$$

в течение всего времени взаимодействия электрон атома будет двигаться только в одном направлении. Поэтому вся работа со стороны силы  $F_y$  пойдёт на увеличение энергии атома.

Таким образом, из последней формулы мы можем найти максимальное значение для параметра, при котором ещё наблюдается передача энергии:

$$b_{\text{макс}} = \frac{v}{2\nu}. \quad (37,34)$$

При выполнении условия (37,33) мы можем с известным приближением считать электрон свободным и записать уравнение его движения в виде

$$m\ddot{y} = \frac{e^2 b}{\sqrt{(v^2 t^2 + b^2)^3}}.$$

Отсюда находим скорость  $\dot{y}$ , а также энергию  $\Delta E$ , которую получает электрон атома:

$$\dot{y} = \frac{e^2 b}{m} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{(v^2 t^2 + b^2)^{3/2}} = \frac{2e^2}{mvb}, \quad \Delta E = \frac{m\dot{y}^2}{2} = \frac{2e^4}{mb^2 v^2}.$$

Для того чтобы найти полную потерю энергии на единицу пути движущегося электрона, мы должны потерю энергии  $\Delta E$  при одном столкновении умножить на величину  $R = N_a Z 2\pi b db$ , где  $N_a$  — число атомов в  $1 \text{ см}^3$ ,  $Z$  — порядковый номер электрона, равный числу электронов в одном атоме. Величина  $R$  равняется числу электронов, находящихся на расстоянии  $b$  от траектории производящего ионизацию электрона на единице пути последнего.

Общая потеря энергии на ионизацию во всех слоях от  $b_{\text{мин}}$  до  $b_{\text{макс}}$  составляет

$$-\frac{\partial E}{\partial x} = \frac{4\pi N_a Z e^4}{mv^2} \ln \frac{b_{\text{макс}}}{b_{\text{мин}}}.$$

Максимальное прицельное расстояние  $b_{\text{макс}}$ , при котором возможна ещё передача энергии, определяется формулой (37,34). В качестве величины  $b_{\text{мин}}$  мы возьмём так же, как и при полуклассическом рассмотрении тормозного излучения, длину де-бройлевской волны, которая определяет границу применимости классической теории:

$$b_{\text{мин}} = \frac{h}{mv}.$$

Тогда для полной потери энергии мы находим:

$$-\frac{\partial E}{\partial x} = 2\pi N Z r_0^3 \frac{(mc^2)^2}{T} \ln \frac{T}{IZ},$$

где  $T = \frac{mv^2}{2}$  — кинетическая энергия движущейся частицы, а  $IZ = h\nu$  — средняя энергия ионизации атома,  $I = 13,5 \text{ эв}$ .

Более точные квантовые подсчёты, основанные на атомной модели Томаса-Ферми и учитывающие обменные эффекты, приводят к следующим выражениям для ионизационных потерь:

в нерелятивистском случае ( $T = E - mc^2 \ll mc^2$ )

$$-\left(\frac{\partial E}{\partial x}\right)_i = Nmc^2\sigma_i,$$

где

$$\sigma_i = 2\pi Zr_0^2 \frac{mc^2}{T} \left( \ln \frac{T}{I^2 Z} + \frac{1}{2} \right); \quad (37,35)$$

в ультрарелятивистском случае

$$-\left(\frac{\partial E}{\partial x}\right)_i = NE\sigma_i,$$

где

$$\sigma_i = 2\pi Zr_0^2 \frac{m^2 c^2}{E} \ln \frac{E^3}{2mc^2 I^2 Z^2}. \quad (37,36)$$

Отсюда видно, что ионизационные потери в нерелятивистском случае быстро убывают с увеличением энергии. При энергиях порядка  $mc^2$  ( $E \sim mc^2$ ) они достигают минимума, а затем начинают возрастать по логарифмическому закону.

В основе рассмотренной теории потерь на ионизацию лежит взаимодействие между движущейся частицей и отдельным атомом. Общая потеря энергии рассматривалась как сумма элементарных потерь. Однако дисперсионные свойства вещества как целого вызывают некоторый экранирующий эффект, который также может оказать влияние на общие потери. В самом деле, при прохождении очень быстрых заряженных частиц через конденсированное вещество наблюдается особое черенковское излучение, которое связано с тем обстоятельством, что скорость частицы может быть больше фазовой скорости света в веществе. В этом случае проявляется действие вещества как целого, которое нельзя свести к простой сумме воздействий отдельных атомов. Подробный анализ, проделанный Ферми<sup>1)</sup>, показал, что потери на черенковское излучение становятся заметными лишь для очень быстрых

<sup>1)</sup> E. Fermi, Phys. Rev. 57, 485 (1940); см. также статью П. Е. Кунина в сборнике «Мезон», М.—Л., 1947 и работу О. Бора, приведённую в приложении к книге Н. Бора «Прохождение атомных частиц через вещество», М., 1950.

частиц<sup>1)</sup>. За деталями по этому вопросу мы отсылаем читателя к специальной литературе.

**ж) Общая потеря энергии.** Пренебрегая черенковским излучением, мы найдём, что общая потеря энергии при прохождении заряженных частиц через вещество складывается из радиационных и ионизационных потерь:

$$-\frac{\partial E}{\partial x} = -\left(\frac{\partial E}{\partial x}\right)_r - \left(\frac{\partial E}{\partial x}\right)_i.$$

Сопоставляя между собой формулы (37,32) и (37,36), мы видим, что величина  $\sigma_r$  пропорциональна  $Z^2$  и почти не зависит от энергии, в то время как величина  $\sigma_i$  пропорциональна  $Z$  и убывает примерно обратно пропорционально с увеличением энергии  $E$ . Поэтому соотношение между различными потерями определяется приближённой формулой:

$$\frac{\left(\frac{\partial E}{\partial x}\right)_r}{\left(\frac{\partial E}{\partial x}\right)_i} \approx \frac{ZE}{E_0}, \text{ где } E_0 = 800 \text{ Мэв.} \quad (37,37)$$

Отсюда видно, что при энергиях, превышающих некоторое предельное значение, имеющее порядок  $\frac{E_0}{Z}$ , потери на тормозное излучение начинают превалировать над потерями на ионизацию. Это предельное значение достигается тем быстрее, чем больше  $Z$ . Так, например, для свинца ( $Z = 82$ ) предельная энергия составляет  $E \sim 20 \text{ мэв}$ , в то время как для воды и воздуха ( $Z \sim 8$ ) она должна быть примерно в 10 раз больше, что находится в согласии с экспериментальными данными. При очень больших энергиях  $E$  электрона ионизационными потерями мы можем вообще пренебречь.

---

<sup>1)</sup> Квантовая энергия эффекта Черенкова рассмотрена нами в § 32.



## ГЛАВА III ТЕОРИЯ ПОЗИТРОНА

### § 38. Основы теории позитрона

а) **Состояния с отрицательной энергией.** Как известно, волновое уравнение, описывающее поле свободных частиц со спином  $\frac{1}{2}$ , имеет вид (более подробно см. § 17):

$$\left( -\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial t} - c \frac{\hbar}{i} (\nabla \alpha) - \rho_3 mc^2 \right) \psi = 0. \quad (38,1)$$

Его частные решения

$$\psi(\mathbf{k}, s, \varepsilon) = \frac{1}{L^{3/2}} C(s, \varepsilon) b(s, \varepsilon) e^{-icK\varepsilon t + i\mathbf{k}\mathbf{r}} \quad (38,2)$$

соответствуют как положительным значениям ( $\varepsilon > 0$ ), так и отрицательным значениям ( $\varepsilon < 0$ ) энергии.

Решения с отрицательной энергией не являются характерными лишь для полувекторных уравнений. Они должны появляться в любой релятивистской теории, включая даже классическую.

В самом деле, в релятивистской теории энергия свободной частицы  $E$  связана с её импульсом и массой покоя соотношением

$$E^2 = c^2 p^2 + m^2 c^4,$$

откуда получаем два решения:

$$E = \pm \sqrt{c^2 p^2 + m^2 c^4}.$$

В классической теории состояния с отрицательной энергией трудностей не вызывают, поскольку в процессе

движения частицы её энергия может изменяться только непрерывным образом (например, в результате излучения). Переходы из состояний с положительной энергией в состояния с отрицательной энергией (энергия изменяется скачком) являются невозможными. Поэтому, отбросив в начальный момент времени состояния с отрицательной энергией, мы можем в дальнейшем их вообще не рассматривать.

Иное положение дела мы имеем в квантовой теории, где переходы возможны не только между непрерывными, но также между дискретными энергетическими состояниями.

Для того чтобы избежать переходов электронов в состояния с отрицательной энергией, Дирак предложил считать все уровни с отрицательной энергией заполненными электронами (электронно-позитронный вакуум), благодаря чему электроны с положительной энергией не смогут переходить в обычных условиях на эти уровни. С другой стороны, под действием  $\gamma$ -кванта большой энергии ( $\epsilon > 2mc^2$ ) возможны вынужденные переходы электрона из состояния с отрицательной энергией в состояния с положительной энергией.

В этом случае вместо поглощённого  $\gamma$ -кванта появляется электрон с положительной энергией и «дырка» на фоне заполненных электронами отрицательных состояний.

Эта «дырка» ведёт себя как частица с положительной массой, равной массе электрона и с зарядом, противоположным заряду электрона (см. § 23). Подобная частица получила название позитрона.

Эта теория не исключает возможности обратного процесса. При наличии «дырки» электрон с положительной энергией может перейти на свободный уровень состояний с отрицательной энергией. В этом случае электрон и позитрон превращаются в  $\gamma$ -кванты. Вероятности обоих процессов могут быть сравнительно просто вычислены, поскольку они фактически представляют вероятности вынужденного и спонтанного переходов.

Экспериментальное открытие позитрона и его превращений подтвердило теорию позитрона не только с каче-

ственной, но также и с количественной стороны. С этого момента начинается фактически новый этап теории элементарных частиц, учитывающий возможность их взаимных превращений. В частности, возникновение позитрона мы можем рассматривать как превращение  $\gamma$ -квантов в электрон и позитрон, а аннигиляцию позитрона — как обратное превращение пары (электрона — позитрона) в  $\gamma$ -кванты.

При этих превращениях строго соблюдается известное соотношение между массой и энергией

$$E = Mc^2, \quad (38,3)$$

на более детальном анализе которого мы остановимся при рассмотрении вопроса о природе массы элементарных частиц (§ 42).

Заметим, что современная теория вакуума является далеко ещё не законченной и сопоставление движения частицы с движением «дырки» носит весьма предварительный характер, тем более, что теория в целом должна быть симметричной относительно знака заряда, т. е. её выводы не должны зависеть от того, заполняются ли отрицательные уровни электронами и движение позитрона связано с движением «дырки» или, наоборот, отрицательные уровни заполняются позитронами. Однако теория вакуума сумела описать новые качественные свойства элементарных частиц, связанные с проявлением их полевой природы, открыв тем самым новые общие свойства электромагнитного поля и поля электронов и позитронов. В самом деле, электромагнитное поле в общем случае содержит две части: одна часть связана с наличием фотонов, а другая — с переносом электромагнитных сил (например, электростатических). Согласно квантовой электродинамике перенос взаимодействия осуществляется с помощью квантованного электромагнитного поля, т. е. с помощью виртуальных фотонов и псевдофотонов (см. §§ 25 и 26). Это поле виртуальных частиц в известном смысле можно рассматривать как резервуар, необходимый для появления реальных фотонов. Точно так же волновое уравнение Дирака содержит две части. Первая часть описывает движение электронов

и позитронов, а другая связана с полем виртуальных частиц и во многих отношениях напоминает виртуальное электромагнитное поле. Помимо того, что вакуум виртуальных частиц является источником появления электронов и позитронов, недавние открытия переноса взаимодействия через электронно-позитронный вакуум (более подробно см. гл. IV) окончательно доказали реальность его существования. Свойства электронно-позитронного вакуума по мере постановки новых экспериментов будут всё глубже изучаться, благодаря чему его теория должна принимать всё более совершенный характер.

Открытие новых свойств элементарных частиц является совершенно закономерным и находится в полном согласии с учением диалектического материализма. В. И. Ленин пишет<sup>1)</sup>: «Признание каких-либо неизменных элементов, «неизменной сущности вещей» и т. п. не есть материализм». Эту мысль В. И. Ленин заканчивает словами: «Но диалектический материализм настаивает на приблизительном, относительном характере всякого научного положения о строении материи и свойствах её, на отсутствии абсолютных граней в природе, на превращении движущейся материи из одного состояния в другое». Таким образом, мы должны рассматривать квантованное электромагнитное поле, а также электронно-позитронный вакуум как одну из форм познанной нами движущейся материи, осуществляющую перенос взаимодействия между частицами и обуславливающую взаимное превращение элементарных частиц (например, электрона и позитрона в  $\gamma$ -кванты и т. д.).

**б) Теория вторичного квантования.** Как было показано нами в § 23 (квантование полувекторного уравнения), несимметричная по отношению к электронам и позитронам теория «дырок» может быть заменена симметричной теорией вторичного квантования.

В этом случае, согласно равенствам (23,27) и (23,24) волновые функции, характеризующие квантованное элект-

---

<sup>1)</sup> В. И. Ленин, Материализм и эмпириокритицизм, Госполитиздат, 1951, стр. 244.

тронно-позитронное поле, могут быть представлены в виде

$$\begin{aligned} \psi &= \frac{1}{L^{3/2}} \sum_{s, \varepsilon, \mathbf{k}} C(s, \varepsilon, \mathbf{k}) b(s, \varepsilon, \mathbf{k}) e^{-ic\varepsilon Kt + i\mathbf{k}r} = \\ &= \frac{1}{L^{3/2}} \sum_{s, \mathbf{k}} [C(s, \mathbf{k}) b(s, 1, \mathbf{k}) e^{-icKt + i\mathbf{k}r} + \\ &\quad + \hat{C}^+(s, \mathbf{k}) b(-s, -1, -\mathbf{k}) e^{icKt - i\mathbf{k}r}]. \quad (38,4) \end{aligned}$$

Отсюда следует, что состояния с отрицательной энергией электрона относятся к сопряжённым состояниям позитрона, иными словами, если действие оператора  $C(s, 1, \mathbf{k}) = C(s, \mathbf{k})$ , соответствующего положительной энергии, на функцию от числа частиц приводит к поглощению электрона, то действие оператора  $C(-s, -1, -\mathbf{k}) = \hat{C}^+(s, \mathbf{k})$ , соответствующего отрицательной энергии, приводит к появлению позитрона.

Таким образом, при отсутствии электронов и позитронов, когда действие оператора поглощения на функцию от числа частиц даёт нам значение нуль, волновая функция (38,4) благодаря наличию операторов испускания ( $\hat{C}^+$ ) не обращается в нуль.

Метод вторичного квантования является более универсальным, чем теория «дырок» Дирака. В самом деле, вторичное квантование допускает простое обобщение на случай бозевских частиц (см., например, исследование скалярного уравнения в § 11), в то время как теория «дырок» является совершенно непригодной для частиц с целочисленным спином, хотя для фермиевских частиц обе теории приводят к одинаковым результатам.

В дальнейших наших расчётах для описания движения электронов и позитронов мы будем пользоваться плоскими волнами. Это возможно сделать при сравнительно больших энергиях, когда энергией взаимодействия между электроном и позитроном можно пренебречь. В противном случае возможно соединение электрона и позитрона в атом позитрония (см. § 40), наподобие атома водорода, в котором протон замещён позитроном.

Наименьший радиус  $a$  позитрония равняется боровскому радиусу, в выражении которого масса электрона  $m$  заменяется приведённой массой  $\mu = \frac{m}{2}$ , т. е.

$$a = \frac{2\hbar^2}{me^2}. \quad (38,5)$$

Величину  $a$  мы можем выбрать в качестве характеристического расстояния для атома позитрония.

Очевидно, мы можем пренебречь взаимодействием между электроном и позитроном, когда дебройлевская длина волны  $\Lambda = \frac{2\pi\hbar}{mv}$  будет много меньше расстояния  $a$  ( $\Lambda \ll a$ ). Отсюда мы находим условие, при котором мы можем пользоваться плоскими волнами:

$$v \gg c \frac{2\pi e^2}{\hbar c} = 2\pi\alpha a, \quad (38,6)$$

где  $\alpha$  — постоянная тонкой структуры.

В последующих параграфах мы разберём ряд явлений, связанных с возникновением и аннигиляцией позитронов.

### § 39. Образование пар фотонами

Один  $\gamma$ -квант, движущийся с импульсом  $\hbar\mathbf{x}$ , не может превратиться (спонтанно) в электрон и позитрон, несмотря на то, что он взаимодействует с электронно-позитронным вакуумом. В самом деле, при однофотонной аннигиляции мы не сможем удовлетворить законам сохранения энергии и импульса:

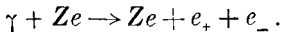
$$\begin{aligned} x &= K_- + K_+, \\ \mathbf{x} &= \mathbf{k}_- + \mathbf{k}_+, \end{aligned} \quad (39,1)$$

без выполнения которых невозможны квантовомеханические переходы<sup>1)</sup> (здесь  $\hbar k_-$  и  $\hbar k_+$  являются соответственно импульсами электрона и позитрона).

<sup>1)</sup> Мы можем в общем случае поставить вопрос о спонтанном превращении частицы массы  $\frac{\hbar x_0}{c}$  (масса покоя) в частицы с массами  $\frac{\hbar k_0}{c}$  и  $\frac{\hbar k'_0}{c}$ .

Поэтому для образования пары необходимо, кроме  $\gamma$ -кванта, наличие другой частицы, которая взяла бы на себя часть импульса. Например, пара может образоваться при взаимодействии двух  $\gamma$ -квантов. Однако вероятность подобного процесса слишком мала. Пары, как правило, образуются, когда  $\gamma$ -квант большой энергии  $\epsilon = c\hbar k$  проходит вблизи ядра  $Ze$ ; при этом избыток импульса берёт на себя ядро.

Появление пары (рис. 8) представляет собой следующий процесс:



При вычислении вероятности появления пары мы должны учесть, что электроны, с одной стороны, взаимодействуют с  $\gamma$ -квантом импульса  $\hbar k$ :

$$U = \frac{e}{L^{3/2}} \sqrt{\frac{2\pi c \hbar}{z}} (\alpha \alpha) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + i\omega t}, \quad (39,2)$$

а с другой — с кулоновским полем ядра

$$V = -\frac{4\pi Ze^2}{L^3} \sum_{\mathbf{x}'} \frac{e^{-i\mathbf{x}' \cdot \mathbf{r}}}{x'^2}. \quad (39,3)$$

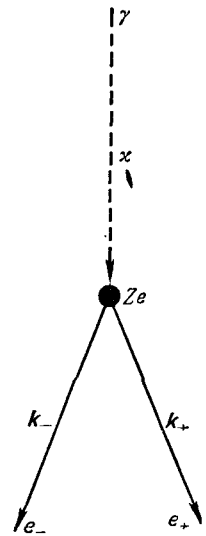


Рис. 8. Появление пары.

Выбирая систему координат, относительно которой распадающаяся частица покоится ( $\mathbf{x} = 0$ ), и обозначая импульсы образовавшихся частиц через  $\hbar k$  и  $\hbar k'$ , мы можем записать законы сохранения импульса и энергии в виде

$$0 = k + k', \quad \gamma_0 = \sqrt{k^2 + k_3^2} + \sqrt{k'^2 + k_3'^2}.$$

Последние уравнения имеют решение только в том случае, когда масса покоя распадающейся частицы будет больше суммы масс покоя вновь образовавшихся частиц, т. е.  $\gamma_0 > k_0 + k'_0$ . Масса покоя  $\gamma$ -кванта равняется нулю, и поэтому  $\gamma$ -квант не может распадаться на какие-либо частицы. В теории мезонов возможен спонтанный распад тяжёлого  $\pi$ -мезона на более лёгкий  $\mu$ -мезон и нейтрино. Точно так же  $\mu$ -мезон может распадаться на более лёгкие частицы. Далее, как известно, масса покоя нейтрона больше суммы масс покоя протона, электрона и нейтрино. Поэтому теоретически можно ожидать спонтанный распад нейтрона на протон, электрон и нейтрино, что не противоречит ряду экспериментов.

В этом случае уравнение Дирака может быть представлено в виде

$$D\psi(N-1) = W^+ \psi(N), \quad (39,4)$$

причём оператор энергии даётся выражением

$$W^+ = UD^{-1}V + VD^{-1}U. \quad (39,5)$$

Уравнение (39,4) будем решать по методу теории возмущений <sup>1)</sup>:

$$\psi = \psi_0 + \psi_2 + \dots$$

полагая

$$\psi_0 = \psi(N), \quad \psi_2 = \psi(N-1). \quad (39,6)$$

Функция  $\psi_0$  описывает начальное состояние, в котором отсутствуют электроны и позитроны. В конечном же состоянии ( $\psi_2$ ) должна появиться пара частиц: электрон и позитрон.

Для упрощения наших дальнейших рассуждений мы можем не вводить квантованные функции  $\psi$ , а рассматривать появление пары как переход электрона с отрицательного уровня, который описывается волновой функцией  $\psi_0$ ,

$$\psi_0 = \frac{1}{L^{3/2}} b(s, -1, -\mathbf{k}_+) e^{i\mathbf{k}_+ \cdot \mathbf{r} - i\mathbf{k}_+ \cdot \mathbf{r}}, \quad (39,7)$$

на положительный уровень с волновой функцией

$$\psi_2 = \frac{1}{L^{3/2}} C(t) b(s', 1, \mathbf{k}_-) e^{-i\mathbf{k}_- \cdot \mathbf{r} + i\mathbf{k}_- \cdot \mathbf{r}}. \quad (39,8)$$

Для этого фотон должен обладать энергией, не меньшей, чем  $2mc^2$ .

Процесс образования пары является обратным процессом по отношению к тормозному испусканию. В самом

<sup>1)</sup> В энергии взаимодействия  $W^+$  учтены сразу процессы второго порядка относительно функций  $U$  и  $V$ .



деле, при тормозном испускании электрон с более высокого уровня ( $E > 0$ ) переходит под действием кулоновского притяжения на более низкий ( $E' < E$ ,  $E' > 0$ ) с испусканием фотона. При рождении же пары, наоборот, электрон с более низкого энергетического уровня ( $E < 0$ ) под действием того же кулоновского притяжения переходит на более высокий энергетический уровень ( $E' > E$ ,  $E' > 0$ ) с поглощением фотона. Поэтому при вычислении вероятности образования пары мы можем воспользоваться соответствующими формулами для тормозного испускания, произведя в последних замену переменных:

$$\begin{aligned} K &\rightarrow -K_+, & \mathbf{k} &\rightarrow -\mathbf{k}_+, & K' &\rightarrow K_-, \\ \mathbf{k}' &\rightarrow \mathbf{k}_-, & \mathbf{x} &\rightarrow -\mathbf{x}, & \mathbf{x} &\rightarrow -\mathbf{x}; \end{aligned} \quad (39,9)$$

кроме того, суммирование по импульсам тормозного фотона  $\mathbf{x}$  мы должны заменить суммированием по импульсам электрона с отрицательной энергией ( $\mathbf{k}_+$ ), т. е.

$$\sum_{\mathbf{x}} \rightarrow \sum_{\mathbf{k}_+}. \quad (39,10)$$

Тогда для вероятности образования пары мы будем иметь вместо формулы (37,14) следующее выражение:

$$\omega = \frac{64\pi^4 Z^2 e^6}{c^2 \hbar^3 L^9} \sum_{\mathbf{k}_-, \mathbf{k}_+} \frac{1}{x'^4 x} S^+ S \delta(K_+ + K_- - x), \quad (39,11)$$

где величина  $-\mathbf{x}' = -\mathbf{k}_- - \mathbf{k}_+ + \mathbf{x}$  является импульсом (в единицах  $\hbar$ ), который берёт на себя ядро, а выражение для матричного элемента  $S^+ S$  может быть найдено с помощью формулы (37,23), принимающей в нашем случае вид

$$\begin{aligned} S^+ S = & \frac{-1}{K_+ K_- x^2} \left\{ \frac{k_+^2 - (\mathbf{k}_+ \mathbf{x}^0)^2}{(K_+ - (\mathbf{k}_+ \mathbf{x}^0))^2} \left( K_-^2 - \frac{x'^2}{4} \right) + \right. \\ & + \frac{k_-^2 - (\mathbf{k}_- \mathbf{x}^0)^2}{(K_- - (\mathbf{k}_- \mathbf{x}^0))^2} \left( K_+^2 - \frac{x'^2}{4} \right) + \\ & + 2 \frac{[(\mathbf{k}_+ \mathbf{k}_-) - (\mathbf{k}_+ \mathbf{x}^0)(\mathbf{k}_- \mathbf{x}^0)] \left[ K_+ K_- + \frac{x'^2}{4} - \frac{x^2}{2} \right]}{(K_+ - (\mathbf{k}_+ \mathbf{x}^0))(K_- - (\mathbf{k}_- \mathbf{x}^0))} - \\ & \left. - \frac{1}{2} \frac{x^2 [k_+^2 - (\mathbf{k}_+ \mathbf{x}^0)^2 + k_-^2 - (\mathbf{k}_- \mathbf{x}^0)^2]}{(K_+ - (\mathbf{k}_+ \mathbf{x}^0))(K_- - (\mathbf{k}_- \mathbf{x}^0))} \right\}. \quad (39,12) \end{aligned}$$

Деля вероятность  $w$  на число  $\gamma$ -квантов, падающих в единицу времени на единицу поверхности  $\left(N_\gamma = \frac{c}{L^3}\right)$ , находим после перехода от суммирования к интегрированию следующее выражение для дифференциального эффективного сечения:

$$d\sigma = \sigma(K_+) dK_+ = dK_+ \frac{Z^2}{\pi^2} \left(\frac{e^2}{\hbar c}\right)^3 \frac{k_+ k_-}{x^3} \int \frac{d\Omega_+ d\Omega_-}{x'^4} \times$$

$$\times \left\{ \frac{(k_+^2 - (k_+ \mathbf{x}^0)^2) \left(-K_-^2 + \frac{x'^2}{4}\right)}{(K_+ - (k_+ \mathbf{x}^0))^2} + \frac{(k_-^2 - (k_- \mathbf{x}^0)^2) \left(-K_+^2 + \frac{x'^2}{4}\right)}{(K_- - (k_- \mathbf{x}^0))^2} - \right.$$

$$- 2 \frac{[(k_+ k_-) - (k_+ \mathbf{x}^0)(k_- \mathbf{x}^0)] \left[K_+ K_- + \frac{x'^2}{4} - \frac{x^2}{2}\right]}{(K_+ - (k_+ \mathbf{x}^0))(K_- - (k_- \mathbf{x}^0))} +$$

$$\left. + \frac{1}{2} \frac{x^2 [k_+^2 - (k_+ \mathbf{x}^0)^2 + k_-^2 - (k_- \mathbf{x}^0)^2]}{(K_+ - (k_+ \mathbf{x}^0))(K_- - (k_- \mathbf{x}^0))} \right\}, \quad (39,13)$$

$$x = K_+ + K_-, \quad \mathbf{x}^0 = \frac{x}{x}, \quad \mathbf{x}' = k_+ + k_- - \mathbf{x};$$

здесь  $d\Omega_+ = \sin \vartheta_+ d\vartheta_+ d\varphi_+$  и  $d\Omega_-$  — элементы телесных углов, внутри которых движутся вылетающие позитроны и электроны.

Как видно из последних формул, для образования пары необходимо, чтобы энергия ( $\varepsilon = c\hbar x$ )  $\gamma$ -кванта превышала суммарную собственную энергию электрона и позитрона, т. е.

$$x > 2k_0.$$

Найдём выражение для эффективного сечения, когда образующиеся электроны и позитроны движутся с нерелятивистскими скоростями ( $k_- \ll k_0$ ,  $k_+ \ll k_0$ ). В этом случае мы можем положить

$$K_+ \approx K_1 \approx \frac{x}{2} \approx \frac{x'}{2} \approx k_0, \quad (39,14)$$

$$dK_+ \approx \frac{k_+}{k_0} dk_+, \quad \frac{k_+^2}{2k_0} + \frac{k_-^2}{2k_0} = x - 2k_0.$$

Тогда выражение (39,13) принимает вид

$$d\sigma = dk_+ \frac{k_+^2 k_- Z^2 \alpha^3}{k_0^3 2^4 \pi^2} \int d\Omega_+ d\Omega_- (k_+^2 \sin^2 \theta_+ + k_-^2 \sin^2 \theta_-). \quad (39,15)$$

После интегрирования по углам находим:

$$d\sigma = 8Z^2ar_0^2 \frac{\sqrt{T_+T_-}(T_+ + T_-) dT_+}{(mc^2)^3}, \quad (39,16)$$

где  $r_0 = \frac{e^2}{mc^2}$  — радиус электрона, а кинетическая энергия позитрона  $T_+ = c\hbar \frac{k_+^2}{2k_0} = \frac{mv_+^2}{2}$  и электрона  $T_- = \frac{mv_-^2}{2}$  связаны с энергией  $\gamma$ -кванта  $\varepsilon = c\hbar k$  соотношением

$$T_+ + T_- = \varepsilon - 2mc^2. \quad (39,17)$$

Заметим, что выражением (39,16) мы можем пользоваться, так же как и формулой (27,21) для тормозного испускания, лишь при достаточно больших скоростях позитрона и электрона, когда величины

$$\xi_+ = \frac{Ze^2}{\hbar v_+}, \quad \xi_- = \frac{Ze^2}{\hbar v_-} \quad (39,17a)$$

много больше единицы:

$$\xi_+ \gg 1, \quad \xi_- \gg 1;$$

в противном случае эффективное сечение (39,17) должно быть умножено на поправочную функцию [см. также (37,22)]

$$f(\xi_+, \xi_-) = \frac{2\pi\xi_+}{(e^{2\pi\xi_+} - 1)} \cdot \frac{2\pi\xi_-}{(1 - e^{-2\pi\xi_-})}, \quad (39,18)$$

которая уничтожает симметрию выражения относительно энергий  $T_+$  и  $T_-$ . Это связано с тем обстоятельством, что электрон притягивается, а позитрон отталкивается ядром. Поэтому вероятность образования пары уменьшается для малых скоростей позитрона  $v_+$  и резко увеличивается для малых скоростей электрона  $v_-$ .

В ультррелятивистском случае ( $K_+ \gg k_0$ ,  $K_- \gg k_0$ ) мы находим после интегрирования по углам в равенстве (39,13) [см. также формулу (37,24) для тормозного испускания] следующее выражение для эффективного сечения:

$$d\sigma = 4Z^2r_0^2\alpha \frac{E_+^2 + E_-^2 + \frac{2}{3}E_+E_-}{\varepsilon^3} \left( \ln \frac{2E_+E_-}{\varepsilon mc^2} - \frac{1}{2} \right) dE_+. \quad (39,19)$$

Здесь энергия позитрона, электрона и  $\gamma$ -кванта

$$E_+ = c\hbar K_+ = c\hbar k_+, \quad E_- = c\hbar K_- = c\hbar k_-, \quad \varepsilon = c\hbar \kappa \quad (39,20)$$

связаны между собою соотношением

$$E_+ + E_- = \varepsilon. \quad (39,21)$$

Формула (39,19) симметрична относительно энергий электрона и позитрона. Множитель (39,18) в релятивистском случае даёт слишком малые поправки даже для сравнительно тяжёлых элементов.

Так же как и в случае тормозного испускания, формула (39,19) ограничена со стороны больших энергий падающих частиц условием пренебрежения экранированием кулоновского поля атома электронами, находящимися на внешней оболочке. Согласно формуле (37,26) это условие имеет вид:

$$\frac{E_+ E_-}{\varepsilon m c^2} \ll 137 Z^{-\frac{1}{3}}. \quad (39,22)$$

При полном экранировании, которое имеет место в случае очень больших энергий образовавшихся электрона и позитрона:

$$\frac{E_+ E_-}{\varepsilon m c^2} \gg 137^{-\frac{1}{3}}, \quad (39,23)$$

вместо (39,19) получаем формулу

$$d\sigma = 4Z^2 r_0^2 \alpha \left[ \frac{E_+^2 + E_-^2 + \frac{2}{3} E_+ E_-}{\varepsilon^2} \ln 183 Z^{-\frac{1}{3}} - \frac{1}{9} \frac{E_+ E_-}{\varepsilon^2} \right] \frac{dE}{\varepsilon}, \quad (39,24)$$

соответствующую формуле (37,28) для тормозного испускания.

Перейдём к обсуждению полученных результатов. Прежде всего рассмотрим распределение образующихся позитронов и электронов по углам. Как видно из выражения (39,13), при очень больших энергиях  $E_+$  и  $E_-$  ( $E_+ \gg mc^2$ ,  $E_- \gg mc^2$ ), т. е. в ультрарелятивистском случае, обе частицы вылетают по направлению движения

$\gamma$ -кванта. Телесный угол вылета обеих частиц имеет порядок  $\Omega \sim \frac{mc^2}{\epsilon}$ . С уменьшением энергии угловое распределение становится более равномерным.

Распределение образующихся электронов и позитронов по энергиям характеризуется формулами (39,16) (нерелятивистский случай), (39,19) (ультрарелятивистский слу-

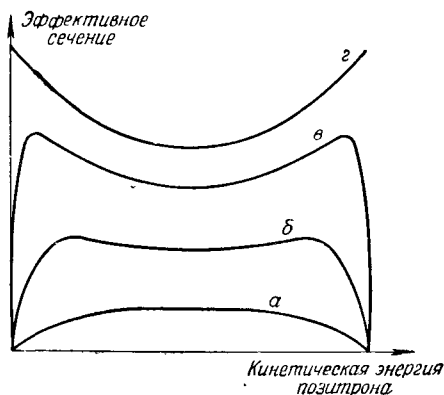


Рис. 9. Распределение пар по энергиям.

чай без учёта экранирования) и (39,24) (ультрарелятивистский случай с учётом полного экранирования).

Из этих формул видно, что при сравнительно малых энергиях  $\gamma$ -кванта (кривая *а* на рис. 9) эффективное сечение достигнет максимума, когда электрон и позитрон вылетают с одинаковыми энергиями. При дальнейшем увеличении энергии  $\gamma$ -квантов кривая становится более плоской (кривая *б*) и в конечном счёте переходит в кривую с двумя максимумами (кривая *в*), которые постепенно приближаются к краям кривой (кривая *г*), что соответствует случаю, когда почти вся энергия приходится на одну частицу.

Наличие симметрии относительно энергий вылетевших электрона и позитрона связано с пренебрежением кулоновскими силами, действующими между ядром и частицами пары. При учёте последних минимумы кривых

сместились бы вправо, так как позитрон отталкивается, а электрон притягивается к ядру.

Интегрируя приведённые выражения по всем энергиям позитрона, находим эффективное сечение для образования пар: в релятивистском случае

$$\sigma = \pi Z^2 \alpha r_0^2 \left( \frac{\epsilon - 2mc^2}{mc^2} \right)^3; \quad (39,25)$$

в ультрарелятивистском случае без учёта экранирования

$$\sigma = \alpha Z^2 r_0^2 \left( \frac{28}{9} \ln \frac{2\epsilon}{mc^2} - \frac{218}{27} \right); \quad (39,26)$$

в ультрарелятивистском случае с учётом полного экранирования

$$\sigma = \alpha Z^2 r_0^2 \left( \frac{28}{9} \ln 183Z^{-\frac{1}{3}} - \frac{2}{27} \right). \quad (39,27)$$

В тех случаях, когда экранирование неполное, интегрирование можно произвести лишь численным методом.

Из приведённых формул видно, что эффективное сечение образования пары в нерелятивистском случае мало благодаря наличию множителя  $\left( \frac{\epsilon - 2mc^2}{mc^2} \right)^3$ . С увеличением энергии  $\epsilon$  эффективное сечение  $\sigma$  возрастает по логарифмическому закону (ультрарелятивистский случай без учёта экранирования); однако при очень больших значениях  $\epsilon$ , когда следует учитывать полное экранирование, изменяется также закон возрастания эффективного сечения; оно стремится к некоторому постоянному значению.

Средняя длина пути, на котором образуется одна пара (электрон — позитрон), равна

$$l_p = \frac{1}{N_a \sigma},$$

причём в случае больших энергий для величины  $\sigma$  мы должны подставить выражение (39,27). Тогда мы найдём, что величина  $l$  будет связана с радиационной длиной  $l_p$  [см. (37,28a)] соотношением

$$l_p = \frac{9}{7} l.$$

Уменьшение числа  $\gamma$ -квантов будет происходить по закону:

$$\frac{dn}{n} = -\frac{dx}{l_p},$$

т. е.

$$n = n_0 e^{-\frac{x}{l_p}}. \quad (39,27a)$$

Эта формула аналогична формуле (37,28б) для радиационных потерь.

Формула (39,27a) не учитывает возможности образования новых  $\gamma$ -квантов за счёт тормозного излучения электронов и позитронов. Более подробно этот вопрос будет рассмотрен нами в § 41.

Мы можем получить выражение для коэффициентов поглощения  $\gamma$ -лучей, если умножим соответствующие выражения для эффективного сечения  $\sigma$  на число  $N_a$  атомов (или ядер) в  $1 \text{ см}^3$ . При прохождении сквозь вещество  $\gamma$ -квантов последние поглощаются благодаря фотоэффекту (появляются фотоэлектроны), эффекту Комптона (появляются электроны отдачи) и образованию пар (появляется одинаковое число электронов и позитронов).

Для ультрарелятивистского случая в отсутствие экранирования для коэффициентов поглощения  $\gamma$ -квантов с энергией  $\varepsilon$  получим следующее выражение поглощения при фотоэффекте [см. (34,43)]:

$$\tau_f = 5\pi r_0^2 \alpha^4 Z^5 \frac{mc^2}{\varepsilon} N_a;$$

поглощение при комптоновском смещении [см. (34,40)]

$$\tau_c = \pi r_0^2 \frac{mc^2}{\varepsilon} N_a Z \left( \ln \frac{2\varepsilon}{mc^2} + \frac{1}{2} \right);$$

поглощение при образовании пар [см. (39,26)]

$$\tau_p = \alpha Z^2 r_0^2 N_a \left( \frac{28}{9} \ln \frac{2\varepsilon}{mc^2} - \frac{248}{27} \right).$$

Обозначим соответственно через  $n_+$  и  $n_-$  число образовавшихся позитронов и электронов и примем во внимание, что число фотоэлектронов и комптоновских

электронов равно  $n_- - n_+$ , а число образовавшихся пар равно  $n_+$ . Тогда находим соотношение для коэффициентов поглощения:

$$\frac{n_+}{n_- - n_+} = \frac{\tau_p}{\tau_f + \tau_c}. \quad (39,28)$$

Определяя величины, находящиеся в левой части равенства (39,28) из экспериментальных наблюдений и подставляя в правую часть теоретические значения для  $\tau$ , мы получаем хорошее совпадение теоретических формул с экспериментальными данными.

Сравнение коэффициентов поглощения  $\gamma$ -квантов при фотоэффекте и эффекте Комптона было произведено нами в § 34. Там было показано, что в нерелятивистском случае поглощение  $\gamma$ -квантов происходит исключительно благодаря фотоэффекту.

В релятивистском случае имеется некоторая критическая энергия для  $\gamma$ -квантов [см. соотношение (34,45)], выше которой комptonовское поглощение становится сильнее, чем поглощение за счёт фотоэффекта.

Как видно из приведённых формул, при малых энергиях вероятность образования пар будет меньше, чем комptonовское рассеяние. Когда энергия  $\gamma$ -квантов становится больше некоторого критического значения, образование пар становится более вероятным. Критическая энергия при прохождении  $\gamma$ -квантов сквозь свинец равна приблизительно  $10mc^2$ . Для более лёгких элементов она несколько больше. При очень высоких энергиях поглощение  $\gamma$ -квантов происходит главным образом за счёт образования пар; комptonовским рассеянием и, тем более, фотоэффектом можно при этом пренебречь.

Заметим, что  $\gamma$ -квант, испущенный ядром, может образовать пару в поле того же ядра. Этот процесс представляет собой новый вид внутренней конверсии, в котором выбивание с помощью  $\gamma$ -кванта электронов из  $K$ -слоя заменяется образованием пары.

Пара может образоваться также непосредственно при взаимодействии заряженных частиц друг с другом. Однако вероятность этого процесса при наблюдаемых энергиях слишком мала.



§ 40. Аннигиляция позитронов

Согласно методу теории «дырок», аннигиляцию, т. е. превращение позитрона и электрона в  $\gamma$ -кванты следует рассматривать как переход электрона с положительного уровня энергии на отрицательный. Высвободившаяся при этом энергия передаётся  $\gamma$ -квантам.

Прежде всего заметим, что вероятность однофотонной аннигиляции свободных частиц равняется нулю, так как один  $\gamma$ -квант не сможет принять на себя и энергию и импульс обеих частиц. Поэтому при аннигиляции свободных частиц должно появиться минимум два  $\gamma$ -кванта (рис. 10):

$$e_+ + e_- = \gamma + \gamma'.$$

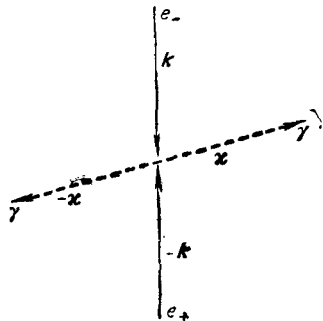


Рис. 10. Аннигиляция пары.

Однако заметим, что однофотонная аннигиляция возможна при наличии внешнего электромагнитного поля (например, электростатического поля ядра), когда часть импульса пары берёт на себя ядро. Вероятность однофотонной аннигиляции всё же значительно меньше двухфотонной даже в том случае, когда аннигилирующий электрон сильно связан с ядром. Поэтому в наших дальнейших расчётах мы ограничимся рассмотрением двухфотонной аннигиляции свободных частиц.

**а) Двухфотонная аннигиляция.** Двухфотонная аннигиляция является процессом второго порядка, при котором испускаются два фотона.

Для вычисления вероятности двухфотонной аннигиляции мы можем воспользоваться формулой (34,12а)

$$D\psi(N+2) = U^+ D^{-1} U^+ \psi(N), \tag{40,1}$$

где

$$U^+ = \frac{e}{L^{3/2}} \sum_x \sqrt{\frac{2\pi c \hbar}{x}} (\alpha \alpha^+) e^{icxL - ixr}, \tag{40,2}$$

а число фотонов в начальный момент равняется нулю ( $iN = 0$ ).

Все расчёты проще всего провести в системе координат с покоящимся центром инерции (система центра инерции). Тогда импульсы ( $\hbar\mathbf{k}_-$ ,  $\hbar\mathbf{k}_+$ ) электрона и позитрона равны по величине, но направлены в противоположные стороны:

$$\mathbf{k}_- = -\mathbf{k}_+ = \mathbf{k}. \quad (40,3)$$

Функция  $\psi(N)$  описывает начальное состояние электрона с положительной энергией:

$$\psi(N) = \psi_0 = \frac{1}{L^{3/2}} b(1, s, \mathbf{k}) e^{-icKt + i\mathbf{k}r} f(N), \quad (40,4)$$

причём функция от числа частиц имеет вид

$$f(N) = \text{Pr}_{N0}. \quad (40,5)$$

Конечное состояние электрона соответствует отрицательной энергии и импульсу  $-\mathbf{k}_+ = \mathbf{k}$ :

$$\psi(N+2) = \psi_2 = \frac{C(t)}{L^{3/2}} b(-1, s', \mathbf{k}) e^{icKt + i\mathbf{k}r} f(N+2). \quad (40,6)$$

Коэффициент  $C(t)$  в начальный момент равняется нулю:

$$C(0) = 0. \quad (40,7)$$

Отсюда, принимая во внимание правило (26,41) деления на оператор, получаем:

$$D\psi_2 = W^+\psi_0, \quad (40,8)$$

где

$$\begin{aligned} W^+ &= (\psi_0)^{-1} U^+ D^{-1} U^+ \psi_0 = \\ &= \frac{2\pi e^2}{L^3} \sum_{\mathbf{x}, \mathbf{x}'} \frac{1}{V_{\mathbf{x}\mathbf{x}'}} (\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}') \frac{[(K-\mathbf{x}) + (\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{k}-\mathbf{x})) + \rho_3 k_0]}{(K-\mathbf{x})^2 - (\mathbf{k}-\mathbf{x})^2 - k_0^2} \times \\ &\quad \times (\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}') e^{i\mathbf{c}t(\mathbf{x}+\mathbf{x}') - i(\mathbf{x}+\mathbf{x}')r}. \end{aligned} \quad (40,9)$$

Симметризуя последнее выражение относительно импульсов фотонов, находим:

$$W^+ = \sum_{\mathbf{x}, \mathbf{x}'} W^+(\mathbf{x}, \mathbf{x}') e^{ict(\mathbf{x}+\mathbf{x}')-i(\mathbf{x}+\mathbf{x}')r}, \quad (40,10)$$

где

$$W^+(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \frac{\pi e^2}{L^3} \frac{1}{\sqrt{\mathbf{x}\mathbf{x}'}} \left\{ \frac{(\alpha\alpha'^+) [K - \mathbf{x} + (\alpha(k - \mathbf{x})) + \rho_3 k_0] (\alpha\alpha^+)}{(K - \mathbf{x})^2 - (k - \mathbf{x})^2 - k_0^2} + \right. \\ \left. + \frac{(\alpha\alpha^+) [K - \mathbf{x}' + (\alpha(k - \mathbf{x}')) + \rho_3 k_0] (\alpha\alpha'^+)}{(K - \mathbf{x}')^2 - (k - \mathbf{x}')^2 - k_0^2} \right\}. \quad (40,11)$$

Подставляя последние соотношения в уравнение (40,8) получаем следующее уравнение для определения коэффициента  $C$ :

$$-\frac{\hbar}{i} \dot{C} = \sum_{\mathbf{x}, \mathbf{x}'} b'^+ W^+(\mathbf{x}, \mathbf{x}') b e^{-ict(2K - \mathbf{x} - \mathbf{x}')\delta_{\mathbf{x}, -\mathbf{x}'}} \quad (40,12)$$

где

$$b'^+ = b^+(-1, s', k), \quad b = b(1, s, k). \quad (40,13)$$

Из (40,12) автоматически следует закон сохранения импульса:

$$\mathbf{x}' = -\mathbf{x}. \quad (40,14)$$

Иначе говоря, конечный импульс образовавшихся двух  $\gamma$ -квантов, так же как и начальный (позитрона и электрона), равняется нулю.

Для коэффициента  $C$  имеем:

$$C = -\frac{i}{\hbar} \sum_{\mathbf{x}} b'^+ W^+(\mathbf{x}, -\mathbf{x}) b \int_0^t e^{-ict(2K - 2\mathbf{x})} dt.$$

Аналогичным способом находим для сопряжённой функции:

$$C^+ = \frac{i}{\hbar} \sum_{\mathbf{x}'} b^+ W(\mathbf{x}', -\mathbf{x}') b' \int_0^t e^{ict(2K - 2\mathbf{x})} dt.$$

При вычислении вероятности аннигиляции мы должны учесть соотношения между амплитудами,

$$a_s(\mathbf{x}) a_{s'}^+(\mathbf{x}') = (\delta_{ss'} - \kappa_s^0 \kappa_{s'}^0) \delta_{\mathbf{x}\mathbf{x}'},$$

которые должны иметь место при отсутствии в начальный момент фотонов. Поэтому в квадратичной комбинации, содержащей величину

$$R^+ R = \sum_{\mathbf{x}'} b^+ W(\mathbf{x}', -\mathbf{x}') b' b'^+ W(\mathbf{x}, -\mathbf{x}) b,$$

останутся два члена, для которых  $\mathbf{x}' = \mathbf{x}$  и  $\mathbf{x}' = -\mathbf{x}$ , т. е.

$$R^+ R = b^+ [W(\mathbf{x}, -\mathbf{x}) + W(-\mathbf{x}, \mathbf{x}')] b' b'^+ W^+(\mathbf{x}, -\mathbf{x}) b.$$

Принимая во внимание, что

$$W(\mathbf{x}, -\mathbf{x}) = W(-\mathbf{x}, \mathbf{x}),$$

находим:

$$R^+ R = 2b^+ W(\mathbf{x}, -\mathbf{x}) b' b'^+ W(\mathbf{x}, -\mathbf{x}) b. \quad (40,15)$$

откуда для вероятности аннигиляции получаем следующее выражение [см. также формулу (32,7)]:

$$\omega = \frac{2\pi}{c\hbar^2} \sum_{\mathbf{x}} R^+ R \delta(2\mathbf{x} - 2\mathbf{K}).$$

Переходя в последнем выражении к непрерывному спектру и интегрируя затем по величине  $\mathbf{x}$  с учётом формулы

$$\int_0^\infty f(x) \delta(2x - 2K) dx = \left. \frac{f(x)}{\partial(2x - 2K)} \right|_{x=K} = \frac{1}{2} f(K),$$

получаем:

$$\omega = \frac{e^4}{4c\hbar^2 L^3} \oint S^+ S \frac{d\Omega}{K^2}, \quad (40,16)$$

где

$$S = b'^+ \left\{ \frac{(\alpha\alpha'^+) \left[ (\alpha x^0) - \frac{(\alpha k)}{K} - \rho_3 \frac{k_0}{K} \right] (\alpha\alpha^+)}{2 \left( 1 - \frac{(kx^0)}{K} \right)} - \frac{(\alpha\alpha^+) \left[ (\alpha x^0) + \frac{(\alpha k)}{K} + \rho_3 \frac{k_0}{K} \right] (\alpha\alpha'^+)}{2 \left( 1 + \frac{(kx^0)}{K} \right)} \right\} b, \quad (40,17)$$

$$x^0 = \frac{x}{c}, \quad \alpha^+ = \alpha^+(\mathbf{x}), \quad \alpha'^+ = \alpha^+(-\mathbf{x}),$$

а  $d\Omega$  — телесный угол вектора  $\mathbf{x}$ .

Для того чтобы получить эффективное сечение, мы должны выражение (40,16) поделить на общее число частиц  $N$  (электронов и позитронов), падающих в единицу времени на единицу поверхности, расположенную перпендикулярно к направлению их движения. Величина  $N$  равна

$$N = \frac{|v_+| + |v_-|}{L^3} = \frac{2kc}{KL^3}. \quad (40,18)$$

Поэтому

$$\sigma = \frac{\omega}{N} = \frac{e^4}{8c^2 h^2 k} \oint S^+ S \frac{d\Omega}{K}. \quad (40,19)$$

Как будет показано ниже, вероятность аннигиляции достигает наибольшего значения в нерелятивистском приближении ( $k \ll k_0$ ).

Этот случай разберём более подробно.

Положим в формулах (40,17) и (40,18)  $K \approx k_0$ ,  $\frac{k}{K} \approx 0$  и оставим лишь члены, пропорциональные матрице  $\rho_1$ , так как в § 28 было показано, что при переходе электрона из состояния с положительной энергией в состояние с отрицательной энергией матричные элементы, пропорциональные матрицам  $I$  и  $\rho_3$  имеют порядок релятивистских поправок. Тогда для матричного элемента  $S$  находим:

$$S = b'^+ \frac{(\alpha x^0) [(\alpha\alpha^+) (\alpha\alpha'^+) - (\alpha\alpha'^+) (\alpha\alpha^+)]}{2} b = i(x^0 [\alpha^+ \alpha'^+]) b'^+ \rho_1 b, \quad (40,20)$$

откуда

$$S^+ S = 2b^+ \rho_1 b' b'^+ \rho_1 b = \frac{1}{2} \rho_{11} \sigma_{44} = 1 + ss'. \quad (40,20a)$$

При выводе последних соотношений мы приняли во внимание равенства:

$$\begin{aligned} (\alpha^0 a^+) = (\alpha^0 a'^+) = 0, \quad (Aa)(Ba^+) = (AB) - (A\alpha^0)(B\alpha^0), \\ (\alpha A)(\alpha B) = (AB) + i(\sigma[AB]), \end{aligned} \quad (40,21)$$

а также соотношения (21,15), (21,17) и (21,18).

Таким образом, находим выражение для эффективного сечения:

$$\sigma = \frac{\pi c r_0^2 (1 + ss')}{2|v_+|}, \quad (40,22)$$

где  $|v_+| = |v_-|$  — скорость позитрона (и электрона) в системе центра инерции.

Как было отмечено в § 34, эффективное сечение остаётся инвариантным при переходе к системе координат, относительно которой первоначальный электрон покоится. Однако в этом случае скорость  $v_+$  позитрона в системе центра инерции лучше заменить скоростью  $v = 2v_+$  позитрона относительно электрона. Тогда находим:

$$\sigma = \pi r_0^2 \frac{c}{v} (1 + ss'). \quad (40,23)$$

Вычисляя эффективное сечение в общем случае, т. е. не делая перехода к нерелятивистскому приближению, получаем с помощью формул (40,17) и (40,19) и правил вычисления матричных элементов (см. § 21)<sup>1)</sup>:

$$\begin{aligned} \sigma = \frac{r_0^2 k_0^2}{8kK} \int \left\{ \left( \frac{K^2 + k^2(1 + \sin^2 \vartheta)}{K^2 - k^2 \cos^2 \vartheta} - \frac{2k^4 \sin^4 \vartheta}{(K^2 - k^2 \cos^2 \vartheta)^2} \right) (1 + ss') - \right. \\ \left. - \frac{2ss' k^2 K^2 (1 - \cos^4 \vartheta)}{(K^2 - k^2 \cos^2 \vartheta)^2} \right\} d\Omega. \end{aligned} \quad (40,24)$$

Интегрируя последнее выражение по сферическим углам, найдём после усреднения по спиновым состояниям  $s$  и  $s'$

<sup>1)</sup> А. И. Мухтаров, Вестник МГУ, № 3, 59 (1949).

известную формулу, описывающую процесс аннигиляции <sup>1)</sup>:

$$\begin{aligned} \bar{\sigma} &= \frac{1}{4} \sum_{s, s'} \sigma = \\ &= \frac{\pi r_0^2}{1+\gamma} \left[ \frac{\gamma^2 + 4\gamma + 1}{\gamma^2 - 1} \ln(\gamma + \sqrt{\gamma^2 - 1}) - \frac{\gamma + 3}{\sqrt{\gamma^2 - 1}} \right], \end{aligned} \quad (40,25)$$

где  $\gamma = \frac{E}{mc^2}$ , а  $E$  является энергией позитрона в системе координат, относительно которой покоится электрон.

Отсюда в нерелятивистском случае ( $\gamma \ll 1$ ) получаем выражение

$$\bar{\sigma} = \frac{1}{4} \sum_{s, s'} \sigma = \pi r_0^2 \frac{c}{v}, \quad (40,26)$$

которое легко получить также непосредственно с помощью формулы (40,23).

В нерелятивистском случае энергия  $\epsilon$  образовавшихся квантов приблизительно равна собственной энергии электрона ( $\epsilon = mc^2$ ) и, как видно из формулы (40,20), интенсивность излучения не зависит от направления вылета квантов.

В ультрарелятивистском случае в системе центра инерции энергии обоих  $\gamma$ -квантов будут равны энергии электрона (или позитрона) ( $\epsilon = E_+ = cp_+$ ), и кванты испускаются, как видно из формулы (40,24), главным образом вперёд и назад ( $\cos \vartheta \approx \pm 1$ ). При переходе к системе координат, в которой покоится электрон,  $\gamma$ -квант, испущенный вперёд, принимает на себя почти всю энергию позитрона, другой же  $\gamma$ -квант получит энергию порядка  $mc^2$ .

С увеличением энергии эффективное сечение постепенно уменьшается и становится в ультрарелятивистском случае ( $\gamma \gg 1$ ) равным:

$$\bar{\sigma} = \pi r_0^2 \frac{mc^2}{E} \left( \ln \frac{2E}{mc^2} - 1 \right). \quad (40,26a)$$

<sup>1)</sup> P. A. M. Dirac, Proc. Camb. Phil. Soc. 26, 361 (1930); см. также Н. Е. Тамм, Zs. f. Phys. 62, 545 (1930).

Таким образом, аннигилируются преимущественно медленные позитроны. При  $v \rightarrow 0$  эффективное сечение  $\bar{\sigma}$  обращается в бесконечность. Однако вероятность аннигиляции стремится к конечному пределу. В самом деле, обозначая через  $N$  число атомов в единице объёма, мы находим следующее значение вероятности аннигиляции, рассчитанной на единицу времени:

$$\omega_1 = \bar{\sigma}ZNv = ZN\pi r_0^2 \text{ сек}^{-1}. \quad (40,27)$$

Отсюда легко получить, что в присутствии сравнительно тяжёлых элементов время жизни медленного позитрона по порядку величины примерно равно

$$\tau = \frac{1}{\omega_1} = 10^{-10} \text{ сек.}$$

С экспериментальной стороны двухфотонная аннигиляция хорошо изучена. В частности, было показано, что при аннигиляции медленных позитронов счётчики  $\gamma$ -квантов фиксируют одновременный вылет двух фотонов в противоположных направлениях с энергией порядка  $mc^2$ .

Необходимо заметить, что ядра атомов отталкивают позитроны, благодаря чему электроны глубоких атомных оболочек не могут участвовать в процессах аннигиляции. Поэтому в формулу (40,27) мы должны подставить некоторое эффективное число электронов  $N_{\text{эфф}} < N$ , в котором не учитываются электроны глубоких внутренних оболочек<sup>1)</sup>. Тогда для времени жизни медленного позитрона мы получим несколько большее значение ( $10^{-8}$  или  $10^{-9}$  сек.).

Наконец, следует ещё подчеркнуть, что при малых скоростях движения позитрона условие (38,6) возможности использования плоских волн не будет иметь места, и поэтому в выражение для эффективного сечения необходимо ввести ещё функции, учитывающие кулоновское притяжение между электронами и позитронами. В связи с этим следует отметить, что в недавних экспериментах<sup>2)</sup>

<sup>1)</sup> И. Померанчук, ЖЭТФ 19, 183 (1949); см. также E. Fermi and G. Uhlenbeck, Phys. Rev. 44, 510 (1933).

<sup>2)</sup> J. W. Shearer and M. Deutsch, Phys. Rev. 76, 462 (1949).



с аннигиляцией позитронов в некоторых газах, было найдено эффективное сечение, в 2—3 раза большее, чем вычисленное по формуле (40,26). Авторы считают, что увеличение сечения связано с кулоновским притяжением.

**б) Зависимость вероятности аннигиляции от ориентации спинов.** Как видно из формулы (40,23), эффективное сечение сильно зависит от ориентации проекции спина электрона ( $s_- = s$ ) и позитрона ( $s_+ = -s'$ ) на направление движения электрона.

Состояние, в котором спины электрона и позитрона параллельны друг другу, называется ортосостоянием (симметричное состояние). В ортосостоянии спины могут быть направлены или по движению ( $s_- = s_+ = 1$ ,  $ss' = -1$ ), или против движения ( $s_- = s_+ = -1$ ,  $ss' = -1$ ), или перпендикулярно к движению электрона. Состояние, в котором спин электрона антипараллелен спину позитрона, называется парасостоянием (антисимметричное состояние).

Полагая в формуле (40,23)  $ss' = -1$ , найдём, что вероятность двухфотонной аннигиляции ортосостояния равняется нулю:

$$\sigma^s = 0. \quad (40,28)$$

Принимая во внимание, что среднее значение для эффективного сечения равно

$$\bar{\sigma} = \frac{3\sigma^s + \sigma^A}{4}, \quad (40,29)$$

найдем эффективное сечение для аннигиляции парасостояния:

$$\sigma^A = 4\bar{\sigma} = 4\pi r_0^2 \frac{c}{v}. \quad (40,30)$$

Покажем, что мы можем непосредственно вычислить эффективные сечения как для аннигиляции третьего ортосостояния (спины направлены перпендикулярно к движению), так и для аннигиляции парасостояния. С этой целью мы явно введём спиновые амплитуды в формулу (40,23). Тогда для трёх ортосостояний будем

иметь:

$$\begin{aligned}\sigma_1^s &= \frac{2\pi r_0^2 c}{v} b^+(1) \rho_1 \hat{b}'(1) \hat{b}'^+(1) \rho_1 b(1), \\ \sigma_{-1}^s &= \frac{2\pi r_0^2 c}{v} b^+(-1) \rho_1 \hat{b}'(-1) \hat{b}'^+(-1) \rho_1 b(-1), \\ \sigma_0^s &= \frac{2\pi r_0^2 c}{v} \frac{1}{\sqrt{2}} (b^+(1) \rho_1 \hat{b}'(-1) + b^+(-1) \rho_1 \hat{b}'(1)) \times \\ &\quad \times \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{b}'^+(-1) \rho_1 b(1) + \hat{b}'^+(1) \rho_1 b(-1)), \quad (40,31)\end{aligned}$$

причём, как было указано в § 23, п. д), произведение амплитуд смешанных состояний  $(b^+(-1) b(1))$  не равно нулю. Поскольку проекция спина позитрона на направление движения электрона  $s_+$  равна  $-s'$  ( $s_+ = -s'$ ), мы ввели для позитрона новые амплитуды:

$$\hat{b}'(s_+) = b'(-s).$$

Аналогичным способом для парасостояния мы можем написать:

$$\begin{aligned}\sigma^A &= \frac{2\pi r_0^2 c}{v} \frac{1}{\sqrt{2}} (b^+(1) \rho_1 \hat{b}'(-1) - b^+(-1) \rho_1 \hat{b}'(1)) \times \\ &\quad \times \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{b}'^+(-1) \rho_1 b(1) - \hat{b}'^+(1) \rho_1 b(-1)). \quad (40,32)\end{aligned}$$

Не нарушая общности задачи, мы можем предположить, что электрон и позитрон движутся параллельно оси  $z$ . Тогда согласно (20,25) имеем:

$$b(s) = \rho_3 \sigma_1 b(-s) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{1+s} f(\varepsilon) \\ \sqrt{1-s} f(\varepsilon) \\ \varepsilon \sqrt{1+s} f(-\varepsilon) \\ -\varepsilon \sqrt{1-s} f(-\varepsilon) \end{pmatrix}. \quad (40,33)$$

С помощью (40,33) легко показать:

$$\begin{aligned}b^+(-1) \rho_1 \hat{b}'(1) &= b^+(1) \rho_3 \sigma_1 \rho_1 \rho_3 \sigma_1 \hat{b}'(-1) = \\ &= -b^+(1) \rho_1 \hat{b}'(-1), \\ \hat{b}'^+(1) \rho_1 b(-1) &= -\hat{b}'^+(-1) \rho_1 b(1), \quad (40,34)\end{aligned}$$

откуда, принимая во внимание ещё соотношение (40,20а), находим:

$$b^+(s) \rho_1 \hat{b}'(s') \hat{b}'^+(s') \rho_1 b(s) = \frac{1-ss'}{2}, \quad (40,35)$$

что вновь подтверждает результат (40,28) и (40,30)

$$\sigma_1^s = \sigma_{-1}^s = \sigma_0^s = 0, \quad (40,36)$$

$$\sigma^A = 4\bar{\sigma}. \quad (40,37)$$

**в) Трёхфотонная аннигиляция<sup>1)</sup>.** При рассмотрении трёхфотонной аннигиляции электрона и позитрона запишем уравнение Дирака в форме, позволяющей непосредственно исследовать процессы третьего порядка:

$$D\psi(N+3) = U^+ D^{-1} U^+ D^{-1} U^+ \psi(N). \quad (40,38)$$

Мы упростим наши вычисления, если в энергии взаимодействия  $U^+$  амплитуды поля фотонов представим как сумму состояний с различной круговой поляризацией (см. § 14):

$$U^+ = \frac{e}{L^{3/2}} \sum_{l=\pm 1} \sum_{\mathbf{x}} \sqrt{\frac{2\pi c \hbar}{\kappa}} (\boldsymbol{\alpha} \boldsymbol{\alpha}_l^+) g_l^+ e^{i\kappa l t - i\mathbf{x}r}, \quad (40,39)$$

где

$$\boldsymbol{\alpha}_l^+ = \frac{1}{\sqrt{2}} (\boldsymbol{\beta} - il [\boldsymbol{\kappa}^0 \boldsymbol{\beta}]); \quad (40,40)$$

$\boldsymbol{\kappa}^0$  и  $\boldsymbol{\beta}$  являются единичными векторами, направленными соответственно по волновому вектору  $\boldsymbol{\kappa}$  и перпендикулярно к нему. Ради простоты значков у амплитуд  $\boldsymbol{\alpha}_l^+$

<sup>1)</sup> Д. Д. Иваненко и А. А. Соколов, ДАН 58, 1329 (1947); Л. Д. Ландау, ДАН 60, 207 (1948); И. Я. Померанчук, ДАН 60, 213 (1948); Е. М. Лифшиц, ДАН 60, 211 (1948); Д. Д. Иваненко и А. А. Соколов, ДАН 61, 51 (1948); А. А. Соколов и А. И. Мухтаров, Вестник МГУ № 8, 63 (1948); А. И. Мухтаров, Влияние спиновых состояний на распад атома позитрония (диссертация), физический факультет МГУ (1950); А. Ore, J. Powell, Phys. Rev. 75, 1696 (1949); Л. Д. Ландау и В. Б. Берестецкий, ЖЭТФ 19, 673 (1949); В. Б. Берестецкий, ЖЭТФ 19, 1130 (1949).

в промежуточных вычислениях мы писать не будем:

$$a_l^\dagger \rightarrow a. \quad (40,40 \text{ а})$$

Кроме того, учтём, что при отсутствии в начальный момент фотонов имеют место соотношения

$$g_l g_l^{\dagger} = \delta_{ll'} \delta_{\mathbf{x}\mathbf{x}'}. \quad (40,41)$$

Вычисления будем производить в системе координат центра инерции в предположении, что электрон и позитрон движутся с малыми скоростями, так что можно положить

$$k_- = -k_+ = k \approx 0. \quad (40,42)$$

Для начальной и конечной волновой функций имеем:

$$\begin{aligned} \psi_0 &= \psi(N) = \frac{1}{L^{3/2}} b e^{-ick_0 t} f(N), \\ \psi_3 &= \psi(N+3) = \frac{C(t)}{L^{3/2}} b' e^{ick_0 t} f(N+3), \end{aligned} \quad (40,43)$$

где амплитуды  $b = b(1, s, \mathbf{k})$  и  $b' = b(-1, s', \mathbf{k})$  характеризуют спиновые функции электрона и позитрона.

Подставляя (40,39) в (40,38) и принимая во внимание ещё равенство (40,43), получаем уравнение для определения коэффициентов  $C$ :

$$-\frac{\hbar}{i} \dot{C} = \sum_{\mathbf{x}, \mathbf{x}', \mathbf{x}''} \sum_{l, l', l''} b'^{\dagger} W(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \mathbf{x}'') b e^{-ict(2k_0 - \mathbf{x} - \mathbf{x}' - \mathbf{x}'')} \times \\ \times \delta_{\mathbf{x} + \mathbf{x}' + \mathbf{x}'', 0}, \quad (40,44)$$

где

$$\begin{aligned} W^+(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \mathbf{x}'') &= \left( \sqrt{\frac{2\pi c \hbar}{L^3}} \right)^3 \frac{e^3}{\sqrt{\mathbf{x} \mathbf{x}' \mathbf{x}''}} \times \\ &\times \frac{1}{4c^2 \hbar^2 k_0^2} F(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \mathbf{x}'') g_l^\dagger g_{l'}^{\dagger} g_{l''}^{\dagger}, \end{aligned} \quad (40,45)$$

$$\begin{aligned} F(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \mathbf{x}'') &= 4c^2 \hbar^2 k_0^2 e^{ict(k_0 - \mathbf{x} - \mathbf{x}') + i\mathbf{r}(\mathbf{x} + \mathbf{x}')} \times \\ &\times (\mathbf{a} \mathbf{a}'') D^{-1}(\mathbf{a} \mathbf{a}') e^{i\mathbf{x}\mathbf{x}'l - i\mathbf{x}'\mathbf{r}} D^{-1}(\mathbf{a} \mathbf{a}) e^{i\mathbf{x}\mathbf{x}l - i\mathbf{x}\mathbf{r}} e^{-ick_0 t}, \end{aligned} \quad (40,46)$$

а  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{x}'$  и  $\mathbf{x}''$  являются волновыми векторами трёх появляющихся фотонов.

С помощью правила (26,41) деления на оператор, учёта законов сохранения энергии и импульса

$$\begin{aligned} \kappa + \kappa' + \kappa'' &= 2k_0, \\ \mathbf{x} + \mathbf{x}' + \mathbf{x}'' &= 0 \end{aligned} \quad (40,47)$$

и уравнений, которым подчиняются амплитуды  $b$  и  $b'^+$ ,

$$\begin{aligned} (k_0 - k_0 \rho_3) b &= 0, \\ b'^+ (k_0 + k_0 \rho_3) &= 0, \end{aligned} \quad (40,48)$$

получаем:

$$\begin{aligned} F(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \mathbf{x}'') &= (\boldsymbol{\alpha} \mathbf{a}'') (1 + (\boldsymbol{\alpha} \mathbf{x}''^0)) (\boldsymbol{\alpha} \mathbf{a}') (1 + (\boldsymbol{\alpha} \mathbf{x}'^0)) (\boldsymbol{\alpha} \mathbf{a}) = \\ &= \rho_1 (\boldsymbol{\sigma} \mathbf{a}'') (\boldsymbol{\sigma} \mathbf{a}') (\boldsymbol{\sigma} \mathbf{a}) + \rho_1 (\boldsymbol{\sigma} \mathbf{a}'') (\boldsymbol{\sigma} \mathbf{x}''^0) (\boldsymbol{\sigma} \mathbf{a}') (\boldsymbol{\sigma} \mathbf{x}'^0) (\boldsymbol{\sigma} \mathbf{a}). \end{aligned} \quad (40,49)$$

В последнем выражении мы оставили лишь члены, пропорциональные матрице  $\rho_1$ , поскольку матричные элементы, не зависящие от  $\rho_1$ , в нерелятивистском приближении исчезают.

Воспользовавшись соотношениями

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{\sigma} \mathbf{A}) (\boldsymbol{\sigma} \mathbf{B}) &= (\mathbf{A} \mathbf{B}) + i (\boldsymbol{\sigma} [\mathbf{A} \mathbf{B}]), \\ (\mathbf{x}^0 \mathbf{a}) &= 0, \quad [\mathbf{x}^0 \mathbf{a}] = i l \mathbf{a}, \end{aligned}$$

имеем:

$$\begin{aligned} F(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \mathbf{x}'') &= \\ &= (1 - ll'') \rho_1 \{ (\boldsymbol{\sigma} (\mathbf{a} (\mathbf{a}' \mathbf{a}'') + \mathbf{a}'' (\mathbf{a} \mathbf{a}') - \mathbf{a}' (\mathbf{a} \mathbf{a}'')) + \\ &\quad + i (\mathbf{a}' [\mathbf{a} \mathbf{a}'']) \}. \end{aligned}$$

Переставляя между собою векторы  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{x}'$  и  $\mathbf{x}''$ , которые входят в тройную сумму на равных основаниях, мы можем симметризовать выражение  $F(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \mathbf{x}'')$  относительно этих векторов:

$$\begin{aligned} \bar{F} &= \frac{1}{6} [F(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \mathbf{x}'') + F(\mathbf{x}', \mathbf{x}'', \mathbf{x}) + F(\mathbf{x}, \mathbf{x}'', \mathbf{x}') + \\ &\quad + F(\mathbf{x}', \mathbf{x}, \mathbf{x}'') + F(\mathbf{x}'', \mathbf{x}, \mathbf{x}') + F(\mathbf{x}'', \mathbf{x}', \mathbf{x})]. \end{aligned}$$

Тогда для  $\bar{F}$  находим:

$$\bar{F} = \rho_1(\sigma \mathbf{B}). \quad (40,50)$$

Здесь

$$\mathbf{B} = \frac{1}{3} f \mathbf{a} (\mathbf{a}' \mathbf{a}'') + \frac{1}{3} f' \mathbf{a}' (\mathbf{a} \mathbf{a}'') + \frac{1}{3} f'' \mathbf{a}'' (\mathbf{a}' \mathbf{a}), \quad (40,51)$$

а величины

$$\begin{aligned} f &= 1 + l'l'' - ll' - ll'', & f' &= 1 + ll'' - l'l - l'l'', \\ & & f'' &= 1 + ll' - l'l - l'l'', \end{aligned} \quad (40,52)$$

характеризующие поляризацию фотонов, обладают следующим свойством:

$$\sum_{l, l''} f = 8; \quad f^2 = 4f, \quad f \cdot f' = 0 \quad \text{и т. д.} \quad (40,53)$$

Таким образом, для вероятности трёхфотонной аннигиляции получаем:

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{\partial}{\partial t} C^+ C = \frac{2\pi}{c\hbar^2} 6 \sum_{\mathbf{x}, \mathbf{x}', \mathbf{x}''} \sum_{l, l''} \delta(2k_0 - \mathbf{x} - \mathbf{x}' - \mathbf{x}'') \delta_{\mathbf{x} + \mathbf{x}' + \mathbf{x}'', 0} \times \\ &\quad \times b^+ \bar{W}(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \mathbf{x}'') b' b'^+ \bar{W}^+(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \mathbf{x}'') b, \end{aligned} \quad (40,54)$$

причём коэффициент 6 учитывает число возможных комбинаций, при котором произведение  $\bar{W} \bar{W}^+$  не равняется нулю.

Именно, при вычислении вероятности аннигиляции будут фигурировать следующие произведения квантовых амплитуд:

$$v = g_{l_1}(\mathbf{x}_1) g_{l'_1}(\mathbf{x}'_1) g_{l''_1}(\mathbf{x}''_1) g_{l_1}^+(\mathbf{x}) g_{l'_1}^+(\mathbf{x}') g_{l''_1}^+(\mathbf{x}'').$$

Последнее произведение будет отлично от нуля в шести случаях:

$$1) \quad \mathbf{x}_1 = \mathbf{x}, \quad \mathbf{x}'_1 = \mathbf{x}', \quad \mathbf{x}''_1 = \mathbf{x}'',$$

$$2) \quad \mathbf{x}_1 = \mathbf{x}'', \quad \mathbf{x}'_1 = \mathbf{x}', \quad \mathbf{x}''_1 = \mathbf{x}$$

и т. д.

Подставляя в (40,54) выражения для  $\bar{W}^+$  и восстанавливая индексы у амплитуд  $\mathbf{a} \rightarrow \mathbf{a}_i^+$ , получаем:

$$w = \frac{8\pi^4 \alpha^3 c}{k_0^3 L^3} \sum_{\mathbf{x}, \mathbf{x}', \mathbf{x}''} \sum_{l, l', l''} \frac{1}{\mathbf{x} \mathbf{x}' \mathbf{x}''} f(\mathbf{a}_l' \mathbf{a}_{l''}''') (\mathbf{a}_l^+ \mathbf{a}_{l''}''') \times \\ \times b^+ (\boldsymbol{\alpha} \mathbf{a}_l) b' b'^+ (\boldsymbol{\alpha} \mathbf{a}_l^+) b \delta (2k_0 - \kappa - \kappa' - \kappa'') \delta_{\mathbf{x} + \mathbf{x}' + \mathbf{x}'', 0}. \quad (40,55)$$

Согласно формулам (40,40) и (40,40а) имеем:

$$(\mathbf{a}_l^+ \mathbf{a}_{l''}''') = \frac{1}{2} (\boldsymbol{\beta}' - il' [\mathbf{x}'^0 \boldsymbol{\beta}'']) (\boldsymbol{\beta}'' - il'' [\mathbf{x}''^0 \boldsymbol{\beta}''']),$$

где  $\boldsymbol{\beta}'$  и  $\boldsymbol{\beta}''$  — произвольные единичные векторы, направленные перпендикулярно соответственно векторам  $\mathbf{x}'^0$  и  $\mathbf{x}''^0$ .

Не нарушая общности окончательного результата, в который входят квадратичные комбинации амплитуд, мы можем положить

$$\boldsymbol{\beta}' = \boldsymbol{\beta}''.$$

Тогда получаем:

$$(\mathbf{a}_l^+ \mathbf{a}_{l''}''') = \frac{1}{2} (1 - l' l'' (\mathbf{x}'^0 \mathbf{x}''^0)), \quad (40,56)$$

откуда

$$f(\mathbf{a}_l' \mathbf{a}_{l''}''') (\mathbf{a}_l^+ \mathbf{a}_{l''}''') = \frac{f}{4} (1 - (\mathbf{x}'^0 \mathbf{x}''^0))^2. \quad (40,57)$$

Здесь принято во внимание, что

$$f l' l'' = f.$$

Вычисление спиновых функций мы можем произвести с помощью формул (21,17) и (21,18):

$$b^+ (\boldsymbol{\alpha} \mathbf{a}_l) b' b'^+ (\boldsymbol{\alpha} \mathbf{a}_l^+) b = \frac{1}{4} \rho_{11} \sigma_{nn} \cdot a_{ln} a_{ln}^+ = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{1}{3} s s' \right). \quad (40,58)$$

При выводе последнего равенства было учтено, что при малых скоростях электрона за направление  $\mathbf{k}$  может быть выбрано любое направление, и поэтому

$$\frac{(\boldsymbol{\alpha}_l \mathbf{k}) (\mathbf{a}_l^+ \mathbf{k})}{k^3} = \frac{1}{3} (\mathbf{a}_l \mathbf{a}_l^+) = \frac{1}{3}.$$

Суммируя выражение (40,55) по состояниям поляризации  $l, l'$  и  $l''$ , а также по вектору  $\mathbf{x}$ , получим:

$$\omega = \frac{\alpha^3 c}{k_0^4 L^3} \left(1 - \frac{1}{3} ss'\right) \times \\ \times \int_0^\infty dx' \int_0^\infty dx'' \int_{-1}^1 dx \frac{x' x''}{x} (1-x^2) \delta(2k_0 - x' - x'' - x),$$

где  $x = \sqrt{x'^2 + x''^2 + 2x'x''}$ , величина  $x = (x'^0 x''^0)$  является косинусом угла между направлениями  $\mathbf{x}'$  и  $\mathbf{x}''$ .

Интегрирование по  $x$  произведём с помощью формулы:

$$\int_{-1}^1 dx f(x) \delta(x(x) - a) = \frac{f(x_0)}{\left| \frac{\partial x(x_0)}{\partial x_0} \right|},$$

причём величина  $x_0$  определяется из уравнения  $x(x_0) - a = 0$ . Легко показать, что

$$\frac{\partial x}{\partial x} = \frac{x' x''}{x}, \quad 1 - x_0 = \frac{2(x' + x'' - k_0) k_0}{x' x''};$$

кроме того, величина  $x_0$  не будет по абсолютному значению превышать единицу ( $|x_0| \leq 1$ ), когда переменные  $x'$  и  $x''$  изменяются в границах

$$0 \leq x' \leq k_0, \quad k_0 - x' \leq x'' \leq k_0.$$

Отсюда, вводя новые переменные  $\xi' = \frac{x'}{k_0}$ ,  $\xi'' = \frac{x''}{k_0}$ , находим:

$$\sigma_3 = \frac{L^3}{v} \omega = \frac{4}{3} (\pi^2 - 9) \left(1 - \frac{1}{3} ss'\right) \alpha \frac{c}{v} r_0^3. \quad (40,59)$$

Здесь мы учли следующую формулу для определённого интеграла, который вычисляется элементарным путём:

$$\int_0^1 d\xi' \int_{1-\xi'}^1 d\xi'' \frac{(\xi' + \xi'' - 1)^2}{\xi'^2 \xi''^2} = \frac{\pi^2 - 9}{3}. \quad (40,60)$$

Величина  $v$  в формуле (40,59) является относительной скоростью, а  $r_0 = \frac{e^2}{mc^2}$  — классическим радиусом электрона.



Таким образом, для аннигиляции ортосостояния ( $ss' = -1$ ) имеем:

$$\sigma_3^s = \frac{16}{9} (\pi^2 - 9) \alpha \frac{c}{v} r_0^2, \quad (40,61)$$

а среднее значение для эффективного сечения равно

$$\bar{\sigma}_3 = \frac{1}{4} \sum_{s, s'} \sigma_3 = \frac{4}{3} (\pi^2 - 9) \alpha \frac{c}{v} r_0^2. \quad (40,62)$$

Из последних формул находим, что вероятность трёхфотонной аннигиляции парасостояния равна нулю:

$$\sigma_3^A = 4\bar{\sigma}_3 - 3\sigma_3^s = 0. \quad (40,63)$$

Отношение среднего значения эффективного сечения трёхфотонной аннигиляции к двухфотонной будет равно:

$$\frac{\bar{\sigma}_3}{\sigma} = \frac{4}{3} \frac{\pi^2 - 9}{\pi} \alpha \approx \frac{1}{370}. \quad (40,64)$$

Трёхфотонная аннигиляция была недавно обнаружена экспериментально<sup>1)</sup>. Три счётчика фотонов были симметрично расположены в одной плоскости с препаратом  $C^{64}$ , испускающим позитроны, причём регистрировались лишь тройные совпадения. В результате опытов найдено, что  $\frac{\sigma}{\sigma_3}$  равно либо  $200 \pm 40$ , либо  $330 \pm 70$ , в зависимости от двух возможных предположений об эффективности счётчиков. По порядку величины экспериментальный результат сравнительно хорошо согласуется с теоретическим предсказанием.

г) **Позитроний**<sup>2)</sup>. Как было указано в § 29, позитрон при столкновении с электроном может не только аннигилироваться, но также образовывать метастабильную систему атомного типа, так называемый «позитроний», напо-

<sup>1)</sup> J. A. Rich, Phys. Rev. 81, 140 (1951).

<sup>2)</sup> A. E. Ruark, Phys. Rev. 68, 278 (1945); Д. Иваненко и А. Соколов, Вестник МГУ № 6, 3 (1947). Все расчёты, связанные с позитронием, приведены также в работах, цитируемых на стр. 331.

минающий собою атом водорода, у которого протон замещён на позитрон. Сравнивая формулы (29,24) и (29,27) для эффективного сечения образования позитрония с формулой (40,26), определяющей аннигиляцию пары, мы видим, что при сравнительно больших скоростях ( $v \gg ac = \frac{c}{137}$ )

вероятность аннигиляции будет значительно превышать вероятность образования позитрония. В области же малых скоростей порядка  $ac$  ( $v \sim ac$ ) оба эффективные сечения будут сравнимы между собой, что свидетельствует о реальной возможности образования позитрония.

Таким образом, периодическая система элементов Менделеева может пополняться не только за счёт тяжёлых (за ураном) элементов, но также и за счёт атомов, более лёгких, чем атом водорода<sup>1)</sup>.

Атом позитрония обладает определённой вероятностью спонтанной аннигиляции, благодаря чему эта система является метастабильной. Оценим время жизни атома позитрония.

Как видно из формулы (40,19), вероятность аннигиляции связана с эффективным сечением соотношением

$$\omega = v\sigma \frac{1}{L^3}. \quad (40,65)$$

Величина  $\frac{1}{L^3}$  является квадратом модуля функции  $\psi$ . Поэтому в общем случае равенство (40,65) может быть представлено в виде

$$\omega = v\sigma |\psi(0)|^2. \quad (40,66)$$

В последней формуле функцию  $\psi$  мы взяли в точке, где расстояние между частицами равняется нулю. Величина  $\psi|_{(0)}|^2$  представляет собою вероятность столкновения электрона и позитрона.

В частности, если атом позитрония находится в наименьшем энергетическом состоянии, мы должны в формулу

<sup>1)</sup> См., например, Д. И в а н е н к о, Доклады Тимирязевской с.-х. академии, № 7, 96 (1948).

(40,66) подставить известное выражение для водородных функций:

$$|\psi(0)|^2 = \frac{1}{\pi a^3},$$

причём радиус  $a = \frac{2\hbar^2}{me^2}$  будет в два раза больше радиуса первой боровской орбиты, так как в последнем выражении массу электрона  $m$  следует заменить приведённой массой  $\frac{m}{2}$  позитрония.

Для времени жизни  $\tau = \frac{1}{\omega}$  позитрония получаем:

$$\frac{1}{\tau} = \frac{(\alpha k_0)^3 v \sigma}{8\pi}, \quad (40,67)$$

где  $\sigma$ —эффективное сечение аннигиляции свободной пары.

Поскольку  $\sigma$  в нерелятивистском приближении сильно зависит от ориентации спинов, времена жизни для парапозитрония и ортопозитрония будут различными.

Подставляя в (40,67) значение для  $\sigma$  из формулы (40,30), мы получим для времени жизни парапозитрония, который распадается двухфотонным путём, следующее значение:

$$\tau = \frac{2}{ck_0\alpha^5} \cong 1,25 \cdot 10^{-10} \text{ сек.} \quad (40,68)$$

Вероятность же двухфотонного распада ортопозитрония равняется согласно (40,48) нулю (запрещённые переходы).

Как видно из формулы (40,61), ортопозитроний может распадаться на три фотона, причём его время жизни примерно в  $1/\alpha = 137$  раз больше времени жизни парапозитрония:

$$\tau = \frac{9}{2} \frac{\pi}{\pi^2 - 9} \frac{1}{ck_0\alpha^6} \cong 1,4 \cdot 10^{-7} \text{ сек.} \quad (40,69)$$

Совсем недавно образование атомов позитрония было обнаружено экспериментально<sup>1)</sup>. Источник позитронов ( $\text{Na}^{22}$ ) помещался в камеру, наполненную азотом. Этот

1) M. D e u t s c h, Phys. Rev. 82, 455 (1951).

источник одновременно с позитроном испускает также  $\gamma$ -квант. При прохождении сквозь азот позитроны могли или аннигилировать с образованием двух квантов с энергией  $0,5 Mэв$ , или вначале образовать атом парапозитронин, который практически мгновенно (точнее, через  $10^{-10}$  сек.) также распадается на два кванта. Экспериментально различить, когда происходит аннигиляция по первому способу, а когда по второму, пока что не удалось.

Распад же ортопозитрония должен резко отличаться от двух предыдущих распадов. Во-первых, ортопозитроний распадается на три фотона. Поэтому число распавшихся фотонов должно увеличиться, а их энергия уменьшиться. Кроме того, если регистрировать  $\gamma$ -лучи от  $Na^{22}$  и от аннигиляции позитронов, то при последнем процессе аннигиляции должно быть запаздывание порядка времени жизни ортопозитрония ( $10^{-7}$  сек.), которое доступно уже наблюдению.

Оба процесса аннигиляции (двухфотонная и трёхфотонная) были обнаружены в указанных опытах. Более того, при добавлении в камеру окиси азота (NO) число трёхфотонных аннигиляций резко сокращалось. Это связано с большой вероятностью обмена электронами между ортопозитронием и молекулой NO, благодаря тому, что последняя обладает нечётным числом электронов. В результате этого обмена ортопозитроний может перейти в парапозитроний, который мгновенно распадается на два  $\gamma$ -кванта.

В последующем опыте<sup>1)</sup> было показано, что во фреоне ( $CCl_2F_2$ ) вероятность аннигиляции ортопозитрония, отнесённая к единице времени, при малых давлениях газа равна  $\omega = \frac{1}{\tau} = (6,8 \pm 0,7) \cdot 10^6 \text{ сек}^{-1}$ . Это значение находится в хорошем согласии с теоретическим, определяемым формулой (40,69)

$$\omega = \frac{1}{\tau} = 7,2 \cdot 10^6 \text{ сек}^{-1}.$$

<sup>1)</sup> M. D e u t s c h, Phys. Rev. 83, 866 (1954).

Таким образом, обнаружен не только атом позитрония, но также и его взаимодействие с веществом. Будем надеяться, что в скором времени будут хорошо изучены оптические и химические свойства «позитрония». Кроме того, позитроний является простейшей системой, образованной из двух частиц с одинаковой массой, поэтому многие выводы будущей релятивистской теории двух тел могут быть проверены именно на атоме позитрония.

### § 41. Каскадная теория ливней

**а) Первичная компонента.** Как известно, основная часть космических частиц, влетающих в земную атмосферу (первичная компонента), обладает энергией  $10^{10}$  эв. Число частиц с большей энергией убывает по закону:

$$dN \cong E^{-\gamma} dE, \quad (41,1)$$

где значение коэффициента  $\gamma$  лежит между 2 и 3. В соответствии с этой полуэмпирической формулой в первичной компоненте могут обнаруживаться частицы с очень большой энергией. Так, например, экспериментально обнаружены частицы с энергией порядка  $10^{17}$  эв, создающие, в частности, сверхливни Оже.

Первичные частицы, попадая со столь большой энергией в атмосферу, при взаимодействии с ядрами могут порождать ряд других элементарных частиц. Поэтому состав вторичной компоненты космического излучения, которую мы наблюдаем, например, на земной поверхности, должен резко отличаться от первичной.

Сведения о первичной компоненте были в основном получены с помощью установок, помещённых на воздушных шарах-зондах. В частности, опытами С. Н. Вернова<sup>1)</sup> были окончательно доказаны предварительные данные Шейна и Джонсона о том, что первичная компонента состоит главным образом из протонов. Имеющиеся экспериментальные наблюдения показывают пространственную

---

<sup>1)</sup> С. Н. Вернов, ЖЭТФ, 19, 621 (1949), см. также Н. Г. Бриггер и И. Л. Розенталь. УФН, 45, 104 (1951).

изотропность первичной компоненты, причём в среднем на площадку в  $1 \text{ см}^2$  в одну минуту падает одна космическая частица.

Заряженная космическая частица, приближаясь к земле, отклоняется магнитным полем земли, которое начинает сказываться на расстоянии нескольких тысяч километров. Частицы с малой энергией (меньше, чем  $10^{10}$  эв) могут достигнуть земной поверхности только в том случае, если движутся вдоль силовой линии земного магнитного поля, когда магнитным воздействием практически можно пренебречь. В этом случае частица попадает на один из магнитных полюсов земли. Поэтому наименьшая величина энергии, с которой частица может достигнуть какой-либо точки земной поверхности, зависит от магнитной широты  $\varphi$ , а также от угла, который составляет вектор скорости частицы с меридиональной плоскостью. В частности, для частиц, двигающихся в меридиональной плоскости, критическая энергия равна

$$E_0 = 15Z 10^9 \cos^4 \varphi \text{ эв},$$

где  $Ze$ —заряд космической частицы. Отсюда следует, что критическая энергия уменьшается по мере удаления от экватора к какому-либо полюсу. Кроме того, мы видим, что чем больше заряд космической частицы, тем большая энергия необходима ей для преодоления магнитного поля земли. Экспериментальные наблюдения целиком подтвердили широтный эффект, что явилось одним из важнейших доказательств наличия заряженных частиц в составе первичного космического излучения.

Вопрос о происхождении космических лучей, первичная компонента которых состоит из частиц, обладающих столь большими энергиями, долгое время оставался совершенно открытым. Только за последнее время эта проблема постепенно начинает выходить из тупика.

Попытки некоторых исследователей считать, что источником основной части космических лучей является Солнце, нужно признать весьма сомнительными, так как в этом случае невозможно объяснить изотропность космического излучения. Более того, никакой непосред-

венной связи между свойствами космических лучей и деятельностью Солнца установить не удалось.

Мы не можем привести экспериментальных фактов, которые бы говорили за образование космических лучей при аннигиляции ядер или даже (чтобы получить энергию порядка  $10^{17}$  эв) кусочков вещества. Точно так же нет никаких данных о возникновении космических лучей при вспышках новых звёзд.

В настоящее время в центре внимания находятся гипотезы ускорения заряженных частиц первичной компоненты вихревым электромагнитным полем. В частности, работами Я. П. Терлецкого<sup>1)</sup> показано, что вращающееся магнитное поле Солнца способно ускорять заряженные частицы до энергий порядка  $10^8$  эв. Эта гипотеза приобрела значительный интерес после открытия магнетизма у ряда звёзд (Дева, L-78 и другие), превышающего на поверхности 1000 гаусс, которые могут ускорять заряды до энергий порядка  $10^{10}$  эв.

Возможно, что при ускорении космических частиц, большую роль играют огромные скопления межзвёздного вещества (так называемые «облака»). Спектральные исследования света, поглощаемого такими облаками, показывают, что они состоят из ионизованных атомов, в частности из протонов. При своём движении заряженные облака создают электрические токи в огромных пространствах, которые согласно расчётам Альфена приводят к появлению магнитных волн. Согласно гипотезе Ферми при попадании любых заряженных частиц в эти облака частицы могут ускоряться магнитными волнами. Последовательное столкновение заряженной частицы с рядом облаков приводит в общем к постепенному увеличению её энергии вплоть до энергий, определяемых формулой (41,1). Таким образом, межзвёздное пространство является своего рода гигантской ускорительной установкой, непрерывно разгоняющей атомные ядра до энергий космических частиц. Достаточная распространённость заряженных «облаков» может обеспечить изотропность космического

---

<sup>1)</sup> Я. П. Терлецкий, УФН 44, 46 (1951) (там же приведена подробная литература по этому вопросу).

излучения. Открытие в составе первичных космических частиц наряду с протонами также ионной компоненты ( $Z > 1$ ) является весьма убедительным аргументом в пользу ускорения космических частиц какими-то хаотически движущимися неоднородностями магнитных полей ионизованной межзвёздной материи.

Окончательно механизм этого ускорения далеко ещё не установлен. Возможно, что он будет носить комбинированный характер. Например, потоки частиц, составляющие корпускулярное излучение, могут выбрасываться переменным магнитным полем звезды (или даже Солнца). Затем наиболее быстрые частицы, взаимодействуя с намагниченными облаками, получают дальнейшее ускорение.

Отсутствие лёгких заряженных частиц в составе первичной компоненты также находит своё качественное объяснение. В самом деле, при движении в магнитных полях заряженные частицы должны излучать электромагнитную энергию. При этом электроны благодаря малой массе будут терять энергию гораздо больше («светящийся» электрон), чем протоны. Принимая во внимание, что общая потеря энергии пропорциональна  $E^4$  ( $E$ —энергия электрона), становится ясным отсутствие в первичной компоненте электронов с большой энергией. Присутствие мезонов в составе первичной компоненты исключено, так как они являются весьма неустойчивыми частицами.

Проблема происхождения космических лучей привела к созданию космической электродинамики, связанной с проблемой магнетизма звёзд и межзвёздной материи, а также движением заряженных «облаков»<sup>1)</sup>.

**б) Вторичная компонента**<sup>2)</sup>. Первичные частицы космического излучения при прохождении через атмосферу испытывают столкновения с ядрами, в связи с чем могут выбиваться из ядер или возникать вновь другие частицы (вторичная компонента).

<sup>1)</sup> См., например, А л ь ф е н, Космическая электродинамика, М., 1951.

<sup>2)</sup> Д. В. Скобелев, УФН 41, 331 (1950); Мезон. Сборник статей под редакцией И. Е. Тамма, М.—Л., 1947; С.-Ф. Поуэлл, УФН 45, 15 (1951). А. П. Жданов, ДАН 22, 163 (1939), 23, 28 (1939); 46, 396 (1945).



Попадая в атмосферу, протон с энергией  $5 \cdot 10^9$  Мэв, сталкиваясь с ядром азота или кислорода, производит расщепление ядра или, как говорят, даёт большие «звёзды», открытые А. П. Ждановым при помощи толстослойных фотопластинок Л. В. Мысовского. Этот метод впоследствии был использован также группой Поуэлла.

При расщеплении ядра появляются несколько новых нуклеонов и  $\pi$ -мезонов, которые вылетают почти точно вперёд. Новые нуклеоны также обладают энергией, достаточной для образования вторичных «звёзд», вследствие чего могут образоваться каскадно-ядерные ливни. В настоящее время открыты  $\pi$ -мезоны (первичные) обоих знаков с массой, примерно равной 275 электронных масс. Спин  $\pi$ -мезонов, по видимому, равняется пулю.  $\pi$ -мезон распадается на обычный  $\mu$ -мезон, обладающий всегда одинаковой энергией<sup>1)</sup>. Это говорит о том, что в данном случае испускается ещё одна частица (по видимому, нейтрино), которая берёт на себя оставшуюся часть импульса, т. е.

$$\pi_{\pm} = \mu_{\pm} + \nu.$$

Время жизни покоящегося  $\pi_{\pm}$ -мезона имеет порядок величины  $T_0 \sim 10^{-8}$  сек. Время жизни движущегося мезона даёт формулой

$$T = \frac{T_0}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

и для быстрых частиц увеличивается до значений  $10^{-7}$  сек. За это время мезон сумеет пройти сравнительно небольшое (по сравнению с высотой атмосферы) расстояние, примерно равное 30 м.

Если  $\pi_{\pm}$ -мезон успеет замедлиться до своего распада, то он, как правило, притягивается и поглощается ядром; образовавшееся возбуждённое ядро обычно испускает

<sup>1)</sup> С помощью законов сохранения легко показать, что при распаде первичной частицы на две вторичных (возможность распада определена в примечании на стр. 310) энергия первичной частицы распределяется между вторичными в строго определённом отношении. При распаде же первичной частицы на три спектр всех трёх вторичных частиц будет непрерывным, хотя и заключённым в определённых границах.

несколько нуклеонов.  $\pi_+$ -мезоны отталкиваются ядрами, и поэтому в конце концов должны распасться.  $\mu$ -мезон с массой 212 электронных массы, образовавшийся в результате распада  $\pi$ -мезона, имеет время жизни, равное  $2,15 \cdot 10^{-6}$  сек. при  $v = 0$ . Поэтому быстрый  $\mu$ -мезон ( $v \sim c$ ) сумеет пройти расстояние около 6000 м и достигнуть земной поверхности.

Заметим, что проникающая способность быстрых  $\mu$ -мезонов значительно больше, чем быстрых электронов. В самом деле, масса мезонов, почти в двести раз больше массы электрона. Поскольку квадрат радиуса  $\left[ \left( \frac{e^2}{mc^2} \right)^2 \right]$ , входящий в формулу радиационных потерь, для мезона почти в 40 000 раз меньше, чем для электрона, потерями на тормозное испускание для мезонов мы можем вообще пренебречь. Ионизационные же потери будут заметны лишь для медленных мезонов, так что быстрые мезоны могут проникать даже в свинец на глубину нескольких метров.

Подробное изучение треков  $\mu$ -мезона с помощью камеры Вильсона или пластинок с электронно-чувствительной эмульсией показало, что одним из продуктов распада является электрон с энергией от 0 до 50  $Mэв$ . Есть серьезные основания предполагать, что спектр энергий электронов распада является непрерывным.

Принимая во внимание, что энергия, соответствующая массе покоя  $\mu$ -мезона, равна примерно 100  $Mэв$ , мы найдём, что в случае распада  $\mu$ -мезона на две частицы каждая из частиц должна вылетать с энергией 50  $Mэв$ . Непрерывный же спектр электронов распада говорит нам о том, что  $\mu$ -мезон распадается минимум на три частицы, две из которых, по видимому, являются нейтрино<sup>1)</sup>:

$$\nu_{\pm} = e_{\pm} + \nu + \nu',$$

причём энергия распределяется между тремя релятивистскими частицами распада практически равновероятно.

<sup>1)</sup> Подробные рефераты работ, связанных с распадом  $\mu$ -мезона на три частицы, содержатся в научно-реферативном сборнике «Космические лучи», серия 2, вып. 11, ИЛ, 1950. Заметим, что одними из первых к этому выводу пришли Г. Б. Жданов и А. А. Хайдаров [ДАН 65, 287 (1949)].

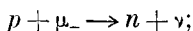
Распад отрицательного  $\mu_-$ -мезона, как правило, должен наблюдаться только при отсутствии тяжёлых ядер. В противном случае  $\mu_-$ -мезон может быть захвачен на стабильную орбиту атома, образуя мезоатом<sup>1)</sup> (атом, в котором электрон замещён мезоном). Радиус орбиты мезона будет меньше радиуса соответствующей орбиты электрона примерно в 200 раз. В такое же число раз увеличивается и энергия связи.

Точно так же медленный положительный мезон может захватить электрон, образуя атомноподобную систему «мезоэлектроний», представляющую собою атом водорода, у которого протон заменён положительным мезоном.

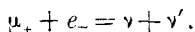
Как известно, на большинстве снимков конца трека  $\mu$ -мезона не обнаруживается никаких продуктов распада. Это, повидимому, связано с образованием мезоатома (для отрицательных мезонов) и мезоэлектрония (для положительных).

Благодаря тому, что  $\mu_-$ -мезон взаимодействует с нуклонами значительно слабее, чем  $\pi_-$ -мезон, образование мезоатома мало изменяет время жизни покоящегося  $\mu$ -мезона. Так, например, при захвате отрицательного мезона элементом  $Z = 16$ , когда вероятность захвата становится сравнимой с вероятностью распада, время жизни уменьшается примерно в три раза<sup>2)</sup>.

При захвате ядром  $\mu$ -мезона, повидимому, имеет место реакция с образованием нейтральных частиц:



точно так же мезоэлектроний может распасться на два нейтрино:



Важным событием явилось недавнее открытие в лабораторных условиях и в космических лучах нейтральных  $\pi_0$ -мезонов с массой, примерно на 10 электронных масс меньше массы заряженных  $\pi$ -мезонов, которые весьма

<sup>1)</sup> Д. Д. Иваненко и А. А. Соколов, ДАН 58, 1329 (1947).

<sup>2)</sup> Э. Ферми, Ядерная физика, М., 1951; стр. 182.

быстро ( $T \sim 10^{-14}$  сек.) распадаются на два  $\gamma$ -кванта <sup>1)</sup>:

$$\pi_0 \rightarrow 2\gamma.$$

Эта реакция говорит за то, что спин нейтральных мезонов должен равняться нулю. Возможно, что процесс распада идёт через виртуальное порождение пары протон—антипротон:

$$\pi_0 \rightarrow (p_+ + p_-) \rightarrow 2\gamma,$$

т. е. в высшей степени напоминает собою распад позитрония (см. § 40).

Как известно, в основе современной мезонной теории лежит гипотеза Юкава, согласно которой взаимодействие между нуклеонами должно переноситься частицами с целым спином и массой, имеющей порядок 200—300 электронных масс. Помимо заряженных частиц, переносящих взаимодействие между протоном и нейтроном, необходимо также существование нейтральных частиц, переносящих взаимодействие между любыми нуклеонами.

После открытия  $\mu$ -мезонов было решено отождествить их ядерными мезонами. Однако впоследствии удалось установить, что это не так.  $\mu$ -мезоны обладают, по видимому, полущелым спином, о чём говорит их распад на три частицы. Поэтому  $\mu$ -мезон может взаимодействовать с ядром лишь в паре с другими частицами, благодаря чему это взаимодействие в согласии с опытными данными оказывается слабым и не может обеспечить необходимый порядок ядерных сил. Такое положение вещей оставалось вплоть до открытия заряженных и нейтральных  $\pi$ -мезонов с целым спином, сильно взаимодействующих с ядрами, т. е. ядерные мезоны, возможно, будут отождествлены с  $\pi$ -мезонами космического излучения.

Несмотря на то, что мезонная теория далека ещё от количественных результатов, тем не менее её качественные выводы не только объяснили, но даже предсказали ряд важнейших эффектов. Так, например, ещё задолго

<sup>1)</sup> Более подробно см., например, обзор А. Б. Мигдала и Я. А. Смородинского, УФН 41, 133 (1950).

до экспериментального обнаружения было теоретически предсказано существование самого мезона и примерно указано значение его массы. Мезонная теория объясняет короткодействующий характер ядерных сил, а также наличие дополнительного момента у протона и нейтрона. Наконец, чтобы увязать ядерные силы с  $\beta$ -распадом, было сделано предположение о спонтанном распаде мезона на более лёгкие частицы, одной из которых является электрон.

Основные идеи мезонной теории, бесспорно, сохраняются в будущей более совершенной теории ядерных явлений.

Подробное освещение мезонной теории не входит в план нашей первой части книги, и поэтому на этом вопросе мы останавливаться не будем<sup>1)</sup>.

**в) Возникновение электронной компоненты.** Как известно, в состав электронной компоненты входят электроны, позитроны и  $\gamma$ -кванты, которые в релятивистском случае обладают большой вероятностью взаимных превращений (см. ниже).

Прежде считалось, что возникновение электронной компоненты связано с выбиванием электронов из атомов и распадом  $\mu$ -мезонов<sup>2)</sup>. Однако открытие в 1948 г. электронно-ядерных взрывов Д. В. Скобельциным, Н. А. Добротинным и Г. Е. Зацепиным показало, что электроны возникают главным образом при взрыве ядра нуклеоном, т. е. при образовании «звезды». Механизм этого явления был понят только после открытия  $\pi_0$ -мезона. Во время ядерного взрыва образуются  $\pi_0$ -мезоны, которые распадаются на  $\gamma$ -кванты, превращающиеся в свою очередь в электроны и позитроны.

Оставляя в стороне вопрос о существовании частиц с другими массами (например, тяжёлых  $\tau$ -частиц с массой покоя, равной примерно 1000  $m$ , или нейтральных  $V$ -частиц с массой покоя, равной 2200  $m$ , распадающихся

---

<sup>1)</sup> См., например, «Классическая теория поля», гл. V.

<sup>2)</sup> Как мы только что отметили, вероятность образования тормозного фотона от мезона, а тем более от протона, ничтожно мала.

на протон и отрицательный мезон, треки которых образуют букву V). Мы можем изобразить возникновение вторичной компоненты космических лучей (отбрасывая отдельные детали дополнительных превращений) схемой, показанной на рис. 11.

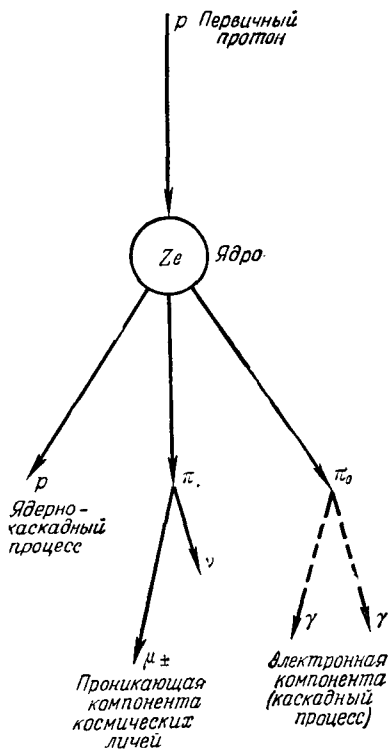


Рис. 11. Схема образования вторичной компоненты космических лучей.

Таким образом, при исследовании вторичной компоненты космических лучей мы должны учитывать, во-первых, специфические ядерные превращения, в результате которых возникают мезоны, и, во-вторых, электромагнитные превращения при распространении электронной компоненты. Если теория ядерных процессов находится ещё в порядке становления (мезонная теория), то современная электродинамика позволяет сравнительно детально разобраться в вопросах, связанных с электронной компонентой. Весьма важно подчеркнуть, что с момента возникновения электронной компоненты (например, распад  $\pi_0$ -мезона) дальнейшее её распространение не связано со специфическими ядерными силами. Ниже мы остановимся более подробно на

каскадном размножении электронной компоненты (каскадная теория ливней), представляющем собою сравнительно законченную главу современной теории космических лучей.

г) **Каскадная теория ливней**<sup>1)</sup>. Зарождение ливня связано с появлением электрона (позитрона или  $\gamma$ -кванта) с энергией порядка миллиарда электрон-вольт. При прохождении через вещество столь быстрой заряженной частицы имеют место следующие эффекты: рёзерфордское рассеяние, аннигиляция (для позитронов), потери энергии на ионизацию, тормозное (радиационное) излучение. Как следует из § 37 и 40, при больших энергиях основную роль играют потери на тормозное излучение, причём для вероятности испускания  $\gamma$ -квантов с энергией  $\varepsilon$ , при прохождении частицей единицы пути в случае полного экранирования мы согласно (37,28) имеем выражение

$$\omega_{\gamma}(E, E') = \frac{N d\sigma}{d\varepsilon} = \frac{1}{l} \left[ 1 + \left( \frac{E'}{E} \right)^2 - 2 \left( \frac{1}{3} - b \right) \frac{E'}{E} \right] \frac{1}{\varepsilon}, \quad (41,2)$$

где  $N$ —число атомов в единице объёма, а начальная  $E$  и конечная  $E'$  — энергии электрона—связаны с энергией тормозного фотона соотношением

$$E - E' = \varepsilon.$$

Так называемая радиационная длина [см. (37,28a)]

$$l = [4\alpha r_0^2 Z^2 N \ln(183Z^{-\frac{1}{3}})]^{-1} \quad (41,3)$$

зависит от рода вещества. Величина

$$b = [18 \ln(183Z^{-\frac{1}{3}})]^{-1} \quad (41,4)$$

почти не зависит от  $Z$ ; она изменяется в пределах 0,012 до 0,015 при изменении  $Z$  от 7,3 (воздух) до 82 (свинец). Во многих расчётах величину  $b$  привимают равной 0,0135 для всех элементов, так что при прохождении заряженной частицей единицы радиационного пути ( $l = 1$ ) вероятность

<sup>1)</sup> Н. Bhabha and W. Heitler, Proc. Roy. Soc. 159, 432 (1937); J. Carlson and J. Oppenheimer, Phys. Rev. 51, 220 (1937); Л. Д. Ландау и Ю. Б. Румер, Proc. Roy. Soc. (A) 16, 213 (1938); Д. Д. Иваненко и А. А. Соколов, ЖЭТФ 8, 639 (1938).

тормозного излучения не будет зависеть от рода вещества:

$$l \omega_{\gamma}(E, E') = \frac{1}{\varepsilon} \left[ 1 + \left( 1 - \frac{\varepsilon}{E} \right)^2 - 2 \left( \frac{1}{3} - b \right) \left( 1 - \frac{\varepsilon}{E} \right) \right]. \quad (41,5)$$

Это обстоятельство позволяет решать указанную задачу сразу для многих веществ.

Пренебрегая коэффициентом  $b$  по сравнению с  $\frac{1}{3}$ , для выражения (41,5) получим:

$$l \omega_{\gamma}(E, E') = \frac{a(\varepsilon)}{\varepsilon}, \quad (41,6)$$

причём коэффициент  $a(\varepsilon)$  изменяется в пределах от  $1(\varepsilon = E)$  до  $\frac{4}{3}$ , когда  $\varepsilon = 0$ . Поэтому довольно часто выражение (41,5) аппроксимируется приближённым, по более простым математическим выражением

$$l \omega_{\gamma}(E, E') = \frac{1}{\varepsilon}, \quad (41,7)$$

т. е. в формуле (41,6) коэффициент  $a(\varepsilon)$  полагается равным единице. Подобная аппроксимация связана с выбором такого значения для коэффициента  $a$ , при котором мы получаем одно и то же выражение для общей потери энергии при прохождении частицей единицы радиационного пути, вычисленное как по основной формуле (41,5) при  $b = 0$ , так и по её приближённому выражению (41,7)

$$-\frac{dE}{dt} = \int_0^E l \varepsilon \omega_{\gamma}(E, E') d\varepsilon = E,$$

где  $t$  — длина пути, выраженная в радиационных единицах  $\left( t = \frac{x}{l} \right)$ .

При прохождении фотонов через вещество их энергия теряется на фотоэффект, эффект Комптона и рождение пар. Как было показано в § 39, при больших энергиях фотоны поглощаются исключительно за счёт образований



пар. Для вероятности образования пары на единице пути в случае полного экранирования мы имеем выражение [см. (39,24)]

$$w_p(E, E') = \frac{N d\sigma}{dE} = \frac{1}{\varepsilon} \frac{E^2 + E'^2 + 2 \left( \frac{1}{3} - b \right) EE'}{\varepsilon^2} \frac{1}{l}, \quad (41,8)$$

причём энергии  $E$  и  $E'$  заряженных частиц (электрона и позитрона) связаны с энергией фотона соотношением

$$E + E' = \varepsilon. \quad (41,9)$$

При прохождении единицы радиационного пути вероятность образования пары при  $b=0$  будет равна

$$lw_p(E, E') = \frac{c(E)}{\varepsilon}. \quad (41,10)$$

Коэффициент

$$c(E) = \frac{E^2 + (\varepsilon - E)^2 + \frac{2}{3} E(\varepsilon - E)}{\varepsilon^2} \quad (41,11)$$

изменяется в пределах от  $c = \frac{2}{3}$  ( $E = \frac{\varepsilon}{2}$ ) до  $c = 1$  ( $E' = 0, E = \varepsilon$ ). Поэтому выражение (41,10) можно упростить, полагая  $c = \text{const}$ :

$$lw_p(E, E') = \frac{c}{\varepsilon}. \quad (41,12)$$

Подберём коэффициент  $c$  из условия, чтобы для вероятности образования пары на единицы радиационного пути получить как из формулы (41,10), так и из её приближённого выражения (41,12) одно и то же значение.

На основе формулы (41,12) мы имеем:

$$\int_0^{\varepsilon} lw_p(E, E') dE = cl.$$

Из формулы (41,10) находим:

$$\int_0^{\varepsilon} lw_p(E, E') dE = l \int_0^1 \left\{ \eta^2 + (1 - \eta)^2 + \frac{2}{3} \eta(1 - \eta) \right\} d\eta = \frac{7}{9} l.$$

Отсюда для искомой вероятности мы можем написать следующую приближённую формулу:

$$lw_p(E, E') = \frac{7}{9z}. \quad (41,13)$$

Таким образом, тормозясь в поле атома, быстрые электроны и позитроны излучают фотоны. В свою очередь фотоны при взаимодействии с ядром образуют пары (электрон — позитрон), которые вновь испускают тормозные фотоны, и т. д., так что весь процесс повторяется сначала (рис. 12). В результате многократных превращений энергия первичной частицы распределяется среди многих вторичных частиц. Как только энергия вторичных частиц приближается к такому значению, при котором начинают преобладать потери на ионизацию, ливень прекращается.

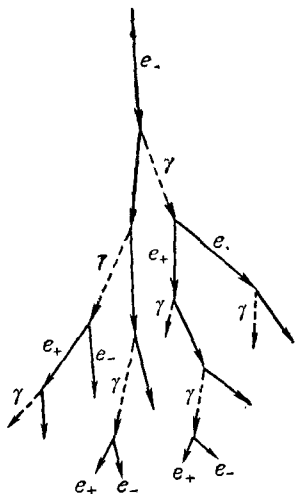


Рис. 12 Схема каскадного размножения электронной компоненты.

Каскадная теория позволяет определить общее число заряженных частиц (электронов и позитронов)  $p dE$  и общее число фотонов  $\Gamma dE$  как функции энергии  $E$  и глубины проникновения  $t = \frac{x}{l}$ , т. е.

$$p = p(t, E), \quad \Gamma = \Gamma(t, E).$$

В области больших энергий мы можем учесть лишь тормозное излучение и эффект образования пар. Кроме того, при больших энергиях ливневые частицы должны двигаться в направлении первичной частицы, благодаря чему мы можем ограничиться рассмотрением задачи одного измерения. В этом случае для определения  $p$  и  $\Gamma$  мы

будем иметь следующие кинетические уравнения:

$$\frac{\partial p(t, E)}{\partial t} = 2l \int_E^{\infty} \omega_p(E, E' - E) \Gamma(t, E') dE' +$$

$$+ l \int_E^{\infty} \omega_{\gamma}(E', E) p(t, E') dE' - l \int_0^E \omega_{\gamma}(E, E') p(t, E) dE', \quad (41,14)$$

$$\frac{\partial \Gamma(t, E)}{\partial t} = \int_E^{\infty} l \omega_{\gamma}(E', E' - E) p(t, E') dE' -$$

$$- \int_0^E l \omega_p(E, E') \Gamma(t, E) dE'. \quad (41,15)$$

В формуле (41,14), характеризующей изменение числа заряженных частиц, первый член правой части ( $\sim \Gamma(t, E')$ ) даёт увеличение числа частиц благодаря образованию пар. Множитель 2 показывает, что в каждом процессе образуется две частицы (электрон и позитрон); второй член ( $\sim p(t, E')$ ) даёт также увеличение числа частиц, когда вследствие тормозного излучения заряженная частица с энергией  $E'$  переходит в состояние с энергией  $E$  ( $E < E'$ ); третий член ( $\sim p(t, E)$ ) характеризует уменьшение числа частиц благодаря тому, что заряженная частица, испуская тормозной фотон, переходит из состояния с энергией  $E$ . Согласно (41,15) изменение числа фотонов на единице пути складывается из положительной части ( $\sim p(t, E')$ ), связанной с образованием тормозных фотонов, и отрицательной части ( $\sim \Gamma(t, E)$ ), обусловленной поглощением фотонов за счёт образования пар.

Подставляя в (41,14) и (41,15) упрощённые выражения (41,7) и (41,13) для  $l\omega_{\gamma}$  и  $l\omega_p$ , находим:

$$\frac{\partial p(t, E)}{\partial t} =$$

$$= \frac{14}{9} \int_E^{\infty} \frac{\Gamma(t, E')}{E'} dE' + \int_E^{\infty} \frac{p(t, E')}{E' - E} dE' - p(t, E) \int_0^E \frac{dE'}{E - E'}, \quad (41,16)$$

$$\frac{\partial \Gamma(t, E)}{\partial t} = \frac{1}{E} \int_E^{\infty} p(t, E') dE' - \frac{7}{9} \frac{\Gamma(t, E)}{E} \int_0^E dE'. \quad (41,16a)$$

Решение последних уравнений будем искать с помощью преобразований Лапласа-Меллина<sup>1)</sup>:

$$f(E) = \frac{1}{2\pi i E} \int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty} E^{-s} f(s) ds, \quad f(s) = \int_0^{\infty} E^s f(E) dE, \quad (41,17)$$

причём значение для параметра  $\delta$ , т. е. область интегрирования по переменной  $s$ , будет уточнена нами ниже.

Заметим, что функции  $f(s)$  и  $f(E)$  не равны друг другу даже при  $E=s$ , а связаны между собою соотношением (41,17), из которого видно, что  $f(s)$  представляют собою амплитуды разложения функции  $f(E)$  в интеграл Лапласа-Меллина.

Умножим обе части уравнения (41,16) на  $E^s dE$  и проинтегрируем по переменной  $E$  в пределах от 0 до  $\infty$ . Тогда будем иметь:

$$\begin{aligned} \frac{\partial p(t, s)}{\partial t} = & -p(t, s) \int_0^E \frac{dE'}{E-E'} + \\ & + \int_0^{\infty} dE \int_E^{\infty} E^s \left[ \frac{14}{9} \frac{\Gamma(t, E')}{E'} + \frac{p(t, E')}{E'-E} \right] dE'. \quad (41,18) \end{aligned}$$

Для вычисления правой части сделаем замену переменных: в одинарном интеграле

$$E' = \eta E,$$

в двойном интеграле

$$E' = E'', \quad E = \eta E'',$$

причём в последнем случае границы интегрирования преобразуются по схеме

$$\int_0^{\infty} dE \int_E^{\infty} f(E, E') dE' = \int_0^{\infty} E'' dE'' \int_0^1 d\eta f(\eta E'', E''). \quad (41,19)$$

<sup>1)</sup> Д. Д. Иваненко и А. А. Соколов, ЖЭТФ 8, 639 (1938).

Уравнение (41,18) принимает вид

$$\frac{\partial p(t, s)}{\partial t} = -A(s)p(t, s) + B(s)\Gamma(t, s). \quad (41,20)$$

Аналогичным способом получаем для уравнения (41,16а):

$$\frac{\partial \Gamma(t, s)}{\partial t} = C(s)p(t, s) - D(s)\Gamma(t, s), \quad (41,21)$$

где

$$A(s) = \int_0^1 \frac{1-\gamma_1^s}{1-\gamma_1} d\gamma = \psi(s+1) + \gamma, \\ B(s) = \frac{14}{9} \frac{1}{s+1}, \quad C(s) = \frac{1}{s}, \quad D(s) = \frac{7}{9}, \quad (41,22)$$

$\gamma = 0,5772$  — постоянная Эйлера,  $\psi(s+1)$  — логарифмическая производная от  $\Gamma$ -функции:

$$\psi(s+1) = \frac{d}{ds} \ln \Gamma(s+1). \quad (41,23)$$

Вычисления, проделанные с более точными выражениями (41,5) и (41,8) для вероятности тормозного испускания и вероятности образования пары привели бы нас также к уравнениям (41,20) и (41,21) со следующими значениями коэффициентов:

$$A(s) = 1,36 \frac{d}{ds} \ln \Gamma(s) - \frac{1}{(s+1)(s+2)} - 0,075 \dots \\ B(s) = 2 \left[ \frac{1}{s+1} - \frac{1,36}{(s+2)(s+3)} \right], \quad (41,24) \\ C(s) = \frac{1}{s+2} + \frac{1,36}{s(s+1)}; \quad D(s) = 0,773.$$

Таким образом, кинетические уравнения (41,5) и (41,16) мы свели к системе дифференциальных уравнений (41,20) и (41,21), решение которых имеет вид:

$$p(t, s) = a_1(s) e^{\lambda_1(s)t} + a_2(s) e^{\lambda_2(s)t}, \\ \Gamma(t, s) = b_1(s) e^{\lambda_1(s)t} + b_2(s) e^{\lambda_2(s)t}. \quad (41,25)$$

Здесь  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  являются корнями квадратного уравнения

$$\lambda^2 + (A+D)\lambda + AD - BC = 0,$$

т. е.

$$\lambda_1 = \frac{1}{2} \sqrt{(A-D)^2 + 4BC} - \frac{A+D}{2},$$

$$\lambda_2 = -\frac{1}{2} \sqrt{(A-D)^2 + 4BC} - \frac{A+D}{2}, \quad (41,26)$$

а отношение коэффициентов  $a$  и  $b$  равно

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{B}{A+\lambda_1} = \frac{D+\lambda_1}{C}, \quad \frac{a_2}{b_2} = \frac{B}{A+\lambda_2} = \frac{D+\lambda_2}{C}. \quad (41,27)$$

Таким образом, остаётся два произвольных коэффициента, которые следует определить из граничных условий. В качестве граничных условий выбирается распределение числа частиц по энергиям при  $t=0$ . Пусть на слой вещества падает один электрон с энергией  $E_0$ . В этом случае граничные условия принимают вид

$$p(0, E) = \delta(E_0 - E), \quad \Gamma(0, E) = 0 \quad (41,28)$$

или

$$p(0, s) = \int_0^{\infty} E^s \delta(E - E_0) dE = E_0^s, \quad \Gamma(0, s) = 0.$$

Тогда для определения коэффициентов  $a_1$  и  $a_2$  имеем уравнения

$$a_1 + a_2 = E_0^s,$$

$$\frac{A+\lambda_1}{B} a_1 + \frac{A+\lambda_2}{B} a_2 = 0.$$

Отсюда находим:

$$a_1 = \frac{\lambda_2 + A}{\lambda_2 - \lambda_1} E_0^s, \quad a_2 = -\frac{\lambda_1 + A}{\lambda_2 - \lambda_1} E_0^s.$$

Подставляя эти значения  $a_1$  и  $a_2$  в (41,25), найдём функции  $p(t, s)$  и  $\Gamma(t, s)$ , а затем с помощью формулы (41,17) найдём искомые функции  $p(t, E)$  и  $\Gamma(t, E)$ .

В частности, для функции  $p(t, E)$  мы имеем:

$$p(t, E) = \frac{1}{2\pi i E} \int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty} \left(\frac{E_0}{E}\right)^s \frac{\lambda_2 + A}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{\lambda_1 t} ds. \quad (41,29)$$

Нетрудно показать, что доля, привносимая в выражение (41,29) вторым членом ( $\sim e^{\lambda_2 t}$ ), экспоненциально убывает с глубиной ( $\lambda_2 < 0$ ), так что этот член мы сразу отбросим.

Выражение (41,29) мы можем представить в виде

$$p(t, E) = \frac{1}{2\pi i E} \int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty} H(s) e^{sy + \lambda_1 t} ds, \quad (41,30)$$

где

$$y = \ln \frac{E_0}{E}, \quad H(s) = \frac{\lambda_2(s) + A(s)}{\lambda_2(s) - \lambda_1(s)}. \quad (41,31)$$

Путь интегрирования в выражении (41,30) должен проходить параллельно мнимой оси справа от всех полюсов, которые определяются из уравнения

$$\lambda_2 - \lambda_1 = -\sqrt{(A-D)^2 + 4BC} = 0,$$

или

$$A - D = \pm 2i\sqrt{BC}.$$

Легко показать, что все корни последнего уравнения лежат в отрицательной полуплоскости, причём число полюсов равно бесконечности, что связано с поведением логарифмической производной  $\gamma$ -функции, входящей в коэффициент  $A(s)$ . Поэтому величина  $\delta$  должна быть вещественной и больше нуля.

Вычислим теперь интеграл (41,30) методом перевала<sup>1)</sup>. Рассмотрим функцию, стоящую в экспоненте выражения (41,30):

$$\varphi(s) = sy + \lambda_1 t.$$

Эта функция при  $s=0$  и  $s=\infty$  на вещественной оси обращается в бесконечность, и поэтому должна иметь минимум при некотором действительном положительном значении  $s_0$ . Значение для  $s_0$  может быть найдено из уравнения

$$\varphi'(s_0) = 0. \quad (41,32)$$

<sup>1)</sup> О методе перевала более подробно см. Р. Курант и Д. Гильберт, Методы математической физики, т. I, М.—Л., 1951, стр. 442.

Точка  $s_0$  носит название точки перевала, где функция  $\varphi(s)$  имеет достаточно острый минимум, если двигаться вдоль вещественной оси. Как известно, для каждой аналитической функции  $\varphi(\xi + i\eta)$  должно выполняться соотношение

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \eta^2} = 0.$$

Поэтому функция  $\varphi(s)$  имеет в точке  $s_0$  столь же острый максимум, если двигаться через точку  $s_0$  параллельно мнимой оси.

