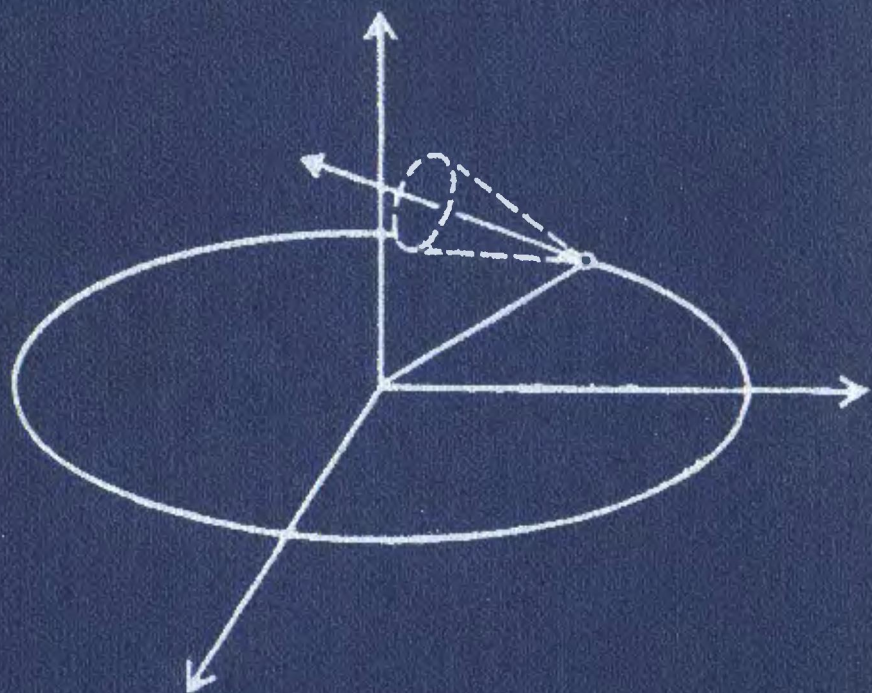


А. А. СОКОЛОВ, И. М. ТЕРНОВ

# РЕЛЯТИВИСТСКИЙ ЭЛЕКТРОН



А. А. СОКОЛОВ, И. М. ТЕРНОВ

# РЕЛЯТИВИСТСКИЙ ЭЛЕКТРОН



ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»  
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ  
ФИЗИКО МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ  
Москва 1974

**Релятивистский электрон.** А. А. Соколов, И. М. Тернов, Монография. Издательство «Наука», Главная редакция физико-математической литературы, 1974 г.

В книге изложена классическая и квантовая теория движения и излучения релятивистских электронов. Рассматривается ряд актуальных вопросов, например, точное решение некоторых задач излучения по классической электродинамике, исследование классического релятивистского уравнения Дирака — Лоренца с учетом силы радиационного трения и др. Все это находит, в особенности за последнее время, большое практическое применение не только для описания микропроцессов, но и при рассмотрении движения ультрарелятивистского электрона по траекториям с макроскопическим радиусом кривизны (например синхротронное излучение). Большое место отводится анализу подобных задач с помощью релятивистских квантовых уравнений, поскольку без учета квантовых эффектов оказалось невозможным проектировать и сооружать современные электронные циклические ускорители и накопительные установки.

Рис. 18, библи. 203 назв

© Издательство «Наука», 1974.

## СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие . . . . .	7
Некоторые обозначения . . . . .	8

### I. ДЕЛЬТА-ФУНКЦИЯ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЕ

§ 1. Введение . . . . .	9
§ 2. Понятие о дельта-функции Дирака . . . . .	12
а) Дельта-функция и система ортонормированных функций (12).	
б) Дельта-функция и разложение Фурье (14). в) Обобщение некоторых свойств непрерывной функции на дельта-функцию (18).	
г) Некоторые свойства дельта-функции (21).	
§ 3. Решение линейных уравнений с помощью дельта-функции . . . .	22
а) Дельта-функция в пространстве нескольких измерений (22).	
б) Функция Грина (22).	
§ 4. Решение некоторых простейших задач с заданными начальными условиями . . . . .	24
а) Простейшая задача механики (24). б) Уравнение теплопроводности (25).	
§ 5. Решение некоторых основных уравнений электродинамики . . . .	28
а) Уравнение Пуассона (28). б) Одномерный случай (28). в) Двухмерный случай (29). г) Трехмерный случай (30). д) Уравнение Даламбера (31). е) Интегрирование обобщенного уравнения Даламбера (34).	

### II. КЛАССИЧЕСКАЯ ЭЛЕКТРОДИНАМИКА

§ 6. Основные уравнения классической электродинамики . . . . .	37
а) Уравнения Максвелла — Лоренца (37). б) Интегрирование уравнений Максвелла — Лоренца (38).	
§ 7. Уравнения Максвелла — Лоренца в четырехмерном виде . . . .	40
а) Ковариантные и контравариантные векторы и тензоры (40).	
б) Релятивистски-ковариантная запись уравнений Максвелла—Лоренца (42). в) Функция действия (44). г) Уравнения Лагранжа и Гамильтона в релятивистской теории электрона (48). д) Уравнение Гамильтона — Якоби в релятивистской теории (50).	
§ 8. Решение некоторых задач с помощью уравнения Гамильтона — Якоби . . . . .	53
а) Свободное движение (53). б) Движение по окружности (54).	
в) Адиабатические инварианты (55). г) Проблема Кеплера (релятивистская классическая теория водородоподобного атома) (56).	
д) Траектория движения (58). е) Энергия и частоты колебаний (59). ж) Движение электрона в постоянном и однородном магнитном поле (61). з) Движение электрона в поле плоской поляризованной по кругу электромагнитной волны (67). и) Движение электрона в статическом магнитном поле и в поле плоской электромагнитной волны (71).	

- § 9. Проблема излучения . . . . . 74  
 а) Энергия электромагнитного поля в вакууме и теорема Пойнтинга (74). б) Уравнения Максвелла в среде (75). в) Граничные условия (78). г) Эффект Черенкова (79). д) Эквипотенциальные поверхности при движении электрона с постоянной скоростью (84). е) Излучение гармонического осциллятора (87). ж) Поляризация излучения гармонического осциллятора (90). з) Суммарное излучение (91). и) Дипольное и квадрупольное излучения гармонического осциллятора (91).
- § 10. Синхротронное излучение . . . . . 92  
 а) Основные уравнения (92). б) Вывод формулы Шотта (94). в) Поляризационные свойства излучения при движении электрона по винтовой линии (97). г) Угловое распределение излучения (100). д) Спектральное распределение излучения (104). е) Спектральное распределение излучения в нерелятивистском случае при круговом движении (105). ж) Асимптотическое представление бесселевых функций высокого порядка (107). з) Ультрарелятивистский случай при круговом движении (110). и) Спектральное распределение интенсивности излучения (приближенные формулы) (112). к) Угловое распределение интенсивности излучения (приближенные формулы) (115). л) Приближенные формулы при движении по винтовой линии (118).
- § 11. Классическое уравнение Дирака — Лоренца для точечного электрона . . . . . 120  
 а) Вывод уравнения (120). б) Энергия излучения (125). в) Гиперболическое движение (126). г) Прямолинейное движение (127). д) Гиперболическое движение для конечного промежутка времени (131). е) Движение электрона в постоянном и однородном магнитном поле с учетом силы трения (132). ж) Движение по винтовой линии с компенсацией потерь энергии на излучение (135).
- III. КВАНТОВАЯ РЕЛЯТИВИСТСКАЯ ТЕОРИЯ**
- § 12. Вариационные принципы для свободного (без зарядов) электромагнитного поля . . . . . 139  
 а) Тензор энергии и тензор собственного момента количества движения (139). б) Законы сохранения в интегральной форме (143). в) Решение уравнения Даламбера (144). г) Исследование поляризационных свойств (145). д) Понятие о квантовании электромагнитного поля (147). е) Квантование электромагнитного поля в общем случае (153).
- § 13. Скалярное релятивистское волновое уравнение Клейна — Гордона . . . . . 157  
 а) Вывод уравнения (157). б) Трансформационные свойства волновой функции (158). в) Плотность заряда и тока (159). г) Уравнение Клейна—Гордона для частицы в электромагнитном поле (160). д) Вариационные методы (161). е) Свободное движение (163). ж) Квантование свободного поля (165).
- § 14. Уравнение Дирака . . . . . 168  
 а) Линеаризация оператора энергии. Матрицы Дирака (168). б) Уравнение Дирака. Плотность заряда и тока (171). в) Трансформационные свойства волновой функции (173). г) Уравнение Дирака в ковариантной записи (175). д) Тензорная размерность матриц Дирака (177).
- § 15. Вариационные методы . . . . . 179  
 а) Функция Лагранжа (180). б) Тензор энергии (181). в) Тензор орбитального момента количества движения и спина (182). г) Ре-

- шегия, когда спин является интегралом движения (185). д) Свободное движение электрона (190). с) Исследование спиновых свойств свободного электрона (192). ж) Спиновые свойства при наличии электромагнитного поля (196).
- § 16. О вторичном квантовании уравнения Дирака . . . . . 199  
 а) Общие сведения (199). б) Матричное представление амплитуд в случае статистики Ферми—Дирака (201). в) Вычисление матричных элементов с учетом поляризационных эффектов (202). г) Волновое уравнение для позитрона (206). д) Понятие о теореме Людерса—Паули (207). е) Теория нейтрино с ориентированным спином (203). ж) Теорема Людерса—Паули в теории нейтрино с ориентированным спином (214).
- § 17. Центральное-симметричное поле . . . . . 218  
 а) Проблема Келлера по уравнению Клейна—Гордона (213). б) Движение электрона в поле центральных сил по теории Дирака (224). в) Свойства полного момента. Шаровые спиноры (225). г) Движение электрона в кулоновском поле по теории Дирака (229). д) Спектр энергии (233). е) Волновые функции в паулевском приближении (235). ж) Понятие о гиперболических орбитах (236). з) Четность состояний (238).
- § 18. Теория излучения . . . . . 239  
 а) Теория переходных процессов (239). б) Учет поляризационных эффектов (244). в) Спонтанные и вынужденные переходы (246). г) Дипольное излучение (248). д) Магнитное и квадрупольное излучения (250). е) Дипольное излучение в водородоподобном атоме (251). ж) Магнитные и квадрупольные переходы в водородоподобном атоме (257). з) Переходы с метастабильного уровня  $2s_{1/2}$  (257).

#### IV. СИНХРОТРОННОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ С УЧЕТОМ КВАНТОВЫХ ЭФФЕКТОВ

- § 19. Движение электрона в постоянном и однородном магнитном поле . . . . . 263  
 а) Решение задачи в цилиндрической системе координат по уравнению Клейна—Гордона (263). б) Решение задачи по уравнению Клейна—Гордона в декартовой системе координат (267). в) Движение электрона в постоянном магнитном поле по теории Дирака в цилиндрических координатах (268). г) Решение уравнения Дирака в декартовой системе координат (275).
- § 20. Квантовая теория излучения электрона, движущегося в постоянном и однородном магнитном поле . . . . . 277  
 а) Общие формулы для спонтанного излучения с учетом поляризационных эффектов (277). б) Квазиквантовое приближение (280). в) Влияние квантовых флуктуаций на радиальное движение (287). г) Влияние синхротронного излучения на вертикальное движение (290).
- § 21. Излучение с учетом квантовых эффектов . . . . . 293  
 а) Общие формулы (293). б) Асимптотическое представление функций Лагерра (295). в) Излучение с учетом «поперечной» поляризации спина электрона (эффект самополяризации) (300). г) Влияние квантовых эффектов на интенсивность излучения (304).
- § 22. Взаимное превращение фотонов и электронно-позитронных пар в магнитном поле . . . . . 308  
 а) Общие положения (308). б) Однорезонансное рождение пар электронов и позитронов в магнитном поле (309). в) Однофотонная аннигиляция пары (317).

§ 23.	Вакуумный магнитный момент электрона . . . . .	319
	а) Общие положения (319). б) Радиационные поправки к уравнению Дирака (320). в) Случай малых $n$ (324). г) Случай больших $n$ (324).	
§ 24.	Рассеяние электроном электромагнитной плоской волны, поляризованной по кругу . . . . .	326
	а) Нелинейная классическая теория (326). б) Теория рассеяния (327). в) Квантовая теория излучения (332).	
§ 25.	Вынужденные переходы в теории синхротронного излучения . . .	335
	а) Общие формулы (335). б) Вынужденное излучение в скрещенных полях (339).	
§ 26.	Влияние синхротронного излучения на движение электронов в неоднородном магнитном поле . . . . .	344
	а) Движение электронов в аксиально-симметричном магнитном поле (344). б) Общие формулы для матричных элементов и вероятности перехода при синхротронном излучении (349). в) Влияние синхротронного излучения на потери энергии и на бетатронные колебания (352). г) Движение электронов в аксиально-симметричном фокусирующем поле по теории Дирака (359).	
§ 27.	Заключение . . . . .	362
	а) Замечания о различных методах расчета синхротронного излучения (362). б) Решение с помощью релятивистских квантовых уравнений (363). в) Квазиклассический учет квантовых флуктуаций (363). г) Операторный метод (370). д) Основы экспериментального исследования синхротронного излучения и новое в его практическом использовании (374).	
	Цитированная литература . . . . .	380
	Предметный указатель . . . . .	386

## ПРЕДИСЛОВИЕ

В настоящей монографии мы решили дать систематическое изложение классической и квантовой теории движения релятивистских электронов, включая ультрарелятивистскую область энергий. Релятивистская теория движения электронов в микросистемах получила достаточно подробное изложение даже в учебной литературе, однако теория движения ультрарелятивистских электронов по макроскопическим траекториям (классическая и квантовая) была создана по существу лишь за два последних десятилетия. В работах, посвященных созданию этой теории, пришлось преодолеть ряд трудностей, в особенности математического характера. В частности, пришлось находить решения ряда новых задач и исследовать в то время еще мало изученные асимптотические приближения различных специальных функций.

В настоящее время основные дискуссионные вопросы этой проблемы можно считать выясненными, причем теория синхротронного излучения\*) находит за последнее время все большее и большее практическое применение. В разработке теории движения и излучения ультрарелятивистских электронов принимали участие не только авторы настоящей монографии, но также и многие теоретики как у нас (Д. Д. Иваненко, И. Я. Померанчук, Л. А. Арцимович, Н. П. Клепиков, А. А. Коломенский, А. Н. Лебедев, А. Н. Матвеев, Ю. М. Лоскутов, В. Н. Байер, В. Г. Багров и др.), так и за рубежом (Ю. Швингер, К. Робинзон, М. Сэндс, Ф. Гутброд и др.).

Мы выражаем благодарность за большую помощь, оказанную в нашей работе, В. Ч. Жуковскому, В. Р. Халилову, Д. В. Гальцову, М. М. Колесниковой, Г. А. Лавровой, В. В. Михайлину, А. Б. Куканову.

---

\*) На раннем этапе развития теории излучение ультрарелятивистских электронов в ускорителях мы называли излучением «светящегося электрона». В настоящее время более широкое распространение получило название «синхротронное» или «магнитотормозное» излучение, причем последний термин используется главным образом в астрофизике.



## НЕКОТОРЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

**Тензорные индексы.** Четырехмерные тензорные индексы обозначены греческими буквами и пробегают значения 1, 2, 3, 4; например, пространственно-временные координаты:

$$x_1 = x, \quad x_2 = y, \quad x_3 = z, \quad x_4 = i'ct.$$

Трехмерные тензорные индексы обозначены латинскими буквами и пробегают значения 1, 2, 3.

Введены две мнимые единицы  $i$  и  $i'$ , причем

$$i^2 = i'^2 = -1, \quad i^* = -i, \quad i'^* = i'.$$

Введение второй мнимой единицы позволяет четвертую составляющую вектора считать эрмитовой  $A_1^* = i' A_4^*$ ,  $A_1 = i' A_4$ .

Законы преобразования для ковариантных и контравариантных четырехмерных тензоров при введении второй мнимой единицы становятся одинаковыми:

$$A_{\mu}^{\nu} B^{\mu} = A_{\mu}^* B_{\mu}^* = A_n^{\nu} B_n - A_4^* B_4 = (\mathbf{A}^* \mathbf{B}) - A_4^* B_4.$$

**Обычные величины и операторы в трехмерном пространстве.** Обычные величины обозначаются курсивом: скалярные — светлым, а векторные — полужирным.

Прямой шрифт соответствует операторным величинам: светлый — скалярам, а полужирный — векторам.

**Некоторые специальные функции.** Цилиндрические функции (бесселевы) мнимого аргумента:

$$K_{\nu}(z) = \frac{\pi i}{2} e^{\frac{\pi}{2} \nu i} H_{\nu}^{(1)}(iz),$$

где  $H_{\nu}^{(1)}(z)$  — функция Гангеля первого рода.

Функция Лагерра:

$$I_{nn'}(\rho) = \frac{1}{\sqrt{n! n'!}} e^{-\rho/2} \rho^{(n-n')/2} Q_{n'}^{n-n'}(\rho),$$

где  $Q_{n'}^{n-n'}(\rho)$  — полиномы Лагерра ( $n \geq n'$ ).

**Постоянные.**

Элементарный заряд  $e_0 = 4,803 \cdot 10^{-10}$  CGSE.

Масса электрона  $m_0 = 9,109 \cdot 10^{-28}$  г.

Постоянная Планка  $\hbar = 1,054 \cdot 10^{-27}$  эрг·сек.

Энергия покоя электрона  $m_0 c^2 = 0,5110 \cdot 10^6$  эв.

Швингеровское постоянное магнитное поле  $H_0 = m_0^2 c^3 / e_0 \hbar = 4,41 \cdot 10^{13}$  эс.

Параметр разложения  $\xi_0 = \frac{3}{2} \frac{H}{H_0} \frac{E}{m_0 c^2}$  зависит от энергии электрона  $E$  и напряженности магнитного поля  $H$ .

# 1. ДЕЛЬТА-ФУНКЦИЯ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЕ

## § 1. ВВЕДЕНИЕ

При рассмотрении ряда новых вопросов по классической и квантовой электродинамике нам пришлось прежде всего разработать соответствующий математический аппарат. Так, при решении ряда задач классической теории поля был широко использован аппарат дельта-функции Дирака [1—3].

Особое внимание было уделено классическому релятивистскому уравнению Дирака — Лоренца, описывающему движение точечного электрона (§ 11) с учетом силы радиационного трения. При этом были рассмотрены дополнительные гипотезы, которые необходимо было ввести в классическую электродинамику, чтобы исключить расходимость в силах самодействия, возникающих благодаря обратному воздействию на точечный электрон поля, создаваемого им же самим. Кроме того, были найдены граничные условия, при которых уравнение Дирака — Лоренца может допускать корректные решения.

Анализ проблемы излучения в случае ультрарелятивистского движения электрона по траектории с макроскопическим радиусом кривизны потребовал также пересмотра существующих методов классической теории. В самом деле, в известных методах электромагнитное поле излучения обычно вычисляется приближенно с помощью введения так называемой волновой зоны, находящейся на расстояниях, значительно превышающих размеры источника излучения.

В задаче о синхротронном излучении этот вопрос требовал дополнительного исследования, поскольку характерная область движения электрона с ультрарелятивистской энергией  $E$  оказывается вполне соизмеримой с расстоянием от электрона до наблюдателя. Нам пришлось развить более точные методы расчета энергии излучения, не зависящие от расстояния, на котором находится наблюдатель. В частности, был дан новый вывод классической формулы Шотта, описывающей спектрально-угловое распределение интенсивности излучения вращающегося по окружности электрона. Шотт еще в 1907 г. пытался применить эту формулу для описания дискретных спектральных серий атома. В этой постановке задачи выделение им волновой зоны было вполне естественным. Развитие теории атома пошло, однако,

по совершенно новому пути — по пути квантовой механики. Формула же Шотта примерно через сорок лет после ее установления впервые нашла практическое применение, а именно — легла в основу теории синхротронного излучения. Ее вывод пришлось уточнить и сделать пригодным для макроскопической траектории электрона.

Одной из характерных особенностей синхротронного излучения является наличие в спектральном распределении интенсивности излучения резкого максимума, который падает не на основной тон ( $\nu = 1$ ), а на высокие гармоники \*):

$$\nu_{\text{макс}} \sim (E/m_0c^2)^3.$$

Поэтому в целях анализа спектрального состава синхротронного излучения оказалось необходимым найти асимптотические формулы для функций Бесселя высокого порядка ( $\nu \gg 1$ ), причем номер излучаемой гармоники  $\nu$  входит также и в аргумент бесселевой функции ( $x \approx \nu - 0$ ). Эти асимптотические формулы были получены нами с помощью соответствующего обобщения метода Вентцеля, Крамерса и Бриллюэна (метод ВКБ), известного в квантовой теории. Метод ВКБ оказался весьма перспективным. С его помощью нам удалось найти асимптотические формулы для многих других специальных функций и, в частности, для функций Лагерра, которые встречаются в квантовой теории синхротронного излучения.

В связи с этим заметим, что наряду с численными методами решения уравнений с помощью электронно-вычислительных машин, как мы думаем, полезно развивать и аналитические приближенные методы, которые позволяют с высокой степенью точности выразить результаты через известные функции, что дает возможность более полно проанализировать полученные закономерности.

Таким образом, новые методы, которые мы начали разрабатывать ранее [3], получают в этой монографии дальнейшее развитие.

Существенное внимание мы уделили решениям квантовых релятивистских уравнений Клейна — Гордона и Дирака для заряда во внешнем электромагнитном поле различной конфигурации. Эти решения находят в настоящее время широкое применение во многих практических вопросах физики микро- и макросистем. При этом мы старались по возможности более полно изложить математические выкладки, с тем чтобы читатель мог не только ознакомиться, но и овладеть математическими методами современной релятивистской теории.

---

\* ) Заметим, что при энергии электрона  $E \approx 500$  Мэв мы найдем, что  $\nu_{\text{макс}} \sim 10^9$ , поскольку энергия покоя электрона  $m_0c^2 \approx 0,5$  Мэв.

Наряду с этим в монографии излагается теория вторичного квантования электромагнитного и электронно-позитронного полей в наиболее простом ее варианте, причем результаты применяются к исследованию конкретных задач: свободное движение (§ 15), проблема несохранения четности (§ 16), водородоподобный атом (§ 17). При изложении квантовой теории излучения было обращено, в частности, внимание на переходы с метастабильных уровней водородоподобных атомов (§ 18). Особое внимание мы уделили рассмотрению спиновых и поляризационных эффектов.

Квантовая теория движения ультрарелятивистского электрона по траектории с макроскопическим радиусом кривизны (§§ 19—27), нашедшая применение, например, при описании свойств синхротронного излучения, — это, по существу, совершенно новая область, в которой рассматриваются явления, где основную роль играют состояния с большими квантовыми числами [4].

Развитие макроскопической ультрарелятивистской квантовой теории электрона привело к установлению ряда специфических закономерностей для наиболее простого случая, когда движение происходит в постоянном и однородном магнитном поле. В дальнейшем некоторые результаты обобщаются и на неоднородное магнитное поле фокусирующего типа [5].

При исследовании движения электрона в магнитном поле  $H \sim 10^4$  гс мы показали, что квантовые эффекты начинают проявляться при энергии электрона  $E \sim 0,5$  Гэв и выше. Точнее, в этом случае квантовые эффекты приводят к флуктуационной раскачке бетатронных и синхротронных колебаний, а при достаточно больших временах движения (например в накопителях) — к возникновению радиационной самополяризации спина электронов (§ 21). Таким образом, не только релятивистская, но и квантовая теория начинают входить в инженерную практику, так как вопросы динамики электронов в циклических ускорителях и накопительных установках требуют учета квантовых эффектов.

В монографии также рассмотрен вопрос о движении электрона в поле плоской электромагнитной волны с круговой поляризацией. Показано, что при этом электроны должны двигаться по винтовой линии или по окружности. В этом случае оказывается возможным излучение гармоник, т. е. возникает своеобразный нелинейный эффект. Теории синхротронных мазеров и лазеров посвящен § 25.

Заметим, что при более высоких энергиях электрона:

$$(H/H_0)(E/m_0c^2) \sim 1, \quad (1.1)$$

где швингеровское постоянное магнитное поле  $H_0 = m_0^2 c^3 / e_0 \hbar = = 4,41 \cdot 10^{13}$  гс, квантовые эффекты начинают влиять на

интенсивность синхротронного излучения. В этих условиях оказывается возможным также рождение и аннигиляция электронно-позитронных пар. При  $H \sim 10^4$  гс равенство (1.1) может иметь место только для  $E \sim 10^3$  Гэв. Такие энергии экспериментально еще не достигнуты. Тем не менее случай (1.1) может найти применение при исследовании излучения галактик, например Крабовидной туманности и, в особенности, пульсаров, поскольку имеются основания считать, что магнитные поля могут там достигать порядка  $10^{11}$ — $10^{12}$  гс.

Отметим, что в 1972 г. появилось новое неожиданное применение теории синхротронного излучения: была высказана гипотеза о том, что гравитационные волны, возможно, также представляют собой специфическое гравитационное излучение частиц, движущихся благодаря гравитационному притяжению по спирали к так называемой «черной дыре» [6]. Синхротронный характер гравитационного излучения является весьма дискуссионным [7], и поэтому мы считаем нецелесообразным помещать это в нашу монографию.

Более полно новейшие практические применения синхротронного излучения будут изложены в заключительном § 27. В том же параграфе мы изложим две другие приближенные теории, включающие и квантовые эффекты. Математический аппарат этих теорий значительно проще нашего и поэтому позволяет более полно учитывать различные технические детали. Однако принципиальные выводы, которые следуют из этих теорий, не являются столь надежными и ограничены сравнительно узкой областью исследования.

## § 2. ПОНЯТИЕ О ДЕЛЬТА-ФУНКЦИИ ДИРАКА

**а) Дельта-функция и система ортонормированных функций.** Допустим, что имеется система ортонормированных (т. е. ортогональных и нормированных) функций  $\psi_n(x)$ , где  $n$  — целое число, которое изменяется либо от нуля до бесконечности, либо от минус до плюс бесконечности. Если  $\psi_n(x)$  — комплексная функция, то условие ортонормированности записывается в виде

$$\int \psi_{n'}^*(x) \psi_n(x) dx = \delta_{nn'}, \quad (2.1)$$

где интеграл распространен на всю возможную область (конечную или бесконечную) изменения аргумента  $x$ .

Символ, стоящий в правой части равенства (2.1) и получивший название дельта-символа Кронекера — Вейерштрасса, равен

$$\delta_{nn'} = \begin{cases} 1; & n = n', \\ 0; & n \neq n'. \end{cases} \quad (2.2)$$

Отсюда легко получить, что

$$\sum_{n'=n_1}^{n_2} f_{n'} \delta_{nn'} = \begin{cases} f_n; & n_1 \leq n \leq n_2, \\ 0; & n < n_1 \text{ или } n > n_2. \end{cases} \quad (2.3)$$

Совокупность ортонормированных функций  $\psi_n$  образует так называемое гильбертово пространство с бесконечным числом измерений. Условие ортонормированности представляет собою некоторое обобщение скалярного произведения единичных векторов трехмерных декартовых координат:

$$(j_n j_{n'}) = \delta_{nn'}, \quad (2.4)$$

где  $n, n' = 1, 2, 3$ .

Аналогично разложению обычного трехмерного вектора по системе единичных векторов:

$$\mathbf{x} = \sum_{n=1}^3 j_n x_n, \quad x_n = (j_n \mathbf{x}), \quad (2.5)$$

мы можем разложить любую функцию  $f(x)$  по системе бесконечного числа единичных векторов гильбертова пространства (обобщенный ряд Фурье):

$$f(x) = \sum_n f_n \psi_n(x), \quad (2.6)$$

где целое число  $n$  принимает бесконечное число значений (см. (2.1)). Учитывая условие ортонормированности (2.1), для коэффициента  $f_n$  легко найти следующее выражение:

$$f_n = \int f(x') \psi_n^*(x') dx'. \quad (2.7)$$

Подставляя (2.7) в (2.6), имеем

$$f(x) = \sum_n \int dx' f(x') \psi_n^*(x') \psi_n(x). \quad (2.8)$$

Строго говоря, в равенстве (2.8) необходимо вначале взять интеграл, а затем сумму по бесконечному числу  $n$ , поскольку сумма  $\sum_n \psi_n^*(x') \psi_n(x)$ , вообще говоря, при  $x' = x$  расходится. Однако можно поменять порядок интегрирования и суммирования, вводя какой-нибудь вспомогательный множитель  $\alpha_n$ , размазывающий сумму  $\sum_n \alpha_n \psi_n^*(x') \psi_n(x)$ , т. е. делающий ее во всех точках конечной. Затем, взяв интеграл, множитель  $\alpha_n$  следует стремить к единице, после чего равенство (2.8) примет вид

$$f(x) = \lim_{\alpha_n \rightarrow 1} \int dx' f(x') \sum_n \alpha_n \psi_n^*(x') \psi_n(x). \quad (2.9)$$

Величина

$$\delta(x' - x) = \sum_n \psi_n^*(x') \psi_n(x) \quad (2.10)$$

носит название дельта-функции ( $\delta$ -функции) Дирака [1—3]. Она обладает следующим свойством \*):

$$f(x) = \int dx' f(x') \delta(x' - x), \quad (2.11)$$

т.е. является оператором подстановки  $x' \rightarrow x$ . Хотя интеграл (2.11) следует понимать в смысле равенства (2.9), однако во многих случаях окончательный результат, как правило, не зависит от способа размазывания и вспомогательный множитель  $\alpha_n$  просто опускается.

**б) Дельта-функция и разложение Фурье.** Свойства дельта-функции, а также возможные способы ее размазывания мы разберем на следующем конкретном примере. В качестве ортонормированных функций выберем гармонические функции

$$\psi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{L}} e^{\frac{2\pi n}{L} ix}, \quad (2.12)$$

дающие возможность произвести разложение в обычный ряд Фурье. Для того чтобы получить полную систему ортонормированных функций, мы должны предположить, что целое число  $n$  изменяется в пределах от  $-\infty$  до  $+\infty$ . Величина  $L$ , называемая длиной периодичности, определяет область изменения  $x$  от  $-L/2$  до  $L/2$ . Тогда условие ортонормированности (2.1) принимает вид

$$\frac{1}{L} \int_{-L/2}^{L/2} e^{\frac{2\pi}{L} ix(n-n')} dx = \frac{\sin \pi(n-n')}{\pi(n-n')}. \quad (2.13)$$

Правая часть выражения (2.13) представляет собою дельта-символ Кронекера — Вейерштрасса, так как при  $n = n'$  она обращается в единицу, а при  $n \neq n'$  — в нуль, т. е.  $\sin \pi(n-n')/\pi(n-n') = \delta_{nn'}$ .

Согласно (2.10) дельта-функцию можно записать в виде

$$\delta(x' - x) = \frac{1}{L} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\frac{2\pi n}{L} i(x'-x)}. \quad (2.14)$$

---

\* Равенство (2.11) имеет место для функций  $f(x)$ , разложимых по системе ортонормированных функций, из которых составлена дельта-функция (2.10). Более строгое математическое обоснование теории дельта-функции дано в [8].

Вводя, далее, новую переменную  $k = 2\pi n/L$  и учитывая, что  $\Delta k = (2\pi/L)\Delta n = 2\pi/L$  (поскольку  $\Delta n = 1$ ), вместо (2.14) получим

$$\delta(x' - x) = \frac{1}{2\pi} \sum_n \Delta k e^{ik(x' - x)}. \quad (2.15)$$

Если стремить величину  $L$  к бесконечности ( $\Delta k \rightarrow 0$ ), то сумма (2.15) перейдет в интеграл:

$$\delta(x' - x) = \frac{1}{2\pi} \int dk e^{ik(x' - x)}, \quad (2.16)$$

интегрирование по  $k$  производится в пределах от  $-\infty$  до  $+\infty$  \*).

Отметим, что дельта-функция относится к числу несобственных интегралов и поэтому интеграл (2.16) не имеет какого-либо определенного значения, а при  $x = x'$  он вообще расходится. Интеграл Фурье (2.8) строго должен быть представлен в виде

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int dk \int dx' f(x') e^{ik(x' - x)}, \quad (2.17)$$

причем порядок интегрирования здесь является весьма существенным (вначале по  $x'$ , затем по  $k$ ). Если же мы хотим записать (2.17) через дельта-функцию Дирака, когда следует производить вначале интегрирование по  $k$ , а затем по  $x'$ , то мы должны ввести, как было указано выше (см. (2.9)), вспомогательный множитель и получить размазанную дельта-функцию \*\*):

$$\begin{aligned} \delta(x' - x, \alpha) &= \frac{1}{2\pi} \int dk e^{-\alpha|k| + ik(x' - x)} = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} dk e^{-\alpha k} \cos k(x' - x). \end{aligned} \quad (2.18)$$

\*) В дальнейшем интегралы, стоящие без пределов, берутся от  $-\infty$  до  $+\infty$ , а кратность интегралов определяется числом дифференциалов.

\*\*) Заметим, что введение вспомогательного обрезывающего множителя в настоящее время часто используется при вычислении многих несобственных интегралов. Например, интеграл

$$I = \int_0^{\infty} \sin kx \, dx = \frac{1}{k} - \frac{\cos k\infty}{k}$$

не имеет определенного значения. Однако если ввести вспомогательный множитель  $e^{-\alpha x}$  ( $\alpha > 0$ ), то интеграл

$$I = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_0^{\infty} e^{-\alpha x} \sin kx \, dx = \frac{1}{k}$$

приобретает вполне определенное значение. В этом смысле и следует рассматривать многие интегралы, встречающиеся в формализме дельта-функции.



Мы можем ввести вспомогательный множитель и другим способом, например ограничить пределы интегрирования значением  $1/\alpha$ :

$$\delta(x' - x, \alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_{-1/\alpha}^{1/\alpha} dk e^{ik(x' - x)}. \quad (2.19)$$

В равенствах (2.18) и (2.19) величина  $\alpha > 0$  и после взятия интеграла ее следует положить равной нулю. Тогда интеграл Фурье (2.17) мы можем представить в виде

$$f(x) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \int f(x') \delta(x' - x, \alpha) dx'. \quad (2.20)$$

Интеграл (2.18) берется элементарно:

$$\delta(x' - x, \alpha) = \frac{1}{\pi} \frac{\alpha}{\alpha^2 + (x' - x)^2}. \quad (2.21)$$

При малых значениях  $\alpha$  размазанная дельта-функция обладает

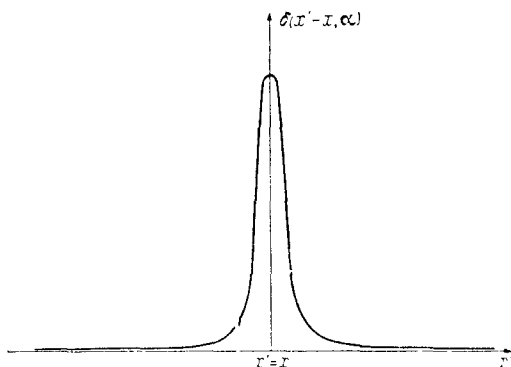


Рис. 1. Дельта-функция (размазанная).

острым максимумом при  $x' = x$  (рис. 1). Кроме того, при любых значениях  $\alpha$  мы имеем

$$\int \delta(x' - x, \alpha) dx' = 1. \quad (2.22)$$

В частности, устремляя  $\alpha$  к нулю, найдем, что

$$\delta(x' - x) = \begin{cases} \infty; & x' = x, \\ 0; & x' \neq x, \end{cases} \quad (2.23)$$

а интеграл

$$\int \delta(x' - x) dx' = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \int \delta(x' - x, \alpha) dx' = 1. \quad (2.24)$$

Отсюда для функций, разложимых в интеграл Фурье, равенство (2.20) в обозначениях дельта-функции может быть представлено в виде

$$\int f(x') \delta(x' - x) dx' = f(x) \int \delta(x' - x) dx' = f(x), \quad (2.25)$$

причем, используя соотношение (2.23), его легко распространить также на случай, когда пределы изменения  $x'$  конечны ( $b > a$ ):

$$\int_a^b \delta(x' - x) dx' = \begin{cases} 1; & b \geq x > a, \\ 0; & x > b \text{ или } x < a. \end{cases} \quad (2.26)$$

Интеграл (2.20) не зависит от способа размазывания дельта-функции, если верхний или нижний пределы интегрирования не совпадают с особой точкой.

В случае, когда один из пределов совпадает с особой точкой (например  $a = x$ ), интеграл (2.26) может зависеть от способа размазывания дельта-функции. Для примера размажем дельта-функцию (2.21) по закону

$$\delta(x' - x, \alpha, \beta) = \frac{1}{\pi} \frac{\alpha}{\alpha^2 + (x' - x - \beta)^2} \quad (2.27)$$

и в конечном результате оба параметра  $\alpha$  и  $\beta$  будем стремить к нулю. Тогда, если пределы интегрирования лежат по обе стороны от особой точки, имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x' - x, \alpha, \beta) dx' = 1.$$

Точно так же легко показать, что

$$\lim_{\alpha, \beta \rightarrow 0} \int_a^b \delta(x' - x, \alpha, \beta) f(x') dx' = \begin{cases} f(x); & a < x < b, \\ 0; & x < a \text{ или } x > b. \end{cases} \quad (2.28)$$

Последняя формула представляет собой обобщение свойств дельта-символа Кронекера — Вейерштрасса (см. (2.3)) на дельта-функцию.

Если же нижний предел совпадает с особой точкой ( $a = x$ ), то имеем

$$\int_x^{\infty} \delta(x' - x, \alpha, \beta) dx' = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{\beta}{\alpha}. \quad (2.29)$$

Отсюда видно, что при  $\alpha, \beta \rightarrow +0$  мы можем написать

$$\lim_{\alpha, \beta \rightarrow 0} \int_x^b \delta(x' - x, \alpha, \beta) f(x') dx' =$$

$$= f(x) \begin{cases} \frac{1}{2}; & \frac{\beta}{\alpha} \rightarrow 0, & x' = x, \\ 1; & \frac{\beta}{\alpha} \rightarrow \infty, & x' = x + 0, \\ 0; & \frac{\beta}{\alpha} \rightarrow -\infty, & x' = x - 0. \end{cases} \quad (2.30)$$

Поэтому в дальнейшем следует обращать внимание на способ размазывания дельта-функции только в том случае, когда один из пределов совпадает с особой точкой.

**в) Обобщение некоторых свойств непрерывной функции на дельта-функцию.** Поскольку при вычислении интегралов мы должны размазывать дельта-функцию, то, естественно, многие действия с непрерывными функциями имеют место и для дельта-функции. Прежде всего введем вспомогательную функцию ( $\alpha > 0$ )

$$\gamma(x' - x, \alpha) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-\alpha k} \frac{\sin k(x' - x)}{k} dk = \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{x' - x}{\alpha}. \quad (2.31)$$

Дельта-функция (размазанная, см. (2.21)) равна производной от этой функции:

$$\delta(x' - x, \alpha) = \frac{\partial}{\partial x'} \gamma(x' - x, \alpha). \quad (2.32)$$

Функция (2.31) интересна в том отношении, что в противоположность дельта-функции она имеет определенный смысл и в предельном случае  $\alpha = 0$ :

$$\gamma(x' - x) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \gamma(x' - x, \alpha) = \begin{cases} 1/2; & x' > x, \\ -1/2; & x' < x, \\ 0; & x' = x. \end{cases} \quad (2.33)$$

На рис. 2 изображены размазанная функция (2.31) (сплошная линия) и ее предельное значение (2.33) (пунктирная линия).

Наконец, мы можем вычислить производную от размазанной дельта-функции (2.21):

$$\frac{\partial \delta(x' - x, \alpha)}{\partial x'} = -\frac{2\alpha(x' - x)}{\pi(\alpha^2 + (x' - x)^2)^2}, \quad (2.34)$$

которая изображена на рис. 3. Из этого рисунка видно, что производная от дельта-функции в особой точке ( $x' = x$ ) обращается в нуль. Однако в двух соседних точках ( $x' = x \mp \alpha$ ) она

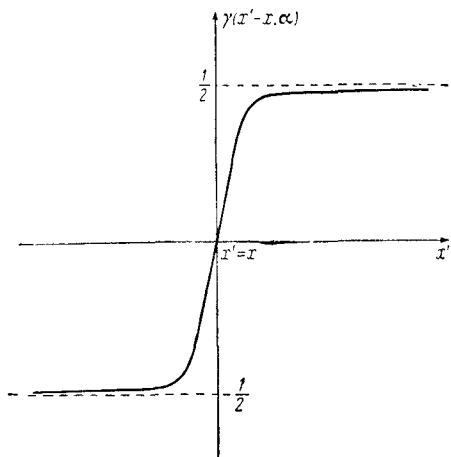


Рис. 2. Функция (размазанная), производная от которой дает дельта-функ

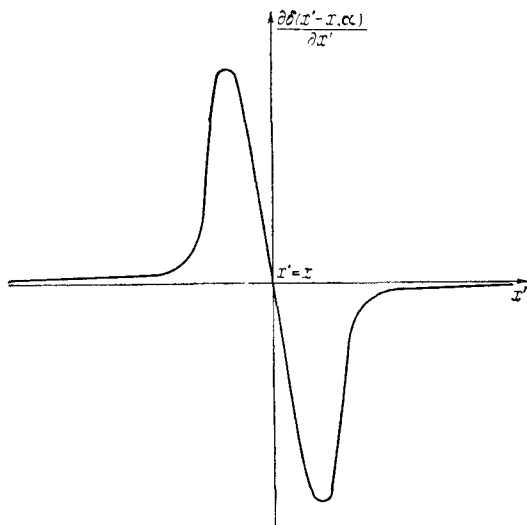


Рис. 3. Производная от дельта функции (размазанной),

принимает значения  $\pm 1/2\pi\alpha^2$ , которые при стремлении параметра  $\alpha$  к нулю соответственно обращаются в плюс и минус бесконечность. С помощью формулы (2.34) легко доказать предельное соотношение

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \int \frac{\partial \delta(x' - x, \alpha)}{\partial x'} f(x') dx' = -f'(x), \quad (2.35)$$

которое с помощью дельта-функции может быть записано в виде

$$\int \frac{\partial \delta(x' - x)}{\partial x'} f(x') dx' = -f'(x). \quad (2.36)$$

Заметим, что при помощи дельта-функции мы можем описать линейную плотность точечного заряда:

$$\rho = e\delta(x), \quad (2.37)$$

которая отлична от нуля только при  $x = 0$ , а при интегрировании по всей оси  $x$  дает значение полного заряда:

$$\int \rho dx = e. \quad (2.38)$$

При помощи производной от дельта-функции мы можем описать плотность диполя:

$$\rho(x) = e\delta(x - l) - e\delta(x) = -pe\delta'(x). \quad (2.39)$$

Хотя полный заряд диполя равен нулю:

$$\int \rho(x) dx = 0,$$

но его электрический момент согласно (2.36) отличен от нуля:

$$\int x\rho(x) dx = p = el. \quad (2.40)$$

Учитывая, что способы размазывания дельта-функции, а также выбор системы ортонормированных функций, из которых она образуется, не существенны (если предел интегрирования не совпадает с особой точкой), мы можем в основу теории дельта-функции положить разложение в интеграл Фурье. Тогда

$$\gamma(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin kx}{k} dk = \begin{cases} 1/2; & x > 0, \\ -1/2; & x < 0, \\ 0; & x = 0, \end{cases} \quad (2.41)$$

$$\delta(x) = \gamma'(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \cos kx dk = \frac{1}{2\pi} \int e^{ikx} dk, \quad (2.42)$$

$$\delta'(x) = -\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} k \sin kx dk = \frac{1}{2\pi} \int ike^{ikx} dk. \quad (2.43)$$

Дельта-функцию мы можем составить с помощью системы других ортонормированных функций, например функций Бесселя или полиномов Лежандра, Лагерра, Эрмита и т. д.

г) **Некоторые свойства дельта-функции** [3]. Приведем некоторые формулы, которыми мы воспользуемся в дальнейшем \*):

$$\delta(x) = \delta(-x) \quad (2.44)$$

(т. е. дельта-функция является четной функцией);

$$\delta'(x) = -\delta'(-x) \quad (2.45)$$

(т. е. производная от дельта-функции является нечетной функцией, причем штрих означает производную по тому аргументу, от которого зависит дельта-функция);

$$\delta(ax) = \frac{\delta(x)}{|a|}; \quad (2.46)$$

$$\delta(x^2 - a^2) = \frac{\delta(x - a) + \delta(x + a)}{2|a|}; \quad (2.47)$$

$$\delta(\varphi(x)) = \sum_s \frac{\delta(x - x_s)}{|\varphi'(x_s)|} \quad (2.48)$$

( $x_s$  — простые корни уравнения  $\varphi(x_s) = 0$ , лежащие в рассматриваемом интервале).

Дельта-функция позволяет также описать производную от разрывной функции. В самом деле, пусть функция  $f(x)$  имеет разрыв в точке  $x = x_0$ . Тогда мы можем ее представить в виде

$$f(x) = f_1(x) \left( \frac{1}{2} - \gamma(x - x_0) \right) + f_2(x) \left( \frac{1}{2} + \gamma(x - x_0) \right),$$

где  $f_1(x)$  и  $f_2(x)$  — непрерывные функции, а  $\gamma(x)$  определяется равенством (2.41). Принимая во внимание, что  $\delta(x - x_0) = \gamma'(x - x_0)$ , а также полагая разрыв в точке  $x = x_0$  равным

$$f_2(x_0) - f_1(x_0) = h, \quad (2.49)$$

найдем, что

$$f'(x) = h \delta(x - x_0) + \begin{cases} f'_1(x); & x < x_0, \\ f'_2(x); & x > x_0. \end{cases} \quad (2.50)$$

За всеми деталями, связанными с образованием дельта-функции, а также с выводом формул, мы отсылаем читателя к монографии [3].

\* ) Для доказательства равенств (2.44)—(2.48) мы должны левую и правую части равенств умножить на разложимую в ряд функцию  $f(x)$ , а затем произвести интегрирование по всей области, включающей особые точки.

### § 3. РЕШЕНИЕ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПОМОЩЬЮ ДЕЛЬТА-ФУНКЦИИ

**а) Дельта-функция в пространстве нескольких измерений.** Дельта-функцию в пространстве  $n$  измерений определим следующим образом:

$$\int_{a_1}^{b_1} dx'_1 \int_{a_2}^{b_2} dx'_2 \dots \delta(x'_1 - x_1, x'_2 - x_2, \dots) = 1, \quad (3.1)$$

при  $a_i < x_i < b_i$ ;

$$\delta(x'_1 - x_1, x'_2 - x_2, \dots) = 0, \quad (3.2)$$

если соблюдается хотя бы одно неравенство  $x_i \neq x'_i$ .

Если одномерную дельта-функцию представим через интеграл Фурье:

$$\delta(x' - x) = \frac{1}{2\pi} \int e^{ik(x-x')} dk, \quad (3.3)$$

то двумерная дельта-функция будет равна

$$\begin{aligned} \delta_2(x' - x) &= \delta(x' - x) \delta(y' - y) = \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \int e^{ik_1(x-x') + ik_2(y-y')} dk_1 dk_2. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Трёхмерную  $\delta_3$  и четырёхмерную  $\delta_4$  дельта-функции мы можем записать соответственно в виде

$$\begin{aligned} \delta_3(x' - x) &= \delta(x' - x) \delta(y' - y) \delta(z' - z) = \\ &= \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) = \frac{1}{8\pi^3} \int e^{i\mathbf{k}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')} d^3k, \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$\delta_4(x' - x) = \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) \delta(t' - t) = \frac{c}{16\pi^4} \int e^{i\mathbf{k}(\mathbf{r}-\mathbf{r}') - ick_4(t-t')} d^4k, \quad (3.6)$$

причем

$$d^3k = dk_1 dk_2 dk_3, \quad d^4k = d^3k dk_4.$$

С помощью дельта-функции оказалось весьма удобным находить также решения (точнее, вычислять функцию Грина) линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами (например уравнения Пуассона и Даламбера), играющих большую роль в классической электродинамике.

**б) Функция Грина.** Пусть дано уравнение

$$Lu(x_1, x_2, \dots) = -\rho(x_1, x_2, \dots), \quad (3.7)$$

где  $L$  — линейный оператор:

$$L = a_0 + a_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + a_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \dots + a_{11} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + 2a_{12} \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} + \dots \quad (3.8)$$

Решение уравнения (3.7) будем искать в виде

$$u(x_1, x_2, \dots) = \int dx'_1 dx'_2 \dots G(x_1 - x'_1, x_2 - x'_2, \dots) \rho(x'_1, x'_2, \dots). \quad (3.9)$$

Величина  $G(x_1 - x'_1, x_2 - x'_2, \dots)$  называется функцией Грина или гринианом. Подставляя (3.9) в уравнение (3.7), получим следующее соотношение между функцией Грина и дельта-функцией [3]:

$$L G(x_1 - x'_1, x_2 - x'_2, \dots) = -\delta(x_1 - x'_1) \delta(x_2 - x'_2) \dots, \quad (3.10)$$

т. е. дельта-функция позволяет описать поведение функции Грина в особой точке.

Из уравнения (3.10) имеем

$$G = G_1 + G_0, \quad (3.11)$$

где сингулярная часть функции Грина

$$G_1 = -L^{-1} \delta(x_1 - x'_1) \delta(x_2 - x'_2) \dots = -(2\pi)^{-n} \int dk_1 dk_2 \dots \frac{e^{ik_1(x_1 - x'_1) + ik_2(x_2 - x'_2) + \dots}}{a_0 + ik_1 a_1 + ik_2 a_2 + \dots + (ik_1)^2 a_{11} + 2i^2 k_1 k_2 a_{12} + \dots} \quad (3.12)$$

удовлетворяет однородному уравнению (за исключением точки  $x_1 = x'_1, x_2 = x'_2, \dots$ , где особенность описывается дельта-функцией), а несингулярная часть функции Грина  $G_0$  удовлетворяет однородному уравнению  $L G_0 = 0$  во всех точках. При выводе формулы (3.12) мы должны несингулярную часть функции Грина подобрать таким образом, чтобы в общем решении выполнялись определенные граничные или начальные (при наличии времени) условия.

При конкретных вычислениях нет смысла подчеркивать операторный характер дельта-функции или указывать там, где это несущественно, способы ее размазывания. Проще всего придать этим операторным равенствам обычный смысл дифференцируемых функций, тем более что при вычислении функции Грина, получающейся в результате деления дельта-функции на оператор, даже ее несингулярная часть, как правило, становится обычной функцией.



#### § 4. РЕШЕНИЕ НЕКОТОРЫХ ПРОСТЕЙШИХ ЗАДАЧ С ЗАДАНЫМИ НАЧАЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ

а) **Простейшая задача механики.** Найдем уравнение движения  $x(t)$  материальной точки массы  $m = 1$ , движущейся под действием силы  $f(t)$ . При этом мы должны исходить из уравнения

$$\frac{d^2x}{dt^2} = f(t), \quad (4.1)$$

которое будем решать при следующих двух условиях: во-первых, предположим, что на смещение  $x$ , зависящее от времени  $t$ , могут оказывать влияние только те значения силы  $f(t')$ , которые берутся в момент  $t' \leq t$  (принцип запаздывающего действия), и, во-вторых, мы должны учесть начальные условия.

Согласно формуле (3.9) мы имеем

$$x(t) = - \int dt' G(t-t') f(t'), \quad (4.2)$$

где функция Грина

$$G = G_1 + G_0.$$

В сингулярную часть функции Грина (см. (3.12))

$$G_1 = \frac{1}{2\pi} \int \frac{e^{ik(t-t')} - 1}{k^2} dk = -\frac{1}{2} |t-t'| \quad (4.3)$$

мы включили расходящийся интеграл

$$I = -\frac{1}{2\pi} \int \frac{dk}{k^2}$$

(т. е. несингулярную часть), который делает эту функцию конечной.

Несингулярную часть функции Грина мы представим в виде

$$G_0 = C_1(t-t') + C_2. \quad (4.4)$$

Чтобы удовлетворить принципу запаздывающего действия, мы должны потребовать

$$G(t-t') = 0, \quad t < t', \quad (4.5)$$

отсюда

$$C_1 = -1/2, \quad C_2 = 0. \quad (4.6)$$

Подставляя выражение для функции Грина в формулу (4.2), получаем

$$x(t) = \int_{-\infty}^t dt' (t-t') f(t'). \quad (4.7)$$

Начальные условия мы можем задать либо обычным способом, добавив к решению (4.7) решение однородного уравнения (4.1):

$$x_0 = At + B,$$

либо с помощью дельта-функции, подобрав такую силу, которая сообщает точке мгновенно (в момент  $t = 0$ ) конечную скорость  $v_0$ , а также конечное перемещение  $x_0$ .

В частности, в случае свободного движения мы должны положить [2, 3]

$$f(t) = v_0 \delta(t) + x_0 \delta'(t). \quad (4.8)$$

Тогда согласно (4.7) имеем

$$x(t) = \begin{cases} v_0 t + x_0, & t > 0, \\ 0, & t < 0, \end{cases} \quad (4.9)$$

Таким образом, безгранично возрастающая сила  $v_0 \delta(t)$ , действующая в течение короткого промежутка времени (мгновенная сила), сообщает материальной точке конечную скорость. Подобного рода силы встречаются, например, в теории удара. Сила  $x_0 \delta'(t)$  сообщает материальной точке конечное перемещение  $x_0$ .

Обыкновенную задачу механики, когда, кроме действующей силы  $F(t)$ , задаются также начальные условия (значение координаты  $x_0$  и скорости  $v_0$  при  $t = 0$ ), мы также можем решать с помощью нашей формулы (4.7). Полагая в этом случае

$$f(t) = x_0 \delta'(t) + v_0 \delta(t) + F(t) \left( \gamma(t) + \frac{1}{2} \right), \quad (4.10)$$

найдем следующее выражение для искомого смещения ( $t \geq 0$ ):

$$x = x_0 + v_0 t + \int_0^t dt' (t - t') F(t'). \quad (4.11)$$

Аналогичным способом можно исследовать другие задачи механики, сформулированные с помощью линейных дифференциальных уравнений.

**б) Уравнение теплопроводности.** Уравнение теплопроводности, описывающее распределение тепла в стержне, имеет вид

$$Lu(x, t) = -\frac{1}{\kappa} Q(x, t). \quad (4.12)$$

Здесь оператор

$$L = \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{a^2} \frac{\partial}{\partial t}, \quad (4.13)$$

$u(x, t)$  — искомая температура тела, зависящая от координаты  $x$  и времени  $t$ ,  $Q(x, t)$  — внешний источник, который характеризует количество тепла, сообщаемое извне единице длины стержня в единицу времени,  $\kappa$  и  $a^2$  носят соответственно название

коэффициентов внутренней теплопроводности и температуропроводности.

Мы ограничимся исследованием распространения тепла в безграничном стержне, когда граничные условия отсутствуют. Так же, как и в п. а), учтем принцип запаздывающего действия, согласно которому на температуру  $u(x, t)$  могут оказывать влияние только те источники, которые взяты в момент времени  $t' \leq t$ . Кроме того, потребуем, чтобы  $G = 0$  для всех  $t' > t$ .

Согласно (3.9) решение уравнения (4.12) следует искать в виде

$$u(x, t) = \frac{1}{x} \int dx' dt' G(x - x', t - t') Q(x', t'). \quad (4.14)$$

Для определения функции Грина имеем соотношение

$$\begin{aligned} G &= -L^{-1} \delta(x - x') \delta(t - t') = \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \int dk_1 dk_2 \frac{e^{ik_1(x-x') + ik_2(t-t')}}{k_1^2 + ik_2/a^2} + G_0, \end{aligned} \quad (4.15)$$

где  $G_0$  — решение однородного уравнения (4.12),

$$LG_0 = 0. \quad (4.16)$$

Интегрируя выражение (4.15) по переменной  $k_2$ , получим

$$G = \begin{cases} \frac{a^2}{\pi} \int_0^{\infty} dk_1 e^{-a^2 k_1^2 (t-t')} \cos k_1 (x - x') + G_0; & t > t', \\ G_0; & t < t'. \end{cases} \quad (4.17)$$

Здесь было учтено следующее соотношение, хорошо известное из теории функций комплексного переменного:

$$\int dk_2 f(k_2) e^{ibk_2} = 2\pi i \sum r, \quad (4.18)$$

где  $\sum r$  — сумма вычетов подынтегральной функции в верхней (при  $b > 0$ ) и нижней (при  $b < 0$ ) полуплоскостях. В последнем случае следует обходить обычные точки в обратном направлении, и поэтому в правой части равенства (4.17) мы должны поставить еще знак минус. В нашем случае единственный вычет (в точке  $k_2 = ia^2 k_1^2$ ) лежит в верхней полуплоскости. Чтобы удовлетворить принципу запаздывающего действия, мы должны положить  $G_0$  равным нулю.

Выражение для функции Грина после вычисления интеграла (4.17) принимает вид\*)

$$G = \begin{cases} \frac{a}{2\sqrt{\pi(t-t')}} e^{-\frac{(x-x')^2}{4a^2(t-t')}}; & t > t', \\ 0; & t < t'. \end{cases} \quad (4.19)$$

Подставляя (4.19) в равенство (4.14), найдем следующее выражение для искомой температуры:

$$u(x, t) = \frac{a}{2\kappa\sqrt{\pi}} \int dx' \int_{-\infty}^t dt' \frac{e^{-\frac{(x-x')^2}{4a^2(t-t')}}}{\sqrt{t-t'}} Q(x', t'). \quad (4.20)$$

Классическую задачу теплопроводности, когда в начальный момент задано лишь распределение температуры, а внешние источники тепла при  $t > 0$  отсутствуют, т. е.

$$u(x, 0) = f(x), \quad Q(x, t) = 0, \quad (4.21)$$

мы можем сформулировать также с помощью дельта-функции. В самом деле, вместо начальной температуры мы можем задать мгновенный источник в виде

$$Q(x', t') = \frac{\kappa}{a^2} f(x') \delta(t'), \quad (4.22)$$

поскольку при интегрировании по  $t'$  мы находим обычное соотношение между количеством тепла и температурой:

$$\int dt' Q(x', t') = \frac{\kappa}{a^2} f(x'). \quad (4.23)$$

Подставляя (4.22) в (4.20) и интегрируя полученное выражение по  $t'$ , находим

$$u(x, t) = \begin{cases} \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int dx' f(x') e^{-\frac{(x-x')^2}{4a^2 t}}; & t > 0, \\ 0; & t < 0. \end{cases} \quad (4.24)$$

В частности, если внешний источник сообщает некоторое конечное количество тепла  $Q$  в момент времени  $t = 0$  лишь в точке  $x = 0$ , то

$$Q(x', t') = Q \delta(x') \delta(t'), \quad (4.25)$$

\*) Заметим, что если подобрать  $G_0$  таким образом, чтобы выполнялось опережающее действие, т. е.  $G = 0$  при  $t' > t$ , то соответствующая функция Грина даст расходящийся результат. Наоборот, для оператора

$$L = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{a^2} \frac{\partial}{\partial t}$$

не существует решений с запаздывающим действием.

и выражение (4.20) дает следующее значение для температуры:

$$u = \frac{aQ}{2\pi \sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4a^2 t}}. \quad (4.26)$$

Из равенств (4.25) и (4.26) следует

$$\left( \frac{\partial}{\partial x^2} - \frac{1}{a^2} \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{a}{2 \sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4a^2 t}} = -\delta(x) \delta(t). \quad (4.27)$$

### § 5. РЕШЕНИЕ НЕКОТОРЫХ ОСНОВНЫХ УРАВНЕНИЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ

**а) Уравнение Пуассона.** Одним из основных уравнений электродинамики является уравнение Пуассона

$$\nabla^2 \Phi = -4\pi\rho, \quad (5.1)$$

которое описывает связь электростатического потенциала  $\Phi$  с плотностью заряда  $\rho$ . Решим это уравнение для некоторых частных случаев.

**б) Одномерный случай.** В одномерном случае плотность заряда зависит только от одной координаты  $x$ . Тогда при заданном  $x$  вдоль всей плоскости  $yz$  имеет место одно и то же значение  $\rho = \rho(x)$ . В этом случае дифференциальное уравнение (5.1) для определения потенциала  $\Phi(x)$  принимает вид

$$\frac{d^2 \Phi(x)}{dx^2} = -4\pi\rho(x). \quad (5.2)$$

Уравнение (5.2) точно совпадает с (4.1), и поэтому для определения  $\Phi(x)$  мы можем воспользоваться решением (4.2):

$$\Phi(x) = 4\pi \int dx' G(x-x') \rho(x'), \quad (5.3)$$

где

$$G(x-x') = -\frac{1}{2} |x-x'| + C_1(x-x') + C_2.$$

В отличие от (4.1) уравнение (5.1) не зависит от времени и поэтому для определения постоянных  $C_1$  и  $C_2$  мы должны воспользоваться не принципом запаздывающего действия, а граничными условиями. Например, в случае, когда заряд сосредоточен лишь в плоскости  $yz$  с постоянной поверхностной плотностью  $\sigma$ , следует положить

$$\rho(x) = \sigma \delta(x). \quad (5.4)$$

Тогда для потенциала (5.3) находим значение

$$\Phi(x) = -2\pi\sigma |x| + C_1 x + C_2. \quad (5.5)$$

Требую симметрию потенциала относительно замены  $x$  на  $-x$ , т. е. относительно заряженной плоскости и полагая  $\Phi = 0$  при  $x = 0$ , мы найдем, что  $C_1 = C_2 = 0$ . Поэтому в этом случае

$$\Phi(x) = -2\pi\sigma |x|. \quad (5.6)$$

Подставляя (5.6) и (5.4) в (5.2), имеем

$$\frac{d^2|x|}{dx^2} = \frac{d}{dx} \frac{x}{|x|} = 2\delta(x). \quad (5.7)$$

Последнее равенство следует также из (2.50), поскольку функция  $x/|x|$  в точке  $x = 0$  претерпевает разрыв, равный 2. Отсюда видно, что решение (5.6) удовлетворяет дифференциальному уравнению (5.2).

**в) Двухмерный случай.** Уравнение Пуассона на плоскости

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\Phi = -4\pi\rho(x, y) \quad (5.8)$$

описывает потенциал заряженного цилиндра, ось которого, не нарушая общности, мы направим вдоль оси  $z$ .

Соответствующее значение для функции Грина может быть определено из соотношения

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)G(x-x', y-y') = -\delta(x-x')\delta(y-y'). \quad (5.9)$$

Отсюда с помощью формул (3.11) и (3.12) находим

$$G = \frac{1}{4\pi^2} \int dk_1 dk_2 \frac{e^{ik_1(x-x') + ik_2(y-y')}}{k_1^2 + k_2^2} + G_0. \quad (5.10)$$

Для того чтобы получить конечное решение для  $G$ , следует положить  $G_0$  равным

$$G_0 = -\frac{1}{4\pi^2} \int dk_1 dk_2 \frac{e^{ik_1 x_0 + ik_2 y_0}}{k_1^2 + k_2^2}. \quad (5.11)$$

Вводя цилиндрические координаты

$$r = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}, \quad r_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}, \quad k = \sqrt{k_1^2 + k_2^2},$$

приведем выражение (5.10) к виду

$$\begin{aligned} G &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \frac{J_0(kr) - J_0(kr_0)}{k} dk = \\ &= -\frac{1}{2\pi} \ln \frac{r}{r_0} = -\frac{1}{2\pi} \ln \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}, \end{aligned} \quad (5.12)$$

где  $J_0$  — функция Бесселя нулевого порядка, а постоянную  $r_0$  мы положили равной единице ( $r_0 = 1$ ). Отсюда легко получить, что логарифмический потенциал удовлетворяет уравнению

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) \ln \sqrt{x^2 + y^2} = 2\pi \delta(x) \delta(y). \quad (5.13)$$

Этот потенциал, точнее, величина

$$\Phi = -2\kappa \ln \sqrt{x^2 + y^2}, \quad (5.14)$$

соответствует потенциалу равномерно заряженной нити с линейной плотностью  $\kappa$ .

**г) Трехмерный случай.** Найдем решение трехмерного уравнения Пуассона, когда в уравнении (5.1) следует считать, что плотность  $\rho$  зависит от координат  $x, y, z$ , а оператор Лапласа равен

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \quad (5.15)$$

Для определения функции Грина имеем уравнение

$$\nabla^2 G = -\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = -\frac{1}{8\pi^3} \int e^{i\mathbf{k}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')} d^3k, \quad (5.16)$$

где

$$d^3k = dk_1 dk_2 dk_3, \quad \mathbf{k}\mathbf{r} = k_1x + k_2y + k_3z. \quad (5.17)$$

Из (5.16) находим

$$G = \frac{1}{8\pi^3} \int \frac{e^{i\mathbf{k}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}}{k^2} d^3k. \quad (5.18)$$

В случае «естественных» граничных условий, когда  $G = 0$  при  $r \rightarrow \infty$ , мы должны положить несингулярную часть функции Грина равной нулю ( $G_0 = 0$ ), поскольку мы не можем привести такого решения, которое всюду удовлетворяет уравнению Лапласа  $\nabla^2 G_0 = 0$  и не расходится в бесконечности ( $r \rightarrow \infty$ ).

Интегрирование выражения (5.18) легко произвести, вводя сферические координаты ( $k, \theta, \varphi$ ) в пространстве волновых векторов  $\mathbf{k}$ :

$$k = \sqrt{k_1^2 + k_2^2 + k_3^2}, \quad d^3k = k^2 dk \sin \theta d\theta d\varphi. \quad (5.19)$$

Направляя ось  $k_3$  по вектору  $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$ , находим

$$G = \frac{1}{8\pi^3} \int_0^\infty dk \int_0^\pi \sin \theta e^{i\mathbf{k}\mathbf{R} \cos \theta} d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi. \quad (5.20)$$

Интегрируя выражение (5.20) по сферическим углам с помощью равенства

$$\int_0^\pi \sin \theta e^{i\mathbf{k}\mathbf{R} \cos \theta} d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = 4\pi \frac{\sin kR}{kR}, \quad (5.21)$$

получаем

$$G = \frac{1}{2\pi^2 R} \int_0^{\infty} \frac{\sin kR}{k} dk = \frac{1}{4\pi R}. \quad (5.22)$$

Отсюда решение уравнения Пуассона (5.1) для трехмерного случая имеет вид

$$\Phi(\mathbf{r}) = \int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3x'. \quad (5.23)$$

В частности, если заряд является точечным, то, помещая его в начало координат, мы можем плотность заряда записать в виде

$$\rho(\mathbf{r}) = e \delta(\mathbf{r}). \quad (5.24)$$

Соответствующий потенциал равен

$$\Phi = \frac{e}{r}. \quad (5.25)$$

Отсюда легко показать, что

$$\nabla^2 \frac{1}{r} = -4\pi \delta(\mathbf{r}). \quad (5.26)$$

Аналогичным путем можно определить потенциал точечного заряда уравнения Юкавы, играющий большую роль в теории ядерных сил. Найдем решение уравнения Юкавы в случае единичного ядерного заряда:

$$(\nabla^2 - k_0^2) \Phi = -4\pi \delta(\mathbf{r}) = -\frac{1}{2\pi^2} \int e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} d^3k, \quad (5.27)$$

где  $m = \hbar k_0/c$  — масса  $\pi$ -мезонов, переносящих ядерные силы ( $\hbar$  — постоянная Планка). Производя деление на оператор  $(\nabla^2 - k_0^2)$ , находим

$$\Phi = \frac{1}{2\pi^2} \int \frac{e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}}{k^2 + k_0^2} d^3k = \frac{e^{-k_0 r}}{r}, \quad (5.28)$$

т. е.

$$(\nabla^2 - k_0^2) \frac{e^{-k_0 r}}{r} = -4\pi \delta(\mathbf{r}).$$

**д) Уравнение Даламбера.** Как известно, в основе электродинамики лежит уравнение Даламбера

$$\square \Phi(\mathbf{r}, t) = -4\pi \rho(\mathbf{r}, t), \quad (5.29)$$

где оператор Даламбера

$$\square = \nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}.$$



Решение дифференциального уравнения (5.29) согласно (3.9) — (3.12) следует искать в виде

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = 4\pi \int \rho(\mathbf{r}', t') G(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') d^3x' dt', \quad (5.30)$$

где функция Грина

$$G = G_1 + G_0 \quad (5.31)$$

состоит из сингулярной  $G_1$  и несингулярной  $G_0$  частей, которые мы можем представить соответственно в виде

$$G_1 = -\square^{-1} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') = \frac{c}{16\pi^4} \int \frac{e^{i\mathbf{k}\mathbf{R} - i c k_4 (t - t')}}{k^2 - k_4^2} d^4k, \quad (5.32)$$

$$G_0 = \frac{c}{16\pi^4} \int f(k_4) \delta(k^2 - k_4^2) e^{i\mathbf{k}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') - i c k_4 (t - t')} d^4k, \quad (5.33)$$

где  $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$ .

Несингулярная часть функции Грина, очевидно, во всех точках удовлетворяет соотношению  $\square G_0 = 0$ , поскольку соответствующее подинтегральное выражение содержит множитель

$$(k^2 - k_4^2) \delta(k^2 - k_4^2),$$

равный нулю.

Функция  $f(k_4)$  должна определяться из условия запаздывающего действия (см. (4.5)):

$$G = 0 \quad \text{при} \quad t < t', \quad (5.34)$$

согласно которому на потенциалы  $\Phi(\mathbf{r}, t)$  влияют только плотности зарядов  $\rho(\mathbf{r}', t')$ , взятые в моменты времени  $t' < t$ . Соответствующие потенциалы называют запаздывающими.

Интегрирование по  $k_4$  в выражении (5.32) произведем в смысле главного значения. Тогда, учитывая формулу (4.18), найдем, что \*)

$$G_1 = \frac{c}{16\pi^3} \frac{t - t'}{|t - t'|} \int e^{i\mathbf{k}\mathbf{R}} \frac{\sin ck(t - t')}{k} d^3k. \quad (5.35)$$

Для того чтобы получить запаздывающие потенциалы, мы должны в (5.33) положить функцию  $f(k_4)$  равной следующему значению:

$$f(k_4) = \pi i k_4 / |k_4|. \quad (5.36)$$

---

\*) Поскольку полюсы лежат на вещественной оси ( $k_4 = \pm k$ ), при интегрировании в плоскости комплексного переменного особые точки мы обходим с помощью полуокружностей, благодаря чему правую часть равенства (4.18) мы должны поделить пополам, т. е. (5.35) представляет собою главное значение интеграла.

Тогда используя формулу (2.47), найдем

$$G_0 = \frac{c}{16\pi^3} \int e^{i\mathbf{kR}} \frac{\sin ck(t-t')}{k} d^3k. \quad (5.37)$$

Отсюда для запаздывающих потенциалов имеем

$$\begin{aligned} G^r &= G_1 + G_0 = \\ &= \frac{c}{16\pi^4} \int e^{i\mathbf{kR} - i\mathbf{ck}_4(t-t')} \left[ \frac{1}{k^2 - k_4^2} + i\pi \frac{k_4}{|k_4|} \delta(k^2 - k_4^2) \right] d^4k, \end{aligned} \quad (5.38)$$

или

$$G^r = G_0 \left( 1 + \frac{t-t'}{|t-t'|} \right) = \begin{cases} 2G_0; & t > t', \\ 0; & t < t'. \end{cases} \quad (5.39)$$

Если нас интересуют опережающие потенциалы  $G^a$ , то в подынтегральном выражении формулы (5.38) перед вторым членом мы должны взять минус. Тогда вместо (5.39) будем иметь

$$G^a = \begin{cases} 0; & t > t', \\ 2G_0; & t < t'. \end{cases} \quad (5.40)$$

Математически это означает, что на потенциалы  $\Phi(r, t)$  будут оказывать влияние только те источники, которые взяты в момент времени  $t' > t$ . Опережающие потенциалы пока что не нашли вполне определенного практического применения, хотя некоторые задачи (например классическое уравнение Дирака — Лоренца) невозможно корректно решить без введения опережающего воздействия (см. ниже).

Интегрируя (5.37) по углам вектора  $\mathbf{k}$ , получаем

$$\begin{aligned} G_0 &= \frac{c}{4\pi^2 R} \int_0^\infty \sin kR \sin ck(t-t') dk = \\ &= \frac{1}{8\pi R} \left\{ \delta\left(t-t' - \frac{R}{c}\right) - \delta\left(t-t' + \frac{R}{c}\right) \right\} = \\ &= \frac{1}{4\pi c} \frac{t-t'}{|t-t'|} \delta\left((t-t')^2 - \frac{R^2}{c^2}\right). \end{aligned} \quad (5.41)$$

Аналогичным способом из (5.35) для функции  $G_1$  находим

$$\begin{aligned} G_1 &= \frac{1}{8\pi R} \left\{ \delta\left(t-t' - \frac{R}{c}\right) + \delta\left(t-t' + \frac{R}{c}\right) \right\} = \\ &= \frac{1}{4\pi c} \delta\left((t-t')^2 - \frac{R^2}{c^2}\right). \end{aligned} \quad (5.42)$$

Отсюда для функций Грина, описывающих запаздывающие и опережающие потенциалы, соответственно имеем

$$G^r = G_1 + G_0 = \frac{1}{4\pi R} \delta\left(t - t' - \frac{R}{c}\right), \quad (5.43)$$

$$G^a = G_1 - G_0 = \frac{1}{4\pi R} \delta\left(t - t' + \frac{R}{c}\right). \quad (5.44)$$

Ограничиваясь запаздывающими потенциалами, мы с помощью (5.30) можем написать известное выражение для решения уравнения Даламбера:

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = \int \frac{\delta\left(t' - t + \frac{R}{c}\right)}{R} \rho(\mathbf{r}', t') dt' d^3x' = \int \frac{\rho(\mathbf{r}', t')}{R} d^3x', \quad (5.45)$$

причем в последнем интеграле следует положить

$$t' = t - \frac{R}{c}.$$

**е) Интегрирование обобщенного уравнения Даламбера.** Найдем решение обобщенного уравнения Даламбера [2]

$$L \Phi(\mathbf{r}, t) = -4\pi \rho(\mathbf{r}, t), \quad (5.46)$$

где оператор

$$L = \nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - s \frac{\partial}{\partial t}. \quad (5.47)$$

В случае  $s \rightarrow 0$  уравнение (5.46) переходит в уравнение Даламбера. При  $c^2 \rightarrow \infty$  мы получаем трехмерное уравнение теплопроводности. Если  $c$  и  $s$  отличны от нуля, то уравнение (5.46) дает уравнения электромагнитных полей в однородной проводящей среде, причем коэффициент удельной электропроводности  $\sigma$  связан с величиной  $s$  соотношением  $s = 4\pi\sigma/c^2 > 0$ . Функция Грина уравнения (5.46) согласно (3.12) и (5.32) равна

$$G = -L^{-1} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \delta(t - t') = \frac{c}{16\pi^4} \int \frac{e^{i\mathbf{k}\mathbf{R} - i c k_4 (t-t')}}{k^2 - k_4^2 - i s c k_4} d^4k. \quad (5.48)$$

К функции  $G$  мы в принципе можем добавить еще несингулярную часть  $G_0$  (см. ниже). Интегрируя выражение (5.48) по переменной  $k_4$  при помощи формулы (4.18), найдем

$$G' = \begin{cases} \frac{c}{8\pi^3} e^{-\frac{s c^2}{2}(t-t')} \int e^{i\mathbf{k}\mathbf{R}} \frac{\sin(cK(t-t'))}{K} d^3k; & t > t', \\ 0; & t < t', \end{cases} \quad (5.49)$$

где  $K = \sqrt{k^2 - s^2 c^2/4}$ .

Таким образом, одна лишь сингулярная часть функции Грина  $G_1$  удовлетворяет принципу запаздывающего действия и поэтому несингулярную ее часть  $G_0$  мы положили равной нулю.

Вообще говоря, несингулярную часть функции Грина  $G_0$ , удовлетворяющую при всех значениях  $t, r$  однородному уравнению (5.46):  $LG_0 = 0$ , мы можем представить в виде

$$G_0 = e^{-\frac{sc^2}{2}(t-t')} \int C e^{i\mathbf{k}R} \frac{\sin(cK(t-t'))}{K} d^3k, \quad (5.50)$$

где  $C$  — произвольная постоянная. Равенство (5.50) имеет место как при  $t > t'$ , так и при  $t < t'$ , т. е. дает расходящееся значение при  $t \rightarrow -\infty$  и поэтому его можно вводить только в том случае, когда задача ограничена хотя бы со стороны отрицательных значений  $t$ .

Функция (5.49) получена в предположении, что  $s > 0$ . Если, наоборот,  $s < 0$ , то интеграл по  $k_4$  дает функцию Грина, соответствующую опережающему воздействию, которая обращается в нуль при  $t > t'^*$ .

После интегрирования по углам вектора  $\mathbf{k}$  мы можем выражение (5.49) представить в виде

$$G^r = -\frac{c}{2\pi^2 R} e^{-\frac{sc^2}{2}(t-t')} \frac{\partial}{\partial R} B(R, t-t'), \quad (5.51)$$

где

$$B(R, t-t') = \begin{cases} \int_0^\infty \cos kR \frac{\sin(c(t-t')K)}{K} dk = \\ 0 \\ \frac{\pi}{2} I_0\left(\frac{sc^2}{2} \sqrt{(t-t')^2 - \frac{R^2}{c^2}}\right); & t > t' + \frac{R}{c}, \\ 0; & t < t' + \frac{R}{c}. \end{cases} \quad (5.52)$$

Принимая во внимание, что выражение (5.52), содержащее функцию Бесселя от мнимого аргумента  $I_0$ , в точке  $t = t' + R/c$  претерпевает разрыв, равный  $\pi/2$ , мы при дифференцировании  $B$

\*) Заметим, что в граничных уравнениях Даламбера (5.38) и (5.40) мы можем также оставить лишь только сингулярную часть, если будем рассматривать их как предельное значение

$$G^{r,a} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{c}{16\pi^4} \int \frac{e^{i\mathbf{k}R - i c k_4 (t-t')}}{k^2 - k_4^2 - i s c k_4} d^4k, \quad (5.51a)$$

причем для запаздывающих потенциалов ( $G^r$ ) мы должны считать  $s > 0$  ( $s \rightarrow 0$ ), а для опережающих ( $G^a$ ), наоборот,  $s < 0$  ( $s \rightarrow 0$ ).

по  $R$  согласно формуле (2.50) наряду с обычной производной должны поставить еще дельта-функцию. Тогда окончательно находим

$$G^r = \begin{cases} \frac{e^{-\frac{sc^2}{2}(t-t')}}{4\pi} \left[ \frac{\delta\left(t-t' - \frac{R}{c}\right)}{R} + \frac{sc}{2} \frac{1}{\sqrt{(t-t')^2 - \frac{R^2}{c^2}}} \times \right. \\ \left. \times I_1\left(\frac{sc^2}{2} \sqrt{(t-t')^2 - \frac{R^2}{c^2}}\right) \right]; & t > t' + \frac{R}{c}, \\ 0; & t < t' + \frac{R}{c}. \end{cases} \quad (5.53)$$

В частности, в предельном случае  $s = 0$  (вакуум) мы из (5.53) получаем значение функции Грина, соответствующее запаздывающим потенциалам (см. также (5.43)):

$$G^r = \frac{1}{4\pi R} \delta\left(t - t' - \frac{R}{c}\right). \quad (5.54)$$

В этом случае наличие дельта-функции приводит к замене  $t'$  на  $t - R/c$  (запаздывающее действие), что говорит о распространении всех волн со скоростью  $c$ .

При наличии проводимости  $\sigma$  ( $s = 4\pi\sigma/c^2$ ) функция Грина будет содержать еще дополнительное слагаемое (пропорциональное функции Бесселя от мнимого аргумента  $I_1$ ), отличное от нуля для всех  $t' < t - R/c$ , т. е. источник как бы начинает испускать еще дополнительные волны, распространяющиеся со всевозможными скоростями, начиная от нуля и кончая  $c$ .

В другом предельном случае ( $c^2 \rightarrow \infty$  и  $s = 1/a^2$ ) мы получаем функцию Грина для трехмерного уравнения теплопроводности (обобщение функции Грина (4.19) с одномерного на трехмерный случай). Воспользовавшись асимптотическим значением для функции Бесселя  $I_1$ :

$$I_1(x) \underset{x \rightarrow \infty}{\approx} e^x / \sqrt{2\pi x}, \quad (5.55)$$

мы найдем, что

$$G^r = \frac{1}{8\pi a \sqrt{\pi} (t-t')^3} e^{-\frac{R^2}{4a^2(t-t')}}. \quad (5.56)$$

Окончательное решение исходного уравнения (5.46) мы можем представить в виде

$$\Phi(r, t) = 4\pi \int \rho(r', t') G(R, t - t') dt' d^3x', \quad (5.57)$$

причем вместо функции Грина мы должны подставить в общем случае ее значение (5.53).

## II. КЛАССИЧЕСКАЯ ЭЛЕКТРОДИНАМИКА

### § 6. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ КЛАССИЧЕСКОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ

а) Уравнения Максвелла—Лоренца. Как известно, уравнения Максвелла — Лоренца имеют вид \*):

первая группа

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 4\pi \mathbf{j}, \quad \operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi \rho, \quad (6.1)$$

вторая группа

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{H} = 0, \quad (6.2)$$

где  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  — векторы электрической и магнитной напряженностей.

В случае точечного электрона плотность заряда  $\rho$  и плотность тока  $\mathbf{j}$  мы можем положить соответственно равными

$$\rho = e \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \quad \mathbf{j} = \frac{\mathbf{v}}{c} \rho. \quad (6.3)$$

Здесь  $e$  — заряд электрона, а  $\mathbf{r}'$  — радиус-вектор, характеризующий его положение. При движении электрона радиус-вектор зависит от времени  $t$ , причем скорость электрона  $\mathbf{v}$  равна

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}'}{dt} = \dot{\mathbf{r}}', \quad (6.4)$$

а для плотности тока мы имеем

$$\mathbf{j} = \frac{\mathbf{v}}{c} \rho = e \frac{\mathbf{v}}{c} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \quad (6.5)$$

Очевидно, что плотность тока и плотность заряда удовлетворяют уравнению непрерывности

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j} = 0. \quad (6.6)$$

---

\*) Вывод уравнений Максвелла — Лоренца, который основан на обобщении ряда законов, установленных экспериментально, мы опускаем. Уравнения Максвелла — Лоренца должны удовлетворять релятивистской ковариантности и могут быть получены из релятивистски-инвариантной функции Лагранжа (вывод этих уравнений см. в [1, 2]).

В самом деле, из соотношений

$$\operatorname{div} \mathbf{j} = \frac{e}{c} (\dot{\mathbf{r}}' \nabla) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'),$$

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \rho}{\partial t} = e \left( \frac{\dot{\mathbf{r}}'}{c} \nabla' \right) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = -e \left( \frac{\dot{\mathbf{r}}'}{c} \nabla \right) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = -\operatorname{div} \mathbf{j}$$

следует равенство (6.6), причем  $\nabla'$  и  $\nabla$  — операторы, составленные соответственно из производных по  $\mathbf{r}'$  и  $\mathbf{r}$ , а скорость  $\dot{\mathbf{r}}'$  не зависит от координат.

Уравнения Максвелла — Лоренца следует дополнить еще силой Лоренца, действующей со стороны электромагнитного поля на электрон:

$$\frac{d}{dt} m_0 \frac{\mathbf{v}}{\sqrt{1 - \beta^2}} = e \left\{ \mathbf{E}(\mathbf{r}', t) + \frac{1}{c} [\mathbf{v} \mathbf{H}(\mathbf{r}', t)] \right\}, \quad (6.7)$$

где  $m_0$  — масса электрона, а  $\beta = v/c$ .

**б) Интегрирование уравнений Максвелла — Лоренца.** При интегрировании уравнений Максвелла — Лоренца скалярный  $\Phi$  и векторный  $\mathbf{A}$  потенциалы вводятся таким образом, чтобы автоматически удовлетворялись уравнения (6.2). Для этого мы должны положить

$$\mathbf{H} = \operatorname{rot} \mathbf{A}, \quad \mathbf{E} = -\operatorname{grad} \Phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}. \quad (6.8)$$

Соотношения (6.8) не дают однозначного определения потенциалов, так как еще не заданы источники вектор-потенциала  $\mathbf{A}$  (т. е. величина  $\operatorname{div} \mathbf{A}$ ). Поэтому если сделать переход к новым потенциалам  $\mathbf{A}'$ ,  $\Phi'$ :

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \operatorname{grad} f, \quad \Phi' = \Phi - \frac{1}{c} \frac{\partial f}{\partial t}, \quad (6.9)$$

где  $f$  — некоторая скалярная функция, то поля  $\mathbf{H}$  и  $\mathbf{E}$  с потенциалами  $\mathbf{A}'$  и  $\Phi'$  будут связаны, как и с  $\mathbf{A}$  и  $\Phi$ , соотношением (6.8). Заметим, что преобразования (6.9) называются калибровочными или градиентными.

Как правило, калибровочная функция  $f$  выбирается таким образом, чтобы потенциалы удовлетворяли дополнительному условию Лоренца

$$\operatorname{div} \mathbf{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0. \quad (6.10)$$

Условие (6.10) не является единственно возможным. Например, при исследовании распространения электромагнитных (световых) волн накладываются другие условия:

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = 0, \quad \Phi = 0, \quad (6.11)$$

соответствующие наличию лишь поперечных колебаний.

Подставляя (6.8) в первую группу уравнений Максвелла — Лоренца (6.1) и учитывая условие Лоренца (6.10) для скалярного и векторного потенциалов, мы получаем уравнение Даламбера

$$\square \begin{pmatrix} \Phi \\ \mathbf{A} \end{pmatrix} = -4\pi\rho \begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{v} \\ c \end{pmatrix}, \quad (6.12)$$

где  $\square = \nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}$  — оператор Даламбера. Величины, стоящие в скобках, являются по существу матрицами, причем единица, стоящая в правой части равенства (6.12), относится к скалярному потенциалу  $\Phi$ , а  $\mathbf{v}/c$  — к векторному потенциалу  $\mathbf{A}$ .

Решение уравнения (6.12) в случае запаздывающих потенциалов мы можем согласно (5.45) представить в виде

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = \int \frac{\delta\left(t' - t + \frac{R''}{c}\right)}{R''} \rho(\mathbf{r}'', t') dt' d^3x'', \quad (6.13)$$

где

$$\mathbf{R}'' = \mathbf{r} - \mathbf{r}'', \quad R'' = |\mathbf{r} - \mathbf{r}''|.$$

В случае опережающих потенциалов мы должны в аргументе дельта-функции перед  $R''/c$  поставить знак минус.

Аналогичное решение мы можем написать и для вектор-потенциала, сделав под интегралом равенства (6.13) замену  $\rho \rightarrow \rho\mathbf{v}/c$ .

В случае точечного электрона мы должны в (6.13) подставить значение плотности заряда (6.3). Тогда после интегрирования по  $\mathbf{r}''$  найдем потенциал точечного заряда

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = e \int \frac{\delta\left(t' - t + \frac{R'}{c}\right)}{R'} dt', \quad (6.14)$$

где

$$R' = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'(t')| = \sqrt{r^2 + r'^2 - 2(\mathbf{r}\mathbf{r}')}, \quad (6.15)$$

а радиус  $r'$  характеризует положение электрона в момент  $t'$ .

Интегрируя выражение (6.14) по  $t'$  с помощью формулы (2.48), найдем

$$\Phi = \frac{e}{R' \frac{\partial}{\partial t'} \left(t' + \frac{R'}{c}\right)} = \frac{e}{R' \left(1 - \frac{(\mathbf{v}(t')\mathbf{R}')}{cR'}\right)}, \quad (6.16)$$

где  $\mathbf{v}(t') = d\mathbf{r}'/dt'$ , а  $(\mathbf{v}(t')\mathbf{R}')/R'$  — проекция скорости электрона на радиус  $\mathbf{R}' = \mathbf{r} - \mathbf{r}'(t')$  в момент времени  $t'$ , которое



находится из уравнения

$$t' + \frac{R'(t')}{c} = t. \quad (6.17)$$

Аналогичным способом мы можем найти выражение для вектор-потенциала:

$$\mathbf{A} = \frac{e\mathbf{v}(t')}{cR' \left(1 - \frac{(\mathbf{v}(t') \mathbf{R}')}{cR'}\right)}. \quad (6.18)$$

Потенциалы точечного заряда, соответствующие запаздывающему решению, носят название потенциалов Лиенара — Вихерта [3, 4].

## § 7. УРАВНЕНИЯ МАКСВЕЛЛА — ЛОРЕНЦА В ЧЕТЫРЕХМЕРНОМ ВИДЕ

**а) Ковариантные и контравариантные векторы и тензоры.** Согласно специальной теории относительности волновые уравнения, описывающие движение любых элементарных частиц, должны сохранять свою ковариантную форму при переходе от одной инерциальной системы координат к другой. Это требование, являющееся обобщением многих экспериментальных фактов, на современном этапе развития физики, как правило, кладется в основу построения любой теории элементарных частиц: как классической, так и квантовой.

При переходе от одной системы координат ( $x^\mu = x, y, z, ct$ ) к другой ( $x'^\alpha = x', y', z', ct'$ ) составляющие тензоров [2, 5] должны преобразовываться по определенным правилам [6]\*).

Скалярные величины (тензоры нулевого ранга) при таком переходе остаются неизменными:

$$B' = B; \quad (7.1)$$

векторные величины (тензоры первого ранга) преобразуются по закону

$$B'^\alpha = \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\mu} B^\mu \quad (\text{контравариантный вектор}), \quad (7.2)$$

$$B'_\alpha = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\alpha} B_\mu \quad (\text{ковариантный вектор}); \quad (7.3)$$

величины, образующие тензоры второго ранга, подчиняются

\* ) Здесь и в дальнейшем латинские буквы (например  $n$ ) пробегают значения 1, 2, 3 ( $x, y, z$ ), а греческие (например  $\alpha$  или  $\mu$ ) — 1, 2, 3, 4 ( $x, y, ct$  или  $i'ct$ ). Наличие двух величин с одинаковым индексом означает суммирование по этому индексу. Случай, когда суммирования нет, будут оговорены особо.

следующим законам преобразования:

$$B'^{\alpha\beta} = \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial x'^{\beta}}{\partial x^{\nu}} B^{\mu\nu} \quad (\text{контравариантный тензор}), \quad (7.4)$$

$$B'_{\alpha\beta} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\alpha}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\beta}} B_{\mu\nu} \quad (\text{ковариантный тензор}), \quad (7.5)$$

$$B_{\alpha}^{\beta} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\alpha}} \frac{\partial x'^{\beta}}{\partial x^{\nu}} B_{\mu}^{\nu} \quad (\text{смешанный тензор}). \quad (7.6)$$

Эти законы преобразования легко обобщить на случай тензоров более высокого ранга. Заметим, что пространственно-временные координаты точки преобразуются по закону (7.2) и поэтому в своей совокупности образуют контравариантный вектор.

Переход от одной инерциальной системы координат к другой складывается в общем случае из параллельного переноса и четырехмерных поворотов одной системы отсчета относительно другой. При параллельном переносе, изменяющем лишь начало отсчета, координаты связаны между собою соотношением

$$x'^{\mu} = x^{\mu} + a^{\mu}. \quad (7.7)$$

При пространственных поворотах, например вокруг оси  $z$  на угол  $\varphi$ , мы имеем

$$\begin{aligned} x' &= x \cos \varphi + y \sin \varphi, & y' &= -x \sin \varphi + y \cos \varphi, \\ z' &= z, & t' &= t. \end{aligned} \quad (7.8)$$

Наконец, преобразования Лоренца (пространственно-временной поворот) имеют вид

$$x' = \frac{x - vt}{k}, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \frac{t - vx/c^2}{k}, \quad (7.9)$$

где  $k = \sqrt{1 - \beta^2}$ , а  $v = c\beta$  — скорость движения одной системы координат относительно другой, которую мы направим вдоль оси  $x$ . Вводя гиперболические функции

$$\operatorname{ch} \varphi_0 = 1/k, \quad \operatorname{sh} \varphi_0 = \beta/k, \quad (7.10)$$

мы можем преобразования (7.9) представить в виде ( $x^{\mu} = x, y, z, ct$ ;  $x_{\mu} = x, y, z, -ct$ )

$$\begin{cases} x' = x \operatorname{ch} \varphi_0 - ct \operatorname{sh} \varphi_0, \\ ct' = ct \operatorname{ch} \varphi_0 - x \operatorname{sh} \varphi_0; \end{cases} \quad \begin{cases} x = x' \operatorname{ch} \varphi_0 + ct' \operatorname{sh} \varphi_0, \\ ct = ct' \operatorname{ch} \varphi_0 + x' \operatorname{sh} \varphi_0. \end{cases} \quad (7.11)$$

Сравнивая формулы (7.11) с формулами (7.8), мы видим, что преобразования Лоренца эквивалентны повороту в пространственно-временной плоскости на мнимый угол.

Заметим, что при параллельном переносе, а также при пространственных поворотах законы преобразования для контра-

вариантных и ковариантных тензоров будут одинаковыми, поскольку  $\partial x'/\partial y = \partial y/\partial x'$  и т. д., а при пространственно-временных вращениях — различны, что видно из соотношения  $\partial x'/\partial ct = -\partial ct/\partial x'$ , и т. д. Если формально ввести вместо времени мнимую составляющую ( $x_\mu = x, y, z, i'ct$ )\*, то преобразования (7.11) принимают вид

$$\begin{cases} x'_1 = x_1 \cos \gamma + x_4 \sin \gamma, \\ x'_4 = x_4 \cos \gamma - x_1 \sin \gamma, \\ x'_2 = x_2, \quad x'_3 = x_3; \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = x'_1 \cos \gamma - x'_4 \sin \gamma, \\ x_4 = x'_4 \cos \gamma + x'_1 \sin \gamma, \end{cases} \quad (7.12)$$

где

$$\cos \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 + (i'\beta)^2}}, \quad \sin \gamma = \frac{i'\beta}{\sqrt{1 + (i'\beta)^2}}. \quad (7.13)$$

В этом случае легко показать, что

$$\partial x'_1/\partial x_4 = \partial x_4/\partial x'_1 \quad \text{и вообще} \quad \partial x'_\mu/\partial x_\alpha = \partial x_\alpha/\partial x'_\mu,$$

т. е. законы преобразования для контравариантных и для ковариантных тензоров будут одинаковыми, благодаря чему мы можем не делать различия между ними.

**б) Релятивистски-ковариантная запись уравнений Максвелла — Лоренца.** Для описания электромагнитного поля в релятивистски-ковариантной форме введем четырехмерный вектор-потенциал, составляющие которого связаны с трехмерным векторным потенциалом  $\mathbf{A}$  и скалярным потенциалом  $\Phi$  соотношениями

$$A_1 = A_x, \dots, A_4 = i'\Phi.$$

При переходе к другой инерциальной системе они преобразуются так же, как и компоненты вектора перемещения:

$$A'_\alpha = \frac{\partial x'_\alpha}{\partial x_\mu} A_\mu = \frac{\partial x_\mu}{\partial x'_\alpha} A_\mu. \quad (7.14)$$

В трехмерных обозначениях, когда скорость движения  $v$  одной инерциальной системы (штрихованной) направлена по оси  $x$  относительно другой (нештрихованной), эти компоненты преобразуются по закону (7.9):

$$A'_x = \frac{A_x - \beta\Phi}{k}, \quad \Phi' = \frac{\Phi - \beta A_x}{k}, \quad A'_y = A_y, \quad A'_z = A_z. \quad (7.15)$$

\* Мы вводим две мнимые величины  $i$  и  $i'$  [7]. Квадраты обеих величин должны быть равны друг другу:

$$i'^2 = i^2 = -1. \quad (7.11a)$$

Однако эти величины должны различаться при переходе к комплексно-сопряженным значениям:

$$i^* = -i, \quad i'^* = i'. \quad (7.11b)$$

Электромагнитные поля, образующие в четырехмерном пространстве антисимметричный тензор второго ранга, равны

$$H_{\mu\nu} = A_{\nu, \mu} - A_{\mu, \nu} = -H_{\nu\mu}, \quad (7.16)$$

где

$$A_{\nu, \mu} = \partial A_{\nu} / \partial x_{\mu}. \quad (7.17)$$

Условие Лоренца (6.10) в четырехмерной записи принимает вид

$$A_{\nu, \nu} = \partial A_{\nu} / \partial x_{\nu} = 0. \quad (7.18)$$

Подставляя в (7.16) значения для компонент четырехмерного потенциала и учитывая (6.8), мы легко установим связь между компонентами тензора (7.16) и полями  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$ :

$$\begin{pmatrix} H_x & H_y & H_z \\ i'E_x & i'E_y & i'E_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H_{23} & H_{31} & H_{12} \\ H_{41} & H_{42} & H_{43} \end{pmatrix}. \quad (7.19)$$

Вторую группу уравнений Максвелла — Лоренца (см. (6.2)) мы можем записать в четырехмерном ковариантном виде:

$$\frac{\partial H_{\mu\nu}}{\partial x_{\lambda}} + \frac{\partial H_{\nu\lambda}}{\partial x_{\mu}} + \frac{\partial H_{\lambda\mu}}{\partial x_{\nu}} = 0, \quad (7.20)$$

причем все греческие буквы  $\mu, \nu, \lambda$ , принимающие значения 1, 2, 3, 4, должны быть различными (четыре уравнения). Если два или все три индекса равны между собою, то, учитывая антисимметричность тензора  $H_{\mu\nu}$  ( $H_{\mu\nu} = -H_{\nu\mu}$ ,  $H_{11} = 0$  и т. д.), мы автоматически получим нуль.

Для того чтобы записать в релятивистски-ковариантном виде первую группу уравнений Максвелла — Лоренца (6.1), мы объединим плотность заряда (6.3) и плотность тока (6.5) в единый четырехмерный вектор  $j_{\mu}$ , равный [3]\*)

$$j_{\mu}(x) = \frac{e}{c} \int v'_{\mu} \delta_4(x - x') d\tau. \quad (7.21)$$

Здесь  $v'_{\mu} = \partial x'_{\mu} / \partial \tau = \dot{x}'_{\mu}$  — четырехмерная скорость; четырехмерная плотность  $\delta_4$  равна

$$\delta_4(x - x') = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'(\tau)) \delta(t - t'(\tau)), \quad (7.22)$$

а  $\tau$  — собственное время электрона, связанное с лабораторным  $t'$  соотношением

$$d\tau = dt' \sqrt{1 - (v'/c)^2}, \quad (7.23)$$

где трехмерная скорость  $v' = dr'/dt'$ .

\*) Здесь под  $x$  понимаем совокупность координат  $\mathbf{r}, t$ .

Интегрируя выражение (7.21) по собственному времени  $\tau$ , найдем

$$j_4(x) = i'e \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'(t)) = i'\rho, \quad \mathbf{j}(x) = \frac{v}{c} e \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'(t)) = \frac{v}{c} \rho, \quad (7.24)$$

где скорость  $\mathbf{v} = d\mathbf{r}'/dt$ . Поэтому первую группу уравнений Максвелла — Лоренца (см. (6.1)) с учетом (7.16) мы можем представить в виде

$$\partial H_{\mu\nu} / \partial x_\nu = 4\pi j_\mu, \quad (7.25)$$

причем в случае точечного электрона четырехмерный ток определяется равенством (7.21).

Из равенств (7.16), (7.20) и (7.24) следует, что уравнения Максвелла — Лоренца в четырехмерном пространстве могут быть записаны в ковариантном виде и поэтому при переходе от одной инерциальной системы к другой тензор электромагнитного поля должен преобразовываться по закону \*)

$$H'_{\alpha\beta} = \frac{\partial x'_\alpha}{\partial x_\mu} \frac{\partial x'_\beta}{\partial x_\nu} H_{\mu\nu} = \frac{\partial x_\mu}{\partial x'_\alpha} \frac{\partial x_\nu}{\partial x'_\beta} H_{\mu\nu}. \quad (7.26)$$

Силу Лоренца (6.7) мы также можем записать в ковариантном четырехмерном виде:

$$m_0 \ddot{x}'_\mu = \frac{e}{c} \dot{x}'_\nu H_{\mu\nu}(x'). \quad (7.27)$$

**в) Функция действия.** Напишем прежде всего функцию действия, которая, с одной стороны, приводит к первой группе уравнений Максвелла — Лоренца (7.25), а с другой, — к уравнению движения электрона (7.26) \*\*). Эта функция действия состоит из трех частей:

$$S = S_1 + S_2 + S_3.$$

Первая часть  $S_1$  описывает электромагнитное поле [3]:

$$S_1 = \int L_1 \frac{d^4x}{i^4c}, \quad (7.28)$$

\*) В трехмерных обозначениях равенство (7.26) мы можем представить в виде

$$\begin{aligned} E'_x &= E_x, & E'_y &= \frac{E_y - \beta H_z}{k}, & E'_z &= \frac{E_z + \beta H_y}{k}, \\ H'_x &= H_x, & H'_y &= \frac{H_y + \beta E_z}{k}, & H'_z &= \frac{H_z - \beta E_y}{k}. \end{aligned} \quad (7.26a)$$

\*\*\*) Вторая группа уравнений Максвелла — Лоренца автоматически следует из антисимметричности тензора электромагнитного поля (7.16) (см. уравнение (7.20)).

где

$$\frac{d^4x}{i'c} = dx dy dz dt = d^3x dt, \quad (7.29)$$

а функция Лагранжа (лагранжиан)  $L_1$ , представляющая собою инвариант, равна

$$L_1 = - \frac{1}{16\pi} H_{\mu\nu} H_{\mu\nu} = \frac{1}{8\pi} (E^2 - H^2). \quad (7.30)$$

Вторая часть функции действия  $S_2$  соответствует электрону. Она также представляет собою скаляр:

$$S_2 = \int L_2 d\tau, \quad (7.31)$$

где  $\tau$  — собственное время (см. (7.23)), а лагранжиан

$$L_2 = - \sqrt{-\dot{x}'_{\mu}\dot{x}'_{\mu}} m_0 c. \quad (7.32)$$

Наконец, третья часть функции действия описывает энергию взаимодействия электрона с электромагнитным полем:

$$S_3 = \frac{e}{c} \int \delta_4(x - x') \dot{x}'_{\mu} A_{\mu}(x) \frac{d^4x}{i'c} d\tau, \quad (7.33)$$

где величина  $\delta_4(x - x')$  и элемент объема  $d^4x$  определяются соответственно равенствами (7.22) и (7.29).

Если мы хотим получить первую группу уравнений Максвелла — Лоренца, ограничиваясь наличием одного электрона\*), то в функции действия мы должны оставить первую и третью ее части, т. е. положить

$$S_{13} = S_1 + S_3 = \int L_{13} \frac{d^4x}{i'c}, \quad (7.34)$$

причем лагранжиан (см. (7.30) и (7.33)\*\*) будет равен

$$L_{13} = - \frac{1}{16\pi} H_{\mu\nu}(x) H_{\mu\nu}(x) + \frac{e}{c} \int \delta_4(x - x') \dot{x}'_{\mu} A_{\mu}(x) d\tau. \quad (7.35)$$

\*) Функции действия (7.31) и (7.33) написаны для одного электрона. Если мы имеем несколько электронов, то мы должны взять сумму этих функций действия по всем электронам, взяв для каждого из них свое собственное время.

\*\*\*) В трехмерных обозначениях, учитывая равенства (7.19) и (7.21), мы можем лагранжиан электромагнитного поля представить в виде

$$L_{13} = \frac{1}{8\pi} (E^2 - H^2) + e \left( \frac{(\mathbf{v}' \cdot \mathbf{A})}{c} - \Phi \right) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'(t)), \quad (7.35a)$$

где  $\mathbf{r}$  и  $\mathbf{r}'(t)$  — координаты соответственно электромагнитных полей и электрона, движущегося со скоростью  $\mathbf{v}' = d\mathbf{r}'/dt$ .

Вариационный принцип даёт следующие четыре уравнения ( $\mu = 1, 2, 3, 4$ ) для описания электромагнитного поля [5]:

$$\frac{\partial}{\partial x_\nu} \frac{\partial L_{13}}{\partial A_{\mu, \nu}} - \frac{\partial L_{13}}{\partial A_\mu} = 0. \quad (7.36)$$

Принимая во внимание соотношения (7.16) и (7.17), имеем

$$\frac{\partial L_{13}}{\partial A_{\mu, \nu}} = \frac{1}{4\pi} H_{\mu\nu}, \quad (7.37)$$

$$\frac{\partial L_{13}}{\partial A_\mu} = \frac{e}{c} \int \delta_4(x - x') v'_\mu d\tau. \quad (7.38)$$

Подставляя (7.37) и (7.38) в (7.36), получим первую группу уравнений Максвелла — Лоренца в четырехмерном виде (см. (7.25)).

Уравнение движения электрона в электромагнитном поле (7.27), в правой части которого стоит сила Лоренца, мы можем получить из функции действия, если оставим в ней вторую ( $S_2$ ) и третью ( $S_3$ ) части (поскольку первая часть не зависит от координат электрона)\*):

$$S_{23} = S_2 + S_3 = \int L_{23} d\tau, \quad (7.39)$$

где лагранжиан (см. (7.31) и (7.33))

$$L_{23} = -V \sqrt{-\dot{x}'_\nu \dot{x}'_\nu} m_0 c + \frac{e}{c} \int \delta_4(x - x') \dot{x}'_\nu A_\nu(x) \frac{d^1 x}{i' c}. \quad (7.40)$$

Вариационный принцип даёт следующее уравнение движения в четырехмерной форме:

$$\frac{d}{d\tau} \frac{\partial L_{23}}{\partial \dot{x}'_\mu} - \frac{\partial L_{23}}{\partial x'_\mu} = 0. \quad (7.41)$$

\* В трехмерных обозначениях функция действия (7.39) записывается в виде

$$S_{23} = \int L'_{23} dt'. \quad (7.39a)$$

Здесь

$$L'_{23} = L_2, \frac{d\tau}{dt'} = -\sqrt{1 - \frac{v'^2}{c^2}} m_0 c^2 + e \left( \frac{(\mathbf{v}' \mathbf{A}')}{c} - \Phi' \right), \quad (7.40a)$$

где  $\mathbf{v}' = d\mathbf{r}'/dt'$  — трехмерная скорость электрона, а потенциалы  $\mathbf{A}'$  и  $\Phi'$  становятся функциями координат электрона  $\mathbf{r}'$ .

Из (7.40) находим [3]

$$\begin{aligned} \frac{\partial L_{23}}{\partial \dot{x}'_{\mu}} &= \frac{m_0 c \dot{x}'_{\mu}}{\sqrt{-\dot{x}'_{\nu} \dot{x}'_{\nu}}} + \frac{e}{c} \int \delta_4(x-x') A_{\mu}(x) \frac{d'x}{i'c}, \\ \frac{\partial L_{23}}{\partial x'_{\mu}} &= \frac{e}{c} \int \dot{x}'_{\nu} A_{\nu}(x) \frac{\partial}{\partial x'_{\mu}} \delta_4(x-x') \frac{d'x}{i'c} = \\ &= \frac{e}{c} \dot{x}'_{\nu} \int \delta_4(x-x') \frac{\partial A_{\nu}(x)}{\partial x_{\mu}} \frac{d'x}{i'c}, \quad (7.42) \\ \frac{d}{d\tau} \frac{m_0 c \dot{x}'_{\mu}}{\sqrt{-\dot{x}'_{\nu} \dot{x}'_{\nu}}} &= \frac{m_0 c \ddot{x}'_{\mu}}{\sqrt{-\dot{x}'_{\nu} \dot{x}'_{\nu}}} + \frac{m_0 c \dot{x}'_{\mu} (\dot{x}'_{\sigma} \ddot{x}'_{\sigma})}{(\sqrt{-\dot{x}'_{\nu} \dot{x}'_{\nu}})^3}, \\ \frac{d}{d\tau} \frac{e}{c} \int \delta_4(x-x') A_{\mu}(x) \frac{d'x}{i'c} &= \frac{e}{c} \int \dot{x}'_{\nu} \delta_4(x-x') \frac{\partial A_{\mu}(x)}{\partial x_{\nu}} \frac{d'x}{i'c}. \end{aligned}$$

Отсюда, учитывая (7.41), получаем следующее уравнение движения электрона:

$$\frac{m_0 c \ddot{x}'_{\mu}}{\sqrt{-\dot{x}'_{\nu} \dot{x}'_{\nu}}} + \frac{m_0 c \dot{x}'_{\mu} (\dot{x}'_{\sigma} \ddot{x}'_{\sigma})}{(\sqrt{-\dot{x}'_{\nu} \dot{x}'_{\nu}})^3} = \frac{e}{c} \dot{x}'_{\nu} H'_{\mu\nu}, \quad (7.43)$$

где  $H'_{\mu\nu} = H_{\mu\nu}(x')$ .

Умножая равенство (7.43) на  $\dot{x}'_{\mu}$ , суммируя по всем индексам  $\mu$  и учитывая антисимметричность тензора  $H'_{\mu\nu}$ , найдем, что

$$\dot{x}'_{\nu} \dot{x}'_{\mu} H'_{\mu\nu} = 0. \quad (7.44)$$

Из последнего равенства следует ортогональность четырехмерного ускорения к четырехмерной скорости, т. е.

$$\dot{x}'_{\mu} \ddot{x}'_{\mu} = 0. \quad (7.45)$$

Поэтому квадрат четырехмерной скорости должен оставаться величиной постоянной:

$$-\dot{x}'_{\nu} \dot{x}'_{\nu} = c^2 \dot{t}'^2 - \dot{x}'_n \dot{x}'_n = \text{const.}$$

Постоянная величина может быть найдена из условия, что для неподвижного электрона ( $t' = \tau$ )  $\dot{x}'_n = 0$ ,  $\dot{t}' = 1$ . Поэтому

$$-\dot{x}'_{\nu} \dot{x}'_{\nu} = c^2 \dot{t}'^2 - \dot{x}'_n \dot{x}'_n = c^2, \quad (7.46)$$

а уравнение движения для электрона (см. (7.43)) принимает вид

$$m_0 \ddot{x}'_{\mu} = \frac{e}{c} \dot{x}'_{\nu} H'_{\mu\nu}, \quad (7.47)$$

что представляет собою релятивистски-ковариантную запись силы Лоренца (см. (7.27)).



г) **Уравнения Лагранжа и Гамильтона в релятивистской теории электрона.** В дальнейшем координаты электрона мы обозначим без штриха. Это практически можно всегда сделать в случае точечного электрона, когда при взаимодействии электромагнитные поля и электроны следует брать с одними и теми же значениями четырехмерных координат. Кроме того, при рассмотрении конкретных задач мы часто будем пользоваться трехмерными обозначениями как для координат  $(r, i'ct)$ , так и для полей. Прежде всего запишем уравнение (7.47) в трехмерных обозначениях, учитывая при этом равенства (7.23) и (7.19):

$$\frac{d}{dt} \frac{m_0 \mathbf{v}}{\sqrt{1 - \beta^2}} = e \left( \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v} \mathbf{H}] \right), \quad (7.48)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}} = e (\mathbf{v} \mathbf{E}), \quad (7.49)$$

где  $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$  — трехмерная скорость электрона.

Левая часть уравнения (7.48) представляет собою силу Лоренца, а правая часть уравнения (7.49) — механическую работу, которую совершает в единицу времени электромагнитное поле при движении заряда. Заметим, что механическую работу совершает только электрическое поле. Магнитное поле механической работы не совершает, так как оно направлено перпендикулярно к скорости движения \*).

Лагранжиан должен быть выбран таким образом, чтобы из вариационного принципа

$$\delta S = \delta \int L dt = 0, \quad (7.50)$$

т. е. уравнения

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}} = 0, \quad (7.51)$$

следовали уравнения (7.48). С этой целью для лагранжиана  $L$  мы должны выбрать выражение (7.40а), т. е. положить [2] \*\*)

$$L = - \sqrt{1 - \beta^2} m_0 c^2 - e (\Phi - (\beta \mathbf{A})). \quad (7.52)$$

\*) Как будет показано ниже, магнитное поле все же совершает работу, но не механическую, а (см. ниже) связанную с излучением, поскольку оно сообщает электрону центростремительное ускорение, а ускоренно движущийся электрон должен излучать.

\*\*) В нерелятивистском приближении, когда учитываются лишь члены, включающие порядок  $\beta = v/c$  ( $\beta^2 \approx 0$ ), лагранжиан принимает вид

$$L_{\text{нер}} \approx L - m_0 c^2 = \frac{m_0 v^2}{2} - e (\Phi - (\beta \mathbf{A})). \quad (7.52a)$$

Здесь от функции Лагранжа мы отняли постоянную величину  $m_0 c^2$ , соответствующую собственной энергии. Это не может изменить уравнения движения (7.51).

Тогда находим

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}} = \nabla L = e(\nabla(\beta \mathbf{A}) - \nabla\Phi),$$

а для трехмерного импульса имеем

$$\mathbf{p} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} = \frac{m_0 \mathbf{v}}{\sqrt{1 - \beta^2}} + \frac{e}{c} \mathbf{A}. \quad (7.53)$$

Подставляя (7.53) в (7.51) и учитывая соотношения

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{A}, \quad (7.54)$$

$$\nabla(\mathbf{v} \mathbf{A}) - (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{A} = [\mathbf{v} [\nabla \mathbf{A}]] = [\mathbf{v} \mathbf{H}],$$

мы найдем для описания движения электрона уравнение (7.48).

Уравнение же (7.49) является следствием уравнения (7.48). В самом деле, умножая (7.48) скалярно на  $\mathbf{v}$  и принимая во внимание, что

$$\left( \mathbf{v} \frac{d}{dt} \frac{m_0 \mathbf{v}}{\sqrt{1 - \beta^2}} \right) = \frac{d}{dt} \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad (7.55)$$

мы найдем уравнение (7.49). Выражение

$$E_{\text{кин}} = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (7.56)$$

можно трактовать как кинетическую энергию электрона в релятивистском случае.

Заметим, что в четырехмерном представлении одно из четырех уравнений движения (7.47) является следствием трех остальных, благодаря тому, что существует соотношение (7.45), которое в трехмерных обозначениях принимает вид (7.55).

Найдем, далее, функцию Гамильтона (гамильтониан), которая связана с лагранжианом соотношением [8]

$$H = (\mathbf{p} \mathbf{v}) - L = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}} + e\Phi. \quad (7.57)$$

Воспользовавшись тождеством

$$\frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}} = c \sqrt{\frac{m_0^2 v^2}{1 - \beta^2} + m_0^2 c^2}, \quad (7.58)$$

а также значением импульса (7.53), мы можем гамильтониан (7.57) записать через импульс\*):

$$H = c \sqrt{\left( \mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2 + m_0^2 c^2} + e\Phi. \quad (7.59)$$

\* ) В нерелятивистском приближении ( $\beta^2 \approx 0$ ) гамильтониан принимает вид:

$$H^{\text{нер}} = H - m_0 c^2 = \frac{1}{2m_0} \left( \mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2 + e\Phi.$$

Канонические уравнения Гамильтона в релятивистской теории сохраняют тот же вид, что и в нерелятивистской. В самом деле, из уравнений Лагранжа (7.51) и связи лагранжиана и гамильтониана (7.57) следует первая группа канонических уравнений Гамильтона:

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = - \frac{\partial H}{\partial \mathbf{r}}. \quad (7.60)$$

Дифференцируя (7.59) по  $\mathbf{p}$  и принимая во внимание соотношение (7.53), найдем вторую группу канонических уравнений:

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}. \quad (7.61)$$

Канонические уравнения Гамильтона позволяют найти полную производную по времени от некоторой функции, зависящей от времени  $t$ , импульса  $\mathbf{p}$  и координаты  $\mathbf{q}$  [2]:

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial \mathbf{r}} \frac{d\mathbf{r}}{dt} + \frac{\partial F}{\partial \mathbf{p}} \frac{d\mathbf{p}}{dt}.$$

Подставляя сюда вместо производных  $d\mathbf{p}/dt$  и  $d\mathbf{r}/dt$  их значения из (7.60) и (7.61), находим

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + [H, F], \quad (7.62)$$

где

$$[H, F] = \left( \frac{\partial F}{\partial \mathbf{r}} \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} - \frac{\partial F}{\partial \mathbf{p}} \frac{\partial H}{\partial \mathbf{r}} \right) \quad (7.63)$$

— классические скобки Пуассона.

Выражение (7.62) представляет собою наиболее общую запись канонических уравнений Гамильтона. В частности, полагая в них функцию  $F$  равной  $\mathbf{p}$  или  $\mathbf{r}$ , мы получаем соответственно уравнения (7.60) и (7.61).

Если вместо функции  $F$  подставить гамильтониан  $H$ , мы найдем, что  $[H, H] = 0$  и поэтому

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t}.$$

Отсюда следует, что если потенциалы  $\mathbf{A}$  и  $\Phi$  не зависят от времени, т. е.  $\partial H/\partial t = 0$ , то мы получаем закон сохранения функции Гамильтона, которую мы приравниваем энергии электрона:

$$H = E = \text{const}. \quad (7.64)$$

**д) Уравнение Гамильтона—Якоби в релятивистской теории.** При выводе уравнений Лагранжа задается множество произвольных траекторий, координаты которых должны обладать лишь заданными значениями в начальный  $t_0 = 0$  и в конечный  $t$

моменты времени \*). Затем находится реальная траектория, которая должна дать минимум функции действия (начало наименьшего действия):

$$S = \int_0^t L dt. \quad (7.65)$$

Этому условию удовлетворяет уравнение Лагранжа (7.51).

При выводе же уравнения Гамильтона — Якоби, наоборот, задается множество реальных траекторий, удовлетворяющих вариационному уравнению Лагранжа (7.51), а затем из них выбираются такие, которые проходят через заданные точки (начальную и конечную) или удовлетворяют заданным начальным условиям (начало переменного действия). Поэтому при анализе уравнений Гамильтона — Якоби следует варьировать начальные и конечные координаты, которые определяют произвольные постоянные. Мы не будем более подробно останавливаться на этом вопросе (он достаточно хорошо изложен во многих курсах теоретической механики, см., например, [9]), а ограничимся простым выводом уравнения Гамильтона — Якоби [10], которое обобщим на случай релятивистского движения электрона в произвольном электромагнитном поле.

Взяв полную производную по времени от функции действия (7.65) и учтя связь функций Лагранжа и Гамильтона (7.57), имеем

$$\frac{dS}{dt} = (\mathbf{v} \nabla S) + \frac{\partial S}{\partial t} = l = (\mathbf{v} \mathbf{p}) - H. \quad (7.66)$$

Отсюда мы находим связь импульса  $\mathbf{p}$  и гамильтониана  $H$  с функцией действия  $S$ :

$$\mathbf{p} = \nabla S, \quad H = -\frac{\partial S}{\partial t}. \quad (7.67)$$

Подставляя значения (7.67) в (7.59) и избавляясь от квадратного корня, мы найдем уравнение Гамильтона — Якоби в релятивистском случае [8]:

$$\left(-\frac{\partial S}{\partial t} - e\Phi\right)^2 = c^2 \left(\nabla S - \frac{e}{c} \mathbf{A}\right)^2 + m_0^2 c^4. \quad (7.68)$$

Решая уравнение (7.68), найдем  $S$  как функцию времени  $t$ , координат  $\mathbf{r}(x, y, z)$  и трех произвольных постоянных  $a_1, a_2, a_3$ . Эти постоянные величины можно связать, например, с начальными координатами  $\mathbf{r}_0(x_0, y_0, z_0)$ . Для простоты рассуждений ограничимся одномерным случаем, когда  $S$  является функцией трех величин:

$$S = S(x, x_0, t).$$

\*) Вместо конечных координат, как правило, задается начальная скорость.

Отсюда легко найти вариацию ( $t = \text{const}$ )

$$\delta S = \frac{\partial S}{\partial x} \delta x + \frac{\partial S}{\partial x_0} \delta x_0. \quad (7.69)$$

С другой стороны, для определения той же вариации от  $S$  мы можем воспользоваться соотношением (7.65), из которого следует

$$\delta S = \int_0^t \left( \frac{\partial L}{\partial x} \delta x + p_x \delta \dot{x} \right) dt, \quad (7.70)$$

где  $p_x = \partial L / \partial \dot{x}$ .

Поскольку при выводе уравнения Гамильтона — Якоби все траектории являются реальными, т. е. для них имеет место соотношение (7.51), мы можем подынтегральное выражение правой части равенства (7.70) преобразовать к виду

$$\frac{\partial L}{\partial x} \delta x + p_x \delta \dot{x} = \frac{d}{dt} (p_x \delta x).$$

Учитывая это, из (7.70) получаем

$$\delta S = p_x \delta x - p_{0x} \delta x_0. \quad (7.71)$$

Сопоставляя равенства (7.69) с (7.71), находим

$$p_x = \partial S / \partial x, \quad (7.72)$$

$$p_{0x} = -\partial S / \partial x_0 = \text{const}. \quad (7.73)$$

Соотношение (7.72) приводит нас вновь к связи импульса и функции действия (см. (7.67)), а соотношение (7.73) — к так называемой теореме Якоби, которую легко обобщить на случай  $n$  степеней свободы.

Из теоремы Якоби следует, что, определив из уравнения Гамильтона — Якоби (7.68) функцию действия  $S$  как функцию времени  $t$ , координат  $x_n$  и произвольных постоянных  $a_n$  ( $n$  — число степеней свободы), а затем взяв от функции  $S$  частные производные по произвольным постоянным  $a_n$  и приравняв их новым произвольным постоянным  $b_n$ , мы получаем интегралы движения

$$\partial S / \partial a_n = b_n. \quad (7.74)$$

Формула (7.74) представляет собою обобщение равенства (7.73) на случай нескольких независимых координат. Постоянные  $a_n$  и  $b_n$  фактически могут быть найдены из начальных условий. Если поля  $\Phi$  и  $\mathbf{A}$  не зависят от времени, то должен соблюдаться закон сохранения энергии (7.64). Тогда согласно (7.67) мы можем представить функцию действия в виде

$$S(\mathbf{r}, t) = -Et + S_0(\mathbf{r}). \quad (7.75)$$

Подставляя (7.75) в (7.68), получим уравнение Гамильтона — Якоби для стационарного случая:

$$(E - e\Phi)^2 = c^2 \left( \nabla S_0 - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2 + m_0^2 c^4. \quad (7.76)$$

Заметим, что теорема Якоби (7.74) имеет место и для стационарной функции  $S_0(\mathbf{r})$ .

При переходе к нерелятивистскому приближению мы должны сделать замену

$$\frac{\partial S}{\partial t} = \frac{\partial S^{\text{нер}}}{\partial t} - m_0 c^2, \quad E = E^{\text{нер}} + m_0 c^2.$$

Пренебрегая величинами порядка  $\beta^2$ , найдем следующие уравнения Гамильтона — Якоби в нерелятивистском приближении:

в общем случае

$$-\frac{\partial S^{\text{нер}}}{\partial t} - e\Phi = \frac{1}{2m_0} \left( \nabla S^{\text{нер}} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2; \quad (7.77)$$

в стационарном случае (когда потенциалы не зависят от времени)

$$E^{\text{нер}} - e\Phi = \frac{1}{2m_0} \left( \nabla S_0^{\text{нер}} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2. \quad (7.78)$$

## § 8. РЕШЕНИЕ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ С ПОМОЩЬЮ УРАВНЕНИЯ ГАМИЛЬТОНА — ЯКОБИ

а) Свободное движение. Для свободного движения потенциалы равны нулю:

$$\Phi = \mathbf{A} = 0, \quad (8.1)$$

и поэтому уравнение Гамильтона — Якоби принимает вид

$$\left( \frac{\partial S}{\partial t} \right)^2 = c^2 (\nabla S)^2 + m_0^2 c^4. \quad (8.2)$$

Мы удовлетворим уравнению (8.2), если функцию действия положим равной

$$S = -Et + a_x x + a_y y + a_z z, \quad (8.3)$$

а постоянные величины (энергию  $E$  и коэффициенты  $a_x$ ,  $a_y$ ,  $a_z$ ) свяжем соотношением

$$E = c \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2 + m_0^2 c^2}. \quad (8.4)$$

Как видно из (8.3), коэффициенты  $a_x, \dots$  равны составляющим импульса:

$$p_x = \partial S / \partial x = a_x, \dots, \quad (8.5)$$

которые при свободном движении остаются постоянными.

Соотношение же (8.4) определяет известную связь между энергией и импульсом в случае свободного движения:

$$E = c \sqrt{p^2 + m_0^2 c^2}. \quad (8.6)$$

В частности, из (8.3) и (8.4) с помощью теоремы Якоби (7.74) находим следующие уравнения движения:

$$x = \frac{c^2 a_x t}{E} + b_x, \dots, \quad (8.7)$$

или

$$\mathbf{r} = \frac{c^2}{E} \mathbf{a} t + \mathbf{b}. \quad (8.8)$$

Здесь вектор  $\mathbf{b}(b_x, b_y, b_z)$  описывает начальные координаты, а вектор

$$\mathbf{v} = \frac{c^2}{E} \mathbf{a} \quad (8.9)$$

— начальную скорость.

**б) Движение по окружности.** Ограничимся в данной задаче нерелятивистским приближением. Полагая  $\Phi = \mathbf{A} = 0$ , а радиус вращения  $R = \text{const}$ , приведем уравнение (7.78) к виду\*)

$$E = \frac{1}{2m_0 R^2} \left( \frac{\partial S_0}{\partial \varphi} \right)^2. \quad (8.10)$$

Отсюда найдем, что  $S_0 = a\varphi$ , причем постоянная  $a$  играет роль импульса, так как  $p_\varphi = \partial S_0 / \partial \varphi = a$  и, как видно из (8.10), связана с энергией  $E$  соотношением

$$E = \frac{a^2}{2m_0 R^2}. \quad (8.11)$$

Полная функция действия равна

$$S = -\frac{a^2 t}{2m_0 R^2} + a\varphi. \quad (8.12)$$

Отсюда, взяв частную производную по  $a$  и приравняв полученное выражение новой постоянной  $\varphi_0$  (теорема Якоби), мы находим уравнение движения:

$$\varphi = \frac{at}{m_0 R^2} + \varphi_0. \quad (8.13)$$

Не нарушая общности, мы можем положить начальный угол  $\varphi_0$  равным нулю ( $\varphi_0 = 0$ ), величина же  $a/m_0 R^2 = \omega$  играет роль угловой скорости. Таким образом, как и следовало ожидать, мы получаем равномерное вращение по окружности с постоянным периодом

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi m_0 R^2}{a}. \quad (8.14)$$

\*) В этом примере все величины относятся к нерелятивистской теории. Однако индекс «нер» вверху, как в (7.78), мы писать не будем.

Энергию  $E$ , импульс  $p_\varphi$  и скорость  $v$  можем выразить через радиус  $R$  и период  $T$ :

$$E = \frac{2\pi^2 m_0 R^2}{T^2}, \quad p_\varphi = \frac{2\pi m_0 R^2}{T}, \quad v = R\omega = \frac{2\pi R}{T}. \quad (8.15)$$

**в) Адиабатические инварианты.** Докажем на примере движения точки по окружности теорему Эренфеста об адиабатических инвариантах.

Допустим, что мы медленно (адиабатически) начинаем увеличивать радиус траектории:  $R = R_0 + bt$  (для простоты мы взяли линейный закон изменения). Адиабатическое изменение означает, что за один период ( $t = T$ ) увеличение радиуса будет много меньше его первоначального значения, т. е.

$$bT \ll R_0. \quad (8.16)$$

Спрашивается, какие величины будут при этом сохраняться? При вращении частицы на нее действует центробежная сила, равная

$$F = \frac{m_0 v^2}{R} = \frac{4\pi^2 m_0 R}{T^2}. \quad (8.17)$$

В случае  $R = \text{const}$  работа силы (8.17) обращается в нуль (она направлена перпендикулярно к движению). Если же происходит медленное увеличение радиуса, то эта работа становится отличной от нуля:

$$dW = \frac{4\pi^2 m_0 R}{T^2} dR \quad (8.18)$$

и будет происходить за счет уменьшения энергии частицы:

$$dE = -dW = -\frac{4\pi^2 m_0 R}{T^2} dR. \quad (8.19)$$

Деля последнее равенство на энергию частицы (см. (8.15)), получаем

$$\frac{dE}{E} = -\frac{2dR}{R}. \quad (8.20)$$

Отсюда следует, что

$$ER^2 = \text{const}. \quad (8.21)$$

Подставляя сюда вместо  $R^2$  его значение через  $T$  и  $E$  (см. (8.15)), найдем, что при адиабатическом изменении радиуса произведение энергии  $E$  на период  $T$  остается величиной постоянной:

$$ET = \text{const}. \quad (8.22)$$

Как видно из (8.15), это произведение равно

$$2ET = \oint p_\varphi d\varphi = \text{const}, \quad (8.23)$$



где круговой интеграл распространен на весь период изменения координаты  $\varphi$ , т. е. от 0 до  $2\pi$ . Поскольку в данной задаче  $p_\varphi = \text{const}$ , выражение (8.23) может быть записано в виде

$$p_\varphi 2\pi = \text{const}. \quad (8.24)$$

Равенство (8.23) выражает собою известную теорему Эренфеста, согласно которой при адиабатическом изменении параметров периодического движения при наличии одной или нескольких степеней свободы адиабатические инварианты, взятые по периоду каждой координаты  $q_i$ , остаются величинами постоянными [11, 12]:

$$I_i = \oint p_i dq_i = \text{const}. \quad (8.25)$$

Через адиабатические инварианты мы можем выразить энергию:

$$E = E(I_1, I_2, \dots). \quad (8.26)$$

Тогда, взяв частную производную по какому-либо адиабатическому инварианту, найдем соответствующую частоту колебания:

$$\nu_i = \frac{\omega_i}{2\pi} = \frac{\partial E}{\partial I_i}. \quad (8.27)$$

Покажем это на примере вращательного движения. В этом случае энергия связана с адиабатическим инвариантом

$$I = 2\pi p_\varphi = \frac{4\pi^2 m_0 R^2}{T} \quad (8.28)$$

соотношением

$$E = \frac{I^2}{8\pi^2 m_0 R^2}. \quad (8.29)$$

Отсюда для частоты колебаний находим значение (8.14):

$$\nu = \frac{\partial E}{\partial I} = \frac{1}{T}. \quad (8.30)$$

**г) Проблема Кеплера (релятивистская классическая теория водородоподобного атома).** Допустим, что электрон движется вокруг ядра под действием кулоновского притяжения [12]. Вводя для заряда электрона и ядра соответственно обозначения  $e = -e_0$  и  $e_{\text{ядра}} = Ze_0$  ( $e_0 = 4,8 \cdot 10^{-10}$  CGS — элементарный заряд, а  $Z$  — порядковый номер ядра), найдем для потенциальной энергии значение

$$e\Phi = -\frac{Ze_0^2}{r}. \quad (8.31)$$

Поскольку потенциальная энергия не зависит от времени (согласно соотношению (7.64)), наша система является консерва-

тивной, и поэтому гамильтониан может быть приравнен постоянной величине, равной энергии частицы  $E$ . При решении нашей задачи мы можем воспользоваться уравнением (7.76), полагая в нем  $A = 0$ .

Учитывая, что в поле центральных сил движение является плоским, мы можем в полярных координатах написать выражение для квадрата импульса:

$$(\nabla S_0)^2 = \left(\frac{\partial S_0}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial S_0}{\partial \varphi}\right)^2. \quad (8.32)$$

Поскольку координата  $\varphi$  не входит в потенциальную энергию, решение уравнения (8.32) следует искать в виде

$$S_0 = a\varphi + f(r), \quad (8.33)$$

где  $a$  — некоторая постоянная величина, равная импульсу:

$$p_\varphi = \partial S_0 / \partial \varphi = a = \text{const}, \quad (8.34)$$

а функция от радиуса  $f(r)$  может быть найдена из уравнений (7.76) и (8.32):

$$f(r) = \int \sqrt{-A + \frac{2B}{r} - \frac{C}{r^2}} dr, \quad (8.35)$$

где

$$A = \frac{m_0^2 c^4 - E^2}{c^2}, \quad B = \frac{E Z e_0^2}{c^2}, \quad C = a^2 - \frac{Z^2 e_0^4}{c^2}. \quad (8.36)$$

Интеграл (8.35) является неопределенным, и поэтому произвольную постоянную мы можем положить равной нулю.

Для того чтобы функция действия была вещественной величиной, необходима такая область изменения радиуса  $r$ , чтобы подкоренное выражение в равенстве (8.35) было положительной величиной, т. е.

$$-A + \frac{2B}{r} - \frac{C}{r^2} \geq 0. \quad (8.37)$$

Отсюда видно, что величина  $r$  ограничена с обеих сторон конечными пределами, если величины  $A$ ,  $B$  и  $C$  имеют положительные значения. Из (8.36) мы найдем, что  $A > 0$  и  $C > 0$  при \*)

$$|E| < m_0 c^2, \quad \frac{Z e_0^2}{c} < a = p_\varphi, \quad (8.38)$$

\*) Согласно квантованию Бора наименьшее значение  $p_\varphi$  равно  $\hbar$ . Поэтому устойчивое состояние водородоподобного атома (электрон не может падать на ядро) ограничено значениями  $Z < Z_{\text{кр}}$ , где

$$Z_{\text{кр}} = \frac{c\hbar}{2e_0} = 137. \quad (8.38a)$$

Последнее соотношение было установлено Зоммерфельдом.

в то время как величина  $B$  всегда положительна. Крайние значения для  $r$  являются корнями уравнения (8.37), т. е. они равны

$$r_{2,1} = \frac{B}{A} \pm \sqrt{\frac{B^2}{A^2} - \frac{C}{A}}. \quad (8.39)$$

Для того чтобы корни были действительны и положительны, кроме условия  $A > 0$  и  $C > 0$ , необходимо потребовать еще, чтобы

$$B^2 > AC. \quad (8.40)$$

**д) Траектория движения.** Для определения траектории мы должны согласно теореме Якоби функцию действия (8.33) продифференцировать по постоянной  $a$  и приравнять полученное выражение другой постоянной величине:

$$\frac{\partial S_0}{\partial a} = \varphi - a \int_{r_1}^r \frac{dr}{\sqrt{-A + \frac{2B}{r} - \frac{C}{r^2}}} = \varphi_0. \quad (8.41)$$

Постоянная  $\varphi_0$  характеризует начало отсчета угла  $\varphi$  и поэтому, не нарушая общности, мы можем положить ее равной  $-\pi/\gamma$ . Нижний предел мы положили равным  $r_1$ , а подкоренное выражение ( $r_2 \geq r \geq r_1$ ) представим в виде

$$-A + \frac{2B}{r} - \frac{C}{r^2} = C \left( \frac{B^2 - AC}{C^2} - \left( \frac{1}{r} - \frac{B}{C} \right)^2 \right).$$

Интегрируя (8.41) и учитывая, что

$$\frac{1}{r_1} - \frac{B}{C} = \frac{\sqrt{B^2 - AC}}{C},$$

мы легко можем найти уравнение траектории в полярных координатах:

$$r = \frac{\rho}{1 - \varepsilon \sin(\gamma\varphi + \pi/2)} = \frac{\rho}{1 - \varepsilon \cos \gamma\varphi}, \quad (8.42)$$

где постоянные

$$\rho = \frac{C}{B}, \quad \varepsilon = \sqrt{1 - \frac{AC}{B^2}}, \quad \gamma = \frac{\sqrt{C}}{a} = \sqrt{1 - \frac{Z^2 e_0^2}{c^2 a^2}}. \quad (8.43)$$

В нерелятивистском приближении ( $c^2 \rightarrow \infty$ ) мы будем иметь эллиптическую траекторию ( $\gamma = 1$ ) [11]:

$$r = \frac{\rho_0}{1 - \varepsilon_0 \cos \varphi}, \quad (8.44)$$

т. е. учет релятивистских эффектов лишь несколько изменяет значение параметра  $\rho$  и эксцентриситета  $\varepsilon$ . Появление же множителя  $\gamma$ , отличного от единицы, в принципе изменяет характер

траектории. В самом деле, если первое наибольшее значение  $r$  (перигелий) достигается при угле  $\varphi = 0$ :

$$r_{\text{макс}} = \frac{p}{1 - \epsilon}, \quad (8.45)$$

то последующее наибольшее значение достигается не при угле  $\varphi = 2\pi$ , а при угле

$$\varphi = \frac{2\pi}{\gamma} \approx 2\pi \left( 1 + \frac{Z^2 e_0^4}{2c^2 a^2} \right), \quad (8.46)$$

т. е. эллипс, заключенный между двумя окружностями (рис. 4) радиусами  $r_{\text{макс}}$  (см. (8.45)) и

$$r_{\text{мин}} = \frac{p}{1 + \epsilon}, \quad (8.47)$$

начинает вращаться (розеточная траектория Зоммерфельда).

Как видно из формулы (8.46), угол поворота перигелия при одном обороте электрона по эллипсу равен согласно (8.46)

$$\Delta\varphi = \pi \frac{Z^2 e_0^4}{c^2 a^2}. \quad (8.48)$$

Это явление напоминает собою вращение перигелия Меркурия, когда его движение вокруг Солнца описывается не механикой Ньютона, а общей теорией относительности.

Таким образом, частоты обращения угла  $\varphi$  и радиуса  $r$  различны. Поскольку в общем случае эти частоты несоизмеримы, движение называется условно-периодическим. В этом случае электрон должен двигаться по незамкнутой траектории, которая с течением времени как угодно близко пройдет через любую точку, лежащую между двумя окружностями с радиусами (8.45) и (8.47).

Если частоты обращения радиуса и угла будут одинаковыми (например в нерелятивистском случае, когда траектория превращается в эллиптическую), движение становится периодическим.

е) **Энергия и частоты колебаний.** Для того чтобы определить энергию, мы должны прежде всего найти адиабатические инварианты. Учитывая, что  $p_\varphi = \text{const}$  (см. (8.34)), имеем

$$I_\varphi = \oint p_\varphi d\varphi = 2\pi p_\varphi. \quad (8.49)$$

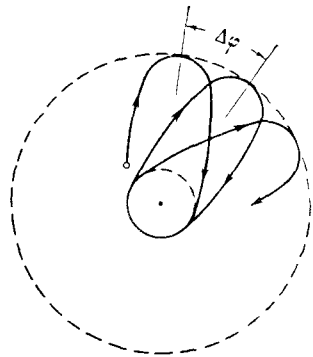


Рис. 4. Розеточная траектория Зоммерфельда.

Точно так же для другого адиабатического инварианта находим

$$I_r = \oint p_r dr, \quad (8.50)$$

где импульс  $p_r$  согласно (8.35) и (8.36) равен

$$p_r = \sqrt{-A + \frac{2B}{r} - \frac{C}{r^2}}. \quad (8.51)$$

Круговой интеграл означает, что его следует взять в пределах от  $r_1$  до  $r_2$  со знаком плюс перед корнем ( $p_r > 0$ ) и от  $r_2$  до  $r_1$  со знаком минус ( $p_r < 0$ ), т. е.

$$I_r = 2 \int_{r_1}^{r_2} \sqrt{-A + \frac{2B}{r} - \frac{C}{r^2}} dr, \quad (8.52)$$

где  $r_1$  и  $r_2 > r_1$ , как было указано, являются корнями уравнения

$$-A + \frac{2B}{r} - \frac{C}{r^2} = 0. \quad (8.53)$$

Интеграл (8.52) легко может быть вычислен:

$$2 \int_{r_1}^{r_2} \sqrt{-A + \frac{2B}{r} - \frac{C}{r^2}} dr = 2\pi \left( \frac{B}{\sqrt{A}} - \sqrt{C} \right). \quad (8.54)$$

Подставляя сюда значения для постоянных  $B$ ,  $A$  и  $C$  из (8.36) и определяя энергию  $E$  через адиабатические инварианты, получаем [11]

$$E = m_0 c^2 \left[ 1 + \frac{Z^2 e_0^4}{c^2 \left( \frac{I_r}{2\pi} + \sqrt{\frac{I_\varphi^2}{4\pi^2} - \frac{Z^2 e_0^4}{c^2}} \right)^2} \right]^{-1/2}. \quad (8.55)$$

Взяв производную по  $I_r$  и по  $I_\varphi$ , найдем соответствующие частоты колебаний.

Формула (8.55) лежит в основе релятивистской теории водородоподобного атома при полуклассическом боровском квантовании, при котором мы должны положить адиабатические инварианты равными

$$I_\varphi = 2\pi\hbar n_\varphi, \quad I_r = 2\pi\hbar n_r, \quad (8.56)$$

где  $\hbar = 2\pi\hbar = 6,62 \text{ эрг} \cdot \text{сек}$  — постоянная Планка, а  $n_\varphi = 1, 2, 3, 4, \dots$  и  $n_r = 0, 1, 2, 3, \dots$  — азимутальное и радиальное квантовые числа.

Подставляя (8.56) в (8.55) и раскладывая полученное выражение по величине  $Z e_0^2 / c\hbar = Z/137$ , мы найдем формулу Зоммер-

Фельда, характеризующую с учетом релятивистских эффектов тонкую структуру водородоподобного атома [12]:

$$E_{n, n_\varphi} = E - m_0 c^2 = - \frac{m_0 e_0^4 Z^2}{2 \hbar^2 n^2} \left[ 1 + \frac{Z^2 e_0^4}{c^2 \hbar^2 n^2} \left( \frac{n}{n_\varphi} - \frac{3}{4} \right) \right], \quad (8.57)$$

где целое положительное число  $n = n_r + n_\varphi = 1, 2, 3, 4, \dots$  называется главным квантовым числом.

**ж) Движение электрона в постоянном и однородном магнитном поле.** Движение электрона в постоянном и однородном магнитном поле  $\mathbf{H}$ , которое мы направим по оси  $z$  ( $0, 0, H = \text{const}$ ), можно решать либо в декартовых координатах, выбрав составляющие вектор-потенциала  $\mathbf{A}$  в виде

$$A_x = 0, \quad A_y = Hx, \quad A_z = 0, \quad (8.58)$$

либо в цилиндрических координатах, когда составляющие потенциала следует положить равными

$$A_x = -\frac{1}{2} Hy, \quad A_y = \frac{1}{2} Hx, \quad A_z = 0, \quad \Phi = 0. \quad (8.59)$$

В том и другом случаях находим

$$H_z = \text{rot}_z \mathbf{A} = H, \quad H_x = H_y = 0.$$

Мы будем решать задачу в цилиндрических координатах  $(r, \varphi, z)$ , что дает возможность более наглядно геометрически интерпретировать полученные результаты.

Поскольку потенциалы не зависят от времени, то, подставляя их значения в уравнение (7.76), находим

$$\frac{1}{c^2} E^2 = \left( \frac{\partial S_0}{\partial x} - \frac{e_0}{2c} Hy \right)^2 + \left( \frac{\partial S_0}{\partial y} + \frac{e_0}{2c} Hx \right)^2 + \left( \frac{\partial S_0}{\partial z} \right)^2 + m_0^2 c^2. \quad (8.60)$$

Полагая

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial S_0}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial S_0}{\partial y} \right)^2 &= \left( \frac{\partial S_0}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left( \frac{\partial S_0}{\partial \varphi} \right)^2, \\ x \frac{\partial S_0}{\partial y} - y \frac{\partial S_0}{\partial x} &= \frac{\partial S_0}{\partial \varphi}, \end{aligned} \quad (8.61)$$

$$x^2 + y^2 = r^2, \quad x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi,$$

мы приведем уравнение Гамильтона — Якоби к виду

$$\frac{1}{c^2} (E^2 - m_0^2 c^4) = \left( \frac{\partial S_0}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left( \frac{\partial S_0}{\partial \varphi} \right)^2 + \left( \frac{\partial S_0}{\partial z} \right)^2 + 2B \frac{\partial S_0}{\partial \varphi} + B^2 r^2, \quad (8.62)$$

где  $B = e_0 H / 2c$ .

Решение (8.62) ищем в виде

$$S_0 = f(r) + a_1 \varphi + a_2 z, \quad (8.63)$$

причем постоянные  $a_1$  и  $a_2$  являются постоянными импульсами:

$$\begin{aligned} p_\varphi &= \partial S_0 / \partial \varphi = a_1, \\ p_z &= \partial S_0 / \partial z = a_2, \end{aligned} \quad (8.64)$$

а функция  $f(r)$  связана с переменным импульсом  $p_r$  соотношением

$$p_r = df/dr.$$

Подставляя (8.63) в (8.62), получаем

$$f(r) = \int_{r_1}^r \sqrt{A - \frac{a_1^2}{r^2} - B^2 r^2} dr, \quad (8.65)$$

где  $r_1$  и  $r_2 > r_1$  — корни подкоренного выражения, причем величина  $r$  лежит в пределах  $r_1 \leq r \leq r_2$ , а для постоянной  $A$  находим значение

$$A = \frac{1}{c^2} (E^2 - m_0^2 c^4) - 2Ba_1 - a_2^2. \quad (8.66)$$

Из (8.66), (8.65) и (8.64) мы можем найти энергию  $E$  как функцию адиабатических инвариантов

$$I_\varphi = \oint p_\varphi d\varphi = 2\pi a_1, \quad (8.67)$$

$$I_r = 2 \int_{r_1}^{r_2} p_r dr = \int_{\rho_1}^{\rho_2} \sqrt{-B^2 + \frac{A}{\rho} - \frac{a_1^2}{\rho^2}} d\rho = \pi \left( \frac{A}{2B} - a_1 \right). \quad (8.68)$$

При вычислении интеграла (8.68) мы воспользовались (8.54), сделав при этом замену  $r^2 = \rho$  ( $\rho_1$  и  $\rho_2 > \rho_1$  являются корнями подкоренного выражения). Поскольку координата  $z$  не является циклической, величина  $I_z$  не имеет смысла, и поэтому в энергии мы оставляем постоянную составляющую импульса  $p_z$ . Тогда из равенств (8.66) — (8.68) получаем значение для энергии

$$E = \sqrt{m_0^2 c^4 + c^2 p_z^2 + \frac{e_0 H c}{\pi} (I_\varphi + I_r)}. \quad (8.69)$$

Отсюда можно найти частоты колебаний по  $\varphi$  и  $r$ , которые, очевидно, будут равны друг другу:

$$\omega_r = \omega_\varphi = \frac{\partial E}{\partial I_\varphi} 2\pi = \frac{e_0 H c}{E}. \quad (8.70)$$

Взяв от функции (8.63) частную производную по  $a_1$  и приравняв полученное выражение согласно теореме Якоби новой произвольной постоянной  $\varphi_0$ , находим уравнение движения в плоскости  $xy$ :

$$\int_{r_1}^r \frac{\left(B + \frac{a_1}{r^2}\right) dr}{\sqrt{A - \frac{a_1^2}{r^2} - B^2 r^2}} = \varphi - \varphi_0, \quad (8.71)$$

где  $r_1$  и  $r_2 > r_1$  — корни подкоренного выражения, между которыми заключена переменная  $r$  ( $r_1 \leq r \leq r_2$ ). Преобразуя подкоренное выражение к виду

$$A - \frac{a_1^2}{r^2} - B^2 r^2 = A - 2a_1 B - \left(Br - \frac{a_1}{r}\right)^2, \quad (8.72)$$

и принимая во внимание, что  $Br_1 - \frac{a_1}{r_1} = -\sqrt{A - 2a_1 B}$ , а также полагая угол отсчета  $\varphi_0$  равным нулю ( $\varphi_0 = 0$ ), мы находим

$$Br - \frac{a_1}{r} = \sqrt{A - 2a_1 B} \sin\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right),$$

или

$$r^2 - \frac{a_1}{B} + 2r \frac{\sqrt{A - 2a_1 B}}{2B} \cos \varphi = 0. \quad (8.73)$$

Последнее уравнение представляет собою уравнение окружности в полярных координатах, центр которой смещен по оси  $x$  относительно начала координат\*). В самом деле, возводя векторную сумму (рис. 5)

$$\mathbf{R} = \mathbf{r} + \mathbf{a} \quad (8.74)$$

в квадрат, мы найдем уравнение окружности со смещенным центром:

$$r^2 + 2ra \cos \varphi - (R^2 - a^2) = 0. \quad (8.75)$$

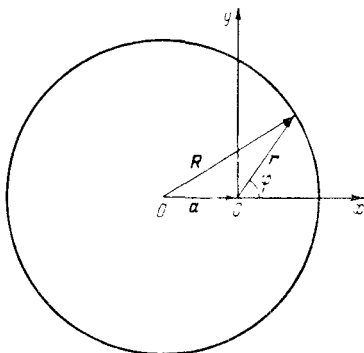


Рис. 5 Круговая траектория при движении электрона в постоянном магнитном поле.

\*) Если бы мы не положили  $\varphi_0 = 0$ , то центр был бы смещен относительно диаметра, составляющего с осью  $x$  угол  $\varphi_0$ ; однако, не нарушая общности, по этому диаметру мы всегда можем направить ось  $x$ .



Сопоставляя (8.75) с (8.73), находим величину вектора смещения \*)

$$a = \frac{\sqrt{A - 2a_1 B}}{2B} \quad (8.76)$$

и радиус окружности \*\*)

$$R = \frac{\sqrt{A + 2Ba_1}}{2B} = \frac{\sqrt{E^2 - m_0^2 c^4 - c^2 p_z^2}}{e_0 H}. \quad (8.77)$$

Если мы перенесем начало координат в центр окружности ( $a = 0$ ), то мы должны положить

$$A = 2a_1 B. \quad (8.78)$$

Отсюда согласно (8.66) для энергии имеем значение \*\*\*)

$$E = \sqrt{m_0^2 c^4 + c^2 a_2^2 + 2e_0 H c a_1}. \quad (8.79)$$

Из последнего соотношения видно, что адиабатический инвариант  $I'_\varphi = a_1 2\pi$  равен сумме адиабатических инвариантов  $I_\varphi$  и  $I_r$  (см. (8.67) и (8.68)):

$$I'_\varphi = I_\varphi + I_r.$$

Найдем теперь уравнение движения, когда центр окружности помещен в начало координат, т.е. когда согласно (8.76) и (8.77)

$$A = 2a_1 B \quad \text{и} \quad R = \sqrt{a_1/B}. \quad (8.80)$$

\*) Строго говоря, начало координат может быть вне окружности ( $a > R$ ). В этом случае импульс  $p_\varphi = a_1$  должен быть меньше нуля ( $a_1 < 0$ ).

\*\*) Если произвести квантование по боровской теории, то мы должны положить

$$I_\varphi = 2\hbar n_\varphi, \quad I_r = 2\hbar n_r,$$

причем квантовое число  $n_\varphi$  может быть как положительным ( $a_1 > 0$ , начало координат лежит внутри круга), так и отрицательным ( $a_1 < 0$ , начало координат лежит вне круга). Если предположить, что движение вдоль оси  $z$  отсутствует ( $p_z = 0$ ), то смещение  $a$ , радиус  $R$  и энергия  $E$  связаны с квантовыми числами следующими соотношениями:

$$a = \sqrt{\frac{2c\hbar n_r}{e_0 H}}, \quad R = \sqrt{\frac{2c\hbar (n_r + n_\varphi)}{e_0 H}}, \quad (8.77a)$$

$$E = \sqrt{m_0^2 c^4 + 2e_0 H c (n_r + n_\varphi)}.$$

\*\*\*) Новые квантовые числа  $n'_r$  и  $n'_\varphi$  при этом становятся равными  $n'_r = 0$ ,  $n'_\varphi = n_\varphi + n_r$ . Тогда для смещения  $a'$ , радиуса  $R'$  и энергии  $E'$  в случае цитоского движения имеем следующие значения:

$$a' = 0, \quad R' = R = \sqrt{\frac{2c\hbar}{e_0 H} n'_\varphi}, \quad E' = E = \sqrt{m_0^2 c^4 + 2e_0 H c n'_\varphi}.$$

Подставляя эти значения в (8.65) и учитывая, что  $r_1 = r = r_2$ , имеем  $f(r) = 0$ . Для функции же действия согласно (7.75) и (8.63) находим

$$S = -Et + a_1\varphi + a_2z. \quad (8.81)$$

Взяв производную от  $S$  по  $a_1$  и  $a_2$  и приравняв найденные значения постоянным  $\varphi_0$  и  $z_0$  \*), имеем

$$\varphi = \frac{e_0 H c}{E} t, \quad z = \frac{c^2 p_z}{E} t. \quad (8.82)$$

К этим равенствам мы должны добавить еще значение постоянного радиуса (8.77).

Из (8.82) видно, что электрон в магнитном поле должен вращаться по окружности радиуса  $R$  с постоянной угловой скоростью

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{e_0 H c}{E}. \quad (8.83)$$

Составляющие же скорости движения по окружности  $v_{\perp}$  (поперечная составляющая) и по магнитному полю  $v_{\parallel}$  (продольная составляющая) соответственно равны

$$v_{\perp} = R\omega = \frac{c \sqrt{E^2 - m_0^2 c^4 - c^2 p_z^2}}{E}, \quad v_{\parallel} = \frac{dz}{dt} = \frac{c^2 p_z}{E}. \quad (8.84)$$

Поскольку скорость движения связана с энергией соотношением

$$\beta = \frac{v}{c} = \frac{\sqrt{v_{\perp}^2 + v_{\parallel}^2}}{c} = \frac{\sqrt{E^2 - m_0^2 c^4}}{E}, \quad (8.85)$$

найдем

$$E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \text{const.} \quad (8.86)$$

С помощью соотношений (8.77), (8.82) и (8.83) мы можем записать уравнения движения электрона в постоянном магнитном поле в декартовых координатах ( $x = r \cos \varphi$ ,  $y = r \sin \varphi$ ,  $z = z$ ):

$$x = R \cos \omega t, \quad y = R \sin \omega t, \quad z = \frac{c^2 p_z}{E} t, \quad (8.87)$$

где  $\omega$  и  $R$  определяются равенствами (8.80) и (8.83).

Уравнение (8.87) характеризует движение по винтовой линии. Оно может быть получено непосредственно из (7.47), если считать отличной от нуля лишь одну составляющую

$$H_{12} = H_z = H = \text{const.}$$

---

\*) Начальный угол и координату  $z$  мы положим равными нулю ( $\varphi_0 = z_0 = 0$ ).

заряд электрона положить равным  $e = -e_0$ , а у координат  $x'_\mu$  и поля  $H'_{\mu\nu}$  убрать штрихи. Тогда получаем следующую систему уравнений ( $\dot{x} = dx/d\tau$  и т. д.):

$$m_0\ddot{x} = -\frac{e_0}{c} H\dot{y}, \quad m_0\ddot{y} = \frac{e_0}{c} H\dot{x}, \quad m_0\ddot{z} = 0, \quad m_0\ddot{t} = 0. \quad (8.88)$$

Из последнего уравнения следует, что  $\dot{t} = \text{const}$ , причем эта величина может быть определена из соотношения (7.46).

Учитывая, что

$$\frac{\dot{x}_n\dot{x}_n}{c^2} = \beta^2\dot{t}^2, \quad (8.89)$$

где  $c^2\beta^2$  — трехмерная скорость, мы найдем, что

$$E = m_0c^2\dot{t} = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} = \text{const}. \quad (8.90)$$

Последнее соотношение выражает собою закон сохранения полной энергии, которая равняется кинетической, так как потенциальная энергия равна нулю.

Интегрируя первые три уравнения системы (8.88) и принимая во внимание, что согласно (8.90)  $\tau = (m_0c^2/E)t$  (где  $\tau$  — собственное время, а  $t$  — лабораторное), найдем

$$x = R \cos \omega t, \quad y = R \sin \omega t, \quad z = v_{\parallel} t, \quad (8.91)$$

где круговая частота  $\omega$  задается равенством (8.83), а продольная составляющая  $v_{\parallel}$  связана с соответствующим импульсом соотношением

$$v_{\parallel} = \frac{c^2 p_z}{E}. \quad (8.92)$$

Для определения радиуса  $R$  запишем квадрат скорости

$$\beta^2 = \frac{1}{c^2} (R^2\omega^2 + v_{\parallel}^2) = \frac{E^2 - m_0^2c^2}{E^2}. \quad (8.93)$$

Отсюда для радиуса вновь находим значение (8.77):

$$R = \frac{\sqrt{E^2 - m_0^2c^4 - c^2p_z^2}}{e_0H}. \quad (8.94)$$

Заметим, что классическая релятивистская теория движения электрона в магнитном поле с макроскопическим радиусом приобретает большой практический интерес в связи с постройкой циклических электронных ускорителей (движение по окружности), а также при изучении магнитотормозного излучения галактик, когда электроны движутся по винтовой линии. Поэтому к этому вопросу мы будем неоднократно возвращаться при изучении синхротронного излучения как по классической, так и по квантовой теории.

з) Движение электрона в поле плоской поляризованной по кругу электромагнитной волны. Рассмотрим случай, когда по направлению оси  $z$  распространяется плоская электромагнитная волна, поляризованная по кругу. Найдем закон движения электрона в этой волне, а также начальные условия, при которых электрон должен двигаться по винтовой линии [13].

Вектор-потенциал электромагнитной волны мы зададим в виде

$$A_x = -\frac{cE_0}{\omega_0} \sin \omega_0 \xi, \quad A_y = g \frac{cE_0}{\omega_0} \cos \omega_0 \xi, \quad A_z = 0, \quad (8.95)$$

где  $E_0$  — амплитуда напряженности электрического поля, аргумент  $\xi = t - z/c$  указывает, что электромагнитная волна распространяется вдоль оси  $z$  со скоростью  $c$ , а величина  $g$  характеризует правую ( $g = 1$ ) или левую ( $g = -1$ ) поляризацию волны ( $E_x = E_0 \cos \omega_0 \xi$ ,  $E_y = gE_0 \sin \omega_0 \xi$ ). Принимая во внимание, что заряд электрона равен  $e = -e_0$ , уравнение Гамильтона — Якоби можем представить в виде

$$\left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)^2 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)^2 + m_0^2 c^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial x} - m_0 c \gamma \sin \omega_0 \xi\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y} + m_0 c \gamma g \cos \omega_0 \xi\right)^2 = 0, \quad (8.96)$$

где постоянная

$$\gamma = \frac{e_0 E_0}{m_0 c \omega_0} \quad (8.97)$$

характеризует внешнее электромагнитное поле.

Вводя новые переменные

$$\xi = t - z/c, \quad \eta = t + z/c, \quad (8.98)$$

которые приводят к соотношениям

$$\frac{\partial S}{\partial z} = \frac{1}{c} \left(\frac{\partial S}{\partial \eta} - \frac{\partial S}{\partial \xi}\right), \quad \frac{1}{c} \frac{\partial S}{\partial t} = \frac{1}{c} \left(\frac{\partial S}{\partial \eta} + \frac{\partial S}{\partial \xi}\right), \quad (8.99)$$

мы можем записать уравнение Гамильтона — Якоби в виде

$$-\frac{4}{c^2} \frac{\partial S}{\partial \eta} \frac{\partial S}{\partial \xi} + \left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2 - 2m_0 c \gamma \frac{\partial S}{\partial x} \sin \omega_0 \xi + 2m_0 c \gamma g \frac{\partial S}{\partial y} \cos \omega_0 \xi + m_0^2 c^2 (1 + \gamma^2) = 0. \quad (8.100)$$

Решение этого уравнения следует искать в виде

$$S = m_0 c \left( a_1 x + a_2 y - \frac{1}{2} \alpha c \eta + f(\xi) \right), \quad (8.101)$$

где  $a_1$ ,  $a_2$  и  $\alpha$  — постоянные величины, а функция  $f(\xi)$  — пока что неизвестная функция от  $\xi$ .

Из формулы (8.101) следует закон сохранения составляющих импульса по осям  $x$  и  $y$ :

$$P_x = \frac{\partial S}{\partial x} = m_0 c a_1, \quad P_y = \frac{\partial S}{\partial y} = m_0 c a_2. \quad (8.102)$$

Кроме того, величина

$$-\frac{2}{c} \frac{\partial S}{\partial \eta} = -\frac{\partial S}{c \partial t} - \frac{\partial S}{\partial z} = \frac{E}{c} - P_z = m_0 c \alpha \quad (8.103)$$

остаётся величиной постоянной.

Подставляя (8.101) в уравнение (8.100), мы легко можем найти  $f(\xi)$ , а вместе с тем и функцию действия  $S$ :

$$S = m_0 c \left[ a_1 x + a_2 y - \frac{1}{2} \alpha c \eta - c \frac{1 + \gamma^2 + a_1^2 + a_2^2}{2\alpha} \xi - \right. \\ \left. - \frac{\gamma c}{\alpha \omega_0} (a_1 \cos \omega_0 \xi + a_2 g \sin \omega_0 \xi) \right]. \quad (8.104)$$

Взяв от последнего выражения частные производные по постоянным  $a_1$ ,  $a_2$  и  $\alpha$  и приравняв полученные выражения новым произвольным постоянным  $m_0 c x_0$ ,  $m_0 c y_0$  и  $m_0 c \eta_0$ , мы согласно теореме Якоби получаем следующие уравнения движения \*)

$$x - x_0 = \frac{c a_1}{\alpha} \xi + \frac{\gamma c}{\alpha \omega_0} \cos \omega_0 \xi, \\ y - y_0 = \frac{c a_2}{\alpha} \xi + \frac{\gamma c}{\alpha \omega_0} g \sin \omega_0 \xi, \quad (8.105) \\ \eta = \frac{1 + \gamma^2 + a_1^2 + a_2^2}{\alpha^2} \xi + \frac{2\gamma}{\alpha^2 \omega_0} (a_1 \cos \omega_0 \xi + g a_2 \sin \omega_0 \xi).$$

Умножая первое равенство на  $a_1$ , второе на  $a_2$  и третье на  $-\alpha c/2$  и складывая полученные соотношения, найдем линейную комбинацию координат и времени:

$$a_1(x - x_0) + a_2(y - y_0) + a_3 z = c t a_1, \quad (8.106)$$

где

$$\begin{pmatrix} a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} = - \left( \frac{\gamma^2 + 1 - a_1^2 - a_2^2}{2\alpha} \pm \frac{\alpha}{2} \right) \quad (8.107)$$

остаются величинами постоянными. Равенство (8.106) может быть записано в виде

$$(\mathbf{av}) = c a_4, \quad (8.108)$$

причем составляющие вектора  $\mathbf{a}$ , по направлению которого частица будет двигаться с постоянной скоростью  $v_a = c a_4 / a_2$ , равны  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $a_3$ .

\*) Заметим, что начальные значения для  $\xi$  и  $\eta$  можно положить равными нулю, так как всегда можно потребовать, чтобы при  $t = 0$  координата  $z$  также обращалась в нуль ( $z = 0$ ).

Ось  $z$  определяет направление распространения волны. Однако, не нарушая общности, мы можем расположить вектор  $\mathbf{a}$  в плоскости  $zy$ , т. е. положить  $a_1 = 0$ . Тогда уравнения траектории (8.105) принимают вид

$$x - x_0 = R \cos \omega_0 \xi, \quad (8.109)$$

$$y - y_0 = \frac{ca_2}{a} \xi + Rg \sin \omega_0 \xi, \quad (8.110)$$

$$\eta = \frac{1 + \gamma^2 + a_2^2}{a^2} \xi + \frac{2a_2 g R}{ac} \sin \omega_0 \xi, \quad (8.111)$$

где радиус

$$R = \frac{\gamma c}{a \omega_0} = \frac{e_0 E_0}{m_0 a \omega_0^2}. \quad (8.112)$$

Легко проверить, что в этом случае соблюдается соотношение (8.106), которое теперь принимает вид

$$a_2(y - y_0) + a_3 z = a_4 ct. \quad (8.113)$$

Это движение становится особенно простым, когда  $a_2 = 0$ . Последнее можно осуществить путем выбора соответствующих начальных условий. В этом случае постоянная скорость поступательного движения направлена по оси  $z$  и равна

$$v_{\parallel} = c \frac{1 + \gamma^2 - a^2}{1 + \gamma^2 + a^2} = c \beta_{\parallel}, \quad (8.114)$$

а вращательное движение совершается в плоскости  $xy$  по окружности радиуса  $R$ , т. е. уравнения движения принимают вид

$$x - x_0 = R \cos \omega_0 \xi = R \cos \omega_0 (1 - \beta_{\parallel}) t, \quad (8.115)$$

$$y - y_0 = Rg \sin \omega_0 \xi = Rg \sin \omega_0 (1 - \beta_{\parallel}) t, \quad (8.116)$$

$$z = v_{\parallel} t. \quad (8.117)$$

Отсюда следует, что

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2, \quad (8.118)$$

причем радиус окружности и частота вращения соответственно равны

$$R = \frac{e_0 E_0}{m_0 a \omega_0^2}, \quad \omega = \omega_0 (1 - \beta_{\parallel}). \quad (8.119)$$

Заметим, что вид траектории не изменится, если мы положим  $x_0 = y_0 = 0$ .

Как видно из формул (8.115) и (8.116), вращение электрона совпадает с вращением вектора поляризации плоской волны (т. е. при  $g = 1$  электрон будет описывать правую спираль, а при  $g = -1$  — левую).

Произвольная постоянная величина  $\alpha$  зависит от внешнего поля  $E_0$ , частоты  $\omega_0$  и составляющей скорости вдоль оси  $z$ .

Из (8.114) следует

$$\alpha = \sqrt{\gamma^2 + 1} \sqrt{\frac{1 - \beta_{\parallel}}{1 + \beta_{\parallel}}}, \quad (8.120)$$

где  $\beta_{\parallel} = v_{\parallel}/c$ . Зная  $\beta_{\parallel}$ , мы сможем определить также и радиус круговой траектории:

$$R = \frac{\gamma c}{\omega_0 \sqrt{\gamma^2 + 1}} \sqrt{\frac{1 + \beta_{\parallel}}{1 - \beta_{\parallel}}}. \quad (8.121)$$

Из равенств (8.114)–(8.117) можно найти квадрат скорости:

$$\begin{aligned} \beta^2 &= \frac{1}{c^2} \left[ \left( \frac{dz}{dt} \right)^2 + \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 + \left( \frac{dy}{dt} \right)^2 \right] = \\ &= \beta_{\parallel}^2 + \frac{R^2 \omega_0^2}{c^2} (1 - \beta_{\parallel})^2 = \beta_{\parallel}^2 + \frac{\gamma^2 (1 - \beta_{\parallel}^2)}{\gamma^2 + 1}, \end{aligned} \quad (8.122)$$

а также энергию частицы, которая (поскольку в волне отсутствует скалярный потенциал) равна

$$E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{m_0 c^2 \sqrt{\gamma^2 + 1}}{\sqrt{1 - \beta_{\parallel}^2}}. \quad (8.123)$$

Интересно отметить, что это же значение энергии может быть получено из выражения для функций действия (8.104) при условии, что постоянные  $a_1$  и  $a_2$  равны нулю (движение по винтовой линии вдоль оси  $z$ ). Тогда для энергии мы найдем значение

$$E = - \frac{\partial S}{\partial t} = \frac{m_0 c^2 \alpha}{2} + \frac{m_0 c^2}{2\alpha} (\gamma^2 + 1). \quad (8.124)$$

Подставляя сюда вместо постоянной  $\alpha$  значение (8.120), мы вновь найдем для энергии выражение (8.123).

Как видно из выражения для функции действия (8.104), энергия сохраняется только в том случае, когда поступательное движение совершается строго вдоль оси  $z$  (\*). Если поступательное движение направлено под углом к оси  $z$ , то энергия уже не сохраняется, поскольку в функции действия остаются члены, пропорциональные  $\sin \omega_0 \xi = \sin \omega_0 (t - z/c)$ . Точнее, на сохраняющуюся часть должна накладываться еще синусоидальная. Как видно из формулы (8.103), в этом случае будет сохраняться величина

$$\frac{E}{c} - P_z = m_0 c \alpha. \quad (8.125)$$

\*) Заметим, что в квантовой теории (см. ниже) энергия при этом движении не является интегралом движения (т. е. не сохраняется) даже для этого частного случая.

Если составляющая скорости движения вдоль оси  $z$  равняется нулю ( $v_{\parallel} = 0$ ), то движение в электромагнитной волне с круговой поляризацией будет происходить по окружности радиуса

$$R = \frac{\gamma c}{\omega \sqrt{1 + \gamma^2}}. \quad (8.126)$$

Уравнения движения (8.115)–(8.117) принимают вид

$$x = R \cos \omega t, \quad (8.127)$$

$$y = R \sin \omega t, \quad (8.128)$$

$$z = 0. \quad (8.129)$$

Заметим, что характер движения электрона резко изменяется, если волна будет линейно поляризована [5].

**и) Движение электрона в статическом магнитном поле и в поле плоской электромагнитной волны.** Уравнения классической теории могут иметь точное решение также и в более сложном случае, а именно при наличии одновременно постоянного и однородного магнитного поля и распространяющейся вдоль него поляризованной по кругу плоской электромагнитной волны [14].

Рассмотрим общее релятивистское уравнение движения заряженной частицы ( $e = -e_0$ )

$$m_0 \frac{dv_{\mu}}{d\tau} = -\frac{e_0}{c} H_{\mu\nu} v_{\nu}, \quad (8.130)$$

в котором производная по собственному времени  $\tau$  берется от четырехмерной скорости

$$v_{\mu} = \frac{dx_{\mu}}{d\tau} = \left\{ \mathbf{u}, i' \frac{dct}{d\tau} \right\} = \left\{ \frac{d\mathbf{r}}{d\tau}, \frac{i'c}{\sqrt{1 - \beta^2}} \right\}, \quad (8.131)$$

где

$$H_{\mu\nu} = \frac{\partial A_{\nu}}{\partial x_{\mu}} - \frac{\partial A_{\mu}}{\partial x_{\nu}} \quad (8.132)$$

— тензор электромагнитного поля, причем  $A_{\mu} = A_{\mu}^{\text{волны}} + A_{\mu}^{\text{поля}}$ .

В трехмерной записи уравнение (8.130) принимает вид

$$\begin{aligned} m_0 \frac{d\mathbf{v}}{d\tau} &= -\frac{e_0}{c} \left\{ \mathbf{E} \frac{dct}{d\tau} + [\mathbf{v}\mathbf{H}] \right\}, \\ \frac{d^2ct}{d\tau^2} &= \frac{d}{d\tau} \left( \frac{E}{m_0c} \right) = -\frac{e_0}{m_0c} (\mathbf{v}\mathbf{E}), \end{aligned} \quad (8.133)$$

где  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  — напряженности электрического и магнитного полей, а  $E$  представляет собою кинетическую энергию:

$$E = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad \beta = \frac{v}{c}.$$



Рассмотрим теперь случай, когда постоянное магнитное поле  $\mathbf{H} = j_3 H$  направлено по оси  $z$  и вдоль той же оси распространяется плоская циркулярно поляризованная электромагнитная волна. Тогда

$$A_{\mu}^{\text{поля}} = \{0, xH, 0\}, \quad (8.134)$$

а

$$A_{\mu}^{\text{волны}} = \{\mathbf{A}(\xi), 0\}, \quad \mathbf{A}(\xi) = -\frac{cE_0}{\omega_0} (j_1 \sin \omega_0 \xi - g j_2 \cos \omega_0 \xi) \quad (8.135)$$

зависит только от переменной  $\xi = t - z/c$ , причем знаковый множитель  $g = \pm 1$  соответствует правой (+) или левой (-) круговой поляризации,  $\omega_0$  — частота,  $E_0$  — амплитуда электрического поля волны,  $j_1, j_2, j_3$  — орты единичных векторов, направленных соответственно по осям  $x, y$  и  $z$ .

Учитывая, что  $\mathbf{P} = m_0 \dot{\mathbf{r}}$ ,  $E^2 = m_0^2 c^4 + c^2 P^2$ , запишем (8.133) в виде

$$m_0 \ddot{\mathbf{r}} = -e_0 \mathbf{E} \frac{E}{m_0 c^2} - \frac{e_0}{m_0 c} [\mathbf{P}\mathbf{H}], \quad (8.136)$$

$$\frac{dE}{dt} = \dot{E} = -\frac{e_0}{m_0} (\mathbf{P}\mathbf{E}), \quad E = m_0 c^2 \dot{t}.$$

Обозначая штрихом производную по  $\xi$  для суммарных полей, имеем

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c} \mathbf{A}'(\xi), \quad (8.137)$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}^{\text{волны}} + \mathbf{H}^{\text{поля}} = -\frac{1}{c} [j_3 \mathbf{A}'(\xi)] + j_3 H.$$

Подставляя эти формулы в (8.136), получаем

$$\dot{\mathbf{P}} = \frac{e_0}{m_0 c^3} \{E - c(j_3 \mathbf{P})\} \mathbf{A}'(\xi) + \frac{e_0}{m_0 c^2} j_3 (\mathbf{P}\mathbf{A}'(\xi)) - \frac{e_0 H}{m_0 c} [\mathbf{P}j_3], \quad (8.138)$$

$$\dot{E} = \frac{e_0}{m_0 c} (\mathbf{P}\mathbf{A}'(\xi)). \quad (8.139)$$

Кроме того, из формул (8.136) и (8.137) следует, что

$$\dot{\xi} = \frac{E - c(\mathbf{P}j_3)}{m_0 c^2}. \quad (8.140)$$

Отсюда с учетом (8.138) и (8.139) находим первый интеграл движения:

$$\alpha = \frac{E - c(\mathbf{P}j_3)}{m_0 c^2} = \text{const}. \quad (8.141)$$

Кроме (8.141), можно найти еще другой интеграл движения:

$$m_0 c \dot{t} = \mathbf{P} - \frac{e_0}{c} \mathbf{A} - j_3 (j_3 \mathbf{P}) - \frac{e_0 H}{c} [j_3 \mathbf{r}] = \text{const}, \quad (8.142)$$

где  $\mathbf{f}$  — произвольный постоянный вектор, который соответствующим выбором системы отсчета можно обратить в нуль.

Для дальнейших расчетов заметим, что

$$\frac{\partial F}{\partial \tau} = \frac{\partial F}{\partial \xi} \dot{\xi} = \alpha F', \quad (8.143)$$

где  $F$  — произвольная функция от переменной  $\xi$ .

Далее оказывается удобным ввести вектор обобщенного импульса, лежащий в плоскости  $xy$ :

$$\boldsymbol{\pi} = \mathbf{P} - j_3 (j_3 \mathbf{P}) = \frac{e_0}{c} \mathbf{A} - \frac{e_0 H}{c} [\mathbf{r} j_3], \quad (\boldsymbol{\pi} j_3) = 0. \quad (8.144)$$

Переходя от производной по  $\tau$  к производной по  $\xi$  (см. (8.143)), получим

$$\begin{aligned} \mathbf{r}' - (\mathbf{r}' j_3) j_3 &= \frac{e_0}{m_0 c \alpha} \mathbf{A}(\xi) - \frac{e_0 H}{m_0 c \alpha} [\mathbf{r} j_3] = \frac{\boldsymbol{\pi}}{m_0 \alpha}, \\ (\mathbf{r}' j_3) &= c \frac{1 - \alpha^2}{2\alpha^2} + \frac{\pi^2}{2m_0^2 c \alpha^2}, \end{aligned} \quad (8.145)$$

где

$$\mathbf{P} = m_0 \alpha \mathbf{r}', \quad (j_3 \mathbf{P}) = \frac{m_0 c}{2\alpha} (1 - \alpha^2) + \frac{\pi^2}{2m_0 c \alpha}, \quad \gamma = \frac{e_0 E_0}{m_0 c \omega_0}. \quad (8.146)$$

Введем частоту

$$\omega_1 = \frac{e_0 H}{m_0 c \alpha}, \quad (8.147)$$

где  $e_0 H / m_0 c$  — циклотронная частота. Тогда решение уравнений движения (8.145) запишем в виде

$$\begin{aligned} x &= R \cos(\omega_1 \xi + \varphi) + \frac{c\gamma}{\alpha \omega_0 \left(1 - g \frac{\omega_1}{\omega_0}\right)} \cos \omega_0 \xi, \\ y &= R \sin(\omega_1 \xi + \varphi) + \frac{c g \gamma}{\alpha \omega_0 \left(1 - g \frac{\omega_1}{\omega_0}\right)} \sin \omega_0 \xi, \\ z &= c \beta_3 \xi + g \frac{R \omega_1 \gamma}{\alpha \omega_0 \left(1 - g \frac{\omega_1}{\omega_0}\right)^2} \sin[(\omega_0 - g \omega_1) \xi - g \varphi] + z_0, \end{aligned} \quad (8.148)$$

где

$$\beta_3 = \frac{1}{2\alpha^2} \left[ 1 + \frac{\gamma^2}{\left(1 - g \frac{\omega_1}{\omega_0}\right)^2} \right] - \frac{1 - \beta^2}{2}, \quad \beta = \frac{R \omega_1}{c}, \quad (8.149)$$

а также  $R$ ,  $\varphi$ ,  $z_0$  — постоянные интегрирования (постоянную  $\varphi$  в дальнейшем мы положим равной нулю).

В отсутствие резонанса ( $\omega_1 \neq \omega_0$ ) движение электрона в плоскости, перпендикулярной к направлению распространения волны, является финитным, т. е. происходит в ограниченной области

пространства. Энергия электрона не остается постоянной, поскольку, наряду с постоянным членом, имеется еще член, периодически зависящий от времени:

$$E = \frac{m_0 c^2}{2\alpha} (1 - \alpha^2) + m_0 c^2 \alpha + \frac{\pi^2}{2m_0 \alpha} = m_0 c^2 \left( \alpha + \frac{1}{c} z' \right) = \\ = \alpha m_0 c^2 \left\{ 1 + \beta_3 + \frac{g \gamma R \omega_1}{\alpha \left( 1 - g \frac{\omega_1}{\omega_0} \right) c} \cos(\omega_0 - g \omega_1) \xi \right\}. \quad (8.150)$$

Случай резонанса, когда  $\omega_1 = \omega_0$ , должен быть рассмотрен особо. При этом решения (8.145) принимают вид

$$x = R_0 \cos \omega_0 \xi - c \frac{\omega_2 \alpha}{\omega_0} \xi \sin \omega_0 \xi, \\ y = R_0 \sin \omega_0 \xi + c \frac{\omega_2 \alpha}{\omega_0} \xi \cos \omega_0 \xi, \quad (8.151) \\ z = \frac{c \omega_2^2}{6\alpha^3} \xi^3 + z_0,$$

где  $R_0$  и  $z_0$  — постоянные интегрирования, а

$$\omega_2 = \frac{e_0 E_0}{m_0 c} \quad (8.152)$$

имеет размерность частоты.

Таким образом, в условиях резонанса квадрат радиуса «орбиты вращения» электрона (проекция траектории на ось плоскости  $xy$ )

$$x^2 + y^2 = R^2 + c^2 \frac{\omega_2^2 \alpha^2}{\omega_0^2} \xi^2, \quad (8.153)$$

а также энергия частицы (см. (8.150))

$$E = m_0 c^2 \left[ \alpha + \frac{1}{2} \frac{\omega_2^2}{\alpha^3} \xi^2 \right] \quad (8.154)$$

растут квадратично с увеличением  $\xi$ . Рассмотренные здесь решения классической теории могут быть обобщены и на квантовый случай.

## § 9. ПРОБЛЕМА ИЗЛУЧЕНИЯ

а) Энергия электромагнитного поля в вакууме и теорема Пойнтинга. Запишем уравнения Максвелла—Лоренца (6.1) и (6.2) в виде

$$\frac{1}{4\pi} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = -c \mathbf{j} + \frac{c}{4\pi} \operatorname{rot} \mathbf{H}, \quad \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = -\frac{c}{4\pi} \operatorname{rot} \mathbf{E}. \quad (9.1)$$

Умножая первое уравнение скалярно на вектор  $\mathbf{E}$ , а второе на вектор  $\mathbf{H}$  и складывая их, получаем

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{E^2 + H^2}{8\pi} + c (\mathbf{jE}) = - \frac{c}{4\pi} \operatorname{div}[\mathbf{EH}]. \quad (9.2)$$

Здесь мы учли известное соотношение из векторного анализа

$$\operatorname{div}[\mathbf{EH}] = (\mathbf{H} \operatorname{rot} \mathbf{E}) - (\mathbf{E} \operatorname{rot} \mathbf{H}).$$

Интегрируя выражение (9.2) по некоторому объему, ограниченному замкнутой поверхностью  $S$ , и применяя к члену, стоящему в правой части, теорему Гаусса, найдем следующее выражение:

$$\frac{d}{dt} \int_V \frac{(E^2 + H^2)}{8\pi} d^3x + c \int_V (\mathbf{jE}) d^3x = - \oint_S \frac{c}{4\pi} ([\mathbf{EH}] d\mathbf{S}), \quad (9.3)$$

причем в случае точечного электрона мы можем написать для плотности заряда и для плотности тока следующие выражения:

$$\rho = e \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'(t)), \quad \mathbf{j} = \frac{\mathbf{v}}{c} \rho,$$

где  $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$ . Величины

$$E^{\text{поля}} = \int U d^3x \quad \text{и} \quad U = (E^2 + H^2)/8\pi$$

мы можем интерпретировать как полную энергию электромагнитного поля и как ее плотность.

Равенство (9.3) по существу выражает собою закон сохранения энергии, согласно которому изменение энергии поля в единицу времени  $dE^{\text{поля}}/dt$  и потери энергии электроном в единицу времени

$$W^{\text{потери}} = - c \int (\mathbf{jE}) d^3x \quad (9.4)$$

равны энергии излучения

$$W^{\text{изл}} = \int (\mathfrak{S} d\mathbf{S}). \quad (9.5)$$

Здесь вектор Пойнтинга \*)

$$\mathfrak{S} = \frac{c}{4\pi} [\mathbf{EH}].$$

**б) Уравнения Максвелла в среде.** Как известно, движение электрона в среде описывается следующими уравнениями:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{H} - \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} &= \frac{4\pi\sigma}{c} \mathbf{E} + 4\pi\rho \frac{\mathbf{v}}{c}, \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} + \frac{\mu}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} &= 0, \quad \operatorname{div} \varepsilon \mathbf{E} = 4\pi\rho, \quad \operatorname{div} \mu \mathbf{H} = 0, \end{aligned} \quad (9.6)$$

\*) Если мы имеем движение, при котором энергия электромагнитного поля не изменяется, например, потери энергии на излучение компенсируются внешней силой, то потери энергии электроном равны энергии излучения:

$$W^{\text{потери}} = W^{\text{изл}}. \quad (9.4a)$$

где  $\epsilon$ ,  $\mu$  и  $\sigma$  — соответственно диэлектрическая постоянная, магнитная проницаемость и удельная электропроводность среды. Заметим, что при наличии проводимости среды ( $\sigma \neq 0$ ) плотность заряда  $\rho$  является функцией времени, точнее, должна уменьшаться по экспоненциальному закону. Например, в случае точечного заряда мы можем написать

$$\rho = e(t) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'(t)), \quad \mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt.$$

Взяв дивергенцию от первого уравнения и подставляя производную по времени из третьего уравнения (9.6), получаем уравнение непрерывности

$$\operatorname{div} \rho \frac{\mathbf{v}}{c} + \left( \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{4\pi\sigma}{c\epsilon} \right) \rho = 0,$$

или

$$e(t) \frac{\mathbf{v}}{c} \nabla \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') + \frac{4\pi\sigma}{\epsilon c} e(t) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') + \frac{\partial e(t)}{c \partial t} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') + e(t) \frac{\partial}{c \partial t} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = 0.$$

Принимая во внимание, что

$$\frac{\partial}{\partial t} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = -(\mathbf{v} \nabla) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'),$$

находим уравнение для определения заряда

$$\frac{\partial e(t)}{\partial t} + \frac{4\pi\sigma}{\epsilon} e(t) = 0.$$

Интегрируя последнее, имеем

$$e(t) = e(0) e^{-\frac{4\pi\sigma}{\epsilon} t}.$$

Отсюда видно, что время релаксации заряда равно

$$t_0 = \frac{\epsilon}{4\pi\sigma}$$

и поэтому в проводящей среде невозможно длительное существование свободного заряда.

Время установления равновесия, при котором свободный заряд  $e(t)$  обращается в нуль, тем меньше, чем больше проводимость. Для металлов  $\sigma \sim 10^{16} \text{ сек}^{-1}$ , поэтому  $t_0 \sim 10^{-7} \text{ сек}$  (если  $\epsilon \sim 1$ ). Для полупроводников (например, для германия  $\sigma \sim 10^9 \text{ сек}^{-1}$ ) время релаксации возрастает до  $t_0 \sim 10^{-10} \text{ сек}$  и, наконец, для диэлектриков (например, для эбонита  $\sigma \sim 10^{-4} \text{ сек}^{-1}$ ) время релаксации может достигнуть нескольких минут.

Проинтегрируем уравнение (9.6), т.е. выразим поля через плотность заряда и плотность тока. Для того чтобы удовлетво-

ритель четвертому и второму уравнению (9.6), мы должны написать

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= \frac{1}{\mu} \operatorname{rot} \mathbf{A}, \\ \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \operatorname{grad} \Phi. \end{aligned} \quad (9.7)$$

Подставляя эти значения в первое и третье уравнения (9.6) и накладывая на скалярный потенциал условие (типа условия Лоренца)

$$\frac{1}{\mu} \operatorname{div} \mathbf{A} + \frac{1}{c} \left( \frac{\partial}{\partial t} + \frac{4\pi\sigma}{\varepsilon} \right) \varepsilon \Phi = 0, \quad (9.8)$$

мы найдем для определения векторного и скалярного потенциалов следующие уравнения:

$$\mathbf{L} \begin{pmatrix} \frac{1}{\mu} \mathbf{A} \\ \varepsilon \Phi \end{pmatrix} = -4\pi \begin{pmatrix} \mathbf{v} \\ \rho \end{pmatrix}, \quad (9.9)$$

где оператор

$$\mathbf{L} = \nabla^2 - \frac{\varepsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{4\pi\sigma\mu}{c^2} \frac{\partial}{\partial t}.$$

Решение уравнений (9.9) определено формулой (5.53), в которой следует сделать замену (ср. операторы (5.47) и (9.9))

$$c \rightarrow \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}, \quad s \rightarrow \frac{4\pi\sigma\mu}{c^2}.$$

Найдем уравнение, характеризующее изменение энергии в среде. Для этого умножим первое уравнение на  $-\mathbf{E}c/4\pi$ , а второе на  $\mathbf{H}c/4\pi$  (см. (9.6)), и сложим оба равенства, тогда получаем:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\varepsilon E^2 + \mu H^2}{8\pi} \right) + \rho(\mathbf{v}\mathbf{E}) = -\frac{c}{4\pi} \operatorname{div}[\mathbf{E}\mathbf{H}] - \sigma E^2.$$

Интегрируя последнее выражение по некоторому объему, ограниченному замкнутой поверхностью  $S$ , найдем обобщение теоремы Пойнтинга на случай среды:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int \frac{\varepsilon E^2 + \mu H^2}{8\pi} d^3x + \int \rho(\mathbf{v}\mathbf{E}) d^3x + \sigma \int E^2 d^3x &= \\ &= - \oint_S \frac{c}{4\pi} ([\mathbf{E}\mathbf{H}]) dS. \end{aligned} \quad (9.10)$$

Сопоставляя формулу (9.10) с формулой (9.3), мы видим, что проводимость среды приводит к дополнительным потерям на Джоулево тепло

$$W^{\text{Дж}} = \int \sigma E^2 d^3x,$$

а наличие диэлектрической постоянной  $\epsilon$  и магнитной проницаемости  $\mu$  приводит к следующему значению плотности электромагнитной энергии:

$$U = (\epsilon E^2 + \mu H^2)/8\pi.$$

**в) Граничные условия.** Допустим, что мы имеем две среды, отличающиеся друг от друга различными значениями диэлектрической постоянной и магнитной проницаемости. Выберем в качестве границы раздела плоскость  $xy$ . Нормалью к этой поверхности является ось  $z$ . Если мы имеем не плоскую, а другую поверхность раздела (например сферическую или цилиндрическую), то ось  $z$  мы должны заменить соответствующей нормалью в точке раздела. Обозначим диэлектрическую постоянную при  $z < 0$  через  $\epsilon_1$ , а при  $z > 0$  через  $\epsilon_2$ .

Найдем граничные условия с помощью формализма дельта-функции. Для этого введем две функции [3]:

$$\gamma_1(z) = 1/2 - \gamma(z), \quad \gamma_2(z) = 1/2 + \gamma(z),$$

которые свяжем с разрывной функцией

$$\gamma(z) = \begin{cases} 1/2 & \text{при } z > 0, \\ -1/2 & \text{при } z < 0. \end{cases}$$

Производная этой разрывной функции равна дельта-функции (см. (2.42)):

$$\gamma'(z) = \delta(z).$$

Исходя из уравнений электростатики

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = 4\pi\rho, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = 0$$

и предполагая, что на границе двух сред могут возникнуть заряды с поверхностной плотностью  $\sigma(x, y)$ , мы можем при наличии двух сред написать

$$\mathbf{D} = \gamma_1 \mathbf{D}_1 + \gamma_2 \mathbf{D}_2, \quad \mathbf{E} = \gamma_1 \mathbf{E}_1 + \gamma_2 \mathbf{E}_2, \quad \rho = \gamma_1 \rho_1 + \gamma_2 \rho_2 + \delta(z) \sigma(x, y).$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{D} &= \gamma_1 \operatorname{div} \mathbf{D}_1 + \gamma_2 \operatorname{div} \mathbf{D}_2 + \gamma'(z)(D_{2z} - D_{1z}) = \\ &= 4\pi(\gamma_1 \rho_1 + \gamma_2 \rho_2 + \delta(z) \sigma(x, y)), \end{aligned}$$

т. е. для поверхностных зарядов находим

$$(\mathbf{n}(\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1)) = 4\pi\sigma.$$

Точно так же, учитывая, что во всех точках  $\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0$ , мы получим

$$[\mathbf{n}(\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1)] = 0, \quad (9.11)$$

т. е. тангенциальные составляющие вектора  $\mathbf{E}$  на поверхности

разрыва непрерывны, а нормальные составляющие вектора  $D$  должны претерпевать разрыв.

Аналогично, если среды отличаются друг от друга магнитными проницаемостями  $\mu_1$  (при  $z < 0$ ) и  $\mu_2$  (при  $z > 0$ ), то уравнения магнитостатики дают следующие граничные условия:

$$(\mathbf{n}(\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1)) = 0, \quad [\mathbf{n}(\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1)] = 4\pi\mathbf{j}, \quad (9.12)$$

т. е. в данном случае, наоборот, нормальная составляющая вектора  $\mathbf{B}$  будет непрерывной, а тангенциальная составляющая вектора  $\mathbf{H}$  должна претерпевать разрыв, определяющий поверхностные токи  $\mathbf{j}(x, y)$ .

г) **Эффект Черенкова.** Согласно теории относительности скорость движения электрона  $v$  не может быть больше скорости света в вакууме ( $\beta = v/c < 1$ ). Однако при движении электрона в какой-либо среде его скорость  $v$ , оставаясь меньше скорости света в вакууме, может превосходить скорость света в данной среде:  $c/n < v < c$ , где  $n$  — показатель преломления среды. В этом случае электрон начинает обгонять электромагнитное поле, которое, отрываясь от него, начинает излучаться. Это явление наблюдал в 1934 г. Черенков [15] (в лаборатории Вавилова), а теория излучения сверхсветового электрона в диэлектрике была построена Таммом и Франком в 1937 г. [15]. Эффект Черенкова напоминает собою волны Маха, которые излучают тела (например самолеты) при движении в воздухе со сверхзвуковыми скоростями.

Теория излучения сверхсветового электрона в вакууме была развита Шоттом и Зоммерфельдом еще в начале этого века в предположении, что электрон может двигаться в вакууме со скоростью большей, чем скорость света. Однако после того как теория относительности ограничила скорость движения электрона ( $v < c$ ), это явление как будто бы не должно было найти никаких приложений. Тем не менее, после открытия Черенкова явление сверхсветового движения приобрело особый интерес. Вначале оно наблюдалось в темноте в виде весьма слабого свечения. В настоящее время каждый из нас может видеть в ядерных реакторах даже при дневном свете это весьма интенсивное голубовато-зеленое свечение электронов.

Черенковские счетчики нашли также весьма широкое применение для обнаружения отдельной частицы в веществе по световой вспышке, позволяющей судить с помощью фотоумножителей о скорости движения частицы, величине ее заряда и т. д. Поэтому неудивительно, что спустя тридцать лет после этого открытия Черенков, Тамм и Франк получили в 1958 г. Нобелевскую премию [16].

Для построения теории эффекта Черенкова предположим, что точечный электрон заряда  $e = -e_0$  движется в диэлектрике



( $\sigma = 0$ ) с показателем преломления  $n = \sqrt{\epsilon}$  ( $\epsilon > 1$ ,  $\mu = 1$ ) по оси  $z$  с постоянной скоростью  $v$ . Тогда плотность заряда и плотность тока будут соответственно равны (см., например, [3])

$$\rho = -e_0 \delta(x) \delta(y) \delta(z - vt), \quad j_x = j_y = 0, \quad j_z = \frac{v}{c} \rho. \quad (9.13)$$

Они удовлетворяют уравнению непрерывности (6.6), которое в нашем случае принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial z} \frac{v}{c} \rho + \frac{1}{c} \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0. \quad (9.14)$$

Для определения скалярного и векторного потенциалов согласно (9.9) имеем уравнения

$$\left( \nabla^2 - \frac{n^2}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \begin{pmatrix} A_z \\ n^2 \Phi \end{pmatrix} = -4\pi \begin{pmatrix} \frac{v}{c} \rho \\ \rho \end{pmatrix}. \quad (9.15)$$

Отсюда следует

$$A_z = \beta n^2 \Phi, \quad A_y = A_x = 0. \quad (9.16)$$

Из (9.15) для определения потенциала  $\Phi$  находим

$$\left( \nabla^2 - \frac{n^2}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \Phi = \frac{4\pi e_0}{n^2} \delta(x) \delta(y) \delta(z - vt). \quad (9.17)$$

Составляющие векторов электрической и магнитной напряженностей будут согласно (9.16) равны

$$E_x = -\frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad E_y = -\frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad E_z = -\frac{\partial A_z}{c \partial t} - \frac{\partial \Phi}{\partial z} = \gamma^2 \frac{\partial \Phi}{\partial z}, \quad (9.18)$$

$$H_x = -\beta n^2 E_y, \quad H_y = \beta n^2 E_x, \quad H_z = 0.$$

Здесь

$$\gamma^2 = n^2 \beta^2 - 1. \quad (9.19)$$

Кроме того, мы приняли во внимание равенство (9.16) и следующее соотношение:

$$\frac{\partial \Phi}{c \partial t} = -\beta \frac{\partial \Phi}{\partial z}. \quad (9.20)$$

Подставим в правую часть (9.17) вместо трехмерной дельта-функции разложение (см. (3.5))

$$\delta(x) \delta(y) \delta(z - vt) = \frac{1}{8\pi^3} \int e^{i(k_1 x + k_2 y + k_3(z - vt))} d^2 k dk_3, \quad (9.21)$$

где  $d^2 k = dk_1 dk_2$ , составляющие  $k_1, k_2, k_3$  определяют составляющие волнового вектора (т. е. направление распространения волны), а частота  $\omega$  связана с составляющей  $k_3$  соотношением

$$\omega = vk_3. \quad (9.22)$$

Путем деления на оператор Даламбера (см. (5.38)) мы можем найти следующее значение потенциала  $\Phi$  [3]:

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = -\frac{e_0}{2\pi^2} \int \frac{1}{n^2} e^{i(k_1 x + k_2 y + k_3(z - vt))} \times \\ \times \left[ \frac{1}{k_1^2 + k_2^2 - v^2 k_3^2} + \pi i \frac{k_3}{|k_3|} \delta(k_1^2 + k_2^2 - v^2 k_3^2) \right] d^2 k dk_3. \quad (9.23)$$

При дальнейших исследованиях следует различать два случая:

$$1) \ v > c/n, \quad 2) \ v < c/n.$$

Случай 2) относится, например, к вакууму ( $n = 1$ ), где случай 1) просто невозможен. Случай 1) может быть осуществлен только в диэлектрике, и то при достаточно больших скоростях ( $v > c/n$ ), когда аргумент дельта-функции в (9.23) может в некоторых особых точках обращаться в нуль. Как будет показано ниже, при этом должно происходить излучение.

Благодаря излучению (черенковскому) электрон начинает терять скорость, а вместе с тем и энергию поля, т. е. величина

$$E^{\text{но.об}} = \int \frac{\varepsilon \mathbf{E}^2 + \mathbf{H}^2}{8\pi} d^3 x \quad (9.24)$$

начинает уменьшаться. Однако мы рассматриваем случай  $v = \text{const}$ , т. е. когда мы можем пренебречь изменением скорости. Это возможно, например, при

$$\left| \frac{dE^{\text{но.об}}}{dt} \right| \ll \left| \frac{c}{4\pi} \oint ([\mathbf{E}\mathbf{H}] d\mathbf{S}) \right|. \quad (9.25)$$

Образно говоря, в этом случае мы как бы «тянем электрон за веревочку» с постоянной скоростью  $v$  \*).

Согласно (9.4) энергия излучения может быть вычислена по теореме Пойнтинга

$$W^{\text{изл}} = \frac{c}{4\pi} \oint ([\mathbf{E}\mathbf{H}] d\mathbf{S}), \quad (9.26)$$

а также при условии (9.25) по формуле прямых потерь энергии электроном (см. (9.4))

$$W^{\text{потери}} = - \int \rho v E_z d^3 x. \quad (9.27)$$

Оба способа в данном случае должны привести к одному и тому же результату:

$$W^{\text{потери}} = W^{\text{изл}} = W,$$

\*) Скомпенсировать потери скорости мы можем, например, с помощью включения внешнего электромагнитного поля.

и поэтому мы воспользуемся более простым вторым способом (см. (9.27)). При этом  $\rho$  задается дельта-функцией (электрон точечный), и мы должны выражение (9.27) распространить на такой объем, который охватывал бы лишь координату электрона. Не нарушая общности, мы можем произвести интегрирование по всему пространству [17].