Выберем контур интегрирования таким образом, чтобы он проходил через точку  $s_0$ . С этой целью в формуле (41,30) мы должны положить  $\delta = s_0$ . Тогда наибольший вклад в значение интеграла (41,30) даёт интегрирование по участку контура, который непосредственно примыкает к точке  $s_0$ . В этом случае медленно меняющуюся функцию  $H(s)$  можно считать величиной постоянной, равной её значению в точке перевала  $s_0$ .

Функцию  $\varphi(s)$  разложим по степеням  $s - s_0$ :

$$\varphi(s) = sy + \lambda_1(s)t = s_0y + \lambda_1(s_0)t + \frac{1}{2}(s - s_0)^2 \lambda_1''(s_0)t + \dots, \quad (41,33)$$

и пренебрежём членами выше второго порядка относительно разности  $s - s_0$ . Здесь мы учли, что линейный член  $s - s_0$ , пропорциональный функции (41,32), обращается в нуль и даёт уравнение для определения точки перевала

$$\varphi'(s_0) = y + t\lambda_1'(s_0) = 0. \quad (41,34)$$

Подставляя последние разложения в формулу (41,30) и полагая  $s - s_0 = i\eta$ , находим:

$$p(t, E) = \frac{H(s_0)}{2\pi E} e^{s_0y + \lambda_1(s_0)t} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\eta^2 \frac{\lambda_1''(s_0)}{2} t} d\eta. \quad (41,34a)$$

Учитывая, что  $\lambda_1''(s_0) > 0$  (функция достигает минимума), находим после вычисления последнего интеграла:

$$p(t, E) dE = \frac{H(s_0)}{\sqrt{2\pi\lambda_1''(s_0)t}} \frac{1}{E} \left(\frac{E_0}{E}\right)^{s_0} e^{\lambda_1(s_0)t} dE, \quad (41,35)$$



причём согласно (41,34) значение  $s_0$  должно быть определено из уравнения

$$t = -\frac{1}{\lambda'_1(s_0)} \ln \frac{E_0}{E}. \quad (41,36)$$

Учёт следующих членов разложения (41,33) даст поправку порядка  $\frac{1}{t}$ . Аналогичным путём легко найти дифференциальное выражение для числа фотонов  $\Gamma(t, E)$ , а также интегральные выражения для числа заряженных частиц (т. е. общее число частиц с энергией, большей, чем  $E$ )

$$P(t, E) = \int_E^{\infty} p(t, E) dE, \quad (41,37)$$

и соответственно интегральное выражение для числа фотонов. Число частиц (41,35) при заданном значении  $E$  с увеличением  $t$  сначала возрастает, достигая при некотором оптимальном значении  $t$  ( $t = t_0$ ) своего максимального значения; при дальнейшем увеличении  $t$  ( $t > t_0$ ) число частиц начинает убывать. Аналогичное заключение можно сделать также для числа фотонов и для интегральных значений числа частиц. Оптимальная глубина  $t_0$  примерно равна тому значению  $t$ , при котором функция

$$\varphi(s) = sy + \lambda_1(s)t$$

достигает максимума, т. е. когда

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{\partial \varphi}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial t} + \lambda_1(s) = 0. \quad (41,38)$$

Принимая во внимание, что при этом должно удовлетворяться ещё и уравнение (41,34), находим:

$$\lambda_1(s_0) = \frac{1}{2} \sqrt{(A-D)^2 + 4BC} - \frac{A+D}{2} = 0. \quad (41,39)$$

Подставляя сюда вместо коэффициентов  $A, B, C$  и  $D$  более точные выражения (41,24), можно показать, что уравнение (41,39) будет удовлетворяться при  $s_0 \cong 1$ .

Для производных в точке  $s_0 = 1$  легко найти следующие значения:

$$\lambda'(s_0) = -0,9908, \quad \lambda''(s_0) = 1,5634. \quad (41,40)$$

Отсюда для оптимальной глубины частиц с энергией  $E$  имеем:

$$t_0 = 1,01 \ln \frac{E_0}{E}. \quad (41,41)$$

Подставляя значение  $s_0 = 1$  в формулу (41,35), найдём соответствующее максимальное значение для числа заряженных частиц

$$p_m(E_0, E) dE = \frac{0,137}{\left(\ln \frac{E_0}{E}\right)^2} \frac{1}{E^2} E_0 dE. \quad (41,42)$$

Определяя подобным способом оптимальную глубину для максимума интегрального значения (41,37) числа заряженных частиц, получаем:

$$T_0 = 1,01 \left[ \ln \frac{E_0}{E} - 1 \right] \quad (41,43)$$

с соответствующим значением для  $P$ :

$$P_m(E_0, E) = \frac{0,137}{\left(\ln \frac{E_0}{E} - 0,37\right)} \frac{E_0}{E}. \quad (41,44)$$

Из последних формул видно, что оптимальная глубина  $t_0$  для дифференциального числа частиц приблизительно на одну радиационную единицу больше оптимальной глубины  $T_0$  интегрального значения. Это связано с тем обстоятельством, что оптимальная глубина для дифференциального числа частиц наступает тем быстрее, чем больше значение  $E$ . Наконец, можно ещё вычислить положение центра тяжести ливневых частиц с энергией  $E$ :

$$t_c = \frac{\int_0^{\infty} t p(t, E) dt}{\int_0^{\infty} p(t, E) dt}, \quad (41,45)$$

а также продольные размеры ливня:

$$t_i^2 = \frac{\int_0^{\infty} (t - t_c)^2 p(t, E) dt}{\int_0^{\infty} p(t, E) dt}. \quad (41,46)$$

В частности, для дифференциального спектра заряженных частиц легко показать:

$$t_c = 1,01 \ln \frac{E_0}{E} + 1, \quad (41,47)$$

$$t_i^2 = 1,61 \ln \frac{E_0}{E} - 0,1. \quad (41,48)$$

Сравнивая формулы (41,47) с (41,41), мы видим, что глубина (т. е. расстояние от места начала образования ливня)

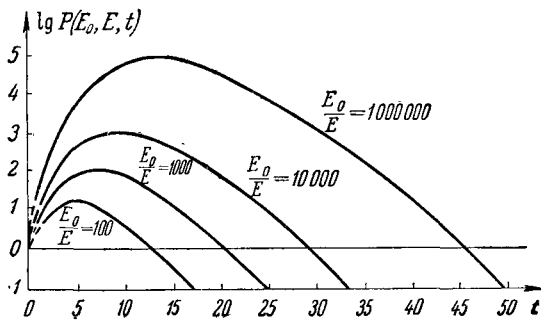


Рис. 13. Интегральный спектр электронов.

центра тяжести ливня больше соответствующей оптимальной глубины. Из этого следует, что возрастание числа частиц с глубиной перед максимумом происходит быстрее, чем убывание после максимума. Интегральный спектр для ливней электронов, вычисленный по формуле (41,37), приведён на рис. 13.

Аналогичным способом можно найти соответствующие значения для величин, характеризующих ливни фотонов. Примерно те же формулы мы получим, когда на границу

вещества ( $t = 0$ ) падает не заряженная частица, а один фотон.

Метод перевала позволил нам найти значения для искомого числа частиц с точностью до членов порядка  $\frac{1}{t}$ . Таким образом, наши решения имеют смысл при достаточно больших глубинах  $t$ . Это вполне соответствует физической сущности задачи, так как при малых толщинах значительную роль будут играть флуктуации, и весь расчёт для первых ступеней размножения ливня следует производить, решая уравнения «шаг за шагом», исходя из начального распределения, а не из статистических уравнений. Поэтому выражения, найденные нами для оптимальных глубин (41,41) и (41,43), пригодны, когда эти глубины будут превышать единицу радиационной длины, что имеет место для энергий  $E$ , не слишком близких к начальной энергии  $E_0$ .

По мере разрастания ливневого процесса число частиц увеличивается, в связи с чем энергия, приходящаяся на одну частицу, начинает уменьшаться. В этом случае при построении каскадной теории следует учитывать также поправки на ионизацию, эффект Комптона и рэзерфордское рассеяние. Кроме того, выражения для тормозного излучения и образования пар, которые были выведены для случая полного экранирования, т. е. для больших энергий, в области малых энергий являются весьма неточными.

Рассмотрение подобных весьма существенных уточнений носит сравнительно узко специальный характер, и поэтому для ознакомления со всеми этими вопросами мы отсылаем читателя к специальной литературе<sup>1)</sup>.

---

<sup>1)</sup> И. Е. Тамм и С. З. Беленький, Journ. of Phys. USSR I, 177 (1939); Б. Росси и К. Грейзен, Взаимодействие космических лучей с веществом, М., 1948; Л. Яносси, Космические лучи, М., 1949; С. З. Беленький, Лавинные процессы в космических лучах, М.—Л., 1948.

ГЛАВА IV  
ТЕОРИЯ ЭЛЕКТРОННО-ПОЗИТРОННОГО  
ВАКУУМА

§ 42. Проблема массы электрона и теория вакуума

а) **Постановка вопроса.** Как известно, поведение свободной элементарной частицы характеризуется массой покоя  $m$ , энергией  $E$  и импульсом  $p$ , связанных между собой формулой

$$m = \frac{\sqrt{E^2 - c^2 p^2}}{c^2}. \quad (42,1)$$

Например, масса покоя электрона и позитрона равняется приблизительно  $9 \cdot 10^{-28}$  г, а для протона она примерно в 1836 раз больше. Однако термин «масса покоя» имеет весьма условное значение для частиц с  $m=0$  (фотоны, нейтрино), поскольку при  $p=0$  эти частицы исчезают ( $E=h\nu=0$ ). Поэтому в дальнейшем массу покоя мы будем также называть «собственной массой». Вычисление собственной массы по формуле (42,1) может быть использовано как для частиц  $m \neq 0$ , так и для частиц с  $m=0$ .

Когда частицы обладают кинетической энергией или между ними существует взаимодействие, наряду с собственной массой появляется ещё дополнительная масса  $\Delta m$ , связанная с общей энергией  $E$  соотношением

$$\Delta m = \frac{E - \sum_i E_{oi}}{c^2},$$

где сумма берётся по всем собственным энергиям  $E_{0i} = m_i c^2$  частиц с массами покоя  $m_i$ .

Заметим, что с развитием науки механистическая теория, рассматривавшая ещё со времён Ньютона пространство и время совершенно не связанными друг с другом, а также независимыми от движущейся материи, оказалась слишком ограниченной и не могла дать истолкование целому ряду важнейших открытий в области физики в XIX и в особенности в XX веке. Это привело к созданию новых физических теорий, которые сводили ряд процессов к формам движения, более высоким, чем простое механическое перемещение (см. также § 28, п. в).

Специальная теория относительности установила связь между пространственными и временными измерениями (преобразование Лорентца - Эйнштейна), а также между энергией и массой [см. соотношение (42, 1a)], которую удалось выразить с помощью сравнительно простых математических соотношений. Общая теория относительности установила связь между массой (а также и энергией) и пространственно-временными измерениями<sup>1)</sup>.

Представители махистской школы, в том числе и сам Эйнштейн, пытались по-своему истолковать эти открытия.

В частности, соотношение между массой и энергией они до сих пор интерпретируют как сведение материи к движению, т. е. фактически воскрешают реакционную эпер-

<sup>1)</sup> Основы современного учения о пространстве были заложены ещё в неевклидовой геометрии, создателем которой является Лобачевский. Работы Лобачевского вскрыли метафизичность ньютоновского учения об абсолютном пространстве и времени, которое было использовано Кантом в качестве доказательства якобы того факта, что пространство и время являются свойствами человеческой познавательной способности, и поэтому должны относиться к доопытной или «априорной» категории.

Лобачевский доказал возможность существования различных геометрий, которые, по его смелой идее, должны зависеть от свойств материальных тел природы. Эти работы Лобачевского получили своё дальнейшее развитие в общей теории относительности. Более подробно см. А. П. Котельников и В. А. Фок, Некоторые применения идей Лобачевского в механике и физике, М.—Л., 1950.

гетику Оствальда, в которой делались попытки мыслить движение без материи<sup>1)</sup>.

В. И. Ленин в своей исторической работе «Материализм и эмпириокритицизм» ещё в 1908 г. показал, что нельзя смешивать материю как философскую категорию с нашими конкретными представлениями о строении

<sup>1)</sup> См., например, А. Эйнштейн и Л. Инфельд, Эволюция физики. М.—Л., 1948, где на стр. 185 авторы пытаются доказать, что «масса представляет собою энергию».

Дальше (на стр. 222) ими вещество рассматривается как «огромная концентрация энергии в сравнительно малом пространстве». Такая постановка вопроса привела, естественно, авторов к неприкрытым идеалистическим выводам. На стр. 261 они прямо пишут: «Она (т. е. наука—А. С.) является созданием человеческого разума с его свободно изобретёнными идеями и понятиями».

Таким образом, один из создателей теории относительности А. Эйнштейн, который совершенно правильно разработал ряд её конкретных физических положений, при рассмотрении некоторых принципиальных вопросов под влиянием философии махизма сделал реакционно-идеалистические выводы, вместо того чтобы правильно истолковать открытия, связанные с новым этапом нашего познания движущейся материи.

Последователи махизма делают другую принципиальную ошибку, развивая так называемое кинематическое направление, сводящееся к попыткам отождествить гравитационные силы с «силами инерции» («принцип эквивалентности»). Из реакционного принципа эквивалентности делается антинаучный вывод о равноправии любых систем координат, в том числе о равноправии систем Коперника и Птолемея. Как известно, «силы инерции» являются фиктивными, и вводятся из чисто формальных соображений, чтобы сохранить ту же связь между ускорением относительно неинерциальной системы координат и силой, которая была установлена Ньютоном для инерциальной системы.

Величайшее открытие Коперника позволило вскрыть природу тяготения и установить материальное, генетическое единство солнечной системы. Система же Птолемея, являющаяся следствием развития кинематического направления, совершенно не вскрывает закономерностей движения планет и поэтому была отвергнута наукой.

Советские учёные показали, что реакционный принцип «эквивалентности» не имеет никакого отношения к исследованию природы тяготения с помощью общей теории относительности Эйнштейна, а «искривление» пространства, приводящее к геометрии Лобачевского, исключительно зависит от распределения тяготеющих масс и их движения (см., например, статью В. Фока «Система Коперника и система Птолемея в свете общей теории относительности» в сборнике «Николай Коперник», М.—Л., 1947).

материи. Поэтому борьба за диалектический материализм в естествознании должна сводиться прежде всего к борьбе за марксистско-ленинское понимание материи, как объективной реальности, существующей вне нашего сознания и давной нам в ощущениях.

Масса и энергия характеризуют различные качественные стороны познаваемой нами движущейся материи. Установление соотношения между массой и энергией (и пространством и временем) никоим образом не означает их тождественности.

Соотношение (42,1а) отображает важнейшее открытие в области физики, заключающееся в установлении связи между двумя качественно различными величинами: энергией и массой, характеризующими движущуюся материю. В частности, формулировка этого соотношения находит своё отображение в законах сохранения энергии и массы, приводя к некоторому их обобщению. Это обобщение законов сохранения <sup>1)</sup> является существенным лишь в том случае, когда кинетическая или потенциальная энергия частиц соизмерима с собственной энергией, в особенности, когда мы рассматриваем вопросы, связанные с превращением одних элементарных частиц в другие. Рассмотрение этих превращений оказывается невозможным без учёта соотношения между массой и энергией ( $E = mc^2$ ). При малых же значениях энергии мы имеем практически два независимых закона сохранения.

Остановимся более подробно на проблеме массы элементарных частиц, в частности электронов.

Согласно классической электродинамике покоящийся и не взаимодействующий с другими частицами и внешними полями электрон благодаря наличию заряда  $-e$  всё же должен создавать своё электростатическое поле с энергией, равной

$$U = \alpha \frac{e^2}{a}. \quad (42,2)$$

---

<sup>1)</sup> М. В. Ломоносов один из первых высказал идею о существовании всеобщего закона сохранения вещества и движения.

Более подробно этот вопрос будет рассмотрен во второй части (см. § 1).



При выводе формулы (42,2) используется упрощённое модельное представление об электро́не как о шарике радиуса  $a$ , в котором по некоторому закону распределён заряд  $-e$ , причём коэффициент  $\alpha$ , имеющий порядок единицы, зависит от закона распределения. Например, при равномерном распределении заряда по поверхности  $\alpha = \frac{1}{2}$ , а при равномерном распределении заряда по объёму  $\alpha = \frac{3}{5}$ .

Собственная масса электрона в общем случае может складываться из двух частей, а именно: из неполевой (т. е. части, не связанной с энергией поля)  $m'$  и полевой  $m^{el}$

$$m = m' + m^{el}, \quad (42,3)$$

причём согласно (42,2) для полевой части имеем <sup>1)</sup>:

$$m^{el} = \frac{U}{c^2} = \alpha \frac{e^2}{ac^2}. \quad (42,4)$$

После того как Лорентц показал, что полевая масса

<sup>1)</sup> Строго говоря, классическая электродинамика приводит к следующему соотношению между полевой массой и электростатической энергией:

$$m^{el} = \frac{4}{3} \frac{U}{c^2}.$$

Появление множителя  $\frac{4}{3}$  вместо множителя 1 связано с тем обстоятельством, что заряд, распределённый внутри сферы, образует неустойчивую систему благодаря силам отталкивания, действующим между отдельными его частями. Поэтому для удержания заряда в равновесии необходимо ввести ещё немаксвелловские силы.

При построении других вариантов электродинамики, которые приводят к устойчивому состоянию заряда внутри электрона (нелинейная электродинамика, электродинамика с высшими производными), мы получаем правильное соотношение между полевой массой и энергией:

$$m = \frac{U}{c^2}$$

(более подробно см «Классическая теория поля», § 30, 32 и 33).

должна изменяться с увеличением скорости  $v$  заряда по закону

$$m^{el} = \frac{m_0^{el}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad (42,5)$$

а в то же время по теории Ньютона неполевая масса должна оставаться величиной постоянной, но опыты решили вопрос в пользу изменения массы по закону (42,5), было как будто бы доказано, что вся масса электрона должна носить полевой характер. Более того, подставляя в формулу (42,4) значение для радиуса электрона, найденного в задаче рассеяния ( $a \sim 10^{-13}$  см), Лорентц получил для электромагнитной массы вполне разумное значение ( $m \sim 10^{-27}$  г).

Однако после появления теории относительности, которая показала, что по закону (42,5) должна изменяться не только полевая, но также и неполевая масса, вопрос о природе собственной массы вновь оказался открытым.

Дальнейшее развитие теории полевой массы носило весьма формальный характер, так как не удавалось поставить экспериментов, которые позволили бы различить полевую массу от неполевой. Это различие могло бы, например, проявиться при исследовании поведения электрона в быстропеременном поле, поскольку при высоких частотах должны начать сказываться эффекты, связанные с внутренней структурой.

Исследуем движение электрона в быстропеременном поле.

Предположив, что вся масса электрона-шарика радиуса  $a$  является полевой, мы найдём уравнение его движения

$$m^{el} \ddot{x} = F_x + \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \ddot{\ddot{x}} \left( 1 + 0 \left( \frac{a}{\lambda} \right) \right), \quad (42,6)$$

получающееся в результате разложения силы самодействия по величине  $\frac{a}{\lambda}$ , где  $\lambda$  — длина внешней электро-

магнитной волны, приводящей электрон в колебание, а  $F_x$  — внешняя электромагнитная сила. Аналогичный вывод следует также и из более сложных полевых теорий (нелинейной теории, теории с высшими производными). Здесь мы ограничились написанием уравнения в нерелятивистском случае, поскольку релятивистское уравнение, имеющее более сложный вид, не может изменить суть дела. Формула (42,6) имеет место лишь при  $\lambda \gg a$ . При колебаниях же электрона с длиной волны, много меньшей его радиуса ( $\lambda \ll a$ ), разложение по величине  $\frac{a}{\lambda}$  теряет свой смысл и вместо уравнения (42,6) мы получили бы сложное уравнение.

Попытку создать теорию, которая была бы одинаково хорошо применима для любых длин волн, предпринял Дирак. Его теория электрона явилась по существу возвращением к теории точечного электрона с неполевой массой.

В частности, в нерелятивистском случае для точечного электрона ( $a \rightarrow 0$ ) уравнение (42,6) преобразуется к виду <sup>1)</sup>

$$m\ddot{x} = F_x + \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \ddot{\ddot{x}}, \quad (42,7)$$

причём это получается независимо от величины  $\lambda$ .

Квантовая электродинамика без учёта электронно-позитронного вакуума также долгое время не могла наметить пути разрешения проблемы собственной массы элементарных частиц. Как было показано нами в § 26, в квантовой электродинамике мы имеем не одну (как в классической теории), а две части собственной энергии электрона. Одна часть связана с испусканием и последующим поглощением фотонов [поперечная энергия; см. соотношение (26,46)]. Другая, так называемая продольная часть [см. соотношение (25,33)] связана с исключением продольного квантованного электромагнитного поля (т. е. псевдофо-

<sup>1)</sup> Более подробно с проблемой собственной массы электрона по классической теории можно познакомиться в соответствующей специальной литературе (см., например, «Классическая теория поля», стр. 220).

тонов). Продольная часть полевой массы соответствует по существу полевой массе электрона по классической теории, в то время как поперечная часть не имеет классического аналога.

В квантовой теории обе полевые массы обращаются в бесконечность. Всякие попытки ввести множитель обрезания, позволяющий сделать полевую массу конечной и равной массе электрона, оказались пока что бесплодными

**б) Теория неполевой массы.** Дальнейшее развитие теории собственной массы в квантовой электродинамике могло пойти по следующим двум путям: во-первых, можно было предположить, что электрон обладает в основном полевой массой. В этом случае применение современной квантовой электродинамики пришлось бы ограничить длинами волн порядка радиуса электрона [так же, как теория полевой массы в классической теории ограничивает применимость уравнения движения (42,6)]. Во-вторых, можно попытаться отбросить полевую массу самодействия и распространить законы квантовой электродинамики на более короткие длины волн. В частности, последний путь был предложен при построении квантовой теории затухания рассеяния с любыми энергиями<sup>1)</sup>. Последняя теория требует дальнейших экспериментальных обоснований, которые позволили бы положить полевую массу равной нулю.

В классическом случае мы можем исключить полевую массу, например, с помощью введения второго компенсирующего поля<sup>2)</sup>.

<sup>1)</sup> А. А. Соколов, *Journal of Phys USSR* 5, 231 (1941). Более подробно см. § 35.

<sup>2)</sup> А. А. Соколов, *Вестник МГУ* № 2 (1947); см. также *ЖЭТФ* 18, 280 (1948). Эти работы подробно изложены в монографии «Классическая теория поля», стр. 220. Заметим, что существует сравнительно большое число и других методов регуляризации не только в классическом, но и в квантовом случае (см § 44, п б).

Большинство способов регуляризации связано с введением вспомогательных полей. Эти вспомогательные поля вводятся пока что совершенно формально, для того чтобы исключить бесконечные члены самодействия.

Для этого следует наряду с максвелловским полем  $(\mathbf{H}, \mathbf{E})$ , переносящим электромагнитное взаимодействие между частицами и могущим отрываться от заряда в виде электромагнитных волн, ввести второе компенсирующее поле  $(\mathbf{h}, \mathbf{e})$ , действующее только на заряд, его порождающий. Чтобы компенсирующее поле не могло отрываться от заряда, мы должны при решении соответствующих даламберовских уравнений взять полусумму запаздывающих и опережающих потенциалов. Выбирая энергию второго поля с отрицательным знаком, мы сможем добиться того, что при наличии лишь одного покоящегося электрона энергия обоих полей будет равняться нулю.

В самом деле, общая энергия определяется выражением

$$U = \frac{1}{8\pi} \int (\mathbf{E}_1^2 - \mathbf{e}_1^2) d^3x.$$

В электростатике<sup>1)</sup> решение уравнений поля с запаздывающими потенциалами (для поля  $\mathbf{E}_1$ ) совпадает с решением, взятым в виде полусуммы запаздывающих и опережающих потенциалов (для поля  $\mathbf{e}_1$ ). Поэтому поле  $\mathbf{e}_1$  будет равняться полю  $\mathbf{E}_1$  ( $\mathbf{e}_1 = \mathbf{E}_1$ ), благодаря чему электростатическая энергия  $U_1$ , а вместе с тем и полевая собственная масса электрона обращаются в нуль.

Подобная теория не исключает появления полевой массы системы, которая возникает при взаимодействии двух и более зарядов. Для примера возьмём два заряда. Тогда максвелловское поле  $\mathbf{E}$  равняется сумме двух полей

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2,$$

---

<sup>1)</sup> При произвольном же движении заряда решения с запаздывающими и полусуммой запаздывающих и опережающих потенциалов являются различными, и поэтому сила самодействия не будет равняться нулю. Более точные расчёты (см. только что цитированную литературу) показывают, что сила самодействия приводит к силе радиационного трения, которая в нерелятивистском случае, но для любых частот колебаний определяется последним членом равенства (42,7).

и будет действовать на оба заряда. Кроме того, мы будем иметь два компенсирующих поля: поле  $e_1$ , действующее на первый заряд, и поле  $e_2$ , действующее на второй заряд.

Общая энергия поля будет равна

$$U = \frac{1}{8\pi} \int [(\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2)^2 - e_1^2 - e_2^2] d^3x.$$

В частности, в случае электростатики ( $e_1 = \mathbf{E}_1$ ,  $e_2 = \mathbf{E}_2$ ) общая энергия поля будет равняться лишь взаимной энергии двух зарядов, т. е.

$$U = \frac{1}{4\pi} \int (\mathbf{E}_1 \mathbf{E}_2) d^3x.$$

Поэтому общая масса  $M$  двух частиц ( $m_1$  и  $m_2$ ) будет складываться из неполевой ( $m_1$  и  $m_2$ ) и полевой частей ( $\Delta m = \frac{U}{c^2}$ ), т. е.

$$M = m_1 + m_2 + \frac{U}{c^2}. \quad (42,8)$$

Как известно, энергия связи электронов в атоме мала, и поэтому соответствующая ей дополнительная масса практически незаметна. Другое положение вещей мы имеем в атомном ядре, состоящем согласно модели Иваненко из нуклеонов (т. е. протонов и нейтронов). Начиная с ядра гелия и далее (при  $Z > 2$ ), энергия связи на каждый нуклеон равняется примерно  $7 M_{эв}$ , что приводит к появлению дополнительной массы (дефект массы) с отрицательным знаком (энергия притяжения отрицательна), составляющей по абсолютному значению приблизительно 0,8% от собственной массы нуклеона. Таким образом, масса сравнительно тяжёлых веществ складывается из собственной массы элементарных частиц и дополнительной полевой массы, несколько (примерно на 0,8%) уменьшающей общую массу частиц.

**в) Проблема массы в квантовой электродинамике.** До настоящего времени мы не имеем более или менее удовлетворительной в математическом отношении теории,

позволяющей исключить бесконечные полевые массы, связанные с самодействием. Однако квантовая электродинамика позволила наметить пути выделения в этих бесконечностях таких конечных членов, которые приводят к наблюдаемым эффектам. Сами же бесконечности, повидимому, не должны сказываться на этих эффектах и поэтому могут быть устранены из теории. Грубо говоря, идея выделения этой исчезающей полевой части та же самая, что и в классической теории компенсирующего поля, а именно: мы должны из общей энергии связи двух и более частиц и полей вычесть энергию самодействия каждой из частиц по отдельности<sup>1)</sup>.

Обобщая же полевую теорию переноса сил на общий случай, квантовая электродинамика предсказывает возможность дополнительного взаимодействия между зарядом и электромагнитным полем.

Как известно, взаимодействие между электроном заряда  $e_- = -e$  и электромагнитным полем определяется формулой

$$U = e_- (\Phi - (\alpha A)) = -e (\Phi - (\alpha A)). \quad (42,9)$$

Однако внешнее электромагнитное поле может поляризовать электронно-позитронный вакуум, который через виртуальное электромагнитное поле в свою очередь должен взаимодействовать с первоначальным электроном. Поэтому между внешним электромагнитным полем  $\Phi$ ,  $A$  и электроном возникает дополнительное к (42,9) полевое взаимодействие, переносимое виртуальным электронно-позитронным полем. Происхождение этого взаимодействия можно изобразить схемой

$$\Phi, A \rightleftharpoons (e_+, e_-) \rightleftharpoons e_-, \quad (42,10)$$

причём в скобках взяты виртуальные поля.

<sup>1)</sup> В классической теории при наличии одной ускоренно движущейся частицы также может появиться сила самодействия, пропорциональная  $\ddot{x}$ . Квантовым аналогом подобной силы является учёт обратного действия в теории переходных процессов, что было рассмотрено нами в § 35.

Самым замечательным оказался тот факт, что дополнительное взаимодействие приводит к ряду эффектов, например к сдвигу уровней в водородоподобных атомах, а также к существованию дополнительного (по сравнению с боровским) магнитного момента электрона, которые были обнаружены также экспериментальным путём. Таким образом, мы позвали новые свойства элементарных частиц, и наши теоретические выводы, связанные с проблемой собственной массы электрона, достигли такой стадии своего развития, при которой ставится возможной их экспериментальная проверка.

В последующих параграфах мы остановимся более подробно на проблеме взаимодействия между зарядом и электромагнитным полем.

### § 43. Дополнительное взаимодействие электрона с электромагнитным полем<sup>1)</sup>

а) Общие формулы для энергии взаимодействия. Согласно (24,14) энергия взаимодействия электрона с электромагнитным полем определяется выражением

$$V = -e \int \psi^+ (\Phi - (\alpha\Phi)) \psi d^3x, \quad (43.1)$$

причём потенциалы  $\Phi$  и  $\mathbf{\Phi}$  связаны в свою очередь с

<sup>1)</sup> Н. А. Bethe, Phys. Rev. 72, 339 (1947); J. Schwinger, Phys. Rev. 73, 416 (1948); А. Д. Галавин, ЖЭТФ 19, 521 (1949). Подробная литература с рассмотрением некоторых предварительных работ по сдвигу уровней (Блохинцев) приведена в обзорной статье Я. А. Смородинского [УФН 39, 325 (1949)]. Перевод статей и подробные рефераты содержатся в сборнике «Сдвиг уровней атомных электронов» под редакцией Д. Д. Иваненко (М., 1950), цитируемом в дальнейшем как «Сдвиг уровней атомных электронов». См. также научно-реферативные сборники управления научной информации Издательства иностранной литературы: «Теория элементарных частиц, опыты с частицами и  $\gamma$ -квантами большой энергии», серия 2, выпуск 1, 1950; «Теоретическая физика (квантовая электродинамика и ядерные оболочки)», серия 3, выпуск 11, 1951. Ряд вопросов, связанных со сдвигом уровней, рассмотрен в дополнительном параграфе монографии «Классическая теория поля».



волновыми функциями  $\psi$  соотношениями <sup>1)</sup>:

$$\square \Phi = 4\pi e \psi^+ \psi, \quad (43,2)$$

$$\square \Phi = 4\pi e \psi^+ \alpha \psi. \quad (43,3)$$

Последние уравнения имеют два решения. Первое решение является решением однородного уравнения, с помощью которого мы исследовали квантованное электромагнитное поле. Второе решение представляет собою решение уравнения с правой частью.

Подставляя второе решение в уравнение (43,1), мы получаем выражение, описывающее взаимодействие между системой электронов.

Попробуем обобщить это взаимодействие на вторично квантованную систему электронов, когда волновые функции  $\psi$  являются операторами. При этом мы должны учесть, что волновые функции не коммутируют друг с другом, и поэтому с самого начала важно установить порядок их расположения в произведении.

Разбивая вектор-потенциал  $\Phi$  на продольную  $\Phi^0$  и поперечную  $A$  части

$$\Phi = \Phi^0 + A, \quad (43,4)$$

где

$$\Phi^0 = \frac{\nabla(\nabla\Phi)}{\nabla^2},$$

$$A = \Phi - \frac{\nabla(\nabla\Phi)}{\nabla^2}, \quad (43,5)$$

необходимо принять во внимание, что для поперечной части имеет место запаздывание в передаче взаимодействия (см. вывод формулы Брейта в § 26, п. а), в то время

---

<sup>1)</sup> Подставляя эти значения потенциалов в уравнение Дирака, можно показать, что электрон будет взаимодействовать не только с вторично квантованным электромагнитным полем, но также с электронно-позитронным полем. Благодаря этому взаимодействию электроны могут непосредственно порождать пару [см. А. А. Соколов, *Sov. Phys.* 12, 472 (1937)].

как для продольной составляющей это запаздывание фактически не проявляется (см. вывод закона Кулона в § 25).

Мы расположим в следующем порядке волновые функции и потенциалы в энергии взаимодействия (43,1):

$$V = -\frac{1}{2} e \int \left[ \frac{1}{2} \psi^+ \psi \Phi + \frac{1}{2} \Phi \psi^+ \psi - \psi^+ \alpha \psi \left( \frac{1}{2} \Phi^0 + A^+ \right) - \left( \frac{1}{2} \Phi^0 + A^- \right) \psi^+ \alpha \psi \right] d^3x. \quad (43,6)$$

Перед функцией взаимодействия мы поставили коэффициент  $\frac{1}{2}$ , так как волновые функции, принадлежащие одним и тем же состояниям, будут входить дважды: один раз в выражение для плотности заряда и тока ( $\sim \psi^+ \psi$  и т. д.), а другой раз в выражение для потенциалов.

Значения для составляющих поперечного поля

$$A^- + A^+ = A$$

будут равны:

$$A^+ = \frac{1}{2} \int \left( 1 - \frac{i}{cx} \frac{\partial}{\partial t} \right) A(\mathbf{x}, t) e^{i\mathbf{x}r} d^3x, \quad (43,7)$$

$$A^- = \frac{1}{2} \int \left( 1 + \frac{i}{cx} \frac{\partial}{\partial t} \right) A(\mathbf{x}, t) e^{i\mathbf{x}r} d^3x, \quad (43,8)$$

где величины  $A(\mathbf{x}, t)$  являются амплитудами Фурье вектор-потенциала поперечного поля:

$$A(\mathbf{r}, t) = \int A(\mathbf{x}, t) e^{i\mathbf{x}r} d^3x. \quad (43,9)$$

Прежде всего заметим, что для вторично не квантованных волновых функций  $\psi$ , когда потенциалы коммутируют с волновыми функциями, выражение (43,6) точно переходит в формулу (43,1), которую при вычислении энергии взаимодействия системы электронов следует поделить пополам.

Разложение поперечной части на составляющие (43,7) и (43,8) заимствовано из теории вторичного квантования свободного поперечного поля, когда можно положить

$$A(\mathbf{x}, t) = A(\mathbf{x}) e^{-icx t} + A^+(-\mathbf{x}) e^{icx t}. \quad (43,10)$$

Подставляя (43,10) в (43,7) и (43,8), найдём, что функция

$$A^+ = \int A^+(-\mathbf{x}) e^{i\mathbf{c}\mathbf{x}t + i\mathbf{x}\cdot\mathbf{r}} d^3\mathbf{x} \quad (43,11)$$

будет характеризовать появление фотонов, а функция

$$A^- = \int A(\mathbf{x}) e^{-i\mathbf{c}\mathbf{x}t + i\mathbf{x}\cdot\mathbf{r}} d^3\mathbf{x} \quad (43,12)$$

— их поглощение. Поэтому при вычислении взаимодействия, когда оператор потенциала  $A$  стоит справа, оставим лишь ту его часть, которая соответствует появлению частицы ( $\sim A^+$ ); напротив, когда оператор  $A$  стоит слева, сохраним часть ( $\sim A^-$ ), связанную с поглощением частиц. Этот способ учёта запаздывающего действия был использован при вычислении формул Брейта, т. е. при вычислении взаимодействия, переносимого полем фотонов, когда мы полагали

$$a'^+ a = 0, \quad aa'^+ \sim \delta_{\mathbf{x}\mathbf{x}'}$$

Последнее условие мы фактически распространили также и на общий случай вторично квантованных полей.

**б) Взаимодействие между вторично квантованными состояниями электронов.** Волновые функции, описывающие вторично квантованные состояния электронов мы представим в виде:

$$\begin{aligned} \psi^+ &= \sum_{n_1} C_{n_1}^+ e^{i\mathbf{c}K_{n_1}t} \psi_{n_1}^+(\mathbf{r}), \\ \psi &= \sum_{n_2} C_{n_2} e^{-i\mathbf{c}K_{n_2}t} \psi_{n_2}(\mathbf{r}), \end{aligned} \quad (43,13)$$

где  $\mathbf{c}\hbar K_n$  — энергия электрона в  $n$ -м состоянии,  $\psi_r(r)$  — волновая функция, удовлетворяющая уравнению Дирака

$$(K_n - H_{\mathbf{k}}) \psi_n = 0; \quad (43,14)$$

здесь

$$\mathbf{c}\hbar H_{\mathbf{k}} = \mathbf{c}\hbar \frac{1}{i} (\boldsymbol{\alpha}\nabla) + \rho_3 mc^2 + V \quad (43,15)$$

является гамильтонианом системы, а  $V$  — потенциальная энергия. Операторы  $C_n$ , описывающие вторично квантованные состояния, должны удовлетворять перестановоч-

НЫМ СООТНОШЕНИЯМ:

$$[C_n^+, C_{n'}]_+ = C_n^+ C_{n'} + C_{n'} C_n^+ = \delta_{nn'}, \quad (43,16)$$

$$[C_n, C_{n'}]_+ = [C_n^+, C_{n'}^+]_+ = 0. \quad (43,17)$$

Они действуют на функцию  $f(N)$  от чисел заполнения. В случае отсутствия частиц функция  $f(N)$  имеет вид

$$f = f(0, 0, 0, 0, \dots; 1, 1, 1, 1, \dots), \quad (43,18)$$

соответствующий тому положению, что состояния с положительной энергией все свободны ( $N=0$ ), а состояния с отрицательной энергией все заняты ( $N=1$ ).

При наличии же одного электрона или одного позитрона функция  $f$  становится соответственно равной значениям:

$$\begin{aligned} f &= f(0, 0, 1, 0, \dots; 1, 1, 1, 1, \dots), \\ f &= f(0, 0, 0, 0, \dots; 1, 1, 0, 1, \dots). \end{aligned} \quad (43,19)$$

В наших дальнейших расчётах мы функцию  $f$  писать не будем. Её же влияние будет автоматически учтено, если мы на амплитуды  $C_n$  наложим следующие условия. В случае отсутствия частицы в состоянии  $n$ :

$$C_n C_n^+ = 1, \quad C_n^+ C_n = 0. \quad (43,20)$$

При наличии частицы в состоянии  $n$

$$C_n C_n^+ = 0, \quad C_n^+ C_n = 1. \quad (43,21)$$

Подставляя разложение (43,13) в уравнение (43,2), мы найдём для потенциала  $\Phi$  в результате деления на оператор  $\square$  следующее выражение<sup>1)</sup>:

$$\begin{aligned} \Phi &= -\frac{e}{2\pi^2} \sum_{n_1, n_2} C_{n_1}^+ C_{n_2} e^{ict(K_{n_1} - K_{n_2})} \times \\ &\times \int \psi_{n_1}^+(\mathbf{r}') \psi_{n_2}(\mathbf{r}') \frac{e^{i\mathbf{x} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}}{x^2 - (K_{n_1} - K_{n_2})^2} d^3x d^3x'. \end{aligned} \quad (43,22a)$$

<sup>1)</sup> Правила деления на оператор  $\square$  подробно исследованы в монографии «Классическая теория поля», стр. 85. В нашем случае мы выбрали решение, соответствующее полусумме запаздывающих и опережающих потенциалов, поскольку влияние запаздывания в квантовом случае следует учитывать с помощью соотношений (43,7) и (43,8), определяющих порядок расположения квантованных амплитуд.

Аналогичным способом легко найти и остальные потенциалы:

$$\Phi^0 = -\frac{e}{2\pi^2} \sum_{n_1, n_2} C_{n_1}^+ C_{n_2} e^{icl(K_{n_1} - K_{n_2})} \times \\ \times \int \psi_{n_1}^+(r') \frac{\nabla(\nabla\alpha)}{\nabla^2} \psi_{n_2}(r') \frac{e^{ix(r-r')}}{x^2 - (K_{n_1} - K_{n_2})^2} d^3x d^3x', \quad (43,22б)$$

$$A^\pm = -\frac{e}{4\pi^2} \sum_{n_1, n_2} C_{n_1}^+ C_{n_2} e^{icl(K_{n_1} - K_{n_2})} \times \\ \times \int \psi_{n_1}^+(r') \left( \alpha - \frac{\nabla(\nabla\alpha)}{\nabla^2} \right) \psi_{n_2}(r') \frac{e^{ix(r-r')}}{(x \pm (K_{n_1} - K_{n_2}))x} d^3x d^3x'. \quad (43,22в)$$

Подставляя найденные значения потенциалов в формулу (43,6), а также принимая во внимание разложения для волновых функций (43,13), мы найдём следующее выражение для функции взаимодействия:

$$V = \sum_{n_1 n_2 n_3 n_4} C_{n_1}^+ C_{n_2} C_{n_3}^+ C_{n_4} e^{icl(K_{n_1} - K_{n_2} + K_{n_3} - K_{n_4})} V_{n_1 n_2 n_3 n_4},$$

где

$$V_{n_1 n_2 n_3 n_4} = \\ = \int U_{n_1 n_2 n_3 n_4} \psi_{n_1}^+(r) \psi_{n_2}(r) \psi_{n_3}^+(r') \psi_{n_4}^-(r') d^3x d^3x' \quad (43,23)$$

и

$$U_{n_1 n_2 n_3 n_4} = \\ = \frac{e^2}{8\pi^2} \int e^{ix(r-r')} \left\{ \left[ \frac{1}{x^2 - (K_{n_1} - K_{n_3})^2} + \frac{1}{x^2 - (K_{n_1} - K_{n_2})^2} \right] \times \right. \\ \times \left[ 1 - \frac{(K_{n_1} - K_{n_3})(K_{n_1} - K_{n_2})}{x^2} \right] - \\ - \left[ \frac{1}{x(x - K_{n_1} + K_{n_3})} + \frac{1}{x(x - K_{n_1} + K_{n_2})} \right] \times \\ \left. \times \left[ (\alpha\alpha') - \frac{(K_{n_1} - K_{n_3})(K_{n_1} - K_{n_2})}{x^2} \right] \right\} d^3x. \quad (43,24)$$

Матрицы  $\alpha$  и  $\alpha'$  должны стоять между волновыми функциями, зависящими соответственно от  $r$  и  $r'$ .

При выводе последнего соотношения мы приняли во внимание следующие равенства:

$$\begin{aligned} \langle \psi_{n_1}^+ e^{ixr} (\alpha x) \psi_{n_2} \rangle &= \langle \psi_{n_1}^+ (H_k e^{ixr} - e^{ixr} H_k) \psi_{n_2} \rangle = \\ &= (K_{n_1} - K_{n_2}) \langle \psi_{n_1}^+ e^{ixr} \psi_{n_2} \rangle; \\ \langle \psi_{n_1}^+ e^{-ixr} (\alpha x) \psi_{n_2} \rangle &= -(K_{n_1} - K_{n_2}) \langle \psi_{n_1}^+ e^{-ixr} \psi_{n_2} \rangle. \end{aligned} \quad (43,25)$$

Здесь мы ввели обозначение для матричных элементов:

$$\langle u \rangle = \int u d^3x. \quad (43,25a)$$

В дальнейшем нас будет интересовать случай, когда временной множитель в выражении (43,26) будет отсутствовать, т. е. когда

$$K_{n_1} - K_{n_2} = K_{n_4} - K_{n_3}.$$

Тогда функция  $U$  становится равной

$$\begin{aligned} U_{n_1 n_2 n_3 n_4} &= \\ &= \frac{e^2}{4\pi^2} \int e^{ix(r-r')} \left[ \frac{\sum_{\mu=1}^4 \alpha_{\mu} \alpha'_{\mu}}{x(K_{n_4} - K_{n_3} - x)} - \frac{K_{n_4} - K_{n_3}}{x^3} \right] d^3x \end{aligned} \quad (43,26)$$

где  $\alpha_4 = iI$ .

Полагая в последней формуле  $n_1 = n_4 = n$  и  $n_2 = n_3 = n'$ , мы получим обменный член, а при  $n_1 = n_2 = n$  и  $n_3 = n_4 = n'$  — необменный член взаимодействия.

Общая функция, определяющая взаимодействие между вторично квантованными состояниями электронов, будет равна:

$$V = \sum'_{n, n' \neq n} C_n^+ C_{n'} C_n^+ C_{n'} V_{nn'n'n} + \sum_{n, n'} C_n^+ C_n C_n^+ C_{n'} V_{nnn'n'}. \quad (43,27)$$

в) Энергия взаимодействия электромагнитного поля с полем электронов и позитронов. Наша задача заключается в следующем: задан электрон в статическом электрическом или магнитном поле, требуется найти дополнительную полевую энергию взаимодействия электрона с полем.

Положив в основу наших вычислений формулу (43,27), мы должны прежде всего найти общую энергию  $V_1$  при наличии и электрона, и электромагнитного поля. Затем из этого выражения энергии мы должны вычесть энергию  $V_0$ , предполагая, что электрон отсутствует. Энергия  $V_0$  представляет собою, по существу, энергию самодействия электромагнитного поля, обязанную его связи с полем виртуальных электронов и позитронов. Кроме того, из полученного выражения мы должны вычесть ещё энергию самодействия электрона ( $V'$ ).

Итак, энергию связи электрона со статическим электрическим или магнитным полем, в которой исключены лишь члены самодействия поля, мы будем искать по формуле

$$V = V_1 - V_0. \quad (43,28)$$

Прежде всего заметим, что в случае отсутствия электронов и позитронов энергия  $V_0$  не обращается в нуль. В самом деле, рассматривая  $C_n^+$  и  $C_n$  как квантовые амплитуды, характеризующие заполнение состояния  $n$ , будем иметь, что в случае отсутствия частицы

$$C_n^+ C_n = 0, \quad C_n C_n^+ = 1, \quad (43,29)$$

а при наличии одной частицы (в случае статистики Ферми в данном состоянии не может быть более одной частицы), наоборот:

$$C_n C_n^+ = 0, \quad C_n^+ C_n = 1. \quad (43,30)$$

При отсутствии электронов и позитронов все состояния с положительной энергией ( $n_+$ ) свободны, а все состояния с отрицательной энергией ( $n_-$ ) заполнены, т. е. отличными от нуля будут лишь следующие комбинации амплитуд:

$$C_{n_+} C_{n_+}^+ = 1, \quad C_{n_-}^+ C_{n_-} = 1. \quad (43,31)$$

---

<sup>1)</sup> Возможные способы исключения энергии  $V'$  будут рассмотрены нами в § 44, п. б.

Поэтому значение для  $V_0$  согласно (43,27) и (43,31) будет равно

$$V_0 = \sum_{n_+ n_-} (V_{n_+ n_+ n_-} + V_{n_- n_- n'_-}), \quad (43,31a)$$

причём суммирование по квантовому числу  $n_+$  производится по всем состояниям с положительной энергией, а по  $n_-$  — по всем состояниям с отрицательной энергией.

При наличии одной частицы (электрона) в состоянии  $n_+ = 0$  отличными от нуля будут следующие комбинации амплитуд:

$$C_+^+ C_0 = 1; C_{n_+} C_{n_+}^+ = 1 \quad (n_+ \neq 0), C_{n_-}^+ C_{n_-} = 1. \quad (43,32)$$

Тогда согласно (43,27) энергия  $V_1$  становится равной:

$$V_1 = V_0 - \sum_{n_-} V_{n_- 0 0 n_-} + \sum_{n_+} V_{0 n_+ n_+ 0} + \\ + \sum_{n_-} (V_{0 0 n_- n_-} + V_{n_- n_- 0 0}). \quad (43,33)$$

Наоборот, при наличии одной античастицы (например, позитрона) в состоянии  $n'_- = 0'$  вместо (43,33) имеем:

$$V'_1 = V_0 - \sum_{n'_+} V_{0' n'_+ n'_+ 0'} + \sum_{n'_-} V_{n'_- 0' 0' n'_-} - \\ - \sum_{n_-} (V_{0' 0' n'_- n'_-} + V_{n'_- n'_- 0' 0'}). \quad (43,34)$$

Заметим, что мы можем, наоборот, позитрон сопоставить с движением частицы, а электрон — с античастицей. Если электрон мы сопоставляем с движением частицы, то его поведение будет описываться основным уравнением Дирака с положительной энергией ( $E > 0$ ) и отрицательным зарядом ( $-e$ ):

$$\left( -\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial t} + e\Phi - c \left( \alpha \left( \frac{\hbar}{i} \nabla + \frac{e}{c} \mathbf{A} \right) - \rho_3 m c^2 \right) \right) \psi e^{-\frac{iE}{\hbar} t} = 0.$$

Наоборот, когда электрон мы сопоставляем с движением античастицы, то его поведение будет описываться ком-



плексно-сопряжённым уравнением с отрицательной энергией ( $E' < 0$ ) и положительным зарядом ( $+e$ ):

$$\psi'^+ e^{\frac{iE'}{\hbar} t} \left( -\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial t} - e\Phi - c \left( \boldsymbol{\alpha} \left( \frac{\hbar}{i} \nabla - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right) \right) - \rho_3 mc^2 \right) = 0.$$

Как было указано в § 17, действие операторов, стоящих после функции, определяется правилом

$$\psi'^+ \frac{\partial}{\partial t} \rightarrow -\frac{\partial \psi'^+}{\partial t}$$

и т. д.

Делая в основном уравнении замену

$$\psi \rightarrow i\alpha_2 \rho_3 \psi'' \quad (43,34a)$$

и полагая  $E = -E'$ , мы найдем, что оба уравнения для функции  $\psi'^+$  и  $\psi''$  будут точно совпадать друг с другом, в чём нетрудно убедиться, если записать матричные уравнения в виде системы четырёх уравнений. Отсюда мы находим следующее соотношение между компонентами волновых функций обоих уравнений:

$$\psi_{\mu}^{\prime+} = \psi_{\mu}^{\prime\prime}, \quad E' = -E.$$

Замена волновых функций не может изменить значение квадратов матричных элементов вида (43,25) в силу соотношений

$$\langle \psi_n^+ \alpha_{\mu} \psi_{n'} \rangle = \langle \psi_n^{\prime\prime+} \rho_3 \alpha_2 \alpha_{\mu} \alpha_2 \rho_3 \psi_{n'}^{\prime\prime} \rangle = \langle \psi_n^{\prime+} \alpha_{\mu} \psi_{n'} \rangle; \quad (43,35)$$

значки  $n$  и  $n'$  характеризуют различные квантовые состояния, а дираковские матрицы  $\alpha_{\mu}$  принимают значения  $\boldsymbol{\alpha}, iI$ .

Таким образом, переход от одного варианта теории к другому может быть совершён путём замены знака у энергии. Полагая в равенстве (43,34)

$$\begin{aligned} E_{n'_-} &\rightarrow -E_{n_+}, \\ E_n &\rightarrow -E_{n_-}, \\ E_{0'} &\rightarrow -E_0, \end{aligned} \quad (43,35a)$$

т. е. относя попережнему  $n_+$  к тем состояниям, в которых имеются частицы, мы найдём, что уравнение (43,34) должно соответствовать при заменах (43,35) и (43,35а) тому варианту теории, когда наличие электрона соответствует появлению «дырки».

Как видно из формул (43,23) и (43,35а), в этом случае матричные элементы преобразуются по схеме:

$$\begin{aligned} V_{n'_+ 0' 0' n'_-} &\rightarrow V_{0n_+ n_+ 0}, \\ V_{0' n'_+ n'_+ 0'} &\rightarrow V_{n_- 00 n_-}, \\ V_{0' 0' n'_+ n'_-} = V_{n'_- n'_- 0' 0'} &\rightarrow V_{00 n_+ n_+} = V_{n_+ n_+ 00}. \end{aligned} \quad (43,36)$$

Учитывая требование симметрии относительно замены частиц на античастицы, мы находим для искомой энергии взаимодействия:

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{2} (V_1 + V_1') - V_0 = \\ &= \left( \sum_{n_+} V_{0n_+ n_+ 0} - \sum_{n_-} V_{n_- 00 n_-} + \sum_{n_-} V_{00 n_- n_-} - \sum_{n_+} V_{00 n_+ n_+} \right). \end{aligned} \quad (43,37)$$

Отсюда видно, что общая энергия связи складывается из двух частей: обменной

$$V^A = \sum_{n_+} V_{0n_+ n_+ 0} - \sum_{n_-} V_{n_- 00 n_-} \quad (43,38)$$

и необменной части

$$V^N = \sum_{n_-} V_{00 n_- n_-} - \sum_{n_+} V_{00 n_+ n_+}, \quad (43,39)$$

т. е.

$$V = V^A + V^N. \quad (43,40)$$

г) **Обменная часть взаимодействия.** Подставляя в формулу (43,38) значения для функции  $V$  из равен-

ства (43,23), найдём для обменной части взаимодействия следующее выражение:

$$V^A = \int \left[ \sum_{n_+} U_{0 n_+ n_+ 0} \psi_0^\dagger(\mathbf{r}) \psi_{n_+}(\mathbf{r}) \psi_{n_+}^\dagger(\mathbf{r}') \psi_0(\mathbf{r}') - \sum_{n_-} U_{n_- 0 0 n_-} \psi_{n_-}^\dagger(\mathbf{r}) \psi_0(\mathbf{r}) \psi_0^\dagger(\mathbf{r}') \psi_{n_-}(\mathbf{r}') \right] d^3x d^3x'. \quad (43,41)$$

Принимая во внимание равенство (43,25а), мы можем преобразовать последнее выражение к виду

$$V^A = \frac{e^2}{4\pi^2} \sum_n \int \left[ \frac{1}{K_0 - K_n - \chi \delta_n} \sum_{\mu=1}^4 \langle \psi_0^\dagger e^{i\chi r} \alpha_\mu \psi_n \rangle \times \right. \\ \times \langle \psi_n^\dagger e^{-i\chi r} \alpha_\mu \psi_0 \rangle - \frac{K_0 - K_n}{\chi^2} \langle \psi_0^\dagger e^{i\chi r} \psi_n \rangle \times \\ \left. \times \langle \psi_n^\dagger e^{-i\chi r} \psi_0 \rangle \right] \frac{d^3\chi}{\chi}, \quad (43,42)$$

где знаковая функция

$$\delta_n = \frac{K_n}{|K_n|}, \quad (43,43)$$

а сумма по  $n$  берётся по всем квантовым состояниям как с положительной, так и с отрицательной энергией. При выводе последней формулы мы учли соотношение

$$\langle \psi_{n_-}^\dagger e^{i\chi r} \alpha_\mu \psi_0 \rangle \langle \psi_0^\dagger e^{-i\chi r} \alpha_\mu \psi_{n_-} \rangle = \\ = \langle \psi_0^\dagger e^{i\chi r} \alpha_\mu \psi_{n_-} \rangle \langle \psi_{n_-}^\dagger e^{-i\chi r} \alpha_\mu \psi_0 \rangle, \quad (43,44)$$

получающееся в результате замены переменной  $\chi$ , по которой мы производим интегрирование, на  $-\chi$ .

С помощью соотношений (43,25) и (43,46) (см. ниже) легко показать, что интеграл, пропорциональный множителю  $\frac{K_0 - K_n}{\chi^2}$ , после интегрирования по углам обращается в нуль.

Отсюда для суммарной обменной энергии мы находим выражение

$$V^A = \frac{e^2}{4\pi^2} \sum_n \int \frac{1}{K_0 - K_n - \alpha \delta_n} \sum_{\mu=1}^4 \langle \psi_0^\dagger e^{i\mathbf{x}r} \alpha_\mu \psi_n \rangle \times \\ \times \langle \psi_n^\dagger e^{-i\mathbf{x}r} \alpha_\mu \psi_0 \rangle = \frac{d^3x}{x}. \quad (43,45)$$

Для дальнейших преобразований воспользуемся следующим свойством матричных элементов:

$$\sum_n \langle \psi_0^\dagger A \psi_n \rangle \langle \psi_n^\dagger B \psi_0 \rangle = \langle \psi_0^\dagger AB \psi_0 \rangle, \quad (43,46)$$

имеющим место, когда величины  $A$  и  $B$  не зависят от значка  $n$ , а суммирование ведётся по всем квантовым состояниям.

Чтобы использовать равенство (43,46) в нашем случае, мы должны прежде всего избавиться в соотношении (43,45) от величин  $K_n$  и  $\delta_n$ , зависящих от значка  $n$ .

Заметим, что величина  $K_n$  связана с гамильтонианом, не зависящим от  $n$ ,

$$H_{\mathbf{k}} = \frac{1}{c\hbar} H = (\boldsymbol{\alpha}\mathbf{k}) + k_0\beta_3 - \frac{e}{c\hbar} (\Phi - (\boldsymbol{\alpha}\mathbf{A})), \quad (43,47)$$

соотношением

$$(K_n - H_{\mathbf{k}}) \psi_n = 0.$$

Последнюю формулу можно представить в более общем виде:

$$K_n^s \psi_n = H_{\mathbf{k}}^s \psi_n,$$

где показатель степени  $s$  является положительным целым числом. Поэтому для функций  $f(K_n)$ , разложимых по степеням  $K_n$ , мы имеем:

$$f(K_n) \psi_n = f(H_{\mathbf{k}}) \psi_n, \quad (43,48)$$

откуда, воспользовавшись формулами

$$\frac{1}{K_0 - K_n - \alpha \delta_n} \psi_n = \frac{1}{K_0 - H_{\mathbf{k}} - \alpha \frac{H_{\mathbf{k}}}{|\mathbf{H}_{\mathbf{k}}|}} \psi_n, \quad (43,49)$$

$$H_{\mathbf{k}} e^{-i\mathbf{x}r} = e^{-i\mathbf{x}r} H_{\mathbf{k}-\mathbf{x}},$$

найдем:

$$V^A = \frac{e^2}{4\pi^2} \int \sum_{\mu=1}^4 \langle \psi_0^\dagger \alpha_\mu \frac{1}{K_0 - H_{\mathbf{k}-\mathbf{x}} - \varepsilon} \frac{H_{\mathbf{k}-\mathbf{x}}}{|H_{\mathbf{k}-\mathbf{x}}|} \alpha_\mu \psi_0 \rangle \frac{d^3\mathbf{x}}{x}, \quad (43,50)$$

где

$$H_{\mathbf{k}-\mathbf{x}} = H_{\mathbf{k}} - (\alpha\mathbf{x}).$$

д) **Необменная часть взаимодействия.** Согласно формулам (43,39), (43,26) и (43,23) необменную часть взаимодействия мы можем представить в виде:

$$V^N = \frac{e^2}{4\pi^2} \sum_n \sum_{\mu=1}^4 \int \langle \psi_0^\dagger e^{i\mathbf{x}r} \alpha_\mu \psi_0 \rangle \delta_n \langle \psi_n^\dagger e^{-i\mathbf{x}r} \alpha_\mu \psi_n \rangle \frac{d^3\mathbf{x}}{x^2}. \quad (43,51)$$

Для анализа последней формулы проинтегрируем её по переменной  $\mathbf{x}$ . Тогда, вводя обозначения для плотности заряда

$$\rho_n = -e\psi_n^\dagger \psi_n$$

и плотности тока

$$\mathbf{j}_n = -e\psi_n^\dagger \boldsymbol{\alpha} \psi_n,$$

мы можем представить необменную часть взаимодействия в виде:

$$V^N = \frac{1}{2} \int \frac{d^3x d^3x'}{|r-r'|} \{ \rho_0(r) [\rho_-(r') - \rho_+(r')] - \mathbf{j}_0(r) [\mathbf{j}_-(r') - \mathbf{j}_+(r')] \}, \quad (43,52)$$

где

$$\rho_- = - \sum_{n_-} e\psi_{n_-}^\dagger \psi_{n_-}, \quad \mathbf{j}_-(r') = - \sum_{n_-} e\psi_{n_-}^\dagger \boldsymbol{\alpha} \psi_{n_-}$$

является плотностью заряда и плотностью тока частиц с отрицательной энергией, а  $\rho_+$  и  $\mathbf{j}_+$  — плотностью заряда и плотностью тока частиц с положительной энергией.

Более подробно на вычислениях обменной и необменной частей взаимодействия мы остановимся в следующем параграфе.

## § 44. Исследование обменной части взаимодействия

При более детальном исследовании обменной части взаимодействия рассмотрим случай малых скоростей, когда расчёт можно вести путём разложения энергии в ряд по величине  $\frac{v}{c}$ . Мы получим члены взаимодействия, которые можно сравнивать с экспериментальными данными, если ограничимся величинами порядка  $\left(\frac{v}{c}\right)^2$  ( $v$  — скорость электрона). Это равносильно разложению до  $\frac{p^2}{m} \left(\frac{p}{mc}\right)^2$  ( $p$  — импульс электрона) для членов, не содержащих внешнего поля, и до  $\left(\frac{p}{mc}\right)^2 U$  для членов, содержащих внешнее поле (в нерелятивистском приближении  $U \sim \frac{p^2}{m}$ ). Члены, пропорциональные  $\frac{1}{mc^2} U^2$ , в разложении должны отсутствовать, поскольку они не обладают калибровочной инвариантностью. Отсутствие этих членов можно показать также непосредственным расчётом. Члены, пропорциональные  $\frac{p^2}{m} \left(\frac{p}{mc}\right)^2$ , не зависят от внешнего потенциала и поэтому относятся к энергии самодействия, на анализе которой мы остановимся особо.

Таким образом, при разложении энергии в ряд мы оставим, кроме величин, связанных с энергией самодействия, члены, пропорциональные

$$U, \quad \frac{p}{mc} U, \quad \frac{p^2}{m^2 c^2} U.$$

Подробный расчёт мы будем производить для случая лишь одного электростатического потенциала, когда можно положить

$$u = \frac{i}{c\hbar} U = -\frac{e}{c\hbar} \Phi. \quad (44,1)$$

Переход к общему случаю, когда кроме электрического поля появляется ещё магнитное, может быть совершён

по следующей схеме <sup>1)</sup>:

$$\Phi \rightarrow \Phi - (\alpha A). \quad (44,2)$$

а) **Общие формулы.** Обменную часть взаимодействия (43,50) мы представим в виде

$$V^A = \frac{e^2}{4\pi^2} \int \sum_{\mu=1}^4 \langle \psi_0^\dagger \alpha_\mu S \alpha_\mu \psi_0 \rangle \frac{d^3x}{x}, \quad (44,3)$$

причём оператор  $S$  имеет вид

$$S = \frac{1}{K_0 - H_{\mathbf{k}-\mathbf{x}} - \varkappa \frac{H_{\mathbf{k}-\mathbf{x}}}{|H_{\mathbf{k}-\mathbf{x}}|}}. \quad (44,4)$$

При разложении оператора  $S$  мы должны учесть, что от потенциала  $u$  зависит оператор

$$H_{\mathbf{k}-\mathbf{x}} = G_{\mathbf{k}-\mathbf{x}} + u, \quad (44,5)$$

где

$$G_{\mathbf{k}} = (\alpha \mathbf{k}) + \rho_3 k_0, \quad G_{\mathbf{k}-\mathbf{x}} = G_{\mathbf{k}} - (\alpha \mathbf{x}),$$

и величина  $K_0$ :

$$(K_0 - G_{\mathbf{k}} - u) \psi_0 = 0. \quad (44,6)$$

При перемене местами  $u$  и функции, зависящей от оператора  $\mathbf{k}$ , удобно воспользоваться следующим соотношением:

$$u f(\mathbf{k}) = f'(\mathbf{k}) u, \quad (44,7)$$

где

$$f'(\mathbf{k}) = f(\mathbf{k} - \boldsymbol{\pi}), \quad (44,8)$$

а оператор  $\boldsymbol{\pi} = \frac{\mathbf{V}}{i}$  действует только на функцию  $u$ ; например,

$$\mathbf{k} u \psi_0 = \boldsymbol{\pi} u \psi_0 + u \mathbf{k} \psi_0. \quad (44,9)$$

<sup>1)</sup> Само собой разумеется, что такая замена может быть сделана лишь у той части, связанной с дополнительной энергией, которая обладает релятивистской инвариантностью. Более подробно этот вопрос мы разберём в § 44, п. б.

Вводя обозначения

$$G = \sqrt{G_k^2} = \sqrt{k^2 + k_0^2},$$

$$G_0 = \sqrt{G_{k-x}^2} = \sqrt{k^2 + K^2 - 2(kx)}, \quad (44,10)$$

где  $K = \sqrt{x^2 + k_0^2}$ , имеем:

$$|H_{k-x}| = G_0 + \frac{1}{G_0 + G'_0} (G_{k-x} u + u G_{k-x}). \quad (44,11)$$

Соотношение (44,11) проще всего проверить, возведя обе части равенств в квадрат.

Далее, при разложении в ряд величины

$$\frac{1}{N-u},$$

когда следует ограничиться лишь линейными членами относительно  $u$ , можно воспользоваться следующим соотношением:

$$\frac{1}{N-u} = \frac{1}{N} + \frac{1}{N} u \frac{1}{N}, \quad (44,12)$$

имеющим место также для случая, когда оператор  $N$  не коммутирует с функцией  $u$ .

Тогда для оператора  $S$  [см. соотношение (44,4)] находим:

$$S = \frac{1}{K_0 - Q G_{k-x}} +$$

$$+ \frac{1}{K_0 - Q G_{k-x}} (au + b G_{k-x} u G_{k-x}) \frac{1}{K_0 - Q G_{k-x}}, \quad (44,13)$$

где

$$Q = \left(1 + \frac{x}{G_0}\right), \quad a = 1 + \frac{x}{G_0 + G'_0},$$

$$b = -\frac{x}{G_0 G'_0 (G_0 + G'_0)}. \quad (44,14)$$

Для исключения величины  $K_0$  в знаменателе, учтём, что согласно (44,6) величина  $K_0^2 - G^2$  коммутирует с оператором  $\alpha_\mu$ , и действие её на функцию  $\psi_0$  имеет порядок  $u$ :

$$(K_0^2 - G^2) \psi_0 = (u G_k + G_k u) \psi_0. \quad (44,15)$$



Поэтому, вводя обозначение

$$P = \frac{1}{2} (Q^2 G_0^2 - G^2), \quad (44,16)$$

мы найдём вместо (44,13):

$$S = - \frac{K_0 + QG_{k-x}}{2P} \left( 1 + \frac{K_0^2 - G^2}{2P} \right) + \\ + \frac{K_0 + QG_{k-x}}{2P} (au + bG_{k-x} uG_{k-x}) \frac{K_0 + QG_{k-x}}{2P}. \quad (44,17)$$

При вычислении суммы

$$\sum_{\mu=1}^4 \alpha_{\mu} S_{\alpha_{\mu}} = \sum S$$

следует использовать равенства

$$\begin{aligned} \sum I &= (\alpha\alpha) - I^2 = 2, & \sum \rho_3 (\alpha A) &= 0, \\ \sum \rho_3 &= -4\rho_3, & \sum (A\alpha) (B\alpha) &= 2(\alpha B) (\alpha A), \\ \sum (\alpha A) &= -2(\alpha A), & \text{и т. д.}, & \end{aligned} \quad (44,18)$$

причём последнее соотношение имеет место, когда величины  $A$  и  $B$  коммутируют между собою.

Из (44,18) также следует:

$$\sum u = u \sum I = 2u,$$

$$\sum G_{k-x} uG_{k-x} = [G_0^2 + G_0'^2 + (\alpha(k-x-\pi)) (\alpha\pi) - \\ - (\alpha\pi) (\alpha(k-x))] u, \quad (44,19)$$

$$\sum G_{k-x} u = -2(G_k + k_0 \rho_3 - (\alpha\pi)) u,$$

$$\sum uG_{k-x} = \sum G'_{k-x} u = \sum G_{k-x} u + 2(\alpha\pi) u,$$

где

$$G'_{k-x} = G_{k-x} - (\alpha\pi).$$

Разобьём оператор  $S$  на две части: на часть  $S_0$ , не зависящую от  $u$ , и на часть  $S_1$ , пропорциональную  $u$ .

Принимая во внимание последние соотношения, находим:

$$\sum S_0 = -\frac{1}{P} [G_k - (G_k + k_0 \rho_3 - (\alpha \mathbf{x})) Q], \quad (44,20)$$

$$\begin{aligned} \sum S_1 = & \left\{ -\frac{1}{P} - \frac{1}{2P^2} [G_k - (G_k + k_0 \rho_3 - (\alpha \mathbf{x})) Q] (G_k + G'_k) + \right. \\ & + \frac{1}{2PP'} \left[ G^2 \left( a + \frac{1}{2} b (G_0^2 + G_0'^2) \right) + \right. \\ & + QQ' \left( G_0^2 G_0'^2 b + \frac{1}{2} a (G_0^2 + G_0'^2) \right) - \\ & - (Qa + Q'a + QbG_0^2 + Q'bG_0'^2) G_k (G_k + k_0 \rho_3 - (\alpha \mathbf{x})) + \\ & + \frac{1}{2} (G^2 b + QQ'a) ((\alpha (\mathbf{k} - \mathbf{x} - \boldsymbol{\pi})) (\alpha \boldsymbol{\pi}) - (\alpha \boldsymbol{\pi}) (\alpha (\mathbf{k} - \mathbf{x}))) - \\ & \left. \left. - \frac{1}{2} (Q'a + bG_0^2 Q) G_k (\alpha \boldsymbol{\pi}) \right\} u. \quad (44,21) \end{aligned}$$

Для дальнейших упрощений воспользуемся следующими формулами:

$$\begin{aligned} G_0 - G'_0 &= -\frac{(\mathbf{x}\boldsymbol{\pi})}{K}, \quad G_k - G'_k = (\alpha \boldsymbol{\pi}), \\ a + \frac{1}{2} b (G_0^2 + G_0'^2) &= 1 - \frac{\mathbf{x} (\mathbf{x}\boldsymbol{\pi})^2}{4K^3}, \\ G_0^2 G_0'^2 b + \frac{1}{2} a (G_0^2 + G_0'^2) &= \frac{1}{2} \left( G_0^2 + G_0'^2 + \frac{\mathbf{x} (\mathbf{x}\boldsymbol{\pi})^2}{2K^3} \right), \quad (44,22) \\ Qa + Q'a + bQ' G_0^2 + bQ G_0'^2 &= Q + Q' - \frac{\mathbf{x} (\mathbf{x}\boldsymbol{\pi})^2}{2K^5}. \end{aligned}$$

Кроме того, с помощью равенства (44,6) легко показать, что

$$\psi_0^\dagger (G_k + u) f \psi_0 = \psi_0^\dagger f (G_k + u) \psi_0. \quad (44,23)$$

В частности, когда величина  $f$  пропорциональна  $u$ , мы можем в нашем приближении ( $u^2 \cong 0$ ) написать

$$\psi_0^\dagger G_k f \psi_0 = \psi_0^\dagger f G_k \psi_0. \quad (44,24)$$

Это соотношение может быть представлено также в более общем виде:

$$\psi_0^\dagger [((\alpha \mathbf{k}) + \rho_3 k_0)^n f - f ((\alpha \mathbf{k}) + \rho_3 k_0)^n] \psi_0 = 0, \quad (44,25)$$

где  $n$  — целое положительное число. Полагая, в частности,  $n = 2$  и принимая во внимание, что постоянная  $k_0^2$

коммутирует с любой функцией, мы найдём, что оператор  $k^2$  также коммутирует с функцией  $u$ :

$$k^2 u = u k^2. \quad (44,26)$$

Из (44,26) легко получить

$$(\pi u k) = -\frac{1}{2} \pi^2 u. \quad (44,27)$$

Полагая, далее, в (44,25)  $n=1$  и  $f=u$ , найдём:

$$(\alpha \pi) u = 0 \quad (44,28)$$

или

$$K_0(\alpha \pi) u = G_k(\alpha \pi) u = (\alpha \pi) u G_k = 0. \quad (44,29)$$

Подставляя сюда значение оператора  $G_k = (\alpha k) + \rho_3 k_0$ , имеем:

$$\begin{aligned} (\alpha k)(\alpha \pi) u &= -k_0 \rho_3 (\alpha \pi) u, \\ (\alpha \pi)(\alpha k) u &= \pi^2 u + (\alpha \pi) u (\alpha k) = \pi^2 u + k_0 \rho_3 (\alpha \pi) u. \end{aligned} \quad (44,30)$$

Заметим, что равенства (44,25) — (44,30) носят операторный характер. При применении их надо умножить слева на  $\psi_0^*$ , а справа на  $\psi_0$ .

При интегрировании по углам полезно воспользоваться соотношениями

$$\int (\mathbf{x} A) d^3 \mathbf{x} = 0, \quad \int (\mathbf{x} A)(\mathbf{x} B) d^3 \mathbf{x} = \int_0^\infty \frac{4\pi}{3} (AB) x^4 dx,$$

или

$$\overline{(\mathbf{x} A)} = 0, \quad \overline{(\mathbf{x} A)(\mathbf{x} B)} = \frac{1}{3} \mathbf{x}^2 (AB). \quad (44,31)$$

Отсюда, в частности, следует:

$$(\mathbf{x} \pi) G_k(\alpha \mathbf{x}) u = \frac{\mathbf{x}^2}{3} G_k(\alpha \pi) u = 0,$$

т. е. согласно (44,7)

$$F f' G_k(\alpha \mathbf{x}) u = F f G_k(\alpha \mathbf{x}) u. \quad (44,32)$$

Аналогичным путём легко показать:

$$\begin{aligned} F f' ((\mathbf{x} \alpha)(\alpha \pi) - (\alpha \pi)(\alpha \mathbf{x})) u &= \\ = F f ((\alpha \mathbf{x})(\alpha \pi) - (\alpha \pi)(\alpha \mathbf{x})) u. \end{aligned} \quad (44,33)$$

Учитывая последние соотношения, мы приведём (44,21) к виду

$$\sum \bar{S}_1 = \sum \bar{S}'_1 + \sum \bar{S}''_1, \quad (44,34)$$

причём величина

$$\sum \bar{S}'_1 = \left\{ - \left( Q \frac{\kappa}{G_0} + \frac{\kappa}{G_0^3} P \right) \frac{1}{2P^2} k_0 \rho_3 (\alpha \pi) - \right. \\ \left. - \left( Q^2 + \frac{\kappa}{G_0^3} P + Q \right) \frac{1}{2P^2} (\alpha \kappa) (\alpha \pi) \right\} u \quad (44,35)$$

оказывается пропорциональной члену  $\rho_3 (\alpha \pi) u$ , приводящему к энергии дополнительного электрического момента, а величина

$$\sum \bar{S}''_1 = \left\{ \frac{G^2}{2} \left( \frac{1}{PP'} - \frac{1}{P^2} \right) + \frac{1}{4} \left[ \frac{QQ'}{PP'} (G_0^2 + G_0'^2) - 2 \frac{Q^2 G_0^2}{P^2} \right] - \right. \\ - G_k (G_k + k_0 \rho_3) \left( \frac{Q + Q'}{2PP'} - \frac{Q}{P^2} \right) + \\ + \frac{\kappa^3}{12K^5} \left( \frac{1}{P} + \frac{2k_0^2}{P^2} \right) \pi^2 - \left( Q^2 + \frac{\kappa}{G_0^3} P \right) \frac{1}{2P^2} \pi^2 + \\ \left. + \left( Q^2 + \frac{\kappa}{G_0^3} P \right) \frac{1}{2P^2} (\pi \kappa) \right\} u \quad (44,36)$$

будет пропорциональна величине  $\pi^2 u$  и приводит к основному члену, обуславливающему бетевский сдвиг уровней.

**б) Полевая масса свободного электрона. Методы регуляризации.** Как известно, в волновом уравнении для электрона

$$\left( -\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial t} - c (\alpha \mathbf{p}) - U - \rho_3 m c^2 \right) \psi = 0. \quad (44,37)$$

Функция, определяющая взаимодействие с электромагнитным полем,

$$U = -e (\Phi - (\alpha \mathbf{A})) = e \alpha_\mu A_\mu,$$

где  $\alpha_4 = iI$ ,  $A_4 = i\Phi$ , а также член, связанный с собственной энергией электрона,

$$U_0 = \dot{\rho}_3 m c^2$$

представляют собой скалярные величины. Остальные члены

$$-\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial t} - c(\alpha p) = -\hbar c \alpha_{\mu} \frac{\partial}{\partial x_{\mu}}$$

также образуют скаляр, что, впрочем, совершенно естественно, так как все величины, входящие в уравнение, должны иметь одинаковую тензорную размерность. В противном случае уравнение не будет релятивистски инвариантным.

Если учитывать взаимодействие электрона с виртуальным электромагнитным полем, то, как уже отмечалось выше, в волновом уравнении электрона появляются некоторые новые члены, в частности связанные с продольной

$$U' = \frac{e^2}{\pi} \int_0^{\infty} dx$$

и поперечной

$$U'' = \frac{e^2}{\pi k_0} \int_0^{\infty} x dx$$

электромагнитной собственной энергией [см. (26,46) и (25,33)]. Эти члены не обладают необходимой тензорной размерностью, и поэтому их появление нарушает релятивистскую инвариантность волнового уравнения.

Члены самодействия можно интерпретировать как полевые добавки к собственной энергии только в том случае, если они имеют соответствующую тензорную размерность (например, когда соответствующие этим членам операторы в волновом уравнении для электрона пропорциональны матрице  $\rho_3$ ). Поэтому мы воспользовались вычитательным методом (43,37), который позволил исключить из рассмотрения члены самодействия  $U'$  и  $U''$ , не обладающие требуемой тензорной размерностью.

В то же самое время учёт взаимодействия с электронно-позитронным вакуумом приводит к появлению в уравнении (44,37) дополнительных членов, которые можно сопоставить с новой (т. е. третьей по счёту) собственной массой.

Прежде всего найдём полевую массу свободного электрона. Полагая внешнее электромагнитное поле равным нулю ( $U = 0$ ), мы получаем с помощью (44,20) следующее выражение для оператора самодействия:

$$\sum S_0 = \frac{1}{P} \left( \frac{2\chi}{G_0} + 1 \right) k_0 \rho_3 + \frac{1}{P} \left[ \frac{\chi}{G_0} (\alpha \mathbf{k}) - \left( 1 + \frac{\chi}{G_0} \right) (\alpha \mathbf{x}) \right], \quad (44,38)$$

причём согласно (44,16)

$$P = (\chi^2 + \chi G_0 - (\mathbf{k}\mathbf{x})).$$

Ограничиваясь при разложении в ряд величинами порядка  $\frac{(\mathbf{k}\mathbf{x})}{K^2}$  и принимая во внимание, что при усреднении по направлениям вектора  $\mathbf{x}$  имеют место соотношения

$$\overline{(\alpha \mathbf{x})} = 0, \quad \overline{(\alpha \mathbf{x})(\mathbf{k}\mathbf{x})} = \frac{1}{3} \chi^2 (\alpha \mathbf{k}),$$

мы найдём:

$$\sum S_0 = \frac{2\chi + K}{K\chi(K + \chi)} k_0 \rho_3 + \left( \frac{1}{K(K + \chi)} - \frac{1}{3K^2} - \frac{\chi^2}{3K^3(K + \chi)} \right) (\alpha \mathbf{k}),$$

откуда с помощью равенства (44,3) получаем:

$$V_0^A = \rho_3 \frac{\alpha}{\pi} \left( \frac{3}{2} \int_0^\infty \frac{d\chi}{K} - \frac{1}{4} \right) mc^2 + (\alpha \mathbf{k}) \frac{e^2}{6\pi}.$$

Последняя величина (энергия самодействия) содержит две части. Первая часть, пропорциональная матрице  $\rho_3$ , расходится по логарифмическому закону, но является скаляром, т. е. обладает той же самой тензорной размерностью, что и величина  $U_0$ , связанная с собственной энергией. Вторая же часть, пропорциональная произведению  $(\alpha \mathbf{k})$ , является нерасходящейся величиной, но не образует скаляра в четырёхмерном пространстве.

Заметим, что выражение для  $V_0^A$ , полученное нами с учётом влияния электронно-позитронного вакуума, обладает тем основным преимуществом перед продольной  $U'$  и поперечной  $U''$  собственной энергией, что содержит часть, обладающую необходимой тензорной размерностью.

Исследуем более подробно часть взаимодействия, пропорциональную матрице  $\rho_3$ , которая связана с дополнительной массой  $\Delta m$  соотношением

$$\Delta m = \frac{a}{\pi} \left( \frac{3}{2} \int_0^{\infty} \frac{dx}{K} - \frac{1}{4} \right) m.$$

Из последнего равенства следует, что дополнительная масса  $\Delta m$  может появиться только в том случае, если электрон обладает собственной массой  $m$  не электромагнитного происхождения. Дополнительная масса имеет более слабую расходимость (логарифмическую), чем, скажем, классическая электромагнитная масса точечного электрона

$$m^{el} = \lim_{R \rightarrow 0} \frac{e^2}{2c^2 R} = \frac{e^2}{c^2 \pi} \int_0^{\infty} dx.$$

Появление расходимости для собственной массы опять-таки связано с суммированием по бесконечному числу виртуальных состояний. Однако в теории вакуума, где учитываются состояния как с положительной, так и с отрицательной энергией, происходит известное понижение степени расходимости.

В квантовой теории логарифмически расходящиеся члены можно приравнять величинам, имеющим порядок единицы. В самом деле, ограничивая этот интеграл некоторым максимальным значением  $x_{\max} = \frac{E_{\max}}{c\hbar}$ , для  $\Delta m$  найдём:

$$\Delta m \sim am \ln \frac{E_{\max}}{mc^2}.$$

Величина  $\Delta m$  будет сохранять порядок  $\frac{1}{137} m$  при сравнительно широком диапазоне изменения  $E_{\max}$ . Лишь при  $E_{\max} \sim 10^{53} mc^2$ , что соответствует собственной энергии масс, в 100 000 раз превышающей массу Земли, величина  $\Delta m$  становится порядка  $m$ . Вообще расходимость полевой массы приводит к одной из основных трудностей современной квантовой электродинамики. Одним из возможных

вариантов обхода этой трудности является введение так называемой перенормировки массы. Как известно, в настоящее время масса элементарных частиц не может быть вычислена теоретически, а определяется опытным путём. С учётом же полевой массы уравнение Дирака

$$\left( -\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial t} - c(\boldsymbol{\alpha} \mathbf{p}) - U - \rho_3(m + \Delta m)c^2 \right) \psi = 0 \quad (44,39)$$

включает совершенно на равных основаниях как основную  $m$ , так и дополнительную полевую массу  $\Delta m$ , и поэтому опытным путём мы можем определить лишь суммарную массу  $(m + \Delta m)$ , которая является конечной величиной. Автоматическое включение полевой массы в основную без анализа подробностей компенсации расходящихся полевых добавок носит название перенормировки массы.

Однако ни вычитательный метод (43,37), ни перенормировка массы не являются достаточными для исключения из теории всех релятивистски инвариантных добавок. В связи с этим в настоящее время разработан ещё ряд методов регуляризации, позволяющих, с одной стороны, сделать расходящиеся члены конечными, а с другой—обратить в нуль те члены, которые делают теорию релятивистски инвариантной.

К сожалению, большинство способов регуляризации носит пока что формальный характер<sup>1)</sup>, и поэтому в лучшем случае представляет собой предварительную ступень теории, которая должна в дальнейшем подвести под формальные методы физический фундамент.

В частности, В. И. Григорьев и Д. Д. Иваненко<sup>2)</sup> показали, что большинство способов регуляризации эквивалентно введению гипотезы о наличии «компенсирующих» полей, сопоставленных частицам, обладающим различными массами, движение которых в совокупности можно описать с помощью уравнений с высшими производными типа Бюппа-Подольского.

<sup>1)</sup> См. статью В. Паули и Ф. Вилларса в сборнике «Сдвиг уровней атомных электронов», стр. 139.

<sup>2)</sup> В. Григорьев и Д. Иваненко, ЖЭТФ 21, 563 (1951).



Применим один из способов регуляризации (т. е. релятивистски инвариантного обрезания) к вычислению вакуумных интегралов. Все коэффициенты, даже при наличии внешнего поля (см. ниже) могут быть представлены в виде определённого интеграла

$$I = \int f(x, K) \frac{d^3x}{K} = I(k_0), \quad (44,40)$$

где  $K = \sqrt{x^2 + k_0^2}$ , а  $\frac{k_0 \hbar}{c}$  — масса частиц, сопоставленных с электронно-позитронным полем, которое в данном случае участвует в переносе взаимодействия. Этот интеграл может быть представлен в виде

$$I = 2 \int d^3x \int_0^\infty f(x, \eta) \delta(\eta^2 - x^2 - k_0^2) d\eta.$$

Для того чтобы произвести необходимую регуляризацию, заменим скалярную функцию  $\delta(\eta^2 - x^2 - k_0^2)$  суммой скалярных функций:

$$\begin{aligned} \delta(\eta^2 - x^2 - k_0^2) &\rightarrow \\ &\rightarrow \delta(\eta^2 - x^2 - k_0^2) + \sum_i c_i \delta(\eta^2 - x^2 - k_{0i}^2). \end{aligned} \quad (44,41)$$

Осуществляя замену (44,41), мы получим вместо (44,40)

$$I \rightarrow I(k_0) + \sum_i c_i I(k_{0i}).$$

Решение для дополнительного взаимодействия мы будем искать в виде разложения по величине  $\frac{\eta^2}{k_0^2}$ . Поэтому у нас могут появиться следующие типы интегралов  $I$ :

$$I_{-2} = \int_0^\infty d \frac{x^3}{K} = \lim_{x_{\max} \rightarrow \infty} \left( x_{\max}^2 - \frac{1}{2} k_0^2 \right); \quad (44,42a)$$

$$I_0 = \int_0^\infty \frac{dx}{K} = \lim_{x_{\max} \rightarrow \infty} (\ln 2x_{\max} - \ln k_0), \quad (44,42b)$$

$$I'_0 = \int_0^{\infty} \left( \frac{1}{K+x} - \frac{1}{2K} \right) dx = \frac{1}{4}, \quad (44,42в)$$

$$I_2 = \int_0^{\infty} \frac{dx}{K^3} = \frac{1}{k_0^2}. \quad (44,42г)$$

Как будет показано ниже, члены взаимодействия, пропорциональные интегралам  $I_0$  и  $I_2$ , всегда будут обладать необходимой тензорной размерностью даже при наличии внешнего поля  $U$ . Другая же часть взаимодействия, пропорциональная интегралам  $I'_0$  или  $I_{-2}$ , является релятивистски неинвариантной величиной. Поэтому мы должны подобрать коэффициенты  $c_i$  и массы  $k_{0i}$  таким образом, чтобы неинвариантные члены ( $I_{-2}$  и  $I'_0$ ) обратились в нуль, логарифмически расходящийся интеграл  $I_0$  сделался бы конечным, а релятивистски инвариантные члены остались бы без изменения.

Мы сможем произвести требуемую регуляризацию, если введём следующие условия:

$$\sum_i c_i = -1, \quad (44,43а)$$

$$\sum_i c_i k_{0i}^2 = -k_0^2, \quad (44,43б)$$

$$\sum_i \frac{c_i}{k_{0i}^2} = 0, \quad (44,43в)$$

$$\sum_i c_i \ln k_{0i} + \ln k_0 = \text{const.} \quad (44,43г)$$

Тогда мы будем иметь:

$$I_{-2} = \left( 1 + \sum_i c_i \right) \lim_{x_{\text{макс}} \rightarrow \infty} x_{\text{макс}}^2 - \frac{1}{2} \left( k_0^2 + \sum_i c_i k_{0i}^2 \right) = 0, \quad (44,44а)$$

$$\begin{aligned}
 I_0 &= \left(1 + \sum_i c_i\right) \lim_{x_{\text{макс}} \rightarrow \infty} 2x_{\text{макс}} - \left(\ln k_0 + \sum_i c_i \ln k_{0i}\right) = \\
 &= - \left(\ln k_0 + \sum_i c_i \ln k_{0i}\right), \quad (44,44б)
 \end{aligned}$$

$$I'_0 = \frac{1}{4} \left(1 + \sum_i c_i\right) = 0, \quad (44,44в)$$

$$I_2 = \frac{1}{k_0^3} + \sum_i \frac{c_i}{k_{0i}^3} = \frac{1}{k_0^3}. \quad (44,44г)$$

Мы сможем удовлетворить соотношению (44,43в), если выберем достаточно большие значения для вспомогательных масс (например,  $\frac{k_{0i}}{k_0} \rightarrow \infty$ ).

С первого взгляда может показаться, что правила регуляризации (44,43) страдают отсутствием однозначности. Однако от выбора решения зависят только члены, пропорциональные интегралу  $I_0$ , которые не являются для нас существенными, так как они автоматически могут быть исключены из теории с помощью перенормировки массы (см. выше) или заряда (см. § 45, п. в). Поэтому мы не нарушим единственности нашего решения, если в правой части равенств (44,43г) постоянную величину положим равной нулю. Тогда

$$\ln k_0 + \sum_i c_i \ln k_{0i} = 0 \quad (44,43г')$$

и все величины, пропорциональные интегралу  $I_0$ , должны также обращаться в нуль. В этом случае наша задача становится совершенно однозначной.

Например, введём три вспомогательные массы:

$$k_{01} = k_0 \beta,$$

$$k_{02} = k_0 \beta^3 \left(1 + \sqrt{1 - 3 \frac{1}{\beta^4} + 2 \frac{1}{\beta^6}}\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$k_{03} = k_0 \beta^3 \left(1 + \sqrt{1 - 3 \frac{1}{\beta^4} + 2 \frac{1}{\beta^6}}\right).$$

Полагая затем коэффициенты  $c_i$  соответственно равными

$$c_1 = -\frac{3}{2}, \quad c_2 = 1, \quad c_3 = -\frac{1}{2},$$

мы сможем удовлетворить необходимым равенствам (44,43), если будем стремиться величину  $\beta$ , а следовательно, и все три вспомогательные массы к бесконечности. При  $\beta \rightarrow \infty$  комптоновские длины волн  $\Lambda_i = \frac{1}{k_{0i}}$ , соответствующие вспомогательным массам, будут стремиться к нулю, благодаря чему регуляризация будет носить  $\delta$ -образный характер. Как известно,  $\delta$ -функцию мы можем сконструировать бесчисленным множеством способов, и окончательные результаты совершенно не зависят от конкретного способа её образования. Точно так же для  $\delta$ -образной регуляризации совершенно несущественен конкретный выбор величин  $c_i$  и  $k_{0i}$ .

Таким образом, в результате регуляризации в нашем разложении должны остаться лишь члены, пропорциональные  $I_2 = \frac{1}{k_0^2}$ , которые, как будет показано ниже, всегда будут обладать всеми необходимыми свойствами тензорной размерности.

Легко показать, что в случае отсутствия внешнего поля ( $U = 0$ ) следующий член разложения ( $\sim \frac{1}{k_0^2}$ ) оператора (44,38) обращается в нуль. Таким образом, вся или во всяком случае основная часть собственной массы электрона, повидимому, должна носить явно неполевой характер. Возможно, что небольшое различие масс и зарядов для электрона и позитрона связано с возникновением неодинаковых полевых добавков, обусловленных полем нуклеонов (см. вторую часть), которое обладает асимметрией относительно знака заряда (нет антипротонсв).

Как будет показано ниже, при наличии внешнего поля  $U$  члены, пропорциональные  $\frac{1}{k_0^2}$ , не обращаются в нуль. Соответствующую этим членам энергию мы можем рассматривать как дополнительную полевую энергию взаимодействия между зарядом и электромагнитным полем, переносимую электронно-позитронным вакуумом.

в) Вычисление полевой части электрического и магнитного моментов электрона. Коэффициенты  $\frac{1}{P}$ ,  $Q$  и  $\frac{1}{G_0}$  представим в виде

$$\frac{1}{P} = a_0 [1 + a_1 (\mathbf{xk})], \quad Q = b_0 [1 + b_1 (\mathbf{xk})],$$

$$\frac{1}{G_0} = c_0 [1 + c_1 (\mathbf{xk})]. \quad (44,45)$$

Строго говоря, величины  $a_0$ ,  $b_0$ ,  $c_0$  должны зависеть ещё от оператора  $\mathbf{k}^2$ , который, как было показано выше, коммутирует с функцией  $u$ . Однако в окончательных результатах, кроме этих коэффициентов, в произведение будут входить величины, пропорциональные  $\mathbf{k}$ . В нашем приближении, когда величинами порядка  $\mathbf{k}^3 u$  мы пренебрегаем, в коэффициентах  $a_0$ ,  $b_0$  и  $c_0$  мы сразу можем отбросить величины порядка  $\mathbf{k}^2$ . Тогда с помощью равенств (44,10), (44,14) и (44,16) находим:

$$a_0 = \frac{1}{x(K+x)}, \quad b_0 = \frac{K+x}{K}, \quad c_0 = \frac{1}{K},$$

$$a_1 = \frac{1}{xK}, \quad b_1 = \frac{x}{K^2(x+K)}, \quad c_1 = \frac{1}{K^2}. \quad (44,46)$$

Подставляя (44,45) в (44,35) и учитывая соотношения (44,31) и (44,30), найдём:

$$\sum \bar{S}_1 = \left\{ -\frac{x}{2} b_0 c_0 a_0^2 - \frac{x}{2} c_0^2 a_0 + \frac{x^2}{3} b_0^2 a_0^2 (a_1 + b_1) + \right.$$

$$\left. + \frac{x^2}{6} b_0 a_0^2 (2a_1 + b_1) + \frac{x^3}{6} a_0 c_0^2 (a_1 + 3c_1) \right\} k_{0\rho_3} (\boldsymbol{\alpha}\pi) u. \quad (44,47)$$

После ряда алгебраических преобразований последнее равенство приводится к виду

$$\sum \bar{S}_1 = \left[ \frac{1}{3xk_0^4} \left( K - x - \frac{1}{2} \frac{k_0^2}{K} \right) + \frac{1}{2xK^3} - \frac{k_0^2}{2xK^5} \right] k_{0\rho_3} (\boldsymbol{\alpha}\pi) u. \quad (44,48)$$

Соответствующее дополнительное взаимодействие мы можем найти с помощью равенства  $V^A = \langle \psi_0^+ U^A \psi_0 \rangle$ , где

$$U^A = \frac{e^2}{\pi} \int_0^\infty x \sum \bar{S}_1 dx. \quad (44,49)$$

Воспользовавшись далее формулами для определённых интегралов

$$\int_0^{\infty} \left( K - x - \frac{k_0^2}{2K} \right) dx = \frac{1}{4} k_0^2, \quad (44,50)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{K^3} = \frac{1}{k_0^2}, \quad \int_0^{\infty} \frac{dx}{K^5} = \frac{2}{3} \frac{1}{k_0^4},$$

получим:

$$U'^A = \frac{i\alpha}{2\pi} \mu_0 \rho_3 (\boldsymbol{\alpha} \nabla) \Phi = \frac{\alpha}{2\pi} \mu_0 \rho_2 (\boldsymbol{\sigma} \mathbf{E}), \quad (44,51)$$

где  $\mu_0 = \frac{e\hbar}{2mc}$  — магнетон Бора,  $\alpha = \frac{e^2}{\hbar c}$  — постоянная тонкой структуры.

Для того чтобы определить дополнительное взаимодействие при наличии ещё внешнего магнитного поля, мы должны согласно (44,2) потенциал  $\Phi$  заменить на  $\Phi - (\boldsymbol{\alpha} \mathbf{A})$ . Тогда находим<sup>1)</sup>:

$$U'^A = \frac{\alpha}{2\pi} \mu_0 [\rho_3 (\boldsymbol{\sigma} \mathbf{H}) + \rho_2 (\boldsymbol{\sigma} \mathbf{E})]. \quad (44,52)$$

<sup>1)</sup> Заметим, что выражение для дополнительной энергии при наличии магнитного поля может быть получено так же непосредственно из формулы (43,50), если положить

$$u = \frac{e}{c\hbar} (\boldsymbol{\alpha} \mathbf{A})$$

и ограничиться величинами первого порядка относительно оператора  $\hat{\mathbf{K}}$ .

В этом случае для оператора, связанного с дополнительной энергией, мы получаем:

$$U'^A = \frac{\alpha}{2\pi} \mu_0 \rho_3 (\boldsymbol{\sigma} \mathbf{H}) + \frac{\alpha}{6\pi} e (\boldsymbol{\alpha} \mathbf{A}). \quad (44,51a)$$

Сопоставление формулы (44,51a) с формулой (44,51) показывает, что член взаимодействия, связанный с дополнительным моментом электрона обладает необходимым свойством релятивистской инвариантности. Однако второй член

$$\frac{\alpha}{6\pi} e (\boldsymbol{\alpha} \mathbf{A})$$

не является релятивистски инвариантным, так как соответству-

Сравнивая (44,52) с (24,5), мы видим, что электрон должен обладать полным магнитным моментом

$$\mu^w = -\frac{\alpha}{2\pi} \mu_0. \quad (44,53)$$

Как было указано в § 17, в нерелятивистском приближении электрон обладает ещё кинематическим магнитным моментом, равным магнетону Бора, взятому с обратным знаком  $-\mu_0$ . Поэтому полный магнитный момент электрона будет равен

$$\mu = -\left(1 + \frac{\alpha}{2\pi}\right) \mu_0.$$

Здесь важно подчеркнуть, что значение полевой добавки к магнитному моменту получается совершенно естественно в рамках общей теории поля и находится в хорошем согласии с экспериментом (более подробно см. § 47).

г) Вычисление бетевской части энергии взаимодействия. Найдём вторую часть энергии взаимодействия, определяемую формулой (44,36), которая приводит к бетевскому сдвигу уровней. Все члены, входящие в формулу (44,36), могут быть разбиты на три части. Первая часть не зависит явно от оператора  $\pi$ , т. е. первая часть пропорциональна  $\pi^0$ ; вторая часть пропорциональна  $(\mathbf{x}\pi)$  и, наконец, третья пропорциональна  $\pi^2$ .

Записывая остальные величины, входящие в (44,36), в виде

$$F = F_0(1 + F_1(\mathbf{x}\mathbf{k})), \quad f = f_0(1 + f_1(\mathbf{x}\mathbf{k})), \quad (44,54)$$

и другое ему дополнение  $\left(-\frac{\alpha}{6\pi} e\Phi\right)$  для образования скаляра в формуле (44,51а) отсутствует.

Для исключения неинвариантного члена в формуле (44,51а) мы должны применить при вычислении интегралов правила регуляризации (44,44). Тогда неинвариантный член  $\frac{\alpha}{6\pi} e(\mathbf{x}\mathbf{A})$ , пропорциональный интегралу  $I'_0$ , обратится в нуль, а релятивистски инвариантный член  $\frac{\alpha}{2\pi} \mu_0 \rho_3(\sigma\mathbf{H})$ , пропорциональный интегралу  $I_3$ , останется без изменения,

удобно при вычислении элементов  $\sim \pi^0$  воспользоваться соотношением

$$Ff - Ff' = Ff - F'f = F_0 f_0 \frac{F_1 f_1 x^2}{6} \pi^2, \quad (44,55)$$

которое получается после усреднения всего выражения по вектору  $\mathbf{x}$ . Элементы, пропорциональные  $(\pi\mathbf{x})$ , могут быть вычислены с помощью формулы

$$F(\pi\mathbf{x}) = F_0 F_1 \frac{x^2}{3} (\mathbf{k}\pi) = F_0 F_1 \frac{x^2 \pi^2}{6}. \quad (44,56)$$

Наконец, у элементов, пропорциональных оператору  $\pi^2$ , можно просто положить

$$F\pi^2 = F_0 \pi^2. \quad (44,57)$$

Подставляя выражения (44,55), (44,56) и (44,57) в формулу (44,36), находим:

$$\begin{aligned} \sum \bar{S}_1' = & \left[ -\frac{1}{12} k_0^2 a_0^2 a_1^2 x^2 - \frac{1}{12} a_0^2 b_0^2 c_0^{-2} x^2 (a_1 + b_1 - 2c_1) (a_1 + b_1) + \right. \\ & + \frac{1}{3} k_0^2 a_0^2 b_0 (b_1 + a_1) a_1 x^2 + \\ & + \frac{1}{12} x^3 K^{-5} (a_0 + 2k_0^2 a_0^2) - \frac{1}{2} (a_0^2 b_0^2 + a_0 K^{-3} x) + \\ & \left. + \frac{1}{6} a_0^2 b_0^2 x^2 (a_1 + b_1) + \frac{1}{12} a_0 c_0^3 (a_1 + 3c_1) x^3 \right] \pi^2 u, \quad (44,57a) \end{aligned}$$

откуда после простых алгебраических преобразований имеем:

$$\begin{aligned} \sum \bar{S}_1' = & \left[ -\frac{1}{3xk_0^2} \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{K} \right) + \frac{1}{6xk_0^4} \left( K - x - \frac{k_0^2}{2K} \right) - \right. \\ & \left. - \frac{1}{12} \frac{1}{xK^3} - \frac{k_0^2}{6xK^5} \right] \pi^2 u. \quad (44,57b) \end{aligned}$$

Заметим, что при вычислении энергии связи [см. (44,3)]

$$V^{nA} = \langle \psi_0^\dagger U^{nA} \psi_0 \rangle,$$

где

$$U^{nA} = \frac{e^2}{\pi} \int_0^\infty x \sum \bar{S}_1' dx, \quad (44,58)$$



интеграл

$$I_0 = \int_0^{\infty} \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{K} \right) dx \quad (44,59)$$

логарифмически расходится на нижнем пределе. Однако эта расходимость («инфракрасная катастрофа») не представляет собою принципиальной трудности, а скорее связана с не совсем корректным способом разложения равенства (44,17) по величине

$$\gamma = \frac{e\Phi}{c\hbar x}, \quad (44,60)$$

которое нельзя производить при малых значениях  $x$ .

Для того чтобы избежать «инфракрасной катастрофы», мы должны вычислить величину  $\sum \bar{S}_j^2$  при малых значениях  $x$ , не прибегая к разложению по величине  $\gamma$ . Это будет нами сделано в конце параграфа.

Выделяя в интеграле (44,59) логарифмически расходящийся член, получаем:

$$I_0 = \int_0^{h_0} \frac{dx}{x} - \ln 2. \quad (44,61)$$

Учитывая, далее, значения интегралов (44,50), находим для оператора полевой энергии (44,58) следующее выражение<sup>1)</sup>:

$$U^{AA} = -\frac{1}{3\pi k_0^3} \alpha e \left( \int_0^{h_0} \frac{dx}{x} - \ln 2 + \frac{11}{24} \right) \nabla^2 \Phi. \quad (44,62)$$

При наличии ещё магнитного поля будем иметь:

$$U^{AA} = -\frac{1}{3\pi k_0^3} \alpha e \left( \int_0^{h_0} \frac{dx}{x} - \ln 2 + \frac{11}{24} \right) \nabla^2 (\Phi - (\alpha A)). \quad (44,63)$$

<sup>1)</sup> С полуклассическим выводом формулы (44,62) можно познакомиться, например, в монографии «Классическая теория поля», стр. 358.

Последняя формула может быть получена или с помощью релятивистско-инвариантного обобщения выражения (44,62) [см. соотношение (44,2)]<sup>1)</sup>, или путём непосредственного вычисления, если положить в формуле (44,3)

$$u = -\frac{e}{c\hbar} (\Phi - (\alpha A)).$$

В последнем случае следует производить вычисления с точностью до величины третьего порядка малости относительно оператора  $\mathbf{k}$ , поскольку матрица  $\alpha$  имеет порядок  $\frac{\mathbf{k}}{k_0}$ , точнее,

$$\psi_0^\dagger \alpha \psi_0 \sim \psi_0^\dagger \frac{\mathbf{k}}{k_0} \psi_0,$$

д) Устранение инфракрасной катастрофы. Найдём прежде всего сумму  $\sum S_i''$  при малых значениях  $\kappa$ , не прибегая к разложению по величине  $\gamma$ . Для этого обратимся к исходным формулам (43,38), (43,24) и (43,25), которые дают при малых значениях  $\kappa$  ( $\alpha = \frac{\mathbf{k}}{k_0}$ , а состояния с отрицательной энергией могут быть отброшены) следующее выражение для обменной части взаимодействия:

$$U_\alpha = \sum_n U_{0nn0}, \quad (44,64)$$

причём суммирование следует производить лишь по положительным значениям энергии ( $n = n_+$ ), а величина

$$U_{0nn0} = \frac{e^2}{4\pi^2} \int e^{i\kappa(r-r')} \left( \frac{1}{\kappa^2} - \frac{(\mathbf{k}\mathbf{k}') - (\kappa^0 k)(\kappa^0 k')}{k_0^2 \kappa (\kappa + \mathbf{K}n - K_0)} \right) d^3\kappa.$$

Полагая далее в случае нерелятивистского приближения

$$e^{i\kappa r} = 1,$$

<sup>1)</sup> Релятивистски инвариантное обобщение формулы (44,62) является вполне законным, поскольку оператор  $U''^A$ , пропорциональный интегралу  $I_2$  [см. соотношение (44,42г)], должен образовывать четырёхмерный скаляр.

и принимая во внимание равенство (44,31), получим:

$$V^A = \frac{e^2}{4\pi^2} \sum_n \int \left[ \frac{\langle \psi_0^+ \psi_n \rangle \langle \psi_n^+ \psi_0 \rangle}{x^2} - \frac{2}{3} \frac{\langle \psi_0^+ \mathbf{k} \psi_n \rangle \langle \psi_n^+ \mathbf{k} \psi_0 \rangle}{x(x - K_n + K_0) k_0^2} \right] d^3x. \quad (44,65)$$

С помощью соотношения

$$\frac{1}{K_0 - K_n - x} = \frac{1}{x} \left( \frac{K_0 - K_n}{K_0 - K_n - x} - 1 \right),$$

а также равенства (43,46) легко показать, что обменное взаимодействие  $V^A$  состоит из двух частей. Часть

$$V_0^A = \frac{e^2}{4\pi^2} \int \langle \psi_0^+ \left( 1 - \frac{2}{3} \frac{\mathbf{k}^2}{k_0^2} \right) \psi_0 \rangle \frac{d^3x}{x^2}$$

не зависит от внешнего поля, и поэтому мы её исключим из дальнейшего рассмотрения. Другая же часть

$$V''^A = -\frac{2}{3} \frac{e^2}{\pi k_0^2} \sum_n \int_0^\infty \frac{K_0 - K_n}{K_n - K_0 + x} |k_{0n}|^2 dx, \quad (44,66)$$

где

$$k_{0n} = \langle \psi_0^+ \mathbf{k} \psi_n \rangle = \frac{1}{i} \langle \psi_0^+ \nabla \psi_n \rangle,$$

пропорциональная  $u$  (см. ниже), связана с энергией взаимодействия электрона с электростатическим полем.

При вычислении суммы по  $n$  в равенстве (44,66) мы не можем непосредственно воспользоваться формулой (43,46), поскольку под знаком суммы стоит величина  $K_n$ . Величина  $K_n$ , стоящая в числителе, может быть легко исключена с помощью соотношения (44,70). Для того чтобы исключить величину  $K_n$ , стоящую в знаменателе, мы постараемся преобразовать (44,66) к выражению

$$V''^A = -\frac{2}{3} \frac{e^2}{\pi k_0^2} \sum_n \int_0^\infty \frac{K_0 - K_n}{x_0 + x} |k_{0n}|^2 dx, \quad (44,67)$$

знаменатель которого не зависит от значка  $n$ .

Интегрируя по  $x$  соотношения (44,66) и (44,67), находим уравнение для определения постоянной величины  $x_0$ :

$$\sum_n (K_0 - K_n) |k_{0n}|^2 \ln \frac{K_\infty}{x_0} = \\ = \sum_n (K_0 - K_n) |k_{0n}|^2 \ln \frac{K_\infty}{|K_0 - K_n|}. \quad (44,68)$$

Верхний предел  $K_\infty$  следует положить равным бесконечности. Однако члены, зависящие от  $K_\infty$ , сокращаются и не входят в окончательный результат. При  $K_0 = K_n$  интеграл следует брать в смысле главного значения.

Из равенства (44,68) находим искомое значение для величины  $x_0$ :

$$\ln x_0 = \frac{\sum_n (K_0 - K_n) |k_{0n}|^2 \ln |K_0 - K_n|}{\sum_n (K_0 - K_n) |k_{0n}|^2}, \quad (44,69)$$

которая не зависит от квантового числа  $n$  промежуточных состояний.

В нерелятивистском случае волновая функция  $\psi_n$  подчиняется уравнению

$$K_n \psi_n = \left( k_0 + \frac{k^2}{2k_0} + u \right) \psi_n, \quad (44,70)$$

где

$$u = -\frac{e}{c\hbar} \Phi.$$

Отсюда получаем:

$$(K_0 - K_n) \langle \psi_0^\dagger k_s \psi_n \rangle = \langle \psi_0^\dagger (u k_s - k_s u) \psi_n \rangle.$$

Используя, далее, преобразование (43,46), находим:

$$(K_0 - K_n) k_{0n} k_{n0} = \langle \psi_0^\dagger (u k^2 - k u k) \psi_0 \rangle = - \langle \psi_0^\dagger \pi u k \psi_0 \rangle.$$

Принимая во внимание ещё равенства

$$V^{nA} = \langle \psi_0^\dagger U^{nA} \psi_0 \rangle, \quad U^{nA} = \frac{e^2}{\pi} \int_0^\infty x \sum \bar{S}_1^z dx, \quad (44,71)$$

получаем выражение для  $\sum S_1''$ , пригодное для сколь угодно малых  $\kappa$ :

$$\sum \bar{S}_1'' = -\frac{1}{3k_0^2} \frac{1}{\kappa(\kappa + \kappa_0)} \pi^2 u. \quad (44,72)$$

Выражение (44,72) имеет место в нерелятивистском случае, т. е. когда величина  $\kappa$  изменяется в пределах  $0 \leq \kappa \ll k_0$ . Сравним его с соответствующим выражением для  $\sum \bar{S}_1''$  [см. соотношение (44,576)], огреченного лишь со стороны малых значений  $\kappa$  ( $\kappa_0 \ll \kappa$ ). Как и следовало ожидать, в области, к которой оба соотношения одинаково применимы ( $\kappa_0 \ll \kappa \ll k_0$ ), значения для  $\sum \bar{S}_1''$ , вычисленные как по формуле (44,72), так и по формуле (44,576), приводят к одинаковым результатам:

$$\sum \bar{S}_1'' = -\frac{1}{3k_0^2 \kappa^2} \pi^2 u.$$

Поэтому весьма хорошим приближением для  $\sum \bar{S}_1''$ , пригодным для любых значений  $\kappa$ , является выражение

$$\sum \bar{S}_1'' = \left[ -\frac{1}{3k_0^2 \kappa} \left( \frac{1}{\kappa + \kappa_0} - \frac{1}{K} \right) + \frac{1}{6\kappa k_0^2} \left( K - \kappa - \frac{k_0^2}{2K} \right) - \frac{1}{12\kappa K^2} - \frac{k_0^2}{6\kappa K^3} \right] \pi^2 u. \quad (44,73)$$

которое при малых значениях  $\kappa$  переходит в равенство (44,72), а при больших — в (44,576).

Подставляя оператор  $\sum \bar{S}_1''$  в формулу (44,58), мы получим выражение для полевой энергии, в котором устранены как «инфракрасные», так и «ультрафиолетовые» расходимости<sup>1)</sup>, т. е. выражение для  $U^{AA}$  будет пропорционально сходящемуся интегралу.

Таким образом, вместо расходящегося выражения (44,62) мы будем теперь иметь конечное выражение

$$U^{AA} = -\frac{1}{3\pi k_0^2} a e \left( \ln \frac{k_0}{\kappa_0} - \ln 2 + \frac{11}{24} \right) \nabla^2 \Phi. \quad (44,74)$$

<sup>1)</sup> Заметим, что, вычисляя  $U^{AA}$  с нерелятивистским выражением оператора  $\sum \bar{S}_1''$ , мы получаем расходящийся на верхнем пределе интеграл. Однако появившаяся ультрафиолетовая катастрофа является кажущейся, поскольку это выражение неприменимо для больших значений  $\kappa$ .

Найдём численное значение для величины  $\kappa_0$ . При самой грубой оценке мы можем положить

$$\kappa_0 \sim |K_0 - k_0| = \frac{1}{c\hbar} |E_0 - mc^2|.$$

В частности, для атома водорода, когда состояние  $E_0$  соответствует квантовому числу  $n=2$ , мы имеем:

$$|E_0 - mc^2| = \frac{mc^2}{2n^2} \alpha^2 = \frac{mc^2}{8} \alpha^2.$$

Отсюда находим:

$$\ln \frac{k_0}{\kappa_0} \sim 2 \ln \frac{2}{\alpha} \sim 10.$$

Более же точные расчёты, проделанные по формуле (44.69), дают:

$$\ln \frac{k_0}{\kappa_0} = 7,6876.$$

## § 45. Поляризация электронно-позитронного вакуума <sup>1)</sup>

а) **Общие формулы.** Согласно формуле (43,51) необходимая часть взаимодействия может быть представлена в виде

$$V^N = e \int \psi_0^\dagger \alpha_\mu A_\mu^w \psi_0 d^3x, \quad (45,1)$$

где

$$A_\mu^w = \frac{e}{4\pi^2} \int \sum_n \delta_n \int d^3x' \psi_n^\dagger(\mathbf{r}') e^{-ix(\mathbf{r}-\mathbf{r}')} \alpha_\mu \psi_n(\mathbf{r}') \frac{d^3x'}{x^2} \quad (45,2)$$

или

$$\nabla^2 A_\mu^w = -2\pi e \sum_n \delta_n \psi_n^\dagger(\mathbf{r}) \alpha_\mu \psi_n(\mathbf{r}). \quad (45,3)$$

Отсюда видно, что величина  $A_\mu^w$  является потенциалом электромагнитного поля, которое возникает благодаря поляризации электронно-позитронного вакуума.

<sup>1)</sup> P. A. M. Dirac, Proc. Camb. Phil. Soc. 30, 150 (1934); см. также W. Heisenberg, Zs. f. Phys. 90, 209 (1934); Д. Иванецко и А. Соколов, Sow. Phys. 11, 590 (1937).

В формуле (45,3) знаковую функцию  $\delta_n$  мы можем представить в виде

$$\delta_n = \frac{K_n}{|K_n|} = \frac{H_k}{|H_k|}. \quad (45,4)$$

Далее, учтём связь  $\delta$ -функции с полной системой ортонормированных функций  $\varphi_n^+$  и  $\varphi_n^-$ ):

$$\sum_n \varphi_n^+(\mathbf{r}) \varphi_n^-(\mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \frac{1}{8\pi^3} \int e^{i\mathbf{x}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')} d^3\mathbf{x}. \quad (45,4a)$$

Если в качестве ортонормированных функций взяты решения уравнения Дирака, мы должны ещё принять во внимание, что каждое состояние имеет четыре решения (более подробно см. § 21), на которые действуют матрицы Дирака  $\beta$ . В этом случае вместо формулы (45,4a) мы будем иметь:

$$\sum_n \varphi_n^+(\mathbf{r}) \beta \varphi_n^-(\mathbf{r}') = \frac{1}{8\pi^3} \int e^{i\mathbf{x}\mathbf{r}} \text{след } \beta e^{-i\mathbf{x}\mathbf{r}'} d^3\mathbf{x}. \quad (45,5)$$

В частности, полагая  $\beta$  равной единичной матрице ( $\beta = I$ ), получим:

$$\sum_n \varphi_n^+(\mathbf{r}) \varphi_n^-(\mathbf{r}') = 4\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}').$$

Появление множителя 4 связано с особой нормировкой функций Дирака, учитывающей возможность нахождения в заданном квантовом состоянии четырёх частиц (например, в свободном состоянии с импульсом  $\mathbf{p} = \hbar\mathbf{k}$  может находиться два электрона с положительной энергией и два электрона с отрицательной энергией).

Принимая во внимание соотношения (45,4) и (45,5) (последнее при  $\mathbf{r} = \mathbf{r}'$ ), мы получаем следующее дифференциальное уравнение для определения потенциалов поляризации:

$$\nabla^2 A_\mu^w = -\frac{e}{4\pi^2} \int \text{след} \left( \alpha_\mu \frac{H_{\mathbf{k}-\mathbf{x}}}{|H_{\mathbf{k}-\mathbf{x}}|} \right) d^3\mathbf{x}. \quad (45,6)$$

<sup>1)</sup> См. например, «Классическая теория поля», стр. 21.

При выводе последнего соотношения учтено также равенство (44,7), согласно которому

$$H_k e^{-ixr} = e^{-ixr} H_{k-x}, \quad (45,7)$$

где

$$H_{k-x} = G_{k-x} + u = k_0 \rho_3 + (\alpha k) - (\alpha x) + u. \quad (45,8)$$

С помощью соотношений (44,11) и (44,12) находим:

$$\frac{H_{k-x}}{|H_{k-x}|} = \frac{G_{k-x}}{G_0} + \frac{1}{G_0 + G'_0} u - \frac{1}{G_0 G'_0 (G'_0 + G_0)} (G_{k-x} u G_{k-x}). \quad (45,9)$$

Рассмотрим прежде всего случай наличия одного лишь электростатического поля

$$u = -\frac{e}{c\hbar} \Phi.$$

Тогда

$$\frac{H_{k-x}}{|H_{k-x}|} = \frac{G_{k-x}}{G_0} - \frac{(G_0 - G'_0)^2 - \pi^2 - G_{k-x}(\alpha\pi) + (\alpha\pi)G_{k-x}}{2G_0 G'_0 (G_0 + G'_0)} u. \quad (45,10)$$

Отсюда легко показать, что

$$\text{след } \frac{H_{k-x}}{|H_{k-x}|} = -\frac{2}{G_0 G'_0 (G_0 + G'_0)} ((G_0 - G'_0)^2 - \pi^2) u. \quad (45,11)$$

В этом частном случае составляющие вектор-потенциала  $A^w$  не будут зависеть от внешнего поля  $\Phi$ , а для скалярного потенциала находим выражение

$$\nabla^2 \Phi^w = -\frac{e}{2\pi^2} \int \frac{\pi^2 - (G_0 - G'_0)^2}{G_0 G'_0 (G_0 + G'_0)} u d^3x. \quad (45,12)$$

В нашем приближении потенциал  $\Phi^w$  должен быть вычислен с точностью до величины  $\pi^2 u$ . Поскольку, однако, левая часть равенства (45,12) имеет порядок  $\pi^2 \Phi^w$ , в правую часть мы должны включить члены, пропорциональные  $\pi^4 u$ .

Согласно (44,10)

$$G_0 = K_1 \left( 1 - \frac{2(kx)}{K_1^2} \right)^{\frac{1}{2}},$$

$$G'_0 = K_1 \left( 1 - \frac{2((k-\pi)x)}{K_1^2} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (45,13)$$



где

$$K_1 = \sqrt{K^2 + \mathbf{k}^2} = \sqrt{k_0^2 + \mathbf{x}^2 + \mathbf{k}^2}.$$

Строго говоря, в выражении для  $G'_0$  вместо величины  $K_1$  должна стоять величина

$$K'_1 = \sqrt{K^2 + (\mathbf{k} - \boldsymbol{\pi})^2}.$$

Принимая во внимание, что оператор  $\mathbf{k}^2$  коммутирует с функцией  $u$  [см. соотношение (44,26)], мы имеем:

$$uf(\mathbf{k}^2) = f((\mathbf{k} - \boldsymbol{\pi})^2)u = f(\mathbf{k}^2)u. \quad (45,14)$$

Подставляя (45,13) в равенство (45,12) и усредняя по углам вектора  $\mathbf{x}$  с помощью соотношений

$$\overline{(\mathbf{x}A)} = 0, \quad \overline{(\mathbf{x}A)(\mathbf{x}B)} = \frac{\mathbf{x}^2(AB)}{3}, \quad \overline{(\mathbf{x}A)(\mathbf{x}B)(\mathbf{x}C)} = 0,$$

$$\overline{(\mathbf{x}A)(\mathbf{x}B)(\mathbf{x}C)(\mathbf{x}D)} =$$

$$= \frac{\mathbf{x}^4}{15} [(AB)(CD) + (AC)(BD) + (AD)(BC)], \quad (45,15)$$

получаем:

$$\begin{aligned} \frac{\pi^2 - (G_0 - G'_0)^2}{G_0 G'_0 (G_0 + G'_0)} = \\ = \frac{\pi^2}{2K^3} - \frac{\pi^2 \mathbf{x}^2}{6K^5} - \frac{3\pi^2 \mathbf{k}^2}{4K^5} + \frac{5}{4} \frac{\pi^2 \mathbf{k}^2 \mathbf{x}^2}{K^7} + \frac{5}{12} \frac{\pi^2 (\mathbf{k}(\mathbf{k} - \boldsymbol{\pi})) \mathbf{x}^2}{K^7} - \frac{21}{40} \frac{\pi^4 \mathbf{x}^4}{K^9} - \\ - \frac{7}{12} \frac{\mathbf{x}^4}{K^9} [\pi^2 (\mathbf{k}(\mathbf{k} - \boldsymbol{\pi})) + 2(\boldsymbol{\pi} \mathbf{k})(\boldsymbol{\pi}(\mathbf{k} - \boldsymbol{\pi}))]. \quad (45,16) \end{aligned}$$

Дальнейшие вычисления проделаем с помощью равенств (44,26) и (44,27):

$$\mathbf{k}^2 u = u \mathbf{k}^2, \quad (\boldsymbol{\pi} u \mathbf{k}) = -\frac{1}{2} \pi^2 u.$$

Кроме того, из соотношения

$$\mathbf{k}^4 u = u \mathbf{k}^4,$$

которое легко получить, полагая в равенстве (44,25)  $n = 4$ , следует:

$$\pi^2 u \mathbf{k}^2 = \pi^2 \mathbf{k}^2 u = \frac{\pi^4}{4} u.$$

Отсюда легко преобразовать соотношение (45,16) к виду

$$\frac{(G_0 - G'_0)^2 - \pi^2}{G_0 G'_0 (G_0 + G'_0)} = -\pi^2 \left( \frac{1}{2K^3} - \frac{x^2}{6K^5} \right) + \pi^4 \left( \frac{3}{16K^5} - \frac{5}{24} \frac{x^2}{K^7} + \frac{7}{80} \frac{x^4}{K^9} \right). \quad (45,17)$$

Подставляя (45,17) в (45,12), имеем:

$$\nabla^2 \Phi^w = \left[ -\frac{2}{3\pi} \alpha \left( \int_0^\infty \frac{dx}{K} - \frac{5}{6} \right) \nabla^2 - \frac{\alpha}{15\pi k_0^2} \nabla^4 + \dots \right] \Phi. \quad (45,18)$$

При выводе последнего выражения мы приняли во внимание следующие равенства:

$$\int_0^\infty \left( \frac{x^2}{K^3} - \frac{x^4}{3K^5} \right) dx = \frac{2}{3} \left( \int_0^\infty \frac{dx}{K} - \frac{5}{6} \right), \quad (45,19)$$

$$\int_0^\infty \left( \frac{x}{K} \right)^{2n} \frac{dx}{K^3} = \frac{1}{(2n+1)k_0^2},$$

где  $n = 0, 1, 2, 3$ .

Найдём вектор-потенциал  $\mathbf{A}^w$ , возникающий в результате поляризации вакуума при наличии внешнего магнитного поля  $\mathbf{A}$ .

Подставляя в формулу (45,9) функцию взаимодействия  $u$ :

$$u = \frac{e}{ch} (\boldsymbol{\alpha} \mathbf{A}),$$

найдем:

$$\left( \alpha_n \text{след } \alpha_n \frac{H_{\mathbf{k}-\mathbf{x}}}{|H_{\mathbf{k}-\mathbf{x}}|} \right) = -\frac{e}{ch} \left( \pi^2 - (G_0 - G'_0)^2 \right) \frac{2}{G_0 G'_0 (G_0 + G'_0)} (\boldsymbol{\alpha} \mathbf{A}) + \frac{4(\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{k}-\mathbf{x}))}{G_0} + \frac{8e}{ch} \left( \frac{1}{G_0 + G'_0} (\boldsymbol{\alpha} \mathbf{A}) - \frac{1}{G_0 G'_0 (G_0 + G'_0)} (\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{k}-\mathbf{x})) ((\mathbf{k}-\mathbf{x}) \cdot \mathbf{A}) \right). \quad (45,19a)$$

Первый член правой части равенства (45,19а) приводит к следующему выражению для

$$\nabla^2(\alpha A^w) = \left[ -\frac{2}{3\pi} \alpha \left( \int_0^\infty \frac{dx}{K} - \frac{5}{6} \right) \nabla^2 - \frac{\alpha}{15\pi k_0^2} \nabla^4 \right] (\alpha A),$$

которое в совокупности с выражением (45,18) для скалярного потенциала  $\Phi^w$  образует четырёхмерный скаляр. Второй и третий члены правой части равенства (45,19а) дают релятивистски инвариантное выражение для  $A_1^w$ , из которого видно, что вектор-потенциал, связанный с поляризацией вакуума, не обращается в нуль даже в случае отсутствия внешнего поля ( $u=0$ ).

Раскладывая второй и третий члены правой части равенства (45,19а) в ряд по величине  $\frac{k^2}{k_0^2}$ , мы найдём инвариантный добавочный член

$$\begin{aligned} \nabla^2(\alpha A_1^w) = & -\frac{e}{\pi} \left[ \frac{4}{3} I_{-2} - \frac{4}{15} k^2 \right] (\alpha k) - \frac{\alpha}{\pi} \left[ \frac{4}{3} I_{-2}(\alpha A) - \right. \\ & \left. - \frac{1}{15} \pi^2(\alpha A) - \frac{4}{15} k^2(\alpha A) - \frac{8}{15}(\alpha k)(kA) \right]. \quad (45,19б) \end{aligned}$$

Здесь расходящийся интеграл  $I_{-2}$  задан формулой (44,42а). Интересно отметить, что следующий инвариантный член разложения, пропорциональный интегралу  $I_2 = \frac{1}{k_0^2}$  [см. соотношение (44,42г)], обращается в нуль, т. е. (как мы отмечали, в § 44, п. б) члены, пропорциональные  $\frac{1}{k_0^2}$ , обладают необходимым свойством релятивистской инвариантности.