Из формул (9.18) и (9.27) находим следующее значение для составляющей  $E_z$ :

$$E_z = -\frac{e_0 i}{2\pi^2} \int \frac{\gamma^2 k_3}{n^2} e^{i(k_1 x + k_2 y + k_3(z-vt))} \times \\ \times \left[ \frac{1}{k_1^2 + k_2^2 - \gamma^2 k_3^2} + \pi i \frac{k_3}{|k_3|} \delta(k_1^2 + k_2^2 - \gamma^2 k_3^2) \right] d^2 k dk_3. \quad (9.28)$$

Подставляя в (9.27) значение плотности заряда из (9.13)

$$\rho = -e_0 \delta(x) \delta(y) \delta(z - vt)$$

и производя интегрирование по пространственным координатам, найдем

$$W = \frac{e_0^2 v}{2\pi^2} \int \frac{\gamma^2}{n^2} \left[ -\frac{ik_3}{k_1^2 + k_2^2 - \gamma^2 k_3^2} + \right. \\ \left. + \pi |k_3| \delta(k_1^2 + k_2^2 - \gamma^2 k_3^2) \right] d^2 k dk_3. \quad (9.29)$$

При интегрировании по  $k_3$  в пределах от  $-\infty$  до  $+\infty$  первый член, стоящий в квадратных скобках правой части равенства (9.29) (как нечетный относительно переменной  $k_3$ ), дает нуль, а второй, пропорциональный дельта-функции (как четный), дает удвоенный интеграл по  $k_3$  в пределах от 0 до  $+\infty$ . Вводя еще цилиндрические координаты для вектора  $k$

$$k_1 = k_{\perp} \cos \varphi, \quad k_2 = k_{\perp} \sin \varphi, \quad k_3 = k_3, \quad d^2 k = k_{\perp} dk_{\perp} d\varphi,$$

мы найдем для потерь энергии (см. (9.29)) после интегрирования по  $\varphi$  следующее выражение\*):

$$W = e_0^2 v \int_0^{\infty} \frac{\gamma^2}{n^2} k_3 \delta(k_{\perp}^2 - \gamma^2 k_3^2) dk_{\perp}^2 dk_3. \quad (9.30)$$

\*) Таким образом, только член, пропорциональный дельта-функции  $\delta(k_{\perp}^2 - \gamma^2 k_3^2)$ , входящий в гриннан, дает излучение под действием поля, создаваемого самим же электроном. Как видно из формул (5.32) и (5.33), он равен полуразности запаздывающих и опережающих потенциалов. Первый же член в квадратных скобках равенства (9.28), пропорциональный  $1/(k_{\perp}^2 - \gamma^2 k_3^2)$  и равный полусумме запаздывающих и опережающих потенциалов, никакой работы для силы самодействия не дает.

При интегрировании по  $k_{\perp}^2$  благодаря наличию дельта-функции имеем

$$k_{\perp} = \gamma k_3 = \gamma \omega / v. \quad (9.31)$$

Кроме того, вводя вместо составляющей  $k_3$  частоту  $\omega$  (см. (9.22)), мы найдем формулу для потерь энергии черенковского излучения, полученную Таммом и Франком [15]:

$$W = \frac{e_0^2 v}{c^2} \int_0^{\omega_{\text{макс}}} \left(1 - \frac{1}{\beta^2 n^2}\right) d\omega. \quad (9.32)$$

Строго говоря, в интеграле (9.32) мы должны положить  $\omega_{\text{макс}} = \infty$  (тогда этот интеграл будет расходиться). Однако показатель преломления остается постоянной величиной лишь для сравнительно длинных волн. С уменьшением длины волны (увеличением частоты  $\omega$ ) показатель преломления уменьшается, а для рентгеновских лучей становится даже меньше единицы. Поэтому верхний предел для интеграла по  $\omega$  следует определять из уравнения

$$\beta n_{\text{макс}} = 1, \quad (9.33)$$

где показатель  $n_{\text{макс}}$  зависит от  $\omega_{\text{макс}}$ .

Найдем еще направление векторов  $\mathcal{E}$ ,  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$ . Поскольку мы имеем осевую (относительно оси  $z$ ) симметрию, можно предположить, что волновой вектор  $\mathbf{k}$ , параллельный  $\mathcal{E}$ , лежит в плоскости  $xz$  (рис. 6). Затем, вращая эти векторы вокруг оси  $z$ , получаем полную картину излучения.

Как видно из формулы (9.32), при  $k_2 = 0$  имеем

$$k_1 = k_{\perp} = \gamma k_3. \quad (9.34)$$

Учитывая, что вектор Пойнтинга должен быть направлен по волновому вектору  $\mathbf{k}$ , мы найдем угол  $\theta$ , под которым должно происходить излучение относительно оси  $z$ :

$$\text{tg } \theta = k_3 / k_1 = 1 / \gamma,$$

$$\text{или} \quad \cos \theta = 1 / \sqrt{1 + \gamma^2} = 1 / \beta n \quad (9.35)$$

при любых значениях  $k_3$ .

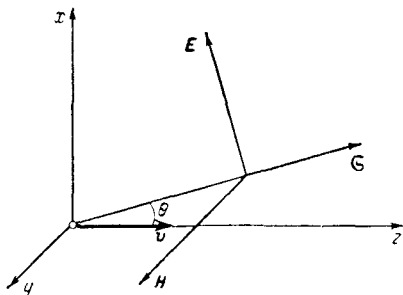


Рис. 6. Черенковское излучение.

Разложим векторы  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  в интеграл Фурье вида (9.23):

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{e_0}{2\pi} \int \frac{\mathbf{E}(\mathbf{k})}{n^2} e^{i(k_1 x + k_2 y + k_3(z-vt))} \times \\ \times \left[ \frac{k_3}{|k_3|} \delta(k_{\perp}^2 - \gamma^2 k_3^2) \right] d^2k dk_3, \quad (9.36)$$

оставив в них только член, дающий отличный от нуля вклад в излучение. Учитывая, что в этом случае имеет место соотношение (9.31), найдем согласно (9.18) для компонент  $\mathbf{E}(\mathbf{k})$  и  $\mathbf{H}(\mathbf{k})$  следующие значения при  $k_2 = 0$ ,  $k_1 = \gamma k_3$ :

$$E_x(\mathbf{k}) = \gamma k_3, \quad E_y(\mathbf{k}) = 0, \quad E_z(\mathbf{k}) = -\gamma^2 k_3, \quad (9.37)$$

$$H_x(\mathbf{k}) = 0, \quad H_y(\mathbf{k}) = \beta n^2 E_x(\mathbf{k}), \quad H_z(\mathbf{k}) = 0. \quad (9.38)$$

Из формул (9.37) и (9.38) видно, что компоненты вектора  $\mathbf{H}(\mathbf{k})$  будут направлены по оси  $y$ , а компоненты вектора  $\mathbf{E}(\mathbf{k})$  лежат в плоскости  $xz$ , причем составляют с направлением волнового вектора прямой угол (см. рис. 6)\*, так как согласно (9.37)

$$E_z(\mathbf{k})/E_x(\mathbf{k}) = -\gamma = -k_{\perp}/k_3. \quad (9.39)$$

Поскольку угол  $\theta$  не зависит от значения вектора  $\mathbf{k}$ , эти направления сохранятся и для соответствующих интегральных значений.

д) **Эквипотенциальные поверхности при движении электрона с постоянной скоростью.** Вычислим значение потенциала  $\Phi$  (см. (9.23)) при черенковском излучении. Если ввести цилиндрические координаты вектора  $\mathbf{k}$  (см. (9.30)) и вектора  $\mathbf{r}$  ( $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ ) и учесть, что

$$\int_0^{2\pi} e^{ik_{\perp} r \cos \varphi} d\varphi = 2\pi J_0(k_{\perp} r), \quad (9.40)$$

где  $J_0(k_{\perp} r)$  — функция Бесселя нулевого порядка, то мы найдем

$$\Phi = -\frac{e_0}{\pi} \int \frac{1}{n^2} e^{ik_3(z-vt)} dk_3 \int_0^{\infty} k_{\perp} J_0(k_{\perp} r) dk_{\perp} \times \\ \times \left[ \frac{1}{k_{\perp}^2 - \gamma^2 k_3^2} + \pi i \frac{k_3}{|k_3|} \delta(k_{\perp}^2 - \gamma^2 k_3^2) \right]. \quad (9.41)$$

\*) Поскольку волновой вектор, а также векторы электрической и магнитной напряженностей взаимно перпендикулярны, причем при вращении правого винта от вектора  $\mathbf{E}$  к вектору  $\mathbf{H}$  он начинает двигаться по волновому вектору  $\mathbf{k}$ , наше предположение, что направление вектора Пойнтинга совпадает с направлением волнового вектора  $\mathbf{k}$ , оказалось оправданным. Излучение при заданном  $\mathcal{E}$  будет обладать линейной поляризацией.

Далее, принимая во внимание соотношения

$$\int_0^{\infty} \frac{J_0(k_{\perp}r)}{k_{\perp}^2 - a^2} k_{\perp} dk_{\perp} = -\frac{\pi}{2} N_0(ar),$$

$$\int_0^{\infty} J_0(k_{\perp}r) \delta(k_{\perp}^2 - a^2) k_{\perp} dk_{\perp} = \frac{1}{2} J_0(ar),$$
(9.42)

мы приведем (9.41) к виду

$$\Phi = e_0 \int_0^{\infty} \frac{1}{n^2} [\sin k_3(z - vt) J_0(r\gamma k_3) + \cos k_3(z - vt) N_0(r\gamma k_3)] dk_3.$$
(9.43)

Из теории бесселевых функций известны соотношения

$$\int_0^{\infty} \sin k_3 \alpha J_0(k_3 \beta) dk_3 = - \int_0^{\infty} \cos k_3 \alpha N_0(k_3 \beta) dk_3 =$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}}; & \alpha > \beta > 0, \\ 0; & \beta > \alpha > 0, \end{cases}$$
(9.44)

которые для искомого потенциала дают

$$\Phi = \begin{cases} -\frac{2e_0}{n^2 \sqrt{(vt - z)^2 - \gamma^2 r^2}}; & vt - z > \gamma r, \\ 0; & vt - z < \gamma r. \end{cases}$$
(9.45)

В частности, полагая  $t = 0$ , т. е. предполагая, что электрон находится в начале координат, найдем

$$\Phi = \begin{cases} -\frac{2e_0}{n^2 \sqrt{z^2 - \gamma^2 r^2}}; & -z > \gamma r, \\ 0; & -z < \gamma r, \end{cases}$$
(9.46)

откуда видно, что эквипотенциальными поверхностями будут гиперболоиды вращения

$$z^2 - \gamma^2 r^2 = z^2 - \gamma^2 (x^2 + y^2) = \text{const}$$
(9.47)

при условии, что  $z < 0$ , т. е. электромагнитное поле как бы отстает от электрона.

На рис. 7 изображена гипербола в плоскости  $xz$ , вращая которую вокруг оси  $z$ , мы получим эквипотенциальные поверхности. На этом же рисунке проведены асимптоты (пунктирные прямые) этой гиперболы, которые проходят через начало координат, где

находится в данный момент электрон. Уравнения этих асимптот имеют вид

$$z = \mp \gamma x. \quad (9.48)$$

Нетрудно показать, что асимптота составляет с осью  $x$  углы, тангенсы которых равны

$$z/x = \mp \gamma, \quad (9.49)$$

т. е. она направлена по вектору  $\mathbf{E}$  (см. (9.39)) и составляет с направлением вектора Пойнтинга угол, равный  $\pi/2$  (более подробно об эффекте Черенкова и его применении см. в [18]).

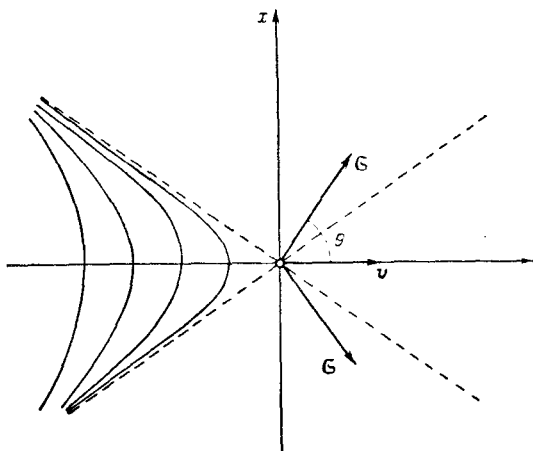


Рис. 7. Эквипотенциальные поверхности черенковского излучения.

Вычислим теперь потенциал при  $\gamma^2 < 0$  (второй случай, см. (9.19)). Для простоты рассмотрим вакуум ( $n = 1$ ). Тогда в решении (9.23) дельта-функция не содержит особых точек и поэтому второй член в правой части мы можем просто отбросить. Поскольку этот член целиком обуславливает излучение, то равномерно и прямолинейно движущийся электрон со скоростью, меньшей скорости света (например в вакууме), не должен терять энергию. Для соответствующего потенциала из (9.23) мы найдем значение

$$\Phi = -\frac{e_0}{2\pi^2} \int e^{i(k_1x + k_2y + k_3(z-vt))} \frac{1}{k_1^2 + k_2^2 + (1-\beta^2)k_3^2} d^3k. \quad (9.50)$$

Вводя новую переменную

$$k_3 \rightarrow k_3 / \sqrt{1-\beta^2},$$

найдем

$$\Phi = -\frac{e_0}{2\pi^2 \sqrt{1-\beta^2}} \int e^{i(k_1x + k_2y + k_3(z-vt)/\sqrt{1-\beta^2})} \frac{1}{k_1^2 + k_2^2 + k_3^2} d^3k. \quad (9.51)$$

Последний интеграл представляет собою функцию Грина уравнения Пуассона (см. (5.18)). В частности, для потенциала точечного заряда согласно (5.22) мы можем записать

$$\Phi = -e_0/r, \tag{9.52}$$

где

$$r = \sqrt{(1 - \beta^2)(x^2 + y^2) + (z - vt)^2},$$

т. е. в начальный момент времени  $t = 0$  имеем

$$\Phi = -\frac{e_0}{\sqrt{(1 - \beta^2)(x^2 + y^2) + z^2}}. \tag{9.53}$$

Эквипотенциальными поверхностями будут эллипсоиды вращения, впервые исследованные Хевисайдом (эллипсы, изображенные на рис. 8, мы должны вращать вокруг оси  $z$ , причем  $b/a = \sqrt{1 - \beta^2}$ ).

**е) Излучение гармонического осциллятора.** Допустим, что электрон совершает вынужденные гармонические колебания вдоль оси  $z$  с амплитудой  $a$  и частотой  $\omega$ . Влиянием излучения на эти колебания мы будем пренебрегать. В отличие от тривиального вывода рассмотрения поля излучения в волновой зоне мы дадим точный вывод для потерь энергии в единицу времени, усредненной за один период.

Уравнение колебания осциллятора запишем в виде

$$z' = a \sin \omega t, \tag{9.54}$$

где координата  $z'$  характеризует положение электрона. Для плотности заряда  $\rho$  имеем выражение

$$\rho = -e_0 \delta(x) \delta(y) \delta(z - a \sin \omega t) = -\frac{e_0}{8\pi^3} \int e^{i(\mathbf{kr} - ak_z \sin \omega t)} d^3k. \tag{9.55}$$

Воспользуемся известными разложениями плоской волны по цилиндрическим функциям [19]:

$$\begin{aligned} e^{-ix \sin \alpha} &= \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} J_\nu(x) e^{-i\nu\alpha}, \\ \sin \alpha e^{-ix \sin \alpha} &= i \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} J'_\nu(x) e^{-i\nu\alpha}, \\ \cos \alpha e^{-ix \sin \alpha} &= \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} \frac{\nu}{x} J_\nu(x) e^{-i\nu\alpha}. \end{aligned} \tag{9.56}$$

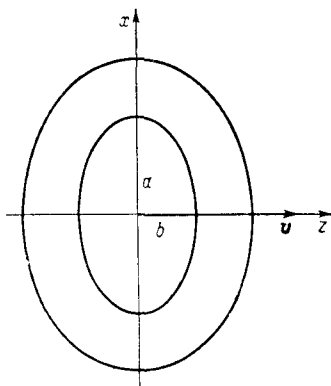


Рис. 8. Эллипсоид Хевисайда.



Отсюда найдем следующие значения для плотности тока, составляющая которого отлична от нуля только вдоль оси  $z$ :

$$j_z = \frac{v}{c} \rho = \frac{a\omega \cos \omega t}{c} \rho, \quad j_x = j_y = 0. \quad (9.57)$$

Для дальнейших расчетов мы разложим величины, характеризующие плотность заряда, плотность тока и поля, в интеграл Фурье:

$$F(\mathbf{r}, t) = -\frac{e_0}{8\pi^3} \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} \int d^3k e^{i\mathbf{k}\mathbf{r} - i\nu\omega t} F_\nu. \quad (9.58)$$

Тогда для амплитуд Фурье плотности заряда и тока имеем значение

$$\begin{pmatrix} \rho_\nu \\ j_{z\nu} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega\nu \\ ck_3 \end{pmatrix} J_\nu, \quad (9.59)$$

где бесселева функция порядка  $\nu$  зависит от аргумента  $ak_3$ .

Из соотношения между потенциалами и плотностями заряда и тока

$$\square \begin{pmatrix} \Phi \\ A_z \end{pmatrix} = -4\pi \begin{pmatrix} \rho \\ j_z \end{pmatrix} \quad (9.60)$$

путем деления на оператор Даламбера  $\square$  с учетом запаздывающих решений (см. (5.38)) мы можем найти амплитуды Фурье для потенциалов:

$$\begin{pmatrix} \Phi_\nu \\ A_{z\nu} \end{pmatrix} = 4\pi(G_1 + G_0) \begin{pmatrix} \rho_\nu \\ j_{z\nu} \end{pmatrix}, \quad A_{x\nu} = A_{y\nu} = 0, \quad (9.61)$$

где сингулярная и несингулярная части функций Грина соответственно равны (см. (5.38))

$$G_1 = \frac{1}{k^2 - \nu^2 \frac{\omega^2}{c^2}}, \quad G_0 = i\pi \frac{\nu}{|\nu|} \delta\left(k^2 - \nu^2 \frac{\omega^2}{c^2}\right). \quad (9.62)$$

Для определения амплитуд Фурье будем исходить из известных соотношений

$$\mathbf{E} = -\text{grad } \Phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad \mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{A}, \quad (9.63)$$

из которых следует

$$\begin{aligned} E_{x\nu} &= -ik_1 4\pi(G_1 + G_0) J_\nu, \\ E_{y\nu} &= -ik_2 4\pi(G_1 + G_0) J_\nu, \\ E_{z\nu} &= -ik_3 \left(1 - \frac{\nu^2 \omega^2}{c^2 k_3^2}\right) (G_1 + G_0) J_\nu, \end{aligned} \quad (9.64)$$

$$H_{x\nu} = \frac{\omega\nu}{ck_1} E_{y\nu}, \quad H_{y\nu} = -\frac{\omega\nu}{ck_2} E_{x\nu}, \quad H_{z\nu} = 0.$$

Поскольку в среднем за один период электрон переходит в свое начальное положение, энергия электромагнитного поля остается прежней, т. е.

$$\frac{1}{T} \int_0^T dt \frac{d}{dt} \int_V \frac{E^2 + H^2}{8\pi} d^3x = 0. \quad (9.65)$$

Поэтому энергия излучения равна потерям и мы ее можем вычислить по формуле

$$W_{\text{изл}} = W_{\text{потери}} = W,$$

где

$$W = -\frac{1}{T} \int_0^T dt c \int j_z^* E_z d^3x, \quad (9.66)$$

а период колебания  $T = 2\pi/\omega$ .

Заметим, что  $j_z$  является вещественной величиной; поэтому мы можем написать  $j_z^* = j_z$ . Однако при разложении в ряд нам значительно удобней взять  $j_z^*$ , так как, обозначая волновой вектор через  $\mathbf{k}'$  и частоту через  $\omega$ , при интегрировании по времени и по пространству мы можем воспользоваться соотношениями

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \int_0^T e^{ik\omega t} (v' - v) dt &= \delta_{vv'}, \\ \int d^3x e^{i\mathbf{r} \cdot (\mathbf{k} - \mathbf{k}')} &= 8\pi^3 \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}'). \end{aligned} \quad (9.67)$$

Подставляя сюда вместо  $j_z$  и  $E_z$  разложения (9.58) и учитывая также выражение (9.59), (9.64) и (9.62), найдем

$$\begin{aligned} \bar{W} &= \frac{e_0^2}{2\pi^2} \sum_{v=-\infty}^{+\infty} \int d^3k \left( \frac{v^2 \omega^2 - c^2 k_3^2}{c^2 k_3^2} \omega J_v^2(ak_3) \right) \times \\ &\times \left[ -\frac{iv}{k^2 - v^2 \frac{\omega^2}{c^2}} + \pi |v| \delta \left( k^2 - v^2 \frac{\omega^2}{c^2} \right) \right]. \end{aligned} \quad (9.68)$$

Принимая во внимание, что члены, нечетные относительно  $v$ , при суммировании от  $-\infty$  до  $+\infty$  дают нуль, а четные — удвоенную сумму по  $v$  от 0 до  $\infty$ , мы найдем для средней энергии излучения

$$\bar{W} = \frac{e_0^2 \omega}{\pi} \sum_{v=0}^{\infty} \int d^3k J_v^2(ak_3) v \delta \left( k^2 - v^2 \frac{\omega^2}{c^2} \right) \frac{v^2 \omega^2 - c^2 k_3^2}{c^2 k_3^2}. \quad (9.69)$$

Здесь, как и в эффекте Черенкова, остается член, пропорциональный дельта-функции, т. е. равный полуразности запаздывающих

и опережающих потенциалов. Вводя сферические координаты вектора  $\mathbf{k}(k, \theta, \varphi)$  и учитывая, что благодаря наличию дельта-функции

$$k = v \frac{\omega}{c} > 0, \quad k_3 = v \frac{\omega}{c} \cos \theta, \quad k_1^2 + k_2^2 = \left( v \frac{\omega}{c} \sin \theta \right)^2, \quad (9.70)$$

$$d^3k = -\sin \theta d\theta \frac{v\omega}{2c} dk^2 d\varphi,$$

мы приведем выражение (9.69) после интегрирования по  $k^2$  и углу  $\varphi$  к виду [20]

$$\bar{W} = -\frac{e_0^2 \omega^2}{c} \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu^2 \int_0^{\pi} \sin \theta d\theta \operatorname{tg}^2 \theta J_{\nu}^2(\nu\beta \cos \theta), \quad (9.71)$$

где  $\beta = a\omega/c$ .

**ж) Поляризация излучения гармонического осциллятора.** Исследуем поляризацию электромагнитных волн, излучаемых гармоническим осциллятором. Не нарушая общности, вектор  $\mathbf{k}$ , направленный по вектору Пойнтинга  $\mathfrak{E}$ , мы можем расположить

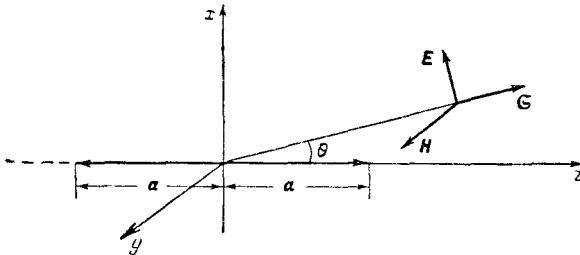


Рис. 9. Излучение гармонического осциллятора.

в плоскости  $xz$  ( $k_2 = 0$ ). Из равенств (9.64) и (9.70) легко найти, что

$$E_{zv}/E_{xv} = -k_1/k_3, \quad E_{yv} = 0, \quad (9.72)$$

т. е. амплитуда вектора  $\mathbf{E}$  также будет лежать в плоскости  $xz$ , но направлена перпендикулярно к волновому вектору  $\mathbf{k}$ . Как видно из формулы (9.64), у амплитуды магнитного поля отличной от нуля будет лишь одна составляющая  $H_{yv}$ , перпендикулярная к векторам  $\mathbf{k}$  и  $\mathbf{E}_v$ , причем если составляющая  $E_{zv}$  является положительной величиной, то составляющая  $H_{yv}$  также положительна, поскольку в конечном результате мы ограничились положительными значениями  $\nu$ .

Направление вектора Пойнтинга  $\mathfrak{E}$ , параллельного волновому вектору  $\mathbf{k}$ , а также векторов  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  изображено на рис. 9, из которого видно, что если вектор Пойнтинга  $\mathfrak{E}$  составляет с осью  $z$  (направление колебаний гармонического осциллятора) угол  $\theta$

и лежит в плоскости  $xz$ , то вектор  $\mathbf{E}$  будет также лежать в плоскости  $xz$ , составляя с вектором  $\mathbf{S}$  прямой угол, а вектор  $\mathbf{H}$  направлен по оси  $y$ . Для получения полной картины излучения мы должны совершить поворот вокруг оси  $z$ .

з) **Суммарное излучение.** Выражение (9.71) мы легко можем просуммировать по гармоникам  $\nu$  при помощи известного соотношения [19]\*)

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \nu^2 J_{\nu}^2(\nu\beta \cos \theta) = \frac{\beta^2 \cos^2 \theta (4 + \beta^2 \cos^2 \theta)}{16 (1 - \beta^2 \cos^2 \theta)^{3/2}} \quad (9.73)$$

и получить формулу для углового распределения интенсивности излучения:

$$\bar{W} = \frac{e_0^2 \omega^2 \beta^2}{16c} \int_0^{\pi} \sin^3 \theta \, d\theta \frac{4 + \beta^2 \cos^2 \theta}{(1 - \beta^2 \cos^2 \theta)^{3/2}}. \quad (9.74)$$

Далее, интегрируя последнее выражение по углам, мы найдем общее выражение для энергии излучения:

$$\bar{W} = \frac{e_0^2 \omega^2 \beta^2}{12c} \frac{4 - 3\beta^2}{(1 - \beta^2)^{3/2}}. \quad (9.75)$$

и) **Дипольное и квадрупольное излучения гармонического осциллятора.** При сравнительно малых скоростях движения электрона в гармоническом осцилляторе мы можем ограничиться одним или двумя членами в равенстве (9.71). Первый член дает дипольное излучение, второй — квадрупольное и т. д.

Принимая во внимание, что при малых значениях аргумента функции Бесселя равны

$$J_1(x) = \frac{x}{2} \left(1 - \frac{x^2}{8}\right), \quad J_2(x) = \frac{x^2}{8},$$

мы найдем для вероятности излучения первой гармоники (дипольное излучение,  $\nu = 1$ , частота излучения  $\omega$ ) \*\*)

$$\begin{aligned} \bar{W}_1 &= \frac{e_0^2 \omega^2}{4c} \int_0^{\pi} \sin \theta \, d\theta \operatorname{tg}^2 \theta \beta^2 \cos^2 \theta \left(1 - \frac{1}{4} \beta^2 \cos^2 \theta\right) = \\ &= \frac{e_0^2 \omega^2 \beta^2}{3c} \left(1 - \frac{1}{5} \beta^2\right) \approx \frac{e_0^2 \omega^4 a^2}{3c^3}. \end{aligned} \quad (9.76)$$

\*) Эта формула дана в [19] с опечаткой: вместо показателя степени  $7/2$  написано  $1/2$ .

\*\*) Формула (9.76) может быть получена из точной формулы (9.75), если в последней ограничиться лишь членом, пропорциональным  $\beta^2$ .

Точно так же найдем интенсивность квадрупольного излучения, если в (9.71) положим  $\nu = 2$  (частота излучения  $2\omega$ ):

$$\bar{W}_2 = \frac{4}{15} \frac{e_0^3 \omega^2}{c} \beta^4 = \frac{1}{15} \frac{e_0^3 a^4 \omega^3}{c^3}. \quad (9.77)$$

Таким образом, отношение интенсивностей частот  $2\omega$  и  $\omega$  равно

$$\bar{W}_2/\bar{W}_1 \approx \beta^2 \approx (a\omega/c)^2 \approx (a/\lambda)^2. \quad (9.78)$$

Отсюда видно, что в нерелятивистском случае ( $\beta \ll 1$ ) мы можем ограничиться лишь первым (т.е. дипольным) членом. В ультрарелятивистском случае ( $\beta \rightarrow 1$ ) разложение по гармоникам теряет смысл. Максимум излучения должен падать на высокие гармоники. Однако более подробно этот вопрос мы разберем в § 10 на примере движения по окружности.

Заметим, что излучение гармонического осциллятора при наличии перпендикулярной составляющей движения с постоянной скоростью  $v$  вдоль оси  $x$ , когда для плотности заряда вместо (9.55) следует написать выражение  $\rho = -e_0 \delta(x - vt) \delta(y) \delta(z - a \sin \omega t)$ , может быть положено в основу теории ондулятора. Ондулятор является одним из источников излучения типа синхротронного. Подобное движение электрона может быть осуществлено с помощью соответствующих установок источников электрических или магнитных полей. Наибольший интерес представляет случай, когда  $v \rightarrow c$ , а колебания вдоль оси  $z$  совершаются с нерелятивистской скоростью. Более подробно этот вопрос мы рассматривать не будем и отсылаем читателя к специальной литературе [21].

## § 10. СИНХРОТРОННОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ

**а) Основные уравнения.** Как известно, при движении электронов по окружности или по винтовой линии со скоростью, близкой к скорости света, происходит интенсивное излучение, получившее название синхротронного. Известные классические выводы интенсивности синхротронного излучения основаны на разложении по некоторому малому параметру (пропорциональному отношению радиуса траектории к расстоянию наблюдателя от электрона), т.е. относятся к так называемой волновой зоне, когда наблюдатель находится на сравнительно большом расстоянии от электрона.

Однако для расчетов современных циклических электронных ускорителей, где радиусы достигают порядка нескольких метров, а наблюдатель может находиться от источника сколь угодно близко, важно дать точный вывод формулы для синхротронного излучения.

Если электрон движется по винтовой линии, то его координаты изменяются по закону

$$x' = R \cos \omega t, \quad y' = R \sin \omega t, \quad z' = v_{\parallel} t, \quad (10.1)$$

где  $R$  — радиус цилиндрической поверхности, по которой происходит движение,  $\omega$  — круговая частота вращения,  $v_{\parallel}$  — скорость движения вдоль оси  $z$  (продольная составляющая).

Заметим, что такое движение может быть осуществлено (если пренебречь излучением) в постоянном и однородном магнитном поле  $\mathbf{H}$  или в поле поляризованной по кругу электромагнитной волны (см. § 8). В частности, в постоянном магнитном поле энергия электрона равна

$$E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad (10.2)$$

причем скорость электрона (см. (8.93)) связана с продольной  $v_{\parallel}$  и поперечной  $v_{\perp} = R\omega$  составляющими при помощи соотношения

$$v = c\beta = \sqrt{v_{\parallel}^2 + v_{\perp}^2}, \quad (10.3)$$

а частота  $\omega$  согласно (8.91) зависит от  $E$  и  $H$ :

$$\omega = e_0 H c / E. \quad (10.4)$$

Вообще говоря, благодаря излучению радиус траектории должен постепенно уменьшаться. Однако это уменьшение мало скажется на интенсивности излучения (см. § 11). В реальных синхротронах эти потери компенсируются различными способами, которые мы рассмотрим ниже (см. §§ 11, 27).

Учитывая уравнения движения (10.1), для плотности заряда напишем выражение

$$\begin{aligned} \rho &= e \delta(x - R \cos \omega t) \delta(y - R \sin \omega t) \delta(z - v_{\parallel} t) = \\ &= \frac{e}{8\pi^3} \int d^3 k e^{i\mathbf{k}\mathbf{r} - ik_3 v_{\parallel} t - ik_{\perp} R \sin \alpha}, \end{aligned} \quad (10.5)$$

где  $\alpha = \omega t - \psi + \pi/2$ , а  $\psi$  — полярный угол вектора  $\mathbf{k}$ :

$$\begin{aligned} k_1 &= k_{\perp} \cos \psi, \quad k_2 = k_{\perp} \sin \psi, \quad k_3 = k_{\parallel}, \\ k_{\perp} &= \sqrt{k_1^2 + k_2^2}, \quad k^2 = k_{\perp}^2 + k_3^2. \end{aligned} \quad (10.6)$$

Из (10.1) находим проекции для скорости:

$$\begin{aligned} v_x &= \frac{dv'_x}{dt} = -v_{\perp} \sin \omega t = v_{\perp} (\cos \alpha \cos \psi - \sin \alpha \sin \psi), \\ v_y &= v_{\perp} \cos \omega t = v_{\perp} (\sin \alpha \cos \psi + \cos \alpha \sin \psi), \\ v_z &= v_{\parallel}. \end{aligned} \quad (10.7)$$

Отсюда, принимая во внимание соотношения (9.56), для плотности тока имеем  $\mathbf{j} = \beta \rho$ . В дальнейшем все величины мы будем

представляться разложенными в ряд и интеграл Фурье вида

$$F(\mathbf{r}, t) = -\frac{e_0}{8\pi^3} \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} \int d^3k e^{i\mathbf{k}\mathbf{r} - it\omega_\nu} e^{i\nu(\psi - \frac{\pi}{2})} F_\nu, \quad (10.8)$$

где частота

$$\omega_\nu = \nu\omega + c\beta_{\parallel}k_3, \quad (10.9)$$

а у амплитуды  $F_\nu$  зависимость от волнового вектора  $\mathbf{k}$  ради простоты писать не будем. Тогда для амплитуд плотности заряда и плотности тока найдем

$$\begin{pmatrix} \rho_\nu \\ j_{z\nu} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \beta_{\parallel} \end{pmatrix} J_\nu, \quad \begin{pmatrix} j_{x\nu} \\ j_{y\nu} \end{pmatrix} = \frac{\nu\omega}{k_{\perp}c} \begin{pmatrix} \cos \psi \\ \sin \psi \end{pmatrix} J_\nu + i\beta_{\perp} \begin{pmatrix} -\sin \psi \\ \cos \psi \end{pmatrix} J'_\nu, \quad (10.10)$$

где

$$J_\nu = J_\nu(k_{\perp}R), \quad k_{\perp}R = k_{\perp}c\beta_{\perp}/\omega.$$

Учитывая соотношения между потенциалами и плотностями заряда и тока

$$\square \begin{pmatrix} \Phi \\ \mathbf{A} \end{pmatrix} = -4\pi \begin{pmatrix} \rho \\ \mathbf{j} \end{pmatrix}, \quad (10.11)$$

путем деления на оператор Даламбера с оставлением лишь запаздывающих решений (см. (5.38)) найдем амплитуды для потенциалов:

$$\begin{pmatrix} \Phi_\nu \\ \mathbf{A}_\nu \end{pmatrix} = 4\pi (G_1 + G_0) \begin{pmatrix} \rho_\nu \\ \mathbf{j}_\nu \end{pmatrix}, \quad (10.12)$$

где сингулярная и несингулярная части функции Грина согласно (5.38) равны

$$G_1 = \frac{1}{k^2 - (\omega_\nu/c)^2}, \quad G_0 = i\pi \frac{\omega_\nu}{|\omega_\nu|} \delta(k^2 - (\omega_\nu/c)^2). \quad (10.13)$$

Для компонент электрического

$$\mathbf{E} = -\text{grad } \Phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$$

и магнитного

$$\mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{A}$$

полей соответственно находим

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_\nu &= i4\pi (G_1 + G_0) \left( \frac{\omega_\nu}{c} \mathbf{j}_\nu - k\rho_\nu \right), \\ \mathbf{H}_\nu &= i4\pi (G_1 + G_0) [\mathbf{k}\mathbf{j}_\nu]. \end{aligned} \quad (10.14)$$

**б) Вывод формулы Шотта.** Поскольку мы рассматриваем случай, когда при движении электрона по винтовой линии энергия поля

$$E^{\text{поля}} = \int \frac{E^2 + H^2}{8\pi} d^3x$$

фактически не изменяется, т. е.  $dE^{\text{поля}}/dt = 0$ , то при вычислении интенсивности излучения мы можем воспользоваться согласно (9.3) формулой для потерь энергии

$$W = -c \int (\mathbf{j}^* \mathbf{E}) d^3x, \quad (10.15)$$

в которой вектор тока  $\mathbf{j}$  заменен  $\mathbf{j}^*$ . Это мы можем сделать, так как плотность тока является вещественной величиной ( $\mathbf{j}^* = \mathbf{j}$ ).

Подобная замена несколько упрощает ход вычислений. В самом деле, ставя штрих в подынтегральном выражении (10.8) у волнового вектора  $\mathbf{k}'$  и целого числа  $\nu'$ , мы при вычислении интеграла в равенстве (10.15) будем учитывать соотношения

$$\frac{1}{8\pi^3} \int d^3x e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}') \cdot \mathbf{r}} = \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}'), \quad (10.16)$$

которые при интегрировании по  $\mathbf{k}'$  приведут к замене

$$\mathbf{k}' \rightarrow \mathbf{k}, \quad \psi' \rightarrow \psi.$$

Кроме того, при вычислении скалярного произведения  $(\mathbf{j}_\nu^* \mathbf{E}_\nu)$ , переходя к цилиндрическим координатам вектора  $\mathbf{k}$ , когда элемент объема равен

$$d^3k = \frac{1}{2} dk_\perp^2 dk_3 d\psi, \quad (10.17)$$

мы при интегрировании по углу  $\psi$  имеем

$$\oint e^{i(\nu-\nu')\psi} d\psi = 2\pi\delta_{\nu\nu'}. \quad (10.18)$$

Подставляя в (10.15) разложение (10.8) и учитывая (10.16) — (10.18), найдем

$$W = -\frac{ice_0^2}{2\pi} \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} dk_3 \int_0^\infty dk_\perp^2 (G_1 + G_0) f_\nu, \quad (10.19)$$

где

$$\begin{aligned} f_\nu &= \frac{\omega_\nu}{c} (\mathbf{j}_\nu^* \mathbf{j}_\nu) - (\mathbf{k} \mathbf{j}_\nu^*) \rho_\nu = \\ &= \left[ \frac{\omega_\nu}{c} \left( \beta_\parallel^2 + \frac{\nu^2 \omega^2}{k_\perp^2 c^2} \right) - k_3 \beta_\parallel - \frac{\nu \omega}{c} \right] J_\nu^2 + \frac{\omega_\nu}{c} \beta_\perp^2 J_\nu'^2. \end{aligned} \quad (10.20)$$

Как видно из формул (10.20) и (10.13), функция  $f_\nu$  является нечетной функцией относительно двойной замены  $\nu \rightarrow -\nu$ ,  $k_3 \rightarrow -k_3$ , а гриниан  $G_1$  (см. (10.13)) при этом сохраняет свой знак. Поэтому выражение, пропорциональное  $f_\nu G_1$ , как нечетная функция этой двойной замены обращается в нуль. Подынтегральное же выражение, пропорциональное  $f_\nu G_0$ , является четной



функцией относительно этой двойной замены, и поэтому соответствующий интеграл в нуль не обращается. Подставим в (10.19) вместо  $G_0$  его значение из (10.13) и учтем, что интегрирование по  $k_{\perp}^2$  благодаря наличию дельта-функции дает замену

$$k_{\perp}^2 = \left( k_{\parallel} \beta_{\parallel} + \frac{v\omega}{c} \right)^2 - k_{\parallel}^2. \quad (10.21)$$

Мы удовлетворим последнему соотношению, если положим

$$k_{\parallel} = \frac{v\omega}{c} \frac{\cos \theta}{1 - \beta_{\parallel} \cos \theta}. \quad (10.22)$$

Отсюда следует

$$k_{\perp} = \frac{|v|\omega}{c} \frac{\sin \theta}{1 - \beta_{\parallel} \cos \theta}, \quad (10.23)$$

$$\omega_v = c \left( k_{\parallel} \beta_{\parallel} + \frac{v\omega}{c} \right) = \frac{v\omega}{1 - \beta_{\parallel} \cos \theta}, \quad (10.24)$$

$$dk_{\parallel} = \frac{v\omega}{c} \frac{d \cos \theta}{(1 - \beta_{\parallel} \cos \theta)^2}.$$

где  $\theta$  — угол, который вектор  $k$  составляет с осью  $z$ . Таким образом, основная частота поля излучения ( $v = 1$ )

$$\omega_1 = \frac{\omega}{1 - \beta_{\parallel} \cos \theta} \quad (10.25)$$

не будет совпадать с частотой вращения электрона  $\omega$  (доплеровское смещение).

Поскольку выражение (10.20) при наличии соотношений (10.22) и (10.24) является нечетной функцией  $v$ , а при умножении на знакопеременную функцию, равную в нашем случае

$$\omega_v / |\omega_v| = v / |v|,$$

становится четной, мы можем сумму по  $v$  от  $-\infty$  до  $\infty$  заменить удвоенной суммой от единицы до бесконечности (член, соответствующий  $v = 0$ , обращается в нуль). Тогда, учитывая (10.22) и (10.24), равенство (10.20) приведем к виду [22]\*)

$$W = \frac{e_0^2 \omega^2}{c} \sum_{v=1}^{\infty} v^2 \int_0^{\pi} \frac{\sin \theta d\theta}{(1 - \beta_{\parallel} \cos \theta)^3} \left[ \left( \frac{\cos \theta - \beta_{\parallel}}{\sin \theta} \right)^2 J_v^2(\xi) + \beta_{\perp}^2 J_v^2(\xi) \right], \quad (10.26)$$

где аргумент

$$\xi = \frac{v\beta_{\perp} \sin \theta}{1 - \beta_{\parallel} \cos \theta}. \quad (10.27)$$

В частности, при отсутствии продольного движения ( $\beta_{\parallel} = 0$ ) мы

\*) Аналогичный результат может быть получен из теоремы Поинтинга также без введения волновой зоны [23].

получим известную формулу Шотта [24]

$$W = \frac{e_0^2 \omega^2}{c} \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu^2 \int_0^{\pi} \sin \theta d\theta \left[ \text{ctg}^2 \theta J_{\nu}^2(\xi) + \beta^2 J_{\nu}^2(\xi) \right], \quad (10.28)$$

где аргумент  $\xi = \nu\beta \sin \theta$ .

**в) Поляризационные свойства излучения при движении электрона по винтовой линии.** Исследуем поляризационные свойства излучения электрона. Не нарушая общности, мы можем вектор Пойнтинга  $\mathcal{E}$  (параллельный волновому вектору  $\mathbf{k}$ ) расположить в плоскости  $xz$  ( $k_2 = 0$ ,  $\psi = 0$ ) под углом  $\theta$  к оси  $z$  (рис. 10). В этом случае

$$k_1/k_3 = \text{tg} \theta. \quad (10.29)$$

Принимая во внимание (10.22), (10.24) и (10.10), находим из (10.14)

$$E_{z\nu} = -B \frac{(\cos \theta - \beta_{\parallel})}{1 - \beta_{\parallel} \cos \theta} J_{\nu}, \quad E_{x\nu} = B \frac{\cos \theta (\cos \theta - \beta_{\parallel})}{\sin \theta (1 - \beta_{\parallel} \cos \theta)} J_{\nu}, \quad (10.30)$$

$$E_{y\nu} e^{i \frac{\pi}{2}} = B \frac{\beta_{\perp}}{1 - \beta_{\parallel} \cos \theta} J_{\nu} e^{i \frac{\pi}{2}},$$

где  $B$  — некоторая постоянная величина.

В равенствах (10.30) составляющие  $E_{z\nu}$  и  $E_{x\nu}$  образуют так называемую  $\pi$ -компоненту, а  $E_{y\nu}$  —  $\sigma$ -компоненту. Обе эти компоненты перпендикулярны друг к другу и к волновому вектору  $\mathbf{k}$  (см. рис. 10). Для  $\sigma$ -компоненты это очевидно (вектор  $\mathbf{k}$  лежит в плоскости  $xz$ , а вектор  $\mathbf{E}_{\sigma\nu}$  направлен по оси  $y$ ). Для  $\pi$ -компоненты это легко получить из уравнения (10.29), из которого следует, что

$$E_{x\nu}/E_{z\nu} = -1/\text{tg} \theta = -k_3/k_1. \quad (10.31)$$

Сопоставляя равенство (10.31) с равенством (10.29), мы видим, что векторы  $\mathbf{k}$  и  $\mathbf{E}_{\pi}$ , хотя и лежат в одной и той же плоскости  $xz$ , но они будут взаимно перпендикулярными.

Найдем сдвиг фазы между  $\pi$ - и  $\sigma$ -компонентами. Для этого рассмотрим вращение вектора поляризации в плоскости  $xy$ :

$$\text{Re} E_{\nu x} e^{-i\omega\nu t} = E_{\nu x} \cos \omega\nu t,$$

$$\text{Re} E_{\nu y} e^{-i\omega\nu t + i \frac{\pi}{2}} = E_{\nu y} \sin \omega\nu t, \quad (10.32)$$

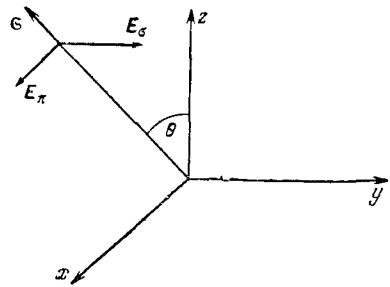


Рис. 10. Поляризационные свойства синхротронного излучения.

т. е. вращение должно происходить от  $\pi$ - к  $\sigma$ -компоненте. Иными словами, при  $\cos \theta > \beta_{\parallel}$  должно излучаться эллиптически правополяризованное электромагнитное излучение, а при  $\cos \theta < \beta_{\parallel}$  — эллиптически левополяризованное. При  $\cos \theta = \beta_{\parallel}$  интенсивность  $\pi$ -компоненты обращается в нуль, и излучение, содержащее только  $\sigma$ -компоненту, становится линейно поляризованным.

В случае движения электрона по окружности ( $\beta_{\parallel} = 0$ ) для компонент вектора напряженности из (10.30) находим следующие значения [25]\*):

$$\begin{aligned} E_{z\nu}^0 &= -B \cos \theta J_{\nu}, \\ E_{x\nu}^0 &= B \cos \theta \operatorname{ctg} \theta J_{\nu}, \\ E_{y\nu}^0 e^{i \frac{\pi}{2}} &= B \beta J'_{\nu} e^{i \frac{\pi}{2}}, \end{aligned} \quad (10.33)$$

где  $e^{i \frac{\pi}{2}} = i$ , а аргументом функций Бесселя является величина  $\xi = \nu \beta \sin \theta$  (см. (10.28)). Составляющие  $E_{z\nu}$  и  $E_{x\nu}$  направлены, так же как и при движении по винтовой линии, по углу  $\theta$  (точнее, по направлению изменения угла  $\theta$ ) (см. рис. 10), образуя  $\pi$ -компоненту\*\*).

Из формул (10.33б) и (10.33в) видно, что для острых углов ( $0 < \theta < \pi/2$ ) обе амплитуды  $E_{\pi\nu}$  и  $E_{\sigma\nu}$  имеют одинаковый знак. Поэтому эллиптическая поляризация будет правополяризованной. Наоборот, для тупых углов ( $\pi/2 < \theta < \pi$ ) составляющие  $E_{\pi\nu}$  и  $E_{\sigma\nu}$  имеют противоположные знаки, и эллиптическая поляризация становится левополяризованной. Наконец, при  $\theta = \pi/2$  составляющая  $E_{\pi\nu}$  обращается в нуль\*\*\*).

\*) По абсолютному значению  $\pi$ -компонента равна

$$|E_{\pi\nu}| = |B \operatorname{ctg} \theta J_{\nu}|. \quad (10.33a)$$

Если учесть еще временную зависимость, то для  $\pi$ -компоненты мы можем написать

$$\operatorname{Re} E_{\pi\nu} e^{-i\nu\omega t} = E_{\pi\nu}^0 \cos \nu\omega t. \quad (10.33б)$$

Точно так же для  $\sigma$ -компоненты, направленной по оси  $y$  или в общем случае по углу  $\varphi$ , мы найдем

$$\operatorname{Re} E_{\sigma\nu} e^{-i\nu\omega t + i \frac{\pi}{2}} = E_{\sigma\nu}^0 \sin \nu\omega t. \quad (10.33в)$$

\*\*) Если исходить из соотношения (10.14), то  $\pi$ -компонента магнитного поля будет направлена по оси  $y$  или в общем случае по углу  $\varphi$ , т. е. параллельно компоненте  $E_{\sigma}$ . Соответствующая же  $\sigma$ -компонента магнитного поля будет направлена против угла  $\theta$  (антипараллельно компоненте  $E_{\pi}$ ).

\*\*\*) Таким образом, при любых углах вращение круговой поляризации совпадает с вращением электрона, поскольку это вращение задается относительно направления волнового вектора  $\mathbf{k}$  (при острых углах волновой вектор  $\mathbf{k}$  направлен в сторону положительных значений  $z$ , а при тупых — в сторону отрицательных значений). Только при  $\theta = \pi/2$  мы имеем выродившийся случай, когда поляризация становится линейной.

Выражение для полной интенсивности излучения при движении электрона по окружности согласно (10.26) может быть представлено в виде ( $\beta_{\parallel} = 0$ )

$$W = W_{\pi} + W_{\sigma} = ce_0^2 \sum_{\nu=1}^{\infty} \int_0^{\pi} \sin \theta d\theta (|E_{\pi\nu}|^2 + |E_{\sigma\nu}|^2). \quad (10.34)$$

Эллиптическую поляризацию мы можем представить как две круговых (правую  $E_{1\nu}$  и левую  $E_{-1\nu}$ ). Для этого мы должны положить

$$E_{\pi\nu} = (E_{1\nu} + E_{-1\nu})/\sqrt{2}, \quad E_{\sigma\nu} = i(E_{1\nu} - E_{-1\nu})/\sqrt{2}. \quad (10.35)$$

Отсюда находим, что

$$E_{1\nu} = (E_{\pi\nu} - iE_{\sigma\nu})/\sqrt{2}, \quad E_{-1\nu} = (E_{\pi\nu} + iE_{\sigma\nu})/\sqrt{2}. \quad (10.36)$$

Строго говоря, мы будем точно знать поляризацию, если, кроме амплитуд  $|E_{\pi\nu}|$  и  $|E_{\sigma\nu}|$ , будет еще задан сдвиг фазы между ними

$$\varphi = \varphi_{\sigma} - \varphi_{\pi}, \quad (10.37)$$

который можно выразить через эти амплитуды и амплитуды круговой поляризации  $|E_{\pm 1\nu}|$ . Для этого каждую из составляющих вектора электрического колебания следует представить в виде

$$E_{l\nu}^* = e^{i\nu\omega t + i\varphi_l} |E_{l\nu}|, \quad (10.38)$$

где  $l = \pi, \sigma$  — линейная поляризация,  $l = \pm 1$  — круговая поляризация. Тогда формулы (10.36) принимают вид

$$\begin{aligned} |E_{1\nu}| e^{i\varphi_1} &= \frac{|E_{\pi\nu}| e^{i\varphi_{\pi}} + i|E_{\sigma\nu}| e^{i\varphi_{\sigma}}}{\sqrt{2}}, \\ |E_{-1\nu}| e^{i\varphi_{-1}} &= \frac{|E_{\pi\nu}| e^{i\varphi_{\pi}} - i|E_{\sigma\nu}| e^{i\varphi_{\sigma}}}{\sqrt{2}}. \end{aligned} \quad (10.39)$$

Отсюда, приравнивая действительные и мнимые части, мы можем выразить разность фаз между  $\sigma$ - и  $\pi$ -компонентами через модули амплитуд:

$$\sin \varphi = - \frac{|E_{1\nu}|^2 - |E_{-1\nu}|^2}{2|E_{\pi\nu}||E_{\sigma\nu}|}. \quad (10.40)$$

Таким образом, сдвиг фазы  $\varphi$  может быть найден, если известны амплитуды (или интенсивности) линейных и круговых поляризаций.

Составляющие интенсивности, характеризующие круговую поляризацию, равны

$$W_{\pm 1} = e_0^2 c \sum_{\nu=1}^{\infty} \int_0^{\pi} \sin \theta d\theta |E_{\pm 1, \nu}|^2,$$

где знак  $+$  относится к правой, а знак  $-$  к левой круговой поляризации. Таким образом, интенсивность спектрально-углового излучения с характеристикой поляризационных свойств может быть представлена в виде

$$W_l = \frac{e_0^2 \omega^2}{c} \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu^2 \int_0^{\pi} \sin \theta d\theta [l_{\pi} \operatorname{ctg} \theta J_{\nu}(\xi) + l_{\sigma} \beta J'_{\nu}(\xi)]^2, \quad (10.41)$$

где  $\xi = \nu \beta \sin \theta$ .

Для того чтобы получить интенсивность  $\pi$ -компоненты, мы должны положить  $l_{\pi} = 1$ ,  $l_{\sigma} = 0$ . Для  $\sigma$ -компоненты, наоборот,  $l_{\pi} = 0$ ,  $l_{\sigma} = 1$ . Для правополяризованного излучения  $l_{\pi} = l_{\sigma} = 1/\sqrt{2}$ , а для левополяризованного, наоборот,  $l_{\pi} = -l_{\sigma} = 1/\sqrt{2}$ .

Таким образом, в случае  $\sigma$ -компоненты вектор  $\mathbf{E}_{\sigma}$  лежит в плоскости  $xy$ , т. е. при круговом движении направлен примерно по радиусу, а при винтовом движении — перпендикулярно к оси, а для  $\pi$ -компоненты, наоборот, в плоскости  $xy$  будет лежать магнитное поле  $\mathbf{H}$ .

г) **Угловое распределение излучения.** При дальнейшем анализе формулы (10.26) и нахождении углового распределения излучения, а также суммарного излучения введем новый угол  $\theta_0$  и скорость  $\beta_0$ , связанные со старыми при помощи соотношений

$$\begin{aligned} \cos \theta_0 &= \frac{\cos \theta - \beta_{\parallel}}{1 - \beta_{\parallel} \cos \theta}, & \sin \theta_0 &= \frac{\sqrt{1 - \beta_{\parallel}^2} \sin \theta}{1 - \beta_{\parallel} \cos \theta}, \\ \sin \theta_0 d\theta_0 &= \frac{1 - \beta_{\parallel}^2}{(1 - \beta_{\parallel} \cos \theta)^2} \sin \theta d\theta, & \beta_0 &= \sqrt{\frac{\beta^2 - \beta_{\parallel}^2}{1 - \beta_{\parallel}^2}}. \end{aligned} \quad (10.42)$$

Угол  $\theta_0$  и скорость  $\beta_0$  соответствуют углу и скорости электрона в другой инерциальной системе координат, которая движется относительно первоначальной вдоль оси  $z$  со скоростью  $\beta_{\parallel}$ .

Подставляя (10.42) в равенство (10.26), мы найдем для энергии излучения следующее выражение [22, 23]:

$$W = W_{\pi} + W_{\sigma} = \frac{e_0^2 \Omega^2}{c} \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu^2 \int_0^{\pi} \sin \theta_0 d\theta_0 (1 + \beta_{\parallel} \cos \theta_0) \times \\ \times [f_{\pi}(\nu, \theta_0) + f_{\sigma}(\nu, \theta_0)], \quad (10.43)$$

где

$$\Omega = \omega / \sqrt{1 - \beta_{\parallel}^2}, \quad (10.44)$$

а

$$\begin{aligned} f_{\pi}(\nu, \theta_0) &= \operatorname{ctg}^2 \theta_0 J_{\nu}^2(\nu \beta_0 \sin \theta_0), \\ f_{\sigma}(\nu, \theta_0) &= \beta_0^2 J_{\nu}^2(\nu \beta_0 \sin \theta_0). \end{aligned} \quad (10.45)$$

Заметим, что при движении электрона по окружности в формуле (10.43) мы должны положить  $\beta_{\parallel}$  равной нулю. Оказывается, что энергия излучения в единицу времени  $W$  является скаляром, и поэтому суммарный результат не может зависеть от  $\beta_{\parallel}$ . Излучение  $W$  зависит только от инвариантной скорости  $\beta_0$ .

Как видно из (10.43) и (10.44), член, пропорциональный  $\beta_{\parallel} \cos \theta_0$ , оказывает лишь влияние на угловое распределение интенсивности излучения. При интегрировании же по углу  $\theta_0$  выражение  $\beta_{\parallel} \cos \theta_0$  как нечетная функция относительно замены  $\theta_0 \rightarrow \pi - \theta_0$  обращается в нуль:

$$\int_0^{\pi} \sin \theta_0 \cos \theta_0 d\theta_0 = 0,$$

поскольку остальной множитель подынтегрального выражения является четной функцией относительно замены (10.45).

Рассмотрим конкретные примеры излучения при движении по винтовой линии. При движении электрона в постоянном и однородном магнитном поле частота

$$\Omega = \frac{\omega}{\sqrt{1 - \beta_{\parallel}^2}} = \frac{e_0 H}{m_0 c} \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{\sqrt{1 - \beta_{\parallel}^2}} = \frac{e_0 H}{m_0 c} \sqrt{1 - \beta_0^2} \quad (10.46)$$

зависит только от инвариантной скорости  $\beta_0$ . Вводя частоту

$$\Omega_c = \frac{e_0 H}{m_0 c}, \quad (10.47)$$

получившую название циклотронной, мы найдем, что

$$\Omega = \Omega_c \sqrt{1 - \beta_0^2}. \quad (10.48)$$

Напомним, что  $c\beta_0$  является скоростью движения электрона в системе, где  $\beta_{\parallel} = 0$ .

Точно так же при исследовании движения электрона по винтовой линии в поле плоской волны, поляризованной по кругу (см. (8.95)), мы должны принять во внимание соотношение (10.44):

$$\Omega = \omega / \sqrt{1 - \beta_{\parallel}^2}, \quad (10.49)$$

а также формулу (8.19), связывающую частоту вращения электрона  $\omega$  с частотой внешней электромагнитной волны  $\omega_0$ :

$$\omega = \omega_0 (1 - \beta_{\parallel}). \quad (10.50)$$

Тогда найдем, что

$$\Omega = \omega_0 \sqrt{(1 - \beta_{\parallel}) / (1 + \beta_{\parallel})}, \quad (10.51)$$

причем последняя частота сохраняет при преобразованиях Лоренца свою инвариантность и равна частоте электромагнитного

поля с круговой поляризацией в системе координат, в которой  $\beta_{\parallel} = 0$ . Инвариантная скорость будет в этом случае согласно (8.123) и (8.120) равна

$$\beta_0 = \gamma / \sqrt{1 + \gamma^2}, \quad (10.52)$$

где согласно (8.96) имеем

$$\gamma = e_0 E_0 / m_0 c \omega_0.$$

Заметим, что при переходе от одной инерциальной системы координат к другой скорость  $\beta_0$  должна оставаться инвариантной величиной.

Просуммируем выражение (10.43) по частоте при помощи следующих соотношений (см. также (9.73)):

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu^2 J_{\nu}^2(\nu x) &= \frac{x^2 (4 + x^2)}{16 (1 - x^2)^{7/2}}, \\ \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu^2 J_{\nu}^2(\nu x) &= \frac{4 + 3x^2}{16 (1 - x^2)^{5/2}}. \end{aligned} \quad (10.53)$$

Тогда мы приведем (10.43) к виду [22]

$$W = \frac{e_0^2 \Omega^2}{16c} \int_0^{\pi} \sin \theta_0 d\theta_0 (1 + \beta_{\parallel} \cos \theta_0) (f_{\pi}(\theta_0) + f_{\sigma}(\theta_0)), \quad (10.54)$$

$$\begin{aligned} f_{\pi}(\theta_0) &= \beta_0^2 \frac{4 \cos^4 \theta_0 + (4 + \beta_0^2) \cos^2 \theta_0 \sin^2 \theta_0}{[(1 - \beta_0^2) \sin^2 \theta_0 + \cos^2 \theta_0]^{7/2}}, \\ f_{\sigma}(\theta_0) &= \beta_0^2 \frac{4 \cos^2 \theta_0 + (4 + 3\beta_0^2) \sin^2 \theta_0}{[(1 - \beta_0^2) \sin^2 \theta_0 + \cos^2 \theta_0]^{5/2}}. \end{aligned} \quad (10.55)$$

Из этих формул видно, что в нерелятивистском случае ( $\beta \ll 1$  и  $\beta_{\parallel} = 0$ ) для энергии излучения имеем

$$dW_{\text{нер}} = \frac{e_0^2 \Omega^2}{4c} \beta^2 (1 + \cos^2 \theta) \sin \theta d\theta. \quad (10.56)$$

Максимум интенсивности излучения лежит в направлении, перпендикулярном к плоскости вращения ( $\theta = \pi/2$ ).

Интегрируя выражение (10.56) по углу  $\theta$  и полагая  $\Omega = v/R$ , где  $R$  — радиус окружности, мы найдем для суммарного излучения

$$W_{\text{нер}} = \frac{2}{3} \frac{e_0^2 v^4}{R^2 c^3}, \quad (10.57)$$

Как видно из формул (10.55), в ультрарелятивистском случае ( $\beta \rightarrow 1$ ) излучение происходит вблизи плоскости вращения ( $\theta =$

$= \pi/2 + \Delta\theta$ ) и будет сосредоточено практически внутри угла, имеющего порядок

$$\Delta\theta \approx \sqrt{1 - \beta^2}. \quad (10.58)$$

При вычислении суммарных интенсивностей (т. е. проинтегрированных еще и по  $\theta_0$ ) мы воспользуемся следующей формулой [26]:

$$F(n, s) = \int_0^\pi \frac{\sin^{2n+1} \theta_0 \cos^{2s} \theta_0 d\theta_0}{[1 - \beta_0^2 \sin^2 \theta_0]^{n+s+3/2}} = \frac{\Gamma(n+1) \Gamma(s+1/2)}{\Gamma(n+s+3/2)} \frac{1}{(1 - \beta_0^2)^{n+1}}, \quad (10.59)$$

где  $s$  — целое число и  $2n + 1 > 0$ . Тогда из (10.54) и (10.55) получаем следующее значение для  $\pi$ - и  $\sigma$ -компонент полной интенсивности излучения:

$$W_\pi = \frac{e_0^2 \Omega^2 \beta_0^2 (2 - \beta_0^2)}{12c (1 - \beta_0^2)^2}, \quad W_\sigma = \frac{e_0^2 \Omega^2 (6 + \beta_0^2)}{12c (1 - \beta_0^2)^2}. \quad (10.60)$$

Отсюда полная интенсивность излучения равна

$$W = W_\pi + W_\sigma = \frac{2}{3} \frac{e_0^2 \Omega^2 \beta_0^2}{c (1 - \beta_0^2)^2}, \quad (10.61)$$

а для величины, характеризующей поляризацию (т. е. отношение интенсивностей  $\pi$ -компоненты к  $\sigma$ -компоненте), находим значение

$$\alpha = W_\pi / W_\sigma = (2 - \beta_0^2) / (6 + \beta_0^2). \quad (10.62)$$

Отсюда видно, что в нерелятивистском случае ( $\beta_0^2 \rightarrow 0$ ) это отношение равно

$$\alpha^{\text{нер}} = 1/3. \quad (10.63)$$

Наоборот, в ультрарелятивистском случае ( $\beta_0^2 \rightarrow 1$ ) находим \*)

$$\alpha^{\text{рел}} = 1/7, \quad (10.64)$$

т. е.  $\sigma$ -компонента будет в 7 раз интенсивнее  $\pi$ -компоненты.

\*) Строго говоря, для инвариантной скорости мы имеем выражение

$$\beta_0 = \sqrt{(\beta^2 - \beta_{\parallel}^2) / (1 - \beta_{\parallel}^2)}.$$

В ультрарелятивистском же приближении  $\beta \rightarrow 1$  и только при  $\beta_{\parallel} \ll \beta$  имеем, что и  $\beta_0 \rightarrow 1$ . Как видно из формулы (10.58), когда движение совершается вдоль оси  $z$  ( $\beta_{\parallel} = \beta$ ), интенсивность излучения обращается в нуль для любых скоростей.



д) **Спектральное распределение излучения.** Для того чтобы получить спектральное распределение интенсивности, мы должны выражение (10.43) проинтегрировать по углам. В случае движения электрона по винтовой линии это оказывается возможным сделать точно, в противоположность гармоническому осциллятору, где точное интегрирование по углу для каждой гармоники произвести нельзя (см. (9.71)).

Воспользовавшись формулами

$$\int_0^{\pi} \sin \theta_0 d\theta_0 \operatorname{ctg}^2 \theta_0 J_v^2(\nu\beta_0 \sin \theta_0) = 2 \int_0^{2\nu\beta_0} \frac{J_{2\nu}(x)}{x} dx - \frac{1}{\nu\beta_0} \int_0^{2\nu\beta_0} J_{2\nu}(x) dx, \quad (10.65)$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} \sin \theta_0 d\theta_0 J_v'^2(\nu\beta_0 \sin \theta_0) = \\ = \frac{2}{\nu\beta_0} J_{2\nu}'^2(2\nu\beta_0) + \frac{1}{\nu\beta_0} \int_0^{2\nu\beta_0} J_{2\nu}(x) dx - \frac{2}{\beta_0^2} \int_0^{2\nu\beta_0} \frac{J_{2\nu}(x)}{x} dx \end{aligned} \quad (10.66)$$

и учтя, что член в подынтегральном выражении (10.43), пропорциональный множителю  $\cos \theta_0$ , при интегрировании обращается в нуль, найдем формулу, характеризующую спектральное распределение интенсивности излучения:

$$\begin{aligned} W = W_{\pi} + W_{\sigma} = \\ = \frac{e_0^2 \Omega^2}{c\beta_0} \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu \left[ 2\beta_0^2 J_{2\nu}'^2(2\nu\beta_0) - (1 - \beta_0^2) \int_0^{2\nu\beta_0} J_{2\nu}(x) dx \right]. \end{aligned} \quad (10.67)$$

Эта формула, так же как и формула (10.43), характеризующая спектрально-угловое распределение интенсивностей излучения в случае кругового движения, была впервые получена Шоттом в 1912 г. [24]. Обобщение этой формулы на случай движения по винтовой линии произведено сравнительно недавно [22, 23]. Производя суммирование по  $\nu$  при помощи формул [19]

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} 2\nu J_{2\nu}'^2(2\nu\beta_0) = \frac{\beta_0}{(1 - \beta_0^2)^2}, \quad \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu \int_0^{2\nu\beta_0} J_{2\nu}(x) dx = \frac{\beta_0^3}{3(1 - \beta_0^2)^3}, \quad (10.68)$$

мы получим выражение для полной интенсивности излучения (см. (10.61)):

$$W = \frac{2}{3} \frac{e_0^2 \Omega^2 \beta_0^2}{c(1 - \beta_0^2)^2}. \quad (10.69)$$

Найдем полную интенсивность излучения для некоторых конкретных случаев.

1) В случае движения электрона в постоянном и однородном магнитном поле частота  $\Omega$  определяется равенством (10.46). Тогда имеем

$$W = \frac{2}{3} \frac{e_0^4 H^2}{m_0^2 c^3} \frac{\beta_0^2}{1 - \beta_0^2} = \frac{2}{3} \frac{e_0^2 \Omega_c^2}{c} \left( \frac{1}{1 - \beta_0^2} - 1 \right), \quad (10.70)$$

где  $\Omega_c$  — циклотронная частота, определяемая равенством (10.47). Если в это равенство вместо инвариантной скорости подставить значение

$$\frac{1}{1 - \beta_0^2} = \left( \frac{E}{m_0 c^2} \right)^2 (1 - \beta_{\parallel}^2),$$

то найдем

$$W = \frac{2}{3} \frac{e_0^2 \Omega_c^2}{c} \left( \left( \frac{E}{m_0 c^2} \right)^2 (1 - \beta_{\parallel}^2) - 1 \right). \quad (10.71)$$

2) В случае движения электрона в электромагнитной волне с круговой поляризацией вместо частоты  $\Omega$  мы должны подставить значение (10.51)

$$\Omega = \omega_0 \sqrt{\frac{1 - \beta_{\parallel}}{1 + \beta_{\parallel}}}.$$

Учитывая, что радиус круговой орбиты электрона при этом винтовом движении равен (см. (8.97), (8.121) и (10.52))

$$R = \frac{c\gamma}{\omega_0 \sqrt{\gamma^2 + 1}} \sqrt{\frac{1 + \beta_{\parallel}}{1 - \beta_{\parallel}}} = \frac{c\gamma}{\Omega \sqrt{\gamma^2 + 1}},$$

получим

$$\Omega = \frac{c\gamma}{R \sqrt{\gamma^2 + 1}} = \frac{c\beta_0}{R},$$

где

$$\gamma = \frac{e_0 E_0}{m_0 c \omega_0}, \quad \beta_0 = \frac{\gamma}{\sqrt{1 + \gamma^2}}. \quad (10.72)$$

Поэтому для характеристики спектрально-углового распределения излучения при движении электрона в поле поляризованной по кругу электромагнитной волны мы должны в формулу (10.43) вместо  $\Omega$  подставить значение (10.72). Тогда

$$W = \frac{2e_0^2 \Omega^2}{3c} \left( \frac{1}{(1 - \beta_0^2)^2} - \frac{1}{1 - \beta_0^2} \right) = \frac{2e_0^2 c}{3R^2} \gamma^4. \quad (10.73)$$

**е) Спектральное распределение излучения в нерелятивистском случае при круговом движении.** Рассмотрим прежде всего нерелятивистский случай движения электрона по окружности радиуса  $R$ :

$$\beta_{\parallel} = 0, \quad \beta_0 = \beta = v/c = \Omega R/c. \quad (10.74)$$

Тогда согласно формуле (10.67) для интенсивности гармоники  $\nu$  мы находим значение

$$W_\nu = \frac{e_0^2 c \beta \nu}{R^2} \left[ 2\beta^2 J'_{2\nu}(2\nu\beta) - (1 - \beta^2) \int_0^{2\nu\beta} J_{2\nu}(x) dx \right]. \quad (10.75)$$

В нерелятивистском случае ( $\beta \ll 1$ ) мы можем положить

$$J_{2\nu}(2\nu\beta) = \frac{(\nu\beta)^{2\nu}}{(2\nu)!}, \quad J'_{2\nu}(2\nu\beta) = \frac{(\nu\beta)^{2\nu-1}}{2(2\nu-1)!},$$

$$\int_0^{2\nu\beta} J_{2\nu}(x) dx = \frac{2(\nu\beta)^{2\nu+1}}{(2\nu+1)!}. \quad (10.76)$$

Поэтому основной член формулы (10.75) принимает значение

$$W_\nu = \frac{4e_0^2 c \beta^{2\nu+2}}{R^2} \frac{\nu^{2\nu+1}}{(2\nu+1)!} \frac{\nu+1}{2}. \quad (10.77)$$

Отсюда видно, что максимальная интенсивность излучения падает на основной тон ( $\nu = 1$ ):

$$W_1 = \frac{2e_0^2 \beta^4 c}{3R^2}. \quad (10.78)$$

Интенсивности последующих гармоник будут равны:

$$W_2 = \frac{8}{5} \frac{e_0^2 \beta^6 c}{R^2}, \quad W_3 = \frac{243}{70} \frac{e_0^2 \beta^8 c}{R^2}, \quad (10.79)$$

или

$$W_2 \sim \beta^2 W_1, \quad W_3 \sim \beta^4 W_1,$$

т.е. разложение, по существу, идет по параметру  $\beta^2$ , который в нерелятивистском случае является малой величиной \*).

\*) В случае движения по винтовой линии возможна ситуация, когда поперечное движение является нерелятивистским ( $\beta_\perp \ll 1$ ), а продольное — релятивистским ( $\beta_\parallel \sim 1$ ). Если при этом  $\beta_\perp \ll \sqrt{1 - \beta_\parallel^2}$ , то излучение будет происходить на основной гармонике ( $\nu = 1$ ) по направлению продольной составляющей скорости в пределах телесного угла  $\Delta\theta \sim \sqrt{1 - \beta_\parallel^2}$ . Из формул (10.25) и (10.26) найдем для частоты и интенсивности излучения выражения

$$\omega_1 = \frac{2\omega_0}{\epsilon_\parallel + \theta^2}, \quad \epsilon_\parallel = 1 - \beta_\parallel^2, \quad W = \frac{2}{3} \frac{e_0^2 c}{R^2} \frac{\beta_\perp^4}{\epsilon_\parallel^2}. \quad (10.78a)$$

Отсюда видно, что максимальная частота излучения (под углом  $\theta = 0$ ) будет много больше частоты вращения электрона. Подобная система дает направленное излучение высокой частоты и может быть использована в качестве источника ондуляторного типа (см. стр. 92).

В ультрарелятивистском случае  $\beta \rightarrow 1$  разложение (10.79) теряет свой смысл и максимальная интенсивность падает не на основной тон ( $\nu = 1$ ), а на высокие гармоники, поскольку при  $\beta = 1$

$$W_3 > W_2 > W_1. \quad (10.80)$$

В этом случае спектрально-угловое распределение интенсивности может быть описано формулой (10.26) (в случае движения по винтовой линии) или (10.28) (в случае кругового движения). Для описания спектрального распределения имеет место формула (10.67). Поскольку в этих формулах номер гармоники входит и в аргумент и в порядковый номер бесселевой функции, то при исследовании излучения ультрарелятивистских электронов, движущихся по винтовой линии или по окружности, оказалось весьма удобным записать приближенное значение для бесселевой функции, когда ее аргумент приближается к порядковому номеру  $x \rightarrow \nu - 0 \gg 1$ . Это асимптотическое выражение проще всего получить с помощью метода Вентцеля — Крамерса — Бриллюэна (метод ВКБ).

**ж) Асимптотическое представление бесселевых функций высокого порядка.** Как известно, бесселева функция порядка  $\nu$  удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^2}{dx^2} J_\nu(x) + \frac{1}{x} \frac{dJ_\nu(x)}{dx} + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right) J_\nu(x) = 0. \quad (10.81)$$

Вообще говоря, нас будет интересовать асимптотическое выражение функции Бесселя, когда аргумент  $x \rightarrow \nu - 0$ . Однако для определения постоянных нам необходимо воспользоваться значением функции Бесселя при  $x \rightarrow 0$ :

$$J_\nu(x) = \frac{x^\nu}{2^{\nu} \nu!}. \quad (10.82)$$

Таким образом, асимптотическое решение должно быть найдено на следующем интервале изменения  $x$ :

$$0 < x < \nu, \quad (10.83)$$

что проще всего сделать с помощью метода ВКБ. С этой целью введем новый аргумент

$$x = \nu e^y, \quad y = \ln(x/\nu), \quad (10.84)$$

который изменяется в пределах  $-\infty < y < 0$ . Тогда вместо уравнения (10.81) имеем

$$\frac{d^2}{dy^2} J_\nu - \nu^2(1 - e^{2y}) J_\nu = 0. \quad (10.85)$$

Решение уравнения (10.85) ищем в виде

$$J_\nu = \sqrt{-z/z'_y} F(z), \quad (10.86)$$

причем  $z'_y = dz/dy$ , а аргумент  $z$  пока что остается неизвестной величиной. Подставляя (10.86) в (10.85), для определения функции  $F(z)$  найдем уравнение

$$\frac{d^2 F}{dz^2} + \frac{1}{z} \frac{dF}{dz} + \left( -\frac{v^2(1-e^{2y})}{z_y^2} - \frac{1}{4z^2} + \frac{3}{4} \frac{z_y''^2}{z_y'^4} - \frac{1}{2} \frac{z_y'''}{z_y'^3} \right) F = 0. \quad (10.87)$$

Неопределенный пока что аргумент  $z$  мы подберем из требования, чтобы

$$\frac{v^2(1-e^{2y})}{z_y'^2} = 1 \quad \text{при } z > 0. \quad (10.88)$$

Тогда из последнего равенства находим

$$z = \int_y^0 v dy \sqrt{1-e^{2y}} = \int_x^v \frac{dx}{x} \sqrt{v^2-x^2} = \\ = \frac{v}{2} \ln \frac{v + \sqrt{v^2-x^2}}{v - \sqrt{v^2-x^2}} - \sqrt{v^2-x^2}. \quad (10.89)$$

Подставляя найденные значения  $z$  в (10.87) и учитывая, что

$$z'_y = -v \sqrt{1-e^{2y}} = -v \sqrt{1-(x/v)^2}, \quad (10.90)$$

получим

$$\frac{d^2 F}{dz^2} + \frac{1}{z} \frac{dF}{dz} - \left( 1 + \frac{1}{4z^2} - \frac{(x/v)^4 + 4(x/v)^2}{4v^2(1-x^2/v^2)^3} \right) F = 0. \quad (10.91)$$

Из формулы (10.89) следует, что для интересующей нас области  $x \rightarrow v - 0$  величина  $z$  равна

$$z \approx \frac{v}{3} \left( 1 - \frac{x^2}{v^2} \right)^{1/2}, \quad (10.92)$$

и поэтому формула (10.91) принимает вид

$$\frac{d^2 F}{dz^2} + \frac{1}{z} \frac{dF}{dz} - \left( 1 + \frac{1}{9z^2} \right) F = 0. \quad (10.93)$$

Последнему уравнению удовлетворяет функция Бесселя от мнимого аргумента порядка  $1/3$   $I_{1/3}(z)$  и  $K_{1/3}(z)$ , где \*)

$$I_n(x) = i^{-n} J_n(ix), \quad (10.94)$$

$$K_n(x) = \frac{\pi}{2 \sin \pi n} (I_{-n}(x) - I_n(x)). \quad (10.95)$$

\*) Как видно из формулы (10.95), функция  $K_n(x)$  включает в себя функцию  $I_n(x)$  и поэтому мы можем ограничиться лишь положительными значениями  $n = 1/3$ . Напомним еще известное соотношение

$$K_n(x) = K_{-n}(x).$$

Принимая во внимание формулу (10.90), мы найдем, что при  $x \rightarrow v - 0$  выражение для функции Бесселя (10.86) с учетом (10.92) может быть представлено в виде

$$J_v(x) = \sqrt{\frac{1}{3} \left(1 - \frac{x^2}{v^2}\right)} \left\{ AK_{1/3} \left(\frac{v}{3} \left(1 - \frac{x^2}{v^2}\right)^{3/2}\right) + BI_{1/3} \left(\frac{v}{3} \left(1 - \frac{x^2}{v^2}\right)^{3/2}\right) \right\}. \quad (10.96)$$

Для того чтобы определить постоянные  $A$  и  $B$ , мы должны написать асимптотическое значение функции  $J_v$  в другом крайнем случае:  $x \rightarrow 0$ . Как видно из формул (10.89), при  $x \rightarrow 0$

$$z = -\ln(xe/2v)^v \gg 1, \quad z'_y = -v, \quad (10.97)$$

где  $e$  — основание натуральных логарифмов. Кроме того, учтем асимптотические выражения бесселевых функций при больших значениях аргумента  $z$ :

$$K_n(z) = \sqrt{\pi/2z} e^{-z}, \quad I_n(z) = e^z/\sqrt{2\pi z} \quad (10.98)$$

(которые имеют место при любых значениях  $n$ , в том числе и при  $n = 1/3$ ), а также то, что при больших  $z^2 \gg 1$  в уравнении (10.93) членом  $1/9z^2$  можно пренебречь по сравнению с единицей.

Подставляя в (10.86) вместо функции  $F$  значения  $K_{1/3}$  и  $I_{1/3}$  и принимая во внимание соотношения (10.98), а также формулу Стирлинга

$$\left(\frac{v}{e}\right)^v \simeq \frac{\Gamma(v+1)}{\sqrt{2\pi v}} = \frac{v!}{\sqrt{2\pi v}}, \quad (10.99)$$

найдем

$$K_{1/3}(z) \approx \sqrt{\frac{\pi}{2z}} \left(\frac{x}{2}\right)^v \frac{\sqrt{2\pi v}}{v!}, \quad (10.100)$$

$$I_{1/3}(z) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi z}} \frac{v!}{\sqrt{2\pi v}} \left(\frac{2}{x}\right)^v. \quad (10.101)$$

Принимая во внимание (10.86) и (10.82), для определения  $A$  и  $B$  имеем выражение

$$A \frac{\pi x^v}{2^v v!} + B \frac{2^v v!}{2\pi v x^4} = \frac{x^v}{2^v v!}, \quad (10.102)$$

откуда следует, что

$$A = 1/\pi \quad \text{и} \quad B = 0. \quad (10.103)$$

Итак, асимптотическое выражение для функции Бесселя (см. (10.97)) в интересующей нас области ( $x \rightarrow v - 0$ ) равно \*)

$$J_\nu(x) = \frac{\varepsilon^{1/2}}{\pi \sqrt{3}} K_{1/3} \left( \frac{\nu}{3} \varepsilon^{1/2} \right). \quad (10.104)$$

Взяв производную по  $x$ , найдем ( $x \rightarrow v - 0$ )

$$J'_\nu(x) = \frac{\varepsilon}{\pi \sqrt{3}} K_{2/3} \left( \frac{\nu}{3} \varepsilon^{1/2} \right), \quad (10.105)$$

где

$$\varepsilon = 1 - x^2/v^2. \quad (10.106)$$

Здесь \*\*), так же как и в формулах первого приближения, аргументом цилиндрических функций  $K_{1/3}$  и  $K_{2/3}$  является величина  $(\nu/3)\varepsilon^{1/2}$ . Второе приближение в последних формулах заключено в квадратные скобки.

Последующие члены разложения в данном приближении (см. (10.86)) нет смысла учитывать, так как они по сравнению с основным будут иметь порядок  $\varepsilon^2 \sim \sim v^{-4/3}$ , равный порядку отбрасываемых вообще в этой асимптотике членов [19].

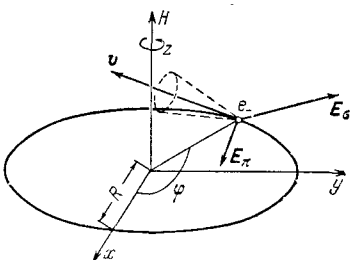


Рис. 11. Движение и излучение релятивистского электрона в магнитном поле.

з) **Ультррелятивистский случай при круговом движении.** Пользуясь асимптотическими представлениями функции Бесселя и ее производной (10.104) и (10.105), исследуем ультррелятивистское движение электрона по окружности [27]. Для этого подставим эти асимптотические значения в формулу (10.41), полагая

$$x = \xi = \nu \theta \sin \theta. \quad (10.107)$$

Тогда для спектрально-углового распределения интенсивности излучения с учетом поляризационных эффектов мы найдем

\*) Заметим еще, что функция  $K_{1/3}$  связана с функцией Эйри равенством

$$F(x) = \int_0^\infty \cos(t^3 + xt) dt = \frac{1}{\sqrt{3}} \left( \frac{x}{3} \right)^{1/2} K_{1/3} \left( 2 \left( \frac{x}{3} \right)^{1/2} \right).$$

\*\*) В работе [22] было найдено следующее приближение для функции Бесселя и ее производной, учитывающее члены порядка  $\varepsilon$ :

$$J_\nu(x) = \frac{\sqrt{\varepsilon}}{\pi \sqrt{3}} \left\{ K_{1/3} + \frac{1}{10} \varepsilon [K_{1/3} - 2\nu \varepsilon^{1/2} K_{2/3}] \right\}, \quad (10.104a)$$

$$J'_\nu(x) = \frac{\varepsilon}{\pi \sqrt{3}} \left\{ K_{2/3} + \frac{1}{5} \varepsilon \left[ 2K_{2/3} - \left( \frac{1}{\nu \varepsilon^{1/2}} + \nu \varepsilon^{1/2} \right) K_{1/3} \right] \right\}. \quad (10.105a)$$

значение [25]

$$W_{\pi, \sigma} = \frac{e_0^2 c}{3\pi^2 R^2} \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu^2 \int_0^{\pi} \sin \theta d\theta \left[ l_{\pi} \operatorname{ctg} \theta \sqrt{\varepsilon} K_{1/3} \left( \frac{\nu}{3} \varepsilon^{1/2} \right) + \right. \\ \left. + l_{\sigma} \beta \varepsilon K_{2/3} \left( \frac{\nu}{3} \varepsilon^{1/2} \right) \right]^2. \quad (10.108)$$

Здесь  $\varepsilon = 1 - \beta^2 \sin^2 \theta$ , причем в ультрарелятивистском случае ( $1 - \beta^2 \ll 1$ ) все излучение должно быть сосредоточено вблизи плоскости орбиты вращения электрона  $\theta \sim \pi/2$ . (Излучение будет происходить по направлению движения в узком конусе с углом раствора, имеющим порядок согласно (10.58)  $\Delta\theta \sim \sqrt{1 - \beta^2}$ ; конус излучения изображен на рис. 11 пунктиром.)

Вводя новую переменную

$$\psi = \frac{\beta \cos \theta}{\sqrt{\varepsilon_0}} \approx \frac{\cos \theta}{\sqrt{\varepsilon_0}} \approx \frac{\pi/2 - \theta}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad (10.109)$$

имеем

$$\beta = 1 - \frac{1}{2} \varepsilon_0 \approx 1, \quad \operatorname{ctg} \theta = \frac{\sqrt{\varepsilon_0} \psi}{\sqrt{1 - \varepsilon_0 \psi^2}} \approx \sqrt{\varepsilon_0} \psi, \quad (10.110)$$

$$d \cos \theta = \sqrt{\varepsilon_0} d\psi. \quad (10.111)$$

Поскольку функции  $K_{1/3}$  или  $K_{2/3}$  отличны от нуля лишь для аргумента порядка единицы, а при больших значениях аргумента они стремятся к нулю по экспоненциальному закону, то границы интегрирования, которые при переходе к переменной  $\psi$  изменяются в пределах от  $-\beta/\varepsilon_0$  до  $+\beta/\varepsilon_0$ , мы можем растянуть от  $-\infty$  до  $+\infty$ . Учитывая это, мы видим, что при суммировании по  $\nu$  максимум в ультрарелятивистском случае ( $\varepsilon_0 \rightarrow +0$ ) падает на высокие гармоники ( $\nu \sim 1/\varepsilon_0^{3/2}$ ). Поэтому сумму по  $\nu$  мы можем заменить интегралом, полагая при этом  $d\nu = 1$ .

Вводя новую переменную

$$y = \frac{2\nu}{3} \varepsilon_0^{1/2}, \quad dy = \frac{2\varepsilon_0^{1/2}}{3} d\nu = \frac{2\varepsilon_0^{3/2}}{3} \quad (10.112)$$

и полагая для синхротронного излучения

$$\omega = c/R, \quad \varepsilon_0 = (m_0 c^2/E)^2,$$

мы приведем равенство (10.108) к виду

$$W_{\pi, \sigma} = \frac{27}{8\pi^2} W \int_0^{\infty} y^2 dy \int_{-\infty}^{+\infty} d\psi [l_{\pi} \psi \sqrt{1 + \psi^2} K_{1/3}(\eta) + \\ + l_{\sigma} (1 + \psi^2) K_{2/3}(\eta)]^2, \quad (10.113)$$

где

$$\eta = \frac{1}{2} y (1 + \psi^2)^{1/2} = \frac{\nu}{3} \varepsilon_0^{1/2} (1 + \psi^2)^{3/2},$$



а полная энергия излучения для ультрарелятивистского случая равна

$$W = \frac{2}{3} \frac{e_0^2 c}{R^2} \left( \frac{E}{m_0 c^2} \right)^4.$$

Следует заметить, что согласно формулам (10.36), (10.37) при  $\psi > 0$  будет излучаться эллиптически правополяризованное излучение, а при  $\psi < 0$  — левополяризованное. При  $\psi = 0$   $\pi$ -компонента исчезает и излучение становится линейно поляризованным, содержащим только  $\sigma$ -компоненту.

Из (10.113) можно получить следующие формулы для углового распределения  $\sigma$ - и  $\pi$ -компонент при заданном значении  $y$ : для  $\sigma$ -компоненты ( $l_\pi = 0, l_\sigma = 1$ )

$$W_\sigma(y, \psi) = \frac{27}{8\pi^2} W y^2 (1 + \psi^2) K_{2/3}^2(\eta), \quad (10.114)$$

для  $\pi$ -компоненты ( $l_\pi = 1, l_\sigma = 0$ )

$$W_\pi(y, \psi) = \frac{27}{8\pi^2} W y^2 \psi \sqrt{1 + \psi^2} K_{1/3}^2(\eta). \quad (10.115)$$

Экспериментально поляризационные эффекты, предсказанные теоретически в [25], впервые были проверены в опытах Королева — Куликова и др. [28, 29, 30].

Сравнение экспериментальных и теоретических зависимостей интенсивности излучения воспроизведено на рис. 12.

Помимо подтверждения теории, обнаружение поляризационных свойств синхротронного излучения служит для доказательства того, что нетепловое излучение галактик, в том числе Крабовидной туманности, носит синхротронный характер. Поэтому астрономы, наряду со спектральным распределением (см. ниже), должны были обнаружить и поляризационные свойства синхротронного излучения. Эта гипотеза была впервые высказана Альфеном и развивалась многими другими авторами [31, 32]\*).

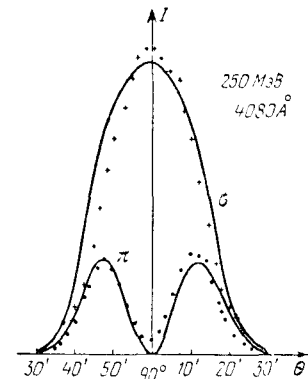


Рис. 12. Теоретические и экспериментальные данные, характеризующие линейную поляризацию синхротронного излучения.

**и) Спектральное распределение интенсивности излучения (приближенные формулы).** Прежде всего проинтегрируем выражение (10.113) по углам (т. е. величине  $\psi$ ) и найдем спектраль-

\* В гл. 3 работы [32] удачно используются теоретические работы по синхротронному излучению для описания космического радиоизлучения.

ное распределение для  $\pi$ - и  $\sigma$ -компонент. С этой целью воспользуемся следующими интегралами [33]:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d\psi (1 + \psi^2)^2 K_{2/3}^2(\eta) = \frac{\pi}{\sqrt{3} y} \left[ \int_y^{\infty} K_{5/3}(x) dx + K_{2/3}(y) \right], \quad (10.116)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d\psi \psi^2 (1 + \psi^2) K_{1/3}^2(\eta) = \frac{\pi}{\sqrt{3} y} \left[ \int_y^{\infty} K_{5/3}(x) dx - K_{2/3}(y) \right].$$

Полагая в формуле (10.113) соответственно  $l_\sigma = 1$ ,  $l_\pi = 0$  и  $l_\sigma = 0$ ,  $l_\pi = 1$ , мы найдем следующие выражения для спектрального распределения  $\sigma$ - и  $\pi$ -компонент:

$$W_\sigma(y) = \frac{1}{2} W \frac{9\sqrt{3}}{8\pi} y \left[ \int_y^{\infty} K_{5/3}(x) dx + K_{2/3}(y) \right], \quad (10.117)$$

$$W_\pi(y) = \frac{1}{2} W \frac{9\sqrt{3}}{8\pi} y \left[ \int_y^{\infty} K_{5/3}(x) dx - K_{2/3}(y) \right],$$

где

$$W = \frac{2}{3} \frac{e_0^2 c}{R^2} \left( \frac{E}{m_0 c^2} \right)^4. \quad (10.118)$$

Суммарное спектральное распределение будет определяться формулой [27]

$$W(y) = W_\sigma(y) + W_\pi(y) = W f(y),$$

где

$$f(y) = \frac{9\sqrt{3}}{8\pi} y \int_y^{\infty} K_{5/3}(x) dx. \quad (10.119)$$

В случае малых значений  $y$  можем положить

$$K_m(y) \approx 2^{m-1} \Gamma(m) y^{-m} \quad \text{при } y \rightarrow 0, \quad (10.120)$$

а при больших  $y$  ( $y \gg 1$ ,  $v \gg 3/2 \epsilon_0^{3/2}$ )

$$K_m(y) \approx \sqrt{\pi/2y} e^{-y} \quad \text{при } y \rightarrow \infty.$$

Учитывая последние соотношения, имеем

$$f(y) = \frac{9\sqrt{3}}{8\pi} \begin{cases} 2^{2/3} \Gamma(2/3) y^{1/3}, & y \rightarrow 0, \\ \sqrt{\frac{\pi}{2}} y e^{-y} & y \rightarrow \infty. \end{cases} = \begin{cases} 1,33 y^{1/3}; & y \rightarrow 0, \\ 0,78 \sqrt{y} e^{-y}; & y \rightarrow \infty. \end{cases} \quad (10.121)$$

Максимум излучения для интенсивности достигается при  $y = 1/3$ , т. е. при

$$\nu_{\text{макс}} \approx \frac{1}{2\epsilon_0^{3/2}} = \frac{1}{2} \left( \frac{E}{m_0 c^2} \right)^3. \quad (10.122)$$

Из формулы (10.122) видно, что в ультрарелятивистском случае ( $\epsilon_0 \ll 1$ ) максимум интенсивности излучения падает не на основной тон ( $\nu = 1$ ), как в нерелятивистском случае (см.

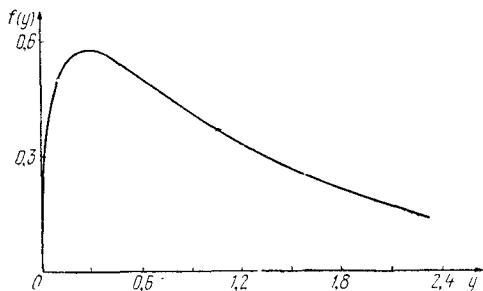


Рис. 13. Универсальная кривая, характеризующая зависимость интенсивности синхротронного излучения от частоты.

(10.78)), а на высокие гармоники. Кривая спектрального распределения\*), определяющая зависимость  $f(y)$  от  $y$ , представлена на рис. 13. Эта кривая носит универсальный характер. Изменяя энергию в широких пределах, будем иметь только различную зависимость  $y$  и  $f(y)$  от энергии  $E$ .

Таким образом, если изобразить зависимость длины волны  $\lambda$  от энергии, то при увеличении  $E$  максимум будет сдвигаться вправо (см. [30], статья Хензела и Кунца). Например, для ускорителей с энергией  $E = 50$  Мэв и радиусом орбиты порядка 1 метра по нерелятивистским формулам должно было быть излучение с длиной волны порядка 5 метров, в то время как по релятивистской формуле (10.122) максимум излучения падает на длину волны

$$\lambda_{\text{макс}} \sim 4\pi R \left( \frac{m_0 c^2}{E} \right)^3 \sim 10^3 \text{ \AA},$$

соответствующую видимой части спектра, т. е. электрон становится в буквальном смысле слова светящимся. При  $E \sim 500$  Мэв и радиусе орбиты 2 метра максимум излучения будет лежать в далекой ультрафиолетовой части спектра ( $\lambda_{\text{макс}} \sim 10 \text{ \AA}$ ). И, наконец, на синхротроне с энергией 5 Гэв (эти энергии достигнуты, например, в Ереване, Гамбурге) максимум излучения приходится на рентгеновскую область ( $\lambda_{\text{макс}} \sim 0,5 \text{ \AA}$ ).

\*) Первое экспериментальное подтверждение этой кривой изложено в [30] (см. работу Томбулиана и Гартмана).

При вычислении суммарного (т. е. проинтегрированного по  $y$ ) выражения мы должны воспользоваться следующей формулой:

$$\int_0^{\infty} K_n(y) y^m dy = 2^{m-1} \Gamma\left(\frac{m+1+n}{2}\right) \Gamma\left(\frac{m+1-n}{2}\right) \quad (10.123)$$

при условии, что  $m+1 > n$ . С помощью формулы (10.123) легко показать, что

$$\int_0^{\infty} K_{1/3}(y) y dy = \Gamma\left(\frac{2}{3}\right) \Gamma\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{1}{3} \Gamma\left(\frac{2}{3}\right) \Gamma\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}},$$

$$\int_0^{\infty} y dy \int_y^{\infty} K_{1/3}(x) dx = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} y^2 K_{1/3}(\xi) d\xi = \frac{8\pi}{9\sqrt{3}}. \quad (10.124)$$

Отсюда для суммарных интенсивностей находим

$$W_{\sigma} = \int_0^{\infty} W_{\sigma}(y) dy = \frac{7}{8} W, \quad W_{\pi} = \frac{1}{8} W,$$

$$W = W_{\sigma} + W_{\pi} = \frac{2}{3} \frac{e_0^2 \omega^2}{c \varepsilon_0^2}, \quad (10.125)$$

а отношение интенсивностей  $\pi$ - и  $\sigma$ -компонент равно (см. также (10.64))

$$\alpha = W_{\pi}/W_{\sigma} = 1/7. \quad (10.126)$$

**к) Угловое распределение интенсивности излучения (приближенные формулы).** Если мы хотим найти угловое распределение интенсивности излучения при заданной частоте, то мы должны воспользоваться формулой (10.113), в которой нужно положить  $y = \text{const}$ . Теоретически значительно удобнее исследовать просуммированное по частотам угловое распределение, поскольку при этом получаются простые аналитические выражения.

Интегрирование по величине  $y$  мы можем провести при помощи следующей формулы [26]:

$$\int_0^{\infty} K_{\rho}(x) K_{\nu}(x) x^{\mu-1} dx =$$

$$= \frac{2^{\mu-3}}{\Gamma(\mu)} \Gamma\left(\frac{\mu+\nu+\rho}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\mu+\nu-\rho}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\mu-\nu+\rho}{2}\right) \times$$

$$\times \Gamma\left(\frac{\mu-\nu-\rho}{2}\right) \quad \text{при } \mu > \nu + \rho > 0. \quad (10.127)$$

С помощью формулы (10.127) мы легко можем вычислить

следующие интегралы:

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} y^2 dy K_{1/3}(\eta) &= \frac{5}{18} \pi^2 \frac{1}{(1 + \psi^2)^{3/2}}, \\ \int_0^{\infty} y^2 dy K_{2/3}^2(\eta) &= \frac{7}{18} \pi^2 \frac{1}{(1 + \psi^2)^{3/2}}, \\ \int_0^{\infty} y^2 dy K_{1/3}(\eta) K_{2/3}(\eta) &= \frac{16\pi}{9\sqrt{3}} \frac{1}{(1 + \psi^2)^{3/2}}, \end{aligned} \quad (10.128)$$

где  $\eta = y(1 + \psi^2)^{3/2}/2$ . Учитывая эти интегралы, из формулы (10.113) найдем следующее выражение для углового распределения:

$$W_{\pi, \sigma}(\psi) = \frac{e_0^2 \omega^2}{16c\epsilon_0^2} f_{\pi, \sigma}(\psi). \quad (10.129)$$

Здесь

$$f_{\pi, \sigma}(\psi) = 5l_{\pi}^2 \frac{\psi^2}{(1 + \psi^2)^{7/2}} + 7l_{\sigma}^2 \frac{1}{(1 + \psi^2)^{5/2}} + \frac{64}{\pi\sqrt{3}} \frac{\psi l_{\pi} l_{\sigma}}{(1 + \psi^2)^3}. \quad (10.130)$$

Полагая  $l_{\pi} = 1$ ,  $l_{\sigma} = 0$ , а затем  $l_{\pi} = 0$ ,  $l_{\sigma} = 1$ , мы найдем для компонент линейной поляризации соответственно значения

$$f_{\pi}(\psi) = \frac{5\psi^2}{(1 + \psi^2)^{7/2}}, \quad f_{\sigma}(\psi) = \frac{7}{(1 + \psi^2)^{5/2}}. \quad (10.131)$$

Эти формулы могут быть получены из точных формул (10.55), если в последних положить  $\beta_{\parallel} = 0$  и ограничиться основным относительно разложения по параметру  $1 - \beta^2$  членом. Интенсивности линейно поляризованного излучения в зависимости от угла  $\psi$  изображены на рис. 14.

Полагая  $l_{\pi} = l_{\sigma} = 1/\sqrt{2}$  и  $l_{\pi} = -l_{\sigma} = 1/\sqrt{2}$ , мы найдем интенсивность излучения, поляризованного по кругу:

$$f_l = \frac{7 + 12\psi^2}{2(1 + \psi^2)^{7/2}} + \frac{32}{\pi\sqrt{3}} l \frac{\psi}{(1 + \psi^2)^{5/2}}. \quad (10.132)$$

При  $l = 1$  получаем интенсивность излучения, соответствующую правой круговой поляризации, а при  $l = -1$  — левой.

Зависимость круговой поляризации от угла излучения изображена на рис. 15. Сумма компонент интенсивностей линейной поляризации должна, очевидно, равняться сумме компонент круговой поляризации и характеризует при заданном угле суммарную интенсивность

$$f = f_{\pi} + f_{\sigma} = f_1 + f_{-1}. \quad (10.133)$$

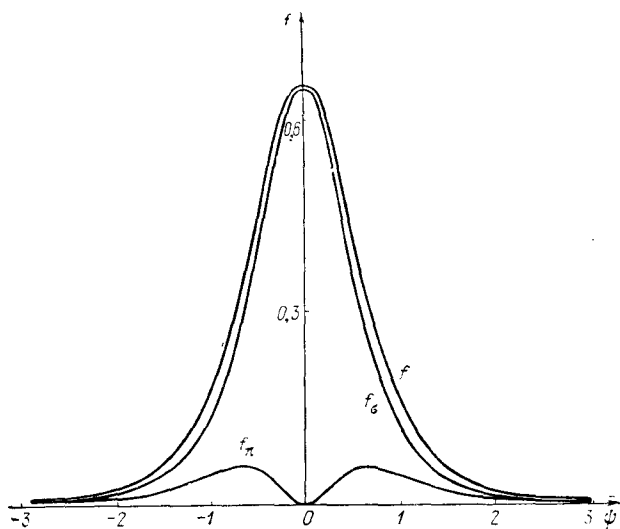


Рис. 14. Зависимость линейной поляризации от угла излучения.

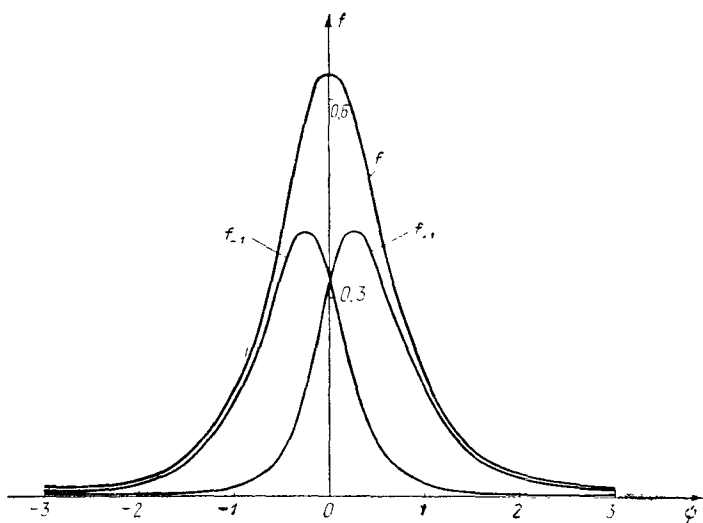


Рис. 15. Зависимость круговой поляризации от угла излучения (левая —  $f_{-1}$ , правая —  $f_{+1}$ ).

Для того чтобы вычислить проинтегрированную по углам (т. е. по величинам  $\psi$ ) интенсивность излучения, мы должны воспользоваться следующей формулой (см. [26]):

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\psi}{(1+\psi^2)^n} = \frac{\Gamma(1/2)\Gamma(n-1/2)}{\Gamma(n)}. \quad (10.134)$$

Тогда из (10.129) мы вновь получаем в данном приближении формулы (10.125):

$$\begin{aligned} W_\sigma &= \frac{e_0^2 c}{16\varepsilon_0^2 R^2} 7 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\psi}{(1+\psi^2)^{3/2}} = \frac{7}{8} W, \\ W_\pi &= \frac{e_0^2 c}{16\varepsilon_0^2 R^2} 5 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\psi^2 d\psi}{(1+\psi^2)^{3/2}} = \frac{1}{8} W, \\ W &= W_\sigma + W_\pi = \frac{2}{3} \frac{e_0^2 \omega^2}{c \varepsilon_0^2}. \end{aligned} \quad (10.135)$$

**л) Приближенные формулы при движении по винтовой линии.** В случае движения электрона по винтовой линии точная формула для полной энергии излучения принимает вид

$$W = \frac{2}{3} \frac{e_0^2 \Omega^2 \beta_0^2}{c (1 - \beta_0^2)^2} = \frac{2}{3} \frac{e_0^2}{c} \Omega_c^2 \frac{\beta^2 - \beta_{\parallel}^2}{1 - \beta^2}, \quad (10.136)$$

где инвариантная скорость  $\beta_0$  связана с общей скоростью движения  $\beta$  и ее продольной составляющей  $\beta_{\parallel}$  соотношением (см. (10.42))

$$\beta_0 = \sqrt{(\beta^2 - \beta_{\parallel}^2) / (1 - \beta_{\parallel}^2)}, \quad (10.137)$$

а инвариантная частота  $\Omega$  в случае движения в постоянном и однородном магнитном поле равна (см. (10.46))

$$\Omega = \frac{e_0 H}{m_0 c} \sqrt{1 - \beta_0^2} = \Omega_c \sqrt{1 - \beta_0^2}. \quad (10.138)$$

Для получения полной интенсивности излучения в формулах (10.118) и (10.125) следует положить

$$\omega = \Omega, \quad \varepsilon_0 = 1 - \beta_0^2. \quad (10.139)$$

Приближенное значение для интенсивности излучения равно

$$W = \frac{2}{3} \frac{e_0^2}{c} \frac{\Omega^2}{(1 - \beta_0^2)^2} = \frac{2}{3} \frac{e_0^2}{c} \Omega_c^2 \frac{1 - \beta_{\parallel}^2}{1 - \beta^2}. \quad (10.140)$$

Из формул (10.136) и (10.140) видно, что, используя приближение ВКБ, мы совершаем ошибку порядка  $1 - \beta^2$ , поэтому учитывать продольную составляющую есть смысл, когда [22]

$$\beta_{\parallel} > \sqrt{1 - \beta^2}; \quad (10.141)$$

в противном случае отбрасываемая ошибка будет больше того вклада, который дает учет продольной составляющей. При  $\beta_{\parallel} < \sqrt{1 - \beta^2}$  в данном приближении следует пользоваться формулами для кругового движения.

Спектрально-угловое распределение при движении по винтовой линии характеризуется выражением (см. (10.43))

$$W = \frac{e_0^2}{c} \Omega_c^2 (1 - \beta_0^2) \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu^2 \int_0^{\pi} \sin \theta_0 d\theta_0 (1 + \beta_{\parallel} \cos \theta_0) \times \\ \times [\operatorname{ctg}^2 \theta_0 J_{\nu}^2(\nu \beta_0 \sin \theta_0) + \beta_0^2 J_{\nu}^{\prime 2}(\nu \beta_0 \sin \theta_0)]. \quad (10.142)$$

Воспользуемся асимптотическими формулами (10.104) и (10.105) первого приближения, полагая при этом

$$\epsilon = 1 - \beta_0^2 \sin^2 \theta_0. \quad (10.143)$$

Вводя переменные

$$\psi = \frac{\theta_{\parallel} - \theta}{\sqrt{1 - \beta^2}} \approx \frac{\pi/2 - \theta_0}{\sqrt{1 - \beta_0^2}}, \quad y = \frac{2\nu}{3} (1 - \beta_0^2)^{3/2}, \quad (10.144)$$

где углы  $\theta_0$  и  $\theta$  связаны между собой соотношением (10.42), а

$$\cos \theta_{\parallel} = \beta_{\parallel}, \quad (10.145)$$

найдем следующую приближенную формулу, характеризующую спектрально-угловое распределение при движении по винтовой линии:

$$W' = \frac{9e_0^2 \Omega_c^2}{8\pi^2 c (1 - \beta_0^2)} \int_0^{+\infty} y^2 dy \int_{-\infty}^{+\infty} d\psi (1 + \beta_{\parallel} \sqrt{1 - \beta_0^2} \psi) \times \\ \times [\psi^2 (1 + \psi^2) K_{7/3}^2(\eta) + (1 + \psi^2)^2 K_{5/3}^2(\eta)], \quad (10.146)$$

где

$$\eta = y (1 + \psi^2)^{3/2} / 2. \quad (10.147)$$

Из формул (10.114) и (10.147) следует, что  $\sigma$ -компонента будет отсутствовать при  $\psi = 0$ . В случае движения по окружности это соответствует углу  $\theta = \pi/2$  (см. (10.109)), а при движении по винтовой линии — углу  $\theta = \theta_{\parallel} = \beta_{\parallel}$  (см. (10.144)). Учитывая, что при интегрировании по  $\psi$  члены, нечетные относительно  $\psi$ , обращаются в нуль, мы найдем при движении по винтовой линии



те же самые формулы, что и при движении по окружности с заменой скорости  $\beta$  на инвариантную скорость  $\beta_0 = \sqrt{(\beta^2 - \beta_{\parallel}^2) / (1 - \beta_{\parallel}^2)}$ . В частности, для интегрального выражения интенсивности получается формула (10.140).

Мы можем повысить точность наших расчетов, если в асимптотическом приближении функций Бесселя учтем следующее приближение (см. формулы (10.104а) и (10.105а)). Тогда продольную составляющую есть смысл учитывать при более низком значении продольной скорости:

$$\beta_{\parallel} > 1 - \beta^2. \quad (10.148)$$

Движение по винтовой линии имеет большое значение при исследовании нетеплового излучения галактик [34, 35]\*).

### § 11. КЛАССИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ ДИРАКА — ЛОРЕНЦА ДЛЯ ТОЧЕЧНОГО ЭЛЕКТРОНА

**а) Вывод уравнения.** Классическое уравнение Дирака—Лоренца [36] для точечного электрона за последнее время приобретает все большее и большее значение, поскольку оно является релятивистски-инвариантным. В частности, это уравнение позволяет описать движение электрона в ультрарелятивистском случае с учетом силы радиационного трения. Все эти вопросы имеют не только чисто теоретический, но и большой практический интерес в связи с усиливающимся строительством электронных ускорителей порядка одного и даже нескольких десятков Гэв.

В основу вывода классического уравнения Дирака—Лоренца мы положим уравнение (7.27)

$$m_0 \ddot{x}_{\mu} = \frac{e}{c} \dot{x}_{\nu} H_{\mu\nu}. \quad (11.1)$$

Здесь координаты электрона обозначены без штриха ( $x_{\mu} = x, y, z, i'ct$ ), а тензор электромагнитного поля определен равенством (7.19).

В уравнении (11.1) электромагнитное поле  $H_{\mu\nu}$  создается внешними источниками. Если же мы хотим ввести так называемую силу самодействия, то должны учесть действие на электрон электромагнитного поля  $H_{\mu\nu}^{\text{сам}}$ , создаваемого им же самим. Тогда уравнение (11.1) принимает вид

$$m_0 \ddot{x}_{\mu} = F_{\mu} + F_{\mu}^{\text{сам}}, \quad (11.2)$$

\* Заметим, что в работах [34, 35] содержатся неточности. Так, в [34] не учтен эффект Допплера, который должен появиться благодаря наличию продольной составляющей скорости  $v_{\parallel}$ , а в работе [35] при вычислении интенсивности пропущен множитель  $(1 - \beta_{\parallel} \cos \theta)$ , связанный с наличием продольной составляющей. Обе эти ошибки исправлены в [22].

причем внешняя сила и сила самодействия соответственно равны

$$F_{\mu} = \frac{e}{c} \dot{x}_{\nu} H_{\mu\nu}, \quad (11.3)$$

$$F_{\mu}^{\text{сам}} = \frac{e}{c} \dot{x}_{\nu} H_{\mu\nu}^{\text{сам}}. \quad (11.4)$$

Для определения силы самодействия воспользуемся уравнением

$$F_{\mu}^{\text{сам}}(x) = \frac{e}{c} \dot{x}_{\nu} H_{\mu\nu}^{\text{сам}}(x). \quad (11.5)$$

Потенциалы поля самодействия могут быть найдены из уравнения Даламбера

$$\square A_{\mu}^{\text{сам}}(x) = -\frac{4\pi e}{c} \int \dot{x}'_{\mu} \delta_4(x - x') d\tau', \quad (11.6)$$

где

$$\delta_4(x - x') = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \delta(t - t'), \quad (11.7)$$

а координаты  $x_{\mu}$  и  $x'_{\mu}$  зависят соответственно от собственных времен  $\tau$  и  $\tau'$ , производные по которым мы будем обозначать точкой, т. е.

$$\dot{x}'_{\mu} = dx'_{\mu}/d\tau', \quad \dot{x}_{\mu} = dx_{\mu}/d\tau. \quad (11.8)$$

Решение уравнения (11.6) ищем в виде

$$A_{\mu}^{\text{сам}}(x) = \frac{4\pi e}{c} \int \dot{x}'_{\mu} G^r(x - x') d\tau', \quad (11.9)$$

где гриниан

$$G^r(x - x') = -\delta_4(x - x')/\square. \quad (11.10)$$

Определяя компоненты поля

$$H_{\mu\nu}^{\text{сам}} = \frac{\partial A_{\nu}^{\text{сам}}}{\partial x_{\mu}} - \frac{\partial A_{\mu}^{\text{сам}}}{\partial x_{\nu}}, \quad (11.11)$$

мы с помощью формулы (11.5) найдем следующее значение для силы самодействия:

$$F_{\mu}^{\text{сам}} = \frac{4\pi e^2}{c^2} \int d\tau' \left( \dot{x}_{\nu} \dot{x}'_{\nu} \frac{\partial}{\partial x_{\mu}} - \dot{x}_{\nu} \dot{x}'_{\mu} \frac{\partial}{\partial x_{\nu}} \right) G^r(x - x'), \quad (11.12)$$

а функцию Грина, соответствующую запаздывающим потенциалам, согласно равенствам (5.42) — (5.44) представим в виде

$$G^r = G_1 + G_0. \quad (11.13)$$

Сингулярная  $G_1$  и несингулярная  $G_0$  части функции Грина соответственно равны полусумме и полуразности запаздывающих и опережающих решений (см. (5.44)):

$$G_1 = \frac{c}{4\pi} \delta(u), \quad G_0 = \frac{c}{4\pi} \frac{t - t'}{|t - t'|} \delta(u), \quad (11.14)$$

где гринианы зависят от величины

$$u = (x_\mu - x'_\mu)(x_\mu - x'_\mu) = R^2 - c^2(t - t')^2, \quad (11.15)$$

а

$$R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = \sqrt{(x_n - x'_n)(x_n - x'_n)}.$$

Учитывая соотношение

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu} = 2(x_\mu - x'_\mu) \frac{\partial}{\partial u}, \quad (11.16)$$

которое следует из (11.15), мы можем силу самодействия представить в виде

$$F_\mu^{\text{сам}} = \frac{8\pi e^2}{c^2} \int dt' [\dot{x}_\nu \dot{x}'_\nu (x_\mu - x'_\mu) - \dot{x}_\nu \dot{x}'_\mu (x_\nu - x'_\nu)] \frac{\partial}{\partial u} (G_1 + G_0). \quad (11.17)$$

Введем новую переменную

$$\tau'' = \tau - \tau'; \quad (11.18)$$

при этом область интегрирования по  $\tau''$  должна включать особую точку  $\tau'' = 0$  ( $\tau' = \tau$ )\*. При вычислении интеграла (11.17) мы должны взять несколько членов разложения по  $\tau''$ . Тогда будем иметь

$$\begin{aligned} x_\mu - x'_\mu &= x_\mu(\tau) - x_\mu(\tau - \tau'') = \\ &= \tau'' \dot{x}_\mu - \frac{1}{2} \tau''^2 \ddot{x}_\mu + \frac{1}{6} \tau''^3 \overset{\dots}{x}_\mu + \dots, \end{aligned} \quad (11.19)$$

$$\dot{x}'_\mu = \dot{x}_\mu(\tau - \tau'') = \dot{x}_\mu - \tau'' \ddot{x}_\mu + \frac{1}{2} \tau''^2 \overset{\dots}{x}_\mu + \dots \quad (11.20)$$

С учетом соотношений (11.19) и (11.20) и равенств (5.45) и (5.46), которые мы запишем в виде

$$\dot{x}_\mu \dot{x}_\mu = -c^2, \quad \dot{x}_\mu \ddot{x}_\mu = 0, \quad \ddot{x}_\mu \ddot{x}_\mu + \dot{x}_\mu \overset{\dots}{x}_\mu = 0, \quad (11.21)$$

находим

$$\begin{aligned} \dot{x}_\nu \dot{x}'_\nu (x_\mu - x'_\mu) - \dot{x}_\nu \dot{x}'_\mu (x_\nu - x'_\nu) &= \\ &= -\frac{c^2}{2} \tau''^2 \ddot{x}_\mu + \frac{c^2}{3} \tau''^3 \left( \overset{\dots}{x}_\mu - \frac{\dot{x}_\mu}{c^2} \ddot{x}_\nu \ddot{x}_\nu \right). \end{aligned} \quad (11.22)$$

Из (11.19) мы можем написать соотношения, которыми воспользуемся при вычислении функции  $u$  (см. (11.15)):

$$t - t' = i\tau'' \left( 1 - \frac{\tau'' \dot{t}}{2i} \right), \quad \frac{R}{c} = \beta i |\tau''| \left( 1 - \frac{\tau'' \dot{t}}{i2\beta^2} \right), \quad (11.23)$$

где  $\beta = dr/dt$  — трехмерная скорость электрона, а

$$\dot{t} = 1/\sqrt{1 - \beta^2} > 0. \quad (11.24)$$

\*) Заметим, что при  $\tau' \equiv \tau$  следует положить  $x'_\mu = x_\mu$ .

Функцию  $u$  представим в виде

$$u = c^2 i^2 (\beta |\tau''| - \tau'') (\beta |\tau''| + \tau''), \quad (11.25)$$

причем

$$\frac{\partial G^r}{\partial u} = - \frac{1}{2\tau'' c^2} \frac{\partial G^r}{\partial \tau''}, \quad (11.26)$$

а

$$(t - t') / |t - t'| = \tau'' / |\tau''|. \quad (11.27)$$

Соотношение (11.25) можно представить в виде

$$u = -c^2 \tau''^2, \quad (11.28)$$

однако при интегрировании по дельта-функции аргумент  $u$  лучше оставить в форме (11.25), позволяющей проследить прохождение величины  $u$  через нуль при  $-0 < \tau'' < +0$ .

Подставив (11.26) и (11.17) и воспользовавшись равенством

$$\int d\tau'' \dot{f}(\tau'') \frac{\partial G}{\partial \tau''} = - \int d\tau'' \frac{\partial f}{\partial \tau''} G, \quad (11.29)$$

имеем

$$F_\mu^{\text{сам}} = \frac{4\pi e^2}{c^2} \int d\tau'' \left[ -\frac{1}{2} \ddot{x}_\mu + \frac{2}{3} \tau'' \left( \ddot{x}_\mu - \frac{\dot{x}_\mu}{c^2} \ddot{x}_\nu \ddot{x}_\nu \right) \right] (G_1 + G_0), \quad (11.30)$$

причем для сингулярной и несингулярной частей функции Грина соответственно находим

$$\left. \begin{matrix} G_1 \\ G_0 \end{matrix} \right\} = \frac{1}{8\pi c} \frac{\delta(\tau'' - \beta |\tau''|) \pm \delta(\tau'' + \beta |\tau''|)}{i^2 \beta |\tau''|}. \quad (11.31)$$

Принимая во внимание соотношение

$$\delta(\tau'' \pm \beta |\tau''|) = \frac{\delta(\tau'')}{1 \pm \beta \tau'' / |\tau''|}, \quad (11.32)$$

имеем

$$\left. \begin{matrix} G_1 \\ G_0 \end{matrix} \right\} = \frac{\delta(\tau'')}{4\pi c |\tau''|} \left\{ \begin{matrix} 1 \\ \tau'' / |\tau''| \end{matrix} \right. \quad (11.33)$$

Подставляя (11.33) в (11.30), получаем для силы самодействия следующее выражение:

$$F_\mu^{\text{сам}} = -\frac{e^2}{2c^3} \ddot{x}_\mu \int \frac{\delta(\tau'') d\tau''}{|\tau''|} + \frac{2e^2}{3c^3} \left( \ddot{x}_\mu - \frac{1}{c^2} \dot{x}_\mu \ddot{x}_\nu \ddot{x}_\nu \right). \quad (11.34)$$

Заметим, что к первому члену правой части приводит гриниан  $G_1$ , а ко второму — гриниан  $G_0$ .

Выражение (11.34) следует строго из классической электродинамики и представляет собою силу самодействия точечного электрона. Член, пропорциональный  $\ddot{x}_\mu$ , соответствует бесконечной электромагнитной массе. Для получения классического

уравнения Дирака этот расходящийся член следует отбросить. Это мы можем сделать двумя способами.

Во-первых, мы можем считать, что неполевая масса также содержит расходящийся член, но уже отрицательный:

$$m^{\text{непол}} = m_0 - \frac{e^2}{2c^3} \int \frac{\delta(\tau'') d\tau''}{|\tau''|}, \quad (11.35)$$

который в сумме с бесконечной электромагнитной массой

$$m^{\text{эл}} = \frac{e^2}{2c^3} \int \frac{\delta(\tau'') d\tau''}{|\tau''|} \quad (11.36)$$

дает наблюдаемую конечную массу  $m_0$ . Этот способ напоминает собой перенормировку массы в квантовой теории поля.

Во-вторых, мы можем предположить, что при вычислении силы самодействия следует взять лишь полуразность запаздывающих и опережающих потенциалов, т. е. положить гриниан равным

$$G = \frac{1}{2}(G^r - G^a) = G_0;$$

тогда расходящаяся масса, пропорциональная гриниану  $G_1$ , должна вообще отсутствовать\*). В этом случае классическое уравнение Дирака для точечного электрона, в котором учитывается не только внешняя сила, но и сила самодействия, принимает вид

$$m_0 \ddot{x}_\mu = \frac{e}{c} \dot{x}_\nu H_{\mu\nu} + \gamma m_0 \left( \ddot{x}_\mu - \frac{1}{c^2} \dot{x}_\mu \ddot{x}_\nu \dot{x}_\nu \right), \quad (11.37)$$

где  $\gamma = \frac{2}{3} r_0/c$ , а радиус электрона  $r_0 = \frac{e_0^2}{m_0 c^2}$ .

Уравнение (11.37) является релятивистски-инвариантным. Из него автоматически следуют соотношения (11.21). Попытки построить гамильтониан или лагранжиан, из которого можно было бы получить уравнение (11.37), пока что не привели к каким-либо результатам. Возможно, этого и нельзя будет сделать, так как классическое уравнение Дирака — Лоренца учитывает силу трения, приводящую к излучению, и поэтому описывает неконсервативную систему.

Уравнение (11.37) представляет собой новый тип уравнений, который не встречался до сих пор в механике. Особенность его заключается прежде всего в том, что оно содержит третью производную по собственному времени. Кроме того, оно является еще не линейным. На возможных точных его решениях (хотя бы в некоторых частных случаях) мы остановимся ниже.

\*) Более подробно см. монографию [3].

**б) Энергия излучения.** Для исследования энергии излучения выпишем четвертую составляющую уравнения Дирака — Лоренца ( $x_4 = i'ct$ ):

$$m_0 c \ddot{t} = \frac{e}{c} \dot{x}_n E_n + \gamma m_0 \left[ c \ddot{t} - \frac{1}{c} \dot{t} (\ddot{x}_n \dot{x}_n - c^2 \dot{t}^2) \right]. \quad (11.38)$$

Если мы введем понятия трехмерной скорости

$$\mathbf{v} = c\boldsymbol{\beta} = d\mathbf{r}/dt \quad (11.39)$$

и трехмерного ускорения

$$\boldsymbol{\omega} = d\mathbf{v}/dt = d^2\mathbf{r}/dt^2, \quad (11.40)$$

которые выражаются через составляющие радиус-вектора  $\mathbf{r}(x_1, x_2, x_3)$ , то легко найдем следующие соотношения, имеющие место в общем случае:

$$\dot{x}_n = v_n \dot{t}, \quad \dot{t} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \ddot{t} = \frac{(\mathbf{v}\boldsymbol{\omega})}{c^2(1-\beta^2)^2} = \frac{(\mathbf{v}\boldsymbol{\omega})}{c^2} \dot{t}^4. \quad (11.41)$$

Отсюда для квадратов четырехмерной скорости  $v_4^2$  (временноподобный вектор) и ускорения  $\omega_4^2$  (пространственноподобный вектор) имеем

$$\begin{aligned} v_4^2 &= c^2 \dot{t}^2 - \dot{x}_n \dot{x}_n = c^2 > 0, \\ \omega_4^2 &= \ddot{x}_n \ddot{x}_n - c^2 \ddot{t}^2 = (\boldsymbol{\omega}^2 - [\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\omega}]^2) \dot{t}^6 > 0. \end{aligned} \quad (11.42)$$

Если для кинетической энергии электрона мы запишем выражение

$$E^{\text{кин}} = m_0 c^2 \dot{t} = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad (11.43)$$

то уравнение (11.38) будет описывать закон сохранения энергии:

$$\frac{dE^{\text{кин}}}{d\tau} = \frac{dE^{\text{кин}}}{dt} \dot{t} = e(\mathbf{v}\mathbf{E}) \dot{t} + \gamma m_0 (c^2 \ddot{t} - \dot{t} \omega_4^2). \quad (11.44)$$

Выражение  $W^{\text{внеш}} = e(\mathbf{v}\mathbf{E})$  представляет собою работу, совершаемую внешними силами в единицу лабораторного времени ( $t = 1$ ), а выражение

$$W^{\text{потери}} \dot{t} = -\gamma m_0 (c^2 \ddot{t} - \dot{t} \omega_4^2) \quad (11.45)$$

— потери энергии электроном при ускоренном движении. Легко показать, что эти потери равны работе, совершаемой трехмерной силой трения

$$\mathbf{F} = \frac{\gamma m_0}{\dot{t}} \left( \ddot{\mathbf{r}} - \frac{\dot{\mathbf{r}}}{c^2} \omega_4^2 \right) \quad (11.46)$$

в единицу времени, т. е.

$$W^{\text{потери}} = -(\mathbf{F}\mathbf{v}). \quad (11.47)$$

Заметим, что потери энергии (11.45) содержат две части: обратимую

$$W^{\text{обр}} \dot{i} = -\gamma m_0 c^2 \ddot{i} \quad (11.48)$$

и необратимую

$$W^{\text{изл}} \dot{i} = \gamma m_0 \dot{i} \omega_4^2 \quad (11.49)$$

Обратимая часть энергии, пропорциональная  $\ddot{i}$ , не может излучаться даже в том случае, если в промежутке  $\tau_0 < \tau < \tau_1$  электрон движется с ускорением. При этом мы должны предположить, что при  $\tau < \tau_0$  и  $\tau > \tau_1$  электрон двигался с постоянной скоростью.

Необратимая же часть энергии

$$W^{\text{изл}} = \gamma m_0 \omega_4^2, \quad (11.50)$$

пропорциональная  $\omega_4^2$ , всегда будет величиной положительной, т.е. характеризует потери энергии на излучение, если в какой-либо промежуток времени ускорение электрона отлично от нуля.

Аналогичный результат был получен нами при выводе теоремы Пойнтинга из классической электродинамики. При этом  $W^{\text{потери}}$  определялась формулой (9.4), а  $W^{\text{изл}}$  — формулой (9.5).

В ряде примеров, рассматриваемых ранее (излучение Черенкова, равномерное движение электрона по окружности или по винтовой линии), мы имели

$$W^{\text{потери}} = W^{\text{изл}}. \quad (11.51)$$

В нашем случае обе эти энергии будут равны, когда

$$\ddot{i} = 0, \quad (11.52)$$

что эквивалентно в теореме Пойнтинга условию

$$\frac{d}{dt} \int \frac{E^2 + H^2}{8\pi} d^3x = 0. \quad (11.53)$$

Иными словами,  $W^{\text{изл}}$  характеризует излучаемую в единицу времени энергию, которая никогда не может быть восстановлена, а  $W^{\text{потери}}$ , кроме этого излучения, еще описывает энергию электрического и магнитного полей, связанную с электроном, которая может и увеличиваться и уменьшаться.

**в) Гиперболическое движение.** Гиперболическое движение возникает при действии на электрон постоянной силы, имеющей направление, совпадающее с направлением первоначальной скорости. Эта сила может быть создана, например, постоянным и однородным электростатическим полем.

Если электрон движется в направлении оси  $z$ , то уравнение Дирака (11.37), описывающее это движение, принимает вид

$$\ddot{z} = c \dot{i} f_0 + \gamma \left( \ddot{z} - \frac{1}{c^2} \dot{z} \omega_4^2 \right), \quad c \dot{i} = \dot{x} f_0 + \gamma \left( c \ddot{i} - \frac{1}{c} \dot{i} \omega_4^2 \right), \quad (11.54)$$

где четырехмерная скорость и ускорение соответственно равны

$$c^2 = c^2 \dot{t}^2 - \dot{z}^2, \quad \omega_4^2 = \dot{z}^2 - c^2 \dot{t}^2 > 0, \quad (11.55)$$

а постоянная сила  $f_0$  связана с электростатическим полем  $E_z$  ( $E_x = E_y = 0, E_z = \text{const}$ ):

$$f_0 = \frac{e}{cm_0} E_z. \quad (11.56)$$

Частное решение уравнения (11.54) имеет вид \*)

$$\dot{z} = c \operatorname{sh} f_0 \tau, \quad \dot{t} = \operatorname{ch} f_0 \tau. \quad (11.57)$$

В справедливости этого решения нетрудно убедиться, подставляя (11.57) в (11.54) и учитывая, что

$$\omega_4^2 = c^2 f_0^2, \quad \ddot{t} = f_0^2 \operatorname{ch} f_0 \tau, \quad \ddot{z} = f_0^2 \operatorname{sh} f_0 \tau. \quad (11.58)$$

На первый взгляд при этом возникает парадокс, на который обратил внимание Борн в 1909 г. [37]. Борн указал, что потери энергии электроном, вычисленные по формуле (11.45), обращаются в нуль:

$$W^{\text{потери}} = 0. \quad (11.59)$$

В то же время ускоренно движущийся электрон должен излучать, причем согласно формуле (11.50) для энергии излучения мы найдем отличное от нуля значение \*\*):

$$W^{\text{изл}} = \gamma m_0 c^2 f_0^2. \quad (11.60)$$

На этот парадокс недавно было обращено внимание в работе [38]. Однако если учесть, что формула (11.60) характеризует только излучение, а формула (11.59), кроме излучения, еще образование обратимого электромагнитного поля, пропорционального  $\ddot{t}$ , то этот результат становится вполне возможным и мы его более подробно разберем ниже.

г) **Прямолинейное движение.** Допустим, что электрон движется вдоль оси  $z$  под действием силы, зависящей от собственного времени  $\tau$ , т. е. для описания движения следует воспользоваться уравнениями (11.54), в которых следует положить

$$f = f(\tau). \quad (11.61)$$

Тогда решение будем искать в виде

$$\dot{z} = c \operatorname{sh} q(\tau), \quad \dot{t} = \operatorname{ch} q(\tau). \quad (11.62)$$

\*) Мы пока что не обращаем внимания на начальные условия. Этот вопрос будет рассмотрен ниже.

\*\*\*) Аналогичный результат мы получим, если для определения  $W^{\text{потери}}$  и  $W^{\text{изл}}$  воспользоваться значениями (9.4) и (9.5), которые следуют из классических уравнений Максвелла.



Легко показать, что при любых  $q$  выполняется соотношение

$$c^2 \dot{t}^2 - \dot{z}^2 = c^2,$$

из которого следует, что

$$\dot{t} = 1/\sqrt{1 - \beta^2} = \text{ch } q. \quad (11.63)$$

Из (11.62) найдем следующие значения для трехмерных скорости  $v = c\beta$  и ускорения  $w$ :

$$\beta = \text{th } q, \quad w = c\dot{q}/\text{ch}^3 q = c\dot{q}(1 - \beta^2)^{3/2}, \quad (11.64)$$

а для четырехмерного ускорения имеем

$$w_4^2 = c^2 \dot{q}^2. \quad (11.65)$$

Подставляя (11.62) в (11.54), найдем следующее дифференциальное уравнение для определения величины  $q$ :

$$\dot{q} - \gamma \ddot{q} = f(\tau). \quad (11.66)$$

Если положить  $f = 0$  (движение по инерции), то решение однородного уравнения (11.66) принимает вид

$$q = C_1 + C_2 e^{\gamma t}, \quad (11.67)$$

т. е. наряду с движением по инерции ( $q = C_1$ ) может появиться также самоускоряющееся движение ( $q = C_2 e^{\gamma t}$ ). Поэтому мы должны выбрать начальные (точнее граничные) условия таким образом, чтобы избавиться от этого самоускоряющегося движения. Для этого наряду с обычными начальными условиями (координата и скорость)

$$t = t_0, \quad z = z_0, \quad dz/dt = z'_0 \quad (11.68)$$

необходимо потребовать, чтобы после действия всех сил ускорение обращалось в нуль, т. е.  $z''_\infty = w = 0$ , или согласно (11.64) \*

$$\dot{q}_{\tau \rightarrow \infty} = 0. \quad (11.69)$$

Из условия (11.69) получаем  $C_2 = 0$  и поэтому  $q = C_1$ , т. е. самоускоренное решение исчезает и движение должно происходить по инерции со скоростью

$$\beta = \text{th } C_1 = \text{const.} \quad (11.70)$$

Найдем решение уравнения (11.66), учитывающего наличие внешней силы, при условии (11.68) и (11.69). Это решение следует искать в виде

$$q(\tau) = \int f(\tau') G(\tau - \tau') d\tau', \quad (11.71)$$

\*) Это условие было введено еще в 1947 г. [39] и использовано в работах [3, 40, 41].

причем гриниан  $G$  удовлетворяет равенству

$$\dot{G} - \gamma \ddot{G} = \delta(\tau - \tau') = \frac{1}{2\pi} \int e^{ik(\tau - \tau')} dk. \quad (11.72)$$

Гриниан, как обычно, мы представим в виде суммы

$$G = G_1 + G_0. \quad (11.73)$$

Сингулярная часть может быть найдена из равенства (11.72) путем деления на оператор:

$$G_1 = \frac{1}{2\pi} \int \frac{e^{ik(\tau - \tau')}}{ik - \gamma (ik)^2} dk = \begin{cases} 1/2; & \tau > \tau', \\ -1/2 + e^{\frac{(\tau - \tau')}{\gamma}}; & \tau < \tau', \end{cases} \quad (11.74)$$

а несингулярная часть должна удовлетворять неоднородному уравнению

$$\dot{G}_0 - \gamma \ddot{G}_0 = 0,$$

т. е.

$$G_0 = C_1 + C_2 e^{(\tau - \tau')/\gamma}. \quad (11.75)$$

Таким образом, искомая величина  $q$  может содержать две части:

$$q = q^r + q^a,$$

где

$$q^r = \int_{-\infty}^{\tau} \left( \frac{1}{2} + C_1 + C_2 e^{(\tau - \tau')/\gamma} \right) f(\tau') d\tau', \quad (11.76)$$

$$q^a = \int_{\tau}^{\infty} \left( C_1 - \frac{1}{2} + (1 + C_2) e^{(\tau - \tau')/\gamma} \right) f(\tau') d\tau'. \quad (11.77)$$

В решении (11.76) мы интегрируем по всем  $\tau'$ , меньшим, чем время наблюдения  $\tau$  (запаздывающее воздействие). Наоборот, в решении (11.77) мы интегрируем по всем  $\tau'$ , бóльшим, чем  $\tau$  (опережающее воздействие).

Мы можем избавиться от опережающего воздействия, полагая

$$C_1 = 1/2, \quad C_2 = -1. \quad (11.78)$$

Однако в этом случае после действия всех сил остается самоускоряющее решение. В самом деле, выбирая дельтообразную внешнюю силу:

$$f = A \delta(\tau), \quad (11.79)$$

действие которой прекращается при  $\tau > 0$ , мы найдем следующее значение для  $q$ :

$$q = \begin{cases} 0; & \tau < 0, \\ A(1 - e^{\tau/\gamma}); & \tau > 0, \end{cases} \quad (11.80)$$

т. е. после действия силы ( $\tau > 0$ ) электрон будет двигаться с ускорением.

Для того чтобы избавиться от самоускоряющего решения, мы наряду с начальными условиями, согласно которым при  $\tau = -\infty$  электрон покоится \*) и находится в начале координат:

$$z = 0, \quad t = \tau, \quad q = 0 \quad \text{при} \quad \tau \rightarrow -\infty, \quad (11.81)$$

введем также конечное условие, требуя, чтобы после действия всех сил ускорение обратилось в нуль:

$$\dot{q} = 0 \quad \text{при} \quad \tau \rightarrow \infty. \quad (11.82)$$

Мы удовлетворим условиям (11.81) и (11.82), если положим

$$C_1 = 1/2, \quad C_2 = 0. \quad (11.83)$$

Тогда для искомой функции  $q(\tau)$  найдем \*\*)

$$q = \int_{-\infty}^{\tau} f(\tau') d\tau' + \int_{\tau}^{\infty} f(\tau') e^{(\tau-\tau')/\gamma} d\tau'. \quad (11.84)$$

Определив величину  $q$  с помощью равенств (11.62) и начальных условий, найдем значения для величин  $z$  и  $t$ :

$$z = c \int_{-\infty}^{\tau} \text{sh } q(\tau') d\tau', \quad t = \tau + \int_{-\infty}^{\tau} (\text{ch } q(\tau') - 1) d\tau'. \quad (11.85)$$

Сделаем некоторые выводы, которые следуют из уравнения (11.84). Прежде всего заметим, что проблема Коши, имеющая место в классической механике (постоянные интегрирования могут быть найдены только из начальных условий), для классического уравнения Дирака — Лоренца не имеет места. В самом деле, произвольные постоянные при интегрировании уравнения Дирака — Лоренца определяются из граничных условий, т. е. когда задаются не только начальные, но и конечные условия [42—45].

Далее, как видно из (11.84), опережающая часть внешней силы содержит лишь экспоненциально убывающий гриниан, и поэтому практически электрон лишь за  $\gamma$  секунд должен начать

\*) Точнее, при  $\tau = -\infty$  электрон должен двигаться с постоянной скоростью. Однако, не нарушая общности, мы можем выбрать такую систему координат, в которой эта скорость обращается в нуль.

\*\*) Если в решение (11.84) подставить значение  $f(\tau) = f_0 = \text{const}$ , то для величины  $q$  мы найдем значение  $q = f_0 \tau + C_1$ , которое было использовано нами при исследовании гиперболического движения (см. (11.57)). Постоянную  $C_1$  путем перенормировки собственного времени ( $\tau \rightarrow \tau - C_1/f_0$ ) мы всегда можем обратить в нуль.

«чувствовать» появление внешнего поля. За это время электромагнитная волна пройдет расстояние

$$\gamma c = \frac{2}{3} r_0 = \frac{2}{3} e_0^2 / m_0 c^2, \quad (11.86)$$

которое мы можем интерпретировать как радиус электрона.

Таким образом, в теории точечного электрона Дирака — Лоренца радиус электрона появляется совершенно автоматически. В частности, формула (11.84) при введении дельтаобразной силы (11.79) приводит к решению

$$q = \begin{cases} Ae^{\tau/\gamma}; & \tau < 0, \\ A; & \tau > 0, \end{cases} \quad (11.87)$$

из которого видно, что после действия силы ( $\tau > 0$ ) электрон начинает двигаться без ускорения ( $\dot{q} = 0$ ), т. е. по инерции.

д) Гиперболическое движение для конечного промежутка времени. Допустим, что величина  $q$  изменяется по закону [45]

$$q = \begin{cases} 0; & \tau < 0, \\ f_0 \tau; & 0 < \tau < \tau_0, \\ f_0 \tau_0; & \tau > 0, \end{cases} \quad (11.88)$$

где  $f_0 = \text{const}$  и  $\tau_0 = \text{const}$ , т. е. электрон движется по гиперболической траектории в течение времени  $\tau = \tau_0$ . Тогда для производных от величины  $q$  найдем

$$\dot{q} = \begin{cases} 0; & \tau < 0, \\ f_0; & 0 < \tau < \tau_0, \\ 0; & \tau > \tau_0, \end{cases} \quad (11.89)$$

$$\ddot{q} = f_0 [\delta(\tau) - \delta(\tau - \tau_0)]. \quad (11.90)$$

Для внешней силы, которая вызывает подобное движение, согласно (11.66) имеем

$$f(\tau) = -\gamma f_0 [\delta(\tau) - \delta(\tau - \tau_0)] + \begin{cases} 0; & \tau < 0, \\ f_0; & 0 < \tau < \tau_0, \\ 0; & \tau > \tau_0. \end{cases} \quad (11.91)$$

Из (11.89) следует для  $\tau > 0$

$$\omega_4^2 = \begin{cases} c^2 f_0^2; & 0 < \tau < \tau_0, \\ 0; & \tau > \tau_0. \end{cases}$$

Полная энергия излучения равна

$$E^{\text{изл}} = \int_0^{\tau} W^{\text{изл}} \dot{t} d\tau = \int_0^{\tau} \gamma m_0 \omega_4^2 dt = m_0 \gamma c^2 f_0^2 \begin{cases} t; & 0 < \tau < \tau_0, \\ t_0; & \tau > \tau_0, \end{cases} \quad (11.92)$$

где  $t = \text{sh } f_0 \tau / f_0$  — лабораторное время при  $0 < \tau < \tau_0$ , а  $t_0 = \text{sh } f_0 \tau_0 / f_0$  — лабораторное время полного действия силы.

Для полной потери энергии имеем

$$E^{\text{потери}} = \int_0^{\tau} W^{\text{потери}} i d\tau = -m_0 \gamma \int_0^{\tau} (c^2 \ddot{i} - i \omega_4^2) d\tau =$$

$$= \begin{cases} 0; & 0 < \tau < \tau_0, \\ m_0 \gamma c^2 f_0^2 t_0; & \tau > \tau_0, \end{cases} \quad (11.93)$$

т. е. при действии внешней силы ( $0 < \tau < \tau_0$ ) потери энергии электроном равны нулю (внешняя сила с учетом опережающего воздействия компенсирует излучение), в то время как  $E^{\text{изл}} \neq 0$ . После же действия всех сил ( $\tau > \tau_0$ ) обе эти энергии становятся одинаковыми:

$$E^{\text{потери}} = E^{\text{изл}} \quad \text{при } \tau > \tau_0. \quad (11.94)$$

Наконец, работа внешней силы (11.91), имеющая размерность энергии, равна

$$E^{\text{внеш}} = m_0 c \int_0^{\tau} \dot{z} f(\tau) d\tau = m_0 c^2 \begin{cases} (t - 1); & 0 < \tau < \tau_0, \\ (t_0 - 1) + \gamma f_0^2 t_0; & \tau > \tau_0, \end{cases} \quad (11.95)$$

т. е. в итоге после действия всех сил ( $\tau > \tau_0$ ) сохраняется полный баланс энергии: работа внешней силы равна увеличению кинетической энергии электрона  $E^{\text{кин}} = m_0 c^2 (t_0 - 1)$  и энергии  $E^{\text{изл}}$ , которую излучает электрон в течение всего времени  $\tau_0$ , в течение которого он двигался с ускорением, т. е.

$$E^{\text{внеш}} = E^{\text{кин}} + E^{\text{изл}} \quad \text{при } \tau > \tau_0. \quad (11.96)$$

**е) Движение электрона в постоянном и однородном магнитном поле с учетом силы трения.** В случае постоянного и однородного магнитного поля, которое мы направим по оси  $z$  ( $H_x = H_y = 0$ ,  $H_z = H$ ), только одна составляющая тензора  $H_{\mu\nu}$  электромагнитного поля отлична от нуля:

$$H_{12} = H = \text{const}. \quad (11.97)$$

Рассмотрим частный случай движения в плоскости  $xy$ . Тогда, вводя заряд электрона  $e = -e_0$  и новую переменную

$$u = x + iy, \quad (11.98)$$

мы найдем из (11.37) следующие дифференциальные уравнения для переменных  $u$  и  $t = x_4/i'c$  \*):

$$\ddot{u} = if_0\dot{u} + \gamma\left(\ddot{u} - \frac{\dot{u}}{c^2}\omega_4^2\right), \quad \ddot{t} = \gamma\left(\ddot{t} - \frac{\dot{t}}{c^2}\omega_4^2\right), \quad (11.99)$$

где

$$f_0 = e_0H/m_0c = \text{const}, \quad (11.100)$$

а квадрат четырехмерного ускорения равен

$$\omega_4^2 = \ddot{u}^2 - c^2\ddot{t}^2. \quad (11.101)$$

Решение уравнений (11.99) будем искать в виде

$$\dot{t} = \text{ch } q, \quad \dot{x} = c \text{ sh } q \cos \varphi, \quad \dot{y} = c \text{ sh } q \sin \varphi. \quad (11.102)$$

Отсюда следует, что

$$c^2\dot{t}^2 - \dot{x}^2 - \dot{y}^2 = c^2, \quad (11.103)$$

$$\dot{u} = c \text{ sh } q e^{i\varphi}, \quad (11.104)$$

$$\omega_4^2 = c^2\dot{q}^2 + c^2\dot{\varphi}^2 \text{ sh}^2 q. \quad (11.105)$$

Подставляя (11.104) и (11.105) в первое уравнение (11.99) и приравнивая нулю как вещественную, так и мнимую части, мы найдем два уравнения для определения неизвестных функций  $q$  и  $\varphi$ :

$$\dot{\varphi} = f_0 + \gamma\dot{\varphi} + 2\gamma\dot{q}\dot{\varphi} \text{cth } q, \quad \dot{q} = -\gamma c\dot{\varphi}^2 \text{ sh } q \text{ ch } q + \gamma\ddot{q}. \quad (11.106)$$

В общем случае уравнения (11.106) аналитически решить практически невозможно. Поэтому найдем решение уравнений (11.106) с точностью до величины  $\gamma$ . Эти решения имеют вид

$$\varphi = f_0\tau + C_1, \quad \text{th } q = C_2 e^{-\gamma f_0^2 \tau}. \quad (11.107)$$

Не нарушая общности, мы можем положить  $C_1 = 0$ , а для определения постоянной  $C_2$  учтем, что согласно уравнениям (11.102) трехмерная скорость движения  $v = c\beta$  равна

$$\beta = \frac{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}{c\dot{t}} = \text{th } q. \quad (11.108)$$

Поэтому постоянная  $C_2$  представляет собою скорость движения  $\beta_0 = v_0/c$  электрона по окружности в момент времени  $\tau = 0$ .

\*) В работах [46—48] дано приближенное решение для релятивистского случая. В нерелятивистском приближении (линейные уравнения) эта задача решена точно [49].

Отсюда находим

$$\beta = \operatorname{th} q = \beta_0 e^{-\tau/\tau_0}, \quad \operatorname{ch} q = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta_0^2 e^{-2\tau/\tau_0}}} = \dot{t},$$

$$\operatorname{sh} q = \frac{\beta_0 e^{-\tau/\tau_0}}{\sqrt{1 - \beta_0^2 e^{-2\tau/\tau_0}}} = \frac{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}{c},$$
(11.109)

причем постоянная  $\tau_0$ , которую мы можем интерпретировать как время, равна

$$\tau_0 = \frac{1}{\gamma \beta_0^2} = \frac{3}{2} \frac{1}{137} \frac{\hbar}{H^2 r_0^3} \sim \frac{10^{10}}{H^2},$$
(11.110)

т. е. при магнитных полях порядка  $10^5$  гс время  $\tau_0$  становится порядка секунды.

По формуле (11.49) мы можем найти энергию, излучаемую электроном за все время движения:

$$E^{\text{изл}} = \int_0^{\infty} W^{\text{изл}} \dot{t} d\tau.$$
(11.111)

Учитывая, что

$$W^{\text{изл}} = \gamma m_0 \omega_4^2,$$

а значения для  $\omega_4^2$  и  $\dot{t}$  могут быть найдены соответственно по формулам (11.105) и (11.102), имеем в первом приближении [47]

$$E^{\text{изл}} = \gamma m_0 c^2 \beta_0^2 \int_0^{\infty} \frac{e^{-2\tau/\tau_0} d\tau_0}{(1 - \beta_0^2 e^{-2\tau/\tau_0})^{3/2}} = m_0 c^2 \left( \frac{1}{\sqrt{1 - \beta_0^2}} - 1 \right),$$
(11.112)

т. е. излучение будет происходить до тех пор, пока электрон не потеряет всю свою кинетическую энергию. Для того чтобы получить полные потери энергии, мы должны к энергии излучения добавить еще энергию

$$E^{\text{обр}} = E^{\text{потери}} - E^{\text{изл}} = m_0 c^2 \gamma (\dot{t}(\infty) - \dot{t}(0)),$$
(11.113)

которая может быть вычислена по формуле (11.48). Учитывая равенство (11.109), найдем

$$E^{\text{обр}} = \frac{m_0 c^2 \beta_0^2}{(1 - \beta_0^2)^{3/2}} \frac{\gamma}{\tau_0}.$$
(11.114)

Отсюда видно, что в случае ультрарелятивистской начальной энергии ( $\beta_0 \rightarrow 1$ ) мы имеем

$$E^{\text{обр}}/E^{\text{изл}} = \gamma/\tau_0 (1 - \beta_0^2).$$
(11.115)

Далее, принимая во внимание соотношение (11.110), а также связь начальной релятивистской энергии электрона  $E = m_0 c^2 / \sqrt{1 - \beta_0^2}$  с магнитным полем  $H$ :  $E = e_0 H R$ , где  $R$  — радиус орбиты, мы найдем, что отношение (11.115) имеет порядок

$$E^{\text{обр}} / E^{\text{изл}} \sim (r_0^2 / m_0 c^2)^2 R^2 H^2 \sim 10^{-18} R^2 H^2, \quad (11.116)$$

т. е. обратимой частью излучения при движении в постоянном магнитном поле мы практически всегда можем пренебречь и считать, что

$$E^{\text{потери}} \approx E^{\text{изл}}.$$

**ж) Движение по винтовой линии с компенсацией потерь энергии на излучение.** Как мы только что показали, при движении электрона в постоянном и однородном магнитном поле, направленном вдоль оси  $z$ :

$$H_x = H_y = 0, \quad H_z = H, \quad (11.117)$$

учет радиационной силы трения приводит к потере энергии, и поэтому скорость, а вместе с тем и радиус окружности должны постепенно уменьшаться. Для того чтобы сохранить движение по окружности (или винтовой линии) с постоянной скоростью, мы должны приложить соответствующие электростатические поля, которые скомпенсируют потери энергии на излучение [45]. Эти электростатические поля, так же как и магнитное (11.117), должны быть подобраны таким образом, чтобы на траектории движения не было никаких источников и зарядов, т. е. чтобы выполнялись условия

$$\text{rot } \mathbf{H} = \text{div } \mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{E} = \text{div } \mathbf{E} = 0. \quad (11.118)$$

Для решения поставленной задачи компоненты вектор-потенциала и скалярного потенциала, описывающие не только постоянное магнитное поле (11.117), но и компенсирующие потери энергии на излучение, представим в виде:

$$\begin{aligned} A_z &= 0, \\ A_x &= -\frac{1}{2} y \left( H + 2Bt \frac{c}{x^2 + y^2} \right), \\ A_y &= \frac{1}{2} x \left( H + 2Bt \frac{c}{x^2 + y^2} \right), \end{aligned} \quad (11.119)$$

$$\Phi = B_1 z, \quad (11.120)$$



причем постоянные  $B$  и  $B_1$  мы подберем ниже. Тогда для составляющих электростатического поля мы получаем

$$\begin{aligned} E_x &= -\frac{1}{c} \frac{\partial A_x}{\partial t} - \frac{\partial \Phi}{\partial x} = B \frac{y}{y^2 + x^2}, \\ E_y &= -\frac{1}{c} \frac{\partial A_y}{\partial t} - \frac{\partial \Phi}{\partial y} = -B \frac{x}{y^2 + x^2}, \\ E_z &= -\frac{1}{c} \frac{\partial A_z}{\partial t} - \frac{\partial \Phi}{\partial z} = -B_1. \end{aligned} \quad (11.121)$$

Отсюда легко показать, что  $\operatorname{div} \mathbf{E} = 0$  во всех точках пространства (зарядов нет). При вычислении же  $\operatorname{rot} \mathbf{E}$  отличной от нуля будет лишь одна составляющая (не на траектории):

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}_z \mathbf{E} &= -B \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \ln \sqrt{x^2 + y^2} = -2\pi B \delta(x) \delta(y), \\ H_z = \operatorname{rot}_z \mathbf{A} &= \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} = 2\pi c B t \delta(x) \delta(y) + H. \end{aligned} \quad (11.122)$$

Заметим, что часть магнитного поля, компенсирующая потери энергии на излучение (пропорциональная  $Bct$ ), на самой орбите ( $x^2 + y^2 \neq 0$ ) также обращается в нуль.

Найденные значения для электрического и магнитного полей удовлетворяют уравнению Максвелла:

$$\operatorname{rot}_z \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial H_z}{\partial t}. \quad (11.123)$$

Таким образом, для компенсации потерь энергии на излучение можно создать в центре круговой орбиты дополнительное магнитное поле, направленное по оси  $z$ , и увеличивать его пропорционально времени  $t$ :

$$H_z^{\text{доп}} = 2\pi Bct \delta(x) \delta(y). \quad (11.124)$$

Другое электростатическое поле  $E_z = -B_1$ , являющееся постоянным, также удовлетворяет условию (11.118). Постоянные  $B$  и  $B_1$  должны быть найдены из условия: чтобы дополнительные поля при движении по винтовой линии компенсировали потери энергии на излучение. При наличии полей (11.121) и (11.122) уравнения движения (11.37) для электрона принимают вид [39]

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= \dot{y}f_1 - \dot{t}f_2 \frac{y}{x^2 + y^2} + \gamma \left( \ddot{x} - \frac{\dot{x}}{c^2} \omega_4^2 \right), \\ \ddot{y} &= \dot{x}f_1 + \dot{t}f_2 \frac{x}{x^2 + y^2} + \gamma \left( \ddot{y} - \frac{\dot{y}}{c^2} \omega_4^2 \right), \\ \ddot{z} &= \dot{t}f_3 + \gamma \left( \ddot{z} - \frac{\dot{z}}{c^2} \omega_4^2 \right), \\ c\dot{t} &= \frac{\dot{t}_2}{c} \frac{\dot{y}x - \dot{x}y}{x^2 + y^2} + \frac{\dot{t}_3}{c} \dot{z} + \gamma \left( c\dot{t} - \frac{\dot{t}}{c} \omega_4^2 \right), \end{aligned} \quad (11.125)$$

где  $\omega_4^2$  — квадрат четырехмерного ускорения (см. (11.42)), а вместо четвертого уравнения (11.125) мы можем написать

$$\dot{t} = \frac{1}{c} (c^2 + \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)^{1/2}. \quad (11.126)$$

Подставляя уравнения, описывающие винтовое движение,

$$x = R \cos \omega \tau, \quad y = R \sin \omega \tau, \quad z = b \tau \quad (11.127)$$

в (11.125), найдем, при каком значении постоянных

$$f_1 = \frac{e_0 H}{m_0 c}, \quad f_2 = \frac{e_0 B}{m_0}, \quad f_3 = \frac{e_0 B_1}{m_0} \quad (11.128)$$

оно может быть осуществлено:

$$f_1 = \omega, \quad f_2 = \frac{\gamma R^2 \omega^3 (c^2 + R^2 \omega^2)}{c^2 \dot{t}}, \quad f_3 = \frac{\gamma b R^2 \omega^4}{c^2 \dot{t}}. \quad (11.129)$$

Здесь согласно (11.126) \*

$$\dot{t} = \frac{1}{c} (c^2 + b^2 + R^2 \omega^2)^{1/2} = 1 / \sqrt{1 - \beta^2} = \text{const.} \quad (11.130)$$

Поскольку  $\ddot{t} = 0$ , то для работы радиационной силы (см. (11.45)), а также для энергии излучения (см. (11.49)) мы найдем одно и то же значение:

$$W^{\text{потери}} = W^{\text{изл}} = m_0 \gamma \omega_4^2 = \frac{2}{3} \frac{e_0^2}{c^3} R^2 \omega^4, \quad (11.131)$$

и поэтому никакого «парадокса Борна» в этом случае возникнуть не может.

Чтобы уравнения (11.127) записать через трехмерные величины, мы должны, учитывая (11.130), ввести лабораторное время  $t$ :

$$x = R \cos \omega_0 t, \quad y = R \sin \omega_0 t, \quad z = v_{\parallel} t, \quad (11.132)$$

где

$$\omega_0 = \omega / \dot{t}, \quad v_{\parallel} = b / \dot{t}. \quad (11.133)$$

Отсюда легко определить составляющие трехмерной скорости (поперечную  $c\beta_{\perp}$  и продольную  $c\beta_{\parallel}$ ):

$$\beta_{\perp} = R\omega_0/c, \quad \beta_{\parallel} = v_{\parallel}/c, \quad (11.134)$$

а также трехмерную скорость  $c\beta$  и инвариантную трехмерную скорость  $c\beta_0$ :

$$\beta = \sqrt{\beta_{\perp}^2 + \beta_{\parallel}^2}, \quad \beta_0 = \sqrt{\frac{\beta_{\perp}^2}{1 - \beta_{\parallel}^2}} = \frac{R\omega}{(c^2 + R^2 \omega^2)^{1/2}}. \quad (11.135)$$

\* Из (11.130) следует, что  $\dot{t} = 0$ ,  $\ddot{t} = 0$ , ...

Принимая во внимание, что

$$R^2\omega^4 = \frac{c^4}{R^2} \frac{\beta_0^2}{(1 - \beta_0^2)^2}, \quad (11.136)$$

мы найдем для энергии излучения выражение, полученное нами из теории излучения классической электродинамики (см. (10.61)):

$$W^{\text{изл}} = \frac{2}{3} \frac{e_0^2 c \beta_0^4}{R^2 (1 - \beta_0^2)^2}. \quad (11.137)$$

Выражение (11.137) определяет потери энергии электроном, равные энергии излучения. Эти потери происходят за счет работы внешнего электростатического поля (магнитное поле работу не совершает):

$$W^{\text{внеш}} = \frac{m_0}{i} \left[ \dot{f}_2 \frac{xy - yx}{x^2 + y^2} + \dot{f}_3 \dot{z} \right] = -W^{\text{изл}}. \quad (11.138)$$

В случае движения по окружности ( $b = 0$ ) мы будем иметь

$$\dot{t} = \frac{E}{m_0 c^2} = \frac{1}{c} (c^2 + R^2 \omega^2)^{1/2}, \quad \beta E = e_0 H R. \quad (11.139)$$

Отсюда для постоянной  $B$  находим

$$B = \frac{2}{3} \frac{e_0}{R} \beta^3 \left( \frac{E}{m_0 c^2} \right)^4, \quad (11.140)$$

а для потока переменной части магнитного поля (11.24) (в центре орбиты), создающего ускоряющее электростатическое поле, имеем

$$\int_S H_z dS = \frac{4\pi}{3} \frac{e_0 c}{R} \beta^3 \left( \frac{E}{m_0 c^2} \right)^4 t. \quad (11.141)$$

Здесь  $S$  — элемент поверхности, где магнитное поле отлично от нуля. Этот пример позволяет проанализировать некоторые принципиальные вопросы классической электродинамики и в особенности дираковской радиационной силы трения. В существующих электронных синхротронах потери энергии на излучение компенсируются другим способом, например с помощью автофазировки Векслера — Макмиллана, когда электрическое поле можно разложить в ряд по бегущим волнам (см. § 27).

### III. КВАНТОВАЯ РЕЛЯТИВИСТСКАЯ ТЕОРИЯ

#### § 12. ВАРИАЦИОННЫЕ ПРИНЦИПЫ ДЛЯ СВОБОДНОГО (БЕЗ ЗАРЯДОВ) ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

а) Тензор энергии и тензор собственного момента количества движения. Как было показано в § 7, лагранжиан свободного электромагнитного поля имеет вид (см. (7.35))

$$L = - \frac{1}{16\pi} H_{\mu\nu} H_{\mu\nu}, \quad (12.1)$$

где компоненты тензор-поля  $H_{\mu\nu}$  связаны с компонентами вектор-потенциала  $A_\nu$  соотношением

$$H_{\mu\nu} = A_{\nu, \mu} - A_{\mu, \nu}, \quad (12.2)$$

где

$$A_{\nu, \mu} = \partial A_\nu / \partial x_\mu.$$

В частности, вычисляя производную по координатам, мы найдем тензор энергии и его законы сохранения

$$\frac{\partial L}{\partial x_\mu} = \frac{\partial L}{\partial A_{\lambda, \nu}} \frac{\partial A_{\lambda, \nu}}{\partial x_\mu} = \frac{\partial}{\partial x_\nu} \frac{1}{4\pi} (H_{\lambda\nu} A_{\lambda, \mu}) - \frac{1}{4\pi} \frac{\partial H_{\lambda\nu}}{\partial x_\nu} A_{\lambda, \mu}. \quad (12.3)$$

Принимая во внимание, что в вакууме (см. (7.25))

$$\partial H_{\lambda\nu} / \partial x_\nu = 0, \quad (12.4)$$

получаем закон сохранения для тензора энергии

$$\partial T_{\mu\nu} / \partial x_\nu = 0, \quad (12.5)$$

где

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi} A_{\lambda, \mu} H_{\lambda\nu} - L \delta_{\mu\nu}. \quad (12.6)$$

Отсюда видно, что этот тензор энергии, получивший название канонического, не является симметричным, т. е.

$$T_{\mu\nu} \neq T_{\nu\mu}. \quad (12.7)$$

Отсутствие симметрии канонического тензора указывает на наличие поляризационных свойств электромагнитных волн [1].

В самом деле, введем понятие тензора момента количества движения поля \*)

$$M_{[\mu\nu]\lambda} = \frac{i'}{c} (x_\mu T_{\nu\lambda} - x_\nu T_{\mu\lambda}). \quad (12.8)$$

Учитывая закон сохранения (12.5), найдем, что четырехмерная дивергенция этого тензора третьего ранга равна

$$\frac{\partial M_{[\mu\nu]\lambda}}{\partial x_\lambda} = \frac{i'}{c} (T_{\nu\mu} - T_{\mu\nu}), \quad (12.9)$$

причем в случае, когда тензор энергии несимметричен, она не обращается в нуль. Для того чтобы найти так называемый полный момент, дивергенция от которого обращалась бы в нуль, мы должны к орбитальному моменту добавить еще и собственный:

$$M'_{[\mu\nu]\lambda} = M_{[\mu\nu]\lambda} + S_{[\mu\nu]\lambda}, \quad (12.10)$$

значение для которого будем искать в виде

$$S_{[\mu\nu]\lambda} = \frac{i'}{c} (\hat{f}_{\mu[\nu\lambda]} - \hat{f}_{\nu[\mu\lambda]}). \quad (12.11)$$

Полагая

$$\hat{f}_{\mu[\nu\lambda]} = -\frac{1}{4\pi} A_\mu H_{\nu\lambda}, \quad (12.12)$$

найдем, что

$$\frac{\partial \hat{f}_{\mu[\nu\lambda]}}{\partial x_\lambda} = \frac{1}{4\pi} A_{\mu,\lambda} H_{\lambda\nu}, \quad (12.13)$$

и поэтому

$$\frac{\partial S_{[\mu\nu]\lambda}}{\partial x_\lambda} = \frac{i'}{c4\pi} (A_{\mu,\lambda} H_{\lambda\nu} - A_{\nu,\lambda} H_{\lambda\mu}). \quad (12.14)$$

Отсюда, учитывая еще равенство (12.9), легко показать, что полный момент (12.10) будет удовлетворять закону сохранения:

$$\frac{\partial M'_{[\mu\nu]\lambda}}{\partial x_\lambda} = 0. \quad (12.15)$$

Из (12.11) и (12.12) следует, что собственный момент, который характеризует поляризационные свойства электромагнитного поля, равен

$$S_{[\mu\nu]\lambda} = \frac{i'}{4\pi c} (A_\nu H_{\mu\lambda} - A_\mu H_{\nu\lambda}). \quad (12.16)$$

Заметим, что тензор энергии мы можем симметризовать. Для этого к выражению (12.6) мы должны добавить выражение, дивергенция от которого обращается в нуль. Искомый симметрич-

\*) Тензоры антисимметричны относительно индексов, стоящих в квадратных скобках.

ный тензор энергии, получивший название метрического, имеет вид

$$T'_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} - \frac{\partial}{\partial x_\lambda} f_{\mu[\nu\lambda]} = \frac{1}{4\pi} H_{\lambda\mu} H_{\nu\lambda} - L\delta_{\mu\nu}. \quad (12.17)$$

Как известно, тензор электромагнитного поля  $H_{\mu\nu}$  обладает калибровочной (или градиентной) инвариантностью. В самом деле, вводя новые потенциалы

$$A_\mu = A'_\mu - \frac{\partial f}{\partial x_\mu}, \quad (12.18)$$

где  $f$  — скалярная функция калибровки, нетрудно убедиться, что электромагнитные поля  $H_{\mu\nu}$  связаны одинаковым соотношением как со старыми  $A_\mu$ , так и с новыми  $A'_\mu$  потенциалами:

$$H_{\mu\nu} = A'_{\nu,\mu} - A'_{\mu,\nu} = A_{\nu,\mu} - A_{\mu,\nu}. \quad (12.19)$$

Лагранжиан не содержит в явном виде потенциалов и поэтому не зависит от выбора калибровочной функции  $f$ .

Неопределенность выбора значений для потенциалов приводит к тому, что мы не можем однозначно задать потенциалы  $A_\mu$ , не наложив дополнительного условия на калибровочную функцию  $f$ . Допустим, что мы выбрали потенциалы  $A'_\mu$ , для которых дивергенция не равна нулю:

$$A'_{\mu,\mu} \neq 0.$$

Тогда с помощью калибровочных преобразований (12.18) мы получаем

$$A'_{\mu,\mu} = A_{\mu,\mu} + \square f. \quad (12.20)$$

Если подобрать калибровочную функцию таким образом, чтобы

$$f = A'_{\mu,\mu} / \square, \quad (12.21)$$

то потенциалы  $A_\mu$  будут связаны между собою условием Лоренца

$$A_{\mu,\mu} = 0, \quad (12.22)$$

которое в трехмерных обозначениях принимает вид

$$\operatorname{div} A + \frac{1}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0. \quad (12.23)$$

Подставляя (12.19) в равенство (12.4) и принимая во внимание условие калибровки (12.22), находим, что потенциалы электромагнитного поля в вакууме подчиняются уравнениям Даламбера без правой части:

$$\frac{\partial^2 A_\mu}{\partial x_\nu \partial x_\nu} = \square A_\mu = 0. \quad (12.24)$$

Заметим, что выбор калибровочной функции не является однозначным. К решению (12.20) мы всегда можем добавить произвольную функцию  $f_0$ , удовлетворяющую уравнению Даламбера

$$\square f_0 = 0. \quad (12.25)$$

Если к потенциалу  $A_\mu$ , подчиняющемуся условию Лоренца, добавить калибровочный потенциал  $\partial f_0 / \partial x_\mu$ , то в силу равенства (12.25) новый потенциал также будет подчиняться условию Лоренца.

В частности, когда заряды отсутствуют, т. е. когда потенциалы, так же как и функция  $f_0$ , подчиняются уравнению Даламбера, мы можем выбрать калибровочную функцию  $f_0$  таким образом, чтобы скалярный потенциал обращался в нуль ( $\Phi = 0$ ), т. е. в вакууме могут существовать лишь одни поперечные волны, для которых

$$\Phi = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{A} = 0. \quad (12.26)$$

В этом случае

$$E_x = i' H_{14}, \quad H_x = A_{3,2} - A_{2,3}, \dots, \quad (12.27)$$

или в трехмерных обозначениях

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad \mathbf{H} = \operatorname{rot} \mathbf{A}. \quad (12.28)$$

Подставляя эти значения в лагранжиан (12.1), найдем:

$$L = \frac{1}{8\pi} (E^2 - H^2). \quad (12.29)$$

Точно так же из (12.17) мы найдем для компоненты плотности энергии

$$U = T'_{44} = \frac{1}{4\pi} H_{n4} H_{4n} - L = \frac{1}{8\pi} (E^2 + H^2), \quad (12.30)$$

для компонент трехмерной плотности импульса

$$g_n = \frac{i'}{c} T_{n4} = \frac{1}{4\pi c} [\mathbf{E}\mathbf{H}]_n. \quad (12.31)$$

Из антисимметричного тензора третьего ранга (12.16), характеризующего поляризационные свойства, мы можем составить плотность вектора (трехмерного) спина\*):

$$s_x = S_{[23]4}, \quad s_y = S_{[31]4}, \quad s_z = S_{[12]4}, \quad (12.32)$$

или

$$\mathbf{s} = \frac{1}{4\pi c} [\mathbf{E}\mathbf{A}].$$

\*) Составляющие плотности спина при условии (12.26) мы будем обозначать строчными буквами.

Отсюда в случае свободного электромагнитного поля находим значения:

для энергии

$$H = \frac{1}{8\pi} \int (\mathbf{H}^2 + \mathbf{E}^2) d^3x, \quad (12.33)$$

для трехмерного импульса

$$\mathbf{G} = \frac{1}{4\pi c} \int [\mathbf{E}\mathbf{H}] d^3x, \quad (12.34)$$

для трехмерного спина

$$\mathbf{S} = \frac{1}{4\pi c} \int [\mathbf{E}\mathbf{A}] d^3x. \quad (12.35)$$

**б) Законы сохранения в интегральной форме.** Закон сохранения тензора энергии (12.5) мы можем записать в следующем виде:

$$\operatorname{div} \mathbf{T}_\mu + \frac{1}{c} \frac{\partial T_{\mu 4}}{\partial t} = 0, \quad (12.36)$$

где составляющие трехмерного вектора  $\mathbf{T}_\mu$  равны  $T_{\mu n}$ . Умножая равенство (12.36) на элемент объема  $d^3x$  и принимая во внимание, что при интегрировании по всему объему

$$\int \operatorname{div} \mathbf{T}_\mu d^3x = 0, \quad (12.37)$$

найдем

$$\frac{d}{dt} \int T_{\mu 4} d^3x = 0. \quad (12.38)$$

Отсюда следует закон сохранения в интегральной форме:

$$\int T_{\mu 4} d^3x = \text{const.} \quad (12.39)$$

Полагая  $\mu = 4, n$ , получаем, что энергия (см. (12.33)), импульс (см. (12.34)), а также трехмерный спин (см. (12.35)) не должны зависеть от времени. Однако последний вывод относится только к поперечному электромагнитному полю, когда выполняются соотношения (12.26). Покажем это на примере  $x$ -составляющей трехмерного спина (см. (12.32)).

Полагая в равенстве (12.16)  $\mu = 2, \nu = 3$  и учитывая равенство (12.4), имеем

$$\frac{\partial s_{[23] \lambda}}{\partial x_\lambda} = \frac{i'}{4\pi c} (A_{3, \lambda} H_{2\lambda} - A_{2, \lambda} H_{3\lambda}) = \frac{i'}{4\pi c} (A_{3, n} A_{n, 2} - A_{2, n} A_{n, 3}). \quad (12.40)$$

Легко показать, что при интегрировании по всему объему

$$\int A_{3, n} A_{n, 2} d^3x = 0. \quad (12.41)$$



В самом деле,

$$A_{3, n} A_{n, 2} = \frac{\partial A_3}{\partial x_1} \frac{\partial A_1}{\partial x_2} + \frac{\partial A_3}{\partial x_2} \frac{\partial A_2}{\partial x_2} + \frac{\partial A_3}{\partial x_3} \frac{\partial A_3}{\partial x_2}. \quad (12.42)$$

Учитывая, что согласно условию поперечности (см. (12.26))

$$\frac{\partial A_2}{\partial x_2} = -\frac{\partial A_1}{\partial x_1} - \frac{\partial A_3}{\partial x_3},$$

а также что при интегрировании по объему мы можем перебрасывать производную с одной функции на другую (изменяя при этом лишь знак), мы легко можем доказать соотношение (12.35), из которого, в частности, следует, что

$$\frac{d}{dt} S_x = 0,$$

т. е. трехмерный спин, так же как энергия и импульс, не зависит от времени.

в) **Решение уравнения Даламбера.** Как видно из формулы (12.24), вектор-потенциал  $\mathbf{A}$  удовлетворяет уравнению Даламбера

$$\left( \nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = 0. \quad (12.43)$$

Частное решение этого уравнения имеет вид

$$\mathbf{A}_x(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{L^{3/2}} B \mathbf{a} e^{-i\kappa t + i\mathbf{x}\mathbf{r}},$$

где

$$\kappa = \sqrt{\kappa_1^2 + \kappa_2^2 + \kappa_3^2}, \quad (12.44)$$

$L$  — длина периодичности, введенная Борном,  $B$  — нормировочный коэффициент, который будет найден ниже (см. (12.67)), и  $\mathbf{a}$  — вектор, характеризующий поперечность электромагнитных волн:

$$(\mathbf{x}\mathbf{a}) = 0, \quad (12.45)$$

зависят от волнового вектора  $\mathbf{x}$  [2].

Наложив на волновую функцию условие периодичности

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_x(x + L, y, z, t) &= \mathbf{A}_x(x, y, z, t), \\ \mathbf{A}_x(x, y + L, z, t) &= \mathbf{A}_x(x, y, z, t), \\ \mathbf{A}_x(x, y, z + L, t) &= \mathbf{A}_x(x, y, z, t), \end{aligned} \quad (12.46)$$

или

$$e^{i\kappa_1(x+L)} = e^{i\kappa_1 x}, \dots,$$

для составляющих вектора  $\mathbf{x}$  найдем значения:

$$\kappa_1 = n_1 \frac{2\pi}{L}, \quad \kappa_2 = n_2 \frac{2\pi}{L}, \quad \kappa_3 = n_3 \frac{2\pi}{L}, \quad (12.47)$$

где

$$n_1, n_2, n_3 = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$$

— целые числа, принимающие как положительные, так и отрицательные значения, включая нуль.

Учитывая, что все электромагнитные поля являются вещественными, для суммарного векторного потенциала найдем

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{L^{3/2}} \sum_{\mathbf{x}} B [a e^{-i c \mathbf{x} t + i \mathbf{x} \mathbf{r}} + a^+ e^{i c \mathbf{x} t - i \mathbf{x} \mathbf{r}}], \quad (12.48)$$

где сумму по вектору  $\mathbf{x}$  следует понимать как сумму по  $n_1, n_2, n_3$ , т. е.

$$\sum_{\mathbf{x}} = \sum_{n_1} \sum_{n_2} \sum_{n_3}.$$

Отсюда находим для компонент полей следующие значения [2]: для вектора электрической напряженности

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{i}{L^{3/2}} \sum_{\mathbf{x}} \kappa B (a e^{-i c \mathbf{x} t + i \mathbf{x} \mathbf{r}} - a^+ e^{i c \mathbf{x} t - i \mathbf{x} \mathbf{r}}), \quad (12.49)$$

для вектора магнитной напряженности

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \frac{i}{L^{3/2}} \sum_{\mathbf{x}} B ([\mathbf{x} a] e^{-i c \mathbf{x} t + i \mathbf{x} \mathbf{r}} - [\mathbf{x} a^+] e^{i c \mathbf{x} t - i \mathbf{x} \mathbf{r}}). \quad (12.50)$$

Подставляя соотношения (12.49) и (12.50) в выражения для полной энергии, импульса и спина (см. равенства (12.33) — (12.35)), найдем ( $\kappa^0 = \kappa/\kappa$ ):

для энергии \*)

$$H = \frac{1}{2\pi} \sum_{\mathbf{x}} \kappa^2 B^2 (a^+ a), \quad (12.51)$$

для импульса

$$\mathbf{G} = \frac{1}{2\pi c} \sum_{\mathbf{x}} \kappa^0 \kappa^2 B^2 (a^+ a), \quad (12.52)$$

для вектора спина

$$\mathbf{S} = -\frac{i}{2\pi c} \sum_{\mathbf{x}} \kappa B^2 [a^+ a]. \quad (12.53)$$

г) **Исследование поляризационных свойств.** Между тремя составляющими вектора амплитуды  $\mathbf{a}(a_1, a_2, a_3)$ , зависящими от одного и того же волнового вектора  $\mathbf{x}$ , имеется одно соотношение (см. (12.45)):

$$(\mathbf{x} a) = 0, \quad (12.54)$$

\*) Соотношение (12.51) получено в предположении, что амплитуды  $a_n^+$  и  $a_n$  коммутируют друг с другом. В противном случае мы получили бы

$$(\mathbf{a}^+ a) \rightarrow \frac{1}{2} [(a^+ a) + (a a^+)]. \quad (12.51a)$$

выражающее собою условие поперечности. Поэтому из трех составляющих амплитуд независимыми остаются только две. Эти две составляющие характеризуют поляризационные свойства. Мы можем выбрать эти составляющие таким образом, чтобы они характеризовали либо линейную, либо круговую поляризацию.

Если мы хотим описать линейную поляризацию, то вектор  $\mathbf{a}$  следует разбить на две взаимно перпендикулярные составляющие [1]:

$$\mathbf{a} = \beta_2 q_2 + \beta_3 q_3, \quad (12.55)$$

при условии, что единичные векторы  $\boldsymbol{\kappa}^0$ ,  $\beta_2$  и  $\beta_3$  перпендикулярны друг к другу.

Вообще говоря, это условие не является однозначным. Однако если мы имеем какое-либо выделенное направление (например постоянное и однородное магнитное поле), характеризуемое единичным вектором  $\mathbf{j}^0$ , то векторы  $\beta_2$  и  $\beta_3$  мы можем положить равными

$$\beta_2 = \frac{[\boldsymbol{\kappa}^0 \mathbf{j}^0]}{\sqrt{1 - (\boldsymbol{\kappa}^0 \mathbf{j}^0)^2}}, \quad \beta_3 = [\boldsymbol{\kappa}^0 \beta_2] = \frac{\boldsymbol{\kappa}^0 (\boldsymbol{\kappa}^0 \mathbf{j}^0) - \mathbf{j}^0}{\sqrt{1 - (\boldsymbol{\kappa}^0 \mathbf{j}^0)^2}}. \quad (12.56)$$

В этом случае имеем

$$(\mathbf{a}^+ \mathbf{a}) = q_2^+ q_2 + q_3^+ q_3, \quad [\mathbf{a}^+ \mathbf{a}] = \boldsymbol{\kappa}^0 (q_2^+ q_3 - q_3^+ q_2). \quad (12.57)$$

Отсюда видно, что энергия, импульс и вектор спина соответственно равны

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2\pi} \sum_{\boldsymbol{\kappa}} \boldsymbol{\kappa}^2 B^2 (q_2^+ q_2 + q_3^+ q_3), \\ \mathbf{G} &= \frac{1}{2\pi c} \sum_{\boldsymbol{\kappa}} \boldsymbol{\kappa}^2 \boldsymbol{\kappa}^0 B^2 (q_2^+ q_2 + q_3^+ q_3), \\ \mathbf{S} &= -\frac{i}{2\pi c} \sum_{\boldsymbol{\kappa}} \boldsymbol{\kappa} \boldsymbol{\kappa}^0 B^2 (q_2^+ q_3 - q_3^+ q_2), \end{aligned} \quad (12.58)$$

т. е. энергия и импульс пропорциональны сумме интенсивностей. Вектор же спина при наличии лишь одной линейной поляризации ( $q_2 = 0$  или  $q_3 = 0$ ) обращается в нуль.

При исследовании круговой поляризации амплитуду вектор-потенциала следует разбить на две составляющие несколько другим способом:

$$\mathbf{a} = \beta_1 q_1 + \beta_{-1} q_{-1} = \sum_{l=\pm 1} \beta_l q_l, \quad (12.59)$$

где единичные векторы  $\beta_l$  связаны с  $\beta_2$  и  $\beta_3$  соотношениями

$$\beta_l = \frac{1}{\sqrt{2}} (\beta_2 + i l \beta_3) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\beta_2 + i l [\boldsymbol{\kappa}^0 \beta_2]). \quad (12.60)$$

Отсюда видно, что

$$\beta_l^* = \beta_{-l}. \quad (12.61)$$

Кроме того, легко получить, что

$$\begin{aligned} (\beta_l^* \beta_l) &= \delta_{l,l}, & [\beta_l^* \beta_l] &= il\kappa^0 \delta_{ll}, \\ (\kappa^0 \beta_l) &= 0, & [\kappa^0 \beta_l] &= -il\beta_l. \end{aligned} \quad (12.62)$$

Учитывая эти соотношения, вместо (12.58) находим

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2\pi} \sum_{\kappa} \kappa^2 B^2 (q_l^+ q_l + q_{-l}^+ q_{-l}), \\ S &= \frac{1}{2\pi c} \sum_{\kappa} \kappa \kappa^0 B^2 (q_l^+ q_l - q_{-l}^+ q_{-l}), \end{aligned}$$

при  $l = 1$  спин направлен по волновому вектору  $\kappa$ , т. е. по движению, а при  $l = -1$  — против движения \*).

Вообще говоря, мы можем ограничиться только линейной поляризацией или только круговой поляризацией, если задана разность фаз между колебаниями, обладающими различной поляризацией [1]. При наличии двух линейных поляризаций вектор напряженности электрического поля изменяется по закону \*\*)

$$E_2 = q_2 \cos(\omega t + \varphi_2), \quad E_3 = q_3 \cos(\omega t + \varphi_3). \quad (12.63)$$

Для того чтобы найти сдвиг фаз  $\varphi = \varphi_2 - \varphi_3$ , мы должны знать еще амплитуды круговых поляризаций  $q_1$  и  $q_{-1}$ . Можно каждое из линейных колебаний свести к двум круговым. Тогда мы должны воспользоваться соотношением

$$\left. \begin{aligned} q_2 \cos(\omega t + \varphi_2), \\ q_3 \cos(\omega t + \varphi_3) \end{aligned} \right\} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \begin{aligned} q_1 \sin(\omega t + \varphi_1) - q_{-1} \sin(\omega t + \varphi_{-1}) \\ q_1 \cos(\omega t + \varphi_1) + q_{-1} \cos(\omega t + \varphi_{-1}) \end{aligned} \right\}.$$

Исключая фазы  $\varphi_1$  и  $\varphi_{-1}$ , найдем

$$\sin \varphi = \frac{q_1^2 - q_{-1}^2}{2q_2 q_3}. \quad (12.64)$$

**д) Понятие о квантовании электромагнитного поля.** Согласно квантовой теории электромагнитное поле рассматривается как совокупность фотонов с частотой  $\omega$  и волновым вектором  $\kappa$ .

\*) Состояние с  $l = 1$  мы назовем правой круговой поляризацией, поскольку вращение вектора  $E$  и направление распространения волны образуют правый винт, а состояние с  $l = -1$  — левой круговой поляризацией. В классической оптике, наоборот, поляризацию с  $l = 1$  называют левой, так как рассматривают вращение вектора  $E$  относительно движения к наблюдателю.

\*\*) Амплитуды вектора электрической напряженности мы приравняем непосредственно  $q_2$  и  $q_3$ . Множитель пропорциональности здесь не существует.

Энергия  $E$  и импульс  $\mathbf{p}$  фотона должны определяться соответственно соотношениями

$$E = \hbar\omega, \quad \mathbf{p} = \hbar\mathbf{k}. \quad (12.65)$$

Учитывая, что масса покоя фотона  $m_0$  равна нулю, т. е. фотон всегда должен быть релятивистским, имеем

$$E = c\rho,$$

или

$$\omega = c\kappa.$$

Если в каждом из состояний  $\mathbf{k}$  имеется  $N_1$  фотонов, обладающих правой круговой поляризацией, и  $N_{-1}$  фотонов с левой круговой поляризацией, то полную энергию можем записать в виде

$$H = \sum_{\mathbf{k}} c\hbar\kappa(N_1 + N_{-1}). \quad (12.66)$$

Поэтому если мы квадрат амплитуды, точнее, величину

$$q_1^+ q_1 = N_p,$$

приравняем числу фотонов, найдем значение для нормировочного коэффициента \*)

$$B = \sqrt{2\pi c\hbar/\kappa}; \quad (12.67)$$

тогда энергия и спин будут соответственно равны

$$H = \sum_{\mathbf{k}} c\hbar\kappa(q_1^+ q_1 + q_{-1}^+ q_{-1}), \quad \mathbf{S} = \sum_{\mathbf{k}} \hbar\mathbf{k}^0 (q_1^+ q_1 - q_{-1}^+ q_{-1}). \quad (12.68)$$

Отсюда видно, что спин отдельного фотона в единицах  $\hbar$  равен по абсолютному значению единице, т. е. для фотонов должна иметь место статистика Бозе — Эйнштейна.

Квантование уравнений Максвелла — Лоренца позволяет описывать системы с переменным числом фотонов, что особенно важно при построении теории излучения и поглощения фотонов. Это квантование иногда называется теорией вторичного квантования, так как под первым квантованием (или просто квантованием) понимают переход от классической механики (элек-

\*) Равенство (12.67), по существу, представляет собою условие нормировки. Как известно, условие нормировки в квантовой механике для заряженных частиц, например для электрона, заключается в том, что величину

$$\int \psi^* \psi d^3x = N$$

мы приравниваем числу электронов, точнее, его заряду. Из компонент электромагнитного поля никакой плотности числа частиц мы образовать не можем, поэтому нормировку мы производим, воспользовавшись зависимостью энергии от числа частиц (см. (12.66)).

трон — частица) к квантовой (электрон — волна). При вторичном квантовании квантуется волновое уравнение, позволяющее, наряду с волновыми свойствами, описывать также и корпускулярную структуру.

Процесс вторичного квантования, так же как и процесс первого квантования, производится с помощью квантовых скобок Пуассона\*), описывающих изменение амплитуд поля (см. [3], а также [1]):

$$-ic\kappa q_l = \frac{i}{\hbar}(Hq_l - q_l H), \quad ic\kappa q_l^+ = \frac{i}{\hbar}(Hq_l^+ - q_l^+ H). \quad (12.69)$$

Подставляя в (12.69) значение гамильтониана из (12.68), который мы представим в виде

$$H = \sum_{\kappa'} c\hbar\kappa' \sum_{l', -l'} q_{l'}^+ q_{l'}, \quad (12.70)$$

получаем

$$-ic\kappa q_l = \sum_{\kappa'} ic\kappa' \sum_{l'} [q_{l'}^+ (q_{l'}' q_l - q_l q_{l'}') - (q_l q_{l'}^+ - q_{l'}^+ q_l) q_{l'}']. \quad (12.71)$$

Для того чтобы из (12.71) получить (12.69), мы должны считать амплитуды  $q_l$  и  $q_l^+$  операторами.

Законы коммутации определяются соотношением\*\*)

$$q_l q_{l'}^+ - q_{l'}^+ q_l = \delta_{ll'} \delta_{\kappa\kappa'}. \quad (12.72)$$

Аналогично находим

$$q_l q_{l'}' - q_{l'}' q_l = 0, \quad q_l^+ q_{l'}^+ - q_{l'}^+ q_l^+ = 0.$$

\*) Как известно, первое квантование мы можем произвести при помощи соотношений

$$-i\omega_{nn'} x_{n'n} = \frac{i}{\hbar}(Hx - xH)_{n'n}, \quad i\omega_{nn'} x_{n'n}^* = \frac{i}{\hbar}(Hx - xH)_{n'n}.$$

\*\*) Заметим, что, наряду с решением (12.72), гамильтониан (12.70) допускает второе решение:

$$q_l q_{l'}^+ + q_{l'}^+ q_l = \delta_{ll'} \delta_{\kappa\kappa'}. \quad (12.72a)$$

Более точно нам необходимо было учесть равенство (12.51a). Тогда гамильтониан (12.70) должен иметь вид

$$H = \sum_{\kappa'} c\hbar\kappa' \frac{1}{2} \sum_{l'} (q_l^+ q_{l'}' + q_{l'}' q_l^+). \quad (12.70a)$$

Гамильтониан (12.70a) допускает только решения (12.72), соответствующие статистике Бозе — Эйнштейна (бозоны).

Решения (12.72a), соответствующие статистике Ферми — Дирака (фермионы), мы получили бы, когда гамильтониан был бы равен

$$H = \sum_{\kappa'} c\hbar\kappa' \frac{1}{2} \sum_{l'} (q_{l'}^+ q_{l'}' - q_{l'}' q_{l'}^+). \quad (12.70б)$$

Таким образом, для фотонов имеют место только перестановочные соотношения (12.72).

Из равенства (12.72) следует, что единственными некоммутирующими будут две комплексно-сопряженные амплитуды, соответствующие одному и тому же импульсу и поляризации\*)

$$q_l q_l^+ - q_l^+ q_l = 1, \quad (12.73)$$

т. е. эти амплитуды не могут быть обычными  $c$ -числами (величины, коммутирующие друг с другом), а должны быть некоммутирующими  $q$ -числами (операторами).

Из (12.73) мы легко можем найти перестановочные соотношения для компонент амплитуд  $a_n$  электромагнитного поля. Обозначая через  $s$  и  $s'$  единичные векторы двух каких-либо осей прямоугольных координат и принимая во внимание условие ортонормированности между этими единичными векторами:

$$(s\beta_2)(s'\beta_2) + (s\beta_3)(s'\beta_3) + (s\kappa^0)(s'\kappa^0) = (ss') = \delta_{ss'},$$

мы с помощью формул (12.59) и (12.60) найдем следующие правила коммутации для амплитуд вектор-потенциала:

$$a_s a_{s'}^+ - a_{s'}^+ a_s = \delta_{ss'} - \kappa_s^0 \kappa_{s'}^0. \quad (12.74)$$

Если амплитуды  $a_s$  и  $a_{s'}^+$  принадлежат к различным импульсам, будем иметь \*\*)

$$a_s a_{s'}^+ - a_{s'}^+ a_s = (\delta_{ss'} - \kappa_s^0 \kappa_{s'}^0) \delta_{ss'}. \quad (12.75)$$

Мы сможем удовлетворить равенству (12.73), если положим эти амплитуды равными эрмитово-сопряженным бесконечным матрицам [2]

$$q = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{1} & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{4} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}, \quad q^+ = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \sqrt{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{4} & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}. \quad (12.76)$$

\*) Ради простоты рассуждений индекс  $l = \pm 1$  мы опускаем. Тогда равенство (12.73) принимает вид:

$$qq^+ - q^+q = 1. \quad (12.73a)$$

Индекс  $l$  будет введен в окончательные результаты (см. (12.81)).

\*\*) Заметим, что множитель  $\delta_{ss'} - \kappa_s^0 \kappa_{s'}^0$  описывает условие поперечности волн, так как он ортогонален вектору  $\kappa^0$ .

Из соотношений (12.76) следует

$$qq^+ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}, \quad q^+q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 2 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 3 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix},$$

или

$$qq^+ - q^+q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix},$$

т. е. при этом выборе матриц для амплитуд  $q$  и  $q^+$  мы получаем закон коммутативности (12.73).

Квантование электромагнитного поля (называемое, как мы указали, вторичным) позволяет описать квантовую систему с переменным числом фотонов.

Для того чтобы удовлетворить установленным правилам коммутации, мы должны ввести функцию от числа фотонов в виде

$$f(N, N', N'', \dots) = f(N)f(N')f(N'') \dots$$

и считать, что операторы  $q$  и  $q^+$  действуют только на функцию  $f(N)$ , где  $N$  — число частиц с импульсом  $\mathbf{k}$  и поляризацией  $l$  ( $l = \pm 1$ ).

При выборе амплитуд  $q$  и  $q^+$  в виде матриц (12.76) функцию от числа частиц  $f(N)$  мы также должны выбрать в виде бесконечных матриц:

$$f(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \dots \end{pmatrix}, \quad f(1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ \dots \end{pmatrix}, \quad f(2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ \dots \end{pmatrix}, \quad (12.77)$$

где  $f(0)$  описывает состояние, когда фотоны с импульсом  $\mathbf{k}$  и поляризацией  $l$  отсутствуют,  $f(1)$  — когда в этом состоянии имеется один фотон,  $f(2)$  — два фотона, и т. д. Тогда, учитывая (12.77) и (12.76), мы легко можем показать, что

$$qf(0) = 0, \quad qf(1) = f(0), \quad qf(2) = \sqrt{2} f(1),$$

или

$$qf(N) = \sqrt{N} f(N - 1). \quad (12.78)$$



Точно так же для действия сопряженных амплитуд находим (см. [4, 5], а также [6, 7])

$$q^+f(0) = f(1), \quad q^+f(1) = \sqrt{2} f(2),$$

или

$$q^+f(N) = \sqrt{N+1} f(N+1), \quad (12.79)$$

т. е. оператор  $q$  является оператором поглощения ( $N \rightarrow N-1$ ), а  $q^+$  — оператором испускания ( $N \rightarrow N+1$ ).

Из равенств (12.78) и (12.79) следует, что

$$q^+qf(N) = Nf(N), \quad qq^+f(N) = (1+N)f(N),$$

т. е. произведения двух сопряженных операторов имеют собственные значения:

$$q^+q = N, \quad qq^+ = 1 + N, \quad (12.80)$$

где  $N$  — число частиц в начальном состоянии.

Как видно из формул (12.77), в каждом состоянии может находиться любое число частиц. Иными словами, перестановочные соотношения (12.62) ведут к статистике Бозе — Эйнштейна.

При наличии фотонов для двух квадратичных комбинаций амплитуд  $a_s$  и  $a_s^+$  вектор-потенциала будем иметь \*)

$$\begin{aligned} a_s^+ a_s &= \frac{1}{2} (\delta_{ss'} - \kappa_s^0 \kappa_{s'}^0) (N_1 + N_{-1}), \\ a_s a_s^+ &= \frac{1}{2} (\delta_{ss'} - \kappa_s^0 \kappa_{s'}^0) (2 + N_1 + N_{-1}), \end{aligned} \quad (12.81)$$

из которых следует соотношение (12.74). Здесь число частиц  $N_1$  и  $N_{-1}$  зависит от импульса  $\kappa$ .

Подставляя соотношения (12.80) в формулы (12.68) и учитывая, что вместо произведения  $q_l^+ q_l$  мы должны подставить значения (см. (12.51a))

$$q_l^+ q_l \rightarrow \frac{1}{2} (q_l^+ q_l + q_l q_l^+), \quad (12.82)$$

найдем

$$H = \sum_{\kappa} c \hbar \kappa (N_1 + N_{-1} + 1), \quad S = \sum_{\kappa} \hbar \kappa^0 (N_1 - N_{-1}), \quad (12.83)$$

т. е. частицы  $N_1$  и  $N_{-1}$  обладают импульсом  $\hbar \kappa$  и различным спином. Спин частиц  $N_1$  ( $l = 1$ ) направлен по импульсу, а спин частиц  $N_{-1}$  ( $l = -1$ ) — против импульса. Как видно из фор-

\*) Если  $a_s^+$ ,  $a_s$  относятся к различным импульсам, то правую часть формулы (12.82) следует умножить еще на множитель  $\delta_{\kappa \kappa'}$ . Начиная с формулы (12.81), мы восстанавливаем индекс  $l = \pm 1$ , характеризующий круговую поляризацию.

мулы (12.82), по абсолютному значению спин в единицах  $\hbar$  равен единице \*).

Заметим, что энергия поля даже в случае отсутствия частиц ( $N_1 = N_{-1} = 0$ ) в нуль не обращается, а стремится к так называемой нулевой энергии

$$H_0 = 2 \sum_{\mathbf{k}} c \hbar \omega_{\mathbf{k}} \frac{1}{2}. \quad (12.84)$$

Математически она обязана сумме нулевых энергий бесконечного числа осцилляторов, образующих поле фотонов. Физически она соответствует наличию электромагнитного вакуума, представляющего собою своеобразный резервуар так называемых виртуальных фотонов.

**е) Квантование электромагнитного поля в общем случае.** Если мы хотим исследовать поведение реальных фотонов, то мы можем ограничиться только поперечными составляющими, выделение которых с первого взгляда не носит релятивистски-инвариантного характера. Тем не менее все результаты являются релятивистски-инвариантными, так как в любой инерциальной системе координат с помощью калибровочных преобразований мы можем избавиться от продольных составляющих.

Если, кроме реальных фотонов, нас будут интересовать процессы, связанные с взаимодействием электронов, то они могут быть описаны только с учетом продольных составляющих. В этом случае компоненты четырехмерного вектор-потенциала будут отличаться от компонент потенциала, описывающих лишь поперечные составляющие, и поэтому мы введем для них несколько другие обозначения:

$$\Phi_n = \Phi, \quad \Phi_4 = i' \Phi_0.$$

Если выбрать лагранжиан в виде

$$L = - \frac{1}{8\pi} H_{\mu\nu} H_{\mu\nu}, \quad (12.85)$$

где

$$H_{\mu\nu} = \Phi_{\nu, \mu} - \Phi_{\mu, \nu}, \quad \Phi_{\nu, \mu} = \partial \Phi_{\nu} / \partial x_{\mu}, \quad (12.86)$$

то для потенциалов получается уравнение

$$\square \Phi_{\mu} - \Phi_{\nu, \nu\mu} = 0.$$

Мы проквантовали уравнение электромагнитного поля с помощью двух дополнительных условий: условия Лоренца  $\Phi_{\nu, \nu} = 0$  и условия отсутствия продольной составляющей  $\Phi_4 = 0$  (см. (12.22) и (12.26)). Оказывается, что квантование уравнения

\*) Как известно, частицы с целым спином (например фотоны) подчиняются статистике Бозе — Эйнштейна, а с полуцелым (например электроны) — статистике Ферми — Дирака (см. ниже).

электромагнитного поля при наличии лишь одного классического условия Лоренца (12.22) становится невозможным. Поэтому Фок и Подольский (см. [8]) предложили при квантовании электромагнитного поля в общем случае выбрать лагранжиан в следующем виде:

$$L = -\frac{1}{8\pi} H_{\mu\nu} H_{\mu\nu} - \frac{1}{8\pi} (\Phi_{\mu,\mu})^2; \quad (12.87)$$

при этом уравнение движения

$$\frac{\partial L}{\partial \Phi_{\mu}} - \frac{\partial}{\partial x_{\nu}} \frac{\partial L}{\partial \Phi_{\mu,\nu}} = 0 \quad (12.88)$$

приводит непосредственно к уравнению Даламбера

$$\square \Phi_{\mu} = 0 \quad (12.89)$$

для всех четырех составляющих потенциала, не связанных между собой уже условием Лоренца.

Соотношение (12.89) легко проверить, если принять во внимание, что

$$\frac{\partial L}{\partial \Phi_{\mu}} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial \Phi_{\mu,\nu}} = \frac{1}{4\pi} H_{\mu\nu} - \frac{1}{4\pi} \delta_{\mu\nu} \Phi_{\lambda,\lambda}. \quad (12.90)$$

В этом случае электромагнитные поля подчиняются более общим уравнениям, чем уравнения Максвелла:

$$\frac{1}{4\pi} \frac{\partial H_{\mu\nu}}{\partial x_{\nu}} - \frac{1}{4\pi} \Phi_{\nu,\nu\mu} = 0. \quad (12.91)$$

Отсюда, принимая во внимание соотношение (12.86), получаем дифференциальное уравнение (12.89).

Подставляя (12.90) в уравнение

$$T_{\mu\nu} = \frac{\partial L}{\partial \Phi_{\lambda,\nu}} \Phi_{\lambda,\mu} - L \delta_{\mu\nu}, \quad (12.92)$$

находим следующее выражение для компонент канонического тензора энергии:

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi} \Phi_{\lambda,\mu} H_{\lambda\nu} - \frac{1}{4\pi} \Phi_{\nu,\mu} \Phi_{\lambda,\lambda} - \delta_{\mu\nu} L. \quad (12.93)$$

Из (12.83) для плотности энергии получаем

$$T_{44} = \frac{1}{8\pi} \left[ (\text{rot } \Phi)^2 + (\text{div } \Phi)^2 + \frac{1}{c^2} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right)^2 - (\text{grad } \Phi_0)^2 - \frac{1}{c^2} \left( \frac{\partial \Phi_0}{\partial t} \right)^2 \right]. \quad (12.94)$$

Из уравнения Даламбера (12.89) находим следующие значения для потенциалов:

$$\Phi = \frac{1}{L^{3/2}} \sum_{\mathbf{x}} \sqrt{\frac{2\pi c \hbar}{\kappa}} (f e^{-i\kappa t + i\mathbf{x}r} + f e^{i\kappa t - i\mathbf{x}r}),$$

$$\Phi_0 = \frac{1}{L^{3/2}} \sum_{\mathbf{x}} \sqrt{\frac{2\pi c \hbar}{\kappa}} (f_0 e^{-i\kappa t + i\mathbf{x}r} + f_0 e^{i\kappa t - i\mathbf{x}r}). \quad (12.95)$$

Подставляя эти выражения в (12.94) и интегрируя по всему пространству, находим

$$H = \int T_{44} d^3x = \sum_{\mathbf{x}} c \hbar \kappa (f^+ f - f_0^+ f_0). \quad (12.96)$$

Здесь мы воспользовались соотношением (12.51а), поскольку нас не интересует нулевая энергия.