**б) Полевая масса фотона.** Выражение (45,19б) содержит бесконечные члены, пропорциональные  $A$ , которые отсутствуют в случае электростатического поля [см. соотношение (45,18)]. Появление инвариантных членов, как было отмечено в § 44, связано с тем обстоятельством, что в современной квантовой электродинамике некоторые члены самодействия могут нарушать релятивистскую инвариантность. Инвариантные бесконечности появляются при исследовании проблемы собственной массы

электрона (продольная и поперечная бесконечные массы электрона). Неинвариантные члены появляются при вычислении самодействия с учётом электронно-позитронного вакуума (см. § 44, п. б). Более того, появление подспных членов (45,19б) непосредственно связано с несколько неожиданным вопросом о наличии полевой массы фотонов<sup>1)</sup>. В самом деле, электромагнитное поле виртуально может порождать пару электрон—позитрон с последующим её поглощением. Таким образом, появляется специфическое самодействие. Однако мы знаем, что экспериментальные данные приводят к нулевому значению для массы покоя фотона; кроме того, современная электродинамика базируется на калибровочной инвариантности, что также существенным образом связано с отсутствием массы покоя у фотонов.

Для собственной энергии фотона мы получили к тому же явно неинвариантный результат, поскольку эти члены самодействия появляются лишь в дифференциальных уравнениях для вектор-потенциала и отсутствуют в уравнениях для скалярного потенциала. Чтобы избежать указанной трудности, мы должны применить метод регуляризации, использованный нами при вычислении обменной части взаимодействия (см. § 44, п. б). Тогда с помощью формул (44,44а) и (44,44в) легко показать, что вся неинвариантная часть самодействия (45,19б), а вместе с тем и полевая масса фотона обращается в нуль.

**в) Полевой добавок к заряду.** Перейдём к анализу второго члена полевого взаимодействия, пропорционального величине  $\nabla^2\Phi$ . Несмотря на то, что коэффициент при нём

---

<sup>1)</sup> G. Wentzel, Phys. Rev. 74, 1070 (1948); см. также А. А. Абрикосов и И. М. Халатников, ЖЭТФ 21, 69 (1951); Д. А. Киржниц, ЖЭТФ 21, 949 (1951).

Напомним, что статическое уравнение поля, которое можно сопоставить с частицами, имеющими массу покоя  $m = \frac{\kappa_0 \hbar}{c}$ , согласно формуле (2,3), имеет вид:

$$(\nabla^2 - \kappa_0^2) \varphi = 0.$$

Поэтому появление в дифференциальном уравнении членов, пропорциональных  $A$ , может быть интерпретировано как наличие полевой массы у фотонов.

логарифмически расходится, этот член обладает необходимым свойством релятивистской инвариантности (если с помощью метода регуляризации неинвариантную часть самодействия для вектор-потенциала  $A_1^r$  обратить в нуль) и поэтому входит как в уравнение для скалярного, так и для векторного потенциалов.

Принимая во внимание, что внешний потенциал удовлетворяет уравнению

$$\nabla^2 \Phi = -4\pi\rho, \quad (45,20)$$

где  $\rho$  является плотностью внешних зарядов, мы находим для дополнительной плотности зарядов, связанных с поляризацией вакуума:

$$\rho^w = -\frac{1}{4\pi} \nabla^2 \Phi^w = -\frac{2}{3\pi} \alpha \left( \int_0^\infty \frac{dx}{K} - \frac{5}{6} \right) \rho.$$

Благодаря поляризации общий заряд электрона по абсолютному значению уменьшается и становится равным

$$e' = -e + e^w = -e \left[ 1 - \frac{2}{3\pi} \alpha \left( \int_0^\infty \frac{dx}{K} - \frac{5}{6} \right) \right]. \quad (45,21)$$

Таким образом, некоторая часть заряда электрона может носить полевой характер, и если, как обычно, приравнять логарифмически расходящийся интеграл величине порядка единицы (см. § 44, п. б), то найдём, что полевая часть заряда составляет не более  $\frac{1}{137}$  части всего заряда.

Природа полевой части заряда весьма напоминает собою природу полевой части массы, рассмотренную нами в § 44, п. б. Обе полевые добавки обладают необходимым свойством релятивистской инвариантности и обе расходятся по логарифмическому закону.

Так же как и в теории полевой массы, с помощью только перенормировки заряда (см. § 44, п. б) мы не сможем избавиться от неинвариантных членов самодействия. Используя же метод регуляризации, который позволяет избавиться от неинвариантных членов [см. формулы (44,44б) и (44,44в)], мы преобразуем полевой заряд к виду

$$e^w = e\alpha \frac{2}{3\pi} \left( \ln k_0 + \sum_i c_i \ln k_{0i} \right).$$

Неоднозначность для величины  $e^w$  носит кажущийся характер. Полевую часть заряда, так же как и полевую часть массы, мы можем исключить или с помощью соответствующей перенормировки или подчиняя компенсирующие поля ещё дополнительному условию (44,43г').

г) **Полевая энергия поляризации.** Следующий член разложения в дифференциальном уравнении для потенциалов поляризационных зарядов [см. уравнение (45,18) и (45,19б)] пропорционален  $\nabla^4\Phi$  (или  $\nabla^4\mathbf{A}$ ) и является величиной конечной, удовлетворяющей всем требованиям релятивистской инвариантности. Он не может быть исключён простой перенормировкой заряда и поэтому должен приводить к специфическим эффектам, которые могут быть обнаружены экспериментальным путём.

Эта часть четырёхмерного потенциала  $A_\mu^w$  имеет вид

$$A_\mu^w = -\frac{\alpha}{15\pi k_0^2} \nabla^2 A_\mu, \quad (45,22)$$

где  $A_\mu$  — четырёхмерный потенциал внешнего поля.

Подставляя (45,22) в (45,1), найдём общее выражение для необменной части взаимодействия:

$$V^N = \langle \psi_0^+ U^N \psi_0 \rangle, \quad (45,23)$$

где

$$U^N = \frac{\alpha e}{15\pi k_0^2} \nabla^2 (\Phi - (\boldsymbol{\alpha}\mathbf{A})). \quad (45,24)$$

д) **Общая энергия взаимодействия.** Итак, наряду с обычной энергией взаимодействия электрона с полем

$$U = -e(\Phi - (\boldsymbol{\alpha}\mathbf{A}))$$

должна существовать дополнительная полевая энергия взаимодействия  $U'$ , состоящая из следующих частей: части  $U'^A$  [см. формулу (44,52)], определяющей взаимодействие полевого момента с внешним полем, части  $U''^A$  [см. формулу (44,74)] и части  $U^N$  [см. формулу (45,24)], которые отличаются друг от друга численным значением коэффициента и пропорциональны  $\nabla^2 U$ , т. е.

$$U' = U'^A + U''^A + U^N = \frac{\alpha}{2\pi} \mu_0 [\rho_3(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{H}) + \rho_2(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{E})] - \\ - \frac{1}{3\pi k_0^2} \alpha e \left( \ln \frac{k_0}{x_0} - \ln 2 + \frac{11}{24} - \frac{1}{5} \right) \nabla^2 (\Phi - (\boldsymbol{\alpha}\mathbf{A})), \quad (45,25)$$

где  $\mu_0 = \frac{e\hbar}{2mc}$  — боровский магнетон, а  $\alpha = \frac{e^2}{\hbar c} = \frac{1}{137}$  — постоянная тонкой структуры (не путать с векторной матрицей скорости  $\alpha$ ), а значение для  $\kappa_0$  определяется формулой (44,69).

Для того чтобы дать наглядную интерпретацию формулы (45.25), положим вектор-потенциал  $\mathbf{A}$  внешнего поля равным нулю. Тогда, пренебрегая членом взаимодействия, пропорциональным  $\rho_2(\sigma \mathbf{E})$ , мы найдём, что дополнительная энергия будет иметь порядок:

$$U' \approx -e\alpha \frac{1}{\kappa_0^2} \nabla^2 \Phi.$$

Последнюю формулу можно интерпретировать следующим образом: электрон, взаимодействуя с частицами вакуума, совершает как бы броуновское движение (см. также § 28, п. в), которое можно характеризовать средним значением для квадратичного смещения  $(\overline{\Delta \mathbf{r}})^2$ <sup>1)</sup>.

Тогда для дополнительной энергии мы находим выражение

$$\Delta U = -e(\overline{\Phi(\mathbf{r} + \Delta \mathbf{r}) - \Phi(\mathbf{r})}) = -\frac{e}{6} (\Delta \mathbf{r})^2 \nabla^2 \Phi,$$

которое легко получить, если разложить потенциал  $\Phi(\mathbf{r} + \Delta \mathbf{r})$  в ряд по величине  $\Delta \mathbf{r}$  и принять во внимание, что при усреднении

$$(\overline{\Delta \mathbf{r} \cdot \nabla}) = 0, \quad (\overline{\Delta \mathbf{r} \cdot \nabla})^2 = \frac{1}{3} (\overline{\Delta \mathbf{r}})^2 \nabla^2.$$

Приравнивая обе энергии друг другу ( $U' = \Delta U$ ), найдём, что вакуумные флуктуации, как подчеркнули особенно ясно Боголюбов и Тябликов<sup>2)</sup>, индуцируют размазанность электрона, эффективный радиус которого имеет порядок среднего геометрического между классическим радиусом электрона  $r_0 = \frac{e^2}{mc^2}$  и комptonовской длиной волны  $\lambda_0 = \frac{\hbar}{2\pi mc}$ :

$$r^w = \sqrt{\overline{\Delta r^2}} \sim \sqrt{r_0 \lambda_0} \sim \sqrt{\alpha} \frac{\hbar}{2\pi mc}.$$

<sup>1)</sup> Более подробно см. «Классическая теория поля», стр. 456.

<sup>2)</sup> Н. Н. Боголюбов и С. В. Тябликов, Изв. АН УССР, № 5, 10 (1946).

Отсюда видно, что в классическом приближении ( $\hbar \rightarrow 0$ ) электрон мы можем рассматривать как точечный, т. е. пренебречь его вакуумным размазыванием.

Наличие подобных колебаний приводит к изменению среднего значения потенциальной энергии, благодаря чему происходит сдвиг уровней (см. ниже). Если вычислить, исходя из теории броуновского движения электрона в вакууме, дополнительную магнитную энергию, то получается неверный знак<sup>1)</sup>. Это связано с тем обстоятельством, что сдвиг уровней возникает главным образом благодаря взаимодействию электрона с виртуальными частицами, обладающими положительной энергией (см. § 44, п. д), а магнитный момент — благодаря взаимодействию с виртуальными частицами, обладающими отрицательной энергией. Если это учесть, то можно до некоторой степени понять изменение знака у магнитного члена взаимодействия.

Среднее значение энергии (45,25) равно

$$V = \langle \psi_0^+ U' \psi_0 \rangle.$$

Рассматривая величину  $\frac{v}{c} \sim \frac{\nabla}{k_0} \sim |\alpha|$  как величину первого порядка малости, мы можем заключить, что взаимодействие, пропорциональное  $\rho_3(\sigma\mathbf{H})$ , является величиной первого порядка малости, а взаимодействие, пропорциональное  $\rho_2(\sigma\mathbf{E})$  и  $\nabla^2\Phi$  — второго порядка. Взаимодействие первого порядка малости ведёт к дополнительному моменту электрона, а второго порядка — к сдвигу уровней. Оба этих теоретических вывода находятся не только в качественном, но также и в количественном соответствии с последними экспериментальными исследованиями. Это говорит нам прежде всего о том, что мы становимся на правильный путь исследования взаимодействия частиц с различными виртуальными полями. Таким образом, начинается новый этап познания явлений, самым тесным образом связанных с проблемой собственной массы.

<sup>1)</sup> T. Welton, Phys. Rev. 74, 1157 (1948); Z. Koba, Progr. Theoret. Phys. 4, 98 (1949). (Подробные рефераты статьи Велтона и Коба помещены в сборнике «Сдвиг уровней атомных электронов».)



## § 46. Проблема атома водорода и теория вакуума

а) **Постановка вопроса.** Как известно, в результате классических опытов Рёзерфорда (1911) по рассеянию  $\alpha$ -частиц тяжёлыми ядрами <sup>1)</sup>, была окончательно установлена планетарная модель атома. Вообще же до опытов Рёзерфорда ряд теоретиков скорее склонялся в пользу статической модели Томсона, теория которой, как казалось, могла быть построена на основе законов классической электродинамики. В связи с этим следует отметить, насколько правильно оценил В. И. Ленин развитие учения в области строения вещества, когда он ещё до опытов Рёзерфорда поддерживал именно планетарную модель атома.

В. И. Ленин писал: «... атом удаётся объяснить как подобие бесконечно малой солнечной системы, внутри которой вокруг положительного электрона двигаются с определённой (и необъятно громадной, как мы видели) быстротой отрицательные электроны» <sup>2)</sup>.

Согласно планетарной теории атом, положение которого в системе Менделеева определяется порядковым номером  $Z$ , имеет центральное ядро с положительным зарядом  $Ze$ , где  $e$  представляет собою элементарный положительный заряд ( $e = 4,8 \cdot 10^{-10}$  абс. эл.-стат. ед.). Вокруг ядра вращаются  $Z$  электронов с зарядом  $-e$ . Таким образом, атом в целом является электрически нейтральным. Простейшей моделью атома является модель атома водорода, состоящего из протона (ядро водорода) и вращающегося вокруг него электрона.

Прежде всего заметим, что планетарная модель является динамической, и поэтому нельзя объяснить её устойчивое состояние на базе классической электродинамики. В этом деле, вращающийся со скоростью  $v$  по орбите радиуса  $a$  электрон обладает центростремительным ускорением  $\omega = \frac{v^2}{a}$ . Поэтому он должен излучать электро-

<sup>1)</sup> Более подробно см. § 36.

<sup>2)</sup> В. И. Ленин, Материализм и эмпириокритицизм, Госполитиздат, 1951, стр. 243; впоследствии термин положительный электрон был заменён термином атомное ядро, которое, как известно, заряжено положительным электричеством.

магнитную энергию (количество излучаемой в единицу времени энергии пропорционально квадрату ускорения  $\frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} w^2$ ) до тех пор, пока не упадет на ядро. Частота излучаемого света  $\nu$  должна равняться частоте вращения  $\nu_0$  ( $\nu_0 = \frac{v}{2\pi a}$ ) или в случае, когда возможно излучение гармоник, может быть также кратна ей:

$$\nu = s\nu_0 \quad (s = 1, 2, 3, \dots). \quad (46,1)$$

В то же время тщательное излучение спектральных линий атома водорода показывает, что все они могут быть объединены формулой

$$\nu = R \left( \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n'^2} \right). \quad (46,2)$$

Здесь  $R = 3,29 \cdot 10^{15}$  сек<sup>-1</sup> — постоянная Ридберга, а  $n$  и  $n'$  ( $n' = n + 1, n + 2, \dots$ ) являются целыми числами, получившими название квантовых чисел.

Полагая  $n = 1$ , мы получим ультрафиолетовую серию Лаймана; при  $n = 2$  мы получим серию Бальмера, лежащую в видимой части спектра; при  $n = 3$  мы получим инфракрасную серию Пашена и т. д.

Классическая формула для частоты излучения (46,1) получается из формулы (46,2) лишь в предельном случае больших квантовых чисел, когда мы можем положить  $s = n' - n \ll n$ . Тогда формула (46,2) принимает вид

$$\nu = \frac{2R}{n^3} s,$$

совпадающий с формулой (46,1) ( $\nu_0 = \frac{2R}{n^3}$ ).

В общем случае с помощью классической теории нельзя получить спектральные серии вида (46,2). Поэтому развитие учения об атоме было самым тесным образом связано с квантовой теорией. Каждый новый этап теории прежде всего проверялся на простейшей модели атома, а именно: на модели атома водорода. Современное изложение теории атома водорода наряду с учётом релятивистских и спиновых поправок требует также учёта вакуумных членов, без которых нельзя объяснить

некоторые расщепления спектральных линий, недавно открытые с помощью весьма чувствительного радиочастотного метода.

**б) Первоначальная квантовая теория.** Согласно первоначальному варианту квантовой теории (теория Бора) электрон вращается вокруг ядра под действием кулоновского притяжения по законам классической механики, подобно тому как движутся планеты вокруг солнца. Однако законы излучения классической электродинамики должны быть заменены новыми квантовыми законами, открытыми, в частности, Планком при исследовании излучения абсолютно чёрного тела. Первая формулировка квантовых законов в применении к атому сводилась к двум положениям.

Во-первых, предполагалось, что в каждом атоме имеется ряд стационарных состояний, находясь в которых электрон не излучает, несмотря на то, что движется с ускорением.

При квантовании периодического движения, т. е. при нахождении соответствующих устойчивых значений для энергии  $\mathcal{E}_n$ , адиабатические инварианты  $I$  ( $I = \oint p dq$ , где  $p$  является импульсом, а  $q$  — координатой частицы), которые по классической механике могли принимать любые постоянные значения, полагались кратными постоянной Планка  $h$ :

$$\oint p dq = nh. \quad (46,3)$$

Во-вторых, предполагалось, что атом должен излучать один квант энергии ( $h\nu$ ) при переходе из начального устойчивого состояния (энергия  $\mathcal{E}_{n'}$ ) в конечное ( $\mathcal{E}_n$ ). Частота излучения находилась в этом случае из соотношения

$$\nu = \frac{\mathcal{E}_{n'} - \mathcal{E}_n}{h}. \quad (46,4)$$

Применим эти результаты к атому водорода.

Как известно, при движении под действием центральных сил кулоновского притяжения траектория электрона заряда  $-e$  в атоме водорода, заряд ядра которого

равняется  $+e$ , должна быть плоской (рис. 14). Выбирая за независимые координаты радиус  $r$  и полярный угол  $\varphi$ , имеем для функции Лагранжа

$$L = \frac{m}{2} (r^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{r}^2) + \frac{e^2}{r}, \quad (46,5)$$

где  $m$  — масса электрона, а  $V = -\frac{e^2}{r}$  — потенциальная энергия.

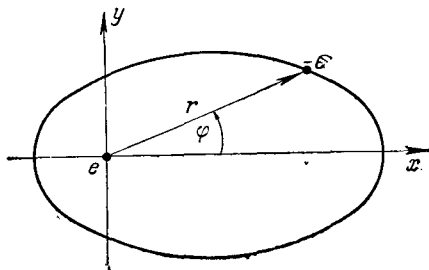


Рис. 14. Движение электрона в атоме водорода.

Из формулы (46,5) получаем значения для обобщённых импульсов:

$$\begin{aligned} p_{\varphi} &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2 \dot{\varphi}, \\ p_r &= \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}. \end{aligned} \quad (46,6)$$

В частности, для круговых орбит мы можем положить  $\dot{r} = 0$ , а

$$r = a = \text{const.}$$

Поскольку  $\varphi$  является циклической координатой, мы имеем:

$$p_{\varphi} = ma^2 \dot{\varphi} = \text{const.} \quad (46,7)$$

Кроме того, при  $p_r = 0$  мы можем написать

$$\left. \frac{\partial L}{\partial r} \right|_{r=a} = ma \dot{\varphi}^2 - \frac{e^2}{a^2} = 0. \quad (46,8)$$

Последнее уравнение представляет собою второй закон Ньютона, согласно которому произведение массы ( $m$ ) на ускорение ( $w = a\dot{\varphi}^2$ ) равняется кулоновской силе  $\left(\frac{e^2}{a^2}\right)$ .

Поскольку лагранжиан  $L$  явно не зависит от времени  $t$ , мы можем учесть ещё закон сохранения энергии

$$\mathcal{E} = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) - \frac{e^2}{r} = \text{const}, \quad (46,9)$$

который в случае круговых орбит принимает вид

$$\mathcal{E} = \frac{m}{2} a^2\dot{\varphi}^2 - \frac{e^2}{a} = \text{const}. \quad (46,10)$$

Исключая из последних соотношений  $a$  и  $\dot{\varphi}$ , находим связь импульса  $p_\varphi$  с энергией  $\mathcal{E}$ :

$$p_\varphi = e^2 \sqrt{-\frac{m}{2\mathcal{E}}}.$$

Для определения устойчивых состояний мы должны воспользоваться квантовым постулатом (46,3), который в нашем случае ( $q = \varphi$ ,  $p = p_\varphi = \text{const}$ ) даёт:

$$e^2 \sqrt{-\frac{m}{2\mathcal{E}}} = n\hbar.$$

Отсюда находим энергию для устойчивых состояний:

$$\mathcal{E}_n = -\frac{e^4 m}{2n^2 \hbar^2}, \quad (46,11)$$

а также спектр излучения (частоты):

$$\nu = \frac{\mathcal{E}_{n'} - \mathcal{E}_n}{2\pi\hbar} = \frac{e^4 m}{4\pi\hbar^3} \left( \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n'^2} \right),$$

который совпадает с эмпирической формулой (46,2). Для постоянной Ридберга имеем:

$$R = \frac{me^4}{4\pi\hbar^3},$$

что численно совпадает с результатами опытных данных [см. формулу (46,2)].

Учёт эллиптических орбит фактически не изменяет полученных результатов. В самом деле, в случае эллип-

тических орбит с помощью уравнений (46,6) и (46,9) находим:

$$\begin{aligned} p_\varphi &= mr^2 \dot{\varphi}, \\ p_r &= \sqrt{-A + \frac{2B}{r} - \frac{C}{r^2}}, \end{aligned} \quad (46,12)$$

причём постоянные величины

$$A = -2m\mathcal{E}, \quad B = me^2 \quad \text{и} \quad C = p_\varphi^2$$

имеют положительный знак. Используя далее значение интеграла

$$\begin{aligned} \oint \sqrt{-A + \frac{2B}{r} - \frac{C}{r^2}} dr &= 2 \int_{r_{\text{мин}}}^{r_{\text{макс}}} \sqrt{-A + \frac{2B}{r} - \frac{C}{r^2}} dr = \\ &= 2\pi \left( \frac{B}{\sqrt{A}} - \sqrt{C} \right), \end{aligned} \quad (46,13)$$

где  $r_{\text{мин}}$  и  $r_{\text{макс}}$  являются корнями уравнения

$$-A + \frac{2B}{r} - \frac{C}{r^2} = 0,$$

получаем с помощью квантового уравнения (46,3):

$$\begin{aligned} \sqrt{C} &= p_\varphi = n_\varphi \hbar, \\ \frac{B}{\sqrt{A}} - \sqrt{C} &= n_r \hbar. \end{aligned} \quad (46,14)$$

Подставляя значение для коэффициентов  $A$ ,  $B$  и  $C$ , находим выражение для энергии

$$\mathcal{E}_{n_\varphi n_r} = - \frac{e^4 m}{2\hbar^2 (n_\varphi + n_r)^2}, \quad (46,15)$$

причём квантовые числа принимают следующие целочисленные значения:

$$n_\varphi = 1, 2, 3, \dots; \quad n_r = 0, 1, 2, \dots$$

Заметим, что квантовое число  $n_\varphi$  не может принимать значение, равное нулю, так как в противном случае момент  $p_\varphi$  также обращается в нуль, т. е. движение перестаёт быть периодическим. Это легко показать с помощью законов классической механики. В самом деле, эксцент-

риситет  $\epsilon$  эллиптической ( $\mathcal{E} < 0$ ) орбиты определяется соотношением

$$\epsilon = \sqrt{1 + \frac{2\mathcal{E}p_p^2}{me^4}} = \sqrt{1 - \frac{n_\varphi^2}{(n_\varphi + n_r)^2}}, \quad (46,16)$$

откуда видно, что при  $n_\varphi = 0$  траектория электрона становится параболической.

Вводя главное квантовое число  $n$ , равное сумме квантовых чисел  $n_\varphi$  и  $n_r$ :

$$n = n_\varphi + n_r,$$

причём величина  $n$  может принимать значения

$$n = 1, 2, 3, \dots,$$

с помощью формулы (46,15) получаем те же самые уровни энергии, что и в первоначальной теории Бора [см. соотношение (46,11)].

**в) Тонкая структура.** Как видно из формулы (46,16), учёт эллиптических движений приводит к так называемой вырожденной системе, т. е. к различным квантовым состояниям (в данном случае орбитам), которым соответствует одно и то же значение для энергии ( $n = n_r + n_\varphi = \text{const}$ ).

Однако более детальное изучение спектров атомов показывает, что спектральные линии обладают тонкой структурой, которая, естественно, должна быть связана с мультиплетной структурой энергетических уровней. Для объяснения тонкой структуры следует использовать релятивистскую теорию применительно к движению электрона в атоме.

В релятивистской теории функция Лагранжа имеет вид

$$L = -mc^2 \sqrt{1 - \beta^2} - V, \quad (46,17)$$

где  $v = c\beta$  — скорость движения электрона, причём

$$\beta^2 = \frac{1}{c^2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2),$$

а  $V$  — потенциальная энергия ( $V = -\frac{e^2}{r}$ ). Лагранжиан (46,17) приводит к закону сохранения импульса

$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{m}{\sqrt{1 - \beta^2}} r^2 \dot{\varphi} = \text{const} \quad (46,18)$$

и к закону сохранения энергии

$$E = \mathcal{E} + mc^2 = c \sqrt{m^2c^2 + p_r^2 + \frac{p_\varphi^2}{r^2}} - \frac{e^2}{r} = \text{const.} \quad (46,19)$$

В последней формуле учтено, что в релятивистской теории полная энергия  $E$  содержит также собственную энергию частицы  $mc^2$ .

Из формулы (46,19) находим:

$$p_r = \sqrt{-A + \frac{2B}{r} - \frac{C}{r^2}}, \quad (46,20)$$

где

$$\begin{aligned} A &= m^2c^2 \left[ 1 - \left( 1 + \frac{\mathcal{E}}{mc^2} \right)^2 \right], \\ B &= mc^2 \left( 1 + \frac{\mathcal{E}}{mc^2} \right), \\ C &= p_\varphi^2 - \frac{e^4}{c^2}. \end{aligned} \quad (46,21)$$

Отсюда с помощью квантовых условий

$$\oint p_\varphi d\varphi = n_\varphi h, \quad \oint p_r dr = n_r h,$$

используя также равенство (46,13), находим формулу для тонкой структуры:

$$1 + \frac{\mathcal{E}}{mc^2} = \left[ 1 + \frac{\alpha^2}{(n_r + \sqrt{n_\varphi^2 - \alpha^2})^2} \right]^{-\frac{1}{2}}, \quad (46,22)$$

где  $\alpha = \frac{e^2}{\hbar c} = \frac{1}{137}$  — постоянная тонкой структуры.

Раскладывая правую часть формулы (46,22) по квадрату постоянной тонкой структуры  $\alpha^2$  и ограничиваясь величинами порядка  $\alpha^4$ , получаем выражение для энергии  $\mathcal{E}$  ( $l = n_\varphi - 1$ ):

$$\frac{\mathcal{E}_{nl}}{h} = -\frac{R}{n^2} \left[ 1 + \frac{\alpha^2}{n^2} \left( \frac{n}{n_\varphi} - \frac{3}{4} \right) \right]. \quad (46,23)$$

Поскольку величина  $\alpha^2$  очень мала по сравнению с единицей, различные спектральные уровни  $\frac{\mathcal{E}}{h}$ , соответ-



ствующие одному и тому же значению  $n$ , близки друг к другу, благодаря чему и наблюдается тонкая структура линий: спектральный уровень с заданным значением главного квантового числа  $n$  расщепляется на  $n$  близких уровней, поскольку азимутальное квантовое число  $n_z$  может принимать значения 1, 2, 3, ...,  $n$ .

В частности, в серии Бальмера, лежащей в видимой части спектра, переходы совершаются на уровни  $n=2$ . Каждый из этих уровней по рассматриваемой теории имеет своё значение для энергии:

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{E}_{20}}{h} &= -\frac{R}{4} \left( 1 + \frac{\alpha^2}{4} \left( 2 - \frac{3}{4} \right) \right), \\ \frac{\mathcal{E}_{21}}{h} &= -\frac{R}{4} \left( 1 + \frac{\alpha^2}{4} \left( 1 - \frac{3}{4} \right) \right). \end{aligned} \quad (46,24)$$

Это должно привести к дублетному расщеплению с постоянным расстоянием между составляющими для всей серии

$$\Delta\nu = \frac{\mathcal{E}_{21} - \mathcal{E}_{20}}{h} = \frac{R\alpha^2}{16}. \quad (46,25)$$

Подставляя сюда численные значения вместо величин  $R$  и  $\alpha$ , найдём:

$$\Delta\nu = 1,095 \cdot 10^4 \text{ Мгц},$$

что является весьма малой величиной по сравнению с основным уровнем

$$\frac{\mathcal{E}_{10}}{h} \approx R = 3,29 \cdot 10^9 \text{ Мгц} \left( 1 \text{ Мгц} = 10^8 \text{ сек.}^{-1} = \frac{1}{3} 10^{-4} \text{ см}^{-1} \right).$$

Эта величина с достаточной точностью совпадает с величиной, найденной экспериментальным путём.

Несмотря на большие успехи первоначальной квантовой теории Бора, позволившей подвести теоретический фундамент под огромный материал атомной спектроскопии, эта теория обладала существенными недостатками, которые были ясны с самого начала её возникновения и всё сильнее давали о себе знать при дальнейшем её развитии. Первоначальная квантовая теория позволяла вычислить только частоты спектральных линий, но не их интенсивности.

Далее, теория Бора, носившая явно полуклассический характер, не могла объяснить явлений, связанных со спином электрона. Поэтому естественно, что после открытия существования электронных волн она была заменена другой более точной теорией — волновой механикой. Однако благодаря простоте трактовки ряда атомных явлений первоначальная квантовая теория часто служит отправным пунктом для понимания многих квантовых процессов в атоме.

г) **Нерелятивистское волновое уравнение.** Нерелятивистское волновое уравнение в применении к атому водорода имеет вид

$$\nabla^2\psi + \frac{2m}{\hbar^2} \left( \mathcal{E} + \frac{e^2}{r} \right) \psi = 0. \quad (46,26)$$

Вводя, в частности, сферические координаты  $(r, \theta, \varphi)$ , мы можем разбить оператор Лапласа на две части:

$$\nabla^2 = \nabla_r^2 + \frac{1}{r^2} \nabla_{\theta, \varphi}^2, \quad (46,27)$$

на радиальную

$$\nabla_r^2 = \frac{1}{r^2} \left( \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) \quad (46,28)$$

и на угловую

$$\nabla_{\theta, \varphi}^2 = \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}. \quad (46,29)$$

Решение уравнения (46,26) будем искать в виде произведения двух функций

$$\psi = R(r) Y(\theta, \varphi), \quad (46,30)$$

из которых одна зависит от радиуса  $r$ , а другая — от углов  $\theta$  и  $\varphi$ . Решение для функции  $Y$  может быть представлено в следующем виде<sup>1)</sup>:

$$Y(\theta, \varphi) = N_l^{m'} Y_l^{m'}(\theta, \varphi) = N_l^{m'} (-1)^{m'} (l - m')! e^{im'\varphi} P_l^{m'}(\cos \theta), \quad (46,31)$$

<sup>1)</sup> Более подробно см. Д. И. Блохинцев, Основы квантовой механики, М. — Л., 1949, стр. 175. Здесь и в дальнейшем просьба не путать магнитное квантовое число  $m'$  с массой  $m$ , обозначаемой без штриха.

где  $P_l^{m'}(x)$  — обобщённый полином Лежандра, который связан с полиномом Лежандра

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l (x^2 - 1)^l}{dx^l}. \quad (46,32)$$

Для  $P_l^{m'}$  мы имеем выражение<sup>1)</sup>

$$P_l^{m'} = (1 - x^2)^{\frac{m'}{2}} \frac{d^{l+m'}}{dx^{l+m'}} \frac{(x^2 - 1)^l}{2^l l!} = (-1)^{m'} \frac{(l+m')!}{(l-m')!} P_l^{-m'}(x). \quad (46,33)$$

Квантовые числа  $l$  и  $m'$  могут принимать следующие значения:

$$l = 0, 1, 2, 3, \dots, \\ m' = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm l.$$

Заметим, что формула (46,33) даёт конечное значение для  $P_l^{m'}(x)$  при  $1 \geq x - 1$ .

Сферические функции  $Y_l^{m'} = (-1)^{m'} Y_l^{-m'}$  обладают свойством ортогональности, а постоянная  $N_l^{m'}$  выбирается таким образом, чтобы функция  $N_l^{m'} Y_l^{m'}$  была нормирована на единицу, именно:

$$N_l^{m'} = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{1}{(l+m')!(l-m')!}} \quad (46,34)$$

Оба эти условия могут быть выражены одним равенством

$$N_l^{m'} N_{l_1}^{m_1'} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi Y_l^{*m'}(\theta, \varphi) Y_{l_1}^{m_1'}(\theta, \varphi) \sin \theta d\theta = \delta_{ll_1} \delta_{m'm_1'}. \quad (46,35)$$

Как известно, сферические функции обладают следующим свойством:

$$\nabla^2 Y_l^{m'} R = \left( \nabla_r^2 - \frac{l(l+1)}{r^2} \right) Y_l^{m'} R. \quad (46,36)$$

Поэтому, подставляя решение (46,30) в (46,26), находим дифференциальное уравнение для определения радиаль-

<sup>1)</sup> См., например, В. А. Фок, Начала квантовой механики, Л., 1932, стр. 120.

ной функции:

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \left( -A + \frac{2B}{r} - \frac{C}{r^2} \right) R = 0, \quad (46,37)$$

где

$$A = -\frac{2m\mathcal{E}}{\hbar^2}, \quad B = \frac{me^2}{\hbar^2}, \quad C = l(l+1). \quad (46,38)$$

Вводя новую переменную

$$\rho = 2\sqrt{A}r, \quad (46,39)$$

получаем уравнение

$$\frac{d^2R}{d\rho^2} + \frac{2}{\rho} \frac{dR}{d\rho} + \left( -\frac{1}{4} + \frac{B}{\sqrt{A}\rho} - \frac{l(l+1)}{\rho^2} \right) R = 0, \quad (46,39a)$$

решение которого следующее:

$$\frac{B}{\sqrt{A}} = l + k + 1 = n, \quad (46,40)$$

$$R = R_{nl}(\rho) = N_{nl} e^{-\frac{\rho}{2}} \rho^l L_{n+l}^{(2l+1)}(\rho). \quad (46,41)$$

Радиальное квантовое число  $k$  принимает значения 0, 1, 2, 3, ..., поэтому главное квантовое число  $n$  может равняться

$$n = 1, 2, 3, \dots \quad (46,42)$$

Функция  $L_{n+l}^{(2l+1)}(\rho)$  связана с полиномами Лягерра

$$L_s(\rho) = e^\rho \frac{d^s}{d\rho^s} (e^{-\rho} \rho^s) \quad (46,43)$$

соотношением

$$L_{n+l}^{(2l+1)}(\rho) = (-1)^{n+l} \frac{d^{2l+1}}{d\rho^{2l+1}} L_{n+l}(\rho). \quad (46,44)$$

Нетрудно показать, что последнее выражение является полиномом степени  $k$  ( $k = n - l - 1$ ):

$$L_{n+l}^{(2l+1)} = \Gamma^2(k+2l+2) \sum_{\nu=0}^k (-1)^\nu \times \\ \times \frac{\rho^{k-\nu}}{\Gamma(k+1-\nu) \Gamma(\nu+1) \Gamma(k+2l+2-\nu)}. \quad (46,45)$$

Нормировочный коэффициент

$$N_{nl} = A^3 \sqrt{\frac{4\Gamma(k+1)}{n[\Gamma(k+2l+2)]^3}}$$

выбирается таким образом, чтобы функции  $R$  удовлетворяли не только условию ортогональности, но также и условию нормировки

$$\int_0^{\infty} r^2 R_{nl} R_{n'l} dr = \delta_{nn'}. \quad (46,46)$$

Заметим, что решения (46,40) и (46,41) сохраняют свою силу и при нецелочисленных значениях  $l$  (например, при решении релятивистской задачи). В этом случае функцию  $L_{n+l}^{(2l+1)}$  мы должны выбрать в виде полинома (46,45), который сохраняет целый порядок как при целочисленных, так и при нецелочисленных значениях  $l$ .

С помощью формул (46,38) и (46,40) находим энергию:

$$\mathcal{E}_n = -\frac{e^4 m}{2n^2 \hbar^2} = -\frac{R\hbar}{n^2}, \quad (46,47)$$

точно совпадающую с выражением (46,11), найденным по теории Бора. Отсюда получаем выражение для коэффициента  $A$ :

$$A = \frac{1}{a_0^3 n^2}, \quad (46,48)$$

где величина  $a_0 = \frac{\hbar^2}{me^2}$  является радиусом первой борвской орбиты.

Итак, мы видим, что волновая механика позволяет автоматически определить нижнюю границу изменения квантовых чисел, в то время как в теории Бора нулевое значение для квантового числа  $n_z$  ( $n_z = 0$ ) было исключено на основе дополнительных соображений. Кроме того, определив волновые функции  $\psi$ , мы можем найти правила отбора и интенсивность излучения (см. § 46, п. и).

д) Релятивистское скалярное уравнение. Согласно формуле (10,9) релятивистское скалярное уравнение

в применении к атому водорода имеет вид:

$$\nabla^2 \psi + \frac{1}{c^2 \hbar^2} \left[ \left( E + \frac{e^2}{r} \right)^2 - m^2 c^4 \right] \psi = 0, \quad (46,49)$$

причём энергия  $E$  частицы включает в себя значение собственной энергии  $mc^2$ , т. е.

$$E = \mathcal{E} + mc^2. \quad (46,50)$$

Решение уравнения (46,49) будем искать в виде

$$\psi = R(r) Y_l^{m'}(\theta, \varphi). \quad (46,51)$$

Учитывая тогда соотношение (46,36), находим дифференциальное уравнение для радиальной части

$$\left( \nabla_r^2 - A + \frac{2B}{r} - \frac{C}{r^2} \right) R = 0, \quad (46,52)$$

тождественно совпадающее с уравнением (46,37), но с несколько другими значениями для постоянных коэффициентов:

$$\begin{aligned} A &= \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \left( 1 - \left( 1 + \frac{\mathcal{E}}{mc^2} \right)^2 \right), \\ B &= \frac{me^2}{\hbar^2} \left( 1 + \frac{\mathcal{E}}{mc^2} \right), \\ C &= l(l+1) - \alpha^2 = l'(l'+1), \end{aligned} \quad (46,53)$$

где  $l' = -\frac{1}{2} + \sqrt{\left( l + \frac{1}{2} \right)^2 - \alpha^2}$ ,  $\alpha = \frac{e^2}{ch} \cong \frac{1}{137}$ .

Второе решение для  $l'$   $\left( l'_1 = -\frac{1}{2} - \sqrt{\left( l + \frac{1}{2} \right)^2 - \alpha^2} \right)$ , приводящее к расходимости выражения (46,41) в начале координат ( $\rho \rightarrow 0$ ) должно быть отброшено.

Для определения возможного спектра энергий мы можем воспользоваться равенством (46,40), согласно которому

$$\frac{B}{\sqrt{A}} = l' + k + 1, \quad (46,54)$$

где радиальное квантовое число  $k = 0, 1, 2, \dots$

Отсюда находим формулу для определения тонкой структуры:

$$1 + \frac{\mathcal{E}}{mc^2} = \left[ 1 + \frac{\alpha^2}{(l' + k + 1)^2} \right]^{-\frac{1}{2}} = \\ = \left[ 1 + \frac{\alpha^2}{\left( k + \frac{1}{2} + \sqrt{\left( l + \frac{1}{2} \right)^2 - \alpha^2} \right)^2} \right]^{-\frac{1}{2}}. \quad (46,55)$$

Раскладывая последнее выражение по степеням  $\alpha^2$ , получаем значения для термов:

$$\frac{\mathcal{E}_{nl}}{h} = -\frac{R}{n^2} \left( 1 + \frac{\alpha^2}{n^2} \left( \frac{n}{l + \frac{1}{2}} - \frac{3}{4} \right) \right), \quad (46,56)$$

где главное квантовое число  $n$  равно

$$n = l + k + 1 = 1, 2, 3 \dots$$

Сопоставляя соотношение (46,56) с соотношением (46,23), мы видим, что формула волновой механики отличается от соответствующей формулы старой квантовой теории заменой азимутального квантового числа  $n_{\varphi} = l + 1$  на величину  $l + \frac{1}{2}$ .

В частности, используя новый результат для определения дублетного расщепления в серии Бальмера, находим:

$$\Delta\nu = \frac{\mathcal{E}_{21} - \mathcal{E}_{20}}{h} = \frac{8}{3} \frac{R\alpha^2}{16}. \quad (46,57)$$

Следовательно, новый результат отличается от прежнего результата (46,25) на множитель  $\frac{8}{3}$ , т. е. получается явно завышенное значение для расщепления. Таким образом, по релятивистской волновой механике на первый взгляд мы получаем для спектрального расщепления более плохой результат, чем по старой квантовой теории.

Полное решение проблемы может быть получено только с учётом спиновых эффектов, которые дают такой же порядок для расщепления термов, как и релятивистские. Поэтому такую задачу следует решать с помощью полу-векторных уравнений, учитывающих спин электрона.

Возможно, что найденные с помощью релятивистского скалярного уравнения результаты получат своё применение при изучении образования водородоподобных атомов с бесспиновыми частицами [например, при вращении бесспинового мезона вокруг протона (мезоводород)].

е) **Полувекторное уравнение.** Полувекторное уравнение, которое описывает и релятивистские и спиновые эффекты, в применении к атому водорода принимает вид [см. уравнения (17,23), (17,24)]:

$$\left[ E - c(\boldsymbol{\alpha}\mathbf{p}) - mc^2\rho_3 + \frac{e^2}{r} \right] \psi = 0, \quad (46,58)$$

где

$$E = mc^2 + \mathcal{E}.$$

Однако для решения поставленной задачи значительно проще воспользоваться квадрированным относительно (46,58) уравнением [см. формулу (17,31)]:

$$\left[ \left( E + \frac{e^2}{r} \right)^2 + c^2\hbar^2\nabla^2 - m^2c^4 + c\hbar i \frac{e^2}{r^3} (\boldsymbol{\alpha}\mathbf{r}) \right] \psi = 0. \quad (46,59)$$

Вводя оператор

$$S = \nabla^2 + \frac{1}{c^2\hbar^2} \left[ \left( E + \frac{e^2}{r} \right)^2 - m^2c^4 \right], \quad (46,60)$$

а также делая переход от декартовых координат к сферическим ( $z = r \cos \theta$ ,  $x \pm iy = r \sin \theta e^{\pm i\varphi}$ ), мы можем матричное уравнение (46,59) записать в виде системы уравнений:

$$\begin{aligned} S\psi_1 + \frac{i\alpha}{r^2} (\sin \theta e^{-i\varphi}\psi_4 + \cos \theta\psi_3) &= 0, \\ S\psi_2 + \frac{i\alpha}{r^2} (\sin \theta e^{i\varphi}\psi_3 - \cos \theta\psi_4) &= 0, \\ S\psi_3 + \frac{i\alpha}{r^2} (\sin \theta e^{-i\varphi}\psi_2 + \cos \theta\psi_1) &= 0, \\ S\psi_4 + \frac{i\alpha}{r^2} (\sin \theta e^{i\varphi}\psi_1 - \cos \theta\psi_2) &= 0, \end{aligned} \quad (46,61)$$

где

$$\alpha = \frac{e^2}{c\hbar}. \quad (46,62)$$



Решение уравнений (46,61) будет связано с обобщёнными полиномами Лежандра

$$P_l^{m'}(x) = (1-x^2)^{\frac{m'}{2}} \frac{d^{l+m'}}{dx^{l+m'}} \frac{(x^2-1)^l}{2^l l!} \quad (46,63)$$

[см. также (46,33)], между которыми существуют рекуррентные соотношения

$$(l+m')P_l^{m'-1}(x) = (1-x^2)^{\frac{1}{2}} P_{l+1}^{m'}(x) + (l-m'+2)xP_{l+1}^{m'-1}(x), \quad (46,64)$$

и

$$P_l^{m'}(x) = xP_{l+1}^{m'}(x) - (l-m+2)(1-x^2)^{\frac{1}{2}} P_{l+1}^{m'-1}(x). \quad (46,65)$$

Для сферических функций согласно (46,31) имеем:

$$Y_l^{m'}(\theta, \varphi) = (-1)^{m'} (l-m')! e^{im'\varphi} P_l^{m'}(\cos \theta), \quad (46,66)$$

причём

$$Y_l^{*m'}(\theta, \varphi) = (-1)^{m'} Y_l^{-m'}(\theta, \varphi). \quad (46,67)$$

Условие ортогональности (46,35) принимает вид

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin \theta d\theta Y_l^{m'}(\theta, \varphi) Y_{l_1}^{*m_1'}(\theta, \varphi) = \\ = \frac{4\pi (l+m')! (l-m')!}{2l+1} \delta_{m'm_1'} \delta_{ll_1}. \end{aligned} \quad (46,68)$$

С помощью (46,64) и (46,65) находим следующие рекуррентные соотношения между сферическими функциями

$$\begin{aligned} (l+m')Y_l^{m'-1} &= -\sin \theta e^{-i\varphi} Y_{l+1}^{m'} + \cos \theta Y_{l+1}^{m'-1}, \\ (l+1-m')Y_l^{m'} &= \sin \theta e^{i\varphi} Y_{l+1}^{m'-1} + \cos \theta Y_{l+1}^{m'}. \end{aligned} \quad (46,69)$$

Мы сможем в уравнениях (46,61) произвести разделение переменных, если решение будем искать в виде

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix} = R(r) \begin{pmatrix} (l+m')Y_l^{m'-1} \\ (l+1-m')Y_l^{m'} \\ i\beta Y_{l+1}^{m'-1} \\ -i\beta Y_{l+1}^{m'} \end{pmatrix}, \quad (46,70)$$

причём постоянная  $\beta$ , а также функция  $R$  будут найдены нами в дальнейшем.

Заметим, что дифференциальное уравнение (46,61) остаётся инвариантным при следующем преобразовании  $\psi_1 \rightarrow \psi_3$ ,  $\psi_2 \rightarrow \psi_4$ ,  $\psi_3 \rightarrow \psi_1$ ,  $\psi_4 \rightarrow \psi_2$ . Поэтому наряду с решением (46,70) всегда должно существовать другое решение

$$\psi' = \begin{pmatrix} \psi'_1 \\ \psi'_2 \\ \psi'_3 \\ \psi'_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_3 \\ \psi_4 \\ \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}, \quad (46,71)$$

где функции  $\psi_1$  и т. д. определены равенством (46,70). Более подробно на этом вопросе мы остановимся несколько позже.

Заметим, что функция  $Y_l^{m'-1}$  при  $m' = -l$  и функция  $Y_l^{m'}$  при  $m' = l+1$  не существуют ( $Y_l^{m'-1} = Y_l^{-l-1}$ ,  $Y_l^{m'} = Y_l^{l+1}$ ). Однако решение сохраняет силу даже в этих крайних случаях, так как коэффициенты при несуществующих для этих значений  $m'$  сферических функциях обращаются в нуль. Поэтому квантовое число  $m'$  может принимать следующие значения:

$$m' = -l, \quad -l+1, \dots, \quad l, \quad l+1. \quad (46,72)$$

Подставляя (46,70) в (46,61) и используя условия (46,69) и (46,36), получаем дифференциальные уравнения для определения радиальной функции

$$\begin{aligned} \left( \nabla_r^2 - A + \frac{2B}{r} - \frac{l(l+1) - x^2 + \alpha\beta}{r^2} \right) R &= 0, \quad (46,73) \\ \left( \nabla_r^2 - A + \frac{2B}{r} - \frac{(l+1)(l+2) - x^2 - \frac{\alpha}{\beta}}{r^2} \right) R &= 0. \end{aligned}$$

Последние два уравнения должны тождественно совпадать друг с другом. Отсюда находим возможные значения для коэффициента  $\beta$ :

$$\beta = \frac{l+1}{\alpha} \mp \sqrt{\frac{(l+1)^2}{\alpha^2} - 1}. \quad (46,74)$$

Тогда дифференциальное уравнение для  $R$  принимает вид

$$\left( \nabla_r^2 - A + \frac{2B}{r} - \frac{l'(l'+1)}{r^2} \right) R = 0. \quad (46,75)$$

В последних формулах значение для коэффициентов  $A$  и  $B$  определяется равенством (46,53), т. е.

$$\begin{aligned} A &= \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \left( 1 - \left( 1 + \frac{\mathcal{E}}{mc^2} \right)^2 \right), \\ B &= \frac{me^2}{\hbar^2} \left( 1 + \frac{\mathcal{E}}{mc^2} \right), \end{aligned} \quad (46,76)$$

а для величины  $l'$  мы имеем два значения:

$$l' = \sqrt{(l+1)^2 - \alpha^2} \mp \frac{1}{2} - \frac{1}{2}, \quad (46,77)$$

причём в последнем равенстве мы должны взять перед коэффициентом  $\frac{1}{2}$  тот знак, который стоит перед квадратным корнем в выражении (46,74) для величины  $\beta$ .

Уравнение (46,75) совпадает с уравнением (46,52) для релятивистской проблемы бесспиновых частиц (отличие сводится лишь к различным значениям постоянной  $l'$ ).

Поэтому при определении собственных значений мы можем воспользоваться результатом (46,55), согласно которому

$$\begin{aligned} 1 + \frac{\mathcal{E}}{mc^2} &= \left( 1 + \frac{\alpha^2}{(l'+k+1)^2} \right)^{-\frac{1}{2}} = \\ &= \left[ 1 + \frac{\alpha^2}{\left( k + \frac{1}{2} \mp \frac{1}{2} + \sqrt{(l+1)^2 - \alpha^2} \right)^2} \right]^{-\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (46,78)$$

В дальнейшем нам достаточно будет при вычислении спектра энергии ограничиться величинами порядка  $\alpha^2$ , а при вычислении собственных функций — величинами порядка  $\alpha$ .

Заметим, что мы имеем два решения. Первое решение соответствует верхнему знаку перед квадратным корнем в выражении (46,74):

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{\alpha}{2(l+1)}, \quad l' = l \quad (\text{при } \alpha^2 \rightarrow 0), \\ \frac{\mathcal{E}_{nl}}{\hbar} &= -\frac{R}{n^2} \left( 1 + \frac{\alpha^2}{n^2} \left( \frac{n}{l+1} - \frac{3}{4} \right) \right), \end{aligned} \quad (46,79)$$

где  $n = k + l + 1$ ; второе — нижнему знаку:

$$\beta = \frac{2(l+1)}{\alpha}, \quad l' = l + 1 \quad (\text{при } \alpha^2 \rightarrow 0),$$

$$\frac{\mathcal{E}_{nl}}{h} = -\frac{R}{n^2} \left( 1 + \frac{\alpha^2}{n^2} \left( \frac{n}{l+1} - \frac{3}{4} \right) \right), \quad (46,80)$$

где  $n = k + l + 2$ .

**ж) Исследование решений.** При рассмотрении теории атома водорода с помощью полувекторных уравнений мы воспользовались не уравнением первого порядка (46,58), а уравнением второго порядка (46,59).

Уравнение второго порядка должно содержать все решения уравнения первого порядка. Кроме того, благодаря квадрированию, сводящемуся фактически к дифференцированию, могут появиться новые решения, которые не будут удовлетворять основному уравнению. В частности, как было отмечено, уравнение второго порядка инвариантно относительно замены функций  $(\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4)$  соответственно на функции  $(\psi_3, \psi_4, \psi_1, \psi_2)$ , в то время как в уравнении первого порядка в нерелятивистском приближении функции  $\psi_3$  и  $\psi_4$  исчезают. Поэтому в уравнении второго порядка мы должны оставить такие решения, у которых в нерелятивистском приближении ( $\alpha \rightarrow 0$ ) функции  $\psi_3$  и  $\psi_4$  обращаются в нуль.

Прежде всего исследуем первое решение (46,79). Как видно из (46,79), при  $\alpha = 0$  коэффициент  $\beta$  также обращается в нуль, и поэтому мы должны выбрать решение для  $\psi$  в форме (46,70).

Согласно (46,76) и (46,77) при  $\alpha^2 \rightarrow 0$ , величина  $l'$  становится равной  $l$  ( $l' = l$ ), а коэффициенты  $A$  и  $B$  принимают значения (46,38), введенные нами для нерелятивистского случая. Поэтому решение для  $R$  мы можем выбрать в форме (46,41) ( $R = R_{nl}$ ) с теми же значениями постоянных величин  $A$ ,  $B$ , и  $C$ , которые были найдены нами в нерелятивистском случае.

Нормировочный коэффициент для угловой части может быть найден из условия нормировки волновых функций,

зависящих от  $\theta$  и  $\varphi$ :

$$(N_l^{m'})^2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin \theta d\theta [(m' + l)^2 Y_l^{(m'-1)} Y_l^{*(m'-1)} + \\ + (l - m' + 1)^2 Y_l^{m'} Y_l^{*m'}] = 1,$$

откуда, принимая во внимание (46,68), находим:

$$N_l^{m'} = \frac{1}{\sqrt{4\pi (l + m')! (l - m' + 1)!}}. \quad (46,81)$$

Тогда решение для функции  $\psi$  с точностью по величине порядка  $\alpha$  мы можем представить в виде

$$\psi_{nlm'} = N_l^{m'} R_{nl} \begin{pmatrix} (l + m') Y_l^{m'-1} \\ (l - m' + 1) Y_l^{m'} \\ \frac{i\alpha}{2(l+1)} Y_{l+1}^{m'-1} \\ -\frac{i\alpha}{2(l+1)} Y_{l+1}^{m'} \end{pmatrix}, \quad (46,82)$$

причём согласно (46,41) и (46,79)

$$R_{nl} = N_{nl} e^{-\frac{\rho}{2}} \rho^l L_{n+l}^{(2l+1)}(\rho), \\ N_{nl} = \sqrt{\frac{4\Gamma(n-l)}{\alpha^3 n^4 [\Gamma(n+l+1)]^3}}, \quad (46,83)$$

$$\rho = \frac{2r}{\alpha_0 n}, \quad \alpha_0 = \frac{\hbar^2}{me^2}, \quad n = k + l + 1,$$

$$\frac{\mathcal{E}_{nl}}{h} = -\frac{R}{n^2} \left( 1 + \frac{\alpha^2}{n^2} \left( \frac{n}{l+1} - \frac{3}{4} \right) \right). \quad (46,84)$$

При исследовании второго решения величина  $\beta$ , как видно из (46,80), при  $\alpha \rightarrow 0$  безгранично возрастает. Поэтому решение для волновой функции мы должны выбрать в виде (46,71), обеспечивающем исчезновение функций  $\psi'_3$  и  $\psi_4$  при  $\alpha \rightarrow 0$ .

В этом случае удобно величину  $l+1$  заменить на  $l$ , считая, что новое  $l$  может принимать значения 1, 2, 3, ...

Тогда, полагая  $R' = \frac{i}{\beta} R_{nl}$ , найдём:

$$\psi'_{nlm'} = N_l^{m'} R_{nl} \begin{pmatrix} -Y_l^{m'-1} \\ Y_l^{m'} \\ \frac{i(l-1+m')\alpha}{2l} Y_l^{m'-1} \\ \frac{i(l-m')\alpha}{2l} Y_l^{m'} \end{pmatrix}, \quad (46,85)$$

Здесь, как и в предыдущем случае, функция  $R_{nl}$  определяется формулой (46,41), а нормировочный коэффициент  $N_l^{m'}$  равен

$$N_l^{m'} = \frac{1}{\sqrt{4\pi (l-m')! (l+m'-1)!}}. \quad (46,86)$$

Формула же (46,80) для уровней энергии принимает вид

$$\frac{\mathcal{E}_{nl}}{h} = -\frac{R}{n^2} \left( 1 + \frac{\alpha^2}{n^2} \left( \frac{n}{l} - \frac{3}{4} \right) \right), \quad (46,87)$$

где  $n = k + l + 1$ .

з) Момент количества движения. В § 17 было показано, что в случае центральных сил полный момент количества движения

$$\mathbf{J} = \frac{1}{2} \hbar \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{M}, \quad (46,88)$$

равный сумме орбитального

$$\mathbf{M} = [\mathbf{r}\mathbf{p}] = \frac{\hbar}{i} [\mathbf{r}\nabla], \quad (46,89)$$

и спинового

$$\mathbf{S} = \frac{1}{2} \hbar \boldsymbol{\sigma} \quad (46,90)$$

моментов коммутирует с оператором Гамильтона  $\hat{H}$ .

С помощью формулы (46,88) легко показать следующие свойства орбитального момента количества движения:

$$\begin{aligned} M_x M_y - M_y M_x &= i\hbar M_z = \hbar^2 \frac{\partial}{\partial \varphi}, \\ M_x^2 + M_y^2 + M_z^2 &= -\hbar^2 \nabla_{\theta\varphi}^2. \end{aligned} \quad (46,91)$$

Подобные соотношения мы имеем также для спинового момента

$$\sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_1 = 2i\sigma_3 \quad \text{и т. д.}, \quad (46,92)$$

$$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 = 3.$$

На основе коммутации  $\mathbf{J}$  с гамильтонианом  $\mathbf{H}$  мы можем написать следующие два закона сохранения:

$$\left(\frac{1}{2}\hbar\boldsymbol{\sigma} + \mathbf{M}\right)^2 \psi = \hbar^2 j(j+1)\psi, \quad (46,93)$$

$$\left(\frac{1}{2}\hbar\sigma_3 + M_z\right) \psi = \hbar m_j \psi, \quad (46,94)$$

причём величина  $j$  называется внутренним квантовым числом и характеризует абсолютное значение полного момента количества движения, а  $m_j$  — проекцию полного момента количества движения на ось  $z$ . Заметим, что выбор оси  $z$  для характеристики проекции не нарушает общности наших рассуждений, поскольку при сферической симметрии все направления являются равноправными.

Согласно формулам (46,91) и (46,36) оператор  $\mathbf{M}$  действует следующим образом на сферические волновые функции:

$$M^2 Y_l^{m'} = \hbar^2 l(l+1) Y_l^{m'}, \quad M_z Y_l^{m'} = \hbar m' Y_l^{m'}. \quad (46,95)$$

Отсюда мы находим уравнения для определения квантового числа  $j$  для первого типа решения (46,82):

$$\hbar^2 \left[ j(j+1) - \left(l + \frac{1}{2}\right)^2 - \left(m' - \frac{1}{2}\right) \right] \psi_1 = \hbar (M_x - iM_y) \psi_2,$$

$$\hbar^2 \left[ j(j+1) - \left(l + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(m' - \frac{1}{2}\right) \right] \psi_2 = \hbar (M_x + iM_y) \psi_1,$$

$$\hbar^2 \left[ j(j+1) - \left(l + \frac{3}{2}\right)^2 - \left(m' - \frac{1}{2}\right) \right] \psi_3 = \hbar (M_x - iM_y) \psi_4,$$

$$\hbar^2 \left[ j(j+1) - \left(l + \frac{3}{2}\right)^2 + \left(m' - \frac{1}{2}\right) \right] \psi_4 = \hbar (M_x + iM_y) \psi_3. \quad (46,96)$$

Исключая из последних уравнений функции  $\psi_2$  и  $\psi_4$  и принимая во внимание соотношения (46,91), находим:

$$\left[ j(j+1) - \left( l + \frac{1}{2} \right)^2 \right]^2 = \left( l + \frac{1}{2} \right)^2,$$

$$\left[ j(j+1) - \left( l + \frac{3}{2} \right)^2 \right]^2 = \left( l + \frac{3}{2} \right)^2.$$

Последние два уравнения имеют общее решение лишь при одном значении  $j$ :

$$j = l + \frac{1}{2}, \quad l = 0, 1, 2, \dots \quad (46,97)$$

Точно так же, подставляя первое решение в формулу (46,94), мы получим значение для квантового числа  $m_j$ :

$$m_j = m' - \frac{1}{2}, \quad (46,98)$$

которое согласно (46,72) будет изменяться в пределах

$$m_j = -j, -j+1, \dots, j-1, j. \quad (46,99)$$

Подставляя в (46,93) и (46,94) второе решение (46,85), аналогичным путём получаем значение для  $j$

$$j = l - \frac{1}{2}, \quad l = 1, 2, 3, \dots, \quad (46,100)$$

а для числа  $m_j$  мы находим вновь область изменения (46,99).

Из последних формул видно, что первое решение (46,97) соответствует случаю, когда орбитальный и спиновый моменты параллельны друг другу, а второе решение (46,100) — когда антипараллельны.

**и) Правила отбора.** Согласно формуле (28,32) вероятность спонтанного перехода

$$A_{ba} = \frac{4e^2 x_{ba}}{3\hbar} |\alpha_{ab}^0|^2$$

пропорциональна квадрату матричного элемента  $\alpha_{ab}^0 = \int \psi_a^+ \alpha \psi_b d^3x$ . В частности, если начальное состояние  $b$  будет характеризоваться квантовыми числами  $n, l, j$ , а конечное — числами  $n_1, l_1, j_1$ , то значение для матричного элемента  $(\alpha_{ab}^0)_z$  становится равным (в случае, когда



оба состояния принадлежат первому решению):

$$\begin{aligned}
 (\alpha_{ab}^0)_z = B \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \left[ \frac{(l+m')}{2(l_1+1)} Y_l^{*m'-1} Y_{l_1+1}^{m'-1} + \right. \\
 \left. + \frac{(l-m'+1)}{2(l_1+1)} Y_l^{*m'} Y_{l_1+1}^{m'_1} + \frac{(l_1+m'_1)}{2(l+1)} Y_{l+1}^{*m'-1} Y_{l_1}^{m'_1-1} + \right. \\
 \left. + \frac{(l_1-m'_1+1)}{2(l+1)} Y_{l+1}^{*m'} Y_{l_1}^{m'_1} \right] \sin \theta d\theta, \quad (46,101)
 \end{aligned}$$

причём для коэффициента  $B$  имеем выражение

$$B = i\alpha N_l^{m'} N_{l_1}^{m'_1} \int_0^\infty R_{nl} R_{n'l_1} r^2 dr, \quad (46,102)$$

которое, как легко показать, при  $l \neq l_1$  не обращается в нуль.

Отсюда с помощью условия (46,68) будем иметь отличное от нуля значение для матричного элемента (46,101) лишь в случае, когда

$$m' = m'_1, \quad l_1 = l - 1 \quad \text{или} \quad l_1 = l + 1.$$

Определяя подобным же способом матричные элементы  $(\alpha_{ab}^0)_x$ ,  $(\alpha_{ab}^0)_y$ , а также вычисляя матричные элементы, когда оба состояния принадлежат второму решению или разным решениям, найдём следующие правила отбора, т. е. такие изменения квантовых чисел, для которых вероятность перехода отлична от нуля:

$$\Delta l = \pm 1, \quad \Delta m_j = 0, \pm 1, \quad \Delta j = 0, \pm 1. \quad (46,103)$$

Заметим, что последние правила отбора имеют место для так называемого дипольного излучения, когда в выражении  $\alpha_{ab}$  [см. соотношение (28,24)] мы множитель

$$e^{-ixr} = 1 - i(xr) + \frac{(ixr)^2}{2!} - \dots$$

полагаем равным единице, т. е. считаем длину волны излучаемого света  $\lambda \sim \frac{1}{x}$  много большей радиуса атома  $\left( (rx) = \frac{r}{\lambda} \ll 1 \right)$ . Учитывая в последнем разложении

следующие члены, мы получим правила отбора для квадрупольного и т. д. излучений.

к) **Тонкая структура.** Как было показано в § 46, пп. ж и з, полувекторные уравнения имеют два типа решений, в противоположность скалярному, обладающему одним решением. Это связано с тем обстоятельством, что полувекторные уравнения описывают частицы со спином половина, и каждое решение соответствует своему направлению спина.

Таким образом, положение электрона в атоме характеризуется четырьмя квантовыми числами  $n, l, j, m_j$ , три из которых характеризуют его пространственное положение, а четвертое — внутреннее состояние, связанное с направлением спина.

Главное квантовое число  $n$  может принимать целые значения, начиная с единицы:

$$n = 1, 2, 3, 4, \dots$$

Орбитальное квантовое число  $l$  принимает значения:

$$l = 0 (S\text{-состояние}), 1 (P\text{-состояние}), 2, \dots, n - 1.$$

Внутреннее квантовое число  $j$  может равняться:

$$j = l + \frac{1}{2} \quad (\text{первый тип решения}),$$

$$j = l - \frac{1}{2} \quad (\text{второй тип решения}),$$

причем при  $l = 0$  ( $S$ -состояние) второго типа решения ( $j = -\frac{1}{2}$ ) не существует.

Наконец, магнитное квантовое число  $m_j$  принимает  $2j + 1$  значений:

$$m_j = -j, -j + 1 \dots j - 1, j.$$

Заметим, что выражения для спектральных уровней обоих типов решений [см. формулы (46,79) и (46,84)] могут быть записаны единой формулой

$$\frac{\mathcal{E}_{nj}}{h} = -\frac{R}{n^2} \left[ 1 + \frac{\alpha^2}{n^2} \left( \frac{n}{j + \frac{1}{2}} - \frac{3}{4} \right) \right], \quad (46,104)$$

согласно которой термы не должны зависеть от квантового числа  $l$  и оказываются поэтому двукратно вырожденными.

Рассмотрим для примера уровни атома водорода, принадлежащие серии Бальмера ( $n=2$ ).

При  $n=2$  может быть три уровня:

$$\nu(2^2S_{\frac{1}{2}}) = \frac{E_{2\frac{1}{2}0}}{h}, \quad \nu(2^2P_{\frac{1}{2}}) = \frac{E_{2\frac{1}{2}1}}{h} \quad \text{и} \quad \nu(2^2P_{\frac{3}{2}}) = \frac{E_{2\frac{3}{2}1}}{h},$$

величина которых равна

$$\nu(2^2S_{\frac{1}{2}}) = \nu(2^2P_{\frac{1}{2}}) = -\frac{R}{4} \left[ 1 + \frac{\alpha^2}{4} \left( 2 - \frac{3}{4} \right) \right],$$

$$\nu(2^2P_{\frac{3}{2}}) = -\frac{R}{4} \left[ 1 + \frac{\alpha^2}{4} \left( 1 - \frac{3}{4} \right) \right].$$

Отсюда для разности уровней мы находим значение

$$\nu(2^2P_{\frac{3}{2}}) - \nu(2^2P_{\frac{1}{2}}) = \frac{R\alpha^2}{16},$$

совпадающее с формулой тонкой структуры первоначальной квантовой теории (46,25), а не с формулой (46,57), полученной с помощью релятивистского скалярного уравнения. Таким образом, учёт спиновых эффектов приводит к формуле, находящейся в хорошем согласии с экспериментом.

Согласно теории Дирака уровни  $2^2S_{\frac{1}{2}}$  и  $2^2P_{\frac{1}{2}}$  в атоме водорода должны совпадать друг с другом. Этот вопрос явился предметом специальных экспериментальных исследований. Более десяти лет тому назад спектроскописты высказали сомнение в правильности этого теоретического заключения, но так как опыты были не слишком точны, на это обстоятельство не было обращено особого

внимания. Впервые сдвиг уровня  $2S_{\frac{1}{2}}$  был доказан в 1947 г. опытами Лэмба и Ризерфорда<sup>1)</sup>.

Рассмотрим переход электрона из состояния  $2^2S_{\frac{1}{2}}$  в состояние  $1^2S_{\frac{1}{2}}$ . Дипольный или даже квадрупольный переход между этими состояниями запрещён [см. (31,13), (31,14) и (31,15)].

Поэтому состояние  $2^2S_{\frac{1}{2}}$  является метастабильным. Переход из метастабильного состояния возможен или с испусканием двух фотонов (соответствующая вероятность уменьшается по сравнению с разрешённой примерно в  $10^8$  раз) или с предварительным переходом электрона из метастабильного состояния на уровень  $2^2P$ . Лэмб и Ризерфорд поставили своей целью исследовать последний способ перехода.

В общих чертах схема опытов такова.

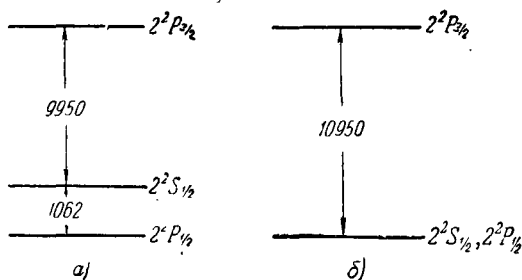
Пучок атомов водорода подвергался бомбардировке пересекающим его потоком электронов, в результате чего некоторая часть атомов возбуждалась до метастабильного состояния. Метастабильный атом, в противоположность невозбуждённому, при падении на металлическую мишень легко отдаёт свою энергию возбуждения, вырывая электроны из металла, благодаря чему наблюдается электрический ток на мишень. Если пучок подвергнуть действию радиочастотного излучения<sup>2)</sup>, то при некоторой частоте  $\nu$  наблюдается сильное тушащее действие, в результате которого ток на мишень прекращается. Эта частота истолковывается как резонансная частота, вызы-

<sup>1)</sup> W. E. Lamb and R. C. Retherford, Phys. Rev. 72, 241 (1947), [См. сборник «Сдвиг уровней атомных электронов», стр. 45; УФН 45, 553 (1951)].

<sup>2)</sup> Авторы в своих опытах фиксировали волну радиочастотного излучения, а условие резонанса, которое соответствовало разности веемановских компонент между состояниями  $2^2S_{\frac{1}{2}}$  и  $2^2P_{\frac{1}{2}}$  или  $2^2P_{\frac{3}{2}}$ , подгоняли путём изменения магнитного поля  $H$ . Затем, экстраполируя результат на случай  $H=0$ , находили сдвиг уровня.

вающая переходы  $2^2S_{\frac{1}{2}} \rightarrow 2^2P_{\frac{1}{2}}$  или  $2^2S_{\frac{1}{2}} \rightarrow 2^2P_{\frac{3}{2}}$  с последующим практически мгновенным переходом на уровень  $1^2S_{\frac{1}{2}}$ . Отсюда было найдено, что терм  $2^2S_{\frac{1}{2}}$  сдвинут вверх относительно термина  $2^2P_{\frac{1}{2}}$  примерно на  $\frac{1}{10}$  часть дублета  $2^2P_{\frac{3}{2}} - 2^2P_{\frac{1}{2}}$ . Дальнейшие исследования дали (без учёта сверхтонкой структуры) для сдвига термина значение, равное  $1062 \text{ Мгц}$ .

Это, казалось бы ничтожное, расхождение между теорией и экспериментом привело к замечательному про-



15

Рис. 15. Расположение термов в атоме водорода: а—согласно экспериментальным данным, б—по теории Дирака.

грессу, достигнутому в квантовой электродинамике за последнее время. Теоретики показали, что этот сдвиг уровня обязан электронно-позитронному вакууму, свойства которого теперь уже изучаются экспериментально.

Расположение термов водородного атома при  $n = 2$ , полученное на основе экспериментов Лэмба и Ризерфорда, приведено на рис. 15, а. Для сравнения на рис. 15, б приведено расположение этих же термов по теории Дирака. Расстояние между уровнями даны в  $\text{Мгц}$ <sup>1)</sup>.

<sup>1)</sup> Краткая история открытия сдвига уровней дана во вступительной статье Д. Д. Иваненко к сборнику «Сдвиг уровней атомных электронов». см. также дополнение к монографии «Классическая теория поля».

л) Сдвиг уровней, обусловленный вакуумными членами. Согласно формуле (45,25), находясь в поле ядра

$$\Phi = \frac{e}{r}, \quad \mathbf{E} = \frac{e\mathbf{r}}{r^3},$$

электрон благодаря вакуумным членам получает дополнительную потенциальную энергию

$$U' = U'_1 + U'_2 = \frac{4a}{3k_0^2} \alpha e^2 \delta(\mathbf{r}) - \frac{ie^2\alpha}{4\pi k_0 r^3} \rho_3(\alpha\mathbf{r}), \quad (46,105)$$

где

$$a = \ln \frac{k_0}{\kappa_0} - \ln 2 + \frac{11}{24} - \frac{1}{5};$$

кроме того, мы приняли во внимание соотношение

$$\nabla^2 \frac{1}{r} = -4\pi\delta(\mathbf{r}).$$

Найдём сдвиг уровней, обусловленный соответственно первым ( $U'_1$ ) и вторым ( $U'_2$ ) членами взаимодействия.

Сдвиг уровней, связанный с первым членом  $U'_1$ , будет равен:

$$\frac{\Delta \mathcal{E}_1}{h} = \frac{1}{h} \int \psi^+ U'_1 \psi d^3x = \frac{4a}{3hk_0^2} \alpha e^2 |\psi(0)|^2.$$

Этот сдвиг имеет место только для  $S$ -состояний поскольку для других состояний ( $l = 1, 2, 3, \dots$ ) величина  $|\psi(0)|^2$  равна нулю. Подставляя выражение для  $\psi$  из равенства (46,82), находим:

$$|\psi_{n00}(0)|^2 = \lim_{l=m'=0} (N_l^{m'})^2 N_{nl}^2 (L_{n+l}^{(2l+1)}(0))^2.$$

Принимая, далее, во внимание равенства (46,45), (46,81) и (46,83), получаем:

$$|\psi_{n00}(0)|^2 = \frac{1}{\pi n^3 a_0^3}, \quad (46,106)$$

причём радиус первой борновской орбиты определяется формулой

$$a_0 = \frac{\hbar^2}{me^2}.$$

Отсюда для этого сдвига уровня имеем:

$$\frac{\Delta \mathcal{E}_1}{h} = \frac{8aR\alpha^3}{3\pi n^3}, \quad (46,107)$$

где  $R = \frac{me^4}{4\pi\hbar^3}$  является постоянной Ридберга.

Сдвиг уровня, обусловленный вторым членом взаимодействия  $U'_2$ , отличен от нуля при любых значениях  $l$ :

$$\begin{aligned} \frac{\Delta \mathcal{E}_2}{h} &= -\frac{ie^2\alpha}{4\pi k_0 h} \int \psi^{+\rho_3}(\mathbf{r}) \psi d^3x = \\ &= -\frac{iae^2}{4\pi k_0 h} \int [\psi_1^+ (\sin \theta e^{-i\varphi} \psi_4 + \cos \theta \psi_3) + \\ &+ \psi_2^+ (\sin \theta e^{i\varphi} \psi_3 - \cos \theta \psi_4) - \psi_3^+ (\sin \theta e^{-i\varphi} \psi_2 + \cos \theta \psi_1) - \\ &- \psi_4^+ (\sin \theta e^{i\varphi} \psi_1 - \cos \theta \psi_2)] \frac{d^3x}{r^2}. \quad (46,108) \end{aligned}$$

Соотношения (46,69) и (46,70) непосредственно приводят к формулам:

$$\begin{aligned} i(\sin \theta e^{-i\varphi} \psi_4 + \cos \theta \psi_3) &= -\beta \psi_1, \\ i(\sin \theta e^{i\varphi} \psi_3 - \cos \theta \psi_4) &= -\beta \psi_2, \\ i(\sin \theta e^{-i\varphi} \psi_2 + \cos \theta \psi_1) &= \frac{1}{\beta} \psi_3, \\ i(\sin \theta e^{i\varphi} \psi_1 - \cos \theta \psi_2) &= \frac{1}{\beta} \psi_4. \end{aligned} \quad (46,109)$$

Поэтому выражение (46,108) для первого типа решения

$\left(\beta = \frac{\alpha}{2(l+1)}\right)$  можем представить в виде

$$\begin{aligned} \frac{\Delta \mathcal{E}_2}{h} &= \frac{e^2\alpha^2}{8\pi k_0 (l+1) h} \int \frac{d^3x}{r^2} [\psi_1^+ \psi_1 + \psi_2^+ \psi_2 + \\ &+ \frac{4(l+1)^2}{\alpha^2} (\psi_3^+ \psi_3 + \psi_4^+ \psi_4)]. \quad (46,110) \end{aligned}$$

Подставляя сюда решение (46,82) и интегрируя по углам  $\theta$ ,  $\varphi$  с помощью равенства (46,68), получаем:

$$\frac{\Delta \mathcal{E}_2}{h} = \frac{e^2\alpha^2}{4\pi k_0 (l+1) h} \int_0^\infty r^2 \frac{R_{nl}^2}{r^2} dr. \quad (46,111)$$

Последний интеграл может быть вычислен, исходя из следующих соображений. Функция  $R_{nl}$  удовлетворяет нерелятивистскому уравнению Шрёдингера (46,37)

$$\nabla_r^2 R_{nl} + \left( -A + \frac{2B}{r} - \frac{l(l+1)}{r^2} \right) R_{nl} = 0, \quad (46,112)$$

которое приводит к следующему значению для энергии:

$$\mathcal{E}_n = -\frac{Rh}{n^2}, \quad (46,113)$$

где  $n = k + l + 1$ . Если к правой части добавить член  $\frac{\gamma}{r^2} R_{nl}$ , где  $\gamma$  — малая величина, то, с одной стороны, согласно методу теории возмущений энергия увеличится на величину

$$\Delta \mathcal{E}_{nl} = \gamma \frac{\hbar^2}{2m} \int_0^\infty \frac{R_{nl}}{r^2} r^2 dr, \quad (46,114)$$

а с другой стороны, прибавление к правой части величины, пропорциональной  $\frac{1}{r^2}$ , эквивалентно увеличению квантового числа  $l$  до значения

$$l' = l + \frac{\gamma}{2l+1}.$$

В связи с этим энергия (46,113) изменится на величину

$$\Delta \mathcal{E}_{nl} = \frac{2\gamma Rh}{n^3 (2l+1)}. \quad (46,115)$$

Сопоставляя равенство (46,114) с равенством (46,115), находим среднее значение для  $\frac{1}{r^2}$ :

$$\overline{\frac{1}{r^2}} = \int_0^\infty r^2 \frac{R_{nl}^2}{r^2} dr = \frac{2Rh}{n^3 (2l+1)} \frac{2m}{\hbar^2}.$$

Отсюда для сдвига уровня находим:

$$\frac{\Delta \mathcal{E}_2}{h} = \frac{R\alpha^3}{\pi n^3 (l+1)(2l+1)} \quad (46,116)$$



при

$$j = l + \frac{1}{2}.$$

Аналогичным способом имеем следующее значение для сдвига уровня, принадлежащего второму типу решения ( $j = l - \frac{1}{2}$ ):

$$\frac{\Delta \mathcal{E}_2}{h} = -\frac{R\alpha^3}{\pi n^3 l(2l+1)}; \quad (46,117)$$

Поэтому для энергии состояния  $n$ ,  $j$ ,  $l$  мы получаем выражение

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{E}_{njl}}{h} = & -\frac{R}{n^2} \left[ 1 + \frac{\alpha^2}{n^2} \left( \frac{n}{j + \frac{1}{2}} - \frac{3}{4} \right) - \frac{\alpha^3}{\pi n} \left( \frac{8a}{3} \delta_{l,0} - \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{1}{l(2l+1)} \delta_{j, l - \frac{1}{2}} + \frac{1}{(l+1)(2l+1)} \delta_{j, l + \frac{1}{2}} \right) \right]. \quad (46,118) \end{aligned}$$

Эта формула показывает, что при учёте вакуумных членов энергия оказывается зависящей не только от квантовых чисел  $n$  и  $j$ , но также и от квантового числа  $l$ . Благодаря этому уровень  $2^2S_{\frac{1}{2}}$  сдвигается вверх относительно уровня  $2^2P_{\frac{1}{2}}$  на величину

$$\frac{\mathcal{E}_{2\frac{1}{2}0} - \mathcal{E}_{2\frac{1}{2}1}}{h} = \frac{R\alpha^3}{3\pi} \left( \ln \frac{k_0}{x_0} - \ln 2 + \frac{11}{24} - \frac{1}{5} + \frac{1}{2} \right). \quad (46,119)$$

Таким образом, сдвиг  $S$ -уровней относительно  $P$ -уровней при  $j = \frac{1}{2}$  складывается из трёх частей: сдвиг, пропорциональный коэффициенту  $b = \ln \frac{k_0}{x_0} - \ln 2 + \frac{11}{24}$  (является по существу бетевским сдвигом); сдвиг, пропорциональный коэффициенту  $-\frac{1}{5}$  (связан с поляризацией электронно-позитронного вакуума); сдвиг, пропорциональный коэффициенту  $\frac{1}{2}$  [обязан взаимодействию дополнительного

(полевого) момента электрона с электростатическим полем ядра].

Подставляя вместо величины  $\ln \frac{k_0}{x_0}$  значение, вычисленное по формуле (44,69)  $\left( \ln \frac{k_0}{x_0} = 7,6876 \right)$ , найдём для общего сдвига величину

$$\nu(2^2S_{\frac{1}{2}}) - \nu(2^2P_{\frac{1}{2}}) = 1051 \text{ Мгц},$$

что находится в хорошем согласии с опытом (1062 Мгц).

Заметим, что формула (46,118) не исчерпывает даже на сегодняшний день наших знаний об энергии связи электрона в атоме водорода. В самом деле, учёт движения ядра или учёт спина ядра даёт ещё новую дополнительную энергию, которую мы определим в § 48. В настоящее время рассматривается вопрос о влиянии размеров ядра на энергетические уровни в атоме.

Кроме атома водорода, смещение уровней наблюдалось также рядом авторов в спектре ионизованного атома гелия и лития. Наиболее надёжными наблюдениями оказались наблюдения Лэмба и Скинера<sup>1)</sup>, которые нашли, что смещение для уровня  $2^2S_{\frac{1}{2}}$  ионизованного атома гелия составляет  $14\,020 \pm 100 \text{ Мгц}$ . Согласно теоретическим данным оно должно быть равным  $13\,820 \text{ Мгц}$ , т. е. в 13 раз больше соответствующего смещения уровня для атома водорода ( $Z^2 = 16$  и примерно в четыре раза уменьшается величина  $\frac{k_0}{x_0}$ ), что также находится в хорошем согласии с экспериментом.

Естественно ожидать, что учёт вакуумных членов должен был также сказаться на ряде других эффектов. Так, в § 44 нами было показано, что вакуумные члены приводят к существованию дополнительного магнитного момента электрона, который был обнаружен экспериментально (в частности, при исследовании аномального эффекта Зеемана).

<sup>1)</sup> W. E. Lamb and M. Skinner, Phys. Rev. 78, 539 (1950); подробный реферат этой статьи см. УФН 44, 458 (1951).

## § 47. Эффект Зеемана

В 1896 г. Зееману удалось обнаружить, что при помещении источника света в сильное магнитное поле спектральные линии испытывают расщепление на несколько компонент.

С тех пор эффект Зеемана играет особую роль при исследовании строения атома. Параллельно экспериментальному обнаружению всё новых деталей зеемановского расщепления развивались теории движения электрона в атоме: начиная с классической теории Лорентца до релятивистской теории Дирака, с последующим включением вакуумных членов. Поэтому на развитии теории эффекта Зеемана мы остановимся несколько подробнее.

а) **Классическая теория Лорентца.** Согласно электронной теории Лорентца атом излучает свет благодаря колебаниям электрона под действием упругой силы

$$F = -kr,$$

причём коэффициент упругости  $k$  связан с массой  $m$  электрона и частотой колебания  $\nu_0$  соотношением

$$k = 4\pi^2 m \nu_0^2.$$

Поэтому уравнение колебания электрона при наличии постоянного магнитного поля  $\mathbf{H}$  принимает вид (ось  $z$  выбрана по направлению поля  $\mathbf{H}$ ):

$$m\ddot{\mathbf{r}} + 4\pi^2 m \nu_0^2 \mathbf{r} = -\frac{e}{c} [\dot{\mathbf{r}} \mathbf{H}]$$

или в развёрнутом виде:

$$\ddot{x} + 4\pi^2 \nu_0^2 x + \frac{e}{mc} \dot{y} H = 0,$$

$$\ddot{y} + 4\pi^2 \nu_0^2 y - \frac{e}{mc} \dot{x} H = 0,$$

$$\ddot{z} + 4\pi^2 \nu_0^2 z = 0.$$

Умножив второе уравнение на мнимую единицу  $i$  и сложив его с первым, получим:

$$\ddot{\xi} + 4\pi^2\nu_0^2\xi + 2i\dot{\xi} = 0, \quad (47,1)$$

где  $\frac{\omega}{2\pi} = \frac{eH}{4\pi mc}$  — ларморова частота колебаний, а  $\xi = x + iy$ .

Решение уравнений (47,1) при  $\frac{\omega}{2\pi} \ll \nu_0$  имеет вид

$$\xi = e^{-i\omega t} (Ae^{2\pi\nu_0 it} + Be^{-2\pi\nu_0 it}). \quad (47,2)$$

К этому решению мы должны прибавить решение для координаты  $z$ :

$$z = Ce^{\pm 2\pi\nu_0 t}. \quad (47,3)$$

Из последних выражений мы видим, что атом, помещённый в магнитное поле, должен излучать три частоты:

$$\nu_0 - \frac{\omega}{2\pi}, \quad \nu_0, \quad \nu_0 + \frac{\omega}{2\pi}.$$

Как известно по классической теории, осциллятор не излучает в направлении своего колебания. Поэтому, наблюдая свет, излучённый атомом по направлению оси  $z$  (т. е. по направлению силовых линий магнитного поля), мы должны увидеть две линии (несдвинутая компонента  $\nu_0$  будет отсутствовать). По остальным направлениям должны излучаться все три компоненты.

Следует заметить, что рассмотренное расщепление на три линии (нормальный эффект Зеемана) имеет место сравнительно редко. В большинстве случаев картина расщепления несколько сложнее: число компонент становится больше трёх, а величина смещения становится не равной, а пропорциональной  $\omega$  (аномальный, или сложный, эффект Зеемана).

Удовлетворительную теорию, которая позволила бы вскрыть условия появления как нормального, так и аномального эффектов Зеемана, удалось построить только с помощью квантовой теории, учитывающей спин электрона.

**б) Теория по нерелятивистской волновой механике.** Покажем теперь, что из уравнения Шрёдингера сравни-

тельно просто вытекает теория нормального эффекта Зеемана.

Уравнение Шрёдингера, описывающее движение электрона заряда  $-e$  в атоме водорода, помещённом в магнитное поле, имеет вид

$$\left[ \left( \nabla + \frac{ei}{c\hbar} \mathbf{A} \right)^2 + \frac{2m}{\hbar^2} \left( \mathcal{E} + \frac{e^2}{r} \right) \right] \psi = 0.$$

Принимая во внимание, что  $\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$ , а также отбрасывая величины, пропорциональные  $A^2$ , находим:

$$\left[ \nabla^2 + 2 \frac{ei}{c\hbar} (\mathbf{A} \nabla) + \frac{2m}{\hbar^2} \left( \mathcal{E} + \frac{e^2}{r} \right) \right] \psi = 0. \quad (47,4)$$

Для составляющих вектора потенциала имеем (ось  $z$  направлена по  $\mathbf{H}$ ):

$$A_x = -\frac{1}{2} yH, \quad A_y = \frac{1}{2} xH, \quad A_z = 0. \quad (47,5)$$

В самом деле, поскольку  $\mathbf{H} = \operatorname{rot} \mathbf{A}$ , то из (47,5) следует

$$H_x = H_y = 0, \quad H_z = H.$$

Отсюда с помощью равенства

$$(\mathbf{A} \nabla) = -\frac{1}{2} H \left( y \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial y} \right) = \frac{1}{2} H \frac{\partial}{\partial \varphi} \quad (47,5a)$$

приводим уравнение Шрёдингера к виду

$$\left[ \nabla^2 - \frac{eH}{c\hbar i} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \frac{2m}{\hbar^2} \left( \mathcal{E} + \frac{e^2}{r} \right) \right] \psi = 0. \quad (47,6)$$

Как обычно, полагаем

$$\psi = R(r) F(\theta) e^{im'\varphi}, \quad (47,7)$$

где  $m'$  является магнитным квантовым числом (не путать с массой  $m$ , обозначаемой без штриха).

В таком случае мы имеем:

$$\left[ \nabla^2 + \frac{2m}{\hbar^2} \left( \mathcal{E}' + \frac{e^2}{r} \right) \right] \psi = 0, \quad (47,7a)$$

где

$$\mathcal{E}' = \mathcal{E} - \frac{eH\hbar}{4\pi mc} m'. \quad (47,8)$$

Уравнение (47,7а) точно совпадает с уравнением (46,26). Поэтому выражения для  $\mathcal{E}'$  должны совпадать с выражением (46,47). Отсюда находим:

$$\mathcal{E}_{n m'} = \mathcal{E}'_n + \frac{eHh}{4\pi mc} m' = -\frac{Rh}{n^2} + \frac{eHh}{4\pi mc} m'.$$

Частоты спектральных линий, излучаемых в магнитном поле, будут равны

$$\nu = \nu_0 + \frac{eH}{4\pi mc} \Delta m', \quad (47,9)$$

где частота  $\nu_0 = \frac{\mathcal{E}'_n - \mathcal{E}'_n}{h}$  равняется частоте, излучаемой атомом без магнитного поля.

Принимая во внимание правила отбора для магнитного квантового числа  $m'$ , согласно которым  $\Delta m' = 0, \pm 1$ , находим, что в магнитном поле каждая спектральная линия расщепляется на три линии.

Таким образом, из теории Шрёдингера следует известный нам по классической теории нормальный эффект Зеемана.

**в) Учёт спиновых эффектов.** Полная теория эффекта Зеемана (как нормального, так и аномального) может быть построена на основе полувекторной теории Дирака, учитывающей, с одной стороны, релятивистские поправки, а с другой — спин электрона. Это связано с тем обстоятельством, что аномальный эффект Зеемана связан со спиновыми свойствами атома, и поэтому вполне естественно, что ни классическая теория, ни волновая механика Шрёдингера не могли его удовлетворительно объяснить.

Полувекторная теория позволяет установить критерий появления того или другого зеемановского расщепления.

Для построения теории эффекта Зеемана будем пользоваться, так же как при рассмотрении теории атома водорода, квадрированной формой полувекторных уравнений. Согласно (17,31) и (46,59) имеем:

$$\left[ \left( \nabla + \frac{ei}{c\hbar} \mathbf{A} \right)^2 + \frac{1}{c^2 \hbar^2} \left( \left( E + \frac{e^2}{r} \right)^2 - m^2 c^2 \right) + \frac{\alpha i}{r^3} (\boldsymbol{\alpha} \mathbf{r}) - \frac{e}{c\hbar} (\boldsymbol{\sigma} \mathbf{H}) \right] \psi = 0, \quad (47,10)$$

где

$$E = \mathcal{E} + mc^2.$$

Выбирая ось  $z$  по направлению постоянного магнитного поля  $\mathbf{H}$ , имеем:

$$\left\{ \nabla^2 + \frac{2m}{\hbar^2} \left[ \mathcal{E} + \frac{e^2}{r} - \frac{eh}{4\pi mc} \sigma_3 H - \frac{eH\hbar}{4\pi mc} \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\alpha^2 \hbar^2}{2m} \left( \frac{\mathcal{E}^2}{e^4} + \frac{2\mathcal{E}}{e^2 r} + \frac{1}{r^2} \right) + \frac{\hbar e^2 i (\alpha r)}{4\pi mc r^3} \right] \right\} \psi = 0. \quad (47,11)$$

Отсюда видно, что к оператору нерелятивистской теории атома водорода добавляются два дополнительных члена энергии. Первый член

$$U_1 = \frac{ehH}{4\pi mc} \left( \sigma_3 + \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \quad (47,12)$$

приводит к зеемановскому расщеплению

$$\Delta \mathcal{E}_1 \approx \int \psi^+ U_1 \psi d^3x.$$

Второй же член

$$U_2 = -\frac{\alpha^2 \hbar^2}{2m} \left( \frac{\mathcal{E}^2}{e^4} + \frac{2\mathcal{E}}{e^2 r} + \frac{1}{r^2} \right) - \frac{i\hbar e^2 (\alpha r)}{4\pi mc r^3} \quad (47,13)$$

ведёт к естественному расщеплению спектральных линий (тонкая структура)

$$\Delta \mathcal{E}_2 \approx \int \psi^+ U_2 \psi d^3x.$$

При решении уравнения (47,11) будем различать следующие два случая: 1) случай сильного магнитного поля, когда зеемановское расщепление будет много больше естественного расщепления спектральных линий ( $\Delta \mathcal{E}_1 \gg \Delta \mathcal{E}_2$ ) и 2) случай слабого магнитного поля ( $\Delta \mathcal{E}_1 \ll \Delta \mathcal{E}_2$ ).

**г) Нормальный эффект Зеемана.** В случае сильного магнитного поля энергией  $U_2$  мы можем вообще пренебречь. Тогда, принимая во внимание выражение (17,11) для матрицы  $\sigma_3$ :

$$\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}; \quad \sigma_3 \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ -\psi_2 \\ \psi_3 \\ -\psi_4 \end{pmatrix}, \quad (47,14)$$

приведём уравнение (47,11) к системе четырёх независимых уравнений, каждое из которых соответствует определённому направлению спина.

Поскольку в нерелятивистском приближении функции  $\psi_3$  и  $\psi_4$  исчезают, мы можем оставить для дальнейшего рассмотрения из системы уравнений (47,11) только два уравнения с волновыми функциями  $\psi_1$  и  $\psi_2$ , которые с учётом соотношения

$$\psi \sim e^{im'\varphi}$$

принимают вид

$$\left\{ \nabla^2 + \frac{2m}{\hbar^2} \left[ \mathcal{E} + \frac{e^2}{r} - \frac{eH\hbar}{4\pi mc} (m' + 1) \right] \right\} \psi_1 = 0,$$

$$\left\{ \nabla^2 + \frac{2m}{\hbar^2} \left[ \mathcal{E} + \frac{e^2}{r} - \frac{eH\hbar}{4\pi mc} (m' - 1) \right] \right\} \psi_2 = 0. \quad (47,15)$$

Отсюда согласно (47,8) находим для дополнительной энергии атома, помещённого в магнитное поле, значение

$$\Delta \mathcal{E}_1 = \frac{eH\hbar}{4\pi mc} (m' + 2m_s);$$

волновая функция  $\psi_1$  соответствует квантовому состоянию со спином электрона, параллельным полю  $\left(m_s = \frac{1}{2}\right)$ , а волновая функция  $\psi_2$  со спином, антипараллельным полю  $\left(m_s = -\frac{1}{2}\right)$ .

Отсюда для зеемановского расщепления мы находим:

$$\Delta \nu = -\frac{eH}{4\pi mc} \Delta m', \quad (47,16)$$

где  $\Delta m' = 0$  (для компонент, поляризованных по направлению магнитного поля) и  $\Delta m' = \pm 1$  (для компонент, поляризованных перпендикулярно магнитному полю). Здесь мы приняли во внимание, что изменение спинового квантового числа  $m_s$  равно нулю ( $\Delta m_s = 0$ ). В самом деле, согласно (47,15) состояние  $m_s = \frac{1}{2}$  (функция  $\psi_1$ ) и состояние  $m_s = -\frac{1}{2}$  (функция  $\psi_2$ ) описывается в нашем приближении двумя независимыми уравнениями, и поэтому



переход из состояния  $m_s = \frac{1}{2}$  в состояние  $m_s = -\frac{1}{2}$  запрещён.

Таким образом, в сильном магнитном поле, когда имеет место соотношение  $\Delta \mathcal{E}_1 \gg \Delta \mathcal{E}_2$  как для начального, так и для конечного состояний, мы должны наблюдать нормальный эффект Зеемана. Этот факт находится в согласии с экспериментальными данными (эффект Пашена-Бака).

Случай частичного эффекта Пашена-Бака, когда лишь для одного энергетического уровня имеет место соотношение  $\Delta \mathcal{E}_2 \gg \Delta \mathcal{E}_1$ , а для другого  $\Delta \mathcal{E}_1 \ll \Delta \mathcal{E}_2$ , а также случай, когда зеемановское расщепление и тонкая структура имеют один и тот же порядок ( $\Delta \mathcal{E}_2 \sim \Delta \mathcal{E}_1$ ), мы здесь рассматривать не будем<sup>1)</sup>.

**д) Аномальный эффект Зеемана.** Рассмотрим случай, когда расщепление уровней энергии, соответствующее тонкой структуре, превышает зеемановское ( $\Delta \mathcal{E}_2 \gg \Delta \mathcal{E}_1$ ) как для начального, так и для конечного состояний. Тогда мы должны сначала найти решение уравнения (47,11) при  $H = 0$ , а затем, включая магнитное поле  $\mathbf{H}$ , рассматривать дополнительную энергию  $U_1$  как энергию возмущения.

Решение уравнения (47,11) при  $H = 0$  было получено нами в § 46, п. е. В этом случае спиновые эффекты нельзя отделить от орбитальных, причём для  $j = l + \frac{1}{2}$  решение имеет вид (46,82) (первый тип решения), а при  $j = l - \frac{1}{2}$  решение представляется формулой (46,85) (второй тип решения).

Рассматривая энергию  $U_1$  как энергию возмущения, мы находим для дополнительной энергии зеемановского расщепления следующее выражение:

$$\Delta \mathcal{E}_1 = \frac{ehH}{4\pi mc} \int \psi^+ \left( \sigma_3 + \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \psi d^3x. \quad (47,17)$$

Ограничиваясь в дальнейшем нерелятивистскими волновыми функциями  $\psi_1$  и  $\psi_2$  и принимая во внимание

<sup>1)</sup> См. Г. Бете, Квантовая механика простейших систем, М.—Л., 1935, стр. 172.

соотношения, которые легко получить из равенства (46,82) для  $j = l + \frac{1}{2}$  (первый тип решения):

$$\begin{aligned} \int \psi_1^\dagger \psi_1 d^3x &= \frac{l+m'}{2l+1}, \\ \int \psi_2^\dagger \psi_2 d^3x &= \frac{l-m'+1}{2l+1} \end{aligned} \quad (47,18)$$

и из равенств (46,85) для  $j = l - \frac{1}{2}$  (второй тип решения):

$$\begin{aligned} \int \psi_1^\dagger \psi_1 d^3x &= \frac{l-m'+1}{2l+1}, \\ \int \psi_2^\dagger \psi_2 d^3x &= \frac{l+m'}{2l+1}, \end{aligned} \quad (47,19)$$

получим в случае  $j = l + \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} \int \psi^\dagger \left( \sigma_3 + \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \psi d^3x &= \int (m' \psi_1^\dagger \psi_1 + (m' - 1) \psi_2^\dagger \psi_2) d^3x = \\ &= \left( m' - \frac{1}{2} \right) \frac{2(l+1)}{2l+1} \end{aligned}$$

и в случае  $j = l - \frac{1}{2}$

$$\int \psi^\dagger \left( \sigma_3 + \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \psi d^3x = \left( m' - \frac{1}{2} \right) \frac{2l}{2l+1}.$$

Отсюда согласно (47,17) дополнительная энергия атома в магнитном поле будет равняться

$$\Delta \mathcal{E}_1 = \frac{ehH}{4\pi mc} g m_j, \quad (47,20)$$

где магнитное квантовое число  $m_j$  принимает  $2j + 1$  значений, определяемых формулой (46,99), а множитель Ланде  $g$  равняется

$$g = \frac{j + \frac{1}{2}}{l + \frac{1}{2}}. \quad (47,21)$$

Дополнительная энергия (47,20) ведёт не к обычному триплету (нормальный эффект Зеемана), а даёт более

сложную картину расщепления (аномальный эффект Зеемана).

Ввиду того, что число  $m_j$  может принимать  $2j + 1$  различных значений, каждый уровень при аномальном эффекте Зеемана расщепляется на  $2j + 1$  отдельных уровней, т. е. внешнее магнитное поле полностью снимает вырождение, имевшее место в релятивистской теории атома водорода.

Для получения картины расщепления необходимо учесть значения для множителя Ланде  $g$  [ $g = 2$  (для  $S_{\frac{1}{2}}$ -состояний),  $g = \frac{2}{3}$  (для  $P_{\frac{1}{2}}$ -состояний),  $g = \frac{4}{3}$  (для  $P_{\frac{3}{2}}$ -состояний) и т. д.] и правила отбора для магнитного квантового числа  $m_j$ . В частности, при  $\Delta m_j = 0$  мы получаем компоненты излучения, поляризованные параллельно оси  $z$  (т. е. параллельно магнитному полю), а при  $\Delta m_j = \pm 1$  находим компоненты, поляризованные перпендикулярно магнитному полю.

Формула (47,20) приводит нас к следующему значению для частоты излучения:

$$\nu = \nu_0 + \Delta\nu = \nu_0 + \frac{eH}{4\pi mc} (g^0 m_j^0 - g m_j), \quad (47,22)$$

где  $\nu_0$  — частота излучения в отсутствии магнитного поля ( $H = 0$ ),  $g^0$  и  $g$  — множители Ланде начального и конечного состояний; магнитное квантовое число  $m_j$  конечного состояния может принимать три значения:

$$m_j = m_j^0, \quad m_j^0 \pm 1.$$

Заметим, что в сильном магнитном поле, когда имеет место эффект Пашена-Бака [согласно (47,16)], мы также можем пользоваться формулой (47,22), положив в последней  $g^0 = g = 1$ .

На рис. 16 изображено расщепление спектральных уровней  $1^2S_{\frac{1}{2}}$  и  $2^2P_{\frac{1}{2}}$  в слабом и сильном магнитных полях, причём за единицу расщепления взята ларморова частота

$$\frac{\omega}{2\pi} = \frac{eH}{4\pi mc}.$$

Как видно из рис. 16, в обоих случаях мы будем иметь по четыре смещённых линии. Величина смещения определяется формулой (47,22).

В случае слабого поля (аномальный эффект Зеемана;  $g^0 = \frac{2}{3}, g = 2$ ) мы находим:

$$\Delta\nu_1 = \nu_1 - \nu_0 = \frac{2}{3} \frac{\sigma}{2\pi}, \quad \Delta\nu_2 = -\frac{4}{3} \frac{\sigma}{2\pi}, \quad \Delta\nu_3 = \frac{4}{3} \frac{\sigma}{2\pi},$$

$$\Delta\nu_4 = -\frac{2}{3} \frac{\sigma}{2\pi}.$$

В случае сильного поля, когда имеет место эффект

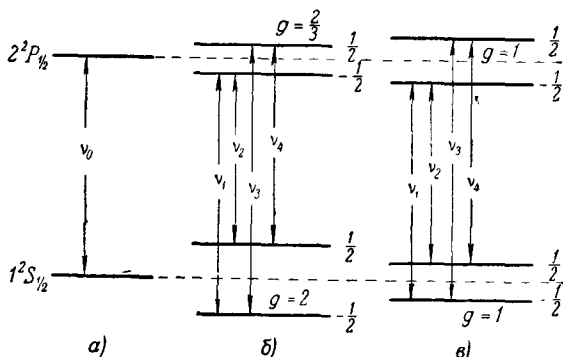


Рис. 16. Эффект Зеемана:

а—расположение уровней без поля, б—аномальный эффект Зеемана, в—нормальный эффект Зеемана.

Пашена-Бака ( $g^0 = g = 1$ ), некоторые линии оказываются совпадающими друг с другом:

$$\Delta\nu_1 = \Delta\nu_4 = 0, \quad \Delta\nu_2 = -\frac{\sigma}{2\pi}, \quad \Delta\nu_3 = \frac{\sigma}{2\pi},$$

и поэтому мы должны наблюдать нормальный зеемановский триплет.

Формула (47,21) для множителя Ланде годится для атома водорода, а также для атомов первой группы, обладающих одним валентным электроном.

В общем случае множитель Ланде принимает значение<sup>1)</sup>

$$g = 1 + \frac{J(J+1) - L(L+1) + S(S+1)}{2J(J+1)}, \quad (47,23)$$

где

$$J = |L \pm S|.$$

В частности, для элементов первой группы ( $J = j$ ,  $L = l$ ,  $S = \frac{1}{2}$ ) формулы (47,23) и (47,21) тождественно совпадают друг с другом.

Заметим, что для  $S$ -состояний ( $L = 0$ ,  $J = S \neq 0$ ) множитель Ланде достигает максимального значения

$$g_s = 2. \quad (47,24)$$

Для элементов с двумя электронами на внешней оболочке (например, атомов гелия) наряду с триплетным состоянием  $s=1$  возможны также одиночные линии ( $S=0$ ,  $J=L$ ). Для одиночных линий мы имеем  $g=1$  и поэтому должны наблюдать нормальный эффект Зеемана как в слабом, так и в сильном полях. Физически это связано с тем обстоятельством, что при отсутствии точкой структуры эффект Пашена-Бака наступает при любых малых полях  $H$ .

Заметим, что теория эффекта Зеемана неоднократно подтверждалась опытом и сыграла большую роль в изучении строения внешней оболочки атома. За подробностями, связанными с эффектом Зеемана, отсылаем к монографиям, специально посвященным изучению атомных спектров<sup>2)</sup>.

**е) Дополнительный магнитный момент электрона.** Как было показано в § 44, вакуумные члены приводят к следующей энергии взаимодействия электрона с

<sup>1)</sup> См., например, Д. И. Блохинцев, Основы квантовой механики, стр. 418.

<sup>2)</sup> В. Н. Кондратьев, Структура атомов и молекул, М.—Л., 1946; Е. Кондон и Г. Шортли, Теория атомных спектров, М., 1949.

магнитным полем [см. соотношение (44,52)]:

$$U'A = \frac{\alpha}{2\pi} \mu_0 \rho_3 (\sigma H), \quad (47,25)$$

где  $\mu_0 = \frac{eh}{4\pi mc}$  является магнетоном Бора. Эта энергия соответствует наличию наряду с кинематическим ещё и вакуумного магнитного момента (44,53) электрона и даёт при исследовании аномального эффекта Зеемана дополнительный [по сравнению с (47,17)] сдвиг энергетических уровней:

$$\Delta \mathcal{E}'' = \frac{\alpha}{2\pi} \frac{ehH}{4\pi mc} \int \psi^+ \rho_3 \sigma_3 \psi d^3x. \quad (47,26)$$

Ограничиваясь нерелятивистским приближением, мы можем положить  $\psi_3 = \psi_4 = 0$ , а также  $\rho_3 = 1$ . Тогда, учитывая равенства (47,18) и (47,19), находим:

$$\Delta \mathcal{E}'' = \pm \frac{mj}{l + \frac{1}{2}} \frac{\alpha}{2\pi} \frac{ehH}{4\pi mc}. \quad (47,27)$$

Поэтому с учётом вакуумных поправок множитель Ланде становится равным

$$g = \frac{j + \frac{1}{2} \pm \frac{\alpha}{2\pi}}{l + \frac{1}{2}},$$

причём знак плюс соответствует случаю  $j = l + \frac{1}{2}$ , а знак минус — случаю  $j = l - \frac{1}{2}$ . В частности, для  $S$ -состояний мы находим для множителя Ланде максимальное значение:

$$g = 2 \left( 1 + \frac{\alpha}{2\pi} \right), \quad (47,28)$$

из которого следует, что общий магнитный момент электрона  $\mu_e$  равен

$$\mu_e = -\mu_0 \left( 1 + \frac{\alpha}{2\pi} \right) = -\mu_0 (1 + 0,001162). \quad (47,29)$$

На экспериментальной проверке формул (47,28) и (47,29), мы остановимся в следующем параграфе.

## § 48. Влияние ядер на атомные спектры

До сих пор мы рассматривали атомные спектры в предположении, что атомное ядро остаётся неподвижным (т. е. как бы обладает бесконечной массой) и представляет собою точечный заряд. Однако при более детальном рассмотрении всей проблемы мы должны учесть также движение ядра, масса которого не равна бесконечности. Как известно, учёт конечности массы  $M$  ядра эквивалентен замене массы электрона  $m$  на приведённую массу

$$\frac{Mm}{m+M} \approx m \left(1 - \frac{m}{M}\right). \quad (48,1)$$

В этом случае постоянная Ридберга становится функцией массы ядра:

$$R_M = \frac{e^4 m}{4\pi\hbar^3} \left(1 - \frac{m}{M}\right). \quad (48,2)$$

Поэтому постоянная Ридберга для атома водорода, атома дейтерия и атома ионизованного гелия обладает несколькими различными значениями. Это используется в спектральном анализе для обнаружения присутствия дейтерия или ионизованных атомов гелия.

Точно так же учёт конечности размеров ядер или размазанности зарядов протона, находящегося некоторую часть времени в диссоциированном состоянии  $p \rightarrow n + \pi_+$  (нейтрон плюс положительный  $\pi$ -мезон), или учёт сил поляризации между электроном и нейтроном, поскольку последний подобно протону может диссоциировать на протон и отрицательный мезон, ведут к небольшим сдвигам  $\mu$ р внея в атоме<sup>1)</sup>, которые уже находятся на грани современных возможностей наблюдения<sup>2)</sup>.

<sup>1)</sup> См., например, Д. Иваненко и А. Цандер, ЖЭТФ 18, 434 (1948); Д. Иваненко и В. Родичев, ДАН 70, 80 (1950). Подробная литература по этому вопросу приведена в книге Е. Кондон и Г. Шортли, Теория атомных спектров, М., 1949, стр. 398.

<sup>2)</sup> Так, например, О. Бор [A. Bohr, Phys. Rev. 73, 1109 (1948)] показал, что при построении теории «сверхтонкой» структуры атома дейтерия следует учитывать размазанность магнитного момента его ядра,

Однако в связи с экспериментальным определением величины магнитного момента электрона наибольший интерес для нас представляет исследование так называемой «сверхтонкой» структуры.

а) Теория сверхтонкой структуры для атома водорода. Как было показано в § 46, учёт релятивистских и спиновых поправок при движении электрона приводит к тонкой структуре спектральных линий, т. е. к расщеплению спектральных термов. Это расщепление имеет порядок  $10^4$  *мгц*. «Сверхтонкая» структура представляет собою расщепление спектральных линий на величину порядка  $10^3$  *мгц* и связана, согласно Паули, со спином и магнитным моментом ядра.

Найдём влияние магнитного момента протона на сдвиг уронней в атоме водорода. Впервые количественная теория этого явления была дана Ферми <sup>1)</sup>.

Магнитный момент ядра  $\mu' = \mu' \sigma'$  создаёт магнитное поле

$$\mathbf{A} = \text{rot } \frac{\mu' \sigma'}{r}, \quad \mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{A}, \quad (48,3)$$

где  $\sigma'$  — двухрядные матрицы Паули, характеризующие направление спина ядра. Благодаря магнитному полю ядра появится дополнительная энергия связи электрона с ядром

$$U = -(\boldsymbol{\mu} \mathbf{H}) = \mu \mu' (\boldsymbol{\sigma} \text{ rot rot } \frac{\sigma'}{r}), \quad (48,4)$$

где  $\boldsymbol{\mu} = -\mu \boldsymbol{\sigma}$  — магнитный момент электрона. Достаточным приближением для нашей теории является рассмотрение нерелятивистского случая, когда в качестве спиновых матриц  $\boldsymbol{\sigma}$  электрона мы можем выбрать также двухрядные матрицы Паули.

Дальнейшее вычисление проще всего произвести, если величину  $\frac{1}{r}$  представить в виде разложения в интеграл Фурье:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{2\pi^2} \int \frac{e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}}{k^2} d^3k.$$

<sup>1)</sup> E. Fermi. Zs. f. Phys. 60, 320 (1930).



Тогда для взаимодействия (48,4) мы находим:

$$U = \frac{8\pi}{3} \mu\mu' (\sigma\sigma') \delta(\mathbf{r}) + \frac{\mu\mu'}{2\pi^2} \int \left[ \frac{(\sigma\sigma')}{3} - (\sigma\mathbf{k}^0)(\sigma'\mathbf{k}^0) \right] e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d^3\mathbf{k}. \quad (48,5)$$

При выводе последнего соотношения мы приняли во внимание, что

$$\frac{1}{8\pi^3} \int e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d^3\mathbf{k} = \delta(\mathbf{r}). \quad (48,6)$$

В нерелятивистском случае мы можем волновую функцию представить в виде

$$\psi(s, s', \mathbf{r}) = b(s, s') \psi(\mathbf{r}), \quad (48,7)$$

где  $b(s, s')$  — функция, зависящая от взаимной ориентации спина электрона ( $s$ ) и протона ( $s'$ ), а  $\psi(\mathbf{r})$  — волновая функция, характеризующая, как обычно, движение электрона.

В нашем приближении мы можем считать протон неподвижным. Тогда для дополнительной энергии находим:

$$\begin{aligned} \Delta E = \int \psi^* U \psi d^3x = \frac{8\pi}{3} \mu\mu' |\psi(0)|^2 b^*(s, s') (\sigma\sigma') b(s, s') + \\ + \frac{\mu\mu'}{2\pi^2} \int b^*(s, s') \left[ \frac{1}{3} (\sigma\sigma') - (\sigma\mathbf{k}^0)(\sigma'\mathbf{k}^0) \right] b(s, s') d^3\mathbf{k} \times \\ \times \int |\psi(\mathbf{r})|^2 e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d^3x. \quad (48,8) \end{aligned}$$

Легко показать, что для  $S$ -состояний последний член правой части равенства обращается в нуль. В самом деле, в этом случае величина  $|\psi(\mathbf{r})|^2$  не зависит от углов  $\theta$  и  $\varphi$ , благодаря чему интеграл

$$I(\mathbf{k}) = \int |\psi(\mathbf{r})|^2 e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d^3x \quad (48,9)$$

является функцией лишь абсолютного значения ( $k$ ) вектора  $\mathbf{k}$ :

$$I(\mathbf{k}) = I(k),$$

откуда в силу тождества

$$\int f(k) (\sigma\mathbf{k}^0)(\sigma'\mathbf{k}^0) d^3\mathbf{k} = \frac{1}{3} \int f(k) (\sigma\sigma') d^3\mathbf{k} \quad (48,10)$$

мы приходим к выводу, что второй член правой части равенства (48,8) обращается в нуль. Величина  $|\psi(0)|^2$  для  $S$ -состояний может быть найдена по формуле (46,106). Наоборот, для состояний  $P$ ,  $D$  и т. д. первый член правой части равенства (48,8) исчезает в силу соотношения  $|\psi(0)|^2 = 0$ . Зато второй член благодаря отсутствию сферической симметрии у величины  $|\psi(\mathbf{r}')|^2$  будет отличен от нуля.

Остановимся более подробно на расщеплении  $S$ -уровней, для которых дополнительная энергия равна

$$\Delta E = \frac{8\pi}{3} \mu\mu' |\psi(0)|^2 b^*(s, s') (\sigma\sigma') b(s, s'). \quad (48,11)$$

Для этого мы должны прежде всего связать функцию  $b(s, s')$  со спинными функциями электрона  $b(s)$  и протона  $b'(s')$ .

Под величинами  $s$  и  $s'$  мы будем понимать проекцию спина (в единицах  $\hbar$ ) на ось  $z$ . Величины  $s$  и  $s'$  могут принимать два значения:  $\pm \frac{1}{2}$ . Поэтому функции  $b(s)$  и  $b'(s')$  образуют двухрядные матрицы:

$$b(s) = \begin{pmatrix} b\left(\frac{1}{2}\right) \\ b\left(-\frac{1}{2}\right) \end{pmatrix}, \quad b'(s') = \begin{pmatrix} b'\left(\frac{1}{2}\right) \\ b'\left(-\frac{1}{2}\right) \end{pmatrix}, \quad (48,12)$$

причём на амплитуду  $b(s)$  действует матрица  $\sigma$ :

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}; \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (48,13)$$

а на  $b'(s')$  — матрица  $\sigma'$ .

Закон действия матриц  $\sigma_n$  на амплитуды  $b(s)$  может быть найден на основе правил умножения матриц:

$$\sigma_1 \begin{pmatrix} b\left(\frac{1}{2}\right) \\ b\left(-\frac{1}{2}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b\left(-\frac{1}{2}\right) \\ b\left(\frac{1}{2}\right) \end{pmatrix},$$

т. е.

$$\sigma_1 b\left(\frac{1}{2}\right) = b\left(-\frac{1}{2}\right); \quad \sigma_1 b\left(-\frac{1}{2}\right) = b\left(\frac{1}{2}\right) \quad (48,14)$$

и т. д.

Из амплитуд  $b$  и  $b'$ , как известно, мы можем составить три симметричные (ортосостояние)

$$b^s \left( \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) = b \left( \frac{1}{2} \right) b' \left( \frac{1}{2} \right),$$

$$b^s \left( -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right) = b \left( -\frac{1}{2} \right) b' \left( -\frac{1}{2} \right),$$

$$\begin{aligned} b^s \left( \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2} \right) &= \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ b \left( \frac{1}{2} \right) b' \left( -\frac{1}{2} \right) + b \left( -\frac{1}{2} \right) b' \left( \frac{1}{2} \right) \right], \end{aligned} \quad (48,15)$$

и одну антисимметричную (парасостояние)

$$b^a = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ b \left( \frac{1}{2} \right) b' \left( -\frac{1}{2} \right) - b \left( -\frac{1}{2} \right) b' \left( \frac{1}{2} \right) \right] \quad (48,16)$$

комбинации.

Дальнейшие вычисления мы произведём в предположении, что произведение комплексно-сопряжённых функций от одного и того же аргумента  $s$  равняется единице:

$$b^+ \left( \frac{1}{2} \right) b \left( \frac{1}{2} \right) = b^+ \left( -\frac{1}{2} \right) b \left( -\frac{1}{2} \right) = 1 \text{ и т. д.}, \quad (48,17)$$

а от различных аргументов—нулю:

$$b^+ \left( \frac{1}{2} \right) b \left( -\frac{1}{2} \right) = 0. \quad (48,18)$$

Это обусловлено тем обстоятельством, что пребывание электрона (или протона) в состоянии  $s = \frac{1}{2}$  не связано в нашем приближении какой-либо функциональной зависимостью с его пребыванием в состоянии  $s = -\frac{1}{2}$ .

Кроме того, наши нормировочные коэффициенты выбраны таким образом, чтобы квадрат модуля спиновых амплитуд обращался в единицу, т. е.

$$b^{+s} b^s = b^{+a} b^a = 1. \quad (48,19)$$

Найдём физический смысл решений (48,15) и (48,16). С этой целью введём оператор проекции спина (в едини-

цах  $\hbar$ ) на ось  $z$ :

$$s_z = \frac{1}{2} (\sigma_3 + \sigma'_3) \quad (48,20)$$

и оператор квадрата спина:

$$s_x^2 + s_y^2 + s_z^2 = \frac{1}{2} (3 + (\sigma\sigma')). \quad (48,21)$$

С помощью формул (48,14) легко показать, что

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} (\sigma_3 + \sigma'_3) b^s \left( \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) &= 1 \cdot b^s \left( \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right), \\ \frac{1}{2} (3 + (\sigma\sigma')) b^s \left( \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) &= 2b^s \left( \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) = \\ &= s(s+1) b^s \left( \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right), \end{aligned} \quad (48,22)$$

т. е. первое решение соответствует случаю, когда общий спин частиц равен единице и направлен по оси  $z$ .

Для остальных симметричных комбинаций мы находим:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} (\sigma_3 + \sigma'_3) b^s \left( -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right) &= (-1) b \left( -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right), \\ \frac{1}{2} (3 + (\sigma\sigma')) b^s \left( -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right) &= 2b \left( -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right), \end{aligned} \quad (48,23)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} (\sigma_3 + \sigma'_3) b^s \left( \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2} \right) &= 0, \\ \frac{1}{2} (3 + (\sigma\sigma')) b^s \left( \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2} \right) &= 2b^s \left( \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2} \right), \end{aligned} \quad (48,24)$$

т. е. как вторая, так и третья комбинации соответствуют спину, равному единице ( $s=1$ ), причём во втором случае спин обеих частиц направлен по оси  $-z$ , а в третьем — перпендикулярно к оси  $z$ .

Наконец, для антисимметричной комбинации (48,16) мы находим:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} (\sigma_3 + \sigma'_3) b^a &= 0, \\ \frac{1}{2} (3 + (\sigma\sigma')) b^a &= 0, \end{aligned} \quad (48,25)$$

т. е. спины обеих частиц имеют противоположное направление, и поэтому общий спин системы равен нулю ( $s=0$ ).

Из последних формул легко показать, что для симметричного решения ( $s=1$ )

$$(\sigma\sigma') b^s = b^s, \quad (48,26)$$

а для антисимметричного решения ( $s=0$ )

$$(\sigma\sigma') b^a = -3b^a. \quad (48,27)$$

Отсюда, принимая во внимание ещё соотношение (48,19), находим для сдвига уровней энергии (48,11) значение

$$\Delta\mathcal{E}_{1,-3} = \frac{8\pi}{3} \mu\mu' |\psi(0)|^2 (1, -3),$$

причём множитель 1 относится к случаю, когда спины протона и электрона параллельны друг другу ( $s=1$ ), а множитель  $-3$  — когда они антипараллельны ( $s=0$ ).

Таким образом, величина расщепления выражается формулой

$$\nu = \frac{\Delta\mathcal{E}_1 - \Delta\mathcal{E}_{-3}}{h} = \frac{4}{3} \frac{\mu\mu'}{\hbar} |\psi(0)|^2 \cdot 4, \quad (48,28)$$

которая обобщается следующим образом на случай произвольного значения спина  $I$  ядра:

$$\nu_I = \frac{4}{3} \frac{\mu\mu'}{\hbar} |\psi(0)|^2 \frac{2I+1}{I}. \quad (48,28a)$$

В нашем случае  $I = \frac{1}{2}$ , и поэтому множитель  $\frac{2I+1}{I}$  равняется 4.

**б) Определение дополнительного магнитного момента электрона.** С развитием резонансного метода исследования спектров (радиоспектроскопия) появились новые возможности исследования сверхтонкой структуры. В частности, появились возможности экспериментальной проверки формулы (48,28).

С одной стороны, Тауб и Куш<sup>1)</sup> методом определения отношений резонансных частот спинов<sup>2)</sup> электронов и протонов в сильном магнитном поле с большой степенью

<sup>1)</sup> См., например, статью Бете и Лонгмайера в сборнике «Сдвиг уровней атомных электронов», стр. 78.

<sup>2)</sup> Под резонансной частотой спина понимается такая частота, для которой  $h\nu$  равняется разности энергий частицы в магнитном поле для случаев, когда спин направлен по полю и против него.

точности измерили отношение магнитных моментов протона  $\mu'$  и электрона  $\mu$ :

$$\gamma = \frac{\mu'}{\mu} = (1,51927 \pm 0,00010) \cdot 10^{-3}, \quad (48,29)$$

а с другой стороны, Неф и Нельсон измерили расщепление  $S$ -терма сверхтонкой структуры основного состояния атома водорода ( $n=1$ ). Соответствующая частота  $\nu$  оказалась при этом равной

$$\nu = 1420,410 \pm 0,006 \text{ мГц}. \quad (48,30)$$

Для основного состояния атома водорода ( $n=1, I=\frac{1}{2}$ ) формула (28,28) принимает вид

$$\nu = \frac{16}{3} \gamma R \alpha^2 \frac{\mu^2}{\mu_0^2}, \quad (48,31)$$

где вместо  $|\psi(0)|^2$  мы подставили значение (46,106), а  $\mu_0 = \frac{e\hbar}{2mc}$  — магнетон Бора.

Если в выражении (48,31) магнитный момент электронов положим равным (по абсолютному значению) магнетону Бора ( $\mu = \mu_0$ ), то для соответствующей частоты мы найдём следующее значение:

$$\nu = 1416,97 \pm 0,52, \quad (48,32)$$

причём возможные ошибки в последнем расчёте по теоретической формуле связаны с неточностью в определении постоянных.

Сопоставляя значение частот  $\nu$ , найденных из опыта [формула (48,30)] и на основе теории [формула (48,32)], мы видим, что измеренная величина оказалась примерно на 0,24% больше вычисленной.

Учёт релятивистских поправок или учёт поправки на эффект приведённой массы не может дать увеличение частоты (48,32) до требуемого значения (48,30). Поэтому для объяснения аномалии расщепления сверхтонкой структуры остаётся предположить<sup>1)</sup>, что магнитный момент электрона не равен магнетону Бора, как это следует из одноэлектронной теории Дирака, а несколько больше его:

$$\mu = -\mu_0(1 + \delta). \quad (48,33)$$

<sup>1)</sup> Breit, Phys. Rev. 72, 984 (1947).

Подставляя сюда вместо  $\delta$  значение из выражения для дополнительного магнитного момента электрона, обусловленного вакуумными членами, мы найдём, что  $(\delta = \frac{\alpha}{2\pi} = 0,001162)$ . Это даёт для  $\gamma$  значение, близко совпадающее с экспериментальным [см. (48,30)].

Интересно заметить, что отношение магнитного момента электрона и магнетона Бора может быть также найдено путём изучения резонансным методом аномального эффекта Зеемана.

Последние экспериментальные данные<sup>1)</sup> дают  $\delta = 0,001145 \pm 0,000013$ . Это значение особенно хорошо совпадает с теоретическим, если учесть при вычислении магнитного момента ещё следующий член разложения  $(\delta = \frac{\alpha}{2\pi} - 2,973 \frac{\alpha^2}{\pi^2} = 0,001145)$ .

**в) Тонкая структура позитрония<sup>2)</sup>.** Особенно сильно наличие магнитных моментов частиц сказывается в атоме позитрония (см. § 40, п. г), где позитрон имеет магнитный момент, равный магнитному моменту электрона, и где поэтому нельзя различать тонкой и сверхтонкой структуры уровней.