С помощью квантовых уравнений движения (12.69) находим следующие отличные от нуля перестановочные соотношения:

$$f_s f_s^+ - f_s^+ f_s = 1, \quad (12.97)$$

где  $s = 1, 2, 3$  (суммирования по  $s$  нет),

$$f_0 f_0^+ - f_0^+ f_0 = -1, \quad (12.98)$$

т. е. для амплитуд скалярного потенциала мы получаем перестановочные соотношения с обратным знаком (отрицательная энергия). Поэтому, чтобы удовлетворить перестановочным соотношениям (12.97) и (12.98), мы должны положить

$$f_s^+ f_s = N_s, \quad f_s f_s^+ = 1 + N_s, \quad (12.99)$$

где  $N_s$  — число частиц в заданном квантовом состоянии. Для  $f_0$  и  $f_0^+$  из этих равенств следует

$$f_0^+ f_0 = -N_0, \quad f_0 f_0^+ = -1 - N_0. \quad (12.100)$$

Подставляя соотношения (12.99) в (12.96), имеем

$$H = \sum_{\mathbf{x}} c \hbar \kappa (N_1 + N_2 + N_3 - N_0). \quad (12.101)$$

Отсюда следует, что скалярное электромагнитное поле обладает лишь состояниями с отрицательной энергией и поэтому частицы  $N_0$  в виде реальных квантов существовать не могут. Частицы, сопоставленные 4-й составляющей электромагнитного поля, получили название «псевдофотоны». Они могут проявляться только при наличии зарядов, обуславливая взаимодействие между ними.

Компоненты электромагнитного поля могут быть разбиты на поперечные составляющие (число независимых компонент равно двум):

$$q_s = f_s - \kappa_s^0(f\kappa^0), \quad (12.102)$$

связанные между собою соотношением поперечности:

$$q_s \kappa_s^0 = 0,$$

и на две продольные  $f_0$  и  $q_0$ .

В трехмерном пространстве первая продольная составляющая  $f_0$  описывает амплитуду скалярного потенциала, связанного с четвертой составляющей  $f_4$  четырехмерного потенциала равенством  $f_4 = i'f_0$ .

Вторая продольная составляющая в трехмерном пространстве представляет собою проекцию вектор-потенциала на направление волнового вектора  $\kappa^0$ :

$$q_0 = (\kappa^0 f). \quad (12.103)$$

С помощью формул (12.97) и (12.102) находим следующие перестановочные соотношения для амплитуд поперечных составляющих:

$$q_s q_{s'}^+ - q_{s'}^+ q_s = \delta_{ss'} - \kappa_s^0 \kappa_{s'}^0, \quad (12.104)$$

которые, как и следовало ожидать, совпадают с перестановочными соотношениями, найденными для компонент поля фотонов.

Первая продольная составляющая (скалярный потенциал) удовлетворяет перестановочному соотношению (12.98), а для второй продольной составляющей с помощью (12.97) находим

$$q_0 q_0^+ - q_0^+ q_0 = 1. \quad (12.105)$$

При наличии зарядов продольные составляющие также могут быть исключены, как и при их отсутствии. Исключение продольных составляющих приведет к кулоновскому взаимодействию между ними (см. [1]).

В заключение найдем перестановочные соотношения для квантованных потенциалов электромагнитного поля

$$\Phi_\mu(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{L^{3/2}} \sum_{\mathbf{x}} (f_\mu e^{-i\mathbf{x}\mathbf{r} + i\mathbf{x}t} + f_\mu^+ e^{i\mathbf{x}\mathbf{r} - i\mathbf{x}t}). \quad (12.106)$$

Учитывая перестановочные соотношения для амплитуд

$$f_\mu f_\mu'^+ - f_\mu'^+ f_\mu = \delta_{\mu\mu'} \delta_{\mathbf{x}\mathbf{x}'}, \quad (12.107)$$

найдем перестановочные (четырёхмерные) соотношения для

квантованных потенциалов:

$$\begin{aligned} \Phi_{\mu}(\mathbf{r}, t)\Phi_{\mu'}(\mathbf{r}', t') - \Phi_{\mu'}(\mathbf{r}', t')\Phi_{\mu}(\mathbf{r}, t) = \\ = \frac{4\pi c\hbar}{i} \delta_{\mu\mu'} D(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t'), \end{aligned} \quad (12.108)$$

причем перестановочная  $D$ -функция задается формулой

$$D(\mathbf{R}, T) = \frac{1}{8\pi^3} \int e^{i\mathbf{x}\cdot\mathbf{R}} \frac{\sin c\mathbf{x}T}{x} d^3x. \quad (12.109)$$

### § 13. СКАЛЯРНОЕ РЕЛЯТИВИСТСКОЕ ВОЛНОВОЕ УРАВНЕНИЕ КЛЕЙНА — ГОРДОНА

а) Вывод уравнения. Как известно, уравнение Шредингера

$$\left\{ i\hbar \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\hbar^2}{2m_0} \nabla^2 - V(\mathbf{r}) \right\} \psi(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (13.1)$$

применимо лишь для описания движения частиц, скорость которых значительно меньше скорости света ( $v \ll c$ ). Уравнение Шредингера (13.1) соответствует нерелятивистской связи между энергией  $E$  и импульсом  $\mathbf{p}$  частицы, обладающей массой покоя:

$$E = \frac{p^2}{2m_0} + V(\mathbf{r}). \quad (13.2)$$

Подставляя в (13.2) вместо классических величин операторы

$$E \rightarrow \hat{E} = i\hbar \frac{\partial}{\partial t}, \quad \mathbf{p} \rightarrow \hat{\mathbf{p}} = -i\hbar \nabla \quad (13.3)$$

и действуя ими на волновую функцию  $\psi(\mathbf{r}, t)$ , получаем уравнение Шредингера (13.1). Это уравнение инвариантно относительно преобразований Лоренца. Действительно, уравнение Шредингера содержит первую производную по времени и вторые производные по координатам, в то время как специальная теория относительности требует такой записи уравнения, чтобы пространственные и временные координаты входили равноправно.

Один из возможных путей обобщения нерелятивистского волнового уравнения на релятивистский случай был предложен Клейном — Гордоном [9] и Фоком [10] в 1926 г. (см. также [11]).

Наиболее простой способ получения волнового уравнения для релятивистской свободной частицы сводится к следующему. Воспользуемся классическим релятивистским соотношением между энергией и импульсом частицы

$$E^2 - c^2 p^2 - m_0^2 c^4 = 0 \quad (13.4)$$

и произведем в этом выражении замену классических величин операторами (13.3), действующими на волновую функцию  $\psi(\mathbf{r}, t)$ .

Тогда получаем уравнение Клейна — Гордона

$$(E^2 - c^2 p^2 - m_0^2 c^4) \psi(\mathbf{r}, t) = 0, \quad (13.5)$$

которое является релятивистски-инвариантным.

Релятивистская инвариантность уравнения (13.5) становится более наглядной, если ввести четырехмерные импульсы и координаты

$$p_\mu = \left\{ \mathbf{p}, i' \frac{E}{c} \right\}, \quad x_\mu = \{ \mathbf{r}, i' ct \}. \quad (13.6)$$

Тогда уравнение Клейна — Гордона (13.5) можно записать в виде

$$\{ p_\mu p_\mu + m_0^2 c^2 \} \psi(\mathbf{r}, t) = 0. \quad (13.7)$$

Заменяя, кроме того, массу покоя  $m_0$  величиной  $\hbar k_0/c$  и производя сокращение на  $\hbar^2 c^2$ , окончательно получаем

$$\left( \nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - k_0^2 \right) \psi = \left( \frac{\partial}{\partial x_\mu} \frac{\partial}{\partial x_\mu} - k_0^2 \right) \psi = 0 \quad (13.8)$$

(по индексу  $\mu$ , входящему дважды, необходимо произвести суммирование от 1 до 4).

Точно так же для сопряженного уравнения

$$\left( \frac{\partial}{\partial x_\mu} \frac{\partial}{\partial x_\mu} - k_0^2 \right) \psi^* = 0. \quad (13.9)$$

**б) Трансформационные свойства волновой функции.** Рассмотрим трансформационные свойства волновой функции при преобразованиях Лоренца и пространственных вращениях. Согласно общим принципам специальной теории относительности физические законы не должны зависеть от выбора лоренцевой системы координат. Поэтому уравнение Клейна — Гордона должно оставаться инвариантным относительно преобразований Лоренца.

Рассмотрим ортогональные преобразования координат:

$$x'_\mu = a_{\mu\nu} x_\nu, \quad a_{\mu\nu} a_{\mu\lambda} = \delta_{\nu\lambda}. \quad (13.10)$$

Эти преобразования не изменяют квадрата длины четырехмерного вектора и при надлежащем выборе коэффициентов  $a_{\mu\nu}$  соответствуют вращению в трехмерном пространстве, а также собственным преобразованиям Лоренца.

Производя переход к новым переменным в уравнении Клейна — Гордона (13.9), замечаем, что в силу неизменности квадрата длины четырехмерного вектора

$$x'_\mu x'_\mu = a_{\mu\nu} a_{\mu\lambda} x_\nu x_\lambda = \delta_{\nu\lambda} x_\nu x_\lambda = x_\nu x_\nu \quad (13.11)$$

волновая функция преобразованного уравнения  $\psi'$  может

отличаться от исходной  $\psi$  только постоянным множителем:

$$\psi' = \lambda\psi, \quad (13.12)$$

равным по абсолютной величине единице ( $|\lambda| = 1$ ). Таким образом, волновая функция уравнения Клейна—Гордона преобразуется как скаляр\*).

Заметим, что трансформационные свойства волновой функции при ортогональных преобразованиях (13.10) тесно связаны со спином частиц. В частности, ранг тензора преобразования волновой функции численно равен спину частицы, выраженному в единицах постоянной Планка  $\hbar$ . В соответствии с этим скалярные (и псевдоскалярные) волновые функции должны описывать частицы со спином, равным нулю.

Таким образом, уравнения Клейна—Гордона описывают бесспиновые частицы, к числу которых относятся, например,  $\pi$ -мезоны [11], которые могут быть как заряженными (волновая функция — комплексная), так и нейтральными (волновая функция — вещественная).

**в) Плотность заряда и тока.** Выражения для плотности заряда и тока можно найти, полагая, что эти величины удовлетворяют уравнению непрерывности

$$\operatorname{div} c\mathbf{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0. \quad (13.13)$$

Умножая уравнение (13.8) слева на  $\psi^*$ , а комплексно-сопряженное (13.9) — на  $\psi$  и производя вычитание одного из другого, получаем

$$\psi^* \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \psi^* - \frac{1}{c^2} \left( \psi^* \frac{\partial^2}{\partial t^2} \psi - \psi \frac{\partial^2}{\partial t^2} \psi^* \right) = 0. \quad (13.14)$$

Это равенство можно преобразовать к виду

$$\operatorname{div} \{ (\operatorname{grad} \psi^*) \psi - \psi^* \operatorname{grad} \psi \} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \psi^* \frac{\partial}{\partial t} \psi - \left( \frac{\partial}{\partial t} \psi^* \right) \psi \right\} = 0. \quad (13.15)$$

Полагая плотность заряда и плотность тока соответственно равными

$$\rho = \frac{ie\hbar}{2m_0c^2} \left[ \psi^* \left( \frac{\partial}{\partial t} \psi \right) - \left( \frac{\partial}{\partial t} \psi^* \right) \psi \right], \quad (13.16)$$

$$\mathbf{j} = \frac{e\hbar}{2m_0ci} \left[ \psi^* (\nabla \psi) - (\nabla \psi^*) \psi \right] \quad (13.17)$$

\*) Поскольку рассматриваемые преобразования непрерывны, величина  $\lambda$  просто равна единице  $\lambda = 1$ . Если рассмотреть еще и дискретные преобразования (инверсию координат), то при этом следует иметь в виду возможность изменения знака волновой функции ( $\lambda = -1$ ). Величина, меняющая знак при инверсии пространства, называется псевдоскаляром.



и учитывая (13.15), удовлетворим уравнению непрерывности (13.13).

Заметим, что плотность заряда и плотность тока образуют четырехмерный вектор:

$$j_\mu = \{\mathbf{j}, i'\rho\}, \quad j_\mu = \frac{e\hbar}{2m_0ci} \left[ \Psi^* \left( \frac{\partial}{\partial x_\mu} \Psi \right) - \left( \frac{\partial}{\partial x_\mu} \Psi^* \right) \Psi \right]. \quad (13.18)$$

Постоянные, входящие в плотность и ток, выбраны так, чтобы  $\rho$  и  $\mathbf{j}$  в нерелятивистском пределе переходили в обычные выражения теории Шредингера. Действительно, воспользуемся заменой  $i\hbar \partial/\partial t \rightarrow E$  (см. (13.3)), тогда из формулы (13.13) получим

$$\rho = e \frac{E}{m_0c^2} \Psi^* \Psi, \quad (13.19)$$

которое в нерелятивистском приближении ( $v \ll c$ ,  $E \sim m_0c^2$ ) переходит в шредингеровское значение для  $\rho = e\psi^*\psi$ .

Существенно заметить, что введение плотности заряда

$$\rho = \frac{i\hbar e}{2m_0c^2} \left[ \Psi^* \left( \frac{\partial}{\partial t} \Psi \right) - \left( \frac{\partial}{\partial t} \Psi^* \right) \Psi \right] \quad (13.20)$$

можно положить в основу нормировки волновой функции:

$$\int \rho d^3x = Q = \text{const}. \quad (13.21)$$

**г) Уравнение Клейна—Гордона для частицы в электромагнитном поле.** Чтобы ввести в рассмотрение взаимодействие частицы с электромагнитным полем, заданным, как обычно, векторным  $\mathbf{A}$  и скалярным  $\Phi$  потенциалами, можно исходить из классической функции Гамильтона

$$H = \sqrt{c^2 \left( \mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2 + m_0^2 c^4} + e\Phi. \quad (13.22)$$

После переноса  $e\Phi$  в левую часть и возведения обеих частей равенства в квадрат, нужно сделать замену классических величин соответствующими операторами, действующими на волновую функцию. Тогда приходим к уравнению Клейна—Гордона для частицы в электромагнитном поле:

$$\left\{ \left( -\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial t} - e\Phi \right)^2 - c^2 \left( \frac{\hbar}{i} \nabla - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2 - m_0^2 c^4 \right\} \psi(\mathbf{r}, t) = 0, \quad (13.23)$$

которое может быть также получено из уравнения для свободной частицы (13.6) введением обобщенных операторов

$$P_\mu = p_\mu - \frac{e}{c} A_\mu, \quad A_\mu = \{\mathbf{A}, i'\Phi\}, \quad (13.24)$$

или, в обычной записи,

$$\mathbf{P} = \mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A}, \quad P_4 = \frac{(E - e\Phi) i'}{c}. \quad (13.25)$$

Повторяя расчет для плотности тока и заряда, приведший нас к формуле (13.18), получаем выражение для четырехмерной плотности в виде

$$j_{\mu} = \frac{e\hbar}{2m_0ci} \left\{ \psi^* \left( \frac{\partial}{\partial x_{\mu}} \psi \right) - \left( \frac{\partial}{\partial x_{\mu}} \psi^* \right) \psi - \frac{2ie}{\hbar c} \psi^* \psi A_{\mu} \right\}, \quad (13.26)$$

или, в обычных обозначениях,

$$\mathbf{j} = \frac{e\hbar}{2m_0ci} \{ \psi^* (\nabla \psi) - (\nabla \psi^*) \psi \} - \frac{e^2}{m_0c} \psi^* \psi \mathbf{A}, \quad (13.27)$$

$$\rho = \frac{ie\hbar}{2m_0c^2} \left\{ \psi^* \left( \frac{\partial}{\partial t} \psi \right) - \left( \frac{\partial}{\partial t} \psi^* \right) \psi \right\} - \frac{e^2}{m_0c^2} \psi^* \psi \Phi. \quad (13.28)$$

При изучении стационарных состояний частицы в электромагнитном поле потенциалы  $A_{\mu}$  не зависят от времени явно. В этом случае следует положить

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \psi(\mathbf{r}) e^{-\frac{iE}{\hbar} t}, \quad (13.29)$$

поскольку уравнение (13.23) допускает разделение переменных пространства и времени. Тогда для функций  $\psi(\mathbf{r}) = \psi$  мы получаем уравнение стационарных состояний:

$$\left\{ (E - e\Phi)^2 - c^2 \left( \frac{\hbar}{i} \nabla - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2 - m_0^2 c^4 \right\} \psi = 0. \quad (13.30)$$

Заметим, что плотность заряда в стационарных состояниях принимает вид

$$\rho = \frac{e(E - e\Phi)}{m_0c^2} \psi^* \psi. \quad (13.31)$$

**д) Вариационные методы.** Лагранжиан комплексного скалярного поля \*)

$$L = -\frac{\hbar c}{2k_0} (\psi_v^* \psi_v + k_0^2 \psi^* \psi), \quad (13.32)$$

где

$$\psi_v = \frac{\partial \psi}{\partial x_v}, \quad (13.33)$$

выбран таким образом, чтобы вариационная производная от него приводила бы к уравнениям (13.8) и (13.9). В самом деле, варьируя лагранжиан (13.32) по  $\psi^*$ , получим уравнение (13.8):

$$\frac{\delta L}{\delta \psi^*} = \frac{\partial L}{\partial \psi^*} - \frac{\partial}{\partial x_v} \frac{\partial L}{\partial \psi_v^*} = 0. \quad (13.34)$$

Отсюда следует, что

$$\frac{\hbar c}{2k_0} (\psi_{vv} - k_0^2 \psi) = 0. \quad (13.35)$$

\*) Нормировочный коэффициент выбран таким образом, чтобы для тока получилось бы выражение (13.26).

Точно так же вариация по  $\psi$  приведет к комплексно-сопряженному уравнению (13.9).

В случае наличия электромагнитных полей мы должны, как обычно, вместо импульса  $P_\mu = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x_\mu}$  написать обобщенный импульс:

$$P_\mu \rightarrow P_\mu = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x_\mu} - \frac{e}{c} A_\mu = \frac{\hbar}{i} \left( \frac{\partial}{\partial x_\mu} - \frac{ie}{c\hbar} A_\mu \right). \quad (13.36)$$

Тогда лагранжиан (13.32) принимает вид

$$L = -\frac{\hbar c}{2k_0} \left[ \left( \frac{\partial}{\partial x_\mu} + \frac{ieA_\mu}{c\hbar} \right) \psi^* \left( \frac{\partial}{\partial x_\mu} - \frac{ieA_\mu}{c\hbar} \right) \psi + k_0^2 \psi^* \psi \right]. \quad (13.37)$$

Варьируя лагранжиан (13.37) по  $\psi^*$  (см. равенство (13.34)), получим уравнение Клейна — Гордона при наличии поля

$$\left( \frac{\partial}{\partial x_\mu} - \frac{ieA_\mu}{c\hbar} \right)^2 \psi - k_0^2 \psi = 0. \quad (13.38)$$

Взяв от лагранжиана (13.37) вариации по составляющим вектора потенциала, найдем выражения для тока

$$\begin{aligned} j_\mu &= \frac{\delta L}{\delta A_\mu} = \frac{\partial L}{\partial A_\mu} = \\ &= \frac{e\hbar}{2m_0 c i} \left[ \left( \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial x_\mu} - \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial x_\mu} \right) - \frac{2ie}{\hbar c} A_\mu \psi^* \psi \right] \end{aligned} \quad (13.39)$$

с тем же нормировочным коэффициентом, что и в формуле (13.26).

Так же как и в случае электромагнитного поля (см. (12.5)), мы можем получить канонический тензор энергии:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x_\mu} &= \frac{\partial L}{\partial \psi} \psi_\mu + \frac{\partial L}{\partial \psi^*} \psi_\mu^* + \frac{\partial L}{\partial \psi_\nu} \psi_{\nu\mu} + \frac{\partial L}{\partial \psi_\nu^*} \psi_{\nu\mu}^* = \\ &= \psi_\mu \left( \frac{\partial L}{\partial \psi} - \frac{\partial}{\partial x_\nu} \frac{\partial L}{\partial \psi_\nu} \right) + \psi_\mu^* \left( \frac{\partial L}{\partial \psi^*} - \frac{\partial}{\partial x_\nu} \frac{\partial L}{\partial \psi_\nu^*} \right) + \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial x_\nu} \left( \psi_\mu \frac{\partial L}{\partial x_\nu} + \psi_\mu^* \frac{\partial L}{\partial \psi_\nu^*} \right). \end{aligned} \quad (13.40)$$

Отсюда, принимая во внимание соотношение (13.34), найдем значение для компонент канонического тензора энергии:

$$T_{\mu\nu} = \frac{\partial L}{\partial \psi_\nu} \psi_\mu + \psi_\mu^* \frac{\partial L}{\partial \psi_\nu^*} - \delta_{\mu\nu} L, \quad (13.41)$$

который удовлетворяет согласно (13.40) закону сохранения:

$$\frac{\partial T_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = 0. \quad (13.42)$$

Учитывая, что для скалярного поля лагранжиан имеет вид (13.32), для компонент тензора энергии имеем выражение

$$T_{\mu\nu} = -\frac{\hbar c}{2k_0} [\psi_\nu^* \psi_\mu + \psi_\mu^* \psi_\nu - \delta_{\mu\nu} (\psi_\lambda^* \psi_\lambda + k_0^2 \psi^* \psi)]. \quad (13.43)$$

Отсюда видно, что в противоположность электромагнитному полю тензор энергии скалярного поля является симметричным:

$$T_{\mu\nu} = T_{\nu\mu}, \quad (13.44)$$

т. е. метрический тензор должен равняться каноническому. Поэтому спин сопоставленных скалярному полю частиц должен равняться нулю (напомним, что асимметрия канонического тензора энергии электромагнитного поля привела к тому, что спин фотонов согласно (12.68) оказался равным единице).

Для полной энергии и трехмерного импульса мы находим соответственно выражения

$$H = \int T_{44} d^3x = \text{const}, \quad G_n = \frac{i'}{c} \int T_{n4} d^3x = \text{const}, \quad (13.45)$$

причем согласно (13.43)

$$\begin{aligned} T_{44} &= \frac{\hbar c}{2k_0} (\nabla\psi^* \nabla\psi) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial\psi^*}{\partial t} \frac{\partial\psi}{\partial t} + k_0^2 \psi^* \psi, \\ \frac{i'}{c} T_{4n} &= -\frac{\hbar}{2k_0 c} \left( \frac{\partial\psi^*}{\partial t} \frac{\partial\psi}{\partial x_n} + \frac{\partial\psi^*}{\partial x_n} \frac{\partial\psi}{\partial t} \right). \end{aligned} \quad (13.46)$$

Из законов сохранения (13.42) следует, что  $H$  и  $G_n$  (см. (13.45)) остаются величинами постоянными.

Кроме сохранения полной энергии и импульса, согласно уравнению непрерывности (13.13) должен сохраняться также полный заряд:

$$Q = \int \rho d^3x = \text{const}, \quad (13.47)$$

где в случае свободного поля плотность  $\rho$  может быть представлена в виде

$$\rho = \frac{ie}{2k_0 c} \left( \psi^* \frac{\partial\psi}{\partial t} - \frac{\partial\psi^*}{\partial t} \psi \right). \quad (13.48)$$

**е) Свободное движение.** Найдем решение скалярного волнового уравнения Клейна — Гордона в случае отсутствия электромагнитного поля:

$$\left\{ \nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - k_0^2 \right\} \psi = 0. \quad (13.49)$$

Частное решение следует искать в виде

$$\psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{L^{3/2}} A(t) e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} = A(t) f(\mathbf{k}), \quad (13.50)$$

где волновой вектор  $\mathbf{k}$  связан с импульсом  $\mathbf{p}$  соотношением  $\mathbf{p} = \hbar\mathbf{k}$ , функция от времени  $A(t)$  будет найдена ниже,  $L^3$  — борновский куб периодичности, когда на волновую функцию следует наложить условия периодичности

$$\psi(x, y, z) = \psi(x + L, y, z), \dots$$

Для волнового вектора  $\mathbf{k}$  имеем квазидискретную последовательность

$$\mathbf{kr} = \frac{2\pi}{L} (n_1x + n_2y + n_3z), \quad (13.51)$$

где  $n_1, n_2, n_3$  — целые числа, принимающие как положительные, так и отрицательные значения, включая нуль. В дальнейшем следует устремить длину куба периодичности  $L$  к бесконечности и снова перейти к непрерывному спектру. В этом случае функция

$$f(\mathbf{k}) = L^{-3/2} e^{i\mathbf{kr}} \quad (13.52)$$

подчиняется условию ортонормированности

$$\int f^*(\mathbf{k}') f(\mathbf{k}) d^3x = \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} = \delta_{n_1 n_1'} \delta_{n_2 n_2'} \delta_{n_3 n_3'}. \quad (13.53)$$

Подстановка решения (13.50) в уравнение Клейна — Гордона (13.49) приводит к следующему дифференциальному уравнению для определения коэффициентов  $A(t)$ :

$$\ddot{A}(t) + c^2 K^2 A(t) = 0, \quad K = \sqrt{k_0^2 + \mathbf{k}^2}. \quad (13.54)$$

Отсюда находим решение уравнения Клейна — Гордона

$$\psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}, t) = \frac{B(\mathbf{k})}{L^{3/2}} \{ a(\mathbf{k}) e^{-i\mathbf{cK}t + i\mathbf{k}\mathbf{r}} + b^+(-\mathbf{k}) e^{i\mathbf{cK}t + i\mathbf{k}\mathbf{r}} \}, \quad (13.55)$$

где коэффициенты  $a(\mathbf{k})$ ,  $b^+(-\mathbf{k})$  описывают состояния соответственно с положительной и отрицательной энергией  $E = \pm i\hbar\mathbf{cK}^*$ , а  $B(\mathbf{k})$  является нормировочным коэффициентом, который, как будет показано ниже, зависит от модуля вектора  $\mathbf{k}$ .

Наличие решений с двумя знаками энергии является следствием любой релятивистской теории, поскольку  $E = \pm \sqrt{c^2 p^2 + m_0^2 c^4}$ . Состояния с положительными и отрицатель-

\*) Состояния с отрицательной энергией мы будем описывать эрмитово-сопряженной амплитудой  $b^+(-\mathbf{k})$ . Это оказывается весьма удобным при вторичном квантовании, когда они соответствуют частицам с положительной энергией, но с другим знаком заряда и противоположно направленным импульсом. Заметим, что у амплитуд  $b^+$  и  $a^+$  мы пишем знак не комплексной, а эрмитовой сопряженности. Для обычной функции обе сопряженности совпадают друг с другом ( $b^+ = b^*$ ). Однако при вторичном квантовании амплитуды  $a$  и  $b$  становятся эрмитово-сопряженными матрицами (см. ниже), и поэтому, учитывая возможность вторичного квантования, мы пишем знак эрмитовой сопряженности.

ными энергиями разделены промежутками  $2m_0c^2$ , поэтому в классической теории, где динамические переменные должны изменяться непрерывно, состояния с отрицательной энергией не могут возникнуть, если их не было в начальный момент времени. В квантовой теории решения с отрицательными значениями энергии не могут быть исключены, поскольку квантовые переходы могут происходить между дискретными энергиями.

Общее решение задачи можно представить в виде фурье-суперпозиции

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{L^{3/2}} \sum_{\mathbf{k}} B(\mathbf{k}) \{a(\mathbf{k}) e^{-icKt+i\mathbf{k}\mathbf{r}} + b^+(\mathbf{k}) e^{icKt-i\mathbf{k}\mathbf{r}}\}. \quad (13.56)$$

Точно так же для комплексно-сопряженной волновой функции будем искать

$$\psi^*(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{L^{3/2}} \sum_{\mathbf{k}} B(\mathbf{k}) \{a^+(\mathbf{k}) e^{icKt-i\mathbf{k}\mathbf{r}} + b(\mathbf{k}) e^{-icKt+i\mathbf{k}\mathbf{r}}\}. \quad (13.57)$$

Мы заменили во втором члене вектор  $\mathbf{k}$  на  $-\mathbf{k}$ .

**ж) Квантование свободного поля.** Для того чтобы проквантовать скалярное поле, мы должны прежде всего найти выражения для полной энергии, импульса и заряда [12]. Подставляя решения (13.56) и (13.57) в (13.47) и принимая во внимание при интегрировании по объему соотношение (13.53), найдем после суммирования по  $\mathbf{k}'$ , что

$$Q = e \sum_{\mathbf{k}} B^2 \frac{K}{k_0} (a^+ a - b b^+), \quad (13.58)$$

где  $a = a(\mathbf{k})$ , а  $b = b(\mathbf{k})$ . Отсюда, положив (условие нормировки)

$$B = \sqrt{\frac{k_0}{K}}, \quad (13.59)$$

для полного заряда найдем значение

$$Q = e \sum_{\mathbf{k}} (a^+ a - b b^+). \quad (13.60)$$

Учитывая (13.59), для полной энергии и импульса (см. (13.45)) получим

$$H = \sum_{\mathbf{k}} c\hbar K (a^+ a + b b^+), \quad (13.61)$$

$$\mathbf{G} = \sum_{\mathbf{k}} \hbar \mathbf{k} (a^+ a + b b^+). \quad (13.62)$$

Аналогичное значение для гамильтониана было найдено и при квантовании электромагнитного поля (см. (12.68)). Тогда, воспользовавшись уравнением (12.69) для квантования амплитуд,

получим следующие отличные от нуля перестановочные соотношения для амплитуд (см., например, [1]):

$$aa'^+ - a'^+a = \delta_{kk'}, \quad bb'^+ - b'^+b = \delta_{kk'}, \quad (13.63)$$

где

$$a'^+ = a^+(k'), \quad b'^+ = b^+(k'). \quad (13.64)$$

Остальные амплитуды должны коммутировать друг с другом.

Амплитуды  $a$  и  $b$  являются операторами поглощения, а  $a^+$  и  $b^+$  — операторами появления. Они действуют на соответствующие числа частиц по закону (12.78), (12.79)\*.

Для того чтобы удовлетворить перестановочным соотношениям (13.63), мы должны квадраты амплитуд связать с числом соответствующих частиц следующим образом:

$$\begin{aligned} a^+a &= N_a, & b^+b &= N_b, \\ aa^+ &= 1 + N_a, & bb^+ &= 1 + N_b. \end{aligned} \quad (13.65)$$

Тогда для полной энергии, импульса и заряда находим соответственно значения (см. (13.60) — (13.62)):

$$\begin{aligned} Q &= e \sum_k (N_a - N_b - 1), \\ H &= \sum_k c\hbar K (N_a + N_b + 1), \\ G &= \sum_k \hbar k (N_a + N_b). \end{aligned} \quad (13.66)$$

Отсюда видно, что частицы сорта  $a$  и  $b$  обладают положительной энергией, но противоположным знаком заряда. Если мы частицы  $a$  отнесем к отрицательным  $\pi$ -мезонам, то частицы сорта  $b$  должны описывать положительные  $\pi$ -мезоны.

Наличие бесконечной положительной нулевой энергии

$$H_0 = \sum_k c\hbar K \quad (13.67)$$

соответствует нулевой энергии бесконечного числа осцилляторов, которые образуют поле скалярных мезонов. В самом деле, амплитуды скалярных мезонов подчиняются уравнению для гармонического осциллятора (см. (13.54)). Отсутствие коэффициента  $1/2$  в выражении для нулевой энергии связано с тем об-

\*) Перестановочные соотношения Бозе — Эйнштейна для амплитуд скалярного поля получились потому, что гамилтониан был пропорционален сумме квадратов амплитуд:  $H \sim a+a + bb^+$ ; если бы он был пропорционален разности квадратов амплитуд:  $H \sim a+a - bb^+$ , как это имеет место для дираковских частиц, то уравнения для квантования привели бы к статистике Ферми — Дирака (см. ниже).

стоятельством, что в каждом состоянии, характеризуемом импульсом  $\hbar\mathbf{k}$ , может находиться две частицы (сорта  $a$  и сорта  $b$ ).

Из перестановочных соотношений (13.63) мы можем также найти правила перестановок для волновых функций (13.56) и (13.57):

$$\psi(\mathbf{r}, t)\psi^*(\mathbf{r}', t') - \psi^*(\mathbf{r}', t')\psi(\mathbf{r}, t) = \frac{2k_0}{i} D(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t'), \quad (13.68)$$

где функция

$$D(\mathbf{R}, T) = \frac{1}{8\pi^3} \int d^3k \frac{e^{i\mathbf{k}\mathbf{R}} \sin c\mathbf{k}T}{K}. \quad (13.69)$$

Отсюда можно показать, что при одинаковых значениях времени  $t' = t$  отличным от нуля будет следующий коммутатор:

$$\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \psi(\mathbf{r}', t)\psi^*(\mathbf{r}, t) - \psi^*(\mathbf{r}', t) \cdot \frac{1}{c} \frac{\partial \psi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \frac{2k_0}{i} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \quad (13.70)$$

Таким образом, в скалярном уравнении в отличие от уравнения Шредингера нельзя ввести понятие плотности числа частиц

$$\rho_0 = \rho/e,$$

поскольку оно описывает смесь двух сортов частиц, которые обладают различными знаками зарядов, о чем мы говорили выше (см. п. г.)). В самом деле, волновое уравнение Клейна — Гордона является дифференциальным уравнением второго порядка, поэтому возможно произвольное задание  $\psi$  и  $\partial\psi/\partial t$  для некоторого момента  $t$ . Следовательно, в отличие от нерелятивистского выражения  $\rho_0 = \psi^*\psi$  плотность  $\rho_0$  (13.21), вообще говоря, не является положительно определенной величиной. Физически это связано с тем обстоятельством, что в теории Клейна — Гордона (как и в любой релятивистской теории) возможно осуществление решений с отрицательной энергией (более подробно см. теорию Дирака).

Возможность появления отрицательных значений  $\rho_0$  некоторое время вызывало критическое отношение к уравнению Клейна — Гордона, причем высказывалось даже предположение, что это уравнение не описывает реальных частиц. Однако дальнейшие исследования (например вторичное квантование, которое мы только что провели) показали, что это уравнение может описывать движение частиц как с положительным, так и с отрицательным зарядом ( $\pi^+$ -мезоны). В связи с этим следует рассматривать не плотность вероятности, а плотность заряда  $\rho = = e\rho_0$ . В этом случае различные знаки плотности  $\rho$  соответствуют различным знакам заряда частиц, причем состояние



частиц с отрицательной энергией можно рассматривать как состояния с положительной энергией, но с противоположным знаком заряда (зарядовое сопряжение).

На этом мы ограничимся рассмотрением общих вопросов уравнения Клейна — Гордона. Конкретные примеры, связанные с решением уравнения Клейна — Гордона при наличии внешних электромагнитных полей, мы рассмотрим ниже после изложения основ дираковской теории электрона.

### § 14. УРАВНЕНИЕ ДИРАКА

**а) Линеаризация оператора энергии. Матрицы Дирака.** В основу построения квантовой релятивистской теории следует положить известное релятивистское соотношение между энергией  $E$ , импульсом  $\mathbf{p}$  и массой покоя частицы  $m_0$ , которое в случае отсутствия электромагнитных полей ( $\Phi = \mathbf{A} = 0$ ) имеет вид

$$E = c \sqrt{p^2 + m_0^2 c^2}. \quad (14.1)$$

Переход к уравнениям квантовой теории может быть осуществлен путем замены классических величин операторами

$$E \rightarrow \hat{E} = i\hbar \frac{\partial}{\partial t}, \quad \mathbf{p} \rightarrow \hat{\mathbf{p}} = -i\hbar \nabla, \quad (14.2)$$

действующими на волновую функцию. Непосредственный переход к операторам в выражении (14.1) затруднен, так как операции дифференцирования, стоящие под знаком радикала, не определены.

В § 13 был рассмотрен один из возможных путей избавления от квадратного корня путем возведения выражения энергии (14.1) в квадрат. Это привело к релятивистскому волновому уравнению второго порядка с индефинитной плотностью вероятности (уравнение Клейна — Гордона). Индефинитность плотности вероятности связана с тем обстоятельством, что в теорию Клейна — Гордона входит вторая производная по времени, вследствие чего выражение для плотности вероятности содержит не только  $\psi$ , но и  $\partial\psi/\partial t$ , которые могут быть произвольно заданы в начальный момент времени \*).

Можно избежать появления отрицательных значений плотности вероятности, если в выражение для  $\rho_0$  не будет входить производная от волновой функции по времени. Но тогда в самом волновом уравнении производная по времени должна быть не выше первого порядка, а в силу релятивистской инвариант-

\*) Как было упомянуто в § 13, индефинитность плотности в уравнении Клейна — Гордона свидетельствует о необходимости рассматривать частицы с различными знаками заряда.

ности теории это относится и к производным по координатам. Таким образом, была поставлена задача нахождения релятивистского волнового уравнения, линейного относительно четырехмерного импульса. Она была решена [13, 14] Дираком в 1928 г., предложившим метод «линеаризации» соотношения для энергии (14.1) [2, 6].

Исследование, проведенное Дираком, привело к открытию релятивистского волнового уравнения, играющего фундаментальную роль в релятивистской квантовой механике и квантовой теории поля, поскольку оно оказалось примененным к описанию движения частиц со спином  $1/2$  (в единицах  $\hbar$ ). С этой точки зрения релятивистское скалярное уравнение Клейна — Гордона описывает движение только бесспиновых частиц, и поэтому оно неприменимо к электронам.

С целью линеаризации оператора (14.1) (или символического извлечения из него квадратного корня) представим соотношение (14.1) в следующем операторном виде \*):

$$E = c \sum_{\mu=0}^3 \alpha_{\mu} p_{\mu}, \quad (14.3)$$

$$p_0 = m_0 c, \quad \mathbf{p} = -i\hbar \nabla, \quad E = i\hbar \frac{\partial}{\partial t}. \quad (14.4)$$

Принимая во внимание, что

$$E^2 = c^2 \sum_{\mu=0}^3 p_{\mu}^2 \quad (14.5)$$

и суммируя выражение (14.3) при его возведении в квадрат, находим следующие соотношения, которым должны удовлетворять величины  $\alpha_{\mu}$ :

$$\alpha_{\mu} \alpha_{\mu'} + \alpha_{\mu'} \alpha_{\mu} = 2\delta_{\mu\mu'}. \quad (14.6)$$

Аналогичным условиям антикоммутации, как известно, удовлетворяют двухрядные матрицы, с помощью которых Паули удалось в нерелятивистском приближении записать волновое уравнение для частиц, обладающих спином:

$$\sigma'_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma'_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma'_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (14.7)$$

Матрицы Паули антикоммутируют между собою и квадрат каждой из них равен единице. Действительно, нетрудно найти, что

$$\sigma'_1 \sigma'_2 = i\sigma'_3 = -\sigma'_2 \sigma'_1 \quad (14.8)$$

\*) «Извлечение» квадратного корня мы сделаем при отсутствии внешних полей, т. е. когда операторы  $p_{\mu}$  коммутируют друг с другом. Только после извлечения квадратного корня введем электромагнитные поля.

и т. д. (в порядке циклической перестановки индексов), или

$$\sigma'_n \sigma'_{n'} + \sigma'_{n'} \sigma'_n = 2\delta_{nn'}. \quad (14.9)$$

Заметим, однако, что для линеаризации оператора энергии (14.1) необходимо располагать четырьмя матрицами  $\alpha_\mu$ , а не тремя, как это имеет место для матриц Паули\*). В связи с этим Дирак предложил взять совокупность четырехрядных матриц  $\sigma_n$  и  $\rho_n$  ( $n = 1, 2, 3$ ), связанных с матрицами Паули при помощи соотношений

$$\sigma_n = \begin{pmatrix} \sigma'_n & 0' \\ 0' & \sigma'_n \end{pmatrix}, \quad (14.10)$$

$$\rho_1 = \begin{pmatrix} 0' & I' \\ I' & 0' \end{pmatrix}, \quad \rho_2 = \begin{pmatrix} 0' & -iI' \\ iI' & 0' \end{pmatrix}, \quad \rho_3 = \begin{pmatrix} I' & 0' \\ 0' & -I' \end{pmatrix}, \quad (14.11)$$

где  $\sigma'_n$  — матрицы Паули (14.7), а  $0'$  и  $I'$  — соответственно нулевая и единичные матрицы:

$$0' = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad I' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (14.12)$$

Свойства матриц  $\sigma_n$  и  $\rho_n$  Дирака совершенно аналогичны свойствам матриц Паули, что можно легко проверить непосредственным вычислением:

$$\begin{aligned} \sigma_1 \sigma_2 &= -\sigma_2 \sigma_1 = i\sigma_3, & \rho_1 \rho_2 &= -\rho_2 \rho_1 = i\rho_3, \\ \sigma_n \rho_{n'} &= \rho_{n'} \sigma_n \end{aligned} \quad (14.13)$$

( $n, n' = 1, 2, 3$ ). Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} \sigma_n \sigma_{n'} + \sigma_{n'} \sigma_n &= \rho_n \rho_{n'} + \rho_{n'} \rho_n = 2\delta_{nn'}, \\ \sigma_{n'} \rho_n &= \rho_n \sigma_{n'}, \end{aligned} \quad (14.14)$$

т. е. матрицы  $\sigma_n$  и  $\rho_n$  коммутируют друг с другом.

В качестве матриц  $\alpha_\mu$  Дирак предложил выбрать следующие\*\*)

$$\alpha_n = \rho_1 \sigma_n = \begin{pmatrix} 0' & \sigma'_n \\ \sigma'_n & 0' \end{pmatrix}, \quad \alpha_0 = \rho_3 = \begin{pmatrix} I' & 0' \\ 0 & -I' \end{pmatrix}, \quad (14.15)$$

\*) С помощью матриц Паули можно извлечь квадратный корень при наличии максимум трех членов, например

$$\sqrt{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2} = (\sigma' p).$$

\*\*) Символическое «извлечение» квадратного корня (14.3) можно произвести не только с помощью матриц, но и с помощью так называемых гиперкомплексных чисел (алгебра Клиффорда).

( $n = 1, 2, 3$ ). В обычной записи четырехрядные матрицы (14.15) имеют вид

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\alpha_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \rho_3 = \alpha_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (14.16)$$

С помощью равенств (14.14) или путем прямого перемножения матриц (14.16) нетрудно показать, что они удовлетворяют соотношениям (14.6), т. е. все матрицы  $\alpha_\mu$  антикоммутируют друг с другом и квадрат каждой из них равен единице. Таким образом, выражение для энергии (14.3) принимает вид

$$E = c \sqrt{p^2 + m_0^2 c^2} = c(\alpha \mathbf{p}) + \rho_3 m_0 c^2. \quad (14.17)$$

**б) Уравнение Дирака. Плотность заряда и тока.** Переходя к операторам в линеаризованном выражении для энергии (14.17) и действуя ими на волновую функцию, получаем уравнение Дирака для свободной частицы:

$$E\psi = H\psi, \quad (14.18)$$

где операторы энергии и функции Гамильтона  $H$  определяются выражениями \*)

$$E = -\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial t}, \quad H = c(\alpha \mathbf{p}) + \rho_3 m_0 c^2. \quad (14.19)$$

В соответствии с числом строк и столбцов матриц  $\alpha$  и  $\rho_3$  волновая функция  $\psi$  должна иметь четыре компоненты, которые объединяются в виде матрицы, состоящей из одного столбца:

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix}, \quad (14.20)$$

\*) В классической теории соотношение между энергией и импульсом (14.1) может быть представлено в виде, похожем на формулу (14.17):

$$E = (\mathbf{v} \mathbf{p}) + \sqrt{1 - \beta^2} m_0 c^2.$$

Это равенство можно легко проверить, если учесть, что для свободной частицы

$$E = m_0 c^2 / \sqrt{1 - \beta^2}, \quad \mathbf{p} = m_0 \mathbf{v} / \sqrt{1 - \beta^2}.$$

Отсюда следует, что матрица  $\alpha \rightarrow \mathbf{v}/c$  должна играть роль скорости, а  $\rho_3 \rightarrow \sqrt{1 - \beta^2}$  — роль некоторого скаляра, характеризующего лоренцево сокращение.

причем матрица  $\psi^+$  — эрмитово-сопряженная матрица, состоящая из одной строки \*):

$$\psi^+ = (\psi_1^* \psi_2^* \psi_3^* \psi_4^*). \quad (14.21)$$

В случае движения электрона в электромагнитном поле, характеризуемом векторным и скалярным потенциалами ( $\mathbf{A}$ ,  $\Phi$ ), в соответствии с общими правилами квантовой механики, следует перейти к обобщенным операторам:

$$E \rightarrow F = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - e\Phi, \quad \mathbf{p} \rightarrow \mathbf{P} = -i\hbar \nabla - \frac{e}{c} \mathbf{A}. \quad (14.22)$$

Поэтому в общем случае движения электрона уравнение Дирака может быть записано в виде [15]

$$\left\{ i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - e\Phi - c(\boldsymbol{\alpha} \mathbf{P}) - \rho_3 m_0 c^2 \right\} \psi = 0. \quad (14.23)$$

Матричное уравнение Дирака (14.23) эквивалентно системе четырех уравнений:

$$\begin{aligned} (F - m_0 c^2) \psi_1 - c(P_x - iP_y) \psi_4 - cP_z \psi_3 &= 0, \\ (F - m_0 c^2) \psi_2 - c(P_x + iP_y) \psi_3 + cP_z \psi_4 &= 0, \\ (F + m_0 c^2) \psi_3 - c(P_x - iP_y) \psi_2 - cP_z \psi_1 &= 0, \\ (F + m_0 c^2) \psi_4 - c(P_x + iP_y) \psi_1 + cP_z \psi_2 &= 0. \end{aligned} \quad (14.24)$$

Заметим, что уравнение для комплексно-сопряженной волновой функции может быть также представлено в матричной форме:

$$\psi^+ \left\{ i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - e\Phi - c(\boldsymbol{\alpha} \mathbf{P}) - \rho_3 m_0 c^2 \right\} = 0, \quad (14.25)$$

где действие операторов  $i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$  и  $-i\hbar \nabla$  на волновую функцию, стоящую слева от них, следует понимать как производную от этой функции, взятую с обратным знаком:

$$-\psi^+ i\hbar \nabla \rightarrow i\hbar \nabla \psi^+, \quad \psi^+ i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \rightarrow -i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi^+. \quad (14.26)$$

Таким образом, уравнения (14.23) и (14.25) могут быть представлены в виде

$$\left( i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - e\Phi \right) \psi - c \left\{ \boldsymbol{\alpha} \left( -i\hbar \nabla - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right) \right\} \psi - \rho_3 m_0 c^2 \psi = 0, \quad (14.27)$$

$$\left( -i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - e\Phi \right) \psi^+ - c \left\{ \left( i\hbar \nabla - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right) \psi^+ \boldsymbol{\alpha} \right\} - m_0 c^2 \psi^+ \rho_3 = 0. \quad (14.28)$$

\* ) Необходимость введения четырех компонент волновой функции физически обусловлена тем, что каждое квантовое состояние может иметь два знака энергии, а также два направления ориентации спина.

Умножая (14.27) слева на  $\psi^+$ , а (14.28) — справа на  $\psi$  и вычитая второе уравнение из первого, получаем соотношение

$$\frac{\partial}{\partial t} \psi^+ \psi + \operatorname{div} \psi^+ c \alpha \psi = 0, \quad (14.29)$$

которое можно интерпретировать как уравнение непрерывности для плотности вероятности  $\rho_0$  и плотности тока  $\mathbf{j}$ :

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho_0 + \operatorname{div} c \mathbf{j}_0 = 0, \quad (14.30)$$

где

$$\rho_0 = \psi^+ \psi, \quad \mathbf{j}_0 = \psi^+ \alpha \psi. \quad (14.31)$$

Если в (14.31) перейти к компонентам волновой функции для плотности  $\rho_0$ , то получим

$$\rho_0 = \psi^+ \psi = \psi_1^* \psi_1 + \psi_2^* \psi_2 + \psi_3^* \psi_3 + \psi_4^* \psi_4, \quad (14.32)$$

т. е.  $\rho_0$  является матрицей, состоящей из одного элемента, и поэтому представляет собою обычную функцию.

В отличие от теории Клейна — Гордона плотность вероятности (14.32) будет положительно определенной величиной. Однако это не означает, что в теории Дирака можно рассматривать частицы лишь одного знака заряда. Как и в теории Клейна — Гордона, в теории Дирака, оказывается, существуют частицы противоположного знака заряда — позитроны (см. ниже).

**в) Трансформационные свойства волновой функции.** Согласно специальной теории относительности уравнение Дирака (так же как и уравнения Максвелла и Клейна — Гордона) должно быть инвариантным относительно преобразований Лоренца. Исходя из этого, можно найти закон преобразования волновой функции (тензорную размерность функции) при пространственно-временных и просто пространственных вращениях координат.

Найдем прежде всего закон преобразования волновой функции при лоренцевых преобразованиях координат:

$$\begin{aligned} ct' &= ct \operatorname{ch} \varphi_0 - x \operatorname{sh} \varphi_0, \\ x' &= x \operatorname{ch} \varphi_0 - ct \operatorname{sh} \varphi_0, \\ y' &= y, \quad z' = z, \end{aligned} \quad (14.33)$$

где

$$\operatorname{ch} \varphi_0 = 1/\sqrt{1 - \beta^2} \quad \text{и} \quad \operatorname{sh} \varphi_0 = \beta/\sqrt{1 - \beta^2}. \quad (14.34)$$

При этом энергия и импульс преобразуются как четырехмерный вектор, т. е.

$$E = E' \operatorname{ch} \varphi_0 + cp'_1 \operatorname{sh} \varphi_0, \quad (14.35)$$

$$cp_1 = cp'_1 \operatorname{ch} \varphi_0 + E' \operatorname{sh} \varphi_0. \quad (14.36)$$

Подставляя эти выражения в уравнение Дирака для свободной частицы (14.18), получаем

$$\{(E' - c\alpha_1 p'_1)(\text{ch } \varphi_0 - \alpha_1 \text{sh } \varphi_0) - c(\alpha_2 p'_2 + \alpha_3 p'_3 + \rho_3 m_0 c)\} \psi = 0. \quad (14.37)$$

Умножая слева все это выражение на величину  $a + \alpha_1 b$  и учитывая антикоммутативность  $\alpha_1$  с матрицами  $\alpha_2$ ,  $\alpha_3$  и  $\rho_3$ , получаем

$$\{(E' - c\alpha_1 p'_1)[a \text{ch } \varphi_0 - b \text{sh } \varphi_0 - \alpha_1(a \text{sh } \varphi_0 - b \text{ch } \varphi_0)] - c(\alpha_2 p'_2 + \alpha_3 p'_3 + \rho_3 m_0 c)(a - \alpha_1 b)\} \psi = 0. \quad (14.38)$$

Принимая во внимание инвариантность уравнения Дирака относительно преобразований Лоренца, мы должны считать, что в штрихованной системе координат волновые уравнения должны сохранять свой вид:

$$\{E' - c(\alpha p') - \rho_3 m_0 c^2\} \psi' = 0. \quad (14.39)$$

Тогда находим связь коэффициентов  $a$  и  $b$ :

$$b = a \text{sh } \varphi_0 / (1 + \text{ch } \varphi_0), \quad (14.40)$$

а уравнение (14.38) принимает вид

$$a \{E' - c(\alpha p') - \rho_3 m_0 c^2\} \{1 - \alpha_1 \text{sh } \varphi_0 / (1 + \text{ch } \varphi_0)\} \psi = 0. \quad (14.41)$$

Таким образом, для закона преобразования волновой функции мы получаем следующее выражение:

$$\psi' = a \{1 - \alpha_1 \text{sh } \varphi_0 / (1 + \text{ch } \varphi_0)\} \psi. \quad (14.42)$$

При обратном переходе, очевидно, скорость  $\beta = v/c$  надо заменить на противоположную:  $\beta \rightarrow -\beta$ ; тогда

$$\psi = a \{1 + \alpha_1 \text{sh } \varphi_0 / (1 + \text{ch } \varphi_0)\} \psi'. \quad (14.43)$$

С учетом этого для величины  $a$  получаем значения

$$a^2 \{1 - \text{sh}^2 \varphi_0 / (1 + \text{ch } \varphi_0)^2\} = 1, \quad (14.44)$$

откуда следует, что  $a = \text{ch}(\varphi_0/2)$  и  $b = \text{sh}(\varphi_0/2)$ .

Итак, волновая функция  $\psi$  при пространственно-временных вращениях координат в плоскости  $xt$  (преобразования Лоренца) преобразуется по закону

$$\begin{aligned} \psi' &= \{\text{ch}(\varphi_0/2) - \alpha_1 \text{sh}(\varphi_0/2)\} \psi = e^{-\alpha_1 \varphi_0/2} \psi, \\ \psi &= \{\text{ch}(\varphi_0/2) + \alpha_1 \text{sh}(\varphi_0/2)\} \psi' = e^{\alpha_1 \varphi_0/2} \psi'. \end{aligned} \quad (14.45)$$

Нетрудно найти закон преобразования для плотности заряда и тока

$$\rho_0 = \psi^+ \psi, \quad \mathbf{j}_0 = \psi^+ \alpha \psi. \quad (14.46)$$

С помощью соотношений (14.45) можно написать

$$\psi = \Omega_{xt} \psi', \quad \psi^+ = \psi'^+ \Omega_{xt}, \quad (14.47)$$

где операторы преобразования имеют вид

$$\Omega_{xt} = e^{\alpha_1 \varphi_0/2}. \quad (14.48)$$

Подставляя эти выражения в (14.46), мы убеждаемся в том, что четырехмерная плотность тока преобразуется по законам для четырехмерного вектора:

$$\rho'_0 = \rho_0 \operatorname{ch} \varphi_0 - j_{0x} \operatorname{sh} \varphi_0, \quad j'_{0x} = j_{0x} \operatorname{ch} \varphi_0 - \rho \operatorname{sh} \varphi_0. \quad (14.49)$$

На основе равенства

$$\psi^+ \psi = \psi'^+ \Omega_{xt}^2 \psi' = \psi'^+ (\operatorname{ch} \varphi_0 + \alpha_1 \operatorname{sh} \varphi_0) \psi' \quad (14.50)$$

можно рассматривать оператор  $\Omega_{xt}^2$  как оператор преобразования для векторных величин. Волновые же функции преобразуются и не как вектор, т. е. тензор первого ранга (целые углы  $\varphi_0$ ), и не как тензор второго ранга (двойные углы  $\varphi_0$ ), а как «полувектор», преобразование которого характеризуется углом  $\varphi_0/2$ .

Величины, преобразующиеся по закону (14.47), получили название спиноров или тензоров половинного ранга.

Аналогичным образом можно показать, что при обычном пространственном вращении (например вокруг оси  $z$  на угол  $\varphi$ ) спинор преобразуется по закону

$$\psi' = e^{i\alpha_3 \varphi/2} \psi, \quad \psi'^+ = \psi^+ e^{-i\alpha_3 \varphi/2}. \quad (14.51)$$

г) **Уравнение Дирака в ковариантной записи.** Мы можем придать уравнению Дирака ковариантную форму записи с помощью введения мнимых единиц либо  $i'$ , либо  $i$ .

В представлении  $x_4 = i'ct$  вводим матрицы

$$\alpha_\mu = \{\alpha, i'\Gamma\} \quad (14.52)$$

и полагаем импульс равным

$$p_\mu = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x_\mu}, \quad (14.53)$$

где

$$x_n = x, y, z; \quad x_4 = i'ct. \quad (14.54)$$

Принимая во внимание, что

$$E = -ci'p_4, \quad (14.55)$$

мы сможем уравнение Дирака

$$(E - c(\alpha p) - \rho_3 m_0 c^2) \psi = 0 \quad (14.56)$$

привести к виду

$$(\alpha_\mu p_\mu + \rho_3 m_0 c^2) \psi = 0. \quad (14.57)$$



Величина  $\alpha_\mu p_\mu$  является самосопряженной, и поэтому для комплексно-сопряженного уравнения мы можем написать \*)

$$\psi^+ (\alpha_\mu p_\mu + \rho_3 m_0 c) = 0, \quad (14.58)$$

причем

$$\psi^+ p_\mu = - p_\mu \psi^+. \quad (14.59)$$

В представлении  $x'_4 = ict$ ,  $x'_n = x_n$  для записи уравнения Дирака в инвариантной форме вводятся матрицы  $\gamma_\mu$  [6,16]

$$\gamma_n = -i\rho_3 \alpha_n = \rho_2 \sigma_n, \quad \gamma_4 = \rho_3. \quad (14.60)$$

Матрицы  $\gamma_\mu$  являются эрмитовыми и удовлетворяют следующим перестановочным соотношениям:

$$\gamma_\mu \gamma_\nu + \gamma_\nu \gamma_\mu = 2\delta_{\mu\nu}, \quad (14.61)$$

т. е.

$$\gamma_\mu^2 = 1, \quad \gamma_\mu \gamma_\nu = -\gamma_\nu \gamma_\mu. \quad (14.62)$$

Поскольку в представлении  $x'_4 = ict$  для временной составляющей импульса имеем вещественное значение

$$p'_4 = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x'_4} = -\frac{\hbar}{c} \frac{\partial}{\partial t} = i \frac{E}{c}, \quad (14.63)$$

благодаря чему она не является эрмитовым оператором.

Умножая (14.56) слева на матрицу  $i\rho_3$  и принимая во внимание соотношения (14.60) и (14.63), мы можем представить уравнение Дирака в виде

$$(\gamma_\mu p'_\mu - im_0 c) \psi = 0, \quad (14.64)$$

где

$$\mathbf{p}' = \mathbf{p} = \frac{\hbar}{i} \nabla.$$

Четырехмерное скалярное произведение

$$\gamma_\mu p'_\mu = \boldsymbol{\gamma} \mathbf{p}' + \gamma_4 p'_4, \quad (14.65)$$

а вместе с тем и комплексно-сопряженное уравнение, которое следует из (14.64),

$$\psi^+ (\boldsymbol{\gamma} \mathbf{p}' - \gamma_4 p'_4 + im_0 c) = 0,$$

не является эрмитово-сопряженным. Для того чтобы привести его к эрмитово-сопряженному виду, мы должны ввести функцию

$$\bar{\psi} = \psi^+ \rho_3 \quad \text{или} \quad \psi^+ = \bar{\psi} \rho_3. \quad (14.66)$$

\*) В этом нетрудно убедиться, если расписать уравнения (14.57) и (14.58) в виде системы четырех уравнений и учесть соотношение (14.59), а также, что  $i'^* = i'$ ,  $i^* = -i$  (см. (7.11) и (7.12)).

Тогда, принимая во внимание, что матрица  $\rho_3$  антикоммутирует с матрицами  $\gamma_n$ , имеем

$$\bar{\psi}(\gamma_\mu \rho'_\mu - im_0 c) = 0. \quad (14.67)$$

**д) Тензорная размерность матриц Дирака.** Из матриц Дирака мы можем составить шестнадцать независимых матриц, образующих группу в том смысле, что умножая друг на друга две любые матрицы, мы получим с точностью до постоянного коэффициента одну из этих шестнадцати матриц [1, 16].

Прежде всего мы можем составить величину \*)

$$j = \psi^+ \rho_3 \psi = \bar{\psi} \psi. \quad (14.68)$$

которая преобразуется как скаляр \*\*).

Векторная матрица равна

$$\alpha_\mu = \rho_1 \sigma_\mu = (\alpha, i'I), \quad (14.69)$$

где

$$\sigma_\mu = (\sigma, i'\rho_1), \quad (14.70)$$

т. е. величины

$$j_\mu = \psi^+ \alpha_\mu \psi \quad (14.71)$$

преобразуются как четырехмерный вектор (вектор тока).

С другой стороны, при  $x'_4 = ict$  для четырехмерного вектора мы можем написать выражение

$$j'_\mu = i\bar{\psi} \gamma_\mu \psi, \quad (14.72)$$

причем

$$j = j', \quad i'j_4 = ij'_4. \quad (14.73)$$

Образует матрицы антисимметричного тензора второго ранга (в представлении матриц  $\alpha$ ):

$$\alpha_{\mu\nu} = -\alpha_{\nu\mu} = \begin{cases} -i\sigma_\mu \rho_3 \sigma_\nu, & \mu \neq \nu, \\ 0, & \mu = \nu, \end{cases} \quad (14.74)$$

составляющие которого могут быть записаны в виде таблицы, составленной из эрмитовых матриц:

$$\begin{pmatrix} \alpha_{23} & \alpha_{31} & \alpha_{12} \\ \alpha_{14} & \alpha_{24} & \alpha_{34} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho_3 \sigma_1, & \rho_3 \sigma_2, & \rho_3 \sigma_3 \\ i'\rho_2 \sigma_1, & i'\rho_2 \sigma_2, & i'\rho_2 \sigma_3 \end{pmatrix}. \quad (14.75)$$

\*) При исследовании тензорной размерности функция  $\psi^+$  соответствует случаю  $x_4 = i'ct$ , а  $\bar{\psi}$  соответствует  $x'_4 = ict$ .

\*\*) Зная закон преобразования для волновых функций  $\psi$  и  $\psi^+$  (см. (14.47)), мы найдем, что величина (14.68) преобразуется как скаляр. Это замечание относится к преобразованиям векторных и тензорных величин.

В представлении матриц  $\gamma$  антисимметричный тензор имеет вид

$$\gamma_{\mu\nu} = -\gamma_{\nu\mu} = \begin{cases} \gamma_\mu \gamma_\nu; & \mu \neq \nu, \\ 0; & \mu = \nu, \end{cases} \quad (14.76)$$

причем

$$\psi^+ \alpha_{23} \psi = -i \bar{\psi} \gamma_{23} \psi = \psi^+ \rho_3 \sigma_1 \psi, \dots, \quad (14.77)$$

$$-i' \psi^+ \alpha_{14} \psi = (-i)^2 \bar{\psi} \gamma_{14} \psi = \psi^+ \rho_2 \sigma_1 \psi \dots \quad (14.78)$$

Мы можем написать совершенно антисимметричную матрицу тензора четвертого ранга с отличной от нуля компонентой, когда все индексы  $\mu, \nu, \varepsilon, \rho$  различны. В представлении матриц  $\alpha$  ( $x_4 = i'ct$ ) мы имеем

$$\alpha_{\mu\nu\varepsilon\rho} = i' \sigma_\mu \rho_3 \sigma_\nu \rho_3 \sigma_\varepsilon \rho_3 \sigma_\rho, \quad (14.79)$$

из которой можно образовать с помощью символа Леви-Чивита псевдоскалярную матрицу  $\rho_2$

$$\alpha_{\mu\nu\varepsilon\rho} = \varepsilon_{\mu\nu\varepsilon\rho} \rho_2. \quad (14.80)$$

Заметим, что при инверсии пространства ( $\mathbf{r} \rightarrow -\mathbf{r}$ ), т. е. при переходе от правой системы координат к левой, псевдоскалярные величины в противоположность скалярным изменяют свой знак. Например, при инверсии пространства волновая функция преобразуется по закону  $\psi' = \rho_3 \psi$  (см. ниже). Поэтому псевдоскалярная величина изменяет свой знак:

$$\psi'^+ \rho_2 \psi' = \psi^+ \rho_3 \rho_2 \rho_3 \psi = -\psi^+ \rho_2 \psi,$$

в то время как скалярная величина остается неизменной:

$$\psi'^+ \rho_3 \psi' = \psi^+ \rho_3 \psi.$$

Символ Леви-Чивита при каждой перестановке индекса изменяет свой знак. Поэтому его составляющие можно положить равными

$$\varepsilon_{1234} = 1, \quad \varepsilon_{2134} = -1, \quad \varepsilon_{1134} = 0, \quad (14.81)$$

т. е. отличными от нуля являются только те составляющие, у которых различны все четыре индекса.

Из матриц  $\gamma$  мы можем также составить антисимметричный тензор четвертого ранга:

$$\gamma_{\mu\nu\varepsilon\rho} = \gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\varepsilon \gamma_\rho, \quad (14.82)$$

причем псевдоскалярная матрица от этого тензора равна

$$\gamma_{1234} = \gamma_5 = -\rho_1, \quad (14.83)$$

т. е. как псевдоскаляр будет преобразовываться величина

$$\psi^+ \rho_2 \psi = i \bar{\psi} \gamma_5 \psi. \quad (14.84)$$

Наконец, мы можем образовать матрицу антисимметричного тензора третьего ранга:

$$\alpha_{\nu\epsilon\rho} = \begin{cases} ii'\rho_1\sigma_\nu\rho_3\sigma_\epsilon\rho_3\sigma_\rho & (\text{все индексы различны}), \\ 0 & (\text{хотя бы два индекса одинаковы}). \end{cases} \quad (14.85)$$

При помощи символа Леви-Чивита мы можем показать, что матрицы  $\sigma_\mu$  образуют четырехмерный псевдовектор\*). Это следует из того факта, что они связаны с компонентами тензора (14.85) соотношением

$$\alpha_{\nu\epsilon\rho} = \varepsilon_{\mu\nu\epsilon\rho}\sigma_\mu, \quad (14.86)$$

причем

$$\sigma_1 = \alpha_{234}; \quad \sigma_4 = -\alpha_{123} = i'\rho_1, \quad (14.87)$$

т. е.

$$\sigma_\mu = (\sigma, i'\rho_1). \quad (14.88)$$

В представлении матриц  $\gamma$  компоненты четырехмерного псевдовектора мы можем записать следующим образом:

для пространственных составляющих

$$\psi^+\sigma_1\psi = -i\bar{\psi}\gamma_2\gamma_3\gamma_4\psi \dots, \quad (14.89)$$

для временной составляющей

$$i'\psi^+\sigma_4\psi = i^2\bar{\psi}\gamma_1\gamma_2\gamma_3\psi. \quad (14.90)$$

Ниже мы будем пользоваться исключительно  $\alpha$ -представлением ( $x_4 = i'ct$ ). Это, как нам кажется, значительно удобнее при исследовании поляризации спина, на что мы в дальнейшем обращаем особое внимание. Однако многие монографии (см., например, [6]) и научные статьи написаны в  $\gamma$ -представлении ( $x'_4 = ict$ ). Поэтому мы решили в этом параграфе изложить переход от одного представления к другому.

### § 15. ВАРИАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ

При изложении вопросов, связанных со вторичным квантованием спинорных уравнений, мы используем вариационные методы точно так же, как это делалось при квантовании максвелловского и скалярного уравнений.

Для составления функции Лагранжа, тензора энергии и тензора спина уравнения Дирака проще всего ограничиться рассмотрением свободного движения. Тогда уравнение Дирака мы можем записать в виде

$$-\hbar c \left( \frac{1}{i} \alpha_\mu \psi_\mu + k_0 \rho_3 \psi \right) = 0, \quad (15.1)$$

---

\* У псевдовекторных величин в отличие от векторных пространственные составляющие не изменяют своего знака при инверсии пространства ( $\mathbf{r} \rightarrow -\mathbf{r}$ ).

где

$$\psi_\mu = \partial\psi/\partial x_\mu, \quad k_0 = m_0c/\hbar, \quad x_4 = i'ct. \quad (15.2)$$

Из (15.1) следует

$$\alpha_\mu \psi_\mu = -ik_0 \rho_3 \psi. \quad (15.3)$$

Аналогично для комплексно-сопряженного уравнения имеем

$$\psi_\mu^\dagger \alpha_\mu = ik_0 \psi^\dagger \rho_3. \quad (15.4)$$

**а) Функция Лагранжа.** Подберем плотность функции Лагранжа таким образом, чтобы уравнения Дирака явились следствием вариационного принципа

$$\delta \int L d^4x = 0, \quad (15.5)$$

т. е. уравнения Дирака для волновых функций  $\psi$  и  $\psi^\dagger$  получились бы соответственно из вариационных производных

$$\frac{\delta L}{\delta \psi^\dagger} = \frac{\partial L}{\partial \psi^\dagger} - \frac{\partial}{\partial x_\mu} \frac{\partial L}{\partial \psi_\mu^\dagger} = 0, \quad \frac{\delta L}{\delta \psi} = \frac{\partial L}{\partial \psi} - \frac{\partial}{\partial x_\mu} \frac{\partial L}{\partial \psi_\mu} = 0. \quad (15.6)$$

Для получения уравнения Дирака можно выбрать следующие два выражения для плотности функции Лагранжа:

$$L' = -\hbar c \psi^\dagger \left( \frac{1}{i} \alpha_\mu \psi_\mu + k_0 \rho_3 \psi \right), \quad L'' = -\hbar c \left( -\frac{1}{i} \psi_\mu^\dagger \alpha_\mu + k_0 \psi^\dagger \rho_3 \right) \psi, \quad (15.7)$$

которые отличаются друг от друга на величину, равную четырехмерной расходимости:

$$L' - L'' = -\hbar c \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_\mu} \psi^\dagger \alpha_\mu \psi.$$

Эта величина, как известно, может быть отброшена, так как вариационная производная от нее равна нулю. В частности, мы можем положить плотность функции Лагранжа равной любой линейной комбинации функций  $L'$  и  $L''$ .

Наиболее удобно для лагранжиана выбрать симметричный вид относительно функций  $\psi^\dagger$  и  $\psi$ , т. е. положить

$$L = \frac{1}{2} (L' + L'') = -\hbar c \left( \frac{1}{2i} \psi^\dagger \alpha_\mu \psi_\mu - \frac{1}{2i} \psi_\mu^\dagger \alpha_\mu \psi + k_0 \psi^\dagger \rho_3 \psi \right). \quad (15.8)$$

Отсюда с помощью уравнений (15.6) получаем уравнения (15.3) и (15.4).

Заметим, что для реальных движений, подчиняющихся уравнениям (15.3) и (15.4), плотность функции Лагранжа обращается в нуль; однако это ни в коей мере не означает, что и ее вариационная производная также обращается в нуль.

**б) Тензор энергии.** Найдем компоненты тензора энергии, связанные с лагранжианом  $L$  соотношением (см., например, (13.41))

$$T_{\mu\nu} = \psi_{\mu}^{+} \frac{\partial L}{\partial \psi_{\nu}^{+}} + \frac{\partial L}{\partial \psi_{\nu}} \psi_{\mu} - L \delta_{\mu\nu}, \quad (15.9)$$

которые согласно (13.40) удовлетворяют закону сохранения

$$\frac{\partial T_{\mu\nu}}{\partial x_{\nu}} = 0. \quad (15.10)$$

Принимая во внимание соотношения

$$\frac{\partial L}{\partial \psi_{\nu}^{+}} = \frac{\hbar c}{2i} \alpha_{\nu} \psi, \quad \frac{\partial L}{\partial \psi_{\nu}} = -\frac{\hbar c}{2i} \psi^{+} \alpha_{\nu}, \quad L = 0,$$

имеем для искоемых компонент тензора энергии следующее выражение:

$$T_{\mu\nu} = -\frac{\hbar c}{2i} (\psi^{+} \alpha_{\nu} \psi_{\mu} - \psi_{\mu}^{+} \alpha_{\nu} \psi). \quad (15.11)$$

В частности, из (15.11) находим компоненты плотности энергии  $U$  и плотности импульса  $g_n$  поля:

$$U = T_{44} = -\frac{\hbar c}{2i} (\psi^{+} \alpha_4 \psi_4 - \psi_4^{+} \alpha_4 \psi) = -\frac{\hbar c}{2i} \left( \psi^{+} \frac{\partial \psi}{c \partial t} - \frac{\partial \psi^{+}}{c \partial t} \psi \right), \quad (15.12)$$

$$g_n = \frac{i'}{c} T_{n4} = \frac{\hbar}{2i} (\psi^{+} \psi_n - \psi_n^{+} \psi),$$

причем для энергии и импульса

$$\begin{aligned} H &= \int U d^3x = \int T_{44} d^3x, \\ G_n &= \int g_n d^3x = \int \frac{i'}{c} T_{n4} d^3x \end{aligned} \quad (15.13)$$

имеют место законы сохранения, т. е. они не должны зависеть от времени.

Учитывая уравнение Дирака

$$-\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial t} \psi = H\psi = \{c(\alpha \mathbf{p}) + \rho_3 m_0 c^2\} \psi, \quad (15.14)$$

а также правило переброса производных, можем соотношения (15.13) записать в виде

$$H = \int \psi^{+} H \psi d^3x, \quad \mathbf{G} = \int \psi^{+} \mathbf{p} \psi d^3x, \quad (15.15)$$

где  $\mathbf{p} = \frac{\hbar}{i} \nabla$ .

**в) Тензор орбитального момента количества движения и спина.** Если ввести понятие оператора тензора

$$T_{\mu\nu} = -\frac{c}{2} (p_\mu \alpha_\nu + \alpha_\nu p_\mu), \quad (15.16)$$

то компоненты тензора энергии (15.11) будут равны

$$T_{\mu\nu} = \psi^\dagger T_{\mu\nu} \psi. \quad (15.17)$$

Оператор  $p_\mu$ , стоящий после матрицы  $\alpha_\nu$ , должен действовать на волновую функцию  $\psi$ :

$$p_\mu \psi = \frac{\hbar}{i} \psi_{,\mu} = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial \psi}{\partial x_\mu}, \quad (15.18)$$

а перед матрицей  $\alpha_\nu$  — на волновую функцию  $\psi^\dagger$ :

$$\psi^\dagger p_\mu = -\frac{\hbar}{i} \psi_{,\mu}^\dagger.$$

Введем понятие орбитального момента количества движения, который характеризуется четырехмерной плотностью  $M_{[\mu\nu]\lambda}$ , представляющей собою тензор третьего ранга, антисимметричный относительно индексов  $\mu$  и  $\nu$ :

$$M_{[\mu\nu]\lambda} = \psi^\dagger M_{[\mu\nu]\lambda} \psi, \quad (15.19)$$

где оператор  $M_{[\mu\nu]\lambda}$  связан с каноническим тензором энергии (15.16) соотношением

$$M_{[\mu\nu]\lambda} = \frac{i'}{c} (x_\mu T_{\nu\lambda} - x_\nu T_{\mu\lambda}), \quad (15.20)$$

причем канонический тензор энергии  $T_{\mu\nu}$  удовлетворяет закону сохранения (15.10). Однако в отличие от тензора энергии  $T_{\mu\nu}$  дивергенция тензора момента  $M_{[\mu\nu]\lambda}$  не обращается в нуль:

$$\frac{\partial}{\partial x_\lambda} M_{[\mu\nu]\lambda} = \frac{\partial}{\partial x_\lambda} \psi^\dagger M_{[\mu\nu]\lambda} \psi = -\frac{i'}{c} \psi^\dagger (T_{\mu\nu} - T_{\nu\mu}) \psi, \quad (15.21)$$

поскольку тензор энергии не симметричен относительно индексов  $\mu$  и  $\nu$  ( $T_{\mu\nu} \neq T_{\nu\mu}$ ). Это обстоятельство говорит о том, что у дираковских частиц, так же как и у фотона (см. (12.10)), должен быть собственный (спиновый) момент количества движения.

Для того чтобы найти спин, учтем, что закону сохранения (15.10) должен удовлетворять также любой тензор

$$T'_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} - \frac{\partial}{\partial x_\lambda} f_{\mu[\nu\lambda]}, \quad (15.22)$$

где произвольная функция  $f_{\mu[\nu\lambda]}$  подчинена условию

$$\frac{\partial^2}{\partial x_\nu \partial x_\lambda} f_{\mu[\nu\lambda]} = 0,$$

т. е. является тензором третьего ранга, антисимметричным относительно индексов  $\nu$  и  $\lambda$ . Так же как и в случае поля фотонов (см. (12.17)), надлежащим выбором  $f_{\mu[\nu\lambda]}$  можно симметризовать канонический тензор энергии  $T_{\mu\nu}$  и получить симметричный (метрический) тензор  $T'_{\mu\nu}$ , приводящий к обобщенному закону сохранения момента количества движения

$$\frac{\partial}{\partial x_\lambda} \{M_{[\mu\nu]\lambda} + S_{[\mu\nu]\lambda}\} = 0. \quad (15.23)$$

Для решения указанной задачи функцию  $f$  мы должны выбрать в виде антисимметричного тензора третьего ранга

$$f_{\mu[\nu\lambda]} = \frac{\hbar c}{4i'} \Psi^+ \alpha_{\mu\nu\lambda} \Psi, \quad (15.24)$$

где матрица  $\alpha_{\mu\nu\lambda}$  определяется равенством (14.85) и удовлетворяет следующему свойству:

$$\alpha_{\mu\nu\lambda} = -\alpha_{\mu\lambda\nu} = -\alpha_{\nu\mu\lambda}. \quad (15.25)$$

Найдем расходимость тензора (15.24), учитывая (15.25):

$$\frac{\partial f_{\mu[\nu\lambda]}}{\partial x_\lambda} = -\frac{\hbar c}{4i'} \sum'' (\Psi^+ \alpha_\lambda \rho_3 \sigma_\mu \rho_3 \sigma_\nu \Psi + \Psi^+ \sigma_\mu \rho_3 \sigma_\nu \rho_3 \alpha_\lambda \Psi). \quad (15.26)$$

Два штриха, поставленные у суммы, означают, что в этой сумме согласно (14.85) мы должны исключить два члена, для которых  $\lambda = \mu$  и  $\lambda = \nu$ .

Из равенств (15.3) и (15.4) следует

$$\begin{aligned} \sum'' \alpha_\lambda \Psi_\lambda &= -\alpha_\mu \Psi_\mu - \alpha_\nu \Psi_\nu - ik_0 \rho_3 \Psi, \\ \sum'' \Psi_\lambda^+ \alpha_\lambda &= -\Psi_\mu^+ \alpha_\mu - \Psi_\nu^+ \alpha_\nu + ik_0 \Psi^+ \rho_3. \end{aligned} \quad (15.27)$$

Подставляя (15.26) в (15.27) и принимая во внимание соотношение

$$\alpha_\mu \rho_3 \sigma_\mu \rho_3 = \rho_1 \quad (15.28)$$

(в равенствах (15.27) и (15.28) суммирование по индексам  $\mu$  и  $\nu$  нет), получаем

$$\frac{\partial f_{\mu[\nu\lambda]}}{\partial x_\lambda} = \frac{\hbar c}{4i'} (\Psi^+ \alpha_\mu \Psi_\nu - \Psi_\nu^+ \alpha_\mu \Psi - \Psi^+ \alpha_\nu \Psi_\mu + \Psi_\mu^+ \alpha_\nu \Psi).$$

Отсюда с помощью (15.22) для метрического тензора энергии находим выражение

$$T'_{\mu\nu} = -\frac{\hbar c}{4i'} (\Psi^+ \alpha_\nu \Psi_\mu - \Psi_\mu^+ \alpha_\nu \Psi + \Psi^+ \alpha_\mu \Psi_\nu - \Psi_\nu^+ \alpha_\mu \Psi). \quad (15.29)$$

Для энергии же получаем старое выражение (15.13).



Согласно (12.11) для тензора плотности «собственного» момента количества движения поля следует написать

$$s_{[\mu\nu]\lambda} = \frac{i'}{c} (\hat{f}_{\mu[\nu\lambda]} - \hat{f}_{\nu[\mu\lambda]}) = \frac{\hbar}{2} \psi^+ \alpha_{\mu\nu\lambda} \psi. \quad (15.30)$$

Отсюда для пространственных составляющих тензора спина имеем

$$s_x = s_{[23]4} = \frac{\hbar}{2} \psi^+ \alpha_{234} \psi, \dots$$

Из формулы (14.86) находим

$$\alpha_{234} = ii' \rho_1 \sigma_2 \rho_3 \sigma_3 i' \rho_1 = -i \sigma_2 \sigma_3 = \sigma_1. \quad (15.31)$$

Поэтому

$$s_x = \frac{\hbar}{2} \psi^+ \sigma_1 \psi. \quad (15.32)$$

Аналогичным способом получим

$$s_y = \frac{\hbar}{2} \psi^+ \sigma_2 \psi, \quad s_z = \frac{\hbar}{2} \psi^+ \sigma_3 \psi. \quad (15.33)$$

Заметим, что полный момент количества движения

$$J_{[\mu\nu]\lambda} = \int \psi^+ J_{[\mu\nu]\lambda} \psi d^3x, \quad (15.34)$$

где

$$J_{[\mu\nu]\lambda} = M_{[\mu\nu]\lambda} + \frac{\hbar}{2} \alpha_{\mu\nu\lambda}, \quad (15.35)$$

удовлетворяет закону сохранения

$$\frac{\partial}{\partial x_\lambda} J_{[\mu\nu]\lambda} = 0. \quad (15.36)$$

Таким образом, мы приходим к понятию четырехмерного псевдовектора спина  $\sigma_\mu$ , с помощью которого можно характеризовать спиновые свойства электронов и позитронов. Однако эта величина не является интегралом движения, поскольку сохраняется только полный момент (15.34), пространственные составляющие которого равны

$$\mathbf{J} = [\mathbf{r}\mathbf{p}] + \frac{\hbar}{2} \boldsymbol{\sigma}. \quad (15.37)$$

Это обстоятельство приводит к ряду трудностей в решении конкретных задач. В самом деле, разделение решений уравнения Дирака по спиновым состояниям с помощью оператора  $\sigma_\mu$  не представляется возможным, поскольку он не коммутирует с гамильтонианом уравнения Дирака (см. (14.19)) и поэтому не может иметь общих с ним собственных функций.

Для характеристики спиновых состояний наряду с псевдовектором спина  $\sigma_\mu$  можно ввести тензор собственного (спино-

вого) магнитного и электрического моментов — антисимметричный тензор второго ранга

$$\alpha_{\mu\nu} = -\alpha_{\nu\mu} = \begin{cases} i\alpha_{\mu\rho_3}\alpha_{\nu} = -i\sigma_{\mu\rho_3}\sigma_{\nu}; & \mu \neq \nu, \\ 0; & \mu = \nu, \end{cases} \quad (15.38)$$

$$\bar{\alpha}_{\mu\nu} = \psi^+ \alpha_{\mu\nu} \psi. \quad (15.39)$$

Отличные от нуля компоненты этого тензора связаны со спиновым магнитным  $\rho_3\sigma$  и электрическим  $\rho_2\sigma$  моментами соотношением (14.76). Однако компоненты тензора (15.38) также не коммутируют с гамильтонианом уравнения Дирака и поэтому тоже не являются интегралами движения.

г) **Решения, когда спин является интегралом движения.** Поскольку нас в дальнейшем будут интересовать решения уравнения Дирака с определенным состоянием спиновой поляризации, т. е. с определенным направлением электронного спина, необходимо построить такой оператор поляризации, который обладал бы необходимыми свойствами ковариантности и являлся бы интегралом движения. В нерелятивистском приближении такой оператор должен быть пропорционален матрицам Паули, описывающим, с одной стороны, спин частицы и коммутирующим, с другой стороны, при отсутствии магнитного поля с нерелятивистским гамильтонианом.

Введем оператор обобщенного спина, представляющий собой псевдотензор [17, 18] \*)

$$F_{\mu\nu} = \frac{1}{4m_0c} \varepsilon_{\lambda\alpha\beta\mu} (p_{\lambda}\alpha_{\nu\alpha\beta} + \alpha_{\nu\alpha\beta}p_{\lambda}) = \frac{1}{4m_0c} \varepsilon_{\lambda\alpha\beta\mu} \varepsilon_{\rho\nu\alpha\beta} (p_{\lambda}\sigma_{\rho} + \sigma_{\rho}p_{\lambda}). \quad (15.40)$$

Эта величина удовлетворяет закону сохранения

$$\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_{\nu}} = \frac{\partial}{\partial x_{\nu}} \psi^+ F_{\mu\nu} \psi = 0, \quad (15.41)$$

благодаря чему временная составляющая псевдотензора  $F_{\mu 4}$ , образующая при интегрировании по трехмерному пространству псевдовектор поляризации  $S_{\mu}$  является интегралом движения:

$$\dot{S}_{\mu} = i' \int \psi^+ F_{\mu 4} \psi d^3x = \text{const}. \quad (15.42)$$

Из (15.40) получаем, что оператор псевдовектора поляризации имеет вид

$$S_{\mu} = i' F_{\mu 4} = -\frac{i'}{2m_0c} (p_4\sigma_{\mu} + \sigma_{\mu}p_4). \quad (15.43)$$

\*) Компоненты псевдотензора  $F_{\mu\nu}$  связаны с компонентами тензора  $f_{\alpha\beta}$  с помощью символа Леви-Чивита

$$F_{\mu\nu} = \varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu} f_{\alpha\beta}.$$

В случае свободного движения  $p_4 = i'H/c$  и поэтому

$$S_\mu = \hat{\sigma}_\mu, \quad (15.44)$$

где для любой из шестнадцати матриц Дирака введено обозначение \*)

$$\hat{\alpha} = \frac{1}{2m_0c^2} \{H\alpha + \alpha H\}. \quad (15.45)$$

Пространственные и временная компоненты псевдовектора поляризации (15.44)

$$S_\mu = (\mathbf{S}, i'S_t), \quad \mathbf{S} = \rho_3\boldsymbol{\sigma} + \rho_1 \frac{\mathbf{p}}{m_0c}, \quad S_t = \frac{1}{m_0c}(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{p}). \quad (15.46)$$

являются интегралами движения [19, 20].

По аналогии с оператором  $F_{\mu\nu}$  можно ввести оператор обобщенного тензора спина (тензор третьего ранга)

$$F_{\mu\nu\lambda} = \frac{1}{2m_0c} \{p_\lambda\alpha_{\mu\nu} + \alpha_{\mu\nu}p_\lambda\}, \quad (15.47)$$

где  $\alpha_{\mu\nu}$  — тензор магнитного и электрического моментов (15.38). Эта величина удовлетворяет закону сохранения

$$\frac{\partial F_{\mu\nu\lambda}}{\partial x_\lambda} = \frac{\partial}{\partial x_\lambda} \psi^+ F_{\mu\nu\lambda} \psi = 0, \quad (15.48)$$

из которого следует, что четвертая составляющая (тензор поляризации) является интегралом движения:

$$M_{\mu\nu} = i' \int \psi^+ F_{\mu\nu 4} \psi d^3x = \text{const}. \quad (15.49)$$

С учетом (15.47) находим [18, 21—23]

$$\begin{aligned} M_{\mu\nu} &= i' F_{\mu\nu 4} = -\frac{i'}{2m_0c} (p_4\alpha_{\mu\nu} + \alpha_{\mu\nu}p_4) = \\ &= \frac{1}{2m_0c^2} \{H\alpha_{\mu\nu} + \alpha_{\mu\nu}H\} = \hat{\alpha}_{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (15.50)$$

\*) Заметим, что если из любой матрицы Дирака образовать выражение (15.45), то в случае отсутствия электромагнитного поля оно станет интегралом движения. В самом деле, составляя коммутатор матрицы  $\hat{\alpha}$  с гамильтонианом, найдем

$$H\hat{\alpha} - \hat{\alpha}H = \frac{1}{2m_0c^2} (H^2\alpha - \alpha H^2) = 0,$$

Квадрат гамильтониана

$$H^2 = c^2p^2 + m_0^2c^4$$

не зависит от матриц  $\alpha$  и поэтому он должен коммутировать с любой из шестнадцати матриц Дирака, благодаря чему выражение (15.45) является интегралом движения.

Компоненты тензора поляризации спина можно представить с помощью равенств

$$\begin{pmatrix} M_{23} & M_{31} & M_{12} \\ M_{41} & M_{42} & M_{43} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 \\ i'\epsilon_1 & i'\epsilon_2 & i'\epsilon_3 \end{pmatrix}. \quad (15.51)$$

Тогда компоненты магнитной спиновой поляризации

$$\boldsymbol{\mu} = \widehat{\rho_3 \boldsymbol{\sigma}} = \frac{1}{2m_0 c^2} \{H \rho_3 \boldsymbol{\sigma} + \rho_3 \boldsymbol{\sigma} H\} = \boldsymbol{\sigma} + \frac{1}{m_0 c} \rho_2 [\boldsymbol{\sigma} \mathbf{p}] \quad (15.52)$$

и электрической спиновой поляризации

$$\boldsymbol{\epsilon} = -\widehat{\rho_2 \boldsymbol{\sigma}} = -\frac{1}{2m_0 c^2} \{H \rho_2 \boldsymbol{\sigma} + \rho_2 \boldsymbol{\sigma} H\} = -\frac{1}{m_0 c} \rho_3 [\boldsymbol{\sigma} \mathbf{p}] \quad (15.53)$$

коммутируют с гамильтонианом и являются интегралами движения.

Таким образом, величины  $S_\mu$  и  $M_{\mu\nu}$  дают возможность разделить решения уравнения Дирака для свободного движения электрона по двум состояниям спиновой поляризации, которые являются интегралами движения. Например, если нас интересуют состояния с проекцией спина на направление движения электрона, то волновую функцию  $\psi$ , удовлетворяющую уравнению Дирака

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi = H\psi, \quad (15.54)$$

можно подчинить еще дополнительному условию

$$\frac{(\boldsymbol{\sigma} \mathbf{p})}{|\mathbf{p}|} \psi = s\psi, \quad (15.55)$$

где согласно (15.46)  $(\boldsymbol{\sigma} \mathbf{p}) = m_0 c S_t$ . Собственные значения описывают ориентацию спина электрона (продольная поляризация) либо по движению ( $s = 1$ ), либо против него ( $s = -1$ ).

В случае свободного движения частицы оказалось возможным ввести еще такой оператор поляризации, который позволяет описывать проекцию спина на произвольное направление. Тогда следует взять трехмерный единичный вектор спина  $\boldsymbol{\sigma}^0$ , составленный из пространственных и временной компонент четырехмерного вектора поляризации  $S_\mu$  [21, 24, 25]:

$$\boldsymbol{\sigma}^0 = \frac{\mathbf{p} S_t}{p^2} + \frac{[\mathbf{p} [S, \mathbf{p}]]}{p^2} = \frac{\mathbf{p} (\boldsymbol{\sigma} \mathbf{p})}{p^2} + \rho_3 \frac{\boldsymbol{\sigma} p^2 - \mathbf{p} (\boldsymbol{\sigma} \mathbf{p})}{p^2}. \quad (15.56)$$

Если воспользоваться формулами (15.46), (15.53), а также оператором

$$H = c(\boldsymbol{\alpha} \mathbf{p}) + \rho_3 m_0 c^2,$$

имеющим собственные значения  $E = c \sqrt{p^2 + m_0^2 c^2}$ , то вектор  $\boldsymbol{\sigma}^0$  можно связать с собственным магнитным и спиновым

моментами при помощи соотношения

$$\sigma^0 = \frac{c}{E} \mu + \frac{c p}{E(E/c + m_0 c)} S_t. \quad (15.57)$$

Вектор спина  $\sigma^0$  в случае свободного движения коммутирует с гамильтонианом и поэтому является интегралом движения. Точнее, гамильтониан должен коммутировать и с любой его проекцией, т. е. должно иметь место соотношение

$$(\sigma^0 s^0) \psi = s \psi, \quad (15.58)$$

где  $s^0$  — единичный вектор произвольного направления. Применяя оператор к равенству (15.58), мы получаем, что

$$(\sigma^0 s^0)(\sigma^0 s^0) \psi = s^2 \psi.$$

Учитывая соотношение

$$(\sigma^0 s^0)(\sigma^0 s^0) = 1,$$

находим  $s = \pm 1$ , т. е. матрица  $\sigma^0$  играет роль трехмерного единичного вектора, который не обладает тензорными свойствами и подчиняется при лоренцевых вращениях особому закону преобразования (15.94).

Для установления связи между операторами псевдовектора поляризации (15.46), тензора поляризации (15.51) и единичного трехмерного вектора поляризации (15.56), а также уточнения их физического смысла обратимся к известному представлению Фолди — Вутхаузена [26]. Как известно, у дираковской частицы с положительной энергией имеется два независимых состояния при каждом значении импульса. Эти состояния соответствуют двум возможным ориентациям спина. Однако волновая функция уравнения Дирака содержит всего четыре компоненты, что соответствует существованию решений с отрицательным значением энергии. В связи с этим в обычной формулировке теории Дирака возможность интерференции состояний с положительной и отрицательной энергией накладывает характерный отпечаток на интерпретацию операторных величин, наделяя их, на первый взгляд, несколько необычными свойствами и затрудняя тем самым их физическое истолкование\*).

Интерференция «верхних»  $\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}$  и «нижних»  $\begin{pmatrix} \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix}$  компонент волновой функции  $\psi$  приводит к особому характеру дви-

\*) Так, в частности, можно рассмотреть оператор скорости

$$\dot{r} = \frac{i}{\hbar} (Hr - rH) = c\alpha,$$

причем, в силу того, что  $\alpha_i^2 = 1$ , проекция этого оператора на любое направление всегда давала бы значение  $c$ , что физически несостоятельно [2, 13].

жения электрона, накладывая на него так называемое «шредингеровское дрожание» — быстрые осцилляции с частотой  $\omega = 2E/\hbar$ . Вместе с тем переход к двухкомпонентным волновым функциям при фиксированном знаке энергии, очевидно, смог бы устранить эти трудности, и тогда физическая интерпретация операторов могла бы стать более прозрачной.

Заметим, что в нерелятивистском приближении ( $v/c \rightarrow 0$ ) две из четырех компонент функции Дирака, а именно,  $\psi_3$  и  $\psi_4$  обращаются в нуль. Это открывает возможность отыскания такого представления, в котором волновая функция не только в системе покоя ( $v = 0$ ), но и в любой системе отсчета имеет всего две компоненты, отвечающие двум значениям проекции спина. Эта задача решается переходом к представлению Фолди — Вутхаузена, в котором волновая функция  $\psi$  и оператор  $F$  преобразуются по закону

$$\psi^{\Phi-B} = e^{i\omega}\psi, \quad F^{\Phi-B} = e^{i\omega}F e^{-i\omega}, \quad (15.59)$$

где унитарный оператор преобразования имеет вид [27]

$$e^{\pm i\omega} = \frac{E + m_0 c^2 \pm \rho_3 c (\alpha p)}{\sqrt{2E(E + m_0 c^2)}}. \quad (15.60)$$

Переход к двухкомпонентным волновым функциям устраняет «шредингеровское дрожание», и операторы получают более наглядное истолкование\*).

Рассмотрим некоторые спиновые операторы в представлении Фолди — Вутхаузена. Пусть в системе координат, связанной с электроном, поляризация частицы описывается четырехмерным спиновым оператором  $S_u^{\Phi-B} = (\rho_3 \sigma, 0)$ . Тогда в представлении Дирака этому оператору отвечает единичная трехмерная матрица

$$\begin{aligned} \sigma^0 &= e^{-i\omega} \rho_3 \sigma e^{i\omega} = \rho_3 \sigma + c \rho_1 \frac{p}{E} - \frac{c^2 \rho_3 (\sigma p) p}{E(E + m_0 c^2)} = \\ &= \rho_3 \sigma + \frac{p (\sigma p)}{p^2} - \rho_3 \frac{p (\sigma p)}{p^2}, \quad \sigma_4^0 \equiv 0. \end{aligned} \quad (15.61)$$

\* Так, в частности, для оператора скорости вместо дираковского выражения  $\dot{r} = c\alpha$  мы получаем в импульсном представлении

$$\dot{r}^{\Phi-B} = \frac{i}{\hbar} \{H^{\Phi-B} r - r H^{\Phi-B}\} = \rho_3 \frac{c^2 p}{E}.$$

При выводе этого соотношения мы учли, что  $H^{\Phi-B} = \rho_3 E = \rho_3 \sqrt{m_0^2 c^4 + c^2 p^2}$  и  $x = i\hbar \frac{\partial}{\partial p_x}$ . Производя преобразование, получаем, что в представлении Дирака этому соответствует оператор скорости вида

$$\dot{r} = e^{-i\omega} \rho_3 \frac{c^2 p}{E} e^{i\omega} = \frac{c^2 p}{E} \frac{\rho_3 m_0 c^2 + c (\alpha p)}{E},$$

В последнем равенстве мы учли выражение для оператора Гамильтона  $E = c(\alpha\mathbf{p}) + \rho_3 m_0 c^2$ . Это совпадает с выражением для трехмерного вектора поляризации (15.56).

Перейдем к лабораторной системе координат с помощью преобразований Лоренца, когда компоненты вектора преобразования изменяются по формуле

$$x_\mu = a_{\mu\nu} x'_\nu, \quad (15.62)$$

где матрица преобразования имеет вид ( $i, j = 1, 2, 3$ )

$$a_{ij} = \delta_{ij} + \frac{p_i p_j}{m_0 (E + m_0 c^2)}, \quad a_{i4} = -a_{4i} = -i' \frac{p_i}{m_0 c}, \quad a_{44} = \frac{E}{m_0 c^2}. \quad (15.63)$$

Представляя эту матрицу оператором, находим в лабораторной системе координат

$$S_\mu = a_{\mu\nu} e^{-i\omega} S_\nu^{\Phi\text{-B}} e^{i\omega} = \{S, iS_i\}. \quad (15.64)$$

Здесь пространственные и временная компоненты с точностью до постоянного множителя совпадают с выражениями для четырехмерного псевдовектора поляризации (15.46):

$$\mathbf{S} = \rho_3 \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{p} \frac{1}{m_0 c} \rho_1, \quad S_t = \frac{1}{m_0 c} (\boldsymbol{\sigma} \mathbf{p}). \quad (15.65)$$

Если, наконец, в системе, связанной с электроном, выбрать в качестве оператора поляризации тензор, совпадающий с  $\alpha_{\mu\nu}$  (см. (15.38)):

$$S_{ij}^{\Phi\text{-B}} = \varepsilon_{ijk} S_k^{\Phi\text{-B}}, \quad S_{i4}^{\Phi\text{-B}} = S_{4i}^{\Phi\text{-B}} = 0, \quad (15.66)$$

то преобразование этой величины в лабораторную систему

$$M_{\mu\nu} = a_{\mu\rho} a_{\nu\lambda} e^{-i\omega} S_{\rho\lambda}^0 e^{i\omega} \quad (15.67)$$

приводит нас к тензору поляризации (15.51)

$$M_{\mu\nu} = \hat{a}_{\mu\nu}. \quad (15.68)$$

Таким образом, псевдовектор поляризации и тензор поляризации могут быть получены с помощью преобразования спинового оператора, взятого в системе координат, связанной с электроном, в лабораторную систему. Заметим, однако, что проведенные нами преобразования имеют место лишь для свободных частиц.

**д) Свободное движение электрона.** Найдем прежде всего полное решение уравнения Дирака с учетом двух значений энергии (положительной и отрицательной) и двух возможных направлений спина.

Уравнение Дирака, разделяющее состояния электрона по знаку энергии, имеет вид

$$E\psi = H\psi, \quad (15.69)$$

где операторы энергии и гамильтониана соответственно равны

$$E = -\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial t}, \quad H = c\rho_1(\sigma p) + \rho_3 m_0 c^2. \quad (15.70)$$

В качестве уравнения, разделяющего состояния электрона по спинам, мы выберем уравнение (15.58), которое с учетом  $\mathbf{p} = \frac{\hbar}{i} \nabla$  и  $|\mathbf{p}| = \hbar k$  может быть представлено в виде

$$\frac{(\sigma \nabla)}{ik} \psi = s\psi. \quad (15.71)$$

Нетрудно убедиться, что оператор  $S_t = (\sigma \nabla)/ik$  коммутирует с гамильтонианом (15.70) и поэтому уравнения (15.69) и (15.71) могут иметь одинаковые собственные функции.