Спиновое взаимодействие согласно (48,28) приводит к смещению уровней основных состояний ортопозитрония ( $s=1$ ) относительно парапозитрония ( $s=0$ ) на величину

$$\Delta v_1 = \frac{16}{3} \frac{\mu_0^2}{\hbar} |\psi(0)|^2 = \frac{2}{3} R\alpha^2 = 1,16 \cdot 10^5 \text{ Мгц.}$$

Кроме того, в атоме позитрония играет также большую роль обменное взаимодействие между электроном и позитроном (виртуальная аннигиляция). Подсчитывая по формуле (43,37) обменную энергию при наличии частицы и «дырки», мы найдём в нерелятивистском приближении

$$U_A = \frac{e^2}{2\pi^2} \int e^{ix(r-r')} \frac{1-(\alpha\alpha')}{x^2-(K-K')^2} d^3x \approx \frac{e^2\pi}{k_0^2} \delta_{(r-r')}(\alpha\alpha').$$

<sup>1)</sup> S. Koenig, A. G. Prodell and P. Kusch, Phys. Rev. 83, 687, 1951.

<sup>2)</sup> См., например, В. Б. Берестецкий, ЖЭТФ 19, 1130 (1949).

Здесь мы положили  $K \approx -K' = k_0$  и отбросили член, содержащий единичную матрицу, поскольку он в данном случае будет иметь порядок  $\frac{v^2}{c^2}$  относительно члена, содержащего матрицы  $\alpha$ . Соответствующее смещение энергетических уровней будет равно

$$\begin{aligned} \Delta \mathcal{E}_2 &= \frac{e^2 \pi}{k_0^3} \int \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \psi_n^+(\mathbf{r}) \psi_n^+(\mathbf{r}') \frac{3 + (\sigma\sigma')}{2} \psi_n(\mathbf{r}) \psi_n(\mathbf{r}') d^3x d^3x' = \\ &= 4\pi\mu_0^2 s(s+1) |\psi_{(0)}|^2. \end{aligned}$$

При выводе последней формулы следует принять во внимание формулы (43,34а).

Отсюда следует, что обменные силы приводят к смещению уровней только для ортосистемы ( $s=1$ ), причём  $\Delta v_2 = \frac{1}{2} R\alpha^2$ . Недавно<sup>1)</sup> тонкая структура основного состояния позитрония была обнаружена экспериментально.

В магнитном поле ортопозитроний частично превращается в парапозитроний, причём доля превращающихся атомов должна быть пропорциональной величине  $\left(2 \frac{\mu_0 H}{\Delta \mathcal{E}}\right)^2$ , где  $\Delta \mathcal{E}$  есть расщепление уровней  $^1S_0$  и  $^3S_1$ . Наблюдая изменение числа двухфотонных аннигиляций при увеличении магнитного поля, экспериментаторы нашли, что  $\Delta \mathcal{E} = (9,4 \pm 1,5) \cdot 10^{-4}$  эв. Эта величина хорошо согласуется с теоретическим значением  $\Delta \mathcal{E} = h(\Delta v_1 + \Delta v_2) = 8,5 \cdot 10^{-4}$  эв.

<sup>1)</sup> M. Deutsch and E. Dulit, Phys. Rev. 84, 601 (1951).



ЧАСТЬ ВТОРАЯ

**ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ  
ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ**



## ПРЕДИСЛОВИЕ

Вторая часть книги посвящена обзору развития теории элементарных частиц и анализу основных её трудностей.

Прежде всего мы излагаем основные сведения о частицах (§ 1). Далее резюмируем принципы релятивистской квантовой механики, являющейся основой современной теории элементарных частиц (§ 2). Более подробно некоторые из этих вопросов изложены в части первой настоящей книги, написанной А. А. Соколовым, на которую мы даём ссылки в соответствующих пунктах. Затем, беря на себя довольно неблагодарную задачу, мы останавливаемся на различных гипотезах, пытающихся в том или ином направлении выйти за рамки современной теории с целью устранения бесконечностей в теории массы или для построения общей теории связанных друг с другом элементарных частиц, уделяя особое внимание понятию ливейной длины и нелинейным обобщениям (§ 3). Нет сомнения, что, развивая исследования в области элементарных частиц, наша наука, руководствуясь принципами марксистско-ленинской материалистической философии, сумеет в недалёком будущем придти к ещё более совершенному пониманию строения вещества.

Ряд параграфов, посвящённых отдельным проблемам, также основан на литературе, опубликованной главным образом в последние годы. В § 4 рассматривается вопрос установления связи электрона с полем тяготения. Квантовая теория слабого поля тяготения (§ 5) представляет собой попытку трактовки тяготения по аналогии с электромагнитным и мезонным полями. Мы полагаем, что тяготение нельзя игнорировать, как это зачастую делается при построении общей теории полей. В параграфе о кратных

процессах (§ 6) мы анализируем как простейшие множественные явления типа  $\beta$ -распада и двойного  $\beta$ -распада, так и порождение групп мезонов. Наконец, в § 7 мы рассматриваем теорию изотопического смещения.

С благодарностью отмечается участие в составлении данной части книги В. И. Григорьева (отдельные пункты в § 2 и § 3) и В. В. Лебедева (в § 6).

Существенную помощь при подготовке рукописи оказал Г. Е. Пустовалов. Ряд ценных замечаний был сделан В. И. Родичевым и А. М. Бродским.

*Д. Иваненко*

Физический факультет МГУ

Декабрь 1951 г.

# ГЛАВА I

## ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ЧАСТИЦЫ

### § 1. Строение вещества

**а) Пространство и время.** Изучение основных свойств материи, движущейся в пространстве—времени, является одной из важнейших задач физической науки.

В годы перелома, когда новые факты не укладываются в старые представления и новая теория далеко ещё не построена, трудно ответить на вопрос: каково будет дальнейшее развитие теории микромира? В настоящее время большинство добытых сведений постепенно укладывается в более или менее стройную картину.

Типичным примером переломного периода являются первые годы нашего века, когда началось исследование атомных процессов, но строение атома оставалось ещё совершенно неясным. С другой стороны, повидимому, не нужно быть большим оптимистом, чтобы отнести наше время к числу тех периодов, когда можно констатировать наличие довольно цельной картины строения вещества<sup>1)</sup>. Это отнюдь не означает, что в современных представлениях имеются лишь незначительные трудности, касающиеся второстепенных вопросов.

Напротив, одна из наших главных задач будет заключаться в том, чтобы показать существенный характер некоторых трудностей теории, связанных, например, с определением массы электрона и других частиц, и затем дать обзор различных попыток преодоления трудностей.

---

<sup>1)</sup> О понятии вещества смотри стр. 508.

Вместе с тем следует подчеркнуть, что само понятие цельной картины строения вещества имеет условный характер.

Согласно гениальной ленинской формулировке «электрон так же неисчерпаем, как и атом»<sup>1)</sup>. Следовательно, неисчерпаемы и другие элементарные частицы и поля. Речь может идти поэтому лишь о моделях и теориях, охватывающих всё более широкий круг явлений и являющихся всё более совершенными приближениями.

Теории элементарных частиц, определяемые наличными экспериментальными возможностями, беспрестанно совершенствуются.

Согласно классическому определению Энгельса пространство и время представляют собою формы существования материи, которые «...без материи суть ничто...»<sup>2)</sup>.

Одним из существенных фактов является трёхмерность пространства и самый факт нечётности числа измерений, сказывающиеся так или иначе на явлениях природы. Укажем, например, в качестве нетривиального факта, что принцип Гюйгенса, проявляющийся в возможности распространения сигналов без искажения в виде бесконечного «хвоста», не мог бы выполняться в пространстве чётного числа пространственных измерений<sup>3)</sup>.

Пространственные координаты и время могут изменяться непрерывно. Однако следует быть осторожным и в этом пункте, так как согласно разнообразным соображениям не исключено, что при более детальном исследовании структуры элементарных частиц и их поведения при крайне высоких энергиях и на самых малых расстояниях, свойство непрерывности придётся уточнить и перейти к прерывному, в некотором смысле, пространству—времени<sup>4)</sup>.

---

1) В. И. Ленин, *Материализм и эмпириокритицизм*, Госполитиздат, 1951, стр. 244.

2) Энгельс, *Диалектика природы*, Госполитиздат, 1950, стр. 187.

3) См. «Классическая теория поля», § 21.

4) Подобная гипотеза «квантованного» пространства—времени, выдвинутая нами со специальной целью устранения трудности с бесконечной собственной энергией электрона, подсказала возможность наличия минимальной длины как новой универсальной кон-

Следующим фундаментальным обстоятельством является установление формы взаимосвязи пространства и времени, выясненной при построении специальной теории относительности<sup>1)</sup>.

При этом оказалось, что пространство и время тесно связаны друг с другом. Лишь в области движений с малой скоростью, или, точнее, процессов, при которых изменение энергии мало по сравнению с собственной энергией частицы ( $E \ll Mc^2$ ), где только и пригодна классическая механика Ньютона, применимо представление о независимых друг от друга пространстве и времени.

С формальной стороны координата времени всегда входит в общие уравнения движения в значительной мере симметричным образом наряду с тремя пространственными координатами. Формальная эквивалентность координат и времени может быть достигнута введением в качестве четвертой координаты времени, умноженного на  $ic$  ( $x_4 = ict$ ). Иначе говоря, метрика четырехмерного пространства—времени является псевдоэвклидовой, а не просто четырехмерной евклидовой. Квадрат величины интервала, т. е. расстояние между двумя бесконечно близкими точками, или событиями в четырехмерном мире, равняется

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2. \quad (1,1)$$

Введя четвертую координату  $x_4 = ict$ , можно записать величину  $ds^2$  в виде

$$ds^2 = -dx_4^2 - dx_1^2 - dx_2^2 - dx_3^2.$$

Можно также записать  $ds^2$  несколько иначе, используя метрический тензор  $g_{\mu\nu}$  ( $g_{\mu\mu}^0 = -1, -1, -1, +1$ ,  $g_{\mu\nu}^0 = 0$  при  $\mu \neq \nu$ ) и действительную четвертую координату  $x_4 = ct$ :

$$ds^2 = \sum g_{\mu\nu}^0 dx_\mu dx_\nu. \quad (1,2)$$

станты и была развита в разнообразных других направлениях, но не привела ещё к каким-либо определённым результатам (подробнее см. ниже § 3).

<sup>1)</sup> См. сборник статей Лоренца, Пуанкаре, Эйнштейна, Минковского, М.—Л., 1935.

Дальнейший фундаментальный шаг в понимании пространства—времени и вместе с тем тяготения связан с неевклидовой геометрией Лобачевского (1826), оказавшей влияние и при установлении специальной теории относительности. Лобачевский впервые сумел создать геометрию неевклидова, искривлённого трёхмерного пространства, притом безукоризненную по строгости. Эти работы были продолжены затем Риманом, Картаном и другими математиками XIX и XX веков, построившими вслед за геометрией Лобачевского пространства постоянной отрицательной кривизны, неевклидову геометрию пространства постоянной положительной кривизны; геометрию пространств не только искривлённых, но и закрученных, и многих других обобщённых пространств. Сам Лобачевский в своих основоположных трудах замечательным образом придавал реальный физический смысл неевклидовой геометрии и поставил вопрос о возможности наблюдений астрономическим путём отступлений свойств реального пространства от эвклидовости, а также правильно указал, что вслед за изменением геометрии должна быть модифицирована и механика<sup>1)</sup>. Однако сто лет назад в науке ещё не было средств для решения этих проблем.

Развивая идеи специальной теории относительности и стремясь построить систему уравнений, инвариантную относительно более общих преобразований, чем лоренцовы, Эйнштейн (1916) обратился к понятию искривлённого пространства, введённого Лобачевским. При этом оказалось достаточным ограничиться одним искривлением без других возможных геометрических обобщений и отступлений от эвклидовой геометрии.

Таким образом, наилучшим приближением в понимании свойств пространства—времени оказалась четырёхмерная геометрия, в форме, специально исследованной Риманом, развившим результаты Лобачевского на случай,

---

<sup>1)</sup> Н. И. Лобачевский, Полн. собрание соч. т. I, М.—Л., 1946, стр. 206—210, см. также В. Ф. Каган, Лобачевский, Л., 1948; С. Яновская, Передовые идеи Лобачевского—орудие борьбы против идеализма в математике, М.—Л., 1950, Б. Г. Кузнецов, Ломоносов, Лобачевский, Менделеев, М.—Л., 1945.



когда кривизна не является постоянной в разных точках. Интервал в римановой геометрии имеет вид

$$ds^2 = \sum_{\mu, \nu} g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (1,3)$$

где  $g_{\mu\nu}$  уже не будут постоянными, но являются функциями координат. Более того, при построении общей теории относительности выяснилось, что компоненты метрического тензора  $g_{\mu\nu}$ , определяющего искривление, являются вместе с тем компонентами обобщённых потенциалов поля тяготения.

Обычный ньютонов потенциал тяготения  $\varphi_N$  оказался лишь одной из компонент слабого поля тяготения, описываемого добавками  $h_{\mu\nu}$  к псевдоэвклидовым (галилеевым) значениям  $g_{\mu\nu}^0$ :

$$g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}^0 + h_{\mu\nu}, \quad (1,4)$$

$$g_{44} = g_{44}^0 + \frac{2\varphi_N}{c^2}.$$

Тем самым была, во-первых, в значительной мере осуществлена программа Лобачевского, предвидевшего возможность отступлений геометрии мира от плоской эвклидовой, и, во-вторых, замечательным образом дана геометрическая интерпретация тяготения, до тех пор в течение двухсот лет со времён Ньютона не поддававшегося попыткам какого-либо истолкования.

Современная теория тяготения и пространства—времени указывает, что отступления от псевдоэвклидового характера метрики четырёхмерного мира, или отступления от ньютонова закона тяготения, вообще говоря, во всех случаях чрезвычайно малы. До сих пор лишь в трёх случаях удалось обнаружить подобные отступления и показать необходимость нового понимания тяготения и вместе с тем геометрии Лобачевского-Римана. Оказался объяснённым сдвиг перигелия Меркурия, равный  $43''$  в столетие. При наблюдении во время затмений отклонения лучей света от звёзд, проходивших у самого края Солнца, был обнаружен сдвиг, равный примерно теоретическому значению  $1,75''$ . Наконец, в общем согласи

с предсказанием, спектральные линии, испускаемые в условиях интенсивного поля тяготения, например атомами сверхплотных звёзд типа белых карликов, оказались сдвинутыми к красному концу. В связи с небольшим числом случаев, когда наблюдались подтверждения обобщённой теории тяготения, важно было бы исследовать возможность обнаружения предсказываемого теорией излучения гравитационных волн слабого поля. Хотя наблюдение отдельных гравитонов (квант этого поля) пока что практически недоступно, не исключена возможность обнаружения эффектов, обязанных некоторому примерно равновесному полю гравитационного излучения, могущему играть роль в обеспечении устойчивости астрономических систем<sup>1)</sup>.

После указанной «геометризации» тяготения оно оказалось в значительной мере оторванным от других частиц и полей. Вместе с тем в других отношениях выяснилась зависимость свойств пространства—времени от вещества. Действительно, при наличии вещества любого вида, в частности электромагнитного поля, пространство искривляется согласно гравитационным уравнениям Эйнштейна<sup>2)</sup>.

Во всяком случае, несмотря на крайнюю незначительность поправок, к которым приводит новое понимание тяготения, или ничтожную вероятность иных вновь предсказываемых явлений в этой области, а также полное отсутствие пока что каких-либо практических выводов из новой теории и её несколько незавершённый характер, принципиальное значение доказательства искривлённости пространства и нового понимания тяготения, связанного

---

<sup>1)</sup> См. ниже § 5; Д. Иваненко, А. Бродский, Л. Гинзбург, ДАН 80, 565 (1951). Интересно указать, что возможность волн тяготения была указана ещё Б. Б. Голицыным в одном из писем к П. Н. Лебедеву (1890 г.; неопубликовано).

<sup>2)</sup> Отметим, что можно попытаться несколько стереть возникший разрыв между полем тяготения и другими полями и частицами. Согласно квантовой теории, пары противоположно заряженных частиц могут превращаться также в кванты слабого гравитационного поля.

Однако вероятность подобных трансмутаций крайне мала при всех известных условиях, см. § 5.

прежде всего с именами Лобачевского и Эйнштейна, весьма велико.

Пространство и время обладают рядом фундаментальных особенностей, сказывающихся самым глубоким образом на поведении элементарных частиц и всего вещества. К ним относятся: 1) однородность пространства и 2) однородность времени; иначе говоря, отсутствие каких-то выделенных точек в пространстве и отсутствие избранного начала отсчёта времени. Затем 3) пространство изотропно, иначе говоря, в нём нет избранных преимущественных направлений. Связь пространства и времени подсказывает наличие изотропии четырёхмерного пространства — времени; 4) действительно, эта изотропия имеет место и проявляется в наличии специального принципа относительности или эквивалентности всех инерциальных систем отсчёта, движущихся прямолинейно равномерно. Наконец, 5) пространство обладает некоторым свойством симметрии, 6) точно также не выделено направление времени для элементарных процессов.

Указанные свойства пространства — времени могут быть переведены на язык преобразований координат. Свойство однородности выражается в том, что при преобразованиях смещения

$$\begin{aligned}x'_\nu &= x_\nu + a_\nu & (\nu = 1, 2, 3), \\t' &= t + t_0\end{aligned}\tag{1,5}$$

интервал (1,1) остаётся инвариантным. Преобразования вращения четырёхмерного пространства, распадающиеся на чисто пространственные вращения и преобразования Лоренца, являющиеся вращениями в плоскостях  $(tx, ty, tz)$ :

$$x'_\nu = a_{\nu\mu} x_\mu \quad (\nu, \mu = 1, 2, 3, 4),\tag{1,6}$$

где  $a_{\mu\nu}$  — коэффициенты преобразования (т. е. обычные функции углов, или коэффициенты лоренцовых преобразований, связанные со скоростью), также оставляют инвариантным выражение интервала. Свойства симметрии, также сохраняющие инвариантность интервала, выражаются преобразованиями инверсии

$$x'_\mu = -x_\mu, \quad t' = -t.\tag{1,7}$$

До сих пор при преобразованиях мы отвлекались от кривизны или наличия тяготения. Последние обстоятельства оказываются связанными с возможностью любых точечных преобразований координат согласно общему принципу относительности. В последнем случае остаётся инвариантным интервал в форме (1,3).

Указанные выше свойства пространства, времени и инвариантного интервала оказываются связанными с инвариантными свойствами уравнений движения элементарных частиц или соответствующих лагранжевых функций. Более того, оказывается, что каждой непрерывной группе преобразований координат, оставляющей лагранжиан инвариантным, соответствует некоторый закон сохранения. Сохранение количества движения связано с инвариантностью относительно смещений и тем самым с однородностью пространства. Сохранение энергии связано с инвариантностью относительно сдвигов отсчёта времени. Сохранение момента количества движения связано с инвариантностью относительно вращений.

Не останавливаясь подробно на истории законов сохранения, всё же ввиду чрезвычайной важности этих основных законов природы отметим главные этапы их установления. Закон сохранения количества движения был установлен Декартом в XVII веке. Лейбниц ввёл позже кинетическую энергию в качестве другой меры движения<sup>1)</sup>. Ломоносов в XVIII веке значительно продвинул вперёд понимание как строения вещества, так и законов сохранения. Впервые у Ломоносова мы встречаем идею о наличии универсальных законов сохранения, относящихся как к веществу в состоянии покоя, так и характеризующих движение. В письме к Эйлеру Ломоносов, в частности, пишет: «Но все встречающиеся в природе изменения проис-

---

<sup>1)</sup> Ренэ Декарт, Избранные произведения, Госполитиздат, 1950, гл. «Начала Философии».

Замечательный методологический анализ законов сохранения дан в книге Энгельса «Диалектика природы» (см. в особенности главу «Мера движения.—Работа»), Госполитиздат, 1950.

К истории вопроса см. также П. С. Кудрявцев, История физики, т. I, М., 1948, стр. 265 и след.

ходят так, что если к чему-либо нечто прибавилось, то это отнимается у чего-то другого. Так, сколько материи прибавляется к какому-либо телу, столько же теряется у другого..., так как это всеобщий закон природы, то он распространяется и на правила движения...»<sup>1)</sup>).

Сам Ломоносов установил в 1756 г. закон сохранения массы в химических реакциях. Через 17 лет эти опыты были подтверждены Лавуазье<sup>2)</sup>).

Расшифровка тепловой энергии как энергии движения атомов и молекул, подготовленная отчасти работами Бойля, была в значительной мере произведена в трудах Ломоносова<sup>3)</sup>).

Ломоносов последовательно развивает кинетическую теорию тепла, устанавливает понятие абсолютного нуля и борется против теплорода в физике и химии<sup>4)</sup>). Тем самым ему принадлежит основная роль в установлении кинетической теории теплоты, развитой позднее в XIX веке в виде кинетической теории газов. Наличие постоянного соотношения между тепловой и механической энергией было выяснено Майером, Джаулем и Гельмгольцем в 40-х годах XIX века, работы которых были восприняты как окончательное установление закона сохранения энергии. Согласно весьма глубокому замечанию Энгельса при этом следует также подчеркнуть наличие «превращения» энергии, т. е. превращения энергии из одной формы в другую<sup>5)</sup>).

Развитие атомно-кинетической теории тепла было связано в дальнейшем с работами Клаузиуса, Максвелла, Гиббса и получило известное завершение в трудах передового физика-материалиста конца XIX века Больцмана, боровшегося против реакционной идеалистической

---

<sup>1)</sup> М. В. Ломоносов, Полн. собр. соч., т. 2, М.—Л., 1951, стр. 183.

<sup>2)</sup> См. Я. Г. Дорфман, Лавуазье, М.—Л., 1948.

<sup>3)</sup> Я. Г. Дорфман, Ломоносовский сборник, вып. 3-й, М.—Л., 1951.

<sup>4)</sup> См. М. В. Ломоносов, Размышления о причине теплоты и холода. Полн. собр. соч., т. 2., М.—Л., 1951.

<sup>5)</sup> См. Ф. Энгельс, Диалектика природы, Госполитиздат, 1950.

«энергетики» Оствальда, пытавшегося мыслить энергию без материи.

Закон сохранения энергии в области электромагнетизма был подготовлен трудами петербургского академика Ленца и получил затем значительное развитие в работе Умова (1874), впервые начавшего рассматривать распределение и движение энергии любого вида в пространстве<sup>1)</sup>. Это привело Пойнтинга на десять лет позднее к установлению выражения плотности энергии электромагнитного поля. Важный шаг был затем сделан Голицыным (1893), установившим понятие температуры также и для электромагнитного поля. Существенный результат был получен в теории относительности путём установления связи массы с энергией (1905) в виде формулы  $E=mc^2$ , прекрасно подтвердившейся, в частности, на ядерных реакциях и при превращениях частиц друг в друга, например электронов—позитронов в фотоны.

Установление закона сохранения момента количества движения, происходившее параллельно, было лишено драматических эпизодов, которыми так богата история закона сохранения энергии. Закон сохранения энергии получил новые подтверждения при переходе физики в атомную и ядерную области. В согласии с теорией, устанавливающей перечисленные законы сохранения в качестве универсальных, точными экспериментами было показано выполнение всех законов сохранения как в области атома и ядра, так и при всех превращениях элементарных частиц вплоть до процессов, происходящих при самых больших известных энергиях ( $10^{16}$ — $10^{17}$  эв) и на самых малых расстояниях. Идеи Н. Бора, дважды (для атома и для ядра) предлагавшего заменить точное выполнение закона сохранения энергии статистическим выполнением «в среднем», оказались опровергнутыми, и он был вынужден от них отказаться. Несомненно, эти предложения Бора были сделаны под влиянием его общей ошибочной идеалистической методологии, свойственной «копенгагенской» школе, весьма близкой к махизму. Эти идеи

---

<sup>1)</sup> См. Н. А. У м о в, Уравнение движения энергии в телах. Избр. соч., М.—Л., 1950.

Бора, как и следовало ожидать, оказались в науке совершенно бесплодными и немногие попытки использовать их, например, для объяснения излучения звёзд оказались непригодными. Что касается ядерных явлений ( $\beta$ -распад,  $K$ -захват) и превращения мезонов, идущих с испусканием нейтрино, ещё непосредственно не обнаруженным, то следует подчеркнуть, что физики далеко продвинулись в понимании  $\beta$ -распада, превращения мезонов и свойств нейтрино и получили много подтверждений существования этой частицы, исходя из законов сохранения энергии, импульса и момента количества движения. Без гипотезы нейтрино, обеспечивающей сохранение в этих важнейших явлениях, частью нашедших уже практические применения, в них ничего нельзя было бы понять.

Таким образом, закон сохранения энергии не только вновь продемонстрировал свою универсальную значимость, но также снова оказался одним из самых надёжных и полезных эвристических орудий для дальнейшего успешного развития физики.

**б) Свойства элементарных частиц.** Перейдём к строению вещества. Как известно, атомы химических элементов образуют молекулы, затем жидкие и твёрдые тела, все макроскопические и далее астрономические объекты. Все атомы состоят из электронов, вращающихся вокруг ядер, в свою очередь образованных из протонов и нейтронов.

Наряду с атомами и ядрами следует также учесть вновь открытые в 1951 г. метастабильные атомноподобные системы, предсказанные ранее теоретически. Речь идёт о «позитронии», образованном электроном и позитроном, вращающимися вокруг общего центра тяжести. Возможны также молекулы, образованные атомами позитрония, и другие системы близкого типа, составленные из двух мезонов, мезонов и электронов или позитронов («мезотроний» и др.). В парасостоянии со спином 0 позитроний существует около  $10^{-10}$  сек. до превращения в два  $\gamma$ -кванта; в ортосостоянии со спином 1 время жизни до превращения в 3 кванта равно примерно  $10^{-7}$  сек. (подробности см. ч. 1, § 40).

Часть вещества находится в диссоциированном состоянии вплоть до отдельных простейших частиц. Мы имеем в виду космические лучи, представляющие собой вместе со вторичными выбитыми из атомов и ядер или порождёнными при столкновениях частицами, сложный поток всевозможных элементарных частиц и лёгких атомных ядер чаще всего высокой энергии. Среди первичных частиц примерно 70% является протонами, 20%— $\alpha$ -частицами, а остальные—более тяжёлыми ядрами. Благодаря высокой энергии космических лучей в них впервые удалось наблюдать порождение позитронов и мезонов различных типов. Не останавливаясь подробно на вопросе о происхождении космических лучей, отметим коротко, что сейчас указан ряд разумных возможностей ускорения частиц в условиях звёзд и при диффузии в пространстве до энергий порядка  $10^{10}$  эв. К ним относится прежде всего ускорение частиц электрическими полями, вызванными переменными магнитными полями звёзд и Солнца (Терлецкий). Возможно, что первичные космические частицы, выброшенные из звёзд тем или иным путём, могут ещё добавочно ускоряться при столкновении с намагниченными «облаками» межзвёздной материи, тем более, что первичные космические частицы, по всей видимости, довольно долго диффундируют в пространстве до своего попадания на землю. Эти столкновения и диффузия позволяют истолковать энергетический спектр, выражаемый эмпирической формулой

$$dN = \text{const} \frac{d\varepsilon}{\varepsilon^\gamma} \quad (\gamma = 1,9)^1).$$

В связи с вопросом о происхождении космических лучей вновь была сделана попытка (О. Клейн) возродить дираковскую гипотезу о существовании в тех или иных отдалённых участках вселенной антивещества, в атомных ядрах которого находятся антипротоны с отрицательным электрическим зарядом вместо обычных протонов, а в атомах вращаются не электроны, а позитроны. На границах

---

<sup>1)</sup> См. Я. П. Терлецкий и А. А. Логунов, ЖЭТФ 21, 567 (1951). Подобные столкновения были предложены Ферми в качестве первичного механизма ускорения.



подобных участков вселенной с обычными должно происходить превращение частиц и даже, возможно, целых ядер с превращением их в фотоны и мезоны. В связи с общими успехами ускорительных гипотез происхождения космических лучей эти замечания далее не разрабатывались.

Таким образом, несмотря на отсутствие окончательной теории происхождения космических лучей, способной объяснить весь спектр энергий, вопрос этот значительно продвинулся вперёд<sup>1)</sup>.

Попадая в атмосферу и сталкиваясь с ядрами, космические лучи наряду с выбиванием протонов, нейтронов,  $\alpha$ -частиц и более тяжёлых осколков в виде лёгких ядер, или даже полным расщеплением ядер на все протоны и нейтроны (Жданов) и выбиванием атомных электронов в виде  $\delta$ -лучей, порождают частицы, отсутствовавшие сперва в космическом потоке или в атомах и ядрах (рис. 1). Кроме более привычного испускания тормозных  $\gamma$ -лучей, сопровождающего столкновения заряженных и магнитных частиц и ядер, при этом происходит интенсивное излучение мезонов в качестве частиц второго поколения. Действительно, при столкновении быстрых протонов и нейтронов от них, наглядно говоря, «отрываются» куски ядерного поля, окружающего их, т. е. излучаются кванты этого поля, или мезоны. Речь идёт при этом о порождении главным образом среднетяжёлых  $\pi$ -мезонов как заряженных, открытых в 1947 г. Пауэллом, так и нейтральных ( $\pi_0$ ), открытых в 1950 г. (нейтретто), близких по массе (примерно  $m_{\pi_{\pm}} \approx 270\text{--}280 m$ ,  $m_{\pi_0} \approx 261 m$ ,  $m$ —масса электрона). Наблюдалось также порождение в космических лучах более тяжёлых  $\tau$ -мезонов с массой около  $900 m$ .

Впоследствии  $\pi$ -мезоны были получены также в лабораторных условиях путём бомбардировки мишеней из различных веществ быстрыми частицами. Мезоны могут быть порождены также при столкновении с ядрами  $\gamma$ -фотонов. Среди разнообразных случаев порождения мезонов

---

<sup>1)</sup> См. Я. П. Терлецкий, ЖЭТФ 19, 1052 (1949); D. T. N. A. G., Rev. Mod. Phys. 22, 119 (1950).

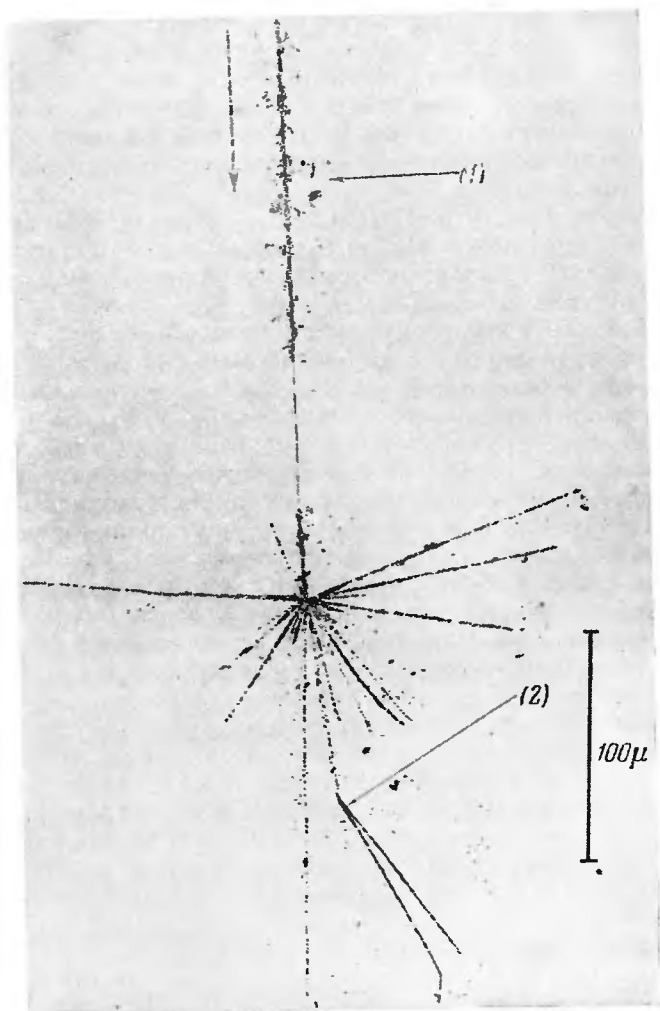
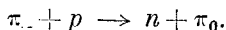
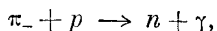


Рис. 1. Расщепление ядер в космических лучах.

На микрофотографии зарегистрировано столкновение первичной космической частицы (повидимому, ядра  $C_{20}$ ) с энергией около 100 миллиардов электрон-вольт и ядра эмульсии (Ag или Vg) толстослойной фотопластинки (метод Мысовского и Жданова), в результате которого было выброшено 42 заряженные частицы в виде «звезды». Одна из быстрых заряженных частиц в свою очередь вызвала расщепление второго ядра (справа внизу).

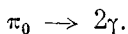
особый интерес представляют обнаруженные недавно случаи кратных процессов, т. е. порождения многих мезонов (10—20 частиц) в едином акте столкновения двух нуклонов, обладающих весьма высокой энергией ( $10^{12}$ — $10^{13}$  эв). Очевидно, «мезонное вещество» может излучаться при подходящих условиях либо в виде отдельных частиц разных типов, либо в виде групп частиц (см. § 6).

Медленные отрицательные  $\pi$ -мезоны при столкновении с ядром сперва захватываются на атомную орбиту, образуя мезоводород и другие мезоатомы; после  $K$ -захвата они поглощаются ядрами. В водороде имеют место реакции:

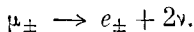


С другой стороны, быстрые мезоны непосредственно взаимодействуют с нуклеонами, испытывая рассеяние или поглощение.

Заряженные  $\pi$ -мезоны самопроизвольно распадаются на более лёгкие частицы третьего поколения:  $\mu$ -мезоны и нейтральные частицы (вероятно, нейтрино) со средним временем жизни  $\tau_{\pi} \approx 2 \cdot 10^{-8}$  сек.:  $\pi_{\pm} \rightarrow \mu_{\pm} + \nu$ ; масса  $\mu$ -мезона примерно равна  $m_{\mu} \approx 210$ — $215 m$ . Нейтральные  $\pi_{0}$ -мезоны, существующие в среднем около  $10^{-13}$  сек., распадаются на два  $\gamma$ -фотона (кванты третьего поколения) высокой энергии (около  $75 M\varepsilon$ ):

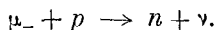


$\mu_{\pm}$ -мезоны, составляющие основную долю проникающей компоненты космических лучей (около 75% на уровне моря), распадаются на следующие частицы четвёртого поколения: электрон или позитрон и, вероятно, два нейтрино:



Среднее время жизни  $\mu$ -мезонов равно  $2,1 \cdot 10^{-6}$  сек.

Отрицательные  $\mu$ -мезоны, поглощаясь ядрами, ведут, например, к реакциям типа



Поглощение  $\pi$ -мезонов часто ведёт к выбиванию нескольких нуклонов.

Подобно  $\pi$ -мезонам и  $\mu$ -мезонам,  $\tau$ -мезоны нестабильны. Они распадаются на две или три заряженные и нейтральные частицы (возможно на три  $\pi$ -мезона)<sup>1</sup>). Предварительно предполагаются следующие схемы распада:

$$\tau_0 \rightarrow \pi_+ + \pi_- + \pi_0 \quad \text{или} \quad \tau_0 \rightarrow \pi_+ + \pi_- ,$$

$$\tau_+ \rightarrow \pi_+ + \pi_+ + \pi_- .$$

Время жизни  $\tau$ -мезонов по предварительной оценке порядка  $10^{-10}$  сек.;  $\tau$ -мезоны, обнаруженные Лэпренс-Ренге в 1941 г. в виде уникальных следов на вильсоновских фотографиях, ныне являются с достоверностью обнаруженными частицами мезонного типа.

Почти с окончательной достоверностью обнаружены также  $V$ -частицы, прежде всего нейтральные, с массами порядка масс нуклеонов ( $\approx 2200 m$ ) или масс  $\tau$ -мезонов ( $\approx 900 m$ ), которые могут распадаться на лету, повидимому, по схемам

$$V^0 \rightarrow p + \pi_- \quad \text{или} \quad V^0 \rightarrow \pi_+ + \pi_-$$

и тем самым дают на фотографиях вилки, или  $V$ -образные следы (рис. 2). Среднее время жизни их оценивается предварительно в  $\tau_V \sim 10^{-10}$  сек. Есть указания на существование заряженных  $V$ -частиц. С другой стороны, не исключено, что часть  $V$ -частиц совпадает с  $\tau$ -мезонами<sup>2</sup>). Ещё преждевременно судить, являются ли  $V$ -частицы и  $\tau$ -мезоны возбуждёнными состояниями нуклеонов и более лёгких частиц<sup>3</sup>) или системами, возникшими в результате «слияния» (см. § 3). После открытия  $\mu$ -мезона, подобно позитрону в космических лучах, методом камеры Вильсона, в продолжение работ Скобельцына, остальные мезоны:

<sup>1</sup>) С. F. Powell, R. H. Fowler, M. G. K. Macon, O. Rochat, Phil. Mag. 42, 1040 (1951); С. Ф. Пауэлл, УФН 45, 15 (1951); Н. Г. Биргер и И. Л. Розенталь, там же, стр. 104.

<sup>2</sup>) Anderson et al. Phys. Rev. 78, 290 (1950); Butler, Rochester, Nature 160, 855 (1947); 167, 501 (1951). Ещё неясен вопрос о предполагаемых  $\chi$ -частицах, массы которых по грубой оценке составляют около  $1200 m$ . См. Проблемы соврем. физ. Рефер. сборн. № 9 (серия 3), 1951.

<sup>3</sup>) R. Sachs, Phys. Rev. 84, 305 (1951).

$\pi_{\pm}$ ,  $\pi_0$ ,  $\tau$  были обнаружены методом фотопластинок, развитым Мысовским и Ждановым. Этот способ, дающий возможность регистрировать крайне редкие случаи, служит сейчас наиболее надёжным средством открытия новых

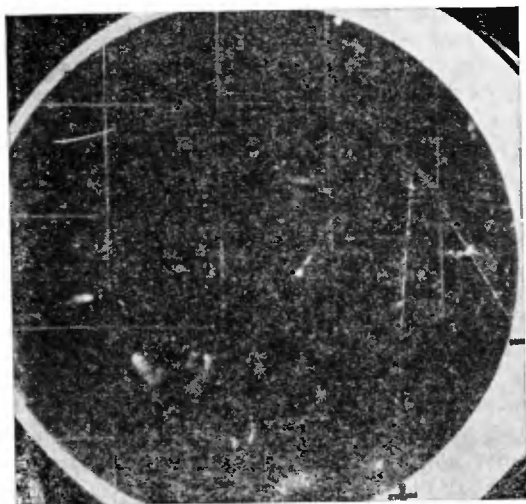


Рис. 2.  $V$ -частицы.

Фотография нового процесса в космических лучах, полученная в вильсоновской камере (метод Скобельцына). Анализ polarizationных потерь в обеих компонентах вспышки (следы «вспышки» на снимке отмечены знаками плюс и минус) при помощи законов сохранения показывает, что здесь имеет место не ядерное расщепление или рассеяние частиц, но распад какой-то первичной нейтральной « $V$ -частицы», двигавшейся сверху (в правом верхнем углу снимка) на две заряженные, вероятно, два  $\pi$ -мезона.

частиц и процессов распада в области мезонных масс ( $\sim 200-1000 m$ ).

Наличие  $\gamma$ -лучей, испускаемых при столкновении различных частиц, главным образом в значительном количестве при распаде короткоживущих  $\pi_0$ -мезонов, позволяет объяснить возникновение пар электронов—позитронов, образующихся в космических лучах в качестве частиц

четвёртого поколения с наибольшей вероятностью при столкновении  $\gamma$ -квантов высокой энергии (в основном кванты третьего поколения) с ядрами, а в дальнейшем целых ливней этих частиц, образующихся в некотором слое вещества (Блэккет). Обнаружение совместных следов ядерных частиц, мезонов и электронов («электронно-ядерные» ливни по терминологии Скобельцына и Добротина), указывавших на возникновение этих частиц в близких процессах, привело затем к открытию  $\pi_0$ -мезона и его распада на два фотона и, наконец, установлению всей последовательности порождения космических частиц. С другой стороны, вопреки более старым представлениям, распад  $\rho_{\pm}$ -мезонов даёт сравнительно незначительное число электронов и позитронов.

Электроны—позитроны высокой энергии при столкновении с ядрами теряют свою энергию преимущественно путём порождения  $\gamma$ -лучей (рис. 3). Каскад  $\gamma$ -фотонов, электронов и позитронов образует мягкую, более быстро поглощаемую компоненту космических лучей (см. ч. 1)<sup>1)</sup>.

Выяснение строения вещества из элементарных частиц позволило в последние годы сделать первые шаги в решении важного вопроса о происхождении химических элементов. Современная распространённость изотопов обязана как начальной концентрации в период их образования, так и действию различных ядерных реакций как радиоактивных (деление,  $\alpha$ -распад,  $\beta$ -распад,  $K$ -захват), так и вызванных бомбардировкой частиц высокой энергии из космического потока, или частицами, испущенными радиоактивными элементами, или, наконец, бомбардировкой частиц, обладающих высокой энергией в условиях высокой температуры в недрах звёзд.

Как было выяснено, в недрах Солнца и других звёзд карликов главной последовательности, термонуклеарные реакции превращения четырёх протонов, обладающих

---

<sup>1)</sup> См. также Яносси, Космические лучи, М., 1949; Д. В. Скобельцын, УФН 41, 331 (1950); Росси и Грейзен, Взаимодействие космических лучей с веществом, М., 1950; С. З. Беленький, Лавинные процессы в космических лучах, М.—Л., 1949; см. также Реферативные сборники, Изд. иностран. литер. № 2 и 11, 1950; № 9, 1951 г.

для этой цели достаточно высокой энергией при температурах порядка 20 миллионов градусов, в гелий при помощи углерода как катализатора являются основным источником энергии подобных звёзд.

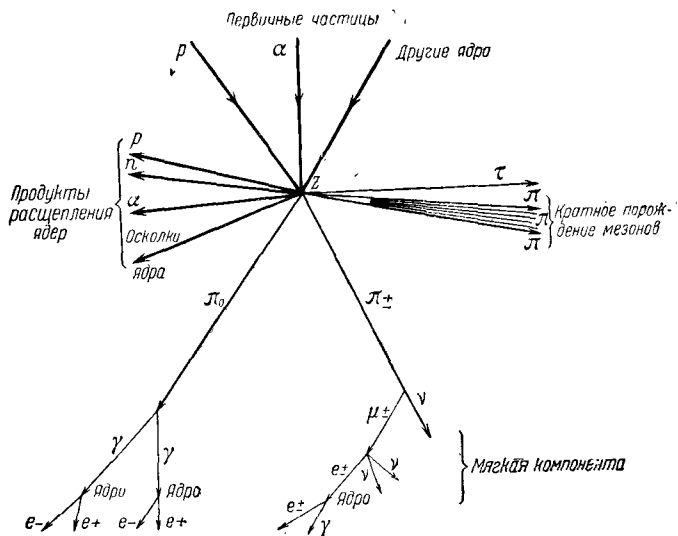


Рис. 3. Общая схема процессов в космических лучах.

Одна из первичных частиц, сталкиваясь с ядром  $Z$  какого-либо из атомов, входящих в состав атмосферы, может произвести его расщепление (осколки летят на схеме влево), а также привести к порождению различных мезонов (на схеме летят вниз и вправо). В свою очередь мезоны распадаются, и в результате дальнейших столкновений возникает каскад лёгких частиц и фотонов ( $e_-$ ,  $e_+$ ,  $\gamma$ ) мягкой компоненты.

В конце концов речь идёт о совокупности реакций, конечный результат которых запишется так:  $4p \rightarrow {}_2\text{He}^4 + 2e_+ + 2\gamma$ ; при этом выделяется около 30  $M\text{эв}$  энергии. Однако объяснить путём термонуклеарных реакций происхождение других элементов в условиях реальных звёзд не удаётся. Гипотезы, связанные с этой проблемой, можно разделить на три класса. К первому относятся «равновесные» теории, пытающиеся вывести значение концентраций изотопов из представления об их образовании в условиях

некоторого термодинамического равновесия при температурах порядка  $10^{10}$  градусов. Как известно, эта концентрация оказывается примерно одинаковой для изотопов в самых различных условиях (планеты, Солнце, звёзды и т. д.). Это обстоятельство указывает на примерную общность условий происхождения элементов в нашей части вселенной. В среднем распространённость элементов передаётся кривой, на которой логарифм концентрации убывает примерно линейно с ростом атомного номера до  $Z \sim 50$  (рис. 4); для более тяжёлых элементов концентрация убывает медленнее.

Кроме наиболее распространённого водорода, при этом имеет смысл рассматривать отдельно изотопы чётного числа протонов и нейтронов и изотопы других типов чётности, так как стабильность чётно-чётных ядер сама по себе в значительной мере объясняет их преимущественную распространённость. Наименее распространены нечётно-нечётные ядра<sup>1)</sup>. Кроме того, следует подчеркнуть наличие некоторого периодического хода на кривой распространённости, проявляющегося в преимущественном по сравнению с соседними избытке ядер с определёнными критическими, или, как ещё говорят, «магическими» числами протонов и нейтронов. Речь идёт прежде всего об изотопах с числом протонов и нейтронов: 2, 8, 20, 50, 82, 126 и некоторыми другими.

Некоторый успех равновесной теории происхождения элементов ограничен, однако, лёгкими и средними ядрами, так как согласно этой теории концентрация тяжёлых ядер должна была бы оказаться значительно меньше наблюдаемой.

Реакции спонтанного деления ядер урана и других, открытые Флеровым и Петряком вслед за обнаружением Ханом деления ядер под действием нейтронов, подсказы-

---

<sup>1)</sup> О распространённости элементов см. В. И. Вернадский, *Очерки геохимии*, 4 изд., М.—Л., Грозный—Новосибирск, 1943; Е. Ф. Ферман, *Основы геохимии* (в 4 томах), Л. 1934; V. M. Goldschmidt, *Matem.-Naturridense Klasse*, № 4 (1937) и обзоры: Н. Brown, *Rev. Mod. Phys.* 21, 625 (1949); D. Ter Haar, там же 22, 119 (1950); А. Alphaer, R. C. Herman, там же 22, 153 (1950).



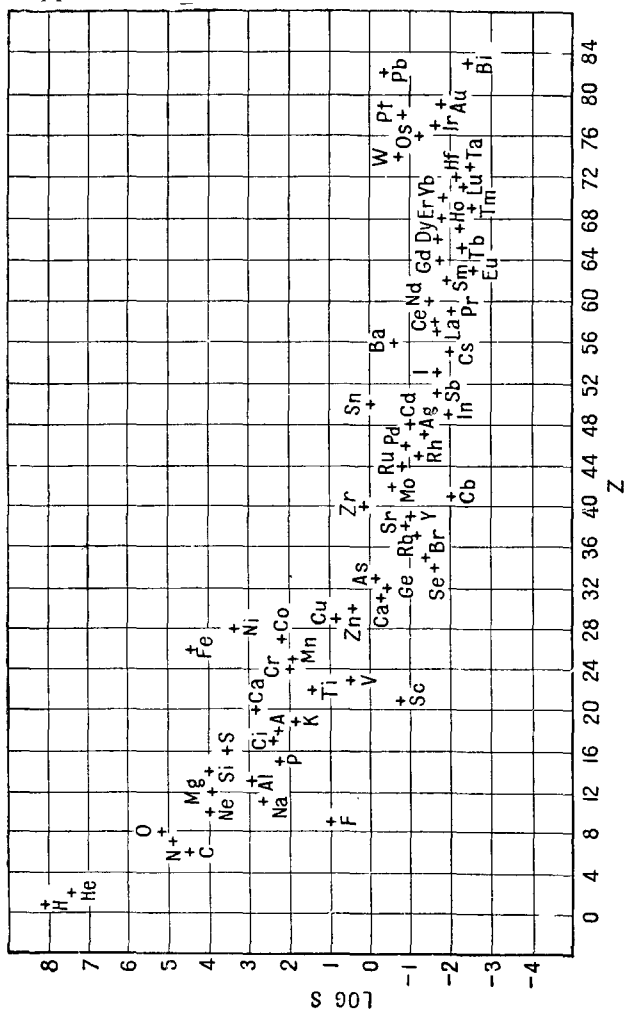


Рис. 4. Распространённость элементов.

На графике нанесены значения логарифма относительной распространённости элементов в виде функции от атомного номера.

Отчётливо заметна преимущественная распространённость лёгких элементов, элементов с чётным Z и максимумы для ряда элементов с критическими («магическими») значениями Z.

вают гипотезу о возможности происхождения элементов путём процессов типа деления некоторой большой порции вещества, находящегося в условиях, близких к ядерным<sup>1)</sup>. Возможно, гипотезы этого второго класса содержат долю истины.

В-третьих, недавно было обращено внимание на то, что ход кривой эффективных сечений по отношению к захвату нейтронов, изменяясь закономерно вдоль системы изотопов, испытывает ясно выраженные скачки, причём вероятности захвата оказываются наименьшими у ряда наиболее распространённых изотопов, например у изотопов с теми же числами нейтронов 50, 82, 126, о которых уже упоминалось выше. Это подсказывает мысль о большой роли, которую могли играть процессы последовательного прилипания нейтронов при образовании элементов. Учитывая наряду с этим процессы  $\beta$ -распада, ряд авторов пытался построить теорию происхождения элементов в неравновесных условиях. Не исключено, что теория захвата нейтронов правильно освещает ряд процессов, имевших место при образовании элементов. Несмотря на предварительный характер гипотез о происхождении элементов всех трёх классов («равновесной», «распадной» и «захватной»), эта важная проблема, по всей видимости, сдвинута сейчас с мёртвой точки<sup>2)</sup>.

Повидимому, нами установлен основной состав вещества в известной части вселенной. Отметим ещё, что плотность электромагнитного излучения в известной части вселенной на много порядков меньше плотности вещества, обладающего массой покоя. Насколько, однако, следует быть осторожным при подобных оценках, показывает примерный подсчёт энергии, уносимой нейтрино от Солнца в результате упомянутых выше реакций превращения водорода в гелий и ускользающей пока что от обнаружения, приводящей к неожиданно большому значению около 10% всей наблюдаемой энергии солнечного излучения.

<sup>1)</sup> M. Goerpert-Mayer and E. Teller, Phys. Rev. 76, 1226 (1949); см. также Д. Пиваненко и А. Зельманов, УФН 32, № 2—3 (1947).

<sup>2)</sup> См. Э. Ферми, Лекции по атомной физике, М., 1952.

Теория элементарных частиц позволила также подойти к вопросу о числе химических элементов. Фундаментальным фактом является открытие в последние годы, во-первых, последних недостающих элементов в менделеевской периодической системе (с номерами 43, 61, 85, 87) и, во-вторых, открытие трансурановых элементов с номерами 93, 94, 95, 96, 97, 98, продолживших менделеевскую периодическую систему. Так как устойчивость ядер не изменяется монотонно с ростом их заряда, возникает естественный вопрос о числе возможных элементов. Критическим номером будет примерно  $Z \sim 137$ , так как, во-первых, в подобных элементах энергия электронов на орбитах с малым радиусом станет достаточной для порождения пар электронов—позитронов в поле ядра своего же атома. Действительно, приравнивая радиус орбиты и комптоновскую длину волны, являющуюся критической для подобных процессов (поскольку при  $\Delta q \sim \frac{\hbar}{mc}$ ,  $\Delta p \gtrsim mc$ ,  $\Delta E \gtrsim mc^2$ ),

$$\frac{\hbar}{mZe^2} \sim \frac{\hbar}{mc},$$

получим указанный результат.

Наряду с этим существуют чисто ядерные причины, приводящие к сугубой неустойчивости систем из нейтронов и протонов, ввиду, главным образом, возможности спонтанного деления, примерно в области атомного веса  $A \approx 230—240$  (в качестве грубой прикидки). Любопытное замечание было сделано Чердынцевым, отметившим возможность с точки зрения существующих представлений об устойчивости ядер, обусловленной конкуренцией ядерных сил, сил поверхностного натяжения и кулоновских сил, существования ядер с атомным весом в области  $A \sim 1000$ , в которой ядра вновь будут устойчивы по отношению к спонтанному делению<sup>1)</sup>.

Перейдём теперь к элементарным частицам. При открытии электрона (Дж. Дж. Томсон, 1897) физика впервые

<sup>1)</sup> См. Я. И. Френкель, Принципы теории атомных ядер, М.—Л., 1950, стр. 136 и след.; В. В. Чердынцев, *Астрономический журнал*, вып. 1, 1 (1941).

установила существование одной из элементарных частиц. Сами же электроны, протоны, нейтроны дальнейшему дроблению на части (в обычном смысле слова) пока что не поддаются.

Одной из главных задач физики наших дней является построение теории всех элементарных частиц, в которой должна быть учтена возможность их превращения друг в друга.

В дальнейшем мы будем называть элементарными все частицы, не состоящие из каких-либо других известных частиц. Наряду с частицами будем всё время иметь в виду поля в узком смысле слова, с которыми сопоставляются кванты, лишённые массы покоя. Никаких недоразумений или сомнений различие элементарных частиц друг от друга, или от других видов вещества никогда не вызывало.

Вопрос о возможной структуре частиц будет затронут ниже в § 3.

В самом сжатом виде представление современной физики о веществе можно теперь сформулировать следующим образом. Вещество известной нам части вселенной состоит из элементарных частиц и полей следующих относительно немногих типов, которые разумно разбить на группы по значениям массы:

а) п о л я: 1) гравитационное поле, или сопоставленные слабому полю частицы—гравитоны (масса покоя у гравитонов отсутствует); 2) электромагнитное поле и сопоставленные ему частицы—фотоны (масса покоя отсутствует);

б) л ё г к и е ч а с т и ц ы («лептоны»): 3) электроны, 4) позитроны, 5) нейтрино (с окончательной достоверностью ещё не открытые). Массы электронов и позитронов с большой точностью равны. Масса нейтрино во всяком случае меньше 0,001 массы электрона, и, возможно, равна нулю:  $m_\nu < 0,001 m^1$ );

в) с р е д н и е ч а с т и ц ы мезонного типа (мезоны): 6)  $\rho$ -мезоны положительные и 7)  $\rho$ -мезоны отрицательные, 8)  $\pi$ -мезоны положительные и 9)  $\pi$ -мезоны отрицательные;

<sup>1)</sup> С r a n e, Rev. Mod. Phys. 20, 238 (1949).

10)  $\pi$ -мезоны нейтральные (нейтретто); 11) сейчас можно также утверждать о существовании более тяжёлых  $\tau$ -мезонов и  $V$ -частиц<sup>1)</sup>;

г) тяжёлые частицы (нуклеоны): 12) протоны, 13) нейтроны.

Повидимому, существуют и другие частицы мезонного типа, в частности с массой около  $600-700 m^2$ ).

Так как, несомненно, частицы не являются независимыми, то естественно задать вопрос о числе частиц и их связи друг с другом. Современная теория ещё не в состоянии определить число возможных элементарных частиц, предсказывать с достоверностью новые частицы или построить одни частицы из других. Прежде всего отметим, что релятивистская квантовая механика, классифицируя частицы по характеру волновых функций, тем самым указывает на возможность существования частиц скалярного, векторного, псевдоскалярного, псевдовекторного и тензорного типов, а также различных спиновых типов независимо от значения масс.

Некоторые частицы были предсказаны теоретически: позитроны (на основе квантового релятивистского уравнения Дирака; 1930), частицы мезонного типа (на основе

---

<sup>1)</sup> К сожалению, названия частицам даются сейчас довольно беспорядочно и в ряду обозначений  $\rho$ ,  $\pi$ ,  $\tau$ ,  $\chi$ ,  $V$ , ... не больше физического смысла и благозвучия, чем в названиях многих изотопов, которые были присвоены в годы открытия естественной радиоактивности в начале нашего века, или в названиях немалого числа химических элементов.

<sup>2)</sup> В связи с открытием мезонов разных масс следует напомнить дискуссию о серии гипотетических частиц «варитронов» с массами в диапазоне  $200-20\,000 m$ , существование которых утверждалось братьями Алихановыми в 1948—1950 гг. Однако недостаточно точные результаты того времени не позволили, как выяснилось в последующей дискуссии, обнаружить с достоверностью предполагавшиеся частицы [см. дискуссию о варитронах в ЖЭТФ 21, № 10 (1951): статьи Вернова, Добротина, Зацепина и братьев Алихановых]. В этой связи упомянем, что частицы мезонного типа слишком большой массы ( $M \gtrsim 1000$ ) не смогут уже переносить взаимодействие между нуклеонами, способное обеспечить наличие стабильных состояний, как видно из решения соответствующего шредингеровского уравнения или даже из простейшего борковского квантования [Д. И в а н е н к о и В. Р о д и ч е в, ЖЭТФ 9, 526 (1939)].

модели переноса ядерных сил полем, обладающим массой покоя; 1935), нейтрино (на основе закона сохранения энергии и теории  $\beta$ -распада; 1931). Менее ясно предугадывалось существование нейтрона. Современная теория предсказывает затем возможность существования антипротона отрицательного заряда и антинейтрона с обратным знаком магнитного момента. Не исключено существование антинейтрино наряду с нейтрино. Далее, неоднократно указывалось, но всё же не была доказана со всей убедительностью возможность наличия возбуждённых, неустойчивых состояний всех элементарных частиц с различными зарядами или спинами и со слегка отличными массами, например протонов двойного, тройного и т. д. заряда и протонов со спином  $3/2$ ,  $5/2$  и т. д., наряду с обычным протоном единичного заряда и спина  $1/2$  (см. § 3). Далее, современная теория не исключает, например, возможности существования сверхтяжёлых супрачастиц, с массами, в несколько раз превышающими массы нуклеонов, если стать на точку зрения полевой гипотезы массы и допустить, что масса этих супрачастиц может быть обусловлена полем нуклеонов<sup>1)</sup>.

Наконец, обратим внимание на гипотезу «слияния» де-Бройля, согласно которой частицы всех типов возникают в результате особого процесса из частиц спина  $1/2$ . Эту идею разумно дополнить гипотезой, что слияние в самом деле наступает с некоторой вероятностью при подходящих условиях, например в том случае, если ряд одинаковых частиц может испускаться одновременно в едином акте. Подобное положение вещей может иметь место при кратном порождении нескольких мезонов, возникающих за счёт энергии столкновения двух нуклеонов (см. § 6), или в процессах простого и двойного  $\beta$ -распада. Иными словами, мы можем предположить, что вместо 2, 3, ...,  $n$  мезонов при кратном порождении может испускаться один мезон с большей массой. Тогда энергия взаимодействия нуклеонов с полем  $n$  мезонов приобретёт модифицированный вид

$$g_n \Phi^n \rightarrow \bar{g}_1 \bar{\Phi},$$

<sup>1)</sup> Д. И в а н е н к о, УФН 32, № 3 (1947).

где  $\bar{\Phi}$  — волновая функция частицы, образовавшейся в результате слияния, а  $g_1$  — новая константа связи. Не исключено, что вообще более тяжёлые мезоны являются результатом слияния более лёгких (см. § 6). Аналогично этому можно ожидать в процессах  $\beta$ -распада появления слившихся частиц (не только с полуцелыми, но и целыми спинами) с массами, превышающими массу электрона, взамен испускания электрона и нейтрино («электрино») или двух электронов (тяжёлый электрон). Однако, ввиду меньшего значения константы самодействия, вероятность слияния в области электронных масс будет меньше, чем в случае мезонов.

В связи с предсказанием новых частиц отметим ещё любопытное исследование Дирака, указавшего на формальную возможность описания в рамках квантовой механики магнитных полюсов<sup>1)</sup>. Исходя из неоднозначности

фазы волновой функции  $\psi = \psi \frac{ie}{\hbar c} f$  (калибровочное преобразование второго рода), можно показать, что при обходе вокруг полюса  $f = 4\pi m$ , где  $m$  — величина магнитного «заряда» полюса. Для сохранения однозначности нужно положить

$$4\pi m \frac{ie}{\hbar c} = 2\pi i n$$

( $n$  — целое число), откуда

$$m = \frac{e}{2\alpha} n, \quad \text{или} \quad m \approx \frac{137}{2} ne = 68,5ne \quad \left( \alpha = \frac{e^2}{\hbar c} \right).$$

Обратно, если бы существовал магнитный полюс (монополь) Дирака, то элементарный электрический заряд равнялся бы

$$e = \frac{\hbar c}{2m} n.$$

Так как магнитная постоянная тонкой структуры  $\frac{m^2}{\hbar c} \approx 34$  гораздо больше обычной константы  $\alpha \approx \frac{1}{137}$ , то поведение

<sup>1)</sup> P. A. M. D i r a c, Proc. Roy. Soc. A. 133, 60 (1934); Phys. Rev. 74, 812 (1948).

подобного полюса сильно отличалось бы от поведения заряда.

Магнитные полюса, повидимому, не могут находиться в заметном количестве в космических лучах, так как, попадая на землю, они должны были бы нейтрализовать её магнитное поле, что не наблюдается.

Несмотря на указанные предсказания новых частиц, часто прекрасно оправдывающиеся, в данный момент приходится в основном считаться с реально наблюдаемыми элементарными частицами и предсказывать лишь те или иные отдельные новые частицы на основании существующей теории, не имея ещё возможности сколь-нибудь исчерпывающе решить общий вопрос о всевозможных типах частиц.

Перечислим теперь свойства частиц, которые позволяют объяснить их поведение в свободном состоянии, всевозможные взаимодействия, столкновения, рассеяние, образование стабильных и метастабильных систем и разнообразные превращения частиц.

В решении этой проблемы за последние годы достигнуты весьма большие успехи, и известные свойства частиц удалось свести к нескольким фундаментальным признакам, в значительной мере связанным между собой. Несмотря на то, что в данном параграфе мы стремимся по возможности ограничиться эмпирическими сведениями, для рассмотрения свойства частиц в особенности необходимо привлечь закономерности релятивистской квантовой механики (более подробное изложение последней будет дано в § 2).

Можно различать три типа величин, характеризующие основные свойства элементарных частиц:

1) собственная масса, определяющая основную индивидуальность частиц;

2) спин, также определяющий индивидуальность частиц, и тесно связанный с ним характер волновых функций, которым, в частности, обусловлены законы кинематики частиц, т. е. их движения, а также взаимодействия;

3) «заряды» в обобщённом смысле слова, определяющие величину взаимодействия данной частицы со всеми другими полями и частицами (электрический заряд, магнитный момент, ядерные мезонные «заряды»).



Подобное разделение условно по той причине, что свойства трёх типов величин довольно тесно связаны друг с другом. Например, нейтральные частицы описываются вещественными волновыми функциями, а заряженные — комплексными. Затем, характер волновой функции, т. е. её тензорная размерность, не только однозначно определяет значение спина, но и накладывает довольно узкие рамки на типы взаимодействия частиц и полей друг с другом. Далее, весьма возможно, что хотя бы часть собственной энергии (и тем самым массы) частиц имеет «полевой» характер, будучи обязана энергии порождённых ими полей, т. е. опять-таки связана с «зарядами». Иначе говоря, массы и «заряды», по всей вероятности, связаны между собою. Кроме того, масса играет роль заряда по отношению к гравитационному полю. Однако всё же приведённое разделение наилучше соответствует современным сведениям о частицах, поскольку, например, при данном спине  $1/2$  частицы могут иметь массы электрона, нейтрино, протона, нейтрона; вероятно,  $\mu$ -мезоны также относятся к частицам спина  $1/2$ . Одним и тем же электрическим зарядом обладают позитроны,  $\mu$ -мезоны,  $\pi$ -мезоны, протоны. Поэтому, в самом деле, указанные свойства приблизительно независимы.

Следует специально подчеркнуть отсутствие теории собственной массы и «зарядов», благодаря чему, как сейчас было указано, нужно быть очень осторожным в классификации свойств. В то время как ряд фундаментальных свойств частиц и полей достаточно выяснен (спин, характер волновых функций и связь между ними и статистикой ансамбля частиц), до сих пор мы не имеем теории электрического и мезонного «зарядов» и теории собственной массы. Современная физика ещё не только не в состоянии вывести конкретные значения масс частиц и значения их зарядов, но даже не может ещё вообще построить модель какой-либо конечной массы и модель заряда. В этом, бесспорно, заключается одна из наибольших трудностей и недостатков современной теории элементарных частиц наряду с отсутствием теории, позволяющей рассматривать частицы как компоненты единой системы (о трудностях теории и попытках их преодоления см. §§ 2 и 3).

После этих замечаний ясно, что мы не можем ещё сейчас произвести дальнейшую редукцию свойств частиц к какому-то другим ещё более фундаментальным свойствам. С другой стороны, большое число качеств частиц, которые недавно считались независимыми, удалось свести к указанным свойствам трёх классов. Сюда относятся в первую очередь статистические свойства совокупностей частиц. Выяснилось, что они полностью определяются значениями спина или характером волновых функций. Частицы целого спина (0, 1, 2, ...), описываемые скалярными, векторными, псевдоскалярными и другими волновыми функциями обычного тензорного характера не подчиняются запрету Паули и тем самым удовлетворяют бозевской статистике («бозоны»), согласно которой в каждом состоянии может находиться любое число частиц. С другой стороны, частицы полуцелого спина ( $1/2$ ,  $3/2$ , ...), волновые функции которых являются спинорами (тензорами ранга  $1/2$ ,  $3/2$ , ...), удовлетворяют принципу Паули и тем самым фермиевой статистике («фермионы»), согласно которой в каждом состоянии может находиться лишь одна частица с данным значением спина.

Значение спинов электрона, позитрона, протона, нейтрона равно  $\frac{1}{2} \frac{h}{2\pi}$ ; спин фотона равен  $\frac{h}{2\pi}$ , спин гравитона равен  $2 \frac{h}{2\pi}$ . Спины ряда мезонов также выяснены с большой достоверностью. Спин  $\pi$ -мезонов, по всей видимости, равен нулю,  $\rho$ -мезонов равен  $\frac{1}{2} \frac{h}{2\pi}$ . Отсюда вытекают статистические свойства этих частиц. Указанные значения спинов, со своей стороны, непосредственно вытекают из проверенного на опыте уравнения Дирака для электрона и позитрона и уравнений Максвелла для электромагнитного поля и непосредственно связаны, как уже отмечалось, с характером волновых функций.

Нулевое значение спина для  $\pi$ -мезона, точно так же, как и полуцелое значение спина для  $\rho$ -мезона, определяется из реакций их распада. Это согласуется с результатами опытов по рождению этих мезонов при столкновении нуклеонов или фотонов с нуклеонами.

Собственные магнитные моменты частиц также удаётся связать с их зарядами; по крайней мере, это можно утверждать относительно электронов и позитронов и отчасти протонов и нейтронов. При этом основная часть собственного магнетизма определяется в случае наличия электрического заряда значением спина, и его величина следует из квантового релятивистского уравнения движения данной частицы. Для электрона спиновый магнитный момент равен  $\mu_0 = \frac{eh}{4\pi mc} (0,927 \cdot 10^{-20} \text{ эрг} \cdot \text{гаусс}^{-1})$ . Дополнительные части магнитных моментов имеют различное происхождение. Во-первых, более точный учёт взаимодействия электрона с электромагнитным полем и полем пар электронов — позитронов показал, что электрон обладает дополнительным магнитным моментом, примерно равным 0,001 основного спинового магнитного момента. В согласии с опытом новейшая теория вакуума даёт для магнитного момента электрона значение

$$\mu_e = \mu_0 \left( 1 + \frac{\alpha}{2\pi} - 2,973 \frac{\alpha^2}{\pi^2} \right),$$

$$\alpha = \frac{2\pi e^2}{hc} = \frac{1}{137,02},$$

причём недавно вычисленная вакуумная поправка, пропорциональная  $\alpha^2$ , также подтверждена опытом<sup>1)</sup>. Во-вторых, виртуальная диссоциация нуклонов на другие нуклоны и  $\pi_{\pm}$ -мезоны приводит к тому, что магнетизм нуклонов отчасти обязан магнетизму заряженного мезонного поля. Отсюда возникает добавочный (не спиновый) магнетизм протонов и магнетизм незаряженных нейтронов. Добавочный магнитный момент протона будет равняться

$$\mu_p \approx \tau \frac{eh}{4\pi m_{\pi} c},$$

где  $\tau$  — доля времени, в течение которого протон в среднем находится в диссоциированном состоянии:

$$p \rightarrow \pi^+ + n.$$

<sup>1)</sup> S. Koenig, A. Prodell a. P. Kusch, Phys. Rev. 83, 687 (1951).

Из эмпирического значения магнитного момента протона

$$\mu_p = + 2,7925 \frac{eh}{4\pi Mc} \left( \frac{eh}{4\pi Mc} - \text{ядерный магнетон} \right)$$

получаем результат, что протон примерно  $\tau \approx 20\%$  времени находится в диссоциированном состоянии. Тот же порядок  $\tau$  получается для нейтрона, обладающего согласно эмпирическим данным магнитным моментом  $\mu_n = -1,913 \frac{eh}{4\pi Mc}$ , который опять-таки возникает благодаря виртуальной диссоциации на  $\pi$ -мезон и протон:

$$n \rightarrow \pi_- + p.$$

Любопытно, что эмпирические данные указывают на некоторое уменьшение мезонного магнетизма ядерных нуклонов по сравнению со свободными, что находится в соответствии с новыми идеями относительно ослабления сил благодаря учёту мезонной «диэлектрической» постоянной (см. §§ 3 и 6).

Отметим, что подобная виртуальная диссоциация должна, очевидно, сказаться на взаимодействиях протона и нейтрона с другими частицами. Действительно, электрические силы между электроном и протоном, как наглядно ясно, должны быть несколько ослаблены; вместе с тем весьма интересным образом предсказывается появление незначительной силы притяжения между электроном и нейтроном (подробнее см. § 7), существование которой подтверждено недавно на опыте. Грубая оценка силы притяжения  $e_- - n$  может быть произведена, если учесть, что диссоциированная подобным образом система имеет линейные размеры порядка  $\frac{h}{m_\pi c}$ . Поэтому энергия взаимодействия электрона с нейтроном, в основном сводящаяся к энергии его связи с точечным протоном, в примерном согласии с опытом будет по порядку равняться  $U \approx -\frac{0,2e^2}{h/m_\pi c}$  (что совпадает с энергией диполя, получившегося в результате диссоциации в поле электрона). Кроме того, следует отметить, что при рассеянии электронов столь высокой энергии, что электрон может проникать

внутри мезонного облака диссоциированной системы, эффективный заряд и магнитный момент протона оказываются согласно теории довольно значительно уменьшенными.

Важным новым основным свойством частиц оказался их мезонный, или ядерный квазизаряд, т. е. константа связи с мезонным полем. Мезонный «заряд» отражает существование мезонных полей и обусловленных ими специфических ядерных сил, не сводимых к электромагнитным или гравитационным. Ввиду наличия мезонных полей разных типов следует различать мезонные «заряды» по отношению к  $\pi$ -мезонному,  $\rho$ -мезонному и т. д. полям. Эмпирические данные о ядерных силах дают для  $\pi$ -мезонного «заряда» нуклонов значения  $g \approx 5 - 6e$  (в единицах обычного заряда электрона). «Заряд» же нуклонов по отношению к полю пар электронов—нейтрино равен  $g_F = 4,8 \cdot 10^{-48} \text{ эрг см}^3$  (Фермиевская константа) согласно результатам сравнения теории  $\beta$ -распада с опытом (см. § 6).

Возникает вопрос о специфических, не электрических квазизарядах электронов, позитронов, нейтрино,  $\pi$ -мезонов,  $\tau$ -мезонов,  $\rho$ -мезонов, обуславливающих связь их друг с другом и приводящих к их взаимным превращениям. Если  $\beta$ -распад заключался бы согласно гипотезе Юкава в распаде мезона, переносящего ядерные силы на электрон—нейтрино (или позитрон—нейтрино), то константы  $g$  и  $g_F$  были бы связаны с мезонным квазизарядом  $g'$  электронов и нейтрино соотношением

$$g_F = \frac{4\pi g g'}{\chi_0^2} \left( \chi_0 = \frac{m_\pi c}{\hbar} \right),$$

т. е.

$$g' \approx 10^{-6} e.$$

Однако  $\pi$ -мезоны, в основном переносящие ядерные силы, не распадаются на электрон—нейтрино. Поэтому сведение  $\beta$ -распада к другим более простым процессам следует произвести иначе или же вообще оставить в силе феноменологическую прямую связь нуклонов с полем пар лёгких частиц по Ферми (см. § 6).

С другой стороны, очевидно, трудно согласиться с наличием большого числа независимых квазизарядов

по отношению ко всем возможным полям, не пытаясь установить между ними тех или иных соотношений и не сводя число независимых зарядов к минимуму. В этом направлении проделана лишь предварительная работа. Отметим, например, небезинтересное предложение связать основными константами следующие частицы: 1) нуклеоны— $\pi$ -мезоны («заряд»  $g$  из модели ядерных сил), 2) пары нуклеонов с парами электрон (или позитрон) плюс нейтрино (или антинейтрино) (константа Ферми  $\beta$ -распада  $g_F$ ), 3) пары нуклеонов с парами частиц  $\mu$ -мезон плюс нейтрино (константа  $g'_F$ ), определяемая по захвату отрицательных  $\mu$ -мезонов нуклеонами, 4) пары лёгких частиц ( $e, \nu$ ) с парами мезон—нейтрино ( $\mu - \nu$ ) (константа  $g''_F$ , определяемая из распада  $\mu$ -мезонов). При этом любопытным образом все три константы связи пар частиц полуцелого спина с парами полей других частиц полуцелого спина оказываются одного и того же порядка:

$$g_F \approx g'_F \approx g''_F,$$

так что не исключено и точное равенство этих констант. Отсюда вытекает заманчивая гипотеза о наличии константы универсальной связи пар спинорных полей друг с другом<sup>1)</sup>.

В ряду основных свойств частиц мы подчеркнули наличие волновых функций соответствующего типа с тем или иным числом компонент (спинорных, векторных, скалярных и т. д. функций). Более наглядно говоря, речь идёт о наличии квантовых и, тем самым, своеобразных волновых свойств у всех частиц, наиболее ярко проявляемых в опытах с диффракцией электронов, протонов, нейтронов. Значение квантовых законов, так же как и релятивистских, универсально. При этом те или иные частицы подчиняются несколько различным формам квантовых закономерностей, в зависимости от значений их спинов, или, точнее, в зависимости от характера их волновых функций (спинорного, векторного и т. д.). Более подробное изложение этих вопросов мы выделяем в специальный пункт, посвящённый релятивистской квантовой механике (§ 2).

<sup>1)</sup> J. T i o m p o a. J. A. W h e e l e r, Rev. Mod. Phys. 21, 144, 153 (1949).

Отметим в заключение обзора основных свойств, что спонтанный распад частиц с превращением их в другие частицы и поля является весьма характерным их вторичным свойством, обязанным связи частиц друг с другом. Например, свободный нейтрон спонтанно превращается в протон, электрон и нейтрино со средним временем жизни  $\tau_n = 12,8$  мин. Это представляет собою простейший пример  $\beta$ -распада:  $n \rightarrow p + e_- + \nu$ .

Точно так же как вероятность излучения фотона при переходе электрона из одного атомного состояния в другое определяется константой связи его с электромагнитным полем, т. е. зарядом  $e$ , вероятность порождения электрона и нейтрино при переходе нуклона из возбуждённого нейтронного в нижнее более устойчивое протонное состояние будет определяться константой связи нуклонов с электронно-нейтринным полем  $g_F$ .

Ввиду того, что, повидимому, ядерный  $g$ -заряд сохраняется, возможны лишь превращения нуклонов друг в друга, но не распад, например, протона и нейтрона на электроны, позитроны, нейтрино. Все известные мезоны являются нестабильными и спонтанно переходят друг в друга и в другие частицы по реакциям, указанным выше. Другие частицы превращаются друг в друга не спонтанно, но при столкновениях, как, например, электрон и позитрон в фотоны:

$$e_- + e_+ \rightarrow \begin{cases} 2\gamma & \text{при антипараллельной ориентации спинов,} \\ 3\gamma & \text{при параллельной ориентации спинов.} \end{cases}$$

Таким образом, вполне стабильных, не способных к превращению частиц или полей не существует. Этот вывод приобретёт ещё более широкое значение, когда будут доказаны предсказываемые теорией превращения с участием гравитационного поля.

Целесообразно теперь для ясности привести таблицу частиц и их основных свойств. При этом речь идёт, конечно, лишь о сообщении эмпирических данных и теоретических закономерностей в более или менее удобной форме, но далеко ещё не о составлении какой-либо закономерной системы частиц.

Таблица элементарных частиц

Название частицы или поля, год открытия	Собственная масса	Тип волновой функции	Спин в еди- ни- цах $\hbar$	Стати- стика
Гравитационное по- ле, гравитоны	0	Симметрич- ный тензор второго ранга	2	Бозе
Электромагнитное поле (фотоны)	0	вектор	1	Бозе
Нейтрино	$m_\nu < 0,001 m$	} Спинор	$\frac{1}{2}$	Ферми
Электрон (1897)	$m = 9,106 \cdot 10^{-28} e$			
Позитрон (1932–1933)	$m^1$			
$\mu_{\pm}$ -мезоны (1937)	$m_\mu \approx 215 m$	Спинор	$\frac{1}{2}$	Ферми
$\pi_{\pm}$ -мезоны (1947)	$m_\pi \approx 271 m$	} Псевдо- скаляр	0	Бозе
$\pi_0$ -мезоны (1950)	$m_{\pi_0} \sim 261 m$		0	Бозе
$\tau$ -мезоны (1946)	$m_\tau \sim 900 m$			Бозе?
V-частицы (1947)	$m_V \approx 2200 m$ или $\approx 900 m$	Спинор?	?	Ферми?
Протон (1911)	$M_p = 1836,5 m$	Спинор	$\frac{1}{2}$	Ферми
Нейтрон (1932)	$M_n = 1839 m$	Спинор	$\frac{1}{2}$	Ферми

<sup>1)</sup> Упомянем недавние опыты [J. W. M. Du Mond, Phys. предварительная интерпретация которых указывает, что  $m_e \neq m_p$ . тировать разницу масс ( $m_e - m_p$ ) с полевой точки зрения (см. §§ 3 и 2) стали бы неравноправны ( $e_+$  может перейти в  $\nu$ , испустив виртуально  $s k e r$ , Zs. f. Naturforsch. 6a, 484 (1951)].



и полей (по данным на 1951 г.)

Электрический заряд	Магнитный момент	Мезонные заряды	Время жизни
0	0	0	$\infty$
0	0	0	$\infty$
0	$< \frac{1}{10\,000} \mu_{el}$	} $g'$	$\infty$
$-e = -4,802 \cdot 10^{-10}$ эл. ст. ед.	$\mu_{el} = 1,001145 \frac{eh}{4\pi mc}$		$\infty$
$+e$	$ \mu_{pos}  =  \mu_{el} $		$\infty$
$\pm e$	$\approx \frac{eh}{4\pi m_{\mu} c} ?$	} $g''$	$2,15 \cdot 10^{-6}$ сек.
$\pm e$	$\frac{eh}{4\pi m_{\pi} c} ?$		$2 \cdot 10^{-8}$ сек.
0	$? ?$		$\sim 5 \cdot 10^{-14}$ сек.
$\pm e, 0$	$? ?$		$\sim 10^{-10}$ сек.
$\pm e, 0 ?$	$? ?$	$?$	$10^{-10}$ сек.
$+e$	$+2,7925 \frac{eh}{4\pi Mc}$	$g_{\pi} \approx 5 - 6e$	$\infty$
0	$-1,913 \frac{eh}{4\pi Mc}$	$g_{\pi} \approx 5 - 6e$	12,8 мин.

Rev. 81, 468 (1951), Hedgan a. Lind, ib. 82, 126 (1951)], Этот результат можно было бы попытаться понять, если интерпретировать и допустить отсутствие антипротонов. Тогда электроны и позитроны пары  $p+n; e_{-}$  был бы лишён аналогичной возможности). [См. Sale-

в) **Попытки построения единой теории.** Успехи тех или иных разделов физики довольно естественным образом приводили к выдвиганию различных программ единого описания вещества. Так, например, успехи классической ньютоновской механики XVII и XVIII веков привели к механицизму, покоившемуся на убеждении, что все явления можно свести к механическим; иначе говоря, всё вещество свести к каким-то частицам, действующим друг на друга по законам мгновенного действия (дальнего действия) с силами, зависящими только от расстояния между частицами, которые движутся по уравнениям классической механики. Однако программа построения универсальной механической картины мира не удалась и не могла удалась, поскольку в действительности вещество отнюдь не может быть сведено к частицам, обладающим массами покоя, к которым только и могут быть в известном приближении применены уравнения механики.

Наряду с ними имеются электромагнитные и гравитационные поля, подчиняющиеся законам другого типа. В дальнейшем выяснилось, что сами механические уравнения частиц при больших скоростях должны иметь не классический, ньютоновский, но релятивистский вид. Было также показано, что мгновенного действия на расстоянии не существует, что все взаимодействия между телами распространяются со скоростью не выше световой. Наконец, оказалось, что законы движения и взаимодействия имеют квантовый характер, проявляющийся для атомных частиц, поведение которых во многом резко отличается от неквантового, механического. При всём том, потеряв универсальный характер, уравнения ньютоновой классической механики были утверждены в качестве законных приближённых и, при указанных ограничениях, действительно всеобъемлющих законов природы. Глубокая философская критика механицизма была дана Лениным в его основоположном труде «Материализм и эмпириокритицизм».

Попытки объяснить все явления природы на базе электромагнитных полей и электрических зарядов возникли в конце XIX—начале XX веков под влиянием успехов классической электродинамики. При этом удалось объе-

динить электрические, магнитные, световые явления как проявления единого электромагнитного поля, порождаемого заряженными или намагниченными телами и в свою очередь воздействующего на них. В более или менее явной форме подобной программы универсальной электромагнитной картины придерживались многие учёные конца XIX и начала XX века (например, Дж. Дж. Томсон, Лоренц, Умов). Программа построения электромагнитной картины мира, стимулируя сведения всевозможных явлений к электромагнитным, помогла отыскивать влияние электронов и электромагнитных сил в различных процессах и сыграла прогрессивную роль.

Кульминационным пунктом разработка электромагнитной программы достигла после построения специальной теории относительности, когда электрическое и магнитное поля были закономерно объединены в электромагнитное поле, описываемое единым тензором, и было выяснено фундаментальное значение передачи сигналов и взаимодействий с конечной скоростью. Справедливая критика механистической программы со своей стороны содействовала успехам электромагнитной теории. Однако при этом также не удалось избежать другой крайности, и были предприняты попытки не только свести все виды вещества к зарядам и электромагнитному полю, но даже построить чисто полевую «унитарную» электромагнитную теорию, выводя все заряды из поля (см., например, работы Ми). Программа построения электромагнитной картины вещества не удалась и, как мы сейчас хорошо понимаем, не могла удалась даже при дальнейшем обобщении электродинамики квантовым путём.

В самом деле, существуют виды вещества, лишённые электрического заряда, например нейтроны, нейтральные  $\pi_0$ -мезоны и нейтрино. Не исключено существование и других нейтральных частиц. Хотя нейтроны и, вероятно, все другие нейтральные частицы «намагничены», т. е. обладают собственными магнитными моментами, однако ясно, что подобный магнетизм играет совершенно побочную роль в их структуре и собственной энергии. Кроме того, наряду с электромагнитным полем существует поле гравитационное, никак не сводимое к предыдущему,

а при изучении атомных ядер открыто новое особое ядерное поле, обеспечивающее силы притяжения протонов и нейтронов друг с другом в ядрах. Ядерное поле также не сводится к электромагнитному или гравитационному и в излучённом, свободном виде представляется в виде потока частиц мезонов (в основном заряженных и нейтральных  $\pi$ -мезонов). Конечно, было бы также нелепо пытаться, например, свести все виды вещества к новому мезонному полю.

Независимо от неудачи программы универсальной электромагнитной теории вещества попытка получения зарядов из поля (полевая теория массы электрона) также не удалась. Сейчас ясно, что эта программа полной редукции частиц к полю во всяком случае не может удалиться в рамках обычной линейной теории без дополнительных её модификаций и обобщений<sup>1)</sup>. Хотя мы не имеем окончательного доказательства невозможности построения чисто полевой теории масс частиц при помощи каких-то обобщённых уравнений, во всяком случае следует учесть, что нельзя свести энергию электрона к чисто электромагнитной, не учитывая при этом мезонного, гравитационного и других полей. Следует отметить, что новейшее развитие квантовой электродинамики и теории вакуума (см. § 2) отводит «полевой» части собственной массы частиц более второстепенную роль наряду с какой-то основной, «затравочной» массой, интерпретация которой пока что недоступна теории.

Следующей, третьей в исторической последовательности, серьёзной попыткой построения единой физической картины материи явилась серия геометрических единых теорий поля. Программа геометризованной картины материи была навеяна успехами теории тяготения, в которой гравитационное поле, как уже указывалось, описывается геометризованными величинами. При этом оказалось необходимым применить в физике одну из неевклидовых геометрий, открытых Лобачевским, именно риманову геометрию пространства переменной кривизны, характеризуемую, во-первых, интервалом с симметричным метрическим тензором

---

<sup>1)</sup> См. ниже § 3 и «Классическая теория поля», § 32, а также Д. И. Блохинцев, УФН 42, 76 (1950); 44, 104 (1951); Я. И. Френкель, там же, стр. 69.

$g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$  и, во-вторых, определённым законом параллельного переноса векторов из точки в точку, который характеризуется симметричными символами Кристоффеля (см. § 4):

$$\Gamma_{\nu, \rho}^{\mu} = \Gamma_{\rho, \nu}^{\mu}.$$

Поскольку все 10 компонент  $g_{\mu\nu}$  пошли на объяснение десяти компонент тензора гравитационного поля  $\Phi_{\mu\nu}$

$$\Phi_{\mu\nu} \equiv g_{\mu\nu},$$

то ясно, что, желая придать и электромагнитному полю геометрическое толкование, необходимо как-то выйти за рамки римановой формы геометрии кривых пространств. Для этой цели Вейль, Эддингтон, Эйнштейн, Схоутен и другие математики и физики, начиная с 1918 г., предлагали множество неримановых геометрических схем, пытаясь так или иначе связать добавочные величины с компонентами электромагнитного поля. Для этой цели либо менялось выражение интервала, например, вводились несимметричные компоненты  $g_{\mu\nu} \neq g_{\nu\mu}$ , либо изменялся закон параллельного переноса, в котором, например, символы Кристоффеля также теряли свою симметрию и т. д. В ряде обобщений во главу угла ставилась даже не метрика, но геометрия аффинной связности с её законом параллельного переноса. Следует со всей определённостью заявить, что все эти попытки построения геометризованной единой теории поля не удались. Неудачность всех подобных попыток, с одной стороны, и успехи квантовой физики атома и атомного ядра—с другой, отвлекли после 1926—1932 гг. внимание науки от геометрических единых теорий.

Причины неудач геометрической единой теории поля определяются двумя обстоятельствами. Во-первых, все попытки вывести квантовую теорию или теорию электрона и других частиц из той или иной классической теории поля, сформулированной в данном случае геометрическим образом, очевидно, невозможны. В классических уравнениях отсутствует квантовая постоянная  $h$ , и заменить её какой-либо комбинацией имеющихся констант, т. е. скоростью света  $c$  и константой тяготения  $\kappa$ , нельзя. Во-вторых, неудача классической единой теории в попытках

объединения геометризованной теории тяготения с электродинамикой на неквадратной базе путём обобщения римановой геометрии происходит, очевидно, из-за того, что риманова геометрия в весьма хорошем приближении соответствует действительности, и отход от неё не улучшает, а ухудшает согласие теории с опытом.

В настоящее время при построении физической картины материи (атомная квантовая релятивистская теория, — четвёртая в исторической последовательности после механической, электромагнитной и геометрической) следует, очевидно, отказаться как от попытки сведения вещества к одному какому-либо типу (гравитационному, электромагнитному, мезонному полям), так и от ограничений узкими рамками механической, полевой, либо геометризованной теории. При этом разумно пытаться строить «генеральную» теорию всех частиц и полей, объединяя их тем или иным, пока что гипотетическим образом, исходя из всеобщей превращаемости элементарных частиц и полей друг в друга. Хотя мы далеко ещё не имеем общей теории частиц и полей, возможность и желательность скорейшего её построения всё более выясняется в самое последнее время. Не исключено, например, что удастся все или большинство известных частиц свести к простейшим, спинорным частицам полуцелого спина. В этой связи отметим гипотезу де-Бройля, пытающегося связать элементарные частицы, допустив, что более сложные получаются из простейших путём особого «слияния», при котором волновые функции частиц оказываются произведениями простейших спинорных функций частиц спина  $\frac{1}{2} \left( \frac{h}{2\pi} \right)$ , т. е. электронов, позитронов, нейтрино.

Фотон следует гипотетически представлять себе построенным из пар нейтрино. Слияние, на наш взгляд, возможно при нелинейном обобщении теории. Таким образом, можно попытаться положить в основу нелинейное уравнение некоего «мирового» спинора. Другие попытки построения современной общей теории частиц будут рассмотрены ниже (§ 3).

В заключение следует отметить, что развитие науки в направлении построения объединённой теории частиц,

связанных взаимными превращениями, соответствует принципам философии диалектического материализма.

Предвидя гениальным образом дальнейшую смену электромагнитной картины мира, наиболее полно отражавшей состояние физических знаний в начале XX века, какой-то иной, более совершенной, но также приближённой, Ленин писал: «Это, конечно, сплошной вздор, будто материализм утверждал «меньшую» реальность сознания или обязательно «механическую», а не электромагнитную, не какую-нибудь ещё неизмеримо более сложную картину мира, как *движущейся материи*»<sup>1)</sup>.

## § 2. Релятивистская квантовая механика

**а) Основы теории.** До сих пор мы сообщали эмпирические сведения об элементарных частицах; разобраться в них без помощи квантовой, притом, вообще говоря, релятивистской механики было бы, однако, невозможно. Резюмируем основные положения релятивистской квантовой механики, иначе говоря, квантовой релятивистской теории поля (отсылая за подробностями к ч. 1 настоящей книги)<sup>2)</sup>.

Уравнения движения точечной массы классической механики, как известно, имеют вид

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F}, \quad \text{где } \mathbf{p} = m_0 \mathbf{v}, \quad \mathbf{F} \text{ — сила.} \quad (2,1)$$

Уравнения движения релятивистской квантовой механики имеют тот же вид, где, однако,  $\mathbf{p} = \frac{m_0 \mathbf{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ , а сила

для случая, например, электромагнитного поля (лоренцова сила)

$$\mathbf{F} = e\mathbf{E} + \frac{e}{c} [\mathbf{v} \mathbf{H}].$$

Законы классической механики применимы для описания движения всех тел при двух условиях: 1) скорость

<sup>1)</sup> Ленин В. И., Материализм и эмпириокритицизм, Госполитиздат, 1951, стр. 263.

<sup>2)</sup> См. также «Классическая теория поля», § 23, В. Паули, Релятивистская теория элементарных частиц, М., 1947; Г. Вентцель, Введение в квантовую теорию волновых полей, М.—Л., 1947.

движения должна быть малой по сравнению со скоростью света,  $v \ll c$ , 2) радиус орбиты, или соответственный характерный, размер области, в которой происходит процесс, должен быть велик по сравнению с длиной де-бройлевской волны,  $R \gg \lambda$  ( $\lambda = \frac{h}{mv}$ ). Это последнее условие эквивалентно требованию, чтобы «действие», рассчитанное для данного процесса (размерность: энергия  $\times$  время), было значительно больше планковской постоянной  $h$  (квант действия). Законы неквантовой, но релятивистской механики, в которой снимается первое ограничение, тоже применимы к любым телам.

Основное уравнение Шредингера (1926) нерелятивистской квантовой механики, описывающее распространение и распределение де-бройлевских  $\psi$ -волн, можно интерпретировать как операторную запись выражения  $E = \frac{p^2}{2m} + V_{\text{pot}}$ ; оно имеет вид

$$\left( E - \frac{p^2}{2m} - V \right) \psi = 0, \quad (2,2)$$

где  $E = -\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial t}$ ,  $p_x = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x}$  и т. д. Для свободного движения ( $V = 0$ ), когда  $\psi = Ae^{-\frac{iEt}{\hbar} + \frac{i(pr)}{\hbar}}$ , отсюда получаем известное соотношение между длиной волны и импульсом:

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv}.$$

Уравнение Шредингера квантовой, но нерелятивистской механики, в которой снимается второе ограничение, также универсально в том смысле, что оно априори применимо ко всем частицам и системам (например, независимо от их спина). Однако практически, как известно, квантовую механику имеет смысл применять лишь для тел малой массы, т. е. для элементарных частиц, ядер, атомов, молекул.

Наконец, в случае отсутствия обоих ограничений следует применять уравнения релятивистской квантовой механики, в которой движение частиц и систем описывается при помощи волновых функций, зависящих от значений спина частиц.



Простейшее уравнение релятивистской квантовой механики, установленное Клейном (1926), для свободного поля имеет вид

$$\left(\frac{E^2}{c^2} - p^2 - m^2c^2\right)\psi = 0, \quad (2,3)$$

где операторы  $E$ ,  $p_x$ ,  $p_y$ ,  $p_z$  имеют указанный выше смысл. Отсюда можно перейти в случае малых скоростей к уравнению Шредингера или для центра тяжести волнового пакета к неквантовому уравнению движения классической механики. Однако это уравнение применимо лишь для скалярных или псевдоскалярных функций  $\psi$ , а для отдельных компонент других релятивистских волновых функций имеет место лишь в случае свободного движения.

Частицы спина 0 описываются скалярными, либо псевдоскалярными  $\psi$ -функциями, спина 1 — векторами либо псевдовекторами, спина 2 — тензорами 2-го ранга; частицы полуцелого спина  $1/2, 3/2, \dots$  описываются спинорами (т. е. полу векторами, или тензорами половинного ранга) и полиспинорами нечётного ранга, являющимися своеобразными тензорами полуцелого ранга.

Наличие нескольких компонент у волновой функции позволяет описывать поляризационные свойства полей, как это имеет место в случае электромагнитного поля. Для соответствующих квантов полей, т. е. частиц, поляризация будет соответствовать той или иной ориентации спиновых осей.

Значение спина  $s$  связано с числом компонент  $\psi$ -функции  $n$  соотношением  $n = 2s + 1$ . Тип волновых функций различных элементарных частиц, указанный в таблице § 1, является, с точки зрения нынешней релятивистской квантовой механики, наиболее важным их признаком. Электрически заряженные частицы описываются комплексными, нейтральные — вещественными функциями. Перемена значений масс и «зарядов» не изменяет существенно уравнений движения с точки зрения современной теории.

Зная значение спина и тип волновой функции, можно составить соответствующее квантовое уравнение движения сначала для свободного поля, а затем для случая наличия взаимодействия со всеми иными полями. Проще и целесо-

образнее всего поставить во главу угла релятивистской квантовой теории вариационный принцип с соответственной лагранжевой функцией (лагранжианом), как это делается и в неквантовой механике и в классической электродинамике.

Лагранжева функция может быть использована не только для вывода уравнений поля, но также для получения всех основных величин, характеризующих поле: тензора плотности энергии  $T_{\alpha\beta}$ , вектора плотности тока  $S_\alpha$ , импульсов, канонически сопряжённых волновым функциям, рассматриваемым как обобщённые координаты, выражений момента количества движения и спина поля и других. Существенная роль лагранжевой функции вариационного принципа стационарного действия связана также с наличием важной теоремы (Гильберта—Нетер), гласящей, что каждой непрерывной группе преобразований, оставляющих лагранжиан инвариантным, соответствует некоторый закон сохранения. Эта связь законов сохранения с инвариантными свойствами того или иного лагранжиана имеет место не только в релятивистской квантовой механике, но и в электродинамике и классической механике. В дальнейшем мы имеем в виду квантовую релятивистскую теорию поля.

Фундаментальные свойства однородности и изотропности пространства и времени связаны с инвариантностью лагранжианов относительно соответственных групп преобразований и, следовательно, с определёнными универсальными законами сохранения. Инвариантность относительно смещений отсчётов координат связана с сохранением количества движения, инвариантность относительно смещений отсчётов времени — с сохранением энергии. Инвариантность лагранжиана относительно вращений связана с сохранением момента количества движения, инвариантность относительно лоренцевых преобразований связана с обобщённым законом сохранения центра тяжести. Инвариантность относительно калибровочных преобразований электромагнитных потенциалов (первого рода) связана с сохранением вектора заряда-тока.

Имея волновые  $\psi$ -функции определённого типа, ещё невозможно без добавочных ограничений построить реля-

тивистскую волновую теорию данного поля. При условии выполнения требований инвариантности относительно указанных групп преобразований имеются ещё разнообразные дополнительные условия, которые можно разбить в основном на три класса.

Во-первых, вся современная теория поля, за исключением уравнений гравитационного поля, выходящих за рамки приближения слабого поля, ограничивается линейными уравнениями. При этом, однако, не следует забывать, что ввиду взаимного превращения частиц и полей сама квантовая теория с необходимостью приводит к ряду нелинейных эффектов и соответственным незначительным для всех известных случаев поправкам в уравнениях. Типичным примером является рассеяние света на свете, которое должно иметь место благодаря возможности превращения фотонов в электроны — позитроны (см. «Классическая теория поля», § 32):

$$\gamma' + \gamma'' \rightarrow e_- + e_+ \rightarrow \gamma''' + \gamma''''.$$

Однако правдоподобно, что роль нелинейных уравнений будет значительной в теории, объединяющей разные поля (подробнее см. § 3) или при решении проблемы структуры частиц. Ограничение линейными уравнениями означает в известной мере пренебрежение весьма высокими значениями напряжённостей полей.

Во-вторых, современная теория построена при ограничении низшей возможной степенью производных в тех или иных уравнениях. Например, в уравнениях Максвелла нет членов со вторыми производными от полей, т. е. с третьими производными от потенциалов, являющихся волновыми функциями. Точно так же во всех других уравнениях полей нет членов с производными выше второй. Это означает недостаточно полный учёт возможного влияния высоких частот. Известный успех обобщения уравнений на высшие производные при устранении различных бесконечностей (регуляризация), делает правдоподобным необходимость подобного обобщения, например включения в уравнения электродинамики членов со вторыми производными типа Боппа-Подольского (см. «Классическая теория поля», § 33 и Дополнение, а также ниже, § 3).

Кроме того, в существующей теории имеется ряд других, естественных, ограничений, снятие которых связано с введением нелокальных полей, с отказом от гамильтонова формализма и т. д. (см. § 3).

При указанных ограничениях лагранжева функция и соответственные уравнения свободного поля в рамках релятивистской квантовой теории получаются однозначно для волновых функций того или иного типа, и позволяют описывать весьма большой круг явлений. Выпишем несколько основных примеров, которые нам понадобятся в дальнейшем (см. также первую часть).

1) Спин 0; скалярное  $\varphi$ . Лагранжиан нейтрального поля (точнее, плотность лагранжевой функции)

$$L = -\frac{1}{8\pi}(\varphi_{,\nu}\varphi_{,\nu} + k_0^2\varphi^2), \quad \varphi_{,\nu} = \frac{\partial\varphi}{\partial x_{\nu}}. \quad (2,4)$$

Отсюда при помощи вариационного принципа

$$\delta I = 0, \quad I = \int L d^4x,$$

где вариация на границах предполагается равной нулю, получаем уравнение Клейна для свободного поля

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t^2} - k_0^2\right)\varphi = 0 \quad \left(k_0 = \frac{mc}{\hbar}\right). \quad (2,5)$$

Момент, канонически сопряжённый координате ( $q = \varphi$ ), равен

$$p = \frac{\partial L}{\partial\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)} = \frac{1}{4\pi c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t} \quad (2,6)$$

(см. «Классическая теория поля», § 20 и 45). Отсюда канонический тензор плотности энергии равен

$$T_{\alpha\beta} = \frac{\partial L}{\partial\left(\frac{\partial q}{\partial x_{\alpha}}\right)}\frac{\partial q}{\partial x_{\beta}} - \delta_{\alpha\beta}L = -\frac{1}{4\pi}\frac{\partial\varphi}{\partial x_{\alpha}}\frac{\partial\varphi}{\partial x_{\beta}} - \delta_{\alpha\beta}L. \quad (2,7)$$

Энергия поля

$$W = \int T_{44} d\tau = \frac{1}{8\pi} \int \left\{ \left(\frac{\partial\varphi}{c\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2 + k_0^2\varphi^2 \right\} d\tau. \quad (2,8)$$

В случае свободного псевдоскалярного поля для псевдоскаляра получим то же уравнение (2,5) (см. «Классическая теория поля», § 46).

2) Спин 1; векторная  $\psi$ -функция или потенциал  $A_\mu$  ( $\mathbf{A}$ ,  $\varphi$ ). Лагранжиан вещественного поля

$$L = -\frac{1}{16\pi} H_{\mu\nu} H_{\mu\nu} - \frac{k_0^2}{8\pi} A_\mu A_\mu \left( H_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu} \right). \quad (2,9)$$

Уравнения Прока для свободного поля имеют вид:

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{H} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + k_0^2 \mathbf{A} = 0, \quad \text{div } \mathbf{E} + k_0^2 \varphi = 0, \\ \mathbf{E} + \text{grad } \varphi + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = 0, \quad \mathbf{H} - \text{rot } \mathbf{A} = 0. \end{aligned} \quad (2,10)$$

При  $k_0 = 0$  (масса покоя квантов поля исчезает) получаем максвелловы уравнения электродинамики. По ряду соображений для последних разумно взять также следующий лагранжиан (см. ч. 1), отличающийся от предыдущего расходимостью:

$$L = -\frac{1}{16\pi} H_{\mu\nu} H_{\mu\nu} - \frac{1}{8\pi} (\nabla_\nu A_\nu)^2.$$

3) Спин  $1/2$ ,  $\psi$ -спинор; лагранжиан  $L = \psi^+ D\psi$ . Уравнение Дирака

$$D\psi \equiv \left( \sum_{\nu=1}^4 \gamma_\nu \frac{\partial}{\partial x_\nu} + k_0 \right) \psi = 0, \quad (2,11)$$

где  $\gamma_\nu$  — четырёхрядные матрицы Дирака.

4) Спин 2; тензор второго ранга  $h_{\mu\nu}$  подчиняется уравнениям, совпадающим с линейным приближением общих нелинейных гравитационных уравнений Эйнштейна.

Установлением лагранжиана, уравнений поля, моментов, тензора энергии, спина и других основных величин завершается первый, в известной мере классический, этап построения теории поля, поскольку константа  $k_0$  может приниматься как заданная величина без установления её связи с массой частиц и постоянной Планка  $\left( k_0 = \frac{mc}{\hbar} \right)$ .

Второй этап заключается во включении взаимодействия в лагранжиан или непосредственно в уравнения поля.

С физической точки зрения это является одним из важнейших пунктов. Однако замечательным образом оказывается, что решение подобной задачи, в сущности, уже находится в наших руках и может быть дано на основе тех же принципов, которые приводят к однозначному выводу уравнений свободных невзаимодействующих частиц. Члены, описывающие взаимодействия полей в лагранжиане или уравнениях, должны удовлетворять тем же условиям инвариантности, ограничения низшими производными и т. д., как и основные лагранжианы. При этом современная теория применяет взаимодействия, распространяющиеся со скоростями, не превышающими световой. Относительно уточнений этого обстоятельства см. ниже (§ 3). Однако, несмотря на то, что теория позволяет однозначно в указанном смысле установить все возможные формы взаимодействия любых двух полей друг с другом, действительное осуществление той или иной формы связи зависит ещё от наличия соответствующей константы связи или «заряда» в обобщённом смысле. Конкретные же величины «зарядов» частиц (или даже самый факт их наличия или отсутствия), также как и значения их масс, нынешней теорией ещё никак не объясняются, и должны определяться опытным путём. В этом обстоятельстве весьма ясно видна недостаточность и незавершённость современной теории элементарных частиц.

При построении полной теории взаимодействия в релятивистской квантовой механике необходимо различать два существенно различных класса взаимодействий.

А. Испускание и поглощение одних полей (частиц) другими, обусловленное наличием энергии связи или взаимодействия между ними, определяемой некоторой характерной константой связи, или обобщённым «зарядом». Сюда относится, во-первых, хорошо изученное и проверенное на опыте испускание и поглощение электромагнитного поля, т. е. фотонов всеми заряженными частицами (электрон, позитрон, протон, мезоны), в разнообразнейших условиях движения в ядрах, атомах, молекулах, ускорителях, при прохождении жидких, твёрдых сред и т. д.; далее, испускание и поглощение электромагнитного поля всеми «магнитными» частицами, например ней-

тронами. Во-вторых, речь может идти о предсказываемом теорией испускании и поглощении гравитационного поля, т. е. гравитонов, любыми частицами и полями. При этом масса частиц (точнее,  $\sqrt{\kappa} m$ , где  $\kappa$  — гравитационная константа) играет роль гравитационного «заряда». В-третьих, мы имеем подтвержденное опытом испускание и поглощение мезонного поля, например  $\pi$ -мезонов, тяжёлыми частицами — протонами и нейтронами, имеющими мезонные, квазиэлектрические «заряды»  $g$  (а также предсказываемое испускание мезонов лёгкими частицами — электронами, позитронами, нейтрино, обладающими гораздо меньшим квазизарядом). Повидимому, эти частицы взаимодействуют с мезонами также благодаря наличию у них квазимагнитных дипольных моментов, соответственно равных по порядку

$$f \sim \frac{g}{k_0} \text{ и } f' \sim \frac{g'}{k_3}.$$

В-четвёртых, наряду с указанными основными типами взаимодействий с полями частиц целого спина, способных испускаться и поглощаться по одной, могут иметь место связи с парами и группами частиц. Например, константа связи нуклеонов (или квазизаряд) с полем пар электрон — нейтрино и позитрон — нейтрино, равняется  $g_F \approx 4 \times 10^{-48} \text{ эрг} \cdot \text{сек}$ . Теория не исключает также возможности связи, например, нуклеонов с парами любых фермиевских или бозевских частиц, в частности с парами нейтрино, парами электронов, парами и группами мезонов, или даже парами нуклеонов. Более общие случаи связи нуклеонов с парами электронов и группами частиц будут рассмотрены в § 6. Заметим, что связь нуклеонов с парами самих нуклеонов, электронов с парами самих электронов, мезонов с несколькими мезонами и т. д. означает переход к нелинейным уравнениям поля, т. е. выход за рамки современной теории (см. § 3).

Для описания всех подобных типов взаимодействия полей к лагранжианам нужно добавить соответствующие члены, вид которых устанавливается однозначно, если учесть ограничения, указанные выше. Отсылая за подробностями к литературе (см. «Классическая теория поля» и ч. I), выпишем лишь несколько примеров. Например,

для случая порождения скалярного поля (функция  $\varphi$ ) нуклеонами имеем уравнение

$$\left( \Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - k_0 \right) \varphi = 4\pi g_s \rho_g, \quad (2,12)$$

где  $g_s$  — квазизаряд,  $\rho_g$  — инвариант, характеризующий плотность нуклеонов:  $\rho = \chi^+ \rho_3 \chi$ , где  $\chi$  — волновая функция нуклеона,  $\rho_3$  — матрица Дирака.

Правые части в уравнениях электромагнитного, мезонного, а также гравитационного полей учитывают порождение этих полей всевозможными частицами, обладающими соответствующими «зарядами». Воздействие же самих полей на движение частиц учитывается дополнительными членами в уравнениях движения частиц или в квантовых уравнениях полей этих частиц. При этом дополнительные члены получаются из того же лагранжиана взаимодействия, который учитывает порождение полей.

Например, уравнение мезонного поля с нуклеонными источниками получается вариацией по  $\varphi$  полной функции действия  $S$  системы нуклеонов и мезонов, составленной из

- 1) лагранжиана  $L_0$  свободного мезонного поля,
- 2) лагранжиана нуклеонов  $L_n$ ,
- 3) смешанного лагранжиана  $L'$ , учитывающего взаимодействие:

$$S = \int_V L d^4x \quad (d^4x = dx dy dz \cdot c dt); \quad L = L_0 + L_n + L'.$$

Смешанные инвариантные лагранжианы, характеризующие взаимодействие, образуются по правилу: к скаляру первого поля, умноженному на скаляр второго поля, прибавляется вектор первого поля, умноженный на вектор второго, и т. д., причём каждый член умножается на соответствующую константу связи, т. е.

$$L' = g_s S_1 S_2 + g_v V_1 V_2 + g_T T_1 T_2 + \dots$$

При взаимодействии нуклеонов с мезонным скалярным полем в нерелятивистском приближении смешанный лагранжиан взаимодействия совпадает с потенциальной энергией

$$U_S = g_s \Phi_S.$$



Аналогично этому при взаимодействии электрического заряда, движущегося со скоростью  $\mathbf{v}$ , к лагранжевой функции поля и зарядов нужно добавить смешанный инвариант  $L'_{em} = -e\varphi + \frac{e}{c} \mathbf{v} \mathbf{A}$ , где  $\varphi$  и  $\mathbf{A}$ —скалярный и векторный потенциалы поля,  $\mathbf{v}$ —скорость заряда. Отсюда в нерелятивистском приближении получим обычную потенциальную энергию  $U = e\varphi$ . Варьируя  $L'_{em}$  по потенциалам, получаем правые части уравнений Максвелла; при вариации же  $L'_{em}$  по координатам получим лоренцову силу.

При взаимодействии нуклеонов с полем пар электрон—нейтрино (см. § 6)

$$U_F = g_F (\psi_\nu^* A \psi_e + \psi_e^* A \psi_\nu),$$

где  $A$ —соответствующие матрицы. В нерелятивистском приближении при взаимодействии частицы массы  $M$  со слабым статическим гравитационным полем лагранжиан взаимодействия опять-таки совпадает с потенциальной энергией  $U = M\varphi_N$ , где  $\varphi_N$ —ньютонов потенциал (см. § 5).

В. Второй класс взаимодействий, который, собственно говоря, и соответствует наглядному пониманию термина «взаимодействие», сводится к связи двух каких-либо частиц через третьи частицы или поля, «переносящие» взаимодействие. Например, взаимодействие между двумя электрически заряженными частицами передаётся электромагнитным полем, которое порождается одной частицей и поглощается другой. На квантовом языке это положение вещей следует сформулировать так: первая частица испускает фотон, вторая его поглощает, и обратно,—первый заряд (например, электрон) поглощает фотоны, порождённые вторым зарядом (например, протоном, другим электроном и т. д.).

Подсчёт подобного обмена квантами поля в случае электростатики приводит в точности к результату классической теории, т. е. к закону Кулона

$$V_{\text{pot}} = \frac{e_1 e_2}{r_{12}}.$$

При квантовом подсчёте гравитационных сил, как обмена гравитонами, в статическом случае также получается

классический закон Ньютона (см. § 4).

$$V_{\text{pot}} = - \frac{\gamma m_1 m_2}{r_{12}}.$$

Оказывается, что подобную картину переноса взаимодействия квантами обычных полей (электромагнитного и гравитационного) можно значительно обобщить и применить также к переносу взаимодействий квантами, обладающими массой покоя, т. е. частицами в узком смысле (например, мезонами, затем парами электрон — нейтрино и т. д.). На этой идее основана современная теория взаимодействия между элементарными частицами<sup>1)</sup>.

Наиболее важной проблемой является отыскание взаимодействия между ядерными частицами — протонами и нейтронами. После того как выяснилось, что атомные ядра состоят из протонов и нейтронов и был признан элементарный характер нейтрона, а  $\beta$ -распад истолкован как порождение электронов (или позитронов), ранее в ядре не существовавших, возникла проблема отыскания сил, сдерживающих нуклоны в ядре. Нетрудно показать, что никакие дотолес известные силы (гравитационные, электромагнитные) не пригодны для этой цели (см. «Классическая теория поля», § 44а). В первой модели ядерных сил предполагалось, что искомые взаимодействия между протонами — нейтронами переносятся парами лёгких частиц (электрон — нейтрино и позитрон — нейтрино). Отсюда, действительно, получились силы ядерного типа с малым радиусом действия, т. е. быстро убывающие с расстоянием и обладающие другими специфическими признаками ядерных сил; в частности, нецентральные силы, зависящие не только от расстояния, но и от направления спинов взаимодействующих частиц. Однако величина этих сил, реально имеющих место, оказалась ничтожной, и они столь же неспособны объяснить огромные силы связи между нуклонами, как и гравитационные силы, также ведь реально действующие между ними.

Дальнейший прогресс в этой области связан с гипотезой Юкава (1935), в известном смысле объединившего пары

<sup>1)</sup> Впервые указана в работе Тамма, Иваненко [Nature 133, 981 (1934)].

частиц в одну тогда ещё гипотетическую частицу «мезон». Теория ядерных сил смогла предсказать порядок массы мезона (примерно в 200 масс электрона), а также предсказать его неустойчивость и указать на естественность целого значения спина. Подтверждение в основном всех этих предсказаний после открытия мезонов в космических лучах явилось большим успехом модели ядерных сил. Несмотря на ряд трудностей в теории, связанных, с одной стороны, с недостаточностью сведений о мезонах, и, с другой стороны, незавершённостью самой теории взаимодействия, сейчас нет сомнений, что взаимодействия между нуклонами реализуются мезонным полем (вероятно  $\pi$ -мезонами, имеющими псевдоскалярный характер). Протон испускает  $\pi_+$ -мезоны, которые поглощаются нейтроном, и, наоборот, поглощает  $\pi_-$ -мезоны, порождённые нейтроном. Кроме того, нуклоны обмениваются нейтральными  $\pi_0$ -мезонами. Подобный обмен  $\pi$ -мезонами приводит к ядерным силам правильного порядка величины, имеющим требуемый короткодействующий, нецентральный и обменный характер и другие специфические особенности. Впрочем, следует подчеркнуть, что окончательного закона ядерных сил, подобного по бесспорности закону Ньютона или закону Кулона, ещё нет. Короткодействующий характер ядерных сил передаётся простейшей формулой для потенциальной энергии двух нуклонов:

$$V_{\pi} = -g^2 \frac{e^{-k_0 r}}{r} \quad \left( k_0 = \frac{m_{\pi} c}{\hbar} \right),$$

где  $m_{\pi}$ —масса  $\pi$ -мезона. Это выражение получается для случая переноса сил скалярным полем и лежит также в основе других формул теории ядерных сил, полученных для псевдоскалярного и других полей, учитывающих спиновый, нецентральный и обменный характер (см. § 6 и «Классическая теория поля», § 44).

Резюмируя этот пункт, посвящённый основам теории взаимодействия, подчеркнём, что общая форма всевозможных взаимодействий между всеми частицами и полями однозначно следует из теории на основе тех же условий, что и уравнения свободных частиц. При этом, однако, интенсивность взаимодействия определяется константа-

ми — зарядами и моментами, к которым можно присоединить массу в качестве гравитационного заряда, величина которых берётся пока что из опыта. Иначе говоря, теория указывает лишь возможные формы и рамки взаимодействий, которые могут и не иметь места в случае отсутствия какой-либо константы связи полей.

Вместо зарядов можно ввести соответствующие безразмерные константы тонкой структуры; например, для электрического заряда  $\alpha = \frac{2\pi e^2}{hc} \sim \frac{1}{137}$ , для мезонного заряда  $\beta = \frac{2\pi g^2}{hc} \sim 0,2$ , для массы  $\gamma = \frac{2\pi \kappa m^2}{hc}$  и т. д.

Вывод констант тонкой структуры, т. е. величины «зарядов», является наряду с получением значений масс важнейшей задачей теории элементарных частиц. В общей теории частиц следует стараться заряды  $e, g, g'$  и т. д. и массы  $m, \mu, M$  и т. д. частиц так или иначе выразить через константы  $c, h, \kappa$ <sup>1)</sup>. В данной связи вновь отметим

1) Говоря о необходимости вывода значений зарядов или безразмерных постоянных тонкой структуры  $\alpha = \frac{2\pi e^2}{hc}$ ,  $\beta = \frac{2\pi g^2}{hc}$  и других в будущей теории, мы подразумеваем полную неудачу всех прежних попыток в этом отношении. Гипотеза Эддингтона пыталась объявить значение, обратное зоммерфельдовской постоянной, целым числом  $\frac{1}{\alpha} = 137,000\dots$  (лучшие экспериментальные данные приводят к  $\frac{1}{\alpha} = 137,02$ ) и связать её с некоей «перестановочной энергией» двух зарядов, используя 16 «степеней свободы», присущих дираковской частице. Эддингтон пытался расшифровать  $\frac{1}{\alpha}$  как  $\frac{n(n+1)}{2} + 1 = \frac{16 \times 17}{2} + 1 = 137$ . В дальнейшем Эддингтон пытался вывести отношение масс протона и электрона из уравнения  $10m^2 - 136mm_0 + m_0^2 = 0$ , для которого отношение корней равно 1836,5 (!); здесь 10 — число компонент метрического тензора,  $m_0 = \sqrt{\frac{N}{R}}$ , где  $N \sim 10^{29}$  — число протонов в произвольно ограниченной части вселенной,  $R \sim 10^{27}$  см — её радиус кривизны.

Сугубая необубедительность подобных гипотез, типичных для «кембриджского» идеалистического направления теоретической мысли, увлекающегося пифагорейским жонглированием числами, особенно отчётливо явствует из полной невозможности включить в схему Эддингтона новые частицы: мезоны, нейтроны и т. д.

гипотезу о наличии новой универсальной константы, типа некоторой минимальной длины  $l_0 \sim 10^{-13}$  см, введение которой в теорию, конечно, привело бы к существенно новым результатам для процессов, разыгрывающихся на самых малых расстояниях и при крайне высоких энергиях (подробнее об этой гипотезе см. § 3).

На этом в известной мере кончается самое краткое изложение основ теории элементарных частиц. На базе общих законов инвариантности и указанных свойств (масса, тип волновых функций, заряды и моменты), присоединяя общие космо-химические данные о концентрации частиц и отвлекаясь от трудностей теории, возможно дать для огромного числа явлений полное (в границах современной точности), во многих других случаях частичное, объяснение поведения частиц в значительной части процессов в известной части вселенной за так или иначе исследованный промежуток времени.

**б) Вторичное квантование и статистика.** Квантовая механика в первоначальном виде страдала некоторыми противоречиями. В самом деле, одним из исходных пунктов этой теории было представление о квантовом характере света, т. е. фотонах энергии  $E = h\nu$ . В то же время, электромагнитное поле описывалось классическими уравнениями Максвелла, и например, в квантовое уравнение Шредингера включались обычный скалярный  $\phi$  и векторный  $A$  потенциалы. Такое противоречие приводило к ряду трудностей. Например, было невозможно вычислить вероятность спонтанного излучения света атомами. Поскольку эти вопросы были подробно рассмотрены ранее (см. ч. 1), мы не будем на них сейчас останавливаться.

Последовательной теорией, свободной от указанного противоречия, явилась вторично-проквантованная волновая теория поля, в том числе квантовая электродинамика. В рамках этой теории не только удалось разрешить проблему излучения, но также исследовать ряд других вопросов, касающихся порождения и уничтожения частиц и их взаимных превращений. Хотя проблема связи и возможности универсальных взаимных превращений всех частиц друг в друга далека ещё от полного разрешения, однако даже первые успехи в решении этой проблемы

имеют, как это понятно, исключительное принципиальное значение.

Обратимся к краткому изложению смысла вторичного квантования. Обычная волновая механика сумела при помощи  $\psi$ -функций, подчиняющихся в тех или иных случаях уравнениям Шредингера, Клейна, Дирака и т. д., получить квантовые закономерности.

Дальнейшее квантование поля  $\psi$ -волн или вообще любого поля, в частности классического электромагнитного, а также гравитационного, носит поэтому название «вторичного квантования».

Идея этого метода заключается в «атомизировании» полей, т. е. в сопоставлении волнам частиц (например, электромагнитным волнам—фотонов, слабому гравитационному полю—гравитонов, дираковским  $\psi$ -функциям—электронов и позитронов, мезонному полю—мезонов и т. д.), иначе говоря, в более строгой формулировке корпускулярно-волнового дуализма.

Разлагая, например,  $\varphi$ -функцию вещественного скалярного поля в ряд Фурье, с условием периодичности в объёме  $L^3$ , получим, используя уравнение Клейна:

$$\varphi = \frac{1}{L^{3/2}} \sum_{\mathbf{k}} \sqrt{\frac{2\pi\hbar c}{K}} (a_{\mathbf{k}} e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r} - iKt} + a_{\mathbf{k}}^{\dagger} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r} - iKt}), \quad (2,13)$$

где  $a_{\mathbf{k}}$  и  $a_{\mathbf{k}}^{\dagger}$  — безразмерные коэффициенты Фурье, из которых выделен для удобства множитель  $\sqrt{\frac{2\pi\hbar c}{K}}$ ,  $\mathbf{k} = \{k_x, k_y, k_z\}$ ,  $k_x = \frac{2\pi n_x}{L}$  и т. д., причём  $n_x, n_y, n_z$  являются целыми числами,

$$K^2 = k^2 + k_0^2$$

и суммирование ведётся по  $n_x, n_y, n_z$ .

Подставляя это разложение  $\varphi$  в выражение энергии (2,8) и интегрируя по всему пространству, получим значение полной энергии поля  $W$  в виде

$$W = \sum_{\mathbf{k}} \epsilon_{\mathbf{k}} (a_{\mathbf{k}}^{\dagger} a_{\mathbf{k}})$$

( $\varepsilon_k = \hbar c K$  есть энергия  $k$ -го состояния при отбрасывании бесконечной константы).

Отсюда ясно, что амплитуды волн  $a_k$ , которые ранее были совершенно произвольны, теперь должны быть ограничены условием равенства целым числам:

$$a_k^* a_k = n_k. \quad (2,14)$$

Таким образом, амплитуды  $a_k$  и, следовательно, сами волновые функции следует понимать в обобщённом смысле, как некоторые квантовые операторы, действующие на функции от чисел частиц  $f(n_1, n_2, \dots, n_k)$  в разных состояниях и подчиняющиеся особым «правилам перестановки», именно таким, которые должны привести к целочисленным собственным значениям для величин  $n_k$ . Тогда энергия волнового поля будет равна сумме энергий частиц в различных квантовых состояниях, причём в  $k$ -ом состоянии будет находиться  $n_k$  частиц:

$$W = \sum_k \varepsilon_k n_k. \quad (2,15)$$

Энергию скалярного поля мы представили в виде суммы энергий отдельных волн, или, что эквивалентно этому, суммы энергий осцилляторов. Энергия осциллятора частоты  $\nu$  по квантовой механике равняется

$$E = \left( n + \frac{1}{2} \right) h\nu,$$

т. е. содержит нулевую энергию  $E_0 = \frac{1}{2} h\nu$ . Поэтому, когда мы указали, что энергия скалярного поля равна сумме энергий волн (или осцилляторов) или после квантования сумме энергий

$$W = \sum \varepsilon_k n_k,$$

то здесь была допущена неточность, заключающаяся в отбрасывании нулевой энергии. Это, однако, допустимо ввиду постоянства последней. Сумма всех нулевых энергий будет, очевидно, равна бесконечности. Совершенно аналогичный член с нулевой энергией возникает (и отбрасывается) при квантовании векторного электромагнит-

ного, псевдоскалярного ( $\pi$ -мезонного), слабого гравитационного и всех других полей бозевского типа, описывающих частицы целого спина. В теории вакуума мы ещё вернёмся к вопросу о нулевой энергии и её проявлениях.

Аналогичные результаты получаются для электромагнитного поля, поля дираковских  $\psi$ -функций и всех других полей (см. «Классическая теория поля», § 45). Каждый раз, разлагая потенциалы электромагнитного поля,  $\psi$ -функции дираковского поля и т. д. в ряд Фурье, мы получим для энергии соответствующего поля выражение, которое можно истолковать как сумму энергий квантов поля или соответствующих частиц, если придать билинейной комбинации амплитуд типа  $a^+ a_k = n_k$  смысл числа частиц. Решение вопроса об отыскании формы операторов было найдено Дираком (1927), построившим теорию вторичного квантования электромагнитного поля и показавшим, что правила перестановки для амплитуд разложения потенциалов

$$[a_k, a_{k'}^+]_- = a_k a_{k'}^+ - a_{k'}^+ a_k = \delta_{kk'} \quad (2,16)$$

ведут к статистике Бозе, т. е. их решением являются:

$$a_k^+ a_k = n_k = 0, 1, 2, \dots;$$

$$a_k a_k^+ = n_k + 1 = 1, 2, 3, \dots;$$

$$[a_k, a_{k'}] = [a_k^+, a_{k'}^+]_- = 0 \text{ и т. д.}$$

Точно такие же правила перестановки применимы к случаю скалярного поля и ко всем другим полям бозевского типа, связанным с частицами целого спина. При этом амплитуды Фурье расщепляются следующим образом:

$$a_k^+ = \sqrt{n_k} e^{-i\vartheta_k}.$$

Фаза  $\vartheta_k$  оказывается связанной с  $n_k$  таким же образом, как координата  $q_k$  связана с импульсом:

$$\vartheta_k = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial n_k}; \quad n \vartheta - \vartheta n = i,$$

откуда видно, что фаза  $\vartheta_k$  является оператором изменения числа частиц, а величины  $a_k$  играют роль операторов поглощения,  $a_k^+$  — испускания частиц. Тем самым метод вторичного квантования оказывается необходимым



при описании всех процессов порождения, аннигиляции и превращения частиц. Возможность вторичного квантования полей отражает принципиальную способность порождения, уничтожения и превращения всевозможных полей и частиц.

Как было впоследствии показано Иорданом и Вигпером, фермиевская статистика получается при следующих правилах перестановки:

$$[a_k, a_{k'}^{\dagger}]_{\pm} = a_k a_{k'}^{\dagger} + a_{k'}^{\dagger} a_k = \delta_{kk'}. \quad (2,17)$$

В случае непрерывного спектра (при соответственном разложении в интеграл Фурье)  $\delta$ -символы в правилах перестановки заменяются на  $\delta$ -функции Дирака  $\delta(k - k')$ .

В дальнейшем Паули доказал следующие важные теоремы.

А. Для всех частиц целого спина энергия поля является положительно definite величиной, но заряд и ток будут индефинитными (например, для  $\pi$ -мезонов). Для частиц полуцелого спина, наоборот, энергия поля является индефинитной, заряд и ток definite (например, для электронов).

В. Поля частиц целого спина, т. е. положительно definite энергии, могут быть проквантованы лишь согласно статистике Бозе, фермиевское же квантование для них недопустимо. Если потребовать положительности энергии, то для частиц полуцелого спина (например, электронов) допустима лишь статистика Ферми. При этом заряд и ток становятся индефинитными и равными разности зарядов и токов противоположно заряженных частиц.

Теория вторичного квантования естественно поясняет гипотезу Дирака о необходимости введения наряду с электронами античастиц другого знака заряда (позитронов), число коих определялось первоначально как число «дырок» в состояниях отрицательной энергии.

От квантования амплитуд Фурье можно непосредственно перейти к квантованию самих  $\psi$ -функций. Компоненты  $\psi$ -функций в различных точках пространства и в различные моменты времени теперь будут подчиняться некоторым правилам перестановки. Например, для вещественного скалярного  $\Phi$ -поля имеем, используя разложение

Фурье и указанные бозевские перестановочные соотношения, следующие правила перестановки:

$$\Phi(\mathbf{r}, t)\Phi^+(\mathbf{r}', t') - \Phi^+(\mathbf{r}', t')\Phi(\mathbf{r}, t) = \frac{2c\hbar}{i} D(\mathbf{R}, T), \quad (2,18)$$

где  $\Phi(\mathbf{r}, t)$  — значение  $\Phi$  в точке с радиус-вектором  $\mathbf{r}$  в момент  $t$ ,  $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$ ,  $T = t - t'$ . Перестановочная функция  $D(\mathbf{R}, T)$ , являющаяся инвариантным решением уравнения Клейна и существенным образом определяющая четырёхмерные правила перестановки не только в скалярном, но и во всех других случаях, имеет вид (см. «Классическая теория поля», § 20)

$$D(\mathbf{R}, t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3k}{K} e^{i\mathbf{k}\mathbf{R}} \sin cKT. \quad (2,19)$$

Функция  $D$  обращается в  $\delta$ -функцию Дирака, т. е. имеет особенность на световом конусе при  $R = \pm cT$ , обращается в нуль вне светового конуса, но не равна нулю внутри его. Равенство нулю функции  $D$  вне светового конуса соответствует тому, что величины, находящиеся на расстояниях столь больших, что измерения их не могут помешать друг другу, всегда могут быть определены независимо, а их операторы коммутируют (поскольку возмущения, вызываемые измерениями, не могут распространяться со сверхсветовой скоростью). Априори можно было бы определить четырёхмерные правила перестановки через второе независимое инвариантное решение уравнения Клейна

$$D' = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3k}{K} e^{i\mathbf{k}\mathbf{R}} \cos cKT, \quad (2,20)$$

нигде не обращающемся в нуль, но тогда мы вступили бы в противоречие с упомянутым исключением сверхсветовых скоростей.

При построении теории можно было бы с самого начала исходить из четырёхмерных правил перестановки, конструируя их на основе инвариантных соображений и только что указанных соображений об исключении функции  $D'$  (по этому вопросу см. § 3).

Наряду с квантованием амплитуд Фурье (парциальных волн) и четырёхмерным квантованием («глобальных»)

волновых функций можно построить теорию трёхмерного канонического квантования. Для этого следует либо положить в четырёхмерных правилах перестановки  $t = t'$ , т. е. рассматривать все величины в один и тот же момент времени, либо непосредственно написать трёхмерные соотношения коммутации (или антикоммутации) между обобщёнными «координатами», в качестве коих берутся компоненты  $\psi$ -функции, и обобщёнными «импульсами», канонически им сопряжёнными через лагранжиан согласно общему правилу

$$p_a = \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}_a}.$$

Трёхмерное квантование было развито Гейзенбергом и Паули. Например, для скалярного вещественного поля, вспоминая правила перестановки для координат и импульсов

$$[q_r, q_s]_- = [p_r, p_s]_- = 0, \quad [p_r, q_s]_- = \frac{\hbar}{i} \delta_{rs}$$

и подставляя

$$q \rightarrow \varphi, \quad p = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{1}{4\pi c^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t},$$

имеем:

$$\begin{aligned} [\varphi(\mathbf{r}), \varphi(\mathbf{r}')]_- &= 0, \quad \left[ \frac{\partial \varphi(\mathbf{r})}{\partial t}, \varphi^+(\mathbf{r}') \right]_- = \\ &= \frac{4\pi \hbar c^2}{i} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \quad \left[ \frac{\partial \varphi(\mathbf{r})}{\partial t}, \frac{\partial \varphi(\mathbf{r}')}{\partial t} \right]_- = 0. \end{aligned} \quad (2,21)$$

Ввиду важности случая электромагнитного поля остановимся несколько подробнее на вопросе о его квантовании. Вместо лагранжевой функции ларморовского типа

$$L_L = \frac{E^2 - H^2}{8\pi},$$

вариация которой по потенциалам приводит непосредственно к максвелловским уравнениям, разумно взять функцию, дополненную членом с квадратом четырёхмерной расходимости потенциала, для того чтобы избежать

обращения в нуль четвёртой компоненты импульса, канонически сопряжённого с  $\varphi$ . Итак, положим (см. ч. 1<sup>1)</sup>).

$$L = \frac{E^2 - H^2}{8\pi} - \frac{1}{8\pi} \chi^2, \text{ где } \chi = \operatorname{div} A + \frac{1}{c} \dot{\varphi}. \quad (2,22)$$

Тогда для потенциалов получаем непосредственно уравнения Даламбера как эйлеровы уравнения вариационной задачи с лагранжевой функцией  $L$ :

$$\frac{\partial L}{\partial A_\nu} - \sum \frac{\partial}{\partial x_\mu} \frac{\partial L}{\partial \left( \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu} \right)} = \square A_\nu = 0.$$

С другой стороны, для выполнимости максвелловских уравнений для напряжённостей поля нужно потребовать постоянства  $\chi$ , для чего достаточно положить  $\chi = 0$ ,  $\frac{\partial \chi}{\partial t} = 0$  при  $t = 0$ .

Образуя по обычным правилам гамильтониан при помощи лагранжиана  $L$  и подставляя в него разложения Фурье всех компонент потенциалов в виде

$$\varphi = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \{ \varphi_{\mathbf{k}} e^{-ic\mathbf{k}t + i(\mathbf{k}\mathbf{r})} + \text{компл. сопряж.} \} d^3k \text{ и т. д.,}$$

получим, производя интегрирование по объёму:

$$H = \int T_{44} d\tau = \int \{ A_{1(\mathbf{k})}^* A_{1(\mathbf{k})} + A_{2(\mathbf{k})}^* A_{2(\mathbf{k})} + \\ + A_{3(\mathbf{k})}^* A_{3(\mathbf{k})} - \varphi_{(\mathbf{k})}^* \varphi_{(\mathbf{k})} \} |\mathbf{k}|^2 d^3k. \quad (2,23)$$

Отсюда по общим правилам можно построить перестановочные соотношения для амплитуд Фурье. Бозевские перестановочные соотношения для амплитуд Фурье потенциалов имеют вид

$$\varphi_{(\mathbf{k})} \varphi_{(\mathbf{k}')}^* - \varphi_{(\mathbf{k}')}^* \varphi_{(\mathbf{k})} = -\frac{c\hbar}{2|\mathbf{k}|} \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}'), \quad (2,24)$$

$$A_{(\mathbf{k})}^i A_{(\mathbf{k}')}^{+m} - A_{(\mathbf{k}')}^{+m} A_{(\mathbf{k})}^i = \frac{c\hbar}{2|\mathbf{k}|} \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \delta_{im}.$$

<sup>1)</sup> См. также Вентцель, Введение в квантовую теорию волновых полей, М.—Л., 1947; Дирак, Основы квантовой механики, 2-е изд., М.—Л., 1937.

Отсюда получаются перестановочные соотношения для компонент Фурье напряжённостей поля, а также трёхмерные (канонические) и четырёхмерные инвариантные перестановочные соотношения для потенциалов и компонент тензора напряжённостей поля. Выпишем без вывода четырёхмерные перестановочные соотношения

$$\begin{aligned}
 [F_{\mu\nu}(x, t), F_{\mu'\nu'}(x', t')]_- = \\
 = \frac{\hbar}{i} c^2 \left\{ \delta_{\nu\nu'} \frac{\partial^2}{\partial x_\mu \partial x_\mu} - \delta_{\nu\mu'} \frac{\partial^2}{\partial x_\mu \partial x_{\nu'}} - \delta_{\mu\nu'} \frac{\partial^2}{\partial x_{\nu'} \partial x_\mu} + \right. \\
 \left. + \delta_{\mu\mu'} \frac{\partial^2}{\partial x_{\nu'} \partial x_{\nu'}} \right\} D(x - x', t - t'), \quad (2,25)
 \end{aligned}$$

где перестановочная функция  $D$  была определена выше:

$$D(R, T) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{e^{ikR} \sin ckT}{ck} d^3k \quad (k_0 = 0). \quad (2,26)$$

Наличие перестановочных соотношений показывает, что, вообще говоря, не всякие две компоненты поля или потенциалов можно одновременно измерить абсолютно точно. Перестановочные соотношения приводят к соотношениям неопределённости, связывающим пары компонент поля или потенциалов. Отсылая за подробностями к литературе<sup>1)</sup>, укажем лишь, что, образуя средние значения напряжённостей поля по четырёхмерным областям с объёмами  $L^3T$ , получим, в частности, следующие соотношения, связывающие ошибки в измерении компоненты электрического и магнитного полей в двух областях (обозначенных через I и II):  $\Delta E_x^I \Delta H_y^{II} \sim \frac{\hbar}{LT r^2} (L \gg cT)$ , где  $r$  — расстояние между областями. Как и следовало ожидать, при увеличении расстояния поля могут быть измерены с большой точностью. Наличие подобных «парных» ошибок имеет место в том случае, когда области могут быть связаны световым сигналом. В случае же, если речь идёт об областях, совпадающих в своих пространственных частях  $L_I = L_{II}$ , или во времени  $T_I = T_{II}$ ,

<sup>1)</sup> См. Гайтлер, Квантовая теория излучения, М.—Л., 1940; Bohr u Rosenfeld, Det Kgl. Danske Videnskab. 12, 8 (1933).

напряжённости коммутируют и могут быть поэтому измерены точно.

Таковы в самых общих чертах принципы релятивистской квантовой механики, являющейся, как мы видим, последовательной теорией, успешно объясняющей большое число самых фундаментальных свойств элементарных частиц: спин, магнитный момент, статистику, превращение частиц, законы их движения и взаимодействия. Эта общая теория, установленная в данном виде к 1945—1946 гг., лежит в основе успешных подсчётов огромного числа разнообразнейших эффектов. Поэтому нет сомнений в общей правильности основных положений теории и их применимости к обширнейшему кругу явлений.

**в) Теория вакуума.** Дальнейшее развитие релятивистской квантовой механики оказалось связанным в последние годы главным образом с уточнением теории вакуума, к краткому изложению которой мы сейчас и перейдём.

Во вторично проквантованной теории, как уже отмечалось выше, вектор-потенциал электромагнитного поля  $A_\nu$  (как и  $\psi$ -функция электронно-позитронного и других полей) становится оператором, действующим на общую шредингеровскую функцию от чисел заполнения (числа частиц в различных состояниях). Особый интерес для нас сейчас представляют состояния с равным нулю числом частиц (в частности, фотонов  $n_\gamma = 0$ ). В классической теории такому состоянию соответствуют равные нулю (или же постоянные, что не существенно) вектор-потенциал и напряжённость поля, что и соответствует классической наглядной концепции вакуума как «пустоты». Однако в квантовой электродинамике дело обстоит гораздо сложнее и равенство нулю числа фотонов далеко ещё не означает полного отсутствия каких бы то ни было физических проявлений поля. В данном случае обращаются в нуль только некоторые билинейные комбинации операторных потенциалов ( $A^+A$ ), в то время как другие билинейные комбинации в нуль не обращаются ( $AA^+$ ) (подробнее см. ч. 1). Физически это означает возможность флуктуаций—порождения и уничтожения фотонов. Существенно, что при этом среднее число фотонов, равное собственному значению оператора ( $A^+A$ ), всё время остаётся равным нулю.

Аналогичная картина имеет место не только в случае электромагнитного, но также и других полей: электронно-позитронного, мезонного и т. д. Флуктуации полей в случае, когда среднее число квантов поля, т. е. частиц, остаётся равным нулю, носят название вакуумных или нулевых флуктуаций. Раньше в теории поля имелась неправильная тенденция отбрасывать эти вакуумные флуктуации, так же как нулевую энергию, связанную с каждой компонентой поля. На самом деле, как показало новейшее развитие теории вакуума, этим вакуумным напряжёностям полей следует придать определённый физический смысл. В частности, особый интерес представляют вакуумные флуктуации электромагнитного и других полей с точки зрения их взаимодействия с частицами, например электронами. В самом деле, даже электроны (и другие частицы), которые до сих пор считались «свободными», в действительности всегда взаимодействуют с вакуумными флуктуациями различного рода полей.

Остановимся на вопросе о взаимодействии электрона с «электромагнитным вакуумом». Хотя среднее число фотонов равно нулю, взаимодействие электрона с электромагнитным полем всё же существует, ибо имеют место вакуумные флуктуации—виртуальное порождение и поглощение электроном фотонов всевозможных энергий. Иначе говоря, электрон испускает фотоны и сам же их поглощает. Если принять во внимание, что в квантовой электродинамике взаимодействие между частицами рассматривается как результат обмена квантами промежуточного поля (каждая из частиц испускает квант, который поглощается другой частицей), то становится ясно, что взаимодействие с вакуумными флуктуациями электромагнитного поля можно рассматривать как специфически квантовое самодействие электрона. Принципиальное значение при этом имеет следующий важный факт: энергия электромагнитного самодействия (т. е. энергия собственного как продольного, так и поперечного поля), которая оказывается бесконечной, может быть разделена на две части: 1) бесконечную энергию, не зависящую от состояния, в котором находится электрон (в частности, не зависящую от того, в каком поле он движется), и 2) часть, которая

оказывается существенно зависящей от состояния электрона (в частности, для свободного электрона эта часть обращается в нуль). Естественно интерпретировать первую часть как собственную полевую электромагнитную энергию (или соответственно массу) свободного электрона, а вторую—как добавок к этой энергии, обусловленный связью электрона с внешним реальным полем, или же как сдвиг энергетических уровней связанного электрона, обусловленный его взаимодействием с электромагнитным вакуумом.

При этом поперечная бесконечная полевая масса электрона, обязанная взаимодействию с поперечной частью поля, имеет чисто квантовую природу и в классической теории равна нулю. Энергия же взаимодействия электрона с продольной частью электромагнитного поля в квантовой теории выражается той же формулой закона Кулона при  $r=0$ , как и в классической теории, и так же равна бесконечности.

Наличие бесконечной полевой массы является существенной трудностью, которая исключается в современной теории путём применения тех или иных дополнительных вычитательных операций. Предварительная физическая аргументация при этом такова. Современная теория использует не вычисляемое теоретически, а получаемое эмпирически, из опыта значение для массы. В эту эмпирическую массу входит, повидимому, как некоторая неполевая «затравочная» часть (которую раньше называли «механической» массой), так и всевозможные (не только одни электромагнитные) полевые добавки. Для этих добавок в будущей теории должны получаться конечные значения. В современной же, ещё несовершенной теории, в которой полевые добавки к массе свободных электронов получаются расходящимися, их предлагается отбрасывать, считая включёнными в получаемую из опыта эмпирическую массу (перенормировка массы). Очевидно, подобная процедура является неудовлетворительной и должна быть заменена в будущей теории подсчётом, который, во-первых, устранил расходимость полевой части и, во-вторых, выяснит природу неполевой части массы. По всей видимости, для этой цели окажется необходимым более или менее



существенно модифицировать современную релятивистскую квантовую механику (см. § 3).

С другой стороны, конечные добавки к энергии, зависящие от состояния, в котором находится электрон (а значит, и от внешнего поля, в котором он движется), разумеется, отбрасывать не следует. Именно они обуславливают экспериментально наблюдаемые сдвиги энергетических уровней, связанных электронов (вакуумный, или лэмбовский сдвиг уровня в атоме водорода, аналогичный сдвиг уровня в атоме гелия, а также дополнительный неспиновый вакуумный магнитный момент электрона).

Изложенная выше картина является в значительной мере упрощённой. В действительности вопрос о сдвиге энергетических уровней сложнее, главным образом ввиду необходимости рассмотрения также взаимодействия электрона с электронно-позитронным вакуумом наряду с вакуумом электромагнитным.

Говоря о вторичном квантовании, мы уже отметили, что  $\psi$ -функция электронно-позитронного поля является оператором, действующим на общую волновую функцию состояния, зависящую от числа частиц, аналогично интерпретации волновой функции поля электромагнитного, т. е. вектор-потенциала  $A_{\nu}$ . Рассуждения, близкие к тем, которые привели нас к представлению об электромагнитных нулевых флуктуациях, показывают, что в случае электронно-позитронного поля также следует говорить о «вакууме» как некотором физическом состоянии. Оказывается, в этом случае существуют такие состояния, в которых, несмотря на равенство нулю числа частиц (точнее, числа пар электронов—позитронов), имеют место флуктуации—виртуальные порождения и аннигиляции пар. Вакуумные флуктуации электронно-позитронного поля являются проявлением электронно-позитронного вакуума, или «фона».

Предварительные представления о вакууме как совокупности состояний отрицательной энергии, занятых электронами, были введены Дираком (1930). Это предположение позволило предсказать как существование позитрона, так и превращение пар частиц ( $e_{-} - e_{+}$ ) в фотоны.

Существенное значение электронно-позитронного фона для проблемы массы электрона выяснилось уже довольно

давно. Было показано <sup>1)</sup>, что учёт взаимодействия электрона с этой частью вакуума сильно уменьшает порядок расходимости продольной и поперечной собственной энергии электрона (т. е. той части электромагнитной собственной энергии, которая обусловлена взаимодействием с вакуумными флуктуациями поперечного электромагнитного поля), понижая расходимость последней от квадратичной до логарифмической. В чём же заключается причина этого обстоятельства? Оказывается, что присутствие реального электрона искажает, деформирует электронно-позитронный фон, иначе говоря, производит поляризацию вакуума. Это происходит по двум причинам.

Во-первых, электрон создаёт поле (в простейшем случае электростатическое), под действием которого происходит перераспределение электронно-позитронных пар; вследствие деформации фона появляется некоторое дополнительное электромагнитное поле; плотность заряда и тока источников этого дополнительного поля можно интерпретировать как заряды и токи, индуцируемые в вакууме. Эти токи называются вакуумными токами поляризации.

Вторая, более существенная причина искажения электронно-позитронного фона в присутствии электрона заключается в наличии спинового взаимодействия. Для электронов и позитронов справедлив запрет Паули. Благодаря этому в присутствии «реальных» электронов распределение «вакуумных» электронно-позитронных пар отлично от того состояния, когда таких электронов нет. Изменение энергетического состояния системы, вызванное деформацией электронно-позитронного фона и приводит к такому важному следствию, как понижение порядка расходимости электромагнитной собственной энергии с квадратичного до значительно менее существенной логарифмической расходимости.

Наглядно говоря, следует характеризовать вакуум «диэлектрической постоянной» и «магнитной проницаемостью», значения которых не равны единице, вопреки старым представлениям.

---

<sup>1)</sup> См. ч. 1, § 43—45 и V. Weisskopf, Phys. Rev. 56, 72 (1939), см. также сборник статей «Сдвиг уровней атомных электронов», М., 1951.

При всём том наиболее важно то обстоятельство, что разность указанных выше логарифмически расходящихся выражений для собственной энергии в случае электронов, находящихся в различных состояниях, оказывается уже не расходящейся, а конечной величиной. Другими словами, как уже говорилось выше, из общей расходящейся полевой энергии электрона можно выделить конечную часть, зависящую от состояния, в котором этот электрон находится. Именно выяснение этого обстоятельства явилось существенным успехом теории последних лет. Аналогичные свойства имеет вакуум мезонов и других частиц. Электрон, как и все другие частицы, связан с вакуумом всех видов частиц. Как мы видим, современная релятивистская квантовая механика далеко отошла от прежнего понятия вакуума, как «пустоты» и абсолютного отсутствия каких-либо физических свойств. Хотя на пути установления физического смысла вакуума сделаны лишь первые шаги, но прогресс в этом направлении является несомненным и многообещающим.

Мы не будем подробно останавливаться на истории открытия вакуумного сдвига уровней и магнитного момента, ограничившись краткими замечаниями<sup>1)</sup>. Речь идёт об определении энергетического состояния электрона в атоме водорода, согласно уравнению Дирака обусловленного в основном кулоновской силой притяжения к протону, а также релятивистскими поправками на изменение массы со скоростью и наличием спинового магнитного момента у электрона.

В результате получается весьма хорошее описание уровней, дающих тонкую структуру, тогда как учёт одной кулоновской силы в нерелятивистском приближении привёл бы к известным простым уровням (рис. 5).

Дальнейший учёт магнитных взаимодействий электрона с протоном, также обладающим магнитным моментом, приводит к добавочному расщеплению уровней, т. е.

---

<sup>1)</sup> Относительно истории открытия сдвига уровней и дополнительного «вакуумного» магнитного момента, а также развития теории данных проблем см. сборник статей «Сдвиг уровней атомных электронов», М., 1951; см. также Я. Б. С м о р о д и н с к и й и А. Б. М и г д а л, УФН 41, 136 (1950).

сверхтонкой структуре. Однако вычисленные таким путём уровни энергии не совсем хорошо соответствуют новейшим прецизионным измерениям. Впервые отклонения были замечены оптическим путём ещё в 1934—1937 гг. Вильямсом и другими, но не были достаточно подтвержде-

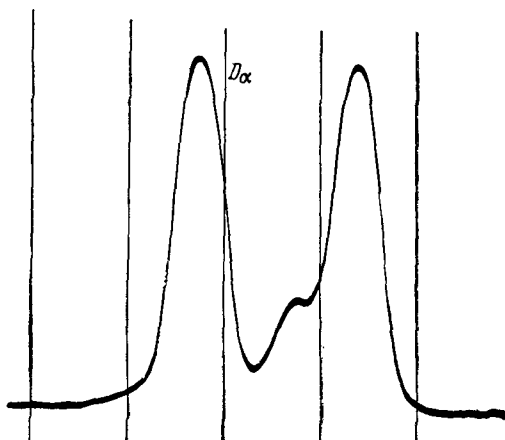


Рис. 5. Сдвиг уровней атомных электронов.

Микрофотография красной линии  $D_\alpha$  спектра дейтерия ( ${}^1D^2$ ), аналогичной бальмеровской линии обычного водорода  $H_\alpha$ . Расстояние между двумя главными компонентами дублета равняется примерно  $0,2 \text{ см}^{-1}$ . У правой компоненты, обязанной переходу между уровнями ( $2D_{3/2} - 2P_{1/2}$ ), виден побочный максимум, связанный с переходом ( $3^2P_{1/2} - 2^2S_{1/2}$ ). Пренная теория Дирака без учёта вакуумной поправки ошибочно предсказывала для побочного максимума несколько смещённое (на  $0,03 \text{ см}^{-1}$  влево) положение.

ны вплоть до 1941 г., когда Лэмб вновь обнаружил радиоспектроскопическим методом сдвиг  $2S_{1/2}$ -уровня по сравнению с положением, предсказанным дираковской теорией, на  $1060 \text{ мггц}$ . Аналогичный сдвиг  $S$ -уровня величины около  $14000 \text{ мггц}$  был обнаружен также в гелии.

Согласно теории существуют также другие физические причины, не учтённые в предыдущих рассуждениях, которые должны привести к сдвигам уровней атомных электро-

нов: 1) учёт затухания (см. ч. 1), 2) учёт поляризации вакуума, 3) учёт объёма ядер (см. § 7), 4) учёт специфических (мезонных) взаимодействий между электроном и нуклонами (см. § 7), 5) учёт содвижения протона. Однако все только что перечисленные причины дают в случае атома водорода сдвиги меньшей величины по сравнению с вакуумным и их обнаружение является ещё делом будущего. Итак, наблюдаемый сдвиг  $S$ -уровней в атомах водорода и гелия объясняется новейшей теорией вакуума, притом в замечательном согласии с опытом.

Дополнительный магнитный момент электрона был обнаружен также радиоспектроскопическими методами при исследовании эффекта Зеемана в водороде, дейтерии и других элементах (1947). Теория дополнительного магнетизма электрона на основе новейших представлений о вакууме была дана Швингером.

Соответствующий сдвиг уровней для электрона, находящегося в постоянном магнитном поле, с точностью до членов второго порядка относительно  $\alpha$  равен

$$\Delta\varepsilon = -\frac{1}{2\pi} \frac{e^2}{\hbar c} \frac{e\hbar}{2mc} H_0 = -\frac{\alpha}{2\pi} \mu_0 H_0 \quad (2,27)$$

(здесь  $H_0$ —напряжённость магнитного поля). Этот сдвиг можно интерпретировать как результат наличия дополнительного магнитного момента, с указанной точностью равного  $\frac{\alpha}{2\pi} \mu_0$ . Более точное значение вакуумного магнитного момента электрона равно  $\left(\frac{\alpha}{2\pi} - 2,973 \frac{\alpha^2}{\pi^2}\right) \mu_0$ . Лэмбовский сдвиг энергетических уровней атомных электронов (в  $S$ -состоянии), как было подсчитано по теории вакуума, даётся выражением

$$\Delta\varepsilon_L = \left(\frac{e^2}{\hbar c}\right)^3 \cdot \frac{R_\infty}{3\pi} \left[ \ln \frac{mc^2}{\bar{\varepsilon}} - \ln 2 + \frac{23}{24} - \frac{1}{5} \right]. \quad (2,28)$$

Здесь  $R_\infty = \frac{\alpha^2 mc^2}{2} = \frac{2\pi e^4 m}{h^2}$ ,  $\bar{\varepsilon}$ —средняя энергия возбуждения атома ( $\bar{\varepsilon} = 17,8R_y$ ).

Отсылая за подробностями вывода к литературе (см. ч. 1), поясним наглядно смысл этого результата, следуя

Вельтону. Суть дела заключается в том, что кулоновский потенциал со стороны протона (или ядра) действует не на электрон в какой-то точке  $\mathbf{r}$ , но на электрон, вынужденный колебаться под влиянием вакуумных флуктуаций электромагнитного поля, а при дальнейшем уточнении и других полей. Обозначая через  $\mathbf{x}$  смещение координат электрона и разлагая в ряд Тейлора

$$V(\mathbf{r} + \mathbf{x}) = V(\mathbf{r}) + \mathbf{x} \text{grad } V + \frac{1}{2} \Delta V \frac{x^2}{3} + \dots, \quad (2,29)$$

получим для искомого сдвига уровня в  $n$ -м состоянии:

$$\Delta \varepsilon_n = \frac{1}{6} \int \Delta V x^2 |\psi_n|^2 d\tau = \frac{2\pi Z e^2}{3} \overline{\psi_n(0)^2 x^2}, \quad (2,30)$$

(здесь учтено  $\Delta V = 4\pi Z \rho_0 = 4\pi Z e \delta(\mathbf{r})$ ,  $|\psi_1(0)|^2 = \frac{Z^3}{\pi a_0^3}$ ,

где  $a_0 = \frac{\hbar^2}{m e^2}$ ). Дальнейшие выкладки связаны, с одной стороны, с подсчётом  $\overline{x^2}$ , и, с другой стороны, с учётом взаимодействия электрона также с электронно-позитронным вакуумом, что делает весь результат конечным.

Выше мы указали, что деформацию электронно-позитронного фона, т. е. поляризацию электронно-позитронного вакуума, можно интерпретировать как появление вакуумных зарядов и токов. В наиболее простом статическом случае, когда поляризация вакуума вызывается электростатическим полем, плотность поляризационного вакуумного тока обращается в нуль, а плотность заряда, индуцируемого в вакууме, равна<sup>1)</sup>

$$\rho_{\text{vac}} = \left[ -\frac{\alpha}{15\pi k_0^2} \nabla^2 - \frac{\alpha^2}{140} \left( \frac{1}{k_0^2} \nabla^2 \right)^2 \right] \rho + C, \quad (2,31)$$

где  $\alpha = \frac{e^2}{\hbar c}$ ,  $k_0 = \frac{m c}{\hbar}$ ,  $\rho$  — плотность «реального» внешнего заряда. Весь первый член, стоящий в квадратных скобках и показывающий, что влияние реального заряда сказывается в области порядка  $r \sim \frac{\hbar}{m c}$ , конечен и вызывает появление, хотя и крайне малых, но в принципе наблюдае-

<sup>1)</sup> П. А. М. Д р а к, Статья в сборнике «Атомное ядро», М.—Л., 1934.

мых поправок в ряде эффектов. В частности, поляризация вакуума протоном должна обусловить сдвиг уровня атомных электронов, по знаку обратный вакуумному лэмбовскому сдвигу и на порядок меньший последнего (точнее, около  $\frac{1}{40} \Delta \epsilon_L$ ). Второй же член в формуле (2,31) имеет смысл дополнительной плотности, возникающей только в точке, в которой находится заряд, поляризующий вакуум. Эта дополнительная плотность, уменьшающая величину основного заряда, бесконечна, так как постоянная  $C$  оказывается расходящейся, хотя и в относительно слабой, логарифмической форме. В настоящее время не существует удовлетворительного способа устранения этой расходимости и она просто отбрасывается или непосредственно, или же путём применения некоторой вспомогательной вычитательной операции. При этом используется идея о так называемой перенормировке заряда, близкая к идее перенормировки массы. Действительно, поскольку значение заряда в современной теории не выводится теоретически, а берётся из опыта, то, следовательно, в этот заряд автоматически входят как некоторая основная «затравочная» часть, так и «полевая» вакуумная поправка и все иные «добавки». Пока не создана теория, в которой бы расходимости отсутствовали, оказывается необходимым использовать эмпирический, суммарный заряд, а бесконечные добавки отбрасывать.

Таким образом, следует подчеркнуть, что современная теория не в состоянии пока что не только вывести конкретные значения масс частиц и их зарядов, но не может вообще удовлетворительно разрешить общий вопрос о природе массы и заряда. Согласно нынешнему положению наших сведений по этим весьма важным вопросам можно считать, что существует некоторая основная «затравочная» масса (иначе говоря, «затравочный» гравитационный заряд) и соответственно основные «затравочные» электрический, мезонные и т. д. заряды, природа коих неясна, и что сверх того возникают полевые добавки к массе (также и к зарядам), из бесконечных значений которых можно выделить конечные части, приводящие, например,

к наблюдаемым сдвигам и дополнительному магнитному моменту.

Кроме вопросов о сдвиге уровней связанных электронов и дополнительном магнитном моменте, в теории вакуума возникает целый ряд других проблем. Очевидно, необходимо произвести общий пересмотр всевозможных эффектов взаимодействия, рассеяния и т. д. с точки зрения уяснения той роли, которую играют в них «вакуумные поправки». Например, эти поправки имеют место в теории рассеяния одних частиц на других и на силовом центре<sup>1)</sup>.

Укажем ещё на возникновение неожиданного на первый взгляд вопроса о массе покоя фотона, и в связи с этим о калибровочной инвариантности теории вообще. Дело в том, что благодаря виртуальному порождению пар электронов—позитронов (при дальнейшем уточнении, также пар мезонов и т. д.) и их аннигиляции возникает специфически квантовое самодействие фотона. Подсчёт энергии этого самодействия рядом авторов<sup>2)</sup> привёл к различным результатам: для собственной энергии фотона получились наряду с расходящимся выражением также нулевое и конечное, но отличное от нуля, значения. Такое расхождение результатов не случайно. Оно является следствием наличия в нынешней недостаточно совершенной теории ряда неопределённых выражений, содержащих сингулярности. Кроме того, сама математическая постановка задачи не является вполне корректной, ибо в теории используется вычитательная операция, в конце концов сводящаяся к нахождению разностей расходящихся выражений. Указанная трудность (хотя и в меньшей степени) характерна также для задачи о сдвиге уровней, где также приходится использовать вычитательную операцию, причём в результате имеется некоторая неоднозначность.

Итак, проблема исключения из теории неоднозначностей и неопределённых выражений приобрела важное значение. Как уже говорилось, эта проблема тесно связана с проблемой исключения расходимостей. Чтобы избавиться от

<sup>1)</sup> См. H. W. Lewis, Phys. Rev. 73, 173 (1948).

<sup>2)</sup> W. Heisenberg, Zs. f. Phys. 90, 209 (1934); G. Wentzel, Phys. Rev. 74, 1070 (1948); J. Schwinger, Phys. Rev. 74, 1439 (1948).



неопределённостей, было предложено несколько методов, часть из которых опирается на представление о наличии особого рода «компенсирующих» полей, а другие носят характер формально математических правил предельного перехода (последние называются «формалистическими» правилами регуляризации в отличие от первых, «реалистических»). В частности, применение разумных правил регуляризации к задаче о массе покоя фотона приводит к нулевому значению этой массы, что является удовлетворительным с точки зрения требований электродинамики. Регуляризация необходима также для устранения конечных, но неинвариантных «вакуумных» членов.

При трактовке теории вакуума следует, очевидно, дать более строгое определение самого вакуума, под которым наглядно понимается состояние с числом частиц, равным нулю. Уточнения здесь необходимы, в частности, потому, что в теории вакуума всякая величина  $Q$ , характеризующая электрон в некотором состоянии  $a$ , определяется как  $\overline{Q}_{\text{vac}+a} - \overline{Q}_{\text{vac}}$  (черта означает усреднение). Следовательно, возникает вопрос о нахождении «средних по вакууму».

Проблема более точного определения понятия «вакуум» оказалась тесно связанной с вопросом о релятивистской инвариантности теории. Правда, уравнение Дирака, уравнения Клейна, Прока, Максвелла и другие уравнения релятивистской квантовой теории элементарных частиц и полей являются инвариантными. Но всё же вся теория не имеет последовательно инвариантного вида, так как время остаётся физически выделенным. Действительно, в рамках этой теории рассматриваются задачи двух типов: о связи между различными величинами в один и тот же момент времени и об изменении различных физических величин со временем (уравнение типа Шредингера<sup>1)</sup>). Таким образом, время оказывается выделенным, что нарушает проверку инвариантности структуры теории.

<sup>1)</sup> Речь идёт о релятивистском уравнении вида  $-\frac{\hbar}{i} \frac{\partial \psi}{\partial t} = H\psi$ , а не об обычном нерелятивистском шредингеровском уравнении, где  $H = E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}}$ .

Теория, свободная от этих последних недостатков, разрабатывалась рядом авторов. Полученные ими результаты в значительной мере эквивалентны; поэтому мы остановимся только на одной из этих теорий—на так называемом сверхмноговременном формализме Томонага<sup>1)</sup>.

Можно построить теорию так, чтобы её структура, несколько отличаясь от обычной, удовлетворяла указанным более жёстким требованиям. Именно, можно, во-первых, установить законы поведения свободных невзаимодействующих полей и, во-вторых, найти отклонение от этих законов при наличии взаимодействия. Как показывает сама постановка вопроса, время в этом случае уже не оказывается выделенным, что открывает возможность сплошной инвариантной формулировки всех подсчётов теории.

Ограничимся для простоты случаем, когда имеются взаимодействующие поля только двух типов с волновыми функциями  $\varphi_1(\mathbf{r}_1, t)$  и  $\varphi_2(\mathbf{r}_2, t)$ . Производя унитарное преобразование с помощью оператора

$$U = \exp \left[ \frac{i}{\hbar} (\bar{H}_1 + \bar{H}_2) t \right],$$

где  $\bar{H}_1$  и  $\bar{H}_2$  — гамильтонианы первого и соответственно второго поля, получим уравнение Шредингера в виде

$$\left\{ \int H_{12}(\varphi_1, \varphi_2) d\tau + \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial t} \right\} \Psi = 0, \quad (2,32)$$

где  $\Psi$  — функция, описывающая состояние системы, а  $H_{12}$  — плотность гамильтониана взаимодействия.

Следующий шаг заключается в сопоставлении каждой точке пространства своего времени, т. е. замене плоскостей  $t = \text{const}$  гиперповерхностями  $\sigma$ , задаваемыми уравнением  $t = t(x, y, z)$ . Эти поверхности должны быть пространственно-подобными, что является условием интегрируемости; в остальном их выбор произволен. Этот шаг можно рассматривать как своеобразный предельный переход от обычной многовременной теории, в которой каждая частица имеет своё особое время, а для всего поля

<sup>1)</sup> S. Tomonaga, Prog. Theor. Phys. 1, 27 (1946).

применяется единое время. С другой стороны, можно сказать, что в сверхмноговременной (бесконечно-временной) теории каждой точке поля соответствует своё время<sup>1)</sup>. На каждой гиперповерхности  $\sigma$  волновая функция  $\Psi[\sigma]$  должна иметь некоторое определённое значение. Рассмотрим две гиперповерхности  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$ , совпадающие во всех точках, кроме некоторой малой окрестности точки  $P$ . Обозначим четырёхмерный объём, заключённый между поверхностями  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$ , через  $\Delta\sigma$ . Предел отношения  $\frac{\Psi[\sigma_2] - \Psi[\sigma_1]}{\Delta\sigma}$  при  $\Delta\sigma \rightarrow 0$ , который носит название частной функциональной производной от  $\Psi$ , обозначим через  $\frac{\delta\Psi[\sigma]}{\delta\sigma}$ . Если использовать частную функциональную производную, то за основу теории вместо уравнения (2,32) следует взять уравнение Томонага

$$\left\{ H_{12}(P) + \frac{\hbar}{i} \frac{\delta}{\delta\sigma_P} \right\} \Psi[\sigma] = 0. \quad (2,33)$$

Инвариантность этого уравнения и отсутствие неравновесия пространственных координат и времени очевидны. Больше того, в базирующейся на уравнении (2,33) сверхмноговременной теории релятивистская инвариантность может быть проверена в вычислениях на любом этапе, что, вообще говоря, не всегда легко сделать в рамках обычной теории.

Значение  $\Psi[\sigma_2]$  может быть получено из  $\Psi[\sigma_1]$  путём последовательных бесконечно малых преобразований

$$\Psi[\sigma_2] = \prod_{\sigma_1}^{\sigma_2} \left\{ 1 - \frac{i}{\hbar} H_{12}(P) d\omega_P \right\} \Psi[\sigma_1]. \quad (2,34)$$

Можно ввести понятие амплитуды вероятности. Так, например, в представлении, в котором  $\varphi_1, \varphi_2$  диагональны, соответствующая вероятность выражается в виде

$$W(\varphi_1(P_1), \varphi_2(P_1)) = |\Psi[\varphi_1(P_1), \varphi_2(P_2)]|^2. \quad (2,35)$$

Более детальный анализ показывает, что хотя сверхмноговременная теория устраняет указанные выше труд-

<sup>1)</sup> См. Д и р а к, Основы квантовой теории, изд. 2, М.—Л. (1936); а также М. А. М а р к о в, ЖЭТФ 10, 13, 11 (1940); Н. Н. Б о г о л ю б о в, ДАН 81, № 6 (1951).

ности, касающиеся построения инвариантных расчётных методов теории и оказывается существенным орудием при использовании вычитательных приёмов, так как гарантирует соблюдение релятивистской инвариантности, она в то же время не приводит к каким-либо новым физическим результатам как в принципиальных вопросах, например в проблеме об электромагнитной массе или при устранении расходимостей, так и для вычисления конкретных эффектов.

В рамках сверхмноговременной теории удалось добиться прогресса в затронутом нами ранее вопросе об определении «вакуума» как особого физического состояния. Релятивистская теория, большое эвристическое значение которой уже неоднократно сказывалось в науке, резко уменьшая степень неоднозначности выбора тех или иных выражений (например, выбор функций Лагранжа), в данном случае также позволила сильно сузить круг возможных определений вакуума. В качестве одного из возможных определений Швингером было предложено понимание вакуума как состояния, которому соответствует абсолютный минимум пространственной составляющей вектора энергии—импульса. При этом «вакуумные» значения оказываются не только ковариантными, но и независимыми от системы отсчёта.

В заключение этого пункта заметим, что сверхмноговременная теория далеко не является законченной. Дело здесь не только в недостаточной простоте её вычислительных методов. Даже вопрос о существовании точных решений основного уравнения (2,33) не является ещё полностью выясненным и требует дальнейшего исследования. Что же касается приближённых расчётов, то во всех конкретных задачах они, как указывалось, приводят к таким же результатам, что и обычная «одновременная» теория.

Подведём теперь некоторые итоги.

Релятивистская квантовая теория привела к ряду весьма существенных достижений в теории элементарных частиц. Были открыты спинорные волновые функции, описывающие частицы полуцелого спина, затем на основе ряда разумных ограничений были установлены уравнения для полей различных спинов. Значение спина и ос-

нового собственного магнитного момента, а также характер статистики оказались связанными с типом волновой функции. Релятивистское квантовое уравнение электрона позволило определить положение уровней электрона в атоме и рассчитать разнообразнейшие эффекты рассеяния электронов, рассеяния света на электронах и т. д. Вторичное квантование позволило сопоставить частицы волновым функциям и привело к решению задачи о спонтанном излучении. Было истолковано взаимодействие между частицами через поля. Было предсказано существование позитронов и мезонов. Было предсказано наличие взаимных превращений пар электронов — позитронов и фотонов. Все эти фундаментальные результаты теории, по точности, глубине и смелости предсказаний сравнимые с самыми лучшими достижениями физической науки всех времён, были полностью подтверждены экспериментами. Наконец, в последние годы была развита теория вакуума, на основе которой удалось в прекрасном соответствии с экспериментом вычислить дополнительный магнитный момент электрона и сдвиг энергетических уровней в атомах.

Однако релятивистская квантовая теория поля и, в частности, даже наиболее разработанная теория электрона и электромагнитного поля далеко не свободны от трудностей.

Основные трудности релятивистской квантовой механики заключаются, во-первых, в том, что она приводит к бесконечным значениям энергии электромагнитных, мезонных и других полей, порождённых электроном, протоном и другими частицами, рассматриваемыми как точечные. Таким образом, эта трудность, унаследованная ещё от классической электродинамики, не была ликвидирована при дальнейшем развитии теории. Новейшая успешная теория вакуума, построенная на базе релятивистской квантовой теории, вновь приводит к только что указанной трудности бесконечной полевой энергии и добавляет трудности с бесконечными полевыми значениями электрических зарядов. Во-вторых, другой класс трудностей связан с тем, что современная теория вообще не в состоянии построить модели масс частиц и их «зарядов», т. е. констант связи полей друг с другом, независимо от несовершенной трактовки полевых частей масс и «заря-

дов». Здесь речь идёт скорее не о трудностях релятивистской квантовой механики, но, повидимому, о том, что эти проблемы вообще лежат вне рамок современной теории.

Точно так же в значительной мере вне рамок современной теории находится вопрос относительно «генеральной» теории всех частиц, в которой была бы выяснена более глубоко связь частиц друг с другом и, возможно, установлено наличие некоторого основного мирового поля, возбуждёнными состояниями которого являлись бы отдельные частицы, и тем самым продвинул вопрос о предсказании новых частиц.

По всей видимости, для построения теории массы (а не только полевых добавок к ней), теории заряда (а не только полевых его частей), а также некоторой «генеральной» теории полей средств релятивистской квантовой механики, даже столь существенно дополненной новейшей теорией вакуума, окажется недостаточно. Следовательно, современная теория должна быть довольно существенно модифицирована в тех или иных направлениях. Несмотря на предварительный характер различных обобщений теории, интересно и полезно для выяснения путей развития теории рассмотреть некоторые из этих попыток, что и будет сделано в следующем параграфе (§ 3).

### § 3. Попытки обобщения теории

Перейдём к обзору различных попыток устранения трудностей теории путём того или иного обобщения как классической, так и релятивистской квантовой механики.

**а) Классический радиус электрона и компенсирующие поля.** Как уже указывалось, первый класс трудностей нынешней теории заключается в обращении в бесконечность полевой энергии точечных частиц. Как хорошо известно, вопрос о расходящейся полевой энергии электрона возник ещё в классической теории. Речь идёт о том, что энергия электростатического поля точечного электрона выражается расходящимся интегралом

$$\mathcal{E} = \int \frac{E^2}{8\pi} d\tau = \frac{e^2}{2} \int_0^{\infty} \frac{dr}{r^2}. \quad (3,1)$$

Для обеспечения конечности этого выражения было предложено обрезать интеграл, введя вместо нуля в качестве нижнего предела значение радиуса электрона  $r_0$ . Тогда, отвлекаясь от вопроса о распределении заряда по объёму или поверхности и отбрасывая тем самым числовые коэффициенты порядка единицы, можно попытаться принять всю собственную энергию электрона обусловленной его полем:

$$\mathcal{E} = m_0 c^2 = \frac{e^2}{r_0}.$$

В этом заключается способ устранения расходимости на основании гипотезы о «полевой» природе массы электрона. Поскольку речь идёт о радиальной части поля, то говорят о «продольной» полевой массе. Несомненно, интересно и не случайно, что определённый таким образом классический радиус электрона

$$r_0 = \frac{e^2}{m_0 c^2} = 2,8 \cdot 10^{-13} \text{ см} \quad (3,2)$$

не только качественно даёт разумную оценку каких-то эффективных размеров электрона, но независимо от всяких гипотез о природе массы проявляется в самых разнообразных эффектах столкновения и рассеяния. Например, эффективное сечение рассеяния света на электроне существенно определяется величиной  $r_0^2$ .

Однако на этом заканчиваются успехи классической полевой гипотезы. Действительно, никакого непосредственного физического смысла придавать объёму электрона нельзя; кроме того, вся теория не является релятивистски инвариантной. Например, даже для простого случая движущегося электрона, установив указанным выше предварительным образом значение конечной полевой массы, оказывается невозможным получить правильное значение для его полевого импульса как количества движения поля. Мы не будем сейчас останавливаться на попытках выхода из трудности в рамках классической теории, так как они были уже подробно рассмотрены<sup>1)</sup>.

Сейчас важно отметить различные тенденции в этом направлении, проявившиеся в классической теории и полу-

<sup>1)</sup> «Классическая теория поля», §§ 30, 31, 32, 34.

чившие развитие впоследствии в квантовой теории массы; при этом мы будем иметь в виду, как правило, лишь релятивистски инвариантные теории.

Ряд попыток «регуляризации», т. е. устранения трудности с продольной расходящейся массой связан с «формалистическими» приёмами, заключающимися, например, в искусственном введении эффективного радиуса электрона, который в пределе полагается равным нулю ( $\lambda$ -предельный процесс Вентцеля-Дирака; см. «Классическая теория поля», § 34).

Другие, «реалистические» попытки заключаются во введении некоторых дополнительных компенсирующих полей. К последним относится как ранняя, дорелятивистская гипотеза Пуанкаре о наличии особого давления «внутри» электрона, противодействующего электрическому отталкиванию, так и сформулированная в релятивистски инвариантном виде теория компенсирующего поля Паиса, вводящего для компенсации бесконечностей некоторое гипотетическое скалярное поле. Наряду с этим компенсирующее поле в гипотезе Соколова подбирается так, чтобы оно действовало лишь на заряд, его порождающий, но не могло вовсе излучаться. Для этой цели берётся полусумма запаздывающих и опережающих потенциалов гипотетического немаквеллова поля. (Эта же комбинация устраняет сингулярную часть гриновской функции.) Следует отметить результат только что указанной попытки регуляризации, заключающийся в том, что полевая доля массы в конце концов обращается в нуль, а вопрос о природе основной «затравочной» массы оказывается лежащим вне рамок нынешней теории. Теории Вентцеля-Дирака-Соколова приводят к классическому уравнению движения точечного заряда электрона, в котором имеется сила радиационного трения, но отсутствуют члены с бесконечной собственной полевой энергией, которые входят в аналогичное уравнение движения Лоренца.

Все подобные гипотезы, естественно, носят весьма предварительный характер, прежде всего ввиду неквантовой трактовки проблемы. Далее,  $\lambda$ -процесс и другие искусственные предельные переходы являются сугубо неоднознач-



ными операциями. Сами гипотетические компенсирующие поля в принципе могут быть обнаружены, однако их необычные свойства до сих пор не позволяли подойти к этому вопросу более конкретно. При всём том некоторые интересные точки зрения несомненно были развиты на базе указанных гипотез и позднее перенесены в квантовую теорию.

В квантовой теории сохраняется трудность с бесконечной полевой «продольной» энергией и сверх того добавляется трудность с бесконечной полевой «поперечной» энергией, обязанной связи электрона с полем через вектор-потенциал

$$U_{\text{pot}} = \frac{e}{c}(\mathbf{v}\mathbf{A}). \quad (3,3)$$

Как было отмечено выше, при изложении основ современных представлений о вакууме, даже для покоящегося электрона, когда по классической теории никакой связи с поперечной частью поля нет, а по квантовой теории число реальных фотонов равно нулю, имеются флуктуации напряжённостей поля, энергия которых равна бесконечности. Взаимодействие электронов с полем подобных флуктуаций приводит к бесконечной энергии, т. е. к бесконечной собственной полевой массе.

Хотя мы говорили до сих пор только о полевой электромагнитной массе электрона, все рассуждения можно применить к другим заряженным частицам (протон, мезоны), а также к вопросу о полевой мезонной и другим полевым массам нуклонов. Во всех случаях трудности в теории точечных частиц будут совершенно теми же и предварительные классические способы их устранения не будут отличаться от изложенных выше.

**б) Высшие производные.** Остановимся теперь на одной важной попытке регуляризации, возникшей в классической теории и связанной с введением высших производных (Бопп, Подольский). При специальном подборе новых лагранжианов или соответствующих уравнений при этом удалось добиться конечности полевой массы и правильного значения полевого импульса. Теория с высшими производными, очевидно, относится к разряду

реалистических методов регуляризации при помощи новых полей. Этот метод был с успехом применён в релятивистской квантовой механике, что побуждает нас остановиться на нём подробнее (см. также «Классическая теория поля», §§ 33 и 48). Более того, метод регуляризации при помощи высших производных, как и другие способы введения компенсирующих полей, подсказывает желательность совокупного рассмотрения частиц, при котором бесконечность в одном поле компенсируется другими полями. Тем самым намечается переход к объединённой теории всех частиц также с этой стороны.

Ограничиваясь для простоты уравнениями конечного порядка, запишем уравнения для компонент четырёхмерного вектор-потенциала электромагнитного поля в теории с высшими производными в виде

$$L(\square) \square A_\mu = [a_0 + a_1 \square + \dots + a_n \square^n] \square A_\mu = -\frac{4\pi}{c} \int \rho(x-\xi) \dot{\xi}_\mu ds. \quad (3,4)$$

Если частица (источник поля) является точечной, то

$$\rho(x-\xi) = e\delta(x-\xi) = \frac{e}{(2\pi)^4} \int e^{ik_j(x_j-\xi_j)} d^3k.$$

Подставляя это выражение в формулу (3, 4), а затем применяя к обеим частям равенства оператор  $\frac{1}{L(\square)}$ , мы перейдём к уравнению

$$\square A_\mu = -\frac{4\pi}{c} \int \rho'(x-\xi) \dot{\xi}_\mu ds \quad (3,5)$$

(по одинаковым индексам производится суммирование от 1 до 4).

Уравнение (3,5) совпадает с обычным максвелловским уравнением для потенциала электромагнитного поля, создаваемого, однако, теперь уже не точечным источником, а зарядом, распределённым по некоторому закону с плотностью

$$\rho'(x-\xi) = \frac{e}{(2\pi)^4} \int \frac{e^{ik_j(x_j-\xi_j)}}{L(-k, k_j)} d^3k = \frac{\rho(x-\xi)}{L(\square)}. \quad (3,6)$$

Таким образом, как мы видим, использование высших производных эквивалентно эффективному «размазыванию» заряда. При довольно широких предположениях можно высказать и обратное утверждение. Именно, если заряд не является точечным и если величина, обратная фурье-компоненте плотности, может быть разложена в ряд Маклорена, то это эквивалентно наличию высших производных в уравнении Максвелла с точечными источниками.

Наряду с этим обстоятельством уравнение (3,4) имеет ещё одну интересную особенность. Нетрудно убедиться в том, что оно эквивалентно системе  $n + 1$  уравнений

$$\begin{aligned} \square A_{\mu}^0 &= -c_0 \frac{4\pi e}{c} \int \rho(x - \xi) \dot{\xi}_{\mu} ds, \\ (\square - k_i^0) A_{\mu}^i &= -c_i \frac{4\pi e}{c} \int \rho(x - \xi) \dot{\xi}_{\mu} ds, \end{aligned} \quad (3,7)$$

где  $i = 1, \dots, n$ , а  $k_i^2$  являются простыми корнями уравнения

$$L(k_i^2) = 0 \quad (k_0 = 0).$$

Для того чтобы система уравнений (3,7) была эквивалентна уравнению с высшими производными (3,4), необходимо положить <sup>1)</sup>

$$c_i = \frac{1}{\prod_{i \neq j=0}^n (k_j^2 - k_i^2)}, \quad (3,7a)$$

тогда

$$A_{\mu} = \sum_{i=0}^n A_{\mu}^i.$$

Таким образом, введение высших производных, эквивалентное, как было показано выше, некоторому эффективному «размазыванию» заряда, в то же время равносильно предположению о том, что наряду с максвелловским полем ( $k_0 = 0$ ) частицы порождают и другие поля мезонного

<sup>1)</sup> Разумеется, не составляет труда построить вариант теории, в котором  $c_0 = 1$ .

типа с различными массами покоя ( $\sim k_i$ ). Константы связи этих полей с электроном, как показывает формула (3,7а), определяются всем набором масс этих полей.

Остановимся несколько более подробно на интерпретации полученных результатов. Напомним, что первоначально введение высших производных, например Боппом и Подольским, преследовало цель устранения расходимости полевой массы, а также связанной с ней трудности с неустойчивостью частицы (теорема Лауэ). При этом существенно, чтобы полное поле отличалось от максвелловского только в близкой окрестности частиц, а вдали имело бы обычный кулоновский характер. В связи со сказанным выше, нетрудно понять, что именно позволяет достигнуть этой цели в теории с высшими производными. Эта теория фактически привлекает к рассмотрению некоторые «дополнительные» поля мезонного типа. По той роли, которую эти поля играют, их можно назвать компенсирующими. Компенсирующие поля быстро убывают с расстоянием, так что вдали от заряда их влияние незаметно. На малых же расстояниях они являются существенными и, в частности, компенсируют электростатическую собственную энергию. Они также приводят к обращению в нуль собственных натяжений. Заметим, что равенство (3,7а) обеспечивает выполнение соотношений

$$\sum_{i=0}^n c_i = 0, \quad \sum_{i=0}^n c_i m_i^2 = 0,$$

которые и представляют собой условие компенсации.

Интерпретация высших производных в смысле установления их эквивалентности «размазыванию» и тем самым введению эффективного «радиуса» заряда также проливает свет на достигаемые путём этого обобщения результаты. Это обстоятельство находится в наглядной аналогии с простой моделью релятивистского неточечного заряда.

**в) Нелинейные теории.** Что касается нелинейного обобщения, то, как неоднократно подчёркивалось, следует различать произвольные, хотя и весьма интересные, уравнения Борна от нелинейностей в электромагнитных урав-

нениях Максвелла, которые с необходимостью возникают согласно квантовой теории благодаря взаимному превращению частиц, например фотонов через электроны—позитроны снова в фотоны. Эти последние нелинейности при ограничениях (отсутствие высших производных), при которых они рассчитаны, сами по себе не могут привести к конечной полевой массе, в противоположность борновской схеме. Однако ввиду того, что взаимная превращаемость полей приводит с необходимостью к нелинейным уравнениям не только в электродинамике, но и в мезодинамике, и в дираковском уравнении для спинорных функций и во всех других случаях, мы остановимся вновь на этом вопросе. Это тем более необходимо, что имеются веские основания для привлечения нелинейностей к объяснению как некоторых новых мезонных эффектов (см. § 6), так и для установления «генеральной» теории поля посредством гипотезы слияния.

При построении инвариантной нелинейной теории имеются в виду два основных условия: 1) вдали от источников поле должно иметь максвелловский характер; 2) вблизи—рост потенциала замедляется, и он может стать конечным. Схематически типичный для нелинейной теории ход потенциалов (в статическом случае) изображён на рис. 6. При больших  $r$  кривая имеет обычный кулоновский вид. Однако на малых расстояниях от частицы вместо уходящего в бесконечность кулоновского потенциала (пунктирная кривая) выступает новое, конечное значение для  $\varphi$ . Приведённая схема наглядно свидетельствует о том, что нелинейность также может ввести предположение о некотором элементарном радиусе. Это проливает свет на физические причины того, что нелинейная теория (например, борновская) оказывается в состоянии сделать полевую массу конечной и устранить трудности в вопросе об устойчивости частиц.

Отметим одну общую черту как нелинейной теории, так и теории с высшими производными. В этих теориях вводится представление о некоторой «аномальной иперции» электромагнитного поля. Действительно, введение нелинейности фактически представляет собой переход к представлению о поле как о системе бесконечного числа

связанных друг с другом (а не свободных, как в обычной максвелловской электродинамике) осцилляторов, так что каждый отдельный осциллятор приобретает характер ангармонического.

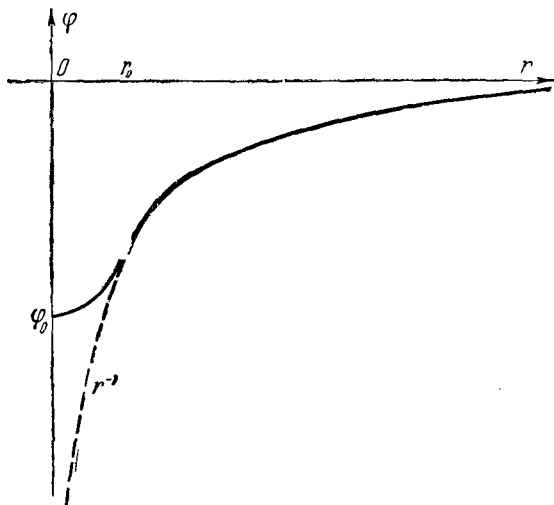


Рис. 6. Потенциал нелинейной электростатики.

Начиная с расстояний, меньших  $r_0$  (порядка классического электромагнитного радиуса электрона, т. е.  $10^{-13}$  см), потенциал нелинейной борновской теории стремится к постоянному значению  $\varphi_0$ , в противоположность кулоновскому потенциалу  $r^{-1}$ , уходящему в бесконечность. Аналогичный ход можно предполагать у потенциалов различных нелинейных обобщений мезодинамики.

Лагранжиан борновской гипотетической теории, исходящей из идеи наличия некоторого максимального поля  $b$ , имеет вид

$$L_B = \frac{b^2}{4\pi} \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{E^2 - H^2}{b^2} - \frac{(EH)^2}{b^4}} \right). \quad (3,8)$$

Разлагая  $L_B$  в ряд по степеням поля, получим в качестве первого члена лагранжиан максвелловской линейной теории

$$L_M = \frac{E^2 - H^2}{8\pi}.$$

Как нетрудно показать, лагранжиан Борна приводит к конечной полевой энергии покоящегося электрона. Действительно, так как, по определению, индукция равна

$$D = 4\pi \frac{\partial L}{\partial E} = \frac{E}{\sqrt{1 - \frac{E^2}{b^2}}}$$

и для  $D$  имеем прежнее решение

$$D = \frac{e}{r^2}, \quad E = \frac{e}{\sqrt{r^4 + r_0^4}},$$

то энергия поля равна

$$W = m_0 c^2 = \int_0^\infty T_{44} d\tau = \frac{2}{3} e \varphi_0 = \frac{2}{3} \frac{e^2}{r_0} \int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}} \cong 1,236 \dots \frac{e^2}{r_0},$$

где

$$\frac{e}{r_0^2} = b, \quad T_{44} = \frac{1}{4\pi} (ED) - L.$$

Нелинейность уравнений электромагнитного поля должна приводить к разнообразным новым эффектам, таким, как преломление света на свете, рассеяние света на свете, рассеяние света электростатическим полем и т. д.<sup>1)</sup>

С другой стороны, можно без всяких новых гипотез провести квантовомеханический расчёт эффективного сечения для этих нелинейных процессов (например, рассеяния света на свете) и сопоставить им эффективный нелинейный лагранжиан. Сравнение нелинейностей, индуцируемых квантовыми процессами превращения частиц, с теорией Борна-Инфельда показывает, что последняя является довольно удачным приближением к действительности.

В общем случае лагранжиан электромагнитного поля можно представить в виде разложения по степеням двух

1) S c h r ö d i n g e r, Proc. Irish. Acad. A 49, 43, 225 (1944).

основных инвариантов

$$L_{\text{эл.-маг.}} = \frac{1}{8\pi} (\mathbf{D}^2 - \mathbf{B}^2) + a_1 (\mathbf{D}^2 - \mathbf{B}^2)^2 + a_2 (\mathbf{DB})^2 + \dots,$$

причём современная релятивистская квантовая механика позволяет вычислить коэффициенты  $a_1$  и  $a_2$ .

$$a_1 = -\frac{2}{45} \frac{e^4 \hbar}{m^4 c^7}, \quad a_2 = 7a_1.$$

Нелинейные добавки к лагранжиану электромагнитного поля, возникающие в четвёртом приближении благодаря виртуальному порождению и последующей аннигиляции пар электронов—позитронов в промежуточных состояниях фотонами, могут быть подсчитаны методами новейшей теории вакуума. Эти добавки определяют также недиагональные члены матрицы рассеяния  $S$ . Исходя из уравнения Дирака для электрона в электромагнитном поле  $D\psi = U\psi$ , где  $U = e\gamma_s A_s$ ,  $\psi = \frac{U\psi}{D}$  и учитывая связь  $S$ -матрицы с лагранжианом, мы можем недиагональным членам четвёртого приближения придать вид

$$S^{(4)} = \frac{i}{\hbar c} \int L'(x) dx = \frac{-i\alpha^2}{(\hbar c)^2} \frac{1}{12} \int G_{\mu\nu\lambda\sigma}(x, x', x'', x''') \times \\ \times A_\mu(x) A_\nu(x') A_\lambda(x'') A_\sigma(x''') d^4x d^4x' d^4x'' d^4x''',$$

где  $G_{\mu\nu\lambda\sigma}$  является тензором поляризации вакуума. Грозные вычисления подтверждают конечное значение  $S^{(4)}$  и её калибровочную инвариантность. Для случая полей, меняющихся медленно в пространстве по отношению к критической длине  $\frac{1}{k_0} = \frac{\hbar}{mc}$  и обладающих частотой, малой по сравнению с  $\nu_0 = \frac{mc^2}{\hbar}$ , получается прежний результат, полученный при помощи подсчёта рассеяния света на свете или старого, более примитивного, вычитательного формализма<sup>1)</sup>. Эффективное сечение рассеяния света

<sup>1)</sup> R. Karplus and M. Neuman, Phys. Rev. 80, 380 (1950); 83, 776 (1951).



на свете  $\sigma_{\gamma\gamma}$  имеет максимум в области частот, несколько превышающих критическую, когда пары могут реально породиться

$$\nu_{\max} \sim \frac{2mc^2}{h}.$$

При больших длинах волн  $\sigma_{\gamma\gamma}$  убывает как  $\lambda^{-6}$ :

$$\sigma_{\gamma\gamma} = \frac{\alpha^4}{4\pi k_0^2} \cdot \frac{139}{90^2} \left(\frac{\nu}{\nu_0}\right)^6 (3 + \cos^2 \vartheta)^2 \quad \left(\alpha = \frac{2\pi e^2}{hc}\right) \quad (3,9)$$

(для неполяризованного излучения)<sup>1)</sup>, а при больших частотах<sup>2)</sup>

$$\sigma_{\gamma\gamma} \approx \frac{\alpha^4}{\pi^2 k_0^2} \frac{\lg\left(\frac{\nu}{\nu_0}\right)^4}{\left(\frac{\nu}{\nu_0}\right)^4}. \quad (3,9a)$$

При реально достижимых плотностях энергии излучения все предсказываемые нелинейные эффекты пока что лежат на границе возможностей наблюдения ввиду их крайне малой вероятности. Например, эффективное сечение рассеяния света на свете будет в лучшем случае порядка  $10^{-31}$  см<sup>2</sup>/стерадиан.

Как указывалось выше, следует перейти к нелинейным обобщениям не только в теории электромагнитного поля, но также в теории других полей. Так, например, лагранжианы нелинейной векторной и скалярной мезодинамики можно для первой ориентации задать в борновском виде

$$L_{NV} = \frac{b^2}{4\pi} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{L_P}{b^2}}\right), \quad L_{NS} = \frac{b^2}{4\pi} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{L_S}{b^2}}\right),$$

где  $L_P$  и  $L_S$  являются соответственно лагранжианами уравнений Прока и скалярного клейновского уравнения<sup>3)</sup>.

<sup>1)</sup> П. Е u l e r, Ann. d. Phys. 26, 398 (1936).

<sup>2)</sup> А. И. А х и е з е р, Sow. Phys. 11, 263 (1937).

<sup>3)</sup> См. Д. И в а н е н к о и В. Р о д и ч е в, ЖЭТФ 9, 526 (1939); W. H e i s e n b e r g, Zs. f. Phys. 113, 61 (1939).

Более точное значение нелинейного лагранжиана мезонной теории должно получиться путём соответственного квантового подсчёта. Во всяком случае при ограничении низшими производными лагранжиан нелинейной теории, например вещественного скалярного поля, будет функцией двух инвариантов:

$$I_1 = \frac{1}{2} \frac{\partial \Phi}{\partial x^\nu} \frac{\partial \Phi}{\partial x^\nu}, \quad I_2 = \frac{\Phi^2}{2}.$$

Ограничиваясь, например,  $I_2$ , получим простейший нелинейный лагранжиан в виде

$$L_{\text{NS}} = -\frac{1}{8\pi} \left\{ (\nabla \Phi)^2 - \left( \frac{1}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right)^2 + k_0^2 \Phi^2 \right\} - \frac{\lambda \Phi^4}{4 \cdot 4\pi},$$

где

$$\lambda \approx \frac{k_0^4}{b^2}.$$

Тогда простейшее нелинейное обобщение клейновского уравнения в присутствии нуклеонных источников поля плотности  $\rho$  примет вид

$$\Delta \Phi - \frac{1}{c^2} \ddot{\Phi} - k_0^2 \Phi - \lambda \Phi^3 = 4\pi g \rho, \quad (3,10)$$

где  $g$  — квазизаряд.

Наряду с подобным формальным способом нелинейного обобщения следует указать другой близкий путь, позволяющий дать иногда более непосредственную физическую интерпретацию. Мы имеем в виду установление так называемых феноменологических уравнений полей в материальных средах при помощи обобщённых «диэлектрических постоянных»  $\epsilon$  и «магнитных проницаемостей»  $\mu$ . Имея подобные уравнения, мы можем использовать их не только для описания процессов в средах, но, отвлекаясь от влияния среды, оставить величины  $\epsilon$  в качестве функций от инвариантов самого поля. Тем самым мы приходим к искомому нелинейному обобщению уравнений поля. Наглядно подобный метод может быть проанализирован, например, на той же борновской нелинейной электродинамике. Для интересующего вас сейчас случая скалярного уравнения феноменологические инвариантные урав-

нения в средах можно установить следующим образом. Первую группу уравнений, представляющую определение напряжённостей через потенциал, оставляем без изменений

$$\chi_a = \frac{\partial \Phi}{\partial x_a}. \quad (3,11)$$

Вторую же группу уравнений запишем теперь при помощи новых величин  $\bar{\chi}$  и  $\bar{\Phi}$  в виде

$$\frac{\partial \bar{\chi}_a}{\partial x_a} = k_0^2 \bar{\Phi}, \quad (3,12)$$

где

$$\bar{\chi}_a = \varepsilon_1 \chi_a, \quad \bar{\Phi} = \varepsilon_2 \Phi.$$

В случае  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1$ , получим вновь обычное уравнение Клейна для скалярной функции<sup>1)</sup>. Однако если обе квази-диэлектрические «постоянные» являются инвариантными функциями поля, то мы получим искомые нелинейные уравнения. В частности, полагая

$$\varepsilon_1 = 1, \quad \varepsilon_2 = 1 - \frac{\lambda}{k_0^2} \Phi^2, \quad (3,13)$$

мы вновь приходим к простейшему нелинейному обобщению скалярного уравнения (3,10). Нелинейная мезодинамика предсказывает возможность специфического рассеяния мезонов на мезонах и других эффектов, аналогичных нелинейным электромагнитным. Наиболее существенно то обстоятельство, что решение только что указанного нелинейного мезонного уравнения будет давать несколько модифицированный потенциал, который в статическом случае для примерно постоянных  $\varepsilon$  будет иметь вид

$$\Phi \approx \frac{g \exp \{ -k_0 \sqrt{\varepsilon_2} \cdot r \}}{\varepsilon_1 r}, \quad (3,14)$$

т. е. при малых  $r$

$$\Phi \approx \frac{g}{r} \left( 1 - \frac{\text{const}}{r^2} \dots \right).$$

<sup>1)</sup> См также историю мезонного черенковского излучения в работе Д. И. Блохинцев и В. Л. Инденбом, ЖЭТФ 20, 1123 (1950), где, однако, учитывается лишь феноменологическое  $\varepsilon_1$ , причём инвариантным образом.

Такая модификация означает ослабление взаимодействия между частицами, переносимого нелинейным скалярным вещественным мезонным полем. Этот результат, имеющий место также для псевдоскалярного и других полей, аналогичен положению вещей в нелинейной электродинамике, в которой, как отмечалось выше, кулоновский потенциал модифицируется благодаря эффективной нелинейной диэлектрической постоянной вакуума. Наглядно говоря, между частицами (зарядами, нуклеонами и т. д.), благодаря нелинейностям на самых малых расстояниях имеют место силы отталкивания, отчасти компенсирующие притяжение. Наряду с этим следует учесть также влияние нуклеарной среды, что опять-таки удобно сделать при помощи соответствующих  $\epsilon$ . Нелинейный характер свободного мезонного поля подсказывает возможность введения нелинейностей в выражение взаимодействия нуклеонов с этим полем, т. е., например, для скалярного вещественного поля в нерелятивистском случае рассмотрение наряду с членом  $U = g_1 \chi^* \Phi \chi$  также выражений вида  $U_n = g_n \chi^* \Phi^n \chi$ , соответствующих переносу взаимодействия  $n$  частицами (см. § 6). Нетрудно видеть, что включение нелинейностей в энергию взаимодействия при линейных уравнениях поля по существу эквивалентно применению нелинейных уравнений свободного поля с обычным линейным членом взаимодействия.

В самом деле, возьмём для наглядности пример борновской нелинейной электродинамики, в которой потенциал

$$\varphi = \frac{e}{r_0} \int_{\frac{r}{r_0}}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$$

на больших расстояниях имеет вид

$$\varphi = \frac{e}{r} - \frac{er_0^4}{10r^5}.$$

Это выражение можно интерпретировать в духе теории кратных процессов (см. § 6, п. а), как обязанное переносу взаимодействия не только единичными фотонами, но также группами 3, 5, ...,  $n$  фотонов, иначе говоря, наличие не-

линейного взаимодействия заряда с полем вида  $U = e\varphi + + e_2\varphi^3 + \dots$ . Оказывается, подобную эквивалентность можно подтвердить, производя, например, над дираковским уравнением, дополненным нелинейным членом, специальное каноническое преобразование.

Важно отметить, что в нелинейных обобщениях электродинамики, мезодинамики или спинорного дираковского уравнения возникает новая константа самодействия или связи поля «самого с собой», которой можно придать размерность длины. Например, борновское максимальное поле непосредственно связано с эффективным радиусом электрона, несмотря на сохранение точечного характера заряда. В нелинейных обобщениях электродинамики, индуцируемых квантовыми взаимными превращениями частиц и фотонов, естественно, входит новая константа, содержащая комптоновскую длину соответствующих частиц. Тем самым нелинейные обобщения примыкают к числу тех модификаций современной теории, которые придают существенное значение наличию константы минимальной длины (квантование пространства и другие гипотезы; см. ниже).

Развивая гипотезу об установлении нелинейных уравнений для всех полей ввиду возможности взаимного превращения частиц друг в друга, мы приходим к необходимости нелинейного обобщения дираковского уравнения для электрона<sup>1)</sup>.

С этой точки зрения дираковский лагранжиан следует рассматривать лишь как первый член разложения в ряд по степеням инвариантов спинорной теории. Ограничиваясь ближайшим высшим членом, можно положить

$$L_{ND} = L_D + \lambda I_0^2 + \text{другие инварианты},$$

где

$$L_D = \frac{1}{2} \left\{ \psi^+ \gamma_\alpha \frac{\partial \psi}{\partial x_\alpha} - \frac{\partial \psi^+}{\partial x_\alpha} \gamma_\alpha \psi \right\} + k_0 \psi^+ \psi, \quad I_0 \equiv \psi^+ \psi.$$

В простом случае вещественного поля к дираковскому уравнению добавляется нелинейный член вида  $\lambda \psi^3$ , так

<sup>1)</sup> Д. И в а н е н к о, *Sov. Phys.* 13, 141 (1938).

что имеем:

$$\{D_0 + \lambda\psi^2\}\psi = 0. \quad (3,15)$$

Отметим, что простой метод нелинейного обобщения уравнений заключается в замене волновых функций внешних полей  $\psi$ -функциями основного поля при соответствующей замене константы взаимодействия на константу самодействия. Например, для нелинейного обобщения дираковского уравнения берём случай взаимодействия нуклонов с полем пар электронов—нейтрино:

$$D\chi + g_F \{\psi^* A\psi_e + \text{компл. сопряж.}\} \chi = 0,$$

где  $A$ —одна из матриц, обеспечивающая инвариантный характер члена взаимодействия,  $g_F$ —фермиевская константа связи (см. § 6). Заменяя здесь функции электронов и нейтрино на нуклеонные и вводя новую константу  $\lambda$  вместо  $g_F$  (по всей вероятности того же порядка, см. § 1), получим искомое нелинейное обобщение дираковского уравнения

$$D\chi + \lambda \{\chi^* A\chi + \text{компл. сопряж.}\} \chi = 0.$$

В случае вещественного спинорного поля получим в нерелятивистском приближении член вида  $\lambda\chi^3$ , указанный ранее. Очевидно, нелинейные обобщения уравнений поля релятивистской теории будут всегда в качестве первой поправки содержать член указанного вида ( $\lambda\psi^3$ ).

Исследование нелинейного спинорного уравнения приобретает особый интерес, ввиду гипотезы о возможности положить в основу общей теории элементарных частиц некоторое универсальное спинорное уравнение типа (3,15).

Развивая указанные соображения, можно провести дальнейший анализ нелинейного дираковского уравнения следующим образом<sup>1)</sup>.

Разделим переменные подстановкой

$$\psi_{\pm} = \frac{1}{2} e^{ik(t)} \{(F + iG)\Omega_{\pm} + (F - iG)\beta\Omega_{\pm}\},$$

где  $F$  и  $G$  являются функциями только от  $r$ , а  $\Omega_{\pm}$  —

<sup>1)</sup> Finkelstein, Lelevier, Ruderman, Phys. Rev. 83, 326 (1951).

угловые функции. Интересующие нас радиальные уравнения примут вид

$$\begin{aligned} F' + (\mu - \omega)G + \lambda(2G^2 + \gamma GF^2) &= 0, \\ G' + \frac{2}{r}G + (\mu + \omega)F - \lambda(2F^2 + \gamma FG^2) &= 0, \end{aligned} \quad (3,16)$$

где  $\omega = \frac{d\xi}{dt}$ ,  $\lambda$  — константа связи с нелинейными членами,  $\gamma$  — параметр.

Тогда, требуя конечности  $F$  и  $G$  и линеаризуя вблизи трёх решений нашей системы ( $G=0$ ,  $F = \text{const} = F_0$ ;  $F = \pm \sqrt{\frac{\mu + \omega}{4\lambda}}$ ,  $\lambda > 0$ ) путём подстановки  $G = g$ ,  $F = F_0 + f$ , где  $f$  и  $g$  — малые величины, получим для последних линейные уравнения, которые исследуются обычными методами.

До сих пор мы рассматривали нелинейные обобщённые уравнения Клейна или Дирака, с точки зрения классической теории поля. Трудный вопрос о квантовании этих нелинейных уравнений, как и нелинейных уравнений гравитационного поля (см. § 5) далеко ещё не решён. Хотя формально возможно ввести, исходя из нелинейного лагранжиана, канонические импульсы и написать трёхмерные правила перестановки вторичного квантования, однако ввиду невозможности разложения Фурье теперь нельзя провести обычное в линейной квантовой теории сопоставление частиц, как квантов поля отдельным элементарным волнам. До сих пор никаких реальных следствий из правил перестановки в нелинейном случае сделано не было. Повидимому, даже самое понятие независимых частиц должно быть существенно модифицировано в нелинейной теории. Очевидная трактовка нелинейностей как возмущений хотя и позволяет произвести ряд оценок, однако приводит к потере наиболее существенных сторон нелинейной проблемы.

Заметим, что несмотря на естественное возникновение нелинейностей в электромагнитном и других полях, подсчёты нелинейных эффектов (например, рассеяния света на свете и т. д.) всё же пока что удаётся произвести также путём обычной линейной теории.

Обсуждая нелинейные обобщения в теории элементарных частиц, не следует забывать, что уравнения гравитационного поля носят нелинейный характер и представляют собою наиболее разумное и гарантированное нелинейное обобщение каких бы то ни было уравнений, в данном случае уравнений для гравитонов (см. § 5).

Интересное обстоятельство было отмечено М. Ф. Широким<sup>1)</sup>, заметившим, что отклонения некоторых компонент  $g_{\mu\nu}$  от галилеевых значений, вычисленные по теории Боппа и Борна-Инфельда, при  $r \rightarrow 0$  очень велики, что подсказывает значительную роль гравитации в трактовке элементарных частиц.

В подобных проблемах речь идёт о том, что, кроме гравитационного поля, обязанного, например, массе электрона, нужно учесть ещё поле тяготения, вызванное электростатическим полем заряда.

Обратим, наконец, ещё внимание на то обстоятельство, что нелинейная теория, используя произведения волновых функций, применяет по существу выражения того же типа, которые лежат в основе гипотезы—«слияния» (см. ниже).

Таким образом, мы видим, что, несмотря на предварительный характер, нелинейные обобщения теории поля занимают особое место. Во-первых, они с необходимостью следуют из квантовой теории взаимных превращений; во-вторых, нелинейности дают наиболее естественную трактовку многих важных физических явлений (кратные процессы при испускании мезонов, модификация нуклеарных взаимодействий) и, в третьих, нелинейности оказываются связанными с некоторыми из наиболее правдоподобных гипотез, предложенных для устранения трудностей современной теории (гипотеза слияния, гипотеза минимальной длины).

**г) Гипотеза прямого взаимодействия частиц.** В целях устранения бесконечности собственной энергии в классической электродинамике Фейнман и Уилер предлагают произвести следующую переформулировку обычной теории поля: 1) движение каждой данной частицы определяется всеми полями других частиц, кроме заданной; тем

---

<sup>1)</sup> Вестник МГУ, № 4, 67 (1947).



самым исключается самодействие. Подобный приём в известной мере эквивалентен методу Вентцеля и Дирака, развитому Соколовым при помощи добавочного компенсирующего поля (см. «Классическая теория поля», § 34); 2) поле, сопоставленное заданной частице и определяемое её движением, является полусуммой опережающих и запаздывающих потенциалов как решений соответствующих максвелловских уравнений. Это обстоятельство гарантирует с самого начала полную обратимость и симметрию между прошлым и будущим. Однако благодаря подобной модификации поле оказывается в этом формализме лишь вспомогательной величиной<sup>1)</sup>.

Итак, наряду с обычной концепцией, согласно которой имеются заряженные частицы и поле, превращающиеся друг в друга, и попытками «унитарной» классической теории (Ми, Борн) свести заряды к полю, здесь мы имеем обратную идею об исключении поля.

Все соотношения подобной гипотетической теории могут быть выражены в терминах координат взаимодействующих частиц. Таким образом, речь идёт о теории прямого взаимодействия частиц, которое однако передаётся не мгновенно, как в старых теориях дальнего действия XVIII века, но со скоростью света. Тем самым в этой гипотетической «электромеханике» в известной мере сблизятся концепции действия через поле, ведущие начало от Фарадея-Максвелла, и идеи Гаусса-Вебера, пытавшихся отыскать взаимодействие движущихся зарядов путём непосредственного обобщения закона Кулона. В основе теории лежит вариационный принцип Шварцшильда-Тетроде-Фоккера с функцией действия в виде

$$I = - \sum m_a c \int (-da_\mu da^\mu)^{\frac{1}{2}} + \sum_{a < b} \frac{e_a e_b}{c} \iint \delta(R^2) da_\mu da^\mu; \quad (3,17)$$

здесь  $a_\mu$  — координаты частиц,  $R^2 = c^2 (t_1 - t_2)^2 - (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)^2$ . Таким образом, аргумент  $\delta$ -функции равен нулю только тогда, когда положения двух частиц могут быть связаны

<sup>1)</sup> R. P. Feynman, J. A. Wheeler, Rev. Mod. Phys. 17, 157 (1945).

световым сигналом; интеграция производится по мировым линиям обеих частиц. Определяя обычным образом в качестве вспомогательной величины вектор-потенциал поля в точке  $x$ , обязанный частице  $b$ :

$$A_{\mu}^b(x) = e_b \int \delta(xb_{\nu}, xb^{\nu}) db_{\mu},$$

и затем напряжённость поля, получим из вариационного принципа уравнения движения с силой Лоренца, но без членов самодействия. Поскольку в данной теории поле само по себе не существует вне частиц, то, например, для объяснения излучения необходимо допустить наличие поглотителя, хотя бы расположенного очень далеко, что конечно, весьма странно. Перенося идею о прямом взаимодействии частиц и исключении поля на тяготение, мы были бы вынуждены придти к нелепому выводу, что, например, поле тяготения, порождаемое звездой, и тем самым, искривление пространства, не имели бы места, если бы не существовало другой звезды или планеты, на которую могло бы действовать это поле. Эти примеры показывают, что вся теория является лишь формальным приёмом и что на самом деле функции электромагнитного поля не исчерпываются передачей взаимодействия. Напротив, в согласии с обычной хорошо установленной концепцией, являющейся развитием идей Фарадея-Максвелла-Умова-Лебедева-Эйнштейна, электромагнитное поле следует трактовать как самостоятельный особый вид материи с присущими ему степенями свободы, обладающий не только энергией, но также импульсом и моментом количества движения (Садовский), кроме того, способный превращаться в электроны — позитроны и, обратно, возникать за счёт аннигиляции электронов — позитронов и других частиц. Трудности же с бесконечной энергией электромагнитного поля должны быть устранены иным путём. К каким-либо новым результатам гипотеза Фейнмана-Уилера не привела и сами авторы недавно от неё отказались. Всё же представляется целесообразным обратить внимание на критику гипотезы прямого взаимодействия, которая нередко обсуждается в современной литературе<sup>1)</sup>.

<sup>1)</sup> См. также G. L u d w i g, Z. f. Naturforsch. 5a, 637 (1950); H. K ü m m e l, Z. f. Naturforsch. 5a 642 (1950).

д) **Инвариантный форм-фактор.** Рассмотрим один из типичных «формалистических» методов устранения расходимостей, которые иначе называются методами регуляризации, связанный с заменой сингулярной  $\delta$ -функции на новую инвариантную функцию<sup>1)</sup>. Поскольку такие «формалистические» приёмы приводят к устранению расходимостей, необходимо попытаться дать им физическую («реалистическую») интерпретацию.

Сущность рассматриваемого метода заключается в следующем. В ряде важных выражений электродинамики, например, в формуле для плотности точечных зарядов, фигурируют сингулярные функции типа  $\delta(K^2 - x^2)$ . Эти величины предлагается заменять «размазанными» функциями  $g(K^2 - x^2)$ , определяемыми как

$$g(K^2 - x^2) = \delta(K^2 - x^2) - \int_0^{\infty} \delta(K^2 - x^2 - \lambda^2) G(\lambda) d\lambda \quad (3,18)$$

$$(K^2 = k^2 + k_0^2),$$

где  $G(\lambda)$  — некоторая, вообще говоря, малая функция, характеризующая форм-фактор распределения плотности заряда и определяемая в основном условиями

$$\int G(\lambda) d\lambda = 1, \quad \int G(\lambda) \lambda^2 d\lambda = 0. \quad (3,19)$$

Рассмотрим случай  $k_0 = 0$  (фотоны), что не нарушает общности выводов. Тогда соотношение (3,18) эквивалентно замене инвариантной перестановочной функции электромагнитного поля

$$\Delta_0 = \frac{1}{8\pi^3} \int e^{i\mathbf{k}\mathbf{R} - ic\mathbf{x}T} \frac{x}{|\mathbf{x}|} \delta(k^2 - x^2) d^3k d\mathbf{x}, \quad (3,20)$$

<sup>1)</sup> R. P. Feynman, Phys. Rev. 74, 939, 1430 (1948); см. также Д. И. Блохинцев, ЖЭТФ 16, 480 (1946); 18, 596 (1948).

другой инвариантной функцией

$$\Delta_R = \Delta_0 + \Delta_1,$$

где

$$\Delta_1 = -\frac{1}{8\pi^3} \int e^{i\mathbf{k}\mathbf{R}} \frac{\sin cT \sqrt{k^2 - \lambda^2}}{\sqrt{k^2 - \lambda^2}} G(\lambda) d^3k d\lambda. \quad (3,21)$$

Нетрудно убедиться, что такой перестановочной функции соответствует уравнение

$$L\left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2}\right) \left(\square + \frac{\partial^2}{\partial \xi^2}\right) \square A_\mu = -\frac{4\pi e}{c} Q j_\mu, \quad (3,22)$$

где  $L(x)$  есть некоторая рациональная функция от своего аргумента,  $\square$  — оператор Даламбера,  $\xi$  — вспомогательная пятая инвариантная координата, имеющая смысл «внутренней» степени свободы, связанной с отношением массы поля к константе его взаимодействия с электроном, а  $Q$  — некоторая постоянная величина.

Действительно, уравнению (3,22) соответствует перестановочная функция

$$\Delta = \frac{Q}{2\pi} \left( -\Delta_0 + \int d^3k \int_0^\infty d\lambda e^{i\mathbf{k}\mathbf{R}} \frac{\sin cT \sqrt{k^2 - \lambda^2}}{\sqrt{k^2 - \lambda^2}} \frac{\cos \lambda (\xi - \xi')}{\lambda^2 L(-\lambda^2)} \right).$$

Используя произвол в определении функции  $G(\lambda)$ , ограниченной в основном условиями (3,19), можно отождествить эту функцию с  $\frac{\cos \lambda (\xi - \xi')}{\lambda^2 L(-\lambda^2)}$  ( $\xi - \xi'$  — параметр). Тогда, подбирая  $Q$  соответствующим образом, можно в качестве регуляризованной перестановочной функции взять

$$\Delta = \Delta_R$$

Смысл рассматриваемого регуляризационного правила заключается, таким образом, в замене обычного уравнения

$$\square A_\mu = -\frac{4\pi e}{c} j_\mu$$

уравнением с высшими производными (3,22). Тем самым вводится предположение о том, что электрон, кроме электромагнитного поля, порождает также другие поля с различными массами покоя (в данном частном случае спектр масс непрерывен) и с зависящими от всей совокупности этих масс константами взаимодействия с электроном.

Полученная нами<sup>1)</sup> расшифровка данного метода регуляризации вместе с тем помогает установить связь с пятимерной трактовкой теории. В частном случае, когда спектр масс дискретен и число их конечно (равно  $n$ ), уравнение (3,22) заменяется уравнением

$$L(\square) A_\mu = \prod_{i=0}^n (\square - \kappa_i^2) A_\mu = -\frac{4\pi e}{c} B j_\mu,$$

где

$$B = \prod_{i=1}^n \kappa_i^2.$$

Но согласно формуле (3,7) это уравнение эквивалентно системе

$$(\square - \kappa_i^2) A_\mu^i = -\frac{4\pi e}{c} c_i j_\mu, \quad (3,22a)$$

$$i = 0, 1, \dots, n; \quad \kappa_0 = 0; \quad c_i = \frac{\prod_{j=1}^n \kappa_j^2}{\prod_{i \neq j \neq 0} (\kappa_j^2 - \kappa_i^2)},$$

причём

$$A_\mu = \sum_{i=0}^n A_\mu^i, \quad \text{если} \quad \sum_{i=0}^n c_i = 0; \quad \sum_{i=0}^n c_i m_i^2 = 0. \quad (3,22b)$$

Последние два условия, полученные нами, в некоторых частных случаях совпадают с условиями регуляризации

<sup>1)</sup> Д. Иваненко и В. Григорьев, ЖЭТФ 21, 563 (1954).

Паули-Вилларса<sup>1)</sup>. Метод регуляризации, применяемый этими авторами, состоит в следующем. Новые регуляризованные перестановочные функции полагаются равными суммам обычных инвариантных перестановочных функций  $\Delta_0$  и  $\Delta^{(1)}$ , в каждом члене которых стоит, однако, новая масса  $M_i$ :

$$\Delta_{0R} = \sum_i c_i \Delta_0(M_i),$$

$$\Delta_R^{(1)} = \sum_i c_i \Delta^{(1)}(M_i),$$

где  $c_i$  подчиняются условиям (3,22б)<sup>2)</sup>. При этом представляются две возможности: или же в комбинациях сингулярных перестановочных функций производить регуляризацию без разбиения на сомножители, или же регуляризовать каждый из сомножителей в отдельности. Второй случай, который мы будем называть «частным» методом регуляризации, эквивалентен предположению о введении компенсирующих полей мезонного типа, причём константы связи этих полей с электроном, определяемые формулой (3,22а), зависят от всей совокупности масс этих полей.

На базе этой интерпретации становится понятным предельный переход  $\kappa_i \rightarrow \infty$ , используемый Паули и Вилларсом после проведения регуляризации. Так как вспомога-

<sup>1)</sup> В. Паули и Ф. Вилларс, Статья в сборнике «Сдвиг уровней атомных электронов», М., 1951.

<sup>2)</sup> Правила регуляризации Паули-Вилларса в случае непрерывного спектра, когда, например,

$$\Delta_{0R} = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \rho(x) \Delta_0(x, x),$$

эквивалентны рассмотренным уже правилам регуляризации Фейнмана, с той только разницей, что  $G(\lambda)$  равно  $\rho(\lambda) + \delta(\lambda)$  и на  $G(\lambda)$  наложено условие чётности. Сказанное справедливо применительно к «частному» методу регуляризации.

тельные поля имеют мезонный тип, то  $A_{\mu}^i \sim \frac{e^{-x_i r}}{r}$  при  $i \neq 0$  и, следовательно,  $A_{\mu}^i \rightarrow 0$  при  $x_i \rightarrow \infty$  и  $A_{\mu} = \sum_{i=0}^n A_{\mu}^i \rightarrow A_{\mu}^0$ .

При стремлении  $x_i$  к бесконечности вспомогательные поля исключаются и остаётся одно лишь электромагнитное поле.

Интересно отметить, что рассматриваемый «частный» метод регуляризации, точно так же как и «реалистические» методы, использующие вспомогательные поля мезонного типа, не устраняет некоторых расходимостей, например расходимости «собственного» полевого заряда. С точки зрения данной выше интерпретации такой результат является вполне понятным.

Таким образом, несмотря на известный произвол в выборе инвариантного обрывающего фактора, данный метод регуляризации интересен своей связью с методом высших производных согласно нашей интерпретации и тенденцией устранения трудностей при помощи совокупности частиц.

**е) Феноменологическая модель вакуума.** При обсуждении трудностей с расходимостями в теории вакуума было показано, что устранение этих расходимостей в ряде случаев может быть достигнуто путём замены уравнений Максвелла (и других уравнений) некоторыми обобщёнными уравнениями, например с высшими производными. Можно поставить обратный вопрос: нельзя ли учесть вакуумные эффекты путём соответствующих феноменологических обобщений уравнений «свободных» полей, или же законов взаимодействия между этими полями. Некоторым аргументом в пользу такой возможности является то обстоятельство, что, например, учёт «самодействия» электромагнитного поля через электроны—позитроны приводит к появлению нелинейностей в уравнении для этого поля.

Вопрос об обобщении уравнений свободных полей, эквивалентном учёту «вакуумных» эффектов, интересен ещё и с такой точки зрения: как уже было замечено, введение высших производных и нелинейностей в известной мере равносильно предположению об эффективной «структуре» элементарных частиц.

Простейший путь исследования вопроса об эквивалентности феноменологических обобщений учёту вакуума заключается в проверке возможности в рамках этих обобщений описания важнейших вакуумных эффектов — сдвига уровней атомных электронов и дополнительного магнитного момента электрона. Оказывается, что как введение высших производных в уравнения электродинамики, так и нелинейные обобщения этих уравнений не позволяют одновременно (с одним и тем же подбором феноменологических постоянных) описать оба эти эффекта и не могут являться, таким образом, полным эквивалентом вакуумных эффектов. В отдельности же сдвиг атомных уровней или дополнительный момент можно описать путём, например, подбора соответствующего «размазывания» закона взаимодействия электрона с электромагнитным полем<sup>1)</sup>.

Тот факт, что феноменологические обобщения обычной теории (в частности, теории с высшими производными) хотя бы частично описывают вакуумные эффекты, приводит к любопытному выводу, что взаимодействие электрона с «вакуумом» «индуцирует» эффективную «структуру» элементарных частиц. Наглядно говоря, под действием вакуумных флуктуаций начинается «дрожание» электрона, приводящее к «размазыванию» плотности распределения заряда.

В итоге взаимодействие с внешним полем становится таким же, как если бы электрон был не точечным зарядом, а имел сложную мультипольную структуру. Можно доказать также, что взаимодействие с «вакуумом» «индуцирует» эффективный радиус<sup>2)</sup> элементарных частиц, равный среднему геометрическому из классического радиуса электрона и комптоновской длины волны:

$$r_{\text{эфф}} = \sqrt{\frac{\hbar}{mc} \frac{e^2}{mc^2}} = \sqrt{\frac{1}{\alpha} \frac{e^2}{mc^2}} \approx 12 \frac{e^2}{mc^2}.$$

<sup>1)</sup> Более подробно см., например, В. И. Григорьев, «Вестник МГУ» № 3, 29 (1951).

<sup>2)</sup> Н. Н. Боголюбов и С. В. Тябликов, Изв. АН УССР, № 5, 10 (1946).



Таким образом, в современной теории на высшем этапе вновь появляются представления о «структуре» электрона, что ещё раз подтверждает подчеркнутый выше фундаментальный тезис Ленина о неисчерпаемости электрона.

**ж) Гипотеза квантования пространства—времени.** Говоря о свойствах пространства времени, мы обычно подразумеваем его непрерывность. Представляется почти само собой разумеющимся, что координаты  $x$ ,  $y$ ,  $z$ ,  $t$  могут изменяться непрерывно и принимать любые значения. Поэтому уравнения движения частиц и полей имеют вид дифференциальных уравнений. Хотя это фундаментальное свойство пространства времени остаётся неизменным, всё же небезинтересно указать на некоторые новые гипотезы в данном направлении.

В последнее время вновь было обращено внимание на роль, которую может играть в физических явлениях некоторая минимальная длина  $a$  порядка электромагнитного радиуса электрона ( $a \sim 10^{-13}$  см). Прежде всего любопытно отметить, что эффективные линейные размеры лёгких атомных ядер, а также протонов, нейтронов по порядку величины совпадают с эффективным размером электрона. Поэтому представляется не исключённым, что подобная универсальная длина может играть фундаментальную роль в природе, определяя некоторую новую мировую константу наряду с величинами  $h$ ,  $c$ ,  $\kappa$  и другими. При обобщении правил перестановки, определяющих квантование волновых полей, неоднократно делались попытки ввести новые выражения перестановочных функций, зависящих от универсальной длины  $a$ , которые при  $a \rightarrow 0$  переходили бы в обычные формулы с перестановочными функциями  $D$  (или так же  $D'$ ), зависящими лишь от  $h$  и  $c$ .

Универсальная длина играет основную роль также в нелинейных обобщениях электродинамики, поскольку здесь речь идёт о добавлении к обычному лагранжиану нового выражения с коэффициентом, зависящим от новой постоянной, которая должна иметь универсальный смысл. В гипотетической нелинейной электродинамике Борна вводится константа максимального поля  $b$ , связанная

с радиусом электрона соотношением

$$b = \frac{e}{a^2}. \quad (3,23)$$

В квантовой нелинейной электродинамике фигурирует также константа длины, совпадающая, однако, с комптоновской длиной волны электрона  $\frac{h}{mc}$ . При обобщениях, использующих высшие производные, также выступает некоторая универсальная длина, связанная с массой частиц второго поля, которая эффективно вводится в этом методе (Бопп, Подольский). Точно так же новая константа размерности длины входит в гипотетические обобщения теории, связанные с нелокализованными полями, где эффективная область размазанности частиц определяется величиной  $a$ . При этом введение универсальной длины помогает так или иначе устранить или смягчить ряд трудностей, связанных с расходимостями в обычной теории поля.

После всего сказанного, естественно, возникает вопрос: нельзя ли ввести универсальную длину в самую геометрию пространства — времени, с той же целью устранения трудностей, связанных с точечностью электрона и других частиц? Исходя из такой постановки вопроса, некоторое время назад была сделана попытка ввести гипотетическое квантование пространства—времени<sup>1)</sup>. При этом было сделано предварительное простейшее предположение о том, что все координаты (пространственные и, повидимому, также временные) могут принимать лишь целочисленные значения:  $x = ka$ ,  $y = ta$ ,  $z = na$ . Тогда же была отмечена возможность положить в основу не минимальную длину, но элементарный четырёхмерный инвариантный объём  $V_0 = ca^4$ . Таким образом, пространство — время предполагалось своеобразной кубической решёткой точек. Данная гипотеза приводит к замене дифференциальных уравнений на уравнения в конечных разностях, которые при  $a \rightarrow 0$  переходят в обычные уравнения. В частности, основ-

<sup>1)</sup> Амбарцумян и Иваненко, Zs. f. Phys. 64, 563 (1930).

ное лапласово уравнение, гриновская функция которого определяет закон взаимодействия между двумя зарядами, приобретает вид уравнения в конечных разностях:

$$\varphi_{xx} + \varphi_{yy} + \varphi_{zz} = 0, \quad (3,24)$$

где оператор дифференцирования  $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$  заменяется на конечную разность<sup>1)</sup>

$$\varphi_x = \frac{\varphi(x+a) - \varphi(x)}{a}. \quad (3,25)$$

Приближённый подсчёт гриновской функции нового уравнения при условии, что на больших расстояниях получается прежнее выражение  $\frac{1}{r}$ , приводит для энергии самодействия заряда к конечному результату  $V = \frac{3,17}{a} e^2$  вместо  $\frac{e^2}{r} \rightarrow \infty$  при  $r \rightarrow 0$ .

Интересно отметить, что классические уравнения движения электрона в подобном дискретном пространстве—времени естественным образом приводят к члену типа радиационного трения<sup>2)</sup>. Действительно, подставляя в уравнение  $mD^2x_\mu = F_\mu$ , где  $F$  — внешняя сила,  $D^2$  — оператор второй конечной разности, заменяющий вторую производную разложения в ряд Тейлора:

$$D(x) = \frac{1}{\tau} \{x(t) - x(t - \tau)\},$$

$$D^2(x) = \frac{1}{\tau^2} \{x(t) - 2x(t - \tau) + x(t - 2\tau)\}; \quad (3,26)$$

$$\tau = \frac{a}{c}; \quad a \approx \frac{e^2}{mc^2},$$

<sup>1)</sup> См. R. Courant, K. Friedrichs и H. Loevy, Math. Ann. 100, 32 (1928).

<sup>2)</sup> См. F. Moeglich, R. Rompe, Zs. f. Phys. 113, 740 (1939); G. Hoehler, Ann. d. Phys. 9, № 2—4 (1951).

получим искомое уравнение

$$mD^2x = m \sum \frac{2^n - 2}{n!} (-\tau)^{n-2} \frac{d^n x}{dt^n} = \\ = m \frac{d^2 x}{dt^2} - m\tau \frac{d^3 x}{dt^3} + \text{члены высших порядков,} \quad (3,27)$$

где коэффициент  $m\tau \approx \frac{e^2}{c^3}$  совпадает по порядку величины с требуемым значением  $\frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3}$ .

Указанные предварительные соображения были развиты в различных направлениях. Прежде всего возникает вопрос об инвариантной формулировке гипотезы квантованного пространства—времени, представляющей большие трудности в случае точечного пространства—времени. Можно показать, что дискретное пространство—время хотя и не является инвариантным относительно всех лоренцевых преобразований, однако целочисленные лоренцовы преобразования, оставляющие кубическую решётку инвариантной, образуют группу, притом бесконечную. При этом используется неожиданным образом известная связь векторов со спинорами, составленными в свою очередь из целочисленных комплексных спиноров. Если взять вектор с целочисленными координатами и все другие векторы, полученные из него путём целочисленных лоренцевых преобразований, и спроектировать их на пространство координат  $x, y, z$ , то направления, образованные этими проекциями, будут распределены повсюду плотно. Таким образом, данная модель дискретного пространства—времени обладает известной пространственной изотропией. Так как кубическая решётка остаётся инвариантной при трансляциях, переводящих одну точку в другую также с целочисленными координатами, то дискретная модель пространства—времени является в этом смысле также однородной<sup>1)</sup>.

<sup>1)</sup> См. A. Schild, Phys. Rev. **73**, № 4, 414 (1948); Canad. Journ. Math. **1**, 29 (1949); L. Silberstein, Discrete Space-Time, University of Toronto, 1936.

Слабыми пунктами этого варианта теории является ограничение допустимых преобразований и дополнительное условие, которое налагается на скорости.

Отметим ещё другой предварительный вариант инвариантной формулировки гипотезы квантованного пространства—времени. Ограничение целочисленными значениями координат подсказывает мысль об их рассмотрении в качестве операторов, обладающих спектром целых собственных значений. Вводя попрежнему универсальную единицу длины  $a$  и полагая  $x, y, z, t$  эрмитовыми операторами, действующими на функцию от пяти вещественных переменных  $(\eta_0, \eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4)^1$ :

$$\begin{aligned} x &= ia \left( \eta_4 \frac{\partial}{\partial \eta_1} - \eta_1 \frac{\partial}{\partial \eta_4} \right), \\ y &= ia \left( \eta_4 \frac{\partial}{\partial \eta_2} - \eta_2 \frac{\partial}{\partial \eta_4} \right), \\ z &= ia \left( \eta_4 \frac{\partial}{\partial \eta_3} - \eta_3 \frac{\partial}{\partial \eta_4} \right), \\ t &= \frac{ia}{c} \left( \eta_4 \frac{\partial}{\partial \eta_0} + \eta_0 \frac{\partial}{\partial \eta_4} \right), \end{aligned} \quad (3,28)$$

можно показать, что  $x, y, z$  имеют спектр целочисленных значений вида  $ma$ , где  $m$  — целое положительное или отрицательное число, а оператор  $t$  имеет непрерывный спектр значений от  $-\infty$  до  $+\infty$ . При этом  $\eta_\nu$  можно рассматривать в качестве однородных (проективных) координат четырёхмерного пространства постоянной кривизны, связанных в квадратичной форме

$$-\eta^2 = \eta_0^2 - \eta_1^2 - \eta_2^2 - \eta_3^2 - \eta_4^2. \quad (3,29)$$

Преобразования, оставляющие  $\eta^2$  и  $\eta_4^2$  инвариантными, являются общими лоренцовыми преобразованиями переменных  $\eta_1, \eta_2, \eta_3$  и  $\eta_4$ . Переходу от  $\eta_\nu$  к  $\eta'_\nu$  соответствует преобразование от старых координат  $x, y, z, t$  к новым  $x', y', z', t'$ , которые будут обладать тем же спектром собственных значений. В этом варианте теории вместо обычных формул для импульсов как производных

<sup>1)</sup> Сравнить с проективной интерпретацией пятимерия.

по координатам имеем:

$$p_x = \frac{\hbar}{a} \frac{\eta_1}{\eta_4}, \quad p_y = \frac{\hbar}{a} \frac{\eta_2}{\eta_4}, \quad p_z = \frac{\hbar}{a} \frac{\eta_3}{\eta_4}, \quad p_t = \frac{\hbar c}{a} \frac{\eta_0}{\eta_4}. \quad (3,30)$$

Перестановочные соотношения и выражения координат через импульсы имеют форму, непосредственно обобщающую обычные соотношения:

$$[x, p_x]_- = xp_x - p_x x = i\hbar \left\{ 1 + \left( \frac{a}{\hbar} \right)^2 p_x^2 \right\},$$

$$[x, p_y]_- = [y, p_x]_- = i\hbar \left( \frac{a}{\hbar} \right)^2 p_x p_y \text{ и т. д.}, \quad (3,31)$$

$$x = i\hbar \left\{ \frac{\partial}{\partial p_x} + \left( \frac{a}{\hbar} \right)^2 p_x \left( p_x \frac{\partial}{\partial p_x} + p_y \frac{\partial}{\partial p_y} + p_z \frac{\partial}{\partial p_z} + p_t \frac{\partial}{\partial p_t} \right) \right\}.$$

При  $a \rightarrow 0$  эти формулы переходят в обычные квантовые соотношения<sup>1)</sup>.

Наглядная интерпретация подобного формализма заключается в том, что одновременно с минимальной длиной вводится максимальный импульс в духе принципа неопределённости, и теория развивается при некотором произвольном выборе метрики в искривлённом пространстве импульсов. Элемент его объёма может быть, например, выбран в виде

$$d\tau_p = \frac{\hbar dp_x dp_y dp_z dp_t}{ac \left\{ p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 - \frac{p_t^2}{c^2} + \left( \frac{\hbar}{a} \right)^2 \right\}^{\frac{5}{2}}}. \quad (3,32)$$

При  $a \rightarrow 0$  отсюда получим:

$$d\tau = \frac{d^4 p a^4}{\hbar^4}.$$

Тем самым формализм Снайдера в данном варианте гипотезы квантования пространства — времени примыкает к предложению Борна ввести искривлённое пространство импульсов постоянной кривизны (см. ниже).

Развивая указанные соображения об интерпретации формализма Снайдера при помощи метрики в искрив-

<sup>1)</sup> H. S n y d e r, Phys. Rev. 71, 38 (1947).

лённом пространстве импульсов, можно показать, что условия: 1) эрмитовости элемента объёма в  $p$ -пространстве  $\Omega_p = \sqrt{|\gamma_{\alpha\beta}|}$ , где  $|\gamma_{\alpha\beta}|$  — определитель, составленный из коэффициентов метрического тензора в  $p$ -пространстве, 2) требование однородности первого порядка операторов координат относительно производных  $\frac{\partial}{\partial p_k}$  и 3) требование наличия группы для операторов координат и моментов приводят к соотношениям

$$x_r = i\hbar (\nu \delta_{rs} - \lambda p_r p_s) \frac{\partial}{\partial p_s}, \quad 2(\nu - \omega\lambda) \frac{\partial \nu}{\partial \omega} + \lambda \nu = -\frac{a^2}{\hbar c},$$

$$D(\omega) = \exp \left\{ \int \frac{5\lambda + \omega \frac{d\lambda}{d\omega} - \frac{d\nu}{d\omega}}{2(\nu - \omega\lambda)} d\omega \right\}, \quad (3,33)$$

где  $\nu$  и  $\lambda$  являются функциями  $\omega = p^i p_i$ . Отсюда в частном случае  $\nu = 1$ ,  $\lambda = a^2$  получается результат Снайдера<sup>1)</sup>.

Водородоподобный атом в квантованном пространстве был рассмотрен<sup>2)</sup> в нерелятивистском приближении при помощи шредингеровского уравнения в импульсном пространстве, причём поправки к энергетическим термам в случае, если константа минимальной длины  $a_0 \sim 10^{-13}$ , оказались порядка  $137^{-2}$ .

Наиболее слабой стороной данного снайдеровского варианта гипотезы квантованного пространства — времени, как и борновской гипотезы искривлённого пространства импульсов, является неоднозначность выбора метрики в  $p$ -пространстве и, тем самым, вида операторов для координат, а также отсутствие инвариантности относительно произвольных трансляций, при сохранении инвариантности по отношению к вращениям (обычным и лоренцовым).

Ввиду затруднений, возникающих при попытках сформулировать в инвариантном виде уравнения в конечных разностях, можно попытаться положить в основу инвари-

<sup>1)</sup> В. Авербах и В. Медведев, ДАН 54, 41 (1949).

<sup>2)</sup> П. Кард, ЖЭТФ 20, 1144 (1950).

антный четырёхмерный объём пространства — времени. Тогда основные уравнения теории в конечных разностях (например, уравнения Лапласа, Клейна, Дирака, Максвелла и т. д.) следует усреднить по четырёхмерной группе вращений  $G^1$ ). Получающиеся таким путём интегральные уравнения в конечных разностях будут инвариантны и могут быть взяты в качестве основных соотношений. Например вместо уравнения Дирака получается

$$\frac{\int \{\gamma_\lambda \Delta_\lambda \nabla_\lambda \psi + k_0 \nabla' \psi\} dG}{\int dG} = 0,$$

где

$$\begin{aligned} \nabla \psi &= {}_1\nabla_2 \nabla_3 \nabla_4 \nabla \psi, \\ \lambda \nabla \psi &= \frac{\psi(x_\lambda + \Delta x_\lambda) + \psi(x_\lambda - \Delta x_\lambda)}{2}, \quad \nabla_1 \psi = {}_1\nabla_2 \nabla_3 \nabla \psi, \\ \Delta_\lambda \psi &= \frac{\psi(x_\lambda + \Delta x_\lambda) - \psi(x_\lambda - \Delta x_\lambda)}{2\Delta x_\lambda}. \end{aligned}$$

Отсюда в конце концов получается уравнение в конечных разностях бесконечного порядка:

$$\left\{ \frac{8J_2(z)}{z^2} \sum_{\sigma} \gamma_{\sigma} \frac{\partial}{\partial x_{\sigma}} + k_0 \frac{2J_1(z)}{z} \right\} \psi = 0 \quad (z = 2\omega k_0);$$

здесь  $\omega$  — константа, измеряющая величину конечной разности порядка классического радиуса электрона,  $\omega \approx \beta \frac{e^2}{mc^2}$ ,  $J_1$ ,  $J_2$  — бесселевы функции. Это уравнение приводит к спектру масс для частиц спина  $\frac{1}{2}$ . При этом, придавая константе  $\beta$  значение 1,61, требуемое для получения массы протона величины  $M = 1836,5 m$ , мы найдём для промежуточных масс ряд значений, из которых первые равны  $\sim 218 m$  и  $\sim 358 m$ .

Данная теория представляется любопытной попыткой инвариантной трактовки гипотезы пространства — вре-

<sup>1)</sup> В T. Darling, Phys. Rev. 80, 460 (1950). Относительно усреднения по группе см. Мурнаган, Теория представлений групп, М., 1950.



мени, притом приводящей к возможности предварительного установления масс различных частиц как возбуждённых состояний основного поля.

Несмотря на отсутствие безукоризненной математической инвариантной трактовки и физических законченных результатов, гипотеза квантованного, дискретного пространства — времени, привела к ряду интересных исследований, и, будучи связанной с глубокой идеей о возможном наличии новой универсальной константы длины, заслуживает, по всей видимости, значительного внимания.

з) Гипотеза максимального импульса. Для устранения расходимостей можно ввести не минимальную длину, но величину, канонически сопряжённую с ней, а именно, максимальный импульс <sup>1)</sup>. Для этой цели пространство импульсов предполагается искривлённым и обладающим постоянной кривизной, так что радиус кривизны играет роль максимального импульса. Линейный элемент пространства импульсов с известным произволом задаётся в виде

$$d\tau = dE^2 - \left\{ dp_x^2 \left( 1 + \frac{p_x^2}{b^2 - p^2} \right) + 2dp_y dp_z \frac{p_y p_z}{b^2 - p^2} + \dots \right\}, \quad (3,34)$$

что определяет компоненты метрического тензора  $\gamma^{hl}$  в  $p$ -пространстве. Отсюда трёхмерный элемент объёма равен

$$d\Omega = \sqrt{|\gamma|} d^3p = \frac{dp_x dp_y dp_z}{\sqrt{1 - \frac{p^2}{b^2}}}. \quad (3,35)$$

Таким путём мы получаем возможность при интегрировании по импульсам, волновым числам или частотам заменять  $d^3p$  на  $\frac{d^3p}{\sqrt{1 - \frac{p^2}{b^2}}}$ , что даёт удобный простой обры-

<sup>1)</sup> М. Борн, Proc. Roy. Soc. A165, 291 (1938).

вающий фактор. Например, заменив в разложении Фурье величины

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{2\pi^2} \int \frac{e^{ikr}}{k^2} dk_x dk_y dk_z$$

объём  $d^3k$  на видоизменённый объём вида (3,35), получим новую форму потенциальной энергии между двумя зарядами, которая не обращается в бесконечность даже при  $r = 0$ :  $V = \frac{e^2}{a}$  при  $r = 0$ .

Слабым пунктом этой гипотезы является неоднозначность и произвольность выбора метрики, а тем самым и обрывающего фактора. Однако это предложение заслуживает внимания, так как идея «взаимности» координат и импульсов была развита впоследствии с разных сторон. В частности, кривое  $\rho$ -пространство фактически используется в формализме Снайдера квантования пространства — времени (см. выше).

**и) Теория взаимности.** Недавно было вновь обращено внимание на то, что координаты и соответствующие им канонические импульсы входят весьма симметрично в формулировку основных законов природы. Например, канонические уравнения движения

$$\dot{x}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k}, \quad \dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial x_k} \quad (3,36)$$

инвариантны относительно подстановки

$$x_k \rightarrow p_k, \quad p_k \rightarrow -x_k.$$

Точно так же инвариантны по отношению к подобному преобразованию перестановочные соотношения квантовой механики

$$[x_k, p_l]_- = x_k p_l - p_l x_k = i\hbar \delta_{kl}.$$

Обобщая эти факты, Борн выдвигает гипотезу наличия некоторого «принципа взаимности», утверждающего симметрию законов природы по отношению к пространству — времени, с одной стороны, и пространству импульса — энергии, — с другой. Математическим выражением взаим-

ности является указанное преобразование координат и импульсов. Во главу угла теории ставятся величины, которые являются не только релятивистскими, но также «взаимными» инвариантами. Простейшим примером является выражение

$$S = x_k x^k + p_k p^k = R + P, \quad (3,37)$$

где  $x_k$  измеряется в единицах длины  $a$ ,  $p_x$  — в единицах  $b$ , так что  $a \cdot b = \hbar^1$ .

Используя этот двойной в указанном смысле инвариант, можно в качестве основного уравнения поля, описывающего частицы целого спина, взять уравнение

$$\left( -\frac{\partial^2}{\partial p_k \partial p^k} + p_k p^k \right) F = sF. \quad (3,38)$$

Вводя четырёхмерные полярные координаты  $P$ ,  $\theta$ ,  $\varphi$ ,  $\omega$  и полагая  $F = F_k(P) Y_k(\theta, \varphi, \omega)$ , получаем при граничном условии  $F_k \rightarrow 0$  при  $P \rightarrow 0$  решение в виде  $s = 2(2n - k)$ ,  $F_k = P^{\frac{k}{2}} e^{-\frac{P}{2}} L_n^{k+1}(P)$ , где  $L_n^k$  есть  $k$ -я производная полинома Лагерра. Спектр масс покоя частиц целого спина будет теперь определяться корнями уравнения

$$m^k L_n^{k+1}(m^2) = 0. \quad (3,39)$$

Отсюда получатся фотоны ( $m = 0$ ) и бесконечное число других частиц, которые можно пытаться отождествить с массами мезонов целого спина. Аналогичное уравнение можно построить для частиц полуцелого спина.

Ввиду произвольности выбора основного инварианта и уравнения, что является одним из слабых пунктов данной гипотезы, не имеет смысла подробно обсуждать получаемые значения масс и другие детали теории, интерес которой заключается не только в развитии идеи «взаимности», но также в известной близости к другим гипотезам, модифицирующим современную теорию, например, к формализму высших производных. Кроме того, гипотеза «взаимности» непосредственно приводит к теории

<sup>1</sup>) См. M. B o r n, Rev. Mod. Phys. 21, 463 (1949).

нелокализуемых полей, а также ввиду симметрии координат и импульсов связана со снайдеровским вариантом квантования пространства. Тем самым данная попытка, пусть сугубо предварительная, отыскать общее уравнение поля, которое могло бы общим образом описать некоторую совокупность элементарных частиц, заслуживает известного внимания.

**к) Индивидуальные ошибки.** При развитии релятивистской квантовой механики неоднократно обращалось внимание на возможное уточнение соотношений неопределённости, связывающих «парные» ошибки канонически сопряжённых величин координат и импульсов

$$\Delta p \Delta q \gtrsim h,$$

а также аналогичных соотношений для парных ошибок в компонентах электромагнитного и других полей (см. § 2 и 5). Речь идёт о том, что при учёте релятивистских квантовых эффектов типа порождения и аннигиляции пар частиц должны возникать «индивидуальные» ошибки в координатах, компонентах полей и т. д.

Действительно, например, при освещении электрона  $\gamma$ -лучами с целью определения координаты всегда с некоторой вероятностью возникают пары электронов — позитронов в области порядка  $\frac{h}{mc}$ , что, вообще говоря, затрудняет определение «индивидуальной» координаты электрона с абсолютной точностью даже независимо от «парной» ошибки, связанной с одновременным измерением импульса <sup>1)</sup>. Для более полного анализа взаимодействия электрона  $\gamma$ -лучами следует, однако, учесть ещё соотношение между временем измерения и появлением пар.

---

<sup>1)</sup> Невозможность точного измерения координат электрона методом гамма-микроскопа вследствие рождения пар без добавочных предосторожностей была отмечена в ряде работ (статья Иваненко в сборнике «Атомное ядро», М.—Л., 1934; O. Nalren в Н. Н. Johnson, Phys. Rev. 59, 896 (1941)).

Первые указания на индивидуальные ошибки в измерениях координат и времени были даны в следующих работах: Иваненко и Амбарцумян, Zs. f. Phys. 64, 563 (1930); E. Schrödinger, Berlin. Ber. Phys. Math. 12 (1931); см. также Л. Д. Ландау и Р. Пайерле, Zs. f. Phys. 69, 56 (1931).

Перейдём к установлению индивидуальной ошибки для компонент электромагнитного поля. В случае наличия одного электрического поля её весьма просто можно получить из уравнений движения

$$\frac{dp}{dt} = Ze\mathcal{E}. \quad (3,40)$$

Действительно, ошибка в измерении напряжённости поля при помощи пробного тела с зарядом  $Ze$  будет обусловлена неточностью в импульсе  $\Delta p$ , который приобретёт это тело, начавшее двигаться под влиянием поля, за время  $\Delta t$ . Согласно соотношению неопределённости

$$\Delta p \cdot \Delta q \sim h.$$

Отсюда

$$\Delta \mathcal{E} (c\Delta t) \cdot \Delta q \sim \frac{hc}{Ze}. \quad (3,41)$$

Для магнитного поля получим аналогично из уравнений движения в магнитном поле:

$$\Delta H_x \cdot \Delta y \cdot \Delta z \sim \frac{hc}{Ze}. \quad (3,42)$$

В инвариантном виде полученные соотношения можно записать в форме

$$\Delta F_{\mu\nu} \Delta x_\mu \Delta x_\nu \sim \frac{hc}{e'} = \frac{hc}{Ze} \cong \frac{137e}{Z}. \quad (3,43)$$

Отсюда видно, что даже отдельные компоненты напряжённости различных полей могут быть определены лишь в качестве средних по пространственно-временным областям<sup>1)</sup>. Подобные соотношения можно назвать формулами для «индивидуальных», а не парных ошибок, поскольку в них фигурирует лишь одна компонента поля. Аналогичные соотношения можно установить для мезонных и гравитационных полей.

Если мы будем увеличивать заряд (или массу при измерении тяготения), то ошибка при измерении поля на первый взгляд может быть сделана сколь угодно малой.

<sup>1)</sup> И о р д а н и Ф о к. Zs. f. Phys. 61, 206 (1930).

Обычные соотношения неопределённости в квантовой теории полей, связывающие парные величины — компоненты потенциалов и их производных, как раз покоятся на подобном предположении о возможности произвольно большого электрического заряда  $e$  или соответственно мезонного заряда  $g$  (или, в теории тяготения, произвольно большой массы). Однако не следует забывать, что в действительности тела, обладающие большим зарядом  $Ze$  (например, ядра, ионы) или большими массами, связаны всегда с большим числом элементарных частиц, которые должны занять какой-то относительно значительный объём. Таким образом, искомая напряжённость того или иного потенциала электромагнитного (или гравитационного мезонного и т. д.) поля определяется не в точке, где находится заряд или масса, а как среднее по некоторой области. Как известно, в обычной квантовой теории полей подобные обстоятельства, связанные с элементарными частицами, учитываются далеко ещё не полностью.

Аналогичным образом в теории гравитационного поля также могут быть получены соотношения неопределённости как обычного парного типа, так и типа «индивидуальных» ошибок для скобок Кристоффеля и других величин.

Из уравнений движения тела в гравитационном поле при скоростях, малых по сравнению со скоростью света

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \Gamma_{00}^1, \quad (3,44)$$

получается, что значение символа Кристоффеля, т. е. силы тяготения, может быть с помощью измерения импульса пробного тела массы  $m$  найдено лишь с ошибкой

$$\Delta \Gamma'_{00} \sim \frac{\Delta p_x}{mT}, \quad (3,45)$$

где  $T$  — временной интервал между двумя измерениями импульса.

Подобно тому как соотношения неопределённости, связывающие парные ошибки в координатах и импульсах, являются следствием перестановочных соотношений, а соотношения неопределённости для пар компонент

электромагнитного поля вытекают из перестановочных соотношений между ними, естественно ожидать наличия перестановочных соотношений между координатами и функциями поля, которые в свою очередь приводили бы к рассматриваемым индивидуальным ошибкам. Подобные перестановочные соотношения можно задать, например, в виде <sup>1)</sup>

$$A_{\mu}x_{\nu} - x_{\nu}A_{\mu} = i r_{\nu}^0 A_{\mu}, \quad (3,46)$$

где  $A_{\mu}$  — операторный вектор-потенциал,  $r_{\nu}^0$  — новый четырёхмерный вектор, играющий роль обобщённого «радиуса» электрона. Наличие подобных соотношений приводит к видоизменённым правилам перестановки для самих величин поля и, в конце концов, к появлению обрывающего фактора при вычислении интегралов по импульсам. Закон Кулона благодаря этому модифицируется, а электростатическая энергия приобретает вид выражения, конечного даже при  $r=0$ . Кроме того, невозможность точного определения поля в данной точке приводит к отказу от строгого применения гамильтонова метода (см. ниже).

Несмотря на произвол в выборе перестановочных соотношений, анализ индивидуальных ошибок, очевидно, заслуживает внимания, в особенности в связи с теорией нелокализуемых полей и другими обобщениями релятивистской квантовой механики, учитывающими новую константу длины. В дальнейшем была сделана попытка построить такие типы нелокализуемых полей, которые за пределами некоторой малой области допускали бы существование обычных волновых функций, но внутри области обращались бы в нуль <sup>2)</sup>.

**л) Теория взаимности и нелокализуемости.** Развивая соображения о взаимности и привлекая идеи теории нелокализуемых полей можно построить новый вариант теории неточечного электрона <sup>3)</sup>.

<sup>1)</sup> М. А. Марков, ЖЭТФ 10, 1311 (1940). Scherzer, Ann. d. Phys. 16, 790 (1946).

<sup>2)</sup> М. А. Марков, ЖЭТФ 21, 11 (1951).

<sup>3)</sup> Н. Yukawa, Phys. Rev. 77, 219 (1950); 76, 300 (1949); 80, 1047 (1950); C. Gregory, Phys. Rev. 78, 67 (1950); Yennie, там же 80, 1053 (1950); M. Fierz, там же 78, 184 (1950); Helvetica Phys. Acta 23, 412 (1950).