Частные решения уравнений (15.69) и (15.71) будем искать в виде

$$\psi(\mathbf{k}) = \frac{1}{L^{3/2}} b e^{-iceKt + i\mathbf{k}\mathbf{r}}. \quad (15.72)$$

Здесь  $L$  — длина периодичности, с которой связан волновой вектор  $\mathbf{k} = \mathbf{p}/\hbar$  соотношением

$$k_i = \frac{2\pi n_i}{L}, \quad n_i = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots, \quad (15.73)$$

где

$$\begin{aligned} k_1 = k_x, \dots, K = \sqrt{k^2 + k_0^2}, \\ k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}, \quad k_0 = m_0 c/\hbar; \end{aligned} \quad (15.74)$$

амплитуда  $b$  представляет собою матрицу

$$b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix}, \quad (15.75)$$

удовлетворяющую условию нормировки

$$b^+ b = b_1^* b_1 + b_2^* b_2 + b_3^* b_3 + b_4^* b_4 = 1. \quad (15.76)$$

Подставляя решения (15.72) в уравнения (15.71) и (15.69), мы найдем для определения матриц  $b$ , а также величин  $\varepsilon$  и  $s$  следующие матричные уравнения:

$$(ks - (\sigma \mathbf{k})) b = 0, \quad (\varepsilon K - s\rho_1 k - \rho_3 k_0) b = 0, \quad (15.77)$$

которые мы можем записать в виде системы уравнений:

$$\begin{aligned} (sk - k_3) b_{1,3} = k_1^* b_{2,4}, \quad (sk + k_3) b_{2,4} = k_{12} b_{1,3}, \\ (\varepsilon K - k_0) b_{1,2} = sk b_{3,4}, \quad (\varepsilon K + k_0) b_{3,4} = sk b_{1,2}, \end{aligned} \quad (15.78)$$



где  $k_{12} = k_1 + ik_2$ . Отсюда мы находим два значения для спина:  $s = 1$  (спин направлен по движению) и  $s = -1$  (спин направлен против движения) и два значения для энергии:  $\varepsilon = 1$  (положительная энергия,  $E = c\hbar K$ ) и  $\varepsilon = -1$  (отрицательная энергия,  $E = -c\hbar K$ ).

Решение для матрицы  $b$  следует искать в виде

$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} A_1 B_1 \\ A_1 B_2 \\ A_2 B_1 \\ A_2 B_2 \end{pmatrix}. \quad (15.79)$$

Тогда для определения постоянных  $A_{1,2}$  и  $B_{1,2}$  получаем уравнения

$$\begin{aligned} (sk - k_3) B_1 &= k_{12}^* B_2, & (sk + k_3) B_2 &= k_{12} B_1, \\ (\varepsilon K - k_0) A_1 &= sk A_2, & (\varepsilon K + k_0) A_2 &= sk A_1. \end{aligned} \quad (15.80)$$

Условие нормировки (15.76) принимает в этом случае вид

$$b^+ b = \frac{1}{4} (A_1^* A_1 + A_2^* A_2) (B_1^* B_1 + B_2^* B_2) = 1. \quad (15.81)$$

Из уравнений (15.80) и (15.81) находим

$$\begin{aligned} A_1 &= \sqrt{1 + \varepsilon k_0 / K}, & A_2 &= \varepsilon s \sqrt{1 - \varepsilon k_0 / K}, \\ B_1 &= s e^{-i\varphi/2} \sqrt{1 + s \cos \theta}, & B_2 &= e^{i\varphi/2} \sqrt{1 - s \cos \theta}, \end{aligned} \quad (15.82)$$

где  $\theta$  и  $\varphi$  — сферические углы волнового вектора  $\mathbf{k}$  ( $k_{12} = k \sin \theta e^{i\varphi}$ ,  $k_3 = k \cos \theta$ ).

С помощью (15.82) легко также показать условие ортонормированности матриц, соответствующих четырем решениям ( $\varepsilon = \pm 1$ ,  $s = \pm 1$ ) при заданном импульсе  $\mathbf{k}$ :

$$b^+(\mathbf{k}, s', \varepsilon') b(\mathbf{k}, s, \varepsilon) = \delta_{ss'} \delta_{\varepsilon\varepsilon'}. \quad (15.83)$$

Что касается полного решения уравнения Дирака (15.69), то оно принимает вид

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{L^{3/2}} \sum_{\mathbf{k}, \varepsilon, s} b(\mathbf{k}, s, \varepsilon) C(\mathbf{k}, s, \varepsilon) e^{-i\varepsilon c K t + i\mathbf{k}\mathbf{r}}, \quad (15.84)$$

где  $C(\mathbf{k}, s, \varepsilon)$  — амплитуды (не матрицы), квадраты которых определяют вероятности нахождения частицы в состоянии  $\mathbf{k}$ ,  $s$ ,  $\varepsilon$ .

**е) Исследование спиновых свойств свободного электрона.** Исследуем прежде всего поляризацию спина электрона, ограничиваясь состояниями с положительной энергией ( $\varepsilon = 1$ ). Не нарушая общности, мы можем ось  $z$  направить по импульсу ча-

стицы, т. е. положить  $k_x = k_y = 0$ ,  $k_z = k$ . Тогда решение (15.72), описывающее подобное движение, принимает вид

$$\begin{aligned} \psi(k, \varepsilon = 1) = \\ = \frac{1}{L^{3/2} \sqrt{2}} \left[ C_1 \begin{pmatrix} \sqrt{1 + k_0/K} \\ 0 \\ \sqrt{1 - k_0/K} \\ 0 \end{pmatrix} + C_{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{1 + k_0/K} \\ 0 \\ -\sqrt{1 - k_0/K} \end{pmatrix} \right] e^{-icKt + ikz}, \end{aligned} \quad (15.85)$$

где амплитуды  $C_1$  и  $C_{-1}$  характеризуют состояния соответственно с  $s = 1$  и  $s = -1$ , причем согласно условию нормировки

$$C_1^* C_1 + C_{-1}^* C_{-1} = 1. \quad (15.86)$$

Поляризация спина может характеризоваться тремя величинами:

трехмерным вектором спина (см. (15.56)), составляющие которого при  $k_x = k_y = 0$ ,  $k_z = k$  становятся равными

$$\sigma_z^0 = \sigma_3, \quad \sigma_x^0 = \rho_3 \sigma_1, \quad \sigma_y^0 = \rho_3 \sigma_2; \quad (15.87)$$

четырёхмерным псевдовектором спина (см. (15.46)) с составляющими

$$\begin{aligned} S_z = \rho_3 \sigma_3 + \frac{k}{k_0} \rho_1, \quad S_x = \rho_3 \sigma_1, \\ S_y = \rho_3 \sigma_2, \quad S_t = \frac{k}{k_0} \sigma_3; \end{aligned} \quad (15.88)$$

составляющими тензора второго ранга (15.52):

$$\begin{aligned} \mu_x = \sigma_1 + \frac{k}{k_0} \rho_2 \sigma_2, \quad \mu_y = \sigma_2 - \frac{k}{k_0} \rho_2 \sigma_1, \quad \mu_z = \sigma_3, \\ \varepsilon_x = -\frac{k}{k_0} \rho_3 \sigma_2, \quad \varepsilon_y = \frac{k}{k_0} \rho_3 \sigma_1, \quad \varepsilon_z = 0. \end{aligned} \quad (15.89)$$

Найдем средние значения от этих величин, которые даже при введении отрицательной энергии не должны зависеть от времени, так как соответствующие операторы коммутируют с гамильтонианом:

для составляющих трехмерного единичного вектора спина:

$$\begin{aligned} s_x = \int \psi^+ \rho_3 \sigma_1 \psi d^3x = C_{-1}^* C_1 + C_1^* C_{-1}, \\ s_y = \int \psi^+ \rho_3 \sigma_2 \psi d^3x = i(C_{-1}^* C_1 - C_1^* C_{-1}), \\ s_z = \int \psi^+ \sigma_3 \psi d^3x = C_1^* C_1 - C_{-1}^* C_{-1}; \end{aligned} \quad (15.90)$$

для четырехмерного псевдовектора спина

$$S_{x,y} = s_{x,y}, \quad S_z = \frac{K}{k_0} s_z, \quad S_t = \frac{k}{k_0} s_z; \quad (15.91)$$

для тензора спина

$$\mu_{x,y} = \frac{K}{k_0} s_{x,y}, \quad \mu_z = s_z, \quad \varepsilon_{x,y} = \mp \frac{k}{k_0} s_{y,x}. \quad (15.92)$$

Отсюда видно, что квадрат трехмерного вектора спина с учетом условия нормировки (15.86) равняется единице:

$$s_x^2 + s_y^2 + s_z^2 = (C_1^* C_1 + C_{-1}^* C_{-1})^2 = 1. \quad (15.93)$$

Интересно отметить, что при лоренцевых преобразованиях временная составляющая этого вектора не появляется. Что касается первых трех составляющих, то они преобразуются по закону [21]

$$\begin{aligned} s'_z &= s_z \cos \gamma + s_x \sin \gamma, \\ s'_x &= s_x \cos \gamma - s_z \sin \gamma, \quad s'_y = s_y, \end{aligned} \quad (15.94)$$

где

$$\begin{aligned} \cos \gamma &= \frac{\beta_1 - \beta \cos \theta}{B}, \quad \sin \gamma = \frac{\beta \sqrt{1 - \beta_1^2} \sin \theta}{B}, \\ B &= \sqrt{(\beta_1 - \beta \cos \theta)^2 + \beta^2 (1 - \beta_1^2) \sin^2 \theta}. \end{aligned} \quad (15.95)$$

Здесь  $c\beta_1 = ck/K$  — скорость частицы в нештрихованной системе координат,  $c\beta$  — скорость штрихованной системы координат относительно нештрихованной. Эта скорость лежит в плоскости  $xz$  и составляет с осью  $z$  угол  $\theta$ .

В штрихованной системе координат согласно формуле (15.94) трехмерная длина вектора  $s'$  остается также равной единице:

$$s'^2 = 1. \quad (15.96)$$

Заметим, что при наличии одной лишь продольной поляризации ( $s_y = s_x = 0$ ,  $s_z = \pm 1$ ) будем иметь круговую поляризацию. В отличие от терминологии, принятой в теории фотонов, для дираковских частиц круговая поляризация называется спиральностью. Спиральность характеризует вращение вектора поляризации относительно импульса. При  $s_3 = 1$  ( $C_1 = 1$ ,  $C_{-1} = 0$ ) мы имеем правую спиральность, а при  $s_3 = -1$  ( $C_1 = 0$ ,  $C_{-1} = 1$ ) — левую. В самом деле, как видно из формулы (15.85),

$$\sigma_x^0 \psi = -i s_3 \sigma_y^0 \psi. \quad (15.97)$$

Учитывая зависимость волновой функции от времени  $\psi \sim e^{-icKt}$ , мы находим, что вращение вектора поляризации будет совершаться от оси  $x$  к оси  $y$ , расположенной перпендикулярно к импульсу (ось  $z$ ). Следовательно, случай  $s_3 = 1$  (правая спираль-

ность) описывает в правой системе координат правый винт, а при  $s_3 = -1$  (левая спиральность) — левый винт \*).

Что касается четырехмерного псевдовектора спина (см. (15.91)), то он является пространственноподобным псевдовектором:

$$S^2 - S_t^2 = 1,$$

в противоположность четырехмерному вектору импульса, который является времениподобным вектором:

$$k_t^2 - k^2 = k_0^2,$$

где

$$k_t = K = \sqrt{k^2 + k_0^2}.$$

При преобразованиях Лоренца составляющие псевдовектора будут преобразовываться так же, как и составляющие вектора. Аналогично мы можем найти закон преобразования и для составляющих тензора спина. Заметим, что при нашем выборе координат ( $k_x = k_y = 0$ ,  $k_z \neq 0$ ) составляющие вдоль оси  $z$  описывают продольную поляризацию, а составляющие вдоль осей  $x$ ,  $y$  — поперечную.

Вообще говоря, для описания поляризационных свойств электронов можно ограничиться введением единичного трехмерного вектора  $s$ , с помощью которого можно найти как продольную ( $s_z$ ), так и поперечную ( $s_x$  и  $s_y$ ) поляризации. Однако при включении магнитных или электрических полей этот вектор может и не сохраняться. В ультрарелятивистском случае поперечная составляющая псевдовектора спина будет исчезающе мала по сравнению с продольной, а для тензора поляризации, наоборот, будет стремиться к нулю продольная составляющая. Поэтому в ультрарелятивистском случае следует продольную поляризацию описывать четырехмерным псевдовектором спина, а поперечную — пространственными составляющими тензора поляризации.

В нерелятивистском случае (приближение Паули) мы можем положить  $k/k_0 = 0$ ,  $K/k_0 = 1$ ,  $\rho_3 = 1$ . Тогда у трехмерного единичного вектора, а также у псевдовектора спина и пространственных составляющих тензора спина останутся только три составляющие, которые можно описывать матрицами Паули

$$\sigma_x^0 = S_x = \mu_x = \sigma'_1, \quad \sigma_y^0 = S_y = \mu_y = \sigma'_2, \quad \sigma_z^0 = S_z = \mu_z = \sigma'_3, \quad (15.98)$$

\* При инверсии пространства ( $r = -r$ ), т. е. при переходе к левой системе координат, наоборот, при  $s_3 = 1$  будем иметь левый винт, а при  $s_3 = -1$  — правый. Этот результат является вполне естественным, так как в скалярном произведении  $s_3 = (sk^0)$ , величина  $k^0$  является полярным единичным вектором импульса, а  $s$  — аксиальным единичным вектором. Поэтому при инверсии пространства вектор  $k^0$  изменяет свое направление, а направление  $s$  остается без изменения. Скалярное же произведение  $s_3$ , хотя и изменяет свой знак, но описывает ту же форму спиральности.

поскольку у матриц  $b$  (см. (15.85)) остается только по одной составляющей, соответствующей функциям  $\psi_1$  и  $\psi_2$ . В приближении Паули мы можем положить \*)

$$b(s=1) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b(s=-1) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (15.99)$$

**ж) Спиновые свойства при наличии электромагнитного поля.** Псевдовектор и тензор спина для свободной частицы (см. (15.43) и (15.50)) допускают простое обобщение на случай движения электрона во внешнем электромагнитном поле

$$\mathbf{E} = -\text{grad } \Phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad \mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{A}. \quad (15.100)$$

Сохраняя необходимую релятивистскую ковариантность, мы должны для этой цели импульс  $p_\mu$  заменить на обобщенный импульс  $P_\mu$  по формуле

$$P_\mu \rightarrow \mathcal{P}_\mu = p_\mu - \frac{e}{c} A_\mu, \quad (15.101)$$

где  $A_\mu = (\mathbf{A}, i'\Phi)$  — четырехмерный вектор-потенциал. Тогда для составляющих четырехмерного вектора поляризации мы получим выражение

$$S_\mu = -\frac{i'}{2m_0c} (P_4 \sigma^\mu + \sigma^\mu P_4). \quad (15.102)$$

Учитывая, что при наличии поля

$$P_4 = \frac{i'}{c} (H - e\Phi), \quad \mathbf{H} = c(\alpha\mathbf{P}) + \rho_3 m_0 c^2 + e\Phi, \quad (15.103)$$

мы вместо (15.45) имеем

$$\hat{\alpha} = \frac{1}{2m_0c^2} \{ (H - e\Phi) \alpha + \alpha (H - e\Phi) \}. \quad (15.104)$$

\*) Если написать решение нерелятивистского уравнения Паули:

$$\psi = \frac{1}{L^{3/2}} \sum_s C_s b_s e^{-ictk^2/2k + ikz},$$

то для собственных значений найдем

$$\begin{aligned} s_x = S_x = \mu_x &= C_1^* C_{-1} + C_{-1}^* C_1, \\ s_y = S_y = \mu_y &= i(C_1^* C_{-1} - C_{-1}^* C_1), \\ s_z = S_z = \mu_z &= C_1^* C_1 - C_{-1}^* C_{-1}. \end{aligned} \quad (15.98a)$$

Для компонент оператора псевдовектора поляризации получаем следующие значения (см. (15.46)):

$$S_{\mu} = (\mathbf{S}, i' S_t) = m_0 c (\hat{\sigma}, i' \hat{\rho}), \quad (15.105)$$

где

$$\mathbf{S} = \hat{\sigma} = \rho_3 \boldsymbol{\sigma} + \rho_1 \mathbf{P} \frac{1}{m_0 c}, \quad S_t = \hat{\rho}_1 = (\boldsymbol{\sigma} \mathbf{P}) \frac{1}{m_0 c}. \quad (15.106)$$

Исследуем поведение этих операторов во времени, чтобы определить условия, при которых какая-либо из компонент вектора поляризации может стать интегралом движения. С этой целью находим

$$\frac{d\mathbf{S}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial t} + \frac{i}{\hbar} \{H \hat{\sigma} - \hat{\sigma} H\} = e (\rho_1 \mathbf{E} + [\boldsymbol{\sigma} \mathbf{H}]), \quad (15.107)$$

$$\frac{dS_t}{dt} = \frac{\partial S_t}{\partial t} + \frac{i}{\hbar} \{H \hat{\rho}_1 - \hat{\rho}_1 H\} = \frac{e}{m_0 c} (\boldsymbol{\sigma} \mathbf{E}). \quad (15.108)$$

Отсюда следует, что в случае магнитного поля с фиксированным направлением ( $\mathbf{H}^0 = \text{const}$ ) при отсутствии электрического поля ( $\mathbf{E} = 0$ ) интегралами движения являются временная составляющая псевдовектора поляризации  $S_t = (\boldsymbol{\sigma} \mathbf{P})$ , а также проекция пространственной компоненты на направление внешнего магнитного поля  $(\mathbf{S} \mathbf{H})/H$ . В случае же отсутствия магнитного поля ( $\mathbf{H} = 0$ ) интегралом движения будет проекция компоненты  $\mathbf{S}$ , направленная вдоль электрического поля.

Тензор поляризации спина (см. (15.50)) мы можем также обобщить на случай движения электрона во внешнем электромагнитном поле:

$$M_{\mu\nu} = \frac{1}{2m_0 c^2} \{(\mathbf{H} - e\Phi) \alpha_{\mu\nu} + \alpha_{\mu\nu} (\mathbf{H} - e\Phi)\}. \quad (15.109)$$

Отсюда для компонент тензора поляризации вместо (15.52), (15.53) находим [22, 25]

$$\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\sigma} + \rho_2 [\boldsymbol{\sigma} \mathbf{P}] \frac{1}{m_0 c}, \quad \varepsilon = \rho_3 [\boldsymbol{\sigma} \mathbf{P}] \frac{1}{m_0 c}. \quad (15.110)$$

Изменение этих величин в единицу времени может быть найдено по формулам

$$\frac{d\boldsymbol{\mu}}{dt} = e \rho_3 [\boldsymbol{\sigma} \mathbf{H}] + e \rho_2 [\boldsymbol{\sigma} \mathbf{E}], \quad (15.111)$$

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = -e \rho_2 [\boldsymbol{\sigma} \mathbf{H}] + e \rho_3 [\boldsymbol{\sigma} \mathbf{E}]. \quad (15.112)$$

В случае наличия лишь магнитного поля с фиксированным на-

правлением ( $\mathbf{E} = 0$ ) интегралом движения будет проекция спина на направление магнитного поля и наоборот.

Заметим, что проекция единичного трехмерного вектора поляризации  $\sigma^0$  (см. (15.56)) на направление внешнего магнитного поля также является интегралом движения. Таким образом, при движении электрона в электромагнитном поле поляризацию спина можно описывать с помощью проекции спина на некоторые избранные направления. Направление спина можно описывать с помощью трехмерного единичного вектора  $\sigma^0$ , псевдовектора  $S_\mu$  и тензора  $M_{\mu\nu}$ .

Однако положение несколько изменяется, если перейти к уравнению Дирака, включающему дополнительный магнитный и электрический моменты частицы [28]. Релятивистские свойства уравнения Дирака не будут нарушены, если в уравнение будет добавлен член, описывающий взаимодействие спинового магнитного и электрического моментов с внешним электрическим и магнитным полями. Тогда уравнение Дирака может быть представлено в виде

$$\{\alpha_\mu P_\mu + \rho_3 m_0 c\} \psi = -g \frac{\mu_0}{2c} \alpha_{\mu\nu} H_{\mu\nu} \psi, \quad (15.113)$$

где

$$P_\mu = p_\mu - \frac{e}{c} A_\mu, \quad (15.114)$$

$g$  — безразмерный параметр \*),  $\mu_0 = e_0 \hbar / 2m_0 c$  — магнетон Бора,  $H_{\mu\nu}$  — тензор электромагнитного поля:

$$H_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu}. \quad (15.115)$$

Переходя к обычной записи уравнения Дирака, получаем

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi = \{c(\alpha\mathbf{P}) + \rho_3 m_0 c^2 + e\Phi + g\mu_0 [\rho_2(\sigma\mathbf{E}) + \rho_3(\sigma\mathbf{H})]\} \psi. \quad (15.116)$$

Тогда при движении электрона в магнитном поле ( $\mathbf{E} = 0$ ) единственным интегралом движения остается проекция пространственных компонент тензора поляризации  $\mu$  на направление магнитного поля. Остальные проекции перестают быть интегралами движения.

Если же мы не учитываем взаимодействия с вакуумом и рассматриваем обычное движение электрона в электромагнитном поле ( $g = 0$ ), то в свете изложенного состояния продольной по-

\*) В случае учета взаимодействия с электромагнитным вакуумом постоянную  $g$  следует положить  $g = \alpha/2\pi$  ( $\alpha = e_0^2/\hbar c$ ) (см., например, [1]). Уравнения с  $g \neq 0$  вводят также для описания движения нуклонов — частиц, у которых магнитный и электрический моменты пропорциональны ядерному магнетону  $\mu_{\text{ядерн}} = e_0 \hbar / 2Mc$ , где  $M$  — масса протона.

ляризации электрона (проекция спина на направление движения) удобнее всего описывать с помощью  $S_t$ -составляющей псевдовектора поляризации спина. Проекцию спина на направление магнитного поля лучше всего определить с помощью тензора поляризации \*).

### § 16. О ВТОРИЧНОМ КВАНТОВАНИИ УРАВНЕНИЯ ДИРАКА

**а) Общие сведения.** Ограничимся рассмотрением случая свободного движения [29, 30]. В этом случае имеем: для функции Гамильтона (см. (15.15))

$$H = \int \psi^+ H \psi d^3x = \sum_{\mathbf{k}, s, \varepsilon} c \hbar \varepsilon K C^+ C; \quad (16.1)$$

для трехмерного импульса частиц (см. (15.15))

$$\mathbf{G} = \int \psi^+ \mathbf{p} \psi d^3x = \sum_{\mathbf{k}, s, \varepsilon} \hbar \mathbf{k} C^+ C; \quad (16.2)$$

для заряда частицы (см. (14.31))

$$Q = e \int \psi^+ \psi d^3x = e \sum_{\mathbf{k}, s, \varepsilon} C^+ C; \quad (16.3)$$

для проекции спина на направление импульса (см. (15.71))

$$S = \int \psi^+ \frac{(\nabla \sigma)}{ik} \psi d^3x = \sum_{\mathbf{k}, s, \varepsilon} s C^+ C, \quad (16.4)$$

где

$$C = C(\mathbf{k}, s, \varepsilon), \quad C' = C(\mathbf{k}', s', \varepsilon'). \quad (16.5)$$

При получении выражений (16.1)–(16.4) мы использовали решение (15.84) и учли соотношение

$$\frac{1}{L^3} \int e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')r} d^3x = \delta_{n_1 n_1'} \delta_{n_2 n_2'} \delta_{n_3 n_3'} = \delta_{\mathbf{k} \mathbf{k}'}, \quad (16.6)$$

а также условие ортонормированности (15.83). Для вторичного квантования уравнения Дирака мы воспользуемся квантовыми скобками Пуассона (см. (12.69)), которые имеют вид

$$-icK\varepsilon C = \frac{i}{\hbar} (HC - CH), \quad (16.7)$$

\*) Заметим, что если отсутствует движение электрона вдоль магнитного поля, то проекция спина электрона на направление магнитного поля совпадает с «поперечной» поляризацией электрона (перпендикулярной к его импульсу). Как было показано в [21], поперечная составляющая псевдовектора  $\mathbf{S}$  в случае ультрарелятивистского движения становится исчезающе малой, в то время как составляющие компоненты тензора поляризации спина практически не исчезают.



т. е.

$$-icK\epsilon C = -\frac{i}{\hbar} \sum_{k', s', \epsilon'} c\hbar\epsilon'K [(C'^+C + CC'^+)C' - C'^+(CC' + C'C)]. \quad (16.8)$$

Для того чтобы удовлетворить соотношениям (16.7) и (16.8), мы должны написать следующие перестановочные соотношения:

$$\begin{aligned} C'^+C + CC'^+ &= \delta_{kk'}\delta_{ss'}\delta_{\epsilon\epsilon'}, \\ C'C + CC' &= 0, \quad C'^+C^+ + C^+C'^+ = 0, \end{aligned} \quad (16.9)$$

т. е. отличным от нуля будет только один антикоммутиатор

$$C^+C + CC^+ = 1. \quad (16.10)$$

Эти перестановочные соотношения соответствуют статистике Ферми — Дирака (см. ниже). В этом случае мы сможем сделать так, что энергия всех частиц будет положительной как с  $\epsilon = 1$ , так и с  $\epsilon = -1$ .

Вообще говоря, если гамильтониан имеет вид

$$H = \sum c\hbar K [C^+(\epsilon = 1)C(\epsilon = 1) \pm C^+(\epsilon = -1)C(\epsilon = -1)],$$

то при наличии знака плюс (см., например, поле фотона или поле скалярных частиц) при вторичном квантовании мы должны ввести бозевские перестановочные соотношения, при наличии же знака минус — фермиевские. Мы сможем удовлетворить перестановочным соотношениям (16.10), если положим

$$C^+C = N, \quad CC^+ = 1 - N, \quad (16.11)$$

где  $N$  — число частиц в состоянии  $k, s, \epsilon$ . Поскольку эти произведения входят симметрично, то вторым решением, удовлетворяющим уравнению (16.10), будет

$$C^+C = 1 - N, \quad CC^+ = N. \quad (16.12)$$

Для того чтобы энергия частиц оставалась положительной величиной, мы должны для частиц с  $\epsilon = 1$  выбрать соотношения (16.11), а для частиц с  $\epsilon = -1$  — (16.12).

Кроме того, в соответствии с формулами (16.1) — (16.4) мы должны положить

$$\begin{aligned} C(k, s, \epsilon = 1) &= C(k, s), \quad C^+(k, s)C(k, s) = N_s(k), \\ C(k, s, \epsilon = -1) &= \tilde{C}^+(-k, s), \quad \tilde{C}^+(-k, s)\tilde{C}(-k, s) = \tilde{N}_s(-k). \end{aligned} \quad (16.13)$$

Тогда находим:  
для функции Гамильтона \*)

$$H = \sum_{\mathbf{k}, s} c\hbar K (N_s + \tilde{N}_s - 2), \quad (16.14)$$

для трехмерного импульса

$$\mathbf{G} = \sum_{\mathbf{k}, s} \hbar \mathbf{k} (N_s + \tilde{N}_s), \quad (16.15)$$

для заряда частицы

$$Q = e \sum_{\mathbf{k}, s} (N_s - \tilde{N}_s + 2), \quad (16.16)$$

для проекции спина на направление импульса

$$S = \sum_{\mathbf{k}, s} s (N_s + \tilde{N}_s), \quad (16.17)$$

где

$$N_s(\mathbf{k}) = N_s(\mathbf{k}, \varepsilon = 1), \quad \tilde{N}_s(\mathbf{k}) = N_s(-\mathbf{k}, \varepsilon = -1). \quad (16.18)$$

Отсюда можно сделать следующее заключение: только решения, соответствующие статистике Ферми — Дирака, ведут к тому, что оба сорта частиц  $N_s$  и  $\tilde{N}_s$  обладают положительной энергией. Знак заряда обоих сортов частиц будет противоположным, т. е. если частицы  $N_s$  соответствуют электронам, то частицы  $\tilde{N}_s$  — позитронам (античастицам). Величина  $s = \pm 1$  описывает две возможные ориентации спина как у электронов, так и у позитронов. Вектор спина  $\mathbf{s}$ , так же как и вектор импульса  $\mathbf{k}$ , при переходе от частиц с отрицательной энергией к частицам с положительной энергией изменяет свое направление, а величина  $s$ , равная скалярному произведению соответствующих единичных векторов:  $s = (\mathbf{k}^0 \mathbf{s}^0)$  должна оставаться без изменения. Кроме того, у нас появляется бесконечная нулевая отрицательная энергия

$$H_0 = - \sum_{\mathbf{k}} 2c\hbar K \quad (16.19)$$

и бесконечный нулевой заряд

$$Q_0 = \sum_{\mathbf{k}} 2e; \quad (16.20)$$

нулевое же значение спина и импульса исчезает.

**б) Матричное представление амплитуд в случае статистики Ферми—Дирака.** Для того чтобы удовлетворить перестановочным соотношениям статистики Бозе — Эйнштейна (например для

---

\*) Если подчинить дираковские частицы статистике Бозе — Эйнштейна, то мы не смогли бы избавиться от состояний с отрицательной энергией, так как гамильтониан равнялся бы

$$H^B = \sum_{\mathbf{k}, s} c\hbar K (N_s - \tilde{N}_s). \quad (16.14a)$$

поля фотонов), мы ввели бесконечные матрицы как для вторично квантованных амплитуд (см. формулы (12.76)), так и для состояний, описывающих различное число частиц (см. (12.77)). Эти бесконечные матрицы соответствовали тому, что в любом квантовом состоянии могло быть любое число частиц.

Для того чтобы удовлетворить перестановочным соотношениям Ферми — Дирака:

$$C^+C + CC^+ = 1, \quad (16.21)$$

мы должны вместо бесконечных матриц выбрать двухрядные матрицы как для амплитуд (см., например, [2]):

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C^+ = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (16.22)$$

так и для числа частиц:

$$f(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad f(1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (16.23)$$

причем  $f(0)$  описывает состояние, в котором частицы отсутствуют, а  $f(1)$  — состояние с одной частицей. Тогда автоматически будут удовлетворены перестановочные соотношения (16.21). Кроме того, амплитуды  $C$  являются операторами поглощения, поскольку их действие на функцию от числа частиц по законам матричного исчисления равно

$$C f(0) = 0, \quad C f(1) = f(0), \quad (16.24)$$

а амплитуды  $C^+$  — операторами испускания

$$C^+ f(0) = f(1), \quad C^+ f(1) = 0. \quad (16.25)$$

Отсюда видно, что в каждом квантовом состоянии может быть не более одной частицы.

С помощью равенств (16.24) и (16.25) легко показать, что

$$C^+ C f(N) = N f(N) \quad C C^+ f(N) = (1 - N) f(N), \quad (16.26)$$

т.е. квадраты амплитуд имеют собственные значения (16.11) и (16.12).

**в) Вычисление матричных элементов с учетом поляризационных эффектов.** При вычислении матричных элементов любую независимую матрицу Дирака, число которых равно шестнадцати, мы можем представить в виде [1, 31]

$$\alpha(\mu, \nu) = \rho_\mu \sigma_\nu, \quad (16.27)$$

где

$$\rho_\mu = (\rho_1, \rho_2, \rho_3, I), \quad \sigma_\nu = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, I). \quad (16.28)$$

Тогда вероятность перехода частицы из состояния  $k', \epsilon', s'$  в состояние  $k, \epsilon, s$  должна быть пропорциональна матричным элементам вида

$$\bar{\alpha} = b^\dagger(k', \epsilon', s') a(\mu, \nu) b(k, \epsilon, s) = \frac{1}{4} \bar{\rho}_\mu(\epsilon', s', \epsilon, s) \bar{\sigma}_\nu(\epsilon', s', \epsilon, s), \quad (16.29)$$

где

$$\bar{\rho}_\mu = (A_1'^* A_2'^*) \sigma'_\nu \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}, \quad \bar{\sigma}_\nu = (B_1'^* B_2'^*) \sigma'_\nu \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix}. \quad (16.30)$$

Пусть поляризация начального состояния описывается амплитудами  $C_1 = C(\epsilon, s = 1)$  и  $C_{-1} = C(\epsilon, s = -1)$ . Тогда для амплитуд конечного состояния имеем

$$C'_{s'}(\epsilon') = \sum_{\mu, \nu, s} g_{\mu\nu} \frac{1}{4} \bar{\rho}_\mu(\epsilon', s', \epsilon, s) \bar{\sigma}_\nu(\epsilon', s', \epsilon, s) C_s, \quad (16.31)$$

где  $g_{\mu\nu}$  — коэффициенты связи (своеобразные заряды), определяющие взаимодействия, приводящие к искомому переходу.

Обозначим угол, который образует трехмерный вектор спина с вектором импульса, через  $\vartheta$ , а угол, который он составляет с некоторым выделенным вектором, перпендикулярным к направлению импульса, — через  $\varphi$ . В этом случае

$$C_1 = C \cos(\vartheta/2), \quad C_{-1} = C \sin(\vartheta/2) e^{i\varphi}, \quad (16.32)$$

а полная вероятность состояния определяется выражением

$$C_1^* C_1 + C_{-1}^* C_{-1} = C^2. \quad (16.33)$$

Компоненты трехмерного единичного вектора спина, характеризующие поляризацию, равны (см. (15.90)):

для продольной поляризации:

$$s_z = \frac{C_1^* C_1 - C_{-1}^* C_{-1}}{C^2} = \cos \vartheta,$$

для поперечной поляризации

$$s_x = \frac{C_{-1}^* C_1 + C_1^* C_{-1}}{C^2} = \sin \vartheta \cos \varphi, \quad (16.34)$$

$$s_y = \frac{i(C_{-1}^* C_1 - C_1^* C_{-1})}{C^2} = \sin \vartheta \sin \varphi.$$

Если нас интересуют лишь значения для эффективного сечения ( $\sigma \sim C^2$ ) и продольной поляризации ( $s_z$ ), то в вычислениях мы можем ограничиться матричными элементами вида  $C_{s'}'^* C_{s'}$

(суммирования по  $s'$  нет), которые будут пропорциональны величинам

$$\begin{aligned} \langle \alpha', \alpha \rangle &= \\ &= b^+(\mathbf{k}, \varepsilon, s) \alpha(\mu', \nu') b(\mathbf{k}', \varepsilon', s') b^+(\mathbf{k}', \varepsilon', s') \alpha(\mu, \nu) b(\mathbf{k}, \varepsilon, s) = \\ &= \frac{1}{4} \bar{\rho}(\mu', \mu) \bar{\sigma}(\nu', \nu), \quad (16.35) \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \bar{\rho}(\mu', \mu) &= \frac{1}{4} \text{Sp} \left\{ \rho_{\mu'} \left( 1 + \rho_1 \varepsilon' s' \frac{k'}{K'} + \rho_3 \varepsilon' \frac{k'_0}{K'} \right) \times \right. \\ &\quad \left. \times \rho_{\mu} \left( 1 + \rho_1 \varepsilon s \frac{k}{K} + \rho_3 \varepsilon \frac{k_0}{K} \right) \right\}, \quad (16.36) \end{aligned}$$

$$\bar{\sigma}(\nu', \nu) = \frac{1}{4} \text{Sp} \left\{ \sigma_{\nu'} \left( 1 + s' \frac{(\sigma \mathbf{k}')}{k'} \right) \sigma_{\nu} \left( 1 + s \frac{(\sigma \mathbf{k})}{k} \right) \right\}.$$

При выводе шпуров (Sp, т. е. суммы диагональных элементов матриц) мы приняли во внимание равенства

$$\begin{aligned} \left( 1 - \rho_1 \varepsilon s \frac{k}{K} - \varepsilon \rho_3 \frac{k_0}{K} \right) b(\mathbf{k}, \varepsilon, s) &= 0, \\ \left( 1 - s \frac{(\sigma \mathbf{k})}{k} \right) b(\mathbf{k}, \varepsilon, s) &= 0, \end{aligned} \quad (16.37)$$

из которых, в частности, следует

$$\frac{1}{4} \left( 1 + \rho_1 \varepsilon s \frac{k}{K} + \varepsilon \rho_3 \frac{k_0}{K} \right) \left( 1 + s \frac{(\sigma \mathbf{k})}{k} \right) b(\mathbf{k}, \varepsilon', s') = \delta_{\varepsilon \varepsilon'} \delta_{s s'} b(\mathbf{k}, \varepsilon, s). \quad (16.38)$$

Из соотношений (16.36) с учетом, что масса дираковских частиц может быть различной (например, электрон и нейтрино), для  $\bar{\rho}$  можно получить (см. (16.36))

$$\begin{aligned} \left. \begin{aligned} \bar{\rho}(1, 1) \\ \bar{\rho}(2, 2) \\ \bar{\rho}(3, 3) \\ \bar{\rho}(4, 4) \end{aligned} \right\} &= 1 \frac{\pm \varepsilon \varepsilon' s s'}{\mp} \frac{k k'}{K K'} \mp \frac{\varepsilon \varepsilon' k_0 k'_0}{K K'}, \\ \left. \begin{aligned} -i\bar{\rho}(1, 2) = i\bar{\rho}(2, 1) \\ \bar{\rho}(3, 4) = \bar{\rho}(4, 3) \end{aligned} \right\} &= \frac{\varepsilon k_0}{K} \mp \frac{\varepsilon' k'_0}{K'}, \\ \left. \begin{aligned} -i\bar{\rho}(2, 4) = i\bar{\rho}(4, 2) \\ \bar{\rho}(1, 3) = \bar{\rho}(3, 1) \end{aligned} \right\} &= \frac{\varepsilon \varepsilon' s k k'}{K K'} \mp \frac{\varepsilon \varepsilon' s' k' k'_0}{K' K}, \\ \left. \begin{aligned} -i\bar{\rho}(2, 3) = i\bar{\rho}(3, 2) \\ \bar{\rho}(1, 4) = \bar{\rho}(4, 1) \end{aligned} \right\} &= \frac{\varepsilon s k}{K} \mp \frac{\varepsilon' s' k'}{K'}. \end{aligned} \quad (16.39)$$

Для  $\bar{\sigma}$  аналогичным способом находим (см. (16.36))

$$\bar{\sigma}(4, 4) = 1 + ss' \frac{(kk')}{kk'}$$

$$\bar{\sigma}(n, n') = (nn') \left( 1 - ss' \frac{(kk')}{kk'} \right) + \frac{i}{kk'} \{ (sk'k - s'kk') [nn'] \} + ss' \frac{k_n k'_n + k'_n k_n}{kk'}, \quad (16.40)$$

$$\left. \begin{array}{l} \bar{\sigma}(n, 4) \\ \bar{\sigma}(4, n) \end{array} \right\} = \frac{sk'k_n + s'kk'_n}{kk'} \mp \frac{iss'(n[kk'])}{kk'}$$

Отсюда видно, что при переходе к нерелятивистскому приближению полезно учесть следующие правила.

1. Если частица переходит из одного состояния в другое с тем же знаком энергии ( $\epsilon\epsilon' = 1$ ), то матричные элементы, пропорциональные матрицам  $\rho_1$  или  $\rho_2$ , имеют порядок  $v/c$  по сравнению с матричными элементами, пропорциональными матрицам  $\rho_3$  и  $\rho_4 = 1$ , т. е. в нерелятивистском приближении, как видно из формулы (16.39),

$$\rho(3, 3) \sim \rho(4, 4) \sim 1, \quad \rho(1, 1) \sim \rho(2, 2) \sim \frac{k^2}{K^2} = \beta^2.$$

2. Если частица переходит из одного состояния в другое с противоположным знаком энергии ( $\epsilon\epsilon' = -1$ ), т. е. из состояния с положительной энергией в состояние с отрицательной энергией, или наоборот, то легко показать, что матричные элементы, пропорциональные  $\rho_3$  и  $I$ , будут иметь порядок  $v/c$  по сравнению с матричными элементами, пропорциональными  $\rho_1$  и  $\rho_2$ . В случае ( $\epsilon\epsilon' = -1$ ), как следует из формул (16.39),

$$\rho(1, 1) \sim \rho(2, 2) \sim 1, \quad \rho(3, 3) \sim \rho(4, 4) \sim \frac{k^2}{K^2} = \beta^2.$$

3. Если частица обладает равновероятными значениями для направления спина, то мы должны усреднить квадратичную форму матричного элемента по спиновым состояниям  $s$  и  $s'$ :

$$\bar{f} = \frac{1}{4} \sum_{s, s' = -1, +1} f(s, s'). \quad (16.41)$$

Отсюда видно, что при усреднении члены, пропорциональные  $s$  или  $s'$ , обращаются в нуль, а члены, не зависящие от  $s$  и  $s'$ , дают единицу.

В качестве примера вычислим среднее значение матричного элемента  $\langle I, I \rangle$ . Согласно приведенным формулам (16.39) и

(16.40) имеем

$$\begin{aligned} \langle \overline{J}, \overline{I} \rangle &= \frac{1}{4} \bar{\rho}(4, 4) \bar{\sigma}(4, 4) = \\ &= \frac{1}{16} \sum_{s, s'=-1, +1} \left( 1 + \varepsilon \varepsilon' s s' \frac{k k'}{K K'} + \varepsilon \varepsilon' \frac{k_0 k'_0}{K K'} \right) \left( 1 + s s' \frac{(k k')}{k k'} \right), \end{aligned}$$

т. е.

$$\langle \overline{J}, \overline{I} \rangle = \frac{1}{4} \left( 1 + \varepsilon \varepsilon' \frac{(k k') + k_0 k'_0}{K K'} \right). \quad (16.42)$$

Аналогичным способом могут быть найдены другие средние значения квадратичных форм матричных элементов.

Заметим, что для вычисления средних значений квадратов матричных элементов, мы можем произвести усреднение с помощью формулы (16.41) непосредственно в выражении (16.35). Тогда получаем формулу Казимира

$$\langle \overline{\alpha'}, \overline{\alpha} \rangle = \frac{1}{16} \text{Sp} \left\{ \alpha' \left( 1 + \varepsilon' \frac{(\alpha k') + \rho_3 k'_0}{K'} \right) \alpha \left( 1 + \varepsilon \frac{(\alpha k) + \rho_3 k_0}{K} \right) \right\}. \quad (16.43)$$

В частности, подставляя сюда вместо матриц  $\alpha'$  и  $\alpha$  единичные матрицы, мы вновь находим выражение (16.42).

**г) Волновое уравнение для позитрона.** При исследовании решений с отрицательными значениями энергий при наличии электромагнитного поля, наряду с основным уравнением Дирака

$$\begin{aligned} \left\{ -\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial t} - e\Phi - c \left[ \alpha_1 \left( \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{e}{c} A_x \right) + \alpha_2 \left( \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial y} - \frac{e}{c} A_y \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + \alpha_3 \left( \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial z} - \frac{e}{c} A_z \right) \right] - \rho_3 m_0 c^2 \right\} \psi = 0, \quad (16.44) \end{aligned}$$

запишем также и комплексно-сопряженное уравнение [1]:

$$\begin{aligned} \left\{ \left( \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial t} - e\Phi \right) + c \left[ \alpha_1 \left( \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{e}{c} A_x \right) - \alpha_2 \left( \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial y} + \frac{e}{c} A_y \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + \alpha_3 \left( \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial z} + \frac{e}{c} A_z \right) \right] - \rho_3 m_0 c^2 \right\} \psi^* = 0, \quad (16.45) \end{aligned}$$

которое легко может быть получено, если учесть, что  $\alpha_1^* = \alpha_1$ ,  $\alpha_2^* = -\alpha_2$ ,  $\alpha_3^* = \alpha_3$ ,  $\rho_3^* = \rho_3$ , а комплексно-сопряженная волновая функция

$$\psi^* = \begin{pmatrix} \psi_1^* \\ \psi_2^* \\ \psi_3^* \\ \psi_4^* \end{pmatrix} \quad (16.46)$$

отличается от эрмитово-сопряженной

$$\psi^+ = (\psi_1^* \psi_2^* \psi_3^* \psi_4^*). \quad (16.47)$$

Заметим, что комплексно-сопряженное уравнение (16.45) совершенно эквивалентно эрмитово-сопряженному уравнению

$$\psi^+ \left\{ \left( -\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial t} - e\Phi \right) - c \left[ \alpha_1 \left( \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{e}{c} A_x \right) + \alpha_2 \left( \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial y} - \frac{e}{c} A_y \right) + \alpha_3 \left( \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial z} - \frac{e}{c} A_z \right) \right] - \rho_3 m_0 c^2 \right\} = 0 \quad (16.48)$$

в чем нетрудно убедиться, если расписать в виде системы четырех уравнений уравнения (16.45) и (16.48) и учесть при этом правило действия оператора, стоящего перед волновой функцией:

$$\psi^+ \frac{\partial}{\partial t} \rightarrow -\frac{\partial \psi^+}{\partial t}, \quad \psi^+ \frac{\partial}{\partial x} \rightarrow -\frac{\partial \psi^+}{\partial x}. \quad (16.49)$$

Сделаем замену в комплексно-сопряженном уравнении Дирака (16.45)

$$\psi^* = i\alpha_2 \rho_3 \tilde{\psi}. \quad (16.50)$$

Учитывая правило коммутации матриц Дирака, мы найдем для волновой функции  $\tilde{\psi}$  уравнение

$$\left\{ \left( -\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial t} + e\Phi \right) - c \left[ \alpha_1 \left( \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{e}{c} A_x \right) + \alpha_2 \left( \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial y} + \frac{e}{c} A_y \right) + \alpha_3 \left( \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial z} + \frac{e}{c} A_z \right) \right] - \rho_3 m_0 c^2 \right\} \tilde{\psi} = 0, \quad (16.51)$$

которое описывает движение позитрона, поскольку отличается от основного (16.44) заменой заряда  $e$  на  $-e$  с тем различием, что мы должны у функции  $\tilde{\psi}$  трактовать знак энергии иначе, чем у функции  $\psi^*$ . Иными словами, состояния с положительной энергией в уравнении (16.51) следует отнести к позитронам, а состояния с отрицательной энергией — к электронам.

**д) Понятие о теореме Людерса—Паули.** Уравнение Дирака инвариантно относительно так называемого слабого обращения времени (СТ-преобразование), сводящегося к совместному зарядово-сопряженному преобразованию ( $e \rightarrow -e$ , С-преобразование) и просто обращению времени ( $t \rightarrow -t$ ,  $\Phi \rightarrow -\Phi$ , Т-преобразование), получившего название сильного. В самом деле, в случае СТ-преобразования уравнение (16.44) принимает вид

$$\left\{ \left( \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial t} - e\Phi \right) - c \left[ \alpha_1 \left( \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{e}{c} A_x \right) + \alpha_2 \left( \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial y} + \frac{e}{c} A_y \right) + \alpha_3 \left( \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial z} + \frac{e}{c} A_z \right) \right] - \rho_3 m_0 c^2 \right\} \psi = 0. \quad (16.52)$$



Последнее уравнение в результате замены  $\psi \rightarrow \sigma_2 \psi^*$  переходит в комплексно-сопряженное уравнение (16.45) (аналогично комплексно-сопряженное уравнение переходит в основное).

Можно также показать инвариантность уравнения Дирака относительно инверсии пространства  $r \rightarrow -r$ ,  $\mathbf{A} \rightarrow -\mathbf{A}$  (P-преобразование). В самом деле, в результате P-преобразования уравнение Дирака принимает вид

$$\left\{ \left( -\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial t} - e\Phi \right) + c \left[ \alpha_1 \left( \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{e}{c} A_x \right) + \alpha_2 \left( \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial y} - \frac{e}{c} A_y \right) + \alpha_3 \left( \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial z} - \frac{e}{c} A_z \right) \right] - \rho_3 m_0 c^2 \right\} \psi = 0. \quad (16.53)$$

Сделав в этом уравнении замену  $\psi \rightarrow \rho_3 \psi$ , мы преобразуем его к первоначальному виду (16.44).

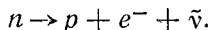
Таким образом, уравнение Дирака инвариантно относительно совместного тройного СРТ-преобразования (теорема Людерса — Паули) [32].

**е) Теория нейтрино с ориентированным спином.** Уравнение Дирака нашло еще одно применение, а именно: с его помощью оказалось возможным описать нейтрино. В связи с этим мы хотим сказать несколько слов о предсказании и открытии нейтрино вообще.

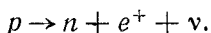
Как известно, внутри ядра нейтрон может существовать или неопределенно долго (стабильные ядра) или испускать электрон (нестабильные бета-радиоактивные ядра). В свободном состоянии нейтрон является нестабильной частицей с периодом полураспада (для покоящегося нейтрона), равным примерно 12 мин (время жизни равно  $12/\ln 2 = 17 \text{ мин} \approx 1000 \text{ сек}$ ). При бета-распаде масса нейтрона, превращающегося в протон, уменьшается на величину, соответствующую энергии  $2,5 m_0 c^2$ , в то время как электрон, обладающий собственной энергией  $m_0 c^2 \approx 0,5 \text{ Мэв}$ , вылетает с самыми разнообразными энергиями, начиная от  $m_0 c^2$  и кончая  $2,5 m_0 c^2$ .

Средняя энергия электронов равняется примерно  $1,6 m_0 c^2$ , т.е. при каждом акте распада теряется в среднем энергия порядка  $0,9 m_0 c^2$ . Кроме того, следует еще добавить, что все процессы, протекающие в атоме и атомном ядре, должны быть, как правило, дискретными: свет, излучаемый атомом, образует монохроматические линии; альфа-частицы, вылетающие из ядра, обладают определенной энергией, и т. д. Поэтому, наряду с кажущейся потерей энергии, оставалось совершенно непонятной также и непрерывность бета-спектра. Для объяснения этого факта Паули в 1930 г. [33] выдвинул гипотезу, согласно которой при бета-распаде эта, казалось бы, потерянная энергия уносится какой-то другой частицей, которая в настоящее время получила

название антинейтрино  $\bar{\nu}$ , т. е. реакция бета-распада имеет вид



Аналогично при позитронном распаде образуется нейтрино \*):

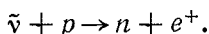


Долгое время вообще было неясно, чем отличается нейтрино от антинейтрино. Вначале можно было лишь сказать, что антинейтрино отличается от нейтрино тем, что первая образуется при распаде нейтрона, а вторая — при распаде протона. Эти бета-превращения совершаются крайне редко и обязаны так называемому слабому взаимодействию.

Вообще говоря, мы имеем три вида взаимодействия: сильное (обуславливающее, в частности, ядерные силы), электромагнитное и, наконец, слабое (приводящее, например, к распаду нейтрона), не считая еще гравитационного взаимодействия, которое мы здесь не рассматриваем.

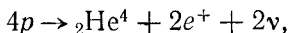
Нейтрино, а также антинейтрино обладают большой проникающей способностью и поэтому частицы в течение долгого времени оставались экспериментально ненаблюдаемыми. Нейтрино свободно пронизывает Землю, Солнце и т. д. Поэтому только в 1957 г. Райнесу и Коуэну [34] впервые удалось экспериментально обнаружить антинейтрино, когда были построены мощные источники этих неуловимых частиц (ядерные реакторы).

Антинейтрино было поймано протонами водородосодержащего вещества по реакции, обратной бета-распаду:



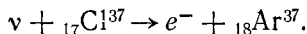
Тонна воды поглощала лишь единичные частицы столь мощного потока антинейтрино, и поэтому на каждый час приходилось единичное число превращений протона в нейтрон и позитрон (эффективное сечение оказалось равным  $\sim 10^{-44}$  см<sup>2</sup>). Эта реакция фиксировалась двумя вспышками, регистрируемыми фотоэлементами. Первую вспышку давал позитрон, а вторую гамма-квант, возникающий при захвате нейтрона ядром водорода.

Нейтрино может образовываться в результате термоядерных реакций, происходящих на Солнце, например, в результате водородного цикла, в конечном результате которого четыре протона переходят в гелий:



\*) Заметим, что позитронный распад может происходить только в том случае, когда протон находится внутри ядра. В противоположность нейтрону свободный протон не может спонтанно распадаться, поскольку масса нейтрона больше массы протона, и поэтому при этом распаде не может выполняться закон сохранения энергии.

причем нейтрино уносит несколько процентов всей энергии, излучаемой Солнцем. В качестве мишени для поимки нейтрино можно взять несколько десятков тонн четыреххлористого водорода. Поглощение нейтрино должно происходить по реакции



Эффективное сечение захвата нейтрино, излучаемое Солнцем, будет примерно таким же, как и захват антинейтрино в опытах Райнса и Коуэна, поскольку энергия обеих частиц в этих реакциях примерно одинакова и равна нескольким *Мэв*. Однако если бы удалось получить нейтрино с энергией в несколько *Гэв*, то эффективное сечение захвата должно резко увеличиться.

Большую роль в развитии теории нейтрино сыграло открытие несохранения четности [35], которое в общих чертах сводится к следующему [36—38] \*).

1. При распаде нейтрона ( $n \rightarrow p + e^{-} + \bar{\nu}$ ) или другой частицы с ориентированным спином число электронов, вылетающих по направлению спина нейтрона и в противоположном, будет различным, т. е. мы будем наблюдать полярную асимметрию для числа образовавшихся электронов  $N$ :

$$N = 1 - \alpha \cos \theta, \quad (16.54)$$

где  $\alpha > 0$  — некоторый постоянный коэффициент \*\*), а  $\theta$  — угол между импульсом электрона и направлением, образующим правый винт с направлением круговой поляризации нейтрона, т. е. спин частицы в этом случае следует описывать не аксиальным вектором, направление которого зависит от выбора правой или левой системы координат, а направлением вращения круговой поляризации нейтрона, сохраняющей направление как в правой, так и в левой системе координат.

2. Явление несохранения четности может также проявляться при распаде бесспиновой частицы ( $\pi \rightarrow \mu + \nu$ ) или неполяризованного нейтрона ( $n \rightarrow p + e^{-} + \bar{\nu}$ ). Оно будет проявляться в том, что хотя мы не будем наблюдать аксиальной асимметрии, однако образовавшиеся заряженные частицы (мю-мезон или электрон) должны обладать определенной круговой поляризацией.

Для объяснения явления несохранения четности Ли и Янг [35], а также Ландау [40] на основе двухкомпонентной теории предположили, что нейтрино должно отличаться от антинейтрино

\*) Первые теоретические статьи по несохранению четности и их экспериментальной проверке изложены в [39].

\*\*\*) При распаде антинейтрона на антипротон, позитрон и нейтрино:

$$\bar{n} \rightarrow \bar{p}^{-} + e^{+} + \nu$$

перед коэффициентом  $\alpha$  мы должны поставить знак плюс.

так называемой спиральностью. Нейтрино обладает левой спиральностью, т.е. напоминает собою левополяризованный фотон\*), а антинейтрино — правой.

3. Следующим шагом в развитии теории нейтрино является открытие мюонного нейтрино [41]. Это открытие сводится к следующему: вместе с отрицательным мю-мезоном образуется правополяризованное нейтрино (или антинейтрино), которое, однако, не взаимодействует ни с электроном, ни с позитроном (в отличие от электронного нейтрино или антинейтрино).

Все эти явления, связанные с несохранением четности, можно объяснить, если ввести следующую гипотезу: все нейтрино и антинейтрино (электронные и мюонные) подчиняются уравнению Дирака с массой покоя, равной нулю (четырёхкомпонентная теория нейтрино) [42, 43].

Электронам  $e^-$ , положительным мю-мезонам  $\mu^+$  и нейтрино  $\nu$  следует приписать положительный лептонный заряд ( $L = 1$ ), а позитронам  $e^+$ , отрицательным мю-мезонам  $\mu^-$  и антинейтрино  $\bar{\nu}$  — отрицательный лептонный заряд ( $L = -1$ ), который во всех реакциях должен сохраняться [44].

Мюонное нейтрино  $\nu_\mu$  ( $L = 1$ ) должно обладать правой спиральностью ( $s = 1$ ), а мюонное антинейтрино  $\bar{\nu}_\mu$  ( $L = -1$ ) — левой ( $s = -1$ ). Электронное же нейтрино  $\nu_e$  ( $L = 1$ ), наоборот, должно обладать левой спиральностью ( $s = -1$ ), а антинейтрино  $\bar{\nu}_e$  ( $L = -1$ ) — правой ( $s = 1$ ), т.е. хотя мюонное нейтрино и электронное антинейтрино обладают одной и той же спиральностью (правой), однако лептонные заряды их различны и поэтому отождествлять их нельзя.

Для того чтобы спиральность (см. (15.55) и (15.90)) при переходе от одной лоренцевой системы координат к другой оставалась неизменной (т.е. чтобы электронное нейтрино не смешивалось с мюонным), необходимо положить массу нейтрино точно равной нулю. В самом деле, как видно из законов преобразования (15.94) и (15.95), в этом случае  $\beta_1 = 1$ , и поэтому если в одной инерциальной системе положить  $s_z' = \pm 1$ ,  $s_x = s_y = 0$ , то и в любой другой инерциальной системе мы будем иметь для компонент единичного трехмерного вектора те же значения:

$$s_z' = \pm 1, \quad s_x' = s_y' = 0.$$

Уравнения для нейтрино по четырёхкомпонентной теории мы можем получить, полагая в уравнении Дирака массу покоя равной нулю ( $k_0 = 0$ ). Тогда согласно (15.77) имеем

$$(ks - (\sigma\mathbf{k}))b = 0, \quad (\epsilon - s\rho_1)b = 0. \quad (16.55)$$

\*) Точнее, они должны отличаться друг от друга значением спина. В единицах  $\hbar$  спин фотона должен равняться 1, а спин нейтрино —  $1/2$ .

Отсюда следует, что  $s = \pm \varepsilon$ . Полагая  $s = -\varepsilon$ , мы найдем уравнение для электронного нейтрино:

$$(\sigma \mathbf{k}) b = -\varepsilon k b. \quad (16.56)$$

Второе же значение ( $s = \varepsilon$ ) дает уравнение для мюонного нейтрино:

$$(\sigma \mathbf{k}) b = \varepsilon k b. \quad (16.57)$$

Рассмотрим простейшие примеры элементарных превращений с участием нейтрино с ориентированным спином. В теории бета-распада энергия взаимодействия может быть представлена в виде

$$U = \sum_i g_i (\chi_p^+ \alpha_i \chi_n) (\psi_e^+ \alpha_i \psi_{\nu, s=-\varepsilon}), \quad (16.58)$$

где  $\chi_p$  и  $\chi_n$  — волновые функции протона и нейтрона, т. е. тяжелых частиц.

Предполагая, что нейтрон является покоящимся, мы можем ограничиться нерелятивистским приближением ( $\rho_1 \sim \rho_2 = 0$ ). В этом случае отличные от нуля значения матричных элементов дадут следующие члены взаимодействия: скалярное ( $\alpha_S = \rho_3$ ), тензорное ( $\alpha_T = \rho_3 \sigma$ ), векторное ( $\alpha_V = I$ ), аксиально-векторное или псевдовекторное ( $\alpha_A = \sigma$ ), псевдоскалярное в данном случае равно нулю ( $\alpha_P = \rho_2 = 0$ ). Например, ограничиваясь линейной комбинацией векторного (коэффициент связи  $g_V$ ) и аксиально-векторного  $g_A$  взаимодействий\*), мы должны положить

$$\alpha_V = I = \rho_4 \sigma_4, \quad \alpha_A = \sigma_n = \rho_4 \sigma_n, \quad n = 1, 2, 3. \quad (16.59)$$

При распаде покоящегося поляризованного свободного нейтрона ( $\mathbf{k}_n = 0$ ) [46] следует учесть, что часть импульса берет на себя протон ( $\mathbf{k}_p = -\mathbf{k}_e - \mathbf{k}_{\bar{\nu}}$ ). Тогда мы найдем, что матричный элемент, характеризующий этот распад (см. (15.81) и (15.82)), пропорционален следующему выражению:

$$\bar{C}(s_e) = \frac{1}{16} A(s_e) (g_V B_4 + g_A (B_1 + B_2 + B_3)), \quad (16.60)$$

где

$$A(s_e) = (A_{p1}^* A_{p2}^*) \begin{pmatrix} A_{n1} \\ A_{n2} \end{pmatrix} (A_{e1}^* A_{e2}^*) \begin{pmatrix} A_{\nu 1} \\ A_{\nu 2} \end{pmatrix}, \quad (16.61)$$

причем в нашем случае ( $\varepsilon_p = \varepsilon_n = \varepsilon_e = 1$ ,  $\varepsilon_{\bar{\nu}} = -1$ ) и в нерелятивистском приближении для протона и нейтрона ( $k_{op}/K_p = k_{on}/K_n = 1$ ) имеем [47]

$$\begin{aligned} A_{p1}^* &= A_{n1} = \sqrt{2}, & A_{p2}^* &= A_{n2} = 0, & A_{e1}^* &= \sqrt{1 + k_0/K_e}, \\ A_{e2}^* &= s_e \sqrt{1 - k_0/K_e}, & A_{\nu 1} &= 1, & A_{\nu 2} &= -s_{\bar{\nu}} = -1, \end{aligned} \quad (16.62)$$

\*) Это так называемый вариант Фейнмана — Гелл-Манна [45].

т. е.

$$A(s_e) = 2(\sqrt{1 + k_0/K_e} - s_e \sqrt{1 - k_0/K_e}). \quad (16.63)$$

Точно так же для матричных элементов  $B(s_e)$ , предполагая, что спин нейтрона направлен по оси  $z$  ( $s_n = 1$ ), мы можем написать

$$B_\mu(s_e) = (B_{\rho 1}^* B_{\rho 2}^*) \sigma'_\mu \begin{pmatrix} B_{n1} \\ B_{n2} \end{pmatrix} (B_{e1}^* B_{e2}^*) \sigma'_\mu \begin{pmatrix} B_{\nu 1} \\ B_{\nu 2} \end{pmatrix},$$

где

$$\begin{aligned} B_{\rho 1}^* &= s_\rho e^{i \frac{\Phi_\rho}{2}} \sqrt{1 + s_\rho \cos \theta_\rho}, & B_{\rho 2}^* &= e^{-i \frac{\Phi_\rho}{2}} \sqrt{1 - s_\rho \cos \theta_\rho}, \\ B_{n1} &= \sqrt{2}, & B_{n2} &= 0, \\ B_{e1}^* &= s_e e^{i \frac{\Phi_e}{2}} \sqrt{1 + s_e \cos \theta_e}, & B_{e2}^* &= e^{-i \frac{\Phi_e}{2}} \sqrt{1 - s_e \cos \theta_e}, \\ B_{\nu 1} &= e^{-i \frac{\Phi_\nu}{2}} \sqrt{1 + \cos \theta_\nu}, & B_{\nu 2} &= e^{i \frac{\Phi_\nu}{2}} \sqrt{1 - \cos \theta_\nu}. \end{aligned} \quad (16.64)$$

Отсюда следует

$$\begin{aligned} B_{4,3} &= \sqrt{2} s_\rho e^{i \frac{\Phi_\rho}{2}} \sqrt{1 + s_\rho \cos \theta_\rho} \times \\ &\quad \times \left[ s_e e^{i \frac{\Phi_e - \Phi_\nu}{2}} \sqrt{(1 + s_e \cos \theta_e)(1 + \cos \theta_\nu)} \pm \right. \\ &\quad \left. \pm e^{-i \frac{(\Phi_e - \Phi_\nu)}{2}} \sqrt{(1 - s_e \cos \theta_e)(1 - \cos \theta_\nu)} \right], \\ B_{1,2} &= \sqrt{2} e^{-i \frac{\Phi_\rho}{2}} \sqrt{1 - s_\rho \cos \theta_\rho} \times \\ &\quad \times \left[ s_e e^{i \frac{\Phi_e + \Phi_\nu}{2}} \sqrt{(1 + s_e \cos \theta_e)(1 - \cos \theta_\nu)} \pm e^{-i \frac{\Phi_e + \Phi_\nu}{2}} \times \right. \\ &\quad \left. \times \sqrt{(1 - s_e \cos \theta_e)(1 + \cos \theta_\nu)} \right]. \end{aligned} \quad (16.65)$$

Для того чтобы исследовать поляризационные свойства вылетевших электронов, мы должны квадратичную комбинацию из коэффициентов  $B_\rho^*$  и  $B_\rho$  просуммировать затем по состояниям спина протона ( $s_p = +1, -1$ ), а также проинтегрировать по сферическим углам вылета протона ( $\theta_p, \Phi_p$ ) и антинейтрино ( $\theta_{\bar{\nu}} = \pi - \theta_\nu, \Phi_{\bar{\nu}} = \pi + \Phi_\nu$ ). Тогда находим

$$C^*(s_e) C(s_e) = \frac{1}{16} (1 - s_e \beta) (a^2 + b^2) \left( 1 + \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} s_e \cos \theta_e \right), \quad (16.66)$$

где

$$a^2 + b^2 = 2g_V^2 + 6g_A^2, \quad a^2 - b^2 = 4g_A(g_A + g_V). \quad (16.67)$$

С помощью (16.66) мы можем получить формулы, характеризующие несохранение четности.

1. Допустим, что мы имеем нейтрон с ориентированным спином, который мы направим по оси  $z$ . Тогда, суммируя выражение (16.66) по спину электрона ( $s_e = +1, -1$ ), мы найдем для числа вылетевших электронов, импульс которых составляет со спином нейтрона угол  $\theta_e$ , формулу (16.54), причем коэффициент  $\alpha$  равен

$$\alpha = \beta(a^2 - b^2)/(a^2 + b^2). \quad (16.68)$$

2. Если спин нейтрона не ориентирован, т. е. у нас не будет выделенного направления, то выражение (16.66) мы должны проинтегрировать по углу  $\theta_e$ . В этом случае мы найдем, что по любому направлению будут вылетать электроны, обладающие преимущественно левовинтовой спиральностью (противоположной спиральности антинейтрино). Зависимость числа вылетевших электронов (по любому направлению) от поляризации определяется следующей формулой:

$$N(s_e) = 1 - s_e \beta. \quad (16.69)$$

Отсюда степень продольной поляризации будет характеризоваться выражением

$$p = \frac{N(s_e = 1) - N(s_e = -1)}{N(s_e = 1) + N(s_e = -1)} = -\beta. \quad (16.70)$$

Формула (16.70) находится в хорошем согласии с экспериментальными данными вне зависимости от соотношения между коэффициентами  $g_V$  и  $g_A$ . Что касается численного значения для коэффициента  $\alpha$  (см. (16.54)), то для того чтобы получить согласие с экспериментом, следует положить

$$g_A \approx -1,2 g_V, \quad (16.71)$$

т. е. для электронного нейтрино взять так называемое векторное минус аксиально-векторное взаимодействие. Эксперимент для коэффициента связи (постоянная Ферми)  $g_V$  устанавливает следующее численное значение:

$$g_V \approx 1,41 \cdot 10^{-49} \text{ эрг} \cdot \text{см}^3. \quad (16.72)$$

**ж) Теорема Людерса—Паули в теории нейтрино с ориентированным спином.** В связи с открытием несохранения четности был поставлен большой принципиальный вопрос об инвариантности уравнения нейтрино относительно инверсии пространства (P-преобразование) так называемого сильного обращения времени (T-преобразование) и зарядово-сопряженного преобразования (C-преобразования) и вообще — выполняется ли для нейтрино теорема Людерса — Паули [47—50]?

Для анализа вопроса, связанного с инверсией пространства, изобразим графически правополяризованное антинейтрино в правой и левой системах координат. Из рис. 16 видно, что реальные движения (импульс и вращение вектора поляризации) не зави-

сят от выбора системы координат. Что касается вектора спина, который лишь условно характеризует направление вращения (так же как и аксиальный вектор, равный векторному произведению), то в правой и левой системах координат одно и то же реальное вращение описывается противоположно направленными векторами спина ( $s^r$  и  $s^l$ ) и их проекциями на направление импульса. Таким образом, для описания одной и той же спиральности в правой и левой системах координат мы имеем различные значения для величины  $s$ . В правой системе  $s^r = (s^r p^0) = 1$ , в левой системе  $s^l = (s^l p^0) = -1$  \*).

Изменение знака у величины  $s$  при инверсии пространства, т. е. при переходе от правой системы координат к левой, можно интерпретировать по-разному.

1. Исходя из формально-математических соображений, изменение знака у  $s$  при инверсии пространства можно рассматривать как неинвариантность волновых уравнений относительно  $P$ -преобразования (интерпретация Ли и Янга [35], Ландау [40]).

2. Физические же соображения показывают, что в результате  $P$ -преобразования спиральность не изменяется, а изменяется только математическая форма ее описания (антинейтрино остается правовинтовым, а нейтрино — левовинтовым). С этой точки зрения уравнение поляризованного нейтрино инвариантно относительно  $P$ -преобразования [47—50]\*\*).

Рассмотрим СРТ-преобразование с помощью волнового уравнения для нейтрино. Волновая функция, описывающая движение нейтрино ( $\varepsilon = 1$ ) или антинейтрино ( $\varepsilon = -1$ ), равна

$$\psi_v = \frac{1}{L^{3/2}} C(\mathbf{k}, s, \varepsilon) b(\mathbf{k}, s, \varepsilon) e^{-icKt + i\mathbf{k}\mathbf{r}}. \quad (16.73)$$

Для нейтрино или антинейтрино ( $k_0 = 0$ ) имеем ( $\theta_v = \theta$ )

$$b(\mathbf{k}, s, \varepsilon) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} se^{-i\varphi/2} \sqrt{1 + s \cos \vartheta} \\ e^{i\varphi/2} \sqrt{1 - s \cos \vartheta} \\ \varepsilon e^{-i\varphi/2} \sqrt{1 + s \cos \vartheta} \\ \varepsilon s e^{i\varphi/2} \sqrt{1 - s \cos \vartheta} \end{pmatrix}. \quad (16.74)$$

\*) Все наши дальнейшие расчеты, описывающие несохранение четности, будут относиться к правой системе координат.

\*\*) Заметим, что открытие мюонного нейтрино еще не окончательно, но говорит в пользу четырехкомпонентной теории нейтрино [42, 43, 51].

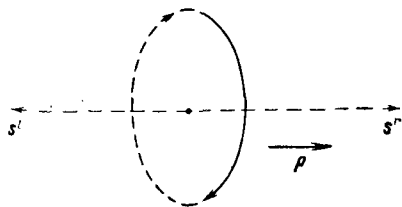


Рис. 16. Правополяризованное антинейтрино в правой и левой системах координат.



В случае, когда импульс нейтрино ( $\varepsilon = 1$ ) направлен по оси  $z$  в правой системе координат ( $s = -1$ ), следует положить

$$\mathbf{kr} = zk \cos \vartheta, \quad \varphi = 0, \quad \vartheta = 0, \quad K = |k|. \quad (16.75)$$

Ограничиваясь записью зависимости волновой функции от спиновой матрицы и времени, что определяет спиральность, можем написать (см. (16.73) и (16.74))

$$\psi(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-icKt}. \quad (16.76)$$

Тогда векторы, характеризующие круговую поляризацию, равны (см. (15.87))

$$\sigma_y^0 \psi(t) = -i \sigma_x^0 \psi(t). \quad (16.77)$$

Отсюда, учитывая зависимость  $\psi(t)$  от времени, найдем для вещественных значений

$$\sigma_x^0 \psi(t) = b \cos cKt, \quad \sigma_y^0 \psi(t) = -b \sin cKt. \quad (16.78)$$

Поскольку импульс направлен по оси  $z$ , найдем, что состояние (16.76) согласно (16.78) соответствует левой спиральности (вращение будет происходить от оси  $x$  к оси  $-y$ ).

В случае инверсии пространства (P-преобразование) мы должны сделать замену  $\mathbf{r} \rightarrow -\mathbf{r}$ . В этом случае все оси координат будут иметь противоположное направление, и поэтому импульс будет направлен против оси  $z$ ; в скалярном произведении  $\mathbf{kr} = kz \cos \vartheta$  мы должны положить  $\vartheta = \pi$ . При определении же новой матрицы  $b(s, \varepsilon)$  надо еще сделать замену  $\varphi = \pi$ ,  $s \rightarrow -s = -1$ . Тогда вместо выражения (16.76) мы найдем, учитывая, что  $e^{i\pi/2} = i$ ,

$$\psi(t) = i \rho_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-icKt}. \quad (16.79)$$

Из (16.77) следует, что в левой системе координат вращение также будет происходить по закону (16.78), т. е. от оси  $x$  к оси  $-y$ , т. е. в том же направлении, что и в правой. Поскольку в левой системе координат импульс направлен по оси  $-z$ , то спиральность, описываемая круговым вращением, при этом переходе не изменяется, хотя форма ее описания будет несколько другой.

В случае зарядово-сопряженного преобразования (C-преобразование) мы должны изменить лептонный заряд, т. е. волновую функцию (16.73) при  $\varepsilon = 1$  следует отнести к антинейтрино.

Таким образом, уравнение для нейтрино не будет инвариантным относительно  $S$ -преобразования, так как в результате этого преобразования антинейтрино будет обладать левой спиральностью, а нейтрино — правой.

Точно так же уравнение (16.73) не будет инвариантным относительно сильного обращения времени  $t \rightarrow -t$  ( $T$ -преобразование), поскольку в этом случае волновая функция нейтрино (16.73), соответствующая левой спиральности, перейдет в волновую функцию антинейтрино с левой спиральностью.

Только совместное  $ST$ -преобразование, или так называемое слабое обращение времени, оставляет уравнение нейтрино инвариантным. В самом деле, в результате этого преобразования волновая функция (16.73) переходит в комплексно-сопряженную волновую функцию нейтрино с той же спиральностью, т.е. в окончательном результате мы должны сделать замену  $\mathbf{k} \rightarrow -\mathbf{k}$ ,  $\vartheta \rightarrow \pi - \vartheta$ ,  $\varphi \rightarrow \varphi + \pi$ . Тогда (16.73) переходит в (см. § 16, п. д)

$$\psi_v^* = \frac{1}{L^{3/2}} C(-\mathbf{k}, s, \varepsilon) b(-\mathbf{k}, s, \varepsilon) e^{icKt\varepsilon - i\mathbf{k}\mathbf{r}}, \quad (16.80)$$

где

$$b(-\mathbf{k}, s, \varepsilon) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -ise^{-i\varphi/2} \sqrt{1 - s \cos \vartheta} \\ ie^{i\varphi/2} \sqrt{1 + s \cos \vartheta} \\ -i\varepsilon e^{-i\varphi/2} \sqrt{1 - s \cos \vartheta} \\ i\varepsilon se^{i\varphi/2} \sqrt{1 + s \cos \vartheta} \end{pmatrix}. \quad (16.81)$$

Умножая матрицу (16.81) на

$$s\sigma_2 = s \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \end{pmatrix},$$

найдем, что

$$s\sigma_2 b(-\mathbf{k}, s, \varepsilon) = \begin{pmatrix} se^{i\varphi/2} \sqrt{1 + s \cos \vartheta} \\ e^{-i\varphi/2} \sqrt{1 - s \cos \vartheta} \\ \varepsilon e^{i\varphi/2} \sqrt{1 + s \cos \vartheta} \\ \varepsilon se^{-i\varphi/2} \sqrt{1 - s \cos \vartheta} \end{pmatrix} = b^*(\mathbf{k}, s, \varepsilon). \quad (16.82)$$

Отсюда следует, что спиральность нейтрино ( $\varepsilon = 1$ ) и антинейтрино в результате этого преобразования не изменяется.

Таким образом, с этой точки зрения уравнение нейтрино с ориентированным спином должно быть инвариантным, т.е. спиральность не должна изменяться в случае  $P$ -преобразования и  $ST$ -преобразования. Поэтому должна сохраняться и теорема Людерса — Паули

$$CPT = \text{const.}$$

Более подробно на всех этих вопросах мы здесь не считаем нужным задерживаться, так как они представляют для нас лишь иллюстрацию возможности использования спиновых свойств уравнения Дирака.

### § 17. ЦЕНТРАЛЬНО-СИММЕТРИЧНОЕ ПОЛЕ

**а) Проблема Кеплера по уравнению Клейна — Гордона.** Рассмотрим движение отрицательно заряженной бесспиновой частицы ( $e = -e_0$ ) в кулоновском поле ядра заряда  $Ze_0$  (проблема Кеплера). Полагая потенциальную энергию внешнего поля равной

$$V(r) = -\frac{Ze_0^2}{r} \quad (17.1)$$

и переходя к волновым функциям стационарных состояний \*)

$$\psi(\mathbf{r}, t) = e^{-\frac{iE}{\hbar}t} \psi(\mathbf{r}), \quad (17.2)$$

из общего вида уравнения Клейна — Гордона (см. (13.23)) получаем

$$\nabla^2 \psi + \frac{1}{c^2 \hbar^2} \left\{ \left( E + \frac{Ze_0^2}{r} \right)^2 - m_0^2 c^4 \right\} \psi = 0. \quad (17.3)$$

В силу центральной симметрии задачи удобно перейти к сферическим координатам и искать решение в виде собственной функции для операторов квадрата момента количества движения и проекции момента на ось  $z$ :

$$L^2 \psi = \hbar^2 l(l+1) \psi, \quad L_z \psi = \hbar m \psi, \quad \psi = Y_l^m(\vartheta, \varphi) R(r), \quad (17.4)$$

где  $Y_l^m(\vartheta, \varphi)$  — шаровая или сферическая функция \*\*)

$$Y_l^m(\vartheta, \varphi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^m(\cos \vartheta) e^{im\varphi}, \quad (17.5)$$

\*) Здесь мы рассматриваем решения только с положительной ( $E > 0$ ) энергией.

\*\*\*) Шаровая функция, как известно, подчиняется уравнению

$$L^2 Y_l^m = -\hbar^2 \nabla_{\vartheta, \varphi}^2 Y_l^m = \hbar^2 l(l+1) Y_l^m, \quad (17.5a)$$

где оператор

$$\nabla_{\vartheta, \varphi}^2 = \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left( \sin \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \quad (17.5b)$$

удовлетворяет условию ортонормированности [27, 52]

$$\oint (Y_l^{m'})^* Y_l^m d\Omega = \delta_{mm'} \delta_{ll'}, \quad (17.5в)$$

где  $d\Omega = \sin \vartheta d\vartheta d\varphi$  — элемент сферического угла.

причем присоединенный полином Лежандра  $P_l^m(x)$  определяется формулой

$$P_l^m(x) = (-1)^m \frac{(l+m)!}{(l-m)!} P_l^{-m}(x) = (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^{l+m}}{dx^{l+m}} \frac{(x^2-1)^l}{2^{l!}} \quad (17.6)$$

в которой  $l = 0, 1, 2, \dots$  — орбитальное и  $m = 0, \pm 1, \dots, l$  — магнитное квантовые числа.

Для радиальной функции при этом получается следующее уравнение:

$$\left\{ \nabla_r^2 - \lambda^2 + \frac{2\alpha ZK}{r} - \frac{l(l+1) - \alpha^2 Z^2}{r^2} \right\} R = 0, \quad (17.7)$$

где

$$\nabla_r^2 = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} = \nabla^2 - \frac{1}{r^2} \nabla_{\theta, \varphi}^2, \quad (17.8)$$

а величины \*)

$$\lambda = \frac{\sqrt{m_0^2 c^4 - E^2}}{c\hbar} = \sqrt{k_0^2 - K^2}, \quad (17.9)$$

$$E = c\hbar K, \quad k_0 = \frac{m_0 c}{\hbar}, \quad \alpha = \frac{e_0^2}{\hbar c} = \frac{1}{137}$$

являются постоянными.

Введем безразмерную переменную  $\rho = 2\lambda r$  и исследуем получающееся при этом уравнение

$$\left\{ \frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{2}{\rho} \frac{d}{d\rho} - \frac{1}{4} + \frac{Z\alpha K}{\lambda} \frac{1}{\rho} - \frac{l(l+1) - \alpha^2 Z^2}{\rho^2} \right\} R = 0. \quad (17.10)$$

При  $\rho \rightarrow \infty$  вместо (17.10) имеем асимптотическое уравнение

$$R''_{\infty} - \frac{1}{4} R_{\infty} = 0 \quad (17.11)$$

с решением

$$R_{\infty} = C_1 e^{-\rho/2} + C_2 e^{\rho/2}.$$

\*) В случае дискретного спектра  $\lambda^2 > 0$  выделим в полной энергии  $E$  энергию покоя:

$$E = m_0 c^2 + E'. \quad (17.9a)$$

Для не слишком больших скоростей ( $v \ll c$ ) имеем

$$\lambda^2 = \frac{(m_0 c^2 + E)(m_0 c^2 - E)}{c^2 \hbar^2} \approx - \frac{2m_0 c^2}{c^2 \hbar^2} E' > 0. \quad (17.9b)$$

Заметим, что при  $c \rightarrow \infty$  уравнение (17.7) точно переходит в нерелятивистское уравнение Шредингера для водородоподобного атома с энергией  $E' < 0$ . Появление члена, пропорционального  $\alpha^2 Z^2$ , можно формально рассматривать как введение дополнительной релятивистской энергии притяжения (обратно пропорциональной квадрату расстояния), которая может при некоторых условиях (см. ниже) изменить характер решения.

Чтобы исключить экспоненциально возрастающее решение, мы должны положить  $C_2 = 0$ ,  $C_1 = 1$ . Тогда

$$R_\infty = e^{-\rho/2}. \quad (17.12)$$

В другом предельном случае ( $\rho \rightarrow 0$ ) решение (17.10) ищем в виде

$$R_0 = D\rho^{l'}. \quad (17.13)$$

Учитывая, что при  $\rho \rightarrow 0$  (17.13) должно удовлетворять уравнению

$$\frac{d^2}{d\rho^2}(\rho R_0) - \frac{l(l+1) - \alpha^2 Z^2}{\rho} R_0 = 0, \quad (17.14)$$

для определения величин  $l'$  имеем соотношение

$$l'(l'+1) - l(l+1) + \alpha^2 Z^2 = 0, \quad (17.15)$$

из которого находим

$$\left. \begin{matrix} l' \\ l'_1 \end{matrix} \right\} = -1/2 \pm \sqrt{(l+1/2)^2 - \alpha^2 Z^2}, \quad (17.16)$$

т. е. согласно (17.13)

$$R_0 = D_1 \rho^{l'} + D_2 \rho^{l'_1}. \quad (17.17)$$

Если  $\alpha Z < 1/2$ , то оба корня при любых значениях  $l$  будут вещественными величинами, и мы должны ограничиться решением, при котором функция  $rR_0$  в нуле не расходится. Для этого следует положить  $D_2 = 0$ ,  $D_1 = 1$ . Точное решение уравнения (17.10) будем искать в виде

$$R(\rho) = e^{-\rho/2} \rho^{l'} u(\rho), \quad (17.18)$$

где «эффективное» орбитальное квантовое число  $l'$  определяется равенством (17.16). Подставляя решение (17.18) в (17.10), получаем известное дифференциальное уравнение для вырожденной гипергеометрической функции \*):

$$\rho u'' + [2(l'+1) - \rho] u + \left( \frac{Z\alpha K}{\lambda} - l' - 1 \right) u = 0. \quad (17.19)$$

\*) Вырожденная гипергеометрическая функция [53]

$$\Phi(a, b, z) = 1 + \frac{a}{b} \frac{z}{1!} + \frac{a(a+1)}{b(b+1)} \frac{z^2}{2!} + \dots \quad (17.18a)$$

удовлетворяет уравнению

$$z\Phi'' + (b-z)\Phi' - a\Phi = 0 \quad (17.19a)$$

с асимптотическим значением при  $z \rightarrow \infty$  [54]

$$\Phi(a, b, z) \approx \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(b-a)} (-z)^{-a} + \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(a)} e^z z^{a-b}. \quad (17.20a)$$

Из (17.19) следует, что  $u = \Phi$  и поэтому радиальная функция (17.18) становится равной

$$R = Ce^{-\rho/2} \rho^{l'} \Phi \left\{ - \left( \frac{Z\alpha K}{\lambda} - l' - 1 \right), 2(l' + 1), \rho \right\}. \quad (17.20)$$

Асимптотическое поведение гипергеометрической функции (см. (17.20а)) показывает, что она возрастает при  $\rho \rightarrow \infty$  как  $e^\rho$ . Поэтому гипергеометрический ряд должен быть оборван за счет выбора параметра  $Z\alpha K/\lambda$ , содержащего энергию. В случае если параметр гипергеометрической функции  $a$  (см. (17.18а)) равен целому отрицательному числу, включая нуль ( $-a = k = 0, 1, 2, \dots$ ), то гипергеометрический ряд обрывается и функция  $\Phi(a, b, z)$  сводится к полиному

$$\Phi(-k, s+1, \rho) = \frac{\Gamma(s+1)}{\Gamma(s+1+k)} Q_k^s(\rho), \quad (17.21)$$

где  $Q_k^s(\rho)$  — обобщенный полином Лагерра:

$$Q_k^s(\rho) = e^\rho \rho^{-s} \frac{d^k}{d\rho^k} e^{-\rho} \rho^{s+k} = \sum_{j=0}^k (-1)^{j+k} \frac{k! \Gamma(s+k+1) \rho^{k-j}}{(k-j)! \Gamma(s+1+k-j) j!}. \quad (17.22)$$

В соответствии с этим, исходя из условия убывания волновой функции на бесконечности, находим

$$\frac{Z\alpha K}{\lambda} - l' - 1 = k, \quad (17.23)$$

где  $k = 0, 1, 2, \dots$  — радиальное квантовое число. Тогда решение для радиальной функции становится равным

$$R_{kl'}(\rho) = N_{kl'} e^{-\rho/2} \rho^{l'} Q_k^{2l'+1}(\rho). \quad (17.24)$$

Рассмотрим выражение для спектра энергии. Полагая в формуле (17.23)

$$\frac{Z\alpha K}{\lambda} = l' + k + 1 = n' \quad (17.25)$$

и подставляя вместо  $\lambda$  его значение (17.9), получаем

$$\frac{Z\alpha K}{\sqrt{k_0^2 - K^2}} = n', \quad (17.26)$$

где  $n'$  — «эффективное» главное квантовое число. Из (17.26) находим

$$\frac{K}{k_0} = \frac{E}{m_0 c^2} = \left\{ 1 + \frac{\alpha^2 Z^2}{n'^2} \right\}^{-1/2}, \quad (17.27)$$

или

$$\frac{E_{nl}}{m_0 c^2} = \left\{ 1 + \frac{\alpha^2 Z^2}{[k + 1/2 + \sqrt{(l + 1/2)^2 - \alpha^2 Z^2}]^2} \right\}^{-1/2}, \quad (17.28)$$

т. е. энергия зависит от двух квантовых чисел: орбитального  $l = 0, 1, 2, \dots$  и главного  $n = 1 + l + k = 1, 2, 3, \dots$ .

Для сравнения полученной формулы с нерелятивистской выделим в полной энергии  $E$  энергию покоя  $m_0c^2$  (см. (17.9a)):

$$E_{nl} = E'_{nl} + m_0c^2$$

и разложим выражение (17.28) в ряд по степеням  $\alpha^2 Z^2$ , оставляя первые два члена. Тогда находим спектр энергии с учетом релятивистских поправок:

$$E'_{nl} = -\frac{R\hbar Z^2}{n^2} \left\{ 1 + \frac{\alpha^2 Z^2}{n^2} \left( \frac{n}{l + 1/2} - \frac{3}{4} \right) \right\}, \quad (17.29)$$

где  $n = 1, 2, 3, \dots$  — главное квантовое число, а  $R = m_0e^4/2\hbar^3$  — постоянная Ридберга.

Первый член выражения (17.29) совпадает с соответствующей формулой нерелятивистской теории. Второе слагаемое, пропорциональное квадрату постоянной тонкой структуры ( $\alpha = 1/137$ ), определяет релятивистские поправки и снимает вырождение по  $l$ . Расщепление уровней при заданном  $n$  и различных  $l$ , т. е. так называемая тонкая структура, уменьшается с ростом главного квантового числа. Например, разность между  $s$ - и  $p$ -термами равна

$$\frac{E'_{np} - E'_{ns}}{\hbar} = \frac{4RZ^4}{3n^3}. \quad (17.30)$$

Для примера подсчитаем дублетное расщепление серии Бальмера атома водорода ( $Z = 1, n = 2$ ):

$$\Delta\omega = \frac{E'_{2p} - E'_{2s}}{\hbar} = \frac{8}{3} \frac{\alpha^2 R}{16}. \quad (17.31)$$

Опытные данные показывают, что теория Клейна—Гордона дает расщепление в  $8/3$  раз больше наблюдаемого. Это связано с тем обстоятельством, что тонкая структура энергетических уровней атома водорода определяется не только релятивистскими эффектами, но и спиновыми эффектами.

Вначале уравнение Клейна—Гордона предполагалось использовать для описания движения релятивистских электронов. Однако противоречия с опытными фактами помогли установить, что это уравнение описывает движение бесспиновых частиц, в то время как спин электрона равен  $\hbar/2$ . Уравнение Клейна—Гордона может описывать движение  $\pi$ -мезонов, не обладающих спином, в поле атомного ядра.

Рассмотрим теперь второе решение уравнения (17.16), когда  $\alpha Z > 1/2$ . При этом получается принципиально новое решение,

ибо при  $l = 0$  оба корня — комплексные, вследствие чего для асимптотического решения при  $\rho \rightarrow 0$  будем иметь решение

$$R_0 = \frac{1}{\sqrt{\rho}} \{C_1 \rho^{i\gamma_1} + C_2 \rho^{-i\gamma_1}\}, \quad (17.32)$$

где

$$\gamma_1 = \sqrt{\alpha^2 Z^2 - 1/4}.$$

В решении (17.32) оба слагаемых имеют одинаковую сингулярность при  $\rho \rightarrow 0$  и поэтому спектр энергии для  $l = 0$  ( $E' < 0$ ) будет непрерывным.

Существование водородоподобного атома по теории Клейна — Гордона невозможно при  $Z = 1/2\alpha = 137/2$  \*).

Найдем волновую функцию (17.24), для чего необходимо вычислить еще нормировочный коэффициент  $N_{kl'}$ . Используя выражение для плотности заряда (см. (13.31))

$$\rho = -e_0 \frac{E + Ze_0^2/r}{m_0 c^2} \psi^* \psi = -e_0 \rho_0, \quad (17.33)$$

мы можем написать условие нормировки

$$\int \rho_0 d^3x = 1. \quad (17.34)$$

С этой целью в интеграле \*\*)

$$\int \psi^* \psi d^3x = \frac{N_{kl'}^2}{8\lambda^3} \int_0^\infty e^{-\rho} \rho^{2l'+2} (Q_k^{2l'+1})^2 d\rho = 1 \quad (17.35)$$

один из полиномов Лагерра запишем (см. (17.22)) в виде производной порядка  $k$ :

$$\int \psi^* \psi d^3x = \frac{N_{kl'}^2}{8\lambda^3} \int_0^\infty Q_k^{2l'+1} \rho \frac{d^k}{d\rho^k} e^{-\rho} \rho^{2l'+1+k} d\rho. \quad (17.36)$$

Представляя другой полином Лагерра в виде ряда

$$Q_k^{2l'+1} = (-1)^k \{\rho^k - k(2l' + k + 1)\rho^{k-1} + \dots\} \quad (17.37)$$

и применяя  $k$  раз переброс производной с использованием интеграла

$$\int_0^\infty e^{-\rho} \rho^s d\rho = \Gamma(s + 1), \quad (17.38)$$

\*) Учет спиновых эффектов (см. ниже) несколько изменяет эту оценку и приводит к значению  $Z < 137$ , лежащему за пределами периодической системы.

\*\*) При вычислении (17.35) элемент объема был записан в сферических координатах  $d^3x = d\Omega(\rho^2 d\rho/8\lambda^3)$  и было учтено условие нормировки шаровой функции (17.5в).



получим

$$\int \psi^* \psi d^3x = N_{kl'}^2 \frac{2n' k! \Gamma(n' + l' + 1)}{8\lambda^3}. \quad (17.39)$$

Аналогично вычисляется и второй интеграл, входящий в формулу (17.33), пропорциональный  $Ze_0^2/2$ . Сумма интегралов дает

$$\int \rho_0 d^3x = N_{kl'}^2 \frac{k! \Gamma(n' + l' + 1) n' k_0}{4\lambda^3 K}. \quad (17.40)$$

Используя равенство (17.27), получаем

$$N_{kl'} = \sqrt{\frac{4\lambda^3}{n' k! \Gamma(n' + l' + 1)} \frac{K}{k_0}}. \quad (17.41)$$

Для волновой функции, учитывая равенства (17.4) и (17.24), мы можем написать

$$\psi_{klm} = Y_l^m(\vartheta, \varphi) R_{kl'}(r). \quad (17.42)$$

**б) Движение электрона в поле центральных сил по теории Дирака.** Рассматривая движение электрона по уравнению Дирака в кулоновском поле ядра

$$V(r) = -Ze_0^2/r, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad (17.43)$$

воспользуемся законами сохранения момента количества движения\*). Как известно, в нерелятивистской теории Шредингера в таком поле сохраняется орбитальный момент количества движения:

$$L = [rp]. \quad (17.44)$$

Однако в теории Дирака, которая учитывает также спин электрона, положение несколько изменяется: орбитальный момент не коммутирует с гамильтонианом

$$H = c(\alpha p) + \rho_3 m_0 c^2 + V(r) \quad (17.45)$$

и поэтому не является интегралом движения. В самом деле, рассматривая  $z$ -составляющую орбитального момента (17.44)  $L_z = (x p_y - y p_x)$ , находим для коммутатора отличное от нуля значение:

$$H L_z - L_z H = \frac{c\hbar}{i} (\alpha_1 p_y - \alpha_2 p_x) \neq 0. \quad (17.46)$$

Чтобы найти закон сохранения момента для частиц, обладающих спином, воспользуемся еще соотношением

$$H \frac{\hbar}{2} \sigma_3 - \frac{\hbar}{2} \sigma_3 H = \frac{c\hbar}{i} (\alpha_2 p_x - \alpha_1 p_y), \quad (17.47)$$

\*) Эти законы сохранения имеют место для любых центральных сил.

из которого следует, что в теории Дирака в поле центральных сил любая составляющая оператора

$$\mathbf{J} = \mathbf{L} + \frac{\hbar}{2} \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{L} + \mathbf{S} \quad (17.48)$$

коммутирует с оператором Гамильтона  $H$  и, следовательно, является интегралом движения. Этот результат можно интерпретировать следующим образом: электрон, наряду с орбитальным моментом количества движения  $\mathbf{L}$ , обладает также спиновым механическим моментом  $\mathbf{S}$  (не связанным с перемещением электрона в пространстве), причем в случае центральных сил сохраняется лишь полный момент количества движения.

Для электрона в  $s$ -состоянии орбитальный момент равен нулю, благодаря чему выполняется закон сохранения спинового момента, при этом для квадрата спина получаем

$$S^2 = \frac{\hbar^2}{4} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2) = \frac{3}{4} \hbar^2 = \hbar^2 s(s+1), \quad (17.49)$$

т. е. спин электрона характеризуется полудельными значениями  $s = 1/2$  (в единицах  $\hbar$ ).

**в) Свойства полного момента. Шаровые спиноры.** Операторы проекций полного момента количества движения подчиняются тем же перестановочным соотношениям, что и компоненты орбитального и спинового моментов \*):

$$J_x J_y - J_y J_x = i \hbar J_z. \quad (17.50)$$

Это нетрудно доказать прямым вычислением, учитывая, что операторы  $\mathbf{L}$  и  $\mathbf{S}$  действуют на разные переменные и поэтому коммутируют друг с другом.

Для оператора квадрата полного момента количества движения можно получить выражение

$$J^2 = (\mathbf{L} + \mathbf{S})^2 = L^2 + S^2 + 2(\mathbf{L}\mathbf{S}), \quad (17.51)$$

из которого видно, что квадрат полного момента коммутирует не только с оператором Гамильтона, но также и с любой проекцией полного момента. Таким образом, одновременно могут иметь собственные функции квадрат полного момента и одна из его проекций (например  $J_z$ ).

Правила квантования полного момента можно найти по известным правилам квантования орбитального момента для нерелятивистского случая:

$$\begin{aligned} L^2 &= \hbar^2 l(l+1), \quad l = 0, 1, 2, \dots; \\ L_z &= \hbar m, \quad m = 0, \pm 1, \dots, \pm l, \end{aligned} \quad (17.52)$$

\*) Путем циклической замены координат  $x \rightarrow y$ ,  $y \rightarrow z$ ,  $z \rightarrow x$  из (17.50) можно получить еще два аналогичных соотношения.

или спинового момента для  $S$ -состояния:

$$S^2 = \hbar^2 s(s + 1), \quad s = 1/2; \quad S_z = \hbar m_s, \quad m_s = \pm 1/2.$$

Здесь  $l$  — орбитальное,  $m$  — магнитное и  $s$  — спиновое квантовые числа. Подобная задача является частным случаем общей задачи сложения моментов. Однако мы не станем рассматривать общих выводов теории сложения моментов, а найдем точные функции в случае, когда они являются собственными для оператора квадрата полного момента количества движения (орбитального плюс спинового) и его проекции на ось  $z$ . Заметим, что оба последних оператора коммутируют с оператором Гамильтона и поэтому являются интегралами движения.

Волновые функции, собственные для  $J^2$  и  $J_z$ , должны удовлетворять соотношениям

$$\begin{aligned} J^2 \psi &= \left( \mathbf{L} + \frac{\hbar}{2} \boldsymbol{\sigma} \right)^2 \psi = \hbar^2 j(j + 1) \psi, \\ J_z \psi &= \left( L_z + \frac{\hbar}{2} \sigma_3 \right) \psi = \hbar m_j \psi, \end{aligned} \quad (17.53)$$

где  $j$  называется внутренним квантовым числом и характеризует абсолютное значение полного момента количества движения, а  $m_j$  — его проекцию на ось  $z$ .

Поскольку выбор оси  $z$  для характеристики проекции момента при сферической симметрии не нарушает общности рассуждений, все направления являются равноправными.

Вводя двухрядные матрицы  $\sigma'$  (14.7), а также разбивая  $\psi$ -функцию на систему двухкомпонентных спиноров

$$\varphi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}, \quad \chi = \begin{pmatrix} \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix}, \quad (17.54)$$

получаем систему уравнений вида

$$\begin{aligned} \left\{ L^2 + \frac{3}{4} \hbar^2 - \hbar^2 j(j + 1) \right\} \varphi &= -\hbar (\mathbf{L} \sigma') \varphi, \\ \left\{ L^2 + \frac{3}{4} \hbar^2 - \hbar^2 j(j + 1) \right\} \chi &= -\hbar (\mathbf{L} \sigma') \chi, \end{aligned} \quad (17.55)$$

т. е. угловые части спиноров  $\varphi$  и  $\chi$  являются независимыми. Связь же между ними может быть установлена, если в уравнениях Дирака учесть еще радиальную часть (см. ниже).