Рассмотрим сперва наиболее простой случай скалярной волновой функции  $U$ , подчиняющейся уравнению Клейна

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x_\mu \partial x^\mu} - \kappa^2 \right) U = 0, \quad \kappa = \frac{mc}{\hbar}.$$

Записав это уравнение через коммутаторы в форме

$$[p_\mu, [p^\mu, U]_-] + m^2 c^2 U = 0, \quad (3,47)$$

можно сделать допущение, что последнее уравнение имеет место не только для обычных, но также для нелокализуемых полей, которые не являются функциями точки. Так как в новой теории функции поля и координаты уже не будут коммутировать друг с другом, то необходимо установить ещё одно новое соотношение типа (3,46), которое характеризовало бы, наглядно говоря, отступление от коммутации  $U$  и  $x_\mu$  ( $U x_\mu - x_\mu U \neq 0$ ). Руководствуясь принципом взаимности Борна, Юкава предлагает для этой цели, во-первых, уравнение

$$[x_\mu, [x^\mu, U]_-] - \lambda^2 U = 0 \quad (3,48)$$

и, во-вторых, дополнительное условие  $[x^\mu, [p^\mu, U]_-] = 0$ , которое эквивалентно  $[p^\mu, [x^\mu, U]_-] = 0$ . Вводя новые переменные  $\xi_\mu = \frac{1}{2}(x'_\mu + x''_\mu)$ ,  $r_\mu = x'_\mu - x''_\mu$ , перепишем предыдущие уравнения в виде

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial^2}{\partial \xi_\mu \partial \xi^\mu} - \kappa^2 \right) U(\xi_\mu, r_\mu) &= 0, \\ (r_\mu r^\mu - \lambda^2) U(\xi_\mu, r_\mu) &= 0. \end{aligned} \quad (3,49)$$

Отсюда ясно, что волновую функцию  $U$  можно представить в виде разложения Фурье

$$\begin{aligned} U(\xi_\mu, r_\mu) &= \\ &= \int U(k_\mu, r_\mu) \delta(k_\mu k^\mu + \kappa^2) \delta(r_\mu r^\mu - \lambda^2) \delta(k_\mu r^\mu) e^{ih_\mu \xi_\mu} d^4 k. \end{aligned} \quad (3,50)$$

Очевидно,  $\xi_\mu$  играют роль обычных локальных координат, тогда как переменные  $r_\mu$  являются переменными, описывающими какие-то внутренние движения частицы,



волновая функция которой представлена в виде указанного разложения Фурье. Аналогичная трактовка может быть дана для спинорных и других полей. Можно пытаться интерпретировать параметр  $\lambda$  как «радиус» частицы, что подсказывается рассмотрением случая покоящейся частицы. Так как при  $k_1 = k_2 = k_3 = 0$ ,  $k_4 = \kappa$ , то следовательно, ввиду наличия множителя  $\delta(\kappa r_4)$  имеем  $r_4 = 0$ , и мы получаем уравнение

$$r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 = \lambda^2.$$

Однако, как было отмечено Фирцем, подобная интерпретация не является обязательной, так как соотношения Юкава совпадают с системой уравнений, описывающих суперпозицию полей, сопоставленных частицам высшего спина. Тогда координаты  $r_\mu$  приобретают смысл спиновых переменных, не связанных с описанием размеров частиц. Всё же мы получаем в рассматриваемом формализме простой способ построения одного из вариантов общей теории частиц, что и побуждает отнестись со вниманием к этой гипотезе.

**м) Матрица рассеяния.** Своеобразный метод, который возможно окажется пригодным для устранения расходимостей в теории частиц и полей был предложен в виде формализма матрицы рассеяния, или  $S$ -матрицы <sup>1)</sup>.

В теории  $S$ -матрицы следует различать, с одной стороны, некоторую бесспорную часть, связанную с широким и систематическим использованием наряду с гамильтоновой функцией матрицы рассеяния в нерелятивистской и релятивистской квантовой механике и в теории вакуума, что оказалось удобным во многих отношениях. С другой стороны, речь идёт о специальной программе, выдвинутой

<sup>1)</sup> W. Heisenberg, Zs. f. Phys. 120, 513 (1943); 120, 673 (1943); Zs. f. Naturforsch. 1, 608 (1946); 5a, 251 (1950); статья Д а й с о н а «Теории излучения Томонага, Швингера и Фейнмана в сборнике «Сдвиг уровней атомных электронов», М. (1950) (а также другие статьи этого сборника); F. J. Dyson, Phys. Rev. 75, 1736 (1949), сокращ. перевод в рефер. сборнике, серия 3, № 11, стр. 64, М., 1951; M. Fierz, Helvetica Phys. Acta 23, 731 (1950); C. Moller, Kgl. Danske Vid. Selsk. 23, 3 (1945); Д. И. Б л о х и н ц е в, ЖЭТФ 17, 266 (1947).

Гейзенбергом, который пытается поставить  $S$ -матрицу во главу угла всей теории как основную величину, долженствующую заменить собой обычный гамильтониан взаимодействия и связанное с ним уравнение типа Шредингера. К этой гипотезе универсальной  $S$ -матрицы примыкают новейшие соображения Гейзенберга по «генеральной» теории частиц в духе теории слияния де Бройля. Программа эта, далеко ещё не развитая, скорее только набросанная в общих чертах, не привела пока что к каким-либо конкретным или бесспорным общим результатам, но также представляет интерес с разных точек зрения. В частности, здесь вновь подчёркивается значение некоторой минимальной длины, предполагавшейся ещё в гипотезе квантования пространства — времени, и обсуждается с новой точки зрения принцип причинности.

Остановимся сначала коротко на бесспорной части теории  $S$ -матрицы, в рамках обычной квантовой теории, основанной на гамильтоновом формализме. Рассмотрим для примера сходящийся пучок частиц, заданный в какой-то отдалённый момент времени ( $t = -\infty$ ) и описываемый волновой функцией  $\psi_{-\infty}$ . После того как благодаря наличию взаимодействия частицы испытали столкновения, рассеяние, произвели порождение иных частиц и т. д., мы будем иметь в далёком будущем ( $t = +\infty$ ) какое-то новое распределение, характеризующее асимптотической функцией  $\psi_{+\infty}$ . Матрица  $S$  является оператором, преобразующим  $\psi_{-\infty}$  в  $\psi_{+\infty}$ :

$$\psi_{+\infty} = S\psi_{-\infty}. \quad (3,51)$$

В простейшем случае рассеяния, трактуемого по нерелятивистской квантовой механике, имеем, как известно, асимптотическое решение вида

$$\psi_{r \rightarrow \infty} = e^{ikhz} + \frac{f(\theta)}{r} e^{ikr}, \quad (3,52)$$

где первый член даёт плоскую волну, распространяющуюся по оси  $z$  (падающие частицы), а второй — сферическую расходящуюся волну, соответствующую рассеянному по-

току частиц; при этом амплитуда равна

$$f(\theta) = \frac{1}{2ik} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1)(S_l - 1) P_l(\cos \theta), \quad (3,52a)$$

где  $S_l = e^{2i\eta_l}$  — оператор, или матрица рассеяния,  $\eta_l$  — сдвиг фазы, вызванный действием силового центра, характеризующегося какой-то потенциальной энергией  $U(r)$ , исчезающей на бесконечности. В квазиклассическом приближении для больших квантовых чисел  $\eta_l \sim \frac{U\tau}{\hbar}$ , где  $\tau$  — промежуток времени, характеризующий столкновение.

Существенно, что энергия и импульс системы при рассеянии сохраняются, так что матрица  $S$  содержит лишь элементы, соответствующие реальным наблюдаемым переходам, без включения виртуальных, промежуточных переходов, которые способны идти без сохранения энергии и которые рассматриваются в обычной квантовой теории рассеяния, взаимодействия и т. д.

Можно показать, что  $S$ -матрица позволяет описывать не только рассеяние, но также стационарные состояния (например, электрона в атоме водорода), если использовать мнимую часть фазы в представлении  $S = e^{2i\eta}$ . Действительно, для дискретных состояний энергии, когда  $E < 0$ , имеем:

$$k = -\frac{i}{\hbar} \sqrt{2m|E|} = -ix.$$

Следовательно, для того чтобы  $\psi$ -функция, в которой появляется множитель  $e^{xr}$ , оставалась конечной при  $r \rightarrow \infty$ , необходимо, чтобы матрица  $S$  обращалась в нуль. Таким образом, уравнение

$$\eta_l(E) = i\infty$$

даст нам искомые дискретные уровни энергии. Следует отметить, что условие  $S=0$  сверх дискретных уровней энергии даёт ещё дополнительные решения<sup>1)</sup>.

<sup>1)</sup> Г. Вентцель, Введение в квантовую теорию волновых полей, М.—Л., 1947.

Основным свойством  $S$ -матрицы является её унитарность:

$$SS^+ = S^+S = 1. \quad (3,53)$$

Соотношение унитарности накладывает на элементы матрицы некоторые ограничения, часть из которых может быть истолкована как равенство единице суммы вероятностей конкурирующих процессов. Как для всякого унитарного оператора, можно записать  $S = e^{i\eta}$ , где  $\eta$  — эрмитов оператор, совпадающий по существу с энергией взаимодействия.

Существенную роль  $S$ -матрица начинает играть в релятивистской квантовой механике. Здесь  $S$  должна быть инвариантной величиной. В квантовой электродинамике с вакуумной поправкой на электромагнитную массу электрона ( $\delta m$ ) плотность энергии взаимодействия равна

$$H^I = -\frac{1}{c} \dot{j}_\mu(x_0) A_\mu(x_0) - (c^2 \delta m) \psi^*(\mathbf{r}) \rho_s \psi(\mathbf{r}), \quad (3,54)$$

где  $x$  означает все четыре координаты.

Если исходить из этого выражения плотности энергии взаимодействия, то для  $S$ -матрицы получается выражение

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} \left( -\frac{i}{\hbar c} \right)^n \left[ \frac{1}{n!} \right] \times \\ \times \int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 \dots \int_{-\infty}^{+\infty} dx_n P(H^I(x_1) \dots H^I(x_n)), \quad (3,55)$$

где символ  $P$  означает расположение подинтегральных множителей в определённом «хронологическом» порядке (справа стоят члены, относящиеся к более раннему моменту времени). Это представление вытекает из уравнения шредингеровского типа, которому подчиняется волновая  $\psi$ -функция в представлении взаимодействия

$$\frac{\hbar}{i} \frac{\partial \psi}{\partial t} = \int H \psi d\tau,$$

где  $H$  — плотность гамильтониана взаимодействия. Действительно, производя последовательные интегрирования

и отмечая значками  $n'$ ,  $n''$  и т. д. матричные элементы, имеем:

$$\begin{aligned} \psi(n', t = +\infty) = & \\ = \psi(n', t = -\infty) + \frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{n''} H_{n'n''}(t) d\tau dt \psi(n'', t = -\infty) + & \\ + \left(\frac{i}{\hbar}\right)^2 \int_{i>t'} \int \sum H_{n'n''}(t) H_{n''n'''}(t) dt dt' d\tau d\tau' \times & \\ \times \psi(n''', t = -\infty) + \dots \end{aligned}$$

Отсюда по определению  $S$ -матрицы (3,51) получим:

$$S_{n'n''} = I_{n'n''} + \left(-\frac{i}{\hbar}\right) \int H_{n'n''}(t) d\tau dt + \dots,$$

где матричный элемент  $(n'n'')$  соответствует переходу, идущему с сохранением энергии и импульса. Таким образом, можно написать  $S = 1 + R$ , где часть  $R$  определяет рассеяние, порождение частиц и т. д.

Разлагая произведение (3,55) в ряд по степеням энергии взаимодействия или параметра связи, т. е., иначе говоря, соответствующего «заряда» или константы тонкой структуры, получим отсюда только что выведенный результат:

$$\begin{aligned} S = 1 + \left(-\frac{i}{\hbar c}\right) \int_{-\infty}^{+\infty} H^I(x) d\tau dt + & \\ + \left(-\frac{1}{\hbar c}\right)^2 \int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 \int_{-\infty}^{+\infty} dx_2 H^I(x_1) H^I(x_2) + \dots \quad (3,56) \end{aligned}$$

В теории вакуума показывается, что после перенормировки массы и заряда получается последовательная теория, в которой  $S$ -матрица и все результаты относительно процессов рассеяния (например, рассеяния света на свете, рассеяния электрона в поле и т. д.), полученные с её помощью, будут конечными.

Перейдём теперь ко второй части теории  $S$ -матрицы, которая собственно и представляет собой гипотетический выход за рамки установленной релятивистской квантовой

механики, включающей новейшую теорию вакуума. Гейзенберг предлагает взять за основу некоторую универсальную  $S$ -матрицу независимо от её конкретной связи с энергией взаимодействия, которая была установлена в обычной теории и которая может и не иметь места при сильных взаимодействиях, когда, например, разложение в ряд по параметру связи частицы с полем может терять смысл. (Напомним, что в противоположность малому значению электромагнитной постоянной тонкой структуры  $\alpha = \frac{e^2}{\hbar c} = \frac{1}{137}$   $\pi$ -мезонная ядерная постоянная тонкой структуры  $\beta = \frac{g^2}{\hbar c} \approx \frac{1}{6}$  уже не слишком мала по сравнению с единицей.) При этом в гипотезе универсальной  $S$ -матрицы делается попытка вообще отказаться от использования гамильтоновой функции и, следовательно, от уравнения шредингеровского типа в релятивистской квантовой теории

$$\frac{\hbar}{i} \frac{\partial \psi}{\partial t} = H\psi,$$

определяющего поведение  $\psi$  через бесконечно малые промежутки времени по её значениям в предыдущие моменты, и предлагается ограничиться взамен этого асимптотическим описанием результирующих процессов при помощи  $S$ -матрицы. Тем самым отказываются от включения в теорию описания деталей процесса, например рассеяния вблизи сталкивающихся частиц. Наблюдаемыми величинами Гейзенберг считает лишь 1) уровни энергии стационарных состояний систем и 2) эффективные сечения процессов рассеяния, излучения, поглощения, порождения частиц и т. д. Некоторым физическим аргументом, служащим для пояснения указанных постулатов является при этом гипотеза о наличии новой универсальной константы типа минимальной длины. Наличие подобной константы отнюдь не обязательно приводит к отказу от гамильтонова формализма, но подсказывает возможность подобного отказа. Аргументы типа наличия индивидуальных ошибок в компонентах электромагнитного поля или близкие идеи теории нелокальных полей подсказывают со своей стороны отход от обычной гамильтоновой формулировки, поскольку уже,

повидимому, становится затруднительным определять значение поля в данной точке ввиду некоммутативности координат и напряжённостей поля и невозможности их одновременного измерения<sup>1)</sup>. Независимо от отсутствия каких-либо конкретных новых результатов в теории универсальной  $S$ -матрицы, слабым пунктом подобной программы является необходимость установления дополнительных критериев для выбора унитарной инвариантной  $S$ -матрицы, удовлетворяющей также принципу соответствия, т. е. переходящей в случае слабой связи в обычное выражение, связанное с гамильтонианом взаимодействия. Действительно, без каких-либо новых ограничений выбор выражения  $S$ -матрицы оказывается слишком произвольным, вроде подбора нелинейных инвариантов, обобщающих электродинамику в теории Борна-Инфельда.

Для построения «генеральной» теории частиц можно попытаться взять за основу некоторое «мировое» спинорное поле, задав выражение энергии взаимодействия между спинорными частицами, например в виде

$$H(x) = \lambda (\bar{\psi}(x) \gamma_{\mu} \psi(x)) (\bar{\psi}(x) \gamma_{\mu} \psi(x)), \quad (3,57)$$

где  $\lambda$  — константа связи или самодействия, которой можно сопоставить константу минимальной длины;  $\gamma_{\mu}$  — дираковские матрицы. Здесь  $\bar{\psi}$  не является эрмитовски сопряжённой к  $\psi$ , и  $H$  также не будет эрмитовой. Данное выражение по существу совпадает с выражением взаимодействия нелинейного типа, обсуждавшимся нами ранее в связи с нелинейной теорией электрона (см. выше).

При этом для основных спиноров разумно применять правила перестановки, регуляризованные при помощи спинорных же полей частиц других масс. Отметим, что регуляризация спинорных полей эквивалентна введению

<sup>1)</sup> Недавно была вновь подчеркнута затруднительность в рамках гамильтонова формализма построения теории, свободной от бесконечностей, если не прибегать к приёму Ватагина и Уленбека—Пайса введения дифференциального оператора бесконечно высокого порядка, типа  $e^{\int (\square)}$ , обеспечивающего обрезание высоких импульсов инвариантным образом и означающего переход к интегральному уравнению [K. Wildermut, Zs. f. Naturforsch. 5a, 373 (1950)].

уравнений с высшими производными (в данном случае уравнений с оператором, являющимся произведением дираковских операторов<sup>1)</sup>).

Таким образом, правила перестановки берутся в виде

$$[\psi_\alpha(x), \bar{\psi}_\beta(x')]_+ = -iS_{\alpha\beta}^{\text{reg}}(x-x'), \quad (3,58)$$

где  $S^{\text{reg}}$  — регуляризованная перестановочная функция,

$$S_{\alpha\beta}^{\text{reg}} = \frac{1}{(2\pi)^4} \int dk \frac{(ik_\tau \gamma_\tau^{\alpha\beta} - \chi)}{k_\lambda^2 + \chi^2} e^{ih_\sigma(x-x')_\sigma} = \int \rho(\chi) d\chi S_{\sigma\beta}^x$$

и  $S_{\sigma\beta}^x$  — нерегуляризованная перестановочная дираковская функция, а  $\rho(\chi)$  — функция, определяющая спектр масс частиц, применяемых для регуляризации, и подчинённая условию

$$\int \rho(\chi) \chi^n d\chi = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

В случае дискретного спектра

$$\rho = \sum_l c_l \delta(\chi - \chi_l),$$

так что

$$S_{\alpha\beta}^{\text{reg}} = \sum c_l S_{\alpha\beta}^l.$$

Эти перестановочные соотношения (3,58), свободные от расходимостей, и простейшая энергия взаимодействия указанного выше вида предлагаются в качестве основных соотношений общей теории элементарных частиц. Так как для компенсации расходимостей часть коэффициентов должна быть отрицательна, то в разложениях

$$\psi = \sum a_l \psi_l, \quad \bar{\psi} = \sum a_l \bar{\psi}_l, \quad a_l^2 = c_l \quad (3,59)$$

ряд амплитуд будет мнимым.

<sup>1)</sup> См. Иваненко и Григорьев, ЖЭТФ 21, № 4, 563 (1951); W. Thirring, Phys. Rev. 77, 570 (1950).



Однако дальше Гейзенберг снова предлагает базировать теорию на гипотетической универсальной матрице  $S$ . Если теперь образовать при помощи неэрмитовой энергии взаимодействия  $H$  неунитарный оператор

$$T = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int P[H(x_1) \dots H(x_n)] d^4x_1 \dots d^4x_n \quad (3,60)$$

по методу построения  $S$ -матрицы рассеяния, то с его помощью можно построить искомую матрицу, которая уже будет унитарной.

$$S' = T(T^*T)^{-\frac{1}{2}} = (TT^*)^{-\frac{1}{2}}T. \quad (3,61)$$

В случае эрмитова выражения  $H$  имеем  $S' = T$ . Нарушение хронологического порядка в новой матрице  $S'$  может привести к нарушению обычной причинной связи в процессах, притом при высоких энергиях не только на самых малых расстояниях, порядка минимальной длины. Иначе говоря, неэрмитовы части в энергии взаимодействия приводят к переносу взаимодействий со сверхсветовой скоростью, т. е. к своеобразному дальнодействию в основном в пространственно-временных областях порядка минимального интервала и тем самым к нарушению обычной причинной связи, сохраняемой в квантовой механике, как и в классической теории.

Этот нетерпимый вывод заставлял нас отнестись отрицательно к данной части теории поля, основанной на  $S$ -матрице, притом специального вида. Схема Гейзенберга приводит, кроме того, к некоторым формальным дефектам, в виде, например, отсутствия групповых свойств величин  $S'$  при использовании только квантов положительной энергии.

Следует ещё раз подчеркнуть, что сама по себе идея наличия фундаментального нелинейного спинорного поля и гипотеза слияния отнюдь не связаны непосредственно с гейзенберговской программой построения теории на базе универсальной  $S$ -матрицы и тем более с указанным специальным неудачным выбором этой матрицы. Напротив, в признании Гейзенбергом возможности нарушения обычной причинной связи мы видим новое проявление

известных идеалистических воззрений копенгагенской махистской школы, которым следует противопоставить материалистическое понимание причинности.

Своеобразие процессов, происходящих при весьма высоких энергиях и на самых малых расстояниях, когда физическая наука вплотную подходит к вопросам структуры самих элементарных частиц, во всяком случае побуждает тщательно проанализировать возможное уточнение причинной взаимосвязи явлений в этих случаях<sup>1</sup>).

Марксистско-ленинская философия, подчёркивая наличие объективной причинной связи в природе, указывает вместе с тем на приближённое отражение этой связи в человеческих понятиях на том или ином этапе познания. В своём замечательном по глубине анализе этого вопроса Ленин писал: «Признание объективной закономерности, причинности, необходимости в природе совершенно ясно у Энгельса наряду с подчёркиванием относительного характера наших, т. е. человеческих, приближительных отражений этой закономерности в тех или иных понятиях»<sup>2</sup>).

**н) Пятимерие.** Рассмотрим сейчас стоящий в стороне от других обобщений формализм пятимерной теории, предложенной для целей объединения гравитационных и электромагнитных уравнений<sup>3</sup>), о котором мы упоминали в обзоре попыток построения единой картины вещества.

В этой теории интервал задаётся в виде

$$d\sigma^2 = \gamma_{ik} dx^i dx^k = ds^2 - ad^2\vartheta \quad (i, k = 1, 2, 3, 4, 5), \quad (3,62)$$

<sup>1</sup>) См. Д. И. Блохинцев, Вестник МГУ № 3 (1945); Journal of Physics 10, 162 (1946); ЖЭТФ 16, 480 (1946); Я. П. Терлецкий, Динамические и статистические законы физики, М., 1949.

<sup>2</sup>) В. И. Ленин, Материализм и эмпириокритицизм, Госполитиздат, 1951, стр. 140.

<sup>3</sup>) Th. Kaluza, Sitzungsber. Preuss. Akad. 966 (1921); П. Г. Бергман, Введение в теорию относительности, М., 1947, гл. 17; см. также Л. Ландау и Е. Лифшиц, Теория поля, М.—Л., 1941, § 100; W. Pauli, Ann. d. Phys. 18, 305, 337 (1933); O. Veblen, Projektive Relativitätstheorie, Berlin, 1933; Ф. А. Мандель, Zs. f. Phys. 45, 287 (1927); 56, 838 (1929).

где к обычному интервалу  $ds^2 = g_{\alpha\beta} dx_\alpha dx_\beta$  ( $\alpha, \beta = 1, 2, 3, 4$ ) добавляется квадрат инварианта  $d\vartheta = dx^5 + A_\nu dx_\nu$ ;  $A_\nu$  — четыре компоненты вектор-потенциала и  $\alpha$ -константа. Тогда, во-первых, уравнения типа эйнштейновских гравитационных, но с использованием метрического тензора  $\gamma_{ih}$  вместо  $g_{\alpha\beta}$  приводят в точности как к старым уравнениям Эйнштейна, так и к уравнениям Максвелла. Во-вторых, уравнения геодезической линии будут содержать не только член с силой тяготения, но также член с силой Лоренца, действующей на заряженную частицу. Действительно, полагая  $\alpha = \frac{e^2}{m^2 c^4}$  и приравнивая постоянную величину  $\frac{d\vartheta}{ds} = \frac{mc^2}{e}$ , получим:

$$\frac{d^2 x^\mu}{ds^2} = -\Gamma_{\nu\rho}^\mu \frac{dx_\nu}{ds} \frac{dx_\rho}{ds} + \frac{e}{mc^2} g^{\mu\nu} F_{\rho\nu} \frac{dx^\rho}{ds}. \quad (3,63)$$

Таким образом, не только в уравнениях поля, но и в уравнениях движения пятая координата успешно играет формальную «соединительную» роль.

Однако при всей простоте объединения гравитационных и электромагнитных членов мы не получаем при этом чего-либо нового. Физический смысл пятой координаты также остаётся неясным, поскольку в окончательных формулах она не фигурирует. Ряд авторов интерпретировал пятую координату при помощи проективной геометрии, в которой, как известно, для описания  $n$ -мерного пространства используется  $n+1$  координата. При этом, однако, не было получено каких-либо новых физических результатов.

Обратимся к применению пятимерного формализма в квантовой теории, с которой связан его наибольший успех. В самом деле, любопытным обстоятельством является факт, что основное квантовое релятивистское волновое уравнение

$$\left( \Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - k_0^2 \right) \Phi = 0 \quad \left( k_0 = \frac{mc}{\hbar} \right),$$

являющееся, как выяснилось впоследствии, уравнением свободного скалярного и псевдоскалярного поля, описывающим частицы исчезающего спина и имеющим место для

компонент всех других свободных полей, связанных с массой покоя (векторных, спинорных дираковских и т. д.), было впервые установлено Клейном именно на базе пятимерного формализма<sup>1)</sup>. Для этого достаточно написать обобщённое лапласово (или, точнее, волновое) уравнение в пространстве не четырёх, а пяти измерений с указанной выше метрикой. Тогда сразу получается уравнение при наличии электромагнитного поля в общей теории относительности, иначе говоря, также при наличии поля тяготения. Снова пятая координата играет удачную «соединительную» роль; при этом сама пятая координата исключается при помощи добавочного условия периодичности:

$$\Phi(x_1, \dots, x_5) = e^{i \frac{l}{\hbar c} x_5} \Phi(x_1, \dots, x_4). \quad (3,64)$$

Тогда, выписывая по общим правилам лапласов оператор для пятимерной метрики указанного вида, получим:

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x_\mu} \left( \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \frac{\partial \Phi}{\partial x_\nu} \right) - 2A^\nu \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_\rho \partial x_\nu} + \left( A_\nu A^\nu - \frac{m^2 c^4}{e^2} \right) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_\rho^2} = 0. \quad (3,65)$$

Для случая отсутствия поля тяготения в метрике Пуанкаре-Минковского после исключения пятой координаты имеем известный вид уравнения<sup>2)</sup>:

$$\left\{ \left( \nabla - \frac{ie}{\hbar c} \mathbf{A} \right)^2 - \left( \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} - \frac{ie}{\hbar c} \varphi \right)^2 - k_0^2 \right\} \times \Phi(x_1, \dots, x_4) = 0. \quad (3,66)$$

<sup>1)</sup> О. Клейн, Zs. f. Phys. **37**, 895 (1926).

<sup>2)</sup> Заметим, что Клейн применяет несколько иной выбор констант в основной метрической форме (3,62), полагая  $d\vartheta = dx^5 + \beta A_\nu dx^\nu$  и  $d\sigma^2 = ds^2 + d\vartheta^2$ , где  $\beta = \sqrt{\frac{2\kappa}{c}}$  ( $\kappa$  — гравитационная константа). Тогда условие периодичности по пятой координате, имеющей размерность длины, записывается в виде

$$\Phi(x_1, \dots, x_5) = \Phi(x_1, \dots, x_4) e^{\frac{i}{\hbar} p_5 x_5},$$

где импульс, сопряжённый пятой координате, есть  $p_5 = \frac{l_0}{c \sqrt{2\kappa}}$ ; иначе говоря, тем самым вводится новая константа длины  $l_0$ .

Сразу же после вывода основного релятивистского уравнения с помощью пятой координаты ряд авторов получил его обычным путём, применяя к волновой функции соотношение между энергией и импульсом, рассматриваемое как оператор,

$$\left(\frac{E^2}{c^2} - p_x^2 - p_y^2 - p_z^2 - m^2c^2\right)\Phi = 0,$$

где

$$E = -\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial t}, \quad p_x = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x} \quad \text{и т. д.}$$

В дальнейшем пятая координата ещё раз была применена с целью удобного формального соединения полей, а именно, векторного и псевдоскалярного полей, которые описывают частицы спина 1 и 0 и, вероятно, применимы к мезонам соответствующих спинов. Как известно, для устранения дипольных членов в энергии взаимодействия нуклеонов, приводящих к расходимостям, в ряде работ используется предложенная Мёллером и Розенфельдом смесь мезонных полей (векторного и псевдоскалярного). Тогда, полагая константы связи нуклеонов с векторным и псевдоскалярными полями, равными по величине, мы скомпенсируем опасные дипольные члены. Следует отметить, что хотя выражение для энергии взаимодействия нуклеонов в теории не содержит дипольных членов, однако квадрупольный момент дейтерона, обязанный наличию этих членов, в статическом приближении не может получиться из этой теории, которая тем самым не может быть использована в качестве основы модели ядерных сил. Поэтому дальнейшие её выводы имеют лишь смысл указаний на формальные возможности теории. Действительно, оказывается возможным <sup>1)</sup> построить пятимерную теорию, в которой векторное и псевдоскалярное поля являются компонентами тензора объединённого поля, благодаря чему, вводя единую константу связи нуклеонов с этими объединёнными полями, мы автоматически придём

<sup>1)</sup> C. Møller a. L. Rosenfeld, Det. Kgl. Danske Vidensk. Selsk. 17, № 8 (1940); L. Rosenfeld, Nuclear forces, Amsterdam, 1948; C. Møller, Det. Kgl. Danske Vidensk. Selsk. 18, № 6 (1941).

к упомянутой компенсации. Пусть, как обычно, векторное поле задано уравнениями Прока (см. «Классическая теория поля», § 47)

$$F_{kl} = \frac{\partial A_l}{\partial x^k} - \frac{\partial A_k}{\partial x^l} + S_{kl},$$

$$\frac{\partial F_{kl}}{\partial x^i} + k_0^2 A_k = j_k \quad (k, l = 1, 2, 3, 4), \quad (3.67)$$

где  $A_k$  — четырёхвектор потенциала,  $j_k$  — плотность квазизаряда и тока,  $S_{kl}$  — антисимметричный тензор плотности квазиэлектрического и квазимагнитного моментов. Пусть, далее, псевдоскалярное поле определено уравнениями

$$\Phi_k = -\frac{\partial A_0}{\partial x^k} + P_k,$$

$$\frac{\partial \Phi_k}{\partial x^h} + k_0^2 A_0 = R \quad (k = 1, 2, 3, 4), \quad (3.68)$$

где  $A_0$  — псевдоскалярный потенциал,  $R$  — плотность источника поля,  $P_k$  — вектор квазимомента (аналог  $S_{kl}$ ). Плотности источников поля  $j_k$ ,  $R$  могут быть объединены в один пятивектор  $j_\mu$  ( $\mu = 0, 1, 2, 3, 4$ )<sup>1)</sup>, а плотности моментов  $S_{kl}$  и  $P_k$  могут быть объединены в один антисимметричный пятимерный тензор

$$S_{\mu\nu} \quad (\mu, \nu = 0, 1, 2, 3, 4), \quad S_{0k} = P_k. \quad (3.69)$$

Точно так же можно объединить потенциалы и поля:

$$A_\mu \sim (A_1, A_2, A_3, A_4 = i\varphi, A_0),$$

$$F_{\mu\nu} \sim (F_{kl}, \Phi_k), \quad F_{0k} = \Phi_k. \quad (3.70)$$

Теперь уравнения объединённого поля запишутся в виде

$$F_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} + S_{\mu\nu},$$

$$\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} + k_0 A_\mu = j_\mu \quad (\mu, \nu = 0, 1, 2, 3, 4) \quad (3.71)$$

<sup>1)</sup> O. Klein, Arkiv f. math. astr. o. fys. 25, № 15 (1936).

и будут ковариантны относительно вращений некоторого пятимерного пространства, произвольная точка которого задаётся координатами

$$x_\mu (x_1, x_2, x_3, x_4 = ict, x_0).$$

Дальнейшее развитие теории, не давшее каких-либо определённых физических результатов, зависит от интерпретации дополнительной пятой координаты  $x_0$ . В качестве попытки применения полученного объединённого уравнения для теории мезонов можно ввести формальную интерпретацию реального пространства — времени как гиперповерхности в пространстве типа Де-Ситтера с радиусом  $R_0 = \text{const}$ . Клейн пытался интерпретировать пятую координату как величину, сопряжённую заряду частицы.

Рассмотрим ещё один предварительный вариант пятимерной теории, который позволяет подойти к определению спектра масс<sup>1)</sup>.

Рассмотрим векторное поле (спин 1), обладающее массой покоя. Такое поле, которое будем называть «мезонным», может распространяться с любой скоростью, меньшей скорости света. Отсюда следует, что релятивистский интервал  $ds$ , соответствующий полю, не равен нулю. Однако можно ввести более общее выражение для интервала

$$dS^2 = c^2 dt^2 - d\mathbf{r}^2 - ds^2, \quad (3,72)$$

где  $dS$  и  $ds$  — два инварианта. Тогда для свободного поля снова можно положить  $dS = 0$ :

$$c^2 dt^2 - d\mathbf{r}^2 - ds^2 = 0. \quad (3,73)$$

Для электромагнитного поля должно, очевидно, выполняться ещё добавочное условие  $ds = 0$ :

$$c^2 dt^2 - d\mathbf{r}^2 = 0.$$

Соотношения (3,72) и (3,73) показывают, что «мезонное» поле следует описывать пятью независимыми переменными  $x, y, z, ict, s$  или  $x_\mu$  ( $\mu = 0, 1, 2, 3, 4$ ),  $x_0 = s$ . Физический смысл дополнительной пятой координаты

<sup>1)</sup> В. И. Родичев, ЖЭТФ 21, 869 (1951); см. также Ю. Б. Румер, ЖЭТФ 19, 8, 207, 868 (1949).

выясняется из выражения (3,73), а именно: она представляет собой собственное время поля.

«Мезонное» поле, задаваемое потенциалом

$$(A_x, A_y, A_z, i\varphi, A_0)$$

или

$$A_\mu \quad (\mu = 0, 1, 2, 3, 4),$$

в соответствии с этим, характеризуется следующими уравнениями:

$$F_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu}; \quad \frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = 0,$$

откуда для определения компонент вектор-потенциала получаем следующие уравнения:

$$\left( \nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial S^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \begin{pmatrix} \mathbf{A} \\ i\varphi \\ A_0 \end{pmatrix} = 0 \quad (3,74)$$

при условии

$$\operatorname{div} \mathbf{A} + \frac{\partial A_0}{\partial S} - \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0.$$

Простейшим нестационарным решением уравнения (3,74) будет

$$e^{-icKt + i\mathbf{k}r + ik_0s}, \quad (3,75)$$

где

$$K^2 - \mathbf{k}^2 - k_0^2 = 0.$$

Этой волне можно сопоставить «мезон», энергия, импульс и масса которого соответственно равны

$$E = \hbar cK, \quad \mathbf{p} = \hbar \mathbf{k}, \quad \mu_0 = \frac{p_0}{c} = \frac{\hbar k_0}{c}. \quad (3,76)$$

Из (3,75) и (3,76) видно, что собственное время  $s$  представляет собой координату, канонически сопряжённую с массой.

Для выяснения спектра «мезонных» масс рассмотрим излучение точечного источника. Введём гиперсферическую



систему координат:

$$\begin{aligned} x &= R \sin \vartheta \cos \varphi \sin \xi, \\ y &= R \sin \vartheta \sin \varphi \sin \xi, \\ z &= R \cos \vartheta \sin \xi, \\ s &= R \cos \xi; \quad R^2 = x^2 + y^2 + z^2 + s^2, \end{aligned} \tag{3,77}$$

где

$$0 \leq R \leq \infty, \quad 0 \leq \vartheta \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad 0 \leq \xi \leq \pi.$$

В этой системе координат уравнение (3,74) допускает разделение переменных, и решением его будет

$$\Phi = \frac{B}{R} H_n^{(1)}(KR) (1-x^2)^{\frac{l}{2}} G_k^{l+\frac{1}{2}}(x) Y_l^m(\vartheta, \varphi) e^{-icKt}; \tag{3,78}$$

здесь  $H_n^{(1)}(KR)$  — первая функция Ханкеля порядка  $n = k + l + 1$ ,  $\varepsilon = \hbar c K$  — энергия «мезонной» волны,

$Y_l^m(\vartheta, \varphi)$  — шаровая функция и  $G_k^{l+\frac{1}{2}}(x) = \frac{(-1)^k}{2^{k+l}} (1-x^2)^{-(l+\frac{1}{2})} \times$   
 $\times \frac{d^k}{dx^k} (1-x^2)^{k+l+\frac{1}{2}}$  — полином Гегенбауэра, где  $x = \cos \xi$ .

Отличие выражения (3,78) от обычного четырёхмерного решения состоит в том, что в выражение (3,78) входит новая функция

$$f_{kl}(x) = (1-x^2)^{\frac{l}{2}} G_k^{l+\frac{1}{2}}(x).$$

Далее, из (3,77) следует

$$\frac{s}{R} = \cos \xi = \frac{k_0}{K} = \alpha; \quad \frac{r}{R} = \sin \xi = \frac{k}{K} = \sqrt{1-x^2} = \beta = \frac{v}{c}.$$

Так как  $K$  является заданным, то величина  $x$  определяет массу покоя «мезона»:

$$\mu_0 = \frac{\hbar k_0}{c} = \frac{\hbar K}{c} x \tag{3,79}$$

и, следовательно, величина  $[f_{kl}(x)]^2$  задаёт интенсивность волнового поля с массой покоя (3,79).

Так как элемент объёма гиперсферы равен

$$d\tau ds = R^3 \sqrt{1-x^2} \sin \vartheta d\vartheta d\varphi dx dR,$$

то вероятность того, что масса испущенного в любом направлении «мезона» лежит в пределах  $Kx \leq k_0 \leq K(x+dx)$  равна

$$\omega_{nl}(x) dx = [f_{kl}(x)]^2 \sqrt{1-x^2} dx.$$

Приведём первые три выражения для  $\omega_{nl}(x)$ :

$$\omega_{10}(x) = \frac{4}{\pi} (1-x^2)^{\frac{1}{2}} \quad \text{состояние } 1s,$$

$$\omega_{20}(x) = \frac{16}{\pi} (1-x^2)^{\frac{1}{2}} x^2 \quad \text{» } 2s,$$

$$\omega_{21}(x) = \frac{16}{3\pi} (1-x^2)^{\frac{3}{2}} \quad \text{» } 2p.$$

Отсюда видно, что волновому полю в состоянии  $1s$  соответствуют «мезоны» различных масс  $(0 \leq \mu_0 \leq \frac{e}{c^2})$ . В состоянии  $2s$  спектр масс существенно меняется. Фотоны, например, совершенно отсутствуют, и главная часть излучения состоит из сравнительно медленных и тяжёлых «мезонов» и т. д.

Резюмируя этот пункт, можно сказать, что пятая координата, введённая сперва чисто формально, очевидно, не без пользы может применяться для объединённой записи различных уравнений и может помочь установлению каких-то общих уравнений «генерального» поля мезонов и других частиц.

**о) Теория слияния.** Интересный метод установления связи между элементарными частицами был предложен де Бройлем<sup>1)</sup>.

Предположим, что «основными» элементарными частицами являются частицы спина  $1/2$  и попытаемся построить из них частицы со всеми другими значениями спина. Для этой цели необходимо суметь объединить волновые функции частиц спина  $1/2$  и получить волновые функции частиц спина  $0, 1$  и других. Поясним идею ме-

<sup>1)</sup> См. L. de Broglie, *Théorie générale des particules à spin (méthode de fusion)*, Paris, 1943 и большое число отдельных статей де Бройля и его сотрудников (Тоннела, Петью и др. в *Journal de physique et radium* за последние годы).

тогда гипотетического объединения частиц путём особого «слияния» на нерелятивистском случае. Волновые шредингеровские уравнения двух частиц записываем в виде

$$\begin{aligned} \frac{i}{\hbar} \frac{\partial \psi_1}{\partial t} &= \frac{1}{2m} \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \psi_1, \\ \frac{i}{\hbar} \frac{\partial \psi_2}{\partial t} &= \frac{1}{2m} \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \psi_2. \end{aligned} \quad (3,80)$$

Связь между частицами выразим в условиях

$$\begin{aligned} \psi_1 \frac{\partial \psi_2}{\partial t} &= \psi_2 \frac{\partial \psi_1}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial (\psi_1 \psi_2)}{\partial t}, \\ \psi_1 \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial x^2} &= \frac{\partial \psi_1}{\partial x} \cdot \frac{\partial \psi_2}{\partial x} = \psi_2 \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x^2} = \frac{1}{4} \frac{\partial^2 (\psi_1 \psi_2)}{\partial x^2}, \end{aligned} \quad (3,81)$$

к которым добавляются два других условия для производных по  $y$  и  $z$ . Эти условия приводят к тому, что волновые функции  $\psi_1$  и  $\psi_2$  соответствуют одинаковой энергии и одинаковому импульсу. Введём теперь волновую функцию сложной частицы, возникшей в результате «слияния»,  $\Phi = \psi_1 \psi_2$ . Тогда, складывая исходные уравнения для  $\psi_1$  и  $\psi_2$ , умноженные соответственно на  $\psi_2$  и  $\psi_1$ , и используя дополнительные условия, получим для новой волновой функции  $\Phi$  уравнение

$$\frac{i}{\hbar} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \frac{1}{2M} \Delta \Phi, \quad (3,82)$$

где  $M = 2m$ . Это уравнение совпадает с обычным уравнением для волновой функции центра инерции системы двух частиц, которое получается также и без всяких добавочных гипотез о слиянии. Однако, хотя в данном случае метод слияния не даёт чего-либо нового, мы можем использовать его в качестве эвристического приёма в более сложных релятивистских случаях, когда обычные нерелятивистские соображения неприменимы. Действительно, взяв за основу два дираковских уравнения для функций  $\psi^1$  и  $\psi^2$  и дополнительное условие слияния

$$\psi_k^2 \frac{\partial \psi_i^1}{\partial q} = \psi_i^1 \frac{\partial \psi_k^2}{\partial q} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial q} (\psi_i^1 \psi_k^2) \quad (i, k = 1, 2, 3, 4) \quad (3,83)$$

и применяя те же соображения, получим для новой

функции с 16 элементами  $\psi_{ik} = \psi_i^1 \psi_k^2$  новую систему из 32 уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} \frac{\partial \psi_{ik}}{\partial t} &= \left( \alpha_1^1 \frac{\partial}{\partial x} + \alpha_2^1 \frac{\partial}{\partial y} + \alpha_3^1 \frac{\partial}{\partial z} + \kappa \frac{m_0 c}{\hbar} \alpha_4^1 \right) \psi_{ik}, \\ \frac{1}{c} \frac{\partial \psi_{ik}}{\partial t} &= \left( \alpha_1^2 \frac{\partial}{\partial x} + \alpha_2^2 \frac{\partial}{\partial y} + \alpha_3^2 \frac{\partial}{\partial z} + \kappa \frac{m_0 c}{\hbar} \alpha_4^2 \right) \psi_{ik}. \end{aligned} \quad (3,84)$$

Здесь введены системы матриц 16-го ранга  $\alpha_s^1, \alpha_r^2$  переставляемых друг с другом и подчиняющихся каждая в отдельности обычным правилам:

$$[\alpha_r^1, \alpha_s^1]_+ = 2\delta_{rs}, \quad [\alpha_r^2, \alpha_s^2]_+ = 2\delta_{rs}. \quad (3,85)$$

Они связаны с обычными матрицами Дирака 4-го ранга  $\alpha_r$  соотношениями

$$(\alpha_r^1)_{ik, lm} = (\alpha_r)_{il} \delta_{km}, \quad (\alpha_r^2)_{ik, lm} = (\alpha_r)_{km} \delta_{il}. \quad (3,86)$$

После того как мы получили уравнения, описывающие систему, возникшую в результате слияния, можно отвлечься от метода её получения и всяких аналогий с нерелятивистской теорией и просто принять эти уравнения за основу теории в качестве постулата. Весьма существенно, что 16 величин  $\psi_{\alpha\beta}$ , преобразующихся как произведения дираковских спиноров  $\psi_\alpha \psi_\beta$ , можно заменить величинами, которые будут иметь характер компонент тензоров<sup>1)</sup>. Для этой цели заметим, что основные уравнения можно также записать в виде

$$\begin{aligned} \sum_{\mu=1}^4 \gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} \psi \Gamma + i \kappa m_0 c \psi \Gamma &= 0, \\ \sum_{\mu=1}^4 \frac{\partial}{\partial x_\mu} \psi \Gamma \gamma_\mu - i \kappa m_0 c \psi \Gamma &= 0, \end{aligned} \quad (3,87)$$

где

$$\kappa = \frac{i}{\hbar}, \quad \gamma_1 = i\alpha_4\alpha_1, \quad \gamma_2 = i\alpha_4\alpha_2, \quad \gamma_3 = i\alpha_4\alpha_3, \quad \gamma_4 = \alpha_4, \quad \Gamma = i\gamma_2\gamma_4.$$

<sup>1)</sup> Бельинфанте назвал величины, преобразующиеся как произведения четырёх компонентных дираковских спиноров, ундрами и развил исчисление этих величин.

Разлагая матрицу  $\psi\Gamma$  по системе 16 матриц: 1)  $\gamma_0 = I$  (скаляр), 2)  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$  (вектор); 3)  $i\gamma_1\gamma_2 = \gamma_{12}$  и т. д. (антисимметрический тензор 2-го ранга); 4)  $\gamma_1\gamma_2\gamma_3 = \gamma_{123}$  и т. д. (антисимметрический тензор 3-го ранга), 5)  $\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4 = \gamma_{1234}$  и т. д. (антисимметрический тензор 4-го ранга);

$$\psi\Gamma = \gamma_0\varphi_0 + \gamma_1\varphi_1 + \dots + \gamma_{1234}\varphi_{1234} = \sum_1^{16} \gamma_\alpha\varphi_\alpha,$$

получим её составляющие  $\varphi_\alpha$  в виде искомых компонент тензоров различного ранга. Положив теперь

$$\begin{aligned} H_x &= Kk_0\varphi_{23}, & H_y &= Kk_0\varphi_{31}, & H_z &= Kk_0\varphi_{12}, \\ E_x &= iKk_0\varphi_{14}, & E_y &= iKk_0\varphi_{24}, & E_z &= iKk_0\varphi_{34}, \\ A_x &= K\varphi_1, & A_y &= K\varphi_2, & A_z &= K\varphi_3, & iV &= K\varphi_4, \end{aligned} \quad (3,88)$$

где  $K = \frac{\hbar}{2\sqrt{m_0}}$ ,  $k_0 = -im_0c = \frac{m_0c}{\hbar}$ , а также  $\varphi_0 = I$ ,

$\varphi_{1234} = I_2$ ,  $\varphi_{234} = i\sigma_1$ ,  $\varphi_{341} = i\sigma_2$ ,  $\varphi_{412} = i\sigma_3$ ,  $\varphi_{123} = -\sigma_4$ , получим следующий важный результат. Уравнения для частиц, получившихся в результате слияния, распадаются на две независимые группы: во-первых, уравнения, в точности совпадающие с системой Прока:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} &= \text{rot } \mathbf{E}, & \text{div } \mathbf{H} &= 0, & \mathbf{H} &= \text{rot } \mathbf{A}, \\ & & \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} &= \text{rot } \mathbf{H} + k_0^2 \mathbf{A}, \\ \text{div } \mathbf{E} &= -k_0^2 V, & \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \text{grad } V, \\ & & \frac{1}{c} \frac{\partial V}{\partial t} + \text{div } \mathbf{A} &= 0, \end{aligned} \quad (3,89)$$

и, во-вторых, уравнения, связывающие величины, обозначенные через  $\sigma$  и  $I$ :

$$\begin{aligned} m_0 I_1 &= 0, & \frac{1}{c} \frac{\partial I_1}{\partial t} &= 0, & \text{grad } I_1 &= 0, & -\frac{1}{c} \frac{\partial I_2}{\partial t} &= ik_0\sigma_4, \\ \text{grad } I_2 &= ik_0\sigma, & \frac{1}{c} \frac{\partial \sigma_4}{\partial t} + \text{div } \sigma &= -ik_0 I_2, \\ \text{rot } \sigma &= 0, & \frac{1}{c} \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \text{grad } \sigma_4 &= 0. \end{aligned} \quad (3,90)$$

Уравнения Прока соответствуют такому слиянию частиц со спином  $1/2$  каждая, в результате которого получается частица спина 1, описываемая векторной волновой функцией (четырёхмерным вектор-потенциалом  $A, iV$ ); вторая группа уравнений соответствует частицам спина 0. Тем самым «слияние» представляет удобный простой метод получения уравнений частиц высших спинов. Однако в случае наличия взаимодействия состояния с различными спинами могут смешаться, и указанное разделение состояний и уравнений не будет уже иметь места.

Укажем теперь связь метода слияния с известной теоремой Клебша-Гордана из теории группы, согласно которой произведение (соответствующее слиянию) двух неприводимых представлений  $D_j$  и  $D_{j'}$  разлагается на неприводимые представления по схеме

$$D_j \times D_{j'} = D_{j+j'} + D_{j+j'-1} + \dots + D_{|j-j'|}. \quad (3,91)$$

В данном случае  $j = j' = \frac{1}{2}$  и  $D_{\frac{1}{2}}$  является неприводимым представлением группы, связанной с дираковской частицей спина  $1/2$ . Следовательно, в результате слияния получим:

$$D_{\frac{1}{2}} \times D_{\frac{1}{2}} = D_1 + D_0. \quad (3,92)$$

Очевидно речь идёт при этом, как и в нерелятивистской квантовой механике, о сложении моментов.

Слияние двух частиц спина 1 приведёт к уравнениям частиц максимального спина 2, содержащим уравнения для  $s=2$ ,  $s=1$ ,  $s=0$ . При этом в общем случае, даже при отсутствии взаимодействий, уравнения, соответствующие состоянию со спином  $s=2$ , не отделяются от других состояний. Для полного разделения необходимо, во-первых, чтобы масса покоя частиц равнялась нулю и, во-вторых, чтобы волновые функции, соответствующие спину  $s=0$ , исчезали. Тогда метод слияния даёт результаты, совпадающие с теорией Фирца для частиц высшего спина. При этом, как было отмечено Паули и Фирцем, уравнения для частиц спина  $s=2$ , при нулевой массе покоя в точности совпадают с уравнениями для компо-

нент слабого гравитационного поля  $h_{\mu\nu}$ , являющихся малыми добавками к основным псевдогалилеевым значениям компонент метрического тензора  $g_{\mu\nu}^0$ . С другой стороны, наличие массы покоя в уравнениях для гравитационного поля соответствует космологическому члену в уравнениях Эйнштейна, т. е. наличию искривления пространства—времени даже при отсутствии вещества.

Отметим, что связь метода слияния де Бройля и формализма высших производных была прослежена недавно в ряде работ<sup>1)</sup>.

Мы не будем подробно останавливаться здесь на специальной идее де Бройля о нейтринной природе света, согласно которой фотон представляет собой совокупность двух «слившихся» нейтрино. Эта гипотеза послужила в своё время исходным пунктом развития теории слияния. Дальнейшая её разработка показала, в частности, возможность вывести формулу Планка для фотонов из фермиевской статистики для нейтрино<sup>2)</sup>. Однако ввиду отсутствия новых физических результатов развитие нейтринной теории света и теории слияния приостановилось. Лишь в последние годы в связи с возрождением интереса к различным попыткам объединения элементарных частиц, теория слияния независимо от гипотезы о нейтринной природе света вновь оказалась актуальной. При этом прежнее допущение де Бройля о конечной массе покоя фотона, противоречащее теории электромагнетизма, не является существенным для метода слияния.

Несмотря на произвольность основной гипотезы и наличие трудности в виде смешивания состояний, метод слияния представляется одним из наиболее правдоподобных путей к построению общей теории системы частиц, связанных друг с другом на базе общего «мирового» спинорного поля. Важно, в частности, подчеркнуть, что если положить в основу теории частиц некоторое

---

<sup>1)</sup> F. В о р р, Zs. f. Naturforsch. 3a, 564 (1948); В о р р u. В а u e r, там же 4a, 611 (1949); Н о e n l u. В о e r n e r, там же 5a, 353 (1950).

<sup>2)</sup> С м. К r o n i g, Physica 2, 431, 854, 965 (1935); J o r d a n, Zs. f. Phys. 98, 759 (1936); 99, 109 (1936); 93, 464 (1935); А. С о к о л о в, ЖЭТФ 7, 1055 (1937); 8, 671 (1938).

универсальное спинорное уравнение дираковского типа, то благодаря однородности мы должны будем добавить к нему члены вида  $\lambda\psi^3$  и т. д., описывающие самодействие поля, которые и должны привести к слиянию, т. е. образованию всех «сложных» в указанном смысле частиц. Тем самым мы вновь подходим к нелинейному обобщению теории поля (см. выше).

ii) **Сложный мезон.** Остановимся теперь на любопытной, хотя весьма предварительной гипотезе Ферми и Янга<sup>1)</sup>, пытающейся редуцировать структуру мезона к нуклеонам.

Допустим существование ещё не открытых, но весьма правдоподобных частиц антипротонов и антинейтронов и, во-вторых, наличие между обычными нуклеонами и антинуклеонами взаимодействия нового типа, ведущего к притяжению между этими частицами и в то же время к отталкиванию между протонами и нейтронами. Речь идёт отнюдь не о силах обычного ядерного типа, которые обеспечивают связь между нуклеонами на расстояниях порядка  $\frac{\hbar}{m_{\pi}c} \sim 10^{-13}$  см, где  $m_{\pi}$  — масса  $\pi$ -мезона, и приводят к дефекту масс порядка нескольких миллионов электрон-вольт на частицу. Новые силы должны иметь значительно меньший радиус действия, порядка комптоновской длины волны не мезонов, но нуклеонов:

$$R \sim \frac{\hbar}{Mc} \sim 10^{-14} \text{ см.}$$

Для простоты потенциальная энергия предполагается постоянной, равной  $V_0$  внутри области  $(0-R)$  и исчезающей вне её. В релятивистской теории следовало бы взять  $\delta$ -образное взаимодействие, дабы не вводить снова и снова новых полей, чего как раз стремится избежать данная теория. Основное предположение заключается в том, что система тесно связанных протона и антинейтрона обладает столь большой энергией связи, что последняя почти равняется сумме собственных энергий обоих нуклеонов, так что разность должна давать массу положи-

<sup>1)</sup> E. Fermi and C. Yang, Phys. Rev. 76, 1739 (1949).



тельного  $\pi$ -мезона

$$m_{\pi}c^2 = 2Mc^2 - \bar{V}.$$

Из этого требования получается для потенциальной энергии  $V_0$  значение

$$V_0 = 26,4 Mc^2 \cong 25 \cdot 10^9 \text{ эв.}$$

Аналогичным образом конструируются отрицательные и нейтральные мезоны, которые могут иметь скалярный, псевдоскалярный или векторный характер, в зависимости от того, будет ли система находиться в состоянии  ${}^1S_0$  (с нулевым моментом количества) или в состояниях с моментом количества  $1({}^3S_1, {}^3P_1)$ .

На больших расстояниях мезон будет казаться по-прежнему практически точечной частицей, и лишь в процессах весьма высокой энергии имеется вероятность расщепить мезон на его составные части. Таким образом, ясно, что при умеренных энергиях мы будем иметь обычную теорию мезонов и картину ядерного поля, реализуемого мезонами. Предварительные подсчёты показывают, что известная константа связи  $g$  нуклеонов с мезонами ( $g \sim 5-6$ ) примерно согласуется со значением потенциальной энергии  $V_0$ , если учесть, что обычное ядерное взаимодействие нуклона с мезоном теперь интерпретируется как взаимодействие с парой (например, протон — антинейтрон).

Независимо от предварительного характера всей гипотезы существенное ограничение проделанных подсчётов заключается в пренебрежении возможными состояниями из двух, трёх и т. д. пар тяжёлых частиц, которые в релятивистской теории нельзя отделить от состояний из двух частиц. При всём том следует со вниманием отнестись к этой гипотезе как попытке новой трактовки структуры мезонов и, возможно, других частиц, очевидно, близкой к методу слияния де Бройля, но, наглядно говоря, пытающейся интерпретировать слияние путём рассмотрения сил между двумя частицами. Напомним в данной связи предположение, сделанное нами некоторое время назад <sup>1)</sup>

<sup>1)</sup> «Классическая теория поля», § 44, стр. 327.

о возможности переноса взаимодействия парами нуклонов, причём для радиуса подобных гипотетических парных нуклеонных сил был указан порядок  $\frac{\hbar}{Mc^2} \sim 10^{-14}$  см, совпадающий с радиусом сил Ферми-Янга.

р) **Высшие спиновые состояния.** Различные авторы неоднократно высказывали гипотезу о возможности существования возбуждённых спиновых состояний элементарных частиц, а также возбуждённых зарядовых состояний. С этой точки зрения нуклоны могли бы существовать в состояниях не только спина  $1/2$ , но также в состояниях со спином  $3/2$ ,  $5/2$ , ... Наряду с нейтроном и протоном могли бы существовать антипротон и антинейтрон, нуклоны с двойным положительным или двойным отрицательным зарядом и т. д. Энергия подобных гипотетических частиц предполагалась несколько выше нормальной, что должно было привести к возможности соответственных переходов. Наличие указанных возбуждённых состояний вытекало в некоторых предположениях при нерелятивистской трактовке нуклонов, энергия взаимодействия которых с мезонным полем предполагалась, в противоположность обычной теории, сильной. Однако необходимость нерелятивистской трактовки нуклонов как протяжённых источников поля не позволила провести дальнейшую разработку теории.

Наряду с этим оказалось возможным подойти к вопросу о высших спиновых состояниях, с другой стороны, на базе релятивистской теории. Рассмотрим уравнение вида

$$\left( \frac{1}{i} L_{\mu} \frac{\partial}{\partial x_{\mu}} + k_0 \right) \psi = 0, \quad (3,93)$$

где  $L_{\mu}$  — матричные операторы, действующие на внутренние переменные и в частном случае совпадающие с помноженными на  $i$  матрицами  $\gamma_{\mu}$  дираковской теории электрона или матрицами  $\beta_k$  матричной теории скалярного или векторного поля <sup>1)</sup>. В более общем случае число

<sup>1)</sup> Относительно этой теории, развитой Д у ф ф и н о м и К е м е р о м, см. В. П а у л и, Релятивистская теория элементарных частиц, М., 1947, стр. 58.

компонент  $\psi$ -функции в данном уравнении может быть бесконечным, соответственно наличие внутренних координат частиц, изменяющихся непрерывно. Исследование подобных уравнений при наличии бесконечномерных представлений уравнения (3,93) показало, что мы получаем бесконечное число состояний частиц, массы которых стремятся к нулю при возрастании значения спина. В некоторых особых случаях все достаточно высокие значения спина могут отвечать равным массам. Однако неограниченно возрастать вместе с ростом масс спины, вообще говоря, не могут<sup>1)</sup>.

Подобный результат является, очевидно, физически абсурдным и требует видоизменения теории. Возьмём в качестве простейшего примера релятивистского ротатора (волчка) систему двух скалярных частиц равной массы, уравнение движения которых запишем в виде

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x_{\mu_1}^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_{\mu_2}^2} - 2k_0^2 \right) \Psi(x_{\mu_1}, x_{\mu_2}) = 0.$$

Произведём замену переменных:

$$X_\mu = \frac{1}{2}(x_{\mu_1} + x_{\mu_2}), \quad x_\mu = \frac{1}{2}(x_{\mu_2} - x_{\mu_1});$$

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial X_\mu^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_\mu^2} - 4k_0^2 \right) \Psi(X_\mu, x_\mu) = 0.$$

Разложим теперь радиус-вектор каждой частицы на части, параллельную и перпендикулярную скорости системы  $u_\mu$ :

$$x_\mu^h = u_\mu \tau^h + y_\mu^h,$$

где

$$\tau^h = -x_\mu^h u_\mu; \quad y_\mu^h u_\mu \equiv 0,$$

и введём единое собственное время для всей системы

$$\tau^1 = \tau^2 = \tau.$$

<sup>1)</sup> И. М. Гельфанд и А. М. Яглом, ЖЭТФ 18, 703 (1948).

Эти же преобразования для производных имеют вид

$$\frac{\partial}{\partial x_{\mu_1}} = -u_{\mu} \frac{\partial}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial y_{\mu_1}}; \quad \frac{\partial}{\partial x_{\mu_2}} = -u_{\mu} \frac{\partial}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial y_{\mu_2}};$$

или

$$\frac{\partial}{\partial X_{\mu}} = -u_{\mu} \frac{\partial}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial Y_{\mu}}, \quad \frac{\partial}{\partial x_{\mu}} = \frac{\partial}{\partial y_{\mu}}$$

( $Y_{\mu}$  — координаты центра инерции). В результате получим уравнение

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial Y_{\mu}^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_{\mu}^2} - \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} - 4k_0^2 \right) \Psi(Y_{\mu}, y_{\mu}, \tau) = 0$$

с тождественными условиями

$$y_{\mu} u_{\mu} = 0, \quad Y_{\mu} u_{\mu} = 0.$$

Будем решать уравнение в системе центра инерции

$$u_{\mu} = (0, 0, 0, i); \quad Y_4 = y_4 = 0;$$

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} - 4k_0^2 \right) \Psi = 0.$$

Допустим, что не только в среднем, но всегда значение полного импульса равно нулю:

$$\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial Y_{\mu}} \Psi = 0.$$

Тогда получим:

$$\left( \Delta_y - \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} - 4k_0^2 \right) \Psi(\mathbf{y}, \tau) = 0.$$

Введём теперь условие связи между обеими частицами системы в виде

$$y_{\mu}^2 = r_0^2 = \text{const.}$$

Подставляя  $\Psi(\tau, \mathbf{y}) = e^{-im_0\tau} \Psi(\mathbf{y})$  ( $m_0 = \frac{mc}{\hbar}$ ), получим основное уравнение, описывающее внутреннее состояние системы (иначе говоря, спектр масс и спинов) в виде

$$\left[ \frac{1}{r_0^2} \Delta_{\vartheta, \varphi} + m_0^2 - k_0^2 \right] \Psi(\vartheta, \varphi) = 0,$$

где угловая часть оператора Лапласа имеет обычный вид

$$\Delta_{\vartheta, \varphi} = \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left( \sin \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}.$$

Решением этого уравнения будут шаровые функции  $Y_{lm}$  с собственными значениями  $l(l+1)$ . Отсюда получаем искомый возрастающий спектр масс релятивистского ротатора <sup>1)</sup>:

$$m_0^2 = \frac{1}{r_0^2} l(l+1) + 4k_0^2.$$

Вместо жёсткого ротатора можно было бы рассмотреть системы, части которых связаны какими-либо иными релятивистскими инвариантными условиями <sup>2)</sup>.

Несмотря на предварительный характер приведённых рассуждений, они представляются заслуживающими внимания в качестве одной из попыток релятивистской трактовки «структуры» частиц, имеющей, очевидно, известные точки соприкосновения как с теорией слияния де Бройля, так и с теорией сложного мезона.

**с) Заключение.** Резюмируем обзор различных новых гипотез, в том или ином отношении выходящих за рамки современной классической и релятивистской квантовой теории полей и выдвигаемых либо с целью устранения бесконечной собственной энергии и других расходимостей, либо с целью установления общей теории элементарных частиц, связанных так или иначе друг с другом.

Несмотря на значительное разнообразие в новых гипотезах мы можем усмотреть между большинством из них много общих признаков. Можно даже сделать вывод, что среди более или менее разумных гипотез, стоящих на релятивистской квантовой точке зрения, в сущности нет изолированных, не связанных так или иначе друг с другом. Посмотрим с этой точки зрения на теории, пытающиеся наиболее непосредственно устранить расходимости

<sup>1)</sup> Ю. М. Широков, ЖЭТФ 21, 748 (1951). Эта же формула для спектра масс была получена С. В. Измайловым, ДАН 60, 1012 (1948), способ вывода которого, однако, недостаточно корректен ввиду отсутствия релятивистской инвариантности.

<sup>2)</sup> Схема, использованная Широковым, является более общей, чем у Гельфанда и Яглома, причём новые условия связи и перестановочные соотношения позволили прийти к физически разумному результату, т. е. к возрастанию энергии в высших спиновых состояниях.

в собственной энергии (гипотезы класса А). За исходный пункт разумно взять гипотезу квантования пространства—времени, которая наиболее резко и, вероятно, слишком упрощённо вводит понятие универсальной длины, играющую, однако, в свою очередь роль в новейшей негамильтоновой теории, в нелинейной теории, в теории нелокализуемых полей и во многих других гипотезах. Понятие максимального импульса, применяемое в ряде гипотез, также связано, в конце концов, с признанием универсальной минимальной длины. Наконец, теория нелокализуемых полей со своей стороны тесно связана с гипотезой взаимности и опять-таки признанием максимального импульса и минимальной длины.

Во втором классе новых теорий (гипотезы класса В), пытающихся устранить расходимости при помощи компенсирующих полей (регуляризация) тоже имеется немало общих пунктов. Например, метод высших производных непосредственно вводит связь частиц разных масс. Размазанное взаимодействие со своей стороны интерпретируется при помощи высших производных. Гипотеза прямого взаимодействия естественно примыкает к теории компенсирующих полей.

В гипотезах третьего типа (гипотезы класса С), пытающихся связать частицы друг с другом и выяснить их структуру вне зависимости от проблемы расходимостей, также имеется значительное число общих пунктов. Теория сложного мезона представляет собой попытку специализировать вид взаимодействия частиц, остающийся пока что открытым в методе слияния. Если стать на точку зрения построения всех волновых функций из какого-то поля «мирового спинора», то, естественно, все уравнения станут однородными, поскольку речь будет идти о переходах из одного состояния в другое того же единого спинорного вещества, но вместе с тем приобретут нелинейный характер. Таким образом, нелинейная теория и гипотеза слияния весьма тесно примыкают друг к другу. Вместе с тем метод высших производных, введённый для компенсации расходимостей (класс В), естественно приводит к связи разных частиц, т. е. входит в гипотезы класса С и оказывается близким к методу слияния.

Необходимость включения гравитации в систему полей и предсказание гравитационных трансмутаций (см. § 5) также становятся наглядно правдоподобными, если, следуя методу слияния, представлять это поле составленным из четырёх спинорных полей. Тогда подобно «расщеплению» фотонов (комбинация двух спинорных полей) на отдельные спинорные поля, в тех или иных случаях, может иметь место более сложное «расщепление» гравитонов на электроны и позитроны при подходящих условиях и наличии соответствующих взаимодействий. Даже казавшийся изолированным метод пятимерия при некоторых предположениях может быть использован для установления связи полей. Подобные примеры связи между различными гипотезами можно было бы продолжить дальше, однако мы достаточно пояснили уже данный вопрос в предыдущем изложении.

Таким образом, создаётся впечатление о наличии некоторых немногих фундаментальных тенденций, проявляющихся при попытках обобщения существующей теории, естественное развитие которой без каких-либо добавочных модификаций прежде всего заключается в закономерной дальнейшей разработке теории вакуума. По всей видимости, подобная ситуация указывает на наличие каких-то правдоподобных, соответствующих действительности положений в ряде перечисленных гипотез. Было бы неуместно распространяться здесь относительно прогнозов о будущем развитии теории. Поскольку сама по себе современная теория вакуума, очевидно, недостаточна для построения общей теории частиц и полей, притом свободной от расходимостей, те или иные гипотезы, модифицирующие теорию, являются безусловно необходимыми. Трудно сомневаться, что в более совершенной теории действительно будет играть роль новая универсальная константа типа минимальной длины и будут использованы не только богатые возможности, представляемые для построения объединённой системы частиц нелинейной теорией и теорией слияния, но также будут учтены результаты теории высших производных. Разумно, кроме того, допустить, что «слияние» действительно с некоторой вероятностью наступает в условиях кратного порождения частиц: мезонов (при столкновении

нуклеонов высокой энергии), пар электронов (при двойном  $\beta$ -распаде), электронов и нейтрино (при обычном  $\beta$ -распаде), благодаря чему могут возникнуть более тяжёлые мезоны и соответственно «тяжёлые электроны и «электрино» (см. § 6). Возможно, что тем самым проблема «слияния» связывается с реальными эмпирическими фактами из области физики космических лучей и элементарных частиц <sup>1)</sup>.

Будет ли «генеральная» теория частиц, свободная от расходимостей, построена путём кропотливого дальнейшего развития теории вакуума, дополненной новыми положениями, или же смелые новые гипотезы позволят сократить путь и сделать решительный скачок вперёд, говорить подробно об этом было бы преждевременным. Нынешняя ситуация в релятивистской квантовой механике элементарных частиц напоминает в известной мере положение вещей в середине 20-х годов нашего века, когда теория Бора исчерпала свои возможности, и физика совершала трудный переход к волновой, или квантовой (нерелятивистской) механике. Как известно, разрешение трудностей пришло тогда с двух сторон: во-первых, путём кропотливого развития применений принципа соответствия боровской теории в теории спектров и теории дисперсии и обобщения этих исследований в виде матричной механики; во-вторых, путём развития совершенно новой, не связанной с предыдущей боровской теорией, гипотезы волновой механики. Во всяком случае, как всегда в физике, в настоящее время первейшим делом является установление новых эмпирических данных об элементарных частицах при помощи их исследования в космических лучах, ядерных реакциях и в атомах и тщательный анализ новых понятий с точки зрения материалистической философии.

---

<sup>1)</sup> *Примечание при корректуре.* В данной связи обратим внимание на весьма интересные опыты Д. В. Скобельцына, в которых, возможно, как раз обнаруживаются тяжёлые электроны, на основании анализа аномального рассеяния электронов  $\beta$ -распада (см. статью в сборнике памяти С. И. Вавилова, АН СССР, Москва, 1952 г.).

---



## ГЛАВА II

### ЧАСТИЦЫ И ТЯГОТЕНИЕ

#### § 4. Электрон в поле тяготения

а) **Геометрический смысл матриц Дирака.** Для установления вида взаимодействия электрона с полем тяготения необходимо обобщить уравнение Дирака на риманову геометрию, характеризуемую интервалом  $ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$ , где метрический тензор  $g_{\mu\nu}$  одновременно является тензором гравитационного поля. Кроме того, ковариантная форма уравнения Дирака необходима для более технической, но нередко сложной задачи—записи этого уравнения в любых криволинейных координатах. Заметим, прежде всего, что матрицы Дирака можно получить линеаризацией компонент  $g_{\mu\nu}$  и придать им тем самым геометрический смысл, как величинам, являющимся, наглядно говоря, «корнями квадратными» из  $g_{\mu\nu}$ .

Остановимся на релятивистском квантовом уравнении 2-го порядка Клейна и подчеркнём его тесную связь с видом метрики четырёхмерного псевдоевклидова пространства—времени. Разделим выражение четырёхмерного интервала

$$ds^2 = g_{\alpha\alpha}^0 dx_\alpha^2 = \sum_\alpha e_\alpha dx_\alpha^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \quad (4,1)$$

на элемент собственного времени  $d\tau^2$  ( $e_1 = e_2 = e_3 = -1$ ,  $e_4 = +1$ ); тогда, вводя четырёхмерный импульс  $p_\alpha = m_0 \frac{dx_\alpha}{d\tau}$ , получим:

$$-\sum e_\alpha p_\alpha^2 + m_0^2 c^2 = 0.$$

Для перехода к уравнению Клейна достаточно заменить  $p_\alpha$  на операторы  $-e_\alpha \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x_\alpha}$  и применить весь оператор к скалярной волновой функции

$$S\Phi = (-g_{\alpha\alpha}^0 p_\alpha^2 + m_0^2 c^2) \Phi = 0. \quad (4,2)$$

Рассмотрим теперь уравнение Дирака

$$\left( \gamma_\alpha^0 \frac{\partial}{\partial x_\alpha} + k_0 \right) \psi = 0 \quad (4,3)$$

или

$$\left( - \sum e_\alpha \gamma_\alpha^0 p_\alpha + \frac{\hbar k_0}{i} \right) \psi = 0$$

и зададимся вопросом об отыскании метрики, сопоставленной ему в том же смысле, в каком обычное  $ds^2$  сопоставлено релятивистскому уравнению 2-го порядка. Подставляя вместо  $p_\alpha$  выражение

$$m_0 \frac{dx_\alpha}{d\tau} = m_0 c \frac{dx_\alpha}{ds}$$

и сокращая на  $m_0 c$ , имеем:

$$\left( - \sum_\alpha e_\alpha \gamma_\alpha^0 dx_\alpha + i ds \right) \psi = 0. \quad (4,4)$$

Таким образом, мы, естественно, приходим к элементу дуги  $ds = -i \sum_\alpha e_\alpha \gamma_\alpha^0 dx_\alpha$  как основе «линейной» метрики, сопоставленной дираковскому уравнению.

До сих пор мы ограничивались случаем евклидовой метрики, когда  $\gamma_\alpha^0 \gamma_\beta^0 + \gamma_\beta^0 \gamma_\alpha^0 = -2e_\alpha \delta_{\alpha\beta}$ . В случае римановой геометрии разумно в элементе дуги  $ds$  заменить постоянные матрицы  $\gamma_\alpha^0$  на функции координат так, чтобы  $\gamma_\alpha \gamma_\beta + \gamma_\beta \gamma_\alpha = 2g_{\alpha\beta}$ , и придти этим путём к интервалу  $ds^2$  римановой метрики:  $ds^2 = g_{\alpha\beta} dx_\alpha dx_\beta$ . Независимо от введённой выше линейной геометрии, эта формула была указана Тетраде. Ввиду чисто математического интереса, мы не будем останавливаться сейчас на

дальнейшем развитии формализма линейной операторной геометрии<sup>1)</sup>.

**б) Параллельный перенос спиноров.** Перейдём к обобщению уравнения Дирака на риманову геометрию. Так же, как при подобном обобщении уравнений механики, уравнений электромагнитного поля, скалярного поля и т. д. при этом необходимо обычную производную по координатам заменить на ковариантную. Действительно, обычная производная от спинора не будет сама спинором. Иначе говоря, при дифференцировании нужно учесть искривление пространства и, так же как в случае дифференцирования векторов и тензоров в искривлённом пространстве, необходимо суметь перенести параллельно спинор из одной точки в другую<sup>2)</sup>.

Не вдаваясь в детали теории, ограничимся наиболее важными её пунктами, связанными с законом параллельного переноса спинора. Руководящей идеей при этом является своеобразное применение принципа соответствия. Именно, мы должны определить параллельный перенос

<sup>1)</sup> Д. И в а н е н к о, Изв. АН (1929); В. Ф о к и Д. И в а н е н к о, *Zs. f. Phys.* 54, 798 (1929) (продолжение этих работ см. в статьях M i m u r a et al., *Journal of Science of the Hiroshima University* (начиная с 1935 г.).

<sup>2)</sup> Задача о параллельном переносе и ковариантном дифференцировании спинора в римановом пространстве рассмотрена впервые в статьях: В. Ф о к и Д. И в а н е н к о, *C. R., Paris* 188, 1470 (1929); *Phys. Zs.* 30, 648 (1929); В. Ф о к, *Zs. f. Phys.* 57, 261 (1929); *ЖРФХО*, ч. физ. 62, 133 (1930); Н. W e y l, *Zs. f. Phys.* 56, 330 (1929). Комментарии к этим работам и дальнейший анализ теории даны в статьях: E. S c h r o e d i n g e r, *Berliner Ber.*, 105 (1932); L. I n f e l d u. В. V a n d e r W a e r d e n, *Berliner. Ber.*, стр. 380 (1933). Идея метода Инфельда и Ван-дер-Вардена заключается в том, что тензорный анализ в римановом пространстве и преобразования спиноров рассматриваются независимо друг от друга, но так, чтобы операции на каждом этапе известным образом соответствовали друг другу. В результате получаются снова формулы ковариантного дифференцирования для спинора, приводимые ниже [см. (4,12)—(4 15)]. Это не удивительно, так как согласно излагаемой здесь точке зрения спиноры также в некоторой мере отрываются от общего риманова пространства и переносятся в каждой точке в соприкасающееся пространство с псевдоевклидовой метрикой [см. также B e l i n f a n t e, *Physica* 6, 870 (1939) — применение ундорного формализма].

и, следовательно, ковариантную производную от спинора таким образом, чтобы для векторов и скаляров, составленных билинейно из  $\psi$ , имели место обычные формулы переноса и ковариантного дифференцирования римановой геометрии. При этом формулы ковариантного дифференцирования спиноров будут полностью определять ковариантную производную от вектора  $A_\mu$ . Наоборот, взяв за основу параллельный перенос вектора  $A_\mu$ , мы определим закон параллельного переноса спинора лишь с некоторой неоднозначностью, наличие которой, как мы увидим позже, соответствует физической сущности задачи.

Прежде чем перейти к развитию намеченной выше теории, следует подчеркнуть своеобразную трудность, связанную с тем, что матрицы  $\gamma_\nu$  в уравнении Дирака играют двойную роль: с одной стороны, они определяют форму этого уравнения; с другой стороны, как было указано,  $\gamma_\nu$  являются геометрическими величинами. Поэтому в случае римановой геометрии, когда  $\gamma_\nu$  будут функциями координат, обычное определение инвариантности уравнения Дирака, заключавшееся в приведении его—после лоренцова преобразования—к прежнему виду с теми же  $\gamma_\nu^0$ , теряет смысл. Ввиду этого, очевидно, необходимо сохранить прямоугольную систему осей псевдоэвклидовой метрики (специальной теории относительности) и набор постоянных матриц Дирака  $\gamma_\nu^0$ , по отношению к которым определены компоненты спинора, однако теперь уже не в качестве универсальной системы отсчёта, но лишь в качестве локальной системы, заданной в каждой точке четырёхмерного пространства—времени. Речь идёт при этом, очевидно, о введении в каждой точке касательного пространства, в котором задаётся упомянутая ортогональная система осей, которую будем обозначать термином: репер (или тетрапод, или  $n$ -эдр, в данном случае четырёхэдр). По отношению к вращению осей репера уравнение Дирака должно быть инвариантным в прежнем смысле, помимо ковариантности по отношению к любым координатным преобразованиям. В качестве осей репера можно, очевидно, взять обычные координатные оси прямоугольной системы координат. Таким образом, мы будем иметь теперь два типа компонент векторов: обычные компоненты по координатным осям,

которые будем попрежнему обозначать греческими индексами  $A_\nu$  ( $\nu = 1, 2, 3, 4$ ) и ортогональные компоненты по осям репера, которые будем обозначать латинскими индексами  $A_s$  ( $s = 1, 2, 3, 4$ ). Связь между теми и другими компонентами имеет вид

$$\begin{aligned} A_k &= \sum_{\nu} A_{\nu} h_{k}^{\nu}, \\ A_s &= \sum_s e_s A_s h_{s, \sigma}. \end{aligned} \quad (4,5)$$

Величины  $h_k^{\nu}$  носят название «параметров», а  $h_{s, \sigma}$  — «моментов», характеризующих оси репера, т. е. направления касательных к кривым ортогонального семейства<sup>1)</sup>. Параметры  $h_k^{\nu}$  определяют конгруэнции, соответствующие семействам кривых, проходящих через начало отсчёта ортогонального репера.

Вводя элемент дуги  $s_k$  кривой, запишем  $h_k^{\nu}$  следующим образом:  $h_k^{\nu} = \frac{\partial x^{\nu}}{\partial s_k}$ . В системе координат специальной теории относительности параметры  $h_{\sigma}^s$  и моменты  $h_{s, \sigma}$  записываются особенно просто в виде

$$\begin{aligned} h_{s, \sigma} &= \delta_{s, \sigma}, \\ h_{\sigma}^s &= e_s \delta_{\sigma}^s. \end{aligned}$$

Рассматривая случай общего риманова пространства, мы вводим в каждой его точке локальный ортогональный репер, коэффициенты Ламе которого задают метрику пространства

$$g_{ij} = \sum_{\nu=1}^n e_{\nu} h_{i, \nu}^{\nu} h_{\nu, j}.$$

<sup>1)</sup> Теория реперов изложена в книгах: Л. Эйзенхарт, Риманова геометрия, М., 1948; В. Ф. Каган, Основы теории поверхностей, М., 1947; П. К. Рашевский, Введение в риманову геометрию и тензорный анализ, М.—Л., 1936; Т. Levi-Civita, Der absolute Differentialkalkül, Berlin, 1928.

Перейдём к рассмотрению изменения ковариантных компонент вектора, которое задаётся, как известно, при бесконечно малом смещении  $dx^\nu$  формулой  $\delta A_\mu = \Gamma_{\mu\nu}^\alpha dx^\nu A_\alpha$ , где скобки Кристоффеля, определяющие влияние искривлённой метрики на перенос компоненты вектора, равны

$$\{\mu\nu, \alpha\} = \Gamma_{\mu\nu}^\alpha = \frac{1}{2} g^{\alpha\sigma} \left( \frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x_\nu} + \frac{\partial g_{\nu\sigma}}{\partial x_\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} \right). \quad (4,6)$$

Отсюда ковариантная производная вектора, являющаяся тензором, в противоположность обычной производной определяется выражением

$$\nabla_\nu A_\mu = \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu} + \Gamma_{\mu\nu}^\alpha A_\alpha. \quad (4,7)$$

В то же время изменение ортогональных компонент того же вектора по осям репера будет иметь вид

$$\delta A_i = \sum_{k, l} e_k e_l \gamma_{ikl} A_k ds^l. \quad (4,8)$$

Коэффициенты Риччи  $\gamma_{ikl}$  являются аналогами символов Кристоффеля и определяются формулой

$$\gamma_{ikl} = (\nabla_\sigma h_i^k) h_{k, \beta} h_l^\beta, \quad (4,9)$$

где  $\nabla_\sigma$  обозначает ковариантное дифференцирование. Подобно символам Кристоффеля, в римановом пространстве коэффициенты вращения репера  $\gamma_{ikl}$  антисимметричны по двум значкам:

$$\gamma_{ikl} + \gamma_{kil} = 0.$$

Обратно, символы Кристоффеля  $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha$  также являются своеобразными «коэффициентами вращения», которые учитывают поворот, испытываемый приращением вектора при переносе его в соседнюю точку благодаря искривлению метрики, т. е. непостоянству  $g_{\alpha\beta}$ . Пусть теперь вектор  $A_i$  составлен билинейно из спиноров  $\psi$  так, что его ортогональные компоненты равны

$$A_i = \psi^+ \alpha_i \psi. \quad (4,10)$$

Здесь и в дальнейшем  $\alpha_i$  — матрицы Дирака, причём  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  и  $\alpha_4 = I$  образуют четырёхмерный вектор,  $\alpha_0$  — скаляр и  $\alpha_5 = \alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_0$  — псевдоскаляр. Изменение ортогональных компонент спинора, соответствующее бесконечно малым сдвигам по осям репера  $ds^l$ , задаётся по аналогии с приведённой выше формулой следующим образом:

$$\begin{aligned}\delta\psi &= \sum e_l C_l ds^l \psi, \\ \delta\psi^+ &= \sum e_l C_l^+ ds^l \psi^+.\end{aligned}\tag{4,11}$$

Подставляя в формулу для приращения вектора  $\delta A_i = \delta\psi^+ \alpha_i \psi + \psi^+ \alpha_i \delta\psi$  значения  $\delta\psi$  и  $\delta\psi^+$  и приравнявая это выражение приращению вектора, выраженному через коэффициенты вращения Риччи  $\gamma_{ikl}$ , получаем основное уравнение для определения коэффициентов  $C_l$ :

$$C_l^+ \alpha_i + \alpha_i C_l = \sum_{k=1}^4 e_k \gamma_{ikl} \alpha_k.$$

К этим условиям нужно присоединить уравнения, выражающие факт равенства нулю приращений от скаляра и псевдоскаляра при параллельном переносе

$$\begin{aligned}C_l^+ \alpha_0 + \alpha_0 C_l &= 0, \\ C_l^+ \alpha_5 + \alpha_5 C_l &= 0.\end{aligned}$$

Отсюда получаем искомое выражение коэффициентов параллельного переноса спинора в виде комплексного выражения

$$C_l = g_l + i\Phi_l,\tag{4,12}$$

где  $g_l$  — вещественная величина, являющаяся функцией  $\gamma_{ikl}$  и матриц  $\alpha_l$ , а  $\Phi_l$  — вещественная величина, пропорциональная единичной матрице.

Можно проверить, пользуясь свойством  $\gamma_{ikl}$  и матриц Дирака, что

$$g_l = \frac{1}{4} \sum_{m=1}^4 \alpha_m \alpha_k e_k \gamma_{mkl}.$$

Отсюда, учитывая смысл приращения при параллельном переносе, как поправки к обычному дифференцированию, получим для ковариантной производной ортогональных компонент спинора формулу

$$D_I \psi = \left( \frac{\partial \psi}{\partial s} \right)_I - C_I \psi, \quad (4,13)$$

где

$$\left( \frac{\partial \psi}{\partial s} \right)_I = h_i^{\alpha} \frac{\partial \psi}{\partial x_{\alpha}}.$$

Компоненты  $D_I \psi$ , очевидно, являются также ортогональными компонентами некоторого спинора.

В выражении для коэффициента параллельного переноса  $C_I$  первый член  $g_I$  связан с искривлением метрики и тем самым с наличием гравитации. В случае псевдоэвклидова пространства все  $\gamma_{ihl}$  равны нулю, и этот член исчезает. Иначе говоря, в этом члене находит себе место выражение энергии взаимодействия электрона или других спинорных частиц с полем тяготения. Однако даже в случае отсутствия искривления пространства—времени ковариантная производная спинора не исчезает, но равняется

$$D_I \psi = \left( \frac{\partial \psi}{\partial s} \right)_I - i \Phi_I \psi.$$

Величину  $\Phi_I$  с точностью до константы следует, очевидно, отождествить с компонентой потенциала электромагнитного поля, так как в дираковское уравнение как раз входит комбинация величин

$$\frac{\partial}{\partial x_I} - \frac{ie}{\hbar c} \varphi_I,$$

т. е. нужно положить  $\Phi_I = \frac{e}{\hbar c} \varphi_I$ . Таким образом, гравитационные и электромагнитные члены входят совместно в требуемой естественной комбинации при параллельном переносе спиноров, притом в римановой геометрии, а не в произвольных обобщенных геометриях, не требуемых опытом, но вводимшихся в различных вариантах геометризованных «единых» теорий поля со специальной целью добиться геометрической трактовки электромагнетизма



наряду с гравитацией. В этом результате следует видеть принципиальный успех развиваемой теории (см. § 1<sup>1)</sup>).

Для того чтобы написать уравнение Дирака в ковариантной форме, надо заменить обычные производные на найденные ковариантные для ортогонального репера:

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha} \rightarrow D_l = \left( \frac{\partial}{\partial s} \right)_l - C_l.$$

Тогда уравнение Дирака примет вид

$$-i\hbar \sum_{k=1}^4 e_k \alpha_k \left( \left( \frac{\partial \psi}{\partial s} \right)_k - C_k \psi \right) + mc \alpha_0 \psi. \quad (4,14)$$

Переходя от локального ортогонального репера к криволинейной системе координат по формуле (4,4), получим:

$$\gamma^\sigma \left( \frac{\partial \psi}{\partial x^\sigma} - \Gamma_\sigma \psi \right) - ik_0 \alpha_0 \psi = 0, \quad (4,15)$$

где  $\Gamma_\sigma = \sum_{k=1}^4 e_k h_{k,\sigma} C_k$ , а  $\gamma^\sigma = \sum_{k=1}^4 e_k \alpha_k h_k^\sigma$  — матрицы Дирака в криволинейной системе координат.

В ортогональных координатах в римановом пространстве, метрика которого задана выражениями  $ds^2 =$

$$= \sum_{i=1}^4 e_i H_i^2 dx_i^2, \quad \sqrt{-g} = H_1 H_2 H_3 H_4, \quad h_i^i = \frac{e_i}{H_i}, \quad h_{i,i} = H_i,$$

уравнение Дирака примет вид

$$\left\{ \sum_{j=1}^4 \frac{\alpha_j}{H_j} \left( \frac{\partial}{\partial x_j} - \frac{ie}{\hbar c} A_j + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \ln \frac{\sqrt{-g}}{H_j} \right) \right) + ik_0 \alpha_0 \right\} \psi = 0. \quad (4,16)$$

Эта запись удобна также для перехода к криволинейным координатам в обычном пространстве<sup>2)</sup>.

<sup>1)</sup> См. также В. Амбарцумян и Д. Иваненко, ДАН (1930), стр. 45; Н. Weyl, Naturwiss. 19, 49 (1931); Н. Weyl, Gruppentheorie und Quantenmechanik, Leipzig, 1931; Н. Weyl, Philosophy of mathematics, Princeton, 1949.

<sup>2)</sup> См. В. А. Фок, Некоторые применения идей Лобачевского в механике и физике, М.—Л., 1950.

Интересным применением теории является установление аналога теоремы Эренфеста для уравнения Дирака, обобщённого на риманову геометрию. Определим матричный элемент оператора  $L$  как

$$L_{mn} = \int \psi_m^+ L \psi_n \sqrt{g} d^3x, \quad (4,17)$$

где  $\psi_n, \psi_m$  — решения уравнения Дирака, записанного в ковариантной форме. Эти решения нормированы так, что

$$\int \psi_m^+ \psi_n \sqrt{g} d^3x = \delta_{mn}.$$

Напишем уравнения Дирака для  $\psi$  и  $\psi^+$ :

$$\gamma^\sigma \left( \frac{\partial \psi}{\partial x^\sigma} - \Gamma_\sigma \psi \right) - ik_0 \alpha_0 \psi = 0, \quad (4,18)$$

$$\left( \frac{\partial \psi^+}{\partial x^\sigma} - \psi^+ \Gamma_\sigma^+ \right) \gamma^\sigma + ik_0 \psi^+ \alpha_0 = 0. \quad (4,19)$$

Умножая (4,18) на  $-\psi^+ 1_\alpha^+$  слева и (4,19) на  $\Gamma_\alpha \psi$  справа и складывая, используя формулу

$$\Gamma_\sigma^+ \gamma^\sigma + \gamma^\sigma \Gamma_\sigma = -\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial (\sqrt{g} \gamma^\sigma)}{\partial x^\sigma}, \quad (4,20)$$

получим:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^\sigma} (\psi^+ \sqrt{g} \gamma^\sigma \Gamma_\alpha \psi) + \psi^+ (\nabla_\alpha \gamma^\sigma) D_\sigma \psi - \\ & - \psi^+ \gamma^\sigma \frac{\partial \Gamma_\alpha}{\partial x^\sigma} \psi + \psi^+ \gamma^\sigma (\Gamma_\sigma \Gamma_\alpha - \Gamma_\alpha \Gamma_\sigma) \psi = 0, \end{aligned} \quad (4,21)$$

где

$$\nabla_\alpha \gamma^\sigma = \frac{\partial \gamma^\sigma}{\partial x^\alpha} + \Gamma_{\alpha\gamma}^\sigma \gamma^\rho.$$

Дифференцируя (4,18) по  $x^\alpha$ , умножая слева на  $\psi^+$  и складывая с выражением (4,19), умноженным справа на  $\frac{\partial \psi}{\partial x^\alpha}$ , получим:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^\sigma} \left( \psi^+ \sqrt{g} \gamma^\sigma \frac{\partial \psi}{\partial x^\alpha} + \psi^+ \frac{\partial \psi}{\partial x^\alpha} \right) + \\ & + \psi^+ \frac{\partial \gamma^\sigma}{\partial x^\alpha} D_\sigma \psi - \psi^+ \gamma^\sigma \frac{\partial \Gamma_\sigma}{\partial x^\alpha} \psi = 0. \end{aligned} \quad (4,22)$$

Вычитая (4,21) из (4,22), получим:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} (\psi^+ \sqrt{g} \gamma^\alpha D_\alpha \psi) = \\ = \Gamma_{\alpha\rho}^\sigma \psi^+ D_\sigma \psi + \psi^+ \gamma^\rho \left( -\frac{1}{2} R_{\rho\alpha} + \frac{ie}{\hbar c} F_{\rho\alpha} \right) \psi. \end{aligned} \quad (4,23)$$

Здесь  $R_{\rho\alpha}$  — сокращённый тензор Римана-Кристоффеля, а  $F_{\rho\alpha}$  — тензор электромагнитного поля. Умножая (4,23) на  $\sqrt{g} d^3x$  и интегрируя по всему пространству, получим:

$$\frac{d}{dx^4} (\gamma^4 D_\alpha) = \Gamma_{\alpha\rho}^\sigma \gamma^\rho D_\sigma + \gamma^\rho \left[ -\frac{1}{2} R_{\rho\alpha} + \frac{ie}{\hbar c} F_{\rho\alpha} \right] \quad (4,24)$$

(уравнение для матричных элементов). Заменяя в (4,24)  $\frac{\hbar}{i} D_\alpha$  на  $p_\alpha$ , получим:

$$\frac{d}{dx^4} (\gamma^4 p_\alpha) = \Gamma_{\alpha\rho}^\sigma \gamma^\rho p_\alpha + \gamma^\rho \left[ \frac{i\hbar}{2} R_{\rho\alpha} + \frac{e}{c} F_{\rho\alpha} \right].$$

Замечая теперь, что  $\gamma^\rho$  соответствует скорости частицы в долях  $c$ , а  $p_\alpha$  — импульсу, сделаем переход  $\hbar \rightarrow 0$ . Тогда для центра тяжести волнового пакета действительно получим ожидаемые уравнения релятивистской механики точки:

$$\frac{d}{dx^4} (\gamma^4 p_\alpha) = \Gamma_{\alpha\rho}^\sigma \gamma^\rho p_\alpha + \gamma^\rho \frac{e}{c} F_{\rho\alpha}, \quad (4,25)$$

где первый член является силой тяготения, а второй — лоренцевой силой. Этот результат особенно наглядно показывает правильное соотношение между гравитационными и электромагнитными членами в законе параллельного переноса спинора и, тем самым, в уравнении Дирака.

Отметим, ещё, что, переходя к уравнению Клейна 2-го порядка от уравнения Дирака, учитывающего наличие гравитации и электромагнитного поля, мы получим, во-первых, обычный оператор клейновского уравнения в римановой геометрии, во-вторых, известный член, связанный со спиновым магнитным и электрическим моментами электрона (тензор  $s_{\mu\nu}$ ), и, в-третьих, новый весьма

незначительный член, равный скалярной кривизне, об-  
язанный гравитации.

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{-g}} \cdot \frac{\partial}{\partial x_\mu} \sqrt{-g} \cdot g^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x_\nu} - \frac{1}{2} S_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} - \frac{R}{4} \right\} \psi = 0. \quad (4,26)$$

В заключение следует отметить, что Картан указал на трудность рассмотрения спиноров как вполне определённых геометрических объектов, имеющих природу тензора в общем смысле слова, в случае распространения уравнения Дирака на риманову геометрию<sup>1)</sup>, что, очевидно, находится в связи с приведёнными выше рассуждениями о необходимости введения локальных ортогональных реперов в точках риманова пространства.

Трудности задачи о параллельном переносе спиноров, связанные с приведённым выше указанием Картана, в известной мере устранимы, в случае введения бесконечномерного представления. Известно, что для уравнений дираковского типа (4, 3), кроме обычных спинорных (конечномерных) представлений группы Лоренца существуют также бесконечно мерные представления, как было указано в работах Дирака и Гельфанда с сотрудниками.  $\psi$  приобретает смысл вектора в гильбертовом пространстве, и матрицы  $\gamma_\nu$  будут бесконечномерными. Анализируя условия инвариантности подобных уравнений, приходим к выводу, что параллельный перенос спиноров в римановом пространстве, вообще говоря, реализуется в бесконечномерном случае<sup>2)</sup>.

Задавая  $\psi[\sigma]$  как функционал на семействе поверхностей  $\sigma$ , где  $\sigma$  — гиперплоскость  $t = t(x, y, z)$  в четырёхмерном псевдоэвклидовом пространстве, и как функцию динамического переменного  $q$ , находим для  $\psi(\sigma, q)$  правила параллельного переноса в виде

$$\delta\psi = i\epsilon A\psi, \quad \delta\psi = i\epsilon [\mathfrak{A}, \psi], \quad (4,27)$$

где  $\epsilon$  — малый параметр. Операторы  $i\epsilon A$  и  $i\epsilon \mathfrak{A}$  являются

<sup>1)</sup> Э. К а р т а н, Теория спиноров, М., 1947, стр. 216.

<sup>2)</sup> См. Р. А. М. Д и г а с, Phys. Rev. 73, 1092 (1948).

соответственно бесконечно малыми операторами сдвига по  $q$  и по  $\sigma$ , причём  $iA$  имеет смысл гамильтониана уравнения Шредингера, а  $i\mathfrak{A}$  — обобщённой производной по времени  $\sigma$ . По аналогии с конечномерным случаем можно считать, что  $\psi$  играет роль вектора по отношению к  $\mathfrak{A}$  и спинора по отношению к  $A$ . Семейство бесконечно малых операторов  $\{\mathfrak{A}\}$  задаёт бесконечномерную группу Ли в гильбертовом пространстве, являющуюся представлением группы Лоренца.

Оказывается, что коммутатор двух операторов этого семейства  $\mathfrak{A}$  и  $\mathfrak{B}$ :

$$\mathfrak{C} = [\mathfrak{A}, \mathfrak{B}]$$

вообще говоря, не принадлежит к тому же семейству. Это приводит к нарушению групповых свойств семейства  $\{\mathfrak{A}\}$  и, следовательно, к потере релятивистской инвариантности в теории. Для устранения трудности предлагается положить коэффициенты  $a_n$  и  $b_n$ , определяющие переход с одной  $\sigma$ -поверхности на другую, равными нулю ( $a_n = b_n = 0$ ), что делает теорию стационарной.

Возможен более общий способ устранения этой трудности, заключающийся в обобщении понятия  $\sigma$ -поверхности, при котором  $\sigma$  рассматривается как локальная окрестность в четырёхмерном римановом пространстве.

Таким образом, теория параллельного переноса спиноров, позволившая установить форму дираковского уравнения в римановой геометрии и тем самым вид энергии взаимодействия электрона с полем тяготения и пролившая свет на ряд вопросов связи гравитации и электромагнетизма, оказывается полезной также при новейшем развитии квантовой теории поля.

## § 5. Квантовая теория тяготения

При изложении современного представления о веществе и пространстве—времени (§ 1) мы уже коснулись коротко современной теории тяготения, обобщающей старое ньютоновское представление в ряде направлений: 1) совокупность потенциалов гравитационного поля образует

симметричный тензор 2-го ранга с десятью компонентами, вместо одной единственной компоненты, ньютонового потенциала; 2) тензор гравитационного поля совпадает с метрическим тензором  $g_{\mu\nu}$ , определяющим величину интервала в искривлённом четырёхмерном пространстве—времени; 3) значения компонент гравитационных потенциалов  $g_{\mu\nu}$  определяются эйнштейновскими нелинейными уравнениями 2-го порядка в производных от  $g_{\mu\nu}$ , неоднородность которых, стоящая в правой части, определяется тензором плотности энергии—импульса—натяжений  $T_{\alpha\beta}$ :

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \frac{8\pi\kappa}{c^4} T_{\mu\nu}, \quad (5,1)$$

где  $R_{\mu\nu}$ —сокращённый тензор Римана-Кристоффеля,

$$R_{\mu\nu} = R^{\sigma}_{\mu\nu\sigma} =$$

$$= -\frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} \{\mu\nu, \alpha\} + \{\mu\alpha, \beta\} \{\nu\beta, \alpha\} + \frac{\partial^2}{\partial x_{\mu} \partial x_{\nu}} \ln \sqrt{-g} - \\ - \{\mu\nu, \alpha\} \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} \ln \sqrt{-g},$$

$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$ ,  $\kappa$ —постоянная тяготения.

Хотя геометризация тяготения отделила его в известной мере от других видов материи, однако с точки зрения общей теории поля нет оснований исключать поле тяготения из рассмотрения при проведении вторичного квантования всех полей. Однако трудности, стоящие на пути квантования нелинейных уравнений, позволяют пока что в сущности лишь написать формальным образом громоздкие перестановочные соотношения между «координатами» поля, т. е.  $g_{\mu\nu}$ , и канонически сопряжёнными им моментами.

Важно отметить, что в то время как в теории любого иного поля метрический тензор  $g_{\mu\nu}$  остаётся классической неоператорной величиной, в квантовой теории сами компоненты  $g_{\mu\nu}$  являются «координатами» поля и в качестве волновых функций подвергаются квантованию, так же как спиноры, псевдоскаляры, векторы  $A_{\mu}$  и т. д., описывающие электроны, мезоны, электромагнитное поле и другие частицы и поля. Поэтому в данном случае речь идёт

о построении квантовой теории поля в «аморфном» пространстве, метрическая структура которого не уточняется<sup>1)</sup>). Взяв  $g_{\mu\nu}$  в качестве обобщённых координат поля, мы получим канонически сопряжённые им моменты по общему правилу как производные от лагранжиана.

Для удобства вводятся семейства трёхмерных поверхностей в четырёхмерном пространстве—времени; точки на каждой поверхности задаются тремя параметрами  $u_s$  ( $s = 1, 2, 3$ ), а отдельные поверхности нумеруются значением четвёртого параметра  $t$ . Тогда интеграл действия запишется в виде

$$S = \int L J d^3u dt,$$

где якобиан  $J = \left| \frac{\partial x^\sigma}{\partial (u_s, t)} \right|$ . Исходя из обычного лагранжиана

$$L = \frac{c^4}{16\pi\kappa} \sqrt{-g} g^{\alpha\beta} [\{\alpha\beta, \rho\} \{\rho\sigma, \sigma\} - \{\alpha\rho, \sigma\} \{\beta\sigma, \rho\}],$$

получим для канонических импульсов:

$$\begin{aligned} \pi^{\mu\nu} = \frac{\partial(JL)}{\partial \dot{x}^\rho} = \frac{1}{4} (\sqrt{-g}) \{ & 2g^{\alpha\sigma} g^{\beta\rho} g^{\mu\nu} + \\ & + g^{\mu\nu} g^{\nu\sigma} g^{\alpha\beta} + g^{\nu\rho} g^{\mu\sigma} g^{\alpha\beta} - 2g^{\alpha\beta} g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} - 2g^{\alpha\mu} g^{\nu\sigma} g^{\beta\rho} - \\ & - 2g^{\alpha\nu} g^{\mu\sigma} g^{\beta\rho} + 2g^{\alpha\mu} g^{\beta\nu} g^{\rho\sigma} \} \frac{\partial g^{\alpha\beta}}{\partial x^\sigma} l_\rho \cdot \text{const}, \end{aligned}$$

где  $l_\rho$  есть нормаль к поверхности  $t = \text{const}$ . Отсюда получаем трёхмерные канонические перестановочные соотношения вида:

$$[f_{\alpha\beta}(u), \pi^{\mu\nu}(u')] = \frac{1}{2} (\delta_\alpha^\mu \delta_\beta^\nu + \delta_\alpha^\nu \delta_\beta^\mu) \delta(u - u') \cdot \text{const}.$$

<sup>1)</sup> См. P. G. Bergman a. J. H. M. Brunings, Rev. Mod. Phys. 21, 480 (1949); F. A. E. Pirani a. A. Schild, Phys. Rev. 79, 986 (1950).

Однако ввиду сложности формул дальнейшее оперирование с ними не производилось и вопрос о сопоставлении корпускул в общем случае нелинейного, не слабого поля пока что недостаточно ясен. Действительно, до сих пор кванты поля (фотоны, гравитоны и т. д.) возникают всегда в линейном приближении, когда каждой парциальной элементарной волне сопоставлялась частица. Таким образом, повидимому, в области нелинейной теории обычное понимание частиц в какой-то мере теряет смысл и должно быть соответственным образом пересмотрено. Наряду с этим стоит вопрос об установлении не канонических, но четырёхмерных правил перестановки для потенциалов общего гравитационного поля. Поскольку левая их часть должна быть решением нелинейного уравнения, в правой части невозможно использовать обычные перестановочные функции  $D$ ,  $D'$ , являющиеся решением лишь волнового уравнения Даламбера и связанные непосредственно с гринновской функцией этого уравнения.

Аналогичные трудности при квантовании имеют место, очевидно, в случае любых нелинейных уравнений, в частности при нелинейном обобщении электромагнитного поля, а также при рассмотрении нелинейных обобщений уравнений мезонного поля и дираковского уравнения.

Наряду с правилами перестановки для гравитационного поля должны иметь место вытекающие из них некоторые формулы типа соотношений неопределённости, связывающие неточности величин  $g_{\mu\nu}$  и их производных также, как это, например, имеет место в нерелятивистской квантовой механике частиц или в релятивистской квантовой теории электромагнитного поля. Суть дела сводится в данном случае, очевидно, к тому, что оказывается невозможным одновременно измерить с абсолютной точностью все компоненты тензора  $g_{\mu\nu}$  и других величин, характеризующих поле тяготения, т. е. символов Кристоффеля  $\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha}$ , компонент тензоров  $R_{\mu\nu}$ ,  $R_{\mu\nu\rho\sigma}$ , скаляра  $R$  и т. д. Определяемые в обычной классической макроскопической теории величины  $g_{\mu\nu}$ ,  $R_{\mu\nu}$  и т. д. являются средними в таком же смысле, как и напряжённости электромагнитного поля ( $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$ <sup>1</sup>).

<sup>1</sup>) См. M. F. M. Osborne, Phys. Rev. 75, 1579 (1949).



Имеются однако два основания для установления более тесной связи тяготения с обычными формами вещества (электроны, позитроны, фотоны и т. д.). Прежде всего перейдём от общего поля тяготения к слабому полю, описываемому компонентами  $h_{\mu\nu}$ . Будем, кроме того, рассматривать лишь поперечно-поперечную часть поля, способную реально излучаться. Тогда оказывается, во-первых, что уравнения для этой части слабого поля совпадают с уравнениями частиц спина 2, лишённых массы покоя. Во-вторых, оказывается, что по крайней мере слабое поле можно трактовать в значительной степени аналогично обычному веществу, установив для него понятие температуры, рассматривая его превращения в обычное вещество и т. д. Все эти обстоятельства делают желательным развитие квантовой теории тяготения.

**а) Квантование слабого поля тяготения.** Перейдём к квантованию слабого поля тяготения, в результате чего каждой парциальной волне будет сопоставлен квант поля— гравитон, аналогично тому, как фотоны сопоставляются электромагнитному полю<sup>1)</sup>. За исходный пункт берём, как обычно, лагранжеву функцию, имеющую для гравитационного поля вид

$$L = \frac{c^4}{16\pi k} g^{\mu\nu} \sqrt{-g} (\{\mu\alpha, \beta\} \{\nu\beta, \alpha\} - \{\mu\nu, \alpha\} \{\alpha\beta, \beta\}), \quad (5,2)$$

где фигурные скобки, обозначающие символы Кристоффеля, в частном случае равны  $\{\alpha\beta, \beta\} = \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \lg \sqrt{-g}$ . Об-

щая структура лагранжиана может быть наглядно пояснена замечанием, что трёхзначковые символы Кристоффеля аналогичны напряжённым гравитационного поля, так что лагранжиан зависит от квадратов напряжённостей, как и в случае электромагнитного поля.

Перейдём теперь к линейному случаю слабого гравитационного поля, положив

$$g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}^{(0)} + h_{\mu\nu}, \quad g^{\mu\nu} = g_{(0)}^{\mu\nu} - h^{\mu\nu}, \quad (5,3)$$

<sup>1)</sup> См. Д. Иваненко и А. Соколов, Вестник МГУ, № 8, 103 (1947).

где  $h^{\mu\nu}$ —малые величины. При этом ньютонов потенциал равен

$$\varphi_N = \frac{c^2}{2} h_{44}. \quad (5,4)$$

Напомним что

$$g_{\mu\nu}^{(0)} = g_{(0)}^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sqrt{-g} = 1 + h, \quad h = \sum_{\mu} e_{\mu} h_{\mu\mu},$$

$$g_{\mu\nu}^{(0)} = e_{\mu} \delta_{\mu\nu}, \quad h^{\mu\nu} = e_{\mu} e_{\nu} h_{\mu\nu}; \quad (5,5)$$

здесь  $e_1 = e_2 = e_3 = -1$ ,  $e_4 = 1$ . Компоненты слабого поля  $h_{\mu\nu}$  образуют тензор относительно линейных преобразований. У слабого поля следует различать три части<sup>1)</sup>: продольно-продольную  $h_{44}$ , продольно-поперечную  $h_{4k}$  и поперечно-поперечную  $h_{nk}$ . Только последняя часть может реально излучаться. Шесть поперечно-поперечных компонент удовлетворяют волновым уравнениям Даламбера  $\square h_{nk} = 0$  при четырёх дополнительных условиях Гильберта-Лоренца:

$$\sum \frac{\partial h_{nk}}{\partial x_n} - \frac{1}{2} \frac{\partial h}{\partial x_k} = 0. \quad (5,6)$$

Мы называем дополнительные установленные для гравитации уравнения условиями типа Гильберта-Лоренца, чтобы подчеркнуть их аналогию со случаем электромагнитного поля, на потенциалы которого наложено условие

Лоренца  $\frac{\partial \varphi_{\mu}}{\partial x_{\mu}} = 0$ . Подобно тому как лоренцево условие

связано с возможностью изменять потенциалы путём калибровочного преобразования (2-го рода)  $\varphi'_{\mu} = \varphi_{\mu} + \frac{\partial f}{\partial x_{\mu}}$ ,

где  $f$  подчинено условию  $\square f = 0$ , не нарушая вида лагранжиана максвелловых уравнений, гильбертово условие связано с обобщённым преобразованием гра-

<sup>1)</sup> См. Эддингтон, Теория относительности, М.—Л., 1934.

витационных потенциалов, которое можно назвать калибровочным преобразованием (3-го рода)  $h_{\mu\nu}$  вида

$$h'_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} + \frac{\partial f_\mu}{\partial x_\nu} + \frac{\partial f_\nu}{\partial x_\mu},$$

где вектор  $f_\mu$  подчиняется условиям

$$\square f_\mu = 0, \quad \sum \frac{\partial f_\nu}{\partial x_\nu} = 0.$$

При подобном калибровочном преобразовании, как не трудно видеть, остаются в силе: 1) условие симметрии: если  $h_{\mu\nu} = h_{\nu\mu}$ , то  $h'_{\mu\nu} = h'_{\nu\mu}$ ; 2) равенство нулю следа: если  $\sum h_{\mu\mu} = 0$ , то  $\sum h'_{\mu\mu} = 0$ ; 3) уравнения Даламбера: если  $\square h_{\mu\nu} = 0$ , то  $\square h'_{\mu\nu} = 0$ ; 4) равенство нулю расходимости: если  $\sum \frac{\partial h_{\mu\nu}}{\partial x_\mu} = 0$ , то  $\sum \frac{\partial h'_{\mu\nu}}{\partial x_\mu} = 0$ .

Таким образом, вполне аналогично случаю излучаемой поперечной части электромагнитного поля имеется всего две независимые компоненты поперечно-поперечного гравитационного поля и соответственно этому два независимых состояния поляризации. Так как для слабого поля

$$\{\mu\alpha, \beta\} = e_\beta [\mu\alpha, \beta] = \frac{1}{2} e_\beta \left( \frac{\partial h_{\nu\beta}}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial h_{\alpha\beta}}{\partial x_\mu} - \frac{\partial h_{\mu\alpha}}{\partial x_\beta} \right),$$

то, выбирая калибровку потенциалов так, чтобы  $\sum_\mu e_\mu h_{\mu\mu} = 0$ , получим для лагранжиана поперечно-поперечной части:

$$L = \frac{c^4}{16\pi x} e_\mu e_\alpha e_\beta [\mu\alpha, \beta] [\mu\beta, \alpha]. \quad (5,7)$$

Рассмотрим сначала частный случай распространения гравитационного поля вдоль оси  $x' = x$ , после чего переход к общему случаю не представит трудностей. Так как теперь  $h_{22} + h_{33} = 0$ , то мы будем иметь лишь две исчезающие компоненты:  $h_{23}$  и  $h_{22} - h_{33}$ . Тогда для лагранжиана имеем:

$$L = \frac{c^4}{16\pi x} \sum_{\mu, \nu=2,3} \left[ \left( \frac{\partial h_{\mu\nu}}{\partial x} \right)^2 - \frac{1}{c^2} \left( \frac{\partial h_{\mu\nu}}{\partial t} \right)^2 \right]. \quad (5,8)$$

Отсюда для плотности энергии гравитационного поля получим по общему правилу

$$T_{44} = L - g_4^{\alpha\beta} \frac{\partial L}{\partial g_4^{\alpha\beta}} = \frac{c^4}{16\pi\kappa} \sum_{\mu, \nu=2,3} \left[ \left( \frac{\partial h_{\mu\nu}}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{c^2} \left( \frac{\partial h_{\mu\nu}}{\partial t} \right)^2 \right], \quad (5,9)$$

где

$$g_4^{\alpha\beta} = \frac{\partial}{\partial x_4} (\sqrt{-g} g^{\alpha\beta}) = -e_\alpha e_\beta \cdot \frac{1}{c} \frac{\partial h_{\alpha\beta}}{\partial t}.$$

Этот результат вполне согласуется с общей теоремой Паули, согласно которой плотность энергии всех полей скалярного, векторного, тензорного (но не спинорного) типа, сопоставленных частицам целого спина 0, 1, 2, ... (но не полуцелого спина 1/2, 3/2, ...) является положительно дефинитной величиной.

Разложим компоненты поля в ряд Фурье

$$h_{\mu\nu} = L^{-\frac{3}{2}} \sum_l \sqrt{\frac{8\pi\kappa\hbar}{c^3 l}} (q_{\mu\nu} e^{-icl t + i l r} + q_{\mu\nu}^+ e^{icl t + i l r}), \quad (5,10)$$

где  $L$ —длина куба периодичности. Введём вместо амплитуд Фурье  $q_{\mu\nu}$  две независимые компоненты  $q_{23}(l_1, 0, 0) = q_1$ ,  $q_{22}(l_1, 0, 0) = -q_{33}(l_1, 0, 0) = q_2$ . Тогда для части плотности энергии  $H_0 = \sum H(l_1, 0, 0)$ , связанной с распространением поля по оси  $x$ , получим:

$$H_0 = \sum_{l_1} ch |l_1| (q_1^\dagger q_1 + q_2^\dagger q_2).$$

Вместо членов  $\frac{q_1^\dagger q_1 + q_1 q_1^\dagger}{2}$  мы сразу пишем  $q_1^\dagger q_1$ ; при учёте вторичного квантования (см. ч. 1 и § 2) это эквивалентно отбрасыванию нулевой энергии.

Применяя правила вторичного квантования бозевских полей, получим следующие правила перестановки для амплитуд Фурье:

$$[q_\mu(l_1), q_\nu^\dagger(l'_1)]_- = \delta_{\mu\nu} \delta_{l_1 l'_1}, \quad \mu, \nu = 1, 2. \quad (5,11)$$

Число поперечно-поперечных гравитонов в  $l_1$ -м состоянии будет равно

$$n_\mu = q_\mu^+ q_\mu \quad (\mu = 1 \text{ или } 2).$$

Переходя к общему трёхмерному случаю для амплитуд Фурье, будем иметь при произвольном направлении вектора волнового числа  $l$ :

$$q_{ns} = (a_{n2}a_{s2} - a_{n3}a_{s3})q_2 + (a_{n2}a_{s3} + a_{n3}a_{s2})q_1. \quad (5,12)$$

Так как в случае поперечно-поперечных гравитационных волн  $q_{4\mu} = 0$ , то  $q_{ns}$  описывают лишь пространственные компоненты. При этом матрица направляющих косинусов имеет вид

$$\|a_{ns}\| = \begin{pmatrix} \frac{l_1}{l} & -\frac{l_2}{l_{12}} & -\frac{l_1 l_3}{l l_{12}} \\ \frac{l_2}{l} & \frac{l_1}{l_{12}} & -\frac{l_2 l_3}{l l_{12}} \\ \frac{l_3}{l} & 0 & \frac{l_{12}}{l} \end{pmatrix},$$

где  $l_{12} = \sqrt{l_1^2 + l_2^2}$ ,  $l = \sqrt{l_1^2 + l_2^2 + l_3^2}$ .

Повторяя предыдущие рассуждения, получим следующие бозевские правила перестановки для коэффициентов Фурье в общем случае

$$[q_{ns}, q_{n's'}^+]_- = Q_{nn'}Q_{ss'} + Q_{ns'}Q_{sn'} - Q_{ns}Q_{n's'}, \quad (5,13)$$

где

$$Q_{nn'} = \delta_{nn'} - \frac{l_n l_{n'}}{l^2}.$$

Дополнительное условие Гильберта-Лоренца, которое в амплитудах Фурье имеет вид

$$q_{nn'}l_n = 0,$$

окажется при этом автоматически выполненным, так как

$$Q_{nn'}l_n = 0 \quad \text{и т. д.}$$

Правила перестановки для амплитуд Фурье позволяют, как обычно, найти четырёхмерные перестановочные соотношения для компонент поперечно-поперечной части потен-

циалов  $h_{\mu\nu}$ , являющихся функциями координат и времени. Образуя бозевские коммутаторы, получим:

$$[h_{ns}(\mathbf{r}, t), h_{n's'}(\mathbf{r}', t')]_- = \\ = \frac{16\pi\kappa h}{c^3 i} (\nabla_{nn'} \nabla_{ss'} + \nabla_{ns'} \nabla_{sn'} - \nabla_{ns} \nabla_{n's'}) D_{gr}, \quad (5,14)$$

где

$$D_{gr} = \frac{D}{(\nabla^2)^2}, \quad D = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3l}{l} \sin cl \, T e^{i\mathbf{l}\mathbf{R}}$$

— первая перестановочная функция Паули при  $k_0 = 0$ . (Здесь  $T = t - t'$ ,  $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$ ,  $\nabla_{nn'} = \delta_{nn'} \nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial x_n \partial x_{n'}}$ ,  $d^3l = dl_1 dl_2 dl_3$  и произведён переход к пределу  $L \rightarrow \infty$ .) Отметим, что без выделения поперечно-поперечной части для потенциалов  $h_{\mu\nu}$  слабого гравитационного поля получаются близкие по форме правила перестановки<sup>1)</sup>

$$[h_{\mu\nu}(\mathbf{r}, t), h_{\mu'\nu'}(\mathbf{r}', t')]_- = \\ = \frac{16\pi\kappa h}{ic^3} (\delta_{\mu\mu'} \delta_{\nu\nu'} + \delta_{\mu\nu'} \delta_{\mu'\nu} - \delta_{\mu\nu} \delta_{\mu'\nu'}) D. \quad (5,15)$$

Полагая  $t = t'$ , получим, как обычно, трёхмерные правила перестановки для  $h_{\mu\nu}$  и их производных (в частности, символов Кристоффеля) в линейном приближении.

В релятивистской квантовой механике фундаментальную роль играет значение спина частиц. Как можно показать из разнообразных соображений, спин гравитона равен  $2 \frac{h}{2\pi}$ . Проще всего это следует из числа независимых компонент волновых функций поля, являющихся гравитационными потенциалами. Действительно, из десяти компонент  $h_{\mu\nu}$  ( $h_{\mu\nu} = h_{\nu\mu}$ ), благодаря равенству нулю следа и паличию четырёх дополнительных условий в виде уравнений Гильберта-Лоренца остаётся  $n = 5$  независимых компонент. Согласно формуле  $n = 2s + 1$ , где  $s$ —значение спина в долях  $\frac{h}{2\pi}$ , получим отсюда  $s = 2$ .

<sup>1)</sup> W. Pauli, M. Fierz, Proc. Roy. Soc. A 173, 212 (1939).

**б) Излучение гравитационного поля.** Произведя вторичное квантование слабого гравитационного поля и сопоставив ему корпускулы-гравитоны, мы можем теперь перейти к рассмотрению различных эффектов, связанных с гравитонами. Мы ограничимся тремя наиболее важными и типичными эффектами: излучением гравитонов, переносом взаимодействия посредством гравитонов и превращением электронов — позитронов в гравитоны. Другие явления, например рассеяние и тормозное испускание гравитационных волн, можно рассчитывать аналогичным образом. Часть указанных эффектов является по существу классической [в данном случае квантовая теория либо несколько уточняет прежний результат, как в случае излучения, либо воспроизводит классический результат (для взаимодействия)]. Такое же точно положение вещей, как известно, имеет место в случае электродинамики. Всё же анализ квантового вывода этих формул поучителен со многих точек зрения. С другой стороны, трансмутация пар электронов — позитронов, или пар других противоположно заряженных частиц в гравитационные волны (т. е. гравитоны) является типично квантовым релятивистским эффектом, аналогично превращению электронов — позитронов в  $\gamma$ -кванты.

Для установления связи электрона со слабым полем тяготения, согласно результатам предыдущего параграфа (§ 4), нужно найти соответствующую форму ковариантной производной от спинора. Интервал в случае слабого поля запишем в виде

$$ds^2 = c^2 \left( 1 + \frac{h_{44}}{c^2} \right) dt^2 + 2 \sum_i h_{4i} dx_i dt - \\ - \sum_{i, k} (\delta_{ik} - h_{ik}) dx_i dx_k \quad (i, k = 1, 2, 3).$$

В этом случае коэффициенты вращения Риччи равны

$$\gamma_{ikl} = -\frac{1}{2} e_i e_k e_l \frac{\partial h_{ik}}{\partial x_l}.$$

Примем за систему ортогональных конгруэнций ортогональные и единичные векторы:

$$\left\{ \begin{array}{cccc} -1 - \frac{1}{2} h_{11}, & -\frac{1}{2} h_{12}, & -\frac{1}{2} h_{13}, & \frac{1}{2} \frac{h_{14}}{c} \end{array} \right\},$$

$$\left\{ \begin{array}{cccc} -\frac{1}{2} h_{12}, & -1 - \frac{1}{2} h_{22}, & -\frac{1}{2} h_{23}, & \frac{1}{2} \frac{h_{24}}{c} \end{array} \right\},$$

$$\left\{ \begin{array}{cccc} -\frac{1}{2} h_{13}, & -\frac{1}{2} h_{23}, & -1 - \frac{1}{2} h_{33}, & \frac{1}{2} \frac{h_{34}}{c} \end{array} \right\},$$

$$\left\{ \begin{array}{cccc} \frac{1}{2} \frac{h_{14}}{c}, & \frac{1}{2} \frac{h_{24}}{c}, & \frac{1}{2} \frac{h_{34}}{c}, & 1 - \frac{1}{2} \frac{h_{44}}{c^2} \end{array} \right\}.$$

Тогда получим для коэффициентов параллельного переноса спиноров в случае отсутствия электромагнитного поля:

$$C_l = \frac{1}{4} \sum_{i, h=1}^4 \alpha_i \alpha_h e_k \gamma_{ihl};$$

здесь

$$\alpha_1 = \rho_1 \sigma_1, \quad \alpha_2 = \rho_1 \sigma_2, \quad \alpha_3 = \rho_1 \sigma_3, \quad \alpha_4 = 1.$$

Окончательно коэффициенты  $C_l$  равны

$$C_l = -\frac{1}{8} e_l \frac{\partial h_{44}}{c^2 \partial x_l}.$$

Таким образом, уравнение Дирака в слабом гравитационном поле примет вид

$$\frac{\hbar}{i} \sum_{k=1}^4 e_k \alpha_k \left( \frac{\partial}{\partial x_k} - \frac{1}{2} \sum_{l=1}^4 e_l h_{kl} \frac{\partial}{\partial x_l} \right) \psi +$$

$$+ \left( \frac{1}{8} \frac{\hbar}{ic^2} \sum_{k=0}^4 \frac{\partial h_{44}}{\partial x_k} \alpha_k - mc \rho_3 \right) \psi = 0.$$

В дальнейшем мы возьмём за основу клейновское квантовое релятивистское уравнение 2-го порядка, описывающее скалярные частицы спина нуль.

В гравитационном поле это уравнение имеет вид:

$$\left( \Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - k_0^2 \right) \psi \rightarrow$$

$$\rightarrow \left\{ -g^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x_\mu} \frac{\partial}{\partial x_\nu} + g^{\mu\nu} \{ \mu\nu, \alpha \} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} - k_0^2 \right\} \psi = 0. \quad (5,16)$$



В нашем приближении слабого поперечно-поперечного гравитационного поля имеем:

$$g^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x_\mu} \frac{\partial}{\partial x_\nu} = e_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} \frac{\partial}{\partial x_\mu} - h_{ns} \frac{\partial}{\partial x_n} \frac{\partial}{\partial x_s}, \quad (5,17)$$

$$g^{\mu\nu} \{ \mu\nu, \alpha \} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} = \left( \frac{\partial}{\partial x_s} h_{ns} h_{nh} \right) \frac{\partial}{\partial x_h} + \frac{1}{4} e_\alpha \left( \frac{\partial}{\partial x_\alpha} h_{ns}^2 \right) \frac{\partial}{\partial x_\alpha}.$$

Таким образом, возможно выделить в уравнении члены связи с гравитационным полем и объединить их в виде некоторой «потенциальной» энергии  $U$  (в данном случае) скалярной частицы в поле. Уравнение примет вид

$$\left( -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \nabla^2 - k_0^2 \right) \psi = U\psi, \quad m = \frac{k_0 \hbar}{c}. \quad (5,18)$$

Выделяя члены, линейные и квадратичные относительно потенциалов поля  $h_{ns}$ , имеем:

$$U = U_1 + U_2, \quad (5,19)$$

$$U_1 = -h_{ns} \frac{\partial}{\partial x_n} \frac{\partial}{\partial x_s},$$

$$U_2 = -\left( \frac{\partial}{\partial x_s} h_{ns} h_{nh} \right) \frac{\partial}{\partial x_h} - \frac{1}{4} e_\alpha \left( \frac{\partial}{\partial x_\alpha} h_{ns}^2 \right) \frac{\partial}{\partial x_\alpha}.$$

Перейдём теперь к «полурелятивистскому» приближению, пригодному при малых скоростях частиц, когда, однако, существенным остаётся учёт собственной энергии. Замечая, что в этом случае

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} = \frac{2k_0}{ic} \frac{\partial}{\partial t} + k_0^2 \quad \left( k_0 = \pm \frac{m_0 c}{\hbar} \right),$$

получим из (5,18) искомое полурелятивистское уравнение

$$\left( -\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial t} - H_0 \right) \psi = V\psi, \quad (5,18a)$$

которое может быть использовано, например, при исследовании аннигиляции частиц. Здесь гамильтонова функция равна сумме кинетической, собственной и потенциальной энергии (без учёта гравитации)

$$H_0 = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + \varepsilon mc^2 + V_0 \quad (\varepsilon = \pm 1).$$

Дополнительная потенциальная энергия в слабом поперечно-поперечном поле тяготения равняется

$$V = \frac{c\hbar}{2k_0} U = - \frac{c\hbar}{2k_0} \left( h_{ns} \frac{\partial}{\partial x_n} \frac{\partial}{\partial x_s} - \frac{ik_0}{4c} \frac{\partial h_{ns}^2}{\partial t} \right). \quad (5,20)$$

Наконец, в приближении, полностью нерелятивистском, следует в уравнении (5,18а) просто отбросить член собственной энергии  $\epsilon mc^2$ ; тогда слева получим обычный оператор шредингеровского уравнения

$$H_{00} = - \frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V_0.$$

Второй член справа в последовательном нерелятивистском приближении также следует отбросить.

Перейдём к вычислению энергии излучения слабых поперечно-поперечных гравитационных волн нерелятивистскими частицами, взяв за основу уравнение

$$\left( - \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 - V_0 \right) \psi = V \psi = - \frac{c\hbar}{2k_0} h_{ns} \frac{\partial}{\partial x_n} \frac{\partial}{\partial x_s} \psi. \quad (5,21)$$

Взаимодействие с гравитационным полем  $V$  по существу является энергией связи скалярной частицы с полем, имеющим квадрупольный характер, что соответствует спину гравитонов  $2 \frac{\hbar}{2\pi}$ . Беря начальную волновую функцию частицы в виде

$$\psi_0 = e^{-icKt} \psi_0(\mathbf{r})$$

и полагая

$$\psi = \sum c_k e^{-icKt} \psi_k(\mathbf{r}),$$

получим для дираковского коэффициента теории возмущений

$$\begin{aligned} C_k &= - \frac{i}{\hbar} \int_0^t dt \int d\tau \psi_k^+ V \psi_0 = \\ &= - \frac{iC}{2k_0 \hbar^2 L^{3/2}} \sum_l V \frac{8\pi\hbar}{c^3 t} p_{ns} q_{ns}^+ \int_0^t dt e^{-ict} (K_0 - K^{-1}), \quad (5,21) \end{aligned}$$

где матричный элемент равен

$$p_{ns} = \int d\tau \psi_h^+(\mathbf{r}) e^{-i\tau r} p_n p_s \psi_0(\mathbf{r})$$

(импульс имеет операторный вид:  $p_n = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x_n}$ ). При этом учтено отсутствие гравитонов в начальный момент времени ( $q^+ q = 0$ ), благодаря чему, отбрасывая члены с  $q$ , разложение гравитационных потенциалов можно записать в виде

$$h_{ns} = L^{-\frac{3}{2}} \sum_l \sqrt{\frac{8\pi\kappa\hbar}{c^3 l}} q_{ns}^+ e^{i\kappa l t - i\mathbf{k}r}. \quad (5,22)$$

Отсюда при помощи обычных соотношений

$$\frac{\partial}{\partial t} \left| \int_0^t dt e^{-i\Gamma t} \right|^2 = 2\pi \delta(\Gamma), \quad \delta(ax) = \frac{\delta(x)}{a},$$

замены  $\frac{1}{L^{3/2}} \sum_l$  на  $\frac{1}{8\pi^3} \int d^3l$  и основной формулы теории возмущений для вероятности излучения

$$w = \frac{\partial}{\partial t} \sum C^+ C$$

получим для энергии слабого поперечно-поперечного гравитационного поля, излученного за секунду движущимися частицами:

$$W = chl w = \frac{\kappa l^2}{2\pi k_0^2 c \hbar^2} \oint d\Omega (2Q_{nn'} Q_{ss'} - Q_{ns} Q_{n's'}) p_{ns} p_{n's'}^+, \quad (5,23)$$

где частота  $\omega = cl$  и  $d\Omega$  — элемент телесного угла. Интегрируя по всем углам, получим для случая длинных волн, когда длина волны  $\lambda = \frac{\omega}{c}$  гораздо больше размеров системы  $a$  ( $a \ll \lambda$ ), энергию излучения слабых гравитационных волн в единицу времени:

$$W = \frac{8\kappa\omega^2}{5c^5 m^4} \left( p_{ns}^2 - \frac{1}{3} p_{nn} \right). \quad (5,24)$$

Заменяя в этой квантовой формуле матричные элементы, характеризующие средний квадрупольный момент системы частиц, на их классические аналоги, получим отсюда выражение Эйнштейна для энергии излучения гравитационных волн

$$W = -\frac{dE}{dt} = \frac{\kappa}{5c^5} \cdot \ddot{Q}_{\alpha\beta}^2, \quad (5,25)$$

где тензор квадрупольного момента распределения масс равен

$$Q_{\alpha\beta} = \int \rho (3x_\alpha x_\beta - \delta_{\alpha\beta} r^2) d\tau.$$

Заметим, что в прежних работах величина гравитационного излучения выражалась через тензор моментов инерции системы

$$M_{\alpha\beta} = \int \rho (r^2 \delta_{\alpha\beta} - x_\alpha x_\beta) d\tau, \quad (5,26)$$

связанный с тензором квадрупольного момента соотношением

$$Q_{\alpha\beta} = M_{44} \delta_{\alpha\beta} - 3M_{\alpha\beta}, \quad (5,27)$$

где  $\rho$ —плотность распределения масс, которую в соответствующей квантовой (например, нерелятивистской) формуле нужно заменить через  $\psi^+\psi$ . Однако подобные формулы не только не отражали ясно необходимости несимметричного распределения масс для наличия излучения гравитации, но вообще не позволяли усмотреть какой-либо аналогии со случаем электромагнитного излучения.

Говоря о квадрупольном характере гравитационного поля, мы имеем в виду, во-первых, то обстоятельство, что вследствие постоянства отношения гравитационного «заряда» (совпадающего с массой с точностью до множителя  $\sqrt{\kappa}$ ) к массе величина дипольного момента распределения масс равна нулю, аналогично положению вещей в электродинамике. Поэтому гравитационный потенциал какого-либо распределения масс на больших расстояниях  $R$  от них характеризуется наряду с потенциалом «зарядного» типа  $\varphi_0 = -\frac{\kappa m}{R}$  при  $e/m = \text{const.}$  потенциалом

квадрупольного момента распределения масс

$$\varphi_Q = -\frac{1}{6} \kappa Q_{\alpha\beta} \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} \frac{1}{R}. \quad (5,28)$$

Во-вторых, самое слабое гравитационное поле, описываемое симметричным тензором относительно линейных преобразований, соответствует корпускулам спина 2, излучение которых имеет тем самым не дипольный, но квадрупольный характер.

Порядок величины энергии излучения слабого гравитационного поля  $W_g$  можно крайне просто получить, исходя из известного выражения излучения энергии электромагнитного поля  $W_e$ ,

$$W_e = h\omega A_e, \quad (5,29)$$

и соответствующего эйнштейновского коэффициента  $A_e$ . Для этой цели достаточно, во-первых, заменить электрический заряд на гравитационный, роль которого играет масса частицы:  $e \rightarrow \sqrt{\kappa} \cdot m$ , и, во-вторых, необходимо от дипольного коэффициента  $A_e$  перейти к квадрупольному; последнее обстоятельство будет учтено по порядку величины добавочным множителем  $\left(\frac{\omega r}{c}\right)^2$ , где  $r$  — размеры излучающей системы. Окончательно вместо  $A_e \approx \frac{e^2}{hc^3} \omega^3 r^2$  получим для гравитационного коэффициента Эйнштейна  $A_g \approx \frac{\kappa m^2}{hc^5} \omega^5 r^4$  и для искомой излучаемой гравитационной энергии:

$$W_g = h\omega A_g \approx \frac{\kappa m^5}{c^5} \omega^6 r^4, \quad (5,30)$$

что совпадает по порядку величины с полученным выше выражением при подстановке в нём  $p_n = m\dot{q} \cong m\omega r$ . Указанные правила для перехода от электромагнитных дипольных выражений к гравитационным квадрупольным помогают также уяснить более наглядный смысл выражения для вероятности аннигиляции частиц в гравитоны и оказываются полезными также в ряде других случаев с целью предварительной ориентации.

Как неоднократно подчёркивалось, ввиду незначительности гравитационной константы и крайней малости масс элементарных частиц ядер и атомов, колеблющихся с большими частотами, а также малости частот колебания или обращения астрономических объектов большой массы, излучение гравитационной энергии ничтожно. Однако за космогонические периоды порядка  $10^9$  лет (сравнимые со временем жизни известных звёзд или Земли) потеря гравитационной энергии достигает для двойных звёзд уже порядка 0,001 их полной энергии. Так или иначе, наблюдать отдельные гравитоны пока что практически безнадежно.

Для обнаружения гравитационных волн и их излучения следует, очевидно, обратиться к эффектам, сказывающимся за большие промежутки времени. Одна из возможностей может лежать в следующем направлении. Поскольку реально излучаемое слабое поперечно-поперечное поле обладает энергией и может превращаться в обычное вещество типа пар электронов—позитронов (см. ниже), мы можем трактовать его в значительной мере подобно другим видам материи (электроны, мезоны и другие частицы, электромагнитное поле). Этими же свойствами в некоторой мере должно, повидимому, обладать и общее поле, характеризуемое метрическим тензором  $g_{\mu\nu}$ , трактовка которого с подобной точки зрения ещё не была проведена и чего мы в дальнейшем касаться здесь не будем.

Таким образом, следует для слабого гравитационного поля ввести понятие температуры, рассмотреть его температурное излучение, флуктуации и другие термодинамические свойства. Для ясности отметим ещё раз, что речь идёт сейчас о температуре самого гравитационного поля, а не об обобщении термодинамических величин и величины температуры при наличии гравитации, чему было посвящено уже немало исследований. С термодинамической точки зрения механизм излучения и быстрота излучения не играют, как известно, роли; существенным будет наличие некоторой плотности гравитационных волн при данной температуре. Ввиду целого спина гравитонов тепловое излучение гравитонов будет задаваться планков-

ской формулой, и к ним будет применим закон Стефана-Больцмана. Тем самым мы предполагаем, что несмотря на утечку гравитационных волн из всякой системы, например из галактики, мы имеем здесь дело с некоторым квазиравновесным состоянием. Поэтому возникает необходимость учесть энергию гравитационных волн наряду с энергией статического поля тяготения, электромагнитного излучения и тепловой (т. е. механической) энергией звёзд и других астрономических объектов при подведении общего баланса энергии в системе и при установлении критериев устойчивости. Сравнение гипотезы с эмпирическими данными астрономии по размерам различных систем указывает повидимому, на необходимость учёта гравитационных волн в общем балансе энергии и тем самым, возможно, открывает новые пути для косвенного обнаружения самих волн, до сих пор ускользавших от всякого наблюдения<sup>1)</sup>.

Заметим, что наличие гравитационного излучения приводит, как и в электромагнитном случае, к появлению крайне незначительной силы радиационного трения, действующей на частицу<sup>2)</sup>. Силу радиационного гравитационного трения необходимо включить в уравнения движения отдельных частиц.

Анализ этих уравнений может быть проведён методами, развитыми для уравнения электрона Лоренцем и Дираком<sup>3)</sup>.

Подчеркнём ещё раз, что в данных рассуждениях мы приходим к гравитационным волнам, являющимся решением уравнений общей теории тяготения в линейном приближении<sup>4)</sup>.

---

<sup>1)</sup> См. Иваненко, Бродский, Гинзбург, ДАН 80, 565 (1951).

<sup>2)</sup> Иваненко и Бродский, ДАН 75, 519 (1950).

<sup>3)</sup> См. Соколов, Вестник МГУ, № 2 (1947); ЖЭТФ 18, 280 (1948); см. также «Классическая теория поля», § 34.

<sup>4)</sup> В связи с проблемой отыскания волновых решений уравнений общей теории относительности укажем на недавние исследования, которые показывают, что в рамках приближённого метода Эйнштейна-Гофмана-Инфельда, применённого к отысканию уравнений движения тел, исходя из уравнений поля и использующего разложения по степеням  $v/c$  в системе, подверженной действию лишь

в) Закон Ньютона и гравитоны. Если бы мы учитывали взаимодействие частиц не с поперечно-поперечным, но с продольным гравитационным полем, которое в ньютоновском приближении описывается одной компонентой потенциала

$$\varphi_N = \frac{ch_{44}}{2},$$

то связь частицы массы  $m$  с этим полем характеризовалась бы потенциальной энергией

$$U_0 = -m\varphi_N = -\frac{mch_{44}}{2}.$$

Член  $U_0$  следовало бы включить в дираковское, клейновское или шредингеровское уравнение обычным образом в качестве четвертой скалярной компоненты импульса, либо соответственно обычной потенциальной энергии. Нерелятивистское уравнение Шредингера приобрело бы в гравитационном продольном поле вид

$$\left( -\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} + V_0 - \frac{mch_{44}}{2} - E \right) \psi = 0$$

или

$$\left[ \nabla^2 + \frac{2m}{\hbar^2} \left( E - V_0 + \frac{mch_{44}}{2} \right) \right] \psi = 0. \quad (5,31)$$

Ньютоново гравитационное поле может быть подвергнуто вторичному квантованию на основании общей теории квантования всего слабого поля без разделения на поперечные и продольные составляющие.

Для квантования продольного ньютонова поля, которое для общности предполагается зависящим также от времени, будем исходить из лагранжиана

$$L = -\frac{1}{8\pi} \frac{\partial \varphi_N}{\partial x^\nu} \frac{\partial \varphi_N}{\partial x^\nu} - \kappa m \varphi_N \int d\tau \delta(r - r') \delta(t - t'), \quad (5,32)$$

---

своих собственных гравитационных сил, гравитационное излучение не имеет места [A. E. S c h e i d e g g e r, Phys. Rev. 82, № 6, 883 (1951)].



приводящего после вариации по потенциалу  $\varphi_N$  к уравнению

$$\left( \Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \varphi_N = 4\pi\kappa m \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$$

или в статическом случае:

$$\Delta \varphi_N = 4\pi\kappa m \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}').$$

Отсюда гамильтониан свободного поля имеет вид:

$$\begin{aligned} H_{gr} &= p\dot{q} - L = \\ &= \frac{1}{8\pi} \left[ \frac{1}{c^2} \left( \frac{\partial \varphi_N}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi_N}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi_N}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi_N}{\partial z} \right)^2 \right]. \end{aligned} \quad (5,33)$$

Эти уравнения следует сопоставить со случаем скалярного потенциала продольного электрического поля, где

$$L_e = \frac{E^2 - H^2}{8\pi} - \frac{(\operatorname{div} \mathbf{A} + \frac{1}{c} \dot{\varphi})^2}{8\pi}$$

или при  $\mathbf{A} = 0$ ,  $H = 0$ :

$$\begin{aligned} L_e &= \frac{E^2}{8\pi} - \frac{\dot{\varphi}^2}{8\pi}, \\ H_e &= -\frac{1}{8\pi} \left[ \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 + \frac{1}{c^2} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 \right]. \end{aligned}$$

Мы видим, что соотношения для гравитационного поля полностью подобны случаю скалярного нейтрального поля в случае исчезающей массы покоя кванта поля или скалярного электрического потенциала, если учесть в последнем случае перемену знака (см. «Классическая теория поля», § 45). Используя результаты, полученные для скалярного поля, имеем для энергии гравитационного поля

$$U = \sum \hbar c K a_k^+ a_k,$$

где  $a_k$  связаны с коэффициентами Фурье  $A_k$  разложения  $\varphi_N$  обычным образом:

$$A_k = \sqrt{\frac{2\pi\hbar c}{K}} a_k.$$

Отсюда видно, что  $a_k^+ a_k$  следует трактовать как число продольных гравитонов с энергией  $\hbar cK$ . Бозевские правила перестановки будут иметь вид

$$[a_k, a_{k'}^+]_- = \delta_{kk'}.$$

Перейдём к выводу ньютонова закона тяготения. В классической теории поля тяготения для этого достаточно в выражение энергии взаимодействия частицы массы  $m_1$ , находящейся в точке  $\mathbf{r}_1$ , с полем тяготения  $U = \frac{m_1}{2} h_{44}(\mathbf{r}_1)$  подставить значение  $h_{44}$ , вызванное другой частицей массы  $m_2$ , находящейся в точке  $\mathbf{r}_2$ , и определяемое уравнением

$$\Delta \varphi_N = 4\pi \chi m_2 \delta(\mathbf{r}_2) \quad \left( \varphi_N = \frac{c^2 h_{44}}{2} \right),$$

$$\varphi_N = - \frac{\chi m_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|}.$$

Следовательно, энергия взаимодействия двух частиц имеет вид

$$V = - \frac{\chi m_1 m_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|}.$$

Для вывода закона взаимодействия квантовым путём, как известно (см. §§ 2 и 6), необходимо исходить из уравнения Шредингера для обеих покоящихся частиц, связанных с полем тяготения:

$$S\psi = U\psi; \quad -\frac{\hbar}{i} \frac{\partial \psi}{\partial t} = (U_1 + U_2)\psi = \left( \frac{m_1 c^2}{2} h_{44} + \frac{m_2 c^2}{2} h_{44} \right) \psi, \quad (5,34)$$

где

$$h_{44} = (2\pi)^{-\frac{3}{2}} \int V \sqrt{\frac{2\pi\hbar c}{K}} (a_k e^{-icKt + i\mathbf{k}\mathbf{r}} + a_k^+ e^{icKt - i\mathbf{k}\mathbf{r}}) d^3k,$$

и рассмотреть процесс второго порядка, заключающийся в испускании гравитонов первой частицей и поглощении их второй частицей, и обратно. Для этого, подставляя снова выражение  $\psi = \frac{U\psi}{S}$  в правую часть урав-

нения (5,34), получим:

$$S\psi = U \left( \frac{U\psi}{S} \right). \quad (5,34a)$$

Для определения энергии взаимодействия частиц через поле следует при оценке выражения  $U \frac{U}{S}$  оставить лишь члены, соответствующие указанным процессам испускания и поглощения, отбрасывая процессы испускания двух гравитонов первой или второй частицей, поглощение двух гравитонов и члены самодействия. Иначе говоря, поскольку гравитонов в начальный момент нет, следует оставить лишь члены, содержащие квантованные амплитуды в комбинации  $a_k a_k^+ = \delta_{kk'}$ . Тогда, обозначая искомый результат через  $V$  и раскрывая смысл символической записи (5,34a), получим, подставляя разложение Фурье для  $h_{44}$ , используя правила перестановки и производя интеграцию по  $k'$  при наличии  $\delta$ -функций:

$$V = U \frac{U}{S} = -\kappa \frac{m_1 m_2}{(2\pi)^3} \int d^3 k \frac{e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)}}{k^2} = -\frac{\kappa m_1 m_2}{4\pi (r_1 - r_2)}$$

(так как последний интеграл представляет с точностью до постоянной известное представление величины  $r^{-1}$ ). При совершенно аналогичном выводе кулоновской энергии взаимодействия двух зарядов различие с данным случаем заключается в двух отношениях. Во-первых, вместо гравитационного «заряда»  $\sqrt{\kappa} m$  здесь речь идёт об электрическом заряде, и, во-вторых, что существенно, в правилах перестановки для коэффициентов Фурье продольного электрического поля стоит другой знак, благодаря обратному знаку в гамильтониане поля. При классической трактовке это достигается переменной знака в правой части уравнения Лапласа-Пуассона.

**г) Гравитационные превращения.** Обратимся теперь к специфически квантовому релятивистскому эффекту трансмутации частиц в гравитационное поле и, обратно, аналогичному процессу превращения частиц в фотоны. Так как речь идёт о новом весьма незначительном эффекте, имеющем пока что лишь принципиальное значение, то для упрощения расчётов мы проведём их не с дираковским,

а с клейновским уравнением. Иначе говоря, мы вычислим вероятность превращения в гравитоны двух скалярных противоположно заряженных частиц, что, очевидно, будет отличаться от значения для превращения спинорных частиц (электронов—позитронов) лишь числовым коэффициентом порядка 1. Аналогичное положение вещей имеет место в теории превращения электронов—позитронов или пары скалярных частиц в фотоны, притом как для пары свободных частиц, так и для трансмутации в фотоны атомноподобной системы типа позитрония, составленной из двух частиц и вращающихся некоторое время (до аннигиляции) вокруг общего центра инерции. В окончательном результате учёт коэффициента, происходящего от спина частиц, может быть непосредственно произведён по аналогии с указанной только что теорией превращения электронов—позитронов в фотоны.

С другой стороны, как было подчеркнуто в теории позитрония, рассмотрение спина системы весьма существенно для выяснения типа аннигиляции. В случае парасистемы (спины частиц антипараллельны) происходит превращение в два фотона, в случае ортосистемы (спины параллельны) с меньшей вероятностью система превращается в три фотона. Эти соображения имеют место не только для позитрония, но также для пары свободных электрона и позитрона. Аналогичный вывод следует применить и к гравитационным трансмутациям.

При выводе гравитационной трансмутации скалярных частиц мы ограничимся превращением в два гравитона и будем исходить из установленного выше уравнения

$$\left( \nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - k_0^2 \right) \psi = - \frac{1}{4c^2} \frac{\partial (h_{ns}^2)}{\partial t} \frac{\partial \psi}{\partial t},$$

в котором член связи с гравитационным полем, стоящий справа, позволяет описать испускание двух гравитонов уже в первом приближении. Здесь принято во внимание, что в системе центра инерции

$$\frac{\partial}{\partial x_k} (h_{ns}^2) \sim \sum_{l, l_1} (l_k + l_{k'}) \delta_{l, l_1} = 0.$$

За начальную функцию в системе координат, в которой покоится центр инерции, берём

$$\psi_0 = \frac{1}{L^{3/2} K^{1/2}} e^{-icKt + ikr},$$

а за конечную берём

$$\psi_f^+ = \frac{c}{L^{3/2} K^{1/2}} e^{-icKt - ikr},$$

причём учтён другой знак энергии в конечном состоянии. Ограничиваясь, как и в случае излучения гравитонов, членами, содержащими  $q^+ q^+$ , ввиду отсутствия гравитонов в начальный момент, получим для дираковского коэффициента возмущения:

$$C = \frac{2\pi i \kappa h}{L^3 c^2} \sum_l q_{ns}^+ (l) q_{ns}^+ (-l) \int_0^{\infty} e^{-2ict} (K-l) dt.$$

Отсюда, используя правила перестановки, получаем по общей формуле для эффективного сечения превращения двух элементарных скалярных (бесспиновых) частиц в два гравитона

$$\sigma_{gr} = \frac{L^3 K}{ck} \frac{\partial}{\partial t} \sum C^+ C = 24\pi r_g^2 \frac{c}{v} \left( \frac{E}{mc^2} \right)^2; \quad (5,35)$$

здесь через  $E$  обозначена энергия аннигилирующихся частиц массы  $m$ , через  $r_g = \frac{\kappa m}{c^2}$  — их гравитационный радиус. Учёт в энергии связи частиц с гравитационным полем члена  $U_{12} = -h_{ns} \frac{\partial}{\partial x_n} \frac{\partial}{\partial x_s}$  дал бы во втором приближении для интересующего нас эффекта дополнительный член в эффективном сечении порядка

$$\sigma'_{gr} \sim \left( \frac{cp}{E} \right)^4 \sigma,$$

которым в нерелятивистском приближении можно пренебречь. Можно считать, что наш результат достаточно точен в нерелятивистской области, а в ультрарелятивистской даёт порядок величины  $\sigma$ .

Для пояснения наглядного смысла полученной формулы для эффективного сечения, или вероятности гравитационной аннигиляции, сравним её с дираковским результатом  $\sigma_e$  для превращения электрона—позитрона энергии  $E$  в фотоны:

$$\sigma_e \sim r_e^2 \frac{c}{v} \left( \frac{mc^2}{E} \right)^2, \quad (5,36)$$

где через  $r_e$  обозначен электрический радиус электрона или позитрона:

$$r_e = \frac{e^2}{mc^2}.$$

Отношение этих эффективных сечений

$$\frac{\sigma_{gr}}{\sigma_e} \approx \left( \frac{r_g}{r_e} \right)^2 \left( \frac{E}{mc^2} \right)^4, \quad (5,37)$$

как и следовало ожидать, во-первых, равно отношению квадратов гравитационного и электромагнитного радиусов электрона, и, во-вторых, зависит ещё от множителя  $\left( \frac{E}{mc^2} \right)^4$ , происходящего от квадратурного характера гравитационного поля и излучения (в указанном выше смысле). Аналогичное положение вещей мы имеем в теории векторного мезонного поля, где эффективная дипольность поля приводит к появлению характерного множителя  $\left( \frac{E}{mc^2} \right)^2$  в разнообразных формулах, описывающих, например, комптон-эффект на векторном мезоне, тормозное испускание  $\gamma$ -квантов векторными мезонами и т. д. Из предыдущего видно, что благодаря малому значению гравитационного радиуса, т. е. в конце концов массы элементарных частиц, гравитационные трансмутации в области слабого поля ничтожно маловероятны по сравнению с электромагнитными аннигиляциями.

Следует отметить, что эффективное сечение гравитационной трансмутации быстро возрастает с ростом скорости частиц. Экстраполируя для первоначальной ориентировки полученную предварительную формулу в область высоких энергий, когда по существу требовалось бы провести

расчёт, отбрасывая приближение слабого поля, найдём, что при огромной энергии

$$E \sim mc^2 \left( \frac{r_e}{r_g} \right)^{\frac{1}{2}} \sim 10^{21} mc^2$$

гравитационные и электромагнитные трансмутации будут примерно равновероятными.

Таким образом, полученному результату, по всей видимости, следует придать известное значение в качестве новой возможности теснее связать гравитоны с общей системой элементарных полей и частиц путём разнообразных взаимных превращений.

---

ГЛАВА III  
НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ТЕОРИИ  
ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ЧАСТИЦ

§ 6. Кратные процессы

**а) Теория  $\beta$ -распада.** Под кратными (множественными) процессами мы подразумеваем явления, в которых испускается, поглощается или участвует во взаимодействии одновременно две или более частицы (или кванта поля).

$\beta$ -распад представляет собою наиболее известный пример кратного процесса, заключающийся в превращении нейтрона в протон с испусканием электрона и нейтрино (или антинейтрино<sup>1)</sup>) (отрицательный  $\beta_-$ -распад), или в превращении протона в нейтрон с испусканием позитрона и антинейтрино (или нейтрино) (положительный  $\beta_+$ -распад). При этом может иметь место как  $\beta_-$ -распад свободного нейтрона, так и нейтрона, входящего в состав ядра, тогда как  $\beta_+$ -распад может иметь место, очевидно, лишь для внутриядерного протона, обладающего энергией возбуждения всего ядра, ввиду того что масса протона меньше массы нейтрона.

В основе теории  $\beta_-$ -распада лежит, во-первых, связанное с протонно-нейтронной моделью ядер представление о порождении лёгких частиц подобно фотонам при испускании последних, поскольку электрон, а также позитрон и нейтрино, ранее в ядре отсутствовали<sup>2)</sup>, и, во-вторых,

---

<sup>1)</sup> Антинейтрино — античастица, соответствующая «дырке» в фоне нейтрино с отрицательной энергией [см. М. А. Марков, ЖЭТФ 21, 761 (1951)].

<sup>2)</sup> См. Д. Иваненко, Compt. Rend., Paris 195, 439 (1932); Сборник «Атомное ядро», М.—Л., 1934.



гипотеза об одновременном с электроном либо позитроном испускании нейтрино или антинейтрино. Тогда качественное объяснение кривой  $\beta$ -распада (рис. 7) можно дать, исходя из самого факта испускания пары частиц<sup>1)</sup>.

Полная теория  $\beta$ -распада была впервые сформулирована Ферми<sup>2)</sup> и после незначительных обобщений остаётся общепринятой до настоящего времени.

Будем исходить из аналогии  $\beta$ -распада с излучением света атомом. В процессе перехода атомного электрона

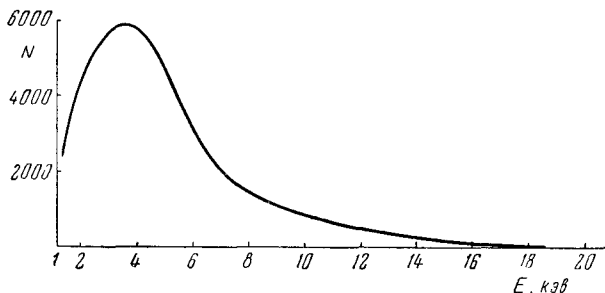


Рис. 7. Бета-спектр трития.

На рисунке число электронов распада трития ( ${}^3\text{H}^3$ ) (выраженное в условных единицах) отложено как функция их энергии. Ясно виден характерный максимум и плавное спадание кривой вблизи максимальной энергии.

из верхнего квантового состояния в нижнее рождается фотон. Этот процесс обусловлен наличием энергии взаимодействия электрона с электромагнитным полем вида  $U' = e\alpha A$ ; вероятность его согласно теории квантовых переходов равна

$$\begin{aligned} W dE_\gamma &= \frac{2\pi}{\hbar} |H'_{ab}|^2 \rho_\gamma dE_\gamma = \\ &= \frac{2\pi}{\hbar} \left| \int \psi_b^\dagger e \alpha A \psi_a d\tau \right|^2 \delta(E_a - E_b - E_\gamma) dE_\gamma, \end{aligned}$$

где  $H'_{ab}$  — матричный элемент перехода из состояния  $a$  в состояние  $b$ , обусловленного энергией возмущения  $U'$ .

<sup>1)</sup> F. Perrin, Compt. rend. 197, 1625 (1933); Г. Бете, Лекции по теории ядра, М., 1949.

<sup>2)</sup> E. Fermi, Zs. f. Phys. 88, 161 (1934).

(Все волновые функции непрерывного спектра нормированы на  $\delta(E' - E)$ .) Связь со скалярным потенциалом вида  $U = e\varphi$  не приводит к испусканию, так как реально испущенное поле имеет поперечный характер. Аналогичным образом следует трактовать процесс  $\beta$ -распада. При этом в процессе  $\beta_-$ -распада нуклеон переходит из верхнего, нейтронного состояния в нижнее, протонное и испускает «квант» электронно-нейтринного поля, т. е. пару частиц: электрон и нейтрино. В процессе  $\beta_+$ -распада нуклеон переходит из верхнего протонного состояния в нижнее нейтронное и испускает позитрон и антинейтрино.

Для описания  $\beta$ -распада нам необходимо прежде всего установить вид энергии взаимодействия нуклеонов с полем пар электрон—нейтрино. В основу теории можно положить простейшее выражение вида  $U \cong g_F \varphi_\nu \psi_e$  вместо  $\frac{e}{c}(\mathbf{v}\mathbf{A})$  или члена вида  $e\varphi$  в электромагнитном случае. Здесь  $\psi_e$  и  $\varphi_\nu$  — волновые функции электрона и нейтрино,  $g_F$  — константа связи нуклеонов с электронно-нейтринным полем ( $\sim 10^{-48}$  эрг · см<sup>3</sup>).

Вместо единственной волновой функции  $A$  или  $\varphi$  здесь должны, очевидно, входить две функции обеих испускаемых частиц, причём в теории  $\beta$ -распада можно использовать аналогию с наиболее простым выражением  $U = e\varphi$ .

Учитывая соображения инвариантности и эрмитов характер  $U$ , возможно в качестве энергии возмущения включить в уравнение Дирака для нуклеонов выражение

$$U = g_F (\psi_e^+ \delta\varphi_\nu^* Q + \tilde{\varphi}_\nu \delta^+ \psi_e Q^+); \quad (6,1)$$

(здесь и далее величины вида  $\tilde{Q}$  означают транспонированные матрицы,  $\psi^+$  — эрмитово-сопряжённые,  $\psi^*$  — комплексно-сопряжённые величины). Это выражение соответствует временной компоненте четырёхмерного вектора и в нерелятивистском приближении относительно скоростей нуклеонов отлично от нуля.  $\delta = -i\rho_3 \sigma_2$  — матрица, обеспечивающая релятивистскую инвариантность произведения двух спинорных функций.  $Q$  и  $Q^+$  — операторы, учитывающие изменение заряда нуклеонов

при испускании заряженной частицы — электрона (или позитрона), иначе говоря, превращающие нейтронные функции в протонные, и обратно. Эти операторы определяются соотношениями:

$$\begin{aligned} Q\chi_n &= \chi_p, & Q^+\chi_p &= \chi_n, \\ Q\chi_p &= 0, & Q^+\chi_n &= 0. \end{aligned} \quad (6,2)$$

Здесь  $\chi_n$  и  $\chi_p$  — волновые функции нейтрона и соответственно протона. Таким образом, первый член выражения (6,1) описывает переход нейтрона в протон с испусканием электрона и нейтрино, а второй член — переход протона в нейтрон с испусканием позитрона и антинейтрино. В дальнейшем мы ограничимся рассмотрением электронного или  $\beta_-$ -распада.

Операторы  $Q$  и  $Q^+$  можно представить в виде двухрядных матриц:

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q^+ = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (6,3)$$

В этом случае волновая функция нуклона также должна быть записана в виде двухрядной суперматрицы, так что

$$\chi_p = \begin{pmatrix} \chi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \chi_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \chi \end{pmatrix}. \quad (6,4)$$

Такая запись показывает, что, строго говоря, релятивистский нуклон должен описываться не четырёхкомпонентной, а восьмикомпонентной матрицей — колонкой за счёт увеличения степеней свободы частицы.

Операторы  $Q$  можно связать с так называемыми операторами «изотопического спина»  $\tau$ , которые действуют на «зарядную координату» волновой функции нуклона, аналогично тому, как операторы обычного спина  $\sigma$  действуют на «спиновую координату» нуклона (отсюда и название):

$$\tau_1 = Q + Q^+, \quad \tau_2 = -i(Q - Q^+), \quad \tau_3 = QQ^+ - Q^+Q,$$

т. е.

$$\tau_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (6,5)$$

Как видно из (6,5), операторы  $\tau$  по форме совпадают с операторами  $\sigma$ .

Подсчитаем теперь вероятность  $\beta$ -распада в единицу времени, иначе говоря, вероятность испускания электрона с энергией в интервале  $E_e, E_e + dE_e$  и нейтрино с энергией в интервале  $E_\nu, E_\nu + dE_\nu$ , которая, как было указано выше, согласно теории квантовых переходов имеет вид:

$$W dE_e dE_\nu = \frac{2\pi}{\hbar} |H'|^2 \delta(\Delta E - E_e - E_\nu) dE_e dE_\nu, \quad (6,6)$$

где  $\Delta E = E_n - E_p$  — матричный элемент

$$H' = \int \chi_p^+ (g_F \psi_e^+ \delta\varphi_\nu^* Q) \chi_n d\tau. \quad (6,6a)$$

Рассмотрим сперва более подробно выражение матричного элемента. Представим волновые функции  $\psi_e$  и  $\varphi_\nu$  в виде разложений по плоским волнам:

$$\begin{aligned} \psi_e &= \frac{1}{L^{3/2}} \sum_{k, \rho} (a_{k, \rho} b_{k, \rho} e^{ikr - icKt} + a_{k, \rho}^* b_{k, \rho}^* e^{-ikr + icKt}), \\ \varphi_\nu &= \frac{1}{L^{3/2}} \sum_{l, \sigma} (a_{l, \sigma} c_{l, \sigma} e^{iltr - icLt} + a_{l, \sigma}^* c_{l, \sigma}^* e^{-iltr + icLt}); \end{aligned} \quad (6,7)$$

здесь  $\rho$  и  $\sigma$  — индексы спиновых состояний;  $b$  и  $c$  — постоянные матрицы, которые мы выделили для удобства из коэффициентов Фурье, обозначив через  $a$  и  $a^*$  амплитуды, подлежащие вторичному квантованию. Так как волновые функции нуклеонов отличны от нуля лишь в области размером порядка эффективных радиусов ядер ( $R \cong 1,5 \times 10^{-13} \text{ см} \cdot A^{\frac{1}{3}}$ , где  $A$  — атомный вес), а волновые функции лёгких частиц в этой области практически остаются постоянными для реальных энергий в большинстве случаев  $\beta$ -распада ( $E \sim 1 \text{ Мэв}$ ), которым соответствуют дебройлевские волны электронов и нейтрино порядка  $\lambda \cong \frac{h}{mc} \sim 10^{-11} \text{ см}$ , что значительно превышает  $R \left( \frac{R}{\lambda} \ll 1, \right.$

или  $kR \ll 1$ ). то мы можем в разложении

$$e^{ikr} = 1 + ikr + \frac{1}{2} (ikr)^2 + \dots \quad (6,8)$$

ограничиться лишь первым членом. Тогда

$$\int \chi_p^+ Q \chi_n \psi^+ \delta\varphi^* d\tau = \frac{1}{L^3} \sum_{k, l, \rho, \sigma} (a_{k, \rho}^* b_{k, \rho}^* + a_{k, \rho} \cdot \tilde{b}_{k, \rho}) \times \\ \times \delta(a_{l, \sigma}^* c_{l, \sigma}^* + a_{l, \sigma} c_{l, \sigma}) \cdot \int \chi_p^+ Q \chi_n d\tau.$$

Отсюда

$$\left| \int \chi_p^+ Q \chi_n \psi^+ \delta\varphi^* d\tau \right|^2 = \\ = \frac{1}{L^6} \sum_{k, l, k', l', \rho, \rho', \sigma, \sigma'} (a_{l', \sigma'} \tilde{c}_{l', \sigma'} + a_{l', \sigma'}^* c_{l', \sigma'}^*) \times \\ \times \delta^+ (a_{k', \rho'} b_{k', \rho'} + a_{k', \rho'}^* b_{k', \rho'}^*) \times \\ \times (a_{k, \rho}^* b_{k, \rho}^* + a_{k, \rho} \tilde{b}_{k, \rho}) \delta (a_{l, \sigma}^* c_{l, \sigma}^* + a_{l, \sigma} c_{l, \sigma}) \times \\ \times \left| \int \chi_p^+ Q \chi_n d\tau \right|^2.$$

Учитывая перестановочные соотношения фермиевской статистики

$$[a_{k, \rho}, a_{k', \rho'}^*]_+ = \delta_{\rho\rho'} \delta_{kk'} (1 - N_k)$$

и отсутствие частиц  $(e, \nu)$  в начальном состоянии, т. е. условие  $N_k = 0$ , и обозначая  $|M|^2 = \left| \int \chi_p^+ Q \chi_n d\tau \right|^2$ , получим:

$$\left| \int \chi_p^+ Q \chi_n \psi^+ \delta\varphi^* d\tau \right|^2 = \\ = \frac{1}{L^6} \sum_{k, l, \rho, \sigma} (\tilde{c}_{l, \sigma} \delta^+ b_{k, \rho} b_{k, \rho}^* \delta c_{l, \sigma}^*) \cdot |M|^2. \quad (6,9)$$

Просуммируем это выражение по спиновым состояниям, ограничиваясь лишь состояниями с положительной энер-

гий. Это даёт:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4} \sum_{\rho, \sigma, \epsilon, \epsilon'} \tilde{c}_{l, \sigma} \delta^+ \left( 1 + \frac{H_e}{E_e} \right) b_{k, \rho} b_{k', \rho}^+ \delta \left( 1 + \frac{H_\nu^*}{E_\nu} \right) c_{l, \sigma}^* = \\ & = \frac{1}{4} \text{след} \delta^+ \left( 1 - \frac{\alpha k + \rho_3 k_0}{K} \right) \delta \left( 1 - \frac{\alpha^* l + \rho_3 l_0}{L} \right) = \\ & = \frac{1}{4} \text{след} \rho_3 \sigma_2 \left( 1 - \frac{\alpha k + \rho_3 k_0}{K} \right) \rho_3 \sigma_2 \left( 1 - \frac{\alpha^* l + \rho_3 l_0}{L} \right) = \\ & = \frac{1}{4} \text{след} \left( 1 - \frac{\alpha^* k + \rho_3 k_0}{K} \right) \left( 1 - \frac{\alpha^* l + \rho_3 l_0}{L} \right) = 1 + \frac{k l}{K L} + \frac{k_0 l_0}{K L}. \end{aligned} \quad (6,10)$$

Наличие второго члена указывает на корреляцию между направлениями импульсов электрона и нейтрино. Последний член учитывает влияние масс покоя этих частиц. Отметим теперь, что согласно данным опыта масса нейтрино гораздо меньше массы электрона ( $m_\nu < 0,001 m_e$ ), и может быть даже в точности равна нулю<sup>1)</sup>.

В дальнейшем будем полагать  $m_\nu = 0$ .

Таким образом,

$$\begin{aligned} W = \frac{2\pi}{\hbar} g_F^2 \frac{|M|^2}{L^3} \oint \oint \left( 1 + \frac{k l}{K L} \right) \frac{k^2 dk L^3}{(2\pi)^3 dE_e} \frac{l^2 dl L^3}{(2\pi)^3 dE_\nu} d\omega_e \times \\ \times d\omega_\nu \delta(\Delta E - E_e - E_\nu) \end{aligned} \quad (6,11)$$

( $d\omega_e$  и  $d\omega_\nu$  — элементы телесных углов, в которые испускаются электрон и соответственно нейтрино). Множители

вида  $\frac{k^2 dk L^3 d\omega}{(2\pi)^3 dE}$  вошли сюда из-за того, что при вычислении матричного элемента применялись плоские волны, нормированные на  $\delta(\mathbf{k}' - \mathbf{k})$ . Эти множители представляют собой числа состояний в интервале энергии между  $E$  и  $E + dE$ . Интегрируя по всем углам направлений импульсов электрона и нейтрино и применяя обычные соотношения между энергией и импульсом  $(\hbar c k)^2 + m_e^2 c^4 = E_e^2$

<sup>1)</sup> Влияние конечной массы нейтрино на процесс  $\beta$ -распада рассмотрено в работах: Б. С. Д ж е л е п о в и Н. М. А н т о н ь е в а, Вестник ЛГУ № 1, 19 (1946); М. А. М а р к о в, ЖЭТФ 18, 1130 (1948).

и  $\hbar c l = E_\nu$ ,  $E_e + E_\nu = \Delta E$  ( $\Delta E$  — изменение энергии ядра), получаем:

$$W dE_e dE_\nu = \frac{g_F^2 |M|^2}{2\pi^3 \hbar^7 c^5} p_e E_e E_\nu^2 \delta(\Delta E - E_e - E_\nu) dE_e dE_\nu. \quad (6,12)$$

Отсюда, исключая энергию и импульс нейтрино, получим вероятность того, что в процессе  $\beta$ -распада будет испущен электрон с энергией между  $E_e$  и  $E_e + dE_e$ :

$$W dE_e = \frac{g_F^2 |M|^3}{2\pi^3 \hbar^7 c^5} p_e E_e (\Delta E - E_e)^2 dE_e. \quad (6,13)$$

Полная вероятность  $\beta$ -распада равна

$$\begin{aligned} \lambda &= \int_{m_e c^2}^{\Delta E} W dE_e = \frac{g_F^2 |M|^2 (m_e c^2)^5}{2\pi^3 \hbar^7 c^6} \int_1^{x_0} x \sqrt{x^2 - 1} (x_0 - x)^2 dx = \\ &= \frac{g_F^2 |M|^2 (m_e c^2)^5}{2\pi^3 \hbar^7 c^6} \left[ \left( \frac{x_0^4}{30} - \frac{3}{20} x_0^2 - \frac{2}{15} \right) \sqrt{x_0^2 - 1} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{x_0}{4} \ln(x_0 + \sqrt{x_0^2 - 1}) \right], \quad (6,14) \end{aligned}$$

т. е. при высоких энергиях  $\lambda = \text{const} (\Delta E)^5$ . Здесь введено обозначение  $x_0 = \frac{\Delta E}{m_e c^2}$ , где  $\Delta E$  совпадает с максимальной энергией электрона. Пользуясь соотношением между вероятностью распада  $\lambda$  и периодом полураспада  $T$

$$\lambda = \frac{\ln 2}{T},$$

можно оценить порядок произведения  $g_F^2 |M|^2$ . В некоторых случаях (например, в так называемых «зеркальных» ядрах, отличающихся лишь заменой протона на нейтрон) волновые функции «валентного» нуклеона до и после  $\beta$ -превращения примерно одинаковы, и мы можем положить  $|M|^2 \cong 1$ <sup>1)</sup>.  $\beta$ -превращения такого типа называются разрешёнными. Для подобных  $\beta$ -переходов энергетиче-

<sup>1)</sup> См. Б. С. Д ж е л е п о в, ЖЭТФ 19, 361, 787 (1949); Б. С. Д ж е л е п о в и А. В. К у д р я в ц е в а, там же 19, 761 (1949).

ская зависимость спектра электронов (6,13) полностью определяется фазовыми статистическими множителями, выражающими число состояний электрона и нейтрино.

Иначе говоря,

$$W dp_e dp_\nu = \frac{2\pi}{\hbar} |M|^2 \rho_e \rho_\nu = \text{const } p_e^2 dp_e \cdot p_\nu^2 dp_\nu$$

$$\left( \rho_e = \frac{4\pi p_e^2 dp_e}{(2\pi)^3 \hbar^3}, \rho_\nu = \frac{4\pi p_\nu^2 dp_\nu}{(2\pi\hbar)^3} \right),$$

или в области высоких энергий:

$$W = \text{const} \cdot E_e^2 (\Delta E - E_e)^2.$$

Полученные выражения для вероятности можно уточнить, если учесть влияние кулоновского поля ядра на электроны, т. е. при расчётах применять не плоские волны, а решения уравнения Дирака для движения в кулоновском поле. Тогда в выражение (6,13) для вероятности испускания электрона с энергией между  $E_e$  и  $E_e + dE_e$  войдёт так называемый кулоновский фактор, который для разрешённых переходов имеет вид:

$$F(Z, E_e) = 4e^{\frac{\pi\alpha ZE_e}{cp_e}} \left( \frac{2p_e R}{\hbar} \right)^{2\gamma-2} \left| \frac{\Gamma(\gamma + i\alpha Z \frac{E_e}{cp_e})}{\Gamma(2\gamma + 1)} \right|^2 \frac{1+\gamma}{2} \quad (6,15)$$

и соответствует значению плотности распределения электронов (или позитронов) на границе ядра  $|\psi_e|_{r=R}^2$ , где  $R$ —эффективный радиус ядра, равный  $1,5 \cdot 10^{-13} \text{ см} \cdot A^{1/3}$  ( $A$ —атомный вес,  $|Z|$ —атомный номер ядра продукта,  $Z$ —положительно для электронного  $\beta$ -распада и отрицательно для позитронного),  $\gamma = \sqrt{1 - \alpha^2 Z^2}$ ,  $\alpha = \frac{e^2}{\hbar c}$ —постоянная тонкой структуры,  $\Gamma$ —гамма-функция. При  $Z = 0$  фактор  $F = 1$ ; вообще для  $Z \leq 20$   $F \approx 1$ . Для больших  $Z$  наличие  $F$  приводит к увеличению числа медленных электронов и уменьшению числа медленных позитронов, что качественно вытекает уже из наглядных соображений, ввиду отталкивания позитронов и притяжения испущенных электронов к ядру. Последовательным образом нейтрино также следует описывать сферическими волнами. Подобная трактовка лёгких частиц приводит не-



посредственно к законам сохранения момента количества движения при  $\beta$ -распаде.

Рассмотрим коротко некоторые обобщения теории. Исходное выражение энергии возмущения, применённое Ферми, не является однозначным. Можно взять за основу другой вариант энергии возмущения<sup>1)</sup>

$$U = g_F (\psi_e^+ \varphi_\nu Q + \varphi_\nu^+ \psi_e Q^+), \quad (6,16)$$

который приводит к излучению пары: электрон и антинейтрино (вместо нейтрино) или позитрона и нейтрино (вместо антинейтрино). Однако и этот вариант не исчерпывает всех возможностей. Если волновая функция нейтрино при изменении направления координат меняет знак (нечётная функция), т. е. ведёт себя как псевдоспинор, то имеем<sup>2)</sup>:

$$U = g_F (\psi_e^+ \rho_1 \varphi_\nu Q + \varphi_\nu^+ \rho_1 \psi_e Q^+). \quad (6,17)$$

Кроме того, из спинорных функций электронно-нейтринного поля можно построить не только вектор, четвёртую компоненту которого мы до сих пор рассматривали, но и другие тензорные величины. Например, для варианта Конопинского-Уленбека мы получим следующие формы энергии взаимодействия:

$$\begin{aligned} \text{скалярная } S &= (\chi_p^+ \rho_3 Q \chi_n) (\psi^+ \rho_3 \varphi), \\ \text{векторная } V &= (\chi_p^+ Q \chi_n) (\psi^+ \varphi) - (\chi_p^+ \alpha Q \chi_n) (\psi^+ \alpha \varphi), \\ \text{тензорная } T &= (\chi_p^+ \rho_3 \sigma Q \chi_n) (\psi^+ \rho_3 \sigma \varphi) - (\chi_p^+ \rho_2 \sigma Q \chi_n) (\psi^+ \rho_2 \sigma \varphi), \\ \text{псевдовекторная } A &= (\chi_p^+ \sigma Q \chi_n) (\psi^+ \sigma \varphi) - (\chi_p^+ \rho_1 Q \chi_n) (\psi^+ \rho_1 \varphi), \\ \text{псевдоскалярная } P &= (\chi_p^+ \rho_2 Q \chi_n) (\psi^+ \rho_2 \varphi). \end{aligned} \quad (6,18)$$

Иначе говоря, получаем смешанные инварианты, которые могут быть взяты в качестве дополнительных членов в лагранжиане и с точностью до знака совпадают с добавками к гамильтониану. Эти инварианты составлены по правилу: скаляр поля нуклеонов умножается на скаляр

<sup>1)</sup> Е. Ж. Конопинский и Г. Е. Уленбек, Phys. Rev. 48, 7 (1935); Ву, УФН 44, 558 (1951).

<sup>2)</sup> Ссылка на замечание Л. Д. Ландау в статье В. Б. Берестецкий и И. Я. Померанчук, ЖЭТФ 19, 756 (1949); см. также С. Н. Янга и Дж. Тимпто, Phys. Rev. 79, 495 (1950); Г. Ф. Жарков, ЖЭТФ 20, 492 (1950).

поля пар лёгких частиц ( $S$ ), или компоненты вектора поля нуклеонов умножаются на компоненты вектора поля пар ( $V$ ) и т. д. Нетрудно написать аналогичные выражения для фермиевского и «псевдоспинорного» вариантов.

Здесь следует дать дополнительные пояснения. Полученные в (6,18) пять (или при учёте фермиевского варианта  $5+5$ ) инвариантов построены лишь при учёте поведения спиноров при непрерывных преобразованиях. При

$$x'_\mu = a_{\mu\nu} x_\nu$$

имеем

$$\psi' = S\psi;$$

например, при вращении в плоскости ( $xy$ ) на угол  $\varphi$

(см. ч. I)  $S = e^{i\sigma_3 \frac{\varphi}{2}}$ . Однако следует учесть преобразования инверсии. В случае зеркального отражения трёх координат можно положить  $S_s = \eta\rho_3$ , где  $\eta = +1, -1, +i, -i$ . Аналогично для инверсии времени  $S_t = \xi\rho_2$ , где  $\xi = +1, -1, +i, -i$ . Тожественное преобразование будет иметь вид  $S_0 = \pm 1$ . Таким образом, спинор следует дополнительно характеризовать величинами  $\eta, \xi$  (класс чётности). Если мы имеем дело с одинаковыми частицами, то свойства  $(5+5)$  инвариантов, указанных выше, не зависят от  $\eta, \xi$ . Однако, если речь идёт о разных частицах, например об электроне и нейтрине, которые могут обладать различными значениями  $\xi$  (или  $\eta$ ), то инварианты типа (6,18) приобретают характер дуальных. Скаляр  $\psi^* \rho_3 \psi$  превращается в псевдоскаляр, если  $\eta$  для электрона равняется, например,  $+1$ , а для нейтринно  $\eta$  равняется  $-1$ . Для образования инвариантов в подобных случаях необходимо включить матрицу  $\rho_1$ , откуда получим выражение (6,17). Аналогичные модификации следует провести во всех  $(5+5)$  случаях. До сих пор не удалось произвести окончательное распределение спинорных частиц по классам чётности. Трудность заключается, очевидно, в том, что речь идёт о свойствах, проявляющихся лишь при специальных взаимодействиях и ведущих к трудно наблюдаемым поправкам.

Все эти выражения в случае массы нейтринно, равной нулю, приводят к одному и тому же выражению (6,13)

для вероятности разрешённого  $\beta$ -распада с одним и тем же кулоновским фактором (6,15). Однако эти варианты отличаются в смысле корреляции направлений движения электрона и нейтрино, а также величины полного момента количества движения, уносимого обеими частицами<sup>1)</sup>. В случае векторного и скалярного типов взаимодействий момент количества движения при разрешённом переходе в нерелятивистском приближении равен нулю (правила отбора Ферми), а в случае тензорного и псевдотензорного взаимодействий—равен единице (правила отбора Гамова-Теллера). Наряду с обычными законами сохранения энергии, импульса и момента количества движения и заряда, связанными с инвариантностью относительно соответствующих непрерывных преобразований координат и в квантовой механике соблюдается сохранение характера чётности волновых функций. В частности, при  $\beta$ -распаде необходимо учитывать изменение чётности нуклеонов, которое может компенсироваться изменением чётности лёгких частиц.

Мы рассматривали до сих пор такие переходы, когда волновые функции начального и конечного состояний нуклеона почти полностью совпадают. Однако нередко конечное состояние нуклеона, разрешённое правилами отбора, оказывается уже занятым, и согласно принципу Паули переход в такое состояние будет запрещён. В этом случае начинает сказываться влияние малых членов в гамильтониане взаимодействия, зависящих от скоростей нуклеонов, например членов с матрицей  $\alpha$ , а также влияние изменения волновых функций электрона и нейтрино внутри ядра, приводящее к необходимости брать следующий член разложения (6,8) ( $e^{ikr} = 1 + ikr$ ). Это соответствует тому, что электрон и нейтрино будут уносить момент количества движения, на единицу больший, чем при разрешённых переходах (ср. дипольное и квадрупольное излучения в оптике!). В итоге для первого запрещённого перехода

<sup>1)</sup> См. R. Hamilton, Phys. Rev. 71, 456 (1947); O. Kofoed-Hansen, Phys. Rev., 74, 1785 (1948); M. E. Rose, Phys. Rev. 75, 1444 (1949). По экспериментальному исследованию корреляции см. Ch. W. Shewin, Phys. Rev. 73, 216 (1948); 75, 1799 (1949), 82, 52 (1951).

при векторном взаимодействии появится некоторый дополнительный фактор<sup>1)</sup>

$$\frac{1}{M} \frac{2}{1+\gamma} \left\{ \left| \int \chi_p^+ r Q \chi_n d\tau \right|^2 A_+ + \left| \int \chi_p^+ \alpha Q \chi_n d\tau \right|^2 - \right. \\ \left. - \left[ i \left( \int \chi_p^+ r Q \chi_n d\tau \right) \left( \int \chi_p^+ \alpha Q \chi_n d\tau \right)^* + \text{компл. сопр.} \right] B \right\}, \quad (6,19)$$

где

$$A_+ = 12a + b + \left( \frac{\alpha Z}{2k_0 R} \right)^2 + \left( \frac{\alpha Z}{3k_0 R} \right) \left[ \left( W - \frac{1}{W} \right) + (W_0 - W) \right],$$

$$B = \frac{1}{3} \left( W_0 - \frac{1}{W} \right) + \left( \frac{\alpha Z}{2k_0 R} \right),$$

$$a = \frac{1}{36} [(W_0 - W)^2 + W^2 - 1],$$

$$b = \frac{2}{9} \frac{(W^2 - 1)(W_0 - W)}{W}, \quad W = \frac{E}{mc^2}, \quad W_0 = \frac{\Delta E}{mc^2}.$$

Так как для тяжёлых ядер  $kR \sim \frac{1}{10}$ , то квадрат матричного элемента становится порядка 0,01, что ведёт к увеличению периода полураспада примерно в 100 раз. Увеличение примерно в 100 раз имеет также место, если первый запрещённый переход будет заменён вторым, и т. д. Это соответствует разделению  $\beta$ -излучающих изотопов на различные группы, довольно резко отличающиеся по значению периодов при одной и той же энергии, что впервые было отмечено эмпирическим путём Сарджентом. Соотношение Сарджента напоминает формулу Гейгера-Нутолла при  $\alpha$ -распаде, когда, однако, различные радиоактивные элементы разделяются на отдельные семейства (U—Ra, Th, Ac, Np). Приведём таблицу, показывающую изменение полного момента количества движения и чётности при разрешённом и двух запрещённых переходах.

Явлением, обратным в известном смысле к  $\beta$ -распаду, является так называемый  $K$ -захват. Этот процесс состоит

<sup>1)</sup> См. E. J. Konopinski a. G. E. Uhlenbeck, Phys. Rev. 60, 308 (1941); E. J. Konopinski, Rev. Mod. Phys. 15, 209 (1943); R. E. Marshak, Phys. Rev. 61, 431 (1942).

## Правила отбора

Переход	Правила Ферми		Правила Гамова-Теллера	
	$\Delta J$	изменение чётности	$\Delta J$	изменение чётности
Разрешённый	0	нет	0, $\pm 1$ (кроме $0 \rightarrow 0$ )	нет
1-й запрещённый	0, $\pm 1$ (кроме $0 \rightarrow 0$ )	да	0	да
		нет	0, $\pm 1$ (кроме $0 \rightarrow 0$ ) 0, $\pm 1, \pm 2$ , (кроме $0 \rightarrow 1, 1 \rightarrow 1, 1/2 \rightarrow 1/2$ )	да
2-й запрещённый	$\pm 1, \pm 2$ (кроме $1 \rightarrow 0$ ) $\pm 1$	нет	$\pm 2$	нет
		нет	$\pm 2, \pm 3$ (кроме $0 \rightarrow 2$ ) $0 \rightarrow 0$	нет

в поглощении ядром одного из электронов ближайшей к ядру электронной оболочки ( $K$  или  $L$ ) и испускании нейтрино со строго определённой энергией при одновременном превращении одного из «валентных» протонов в нейтрон, т. е. является своеобразной разновидностью позитронного  $\beta$ -распада:  $p + e_{\bar{k}} \rightarrow n + \nu$ . Впервые вероятность такого процесса была рассчитана ещё до экспериментального открытия  $K$ -захвата Альваресом<sup>1)</sup>. Благодаря тому что энергии электрона и нейтрино дискретны, полная вероятность  $K$ -захвата получается сразу без интегрирования в виде

$$\lambda_k = \frac{2\pi}{\hbar} \left| \int H' d\tau \right|^2 \rho_\nu = \frac{2\pi \cdot g_F^2}{\hbar} |M|^2 \frac{4\pi (\Delta E + E_k)^2}{(2\pi)^3 (\hbar c)^3} F_k =$$

$$= \frac{g_F^2 |M|^2}{\pi^2 \hbar^4 c^3} (\Delta E + m_e c^2 \gamma)^2 F_k. \quad (6,20)$$

Здесь  $E_k = +m_e c^2 \sqrt{1 - \alpha^2 Z^2}$  — энергия связанного элект-

<sup>1)</sup> Alvarez, Phys. Rev. 54, 486 (1937).

трона на  $K$ -оболочке,  $F_k$ —кулоновский фактор для  $K$ -захвата:

$$F_k = \frac{1+\gamma}{\pi\Gamma(2\gamma+1)} (\alpha Z k_0)^3 (2\alpha Z k_0 R)^{2\gamma-2} e^{-2\alpha Z k_0 R}. \quad (6,21)$$

После несложных преобразований получаем:

$$\lambda_k = \frac{g_F^2 |M|^2 (m_e c^2)^5}{2\pi^3 \hbar^7 c^6} \times \\ \times \frac{2\pi (\alpha Z)^3 (2\alpha Z k_0 R)^{2\gamma-2} e^{-2\alpha Z k_0 R} (1+\gamma) (k_0 + \gamma)}{F(2\gamma+1)}. \quad (6,22)$$

Аналогично можно рассмотреть также запрещённые процессы  $K$ -захвата.

Обратим теперь внимание на учёт влияния конечных размеров ядра, на процессы  $K$ -захвата и  $\beta$ -распада. Наличие объёма ядер уменьшает вероятность  $K$ -захвата и  $\beta$ -распада по сравнению с результатами, вычисленными для точечных ядер. При подсчёте можно либо более грубо учитывать наличие конечного объёма как поправку, либо с самого начала задавать то или другое правдоподобное распределение заряда по ядру (поверхностное распределение заряда, равномерное распределение заряда по объёму и т. д.) и определять уточнённые электронные волновые функции в модифицированном таким путём поле. Поскольку электрон не будет при учёте конечных размеров ядер находиться вблизи точечного заряда, то кулоновское взаимодействие будет, как наглядно видно, ослаблено, и энергетические уровни атомных электронов несколько сдвинутся вверх в кулоновской потенциальной яме, а вероятности процессов  $K$ -захвата и  $\beta$ -распада окажутся уменьшёнными (относительно сдвига уровней, вызванного учётом объёма ядер, см. § 7). Влияние объёма ядер оказывается довольно значительным. Например, в случае  $K$ -захвата имеем уменьшение вероятности на  $\sim 10\%$  для разрешённых переходов для ядра свинца с атомным номером  $Z = 82$  (при постоянной плотности заряда); для  $K$ -захвата первого порядка запрещения получим для  $Z = 80$  уменьшение вероятности на  $\sim 70-80\%$  (постоянная плотность заряда)<sup>1)</sup>.

<sup>1)</sup> Влияние конечных размеров ядра на процесс  $K$ -захвата было рассмотрено Д. И в а н е н к о и А. Ц а н д е р, ЖЭТФ

Процессом, обратным  $K$ -захвату, является захват  $\beta$ -электрона на орбиту в своём же атоме. Этот процесс может идти либо в виде непосредственного порождения связанного электрона<sup>1)</sup>, либо через промежуточное состояние в виде свободного электрона<sup>2)</sup>. Первый процесс более вероятен для сильно ионизованных атомов, когда  $K$ -оболочка частично свободна. Так как  $\beta$ -захват будет сопровождаться лишь мягким рентгеновским излучением, то его непосредственное наблюдение весьма затруднительно. Однако наличие этого процесса приведёт к различию значений периода полураспада ядер, полученного из законов радиоактивного равновесия и измеренного непосредственно. Повидимому, такое расхождение действительно имеет место<sup>3)</sup>.

Отметим, не вдаваясь в подробности, что в явлениях  $\beta$ -распада также проявляются ядерные периодичности, о которых мы коротко упоминали, говоря о распространённости элементов § 1. Действительно, наряду с простейшей и, так сказать, наиболее «грубой» периодичностью через 2 и 4 нуклона, которая всегда проявляется в графиках распространённости, эффективных сечениях разных процессов, в значениях спинов, магнитных моментов и т. д., в графике энергий  $\beta$ -распада проявляется также иная закономерность, отмечаемая отклонениями от более или менее плавного хода кривой вдоль системы изотопов. Повидимому, это вызвано наличием замкнутых ядерных оболочек из нуклеонов. Наибольшие значения в энергии  $\beta$ -распада приходится на изотопы с теми же числами нуклеонов, для которых наблюдаются скачки на кривой распространённости, скачки в значениях квадратурных

---

18, 434 (1948); влияние конечных размеров ядра на вероятность  $\beta$ -распада было рассмотрено в работе Л. А. Слив, ЖЭТФ 17, 1049 (1947) (см. также § 7).

<sup>1)</sup> R. D a u d e l и др., Journ. de phys. et rad. 8, 238 (1947); P. M. S h e r k, Phys. Rev. 75, 789 (1949).

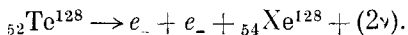
<sup>2)</sup> Д. И в а н е н к о и В. Л е б е д е в, ЖЭТФ 20, 91 (1950).

<sup>3)</sup> А. С. З а в е л ь с к и й, Г. А. У м а р о в и С. Х. М а т у ш е в с к и й, ЖЭТФ 19, 1136 (1949), M. L e s o i n e t M. P e r e y, C. R. 217, 106 (1943); 227, 121 (1948).

моментов и т. д. <sup>1)</sup> Кроме того, ядра с числами нуклеонов, близкими к критическим («магическим»), обнаруживают особенности в отношении  $K$ -захвата. Так, например, наибольшее количество  $K$ -активных изотопов данного элемента часто приходится на критические области <sup>2)</sup>.

Все только что указанные и другие аналогичные обстоятельства, так же как и предсказываемое теорией влияние объёма ядер на  $K$ -захват и  $\beta$ -распад, указывают на то, что при вычислении матричных элементов  $M$ , зависящих от волновых функций нуклеонов, необходимо не только отказаться от грубого приближения точечного ядра, но также более точно учесть распределение нуклеонов, возможно, используя представления об оболочках и «валентных» нуклеонах. Тогда, например, может иметь место преимущественный  $K$ -захват протонами, находящимися вблизи поверхности непосредственно сверхзаполненных оболочек.

**б) Двойной  $\beta$ -распад.** Перейдём к рассмотрению другого кратного процесса: двойного  $\beta$ -распада, при котором ядро увеличивает свой заряд сразу на две единицы. Принципиальная возможность подобных процессов была указана сравнительно давно, однако лишь в последние годы удалось обнаружить экспериментально это явление. Двойной  $\beta$ -распад может иметь место в том случае, когда разность масс двух изобарных ядер, отличающихся по заряду на две единицы, превосходит  $2m_e$ . Подобное условие в самом деле выполняется для некоторых ядер с чётным числом протонов и чётным числом нейтронов. В настоящее время двойной  $\beta$ -распад обнаружен непосредственно для ядра  ${}_{50}\text{Sn}^{124}$  ( $T \approx 10^{16}$  лет,  $\Delta E = 4,55 mc^2$ ). Кроме того, обнаружен двойной  $\beta$ -распад ядер  ${}_{52}\text{Te}^{128}$ ,  ${}_{52}\text{Te}^{130}$  (благодаря анализу концентрации продуктов распада, образующихся в этом процессе). Например,



Наконец, открыт двойной  $\beta$ -распад  ${}_{92}\text{U}^{238}$ .

<sup>1)</sup> H a x e l, J e n s e n, S u e s s, Zs. f. Phys. 28, 295 (1950).

<sup>2)</sup> М. А. Левитская и Л. П. Рапопорт, ДАН 70, 842 (1950); 79, 953 (1951).



Простейшая теория двойного  $\beta$ -распада трактует это явление как процесс 2-го порядка по отношению к обычному  $\beta$ -распаду, предполагая тем самым испускание наряду с двумя электронами также двух нейтрино, пока что ускользающих от наблюдения. Задавая попрежнему энергию связи ядерного нуклеона с полем пар частиц (электронов—нейтрино) в виде

$$U = g_F \psi_e^+ O^L \varphi_\nu Q + \text{компл. сопряж.},$$

где вместо  $O^L$  следует подставить матрицы  $\rho_3$  или другие дираковские матрицы, соответствующие одному из пяти вариантов, указанных в § 6, п. а, мы получим по общей формуле для вероятности переходов во втором приближении теории возмущений:

$$\lambda = \frac{2\pi}{\hbar} \sum_F |H''_{AF}|^2,$$

где

$$H''_{AF} = \sum_C \frac{H'_{AC} H'_{CF}}{E_A - E_C}$$

и

$$H'_{AB} = \int \chi_B^\dagger U \chi_A d\tau;$$

здесь  $\chi_A$  и  $\chi_B$ —волновые функции ядра в начальном и конечном состояниях. Производя вычисления, аналогичные случаю обычного  $\beta$ -распада, получим при несущественных пренебрежениях:

$$\lambda = \frac{2^{25} \pi^{21} \alpha^2 Z^2 g_F^4 m^9 c^6}{15 \hbar^{18} |\Gamma(2\gamma + 1)|^4} (2k_0 R)^{4\gamma - 4} f(x_0 - 2),$$

где

$$f(y) = y^7 \left( 1 + \frac{1}{2} y + \frac{1}{9} y^2 + \frac{1}{9 \cdot 10} y^3 + \frac{1}{2 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11} y^4 \right).$$

Численный подсчёт приводит к крайне малой вероятности данного процесса, соответствующей, например, времени жизни порядка  $10^{24}$  лет для случая двух изобар, массы которых различаются на 0,002 ед. ат. веса ( $\sim 2 M_{\text{эв}}$ ), а атом-

ные номера отличаются на 2. Очевидно, подобная теория не может объяснить наблюдаемых случаев  $\beta - \beta$ -распада, которые эмпирически соответствуют значительно большим вероятностям, или меньшим периодам полураспада<sup>1)</sup>.

Выходом из данного затруднения явилась теория двойного  $\beta$ -распада, в которой это явление попрежнему продолжает рассматриваться как процесс 2-го порядка, заключающийся, однако, в испускании только двух электронов, поскольку предполагается, что нейтрино, испускаемое в процессе 1-го порядка, поглощается в процессе 2-го порядка. Подобная трактовка оказывается возможной, если несколько видоизменить теорию нейтрино, а именно, считать, что нейтрино и антинейтрино совпадают. В этом случае нейтрино описывается вещественными функциями, и энергия взаимодействия нуклеонов с полем пар электронов—нейтрино примет вид

$$H' = g_F \chi^+ O^h Q \chi \psi^+ O^L (\varphi - \rho_2 \sigma_2 \varphi^*).$$

Продельвая теперь соответствующие выкладки, получим при ограничениях, применяемых обычно в теории  $\beta$ -распада, для полной вероятности двойного распада выражение

$$\lambda = \frac{g_F^4 m^{10} c^8}{2^7 5^2 \pi^5 \hbar^{14} c R^2} F(Z, E) f(x_0 - 2),$$

где

$$f(y) = \frac{y^4}{3} \left( 1 + \frac{11}{10} y + \frac{1}{5} y^2 + \frac{1}{70} y^3 \right), \quad x_0 = \frac{\Delta E}{mc^2}.$$

Подставляя значения постоянных и беря для  ${}_{52}\text{Te}$ ,  $R = 7.5 \cdot 10^{-13}$  см, получим для различных энергий перехода следующие значения вероятности<sup>2)</sup>:

$$\begin{array}{cccc} x_0 = & 3 & 4 & 6 & 8 \\ \lambda = & 0,3 & 6 & 200 & 2000 \cdot 10^{-18} \text{ лет}^{-1}. \end{array}$$

Полученные результаты следует рассматривать, повидимому, как определяющие верхнюю границу  $\lambda$ .

<sup>1)</sup> М. Гоерперт-Мауер, Phys. Rev. 48, 512 (1935).

<sup>2)</sup> Л. А. Слив, ЖЭТФ 20, 1035 (1950).

Мы видим, что вероятность  $\beta$ — $\beta$ -распада как процесса 2-го порядка в данном варианте теории, исключающем реальное испускание нейтрино, значительно превышает значения, к которым приводит прежняя теория  $\beta$ — $\beta$ -распада, связанная с испусканием четырёх частиц. Тем самым, по крайней мере качественно, двойной  $\beta$ -распад оказывается объяснённым.

Наряду с этим можно попытаться трактовать процесс двойного  $\beta$ -распада как непосредственное порождение двух электронов в процессе 1-го порядка безо всякого участия нейтрино<sup>1)</sup>. В основу данной гипотезы следует положить то или иное допустимое из общих инвариантных соображений выражение для гамильтониана взаимодействия нуклеонов с полем пар электронов типа

$$H' = g_e \{ \chi^+ O^h Q \chi \psi_{e_1}^* O^L \psi_{e_2}^+ + \text{компл. сопряж.} \},$$

где  $g_e$  — новая константа связи нуклеонов с двухэлектронным полем. Подсчитывая вероятность двойного  $\beta$ -распада, получаем:

$$W dE = \frac{2\pi E \sqrt{E^2 - m^2 c^4} (\Delta E - E) \sqrt{(\Delta E - E)^2 - m^2 c^4}}{\hbar (2\pi \hbar c)^6} |M'|^2 dE,$$

где

$$|M'|^2 = |M|^2 \left( 1 - \frac{m^2 c^4}{E(\Delta E - E)} \right) F(Z, E) F(Z, \Delta E - E),$$

$Z$  — атомный номер ядра-продукта и

$$\tau = \frac{\tau_0}{f(x_0 - 2)} \left( \frac{g_F}{g_e} \right)^2;$$

здесь

$$f(y) \approx \frac{(y+2)y^3}{16} \left( 1 - \frac{1}{3} \left( \frac{y}{y+4} \right)^2 \right).$$

Сравнивая только что полученный результат с экспериментальными данными, получим для вновь введённой константы значение

$$g_e \cong 5,5 \cdot 10^{-58} \text{ эрг} \cdot \text{см}^3.$$

<sup>1)</sup> Д. Иваненко и Н. Колесников, ДАН 81, № 5 (1951); аналогичная гипотеза была высказана одновременно также Винтером [R. G. Winter, Phys. Rev 83, 1070 (1951)].

Вычисленные с этой константой периоды двойного  $\beta$ -распада  ${}_{52}\text{Te}^{128}$ ,  ${}_{52}\text{Te}^{130}$  и  ${}_{92}\text{U}^{238}$  довольно удовлетворительно согласуются с эмпирическими данными.

Повидимому, наряду с  $\beta_- - \beta_-$ -распадом могут иметь место также процессы типа  $\beta_+ - \beta_+$ ,  $\beta_+ - \beta_-$ ,  $\beta_- - K$ ,  $\beta_+ - K$ . Окончательная проверка теории двойного  $\beta$ -распада должна быть основана на анализе как формы спектра, так и зависимости периода полураспада от энергии. С точки зрения общей теории частиц двойной  $\beta$ -распад представляет интерес как в смысле возможности различия нейтрино и антинейтрино, так и для выяснения самого факта наличия связи нуклеонов непосредственно с полем двух электронов. Кроме того, следует полагать, что при  $\beta - \beta$ -распаде, как и при  $\beta - \gamma$ -распаде, возможно слияние частиц, т. е. появление «тяжёлых» электронов и, соответственно, электрино (см. § 3).

**в) Кратное порождение мезонов.** Явления  $\beta$ -распада и двойного  $\beta$ -распада являются поучительными примерами простейших кратных процессов, когда в результате взаимодействия нуклона одновременно с двумя «квантами» поля рождаются две частицы. Изучение процессов взаимодействия двух нуклеонов с очень высокой относительной энергией показывает, что при этом также имеют место кратные процессы в виде рождения нескольких мезонов в одном акте (рис. 8).

Анализ процессов столкновения нуклеонов в космических лучах показывает, что при энергиях нуклеонов ниже  $2 \cdot 10^9$  эв упругое рассеяние нуклеонов преобладает над процессами порождения мезонов. При  $2 \cdot 10^9$  эв порождение мезонов является одиночным. Хотя иногда при соударении нуклона с ядром наблюдается много мезонов, но последние возникают при повторных соударениях нуклеонов согласно теории Гейтлера-Яносси<sup>1)</sup>. Наконец, при энергиях нуклеонов порядка  $10^{10}$  эв и выше начинается кратное порождение мезонов. При этом при энергии нуклеонов порядка  $3 \cdot 10^{12}$  эв в системе покоящегося наблюдателя рождается около 7 заряженных

<sup>1)</sup> W. Heitler, L. Jánossy, *Proc. Phys. Soc. A*, 62, 669 (1949); см. также W. Heitler, L. Jánossy, *Helv. Phys. Acta* 23, 417 (1950); Caldirola, *Nuovo Cimento* 8, 239 (1951).

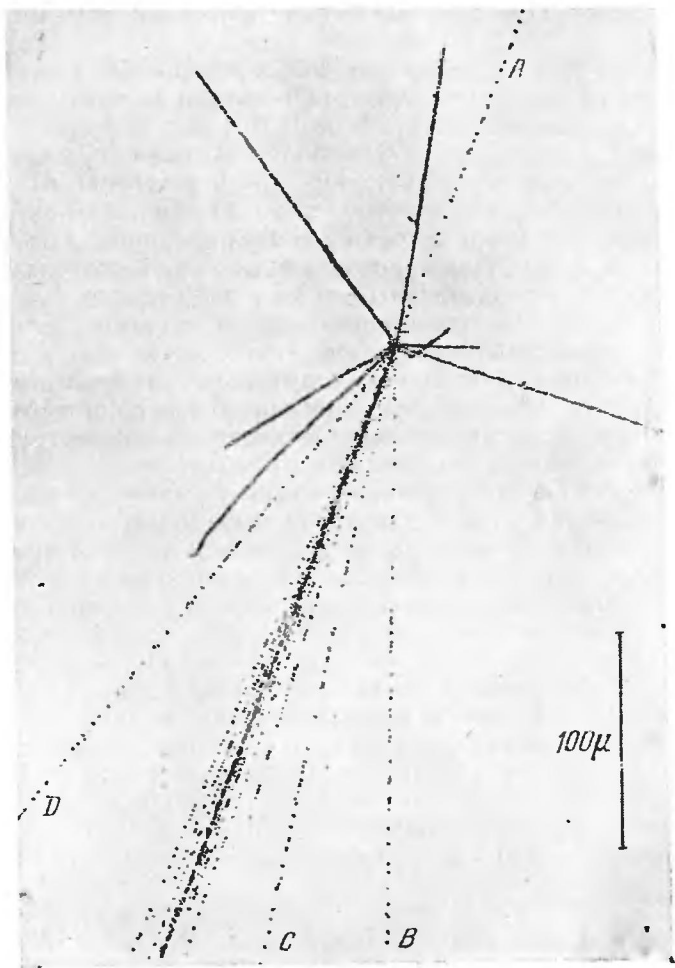


Рис. 8. Кратное порождение мезонов.

На микрофотографии снят зарегистрированный на толстослойной пластинке (метод Мысовского-Изданова) процесс кратного порождения группы мезонов (пунктирные среды), образовавшихся, по видимому, при столкновении первичного протона (A) энергии  $E \sim 10^{13}$  эв с каким-либо ядром из состава эмульсии. 7 релятивистских частиц лежат в весьма узком угле ( $\sim 0,004$  радиана), 8 других релятивистских частиц расположены в большем угле ( $\sim 0,1$  радиана). В противоположность частицам первой группы, летящим вперед, частицы второй группы в системе центра инерции летят назад. 3 частицы в более широком конусе (B, C, D) возникли, вероятно, в результате вторичных столкновений. Этот типичный для подобных процессов снимок был получен на высоте всего лишь 4550 м. тогда как чаще всего кратные процессы наблюдались на значительно больших высотах.

мезонов<sup>1)</sup>, тогда как при энергии в  $3 \cdot 10^{13}$  рождается около 15 заряженных мезонов<sup>2)</sup>. Можно считать установленным, что при этом речь идёт о «кратном» порождении многих мезонов в едином акте столкновения двух нуклеонов, так как теория «повторного» порождения не в состоянии объяснить зависимости числа мезонов от энергии нуклеонов или от атомного номера, а также дать правильное, относительно низкое значение для наблюдаемого числа нуклеонов отдачи ( $\approx 0,3$  на один мезон).

Эффективные сечения порождения одиночных мезонов при столкновении нуклеонов можно рассчитывать точно так же, как «тормозное» излучение электромагнитных волн при столкновении зарядов. В частности, расчёт можно произвести, применяя в качестве довольно грубого приближения метод Вильямса-Вейцеккера<sup>3)</sup>.

Возможно также нетормозное испускание мезонов при прохождении нуклеона через тяжёлое ядро, аналогичное «черенковскому излучению»<sup>4)</sup>. При этом делается предположение, что взаимодействие пролетающего нуклеона с протонами и нейтронами атомного ядра можно феноменологически рассматривать как взаимодействие с некоторой нуклонной «жидкостью», характеризуемой мезонной квазидиэлектрической постоянной. Иначе говоря, мезонное поле ядерных нуклеонов следует описывать не уравнениями скалярных или иных мезонов в пустоте, но соответствующими уравнениями феноменологической мезодинамики. Например, в случае скалярного поля при обычном предположении линейной связи между поляризацией среды и напряжённостью мезонного поля

<sup>1)</sup> V. Camerini, P. H. Fowler и др., *Phil. Mag.* 41, 473 (1950).

<sup>2)</sup> J. J. Lord, J. Fainberg, M. Schein, *Phys. Rev.* 80, 970 (1950).

<sup>3)</sup> Heitler, Hamilton, Peng, *Phys. Rev.* 64, 78 (1943); см. также обзор W. Heitler, *Rev. Mod. Phys.* 21, 113 (1949).

<sup>4)</sup> Д. Иваненко и В. Гургенидзе, *ДАН СССР* 67, 997 (1949); W. Wada, *Phys. Rev.* 75, 981 (1949); Д. И. Блохинцев и В. Л. Инденбом, *ЖЭТФ* 20, 1123 (1950); В. Л. Инденбом, *ЖЭТФ* 21, 737 (1951).

имеем приближённо:

$$\left( \varepsilon \Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - k_0^2 \right) \varphi = 0, \quad \varepsilon = 1 + \frac{\omega_0^2}{\omega^2},$$

где  $\omega_0^2 = \frac{4\pi\rho g^2}{M^2}$ ,  $\rho$ —плотность нуклеонного вещества.  $\sigma$ —квизизаряд нуклеонов,  $M$ —масса нуклеона. При пролетании быстрого нуклеона через ядро скорость его можно считать постоянной, и мы имеем условия, подобные случаю движения быстрого электрона через жидкость, когда имеет место черенковское излучение. В данном случае можно ожидать, что нуклеоны ядра придут в движение под влиянием пролетающей частицы и смогут при известных условиях излучать мезоны подобным нетормозным путём.

Оказывается, что переходное излучение, возникающее при пересечении нуклеоном границы ядра, действительно может привести к излучению мезонов, тогда как объёмная часть нетормозного излучения внутри ядра не ведёт к рождению мезонов. Эффективное сечение порождения скалярных мезонов при весьма высоких энергиях будет порядка  $\sigma_s \sim 0,3 \cdot 10^{-29} A^{\frac{2}{3}} \text{ см}^2$ ; для векторных мезонов  $\sigma_v \sim 1,2 \cdot 10^{-29} A^{\frac{2}{3}} \lg \frac{\varepsilon}{Mc^2} \text{ см}^2$  ( $\varepsilon$ —энергия первичного нуклеона), для псевдоскалярных мезонов вероятность порождения оказывается значительно более высокой, а именно:

$$\sigma_p \sim 10^{-27} A^{\frac{2}{3}} \text{ см}^2.$$

Приведём для ориентации результат подсчёта эффективного сечения порождения псевдоскалярного мезона при столкновении нуклеонов в ультрарелятивистском случае ( $E \gg \varepsilon_0$ ):

$$\sigma = \frac{\text{const}}{E} \lg \alpha E, \quad \alpha = \text{const},$$

где  $E$ —энергия нуклеонов,  $\varepsilon_0$ —энергия покоя мезонов. Мезоны могут также порождаться при столкновении с ядра-

ми  $\gamma$ -квантов<sup>1)</sup>. Теория этого электромагнитного эффекта отличается от случая образования мезонов при столкновении нуклеонов относительной простотой расчёта и отсутствием необходимости учитывать специфические ядерные силы, точный вид которых до сих пор неизвестен. Вычисление методом теории возмущений проводится аналогично расчёту комптон-эффекта (формула Клейна Нишины) с той разницей, что в рассматриваемом эффекте большую роль играет магнитный момент нуклеонов. Именно благодаря учёту магнитного момента нуклеонов удалось получить совпадение с экспериментальными результатами для случая нейтральных мезонов. Сравнивая результаты расчётов порождения мезонов с экспериментальными данными, можно сделать ряд выводов о природе мезонного поля; в частности, вывести заключение, что  $\pi$ -мезоны должны быть псевдоскалярными.

Вернёмся к процессам кратного порождения мезонов при столкновении двух нуклеонов. Для объяснения этого необычного явления было предложено несколько теорий. Прежде всего укажем, что наиболее непосредственное объяснение этого явления с точки зрения квантовой механики заключалось бы в толковании его как процесса высшего порядка в смысле теории возмущений. В электродинамике подобное объяснение было бы неприемлемо, так как ввиду малости константы связи электрона с полем, т. е. величины заряда  $e$ , излучение нескольких (например  $n$ ) фотонов высокой энергии примерно в  $\left(\frac{e^2}{\hbar c}\right)^n \approx \left(\frac{1}{137}\right)^n$  раз менее вероятно, чем испускание одного фотона.

В мезодинамике положение вещей меняется по двум причинам. Во-первых, константа связи нуклеонов с полем  $\pi$ -мезонов ( $g$ ) больше  $e$  ( $g \sim 5-6e$ ), так что соответствующая постоянная тонкой структуры  $\beta = \frac{g^2}{\hbar c} \sim \frac{1}{5}$  не очень мала по сравнению с 1. Во-вторых, благодаря нали-

---

<sup>1)</sup> А. Сахаров, ЖЭТФ 17, 686 (1947); К. Вигескперг, Phys. Rev. 79, 641 (1950); А. М. Балдин и В. В. Михайлов, ЖЭТФ 20, 1057 (1950); Т. Н. Хазанович, ЖЭТФ 21, 581 (1951).



чию в мезонном поле константы длины  $\lambda_0 = \frac{\hbar}{m\pi c}$  процессы высшего порядка с энергиями, значительно превышающими критическую  $(E \gg \frac{\hbar c}{\lambda_0})$ , могут быть столь же вероятны, как и процессы низшего порядка. Казалось бы тем самым, что у нас имеется качественное объяснение кратного порождения мезонов. Однако следует заметить, что подобный подсчёт высших приближений недостоверен по крайней мере вследствие двух обстоятельств. Первое заключается в том, что при росте вероятности сам метод последовательных приближений теряет смысл. Ввиду относительно высокого значения  $g$  разложение по  $\frac{g^2}{\hbar c}$  вообще не очень оправдано. Второе обстоятельство заключается в необходимости проведения подсчётов с учётом теории вакуума и теории затухания, что, однако, является делом крайне сложным. По этим причинам предложенные для объяснения кратного порождения мезонов новейшие гипотезы не используют высших приближений. Одни из них пытаются истолковать данное явление на базе того или иного правдоподобного механизма, например как процесс 1-го порядка<sup>1)</sup>, или как своеобразный процесс, обязанный сильному взаимодействию частей мезонного поля (Гейзенберг); другие гипотезы, напротив, стараются по возможности отвлечься от деталей механизма взаимодействия нуклеонов с мезонным полем и описывают процесс феноменологически, используя лишь статистические или (даже ещё более упрощённо) одни лишь термодинамические соображения (Ферми). Отметим сразу, что, несмотря на казалось бы весьма различные исходные пункты, между всеми упомянутыми гипотезами имеется немало общего. Действительно, термодинамический метод представляет собой дальнейшее упрощение чисто статистического рассмотрения, в котором используются фазовые объёмы испущенных

$$\prod p_s^2 dp_s$$

мезонов типа  $\frac{s}{(2\pi\hbar)^3}$ . В то же время в точности те же

<sup>1)</sup> Д. Иваненко и В. Лебедев, ДАН 80, 357 (1951).

самые статистические фазовые объёмы входят в наши расчёты, которые, однако, сверх того используют определённую форму матричного элемента, основанную на гипотезе о порождении  $n$  частиц в процессе 1-го порядка, обязанном энергии связи нуклеонов с мезонным полем нелинейного вида, например:

$$U = g_1\Phi + g_2\Phi^2 + g_3\Phi^3 + \dots + g_n\Phi^n,$$

где  $\Phi$  — волновая функция мезонов,  $g_n$  — новые константы связи. При этом в случае испускания мезонов, аналогичном разрешённым переходам при  $\beta$ -распаде, влияние матричного элемента, описывающего переходы нуклеонов несущественно, и вероятность испускания  $n$  мезонов определяется теми же статистическими множителями. Заметим, что ряд следует понимать как разложение какого-то замкнутого выражения, например вида

$$U = \frac{g_1\Phi}{1 \pm a\Phi}, \quad \text{или} \quad U = \frac{g_1\Phi}{1 \pm b\Phi^2}, \quad \text{или} \quad U = g_1\Phi e^{\pm\Phi^2} \quad \text{и т. д.}$$

В подобных случаях константы  $g_n$  будут связаны очевидными соотношениями. Вместе с тем мы пока что предполагаем уравнения для свободного мезонного поля линейными, и тем самым сохраняем обычные квантовые перестановочные соотношения. Согласно результатам анализа, проведённого выше (§ 3), по существу эквивалентной постановкой задачи было бы сохранение линейного вида связей нуклеонов с полем мезонов, но описание свободных мезонов давалось бы существенно нелинейными уравнениями. Подобная нелинейная связь в какой-то мере учитывает взаимодействие мезонов, ударение на котором делается в модели Гейзенберга. Конечно, все четыре гипотезы приводят к несколько различным конкретным результатам, причём конкретные результаты нашего и фермиевского статистического варианта наиболее близку друг к другу. Дальнейшее развитие теории взаимодействия нуклеонов с мезонным полем на базе дополнительных эмпирических сведений о кратном порождении мезонов, поможет выяснить всю картину этого интересного и важного явления.

Перейдём к более подробному рассмотрению гипотез о кратном порождении мезонов и остановимся сперва на

трактовке этого процесса как эффекта 1-го порядка. Мы ограничимся первым приближением теории возмущений и предположим, что гамильтониан взаимодействия нуклона с мезонным полем (которое для простоты будем считать нейтральным и скалярным) имеет вид<sup>1)</sup>

$$H' = \sum_n H'_n = \sum_n (\chi^\dagger \rho_3 \chi) g_n \Phi^n, \quad (6,23)$$

где  $\chi$  — волновые функции нуклонов,  $\Phi$  — волновая функция мезонного поля,  $g_n$  — константы связи, соответствующие взаимодействию с  $n$  мезонами. Вероятность испускания  $n$  мезонов в энергетических интервалах  $\varepsilon_n$ ,  $\varepsilon_n + d\varepsilon_n$  равна

$$W d\varepsilon_1 \dots d\varepsilon_n dE = \frac{2\pi}{\hbar} |H'_n|^2 \rho_1 \rho_2 \dots \rho_n d\varepsilon_1 \dots d\varepsilon_n dE \quad (6,24)$$

$$\left( \rho_n = \frac{4\pi p_n^2 dp_n}{(2\pi\hbar)^3} \right).$$

Для того чтобы сохранить аналогию с описанием  $\beta$ -распада, будем рассматривать процесс кратного излучения мезонов в системе центра инерции. В этой системе энергия двух нуклонов  $E_0$  связана с их энергией  $E_p$  в системе координат, связанной с одним из нуклонов, соотношением

$$E_0 = \sqrt{2Mc^2(Mc^2 + E_p)}, \quad (6,25)$$

которое может быть получено из соотношения

$$(E_p + Mc^2)^2 - c^2 p^2 = E_0^2.$$

Здесь  $(E_p + Mc^2)$  — полная энергия двух нуклонов в системе, связанной с одним из нуклонов,  $p$  — полный импульс двух нуклонов в системе, связанной с одним из

<sup>1)</sup> Ср. Д. Иваненко и В. Лебедев, ДАН 80, 357 (1951). Нелинейная связь нуклонов с мезонным полем была одновременно предложена также Блохом и Шиффом, см. L. I. Schiff, Phys. Rev. 84, 10 (1951).

нуклеонов, и  $E_0$  — полная энергия двух нуклеонов в системе их центра инерции.

Представим  $\Phi$  в виде разложения по плоским волнам

$$\Phi = \frac{1}{L^{3/2}} \sum_k \sqrt{\frac{2\pi\hbar c}{K}} (a_k e^{ikr - icKt} + a_k^\dagger e^{-ikr + icKt}) \quad (6,26)$$

и обозначим через  $|M|^2$  величину  $\left| \int \chi_E^\dagger \rho_3 \chi_{E_0} d\tau \right|^2$ , причём здесь  $\chi_E$  и  $\chi_{E_0}$  — волновые функции двухнуклеонной системы.

Тогда полная вероятность излучения  $n$  мезонов примет вид

$$\begin{aligned} W dE &= \frac{2\pi}{\hbar} g_n^2 |M|^2 \int_{\mu c^2}^{\Delta E} \frac{\hbar c k_1^2 dk_1}{K_1} d\varepsilon_1 \int_{\mu c^2}^{\Delta E - \varepsilon_1} \frac{\hbar c k_2^2 dk_2}{K_2} d\varepsilon_2 \dots \\ &\dots \int_{\mu c^2}^{\Delta E - \varepsilon_1 - \dots - \varepsilon_{n-1}} \frac{\hbar c k_n^2 dk_n}{K_n} d\varepsilon_n \delta\left(\Delta E - \sum_i \varepsilon_i\right) d\varepsilon_n \delta(E_0 - E - \Delta E) dE, \end{aligned} \quad (6,27)$$

где  $\Delta E - E_0 - E$  — полная величина энергии, переданной нуклеонами мезонному полю.

Если ввести обозначения

$$x_i = \frac{\varepsilon_i}{m_\pi c^2}, \quad x_0 = \frac{\Delta E}{m_\pi c^2},$$

то полная вероятность порождения  $n$  мезонов будет равна

$$\begin{aligned} W_n^t &= \\ &= \frac{2\pi}{\hbar} |M|^2 \frac{g_n^2 (m_\pi c^2)^{2n-1}}{(\pi\hbar c)^n} \int_1^{x_0} \sqrt{x_1^2 - 1} dx_1 \int_1^{x_0 - x_1} \sqrt{x_2^2 - 1} dx_2 \dots \\ &\dots \int_1^{x_0 - x_1 - \dots - x_{n-1}} \sqrt{x_n^2 - 1} \delta\left(x_0 - \sum_{s=1}^n x_s\right) dx_n. \end{aligned} \quad (6,28)$$

В ультрарелятивистском случае ( $x_i \gg 1$ ) можно пренебречь 1 под знаком корня. Тогда

$$W_n^t = \frac{2g_n (m_\pi c^2)^{2n-1} x_0^{2n-1} |M|^2}{(2n-1)! \pi^{n-1} \hbar^{n+1} c^n}. \quad (6,29)$$

Вводя безразмерный «заряд»

$$G_n = g_n \frac{m_\pi^{n-1} c^{\frac{3n}{2}-2}}{\hbar^{\frac{n}{2}}}, \quad (6,30)$$

получим:

$$W_n^t = \frac{2G_n^2 \left( \frac{m_\pi c^2}{\hbar} \right)}{(2n-1)! \pi^{n-1}} |M|^2 x_0^{2n-1}. \quad (6,31)$$

Таким образом, основную роль в кратном порождении мезонов, как и в теории  $\beta$ -распада, играет величина максимальной энергии  $\Delta E$ , идущей на порождение мезонного поля. Значение константы связи  $G_n$  можно найти из сравнения с опытом матричного элемента перехода нуклеонов. Положив для первой ориентации

$$G_n = G_1 e^{-k(n-1)},$$

где  $k = 3, 2 - 3, 4$ , получим удовлетворительное согласие с результатами наблюдений в космических лучах.

Для излучения заряженных мезонов, заменяя  $\Phi$  на  $\Phi + \Phi^*$ , получим аналогичные результаты.

Как видно из приведённых формул, вероятность порождения частиц будет расти с энергией примерно как  $E^{2n-1}$ .

Трактовка кратного порождения мезонов Гейзенбергом<sup>1)</sup> покоится на представлении о существенной роли нелинейности в уравнениях мезонного поля, что непосредственно примыкает к нашим выводам о необходимости введения нелинейных членов в уравнения мезонного поля и уравнения Дирака (см. § 3).

В случае рассмотрения процесса по линейной теории мы имели бы при высоких энергиях ( $\varepsilon > m_\pi c^2$ ) тормозной спектр мезонов, который не очень сильно отличался бы от тормозного рентгеновского спектра и имел бы вид

$$dN \approx \frac{g^2}{\hbar c} \ln \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}.$$

Однако наличие нелинейных взаимодействий между

<sup>1)</sup> W. Heisenberg, Zs. f. Phys. **113**, 61 (1939); **126**, 569 (1949).

частями мезонного поля, повидимому, должно сильно изменить форму спектра порождённых мезонов.

Новая константа самодействия нелинейного поля должна будет зависеть от характерной длины, которую выразим через мезонный заряд:

$$l \approx \frac{g \sqrt{4\pi} \hbar}{\sqrt{\hbar c} m_{\pi} c}.$$

Для процессов соударения нуклеонов, обладающих длиной волны де Бройля, большей, чем эта характерная длина, взаимодействие будет малым, и можно применять обычную квантовую мезодинамику с бозевскими правилами квантования. Однако в процессах соударения нуклеонов с длиной волны, меньшей характерной длины, взаимодействие, повидимому, окажется сильным, на первый план выступают нелинейные эффекты, и в этом случае нельзя будет рассматривать мезонное поле как обычное вторично квантованное поле. Поэтому здесь вряд ли можно говорить об отдельных частицах, и поле, повидимому, можно рассматривать лишь как пакет волн (см. § 3).

Согласно качественному рассмотрению Гейзенберга процесс соударения двух нуклеонов будет протекать примерно следующим образом. В момент, когда оба нуклона приближаются друг к другу на расстояние, меньшее, чем  $r \approx 10^{-13}$  см, их равномерное движение нарушается и часть мезонного поля «отрывается» в виде волнового пакета, который вслед за тем распадается на отдельные мезоны. Мезоны, составляющие этот пакет, сильно взаимодействуют друг с другом вследствие наличия нелинейных членов в лагранжиане. Нелинейности должны привести к «перемешиванию» частей мезонного поля, т. е. к процессам турбулентного типа. Наличие турбулентности, вероятно, модифицирует практически постоянный спектр. Изменённый спектр будет соответствовать быстрому спаду интенсивности при больших энергиях, но зато будет содержать большое число мезонов с энергией порядка  $\varepsilon_0 \cong m_{\pi} c^2$ . При этом первоначально избранное направление — направление движения соударяющихся частиц — не сохраняется, подобно тому как в турбулентной жидкости распределения малых вихрей практически изотропно.

Остановимся ещё на распределении интенсивности в спектре мезонов. Если бы в мезонном поле установилась определённая температура  $T$ , то спектр имел бы вид, следующий из статистической физики:

$$dN \approx e^{-\frac{\varepsilon}{kT}}.$$

Однако так как температура в мезонном веществе, по мнению Гейзенберга, вряд ли успеет установиться за время соударения нуклеонов, то, повидимому, спектр будет убывать для больших энергий мезонов  $\left(\frac{\hbar c}{\varepsilon} < \frac{1}{t}\right)$  медленнее, чем следует из статистического распределения. Дополнительные столь же полукачественные соображения, основанные на аналогии с видом энергетического спектра в различных случаях турбулентного движения, подсказывают, что благодаря влиянию нелинейных членов распределение интенсивности в спектре мезонов, порождённых при столкновении нуклеонов, можно задать в виде

$$I(\varepsilon) d\varepsilon = \frac{a}{\varepsilon^a} d\varepsilon, \quad a = \text{const} \quad (6,32)$$

( $a$  близко к единице), которое примерно отвечает эмпирическим данным. Константу  $a$  можно определить из величины полной энергии  $E$ , передаваемой мезонному полю в процессе удара:

$$\Delta E \approx \int_{\varepsilon_0}^{\Delta E} I(\varepsilon) d\varepsilon \approx a \ln \frac{\Delta E}{\varepsilon_0}. \quad (6,33)$$

Среднее число мезонов согласно этим соображениям будет возрастать примерно пропорционально энергии:

$$\bar{n} = \int_{\varepsilon_0}^E \frac{I(\varepsilon) d\varepsilon}{\varepsilon} \approx \frac{a}{\varepsilon_0} \approx \frac{E}{\varepsilon_0 \ln \frac{E}{\varepsilon_0}}. \quad (6,34)$$

Вероятность испускания только одного мезона пропорциональна  $\bar{n}e^{-\bar{n}}$ , т. е. при высоких энергиях очень мала. Поэтому предлагаемая форма спектра приводит к возможности испускания многих частиц.

Необходимо отметить, что при энергии нуклеонов  $E \cong 3 \cdot 10^{13}$  формула (6,34) приводит к числу  $\bar{n} \approx 100$  порождённых мезонов! (вместо требуемых опытом  $\sim 10$ ). Таким образом, данная теория противоречит эмпирическим данным и по порождению мезонов в космических лучах.

Неудача только что изложенной теории Гейзенберга побудила Ферми отвлечься от деталей описания процесса взаимодействия нуклеонов с мезонами и попытаться трактовать порождение многих мезонов при столкновении нуклеонов, используя лишь самые общие положения статистики и термодинамики<sup>1)</sup>. Идеи этой теории сводятся к следующему. При соударении двух релятивистских нуклеонов их огромная энергия концентрируется в малом объёме, который является эффективным объёмом мезонного «облака», окружающего нуклеоны. Это приводит к тому, что температура этого облака сильно возрастает, и последнее начинает «испаряться» в виде отдельных квантов-мезонов (повидимому, чаще всего  $\pi$ -мезонов). Разумно положить объём мезонного облака вокруг покоящегося нуклеона равным

$$\Omega_0 = \frac{4\pi}{3} \left( \frac{\hbar}{m_{\pi}c} \right)^3. \quad (6,35)$$

В системе центра инерции этот объём сокращается согласно преобразованию Лоренца

$$\Omega = \Omega_0 \frac{2Mc^2}{E}, \quad (6,36)$$

где  $M$  — масса нуклеона. Далее Ферми (в противоположность Гейзенбергу) полагает, что в «нагретом» мезонном поле успевает установиться статистическое равновесие, вследствие чего вероятность излучения 1, 2, ...,  $n$  мезонов пропорциональна статистическим весам состояний системы из 2-х нуклеонов и 1, 2, ...,  $n$  мезонов. В крайне релятивистском случае вместо статистической физики можно даже попытаться применять законы термодинамики. В этом случае среднюю плотность энергии можно определить из

<sup>1)</sup> E. Fermi, Progr. Theor. Phys. 5, 570 (1950); перевод в УФН (1952); см. также И. Померанчук, ДАН 78, 889 (1951).



закона Стефана-Больцмана, так как  $\pi$ -мезоны являются бесспиновыми частицами и подчиняются статистике Бозе-Эйнштейна. Учитывая, что фотоны имеют две степени свободы за счет поляризации, а  $\pi$ -мезоны — 3 степени за счёт различных зарядовых состояний ( $\pm e$  и 0), мы получим тогда в обычном законе Стефана-Больцмана дополнительный множитель  $3/2$ . Таким образом,

$$U = \frac{3}{2} \frac{6,494}{\pi^2 \hbar^3 c^3} (kT)^4. \quad (6,37)$$

Температура поля определяется из равенства полной энергии и произведения объёма  $\Omega$  на плотность энергии  $U$ :

$$U\Omega = E_0. \quad (6,38)$$

Подставив значения  $\Omega$  из (6,37) и  $U$  из (6,38), мы получим соотношение

$$(kT)^4 = 0,046 \frac{\hbar^3 c^3 E^2}{Mc^2 \Omega_0}. \quad (6,39)$$

Согласно законам статистической физики среднее число частиц в единице объёма в ультрарелятивистском случае пропорционально третьей степени температуры:

$$\bar{n} = \int \bar{n}(\varepsilon) \frac{3}{2} \cdot \frac{8\pi\varepsilon^2 d\varepsilon}{(2\pi\hbar)^3 c^3}, \quad \text{где } \bar{n}(\varepsilon) = \frac{1}{e^{\varepsilon/kT} - 1};$$

$$\bar{n} = 0,367 \frac{(kT)^3}{\hbar^3 c^3}. \quad (6,40)$$

Отсюда полное число испущенных  $\pi$ -мезонов получается в виде произведения  $\bar{n}$  на объём мезонного облака  $\Omega$ . Учёт сохранения момента количества движения приводит ещё к множителю 0,51. Окончательно выражение вероятного числа  $\pi$ -мезонов, испущенных при столкновении двух нуклонов, принимает вид

$$N_\pi = 0,323 \frac{M^{\frac{1}{4}} \left( \frac{\hbar}{m_\pi c} \right)^{\frac{3}{4}} (E_0 - 2Mc^2)^{\frac{3}{2}}}{\hbar^{\frac{3}{4}} c^{\frac{1}{4}} E_0} = 1,34 \left( \frac{W-2}{W} \right)^{\frac{3}{2}}, \quad (6,41)$$

где  $W = \frac{E}{Mc^2}$ .

Статистический вариант теории Ферми получается, если, с одной стороны, отвлечься от уточнения модели взаимодействия нуклеонов с мезонами и, следовательно, от учёта матричных элементов, в противоположность тому, что было сделано в нашей гипотезе, изложенной выше, но вместе с тем ещё не проделывать переход к более грубому термодинамическому приближению, а учитывать статистические множители  $\left(\frac{p^2 dp}{(2\pi\hbar)^3}\right)^n$ . Это обстоятельство является характерным также для изложенного выше варианта теории кратного порождения мезонов при помощи нелинейной связи нуклеонов с мезонным полем.

Тогда нетрудно показать, что вероятность порождения  $n$  мезонов при энергии столкновения нуклеонов  $E$  будет равна

$$W_n = \frac{\Omega^n}{\pi^{2n} h^{3n} c^{3n}} \frac{E^{3n-1}}{(3n-1)!}, \quad (6,42)$$

где  $\Omega^n$  входит как координатная часть фазового объёма.

Мы видим, что оба варианта теории Ферми представляют собой феноменологическое описание процесса, избегающее рассмотрения механизма взаимодействия нуклеонов с мезонным полем. Чтобы перейти к подобной трактовке от изложенной выше гипотезы, использующей те же статистические веса, нужно положить матричный элемент равным  $\approx 1$  (разрешённый переход) и учесть отличие в энергетической зависимости ( $E^{2n-1}$  вместо  $E^{3n-1}$ ), возникающее из-за нормировки мезонных функций. Тем самым наша гипотеза примерно так относится к фермиевской, как теория  $\beta$ -распада самого Ферми относится к предварительной трактовке  $\beta$ -распада Ф. Перреном, учитывавшим лишь статистические веса электронов и нейтрино.

Сравнение выводов теории Ферми с опытами Шейна показывает удовлетворительное согласие. Следует отметить, что неявным образом некоторый параметр, характеризующий взаимодействие нуклеонов с мезонным полем вводится и в этом варианте теории Ферми (путём определённой гипотезы, относительно величины объёма порождаемого мезонного облака). В самом деле, полагая объём

мезонного облака, приходящийся на одну частицу, равным  $\frac{\hbar}{m_{\pi}c}$ , мы допускаем, что ядерные силы имеют радиус действия подобного порядка.

г) **Теория кратных сил.** Остановимся на первом примере кратных сил, так называемых электронно-нейтринных, или парных  $\beta$ -силах. Теория  $\beta$ -сил представляла собой первую попытку создать полевую теорию ядерных сил.

Частицы целого спина, например  $\pi$ -мезоны, могут переносить взаимодействие между нуклеонами по одиночке, подобно квантам электромагнитного поля, реализующим кулоновское взаимодействие. С другой стороны, частицы полуцелого спина, например электроны, сами по себе не могут переносить этого взаимодействия, так как в процессе взаимодействия спин нуклеона должен оставаться полуцелым. Теория  $\beta$ -распада показала, однако, что нуклеоны связаны с полем пар частиц — электронов и нейтрино. Поле пар имеет целочисленный спин, и поэтому обмен такими парами может создавать некоторые силы, связывающие нуклеоны между собой<sup>1)</sup>. Этот процесс является процессом второго порядка и происходит по следующей схеме. В начальном состоянии в точке  $a$  находится нейтрон, а в точке  $b$  — протон. Нейтрон виртуально испускает пару: электрон и антинейтрино и превращается в протон. Таким образом, в промежуточном состоянии в точках  $a$  и  $b$  находятся протоны и, кроме того, имеется пара лёгких частиц. Затем пара частиц поглощается протоном в точке  $b$ , который превращается в нейтрон. Таким образом, в конечном состоянии у нас в точке  $a$  окажется протон, а в точке  $b$  — нейтрон, т. е. частицы как бы обменяются между собой зарядами. Этот же процесс может идти и через другое промежуточное состояние, когда протон в точке  $b$  виртуально испускает позитрон — нейтрино, а нейтрон в точке  $a$  поглощает пару лёгких частиц.

Перейдём к оценке сил, переносимых единичными частицами (мезонами) и парами лёгких частиц. При этом для

<sup>1)</sup> И. Тамм, Д. Иваненко, *Nature* **133**, 981 (1934); см. также Д. Иваненко и А. Соколов, *ДАН* **3**, 361 (1936); И. Тамм, *Sov. Phys.* **10**, 567 (1936).

вывода парных сил, как и других кратных сил, реализуемых через 2, 3, ...,  $n$  квант поля, т. е. через несколько частиц, мы должны применить квантовую трактовку, ибо кратные силы не имеют непосредственной классической аналогии в линейной теории. Рассмотрим сперва типичный для теории ядерных сил и наиболее простой случай взаимодействия покоящихся нуклеонов через скалярное вещественное поле, хотя исторически сперва были подсчитаны парные силы. Данная задача непосредственно примыкает к выводу сил тяготения через гравитоны продольного поля, и мы можем использовать развитый там аппарат.

Напомним классический вывод скалярных сил. Подставляя в энергию связи нуклеона, покоящегося в точке  $\mathbf{r}_1$ , со скалярным мезонным полем  $\Phi$ , создаваемым другим нуклеоном, находящимся в точке  $\mathbf{r}_2$ ,  $U = g_1 \Phi(\mathbf{r}_1)$  выражение  $\Phi$ , найденное из статического уравнения

$$\Delta\Phi - k_0^2 \Phi = 4\pi g_2 \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2),$$

т. е.

$$\Phi(\mathbf{r}_1) = -\frac{g_2 e^{-k_0 |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|}}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|}$$

получим искомую энергию взаимодействия двух нуклеонов в виде

$$V = -\frac{g_1 g_2 e^{-k_0 |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|}}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|},$$

(поскольку  $g_1 = g_2 = g$ ).

Переходя к квантовой теории, будем описывать систему нуклеонов уравнением Шредингера вида

$$(E - H)\Psi = 0 \quad \text{или} \quad (E - E_{\text{kin}})\Psi = U\Psi,$$

где

$$H = E_{\text{kin}} + U, \quad U = U_1 + U_2,$$

$$U_1 = g_1 \Phi(\mathbf{r}_1, t), \quad U_2 = g_2 \Phi(\mathbf{r}_2, t).$$

Волновые функции мезонов, являющиеся решениями уравнения Клейна, представим в виде разложений Фурье:

$$\Phi = \frac{1}{L^{3/2}} \sum \sqrt{\frac{2\pi\hbar c}{K}} (a(\mathbf{k}) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r} + i\mathbf{k}t} + a^+(\mathbf{k}) e^{+i\mathbf{k}\mathbf{r} - i\mathbf{k}t}).$$

Здесь амплитуды  $a(k)$  и  $a^+(k)$  необходимо подвергнуть вторичному квантованию, которое приведёт к правилам перестановки  $[a_k, a_{k'}^+]_- = \delta_{kk'}$  и толкованию  $a_k^+$  как операторов испускания и  $a_k$  как операторов поглощения мезонов (см. § 2 и ч. 1).

Для описания процессов взаимодействия нужно взять второе приближение теории возмущений, т. е. взять первые три члена по константе связи  $g$  или безразмерной постоянной  $\beta = \frac{g^2}{\hbar c}$ :

$$\Psi = \Psi_0 + \Psi_1 + \Psi_2.$$

Тогда из уравнений

$$(E - E_{\text{kin}}) \Psi = U \Psi,$$

$$\Psi = \frac{U}{E - E_{\text{kin}}} \Psi = \frac{U}{-i \frac{\partial}{\partial t}} \Psi,$$

(ибо  $E_{\text{kin}}$  для покоящихся нуклеонов исчезает) получаем для искомой энергии взаимодействия двух нуклеонов символическое выражение

$$V = (U_1 + U_2) \frac{U_1 + U_2}{E},$$

в котором нужно из всей совокупности эффектов 2-го порядка отобрать лишь члены, соответствующие испусканию мезона первым нуклеоном и поглощению его вторым, и наоборот. Иначе говоря, необходимо оставить лишь те члены в разложении  $U = g\Phi$ , которые содержат квантованные амплитуды в комбинациях  $g_1 g_2 a_k a_{k'}^+, e^{i(\mathbf{k}r_1 - \mathbf{k}'r_2)}$ , соответствующих испусканию мезона одним нуклеоном и поглощению его другим. Все другие комбинации обращаются в нуль благодаря перестановочным соотношениям  $[a_k, a_{k'}^+]_- = \delta_{kk'}$  и начальным и конечным условиям, соответствующим отсутствию реально испускаемых мезонов ( $N_i = 0$ ).

Таким образом,

$$V = \frac{1}{L^3} \sum_k \sqrt{\frac{2\pi\hbar c}{K}} e^{-icKt} a_k (g^{(1)} e^{ikr_1} + g^{(2)} e^{ikr_2}) \times \\ \times \frac{1}{-\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial t}} \sum_{k'} \sqrt{\frac{2\pi\hbar c}{K'}} e^{-icK't} a_{k'}^{\dagger} (g^{(1)} e^{-ik'r_1} + g^{(2)} e^{-ik'r_2}).$$

Соотношение  $a_k a_{k'}^{\dagger} = \delta_{kk'}$  позволяет одно суммирование провести непосредственно, благодаря чему

$$V = \frac{1}{L^3} \sum_k \frac{2\pi\hbar c}{K} \cdot \frac{1}{-\hbar c K} (g^{(1)} g^{(2)} e^{ik(r_1 - r_2)} + g^{(2)} g^{(1)} e^{-ik(r_1 - r_2)}). \quad (6,43)$$

Мы опустили сразу члены, соответствующие процессам самодействия (с коэффициентами  $g_1^2$  и  $g_2^2$ ), когда нуклоны испускают мезоны, а затем сами же их поглощают. Так же как и в квантовой электродинамике, эти члены равны бесконечности. Заменяя в последнем члене  $\mathbf{k}$  на  $-\mathbf{k}$ , получим:

$$V_{12} = -\frac{4\pi g_1 g_2}{L^3} \sum_k e^{ik(r_1 - r_2)}.$$

Переходя затем от суммирования к интегрированию

$\left(\frac{1}{L^3} \sum_k \rightarrow \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k\right)$  и обозначая  $(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$  через  $\mathbf{R}$ , имеем:

$$V_{12} = -\frac{g_1 g_2}{2\pi^2} \int_0^{\infty} \frac{k^2 dk}{k^2 + k_0^2} \oint d\omega e^{ikR} = -\frac{2g_1 g_2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{k^2 \sin kR dk}{(k^2 + k_0^2) kR} = \\ = -\frac{2g_1 g_2}{\pi R} \int_0^{\infty} \frac{k \sin kR}{k^2 + k_0^2} dk.$$

Последний интеграл может быть вычислен с помощью теории вычетов. Он равен

$$\int_0^{\infty} \frac{k \sin kR}{k^2 + k_0^2} dk = \frac{\pi}{2} e^{-k_0 R}.$$

Окончательно получаем:

$$V_{12} = -\frac{g_1 g_2}{R} e^{-k_0 R}. \quad (6,44)$$

Это—известное выражение юкавовской энергии взаимодействия нуклеонов через скалярные мезоны, обеспечивающее короткодействующий характер сил (см. «Классическая теория поля», § 44).

Перейдём к подсчёту простейших кратных, именно парных сил. Взяв энергию связи нуклеонов с полем пар электрон (позитрон)—нейтрино (антинейтрино) в виде, задаваемом теорией  $\beta$ -распада (см. § 6):

$$U_j = g_F (\psi^+ \varphi Q + \varphi^+ \psi Q^+),$$

получим отсюда для энергии двух нуклеонов через пары частиц согласно основной формуле теории взаимодействия:

$$\begin{aligned} V &= \sum_{i=1}^2 g_F^{(i)} U_i - \frac{1}{\hbar} \frac{\partial}{\partial t} \sum_{j=1}^2 g_F^{(j)} U_j = \\ &= \sum_{i,j}^2 g_F^{(i)} g_F^{(j)} (\psi^+ \varphi Q + \varphi^+ \psi Q^+)_{r=r_i} - \frac{1}{\hbar} \frac{\partial}{\partial t} (\psi^+ \varphi Q + \varphi^+ \psi Q^+)_{r=r_j}. \end{aligned}$$

Из суммы по  $i$  и  $j$  достаточно в силу свойств операторов  $Q$  и  $Q^+$  (6,2) оставить лишь члены, пропорциональные  $Q_1 Q_2^+$  и  $Q_2^+ Q_1$  (нейтрон находится в точке 1, протон— в точке 2). Тогда

$$\begin{aligned} V &= g_F^{(1)} g_F^{(2)} \left\{ (\psi^+ \varphi)_{r=r_1} - \frac{1}{\hbar} \frac{\partial}{\partial t} (\varphi^+ \psi)_{r=r_2} Q_1 Q_2^+ + \right. \\ &\quad \left. + (\varphi^+ \psi)_{r=r_2} - \frac{1}{\hbar} \frac{\partial}{\partial t} (\psi^+ \varphi)_{r=r_1} Q_2^+ Q_1 \right\}. \end{aligned}$$

При этом мы отбросили члены, связанные с самодействием, пропорциональные  $Q_1 Q_1^+$  и  $Q_2 Q_2^+$ , которые равны бесконечности. Последний член представляет собой искомое

взаимодействие между нуклеонами. Подставим сюда  $\psi$  и  $\varphi$  в виде разложения по плоским волнам:

$$\psi = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3\mathbf{k} (a_{\mathbf{k}} \psi_{+, \mathbf{k}}^0 e^{-i\mathbf{k}t + i\mathbf{k}r} + b_{\mathbf{k}}^\dagger \psi_{-, \mathbf{k}}^0 e^{i\mathbf{k}t - i\mathbf{k}r}),$$

$$\varphi = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3\mathbf{l} (c_l \varphi_{+, l}^0 e^{-i\mathbf{l}t + i\mathbf{l}r} + d_l^\dagger \varphi_{-, l}^0 e^{i\mathbf{l}t - i\mathbf{l}r}),$$

и оставим лишь члены с  $a_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}}^\dagger$ ,  $b_{\mathbf{k}} b_{\mathbf{k}}^\dagger$ ,  $c_l c_l^\dagger$  и  $d_l d_l^\dagger$ . Из фермиевских правил перестановок (см. § 2):  $a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}'} = N_{\mathbf{k}} \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}')$ ,  $a_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}'}^\dagger = (1 - N_{\mathbf{k}}) \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}')$ , в то время как из начальных условий следует  $N_{\mathbf{k}} = 0$ . Тогда

$$\begin{aligned} V &= \frac{g_F^{(1)} g_F^{(2)}}{(2\pi)^6} Q_1 Q_2^\dagger \int d^3\mathbf{k} d^3\mathbf{l} d^3\mathbf{k}' d^3\mathbf{l}' \times \\ &\quad \times \left( b_{\mathbf{k}} c_l \psi_{-, \mathbf{k}}^{+0} \varphi_{+, l}^0 e^{-i(\mathbf{k}+\mathbf{l})r_1 - i\mathbf{c}(\mathbf{K}+\mathbf{L})t} \times \right. \\ &\quad \times \left. \frac{1}{-\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial t}} c_l^\dagger b_{\mathbf{k}'}^\dagger \varphi_{+, l'}^{0+} \psi_{-, \mathbf{k}'}^0 e^{i(\mathbf{k}'+\mathbf{l}')r_2 + i\mathbf{c}(\mathbf{K}'+\mathbf{L}')t} \right) + \\ &\quad + \frac{g_F^{(1)} g_F^{(2)}}{(2\pi)^6} Q_2^\dagger Q_1 \int d^3\mathbf{k} d^3\mathbf{l} d^3\mathbf{k}' d^3\mathbf{l}' \times \\ &\quad \times \left( d_l a_{\mathbf{k}} \varphi_{-, l}^{+0} \psi_{+, \mathbf{k}}^0 e^{i(\mathbf{k}+\mathbf{l})r_2 - i\mathbf{c}(\mathbf{K}+\mathbf{L})t} \times \right. \\ &\quad \times \left. \frac{1}{-\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial t}} a_{\mathbf{k}'}^\dagger d_{l'}^\dagger \psi_{+, \mathbf{k}'}^{0+} \varphi_{-, l'}^0 e^{-i(\mathbf{k}'+\mathbf{l}')r_1 + i\mathbf{c}(\mathbf{K}'+\mathbf{L}')t} \right) = \\ &= -\frac{g_F^{(1)} g_F^{(2)}}{(2\pi)^6 \hbar c} \int \frac{d^3\mathbf{k} d^3\mathbf{l}}{\mathbf{K}+\mathbf{L}} \{ \psi_{-, \mathbf{k}}^{+0} \varphi_{+, l}^0 \varphi_{+, l}^{0+} \psi_{-, \mathbf{k}}^0 Q_1 Q_2^\dagger e^{i(\mathbf{k}+\mathbf{l})R} + \\ &\quad + \varphi_{-, l}^{+0} \psi_{+, \mathbf{k}}^0 \psi_{+, \mathbf{k}}^{0+} \varphi_{-, l}^0 Q_2^\dagger Q_1 e^{-i(\mathbf{k}+\mathbf{l})R} \}, \quad (6,45) \end{aligned}$$

где  $\mathbf{R} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ .

Подсчитаем теперь значение произведений амплитуд волновых функций. Мы должны это произведение просуммировать по спиновым состояниям лёгких частиц. Сум-



мирование первого произведения даёт:

$$\frac{1}{4} \text{след} \left( 1 - \frac{\alpha l}{l} \right) \left( 1 - \frac{\alpha k - \rho_3 k_0}{K} \right) = 1 + \frac{kl}{Kl} = 1 + \frac{k \cos \theta}{K},$$

а суммирование второго:

$$\frac{1}{4} \text{след} \left( 1 - \frac{\alpha k + \rho_3 k_0}{K} \right) \left( 1 - \frac{\alpha l}{l} \right) = 1 + \frac{kl}{Kl} = 1 + \frac{k \cos \theta}{K}.$$

Здесь мы положили массы антинейтрино и нейтрино равными нулю (отсюда  $L = l$ ) и ввели угол  $\theta$  между направлениями импульса электрона и нейтрино:

$$\cos \theta = \cos \vartheta_e \cos \vartheta_\nu + \sin \vartheta_e \sin \vartheta_\nu (\cos \varphi_e \cos \varphi_\nu + \sin \varphi_e \sin \varphi_\nu).$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} V &= - \frac{g_F^{(1)} g_F^{(2)}}{(2\pi)^6 \hbar c} \int \frac{d^3 k d^3 l}{K+l} \left( 1 + \frac{k \cos \theta}{K} \right) e^{-i(k+l)R} (Q_1 Q_2^+ + Q_2^+ Q_1) = \\ &= - \frac{g_F^{(1)} g_F^{(2)} (Q_1 Q_2^+ + Q_2^+ Q_1)}{(2\pi)^6 \hbar c} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{k^2 dk l^2 dl}{K+l} \times \\ &\quad \times \int_0^\pi \int_0^\pi e^{-ikR \cos \vartheta_e - ilR \cos \vartheta_\nu} \times \\ &\quad \times \sin \vartheta_e \sin \vartheta_\nu d\vartheta_e d\vartheta_\nu \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \left( 1 - \frac{k \cos \theta}{K} \right) d\varphi_e d\varphi_\nu = \\ &= - \frac{g_F^{(1)} g_F^{(2)} (Q_1 Q_2^+ + Q_2^+ Q_1)}{(2\pi)^4 \hbar c} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{k^2 dk l^2 dl}{K+l} \times \\ &\quad \times \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} e^{-ikR\xi - ilR\eta} d\xi d\eta \times \\ &\quad \times \left( 1 + \frac{k}{K} \xi \eta \right) = - \frac{4g_F^{(1)} g_F^{(2)} (Q_1 Q_2^+ + Q_2^+ Q_1)}{(2\pi)^4 \hbar c} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{k^2 dk l^2 dl}{K+l} \times \\ &\quad \times \left[ \frac{\sin kR}{kR} \frac{\sin lR}{lR} - \frac{k}{K} \left( \frac{\cos kR}{kR} - \frac{\sin kR}{(kR)^2} \right) \left( \frac{\cos lR}{lR} - \frac{\sin lR}{(lR)^2} \right) \right]. \end{aligned} \tag{6,46}$$

Для малых  $R$  основную роль в этом интеграле играют большие значения  $k$  ( $k \gg k_0$ ). Поэтому мы можем приближённо пренебречь массой покоя электрона и положить  $K = k$ , что означает вычисление энергии взаимодействия в области  $0 < R \lesssim \frac{\hbar}{mc}$ .