Подробное рассмотрение задачи о движении частицы в поле центральных сил мы проведем несколько позже, в частности, при наличии кулоновского взаимодействия. Сейчас мы рассмотрим лишь одно из уравнений (17.55), например, определим спинор с компонентами  $\psi_1$  и  $\psi_2$ , поскольку для спиноров  $\psi_3$  и  $\psi_4$  мы бу-

дем иметь аналогичные уравнения. Из (17.55) следует, что компоненты  $\psi_1$  и  $\psi_2$  удовлетворяют системе уравнений:

$$\hbar \left\{ j(j+1) - \frac{3}{4} - \frac{1}{\hbar^2} L^2 - \frac{1}{\hbar} L_z \right\} \psi_1 = (L_x - iL_y) \psi_2, \quad (17.56)$$

$$\hbar \left\{ j(j+1) - \frac{3}{4} - \frac{1}{\hbar^2} L^2 + \frac{1}{\hbar} L_z \right\} \psi_2 = (L_x + iL_y) \psi_1. \quad (17.57)$$

Для дальнейшего рассмотрения воспользуемся шаровыми функциями (см. (17.5), (17.5а), (17.5в)). Учтывая, что орбитальное квантовое число  $l$  принимает только целые положительные значения:

$$l = 0, 1, 2, \dots,$$

а также рекуррентные соотношения между сферическими функциями (см., например, [52]):

$$L_z Y_l^m = \hbar m Y_l^m, \quad (17.58)$$

$$(L_x \pm iL_y) Y_l^m = -\hbar \sqrt{(l+1 \pm m)(l \mp m)} Y_l^{m \pm 1}, \quad (17.59)$$

можно искать решение системы уравнений (17.56) в виде \*)

$$\psi_1 = C_1 Y_l^{m-1}(\vartheta, \varphi), \quad (17.60)$$

$$\psi_2 = C_2 Y_l^m(\vartheta, \varphi). \quad (17.61)$$

После подстановки (17.60) и (17.61) в систему уравнений (17.56) и (17.57) сферические функции сокращаются, и мы находим уравнения, устанавливающие связь между коэффициентами  $C_1$  и  $C_2$ :

$$\left\{ j(j+1) - l(l+1) - \left( m - \frac{1}{4} \right) \right\} C_1 + \sqrt{(l+1-m)(l+m)} C_2 = 0, \quad (17.62)$$

$$\sqrt{(l+1-m)(l+m)} C_1 + \left\{ j(j+1) - l(l+1) + \left( m - \frac{3}{4} \right) \right\} C_2 = 0. \quad (17.63)$$

Из равенства нулю определителя этой системы находим, что внутреннее квантовое число  $j$  может иметь два значения при  $l = 1, 2, 3, \dots$ :

$$j = l + \frac{1}{2}, \quad C_2 = -\sqrt{\frac{l-m+1}{l+m}} C_1, \quad (17.64)$$

$$j = l - \frac{1}{2}, \quad C_2 = \sqrt{\frac{l+m}{l-m+1}} C_1, \quad (17.65)$$

\*) При наличии центральных сил волновые функции (17.63) следует умножить еще на функцию, зависящую от  $r$  (см. ниже).

а при  $l=0$   $j$  принимает только одно значение:  $j=1/2$ , т. е. остается только одно соотношение (17.64), поскольку в этом случае коэффициент  $C_2$  согласно (17.65) обращается в нуль ( $l=m=0$ ). Коэффициенты  $C_1$  и  $C_2$ , определяющие связи между сферическими функциями, при сложении двух моментов (в данном случае орбитального и спинового) носят название коэффициентов Клебша — Гордана.

Воспользовавшись условием нормировки:  $C_1^2 + C_2^2 = 1$ , находим шаровой спинор при  $j=l+1/2$ ,  $l=0, 1, 2, \dots$  (решение первого типа):

$$\varphi^{(1)} = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{\frac{l+m}{2l+1}} Y_l^{m-1} \\ -\sqrt{\frac{l+1-m}{2l+1}} Y_l^m \end{array} \right\} = Y_{lm}^{(j=l+1/2)}. \quad (17.66)$$

В случае  $j=l-1/2$ ,  $l=1, 2, 3, \dots$  (решение второго типа):

$$\varphi^{(2)} = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{\frac{l-m+1}{2l+1}} Y_l^{m-1} \\ \sqrt{\frac{l+m}{2l+1}} Y_l^m \end{array} \right\} = Y_{lm}^{(j=l-1/2)}. \quad (17.67)$$

Из соотношения (17.5в) находим условие ортонормированности для шаровых спиноров:

$$\oint Y_{l'm'}^{+(j')} Y_{lm}^{(j)} d\Omega = \delta_{ll'} \delta_{ll'} \delta_{mm'}. \quad (17.68)$$

Шаровые спиноры (17.66) и (17.67) представляют собою спинорные обобщения обычных шаровых функций и являются угловой частью решения любых задач, связанных с движением частиц с полуцелым спином в поле центральных сил. Как будет показано ниже, при рассмотрении конкретных задач движения электрона в поле центральных сил волновая функция включает в себя оба найденных нами шаровых спинора.

Подставляя решения  $\varphi^{(1)}$  и  $\varphi^{(2)}$  в исходное уравнение (17.53), находим, что проекция полного момента количества движения на ось  $z$  принимает значения  $J_z = \hbar m_j$ , причем квантовое число  $m_j$  равно  $m_j = m - 1/2$ . Для обоих типов решения ( $j=l \pm 1/2$ ) квантовое число  $m_j$  изменяется в пределах  $m_j = -j, \dots, +j$ .

Таким образом, наши результаты сводятся к следующему: квадрат полного момента количества движения имеет собственные значения

$$J^2 = \hbar^2 j(j+1), \quad j = \begin{cases} l \pm 1/2; & l \neq 0, \\ 1/2; & l = 0, \end{cases} \quad (17.69)$$

т.е. квантуется подобно орбитальному моменту, но при этом внутреннее квантовое число \*)  $j$  принимает полуцелые значения. Собственные значения проекции момента на ось  $z$  также характеризуются полуцелыми квантовыми числами:

$$J_z = \hbar m_j, \quad m_j = -j, \dots, +j. \quad (17.70)$$

г) Движение электрона в кулоновском поле по теории Дирака. Рассмотрим движение электрона в поле центральных сил, когда потенциальная энергия  $V$  является функцией от  $r$ . Уравнение Дирака

$$\{E - V - c(\boldsymbol{\alpha}\mathbf{p}) - \rho_3 m_0 c^2\} \psi = 0 \quad (17.71)$$

допускает стационарные решения \*\*) и может быть приведено к системе двухкомпонентных уравнений с помощью матриц Паули:

$$(E - m_0 c^2 - V) \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = c(\boldsymbol{\sigma}'\mathbf{p}) \begin{pmatrix} \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix}, \quad (17.72)$$

$$(E + m_0 c^2 - V) \begin{pmatrix} \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix} = c(\boldsymbol{\sigma}'\mathbf{p}) \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}, \quad (17.73)$$

причем для кулоновского поля потенциальную энергию следует положить равной

$$V = -Ze^2/r. \quad (17.74)$$

Рассматриваемая задача является частным случаем общей проблемы движения частицы в поле центральных сил. Поэтому угловая часть функции  $\psi$  (переменные в этой задаче разделяются) может быть представлена в виде шаровых спиноров (см. (17.66) и (17.67)).

Для того чтобы установить связь между спинорами  $\phi$  и  $\chi$  (см. (17.54)), найдем действие на них оператора

$$(\boldsymbol{\sigma}'\mathbf{r}^0) = \sigma'_1 \sin \theta \cos \varphi + \sigma'_2 \sin \theta \sin \varphi + \sigma'_3 \cos \theta, \quad (17.75)$$

где  $\sigma'_n$  — двухрядные матрицы Паули, а  $\mathbf{r}^0 = \mathbf{r}/r$ . Тогда с помощью рекуррентных соотношений между шаровыми функциями (см., например, [52])

$$\cos \theta Y_l^m = A Y_{l+1}^m + B Y_{l-1}^m, \quad (17.76)$$

$$\sin \theta e^{\pm i\varphi} Y_l^m = A_{\pm} Y_{l+1}^{m\pm 1} + B_{\pm} Y_{l-1}^{m\pm 1}, \quad (17.77)$$

\*) Это название связано с историей вопроса: число  $j$  было введено до открытия спина эмпирически для объяснения спектральных закономерностей. Термин «внутреннее» отражал на том этапе какие-то неясные свойства электронов.

\*\*) В дальнейшем мы ограничимся положительным значением энергии  $E = c\hbar K > 0$ , отвлекаясь от вопроса о существовании позитронов (см. (15.72), (16.13)). Нестационарная волновая функция будет иметь вид

$$\psi(t) = e^{-icKt} \psi.$$

где

$$A = \sqrt{\frac{(l+1+m)(l+1-m)}{(2l+1)(2l+3)}}, \quad B = \sqrt{\frac{(l+m)(l-m)}{(2l+1)(2l-1)}}, \quad (17.78)$$

$$A_{\pm} = \pm \sqrt{\frac{(l+2 \pm m)(l+1 \pm m)}{(2l+1)(2l+3)}}, \quad (17.79)$$

$$B_{\pm} = \mp \sqrt{\frac{(l \mp m)(l-1 \mp m)}{(2l+1)(2l-1)}},$$

имеем

$$(\sigma' \mathbf{r}^0) Y_{lm}^{(1,2)} = Y_{l \pm 1 m}^{(2,1)}, \quad (17.80)$$

или

$$Y_{lm}^{(2,1)} = (\sigma' \mathbf{r}^0) Y_{l \mp 1 m}^{(1,2)}. \quad (17.81)$$

Эти шаровые спиноры согласно (17.53) удовлетворяют уравнению

$$J^2 Y_{lm}^{(1,2)} = \hbar^2 j(j+1) Y_{lm}^{(1,2)}, \quad (17.82)$$

причем когда в верхних скобках стоит индекс «1», следует положить  $j = l + 1/2$ , а для индексов «2» —  $j = l - 1/2$ .

С помощью уравнения (17.77) легко также показать, что

$$\frac{(\sigma' \mathbf{L})}{\hbar} Y_{lm}^{(1,2)} = -(\kappa + 1) Y_{lm}^{(1,2)}, \quad (17.83)$$

где \*)

$$\kappa = -1 - j(j+1) + l(l+1) + \frac{3}{4} = \mp(j + 1/2), \quad (17.84)$$

причем верхний знак относится к случаю  $j = l + 1/2$ , а нижний — к  $j = l - 1/2$ . Волновую функцию для обоих типов решения мы будем искать в виде

$$\psi^{(1,2)} = \pm \begin{pmatrix} F(r) Y_{lm}^{(1,2)} \\ iG(r) Y_{l \pm 1 m}^{(2,1)} \end{pmatrix}, \quad (17.85)$$

причем верхний знак относится к первому индексу, стоящему в скобках вверху, а нижний знак — ко второму.

Подставляя решения (17.85) в (17.72) и (17.73) и учитывая при этом соответственно формулы (17.80) и (17.81), получим

$$\left(E - m_0 c^2 + \frac{Ze_0^2}{r}\right) F Y_{lm}^{(1,2)} = ic(\sigma' \mathbf{p})(\sigma' \mathbf{r}) \frac{G}{r} Y_{lm}^{(1,2)}, \quad (17.86)$$

$$i \left(E + m_0 c^2 + \frac{Ze_0^2}{r}\right) G Y_{lm}^{(1,2)} = \frac{c}{r} (\sigma' \mathbf{r})(\sigma' \mathbf{p}) F Y_{lm}^{(1,2)}. \quad (17.87)$$

\*) Введение постоянной  $\kappa$  несколько упрощает дальнейшие вычисления.

Принимая во внимание соотношения

$$(\sigma'p)(\sigma'r) = (pr) - i(\sigma'L) = \frac{\hbar}{i} \left( 3 + r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{(\sigma'L)}{\hbar} \right), \quad (17.88)$$

$$(\sigma'r)(\sigma'p) = \frac{\hbar}{i} \left( r \frac{\partial}{\partial r} - \frac{(\sigma'L)}{\hbar} \right), \quad (17.89)$$

а также равенство (17.83), находим

$$\frac{dG}{dr} + \frac{1-\kappa}{r} G - \left( K - k_0 + \frac{\alpha Z}{r} \right) F = 0, \quad (17.90)$$

$$\frac{dF}{dr} + \frac{1+\kappa}{r} F + \left( K + k_0 + \frac{\alpha Z}{r} \right) G = 0. \quad (17.91)$$

Уравнения (17.90) и (17.91) описывают оба типа решения, которые отличаются друг от друга только значением постоянной  $\kappa$  (см. (17.84)).

Переходя к безразмерной переменной  $\rho = 2\lambda r$ ,  $\lambda = \sqrt{k_0^2 - K^2}$ , и выбирая функции  $F$  и  $G$  в виде \*)

$$\left. \begin{array}{l} F \\ G \end{array} \right\} = \sqrt{1 \pm \frac{K}{k_0}} e^{-\frac{\rho}{2}} \rho^{\gamma-1} (Q_1 \pm Q_2), \quad (17.92)$$

где

$$\gamma = \sqrt{\kappa^2 - \alpha^2 Z^2} \geq 0, \quad (17.93)$$

получим из (17.90) и (17.91) систему уравнений для функции  $Q_1$  и  $Q_2$  (\*\*):

$$\rho(Q_1 + Q_2)' + (\gamma + \kappa)(Q_1 + Q_2) - \rho Q_2 + \alpha Z \sqrt{\frac{k_0 - K}{k_0 + K}} (Q_1 - Q_2) = 0, \quad (17.94)$$

$$\rho(Q_1 - Q_2)' + (\gamma - \kappa)(Q_1 - Q_2) + \rho Q_2 - \alpha Z \sqrt{\frac{k_0 + K}{k_0 - K}} (Q_1 + Q_2) = 0, \quad (17.95)$$

причем штрихом обозначена производная по безразмерной переменной  $\rho$ .

Взяв сумму и разность уравнений (17.94) и (17.95), получаем

$$\begin{aligned} \rho Q_1' + \left( \gamma - \frac{\alpha Z K}{\lambda} \right) Q_1 + \left( \kappa - \frac{\alpha Z k_0}{\lambda} \right) Q_2 &= 0, \\ \rho Q_2' + \left( \gamma + \frac{\alpha Z K}{\lambda} - \rho \right) Q_2 + \left( \kappa + \frac{\alpha Z k_0}{\lambda} \right) Q_1 &= 0. \end{aligned} \quad (17.96)$$

Учитывая, что

$$\gamma^2 - \left( \frac{\alpha Z K}{\lambda} \right)^2 = \kappa^2 - \left( \frac{\alpha Z k_0}{\lambda} \right)^2, \quad (17.97)$$

\*) В (17.94) автоматически учитываются асимптотические решения при  $\rho \rightarrow \infty$  и  $\rho \rightarrow 0$  (см. (17.18)).

\*\*) Заметим, что в случае дискретного спектра  $k_0 > K$  ( $K - k_0 < 0$ ).



приводим (17.96) к уравнениям для вырожденной гипергеометрической функции (см. (17.19a)):

$$\begin{aligned} \rho Q_1'' + (2\gamma + 1 - \rho) Q_1' - \left( \gamma - \frac{\alpha ZK}{\lambda} \right) Q_1 &= 0, \\ \rho Q_2'' + (2\gamma + 1 - \rho) Q_2' - \left( \gamma + 1 - \frac{\alpha ZK}{\lambda} \right) Q_2 &= 0. \end{aligned} \quad (17.98)$$

Отсюда находим решения

$$\begin{aligned} Q_1 &= ND_1 \Phi \left\{ \gamma - \frac{\alpha ZK}{\lambda}, 2\gamma + 1, \rho \right\}, \\ N &= \frac{\Gamma \left( \gamma + \frac{\alpha ZK}{\lambda} + 1 \right)}{\Gamma(2\gamma + 1)}, \\ Q_2 &= ND_2 \Phi \left\{ \gamma + 1 - \frac{\alpha ZK}{\lambda}, 2\gamma + 1, \rho \right\}. \end{aligned} \quad (17.99)$$

Поскольку связь между коэффициентами  $D_1$  и  $D_2$  должна сохраняться для любых  $\rho$ , мы можем ее найти, полагая в (17.96)  $\rho=0$ :

$$D_2 = -D_1 \frac{\gamma - \alpha ZK/\lambda}{\kappa - \alpha Zk_0/\lambda}. \quad (17.100)$$

Учитывая асимптотическое поведение гипергеометрической функции при больших значениях аргумента (см. (17.20a)), найдем, что постоянная  $a = \gamma - \alpha ZK/\lambda$  должна равняться нулю или целому отрицательному числу. В противном случае волновая функция (см. (17.92)) должна экспоненциально возрастать при  $\rho \rightarrow \infty$ . Таким образом, величину  $a$  мы должны положить равной

$$-a = -\gamma + \alpha ZK/\lambda = k, \quad (17.101)$$

где радиальное квантовое число (см. также (17.23))  $k=0, 1, 2, \dots$

При условии (17.101) решения (17.99) представляют собою полиномы степени  $k$ . Заметим, что при  $k=0$  постоянная  $a$ , входящая в функцию  $Q_2$  (см. (17.99)), обращается в единицу, и поэтому эта функция должна экспоненциально возрастать. Однако, как видно из (17.100), коэффициент  $D_2$  в этом случае обращается в нуль, и поэтому решение  $Q_2$  вообще исчезает. Из (17.101) для энергии находим значение

$$\frac{E}{m_0 c^2} = \frac{K}{k_0} = \left\{ 1 + \frac{\alpha^2 Z^2}{(V\kappa^2 - \alpha^2 Z^2 + k)^2} \right\}^{-1/2}. \quad (17.102)$$

Используя равенства (17.21), (17.92), (17.97), (17.99) и (17.100), мы можем записать значения для радиальных волновых функций через полиномы Лагерра:

$$\left. \begin{aligned} F(r) \\ G(r) \end{aligned} \right\} = D_1 \sqrt{1 \pm \frac{K}{k_0}} e^{-\rho/2} \rho^{\gamma-1} \left[ Q_k^{2\gamma}(\rho) \mp \left( \frac{\alpha Zk_0}{\lambda} + \kappa \right) Q_{k-1}^{2\gamma} \right], \quad (17.103)$$

причем верхние знаки относятся к функции  $F(r)$ , а нижние — к  $G(r)$ . Коэффициент  $D_1$  может быть найден из условия нормировки

$$\int_0^{\infty} r^2 (F^2 + G^2) dr = 1. \quad (17.104)$$

При переходе к безразмерному аргументу  $\rho = 2\lambda r$  условие (17.104) принимает вид

$$\int_0^{\infty} \rho^2 (F^2 + G^2) d\rho = (2\lambda)^3. \quad (17.105)$$

При вычислении интеграла (17.105) проще всего воспользоваться соотношением, хорошо известным в теории полиномов Лагерра: \*)

$$\int_0^{\infty} e^{-\rho} \rho^{2\gamma} Q_k^{2\gamma}(\rho) Q_{k'}^{2\gamma}(\rho) d\rho = k! \Gamma(2\gamma + k + 1) \delta_{kk'}. \quad (17.106)$$

Тогда для нормировочного коэффициента находим значение

$$D_1 = (2\lambda)^{3/2} \sqrt{\frac{\alpha Z k_0 / \lambda - \kappa}{k! \Gamma(2\gamma + k + 1)} \frac{1}{4\alpha Z k_0 / \lambda}}. \quad (17.107)$$

д) **Спектр энергии.** Спектр энергии, определяемой формулой (17.102), может быть записан в виде единой формулы, если ввести внутреннее квантовое число  $j$ , с которым величина  $\kappa$  для обоих типов решения согласно (17.84) связана одним и тем же соотношением

$$\kappa^2 = (j + 1/2)^2. \quad (17.108)$$

Главное квантовое число  $n = j + 1/2 + k$  принимает целые положительные числа, начиная с единицы:  $n = 1, 2, 3, \dots$ . Это следует из того факта, что радиальное квантовое число изменяется от нуля до бесконечности, а минимальное значение внутреннего квантового числа  $j$  равно  $1/2$  (см. (17.69)).

Энергетический спектр (17.102) будет равен

$$E_{nj} = m_0 c^2 \left\{ 1 + \frac{\alpha^2 Z^2}{(n - (j + 1/2) + \sqrt{(j + 1/2)^2 - \alpha^2 Z^2})^2} \right\}^{-1/2}. \quad (17.109)$$

Поскольку минимальное значение внутреннего квантового числа равно половине ( $j = 1/2$ ), то устойчивость движения в кулоновском поле точечного ядра по теории Дирака нарушается при  $Z > Z_{кр} = 137$ . В этом случае становится возможным появление

\*) Для доказательства формулы (17.106) можем воспользоваться методом, использованным при вычислении интеграла (17.35).

электронно-позитронных пар, т. е. задача одного тела теряет смысл (парадокс Клейна [55], см. также [56]) \*).

При исследовании спектра энергии в водородоподобном атоме достаточно ограничиться членами порядка  $\alpha^2$ . Это связано с тем обстоятельством, что поправки к энергии порядка  $\alpha^4$  перекрываются более сильными поправками  $\sim \alpha^3$ , связанными с влиянием на спектр электромагнитного и электронно-позитронного вакуумов.

Ограничиваясь членами порядка  $\alpha^2$ , находим формулу Зоммерфельда — Дирака, характеризующую тонкую структуру:

$$E'_{nj} = E_{nj} - m_0 c^2 = - \frac{R \hbar Z^2}{n^2} \left\{ 1 + \frac{\alpha^2 Z^2}{n^2} \left( \frac{n}{j + 1/2} - \frac{3}{4} \right) \right\}, \quad (17.110)$$

где

$$R = \frac{m_0 e_0^4}{2 \hbar^3} = \frac{e_0^2}{2 \hbar a_0} \quad (17.111)$$

— постоянная Ридберга ( $a_0 = \hbar^2 / m_0 e_0^2$  — радиус первой боровской орбиты).

Энергетический спектр зависит лишь от главного  $n$  и внутреннего  $j$  квантовых чисел. Зависимость же от орбитального числа  $l$  не входит в выражение для энергетического спектра, и поэтому уровни энергии оказываются двукратно вырожденными. Полная кратность вырождения равна  $2(2j + 1)$ , поскольку энергия не зависит также от магнитного квантового числа  $m_j$ , принимающего  $2j + 1$  значений:  $m_j = \pm 1/2, \pm 3/2, \dots, \pm j$ .

Заметим, что учет релятивистских и спиновых эффектов по теории Дирака приводит к хорошему согласию с экспериментом. Однако более детальное исследование показывает, что одноэлектронная теория Дирака дает для энергетических уровней небольшие расхождения с экспериментом.

Согласно теории Дирака расщепление между уровнями серии Бальмера в атоме водорода ( $Z = 1$ ) с различными  $j$  должно равняться

$$\frac{E_{2\ 1/2} - E_{2\ 3/2}}{\hbar} = 2p_{1/2} - 2p_{3/2} = \Delta\omega. \quad (17.112)$$

Подставляя в (17.112) значения энергии из (17.110), найдем \*\*)

$$\Delta\omega = \frac{R\alpha^2}{16} = 10\ 950 \text{ Мгц}. \quad (17.113)$$

\*) В отличие от кулоновского поля при движении электронов в постоянном магнитном поле все энергетические состояния (включая наименьшие) будут устойчивыми (см. ниже).

\*\*)  $1 \text{ Мгц} = 10^6 \text{ сек}^{-1}$ . Напомним, что круговая частота  $\omega$  (выраженная в  $\text{сек}^{-1}$ ) связана с  $\nu$  (выраженной в мегагерцах) соотношением  $\omega = 2\pi \cdot 10^8 \nu$ .

По теории Клейна — Гордона это расщепление получается примерно в три раза больше (см. (17.31)).

Как видно из формулы (17.110), уровни серии Бальмера ( $n = 2$ ) с одинаковым значением  $j$  должны быть нерасщепленными:  $\Delta\omega_0 = 2p_{1/2} - 2s_{1/2} = 0$ , так как энергия от  $l$  не зависит. Этот теоретический вывод был предметом длительных экспериментальных исследований, причем экспериментаторы, используя оптические методы, уже в тридцатых годах высказывали сомнения в этом, казалось бы, беспорном заключении.

В 1947 г. Лэмб и Ризерфорд [57] радиоспектроскопическим методом экспериментально доказали, что уровень  $2s_{1/2}$  сдвинут вверх относительно уровня  $2p_{1/2}$  примерно на  $1/10$  часть зоммерфельдо-дираковского расщепления  $2p_{1/2} - 2p_{3/2}$ . Более точно расщепление, полученное экспериментально, равно

$$2p_{1/2} - 2s_{1/2} = 1058 \text{ Мгц.}$$

Расхождение теоретических и экспериментальных данных не превышает  $1 \text{ Мгц}$  \*). Согласно теоретическим данным учет вакуумных членов дает следующее значение для расщепления, которое нельзя получить из формулы (17.110):

$$\Delta\omega_0 = 2p_{1/2} - 2s_{1/2} = \frac{R\alpha^3}{3\pi} \left( \ln \frac{k_0}{\kappa_0} - \ln 2 + \frac{11}{24} - \frac{1}{5} + \frac{1}{2} \right) = 1051 \text{ Мгц,} \quad (17.114)$$

причем для серии Бальмера ( $n = 2$ )  $\ln(k_0/\kappa_0) = 7,6876$ .

Сдвиг уровней  $2s_{1/2}$  относительно  $2p_{1/2}$  ( $j = 1/2$ ) складывается из трех частей: сдвиг, пропорциональный  $\ln(k_0/\kappa_0) - \ln 2 + 11/24$ , обусловленный флуктуациями электромагнитного вакуума (основной член); сдвиг, пропорциональный  $-1/5$ , обусловленный флуктуациями электронно-позитронного вакуума, и, наконец, сдвиг, пропорциональный  $1/2$ , обязан взаимодействию вакуумного момента электрона (см. ниже) с электростатическим полем ядра. Вакуумные поправки называют также радиационными.

Более точные теоретические расчеты (см., например, [1]) дали для сдвига уровней еще более близкое к эксперименту значение ( $1057,19 \text{ Мгц}$ ).

**е) Волновые функции в паулевском приближении.** При вычислении энергии мы должны ограничиться нерелятивистским случаем, т. е. отбросить члены, пропорциональные  $\alpha^2$ , а в

\*) Первое теоретическое объяснение лэмбовского сдвига [57] было дано Бете [58]. Классические работы в этом направлении, выполненные Бете, Швингером, Дайсоном, Фейнманом и др., изложены в [59, 60]. Особенно последовательно математический аппарат квантованных полей с учетом радиационных поправок был развит в монографии Боголюбова и Ширкова [61].

волновой функции учесть лишь спиновые эффекты. Тогда для энергии электрона согласно (17.110) имеем

$$E'_n = E_n - m_0 c^2 = -e_0^2 Z^2 / 2a_0 n^2. \quad (17.115)$$

При вычислении же радиальных волновых функций в (17.103) следует положить

$$\lambda = \sqrt{k_0^2 - K^2} = Z/na_0, \quad \alpha Z k_0 / \lambda = n, \quad (17.116)$$

$$\sqrt{1 \pm K/k_0} = \begin{cases} \sqrt{2}; \\ 0; \end{cases} \quad \rho = 2Zr/na_0.$$

Поэтому в случае решения первого типа ( $j = l + 1/2$ ), когда согласно (17.93)

$$\gamma = -\kappa = l + 1, \quad n = l + k + 1$$

$$(l, k = 0, 1, 2, \dots; n = 1, 2, 3, \dots),$$

мы можем воспользоваться следующим рекуррентным соотношением для полиномов Лагерра [53]:

$$Q_k^{2l+2}(\rho) - k Q_{k-1}^{2l+2}(\rho) = Q_k^{2l+1}(\rho) = Q_{n-l-1}^{2l+1}(\rho). \quad (17.117)$$

В случае решения второго типа ( $j = l - 1/2$ ) в нашем приближении

$$\gamma = \kappa = l, \quad n = l + k \quad (k = 0, 1, 2, \dots; n, l = 1, 2, 3, \dots)$$

необходимо использовать несколько другое рекуррентное соотношение для полиномов Лагерра [53]:

$$Q_k^{2l}(\rho) - (n + l) Q_{k-1}^{2l}(\rho) = -\rho Q_{k-1}^{2l+1}(\rho). \quad (17.118)$$

Тогда в рассматриваемом приближении для волновой функции из (17.85) и (17.103) находим следующее значение:

$$\psi_{nlm}^{(1,2)} = R_{nl}(r) Y_{lm}^{(1,2)}, \quad (17.119)$$

причем радиальная волновая функция  $R_{nl}(r) = \pm F$  для обоих типов решения будет равна

$$R_{nl}(r) = 2 \left( \frac{Z}{na_0} \right)^{3/2} \sqrt{\frac{1}{n(n-l-1)!(n+l)!}} \rho^l e^{-1/2 \rho} Q_{n-l-1}^{2l+1}(\rho), \quad (17.120)$$

где  $\rho = 2Zr/na_0$ , а функцию  $G$  (см. (17.103)) следует положить в данном приближении равной нулю. Шаровые спиноры задаются формулами (17.66) (первый тип решения,  $j = l + 1/2$ ) и (17.67) (второй тип решения,  $j = l - 1/2$ ).

**ж) Понятие о гиперболических орбитах.** Дискретный спектр в водородоподобном атоме мы получаем при  $K < k_0$ , т. е. когда энергия (без включения собственной энергии  $m_0 c^2$ ) будет отри-

цательной величиной. В квазиклассической интерпретации это соответствует «эллиптическим» орбитам. В другом случае  $K > k_0$ , когда энергия частицы даже после исключения собственной энергии остается положительной, мы будем иметь так называемые «гиперболические» орбиты.

В нерелятивистском приближении уравнение (17.91) для волновой функции принимает вид

$$(K + k_0)G = -\frac{dF}{dr} - \frac{1 + \kappa}{r}F. \quad (17.121)$$

Подставляя (17.121) в (17.90), имеем

$$\frac{d^2F}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dF}{dr} + \left(K^2 - k_0^2 + 2k_0\frac{\alpha Z}{r} - \frac{l(l+1)}{r^2}\right)F = 0. \quad (17.122)$$

В этом случае для обоих типов решения мы можем положить

$$\kappa(\kappa + 1) = l(l + 1), \quad (17.123)$$

$$K = k_0 + E'/c\hbar, \quad \lambda_1^2 = K^2 - k_0^2 = 2m_0E'/\hbar^2, \quad (17.124)$$

$$k_0\alpha Z = \gamma_1\lambda_1.$$

Тогда для определения радиальной волновой функции имеем

$$\frac{d^2rR_l}{dr^2} + \left(\lambda_1^2 + \frac{2\gamma_1\lambda_1}{r} - \frac{l(l+1)}{r^2}\right)rR_l = 0, \quad (17.125)$$

где функцию  $F$  мы заменили функцией  $R_l$ , а функцию  $G$  согласно (17.92) положили равной нулю.

Решение уравнения (17.125) может быть записано в виде

$$R_l = Cr^l e^{-i\lambda_1 r} \Phi\{l + 1 + i\gamma_1, 2(l + 1), 2i\lambda_1 r\}, \quad (17.126)$$

где  $\Phi$  — вырожденная гипергеометрическая функция (см. (17.18a)). Учитывая асимптотическое поведение функции  $\Phi$  (см. (17.20a)), найдем

$$R_l(r \rightarrow \infty) = C \frac{1}{r} \left[ \frac{e^{i(\lambda_1 r - \pi l/2 + \gamma_1 \ln 2\lambda_1 r)}}{i\Gamma(l + 1 + i\gamma_1)} - \frac{e^{-i(\lambda_1 r - \pi l/2 + \gamma_1 \ln 2\lambda_1 r)}}{i\Gamma(l + 1 - i\gamma_1)} \right]. \quad (17.127)$$

Полагая

$$\Gamma(l + 1 \pm i\gamma_1) = |\Gamma(l + 1 + i\gamma_1)| e^{\mp i\delta_l} \quad (17.128)$$

получаем для радиальной функции асимптотическое значение

$$R_l = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin(\lambda_1 r - \pi l/2 + \gamma_1 \ln 2\lambda_1 r + \delta_l)}{r}, \quad (17.129)$$

причем коэффициент  $C$  был найден из условия нормировки на дельта-функцию (непрерывный спектр):

$$\int_0^\infty r^2 dr R_l(\lambda_1 r) R_l(\lambda_1' r) = \delta(\lambda_1 - \lambda_1'). \quad (17.130)$$

В случае  $|l + i\gamma_1| \gg 1$ , воспользовавшись формулой Стирлинга

$$|\Gamma(l + 1 + i\gamma_1)| e^{-i\delta_l} \approx \sqrt{2\pi} \left( \frac{l + 1/2 + i\gamma_1}{e} \right)^{(l + 1/2 + i\gamma_1)}, \quad (17.131)$$

можно найти для фазы значение

$$\delta_l = -(l + 1/2) \operatorname{arctg} \frac{\gamma_1}{l + 1/2} - \gamma_1 (\ln \sqrt{(l + 1/2)^2 + \gamma_1^2} - 1). \quad (17.132)$$

При  $\gamma_1 \rightarrow 0$  (отсутствие кулоновских сил) формула (17.129) дает асимптотическое решение для свободного движения.

3) **Четность состояний.** В теории Шредингера орбитальное квантовое число  $l$  для центральных сил было интегралом движения при нахождении квадрата момента количества движения  $L^2 = \hbar^2 l(l + 1)$ . В теории Дирака орбитальный момент, характеризуемый числом  $l$ , не является уже интегралом движения. Однако квантовое число  $l$  описывает еще одно важное квантовое свойство частицы, а именно — четность состояния, т. е. поведение волновой функции при инверсии пространства (Р-преобразование, см. (16.53)):

$$x = -x', \quad y = -y', \quad z = -z'. \quad (17.133)$$

Чтобы это показать, введем оператор инверсии пространства, превращающий правовинтовую систему координат в левовинтовую и наоборот:

$$I\psi(\mathbf{r}) = \psi(-\mathbf{r}'). \quad (17.134)$$

Путем двукратного применения этого оператора можно легко найти его собственные значения  $\lambda$ :

$$I^2\psi(\mathbf{r}) = \lambda^2\psi(\mathbf{r}), \quad \lambda = \pm 1. \quad (17.135)$$

Таким образом, волновые функции при инверсии пространства либо вообще не изменяются (четные состояния,  $\lambda = 1$ ), либо изменяют свой знак на противоположный (нечетные состояния,  $\lambda = -1$ ).

Найдем величину, определяющую четность волновой функции, для частицы в поле центральных сил. В сферической системе координат преобразование инверсии касается только угловой части:

$$r' = r, \quad \theta' = \pi - \theta, \quad \varphi' = \pi + \varphi \quad (17.136)$$

(в чем нетрудно убедиться, исходя из связи сферических координат с декартовыми:  $x = r \sin \theta \cos \varphi$ ,  $y = r \sin \theta \sin \varphi$ ,  $z = r \cos \theta$ ). При этом угловая часть волновой функции изменяется по следующему закону:

$$I Y_l^m(\theta, \varphi) = Y_l^m(\pi - \theta, \pi + \varphi) = \text{const}, \quad (17.137)$$

$$P_l^m(-\cos \theta) e^{i(\varphi + \pi)m} = (-1)^l Y_l^m(\theta, \varphi),$$

ибо

$$P_l^m(-x) = (-1)^{l+m} P_l^m(x).$$

Таким образом, четность квантового числа  $l$  определяет четность шаровой функции.

В случае центральных сил шаровой спинор, входящий в волновые функции  $\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}$ , пропорциональный  $Y_l^{m'}$ , имеет одну четность, а шаровой спинор, входящий в волновые функции  $\begin{pmatrix} \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix}$ , пропорциональный  $Y_{l\pm 1}^{m'}$ , — другую. Поэтому при инверсии пространства интегралом движения является оператор (см. (16.58))

$$I^D = \rho_3 I, \quad (17.138)$$

который коммутирует с оператором Гамильтона

$$H = c \left( \alpha \left( \mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right) \right) + \rho_3 m_0 c^2. \quad (17.139)$$

В этом случае при действии оператора  $I^D$  знак у всех четырех компонент волновой функции  $\psi_\mu$  ( $\mu = 1, 2, 3, 4$ ) будет либо не изменяться ( $l$  — четно), либо изменяться на противоположный ( $l$  — нечетно). Таким образом, в теории Дирака, хотя орбитальный момент и не сохраняется, квантовое число  $l$  характеризует четность состояния, так как мы имеем соотношение

$$I^D \psi = (-1)^l \psi. \quad (17.140)$$

## § 18. ТЕОРИЯ ИЗЛУЧЕНИЯ

Для построения квантовой теории излучения оказалось необходимым учитывать взаимодействие электрона с вторично квантованным полем фотонов.

В простейшем случае мы можем подчинить электроны не-квантованному волновому уравнению (уравнение Шредингера или Дирака и др.). Переходы, обусловленные квантованным электромагнитным полем, оказываются возможными даже в том случае, когда реальные фотоны отсутствуют (спонтанное излучение; вероятность перехода характеризуется коэффициентом Эйнштейна  $A$ ). При воздействии реальных фотонов возникают вынужденные или индуцированные переходы, характеризуемые коэффициентом Эйнштейна  $B$ . Вынужденные переходы возможны как с испусканием, так и с поглощением энергии фотонов.

**а) Теория переходных процессов.** Подчиним электроны не-квантованному уравнению Дирака \*)

$$\left( -\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial t} - H \right) \psi = 0, \quad (18.1)$$

\*) Здесь функция  $U$  является оператором особого типа, действующим на функцию от числа фотонов, поэтому мы не будем обозначать этот оператор прямым шрифтом.



где

$$\begin{aligned} H &= c(\alpha \mathbf{P}) + \rho_3 m_0 c^2 + V + U, \\ \mathbf{P} &= \mathbf{p} + \frac{e_0}{c} \mathbf{A} \end{aligned} \quad (18.2)$$

( $e = -e_0$ ), а  $U = U^- + U^+$  — энергия взаимодействия электрона с вторично квантованным полем фотонов, причем

$$U^- = \frac{e_0}{L^{3/2}} \sum_{\mathbf{x}} \sqrt{\frac{2\pi c \hbar}{\kappa}} (\alpha \mathbf{a}) e^{-i\kappa t + i\mathbf{x} \cdot \mathbf{r}}, \quad (18.3)$$

$$U^+ = \frac{e_0}{L^{3/2}} \sum_{\mathbf{x}} \sqrt{\frac{2\pi c \hbar}{\kappa}} (\alpha \mathbf{a}^+) e^{i\kappa t - i\mathbf{x} \cdot \mathbf{r}}. \quad (18.4)$$

Здесь амплитуды вектор-потенциала являются операторами рождения ( $\mathbf{a}^+$ ) и уничтожения ( $\mathbf{a}$ ), действующими на функцию от числа фотонов  $f(N)$  \*), которую мы для сокращения записи включаем в электронную волновую функцию, полагая  $\psi(N) = f(N) \psi(\mathbf{r}, t)$ .

Уравнение Дирака (18.1), учитывающее переменное число фотонов, эквивалентно системе двух уравнений

$$\begin{aligned} \left( i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - H \right) \psi(N+1) &= U^+ \psi(N), \\ \left( i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - H \right) \psi(N) &= U^- \psi(N+1), \end{aligned} \quad (18.5)$$

в которых  $N$  — общее число фотонов. Таким образом, при действии операторов  $U^+$  и  $U^-$  на функцию от числа фотонов их общее число должно соответственно увеличиваться или уменьшаться на единицу.

Представим решение основного уравнения Дирака (18.1) (без поля излучения  $U = 0$ ) в виде стационарных состояний:

$$\psi(t) = \sum_n C_n \psi_n e^{-i \frac{E_n}{\hbar} t}, \quad (18.6)$$

где волновые функции  $\psi_n$  удовлетворяют стационарному (не квантованному) уравнению Дирака

$$(E_n - H) \psi_n = 0 \quad (18.7)$$

и подчиняются условию ортонормированности

$$\int \psi_{n'}^+ \psi_n d^3x = \delta_{nn'}. \quad (18.8)$$

\*) Функция от числа фотонов определена равенством (12.77).

Рассмотрим два квантовых состояния  $a$  и  $b$  ( $E_b > E_a$ ) и будем искать решение системы (18.5) в виде

$$\begin{aligned}\psi(N) &= C_b(t) e^{-i \frac{E_b}{\hbar} t} \psi_b f(N), \\ \psi(N+1) &= C_a(t) e^{-i \frac{E_a}{\hbar} t} \psi_a f(N+1),\end{aligned}\quad (18.9)$$

где  $|C_b|^2$  и  $|C_a|^2$  характеризуют вероятность пребывания электрона соответственно в состояниях  $b$  и  $a$ . Подставляя эти решения в систему уравнений (18.5) и учитывая действие операторов  $U^-$  и  $U^+$  на функцию от числа частиц:

$$U^+ f(N) \rightarrow f(N+1), \quad U^- f(N+1) \rightarrow f(N),$$

получим для определения коэффициентов  $C_a$  и  $C_b$  следующие уравнения:

$$\begin{aligned}i\hbar \dot{C}_a e^{-i \frac{E_a}{\hbar} t} \psi_a &= U^+ C_b \psi_b e^{-i \frac{E_b}{\hbar} t}, \\ i\hbar \dot{C}_b e^{-i \frac{E_b}{\hbar} t} \psi_b &= U^- C_a \psi_a e^{-i \frac{E_a}{\hbar} t},\end{aligned}\quad (18.10)$$

где точкой обозначена производная по времени.

Мы опускаем здесь и в дальнейшем функцию от числа фотонов  $f(N)$ , поскольку ее влияние будет полностью учтено перестановочными соотношениями для билинейных комбинаций амплитуд  $a$  и  $a^+$ . Действительно, если нас не интересуют вопросы, связанные с поляризационными свойствами излучения, мы можем не разбивать по состояниям поляризации амплитуды  $a$  и  $a^+$ . Тогда перестановочные соотношения можно записать в следующем виде (см. (12.74)):

$$a_s a_{s'}^+ - a_{s'}^+ a_s = \left( \delta_{ss'} - \frac{\kappa_s \kappa_{s'}}{\kappa^2} \right) \delta_{\kappa \kappa'}, \quad (18.11)$$

где индексы  $s, s' = 1, 2, 3$  характеризуют проекции амплитуд вектор-потенциала на оси координат.

Легко показать, что при исследовании спонтанного излучения, когда в начальный момент фотоны отсутствуют ( $N = 0$ ), отличными от нуля будут только следующие квадратичные комбинации (см. (12.81)):

$$a_s a_{s'}^+ = \left\{ \delta_{ss'} - \frac{\kappa_s \kappa_{s'}}{\kappa^2} \right\} \delta_{\kappa \kappa'}, \quad (18.12)$$

которые автоматически учитывают в уравнении Дирака рождение фотонов. Слагаемое в (18.11), которое описывает поглощение фотонов, в этом случае переходов не дает ( $a_s^+ a_s = 0$ ).

Умножим уравнения (18.10) на  $e^{i \frac{E_a}{\hbar} t} \psi_a^+$  и проинтегрируем по всему пространству. Тогда получаем

$$\dot{C}_a = -\frac{i}{\hbar} C_b e^{-i c \kappa_{ba} t} \int \psi_a^+ U^+ \psi_b d^3 x, \quad (18.13)$$

где величина  $c \hbar \kappa_{ba} = E_b - E_a$  характеризует изменение энергии электрона. Рассматривая переходы, сопровождающиеся излучением фотонов ( $E_b \rightarrow E_a$ ), мы должны считать, что в момент времени  $t = 0$  электрон с достоверностью находится в состоянии  $b$ , причем состояние  $a$  свободно:

$$C_b(0) = 1, \quad C_a(0) = 0. \quad (18.14)$$

Для решения уравнения (18.13), как и обычно, применяется метод теории возмущений в предположении малости величины  $U^+$ . Тогда приближенное решение (18.13) имеет следующий вид:

$$C_b(t) \approx C_b(0) = 1, \quad (18.15)$$

$$C_a(t) = -\frac{ie_0}{\hbar L^{3/2}} \sum_{\kappa} \sqrt{\frac{2\pi c \hbar}{\kappa}} (\bar{a} a^+) \int_0^t e^{-i c t (\kappa_{ba} - \kappa)} dt,$$

где матричный элемент  $\bar{a}$  равен

$$\bar{a} = \int \psi_a^+ a e^{-i \kappa r} \psi_b d^3 x. \quad (18.16)$$

Вероятность пребывания электрона в состоянии  $a$  равна  $C_a^+ C_a$ . Поэтому вероятность квантового перехода  $b \rightarrow a$  в единицу времени определяется формулой

$$\omega_{ba} = \frac{\partial}{\partial t} C_a^+ C_a =$$

$$= \frac{e_0^2}{\hbar^2 L^3} \sum_{\kappa} \frac{2\pi c \hbar}{\kappa} (\bar{a}^* a) (\bar{a} a^+) \left. \frac{\partial}{\partial t} \left| \int_0^t e^{-i c t (\kappa_{ba} - \kappa)} dt \right|^2 \right. \quad (18.17)$$

Для сравнительно больших промежутков времени нетрудно получить \*)

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\partial}{\partial t} \left| \int_0^t e^{-ict} (\kappa_{ba} - \kappa) dt \right|^2 = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{2 \sin ct (\kappa - \kappa_{ba})}{c (\kappa - \kappa_{ba})} = \frac{2\pi}{c} \delta(\kappa_{ba} - \kappa). \quad (18.18)$$

Переходя от суммы по  $\kappa$  к интегралу:

$$\frac{1}{L^3} \sum_{\kappa} \rightarrow \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3\kappa, \quad (18.19)$$

для вероятности спонтанных квантовых переходов в единицу времени получаем выражение

$$\omega_{ba} = \frac{e_0^2}{2\pi\hbar} \int \frac{d^3\kappa}{\kappa} (\bar{\mathbf{a}}^* \mathbf{a}) (\bar{\mathbf{a}} \mathbf{a}^+) \delta(\kappa_{ba} - \kappa), \quad (18.20)$$

которое с помощью перестановочных соотношений (18.12) для амплитуд  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{a}^+$  можно привести к виду

$$\omega_{ba} = \frac{e_0^2}{2\pi\hbar} \int \frac{d^3\kappa}{\kappa} \delta(\kappa - \kappa_{ba}) \Phi, \quad (18.21)$$

где \*\*)

$$\Phi = ([\bar{\mathbf{a}}^* \boldsymbol{\kappa}^0][\bar{\mathbf{a}} \boldsymbol{\kappa}^0]) = (\bar{\mathbf{a}}^* \bar{\mathbf{a}}) - (\boldsymbol{\kappa}^0 \bar{\mathbf{a}}^*)(\boldsymbol{\kappa}^0 \bar{\mathbf{a}}), \quad (18.22)$$

\*) Здесь учтена формула Дирихле

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\alpha}^{\alpha} f(\kappa) \frac{\sin ct\kappa}{\kappa} d\kappa = f(0), \quad \alpha > 0.$$

Отсюда сразу же видно, что

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\sin ct\kappa}{\kappa} = \pi \delta(\kappa).$$

\*\*) В случае уравнения Клейна — Гордона, т. е. для бесспиновой частицы, вместо величины  $\bar{\mathbf{a}}$  мы должны подставить соответствующее выражение для тока:

$$\bar{\mathbf{a}} = \frac{1}{2m_0c} \int e^{-i\mathbf{x}\mathbf{r}} [(P^* \Psi_a^*) \Psi_b + \Psi_a^* P \Psi_b] d^3x, \quad (18.21a)$$

где операторы обобщенного импульса равны

$$\mathbf{P} = \frac{\hbar}{i} \nabla - \frac{e}{c} \mathbf{A}. \quad (18.21б)$$

Условие же нормировки принимает вид

$$\frac{1}{2m_0c} \int [(P_t^* \Psi_a^*) \Psi_a + \Psi_a^* P_t \Psi_a] d^3x = 1, \quad (18.21в)$$

где

$$P_t = -i'P_4 = -\frac{\hbar}{ic} \frac{\partial}{\partial t} - \frac{e}{c} \Phi. \quad (18.21г)$$

а  $\kappa^0 = \kappa/\kappa$  — единичный вектор в направлении импульса фотона. При выводе выражения (18.22) мы воспользовались векторным тождеством

$$([ab][cd]) = (ac)(bd) - (ad)(bc). \quad (18.23)$$

Поскольку энергия излучаемого фотона пропорциональна частоте ( $\varepsilon = c\hbar\kappa$ ), для интенсивности излучения получаем формулу

$$W = c\hbar\kappa_{ba}\omega = \frac{ce_0^2}{2\pi} \int d^3\kappa \delta(\kappa - \kappa_{ba}) \Phi. \quad (18.24)$$

**б) Учет поляризационных эффектов.** Покажем, каким образом могут быть учтены поляризационные свойства излучения. Поляризационные свойства излучаемых фотонов можно описать, вычислив интенсивности излучения, соответствующие двум линейным и двум круговым состояниям поляризации.

Для линейно поляризованных фотонов амплитуду вектор-потенциала  $\mathbf{a}$  (см. (12.55)) следует представить в виде суммы двух взаимно перпендикулярных составляющих:

$$\mathbf{a} = \sum_{\lambda} \beta_{\lambda} q_{\lambda} = \beta_2 q_2 + \beta_3 q_3, \quad (18.25)$$

где отличная от нуля квадратичная комбинация вторично квантованных амплитуд равна

$$q_s q_{s'}^* = \delta_{ss'} \quad (s, s' = 2, 3).$$

Здесь  $\beta_2$  и  $\beta_3$  — произвольные единичные векторы, перпендикулярные друг другу и к направлению вектора импульса фотона  $\kappa$ :

$$\beta_3 = [\kappa^0 \beta_2], \quad (\kappa^0 \beta_{\lambda}) = (\beta_2 \beta_3) = 0. \quad (18.26)$$

В силу этих соотношений единичные векторы  $\beta_2$  и  $\beta_3$  можно положить равными (см. (12.56))

$$\beta_2 = \frac{[\kappa^0 j^0]}{\sqrt{1 - (\kappa^0 j^0)^2}}, \quad \beta_3 = \frac{\kappa^0 (\kappa^0 j^0) - j^0}{\sqrt{1 - (\kappa^0 j^0)^2}}. \quad (18.27)$$

Для исследования круговой поляризации излучения фотонную амплитуду  $\mathbf{a}$  разобьем на отдельные компоненты следующим способом:

$$\mathbf{a} = \sum_{l=-1}^1 \beta_l q_l = \beta_1 q_1 + \beta_{-1} q_{-1}, \quad (18.28)$$

причем отличная от нуля квадратичная комбинация (при  $\kappa' = \kappa$ ) равна  $q_l q_l^* = \delta_{ll}$ . Единичные векторы  $\beta_l$  связаны с  $\beta_2$  и  $\beta_3$  соотношением (см. (12.60))

$$\beta_l = \frac{1}{\sqrt{2}} (\beta_2 + il\beta_3), \quad (18.29)$$

т. е.  $\beta_{-l}^* = \beta_l$ . Из (18.29) следует

$$(\beta_l \beta_{l'}^*) = \delta_{ll'}, \quad \kappa^0 = i[\beta_1 \beta_{-1}]. \quad (18.30)$$

Для энергии  $E$  и полного спина  $S$  электромагнитного поля имеем (см. (12.33), (12.83))

$$E = \frac{1}{8\pi} \int (\mathbf{E}^2 + \mathbf{H}^2) d^3x = \sum_x c\hbar\kappa (N_1 + N_{-1}),$$

$$\mathbf{S} = \frac{1}{4\pi c} \int [\mathbf{E}\mathbf{A}] d^3x = \sum_x \hbar\kappa^0 (N_1 - N_{-1}), \quad (18.31)$$

где  $N_l$  — число фотонов с заданной круговой поляризацией. Отсюда видно, что оба сорта фотонов обладают одинаковой энергией, но разными направлениями спина. Спин фотонов с  $l = 1$  параллелен вектору  $\kappa^0$ . Такое состояние поляризации называется правой круговой поляризацией (правый винт). Спин фотонов с  $l = -1$  имеет противоположное направление, т. е. образует левую круговую поляризацию (левый винт).

Если мы хотим в интенсивности излучения учесть поляризацию фотонного излучения, то вместо формулы (18.24) должны написать

$$W_i = \frac{ce_0^2}{2\pi} \int d^3\kappa \delta(\kappa - \kappa_{ba}) \Phi_i, \quad (18.32)$$

где величина  $\Phi_i$  зависит от типа поляризации:

для линейной поляризации ( $\lambda = 2, 3$ )

$$\Phi_\lambda = (\bar{\alpha}^* \beta_\lambda)(\bar{\alpha} \beta_\lambda), \quad (18.33)$$

для круговой поляризации ( $\lambda = 1, -1$ )

$$\Phi_l = (\bar{\alpha}^* \beta_l^*)(\bar{\alpha} \beta_l) = \frac{1}{2} ([\kappa^0 \bar{\alpha}^*][\kappa^0 \bar{\alpha}] - \frac{i}{2} l (\kappa^0 [\bar{\alpha}^* \bar{\alpha}])). \quad (18.34)$$

Следует заметить, что интенсивность излучения, обладающего круговой поляризацией, не зависит от направления произвольного единичного вектора  $\mathbf{j}$ . От этого направления зависит лишь интенсивность с заданной линейной поляризацией. Если линейная поляризация существует, то мы всегда можем выбрать направление для вектора  $\mathbf{j}$  таким образом, чтобы величина  $W_2$  соответствовала максимуму, а  $W_3$  — минимуму излучения. Как правило, для этой цели  $\mathbf{j}$  следует ориентировать по какому-то физически выделенному направлению. Очевидно, что величина  $\Phi$ , дающая возможность по формуле (18.21) вычислить суммарную (по состояниям поляризации) интенсивность излучения, будет равна

$$\Phi = \Phi_2 + \Phi_3 = \Phi_1 + \Phi_{-1}, \quad (18.35)$$

или

$$\Phi = ([\kappa^0 \bar{\alpha}^*][\kappa^0 \bar{\alpha}]) = (\bar{\alpha}^* \bar{\alpha}) - (\kappa^0 \bar{\alpha}^*)(\kappa^0 \bar{\alpha}). \quad (18.36)$$

Сдвиг фаз между двумя линейными поляризациями может быть найден, исходя из формулы (12.64):

$$\sin \varphi = (\Phi_1 - \Phi_{-1})/2 \sqrt{\overline{\Phi_2 \Phi_3}}. \quad (18.37)$$

**в) Спонтанные и вынужденные переходы.** Формулы (18.21) и (18.22) определяют так называемые спонтанные переходы, происходящие самопроизвольно, т. е. независимо от наличия внешнего поля. Эти спонтанные переходы могут совершаться только сверху вниз (т. е. из состояний с большей энергией  $E_b$  в состояния с меньшей энергией  $E_a$ ) и обозначаются коэффициентом Эйнштейна  $A_{ba}$ . После интегрирования по  $\kappa$  формула (18.21) дает следующее значение:

$$A_{ba} = \omega_{ba} = \frac{e_0^2 \kappa}{2\pi \hbar} \oint d\Omega \Phi, \quad (18.38)$$

где

$$\Phi = ([\kappa^0 \bar{\alpha}^*][\kappa^0 \bar{\alpha}]) = (\bar{\alpha}^* \bar{\alpha}) - (\kappa^0 \bar{\alpha}^*)(\kappa^0 \bar{\alpha}),$$

$$\kappa = \kappa_{ba}, \quad \kappa = \frac{E_b - E_a}{c\hbar}, \quad \bar{\alpha} = \int \psi_b^* \alpha e^{-i\kappa r} \psi_a d^3x. \quad (18.39)$$

При наличии внешних фотонов, наряду со спонтанными, должны существовать также и вынужденные переходы, т. е. переходы под действием внешних фотонов. В этом случае при исследовании переходов сверху вниз вместо перестановочных соотношений (18.12) мы должны написать (см. (12.81))

$$a_s a_{s'}^{\dagger} = (\delta_{ss'} - \kappa_s^0 \kappa_{s'}^0) \delta_{\kappa\kappa'} (1 + N(\kappa)), \quad (18.40)$$

где  $N$  — число фотонов с импульсом  $\kappa$  (усредненное по состояниям поляризации). Тогда, если предположить, что внешнее излучение изотропно (т. е. число  $N$  зависит только от модуля  $\kappa$ ), мы для вероятности перехода сверху вниз вместо выражения (18.38) найдем

$$\omega_{ba} = A_{ba} (1 + N(\omega)) = A_{ba} + \rho(\omega) B_{ba}, \quad (18.41)$$

где  $\omega = c\kappa$ , а  $\rho(\omega)$  — плотность числа фотонов, связанная с  $N(\omega)$  (в случае изотропного излучения) при помощи соотношения

$$U = \int_0^{\infty} \rho(\omega) d\omega = \frac{1}{L^3} \sum_{\kappa} c\hbar \kappa 2N(\omega) = \frac{4\pi c\hbar}{8\pi^3} \int_0^{\infty} \frac{\omega^3 d\omega}{c^1} N(\omega). \quad (18.42)$$

Отсюда для коэффициентов Эйнштейна  $B_{ba}$  мы находим значение [62]

$$B_{ba} = \frac{N(\omega)}{\rho(\omega)} A_{ba} = \frac{\pi^2 c^3}{\hbar \omega^3} A_{ba}. \quad (18.43)$$

Исследуем возможность переходов снизу вверх, т. е. с поглощением энергии ( $E_a > E_b$ ,  $E_a < E_b$ ). Полагая в формуле (18.13)  $C_a(t) = C_a(0) = 1$ ,  $C_b(0) = 0$ , мы найдем для коэффициента  $C_b(t)$ , по аналогии с выводом формулы (18.15), следующую формулу:

$$C_b(t) = -\frac{ie_0}{\hbar L^{1/2}} \sum_{\kappa} \sqrt{\frac{2\pi c \hbar}{\kappa}} (\bar{a}^* a) \int_0^t e^{i\kappa t} (\kappa_{ba} - \kappa) dt. \quad (18.44)$$

Отсюда для вероятности перехода  $a \rightarrow b$  вместо (18.20) находим значение

$$\omega_{ab} = \frac{\partial}{\partial t} \sum C_b^* C_b = \frac{e_0^2}{2\pi \hbar} \int \frac{d^3 \kappa}{\kappa} (\bar{a} a^+) (\bar{a}^* a) \delta(\kappa_{ba} - \kappa). \quad (18.45)$$

Принимая во внимание, что

$$a_{s'}^+ a_s = (\delta_{ss'} - \kappa_s^0 \kappa_{s'}^0) \delta_{\kappa \kappa'} N(\kappa), \quad (18.46)$$

(ср. с (18.40)) мы найдем для вероятности перехода (в случае изотропного внешнего излучения) следующее выражение:

$$\omega_a = N(\omega) A_{ba} = \rho(\omega) B_{ab}. \quad (18.47)$$

Отсюда видно, что спонтанное излучение снизу вверх, как и следовало ожидать, невозможно. Вероятности же вынужденных переходов сверху вниз ( $b \rightarrow a$ ) и снизу вверх ( $a \rightarrow b$ ) будут одинаковыми, т. е.

$$B_{ab} = B_{ba}. \quad (18.48)$$

С помощью формул (18.43) и (18.48) легко дать строгое квантовомеханическое обоснование формулы Планка, характеризующей состояние термодинамического равновесия между нагретыми атомами и излучением (равновесное или черное излучение). В этом случае число переходов сверху вниз (спонтанные и вынужденные) должно равняться числу переходов снизу вверх (вынужденные):

$$N_b A_{ba} + N_b \rho(\omega) B_{ba} = N_a \rho(\omega) B_{ab}. \quad (18.49)$$

Учитывая, что распределение атомов по энергиям задается формулой Максвелла

$$N_b = C e^{-\frac{E_b}{k_0 T}}, \quad N_a = C e^{-\frac{E_a}{k_0 T}}, \quad (18.50)$$

где  $k_0 = 1,38 \cdot 10^{-16}$  эрг/град — постоянная Больцмана, а  $T$  — абсолютная температура, и принимая во внимание, что  $E_b - E_a = \hbar \omega$ , найдем из (18.49)

$$\rho(\omega) = \frac{A_{ba}/B_{ba}}{(B_{ab}/B_{ba}) e^{\hbar \omega / k_0 T} - 1}. \quad (18.51)$$



Учитывая соотношения (18.43) и (18.48), получим формулу Планка для равновесного излучения:

$$\rho(\omega) = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^3} \frac{1}{e^{\hbar\omega/k_0 T} - 1}. \quad (18.52)$$

г) **Дипольное излучение.** Для того чтобы определить вероятность перехода, мы должны прежде всего вычислить матричный элемент (18.16). Как будет показано ниже, при ультрарелятивистских движениях величина  $\kappa r \sim 2\pi R/\lambda$  (где  $R$  — размеры орбиты, а  $\lambda$  — длина излучаемого света) может стать больше единицы, и поэтому в матричном элементе множитель  $e^{-i\kappa r}$  мы не можем раскладывать в ряд.

Напротив, при нерелятивистских движениях или слабо релятивистских движениях ( $v^2/c^2 \rightarrow 0$ ) величина  $\kappa r$  является сравнительно малой величиной (например, в атоме водорода  $R \sim 10^{-8}$  см, а  $\lambda \sim 10^{-5}$  см), и поэтому в этом приближении, называемом дипольным\*), мы можем вообще положить  $\kappa r \approx 0$ .

В нерелятивистском (точнее, в паулевском приближении  $v^2/c^2 = 0$ ) уравнение Дирака при наличии внешнего магнитного поля (см., например, равенства (17.72) и (17.73)) могут быть записаны в виде

$$(E' - V) \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = c(\sigma' \mathbf{P}) \begin{pmatrix} \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix}, \quad (18.53)$$

$$\begin{pmatrix} \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix} \approx \frac{(\sigma' \mathbf{P})}{2m_0 c} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}, \quad (18.54)$$

где в энергию  $E'$  мы не включили собственную энергию  $m_0 c^2$  (т. е. полная энергия равна  $E' + m_0 c^2$ ), а обобщенный импульс равен  $\mathbf{P} = \frac{\hbar}{i} \nabla - \frac{e}{c} \mathbf{A}$ . Подставляя (18.54) в (18.53) и принимая во внимание соотношение

$$(\sigma' \mathbf{P})(\sigma' \mathbf{P}) = \mathbf{P}^2 + i(\sigma' [\mathbf{P}\mathbf{P}]), \quad (18.55)$$

где

$$[\mathbf{P}\mathbf{P}] = -\frac{e}{ic} [\nabla \mathbf{A}] = -\frac{e}{ic} \mathbf{H},$$

получим

$$\left( E' - \frac{\mathbf{P}^2}{2m_0} - V - (\boldsymbol{\mu} \mathbf{H}) \right) \psi' = 0, \quad (18.56)$$

где  $\psi' = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}$  — двухрядная матрица, а магнитный момент, который можно интерпретировать как спиновый, равен ( $e = -e_0$ )

$$\boldsymbol{\mu} = -\frac{e_0 \hbar}{2m_0 c} \boldsymbol{\sigma}'. \quad (18.57)$$

\*) Вообще, вероятность этого излучения пропорциональна квадрату матричного элемента электрического диполя (см. ниже (18.67)). Ради краткости мы его будем называть дипольным.

Таким образом, в нерелятивистском (или паулевском) приближении, когда учитываются лишь члены порядка  $v/c$ , электрон должен обладать собственным магнитным моментом.

Принимая во внимание, что механический момент электрона в нерелятивистском приближении равен

$$\mathbf{S} = \frac{\hbar}{2} \boldsymbol{\sigma}', \quad (18.58)$$

мы найдем, что отношение собственных моментов

$$\mu_z/s_z = -e_0/m_0c \quad (18.59)$$

в два раза больше соответствующего отношения для орбитальных моментов

$$\frac{\mu_{Lz}}{L_z} = -\frac{e_0}{2m_0c}, \quad (18.60)$$

что находится в согласии с опытами Эйнштейна — де-Гааза.

В дипольном приближении ( $\mathbf{r} = 0$ ) матричный элемент (18.16) мы можем положить равным

$$\bar{\mathbf{a}}^{\text{дип}} = \int \psi_a^+ \boldsymbol{\alpha} \psi_b d^3x. \quad (18.61)$$

В случае отсутствия магнитного поля мы имеем (см. (18.54))

$$\psi_a^+ \boldsymbol{\alpha} \psi_b = \psi_a^+ \frac{(\boldsymbol{\sigma}'\mathbf{p})}{2m_0c} \boldsymbol{\sigma}' \psi_b' + \psi_a^+ \boldsymbol{\sigma}' \frac{(\boldsymbol{\sigma}'\mathbf{p})}{2m_0c} \psi_b', \quad (18.62)$$

где штрихованные функции  $\psi_a^+$  и  $\psi_b'$  — это двухрядные матрицы Паули:  $\psi' = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}$ .

Исходя из свойств матриц Паули, легко показать, что

$$(\boldsymbol{\sigma}'\mathbf{p})\boldsymbol{\sigma}' + \boldsymbol{\sigma}'(\boldsymbol{\sigma}'\mathbf{p}) = 2\mathbf{p}. \quad (18.63)$$

Отсюда для матричного элемента (18.61) находим

$$\bar{\mathbf{a}}^{\text{дип}} = \int \psi_a^+ \mathbf{p} \psi_b' d^3x = \mathbf{p}_{ab}. \quad (18.64)$$

Принимая во внимание соотношение

$$\mathbf{p}_{ab} = -im_0\omega_{ba}\mathbf{r}_{ab}, \quad (18.65)$$

где

$$\omega_{ba} = \frac{E_b - E_a}{\hbar}, \quad \mathbf{r}_{ab} = \int \psi_a^+ \mathbf{r} \psi_b' d^3x,$$

а также отношение

$$\oint (\boldsymbol{\kappa}^0 \mathbf{A})(\boldsymbol{\kappa}^0 \mathbf{B}) d\Omega = \frac{4\pi}{3} (\mathbf{A}\mathbf{B}), \quad (18.66)$$

мы для вероятности спонтанного дипольного перехода находим:

$$A_{ba}^{\text{дип}} = \frac{4}{3} \frac{\omega_{ba}^3}{\hbar c^3} |\mathbf{d}_{ab}|^2, \quad (18.67)$$

где матричный элемент электрического диполя равен

$$\mathbf{d}_{ab} = e \mathbf{r}_{ab}.$$

Для интенсивности излучения мы можем написать

$$W_{ba}^{\text{дип}} = \hbar \omega_{ba} A_{ba}^{\text{дип}} = \frac{4}{3} \frac{\omega_{ba}^4}{c^3} |\mathbf{d}_{ab}|^2, \quad (18.68)$$

где

$$|\mathbf{d}_{ab}|^2 = e^2 (x_{ab}^2 + y_{ab}^2 + z_{ab}^2). \quad (18.69)$$

**д) Магнитное и квадрупольное излучения.** Если мы в разложении

$$e^{-i\mathbf{x}\mathbf{r}} = 1 - i(\mathbf{x}\mathbf{r}) + \dots,$$

наряду с основным (т.е. единицей), учтем и следующий член разложения, то последний дает магнитное и квадрупольное излучения\*). Тогда в дополнение к матричному элементу (18.61) мы будем иметь

$$-i\psi_a^+ \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}\mathbf{r}) \psi_b = \psi_a^+ \mathbf{V}' \psi_b, \quad (18.70)$$

где двухрядная матрица  $\mathbf{V}'$  равна

$$\mathbf{V}' = \frac{1}{im_0c} \left( (\mathbf{x}\mathbf{r}) \mathbf{p} + \frac{\hbar}{2} [\boldsymbol{\sigma}'\mathbf{x}] + \frac{\hbar}{2i} \boldsymbol{\kappa} \right) \quad (18.71)$$

Воспользовавшись формулой

$$\omega_{ab}(f(\mathbf{r}))_{ab} = \frac{1}{\hbar} (Hf(\mathbf{r}) - f(\mathbf{r})H) \quad (18.72)$$

и учитывая значение гамильтониана

$$H = \frac{p^2}{2m_0} + V(\mathbf{r}), \quad (18.73)$$

имеем

$$\omega_{ab}(f(\mathbf{r}))_{ab} = \frac{1}{m_0} \left( \frac{1}{i} (\nabla f(\mathbf{r}) \mathbf{p}) - \frac{\hbar}{2} \nabla^2 f \right)_{ab}. \quad (18.74)$$

Полагая в (18.74)

$$f(\mathbf{r}) = \mathbf{r}(\mathbf{x}\mathbf{r}),$$

найдем

$$\frac{1}{icm_0} ((\mathbf{x}\mathbf{r}) \mathbf{p})_{ab} = -\frac{1}{icm_0} (\mathbf{r}(\mathbf{x}\mathbf{p}))_{ab} - \frac{\omega_{ba}}{c} (\mathbf{r}(\mathbf{x}\mathbf{r}))_{ab} + \frac{\hbar}{m_0c} (\boldsymbol{\kappa})_{ab}. \quad (18.75)$$

Принимая во внимание еще равенство (18.71), имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{icm_0} ((\mathbf{x}\mathbf{r}) \mathbf{p})_{ab} &= \frac{1}{2icm_0} [((\mathbf{x}\mathbf{r}) \mathbf{p})_{ab} - (\mathbf{r}(\mathbf{x}\mathbf{p}))_{ab}] - \\ &- \frac{\omega_{ba}}{2c} (\mathbf{r}(\mathbf{x}\mathbf{r}))_{ab} + \frac{\hbar}{2cm_0} (\boldsymbol{\kappa})_{ab}, \end{aligned} \quad (18.76)$$

\* Вероятность этих излучений пропорциональна квадратам матричных элементов соответственно магнитного дипольного и электрического квадрупольного моментов.

т. е. в (18.70) матрицу  $\gamma'$  следует положить равной

$$\gamma' = -\frac{1}{2icm_0} [\mathbf{x}([\mathbf{r}\mathbf{p}] + \hbar\sigma')] - \frac{\omega_{ba}}{2c} (\mathbf{r}(\mathbf{x}\mathbf{r})). \quad (18.77)$$

Полагая полный магнитный момент электрона равным

$$\boldsymbol{\mu} = \frac{e}{2cm_0} ([\mathbf{r}\mathbf{p}] + \hbar\sigma') \quad (18.78)$$

и подставляя первый член правой части равенства (18.77) в (18.38), найдем для магнитного излучения следующее выражение:

$$A_{ba}^{\text{магн}} = \frac{4\omega_{ba}^3}{3\hbar c^3} |\boldsymbol{\mu}_{ab}|^2, \quad (18.79)$$

где матричный элемент магнитного дипольного момента

$$\boldsymbol{\mu}_{ab} = \int \psi_a'^+ \boldsymbol{\mu} \psi_b' d^3x.$$

Наконец, подставляя квадрупольный член (второй член правой части равенства (18.77)) в (18.38) и воспользовавшись при интегрировании по углам, кроме равенства (18.66), еще соотношением

$$\oint (\mathbf{x}^0 \mathbf{A})(\mathbf{x}^0 \mathbf{B})(\mathbf{x}^0 \mathbf{C})(\mathbf{x}^0 \mathbf{D}) d\Omega = \frac{4\pi}{15} [(\mathbf{AB})(\mathbf{CD}) + (\mathbf{AC})(\mathbf{BD}) + (\mathbf{AD})(\mathbf{BC})], \quad (18.80)$$

найдем следующее выражение для вероятности квадрупольного излучения:

$$A_{ba}^{\text{квадр}} = \frac{\omega_{ba}^5}{90c^5\hbar} (Q_{ss'})_{ab}^* (Q_{ss'})_{ab}, \quad (18.81)$$

где квадрупольный электрический момент (тензор) равен

$$Q_{ss'} = e(3x_s x_{s'} - r^2 \delta_{ss'}). \quad (18.82)$$

Для того чтобы получить интенсивность излучения, мы должны соответствующие вероятности спонтанных переходов умножить на  $\hbar\omega_{ba}$  (см., например, (18.68)). Для нахождения же вынужденных переходов следует воспользоваться еще формулами (18.43) и (18.48).

е) Дипольное излучение в водородоподобном атоме. Для того чтобы определить правила отбора, а затем вычислить интенсивность дипольного излучения в водородоподобном атоме, мы должны вычислить матричный элемент

$$\bar{\mathbf{r}} = \int \psi_{n'l'm'}^+ \mathbf{r} \psi_{n'l'm}^{(j)} d^3x. \quad (18.83)$$

Записывая решения в паулевском приближении в виде (см. (17.119))

$$\Psi_{nlm}^{(j)} = R_{nl}(r) Y_{lm}^{(j)}, \quad (18.84)$$

причем случай  $j = l + 1/2$  следует относить к первому типу решения, а случай  $j = l - 1/2$  — ко второму типу, мы можем матричный элемент представить в виде

$$\bar{r} = \int_0^{\infty} r^3 R_{n'l'} R_{nl} dr \oint Y_{l'm'}^{+(j)} \mathbf{q} Y_{lm}^{(j)} d\Omega, \quad (18.85)$$

где

$$q_3 = \cos \vartheta, \quad q_1 \pm iq_2 = \sin \vartheta e^{\pm i\varphi}.$$

При вычислении матричного элемента

$$\bar{q} = \oint Y_{l'm'}^{+(j)} \mathbf{q} Y_{lm}^{(j)} d\Omega,$$

зависящего от углов, мы должны воспользоваться выражениями для шаровых спиноров (17.66) и (17.67), которые мы можем представить в виде

$$Y_{lm}^{(j)} = \begin{pmatrix} C_1^{(j)}(l, m) Y_l^{m-1} \\ C_2^{(j)}(l, m) Y_l^m \end{pmatrix},$$

где

$$C_1^{(1)}(l, m) = C_2^{(2)}(l, m) = \sqrt{\frac{l+m}{2l+1}},$$

$$-C_2^{(1)}(l, m) = C_1^{(2)}(l, m) = \sqrt{\frac{l+1-m}{2l+1}}.$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} \bar{q}_i = & C_1^{(j')}(l', m') C_1^{(j)}(l, m) \oint (Y_{l'}^{m'-1})^* q_i Y_l^{m-1} d\Omega + \\ & + C_2^{(j')} (l', m') C_2^{(j)}(l, m) \oint (Y_{l'}^{m'})^* q_i Y_l^m d\Omega. \end{aligned} \quad (18.86)$$

Подставляя в (18.86) рекуррентные соотношения для шаровых функций (17.76) и (17.77), мы сможем при интегрировании по углам воспользоваться только условием ортонормированности

$$\oint (Y_{l'}^{m'})^* Y_l^m d\Omega = \delta_{ll'} \delta_{mm'}.$$

Тогда получаем следующие отличные от нуля значения для матричных элементов:

$$(\bar{q}_3)_{l, i, m_j}^{l+1, i+1, m_j} = \frac{\sqrt{(j+1)^2 - m_j^2}}{2(j+1)}, \quad (18.87)$$

$$(\bar{q}_3)_{l, i, m_j}^{l-1, i-1, m_j} = \frac{\sqrt{j^2 - m_j^2}}{2j}, \quad (18.88)$$

$$(\bar{q}_3)_{l, i, m_j}^{l+1, i, m_j} = (\bar{q}_3)_{l, i, m_j}^{l-1, i, m_j} = \frac{m_j}{2j(j+1)}.$$

Аналогичным способом находим:

$$(\bar{q}_1 \pm i\bar{q}_2)_{l, i, m_j}^{l+1, i+1, m_j \pm 1} = \pm \frac{\sqrt{(j+2 \pm m_j)(j+1 \pm m_j)}}{2(j+1)}, \quad (18.89)$$

$$(\bar{q}_1 \pm i\bar{q}_2)_{l, i, m_j}^{l-1, i-1, m_j \pm 1} = \mp \frac{\sqrt{(j \mp m_j)(j-1 \mp m_j)}}{2j},$$

$$(\bar{q}_1 \pm i\bar{q}_2)_{l, i, m_j}^{l+1, i, m_j \pm 1} = (\bar{q}_1 \pm i\bar{q}_2)_{l, i, m_j}^{l-1, i, m_j \pm 1} = - \frac{\sqrt{(j+1 \pm m_j)(j \mp m_j)}}{2j(j+1)}, \quad (18.90)$$

причем в формулах (18.89) и (18.90) мы должны всюду брать либо верхние, либо нижние знаки.

Все матричные элементы, для которых  $\Delta j = j - j' = \pm 2$ , обращаются в нуль. В этих формулах квантовое число  $m_j$  принимает только одно значение:  $m_j = m - 1/2$ , а квантовое число  $j$  — два:  $j = l \pm 1/2$ . Поэтому правила отбора для дипольных переходов имеют вид

$$\Delta m = \Delta m_j = 0, \pm 1; \Delta l = l - l' = \pm 1; \Delta j = j - j' = \pm 1, 0, \quad (18.91)$$

а дипольные переходы с  $\Delta j = \pm 2$  запрещены.

Напомним, что для бесспиновой частицы (шредингеровское приближение), когда матричные элементы вычисляются по формуле

$$\bar{q}_i = \oint (Y_l^{m'})^* q_i Y_l^m d\Omega, \quad (18.92)$$

мы с помощью рекуррентных соотношений (17.76), (17.77) и условия ортонормированности имеем для матричных элементов типа (18.89) и (18.90) [63]

$$(\bar{q}_3)_{l, m}^{l+1, m} = \sqrt{\frac{(l+1)^2 - m^2}{(2l+1)(2l+3)}}, \quad (\bar{q}_3)_{l, m}^{l-1, m} = \sqrt{\frac{l^2 - m^2}{(2l-1)(2l+1)}}. \quad (18.93)$$

Точно так же для других матричных элементов получаем

$$(\bar{q}_1 \pm i\bar{q}_2)_{l, m}^{l+1, m \pm 1} = \pm \sqrt{\frac{(l+2 \pm m)(l+1 \pm m)}{(2l+1)(2l+3)}}, \quad (18.94)$$

$$(\bar{q}_1 \pm i\bar{q}_2)_{l, m}^{l-1, m \pm 1} = \mp \sqrt{\frac{(l \mp m)(l-1 \mp m)}{(2l-1)(2l+1)}}, \quad (18.95)$$

т. е. правила отбора шредингеровских частиц:

$$\Delta m = 0, \pm 1; \quad \Delta l = \pm 1. \quad (18.96)$$

Вычислим с помощью формул (18.92), (18.93) угловую часть квадрата матричного элемента при переходе из состояния  $l$  в состояние  $l-1$ , т. е. переход  $l \rightarrow l-1$ . Для шредингеровских частиц согласно формулам (18.92) и (18.93) имеем

$$(\bar{q}^2)_l^{l-1} = \left\{ [(\bar{q}_3)_{l, m}^{l-1, m}]^2 + \frac{1}{2} [(\bar{q}_1 + i\bar{q}_2)_{l, m}^{l-1, m+1}]^2 + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} [(q_1 - iq_2)_{l, m}^{l-1, m-1}]^2 \right\} = \frac{l}{2l+1}, \quad (18.97)$$

т. е. квадрат матричного элемента угловой части не зависит от магнитного квантового числа  $m$ . Точно так же из тех же формул легко найти квадрат матричного элемента при переходе  $l \rightarrow l+1$ :

$$(\bar{q}^2)_l^{l+1} = \frac{l+1}{2l+1}. \quad (18.98)$$

Найдем соответствующие квадраты матричных элементов при переходе  $l \rightarrow l-1$  для паулевских частиц, когда следует воспользоваться формулами (18.88)–(18.90). Следует, однако, учесть, что при переходе  $l \rightarrow l-1$  возможны два значения начального значения внутреннего квантового числа  $j$ .

Переход с начального уровня  $j = l - 1/2$  возможен как на уровень  $j' = l' - 1/2$  ( $\Delta j = j - j' = 1$ ), так и на уровень  $j = l' + 1/2 = l - 1/2$  ( $\Delta j = 1$ ), а с уровня  $j = l + 1/2$  — только на уровень  $j' = l' + 1/2 = l - 1/2$  ( $\Delta j = 1$ ), а на уровень  $j' = l' - 1/2$  запрещен правилами отбора ( $\Delta j = 2$ ).

Для перехода с изменением внутреннего квантового числа  $j$  ( $\Delta j = 1$ ) мы согласно формулам (18.88)–(18.90) имеем

$$(\bar{q}^2)_{l, j}^{l-1, j-1} = \left\{ [(\bar{q}_3)_{l, i, m_j}^{l-1, j-1, m_j}]^2 + \frac{1}{2} [(\bar{q}_1 + i\bar{q}_2)_{l, i, m_j}^{l-1, j-1, m_j+1}]^2 + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} [(\bar{q}_1 - i\bar{q}_2)_{l, i, m_j}^{l-1, j-1, m_j-1}]^2 \right\} = \frac{2j-1}{4j}. \quad (18.99)$$

Из тех же формул следует, что при переходе  $l - 1/2 \rightarrow l' + 1/2 = l - 1/2$  ( $\Delta j = 0$ ) квадрат матричного элемента равен

$$(\bar{q}^2)_{l, j}^{l-1, j} = \frac{1}{4j(j+1)}. \quad (18.100)$$

Отсюда, усредняя по начальному значению  $j$  ( $j = l \pm 1/2$ ), найдем (см. (18.97))

$$(\bar{q}^2)_l^{l-1} = \frac{1}{2} [(\bar{q}^2)_{l, l+1/2}^{l-1, l-1/2} + (\bar{q}^2)_{l, l-1/2}^{l-1, l-1/2} + (\bar{q}^2)_{l, l-1/2}^{l-1, l-1/2}] = \frac{l}{2l+1}. \quad (18.101)$$

В частности, при переходах  $p \rightarrow s$  угловая часть квадрата матричного элемента согласно (18.101) будет равна

$$(\bar{q}^2)_1^0 = \frac{1}{3}. \quad (18.102)$$

Точно так же, как и для шредингеровских частиц, при переходе  $l \rightarrow l+1$  мы найдем для паулевских частиц формулу (18.98).

Матричный элемент радиальной части перехода в водородоподобном атоме с учетом правила отбора для орбитального квантового числа  $l' = l \pm 1$  согласно (18.85) равен \*)

$$\bar{r} = \int_0^\infty r^3 dr R_{n' l \pm 1}(r) R_{n l}. \quad (18.103)$$

Этот матричный элемент не обращается в нуль ни при каких значениях  $n'$  (конечного главного квантового числа), и поэтому правила отбора для главного квантового числа  $\Delta n = n' - n$  при дипольных переходах не существуют.

Здесь мы ограничимся вычислением матричного элемента (18.103) при переходе электрона в основное состояние  $1s$  ( $n' = 1$ ,  $l' = 0$ ). Эти переходы возможны лишь из состояния  $np$  ( $n > 1$ ,  $l = 1$ ). Соответствующие значения для радиальных функций равны:

для конечного состояния

$$R_{n' l'} = R_{1s} = 2 \left( \frac{Z}{a_0} \right)^{3/2} e^{-Zr/a_0}; \quad (18.104)$$

для начального состояния

$$R_{n l} = R_{n p} = 2 \left( \frac{Z}{na_0} \right)^{3/2} \frac{1}{\sqrt{n(n-2)!(n+1)!}} \rho e^{-\frac{\rho}{2}} Q_{n-2}^3(\rho), \quad (18.105)$$

где  $\rho = 2Zr/na_0$ , а для полинома Лагерра согласно (17.22) имеем

$$Q_{n-2}^3(\rho) = e^\rho \rho^{-3} \left( \frac{d}{d\rho} \right)^{n-2} e^{-\rho} \rho^{n+1}. \quad (18.106)$$

Подставляя выражения (18.106) для радиальных функций в (18.103) и переходя от переменной  $r$  к переменной  $\rho$ , получим

$$\bar{r} = \frac{a_0}{4Z} \frac{n^2}{\sqrt{(n-2)!(n+1)!}} \int_0^\infty d\rho \rho e^{-1/2(n-1)\rho} \frac{d^{n-2}}{d\rho^{n-2}} e^{-\rho} \rho^{n+1}. \quad (18.107)$$

\*) Точное значение интеграла (18.103) вычислено в [63].



Перебрасывая в интеграле (18.107)  $(n-2)$  раз производную, найдем

$$\bar{r} = \frac{a_0}{4Z} \frac{(n-1)^{n-2} n^2}{V(n-2)!(n+1)! 2^{n-2}} \int_0^\infty e^{-1/2(n+1)\rho} \times \\ \times \left( \rho^{n+2} - \frac{2(n-2)}{n-1} \rho^{n+1} \right) d\rho. \quad (18.108)$$

Вводя новую переменную  $1/2(n+1)\rho = x$  и воспользовавшись известным интегралом

$$\int_0^\infty e^{-x} x^k dx = k!, \quad (18.109)$$

найдем для квадрата матричного элемента радиальной части следующее значение:

$$\bar{r}^2 = \left( \frac{a_0}{Z} \right)^2 \frac{2^8 n^7 (n-1)^{2n-5}}{(n+1)^{2n+5}}. \quad (18.110)$$

Отсюда полный квадрат матричного элемента, характеризующего переход  $p \rightarrow s$ , согласно (18.102) и (18.110) равен

$$(\bar{r})_{ps}^2 = |\bar{q}|^2 |\bar{r}|^2 = \left( \frac{a_0}{Z} \right)^2 \frac{2^8 n^7 (n-1)^{2n-5}}{3(n+1)^{2n+5}}. \quad (18.111)$$

Соответствующая частота излучения может быть вычислена по формуле (17.115):

$$\omega_{n1} = \frac{E'_n - E'_1}{\hbar} = \frac{e_0^2 Z^2}{2a_0 \hbar} \frac{(n-1)(n+1)}{n^2}. \quad (18.112)$$

Поэтому, воспользовавшись (18.67), получим следующее значение для вероятности дипольного перехода  $np \rightarrow 1s$ :

$$A_{n1} = \omega_{np \rightarrow 1s} = \frac{2^7}{3^2} \frac{m_0 c^2}{\hbar} \alpha^5 Z^4 \frac{n(n-1)^{2(n-1)}}{(n+1)^{2(n+1)}}. \quad (18.113)$$

В частности, при  $n=2$  и  $Z=1$  (атом водорода) имеем

$$\omega_{2p \rightarrow 1s} = \left( \frac{2}{3} \right)^8 \alpha^5 \frac{m_0 c^2}{\hbar}, \quad (18.114)$$

а соответствующее значение для времени жизни в состоянии  $2p$  определяется выражением

$$\tau = \frac{1}{\omega_{2p \rightarrow 1s}} \approx 1,5 \cdot 10^{-9} \text{ сек.} \quad (18.115)$$

**ж) Магнитные и квадрупольные переходы в водородоподобном атоме.** Согласно формуле (18.79) вероятность магнитного дипольного излучения определяется выражением

$$A_{ba} = \frac{4\omega_{nn'}^3}{3\hbar c^3} |\mu_{ab}|^2, \quad (18.116)$$

где матричный элемент

$$\mu_{ab} = \int \psi_a^+ \boldsymbol{\mu} \psi_b' d^3x, \quad (18.117)$$

а оператор магнитного момента  $\boldsymbol{\mu}$  равен (см. (18.78))

$$\boldsymbol{\mu} = \frac{e}{\varepsilon c n_0} ([\mathbf{r}\mathbf{p}] + \hbar\boldsymbol{\sigma}'). \quad (18.118)$$

Подставляя в (18.117) вместо волновых функций их значения в паулевском приближении (см. (18.84)), которые выражаются через шаровые спиноры (18.86), мы найдем правила отбора в случае магнитного излучения:

$$\Delta m = \Delta m_j = 0, \pm 1; \quad \Delta j = 0, \pm 1; \quad \Delta l = 0; \quad \Delta n = 0. \quad (18.119)$$

Для определения правила отбора для квадрупольного излучения необходимо вычислить следующие матричные элементы:

$$(rq_s)_{ab}^2 = \sum_{n'', l'', m''_j} r_{n' n''} r_{n'' n} (q_s)_{l'', j'', m''_j}^{l', j', m'_j} (q_s)_{l, j, m_j}^{l'', j'', m''_j}. \quad (18.120)$$

Принимая во внимание, что матричный элемент  $r_{n' n}$  отличен от нуля при любых значениях  $\Delta n = n - n'$ , а для  $(q_s)_{l, j, m_j}^{l', j', m'_j}$  имеют место соотношения (18.91), мы найдем правила отбора для квадрупольного излучения:

$$\begin{aligned} \Delta m = \Delta m_j &= 0, \pm 1, \pm 2; & \Delta j &= 0 (j \neq 1/2), \pm 1, \pm 2; \\ \Delta l &= 0, \pm 2; & \Delta n & \text{ произвольно.} \end{aligned} \quad (18.121)$$

Учитывая, что квантовое число  $l$  характеризует четность волновой функции, дипольные переходы ( $\Delta l = \pm 1$ ) возможны между четными и нечетными состояниями, а квадрупольные ( $\Delta l = 0, \pm 2$ ) — только между состояниями, обладающими одинаковой четностью.

**з) Переходы с метастабильного уровня  $2s_{1/2}$ .** Согласно формуле (18.91) дипольные переходы  $2s_{1/2} \rightarrow 1s_{1/2}$  в атоме водорода запрещены. Точно так же в паулевском приближении запрещены с этого уравнения магнитные (см. (18.119)) и квадрупольные (см. (18.121)) переходы. Поэтому уровень  $2s_{1/2}$  называется метастабильным. Найдем, в каком мультипольном приближении и с учетом каких релятивистских членов становится возможным данный переход.

В  $s$ -состоянии ( $l = 0, j = 1/2$ ) для водородоподобного атома мы можем написать два решения (см. (17.103)): спин направлен по оси  $z$  ( $m_j = 1/2, m = 1$ ):

$$\psi_{n, m_j=1/2} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \begin{pmatrix} F_n \\ 0 \\ i \cos \vartheta G_n \\ i \sin \vartheta e^{i\varphi} G_n \end{pmatrix}; \quad (18.122)$$

спин направлен против оси  $z$  ( $m_j = -1/2, m = 0$ ):

$$\psi_{n, m_j=-1/2} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \begin{pmatrix} 0 \\ -F_n \\ -i \sin \vartheta e^{-i\varphi} G_n \\ i \cos \vartheta G_n \end{pmatrix}. \quad (18.123)$$

Здесь  $n = 1, 2, 3, \dots$  — главное квантовое число,  $F_n$  и  $G_n$  — радиальные составляющие волновых функций,  $e_0$  — заряд,  $m_0$  — масса электрона, а  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ .

В случае  $n = 1$  (наинизшее состояние  $1s_{1/2}$ ) для энергии и для радиальных функций соответственно находим (см. (17.110))

$$\begin{aligned} E_1 &= m_0 c^2 \cos \eta \approx m_0 c^2 \left(1 - \frac{1}{2} \alpha_1^2\right), \\ F_1 &= D_1 r \gamma e^{-k_0 r \sin \eta} \approx \frac{2}{a^2 - \frac{1}{2} \alpha_1^2} r^{-\frac{1}{2} \alpha_1^2} e^{-\frac{r}{a}}, \\ G_1 &= D_1 \operatorname{tg} \frac{\eta}{2} r \gamma e^{-k_0 r \sin \eta} \approx \frac{2}{a^2 - \frac{1}{2} \alpha_1^2} \frac{\alpha_1}{2} r^{-\frac{1}{2} \alpha_1^2} e^{-\frac{r}{a}}, \end{aligned} \quad (18.124)$$

где

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{Z e_0^2}{c \hbar} = Z \alpha, & \eta &= \arcsin \alpha_1 \approx \alpha_1 \left(1 + \frac{1}{6} \alpha_1^2\right), \\ \gamma &= -2 \sin^2 \frac{\eta}{2} \approx -\frac{1}{2} \alpha_1^2, & k_0 &= \frac{m_0 c}{\hbar}, & a &= \frac{1}{k_0 \alpha_1}, \end{aligned}$$

а нормировочный коэффициент

$$D_1 = \frac{(2k_0 \sin \eta)^{\cos \eta + \frac{1}{2}} \cos \frac{\eta}{2}}{(\Gamma(1 + 2 \cos \eta))^{1/2}} \approx \frac{2}{a^2 - \frac{1}{2} \alpha_1^2}. \quad (18.125)$$

Приближенные значения (17.110) и (18.123) написаны с точностью до величины порядка  $\alpha_1^2$ .

В случае  $n=2$  (метастабильное состояние  $2s_{1/2}$ ) имеем

$$E_2 = m_0 c^2 \cos \frac{\eta}{2} \approx m_0 c^2 \left(1 - \frac{1}{8} \alpha_1^2\right),$$

$$F_2 = D_2 r \gamma e^{-k_0 r \sin \frac{\eta}{2}} (1 + g_1 r) \approx \frac{2}{\sqrt{2} a^{\frac{3}{2} - \frac{1}{2} \alpha_1^2}} r^{-\frac{1}{2} \alpha_1^2} \times$$

$$\times e^{-\frac{1}{2} \frac{r}{a} \left(1 + \frac{1}{8} \alpha_1^2\right)} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{r}{a} \left(1 + \frac{1}{2} \alpha_1^2\right)\right), \quad (18.126)$$

$$G_2 = D_2 \operatorname{tg} \frac{\eta}{2} r \gamma e^{-k_0 r \sin \frac{\eta}{2}} (1 + f_1 r) \approx$$

$$\approx \frac{1}{\sqrt{2} a^{\frac{3}{2} - \frac{1}{2} \alpha_1^2}} \frac{\alpha_1}{2} r^{-\frac{\alpha_1^2}{2}} e^{-\frac{1}{2} \frac{r}{a} \left(1 + \frac{1}{8} \alpha_1^2\right)} \left[1 - \frac{1}{4} \frac{r}{a} \left(1 + \frac{7}{16} \alpha_1^2\right)\right],$$

где

$$f_1 = \frac{k_0 \operatorname{tg} \frac{\eta}{4}}{1 - 2 \cos \frac{\eta}{2}} \approx -\frac{1}{4a} \left(1 + \frac{7}{16} \alpha_1^2\right),$$

$$g_1 = k_0 \frac{\operatorname{tg} \frac{\eta}{2}}{1 - 2 \cos \frac{\eta}{2}} \approx -\frac{1}{2a} \left(1 + \frac{1}{2} \alpha_1^2\right),$$

а постоянная  $D_2$  в общем случае определяется из условия нормировки:

$$D_2 = \frac{(2k_0 \sin \eta/2)^{\cos \eta + \frac{1}{2}}}{(\Gamma(1 + 2 \cos \eta))^{1/2}} \sqrt{\cos \frac{\eta}{4} \cos \frac{\eta}{2} \cos \frac{3\eta}{4}} \approx \frac{1}{\sqrt{2} a^{\frac{3}{2} - \frac{1}{2} \alpha_1^2}}. \quad (18.127)$$

Вероятность перехода  $2s_{1/2} \rightarrow 1s_{1/2}$  вычисляется по формуле (18.21):

$$\omega = \frac{e_0^2}{2\pi\hbar} \int \frac{d^3\kappa}{\kappa} \delta(\kappa - \kappa_{21}) \Phi, \quad (18.128)$$

где

$$\kappa_{21} = \frac{E_2 - E_1}{c\hbar} \approx \frac{3}{8} \frac{\alpha_1}{a}, \quad (18.129)$$

а величина

$$\Phi = (\bar{\alpha}^+ \bar{\alpha}) - (\bar{\alpha}^+ \kappa^0) (\bar{\alpha} \kappa^0) \quad (18.130)$$

выражается через матричный элемент (см. (18.22) и (18.16))

$$\bar{\alpha} = \int \psi_2^+ \alpha \psi_1 e^{-i\kappa r} d^3x. \quad (18.131)$$

Подставляя (18.122) в матричный элемент (18.131), найдем для величины  $\Phi$  следующие значения в случае перехода без переворота ( $\Phi^{\uparrow\uparrow}$ ) и с переворотом ( $\Phi^{\uparrow\downarrow}$ ) спина:

$$\Phi^{\uparrow\uparrow} = \frac{1}{2} \Phi^0 \sin^2 \vartheta, \quad \Phi^{\uparrow\downarrow} = \frac{1}{2} \Phi^0 (1 + \cos^2 \vartheta), \quad (18.132)$$

где

$$\Phi^0 = \frac{\alpha_1^2}{a^{6-2\alpha_1^2}} \left| \int_0^\infty dr r^{2-\alpha_1^2} e^{-\frac{3}{2} \frac{r}{a}} \left(1 + \frac{1}{24} \alpha_1^2\right) \times \right. \\ \left. \times \left[1 - \frac{3}{8} \frac{r}{a} \left(1 + \frac{23}{48} \alpha_1^2\right)\right] f(\kappa r) \right|^2, \quad (18.133)$$

$$f(\kappa r) = \int_0^\pi d\theta \sin \theta \cos \theta e^{-i\kappa r \cos \theta}, \quad (18.134)$$

а  $\vartheta$  и  $\theta$  являются углами, которые образует волновой вектор фотона  $\kappa$  соответственно с осью  $z$  (первоначальным направлением спина) и радиус-вектором  $r$ . Учтем разложение экспоненты по парциальным волнам (разложение по орбитальному квантовому числу  $l$ )

$$e^{-i\kappa r \cos \theta} = \sqrt{\frac{\pi}{2\kappa r}} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) (-i)^l J_{l+1/2}(\kappa r) P_l(\cos \theta). \quad (18.135)$$

В (18.135) отличные от нуля вклады дают только члены с  $l = 1$ :

$$f(\kappa r) = -i \sqrt{\frac{2\pi}{\kappa r}} J_{3/2}(\kappa r) = 2i \left( \frac{\cos \kappa r}{\kappa r} - \frac{\sin \kappa r}{\kappa^2 r^2} \right) \approx \\ \approx -\frac{2i}{3} \kappa r \left( 1 - \frac{1}{10} \kappa^2 r^2 \right). \quad (18.136)$$

Этот член соответствует магнитному дипольному излучению ( $\Delta j = 0$  при  $j = 1/2$ ) с учетом релятивистских членов, пропорциональных  $\alpha_1^2$ .

Благодаря наличию в (18.128) дельта-функции будем иметь

$$\kappa = \kappa_{21} \approx \frac{3}{8} \frac{\alpha_1}{a}. \quad (18.137)$$

Вычисляя (18.133), имеем

$$\Phi^0 = \frac{\alpha_1^5}{3^6}. \quad (18.138)$$

Отсюда с помощью (18.128) находим вероятности перехода

$2s_{1/2} \rightarrow 1s_{1/2}$  как без переворота, так и с переворотом спина:

$$\omega_{\uparrow\uparrow} = \frac{Z^{10}\alpha^{11}}{2^4 3^5} \frac{m_0 c^2}{\hbar} \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta = \frac{Z^{10}\alpha^{11}}{2^2 3^6} \frac{m_0 c^2}{\hbar}, \quad (18.139)$$

$$\omega_{\uparrow\downarrow} = \frac{Z^{10}\alpha^{11}}{2^4 3^5} \frac{m_0 c^2}{\hbar} \int_0^\pi \sin \theta (1 + \cos^2 \theta) d\theta = 2\omega_{\uparrow\uparrow}. \quad (18.140)$$

Для суммарной же вероятности перехода [64] получаем

$$\omega_1 = \omega_{\uparrow\uparrow} + \omega_{\uparrow\downarrow} = \frac{Z^{10}\alpha^{11}}{2^2 3^5} \frac{m_0 c^2}{\hbar}. \quad (18.141)$$

Таким образом, однофотонный переход  $2s_{1/2} \rightarrow 1s_{1/2}$ , который для дипольного излучения является строго запрещенным, оказывается возможным за счет релятивистских членов магнитного излучения.

Брейт и Теллер [65] получили для однофотонного перехода  $2s_{1/2} \rightarrow 1s_{1/2}$  формулу, отличающуюся от (18.141) численным коэффициентом:

$$\omega'_1 = \frac{Z^{10}\alpha^{11}}{2^4 3^3} \frac{m_0 c^2}{\hbar}. \quad (18.142)$$

Этот результат может быть получен, если в скобках равенства (18.136) пренебречь членом  $1/_{10}\kappa^2 r^2$ . Однако при вычислении матричного элемента основной член, стоящий в скобках и равный единице, дает отличное от нуля значение лишь при учете в волновой функции релятивистских поправок, пропорциональных  $\alpha_i^2$  (приближение Брейта — Теллера), в то время как для второго члена ( $1/_{10}\kappa^2 r^2$ ), имеющего порядок  $\alpha_i^2$  и не учтенного в работе [65], мы можем ограничиться нерелятивистским приближением. Поскольку оба члена в конечном счете дают результаты одного и того же порядка, необходимо учитывать их оба.