Обозначая  $kR = x$ ,  $lR = y$ , мы получим:

$$V = -\frac{4g_F^{(1)} g_F^{(2)} (Q_1 Q_2^+ + Q_2^+ Q_1)}{(2\pi)^4 \hbar c R^5} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{dx dy}{x+y} [x \sin x \cdot y \sin y - (x \cos x - \sin x)(y \cos y - \sin y)].$$

Последний интеграл может быть вычислен при помощи следующего искусственного приёма. Введём под знак интеграла обрывающий множитель  $e^{-\alpha(x+y)}$  и будем рассматривать старый интеграл как предел нового при  $\alpha \rightarrow 0$ :

$$\begin{aligned} I &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{e^{-\alpha(x+y)} dx dy}{x+y} [x \sin x \cdot y \sin y - \\ &\quad - (x \cos x - \sin x)(y \cos y - \sin y)] = \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \left\{ - \int d\alpha \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\alpha(x+y)} [x \sin x \cdot y \sin y - \right. \\ &\quad \left. - (x \cos x - \sin x)(y \cos y - \sin y)] dx dy \right\} = \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \left\{ - \int d\alpha \left[ \frac{4\alpha^2}{(\alpha^2+1)^4} - \frac{4}{(\alpha^2+1)^4} \right] \right\} = \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \left\{ \frac{4}{3} \cdot \frac{\alpha}{(\alpha^2+1)^3} + \frac{2}{3} \frac{\alpha}{(\alpha^2+1)^2} + \frac{\alpha}{\alpha^2+1} + \arctg \alpha \quad C \right\}. \end{aligned}$$

Значение  $C$  определяется из условия, что при  $\alpha \rightarrow \infty$  фигурная скобка обращается в нуль. Отсюда  $C = -\frac{\pi}{2}$  и  $I = -\frac{\pi}{2}$ . Окончательно получаем при  $r \lesssim \frac{\hbar}{mc}$  для абсо-

лютой величины энергии взаимодействия нуклеонов через пары лёгких частиц:

$$V = \frac{g_F^{(1)} g_F^{(2)} P}{(2\pi)^3 \hbar c R^5}, \quad (6,47)$$

где  $P = Q_1 Q_2 + Q_2 Q_1$  обозначает оператор обмена зарядами. На больших расстояниях взаимодействие убывает как  $\exp(-k_0 r)$ , где  $k_0 = \frac{mc}{\hbar}$ . Таким образом, мы получаем короткодействующие ядерные силы.

Как известно, построение первой теории взаимодействия, реализуемого частицами с конечной массой покоя, сыграло значительную роль в общей теории сил и в теории ядра, так как в дальнейшем оказалось возможным обобщить выражение сил и учесть их нецентральный характер и другие признаки, требуемые эмпирическими данными физики ядра. Однако парные бета-силы не могут являться основными ядерными силами, так как их абсолютное значение крайне мало. Выход из подобного затруднения был найден Юкава, который в некоторой мере заменил электрон и нейтрино одной частицей—мезоном, предсказанным на базе подобных представлений (см. «Классическая теория поля», § 44). В дальнейшем выяснилось, что ядерные силы переносятся в основном заряженными и нейтральными  $\pi$ -мезонами, которые, повидимому, являются псевдоскалярными. Квантовая теория псевдоскалярных сил между нуклеонами воспроизводит результат классической теории, добавляя, однако, оператор обмена зарядом  $P$ , точно такого же типа, как и в выражении для парных сил.

Приведём ещё выражение потенциальной энергии взаимодействия покоящихся нуклеонов в случае переноса сил парами частиц со спином  $1/2$ , если не пренебрегать массой покоя последних<sup>1)</sup>

$$V = \text{const} \left[ \frac{2K_0(z)}{z^3} + \frac{K_1(z)}{z^2} + \frac{4K_1(z)}{z^4} \right], \quad (6,48)$$

где  $z = 2k_0 R$ , а  $K_0$  и  $K_1$  — цилиндрические функции Макдональда нулевого и первого порядков. При  $k_0 \rightarrow 0$

<sup>1)</sup> Ю. Ломсадзе и М. Марков, ЖЭТФ 19, 178 (1949).

получаем отсюда прежнее выражение. Аналогично при переносе сил парами скалярных мезонов получим:

$$V = \text{const} \frac{K_1(z)}{z^2}, \quad (6,49)$$

и, наконец, в случае переноса сил парами векторных мезонов имеем<sup>1)</sup>:

$$V = \frac{\text{const}}{z^2} \left\{ \left( -1 + \frac{32}{z^2} + \frac{40}{z^4} \right) K_1(z) + \frac{2}{z} \left( 3 + \frac{40}{z^2} \right) K_0(z) \right\}.$$

Напомним, что

$$K_0(z) \sim \begin{cases} \ln \frac{z}{2} + \dots & \text{для } R \ll \frac{1}{k_0}, \\ \frac{e^{-z}}{\sqrt{z}} + \dots & \text{для } R \gg \frac{1}{k_0}, \end{cases}$$

$$K_1(z) \sim \begin{cases} -\frac{1}{z} + \dots & \text{для } R \ll \frac{1}{k_0}, \\ -\frac{e^{-z}}{\sqrt{z}} + \dots & \text{для } R \gg \frac{1}{k_0}. \end{cases}$$

Отметим в заключение этого пункта любопытный метод установления зависимости между константами связи. Желая связать ядерные силы с явлением  $\beta$ -распада, Юкава<sup>2)</sup> предположил, что  $\beta$ -распад проходит в два этапа: нуклеон испускает (виртуально) мезон, который затем распадается на электрон и нейтрино.

Для простоты поле ядерных сил будем считать скалярным. Это поле подчиняется уравнению

$$\nabla^2 \Phi - \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} - k_0^2 \Phi = -4\pi \rho_n. \quad (6,50)$$

Источником поля служит скалярная плотность мезонного заряда  $g$  нуклеонов, равная

$$\rho_n = g (\chi_p^+ (\mathbf{r}') \rho_3 Q \chi_n (\mathbf{r})) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (6,51)$$

<sup>1)</sup> О. К л e i n, Arkiv for. math., astr. o. fus. 30A, 1 (1941).

<sup>2)</sup> Н. Ю к а в а, Proc. Phys.-Math. Soc., Japan 17, 48 (1935).

В статическом случае (6,50) сводится к уравнению

$$\nabla^2 \Phi - k_0^2 \Phi = -4\pi\rho_n, \quad (6,52)$$

решением которого, как неоднократно указывалось, является

$$\Phi = g \frac{e^{-k_0 r}}{r}. \quad (6,53)$$

С другой стороны, ввиду связи мезонного поля с полем электронно-нейтринных пар уравнение мезонного поля принимает вид

$$\nabla^2 \Phi - k_0^2 \Phi = -4\pi(\rho_n + \rho_e), \quad (6,54)$$

где аналогично (6,51)

$$\rho_e = g'(\psi_e^+ \rho_3 \varphi_\nu). \quad (6,55)$$

Таким образом, энергия взаимодействия различных источников поля через мезоны определяется формулой

$$\begin{aligned} H' &= \int \rho_e(\mathbf{r}) \Phi_n(\mathbf{r}) d^3\mathbf{r} = \int d^3\mathbf{r} \rho_e(\mathbf{r}) \int \rho_n(\mathbf{r}') \frac{e^{-k_0 |\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} d^3\mathbf{r}' = \\ &= gg' \int \int (\chi_p^+(\mathbf{r}) \rho_3 Q \chi_n(\mathbf{r})) (\psi_e^+(\mathbf{r}') \rho_3 \varphi_\nu(\mathbf{r}')) \frac{e^{-k_0 |\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} d^3\mathbf{r} d^3\mathbf{r}' \cong \\ &\cong \frac{4\pi gg'}{k_0^2} \int \int \chi_p^+(\mathbf{r}) \rho_3 Q \chi_n(\mathbf{r}) \psi_e^+(\mathbf{r}') \rho_3 \varphi_\nu(\mathbf{r}') \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}') d^3\mathbf{r} d^3\mathbf{r}' = \\ &= \frac{4\pi gg'}{k_0^2} \int \chi_p^+(\mathbf{r}) \rho_3 Q \chi_n(\mathbf{r}) \psi_e^+(\mathbf{r}) \rho_3 \varphi_\nu(\mathbf{r}) d^3\mathbf{r}. \quad (6,56) \end{aligned}$$

Сравнивая этот результат с выражением гамильтониана взаимодействия нуклонов с полем пар лёгких частиц (скалярного типа), применяемым в теории  $\beta$ -распада, получаем искомое соотношение

$$\frac{4\pi gg'}{k_0^2} = g_F. \quad (6,57)$$

Несмотря на то что  $\pi$ -мезоны, переносящие ядерные силы, не распадаются на электроны и нейтрино, и, следовательно, гипотеза не может быть оправдана, приведённый вывод интересен с точки зрения методов установления связи между различными квазизарядами.

д) **Кратные процессы при взаимодействии.** Если принять, что взаимодействие между нуклеонами может перепойтаться не только одиночными мезонами, но также парами, тройками, ...,  $n$ , ..., мезонами, притом в первом исчезающем приближении (иначе говоря, во втором приближении теории возмущений), то искомая энергия взаимодействия между нуклеонами примет вид

$$V = U \frac{1}{-\frac{i}{\hbar} \frac{\partial}{\partial t}} U = \sum_n V_n,$$

где, так же как в п. в,

$$U = \sum_n (g_n^{(1)} \Phi^n(\mathbf{r}_1) \rho_3^{(1)} + g_n^{(2)} \Phi^n(\mathbf{r}_2) \rho_3^{(2)}) \quad (6,58)$$

(верхние индексы у зарядов и матриц  $\rho_3$  указывают на нуклеон). Подставляя сюда разложение  $\Phi$  по плоским волнам в виде

$$\Phi = \frac{1}{L^{3/2}} \sum_k \sqrt{\frac{2\pi\hbar c}{K}} (a_k e^{+ikr - icKt} + a_k^+ e^{-ikr + icKt})$$

и оставляя в стоящей слева функции  $U$  члены с  $a$ , а в правой—члены с  $a^+$ , согласно перестановочным соотношениям  $a_k a_k^+ - a_k^+ a_k = \delta_{kk'}$ , получим для абсолютного значения

$$\begin{aligned} V_n &= \frac{g_n^{(1)} g_n^{(2)}}{L^{3n}} \sum_{k_n} \sqrt{\frac{2\pi\hbar c}{K_n}} a_{k_n} (e^{ik_n r_1} \rho_3^{(1)} + e^{ik_n r_2} \rho_3^{(2)}) \dots \\ &\dots \sum_{k_1} \sqrt{\frac{2\pi\hbar c}{K_1}} a_{k_1} (e^{ik_1 r_1} \rho_3^{(1)} + e^{ik_1 r_2} \rho_3^{(2)}) e^{-ic(K_1 + \dots + K_n)t} \times \\ &\quad \times \sum_{k'_1} \sqrt{\frac{2\pi\hbar c}{K'_1}} a_{k'_1}^+ (e^{-ik'_1 r_1} \rho_3^{(1)} + e^{-ik'_1 r_2} \rho_3^{(2)}) \dots \\ &\quad \dots \sum_{k'_n} \sqrt{\frac{2\pi\hbar c}{K'_n}} a_{k'_n}^+ (e^{-ik'_n r_1} \rho_3^{(1)} + e^{-ik'_n r_2} \rho_3^{(2)}) \times \\ &\quad \times \frac{e^{ic(K'_1 + K'_2 + \dots + K'_n)t}}{-\hbar c(K'_1 + K'_2 + \dots + K'_n)} = - \frac{g_n^{(1)} g_n^{(2)} (2\pi\hbar c)^n \rho_3^{(1)} \rho_3^{(2)}}{L^{3n} (\hbar c)} \times \\ &\quad \times \sum_{k_1, k_2, \dots, k_n} \frac{(e^{ik_1(r_1 - r_2)} + e^{-ik_1(r_1 - r_2)}) \dots (e^{ik_n(r_1 - r_2)} + e^{-ik_n(r_1 - r_2)})}{K_1 K_2 \dots K_n (K_1 + K_2 + \dots + K_n)}. \end{aligned} \quad (6,59)$$

Здесь отброшены члены самодействия.

Заменяя во вторых членах в скобках  $k_s$  на  $-k_s$ , обозначая

$$r_1 - r_2 = R$$

и переходя от суммирования к интегрированию, получим:

$$V_n = \frac{2^n (\hbar c k_0)^{n-1}}{\pi^n R^n} g_n^{(1)} g_n^{(2)} \rho_3^{(1)} \rho_3^{(2)} \int_0^\infty \dots \int_0^\infty \frac{\prod_{s=1}^n q_s (q_s^2 + 1)^{-\frac{1}{2}} \sin q_s r dq_s}{\sum_{s=1}^n (q_s^2 + 1)^{\frac{1}{2}}}.$$

Здесь

$$q_s = \frac{k_s}{k_0}, \quad r = k_0 R.$$

Для малых расстояний  $R$  (т. е. для больших  $q$ )

$$V_n \approx \frac{2^n (\hbar c k_0)^{n-1}}{\pi^n R^n} g_n^{(1)} g_n^{(2)} \rho_3^{(1)} \rho_3^{(2)} \int_0^\infty \dots \int_0^\infty \frac{\prod_{s=1}^n \sin q_s r dq_s}{\sum_{s=1}^n q_s}.$$

Этот расходящийся интеграл может быть оценён при помощи введения под интеграл обрывающего множителя

$e^{-\alpha \sum_{s=1}^n q_s}$ , а затем перехода к пределу  $V_n = \lim_{\alpha \rightarrow 0} V_n(\alpha)$  ( $V_n(\alpha = \infty) = 0$ ):

$$V_n \approx \left( \frac{2}{\pi} \hbar c \right)^{n-1} \frac{g_n^{(1)} g_n^{(2)} \rho_3^{(1)} \rho_3^{(2)}}{R^{2n-1}} \cdot \frac{(2n-3)}{(2n-2)!!}. \quad (6,60)$$

Хотя сейчас, очевидно, преждевременно обсуждать детали теории кратных сил, основанных на нелинейной связи нуклонов с мезонным полем, всё же следует отметить, что при известных дополнительных предположениях

можно потенциал  $V = \sum_{n=1}^{\infty} V_n$  свернуть и записать в виде

$$V(R) = \frac{-g_1^2}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{2}{\pi k_0^2 e^2 k}\right)}}. \quad (6,61)$$

Это выражение до некоторой степени согласуется с недавним предположением Ястрова<sup>1)</sup>, который, анализируя опыты по рассеянию нуклеонов на нуклеонах при высоких энергиях, пришёл к гипотезе о наличии значительных сил отталкивания между двумя нуклеонами, проявляющихся на самых малых расстояниях, порядка  $0,6 \cdot 10^{-13}$  см, наряду с ядерными силами притяжения, имеющими больший радиус действия.

Таким образом, кратные процессы того или иного типа встречаются в различных областях физики: наряду с  $\beta$ -распадом мы имеем двойной  $\beta$ -распад; кроме порождения одиночных мезонов, наблюдаются кратные мезонные процессы, которые, со своей стороны, повидимому, играют роль при взаимодействии тяжёлых частиц. Как уже подчёркивалось выше, представляется заманчивым обобщить подобные соображения в общей теории полей и допустить возможность кратных процессов, обязанных нелинейной связи с полями и в других случаях.

## § 7. Изотопическое смещение

**а) Введение.** Тщательное исследование атомных спектров оптическими и радиочастотными методами является одним из наилучших средств для установления различных форм взаимодействия, имеющих место между электронами и ядром, т. е. системой нуклеонов. Как известно, положение атомных энергетических термов определяется в основном кулоновским притяжением электронов к ядру. Последнее сперва предполагается точечным и обладающим беско-

<sup>1)</sup> R. Jastrow, Phys. Rev. 81, 165, 636 (1951).



нечно большой массой, а следовательно, покоящимся. Затем выясняется наличие мультиплетов, или расщепления уровней (так называемая тонкая структура), что находит своё объяснение при помощи релятивистской теории электрона, учитывающей как его спин и магнитный момент, так и эффективное изменение массы со скоростью. Указание на роль магнитных взаимодействий при расшифровке тонкой структуры было сделано Рождественским. В свою очередь при более точном исследовании энергетические уровни компонент тонкой структуры оказываются расщеплёнными, как было показано Терениным и Добрецовым, а также Шюлером. Эта сверхтонкая структура обязана взаимодействию электронов с магнитным моментом ядер. В дальнейшем была введена добавочная поправка, обусловленная взаимодействием электронов с электрическим квадрупольным моментом ядра, и поправка, связанная с отказом от приближения покоящегося ядра и обязанная учёту его сдвигания сперва в нерелятивистской, а затем приближённо в релятивистской теории. Указанные обстоятельства были выяснены сравнительно давно.

В последние годы большой интерес приобрели обнаруженные экспериментально дополнительные сдвиги энергетических уровней атомных электронов, обусловленные, как выяснилось, учётом взаимодействия электронов с электромагнитным вакуумом и с вакуумом пар электронов — позитронов («лэмбовский» сдвиг; 1934—1947), а также предсказываемые теорией сдвиги, обусловленные учётом затухания и поляризации вакуума (см. § 2, а также ч. 1, § 45). Сейчас мы хотим обратить внимание на другие физические причины, не отмеченные выше, также приводящие к сдвигам энергетических уровней. К ним относятся, во-первых, отказ от приближения точечного ядра и тем самым переход к учёту формы распределения его заряда и магнитного момента по объёму. При этом очевидно существенную роль будет играть та или иная приближённая характеристика ядра либо как газа нуклеонов, либо как капли электрически и мезонно-заряженной нуклеонной жидкости, или системы нуклеонов, заполняющих оболочки и образующих  $\alpha$ -частицы и т. д. в том или ином количестве. В дальнейшем следует в какой-то мере учесть эффективные

размеры самих протонов, нейтронов и электронов. Во-вторых, следует учесть недавно обнаруженные специфические мезонно-электромагнитные силы притяжения между электронами и нейтронами, обязанные виртуальной диссоциации нуклеонов на нуклоны плюс мезоны. (Аналогичные дополнительные силы отталкивания между электронами и протонами уже учитываются введением объёма последних.) В-третьих, не исключено влияние электронов на поляризацию ядра, в свою очередь приводящее к модификации взаимодействий и некоторому сдвигу уровней.

В частности нас будут интересовать сейчас относительные смещения одноимённых спектральных линий различных изотопов того же самого элемента, ядра которых содержат, как известно, одинаковые числа протонов, но различные числа нейтронов, при одном и том же числе электронов в атоме. Анализ подобного «изотопического смещения» может помочь уточнить как характер распределения нуклеонов по объёму ядер (т. е. содействовать выяснению различных свойств нуклеонных сил), так и установить более определённо дополнительные формы взаимодействия элементарных частиц: электронов с протонами и нейтронами, что весьма существенно с точки зрения общей теории частиц.

В исторической последовательности расшифровка изотопического смещения проходила в основном следующим образом. Сперва была указана (ещё в боровской квантовой теории) простейшая поправка, обусловленная сдвижением ядра, характерная для одноэлектронной задачи («нормальный эффект» массы; 1913). В дальнейшем выяснилось, что учёт конечности массы ядра приводит, кроме нормального эффекта, к добавочной «специфической» поправке (1930). Затем были обнаружены изотопические сдвиги у тяжёлых элементов (Hg, Pb и др.), направленные в обратную сторону по сравнению с нормальным эффектом массы, а также сдвиги у лёгких элементов (например, у Mg), указывавшие на модификацию, именно ослабление кулоновского поля вблизи ядра. Подобные сдвиги, согласно Рака и Брейту, объясняются неточечным характером ядра и распределением его заряда по объёму (1932). После этого было отмечено, что

часть изотопического смещения следует объяснить на основе предсказываемых теорией мезонно-электрических сил притяжения между нейтроном и электроном<sup>1)</sup>. Три указанных обстоятельства (учёт массы ядер их объёма и сил между электронами и нейтронами) позволяют качественно понять общий ход изотопических смещений от лёгких элементов к тяжёлым. Действительно, построив график величины изотопических смещений для всех исследованных элементов вдоль менделеевской периодической системы, мы обнаружим для более лёгких элементов (примерно до  $Z \sim 35$ ) положительное изотопическое смещение, соответствующее увеличению частоты для линий более тяжёлого изотопа (эффект массы). В середине периодической системы изотопическое смещение близко к нулю (благодаря влиянию сил притяжения электрон—нейтрон), а для тяжёлых элементов (примерно при  $Z > 55$ ) оно становится отрицательным, благодаря преобладающему влиянию эффекта объёма ядер, эквивалентного добавочному отталкиванию, которое у ядер с большим радиусом превалирует над эффектом притяжения электрона к нейтронам. Кроме того, в ходе изотопических смещений наблюдаются дополнительные сдвиги термов изотопов нечётного атомного веса по отношению к термам чётных изотопов и недавно обнаруженные характерные скачки в значениях изотопического смещения для атомов, ядра которых обладают критическими числами нуклеонов (например, 50, 82, 126), повидимому, образующих заполненные оболочки. Тем самым и в ходе изотопических смещений проявляется влияние чётности и ядерных периодичностей, которое было ранее отмечено нами в кривой распространённости изотопов (§ 1) и в явлениях  $\beta$ -распада (§ 6) и которое также наблюдается в графиках значений квадрупольных моментов, в ходе спинов, магнитных моментов, энергий связи. Отметим, наконец, что недавно было обращено внимание на то, что поляризация ядер электронами также может привести к дополнительному изотопическому

---

<sup>1)</sup> Д. И в а н е н к о, ЖЭТФ 11, 198 (1941); Journ. of Phys. 3, 417 (1940); Д. И в а н е н к о и В. Р о д и ч е в, ДАН 70, 8 (1950), см. также И. Т а м м, ДАН 21, 106 (1938).

смещению, теория которого не привела, однако, к определённым результатам.

Несмотря на возможность качественного и в ряде случаев даже количественного объяснения изотопического смещения на базе всех указанных соображений, это интересное и важное явление требует дальнейшего исследования, ввиду немалого числа отступлений эмпирических данных от теории, очевидно, являющейся ещё предварительной. Существенным затруднением является отсутствие более точных сведений о силах электрон—нейтрон, затем невозможность определить точный характер распределения нуклеонов по объёму ввиду незнания точного закона нуклонных сил и, наконец, не столь принципиальные, но технически значительные трудности вычисления волновых функций электронов в квантовой задаче многих тел с требуемой точностью.

Отсылая за дальнейшими подробностями к литературе, рассмотрим коротко все перечисленные физические причины, обуславливающие изотопические смещения<sup>1)</sup>.

**б) Эффект массы.** При учёте конечности массы ядра  $M$  формулы для энергетических термов атомов или соответствующих частот линий следует изменить в двух отношениях.

Во-первых, в одноэлектронной системе учёт содвижения ядра вокруг общего центра тяжести приводит к замене массы электрона на приведённую массу

$$\mu = \frac{mM}{m+M} = \frac{m}{1 + \frac{m}{M}}; \quad \nu = \nu_0 \left( \frac{1}{1 + \frac{m}{M}} \right), \quad (7,1)$$

где  $\nu_0$  — частота, вычисленная при бесконечной массе ядра. Тогда (положительное) изотопическое смещение будет, как легко видеть, иметь порядок

$$\Delta\nu = \nu \frac{M_2 - M_1}{M_1 M_2} m, \quad (7,2)$$

<sup>1)</sup> Основы прежней теории изотопического смещения, ещё не учитывавшей сил между электронами и нейтронами и скачков, даны в книгах: С. Э. Фриш, Спектроскопическое определение ядерных моментов, М.—Л., 1948; Е. Кондон и Шортли, Теория атомных спектров, М., 1949; Бете и Бечер, Физика ядра, Харьков, 1938; см. также обзор Е. W. Foster, Ядерные эффекты в атомных спектрах, Rep. progr. phys. 14, 288 (1951).

где  $M_1$  и  $M_2$  — массы двух изотопов (нормальный эффект массы). Изотопическое смещение линий дейтерия и обычного водорода превосходит не только сверхтонкую, но даже тонкую структуру (для линий  $H_\alpha$  оно равняется 1,79 Å). Для более тяжёлых атомов величина смещения, обусловленного нормальным эффектом массы, быстро убывает (примерно обратно пропорционально квадрату атомного веса) и по порядку сравнивается с расщеплением сверхтонкой структуры.

Во-вторых, в многоэлектронной задаче возникает вторая поправка к терму, также связанная с массой ядра и определяемая фазовыми соотношениями при движении электронов. Пусть мы имеем атом, состоящий из  $Z$  электронов и ядра. Тогда, вводя вместо радиус-векторов электронов  $r_i$  и ядра  $r$  по отношению к неподвижному началу координатной системы радиус-вектор центра тяжести  $R = \frac{Mr + m\sum r_i}{M + mZ}$  и сопряжённый ему импульс  $p$ , радиус-векторы электронов относительно ядра  $\rho_i = r_i - r$  и сопряжённые им импульсы  $p_i$ , мы сможем кинетическую энергию

системы  $E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m \sum \dot{r}_i^2 + \frac{1}{2} M \dot{r}^2$  привести к виду

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2\mu^2} \sum p_i^2 + \frac{1}{M} \sum_{i \neq j} p_i p_j + \frac{1}{2(M + Zm)} P^2, \quad (7,3)$$

где  $\mu = \frac{mM}{m + M}$ . При этом можно ограничиться первыми двумя членами, положив  $P = 0$ , так как кинетическая энергия центра тяжести при излучении заметно не меняется. Второй член и представляет собой искомый специфический эффект массы<sup>1)</sup>:

$$S = \frac{1}{M} \sum_{i \neq j} p_i p_j. \quad (7,4)$$

В противоположность нормальному эффекту массы, сводящемуся к замене массы электрона на приведённую,

<sup>1)</sup> См. Бете, Квантовая механика простейших систем, § 21, М — Л., 1935; Hughes a. Esgart, Phys. Rev. 36, 694 (1930).

специфический эффект будет различен для разных энергетических состояний атома. При независимости движения электронов, когда полная волновая функция могла бы быть представлена в виде произведения волновых функций частиц, специфический эффект обращался бы в нуль. Следовательно, специфическая поправка на массу обязана связи в движении электронов, обусловленной прежде всего принципом Паули. Например, для случая двух электронов, полагая, как обычно,

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{2}} [u(1)v(2) \pm v(1)u(2)],$$

получим для сдвига терма, обусловленного специфическим эффектом массы:

$$\Delta E_S = \pm \frac{h^2 m}{4\pi^2 M} \left| \int \text{grad } u^* \cdot v \, d\tau \right|^2.$$

Если один электрон находится в  $1S$ -состоянии, для которого эффективный заряд ядра есть  $Z_S$ , а второй в  $nP$ -состоянии с эффективным зарядом ядра  $Z_P$ , то, используя водородоподобные функции, получим:

$$\Delta E_S = \pm \frac{128}{3} \frac{m}{M} (Z_S Z_P)^5 \frac{(Z_S n - Z_P)^{2n-4}}{(Z_S n + Z_P)^{2n+4}} n^3 (n^2 - 1) \frac{2\pi^2 e^4}{h^2}. \quad (7,5)$$

В случае ионизированного лития для линии  $2^3P - 2^3S$  обнаружено изотопическое смещение, обязанное наличию двух изотопов у лития ( ${}_3\text{Li}^6$  и  ${}_3\text{Li}^7$ ):

$$\begin{aligned} (\nu_7 - \nu_6)_{\text{эксп}} &= 1,14 \text{ см}^{-1}, & \nu_6 &= 18\,229,48 \text{ см}^{-1}, \\ \nu_7 &= 18\,230,62 \text{ см}^{-1}. \end{aligned}$$

Нормальный эффект массы даёт лишь сдвиг

$$(\nu_7 - \nu_6)_{\text{норм}} = -\frac{1}{1838} \left( \frac{1}{7} - \frac{1}{6} \right) \nu_7 = 0,24 \text{ см}^{-1},$$

тогда как изотопическое смещение, обусловленное специфической поправкой на массу, оказывается согласно предыдущей формуле равным

$$(\nu_7 - \nu_6)_{\text{спец}} = 0,85 \text{ см}^{-1}.$$

В сумме обе поправки в данном случае почти полностью объясняют наблюдаемое смещение

$$(\nu_7 - \nu_6)_{\text{теор}} = 0,24 + 0,85 = 1,09 \text{ см}^{-1}.$$

Кроме того, следует ещё учесть менее значительную поправку, также связанную с массой ядра и обязанную электростатическому взаимодействию электронов. Для гелия последняя достигает 20% от нормального эффекта массы.

Определение специфической поправки связано с необходимостью использовать наиболее точные выражения волновых функций электронов, вычисление которых для сложных атомов, как известно, связано со значительными трудностями. Поскольку специфическая поправка обратно пропорциональна массе ядра, она, вообще говоря, играет роль лишь для лёгких и отчасти средних элементов. Однако при анализе изотопического смещения и обсуждении эффектов объёма и структуры ядер и сил электрон—нейтрон следует всегда прежде всего выделить оба эффекта массы, которые мы и будем считать в дальнейшем учтёнными.

**в) Влияние объёма.** Как указывалось выше, на изотопическое смещение оказывает влияние распределение электрического заряда протонов по объёму ядра, так как обычное приближение точечного ядра оказывается недостаточным. Распределение заряда по объёму приведёт, очевидно, к ослаблению кулоновского взаимодействия ядра с электронами, которые уже не будут подвергаться на самых малых расстояниях воздействию полного заряда, сосредоточенного в точке. Сглаживание слишком быстрого возрастания абсолютного значения кулоновского потенциала при уменьшении  $r$  несомненно соответствует действительности. Наглядно говоря, оно приводит к уменьшению притяжения электрона к ядру. В частном случае атома водорода речь идёт не об объёме ядра, но об объёме самого протона. Тем самым мы вступаем в область нерешённых вопросов, связанных со структурой элементарных частиц, но во всяком случае вряд ли можно сомневаться, что закон Кулона как-то должен быть модифицирован и в этом случае.

Указанное ослабление энергии взаимодействия будет наивысшим для тяжёлых изотопов, обладающих наибольшими объёмами или радиусами. Вне ядра при  $r > R$ , где  $R$  — радиус ядра, потенциальная энергия электрона будет попрежнему иметь кулоновский вид

$$V = -\frac{Ze^2}{r}.$$

При  $r < R$  кулоновский потенциал будет модифицирован в сторону ослабления слишком быстрого возрастания абсолютного значения при  $r \rightarrow 0$ . Для задания потенциала внутри ядра мы должны опираться на ту или иную (пока что приближённую) модель структуры ядра (газовая, капельная, или другая, наиболее подходящая для описания распределения нуклеонов оболочечная модель при учёте возможных  $\alpha$ -частиц). Приближённый характер той или иной модели обусловлен, во-первых, отсутствием точного закона ядерных сил. Во-вторых, даже при наличии подобного закона неизбежно применение приближённых методов в рассматриваемой задаче многих тел. Можно, например, использовать для предварительного анализа приближённую картину равномерного распределения заряда по объёму ядра, что является разумным приближением для средних ядер. Тогда

$$V_i = \left[ -\frac{3}{2} + \frac{1}{2} \left( \frac{r}{R} \right)^2 \right] \frac{Ze^2}{R} \quad (7,6)$$

(томсонова сфера, или осцилляторный потенциал).

В тяжёлых ядрах имеет место тенденция к вытеснению протонов на поверхность. В крайнем случае чисто поверхностного распределения заряда потенциал внутри ядра будет постоянным:

$$V_i = -\frac{Ze^2}{R}. \quad (7,7)$$

Для лёгких ядер можно использовать результат подсчёта плотности распределения нуклеонов при помощи приближённого статистического метода Томаса-Ферми, который приводит к выражению

$$\rho = \frac{4Z}{\pi R^{3/2}} \left( 1 - \frac{r}{R} \right)^{3/2} \frac{1}{r^{3/2}}. \quad (7,8)$$



Можно задать распределение протонов по объёму ядра в виде разложения

$$\rho(x) = C_0 \left\{ \rho(0) + \rho'(0)x + \frac{\rho''(0)}{2}x^2 + \dots \right\} \left( x = \frac{r}{R} \right), \quad (7,9)$$

где  $C_0$  определяется из условия нормировки  $\int_0^R \rho d\tau = Ze$ .

Отсюда получим:

$$\rho(x) = \frac{Ze}{4\pi R^3} \frac{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\rho^{(k)}(0) x^k}{k!}}{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\rho^{(k)}(0)}{(k+3)k!}}.$$

Тогда потенциальная энергия внутри ядра  $V_i = -e\varphi_i$  будет определяться из решения уравнения Лапласа-Пуассона

$$\Delta\varphi_i = -4\pi\rho$$

при условии

$$\varphi_{r=R} = \frac{Ze}{R}.$$

Остановившись на том или ином наиболее разумном для данного атома приближённом виде распределения заряда по объёму ядра, а следовательно, и потенциальной энергии  $V_i$ , мы можем перейти к определению сдвига энергетического терма электрона, обязанного отказу от представления кулоновского притяжения со стороны точечного заряда.

Самый простой метод подсчёта подобных сдвигов заключается в применении метода возмущений. Тогда по обычной формуле имеем для изменения энергии электрона:

$$\Delta E = \int_0^R \left( \frac{Ze^2}{r} - \frac{Ze^2}{R} \right) |\psi|^2 4\pi r^2 dr. \quad (7,10)$$

Проведём сперва для наглядности подсчёт в нерелятивистском приближении. Тогда для малых  $r$  можно заменить

плотность  $|\psi|^2$  её значением в нуле

$$\psi^2(0) = \frac{Z^3}{\pi a_{\text{H}}^3 n^3} \quad (7,11)$$

(для водородоподобных атомов). Интегрируя, получаем:

$$\Delta E = \frac{2}{3} \frac{Z^4 c^2 R^2}{a_{\text{H}}^3 n^3} = \frac{2\pi}{3} Z e^2 \psi^2(0) R^2. \quad (7,12)$$

Сдвиг терма можно выразить через эффективное изменение квантового числа. Так как

$$E_n = m_0 c^2 - \frac{Z^2 m_0 c^2 \alpha^2}{2n^2},$$

то из

$$\Delta E_n = \left( \frac{\partial E}{\partial n} \right) \Delta n$$

получим:

$$\Delta n = \frac{2}{3} \frac{Z^4 \alpha^4}{q^2}, \quad (7,13)$$

где радиус ядра выражен в долях радиуса электрона  $R = \frac{e^2}{m_0 c^2} \frac{1}{q}$ . Сравним теперь сдвиги термов для двух изотопов с атомными весами  $A_1$  и  $A_2$ , обладающих различными радиусами, которые изменяются примерно по закону  $R = 1,5 \cdot 10^{-13} \cdot A^{\frac{1}{3}}$ . Тогда изотопическое смещение, обусловленное влиянием распределения заряда протонов по объёму, будет равняться в зависимости от изменения радиусов изотопов

$$\delta \Delta E = 2 \Delta E \cdot \frac{\delta R_0}{R_0}, \quad (7,14)$$

или в зависимости от изменения атомного веса

$$\delta \Delta E = 2 \Delta E \cdot \frac{1}{3} \frac{\delta A}{A}. \quad (7,15)$$

Однако полученные простые формулы являются слишком грубыми и должны быть уточнены во многих направлениях. Во-первых, весь подсчёт следует произвести релятивистским путём, применяя для электронов уравнение

Дирака. При сохранении метода возмущений это приведёт к увеличению плотности электронов  $\rho$  на малых расстояниях. На расстоянии  $r$  будем иметь:

$$\rho = u^2(r) = \frac{2(1+\gamma)}{|\Gamma(2\gamma+1)|^2} |\psi^2(0)| \left(\frac{2Zr}{a_H}\right)^{2\gamma-2}, \quad (7,16)$$

где  $\gamma = (1 - Z^2\alpha^2)^{1/2}$ ,  $\alpha = \frac{2\pi e^2}{hc}$ ,  $\psi^2(0)$  — квадрат нерелятивистской волновой функции при  $r=0$  для  $s$ -электрона. Отсюда для сдвига уровня получим:

$$\Delta E = \frac{8\pi(1+\gamma)}{|\Gamma(2\gamma+1)|^2} \left(\frac{2Z}{a_H}\right)^{2\gamma-2} B \frac{Ze^2 R^{2\gamma}}{2\gamma} |\psi^2(0)|, \quad (7,17)$$

где коэффициент  $B$  характеризует распределение заряда протонов по объёму и для случая поверхностного заряда (постоянный потенциал) равняется

$$B = \frac{1}{2\gamma+1};$$

$R$  — радиус ядра.

Искомое изотопическое смещение уровня  $s$ -электрона, обязанное влиянию распределения заряда протонов по объёму, получается отсюда как изменение сдвига  $\Delta E$ , обусловленное изменением ядерного радиуса  $\delta R$  от изотопа к изотопу. Дифференцируя (7,17), получим:

$$\delta \Delta E = \frac{8\pi(1+\gamma)}{|\Gamma(2\gamma+1)|^2} \left(\frac{2Z}{a_H}\right)^{2\gamma-2} |\psi^2(0)| B \frac{Ze^2 R_0^{2\gamma-1}}{2\gamma+1} \delta R$$

или в волновых числах

$$\delta T = \frac{\delta \Delta E}{hc} = \frac{4\pi R_\infty \alpha_H^3 |\psi^2(0)|}{Z} \frac{1+\gamma}{|\Gamma(2\gamma+1)|^2} y_0^{2\gamma} \frac{\delta y}{y_0} B,$$

где  $y_0 = \frac{2ZR}{a_H}$ ,  $R_\infty = \frac{2\pi m e^4}{ch^3}$  (постоянная Ридберга). Оказывается, что изменение формы распределения заряда по объёму ядра не меняет общего вида полученных формул за исключением структурного множителя  $B$ . Если внутренний потенциал не является постоянным, но

соответствует равномерному распределению заряда, то структурный множитель равен

$$B = \frac{3}{(2\gamma + 1)(2\gamma + 3)}.$$

После релятивистского уточнения выражения плотности электронов на малых расстояниях следует исправить слишком грубое выражение нерелятивистской плотности  $\psi^2(0)$ , взятое для водородоподобных атомов. На самом деле благодаря экранированию заряда ядра электронами  $\psi^2(0)$  будет в основном пропорционально не  $Z^3$ , а  $\sim Z$ . Точное вычисление  $\psi^2$  для сложных атомов связано не столько с принципиальными, сколько с техническими трудностями. Хорошее приближение дает выражение, применяемое в спектроскопии:

$$\psi^2(0) = \frac{Z_i Z_0^2}{\pi a_H^3 n^{*3}} \left( 1 - \frac{d\sigma}{dn} \right),$$

где  $Z_i$  — эффективный заряд ядра для внутренней области ( $Z_i \cong Z$  для  $s$ -электрона),  $Z_0$  — эффективный заряд во внешней области, равный 1 для оптического электрона в нейтральных атомах, 2 для однократно ионизованных атомов и т. д.  $n^*$  — эффективное квантовое число,  $\sigma$  — квантовый дефект. В результате  $\Delta n$  будет пропорционально  $Z^2$ , а не  $Z^4$ .

Развитая теория находится в общем качественном согласии с опытными данными, однако всё же даёт слишком большие значения для изотопических сдвигов. В частности, изотопическое смещение  $ns$ -уровней таллия действительно пропорционально величинам  $\psi^2(0)$ . В таблице для иллюстрации приведены данные для спектров Tl II.

Причины расхождения теории с экспериментом следует искать в двух направлениях. Во-первых, подсчёт по теории возмущений возбуждает сомнение, поскольку применяемые исходные электронные волновые функции наиболее сильно искажаются именно в рассматриваемой области. Во-вторых, произведённые до сих пор конкретные подсчёты использовали слишком грубые представления о распределении нуклеонов по объёму. Для того чтобы улучшить подсчёты по методу возмущений, непоследовательность

Уровень	Наблюдае- мый сдвиг, $\text{см}^{-1}$	Вычисленный сдвиг, $\text{см}^{-1}$	Вычисленный сдвиг с поправкой на экра- нирование, $\text{см}^{-1}$
$5d^9 6s^2 6p$	0,348	0,38	0,34
$6s 7s^3 S_1$	0,059	0,066	0,055
$6s 8s^1 S_0$	0,015	0,023	0,023

которых заключается в предположении лишь незначительного различия между основными и возмущёнными функциями в области ядра, можно применить к дираковскому уравнению метод возмущения граничных условий, аналогичный методу Фрелиха для шредингеровского уравнения. Можно считать, что ввиду необходимости совпадения обычной волновой функции электрона с волновой функцией внутри ядра возмущается граничное условие при  $r=R_0$ <sup>1)</sup>. Тогда для сдвига уровня получается формула

$$\delta\Delta E = \frac{8\pi R_\infty a_{II}^3}{Z} \psi^2(0) \frac{\gamma^2}{|\Gamma(2l+1)|^2} \frac{2-\gamma}{2+\gamma} y_0^{2\gamma} \frac{\delta R}{R}, \quad (7,18)$$

отличающаяся от прежнего выражения Брейта множителем

$$\xi = \frac{2\gamma^2(2-\gamma)(1+2\gamma)}{(1+\gamma)(2+\gamma)},$$

который для лёгких ядер, когда  $\gamma=1$ , стремится к 1. Однако для тяжёлых ядер  $\xi$  значительно отличается от 1. Например, для ртути ( $Z=80$ )  $\xi=0,8$ . Добавочное, относительно незначительное уточнение (достигающее 10%) в подсчёте изотопического смещения получится при учёте экранирования оптическим электроном заряда ядра, благодаря которому ослабляется энергия связи внутреннего электрона с ядром и тем самым изменяется изотопическое смещение (см. ниже).

Однако представляется более последовательным вообще отказаться от применения приближённых методов тео-

<sup>1)</sup> Я. А. Смородинский, ЖЭТФ 17, 1034 (1947);  
Е. К. Врош, Archiv f. Math. o Nat. 48, 25 (1945).

рии возмущений и с самого начала взять за основу «уточнённые» волновые функции электронов, отвечающие наличию объёма ядра. Для этой цели нужно решить уравнения Дирака для электрона в двух областях: 1) внешнее пространство от  $r \geq R$  до  $\infty$ , где  $R$  — радиус ядра; радиальные функции этой области будем обозначать через  $G_e$  и  $F_e$ ; 2) внутренняя область  $r \leq R$ ; радиальные функции обозначим через  $G_i$  и  $F_i$ . Что касается внешних электронных функций, то для них теперь необходимо взять линейную комбинацию двух решений дираковских уравнений, ограничиваясь лишь требованием исчезновения на бесконечности, но отнюдь не отбрасывая функций, обращающихся в бесконечность в нуле, как это делалось прежде в случае точечного ядра. Уравнения Дирака для радиальных функций запишем в виде

$$\begin{aligned} \left( \frac{d}{dr} + \frac{1-k}{r} \right) G &= \frac{1}{\hbar c} (E + E_0 - V) F, \\ \left( \frac{d}{dr} + \frac{1+k}{r} \right) F &= \frac{1}{\hbar c} (-E + E_0 + V) G, \end{aligned} \quad (7,19)$$

где  $k = l + 1$  для  $j = l + \frac{1}{2}$  и  $k = -l$  для  $j = l - \frac{1}{2}$ ,  $E_0 = mc^2$ .

В том случае, когда учитываются конечные размеры ядра, изменение кулоновского поля во внутренней области скажется на значениях энергетических термов электронов атома. Для учёта этого изменения будем считать главное квантовое число  $n$  не целым, а отличающимся от целого на малую величину  $\Delta n$ . Рассматривая случай  $ns_{\frac{1}{2}}$ -электронов,

положим, что радиальное квантовое число равно  $n_r = n - 1 + \Delta n$ . Как известно, в случае целых  $n_r$  исчезновение  $G_e$  и  $F_e$  на бесконечности выполняется автоматически, ввиду свойств вырожденных гипергеометрических функций. Однако в данном случае нецелых  $n_r$  необходимо подобрать правильную линейную комбинацию обоих решений. Вместо обычного решения для дискретного спектра

$$\begin{pmatrix} G \\ F \\ \varepsilon \end{pmatrix} = M_r e^{-\frac{\rho}{2}} \rho^{-1+\gamma_l} \begin{Bmatrix} P_1(\rho) \\ P_2(\rho) \end{Bmatrix}, \quad (7,20)$$

где

$$P_1 = F(-n_r + 1, 2\gamma + 1, \rho) + \frac{n_r + 2\gamma}{1 - \alpha Z \frac{1 + \varepsilon^2}{2\varepsilon}} F(-n_r, 2\gamma + 1, \rho),$$

$$P_2 = \varepsilon \left\{ F(-n_r + 1, 2\gamma + 1, \rho) - \right. \\ \left. - \frac{n_r + 2\gamma}{1 - \alpha Z \frac{1 + \varepsilon^2}{2\varepsilon}} F(-n_r, 2\gamma + 1, \rho), \right.$$

$$M_r^2 = \frac{(N_l + \gamma_l + n_r)(2\alpha Z)^{2\gamma_l + 1} \Gamma(2\gamma_l + n_r + 1)}{n_r! 2N_l [\Gamma(2\gamma_l + 1)]^2 [(N_l + l + 1)^2 + n_r(n_r + 2(l))]},$$

$$N_l = [n_r^2 + (l + 1)^2 + 2\gamma_l n_r]^{\frac{1}{2}}, \quad n_r = n - 1,$$

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{E_0 - E}{E_0 + E}}, \quad \gamma_l = \sqrt{(l + 1)^2 - \alpha^2 Z^2},$$

$$\rho = \frac{2r}{\hbar c} \sqrt{E_0^2 - E^2},$$

и  $F$  — вырожденная гипергеометрическая функция, новое решение для внешней области будет иметь вид:

$$\left\{ \frac{G_e}{F_e} \right\} = C_e e^{-\frac{\rho}{2}} \rho^{-1 - \gamma} \frac{\Gamma(2\gamma)}{\Gamma(-n_r + 1)} \left\{ F(-2\gamma - n_r + 1, -2\gamma + 1; \rho) \pm \right. \\ \left. \pm \frac{n_r}{1 - \alpha Z \frac{1 + \varepsilon^2}{2\varepsilon}} F(-2\gamma - n_r, -2\gamma + 1, \rho) \right\} + \\ + C_e e^{-\frac{\rho}{2}} \rho^{-1 + \gamma} \frac{\Gamma(-2\gamma)}{\Gamma(-n_r + 1 - 2\gamma)} \left\{ F(-n_r + 1, 2\gamma + 1, \rho) \pm \right. \\ \left. \pm \frac{n_r}{1 - \alpha Z \frac{1 + \varepsilon^2}{2\varepsilon}} F(-n_r, 2\gamma + 1, \rho) \right\} \quad (7,21)$$

здесь  $C_e$  — постоянная, которую нужно определить из условий нормировки<sup>1)</sup>. Пренебрегая малыми членами

<sup>1)</sup> См. A. Sommerfeld, Zs. f. Phys. 118, 295 (1941).

порядка  $\alpha^2$ , подставим теперь в решение (7,21) приближённые значения для  $ns_1$  термов при  $l=0$ ,  $k=1$ :

$$\gamma \approx 1, E_0 + E \approx 2E_0, \varepsilon \approx \frac{1}{2} \frac{\alpha Z}{n}, \rho \approx \frac{2E_0 \alpha Z r}{\hbar c} \sim \frac{\alpha Z}{100}.$$

Последнее выражение позволяет положить

$$e^{-\frac{\rho}{2}} \approx 1, \rho^{-1-\gamma} \approx 1.$$

Используя далее приближённую формулу

$$\Gamma(-Z + \delta) = \frac{(-1)^{Z-1}}{\delta \cdot Z} \quad \text{при } \delta \ll Z,$$

получим:

$$\frac{\Gamma(-2\gamma)}{\Gamma(-n_r + 1 - 2\gamma)} \approx \frac{1}{2} (-1)^n n! \left(1 - \frac{\Delta n}{\alpha^2 Z^2}\right).$$

Наконец, вспоминая разложение вырожденных гипергеометрических функций

$$F(\alpha, \beta; \rho) = 1 + \frac{\alpha\rho}{\beta 1!} + \frac{\alpha(\alpha+1)\rho^2}{\beta(\beta+1) 2!} + \dots,$$

получим искомое решение при  $n > 1$  в виде

$$G_e = (-1)^n (n-2)! \left(\frac{\Delta n}{\rho} - n\right) C_e;$$

$$F_e = C_e (-1)^{n-1} \frac{\alpha Z}{n\rho} (n-2)! \times \\ \times \left\{ \frac{\Delta n}{\rho} + \Delta n \cdot n + \frac{\Delta n}{2} - \frac{n^2 \rho}{2} \right\}. \quad (7,22)$$

Для случая  $n=1$ , используя более точные приближённые выражения

$$\left(n_r = n - 1 + \Delta n \approx \Delta n, \quad \frac{\Gamma(-2\gamma)}{\Gamma(-n_r + 1 - 2\gamma)} \approx -\frac{1}{2}\right)$$

и попрежнему пренебрегая членами  $\Delta n^2$ ,  $\Delta n \alpha$ , получим:

$$G_k = -\frac{C_e}{\Delta n} \left(\frac{\Delta n}{\rho} - 1\right), \quad F_k = \frac{C_e \alpha Z}{\rho \Delta n} \left(\frac{\Delta n}{\rho} + \frac{3}{2} \Delta n - \frac{\rho}{2}\right). \quad (7,23)$$



Внутренние функции, ограниченные требованием конечности в нуле, получаются как точные решения соответственного уравнения Дирака при данном потенциале. Представим, в частности, внутреннюю потенциальную энергию, соответствующую разложению плотности заряда в ряд

$$\rho(x) = C_0 \left[ \rho(0) + \frac{\rho'(0)}{4!} x + \frac{\rho''(0)}{2!} x^2 + \dots \right],$$

в виде разложения

$$V_i = \frac{Ze^2}{6R} a \rho(0) x^2 + \frac{Ze^2 a}{12R} \rho'(0) x^3 - \frac{Ze^2}{R} b + \dots$$

В случае поверхностно заряженного ядра  $a=0$ ,  $b=1$ ; для случая равномерного распределения заряда по объёму  $a=3$ ,  $b=3/2$ .

Подставляя в уравнения Дирака указанное разложение потенциала в ряд будем искать решения как обычно в виде

$$G_i = x^\gamma \sum a_\nu x^\nu, \quad F_i = x^\gamma \sum b_\nu x^\nu.$$

Тогда, собирая члены при одинаковых степенях, найдём:  $\gamma = -1 + k$ . Пренебрегая малыми членами порядка  $\frac{R(E_0 \pm E)}{hc} \gg 10^{-2}$ , получим решения в виде<sup>1)</sup>:

$$G_i = C_i \left( 1 - \frac{1}{6} b^2 \alpha^2 Z^2 x^2 + \frac{1}{45} a b \alpha^2 Z^2 \rho(0) x^4 + \dots \right),$$

$$F_i = -\frac{C_i}{3} \alpha Z x \left\{ b - \frac{1}{10} a \rho(0) x^2 - \frac{1}{10} b^3 \alpha^2 Z^2 x^2 + \dots \right\}. \quad (7,24)$$

<sup>1)</sup> Метод уточнённых функций был применён в работе Д. Иваненко и А. Цандер, ЖЭТФ 18, 434 (1947). Расчёты указанной работы проделаны для случаев постоянного и осцилляторного потенциалов. Из формул этой работы при  $n \gg 1$  получается прежний результат Смородинского, который пользовался предположением Брейта-Розенталя:  $E \approx m_0 c^2$ , а в нерелятивистском приближении ( $\alpha \rightarrow 0$ ) получается результат Зоммерфельда.

В частности, для поверхностного распределения заряда

$$G_i = C_i \left( 1 - \frac{1}{6} \alpha^2 Z^2 x^2 \right),$$

$$F_i = -\frac{C_i}{3} \alpha Z x \left( 1 - \frac{1}{10} \alpha^2 Z^2 x^2 + \dots \right); \quad (7,25)$$

для томсоновой сферы

$$G_i = C_i \left( 1 - \frac{1}{4} \alpha^2 Z^2 x^2 + \frac{1}{10} \alpha^2 Z^2 x^4 + \dots \right),$$

$$F_i = -\frac{C_i}{3} \alpha Z x \left( \frac{3}{2} - \frac{3}{10} x^2 - \frac{1}{10} \frac{27}{8} \alpha^2 Z^2 x^2 + \dots \right). \quad (7,26)$$

Для определения поправок к собственным значениям энергии, или согласно излагаемому методу добавок к квантовому числу  $\Delta n$ , вызванных учётом распределения заряда, следует приравнять внешние и внутренние функции на границе ядра:

$$G_e|_{r=R} = G_i|_{r=R}, \quad F_e|_{r=R} = F_i|_{r=R}. \quad (7,27)$$

Отсюда получаем систему линейных однородных уравнений для определения неизвестных коэффициентов  $C_e$  и  $C_i$ , условием разрешимости которой, как известно, является равенство нулю определителя, составленного из соответствующих коэффициентов. В результате получим для искомой поправки к квантовому числу в случае  $nS$ -термов:

$$\Delta n = \frac{n^2 \frac{R}{h} \left[ \alpha Z - 2 \frac{M}{N} \right]}{\frac{h}{mc} \left[ \frac{mc}{2\alpha Z R} + \frac{1}{\alpha} + n - \frac{n}{\alpha Z} \frac{M}{N} \right]}. \quad (7,28)$$

Здесь влияние структуры ядра, т. е. формы распределения заряда протонов по объёму сказывается через коэффициенты  $N$  и  $M$ , зависящие от  $a$ ,  $b$ ,  $\rho$ :

$$N = 1 - \frac{1}{6} b^2 \alpha^2 Z^2 + \frac{1}{45} a b \alpha^2 Z^2 \rho(0) + \dots,$$

$$M = \frac{1}{3} \alpha Z \left[ b - \frac{1}{10} \alpha \rho(0) - \frac{1}{10} b^3 \alpha^2 Z^2 + \dots \right]. \quad (7,29)$$

Следовательно, для поверхностного распределения заряда

$$N = 1 - \frac{1}{6} \alpha^2 Z^2, \quad M = \frac{1}{3} \alpha Z \left( 1 - \frac{1}{10} \alpha^2 Z^2 \right),$$

а для равномерного распределения заряда по объёму

$$N = 1 - \frac{11}{40} \alpha^2 Z^2, \quad M = \frac{1}{3} \alpha Z \left( \frac{6}{5} - \frac{27}{80} \alpha^2 Z^2 \right).$$

Формула для  $\Delta n$ , как оказывается, пригодна также в случае  $n=1$ . Приближённо имеем:

$$\Delta n \cong \frac{2}{3} \cdot \frac{Z^2 \alpha^4 n^2}{q^2} \left( R = \frac{e^2}{mc^2} \cdot \frac{1}{q} \right) \quad (7,30)$$

(для постоянного потенциала). Таким образом, мы вновь приходим к формуле вида, близкого к нерелятивистскому. Для ядер среднего номера, например цинка ( $Z=30$ ), получим:

$$\begin{aligned} \Delta n_{30} &\cong 4,7 \cdot 10^{-6} && \text{(томсонова сфера),} \\ \Delta n_{30} &\cong 7,8 \cdot 10^{-6} && \text{(постоянный потенциал).} \end{aligned}$$

Для тяжёлых ядер, например для ртути ( $Z=80$ ), поправка будет значительнее:

$$\Delta n_{80} \sim 10^{-4} \quad \text{(постоянный потенциал).}$$

Отсюда получим обычным путём формулу для сдвига терма и для изотопического смещения. Удобно сохранить для сравнения с другими результатами прежний вид формулы, отнеся поправки, приносимые методом уточнённых функций в множитель  $\zeta$ . Тогда выражение для изотопического смещения примет вид

$$\delta \Delta E = \zeta \frac{8\pi(1+\gamma)}{|\Gamma(2\gamma+1)|^2} \left( \frac{2Z}{a_H} \right)^{2\gamma-2} \psi^2(0) B Z^2 R^{2\gamma-2} \frac{\delta R}{R}, \quad (7,34)$$

где поправка, вызванная  $\zeta$ , достигает 10% (для ртути).

Отказ от прежнего грубого приближения точечного ядра и переход к представлению о распределении заряда, а в дальнейшем и магнитного момента, по объёму будет, очевидно, сказываться не только в изотопическом смещении, но и во всех других эффектах, в которых проявляется взаимодействие ядра и электронов, ядра и  $\gamma$ -лучей и т. д.

Например, влияние объёма скажется на  $\beta$ -распаде,  $K$ -захвате, внутренней конверсии, рассеянии электронов на ядрах и на величине расщепления сверхтонкой структуры. При подсчёте вероятности этих эффектов лучше всего опять использовать уточнённые волновые функции испускаемых или соответственно поглощаемых электронов, которые будут учитывать влияние объёма. При этом, очевидно, более точные значения вероятностей процессов или сдвигов термов окажутся уменьшенными по сравнению с прежними, вычисленными для точечных ядер.

Влияние объёма ядер было проанализировано, например, на явлении внутренней конверсии  $\gamma$ -лучей, заключающейся в вырывании электронов (чаще всего с  $K$ -оболочки атома) за счёт энергии ядерного перехода. Для учёта влияния неточечного характера ядра следует в выражении для матричного элемента, определяющего вероятность перехода,

$$H_{jk} = \int \psi_j^*(\alpha A) \psi_k d\tau,$$

во-первых, применить уточнённые функции электронов  $\psi$ , отражающие распределение заряда протонов по объёму, и, во-вторых, использовать в качестве потенциала величину, соответствующую, например, токам на поверхности ядра. Полученная таким образом поправка будет, как и следовало ожидать, наиболее заметной для тяжёлых ядер; например, для случая свинца ( $Z = 82$  и  $h\nu = 0,7 mc^2$ ) она уменьшает коэффициент внутренней конверсии примерно на 20%<sup>1)</sup>.

Значительный интерес представляют поправки в теории  $\beta$ -распада и  $K$ -захвата. Как и в других случаях, учёт объёма ядра приведёт к уменьшению вероятности этих процессов. Например, в случае  $K$ -захвата, наглядно говоря, уменьшение притяжения электрона к ядру приведёт к уменьшению вероятности нахождения его вблизи ядра и, тем самым, к понижению вероятности поглощения его ядром. Приведём вкратце результаты подсчёта для  $K$ -захвата. Оказывается, что изменение отношения квадра-

<sup>1)</sup> Л. А. Слив, ЖЭТФ 21, 770 (1951).

тов новых (уточнённых) радиальных функций  $K$ -электрона к старым функциям (вычисленным для точечного ядра) достаточно хорошо передаёт уменьшение вероятности  $K$ -захвата.

Приведём результаты вычислений в виде таблицы для двух типичных ядер в середине и конце периодической системы.

Ядро	$F_k$	$G_k$	$F'_k$	$G'_k$	$\Delta n$ (томсонова сфера)
${}_{30}\text{Zn}^{65}$ ${}_{30}\text{Hg}^{197}$	$-2,58 \cdot 10^{-2}$ $-5,49 \cdot 10^{-1}$	$2,36 \cdot 10^{-1}$ 1,81	$-2,06 \cdot 10^{-2}$ $4,16 \cdot 10^{-1}$	$2,34 \cdot 10^{-1}$ 1,79	$4,67 \cdot 10^{-6}$ $6,86 \cdot 10^{-5}$
Ядро	$\Delta n$ (поверхностный заряд)	Уменьшение вероятности $K$ -захвата в %			
		разрешенные переходы		1-е запрещённые переходы	
		постоян. потенциал	томсон. потенциал	постоян. потенциал	томсон. потенциал
${}_{30}\text{Zn}^{65}$ ${}_{80}\text{Hg}^{197}$	$7,75 \cdot 10^{-6}$ $1,69 \cdot 10^{-4}$	1 ~ 10	1 ~ 8	~ 75 ~ 80	~ 30 ~ 40

Для 2-го запрещённого перехода имеет место дальнейшее небольшое уменьшение вероятности  $K$ -захвата. Обращает на себя внимание неожиданно значительное уменьшение вероятности  $K$ -захвата для запрещённых переходов, в особенности при допущении поверхностного распределения заряда ядра. Изложенные результаты пригодны для скалярного, псевдоскалярного или векторного вариантов взаимодействия нуклеонов с электронно-нейтринным полем. В случае же тензорного и псевдовекторного вариантов форма распределения зарядов в ядре, как выясняется, почти не сказывается на вероятности  $K$ -захвата, даже при 1-м запрещённом переходе.

Перейдём теперь к оценке уменьшения вероятности  $\beta$ -распада, обязательного учёту объёма ядра. Для этой цели

прежде всего необходимо получить решение уравнения Дирака для непрерывного спектра при учёте конечности объёма ядра. Тогда, используя предыдущие рассуждения метода уточнённых функций и повторяя все расчёты теории  $\beta$ -распада, получим, например, для позитронного  $\beta$ -распада ядра цинка  $Z=30$  при максимальной энергии  $E_{\max} = 1,01 mc^2$ , уменьшение вероятности примерно на 14% для 1-го запрещённого перехода в случае поверхностного распределения заряда протонов<sup>1)</sup>.

Любопытно, что учёт неточечного характера ядра оказывает более сильное влияние на изменение вероятности  $K$ -захвата, чем конкурирующего с ним процесса позитронного  $\beta$ -распада. При этом  $K$ -захват оказывается более вероятным для изотопов с критическими числами нуклеонов. Учёт объёма ядер скажется также на рассеянии электронов на ядрах и приведёт к уменьшению эффективного сечения в формуле Резерфорда-Мотта. Например, для электронов с энергией  $50 Mэв$ , эффективное сечение рассеяния электронов дейтеронами под углом  $\frac{\pi}{2}$  будет составлять всего 20% от моттовского значения при предположении прямоугольной потенциальной ямы для дейтерона.

Перейдём к эффектам, в которых сказывается не только заряд, но и магнетизм ядер; примерами последних являются сверхтонкая структура уровней и внутренняя конверсия. При учёте влияния объёма ядер в этих эффектах можно в качестве первого приближения использовать уточнённые функции, вычисленные для распределённого по объёму заряда, но сохранить точечный характер магнитного момента. Дальнейшее уточнение заключается во введении распределения магнитного момента той или иной формы. Заметим, что подобные предварительные подсчёты по ядру могут в будущем представить также интерес при анализе объёмов, заряда и магнетизма самих элементарных частиц.

Укажем ещё общий ход подсчёта влияния распределения заряда по объёму ядра на величину расщепления

<sup>1)</sup> См. также M. E. Rose and D. K. Holmes, Phys. Rev. 81, 190 (1951).

сверхтонкой структуры для  $s$ -электрона. Это расщепление обязано релятивистской поправке к энергии электрона, обусловленной влиянием магнитного поля ядра, которое определяется известным выражением энергии взаимодействия электрона с электромагнитным полем, описываемым вектор-потенциалом

$$V = \frac{e}{\hbar c} \int \psi^* (\boldsymbol{\alpha} \mathbf{A}) \psi d^3r.$$

Здесь  $\boldsymbol{\alpha}$ —матрицы Дирака,  $\mathbf{A}$ —вектор-потенциал, обусловленный магнитным моментом точечного ядра,  $\psi$ —волновые функции электрона. В данной задаче возможно, как и в случае изотопического смещения, непосредственно использовать уточнённые функции, являющиеся решениями уравнений Дирака с изменённым кулоновским потенциалом внутри ядра, который учитывает распределение заряда по конечному объёму. Мы возьмём случай постоянного потенциала внутри ядра, соответствующий поверхностному распределению заряда:

$$\varphi = -\frac{Ze}{R_0};$$

здесь  $R_0$ —радиус ядра. После обычных несложных, но длинных вычислений мы приходим теперь не к одному, но к двум интегралам вида, характерного для теории сверхтонкой структуры (см. ч. 1):

$$I = \int_0^{R_0} F_i G_i dr + \int_{R_0}^{\infty} F_e G_e dr, \quad (7,32)$$

где  $F_i$  и  $G_i$ —радиальные функции внутренней, а  $F_e$  и  $G_e$ —внешней области. Производя интегрирование и пренебрегая членами порядка  $\alpha^4$  и выше, окончательно получим для величины расщепления  $S$ -уровней сверхтонкой структуры:

$$\Delta W = \Delta W_0 \left\{ 1 - \frac{8}{3} b \alpha \gamma \left( 1 - \frac{m}{M} \right) \right\}, \quad (7,33)$$

где  $b$ —радиус ядра в единицах  $\frac{e^2}{mc^2}$ ,  $\gamma = \alpha Z$ ,  $\Delta W_0$ —величина

обычного расщепления уровней сверхтонкой структуры, вычисленная в релятивистском приближении, член  $\left(1 - \frac{m}{M}\right)$  даёт поправку на содвижение ядра<sup>1)</sup>. Полученная поправка обуславливается введением конечного объёма ядра и изменением в связи с этим волновой функции  $s$ -электрона.

Дальнейшее уточнение теории влияния неточности ядра на атомные спектры получится, если отказаться не только от точечного характера заряда, но допустить, что магнитный момент ядра также распределён по объёму ядра.

В данной связи более подробно был исследован, в первых, случай сверхтонкой структуры дейтерия, где разумным приближением является уже не взаимодействие атомного электрона с точечным ядерным диполем, но более сложное взаимодействие электрона с центральным магнитным моментом протона плюс взаимодействие электрона с магнитным моментом нейтрона, распределённым по ядру согласно значению квадрата плотности волновой функции  $|\chi|^2$ , описывающей движение нейтрона относительно протона.

Результаты введения подобных поправок оказываются весьма удачными, и для тяжёлых элементов позволяют устранить расхождения между опытом и теорией сверхтонкой структуры, оперировавшей раньше с точечным ядром. Например, для цезия измерения радиоспектроскопическим методом дали для фактора Ланде  $g(I) = 0,7315$ ; прежняя теория для точечного ядра давала значение  $0,7025$ , тогда как теория, учитывающая влияние объёма, приводит к значению  $0,728$ . Далее, в случае таллия, ядерный момент, вычисленный по старой теории на основании оптических измерений сверхтонкой структуры (например, по расщеплению термина  $Tl \text{ III } 7s^2S_{1/2}$ ), оказался равным  $1,37 \mu_n$  (ядерных магнетонов), тогда как теория, учитывающая распределение заряда по поверхности, дала значе-

<sup>1)</sup> G. E. Brown and G. B. Arfken, Phys. Rev. **76**, 1306 (1919).



ние  $1,60 \mu_n$ , что опять находится в прекрасном согласии с прямыми измерениями магнитного момента радиоспектроскопическим способом, приведшими к значению  $\mu_{T1} = 1,628 \mu_n$ .

Учёт объёма позволил также устранить расхождение между значениями магнитного момента свинца, измеренного прямым радиочастотным методом, и подсчитанного на основе оптических измерений. Повидимому, таким путём можно также объяснить значительную разницу, получающуюся при определении отношения магнитных моментов изотопов рубидия из данных по сверхтонкой структуре и непосредственно радиочастотным методом:

$$\alpha = \frac{\mu_{Rb^{87}}}{\mu_{Rb^{85}}} = 2,0327 \pm 0,003 \text{ (прямое измерение),}$$

$\alpha = 2,0261 \pm 0,003$  (анализ сверхтонкой структуры в предположении точечного магнитного момента).

Сама по себе поправка на распределение одного лишь заряда по объёму не в состоянии объяснить подобного расхождения.

Влияние распределения магнитного момента по ядру было специально проанализировано для объяснения расхождения экспериментального значения отношения расщеплений сверхтонкой структуры в  $_{37}\text{Rb}^{87}$  и  $_{37}\text{Rb}^{85}$  по сравнению с теорией, развитой ранее для точечных ядер. Учтём теперь, что на самом деле магнитные моменты этих ядер распределены по объёмам, причём допустим, что в  $\text{Rb}^{87}$  (спин  $I = \frac{3}{2}$ , магнитный момент  $\mu = 2,75 \mu_n$ ) магнетизм обязан прежде всего спиновому моменту нечётного протона, а магнитный момент  $\text{Rb}^{85}$  ( $I = \frac{5}{2}$ ,  $\mu = 1,35 \mu_n$ ) будет главным образом орбитального типа. Можно показать<sup>1)</sup>, что подобные представления позволяют понять относительно значительное уменьшение расщепления сверхтонкой структуры в  $_{37}\text{Rb}^{87}$ .

<sup>1)</sup> А. В о h r a. V. F. W e i s s k o r f, Phys. Rev. 77, 94 (1950).

Выяснение причины различного характера магнитных моментов у изотопов  $\text{Rb}^{87}$  и  $\text{Rb}^{85}$  пока что оставляется в стороне. По всей вероятности, это различие связано с особенностями строения ядер этих изотопов. Оператор энергии взаимодействия магнитного момента ядра с атомным электроном имеет вид

$$U = e\alpha \mathbf{A}(r),$$

где вектор-потенциал, обязанный распределению ядерного магнитного момента, задаётся выражением

$$\mathbf{A}(r) = - \int d\tau_{\mathbf{R}\rho}(\mathbf{R}) g_S \left[ \mathbf{S} \nabla_r \frac{1}{|r-\mathbf{R}|} \right], \quad (7,34)$$

причём плотность нормирована к единице:

$$\int d\tau_{\mathbf{R}\rho}(\mathbf{R}) = 1. \quad (7,35)$$

Вектор  $\mathbf{S}$  обозначает спиновый момент ядра, а  $g_S$  обозначает фактор Ланде. Обозначая радиальные части волновой  $\psi$ -функции электрона, как обычно, через  $F$  и  $G$ , получим для энергии взаимодействия в  $S_{1/2}$ -состоянии выражение

$$\begin{aligned} W &= \int \psi^* e\alpha \mathbf{A}(r) \psi d\tau = 2e \int F(r) G(r) \frac{1}{r} (\mathbf{A}r) d\tau = \\ &= \frac{16}{3} \pi e g_S \int \rho(\mathbf{R}) q_S d\tau_{\mathbf{R}}, \end{aligned} \quad (7,36)$$

где в случае сферической симметрии распределения

$$q_S = S_Z \int_R^{\infty} FG dr.$$

Таким образом, энергия электрона будет уменьшена в  $k_S$  раз благодаря отклонению ядерного магнетизма от характера точечного диполя. Коэффициент ослабления  $k_S$  равняется

$$k_S = \frac{\int_0^R FG dr}{\int_0^{\infty} FG dr}. \quad (7,37)$$

Аналогичным путём можно учесть коэффициент ослабления в том случае, когда ядерный магнетизм обязан орбитальному току:

$$k_L = \frac{\int_0^R \left(1 - \frac{r^3}{R^3}\right) FG dr}{\int_0^\infty FG dr}. \quad (7,38)$$

Тогда, применяя для  $F$  и  $G$  найденные выше решения в области вне и внутри ядра и пренебрегая малыми членами (например, для случая равномерного распределения заряда по объёму), получим:

$$\int_0^R FG dr = 0,23 k^2 R \alpha' (1 - 0,2 \alpha'^2),$$

$$\int_0^R FG \left(1 - \frac{r^3}{R^3}\right) dr = 0,62 \int_0^R FG dr,$$

где  $k$  — константа, связанная с нормировкой;  $\alpha' = Z\alpha$ . Далее, приближённо имеем:

$$\int_0^\infty FG dr =$$

$$= \frac{1}{4} k^2 \frac{\hbar}{mc} \left(\frac{2R_n Z}{a_H}\right)^{2(1-\gamma)} \frac{3}{\gamma(4\gamma^2-1)} \{(2\gamma-1)!\}^2 \left(1 - \frac{1}{2}\alpha'^2\right)^3,$$
(7,39)

причём  $\gamma = (1 - \alpha'^2)^{\frac{1}{2}}$ .

В результате получим:

$$k_S = \frac{br^2}{R^2},$$

$$k_L = 0,62b \frac{r^2}{R^2},$$
(7,40)

где коэффициент  $b$ , зависящий только от  $Z$  и  $R$ , имеет

следующие значения:

$$\begin{aligned} b &= 0,08 & \text{при } Z &= 10, \\ b &= 1,12 & \text{при } Z &= 50, \\ b &= 4,80 & \text{при } Z &= 90. \end{aligned}$$

При этом можно положить  $R = 1,5 \cdot 10^{-13} A^{\frac{1}{3}}$  см, а для среднего значения  $\left(\frac{r^2}{R^2}\right)$  в случае равномерного распределения по объёму взять значение  $\frac{3}{5}$ ; в случае поверхностного распределения ядерных моментов величина  $\left(\frac{r^2}{R^2}\right)$  будет несколько больше. Окончательно влияние конечного объёма ядра на отношение расщепления сверхтонкой структуры изотопов 1 и 2 выражается формулой

$$\begin{aligned} \Delta &= \varepsilon(1) - \varepsilon(2) = (\bar{k}_S - \bar{k}_L) \frac{g_S g_L}{g_S - g_L} \left( \frac{1}{g_I(1)} - \frac{1}{g_I(2)} \right) \cong \\ &\cong 0,3b \frac{g_S g_L}{g_S - g_L} \left( \frac{1}{g_I(1)} - \frac{1}{g_I(2)} \right), \quad (7,41) \end{aligned}$$

здесь  $\varepsilon = -\bar{k}_S \alpha_S - \bar{k}_L \alpha_L$ , где  $\alpha_S$  и  $\alpha_L$  представляют спиновую и орбитальную части ядерного момента:

$$\alpha_S = \frac{g_S}{g_I} \frac{g_I - g_L}{g_S - g_L}, \quad \alpha_L = 1 - \alpha_S. \quad (7,42)$$

Для случая изотопов рубидия мы получим  $\Delta = 0,29\%$ , что находится в согласии с эмпирическим значением  $0,35\%$  если положим  $g_L = 1$  для нечётных  $Z$ . Это находится в согласии с моделью Шмидта, в которой ядерные моменты связываются с орбитальным моментом нечётного протона. С другой стороны, полученный результат противоречит представлению о том, что магнитный момент обязан движению ядра как целого.

**г) Притяжение электрона к нейтрону.** До сих пор при рассмотрении изотопического смещения мы, кроме влияния массы ядра, учитывали ещё лишь распределение заряда и магнетизма по объёму ядер. Наряду с этим необходимо учесть новые обстоятельства, вытекающие из нали-

чия дополнительных сил между атомными электронами и нуклеонами.

Речь идёт, во-первых, о чисто мезонных силах ядерного типа, обусловленных наличием у нуклеонов и электронов мезонных квазарядов. Поскольку, однако, нуклоны непосредственно наиболее тесно связаны с полем  $\pi$ -мезонов (константа связи  $g$ ), а электроны связаны с этим полем через  $\mu$ -мезоны (константа связи  $g'$ ), то ядерные силы между нуклеонами и электронами будут весьма слабы; полагая для ориентации  $g' \sim 10^{-6}g$ , получим из потенциальной энергии

$$U = -\frac{gg'}{r} e^{-h_1 r} \quad (7,43)$$

для сдвига уровня электрона крайне малую величину:

$$\Delta E_{g'} \sim \frac{gg'}{k_0^2 a_H^3} \approx 10^{-7} \text{ см}^{-1} \quad (a_H - \text{радиус боровской орбиты}),$$

обнаружение которой пока что лежит вне пределов опыта.

Во-вторых, речь идёт о том обстоятельстве, что наряду с чисто мезонными силами, между электронами и нуклеонами должны иметь место новые силы смешанного электрически-мезонного типа, обусловленные виртуальной диссоциацией нуклеонов. Как было отмечено (§ 1), протон некоторую долю времени ( $\tau \sim 20\%$ ) проводит в состоянии

$$p \rightarrow n + \pi_+,$$

а нейтрон примерно такую же долю времени ( $\tau \sim 20\%$ ) находится в состоянии

$$n \rightarrow p + \pi_-.$$

Следовательно, вместо точечного заряда протона и нулевого заряда нейтрона мы имеем распределённые в пространстве облака зарядов, с которыми и взаимодействует на самом деле электрон. Отсюда непосредственно ясно, что сила притяжения к протону будет несколько уменьшена, что эквивалентно учёту распределения заряда по объёму протона. С другой стороны, теория предсказывает наличие некоторого притяжения электрона к нейтрону. При этом

сам эффект виртуальной диссоциации обязан ядерным силам (константа  $g$ ), а возникающее затем взаимодействие с электроном является обычным электромагнитным. Современная теория позволяет произвести как подсчёт эффекта диссоциации и определить примерно величину  $\tau$ , так и найти искомую энергию взаимодействия между электроном и нейтроном. При этом за основу берётся энергия системы, равная сумме энергий свободных нуклеонов, описываемых уравнениями Дирака, свободного  $\pi$ -мезонного (псевдоскалярного) поля, энергий взаимодействия нуклеонов с мезонами и мезонов с электромагнитным полем. Тогда, производя расчёт обычными способами, либо при помощи формализма новейшей теории вакуума, получим в первом исчезающем приближении конечное значение для искомой средней потенциальной энергии системы электрон—нейтрон:

$$\bar{U}_{e-n} \approx -270 \left( \frac{g^2}{4\pi\hbar c} \right) \text{эв}, \quad (7,44)$$

что находится в качественном согласии с опытом (см. ниже). Коэффициент 270 получается при отношении масс мезона и нуклеона 1 : 6; для отношения масс 1 : 10 получится коэффициент 410; скалярные мезоны приведут к коэффициентам 7 и соответственно 25, которые гораздо хуже согласуются с опытом.

Отметим, что при помощи подобной же энергии взаимодействия системы нуклеонов и мезонов с электромагнитным полем получаются правильные по знаку и разумные по порядку величины значения для тех частей магнитных моментов протона и нейтрона, которые обязаны их виртуальной диссоциации на мезоны. Определяя константу связи нуклеонов с мезонным полем, играющую роль квадизаряда, из эмпирических данных по ядерным силам и магнитному моменту нуклеонов, мы получим значение

$$g^2 \sim 6 - 50e^2,$$

что соответствует при подсчёте с псевдоскалярными мезонами потенциальной яме глубиной около 2—20 Мэв для взаимодействия электрона с нейтроном. Это значение

согласуется с эмпирическими данными, полученными из рассеяния нейтронов на электронных оболочках атомов, а также полученными из анализа изотопического смещения, рассматриваемого в настоящем параграфе. Отметим, что, применяя в рассуждениях данного параграфа величину  $\tau \sim 20\%$  как долю времени пребывания нуклеонов в диссоциированных состояниях, мы в сущности используем эмпирическое значение этой величины вместо её теоретического подсчёта.

Таким образом, современная теория позволяет в основном объяснить как происхождение дополнительных не спиновых магнитных моментов нуклеонов, так и сил притяжения между электронами и нейтронами. Однако согласие окончательных результатов имеет ещё несколько качественных характер, что связано главным образом с недостаточными сведениями о мезонах и незнанием более точного вида связи нуклеонов с ядерным (мезонным) полем. Подобное положение вещей побуждает со своей стороны продолжить анализ эмпирических сведений об изотопическом смещении. Недостаточно точное знание констант  $g$  и закона взаимодействия нуклеонов с  $\pi$ -мезонами заставляет сейчас использовать эмпирическое значение периода диссоциации  $\tau$ ; тогда энергия взаимодействия нейтрона с электроном запишется в виде

$$U_{e-n} = -\frac{e^2}{r} \tau_n e^{-2k_0 r}, \quad (7,46)$$

где быстрое спадание мезонного облака учитывается экспоненциальным членом. Усредняя при помощи водородных волновых функций, получим для сдвига уровня, обязанного взаимодействию электрона с нейтроном:

$$\Delta E \cong -\frac{e^2 \tau_n}{a_{\text{H}}^3 k_0^2} \approx -10^{-4} \text{ см}^{-1} \text{ (или } \approx 0,1 \text{ мггц)}. \quad (7,47)$$

Величину того же порядка получим благодаря учёту размазанности протона. Мы видим, что эти поправки гораздо меньше вакуумного сдвига  $2S$ -уровня, равного в водороде  $0,033 \text{ см}^{-1}$  ( $1062 \text{ мггц}$ ) и пока что не являются существенными.

Поскольку взаимодействие указанного нового типа электрона с нуклеоном и простирается лишь на малые рас-

стояния, потенциальную энергию  $U_{e-n}$  возможно записать феноменологически в виде точечного взаимодействия при помощи новой константы  $b$ :

$$U_{e-n} = b |\chi|^2 = b \delta(r). \quad (7,48)$$

Тогда, интегрируя, получим:

$$b = \int U_{e-n} d\tau = 4\pi \int U r^2 dr = \frac{\pi e^2 \tau_n}{k_0^2} \approx 10^{-45} \text{ эрг} \cdot \text{см}^3. \quad (7,49)$$

Наглядная, ещё более простая оценка может быть произведена, если, согласно предыдущему, заметить, что взаимодействие двух зарядов (заряда электрона  $e$  и заряда облака диссоциации, т. е.  $0,2 e$ ) будет практически ограничено расстоянием  $\frac{h}{m\pi c}$ . Тогда

$$b \approx \frac{(0,2e)e}{h} \left( \frac{h}{m\pi c} \right)^3 \sim 10^{-45} \text{ эрг} \cdot \text{см}^3. \quad (7,50)$$

Если же для удобства сравнений с другими видами взаимодействия считать радиус действия новых сил равным  $r_0 = \frac{e^2}{mc^2}$ , то средняя потенциальная энергия взаимодействия электрона с нейтроном будет равна

$$\bar{U} = \frac{b}{V_0} = \frac{b}{\frac{4}{3} \pi r_0^3} \approx \frac{10^{-45}}{0,9 \cdot 10^{-37}} \sim 10^{-8} \text{ эрг} \sim 10^4 \text{ эв.}$$

Совершенно аналогично можно ввести константу  $b'$ , сопоставленную чисто мезонному взаимодействию электрона с нуклеонами

$$b' = \frac{4\pi g g'}{k_0^2} \sim 10^{-48} \text{ эрг} \cdot \text{см}^3 \text{ (т. е. порядка константы Ферми } g_F \text{ из теории } \beta\text{-распада).}$$

Перейдём теперь к экспериментальному обнаружению сил притяжения между электроном и нейтроном и тем самым определению константы  $b$  из опыта. Для этой цели можно воспользоваться двумя различными классами явлений<sup>1)</sup>.

1) Это обстоятельство было отмечено при предсказании сил притяжения между электроном и нейтроном, см. И в а н е н к о, ЖЭТФ 11, 198 (1941).



Во-первых, мы можем пытаться обнаружить искомые силы в опытах по рассеянию электронов на нейтронах в ядрах или по рассеянию нейтронов на атомных электронах. Во-вторых, возможно искать проявления новых сил в стационарном случае, по влиянию ядерных нейтронов на атомные электроны.

Удобнее всего исследовать в последнем методе различие воздействий на электрон ядер с различным, но близким числом нейтронов, при том же числе протонов, иначе говоря, измерить изотопическое смещение уровней атомных электронов, в котором необходимо сперва выделить влияние неточечного объёма, эффект массы и все другие дополнительные поправки. Весьма удовлетворительно, что определение сил притяжения электрон—нейтрон обоими способами, стационарным и нестационарным, привело к значениям близкого порядка, т. е. к константам  $b$ , близким по порядку. При предварительном характере опытов по рассеянию и трудности выделения влияния различных эффектов в изотопическом смещении, трудно было ожидать на данной стадии исследования точного совпадения  $b_{sc}$  (по рассеянию) и  $b_{is}$  (по изотопическому смещению).

При определении  $b_{sc}$  нестационарным способом наблюдалось рассеяние нейтронов электронами атомов ксенона<sup>1)</sup>. В виде мишени были взяты атомы с заполненными электронными оболочками инертного газа, не обладающими магнитным моментом.

Поместив начало координат в центре тяжести ядра, запишем взаимодействие налетающего нейтрона с ядром в виде  $a\delta(\mathbf{r})$ , а взаимодействие с одним из электронов атомной оболочки в виде  $b_{sc}\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_e)$ . Тогда в борновском приближении дифференциальное эффективное сечение рассеяния нейтрона, обязанное полному взаимодействию

$$U = a\delta(\mathbf{r}) + b_{sc}\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_e), \quad (7,51)$$

будет равно

$$d\sigma = \frac{M^2 d\omega}{4\pi^2 \hbar^4} [a + b_{sc}ZF(\vartheta)]^2, \quad (7,52)$$

<sup>1)</sup> E. Fermi a. L. Marshall, Phys. Rev. 72, 1139 (1947); Э. Ферми. Лекции по атомной физике, М., 1952.

где для ксенона  $Z = 54$  и  $F(\vartheta)$ —форм-фактор распределения электронов.

Сравнивая рассеяние под углами  $45^\circ$  и  $135^\circ$ , можно было определить константу эффективного взаимодействия электрон—нейтрон. Для ксенона вычисленные по квантовой механике значения форм-фактора для двух углов будут несколько различны:

$$F(45^\circ) = 0,776, \quad F(135^\circ) = 0,515,$$

что и приведёт к асимметрии рассеяния. Согласно теории отношение эффективных сечений будет ввиду малости константы  $b_{sc}$  равняться

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_{45^\circ}}{d\sigma_{135^\circ}} &= \frac{(a + ZbF(45^\circ))^2}{(a + ZbF(135^\circ))^2} \approx \\ &\approx 1 + 2 \cdot 54 \left( F(45^\circ) - F(135^\circ) \frac{b}{a} \right) = 1 + 28,2 \frac{b}{a}. \end{aligned}$$

В то же время эксперимент привёл к значению

$$\frac{b}{a} = -0,00002.$$

Константа  $a$  была определена из сравнения рассеяния в ксеноне с хорошо изученным рассеянием в азоте; оказалось

$$a = 2,46 \cdot 10^{-42} \text{ эрг} \cdot \text{см}^3 \text{ (для Xe)}.$$

Отсюда

$$b_{sc} = -5 \cdot 10^{-47} \text{ эрг} \cdot \text{см}^3.$$

Усредняя при помощи водородных функций, для сдвига уровня атомного электрона получим отсюда весьма малое значение:

$$\Delta E = -\frac{b_{sc}}{8\pi a_{II}^3} \sim 10^{-7} \text{ см}^{-1}. \quad (7,53)$$

С другой стороны, обратно, константу  $b$  можно определить по изотопическому смещению ( $b_{is}$ ), полную величину которого в зависимости как от эффекта объёма, так и от

новых сил притяжения между электроном и нейтроном запишем в виде

$$\delta\Delta E = \zeta |\psi(0)|^2 \frac{2(1+\gamma)}{|\Gamma(1+2\gamma)|^2} \times \\ \times \left( \frac{2ZA^{\frac{1}{3}}R}{a_H} \right)^{2(\gamma-1)} \left( \frac{4\pi Ze^2 R^2}{3A^{\frac{1}{3}}} B - b_{is} \right) \Delta A. \quad (7,54)$$

Подобная запись представляет ряд удобств, так как, например, мы можем подставить для радиуса уточнённую формулу, учитывающую разнообразные отступления радиуса от обычно применяемой монотонной зависимости

$R = 1,5 A^{\frac{1}{3}} 10^{-13}$  (именно, сжатие объёма у тяжёлых ядер, разбухание объёма у лёгких ядер, скачки радиусов у ядер с критическими числами нуклеонов и изменение радиусов в зависимости от чётности). Форм-фактор  $B$  в свою очередь будет зависеть от закономерного изменения распределения нуклеонов вдоль системы изотопов.

Верхнюю границу искомой константы  $b_{is}$  мы определим из примерной компенсации эффектов объёма и притяжения электрона к нейтрону в случае элементов в середине периодической системы. Отсюда получим:

$$b_{is} \lesssim 10^{-44} \text{ эрг} \cdot \text{см}^3.$$

Подсчёт изотопического смещения с константой  $b_{sc}$  (вместо  $b_{is}$ ) дал бы для отношения второго члена в формуле (7,54) к первому (объёмному) члену, например, в случае  ${}_{30}\text{Zn}^{64}$  значение  $\kappa = 0,024$ . Мы видим, что найденная верхняя граница константы  $b_{is}$  близка по порядку к аналогичной константе, определяемой диссоциацией нуклеонов  $b_{diss.}(10^{-45})$ , но превышает константу  $b_{sc}(10^{-47})$ , полученную из опытов по рассеянию нейтронов на электронах. Любопытно, что  $b_{sc}$  по порядку величины близка к константе Ферми  $\beta$ -распада. Ввиду упомянутых выше трудностей определения рассматриваемых констант сейчас представляется преждевременным обсуждать точное их значение. Так или иначе, является удовлетворительным, что как опыты по рассеянию, так и анализ изотопического смещения подтверждают

наличие предсказанных сил притяжения между электроном и нейтроном, имеющих весьма малый радиус действия. Несомненно, эти силы необходимо учитывать при расчётах всевозможных взаимодействий электронов с нуклеонами.

По всей видимости основные эффекты массы, объёма и новых сил притяжения электронов к нейтронам, с учётом дальнейших поправок на экранирование и поляризацию, способны объяснить как общий порядок величины изотопического смещения, так и ход последнего вдоль системы изотопов по всей менделеевской периодической системе. При этом, однако, как и в других графиках ядерных свойств, наблюдаются характерные сдвиги между смещениями у изотопов чётного и нечётного атомного веса  $A$  и скачки для изотопов с упоминавшимися ранее критическими числами нуклеонов. При этом для изотопов нечётного  $A$  необходимо определить положение центра тяжести (центроиды) на основании положений отдельных компонент сверхтонкой структуры.

В качестве примера влияния чётности можно указать исследование изотопического смещения на обогащённых изотопах свинца <sup>1</sup>). При этом измерения производились на смеси следующего состава, рядом с которой внизу для сравнения указана концентрация изотопов в природном свинце (в процентах):

204	206	207	208
27	34	16	23
1	24	25	52

При этом для линии  $\lambda = 2833 \text{ \AA}$  ( $6p^3P_0 - 7s^3P_1$ ) центр тяжести компонент у  ${}_{82}\text{Pb}^{207}$  оказался сдвинутым ближе к значениям для  ${}_{82}\text{Pb}^{206}$ , тогда как интервалы в смещениях (204—206) и (206—208) были найдены примерно равными. Сдвиг для нечётного изотопа равен почти для

<sup>1</sup>) T. E. Manning, C. E. Anderson and W. W. Watson, Phys. Rev. 78, 417 (1950).

всех линий

$$\frac{\Delta\nu(206-207)}{\Delta\nu(208-207)} = 0,63.$$

Для иллюстрации на рис. 9 приведём данные по изотопическому смещению ртути.

Аналогичное положение вещей имеет место для изотопического смещения в спектре урана, наблюдавшегося на образце с обогащёнными изотопами. Например, для линии  $4244 \text{ \AA}$  интервалы между компонентами, обязанными изотопам (236—238), (236—234), оказались равными  $0,148 \text{ \AA}$ . В то же время компонента нечётного изотопа 235 является сдвинутой так, что смещение равно  $\Delta\lambda(234-235) = 0,049 \text{ \AA}^1$ .

Объяснение чётно-нечётного изотопического сдвига следует, очевидно, искать как в наличии подчеркнутого нами притяжения электрона к нейтрону, так и в структуре ядер, сказывающейся в разнице радиусов, распространённости, масс-дефектов и других ядерных свойств для ядер с числами нуклеонов

разной чётности. Кроме того, в изотопических смещениях были обнаружены<sup>2)</sup> добавочные скачки, например в области редкоземельных элементов, которые связаны, очевидно, с влиянием оболочечной структуры ядер, как это видно из чисел нуклеонов соответствующих изотопов.

Как мы уже упоминали, отсутствие более детальных сведений о нуклеонной структуре изотопов, с одной стороны, и отсутствие точных значений электронных волновых функций в атоме, с другой, не позволяют ещё придать теории законченную форму и произвести окончательное количественное сравнение теории с эмпирическим материалом. В частности, указанные выше общие соображения

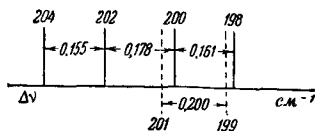


Рис. 9. Изотопическое смещение.

На рисунке представлено положение компонент для различных изотопов ртути. Ясно видно примерное равенство смещений между изотопами (204—202) и (200—198) и сдвиг линии изотопа с нечётным весом ( $^{201}\text{Hg}$ ).

<sup>1)</sup> D. D. Smit et al., Phys. Rev. 84, 383 (1951).

<sup>2)</sup> Murakawa a. Ross, Phys. Rev. 83, 1272 (1951).

не позволяют ещё объяснить различные нерегулярности в изотопических смещениях отдельных термов. Например, в спектре Pb II с основным состоянием  $5d^{10}6s^26p$  смещение в терме  $5d^{10}6s^26d$  меньше, а в терме  $5d^{10}6s6p^2$  больше ожидаемых, что, вероятно, связано со взаимным возмущением электронных конфигураций. Для более точной трактовки изотопического смещения необходимо учесть ещё дальнейшие поправки, не связанные со столь принципиальными обстоятельствами, которые могут быть обязаны, например, экранированию заряда ядра электронами<sup>1)</sup> или поляризации ядра атомными электронами<sup>2)</sup>. Теория тех и других поправок пока ещё в значительной мере носит качественный характер. При учёте экранирования речь идёт о том, что проникающий оптический валентный электрон некоторую долю времени ( $p$ ) находится вблизи ядра внутри орбит внутренних электронов, уменьшая тем самым энергию связи внутренних электронов с ядром и, следовательно, уменьшая величину соответствующего изотопического смещения.

Для относительной поправки в изотопическом смещении  $ns$ -электрона, обязанной влиянию  $6s$ -электрона, имеем:

$$\frac{\Delta\delta W_{ns}}{\Delta\delta W_{6s}} = \frac{\psi_{ns}^2(0)}{\psi_{6s}^2(0)} \frac{2}{Z_i} p,$$

так как в течение доли времени  $p$  величина  $\psi_{ns}^2(0)$  будет уменьшена в  $\frac{Z_e^2 - (Z_e - 1)^2}{Z_e} \sim \frac{2}{Z_i}$  раз  $\left[ \psi_{ns}^2(0) = \frac{Z_i Z_e}{\pi a^3 n_0^3} \right]$ . Применяя приближённые функции Хартри для вычисления  $\psi^2$  и величины  $p$  и замечая, что для  $1s$ -электронов  $Z_e \approx 80$ , для  $2s$ -электронов  $Z_e \approx 78, \dots$ , для  $5s$ -электронов  $Z_e \approx 20$ , получим общую относительную поправку 0,16. Иначе говоря, например, для терма таллия Tl II  $6s7s^3 S^1$  вместо теоретического значения изотопического смещения  $0,066 \text{ см}^{-1}$ , вычисленного на основании одного лишь учёта

<sup>1)</sup> M. Crawford a. Schawlow, Phys. Rev. 76, 1310 (1949).

<sup>2)</sup> G. Breit, Arfken a. Glendenin, Phys. Rev. 78, 390 (1950).

объёма ядра, получим  $0,055 \text{ см}^{-1}$ , что находится в лучшем согласии с наблюдаемым значением  $0,059 \text{ см}^{-1}$  (см. рис. 10).

Эффект поляризации ядра учитывает влияние атомных электронов на ядерные уровни. При этом, ввиду того, что энергетические уровни низкой энергии более тесно расположены в ядрах нечётного  $A$  по сравнению с ядрами чётного  $A$ , поляризация будет более значительной в нечёт-

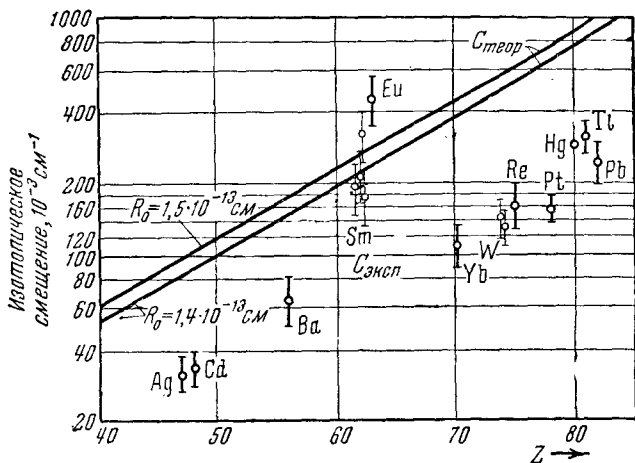


Рис. 10. Теоретические и экспериментальные значения изотопического смещения.

ных ядрах, что приведёт к относительному сдвигу в изотопических смещениях чётно-нечётных ядер. Вообще эффект поляризации приводит к увеличению притяжения электронов к ядру, т. е. к ослаблению эффекта объёма.

При весьма предварительной оценке влияния поляризации для получения сколько-нибудь правдоподобных значений для искомого эффекта относительного сдвига центроид термов нечётных и чётных изотопов оказывается необходимым допустить наличие взаимодействия атомных электронов не только с протонами, но и с  $\alpha$ -частицами и какими-то гипотетическими структурами с массами больше масс ядер гелия, что следует сопоставить с выбрасыванием тяжёлых осколков в космических лучах.

Тенденцию ряда авторов объяснить все эффекты изотопического смещения в тяжёлых ядрах учётом влияния объёма и сугубо предварительными подсчётами поляризации следует считать неплодотворной, ввиду игнорирования сил притяжения электрон—нейтрон, со своей стороны противостоящих влиянию эффекта объёма и отсутствию учёта влияния чётности и оболочечной структуры ядер.

При изложении проблемы изотопического смещения мы не стремились изложить полную теорию различных эффектов, связанных с этим интересным явлением. Наша цель заключалась главным образом в том, чтобы на этом важном примере показать тесную связь проблем физики атомной (электронной) и ядерной, а также общей теории элементарных частиц, и кроме того подчеркнуть ещё раз важнейшую роль уточнения старых экспериментальных методов исследования (в данном случае оптических) наряду с введением новых методов, таких, как радиоспектроскопия и применение обогащённых изотопов. В самом деле, объяснение изотопического смещения требует, во-первых, нового решения дираковских уравнений в модифицированных кулоновских полях и наиболее точного вычисления волновых функций многоэлектронной проблемы. Таким образом, старая атомная физика электронов отнюдь не снимается со счетов в современных проблемах. Во-вторых, теория изотопического смещения непосредственно связана не только с выяснением формы распределения заряда протонов по объёму ядер, но также с трактовкой оболочек и с другими вопросами распределения. В-третьих, теория изотопического смещения покоится также на признании новых сил между двумя элементарными частицами (электроном и нейтроном), возникающих благодаря типичным для элементарных частиц явлениям виртуальной диссоциации и взаимного превращения. Таким образом, вполне естественно надеяться, что дальнейшее развитие исследования изотопического смещения окажет плодотворное влияние на все три указанные области физики.

**д) Оболочки нуклеонов.** При рассмотрении теории изотопического смещения мы столкнулись с необходимостью учёта формы распределения заряда и магнетизма по



ядру для выяснения более точного вида взаимодействия электронов с ядром. При этом оказалось, что плавный ход изотопического смещения вдоль системы изотопов для некоторых выделенных ядер, с определёнными критическими числами нуклеонов, нарушается скачком. Аналогичные скачки были также отмечены при рассмотрении ряда характерных для  $\beta$ -распада величин и в значениях распространённости ядер, притом для ряда тех же критических чисел нуклеонов. Не вдаваясь в эмпирические детали, остановимся коротко на теории этого вопроса, имеющего значение для уточнения взаимодействия электронов с нуклонами и нуклеонов друг с другом. Первые попытки отыскать теоретически распределение нуклеонов по уровням энергии  $s$ ,  $p$ ,  $d$ , ..., аналогичное распределению атомных электронов, и указание на наличие замкнутых оболочек нуклеонов, проявляющееся в пиках кривой масс-дефектов, были сделаны непосредственно вслед за установлением протонно-нейтронной модели ядра<sup>1)</sup>. При продолжении этих работ были обнаружены другие признаки особых свойств ядер с некоторыми критическими или, как их иногда называют, «магическими» числами нуклеонов<sup>2)</sup>. Однако весь вопрос далеко ещё не был выяснен. Кроме того, кашельная модель ядра, явившаяся удачным приближённым описанием системы нуклеонов для трактовки рассеяния, деления и других реакций, на первый взгляд, казалось, полностью отвергала представление об орбитах отдельных нуклеонов, и тем самым находилась в конфликте с моделью оболочек. Однако обильный эмпирический материал, собранный в последующие годы, позволил установить весьма интересные и фундаментальные закономерности<sup>3)</sup>. Не обсуждая здесь вопроса о всех критических

<sup>1)</sup> См. Гапон и Иваненко, *Naturwiss.* 20, 792 (1932).

<sup>2)</sup> Бете и Бечер, *Физика ядра*, Харьков, 1938; W. Elsäser, *Journ. de phys. et rad.* 4, 549 (1933).

<sup>3)</sup> См. главным образом работы советских авторов: М. А. Левитская, *ДАН* 55, 399 (1947); 61, 55 (1948); 64, 61 (1949); А. П. Знойко, *ДАН* 68, 837 (1949); А. П. Знойко и В. И. Семишин, *ДАН* 74, 917 (1950); С. А. Щукарев, *Журн. общ. химии* 12, 380 (1949); а также обзор: И. П. Селинов, *УФН* 44, 512 (1951).

числах, отметим, что наиболее часто указывается<sup>1)</sup> следующий ряд критических чисел нуклеонов: 2, 8, 20, 50, 82 и 126, хотя, как указывалось в литературе, несомненно имеются побочные критические числа (14, 28, 40).

С точки зрения эмпирических свойств речь идёт о том, что изотопы с подобными критическими числами нуклеонов (причём числа нейтронов и протонов не обязательно должны быть равны<sup>2)</sup>) показывают характерные особенности в самых разнообразных свойствах. Например, наиболее распространёнными в природе являются чётно-чётные ядра и среди них, по сравнению с соседними, ядра He ( $Z=2$ ), O ( $Z=8$ ), Ca ( $Z=20$ ), Fe ( $Z=26$ ), Sr ( $Z=38$ ), Zr ( $Z=40$ ), Sn ( $Z=50$ ), Ba ( $Z=56$ ), Pb ( $Z=82$ ) и некоторые другие. Мы ясно видим здесь наличие критических чисел, указанных выше. Если сравнить распространённость изотопов одного и того же элемента, снова будут наблюдаться максимумы при критических числах нейтронов. Эти данные приводят к мысли о существовании замкнутых оболочек протонов и нейтронов, заполняющих уровни в ядрах с данным значением квантового числа  $l$ , подобно электронам в атомах. Заполненные оболочки нуклеонов будут играть роль оболочек инертных газов. Далее, эффективные сечения захвата быстрых нейтронов имеют наименьшее значение в случае, если числа нейтронов в ядрах (например, Ba, Bi, Pb) будут равняться 82, 126. Для соседних изотопов сечения оказываются примерно в сто раз большими.

Скачки в кривой эффективных сечений рассеяния быстрых нейтронов естественно интерпретировать как проявление периодичностей в значениях объёмов, или радиусов ядер. Тем самым оказывается недопустимым описывать радиусы ядер простой формулой  $R=R_0A^{1/3}$ , получающейся

<sup>1)</sup> См. Э. Ферми, Физика ядра, М., 1951; M. Geopert - Mayer, Phys. Rev. 74, 235 (1948); 75, 1969 (1949); 78, 16, 22 (1950); Feenberg a. Hammasck, там же, 75, 1877 (1949); Naxel, Jensen, Suess, Zs. f. Phys. 128, 295 (1950). См. также Рефер. сборники изд. иностр. литер., вып. 1 (1950) и вып. 11 (1951).

<sup>2)</sup> См. В. А. Кравцов, ДАН 78, 239 (1951).

из капельной модели и отвечающей постоянной плотности, но следует перейти к более точной формуле, учитывающей минимумы в значениях радиусов для ядер с критическими числами нуклеонов. Феноменологическим предварительным образом это можно сделать путём введения поправочного множителя типа  $[1 + a(Z - Z_{кр})]$  (здесь  $a$  — постоянная). Изменение самой быстроты хода радиусов можно описать путём замены постоянной  $R_0$  на величины  $R_i$ , различные на разных участках. Указанное обстоятельство, очевидно, должно быть учтено во всех случаях, когда мы имеем дело с объёмами ядер, в частности в теории изотопического смещения.

Графики значений спинов и магнитных моментов вдоль всей системы изотопов также дают характерные скачки в областях «особых» зон, или, точнее говоря, для некоторых критических ядер. Одним из наиболее наглядных примеров проявления свойств критических чисел и указанных ядерных периодичностей являются квадрупольные моменты ядер, характеризующие отклонение от сферической симметрии распределения заряда. Если построить график квадрупольных моментов ядер в зависимости от  $Z^1$ , то мы получим значение нуль для всех критических ядер с  $Z = 2, 8, 20, 50, 82$ . Перед заполнением оболочек протонов квадрупольные моменты положительны, непосредственно вслед за окончанием оболочки — отрицательны. Графики энергий связи, удельных зарядов главных изотопов, максимальных энергий  $\beta$ -распада и периодов  $\beta$ -распада, так же как ход отношения между вероятностью  $K$ -захвата и  $\beta_+$ -распада, тоже показывают скачки в основном для упомянутых критических чисел нуклеонов.

Кривая масс-дефектов имеет скачки, в частности в точках  $Z = 2, 6, 8, 14, 20, 50, N = 50, 82$ . Ещё одним из примеров периодичностей является деление урана под действием медленных нейтронов, в результате которого преимущественно образуются продукты с числом нейтронов  $N \sim 50$  и  $N \sim 82$ . Среди ядер с критическими числами

---

<sup>1</sup>) G o r d y, Phys. Rev. 76, 139 (1949); T o w n e s, F o l e y, *ibid.* 76, 1415 (1949).

нуклеонов особенно часто встречаются изомеры. В явлениях  $\alpha$ -распада также отмечено влияние периодичностей.

График энергий  $\alpha$ -частиц естественно-радиоактивных элементов в функции числа нейтронов ядра продукта также имеет резкий максимум для  $n = 126$ . Недавно были установлены скачки в значениях изотопических смещений, отражающие ядерные периодичности, и скачки в значениях радиусов ядер, например для  $Z = 8, 14, 20$ .

В связи с отсутствием точного закона ядерных сил и ввиду необходимости применять приближённые методы для квантовой трактовки систем большого числа нуклеонов были выдвинуты различные модели ядра. Во-первых, простейшим представлением является модель ядра как газа нуклеонов, который является вырожденным. Эта модель позволяет, например, объяснить испускание нуклеонов при столкновениях ядер как испарение и понять рост плотности энергетических уровней с энергией<sup>1)</sup>. Ввиду своей грубости газовая модель ядра не может, однако, объяснить большого числа явлений (деление ядер, наличие периодичностей и других). Во-вторых, были сделаны попытки трактовать ядро как кристалл, составленный из нуклеонов или  $\alpha$ -частиц<sup>2)</sup>. Несмотря на некоторые, не лишённые интереса, соотношения между рядами наиболее распространённых ядер и возможностью простых кристаллических структур, физические основания подобных представлений являются недостаточно убедительными, поскольку амплитуды колебаний частиц сравнимы с их взаимными расстояниями. Модель эта детально не разрабатывалась. В-третьих, наиболее распространённой до недавнего времени моделью ядра являлось приближённое представление о капле «нуклеонной жидкости», применявшееся с известным успехом для трактовки общих свойств деления и других явлений в ряде фундаментальных работ Френкеля и Бора. Однако эта модель не способна объяснить периодичностей и ряда других свойств, связан-

<sup>1)</sup> А. И. А х и з е р и И. Я. П о м е р а н ч у к, Некоторые вопросы теории атомного ядра, 2-е изд. М.—Л., 1951.

<sup>2)</sup> W e f e l m e i e r, Zs. f. Phys. 107, 332 (1937).

ных со структурой ядер. В-четвёртых, в последнее время для трактовки периодичности была предпринята более подробная разработка орбитальной или оболочечной модели, согласно которой во главу угла ставятся состояния отдельных нуклеонов. На первый взгляд наличие орбит нуклеонов ввиду большой плотности нуклеонного вещества представляется невозможным, а модели капли и оболочек резко противоречат друг другу. Однако следует иметь в виду, что модель оболочек применяется с успехом главным образом к основным и низшим возбуждённым энергетическим состояниям ядер, тогда как, напротив, представление составного ядра привело к правильным результатам в случаях сильного возбуждения. Образование квантовых орбит отдельных нуклеонов представлялось долгое время невозможным ввиду наличия сильного взаимодействия между нуклеонами, которое казалось бы приводит к крайне малой длине свободного пробега нуклеона внутри ядра. При этом, однако, не учитывалось влияние принципа Паули, благодаря которому при столкновении нуклеон не способен изменить своё состояние ввиду того, что все состояния оказываются занятыми другими нуклеонами. Хорошей аналогией является пример с электронами в металле, когда для внешнего электрона малой энергии длина свободного пробега будет мала, тогда как длина пробега внутреннего электрона во много раз превышает межатомные расстояния.

Для трактовки орбит нуклеонов возможны две точки зрения. Первая из них отвлекается от какого-либо конкретного задания закона ядерных сил между нуклеонами, а предполагает отдельные нуклеоны движущимися в среднем поле, созданном остальными. Поле это представляется чаще всего потенциалом типа прямоугольной ямы:  $V = V_0$  при  $r < R_0$ ;  $V = 0$  при  $r > R_0$ . При более детальном рассмотрении форма потенциала несколько модифицируется за счёт «сглаживания» краёв. Модель осцилляторного потенциала даёт близкие результаты. В другом методе за основу берётся конкретный вид ядерных сил между двумя нуклеонами (вначале для простоты юкавский закон) и на этой основе к системе нуклеонов применяется приближённый метод Томаса-Ферми.

Рассмотрим коротко результаты первого метода. Решением уравнения Шредингера в поле постоянного сферически симметричного потенциала для радиальных функций являются по существу бesselевы функции порядка  $\left(l + \frac{1}{2}\right)$ , где  $l$  — азимутальное квантовое число:

$$\sqrt{\frac{k}{r}} J_{l+\frac{1}{2}}(kr), \quad k = \frac{p}{\hbar}.$$

Приравнявая функции на границе ядра при  $r = R_0$  нулю, мы получим из значений корней бesselевых функций  $\kappa_i$  собственные значения энергии и тем самым последовательность энергетических уровней нуклеонов:

$$E_i = \frac{\kappa_i^2}{2} \left( \frac{\hbar^2}{MR_0^2} \right). \quad (7,55)$$

Таким образом, ввиду  $\kappa_1 = \pi$  ( $l = 0$ ;  $1s$  — уровень) и т. д., получим следующие значения энергии в долях  $\frac{\hbar^2}{MR_0^2}$ , которые выпишем, указывая вместе с тем последовательность уровней:

$$\begin{array}{ll} (1s)^2 & \dots \dots \dots 4,93, \\ (2p)^6 & \dots \dots \dots 10,12, \\ (3d)^{10} & \dots \dots \dots 16,83, \\ (2s)^2 & \dots \dots \dots 19,74, \\ (4f)^{14} & \dots \dots \dots 24,40 \end{array} \quad (7,56)$$

(вверху поставлены числа нуклеонов в заполненной оболочке данного типа).

Отсюда путём несколько произвольной комбинации уровней получаются следующие (критические) числа для нуклеонов в заполненных оболочках: 2 (He), 8 (2 + 6) (O), 20 (2 + 6 + 10 + 2) (Ca), 40 (20 + 14 + 6) и т. д. Наибольшее несоответствие с эмпирическими данными заключается в появлении числа 40 вместо требуемого 50. В связи с этим делается предположение о наличии сильной спин-орбитальной связи в системе нуклеонов. Благодаря этой причине, например, уровни  $5g$  расщепляются, причём

уровни типа  $g_{\frac{7}{2}}$  передвигаются ближе к уровню  $3p$ ; точно так же происходит передвижка уровней  $h_{\frac{11}{2}}$ , тогда как уровни  $h_{\frac{9}{2}}$  остаются на месте. Тем самым к  $40$  нуклеонам добавляется ряд частиц с уровня  $g$ , которые, как предполагается, и дают требуемую оболочку с  $50$  нуклеонами.

Несмотря на ряд совпадений подобной полукачественной модели с эмпирическими данными, её слабой стороной является отсутствие непосредственной связи с теорией ядерных мезонных сил и применение передвижек в уровнях энергии. Основанием для этого может служить наряду с указанной сильной спин-орбитальной связью нуклеонов также сильное взаимодействие нуклеонов с высокими моментами, либо более точный учёт кулоновского поля ядра.

С другой стороны, можно попытаться построить порядок уровней нуклеонов в ядрах, исходя непосредственно из наиболее правдоподобного закона ядерных сил и используя приближённый метод Томаса-Ферми, который был столь успешно применён для построения той части теории менделеевской периодической системы, которая связана с заполнением электронами атомных уровней. Не останавливаясь на подробностях метода, напомним, что в ряду приближённых методов, применяемых для решения квантовой задачи многих тел, метод Хартри-Фока использует представление  $\psi$ -функции в виде антисимметризованного произведения  $\psi$ -функций отдельных электронов, метод же Томаса-Ферми вообще отказывается от  $\psi$ -функций и представляет частицы заполняющими по две все клетки фазового пространства. Кроме того, взаимодействие атомных электронов учитывается при помощи статического уравнения для потенциала Лапласа-Пуассона <sup>1)</sup>.

Для искомых чисел электронов в атоме, при которых начинается заполнение уровней  $s, p, d, \dots$ , получается формула

$$Z = \gamma(2l + 1)^3, \quad (7,57)$$

<sup>1)</sup> См. Г а м б о ш, Статистическая теория атома, М., 1954.

где

$$\gamma = \frac{1}{24\pi^2} \frac{1}{(r^3 \rho)_{\max}} = \left( \frac{2 \cdot 2^{1/3}}{(9\pi^2)^{1/3}} \right)^{1/2} \frac{1}{2^3 (0,49)^{3/2}} \approx 0,155.$$

Однако лучшее согласие с опытом даёт иной коэффициент  $\gamma = 0,17$ , что неудивительно, так как в предыдущем мы пренебрегли какими-либо поправками к уравнению Томаса-Ферми (обмен, самодействие и т. д.) и учли лишь главные кулоновские силы. Придавая  $l$  значения  $0, 1, 2, \dots$ , получим в качестве ближайших целых чисел следующие значения  $N_l$ , действительно точно совпадающие с номерами элементов менделеевской системы, в которых впервые появляются  $s$ -,  $p$ -,  $d$ -,  $\dots$  орбиты электронов:  $N_l = 1, 5, 21, \dots$  (т. е. H, B, Sc,  $\dots$ ).

Перейдём теперь к краткому изложению применения метода Томаса-Ферми к атомным ядрам<sup>1)</sup>.

Пусть плотности нейтронов и протонов  $\rho_n$  и  $\rho_p$  нормированы так, что

$$Z = \int_{(\tau)} \rho_p d\tau, \quad N = \int_{\tau} \rho_n d\tau, \quad Z + N = A, \quad (7,58)$$

где

$$\tau = \frac{4}{3} \pi R^3, \quad R = R_0 A^{1/3}, \quad R_0 = \frac{e^2}{2mc^2}. \quad (7,59)$$

Пусть, далее,  $\chi_g$  — потенциал ядерных сил притяжения, который мы для первой ориентации берём в скалярном юкавском виде,  $\chi_e$  — потенциал кулоновских сил отталкивания; эти потенциалы удовлетворяют следующим уравнениям:

$$\Delta \chi_g - k_0^2 \chi_g = 4\pi g (\rho_p + \rho_n), \quad \Delta \chi_e = -4\pi e \rho_p. \quad (7,60)$$

За пределами ядра  $r \geq R$ , где  $\rho_p = \rho_n = 0$ ,  $\chi_g$  и  $\chi_e$  имеют вид

$$\chi_g^a = -\frac{Ag}{r} e^{-k_0 r}, \quad \chi_e^a = \frac{Ze}{r}. \quad (7,61)$$

<sup>1)</sup> Д. И в а н е н к о и В. Р о д и ч е в, ДАН 70, 605 (1950). Эта работа была продолжена в статьях M. Vorn a. L. J a n g, Nature 166, 399 (1950); L. J a n g, Proc. Phys. Soc. A64, 632 (1951).



Пользуясь статистическим методом, можно  $\rho_n$  и  $\rho_p$  выразить через  $\chi_g$  и  $\chi_e$  и их граничные значения  $\chi_g^R$  и  $\chi_e^R$  при  $r=R$ . Тогда (7,60) представят систему двух нелинейных дифференциальных уравнений, на решения которой налагаются граничные условия, вытекающие из требования непрерывности функций.

Вводя новую переменную  $x = \frac{r}{R}$  и новые функции

$$\Phi(x) = \frac{1}{Ag} r (\chi_g^R - \chi_g); \quad \psi(x) = \frac{\gamma}{Ze} r (\chi_e^R - \chi_e), \quad \gamma = \frac{Z^2 e}{Ag^2}, \quad (7,62)$$

найдем путём численного интегрирования, что функции  $\Phi(x)$  и  $\psi(x)$  в интервале  $0 \leq x \leq 1$  можно приближённо представить в виде

$$\Phi(x) = B_1(1-x), \quad \psi(x) = -B_2(1-x). \quad (7,63)$$

Тогда плотности  $\rho_p$  и  $\rho_n$  будут иметь вид

$$\rho_p = \frac{4Z}{\pi^2 R^2} \left(1 - \frac{r}{R}\right)^{\frac{3}{2}} \frac{1}{r^{\frac{3}{2}}}, \quad \rho_n = \frac{4N}{\pi^2 R^2} \left(1 - \frac{r}{R}\right)^{\frac{3}{2}} \frac{1}{r^{\frac{3}{2}}}. \quad (7,64)$$

Как обычно, для числа нейтронов в ядре с моментом количества движения в пределах  $M, M + dM$  и в некотором заданном направлении получим:

$$\Delta N_M = \frac{32\pi^2}{h^3} \int_{r_1}^{r_2} \left(P_n^2 - \frac{M^2}{r^2}\right)^{\frac{1}{2}} dr M dM, \quad (7,65)$$

где

$$P_n^2 = 2mAg^2 \frac{\Phi(r)}{r}, \quad M = \frac{h}{2\pi} \left(l + \frac{1}{2}\right), \quad dM = \frac{h}{2\pi} dl, \quad dl = 1,$$

откуда

$$\Delta N_l = (2l+1) \left\{ (12N)^{\frac{1}{3}} - (2l+1) \right\}. \quad (7,66)$$

Для числа протонов аналогично получим:

$$\Delta Z_l = (2l+1) \left\{ (12Z)^{\frac{1}{3}} - (2l+1) \right\}. \quad (7,67)$$

Приравнивая  $\Delta N_l = \Delta Z_l = 0$ , мы получаем искомые значения для чисел протонов и нейтронов, с которых начинают заполняться оболочки с данным азимутальным квантовым числом  $l$ :

$$N_l = Z_l = \gamma(2l + 1)^3, \quad (7,68)$$

где  $\gamma = \frac{1}{12} \approx 0,083$  — коэффициент заполнения. Отсюда мы приходим к следующему порядку заполнения уровней:

$$(1s)^2, (2p)^6, (2s)^2, (3d)^{10}, (3p)^6, (3s)^2, \dots, \quad (7,69)$$

которому соответствуют ядра

$${}_2\text{He}, {}_8\text{O}, {}_{10}\text{Ne}, {}_{20}\text{Ca}, {}_{26}\text{Fe}, {}_{28}\text{Ni}, \dots$$

Мы видим, что полученный ряд уровней в общем отвечает эмпирической последовательности критических чисел: 2, 8, 20, ... При этом порядок уровней нуклеонов напоминает структуру электронных оболочек, отличаясь от неё, во-первых, обратным порядком уровней в каждой оболочке и, во-вторых, строгой очерёдностью в их заполнении.

Указанная схема уровней, полученная с помощью приближённого метода, пригодна, очевидно, лишь для лёгких и средних ядер, так как, в частности, мы не учитывали спинового, нецентральное и обменного взаимодействий. Совпадение результатов обоих приближённых методов, приводящих, например, для лёгких ядер к числам 2, 8, 20, представляется весьма удовлетворительным.

Используем теперь конечный результат применения метода Томаса-Ферми в виде формулы для числа частиц, необходимого для начала заполнения оболочки

$$N_l = \gamma(2l + 1)^3,$$

где коэффициент заполнения  $\gamma$  является функцией формы распределения частиц  $\rho$  и, следовательно, зависит от вида взаимодействия. Отвлечёмся, однако, сейчас от применения тех или иных форм взаимодействия нуклеонов и будем рассматривать форму распределения и  $\gamma$  как параметры<sup>1)</sup>.

<sup>1)</sup> Д. Иваненко и А. Соколов, ДАН 74, 33 (1950).

Тогда, полагая плотность постоянной (что разумно для тяжёлых ядер),

$$\rho = \begin{cases} \frac{3}{4\pi R^3} & \text{при } r < R, \\ 0 & \text{при } r > R, \end{cases}$$

получим для коэффициента заполнения

$$\gamma = \frac{1}{18\pi} = 0,018$$

и для критических чисел ряд

$$N = 2, 6, 12, \dots, 38, 60, 86, 122,$$

который примерно соответствует эмпирическим данным в своей второй половине (50, 82, 126).

Для критических чисел была предложена<sup>1)</sup> эмпирическая формула

$$N_l = \frac{l^3 + 5l}{3}, \quad (7,70)$$

которая с точки зрения трактовки методом Томаса-Ферми даёт предельное значение коэффициента заполнения  $\gamma = 0,04$ , соответствующее примерно параболическому виду плотности

$$\rho = \frac{15}{8\pi R^3} \left( 1 - \frac{r^2}{R^2} \right).$$

Действуя подобным путём, можно, очевидно, подобрать две формы плотности нуклеонов, различные для лёгких и тяжёлых ядер, которые приведут в точности к ряду эмпирических критических чисел.

Ясно, что в согласии с общими представлениями о структуре ядер уточнение подобных подсчётов заключается в частности в учёте различия плотности протонов и нейтронов, вызываемого кулоновским отталкиванием. Для протонов получится меньшее значение коэффициента заполнения ( $\gamma_p < \gamma_n$ ) и соответственно уменьшение значения критических чисел. Следует учесть также возможную роль  $\alpha$ -частиц. Во всяком случае, мы видим, что в настоящее время имеются уже разумные теоретические методы для трактовки оболочек нуклеонов и связанных с ними

<sup>1)</sup> Valente, Phys. Rev. 78, 77 (1950).

периодичностей и тем самым для установления формы распределения нуклеонов по объёму ядер.

На этом мы заканчиваем рассмотрение избранных вопросов теории элементарных частиц, при анализе которых одной из наших главных задач являлось указание на тесную связь всех частиц друг с другом благодаря различным взаимодействиям и превращениям. Несмотря на неоднократно подчёркнутые большие трудности, возникшие перед теорией в этой области, всё же замечательные успехи релятивистской квантовой теории позволяют надеяться, что, опираясь на эксперименты в области атома, ядра и космических лучей, современная физика придёт в ближайшем будущем к ещё более совершенному пониманию как объединённой системы элементарных частиц, так и строения вещества, повидимому используя рассмотренные выше нелинейные обобщения уравнений теории поля, наряду с дальнейшим развитием теории вакуума.

Было бы наивно полагать, что развитие физики элементарных частиц не встретится с новыми трудностями, в частности следует иметь в виду возможность появления новых попыток идеалистических извращений понятий и закономерностей, возникающих в данной области, со стороны представителей буржуазной идеологии. Советская физическая наука, вооружённая гениальными трудами классиков марксизма-ленинизма, должна быстро разоблачать всевозможные попытки идеалистических толкований, и противопоставить этим попыткам построение теории на материалистической основе. Нет сомнений, что построение теории, рассматривающей во взаимосвязи все известные частицы, является прогрессивным. В этой связи мы вновь должны прежде всего руководствоваться указаниями И. В. Сталина, что «любое явление может быть понято и обосновано, если оно рассматривается в его неразрывной связи с окружающими явлениями, в его обусловленности от окружающих явлений»<sup>1)</sup>.

---

<sup>1)</sup> И. Сталин, Вопросы ленинизма, Госполитиздат, 1940, стр. 536.

---

Стр.	Строка	Напечатано	Следует читать
80	15 стр.	$\frac{(q\mathbf{x})}{x}$	$\frac{(q\mathbf{x})}{x^2}$
80	11 стр.	$\frac{(q\mathbf{x})}{x^2}$	$\frac{(q\mathbf{x})}{x}$
91	4 стр.	$p_2$	$p^2$
162	14 стр.	$\left(\frac{1}{R}\right)\psi'$	$\left)\frac{1}{R}\psi'\right.$
162	5 стр.	$-(\sigma'_1 R)(\sigma'_2 R)$	$-3(\sigma'_1 R)(\sigma'_2 R)$
216	Ф. (31,10)	$\left(\frac{e}{2mc}([\mathbf{r}\mathbf{p}] + \mu_0 \sigma')\right)_{ab}$	$\left(\frac{e}{2mc}[\mathbf{r}\mathbf{p}] + \mu_0 \sigma'\right)_{ab}$
220	Ф. (32,3)	$\sum_{l_s} W^+(l_s) e^{icLt - ikr}$	$= \sum_{l_s} W^+(l_s) e^{icLt - itr}$
228	Ф. (32,31)	$-\frac{n^2 \omega^2 \hbar^2}{4p^2 c^2}$	$+\frac{n^2 \omega^2 \hbar^2}{4p^2 c^2}$
336	4 стр.	$(1-x^2)$	$(1-x)^2$
378	Ф. (43,6)	$\left(\frac{1}{2} \Phi^0 + A^+\right) - \left(\frac{1}{2} \Phi^0 + A^-\right)$	$\left(\frac{1}{2} \Phi^0 + A^-\right) - \left(\frac{1}{2} \Phi^0 + A^+\right)$
379	6 стр.	справа	слева
379	8 стр.	слева	справа
381	5 стр.	$A^\pm$	$A^\mp$
435	11 стр.	$1 \geq x - 1$	$1 \geq x \geq -1$
435	12 стр.	$Y_l^{m'}$	$Y_l^{*m'}$
483	16 стр.	линейной	минимальной
739	Ф. (7,17)	$\frac{Ze^2 R^{2\gamma}}{2\gamma}$	$Ze^2 R^{2\gamma}$
767	Подпись под рис. 10	смещения.	смещения. Величина $C$ связана со смещением терма соотношением $\delta T = \frac{\pi a_{II}^3 \psi^2(0)}{Z_i} C.$