Заметим, что эксперименты, поставленные с однофотонным переходом, подтвердили формулу (18.141), а не формулу Брейта — Теллера (18.142) [66].

С уровня  $2s_{1/2}$  на уровень  $1s_{1/2}$  возможен еще двухфотонный переход, вероятность которого равна [67]

$$\omega_2 \approx \frac{1}{10\pi} \left(\frac{2}{3}\right)^8 Z^6 \alpha^8 \frac{m_0 c^2}{\hbar}. \quad (18.143)$$

Таким образом, отношение вероятности однофотонного перехода  $2s_{1/2} \rightarrow 1s_{1/2}$  к двухфотонному равно

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{4}{5} Z^4 \alpha^3. \quad (18.144)$$

Отсюда видно, что для малых  $Z$  (например  $Z = 1$ ) наиболее вероятным будет двухфотонный переход, а для больших  $Z$  вероятность однофотонного перехода по сравнению с двухфотонным начнет увеличиваться пропорционально  $Z^4$ .

Если учесть еще лэмбовский сдвиг (см. (17.114)), согласно которому уровень  $2s_{1/2}$  лежит выше уровня  $2p_{1/2}$ , то становится возможным спонтанный переход

$$2s_{1/2} \rightarrow 2p_{1/2}, \quad (18.145)$$

вероятность которого для атома водорода

$$\omega^{\text{л}} = 0,83\alpha^{14} \frac{m_0 c^2}{\hbar}$$

будет примерно в 3000 раз меньше вероятности перехода  $2s_{1/2} \rightarrow 1s_{1/2}$ . Поэтому, несмотря на наличие разрешенного перехода  $2p_{1/2} \rightarrow 1s_{1/2}$  со сравнительно большой вероятностью (см. (18.113))

$$\omega^{\text{дип}} = \left(\frac{2}{3}\right)^8 Z^4 \alpha^5 \frac{m_0 c^2}{\hbar}, \quad (18.146)$$

превосходящей  $\omega_1$ :

$$\frac{\omega^{\text{дип}}}{\omega_1} = \frac{2^{10}}{3^3} (Z\alpha)^{-6}. \quad (18.147)$$

Вероятность спонтанного двойного перехода

$$2s_{1/2} \rightarrow 2p_{1/2} \rightarrow 1s_{1/2} \quad (18.148)$$

будет меньше  $\omega_1$ , поскольку вероятность  $\omega^{\text{л}}$  пропорциональна кубу весьма малой частоты

$$\omega_0 = \frac{E_{2s_{1/2}} - E_{2p_{1/2}}}{\hbar}.$$

При включении внешнего излучения с резонансной частотой  $\omega_0$  переход (18.148) осуществляется практически мгновенно, поскольку вынужденное излучение не зависит от частоты  $\omega_0$ . Этот метод и используется для экспериментального определения лэмбовского сдвига.

## IV. СИНХРОТРОННОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ С УЧЕТОМ КВАНТОВЫХ ЭФФЕКТОВ

### § 19. ДВИЖЕНИЕ ЭЛЕКТРОНА В ПОСТОЯННОМ И ОДНОРОДНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

а) Решение задачи в цилиндрической системе координат по уравнению Клейна—Гордона. Рассмотрим движение электрона ( $e = -e_0$ ) в постоянном (во времени) и однородном (в пространстве) магнитном поле, направленном вдоль оси  $z$  ( $\mathbf{H} = (0, 0, H)$ ). Вектор-потенциал  $\mathbf{A}$  следует положить равным:

$$A_x = -1/2 y H, \quad A_y = 1/2 x H, \quad A_z = 0. \quad (19.1)$$

Уравнение Клейна — Гордона [1, 2]

$$\left\{ E^2 - c^2 \left( \mathbf{p} + \frac{e_0}{c} \mathbf{A} \right)^2 - m_0^2 c^4 \right\} \psi(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (19.2)$$

допускает переход к стационарной задаче:

$$\psi(\mathbf{r}, t) = e^{-i \frac{E}{\hbar} t} \psi(\mathbf{r}), \quad (19.3)$$

причем для волновой функции  $\psi(\mathbf{r}) = \psi$ , зависящей от координат, получаем следующее уравнение:

$$\left\{ K^2 - k_0^2 + \nabla^2 + \frac{2ie_0}{c\hbar} (\mathbf{A}\nabla) - \frac{e_0^2}{c^2\hbar^2} A^2 \right\} \psi = 0. \quad (19.4)$$

Ограничиваясь только положительными значениями энергии и вводя обозначения  $K = E/c\hbar > 0$ ,  $k_0 = m_0 c/\hbar$ , уравнение Клейна — Гордона (19.4) в цилиндрической системе координат ( $x = r \cos \varphi$ ,  $y = r \sin \varphi$ ,  $z$ ) мы можем записать в виде

$$\left\{ K^2 - k_0^2 + \nabla_r^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + 2i\gamma \frac{\partial}{\partial \varphi} - \gamma^2 r^2 \right\} \psi = 0. \quad (19.5)$$

Полагаем

$$\psi = \frac{e^{il\varphi}}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{ik_3 z}}{\sqrt{L}} f(r), \quad (19.6)$$

где  $k_3 = \frac{2\pi}{L} n_3$ , а  $l$  и  $n_3$  — азимутальное и вертикальное квантовые числа, которые могут принимать как положительные, так и отрицательные значения, включая нуль. Для определения радиальной функции  $f(r)$  получаем уравнение

$$\left\{ K^2 - k_0^2 - k_3^2 + \nabla_r^2 - \frac{l^2}{r^2} - 2l\gamma - \gamma^2 r^2 \right\} f = 0, \quad (19.7)$$



где

$$\nabla_r^2 = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr},$$

которое можно привести к более удобной записи, вводя безразмерную переменную  $\rho = \gamma r^2$ :

$$\left\{ \rho \frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{d}{d\rho} + \lambda - \frac{l}{2} - \frac{\rho}{4} - \frac{l^2}{4\rho} \right\} f = 0, \quad (19.8)$$

где

$$\lambda = \frac{K^2 - k_0^2 - k_3^2}{4\gamma}, \quad \gamma = \frac{e_0 H}{2c\hbar}. \quad (19.9)$$

Учитывая асимптотические значения для радиальной функции при  $r \rightarrow \infty$  и  $r \rightarrow 0$ , сделаем замену

$$f = f_\infty f_0 u = e^{-\rho/2} \rho^{l/2} u(\rho), \quad (19.10)$$

которая при подстановке в (9.8) приводит к хорошо известному уравнению для вырожденной гипергеометрической функции (см. (17.19)):

$$\rho u'' + (l+1-\rho)u' + \left( \lambda - \frac{l+1}{2} \right) u = 0 \quad (19.11)$$

с решением

$$u = \Phi \left\{ - \left( \lambda - \frac{l}{2} - \frac{l+1}{2} \right), l+1, \rho \right\}. \quad (19.12)$$

Как было отмечено (см. (17.20а)), гипергеометрическая функция возрастает при  $\rho \rightarrow \infty$  по экспоненциальному закону  $e^\rho$ . Поэтому мы должны в решении (19.12) этот возрастающий член обратить в нуль. Для этого согласно (17.23) необходимо потребовать

$$\lambda - \frac{l}{2} - \frac{l+1}{2} = s, \quad (19.13)$$

где  $s = 0, 1, 2, \dots$  — радиальное квантовое число. Подставляя вместо  $\lambda$  значение (19.9), имеем

$$\frac{K^2 - k_0^2 - k_3^2}{4\gamma} = l + s + 1/2 = n + 1/2, \quad (19.14)$$

где  $n = 0, 1, 2, \dots$  — главное квантовое число. Из (19.14) находим

$$K = \sqrt{k_0^2 + k_3^2 + 4\gamma(n + 1/2)}. \quad (19.15)$$

Как известно, при условии (19.13) вырожденная гипергеометрическая функция сводится к полиному Лагерра:

$$\Phi \{ -s, l+1, \rho \} = \frac{l!}{(s+l)!} Q_s^l(\rho). \quad (19.16)$$

Благодаря этому решение (19.10) можно выразить через функции Лагерра:

$$f = N_{ns} I_{ns}(\rho), \quad (19.17)$$

где

$$I_{ns}(\rho) = \frac{1}{\sqrt{n!s!}} e^{-\rho/2} \rho^{(n-s)/2} Q_s^{n-s}(\rho), \quad (19.18)$$

а для полиномов Лагерра имеем \*)

$$Q_s^l(\rho) = e^{\rho} \rho^{-l} \frac{d^s}{d\rho^s} (\rho^{s+l} e^{-\rho}) = \sum_{j=0}^s (-1)^{j+s} \frac{s! (s+l)! \rho^{s-j}}{j! (s-j)! (s+l-j)!}. \quad (19.19)$$

Соотношение

$$(-1)^l \rho^{-l} Q_{s+l}^{-l}(\rho) = Q_s^l(\rho) \quad (19.20)$$

позволяет рассматривать не только положительные, но и отрицательные значения орбитального квантового числа  $l$ . Физический смысл квантовых чисел  $n$ ,  $l$ ,  $s$  мы установим ниже, а пока лишь только отметим, что поскольку  $n$  и  $s$  принимают целые положительные значения, орбитальное число  $l$  может изменяться в пределах  $-\infty < l < n$ .

Нормировочный коэффициент  $N_{ns}$  в (19.17) следует определять из равенства (17.33), которое в нашем случае ( $V = e\Phi = 0$ ) принимает вид

$$\int \rho_0 d^3x = \frac{E}{m_0 c^2} \int \psi^* \psi d^3x = 1. \quad (19.21)$$

Из (17.34) и (17.35) находим

$$N_{ns} = \sqrt{2\gamma} \sqrt{\frac{m_0 c^2}{E}}. \quad (19.22)$$

Поэтому волновая функция электрона в однородном магнитном поле согласно (19.3), (19.6) и (19.17) равна

$$\psi_{ns}(\mathbf{r}, t) = e^{-i\epsilon K t} \sqrt{\frac{m_0 c^2}{E}} \frac{e^{i l \varphi}}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{i k_z z}}{\sqrt{L}} \sqrt{2\gamma} I_{ns}(\rho). \quad (19.23)$$

В релятивистском случае спектр, определяемый формулой (19.15), становится квазинепрерывным, ибо энергетическое квантовое число  $n$  достигает очень больших значений. Например, для магнитного поля  $H \approx 10^4$  гс и  $E \approx 100$  Мэв для главного квантового числа находим значение порядка  $10^7$ .

\*) В сферической ( $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ ) и цилиндрической ( $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ ) системах координат мы будем иметь один и тот же вид для полиномов Лагерра (см. (17.22)), отличающихся друг от друга условием нормировки и значением  $r$ . Равенство (19.16) было использовано нами также и в сферической системе координат (см. (17.21)) при изучении проблемы Кеплера.

В нерелятивистском приближении для спектра находим выражение:

$$E = c\hbar K \approx m_0 c^2 + \frac{p_3^2}{2m_0} + \hbar\Omega(n + 1/2), \quad (19.24)$$

где  $\Omega = \frac{e_0 H}{m_0 c}$  — циклотронная частота.

Заметим, что энергетический спектр является вырожденным по радиальному квантовому числу  $s$ . Это вырождение физически связано с тем обстоятельством, что в однородном магнитном поле при заданной энергии  $E$  фиксируется только радиус орбиты вращения частицы, но не центр орбиты.

Радиус окружности можно определить, воспользовавшись следующим равенством классической теории:

$$\beta E = e_0 H R. \quad (19.25)$$

Предполагая, что движение происходит в плоскости орбиты вращения ( $k_3 = 0$ ), сравним это выражение с квантовой формулой (19.14):

$$c\hbar \sqrt{4\gamma(n + 1/2)} = e_0 H R. \quad (19.26)$$

Тогда находим, что [3—5]

$$R = \sqrt{(n + 1/2)/\gamma} \approx \sqrt{n/\gamma}. \quad (19.27)$$

Если движение происходит по траектории с макроскопическим радиусом, центр которой отстоит от начала координат на расстоянии  $a$  и лежит на оси  $x$  ( $\varphi = 0$ ), то средний квадратичный радиус будет равен

$$\overline{r_{\text{кл}}^2} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi (R^2 + a^2 - 2aR \cos \varphi) = R^2 + a^2. \quad (19.28)$$

Средний квадратичный радиус можно определить и по квантовой теории:

$$\overline{r_{\text{кв}}^2} = \int \psi_{ns}^* r^2 \psi_{ns} d^3x = \frac{n + s + 1}{\gamma}. \quad (19.29)$$

Сопоставляя формулу (19.27) с (19.28), получаем

$$R \approx \sqrt{n/\gamma}, \quad a \approx \sqrt{s/\gamma}, \quad (19.30)$$

т. е. квантовое число  $n$  характеризует радиус траектории, а квантовое число  $s$  — расстояние между началом координат и центром круговой траектории. Из формулы (19.14) находим  $l = n - s = \gamma(R^2 - a^2)$ , т. е. при положительных значениях  $l$  начало координат находится внутри окружности ( $R > a$ ), а при отрицательных — вне ее ( $R < a$ ).

Как правило, в задачах, связанных с синхротронным излучением, мы будем рассматривать случай  $a^2/R^2 = s/n \ll 1$ , хотя оба квантовых числа при макроскопических значениях  $a$  и  $R$  будут достигать больших значений. Если  $a \neq 0$ , то это приводит к квадратичным флуктуациям радиуса, которые могут быть найдены по формуле

$$\overline{\xi^2} = \int \Psi_{ns}^* \Psi_{ns} (r - \bar{r}_{\text{КВ}})^2 d^3x = \bar{r}_{\text{КВ}}^2 - (\bar{r}_{\text{КВ}})^2. \quad (19.31)$$

Определяя средний радиус [3—5]

$$\bar{r}_{\text{КВ}} = \int \Psi_{ns}^* \Psi_{ns} r d^3x = \sqrt{\frac{n}{\gamma}} \left\{ 1 + \frac{s + 3/2}{4n} \right\}, \quad (19.32)$$

находим

$$\overline{\xi^2} = \frac{s + 1/2}{2\gamma}. \quad (19.33)$$

Таким образом, движение заряда в магнитном поле с заданными значениями  $n$  и  $s$  можно рассматривать как наложение круговых орбит с одним и тем же значением радиуса  $R$ , но обладающих различными центрами, отстоящими от начала координат на одно и то же расстояние  $a$ .

**б) Решение задачи по уравнению Клейна — Гордона в декартовой системе координат.** Проведенное нами решение не является единственно возможным с точки зрения выбора системы координат, поскольку энергетический спектр является вырожденным. Это обстоятельство говорит о том, что возможно решение той же задачи и в другой системе координат.

В декартовой системе вектор-потенциал следует положить равным [6]

$$A_x = A_z = 0, \quad A_y = xH.$$

Тогда решение стационарного уравнения Клейна — Гордона

$$\left\{ K^2 - k_0^2 + \nabla^2 + 4i\gamma x \frac{\partial}{\partial y} - 4\gamma^2 x^2 \right\} \psi = 0 \quad (19.34)$$

следует искать в виде

$$\psi = \frac{e^{ik_3 z + ik_2 y}}{L} F(x). \quad (19.35)$$

Для функции  $F(x)$  мы получаем уравнение

$$\left\{ K^2 - k_0^2 - k_3^2 + \frac{d^2}{dx^2} - (2\gamma x + k_2)^2 \right\} F = 0, \quad (19.36)$$

которое с помощью замены

$$\eta = \sqrt{2\gamma} x + \frac{k_2}{\sqrt{2\gamma}}, \quad \lambda = \frac{K^2 - k_0^2 - k_3^2}{2\gamma}, \quad \gamma = \frac{e_0 H}{2c\hbar} \quad (19.37)$$

приводится к волновому уравнению гармонического осциллятора

$$\left\{ \frac{d^2}{d\eta^2} + \lambda - \eta^2 \right\} F = 0.$$

Отсюда мы находим собственные значения:

$$\lambda = 2n + 1, \quad (19.38)$$

где главное квантовое число  $n = 0, 1, 2, \dots$ , и собственные функции:

$$u_n(\eta) = \sqrt{\frac{\sqrt{2\gamma}}{2^n n! \sqrt{\pi}}} e^{-\eta^2/2} H_n(\eta), \quad (19.39)$$

которые выражаются через полиномы Эрмита

$$H_n(\eta) = (-1)^n e^{\eta^2} \left( \frac{d}{d\eta} \right)^n e^{-\eta^2}. \quad (19.40)$$

Из (19.37) и (19.38) для спектра энергии находим вновь выражение (19.15):

$$K = \sqrt{k_0^2 + k_3^2 + 4\gamma(n + 1/2)}. \quad (19.41)$$

Производя нормировку с помощью соотношения (19.21), находим волновую функцию уравнения Клейна — Гордона в декартовой системе координат:

$$\psi(\mathbf{r}, t) = e^{-icKt} \frac{e^{ik_3z + ik_2y}}{L} \sqrt{\frac{m_0 c^2}{E}} u_n \left\{ \sqrt{2\gamma} \left( x + \frac{k_2}{2\gamma} \right) \right\}. \quad (19.42)$$

Заметим, что спектр энергии не зависит от величины  $k_2$ , т. е. имеет место вырождение, которое соответствует тому, что центр круговой траектории не фиксирован. Общее решение соответствует набору круговых траекторий, обладающих различными центрами, расположенными вдоль оси  $x$ , причем

$$x_0 = -k_2/2\gamma. \quad (19.43)$$

Из (19.42) следует, что волновая функция (19.42) является собственной для оператора проекции импульса на ось  $z$ :

$$p_3\psi = \hbar k_3\psi, \quad (19.44)$$

и для оператора  $p_2$ , характеризующего центр окружности (см. (19.43)):

$$\frac{i}{2\gamma} \frac{\partial}{\partial y} \psi = -\frac{k_2}{2\gamma} \psi. \quad (19.45)$$

**в) Движение электрона в постоянном магнитном поле по теории Дирака в цилиндрических координатах.** Найдем прежде всего решение в цилиндрической системе координат, естествен-

ным образом связанной с характером движения частицы в постоянном и однородном магнитном поле, направленном по оси  $z$ . Тогда вектор-потенциал будет определяться выражением (19.1), а уравнение Дирака

$$\left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - H\right)\psi = 0 \quad (19.46)$$

допускает переход к стационарному случаю, поскольку оператор функции Гамильтона

$$H = c(\boldsymbol{\alpha}\mathbf{P}) + \rho_3 m_0 c^2, \quad \mathbf{P} = \mathbf{p} + \frac{e_0}{c} \mathbf{A} = -i\hbar\nabla + \frac{e_0}{c} \mathbf{A} \quad (19.47)$$

не зависит от времени.

Положим

$$\psi(\mathbf{r}, t) = e^{-i \frac{\varepsilon E}{\hbar} t} \psi, \quad (19.48)$$

где величина  $\varepsilon = \pm 1$  характеризует знак энергии, а  $E = c\hbar K > 0$  — ее абсолютное значение. Для компоненты волновой функции  $\psi = \psi(\mathbf{r})$  при этом мы получаем систему уравнений [3—5]:

$$(\varepsilon E \mp m_0 c^2) \psi_{1,3} - c(P_x - iP_y) \psi_{4,2} - cP_z \psi_{3,1} = 0, \quad (19.49)$$

$$(\varepsilon E \mp m_0 c^2) \psi_{2,4} - c(P_x + iP_y) \psi_{3,1} + cP_z \psi_{4,2} = 0, \quad (19.50)$$

из которой следует, что переменные  $r$ ,  $\varphi$ ,  $z$  разделяются. При решении уравнения Дирака положим

$$\psi = \psi(l, k_3) f, \quad (19.51)$$

где функции

$$\psi(l, k_3) = \frac{e^{ik_3 z}}{\sqrt{L}} \frac{e^{i(l-1/2)\varphi}}{\sqrt{2\pi}} \quad (19.52)$$

ортонормированы:

$$\oint d\varphi \int_{-L/2}^{L/2} dz \psi^*(l', k'_3) \psi(l, k_3) = \delta_{k'_3 k_3} \delta_{l' l}, \quad (19.53)$$

поскольку так же, как и в случае уравнения Клейна — Гордона (см. (19.6)),  $k_3 = 2\pi n_3/L$ , а  $l, n_3 = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ . Значение матрицы  $f$  будем искать в виде

$$f = \begin{pmatrix} f_1(r) e^{-i\varphi/2} \\ f_2(r) e^{i\varphi/2} \\ f_3(r) e^{-i\varphi/2} \\ f_4(r) e^{i\varphi/2} \end{pmatrix}. \quad (19.54)$$

Подставляя решение (19.51) в уравнение Дирака (19.49) и (19.50), учитывая равенства

$$P_x \pm iP_y = -i\hbar e^{\pm i\varphi} \left[ \frac{\partial}{\partial r} \pm \frac{l}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \mp \gamma r \right], \quad (19.55)$$

$$P_z = -i\hbar \frac{\partial}{\partial z}, \quad \gamma = \frac{e_0 H}{2c\hbar},$$

а затем переходя к новой переменной  $\rho = \gamma r^2$ , получим систему уравнений для определения функций  $f_\mu$ :

$$(\varepsilon K \mp k_0) f_{1,3} + iR_2 f_{4,2} - k_3 f_{3,1} = 0, \quad (19.56)$$

$$(\varepsilon K \mp k_0) f_{2,4} + iR_1 f_{3,1} + k_3 f_{4,2} = 0, \quad (19.57)$$

где верхние знаки относятся к компонентам волновой функции с первым индексом, а нижние — к компонентам со вторым индексом, а операторы  $R_1$  и  $R_2$  равны

$$R_1 = \frac{d}{dr} - \frac{l-1}{r} - \gamma r = \sqrt{\gamma \rho} \left[ 2 \frac{d}{d\rho} - 1 - \frac{l-1}{\rho} \right], \quad (19.58)$$

$$R_2 = \frac{d}{dr} + \frac{l}{r} + \gamma r = \sqrt{\gamma \rho} \left[ 2 \frac{d}{d\rho} + 1 + \frac{l}{\rho} \right]. \quad (19.59)$$

Из (19.56) и (19.57) для каждой компоненты получим уравнение второго порядка типа (19.8):

$$\left\{ \rho \frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{d}{d\rho} + \lambda - \frac{l}{2} - \frac{\rho}{4} - \frac{(l-1)^2}{4\rho} \right\} f_{1,3} = 0, \quad (19.60)$$

$$\left\{ \rho \frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{d}{d\rho} + \lambda - \frac{l-1}{2} - \frac{\rho}{4} - \frac{l^2}{4\rho} \right\} f_{2,4} = 0.$$

Решение уравнений (19.60) было рассмотрено выше (см. (19.12)). Собственные значения параметра  $\lambda$  (см. (19.9)), отвечающие требованию обращения в нуль решений обоих уравнений при  $\rho \rightarrow \infty$ , равны \*)

$$\lambda = n, \quad (19.61)$$

где главное квантовое число  $n = l + s$  может принимать целые положительные значения:  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Спектр собственных значений при этом зависит от главного квантового числа:

$$K = \sqrt{k_0^2 + k_3^2 + 4\gamma n}, \quad (19.62)$$

а компоненты  $f_\mu$  пропорциональны функциям Лагерра (см. (19.18)).

С помощью рекуррентных соотношений между полиномами Лагерра

$$\rho \frac{d}{d\rho} Q_s^l = (s+l) Q_s^{l-1} - l Q_s^l, \quad \frac{d}{d\rho} Q_s^l = Q_s^l - Q_s^{l+1} \quad (19.63)$$

\*) Равенство (19.61) легко может быть получено из (19.8) и (19.13).

можно найти

$$\begin{aligned} R_1 I_{n-1, s}(\rho) &= -\sqrt{4n\gamma} I_{n, s}(\rho), \\ R_2 I_{n, s}(\rho) &= \sqrt{4n\gamma} I_{n-1, s}(\rho). \end{aligned} \quad (19.64)$$

Тогда, полагая

$$f = \sqrt{2\gamma} \begin{pmatrix} C_1 I_{n-1, s}(\rho) e^{-i\varphi/2} \\ iC_2 I_{n, s}(\rho) e^{i\varphi/2} \\ C_3 I_{n-1, s}(\rho) e^{-i\varphi/2} \\ iC_4 I_{n, s}(\rho) e^{i\varphi/2} \end{pmatrix} \quad (19.65)$$

и подставляя это выражение в (19.56) и (19.57), получаем уравнения для определения постоянных коэффициентов  $C_\mu$ :

$$\begin{aligned} (\varepsilon K \mp k_0) C_{1,3} - \sqrt{4n\gamma} C_{4,2} - k_3 C_{3,1} &= 0, \\ (\varepsilon K \mp k_0) C_{2,4} - \sqrt{4n\gamma} C_{3,1} + k_3 C_{4,2} &= 0. \end{aligned} \quad (19.66)$$

Из условия нормировки радиальных волновых функций

$$\int_0^\infty r dr f^+ f = 1 \quad (19.67)$$

с учетом того, что

$$\int_0^\infty d\rho I_{n, s}^2(\rho) = 1, \quad (19.68)$$

находим

$$\sum_{\mu=1}^4 C_\mu^* C_\mu = 1. \quad (19.69)$$

Заметим, что волновая функция  $\psi$ , полученная нами, является собственной для:

оператора функции Гамильтона:

$$H\psi = \varepsilon E\psi; \quad (19.70)$$

оператора проекции импульса на направление магнитного поля:

$$p_3\psi = \hbar k_3\psi; \quad (19.71)$$

оператора проекции полного момента на направление магнитного поля:

$$J_z\psi = \hbar(l - 1/2)\psi. \quad (19.72)$$

Операторы (19.71) и (19.72) коммутируют с оператором функции Гамильтона и между собою и поэтому могут иметь общие волновые функции. Для полного определения квантового состояния



необходимо введение четвертого квантового числа, характеризующего еще и спиновые свойства электрона \*).

Учет спиновых свойств мы можем произвести несколькими способами, а именно: 1) с помощью введения единичного трехмерного вектора спина, 2) с помощью псевдовектора спина и 3) с помощью тензора спина. При наличии магнитного поля не все компоненты этих величин будут коммутировать с оператором функции Гамильтона, и поэтому прежде всего мы должны подобрать соответствующие спиновые составляющие, коммутирующие с  $H^{**}$ ).

Одно из возможных решений системы уравнений (19.66) имеет вид \*\*\*)

$$\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{pmatrix} = \frac{\varepsilon}{\sqrt{2K(K + \varepsilon k_0)}} \left[ \begin{pmatrix} \varepsilon K + k_0 \\ 0 \\ k_3 \\ \sqrt{4n\gamma} \end{pmatrix} D_1 + \begin{pmatrix} 0 \\ \varepsilon K + k_0 \\ \sqrt{4n\gamma} \\ -k_3 \end{pmatrix} D_{-1} \right]. \quad (19.73)$$

Условие нормировки (19.69) дает лишь связь между независимыми коэффициентами:

$$|D_1|^2 + |D_{-1}|^2 = 1. \quad (19.74)$$

Подчиняя волновую функцию дополнительному условию  $\sigma_3^0 \psi = \zeta \psi$ , мы найдем для  $\zeta$  два значения:  $\zeta = \pm 1$ . При  $\zeta = 1$  мы

\*) Математически это связано с тем обстоятельством, что не только определитель четвертого порядка системы уравнений (19.66), но и все миноры, т. е. определители третьего порядка обращаются в нуль.

\*\*) Если обобщить выражение трехмерного единичного вектора спина на случай наличия постоянного и однородного магнитного поля, то с  $H$  будет коммутировать только составляющая, направленная по магнитному полю, т. е.  $\sigma_3^0$ , равная (см. (15.56)):

$$\sigma_3^0 = \rho_3 \sigma_3 + \frac{k_3}{\varepsilon K + k_0} (\rho_1 - i\rho_2). \quad (19.72a)$$

\*\*\*) В случае положительных энергий ( $\varepsilon = 1$ ) решение (19.73) удобно представить в следующем виде:

$$\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ 0 \\ b^{-1}\beta_{\parallel} \\ b^{-1}\beta_{\perp} \end{pmatrix} \frac{D_1}{\sqrt{2}} + \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ b^{-1}\beta_{\perp} \\ b^{-1}\beta_{\parallel} \end{pmatrix} \frac{D_{-1}}{\sqrt{2}}, \quad (19.73a)$$

где  $b = \sqrt{1 + k_0/K}$ , а постоянные величины

$$\beta_{\parallel} = k_3/K, \quad \beta_{\perp} = \sqrt{K^2 - k_3^2 - k_0^2}/K = \sqrt{4n\gamma}/K$$

по аналогии с классической теорией мы можем трактовать как составляющие продольной и поперечной скорости электрона.

должны положить  $D_1 = 1$ ,  $D_{-1} = 0$  (спин направлен по полю), а при  $\xi = -1$ , наоборот,  $D_1 = 0$ ,  $D_{-1} = 1$  (спин направлен против поля).

Для описания продольной поляризации спина удобно воспользоваться оператором

$$S_t = \left( \sigma \frac{\mathbf{P}}{m_0 c} \right) \quad (19.75)$$

(см. (15.106)), коммутирующим с  $H$  и характеризующим проекцию спина на обобщенный импульс, т. е. на направление движения частицы. Тогда, подчиняя волновую функцию  $\psi$  дополнительному условию

$$(\sigma \mathbf{P}) \psi = \hbar k \xi \psi, \quad (19.76)$$

находим для коэффициентов  $C_\mu$  систему уравнений:

$$(\varepsilon K \mp k_0) C_{1,3} = k \xi C_{3,1}, \quad (\varepsilon K \mp k_0) C_{2,4} = k \xi C_{4,2}, \quad (19.77)$$

которую необходимо решить совместно с (19.66)\*. Решение дает

$$\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} A_1 B_1 \\ A_1 B_2 \\ A_2 B_1 \\ A_2 B_2 \end{pmatrix}, \quad (19.78)$$

где

$$\begin{aligned} A_1 &= \sqrt{1 + \varepsilon k_j / K}, & A_2 &= \varepsilon \xi \sqrt{1 - \varepsilon k_j / K}, \\ B_1 &= \sqrt{1 + \xi k_j / k}, & B_2 &= \xi \sqrt{1 - \xi k_j / k}. \end{aligned} \quad (19.79)$$

Здесь  $k = \sqrt{K^2 - k_0^2}$ ,  $\xi = \mp 1$  характеризуют две возможных ориентации спина электрона по отношению к направлению его движения. Случай  $\xi = 1$  соответствует ориентации спина по движению,  $\xi = -1$  — против. Таким образом, четвертое квантовое число  $\xi$  характеризует проекцию спина на обобщенный импульс в единицах  $\hbar/2$ .

Наконец, мы можем учесть спин с помощью тензора поляризации (15.110), составляющая которого вдоль магнитного поля \*\*)

$$\mu_3 = \sigma_3 + \rho_2 \left[ \sigma \frac{\mathbf{P}}{m_0 c} \right]_z \quad (19.80)$$

\*) С помощью уравнения Дирака (19.46) оператор  $S_t$  может быть преобразован к виду

$$c (\sigma \mathbf{P}) \psi = (\rho_1 \varepsilon E + i \rho_2 m_0 c^2) \psi.$$

\*\*) При  $\rho_3 = 0$  оператор  $\mu_3$  точно описывает поперечную поляризацию. В случае движения электрона по винтовой линии ( $\rho_3 \neq 0$ ) более точно следует говорить о поляризации вдоль поля.

коммутирует с  $H$ . С помощью уравнений Дирака оператор можно преобразовать к виду

$$m_0 c \mu_3 \psi = \left( \frac{eE}{c} \rho_3 \sigma_3 - i \rho_2 p_3 \right) \psi. \quad (19.81)$$

Подчиняя  $\psi$ -функцию еще условию

$$k_0 \mu_3 \psi = K_0 \zeta \psi, \quad (19.82)$$

находим для коэффициентов  $C_{\mu}$  систему уравнений

$$(\epsilon K \mp \zeta K_0) C_{1,3} = k_3 C_{3,1}, \quad (\epsilon K \pm \zeta K_0) C_{2,4} = -k_3 C_{4,2}, \quad (19.83)$$

которую необходимо решать совместно с системой (19.66). Это решение имеет вид

$$\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{pmatrix} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} B_3 (A_3 + A_4) \\ B_4 (A_4 - A_3) \\ B_3 (A_3 - A_4) \\ B_4 (A_4 + A_3) \end{pmatrix}, \quad (19.84)$$

где

$$\begin{aligned} A_3 &= \sqrt{1 + \epsilon k_3 / K}, & B_3 &= \sqrt{1 + \zeta k_0 / K_0}, \\ A_4 &= \epsilon \zeta \sqrt{1 - \epsilon k_3 / K}, & B_4 &= \zeta \sqrt{1 - \zeta k_0 / K_0}, \end{aligned} \quad (19.85)$$

а

$$K_0 = \sqrt{K^2 - k_3^2}, \quad \zeta = \pm 1. \quad (19.86)$$

Случай  $\zeta = 1$  соответствует ориентации спина электрона по направлению, а  $\zeta = -1$  — против направления магнитного поля.

Спрашивается, какой же из операторов предпочтительнее для описания спиновой поляризации электронов в постоянном и однородном магнитном поле. Заметим, что оператор  $\sigma_3^0$  (см. (19.72а)) может быть связан с операторами  $\mu_3$  и  $S_t$  при помощи соотношения

$$\sigma_3^0 = \frac{k_0}{\epsilon K} \mu_3 + \frac{k_0 k_3}{\epsilon K (\epsilon K + k_0)} S_t. \quad (19.87)$$

При описании продольной поляризации с помощью оператора  $S_t$  оба направления спина (по движению и против движения) совершенно эквивалентны относительно магнитного поля (они фактически перпендикулярны к нему), и поэтому магнитное поле не может привести к явлению продольной самополяризации. Кроме того, учет весьма малого вакуумного или «аномального» момента электрона приводит к тому, что оператор  $S_t$  теряет свойства интеграла движения. Благодаря этому, если в начальный момент пучок электронов был бы продольно поляризован, то в течение сравнительно короткого времени аномальный момент электрона их деполаризовал [5].

Таким образом для описания спиновой поляризации предпочтительнее использовать операторы  $\sigma_3^0$  или  $\mu_3$ , описывающие

«поперечную» поляризацию, поскольку направление спина по или против магнитного поля дает различные значения для энергии взаимодействия. При отсутствии продольной составляющей скорости ( $k_3 = 0$ ), как видно из (19.87), оба оператора  $\sigma_3^0$  и  $\mu_3$  будут пропорциональны друг другу и поэтому приведут к одинаковому результату.

При наличии же продольной составляющей ( $k_3 \neq 0$ ) оператор  $\mu_3$  остается интегралом движения даже при учете аномального магнитного момента (см. [5]), в то время как небольшая часть оператора  $\sigma_3^0$ , включающая при  $k_3 \neq 0$  оператор  $S_t$ , теряет свойства интеграла движения. Поэтому если нас не интересуют вопросы, связанные с поляризацией спина, то мы можем пользоваться любым из решений (19.73), (19.79), (19.84).

При учете поляризации спина наиболее разумно вводить дополнительное условие (19.82), приводящее к решению (19.84) (см. [5]). Более подробно этот вопрос будет рассмотрен ниже.

Связь радиуса и квадратичной флуктуации амплитуды радиальных колебаний  $a$  с квантовыми числами  $n$  и  $s$  была детально рассмотрена в случае уравнения Клейна — Гордона (см. (19.30)). Уточним лишь некоторые детали, связанные с теорией Дирака. В частности, для среднеквадратичного радиуса мы получаем выражение по квантовой теории (см. (19.29)):

$$\bar{r}_D^2 = \sum_{\xi} \int r^2 \psi_{nsk_3\xi}^+ \psi_{nsk_3\xi} d^3x = \frac{n + s + 1/2}{\gamma}. \quad (19.88)$$

Заметим, что в (19.88) было произведено суммирование по состояниям спиновой поляризации электрона  $\xi = \pm 1$ . Вычисляя по аналогии с этим (см. (19.32))

$$\bar{r}_D = \sum_{\xi} \int r \psi_{nsk_3\xi}^+ \psi_{nsk_3\xi} d^3x = \sqrt{\frac{n}{\gamma}} \left[ 1 + \frac{s + 1/2}{4n} \right], \quad (19.89)$$

найдем квадратичную флуктуацию радиуса в виде (см. (19.33))

$$\bar{\xi}^2 = \sum_{\xi} \int (r - \bar{r})^2 \psi_{nsk_3\xi}^+ \psi_{nsk_3\xi} d^3x = \bar{r}_D^2 - \bar{r}_D^2 = \frac{s}{2\gamma}. \quad (19.90)$$

Таким образом, так же как и по теории Клейна — Гордона, по теории Дирака находим

$$R^2 \approx n/\gamma, \quad \bar{\xi}^2 \approx s/2\gamma. \quad (19.91)$$

Учет спина может сказаться лишь в области малых значений квантовых чисел.

**г) Решение уравнения Дирака в декартовой системе координат.** В декартовой системе координат, когда постоянное и однородное магнитное поле направлено по оси  $z$ , следует

положить [6]

$$A_x = A_z = 0, \quad A_y = xH. \quad (19.92)$$

При этом решение уравнения Дирака (19.48) можно искать в виде (см. также (19.35))

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \frac{e^{-i\frac{\varepsilon E}{\hbar}t + ik_2y + ik_3z}}{L} \psi, \quad E = c\hbar K. \quad (19.93)$$

Подставляя это решение в уравнение Дирака и производя замену переменных (19.37), получаем систему уравнений:

$$(\varepsilon K \mp k_0) \psi_{1,3} + i\sqrt{2\gamma} \left( \frac{d}{d\eta} + \eta \right) \psi_{4,2} - k_3 \psi_{3,1} = 0, \quad (19.94)$$

$$(\varepsilon K \mp k_0) \psi_{2,4} + i\sqrt{2\gamma} \left( \frac{d}{d\eta} - \eta \right) \psi_{3,1} + k_3 \psi_{4,2} = 0, \quad (19.95)$$

решение которой записывается через функции Эрмита (19.39). При этом для функции  $\psi$  получаем

$$\psi = \begin{pmatrix} C_1 u_{n-1}(\eta) \\ iC_2 u_n(\eta) \\ C_3 u_{n-1}(\eta) \\ iC_4 u_n(\eta) \end{pmatrix}. \quad (19.96)$$

С помощью рекуррентных соотношений между функциями Эрмита (см. (19.39))

$$\left( \frac{d}{d\eta} + \eta \right) u_n = \sqrt{2n} u_{n-1}, \quad \left( \frac{d}{d\eta} - \eta \right) u_{n-1} = -\sqrt{2n} u_n \quad (19.97)$$

получаем связь коэффициентов  $C_\mu$  в виде (19.66):

$$(\varepsilon K \mp k_0) C_{1,3} - \sqrt{4n\gamma} C_{4,2} - k_3 C_{3,1} = 0, \quad (19.98)$$

$$(\varepsilon K \mp k_0) C_{2,4} - \sqrt{4n\gamma} C_{3,1} + k_3 C_{4,2} = 0.$$

Если подчинить волновую функцию дополнительному условию (19.74):

$$\sigma_3^2 \psi = \zeta \psi, \quad (19.99)$$

где  $\zeta = \pm 1$ , то для коэффициентов  $C_\mu$  найдем значение (см. (19.73))

$$\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{pmatrix} = \frac{\varepsilon}{\sqrt{2K(K + \varepsilon k_0)}} \left[ \begin{pmatrix} \varepsilon K + k_0 \\ 0 \\ k_3 \\ \sqrt{4\gamma n} \end{pmatrix} D_1 + \begin{pmatrix} 0 \\ \varepsilon K + k_0 \\ \sqrt{4\gamma n} \\ -k_3 \end{pmatrix} D_{-1} \right], \quad (19.100)$$

где коэффициенты  $D_1$  и  $D_{-1}$  характеризуют состояния, когда трехмерный спин  $\sigma_3^j$  направлен соответственно по оси  $z$  (амплитуда  $D_1$ ,  $\xi = 1$ ) или против оси  $z$  (амплитуда  $D_{-1}$ ,  $\xi = -1$ ). Эти амплитуды удовлетворяют условию нормировки:

$$D_1^2 + D_{-1}^2 = 1. \quad (19.101)$$

## § 20. КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ ИЗЛУЧЕНИЯ ЭЛЕКТРОНА, ДВИЖУЩЕГОСЯ В ПОСТОЯННОМ И ОДНОРОДНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

а) **Общие формулы для спонтанного излучения с учетом поляризационных эффектов.** Как было отмечено в § 18, взаимодействие электронов с полем виртуальных фотонов обуславливает спонтанные переходы электрона из одного энергетического состояния в другое. Согласно полученным ранее формулам (см. (18.32)) интенсивность спонтанного излучения при квантовом переходе электрона из состояния с энергией  $E_b$  в состояние с энергией  $E_a$  ( $E_b > E_a$ ) имеет вид

$$W_i = \frac{ce_0^2}{2\pi} \int d^3\kappa \delta(\kappa - \kappa_{ba}) \Phi_i, \quad (20.1)$$

где величина  $\Phi_i$  зависит от типа поляризации излучения и связана с матричными элементами матриц Дирака  $\alpha$ , равными (см. (18.16))

$$\bar{\alpha} = \int \Psi_{n's'\kappa'_3\xi'}^+ e^{-i\kappa r} \alpha \Psi_{n s \kappa_3 \xi} d^3x, \quad (20.2)$$

причем:

для линейной поляризации ( $i = \lambda$ , см. (18.33))

$$\Phi_\lambda = (\bar{\alpha}^* \beta_\lambda) (\bar{\alpha} \beta_\lambda); \quad (20.3)$$

для круговой поляризации ( $i = l$ )

$$\Phi_l = (\bar{\alpha}^* \beta_l^*) (\bar{\alpha} \beta_l) = \frac{1}{2} \{ [\kappa^0 \bar{\alpha}^*] [\kappa^0 \bar{\alpha}] \} - \frac{i}{2} l (\kappa^0 [\bar{\alpha}^* \bar{\alpha}]). \quad (20.4)$$

В этих выражениях базисные единичные векторы  $\beta_2$  и  $\beta_3$  (см. (18.27) и (18.29)) могут быть выражены через единичный вектор  $j^0$ , характеризующий, как правило, какое-то выделенное направление:

$$\begin{aligned} \beta_2 &= \frac{[\kappa^0 j^0]}{\sqrt{1 - (\kappa^0 j^0)^2}}, & \beta_3 &= \frac{\kappa^0 (\kappa^0 j^0) - j^0}{\sqrt{1 - (\kappa^0 j^0)^2}}, \\ \beta_l &= \frac{1}{\sqrt{2}} \{ \beta_2 + i l \beta_3 \}, & \kappa^0 &= \frac{\kappa}{\kappa}, \end{aligned} \quad (20.5)$$

а величина  $\hbar \kappa$  равна импульсу фотона.

От направления  $j^0$  зависит, таким образом, интенсивность с заданной линейной поляризацией. Поэтому если линейная поляризация существует, то можно выбрать выделенное направление  $j^0$  так, чтобы величина  $W_2$  соответствовала максимуму, а  $W_3$  — минимуму излучения. В рассматриваемой задаче с этой целью следует ориентировать  $j^0$  вдоль магнитного поля, т. е. по оси  $z$ . Тогда излучение  $W_2$  будет соответствовать  $\sigma$ -компоненте: вектор электрического поля излучения лежит в плоскости  $xy$  и направлен почти по радиусу к центру. Излучение  $W_3$  соответствует  $\pi$ -компоненте: магнитный вектор лежит в плоскости  $xy$ , а электрический направлен почти по внешнему магнитному полю.

При интегрировании по волновому вектору  $\mathbf{k}$  введем сферические координаты:

$$\kappa_1 = \kappa \sin \theta \cos \varphi', \quad \kappa_2 = \kappa \sin \theta \sin \varphi', \quad \kappa_3 = \kappa \cos \theta. \quad (20.6)$$

Заметим, что в силу аксиальной симметрии внешнего магнитного поля интенсивность излучения не должна зависеть от угла  $\varphi'$ . Поэтому, не нарушая общности, мы можем положить этот угол равным любому значению, например  $\varphi' = \pi/2$ . Тогда находим

$$\kappa_1^0 = 0, \quad \kappa_2^0 = \sin \theta, \quad \kappa_3^0 = \cos \theta, \quad (20.7)$$

и для  $\Phi_i$  получаем

$$\Phi_2 = (\bar{\alpha}_1^* \bar{\alpha}_1), \quad (20.8)$$

$$\Phi_3 = (\bar{\alpha}_2 \cos \theta - \bar{\alpha}_3 \sin \theta)^2, \quad (20.9)$$

$$\Phi_4 = \frac{1}{2} (\Phi_2 + \Phi_3 - i l \Phi_4), \quad (20.10)$$

где

$$\Phi_4 = (\bar{\alpha}_1^* \bar{\alpha}_2 - \bar{\alpha}_2^* \bar{\alpha}_1) \cos \theta - (\bar{\alpha}_1^* \bar{\alpha}_3 - \bar{\alpha}_3^* \bar{\alpha}_1) \sin \theta. \quad (20.11)$$

Эти формулы лежат в основе квантовой теории синхротронного излучения [5].

Найдем общие выражения для интенсивности излучения, когда начальное состояние электрона характеризуется квантовыми числами  $n, s, k_3, \zeta$ , а конечное — квантовыми числами  $n', s', k'_3, \zeta'$ .

Волновые функции (см. (19.52) и (19.53)) имеют следующий вид (мы ограничимся решениями только с положительной энергией,  $\varepsilon = 1$ ):

$$\Psi_{nsk_3\zeta} = \frac{e^{ik_3z}}{\sqrt{L}} \frac{e^{i(l-\frac{1}{2})\varphi}}{\sqrt{2\pi}} f, \quad (20.12)$$

где согласно (19.65)

$$f = \sqrt{2\gamma} \begin{pmatrix} C_1 e^{-i\varphi/2} I_{n-1, s}(\rho) \\ iC_2 e^{i\varphi/2} I_{n, s}(\rho) \\ C_3 e^{-i\varphi/2} I_{n-1, s}(\rho) \\ iC_4 e^{i\varphi/2} I_{n, s}(\rho) \end{pmatrix}, \quad (20.13)$$

а значение для коэффициента  $C_\mu$  в зависимости от выбора поляризации определяется равенствами (19.73), (19.73а), (19.78) или (19.84).

Матричный элемент (20.2) можно представить в виде

$$\bar{a} = \frac{1}{L} \int_{-L/2}^{L/2} e^{-iz(k'_s + \kappa \cos \theta - k_s)} dz \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\infty r dr e^{-i\kappa r \sin \theta \sin \varphi + i(l-l')\varphi} f'^+ a f, \quad (20.14)$$

где  $\theta$  — угол вектора  $\kappa$  с осью  $z$ , а  $\varphi$  — полярный угол цилиндрической системы координат электрона. Воспользуемся известными равенствами

$$\frac{1}{L} \int_{-L/2}^{L/2} dz e^{iz(k_s - k'_s - \kappa \cos \theta)} = \delta_{k'_s, k_s - \kappa \cos \theta}, \quad (20.15)$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi e^{-i\kappa r \sin \theta \sin \varphi + i(l-l')\varphi} = J_{l-l'}(\kappa r \sin \theta), \quad (20.16)$$

а при интегрировании по радиусу сделаем переход от переменной  $r$  к переменной  $\rho = \gamma r^2$  и учтем значение интеграла \*)

$$\int_0^\infty J_{l-l'}(2\sqrt{x\rho}) I_{n', s'}(\rho) I_{n, s}(\rho) d\rho = I_{n, n'}(x) I_{ss'}(x), \quad (20.17)$$

\*) Для вычисления интеграла (20.17) следует вместо полинома Лагерра  $Q_{s'}^l$ , входящего в функцию  $I_{n', s'}(\rho)$ , подставить его выражение (19.19). Затем, раскрывая по частям интеграл  $s'$  раз и учитывая соотношения

$$\begin{aligned} \frac{d^k}{d\rho^k} Q_s^l &= (-1)^k \frac{s!}{(s-k)!} Q_{s-k}^{l+k}(\rho), \\ \frac{d^{s'-k}}{d\rho^{s'-k}} \rho^{\frac{l-l'}{2}} J_{l-l'}(a\sqrt{\rho}) &= \left(\frac{a}{2}\right)^{s'-k} \rho^{\frac{l-l'-s'+k}{2}} J_{l-l'-s'+k}(a\sqrt{\rho}), \\ \int_0^\infty e^{-t} t^{\nu+\frac{\alpha}{2}} J_\alpha(2\sqrt{zt}) dt &= e^{-z} z^{\frac{\alpha}{2}} Q_\nu^\alpha(z), \end{aligned}$$

мы приходим к формуле (20.17) (более подробно см. [3—5]).



в котором  $n' = l' + s'$ ,  $n = l + s$ , а

$$x = \kappa^2 \sin^2 \theta / 4\gamma. \quad (20.18)$$

Учитывая соотношение (20.17), а также равенства (20.14) и (20.13), найдем, суммируя по  $k'_3$  (см. (20.15)),

$$\left. \begin{aligned} -i\bar{\alpha}_1 \\ \bar{\alpha}_2 \end{aligned} \right\} = [(C'_1 C_4 + C'_3 C_2) I_{n, n'-1} \mp (C'_4 C_1 + C'_2 C_3) I_{n-1, n'}] I_{ss'}, \quad (20.19)$$

$$\bar{\alpha}_3 = [(C'_1 C_3 + C'_3 C_1) I_{n-1, n'-1} - (C'_4 C_2 + C'_2 C_4) I_{n, n'}] I_{ss'},$$

причем аргументом функций  $I_{n, n'}$  и  $I_{ss'}$  является величина  $x$  (см. (20.18)).

Полная интенсивность излучения согласно (20.1) равна

$$W_i = \frac{ce_0^2}{2\pi} \sum_{\nu, s', \zeta'} \int d^3\kappa \delta(\kappa - \kappa_{ba}) \Phi_i, \quad (20.20)$$

а для соответствующей вероятности перехода имеем (см. (18.21))

$$w_i = \frac{e_0^2}{2\pi\hbar} \sum_{\nu, s', \zeta'} \int \frac{d^3\kappa}{\kappa} \delta(\kappa - \kappa_{ba}) \Phi_i, \quad (20.21)$$

причем суммирование по числу  $n'$  мы заменили суммированием по гармонике  $\nu = n - n'$ . Начальная и конечная энергия электрона соответственно равны

$$\begin{aligned} K &= \sqrt{k_0^2 + 4\gamma n + k_3^2}, \\ K' &= \sqrt{k_0^2 + 4\gamma n' + k_3'^2} = \sqrt{k_0^2 + 4\gamma(n - \nu) + (k_3 - \kappa \cos \theta)^2}, \end{aligned} \quad (20.22)$$

где  $\nu = n - n'$  — номер гармоники, а из формул (20.15) и (20.22) следует, что

$$k'_3 = k_3 - \kappa \cos \theta, \quad \kappa_{ba} = K - K'. \quad (20.23)$$

Формула (20.23) выражает собою закон сохранения импульса вдоль поля и закон сохранения энергии. Учитывая наличие в (20.20) дельта-функции, мы найдем частоту излучения:

$$\kappa = K \frac{1 - \beta_{\parallel} \cos \theta}{\sin^2 \theta} \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{4\gamma\nu \sin^2 \theta}{K^2 (1 - \beta_{\parallel} \cos \theta)}} \right), \quad (20.24)$$

где скорость движения вдоль оси  $z$  (продольная составляющая) равна  $\beta_{\parallel} = k_3/K$ , а для определения аргумента  $x$ , от которого зависят полиномы Лагерра (см. (20.17)), мы должны в (20.18) подставить значение  $\kappa$  из (20.24).

**б) Квазиквантовое приближение.** Как известно, в классическом случае в постоянном и однородном магнитном поле движение электрона (если пренебречь излучением) должно происхо-

дить по винтовой линии (см. соответствующее классическое уравнение (10.1)):

$$x = R \cos \omega t, \quad y = R \sin \omega t, \quad z = v_{\parallel} t, \quad (20.25)$$

где  $R$  — радиус орбиты,  $\omega$  — механическая частота вращения, а  $v_{\parallel}$  — продольная составляющая скорости. Из формулы (20.25) мы найдем значение угловой скорости через поперечную составляющую скорости  $v_{\perp} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}$ :

$$\omega = c\beta_{\perp}/R = e_0 H c / E. \quad (20.26)$$

Из формулы (20.24) в классическом приближении ( $\hbar \rightarrow 0$ ) с учетом (20.26) найдем для частоты излучения

$$\begin{aligned} \omega_{\nu} = c\kappa &\approx v \frac{c\beta_{\perp}}{R(1 - \beta_{\parallel} \cos \theta)} = v \frac{e_0 H c}{E(1 - \beta_{\parallel} \cos \theta)} = \\ &= v \frac{e_0 H}{m_0 c} \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{(1 - \beta_{\parallel} \cos \theta)}. \end{aligned} \quad (20.27)$$

Здесь целое число  $\nu$  определяет номер гармоники, а множитель  $(1 - \beta_{\parallel} \cos \theta)$ , появляющийся в знаменателе, описывает по существу эффект Допплера (см. [7]) \*).

Аргумент  $x$ , от которого зависят полиномы Лагерра, согласно (20.18) в этом приближении равен

$$x \approx \frac{v^2 \beta_{\perp}^2 \sin^2 \theta}{4n(1 - \beta_{\parallel} \cos \theta)^2}, \quad (20.28)$$

а для радиуса орбиты получаем

$$R^2 = n/\gamma.$$

В классическом приближении ( $\hbar \rightarrow 0$ ) мы можем при вычислении матричных элементов (20.19) пренебречь изменением импульса вдоль поля, а также изменением энергии при излучении. В самом деле, согласно (20.23) с учетом (20.27) имеем

$$E' = E - c\hbar\kappa \approx E. \quad (20.29)$$

Точно так же мы находим

$$p'_{\parallel} = p_{\parallel} - \hbar\kappa \cos \theta \approx p_{\parallel}. \quad (20.30)$$

Учтем, что в классическом приближении спиновые эффекты не должны играть никакой роли. При вычислении матричных элементов воспользуемся равенством (19.73а), в котором можно положить

$$D_1 = D'_1 = 1, \quad D_{-1} = D'_{-1} = 0. \quad (20.31)$$

\* Эту частоту можно получить также и по классической теории [8] (см. также (10.24)).

Тогда с помощью формулы (20.19) найдем

$$\begin{aligned} -i\bar{\alpha}_1 \} &= \frac{I_{ss'}}{2} \left( \frac{b'}{b} \beta_{\perp} I_{n, n'-1} \mp \frac{b}{b'} \beta'_{\perp} I_{n-1, n'} \right) = \\ \bar{\alpha}_2 \} &= \frac{I_{ss'}}{2} \beta_{\perp} (I_{n, n'-1} \mp I_{n-1, n'}), \end{aligned} \quad (20.32)$$

$$\bar{\alpha}_3 = \frac{I_{ss'}}{2} \left( \frac{b'}{b} \beta_3 + \frac{b}{b'} \beta'_3 \right) I_{n-1, n'-1} = \beta_3 I_{ss'} I_{n-1, n'-1}. \quad (20.33)$$

Воспользовавшись формулой для предельного значения полиномов Лагерра [1]

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I_{n, n-\nu}(\xi^2/4n) = J_{\nu}(\xi), \quad (20.34)$$

а также учтя рекуррентные соотношения между функциями Бесселя

$$J_{\nu-1}(\xi) + J_{\nu+1}(\xi) = \frac{2\nu}{\xi} J_{\nu}(\xi), \quad J_{\nu-1}(\xi) - J_{\nu+1}(\xi) = 2J'_{\nu}(\xi), \quad (20.35)$$

мы найдем следующие значения для матричных элементов:

$$-i\bar{\alpha}_1 = -\beta_{\perp} J'_{\nu}(\xi), \quad \bar{\alpha}_2 = \frac{1 - \beta_{\parallel} \cos \theta}{\sin \theta} J_{\nu}(\xi), \quad \bar{\alpha}_3 = \beta_{\parallel} J_{\nu}(\xi), \quad (20.36)$$

причем согласно (20.34) и (20.28) аргумент  $\xi$  равен

$$\xi = \nu \beta_{\perp} \sin \theta / (1 - \beta_{\parallel} \cos \theta). \quad (20.37)$$

При вычислении интенсивности излучения (см. (20.20)) после интегрирования по дельта-функции в классическом приближении для величины  $\kappa$  мы найдем значение (20.27), а в знаменателе мы должны ввести множитель

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \kappa} (\kappa - K + K') &= 1 + \frac{(\kappa \cos \theta - k_3) \cos \theta}{K'} = \\ &= 1 + \frac{(\hbar \kappa \cos \theta - p_3) c}{E - c \hbar \kappa} \approx 1 - \beta_{\parallel} \cos \theta, \end{aligned} \quad (20.38)$$

учитывающий, что величина  $K'$  является функцией  $\kappa$  (в выражении (20.38) мы оставили лишь классические члены). Тогда для интенсивности излучения (см. (20.20)) имеем

$$W = \sum_{\nu, s'} \int_0^{\pi} \sin \theta d\theta \frac{e_0^2 \nu^2 \omega^2}{c} I_{ss'}^2(x) \frac{\Phi}{(1 - \beta_{\parallel} \cos \theta)^3}, \quad (20.39)$$

где

$$\omega = \beta_{\perp} / R = e_0 H / E \quad (20.40)$$

— круговая частота вращения (механическая), с которой связана частота излучения  $\omega_{\nu}$  гармоники  $\nu$  при помощи соотношения (см. (20.27))

$$\omega_{\nu} = \nu \omega / (1 - \beta_{\parallel} \cos \theta). \quad (20.41)$$

Для суммы квадратов матричных элементов находим значения

$$\Phi = \Phi_2 + \Phi_3, \quad (20.42)$$

где величины

$$\begin{aligned} \Phi_2 &= |\bar{\alpha}_1|^2 = \beta_{\perp}^2 J_v^2(\xi), \\ \Phi_3 &= (\bar{\alpha}_2 \cos \theta - \bar{\alpha}_3 \sin \theta)^2 = \left( \frac{\cos \theta - \beta_{\parallel}}{\sin \theta} \right)^2 J_v^2(\xi) \end{aligned} \quad (20.43)$$

описывают соответственно  $\sigma$ - и  $\pi$ -компоненты, а аргументы  $\xi$  и  $x$  равны

$$\xi = \frac{v\beta_{\perp} \sin \theta}{1 - \beta_{\parallel} \cos \theta}, \quad x = v^2 \frac{\beta_{\perp}^2 \sin^2 \theta}{4\gamma R^2 (1 - \beta_{\parallel} \cos \theta)^2}. \quad (20.44)$$

В формулах (20.39) — (20.44) все величины являются классическими, за исключением аргумента  $x$ , который пропорционален  $\hbar$ , поскольку  $1/\gamma = 2c\hbar/e_0H$ .

Однако при суммировании по величине  $s'$  этот квантовый аргумент исчезает:

$$\sum_{s'=0}^{\infty} I_{ss'}^2(x) = 1. \quad (20.45)$$

Тогда для интенсивности излучения получаем формулу классического приближения (см. (10.26)):

$$W = \frac{e_0^2 \omega^2}{c} \sum_{v=1}^{\infty} v^2 \int_0^{\pi} \frac{\sin \theta d\theta}{(1 - \beta_{\parallel} \cos \theta)^3} \left[ \left( \frac{\cos \theta - \beta_{\parallel}}{\sin \theta} \right)^2 J_v^2(\xi) + \beta_{\perp}^2 J_v^{\prime 2}(\xi) \right]. \quad (20.46)$$

Здесь член, пропорциональный  $J_v^2$ , соответствует  $\pi$ -компоненте, а член, пропорциональный  $J_v^{\prime 2}$ , —  $\sigma$ -компоненте. Аналогичный результат мы получили и по классической теории (см. п. в) § 10).

Вводя новые углы (см. (10.36) и (10.37))

$$\begin{aligned} \cos \theta_0 &= \frac{\cos \theta - \beta_{\parallel}}{1 - \beta_{\parallel} \cos \theta}, \quad \sin \theta_0 = \frac{\sqrt{1 - \beta_{\parallel}^2} \sin \theta}{1 - \beta_{\parallel} \cos \theta}, \\ \sin \theta_0 d\theta_0 &= \frac{1 - \beta_{\parallel}^2}{(1 - \beta_{\parallel} \cos \theta)^2} \sin \theta d\theta, \end{aligned} \quad (20.47)$$

а также выражение для инвариантной скорости

$$\beta_0 = \sqrt{\frac{\beta^2 - \beta_{\parallel}^2}{1 - \beta_{\parallel}^2}}, \quad (20.48)$$

и принимая во внимание, что согласно (20.26) механическая частота вращения равна

$$\omega = \frac{e_0 H c}{E} = \frac{e_0 H \sqrt{1 - \beta^2}}{m_0 c}, \quad (20.49)$$

мы приведем выражение для интенсивности излучения к виду

$$W = \frac{e_0^4 H^2}{m_0^2 c^3} (1 - \beta_0^2) \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu^2 \int_0^{\pi} \sin \theta_0 d\theta_0 \times \\ \times (1 + \beta_{\parallel} \cos \theta_0) [\operatorname{ctg}^2 \theta_0 J_{\nu}^2(\xi) + \beta_0^2 J_{\nu}^{\prime 2}(\xi)], \quad (20.50)$$

где аргумент  $\xi = \nu \beta_0 \sin \theta_0$ , а для частоты излучения гармоники  $\nu$  согласно (20.41) имеем

$$\omega_{\nu} = \nu \frac{e_0 H}{m_0 c} \sqrt{1 - \beta_0^2} \frac{1 + \beta_{\parallel} \cos \theta_0}{\sqrt{1 - \beta_{\parallel}^2}}. \quad (20.51)$$

Выражение (20.50) допускает точное интегрирование по углу  $\theta_0$  (см. (10.65) и (10.66)) и суммирование по величине  $\nu$  (см. (10.68)):

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \nu^2 \int_0^{\pi} \sin \theta_0 d\theta_0 [\operatorname{ctg}^2 \theta_0 J_{\nu}^2(\xi) + \beta_0^2 J_{\nu}^{\prime 2}(\xi)] = \frac{2}{3} \frac{\beta_0^2}{(1 - \beta_0^2)^2}. \quad (20.52)$$

При интегрировании по углу члена, пропорционального  $\beta_{\parallel} \cos \theta_0$  получим нуль, в чем нетрудно убедиться, сделав замену  $\pi - \theta_0 \rightarrow \theta_0$ .

Учитывая соотношение (20.52) для полной интенсивности излучения, находим выражение\*)

$$W = \frac{2}{3} \frac{e_0^4 H^2}{m_0^2 c^3} \frac{\beta_0^2}{1 - \beta_0^2}, \quad (20.53)$$

которое, как указал Швингер, является инвариантом. Так же как и в классическом случае, для  $\pi$ - и  $\sigma$ -компонент мы получаем выражение (10.62).

\*) Если при движении в постоянном и однородном магнитном поле продольная составляющая скорости равна нулю ( $\beta_{\parallel} = 0$ ), т. е. траектория становится круговой и лежит в плоскости  $xy$ , то в формулах (20.50)–(20.53) мы должны положить  $\beta_{\parallel} = 0$ , а  $\beta_0 = \beta$ , где  $\beta$  — скорость движения электрона.

Для определения вероятности перехода воспользуемся ее связью с интенсивностью излучения:

$$W = \sum_{\nu, s'} \int_0^{\pi} \sin \theta_0 d\theta_0 \hbar \omega_{\nu} \omega(\nu, s', \theta_0).$$

Тогда, учитывая равенства (20.50), (20.51) и (20.39), получаем

$$\omega(\nu, s', \theta_0) = \frac{e_0^2}{c\hbar} \frac{e_0 H}{m_0 c} V \sqrt{(1 - \beta_0^2)(1 - \beta_{\parallel}^2)} I_{ss'}^2(x) \times \\ \times \nu (\operatorname{ctg}^2 \theta_0 J_{\nu}^2(\xi) + \beta_0^2 J_{\nu}^2(\xi)), \quad (20.54)$$

где  $\xi = \nu \beta_0 \sin \theta_0$ . Для полной же вероятности перехода имеем \*)

$$\omega = \sum_{\nu, s'} \int_0^{\pi} \sin \theta_0 d\theta_0 \omega(\nu, s', \theta_0). \quad (20.55)$$

При вычислении вероятности перехода точное суммирование может быть произведено лишь по  $s'$  (см. (20.45)). Суммирование же по  $\nu$  может быть произведено лишь приближенно \*\*).

Для приближенного суммирования по  $\nu$  в (20.55) мы должны прежде всего воспользоваться асимптотическими формулами для функции Бесселя (см. (10.102)) и ее производной (см. (10.103)). Тогда мы можем написать

$$I(\theta_0) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu (\operatorname{ctg}^2 \theta_0 J_{\nu}^2(\xi) + \beta_0^2 J_{\nu}^2(\xi)) = \\ = \frac{1}{3\pi^2} \int_0^{\infty} d\nu \nu (\cos^2 \theta_0 \varepsilon K_{1/3}^2(\eta) + \varepsilon^2 K_{2/3}^2(\eta)), \quad (20.56)$$

где

$$\varepsilon = 1 - \beta_0^2 \sin^2 \theta_0, \quad \eta = \frac{\nu}{3} \varepsilon^{3/2}.$$

Переходя от переменной  $\nu$  к переменной  $\eta$ , найдем

$$I(\theta_0) = \frac{3}{\pi^2} \int_0^{\infty} d\eta \eta \left( \frac{\cos^2 \theta_0}{\varepsilon^2} K_{1/3}^2(\eta) + \frac{1}{\varepsilon} K_{2/3}^2(\eta) \right).$$

\*) Если продольное движение отсутствует, то в формулах (20.54) и (20.55) мы должны положить  $\beta_{\parallel} = 0$ ,  $\beta_0 = \beta$ .

\*\*) Заметим, что при вычислении интенсивности излучения мы могли произвести точное суммирование и по  $\nu$ . Это связано с тем обстоятельством, что спектральная часть интенсивности излучения пропорциональна  $\nu^2$  и точное вычисление суммы возможно (см. (20.52)), в то время как спектральная часть вероятности перехода пропорциональна  $\nu$  и точное вычисление суммы становится невозможным

При вычислении интеграла по  $\eta$  воспользуемся следующими формулами:

$$\int_0^{\infty} d\eta \eta^{\mu-1} K_0^2(\eta) = \frac{2^{\mu-3}}{\Gamma(\mu)} \Gamma^2\left(\frac{\mu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\mu}{2} + \rho\right) \Gamma\left(\frac{\mu}{2} - \rho\right), \quad (20.57)$$

$$\mu > 2\rho, \quad \Gamma(s) \Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\sin \pi s}, \quad (20.58)$$

где  $\Gamma(s)$  — гамма-функция Эйлера. Тогда с помощью (20.57) и (20.58) легко получить

$$I(\theta_0) = \frac{1}{\sqrt{3} \pi} \left( \frac{\cos^2 \theta_0}{\epsilon^2} + \frac{2}{\epsilon} \right).$$

Интегрирование по углу  $\theta_0$  мы произведем с помощью следующей формулы ( $\theta = \theta_0$ ,  $\beta = \beta_0$ ):

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin \theta d\theta \cos^s \theta}{(1 - \beta^2 \sin^2 \theta)^k} \approx \frac{1}{\epsilon_0} \frac{\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right) \Gamma\left(k - \frac{s+1}{2}\right)}{\Gamma(k)}, \quad (20.59)$$

имеющей место для ультрарелятивистского случая ( $\epsilon_0 = 1 - \beta_0^2 \ll 1$ ), когда мы можем пренебречь членами порядка  $\epsilon_0$ . В этом приближении находим

$$\int_0^{\pi} \sin \theta_0 d\theta_0 I(\theta_0) = \frac{5}{2\sqrt{3}},$$

а для вероятности перехода (см. (20.55)) получаем

$$\omega = \frac{5}{2\sqrt{3}} \frac{e_0^2}{c\hbar} \frac{e_0 H \sqrt{1 - \beta_{\parallel}^2}}{m_0 c}. \quad (20.60)$$

В частности, при отсутствии продольного движения имеем

$$\omega = \frac{5}{2\sqrt{3}} \frac{e_0^2}{\hbar R} \frac{E}{m_0 c^2}. \quad (20.61)$$

Для определения среднего значения числа излучаемых фотонов  $N$  за один оборот при  $\beta_{\parallel} = 0$  мы должны  $\omega$  умножить на время одного оборота, равное

$$\tau \approx \frac{2\pi R}{c} = \frac{2\pi E}{e_0 H c}.$$

Тогда мы находим, что \*)

$$N = \frac{5\pi}{\sqrt{3}} \frac{e_0^2}{c\hbar} \frac{E}{m_0c^2}. \quad (20.62)$$

Таким образом, синхротронные кванты излучаются флуктуационно. Например, при  $E = 500$  Мэв число излучаемых квантов на один оборот будет равно 20.

**в) Влияние квантовых флуктуаций на радиальное движение.** Флуктуационный характер синхротронного излучения должен накладывать свой отпечаток на классическое движение электрона. Физически это связано с тем обстоятельством, что при флуктуационном излучении фотона большой частоты:

$$\omega_{\text{макс}} \sim \frac{c}{R} \left( \frac{E}{m_0c^2} \right)^3$$

электрон должен получить заметную квантовую отдачу. Математически это связано с тем обстоятельством, что в квазиквантовом приближении в выражение для интенсивности излучения входит множитель  $I_{ss'}^2(x)$ , аргумент которого пропорционален постоянной Планка  $\hbar$  (см. (20.44)). Правда, при вычислении интенсивности излучения при суммировании по  $s'$  этот аргумент исчезает (см. (20.45)), и в квазиквантовом приближении мы получаем классический результат. Однако эта отдача со стороны излучаемого фотона сказывается в том, что центр круговой траектории начинает испытывать случайные «скачки», что приводит к росту величины  $\xi^2$ , т. е. к квантовому возбуждению радиальных бетатронных колебаний.

Поскольку величина  $\overline{\xi^2}$  пропорциональна квантовому числу  $s$  ( $\overline{\xi^2} = s/2\gamma$ ), то для решения нашей задачи мы должны найти влияние излучения на изменение величины  $s$ . Для этого

\*) Порядок величины  $N$  может быть оценен, исходя из отношения излучаемой энергии на один оборот:

$$W^{\text{об}} = W \frac{2\pi R}{c}$$

к частоте, соответствующей максимуму интенсивности:

$$\omega_{\text{макс}} \sim \frac{c}{R} \left( \frac{E}{m_0c^2} \right)^3,$$

т. е. находим

$$N \sim \frac{W^{\text{об}}}{\omega_{\text{макс}}} \sim \frac{1}{137} \frac{E}{m_0c^2}.$$

Таким образом, флуктуационный характер излучения связан с тем обстоятельством, что максимум излучения падает на высокие гармоники.



воспользуемся выражением (20.54), в котором при исследовании радиальных колебаний можем положить  $\beta_{\parallel} = 0$ . Тогда будем иметь

$$\frac{ds}{dt} = \sum_{s', \nu} \int_0^{\pi} \sin \theta d\theta (s' - s) \omega(\nu, s', \theta). \quad (20.63)$$

Принимая во внимание соотношение

$$\sum_{s'} (s' - s) I_{ss'}^2(x) = x, \quad (20.64)$$

где согласно (20.44)

$$x \approx \nu^2 c \hbar / 2e_0 \hbar R^2,$$

и подставляя в (20.63) выражение для  $\omega(\nu, s', \theta)$ , с учетом равенства (20.64) найдем

$$\frac{ds}{dt} = \frac{e_0^2 c}{2m_0 c^2 R^2} \left( \frac{m_0 c^2}{E} \right)^2 \int_0^{\pi} \sin \theta d\theta I(\theta), \quad (20.65)$$

где

$$I(\theta) = \frac{1}{3\pi^2} \int_0^{\infty} d\nu \nu^3 (\cos^2 \theta \varepsilon K_{1/3}^2(\eta) + \varepsilon^2 K_{2/3}^2(\eta)).$$

Переходя от переменной  $\nu$  к переменной  $\eta$  (см. (20.56),  $\beta_0 = \beta$ ) и производя интегрирование по переменной  $\eta$  с помощью формул (20.57) и (20.58), получим

$$I(\theta) = \frac{4}{3\sqrt{3}} \left( \frac{4 \cos^2 \theta}{\varepsilon^5} + \frac{5}{\varepsilon^4} \right).$$

Вычисление интеграла (20.65) с помощью равенств (20.59) дает [3]

$$\frac{ds}{dt} = \frac{55}{48\sqrt{3}} \frac{e_0^2 c}{m_0 c^2 R^2} \left( \frac{E}{m_0 c^2} \right)^6. \quad (20.66)$$

Оценим, при каких энергиях этот эффект может стать заметным экспериментально. Для этого необходимо, чтобы при одном излучении величина  $s$  в среднем изменялась более чем на единицу. Из формулы (20.66) видно, что для этого мы должны взять промежуток времени  $\Delta t$ , равный обратной величине вероятности перехода (20.60), т. е.

$$\Delta t = \frac{1}{\omega} = \frac{2\sqrt{3}}{5} \frac{\hbar R}{e_0^2} \frac{m_0 c^2}{E}. \quad (20.67)$$

Отсюда при одном излучении квантовое число  $s$  в среднем изменяется на величину

$$\Delta s = \frac{11}{24} \frac{\hbar}{m_0 c R} \left( \frac{E}{m_0 c^2} \right)^5. \quad (20.68)$$

Полагая  $\Delta s > 1$ , мы найдем энергию, при которой этот процесс может стать заметным:

$$E > E_{v_1}, \quad (20.69)$$

где

$$E_s = m_0 c^2 \left( \frac{2}{3} \frac{m_0 c R}{\hbar} \right)^s. \quad (20.70)$$

Коэффициент  $2/3$  мы ввели просто для удобства дальнейших исследований (см. ниже). Вообще на порядок величины  $E_s$  он влияния не оказывает.

Из критерия возможного появления квантовых эффектов мы можем исключить радиус, который при  $E = E_{v_1}$  равен

$$R = E_{v_1} / e_0 H. \quad (20.71)$$

Подставляя (20.71) в (20.70), найдем, что

$$E_{v_1} = m_0 c^2 \left( \frac{2}{3} \frac{H_0}{H_1} \right)^{1/4}, \quad (20.72)$$

где

$$H_0 = m_0^2 c^3 / e_0 \hbar = 4,41 \cdot 10^{13} \text{ гс}$$

— постоянное швингеровское магнитное поле.

Если принять во внимание, что в современных электронных ускорителях магнитное поле имеет порядок  $H \sim 10^4 \text{ гс}$ , а собственная энергия электрона  $m_0 c^2 \sim 0,5 \text{ Мэв}$ , то  $E_{v_1}$  будет иметь порядок нескольких сотен Мэв. Эта энергия и определяет начало появления квантовых поправок.

Умножая равенство (20.66) на  $1/2\gamma$  и учитывая, что  $\overline{\xi^2} = s/2\gamma$ , мы найдем выражение, характеризующее изменение квадратичной амплитуды радиальных бетатронных колебаний:

$$\frac{d\overline{\xi^2}}{dt} = \frac{55}{48\sqrt{3}} r_0 c \frac{\hbar}{m_0 c R} \left( \frac{E}{m_0 c^2} \right)^5, \quad (20.73)$$

где  $r_0 = e_0^2 / m_0 c^2 \sim 10^{-13} \text{ см}$  — классический радиус электрона. Формула (20.73) показывает, что причиной наложения на классическое вращение электрона квантовой раскачки радиальных колебаний является флуктуационный характер излучения. Поскольку при этом амплитуда радиальных колебаний достигает макроскопических значений, то это движение можно назвать своеобразным «макроатомом» [3, 9].

Квантовое «уширение» имеет и большое практическое значение, в особенности при постройке так называемых электронных или позитронных накопительных колец. Однако в неоднородном магнитном поле возникает еще классическое затухание, которое уменьшает амплитуду вертикальных и радиальных колебаний. Поэтому более подробно все эти вопросы мы рассмотрим ниже при исследовании неоднородного магнитного поля.

г) **Влияние синхротронного излучения на вертикальное движение.** Для того чтобы исследовать влияние синхротронного излучения на вертикальное движение, т. е. на импульс  $k_3$ , мы должны воспользоваться дифференциальным значением для вероятности перехода, когда  $\beta_{\parallel} \neq 0$ . Это выражение может быть получено из формулы (20.54), если в последней произвести суммирование по  $s'$  с помощью формулы (20.45). Тогда найдем

$$\begin{aligned} \omega(\nu, \theta_0) &= \sum_{s'} \omega(\nu, s', \theta_0) = \\ &= \frac{e_0^2}{c\hbar} \frac{e_0 H \sqrt{\varepsilon_0}}{m_0 c} \sqrt{1 - \beta_{\parallel}^2} \nu \left[ \operatorname{ctg}^2 \theta_0 J_{\nu}^2(\xi) + \beta_0^2 J_{\nu}^{\prime 2}(\xi) \right]. \end{aligned} \quad (20.74)$$

Изменение импульса вдоль поля может быть вычислено по формуле

$$\frac{dp_3}{dt} = \sum_{\nu} \int_0^{\pi} \sin \theta_0 d\theta_0 (p'_3 - p_3) \omega(\nu, \theta_0), \quad (20.75)$$

где

$$p_3 = \hbar k_3. \quad (20.76)$$

Принимая во внимание закон сохранения импульса вдоль поля

$$k'_3 - k_3 = -\kappa \cos \theta = -(\omega_{\nu}/c) \cos \theta \quad (20.77)$$

и подставляя сюда вместо  $\omega_{\nu}$  значение (20.51), а вместо  $\cos \theta$ — выражение, найденное из (20.47):

$$\cos \theta = \frac{\beta_{\parallel} + \cos \theta_0}{1 + \beta_{\parallel} \cos \theta_0}, \quad (20.78)$$

имеем

$$p'_3 - p_3 = -\nu \hbar \frac{e_0 H}{m_0 c^2} \sqrt{\frac{1 - \beta_0^2}{1 - \beta_{\parallel}^2}} (\beta_{\parallel} + \cos \theta_0). \quad (20.79)$$

Подставляя (20.79) в (20.75), получаем

$$\begin{aligned} \frac{dp_3}{dt} &= -\frac{e_0^4 H^2}{m_0^2 c^3} (1 - \beta_0^2) \sum_{\nu} \nu^2 \int_0^{\pi} \sin \theta_0 d\theta_0 \times \\ &\times \frac{(\beta_{\parallel} + \cos \theta_0)}{c} \left[ \operatorname{ctg}^2 \theta_0 J_{\nu}^2(\xi_0) + \beta_0^2 J_{\nu}^{\prime 2}(\xi_0) \right]. \end{aligned} \quad (20.80)$$

Отсюда, принимая во внимание, что член, пропорциональный  $\cos \theta_0$ , при интегрировании обращается в нуль (нечетная функция) и что

$$\beta_{\parallel}/c = p_3/E, \quad (20.81)$$

мы при интегрировании по  $\theta_0$  и суммировании по  $\nu$  можем

воспользоваться формулой (20.52). Тогда для определения изменения  $p_3$  получаем уравнение

$$\frac{dp_3}{dt} = -\frac{W}{E} p_3, \quad (20.82)$$

т. е. импульс вдоль поля должен уменьшаться по экспоненциальному закону.

Таким образом, в постоянном и однородном магнитном поле эффект радиационного затухания влияет только на движение электрона вдоль поля. Как было показано выше, на радиальные колебания радиационное затухание не воздействует. Только в неоднородном поле классическое радиационное затухание влияет не только на вертикальные, но и на радиальные колебания.

Дадим физическую интерпретацию так называемого демпинг-эффекта (20.82). Учитывая, что

$$W = -dE/dt,$$

мы равенство (20.82) можем записать в виде

$$\frac{d}{dt} \frac{cp_3}{E} = 0. \quad (20.83)$$

Из этого соотношения следует, что скорость вдоль поля, как и следовало ожидать, должна оставаться величиной постоянной:

$$\beta_{\parallel} = cp_3/E = \text{const}. \quad (20.84)$$

Из формулы (20.82) следует, что квантовые флуктуации не оказывают в среднем влияния на изменение линейной величины  $p_3$ . Однако это не означает, что они вообще не влияют на импульс  $p_3$ , поскольку средний линейный разброс может быть просто скомпенсирован. Квадратичный же разброс при наличии случайных отклонений всегда возрастает и не может обращаться в нуль. Изменение со временем величины  $p_3^2$  равно

$$\frac{dp_3^2}{dt} = \sum_{\nu} \int_0^{\pi} \sin \theta_0 d\theta_0 (p_3'^2 - p_3^2) \omega(\nu, \theta_0). \quad (20.85)$$

Воспользовавшись соотношением

$$p_3'^2 - p_3^2 = 2p_3(p_3' - p_3) + (p_3' - p_3)^2 \quad (20.86)$$

и принимая во внимание (20.74), (20.75), (20.79) и (20.85),

а также асимптотическое значение для функций Бесселя, найдем

$$\frac{dp_3^2}{dt} = -2\rho_3^2 \frac{W}{E} + \frac{e_0^2 \hbar \beta_{\perp}^3}{\sqrt{1-\beta_{\parallel}^2}} \frac{1}{R^3} \int_0^{\pi} \sin \theta_0 d\theta_0 v^3 (\beta_{\parallel}^2 + \cos^2 \theta_0) I(\theta_0), \quad (20.87)$$

где  $I(\theta_0)$  определяется выражением (20.65). Используя при интегрировании по углу  $\theta_0$  формулу (20.59), получим

$$\begin{aligned} \frac{dp_3^2}{dt} = -2\rho_3^2 \frac{W}{E} \left[ 1 - \frac{55\sqrt{3}}{64} \frac{\hbar}{m_0 c R} \frac{1}{\beta_0 (1-\beta_{\parallel}^2)^{5/2}} \left( \frac{E}{m_0 c^2} \right)^2 \right] + \\ + \frac{13}{24\sqrt{3}} \beta_0^5 (1-\beta_{\parallel}^2)^2 \frac{e_0^2 \hbar}{R^3} \left( \frac{E}{m_0 c^2} \right)^5. \end{aligned} \quad (20.88)$$

Вторым членом, стоящим в квадратных скобках, мы можем пренебречь, так как при существующих энергиях он слишком мал. Точно так же в последнем члене мы можем положить  $1 - \beta_{\parallel}^2 \approx 1$ . Тогда для вертикальных колебаний с учетом флуктуационных сил мы получаем выражение

$$\frac{dp_3^2}{dt} = -2\rho_3^2 \frac{W}{E} + \frac{13}{24\sqrt{3}} \beta_0^5 \frac{e_0^2 \hbar}{R^3} \left( \frac{E}{m_0 c^2} \right)^5. \quad (20.89)$$

Таким образом, на импульс электрона в направлении магнитного поля одновременно действуют и классическое радиационное затухание, и квантовые флуктуационные силы. После промежутка времени  $t > \tau \sim (W/E)^{-1}$  начальный импульс вдоль поля практически становится ничтожно малым и далее радиационное затухание ограничивает рост квадратичной флуктуации квадрата импульса, вызванный флуктуациями излучения.

Для определения критерия энергии, начиная с которой можно ожидать квантовое возбуждение движения электрона вдоль поля, сравним выражение для величины относительных флуктуаций радиуса и импульса вдоль поля, отнесенных к промежутку времени, равному периоду обращения электрона  $\Delta t = 2\pi R/c$ :

$$\Delta \frac{\overline{a^2}}{R^2} = \frac{55\pi}{24\sqrt{3}} \frac{e_0^2}{m_0 c^2 R} \frac{\hbar}{m_0 c R} \left( \frac{E}{m_0 c^2} \right)^5, \quad (20.90)$$

$$\Delta \frac{c^2 \overline{\rho_3^2}}{E^2} = \frac{13\pi}{12\sqrt{3}} \frac{e_0^2}{m_0 c^2 R} \frac{\hbar}{m_0 c R} \left( \frac{E}{m_0 c^2} \right)^3. \quad (20.91)$$

Из сравнения этих формул следует, что, в отличие от радиационных колебаний, квантовые флуктуации импульса вдоль поля начинают возбуждаться при более высоких значениях энергии:

$$E \sim E_{1/3} = m_0 c^2 \left( \frac{m_0 c R}{\hbar} \right)^{1/3}. \quad (20.92)$$

В заключение отметим, что качественное проявление квантовых флуктуаций наблюдалось в экспериментах Сэндса на синхротроне Калифорнийского Технологического института с энергией в 1,2 Гэв [10, 11] и в опытах Королева и Куликова [12, 5] на синхротроне ФИАН (680 Мэв). При этом критерий начала возбуждения квантовых флуктуаций радиальных колебаний при энергии порядка  $E_{1/2}$  следует считать подтвержденным экспериментально. Более подробно все эти вопросы мы рассмотрим при учете неоднородности магнитного поля (см. ниже § 27).

### § 21. ИЗЛУЧЕНИЕ С УЧЕТОМ КВАНТОВЫХ ЭФФЕКТОВ

**а) Общие формулы.** Интенсивность излучения с учетом квантовых эффектов мы будем вычислять по формуле (20.20), в которой, поскольку максимум излучения падает на большие  $\nu$ , суммирование по  $\nu$  можем заменить (конечно, с большой точностью) интегрированием:

$$\sum_{\nu=0}^n \rightarrow \int_0^n d\nu. \quad (21.1)$$

Суммирование же по  $s'$  можно произвести точно при помощи формулы (20.45), кроме того, следует выбрать такую систему координат, относительно которой начальный импульс вдоль поля равнялся бы нулю ( $k_z = 0$ ). Тогда формула (20.20) для интенсивности излучения принимает вид

$$W_i(\xi, \xi') = \frac{ce_0^2}{2\pi} \int_0^n d\nu \int_0^\infty \kappa^2 d\kappa \oint d\Omega \delta(\kappa - K + K') \Phi_i, \quad (21.2)$$

где  $d\Omega$  — телесный угол волнового вектора фотона  $\kappa$ , величина  $\xi = \pm 1$  характеризует знак проекции спина на ось  $z$ , а для начальной и конечной энергии электрона согласно (20.22) имеем \*)

$$K = \sqrt{k_0^2 + 4\gamma n}, \quad K' = \sqrt{k_0^2 + 4\gamma(n - \nu) + \kappa^2 \cos^2 \theta}. \quad (21.3)$$

Для определения величины  $\Phi_i$  (индекс  $i$  характеризует поляризацию фотонов) мы можем воспользоваться формулами (20.8) — (20.10), причем в матричных элементах (20.19), учитывая последующее суммирование по  $s'$  (см. (20.45)), можно множитель  $I_{ss'}$  положить равным единице, поскольку  $\sum_{s'} I_{ss'}^2 = 1$ .

Выбирая коэффициенты  $C_\mu$  и  $C'_\mu$ , описывающие «поперечную» поляризацию, в виде (19.84), для матричных элементов

\*) Величины  $\xi$ ,  $K$  и др. без штрихов относятся к начальному состоянию, а со штрихами — к конечному.

(20.19) найдем следующие значения:

$$\begin{aligned} -i\bar{a}_1 \Big\} &= \frac{1}{4} (A_3 A_4 + A_4 A_3) (B_3' B_4 I_{n, n'-1} \mp B_4' B_3 I_{n-1, n'}), \\ \bar{a}_2 \Big\} & \\ \bar{a}_3 &= \frac{1}{4} (A_3' A_4 - A_4' A_3) (B_3' B_3 I_{n-1, n'-1} + B_4' B_4 I_{n, n'}). \end{aligned} \quad (21.4)$$

Согласно (19.85) при  $k_3 = 0$ ,  $\varepsilon = \varepsilon' = 1$  (положительные энергии) имеем

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} A_3 \\ A_4 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 \\ \xi \end{pmatrix}, & \begin{pmatrix} B_3 \\ B_4 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 \\ \xi \end{pmatrix} V \sqrt{1 \pm \xi V \varepsilon_0}, \\ \begin{pmatrix} A_3' \\ A_4' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 \\ \xi' \end{pmatrix} V \sqrt{1 \mp \frac{\kappa \cos \theta}{K'}}, & & (21.5) \\ \begin{pmatrix} B_3' \\ B_4' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 \\ \xi' \end{pmatrix} V \sqrt{1 \pm \xi' V \varepsilon_0 \frac{K}{\sqrt{K^2 - 4\gamma v}}}, & & \end{aligned}$$

причем  $k_3' = -\kappa \cos \theta$ , а аргументом функций Лагерра является величина

$$x = \kappa^2 \sin^2 \theta / 4\gamma. \quad (21.6)$$

В результате интегрирования (21.2) по величине  $v$ , от которой зависят дельта-функции, в знаменателе должно появиться выражение

$$|dK'/dv| = 2\gamma/K', \quad (21.7)$$

а для величины  $v$ , которая определяется из соотношения

$$\kappa = K - K', \quad (21.8)$$

следует подставить значение

$$v = \frac{2\kappa K - \kappa^2 \sin^2 \theta}{4\gamma}. \quad (21.9)$$

Введем вместо переменной  $\kappa$  новую безразмерную величину

$$y = \frac{K \kappa \varepsilon_0^{3/2}}{3\gamma (1 - \kappa / (K - k_0))}, \quad (21.10)$$

которая изменяется в пределах от нуля ( $\kappa = 0$ ) до бесконечности ( $\kappa_{\max} = K - k_0$  \*).

\*) Заметим, что при переходе к классическому случаю ( $\kappa_{\max} \ll K$ ), когда можно положить

$$\kappa = \frac{v\beta}{R}, \quad K = \frac{V\sqrt{4\gamma n}}{\beta} = \frac{E}{c\hbar}, \quad R = \sqrt{\frac{n}{\gamma}},$$

величина  $y$  обращается в классическое значение (см. (10.112)):

$$y = \frac{2}{3} v \varepsilon_0^{3/2}. \quad (21.10a)$$

Из формулы (21.10), когда величиной порядка  $\sqrt{\varepsilon_0} = k_0/K$  по сравнению с единицей можно пренебречь, находим

$$\kappa = \frac{K \xi_0 y}{1 + \xi_0 y}, \quad K' = K - \kappa = \frac{K}{1 + \xi_0 y}, \quad d\kappa = \frac{\xi_0 K dy}{(1 + \xi_0 y)^2}, \quad (21.11)$$

где

$$\xi_0 = \frac{3\gamma}{K^2 \varepsilon_0^{3/2}} = \frac{3}{2} \frac{H}{H_0} \frac{E}{m_0 c^2}, \quad (21.12)$$

а  $H_0$  — швингеровское постоянное магнитное поле.

Используя выражение  $e_0 H = E\beta/R \approx E/R$ , пригодное в нашем приближении ( $K \gg k_0$ ), мы можем представить переменную  $\xi$ , в виде

$$\xi_0 = (E/E_{1/2})^2,$$

где

$$E_{1/2} = m_0 c^2 \left( \frac{2}{3} \frac{m_0 c R}{\hbar} \right)^{1/2},$$

т. е. величина  $\xi_0$  пропорциональна постоянной Планка  $\hbar$ .

Учитывая соотношения (21.7) — (21.12) после интегрирования по величине  $\nu$  и суммирования по состояниям поляризации фотонов, приведем равенство (21.2) к виду

$$W(\zeta, \zeta') = \frac{27}{16\pi} \frac{c e_0^2}{\varepsilon_0^{9/2} R^2} \int_0^\infty \frac{y^2 dy}{(1 + \xi_0 y)^5} \oint d\Omega \sum_i \Phi_i, \quad (21.13)$$

$$\Phi = \sum_i \Phi_i = \Phi_2 + \Phi_3 = |\bar{\alpha}_1|^2 + |\bar{\alpha}_2 \cos \theta - \bar{\alpha}_3 \sin \theta|^2. \quad (21.14)$$

Если мы хотим найти соответствующие значения для вероятности перехода  $\omega$ , то подынтегральное выражение (21.13) должны поделить на энергию излучаемого фотона, равную согласно (21.11) величине

$$\hbar \omega = \hbar c \kappa = E \xi_0 y / (1 + \xi_0 y).$$

Тогда получаем

$$\omega(\zeta, \zeta') = \frac{27}{16\pi} \frac{c e_0^2}{\varepsilon_0^{9/2} E \xi_0 R^2} \int_0^\infty \frac{y dy}{(1 + \xi_0 y)^4} \oint d\Omega \Phi. \quad (21.15)$$

**б) Асимптотическое представление функций Лагерра.** Найдем асимптотическое представление функций Лагерра через функцию  $K_{1/2}$  [4, 6, 13]. Для этого воспользуемся квазиклассическим методом ВКБ, как это было сделано для функций Бесселя (см. (10.81) — (10.105)).



Прежде всего мы должны написать дифференциальное уравнение, которому подчиняются функции Лагерра  $I_{nn'} = I_{nn'}(x)$ :

$$\frac{d^2}{dx^2} (\sqrt{x} I_{nn'}) - f(x) \sqrt{x} I_{nn'} = 0,$$

где

$$f(x) = \frac{(n - n')^2 - 1}{4x^2} - \frac{n + n' + 1}{2x} + \frac{1}{4}. \quad (21.16)$$

Из соотношения  $f(x) = 0$  мы найдем два корня этого уравнения:

$$\left. \begin{matrix} x_0 \\ x'_0 \end{matrix} \right\} = (n + n' + 1) \mp \sqrt{4nn' + 2(n + n' + 1)}.$$

Верхний знак относится к первому корню  $x_0$ , а нижний — ко второму корню  $x'_0 > x_0$ . При больших значениях  $n$  и  $n'$  эти корни можем положить равными

$$\left. \begin{matrix} x_0 \\ x'_0 \end{matrix} \right\} = (\sqrt{n} \mp \sqrt{n'})^2. \quad (21.17)$$

В дальнейшем нам важно знать асимптотическое значение в следующих двух случаях:

1)  $x = x_0 - 0$ , 2)  $x = x'_0 + 0$ .

Решение будем искать в виде

$$I_{nn'}(x) = A \sqrt{-\frac{z}{xz'}} K_{1/3}(z), \quad z' = \frac{dz}{dx}, \quad (21.18)$$

причем в случае  $x < x_0$

$$\begin{aligned} z &= \int_x^{x_0} \frac{\sqrt{(n - n')^2 - 1 - 2(n + n' + 1)x + x^2}}{2x} dx = \\ &= \int_x^{x_0} \frac{\sqrt{(x'_0 - x)(x_0 - x)}}{2x} dx. \end{aligned} \quad (21.19)$$

Из (21.19) найдем при  $x = x_0 - 0$

$$z = \frac{2}{3} \sqrt{x_0^2 nn'} \left(1 - \frac{x}{x_0}\right)^{3/2}, \quad -\frac{z}{xz'} = \frac{2}{3} \left(1 - \frac{x}{x_0}\right), \quad (21.20)$$

а асимптотическое выражение для полиномов Лагерра принимает вид

$$I_{nn'}(x) = A \sqrt{\frac{2}{3}} \left(1 - \frac{x}{x_0}\right)^{1/2} K_{1/3}(z).$$

Для определения коэффициента  $A$  мы должны найти асимптотическое значение (21.18) при  $x \rightarrow 0$ , когда функция Лагерра

стремится к предельному значению:

$$I_{nn'}(x) \rightarrow \sqrt{\frac{n!}{n'!}} \frac{1}{(n-n')!} x^{(n-n')/2}. \quad (21.21)$$

Интеграл (21.19) может быть легко вычислен, если воспользоваться выражением

$$\int_x^{x_0} \frac{\sqrt{R}}{x} dx = -\sqrt{R} + \frac{1}{2} \sqrt{a} \ln \frac{a + \frac{1}{2} bx + \sqrt{a} R}{a + \frac{1}{2} bx - \sqrt{a} R} - \\ - \frac{b}{4\sqrt{c}} \ln \frac{cx + \frac{1}{2} b + \sqrt{cR}}{cx + \frac{1}{2} b - \sqrt{cR}}, \quad (21.22)$$

где

$$R = \sqrt{a + bx + cx^2},$$

и учесть, что  $R(x_0) = 0$ . Полагая в (21.22)  $a = (n - n')^2$ ,  $b = -2(n + n' + 1)$ ,  $c = 1$ , найдем при  $x \rightarrow 0$

$$2z = -(n - n') + (n - n') \ln \frac{(n - n')^2}{x} + \\ + \left(n' + \frac{1}{2}\right) \ln \left(n' + \frac{1}{2}\right) - \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln \left(n + \frac{1}{2}\right), \\ 2xz' = -(n - n').$$

Используя формулу Стирлинга ( $s \gg 1$ )

$$\left(s + \frac{1}{2}\right)^{s + \frac{1}{2}} \approx s! \frac{e^{s + \frac{1}{2}}}{\sqrt{2\pi}}, \quad (21.23)$$

а также асимптотическое значение для функции  $K_{1/2}(z)$  при  $z \rightarrow \infty$ :

$$K_{1/2}(z) = \sqrt{\pi/2z} e^{-z},$$

получаем из (21.18) при  $x \rightarrow 0$

$$I_{nn'}(x) = A\pi \sqrt{2} \sqrt{\frac{n!}{n'!}} \frac{1}{(n-n')!} x^{(n-n')/2} \quad (21.24)$$

Сопоставляя (21.24) с (21.21), находим

$$A = 1/\pi \sqrt{2}.$$

Поэтому асимптотическое выражение для функции Лагерра при  $x = x_0 - 0$  принимает вид

$$I_{nn'}(x) = \frac{1}{\pi \sqrt{3}} \left(1 - \frac{x}{x_0}\right)^{1/2} K_{1/2}(z). \quad (21.25)$$

Для того чтобы взять производную по  $x$ , необходимо воспользоваться соотношением

$$\frac{d}{dz} (z^{1/3} K_{1/3}) = -z^{1/3} K_{2/3}.$$

Тогда получаем

$$I'_{nn'} = \frac{\sqrt[4]{nn'}}{\pi \sqrt{3x_0}} \left(1 - \frac{x}{x_0}\right) K_{2/3}(z). \quad (21.26)$$

Аналогичным путем мы можем найти асимптотическое значение для функции  $I_{nn'}(x)$  в другом случае  $x \rightarrow x'_0 + 0$ , где согласно (21.17)  $x'_0 \approx (\sqrt{n} + \sqrt{n'})^2$  [13]. Для определения постоянной  $A$  мы должны воспользоваться значением функции  $I_{nn'}$  при  $x \rightarrow \infty$ :

$$I_{nn'}(x) \rightarrow (-1)^{n'} \frac{1}{\sqrt{n! n'!}} e^{-x/2} x^{(n+n')/2}.$$

Повторяя расчет, который позволил нам получить формулы (21.25) и (21.26), мы найдем для случая  $x = x'_0 + 0$  [13]

$$I_{nn'}(x) = (-1)^{n'} \frac{1}{\pi \sqrt{3}} \left(\frac{x}{x'_0} - 1\right)^{1/2} K_{1/3}(z),$$

$$I'_{nn'}(x) = -(-1)^{n'} \frac{1}{\pi \sqrt{3}} \frac{\sqrt[4]{nn'}}{\sqrt{x'_0}} \left(\frac{x}{x'_0} - 1\right) K_{2/3}(z), \quad (21.27)$$

где  $z = \frac{2}{3} \sqrt[4]{x_0'^2 nn'} \left(\frac{x}{x_0} - 1\right)^{1/2}$ .

В теории излучения фотонов мы можем ограничиться асимптотическими формулами при  $x = x_0 - 0^*$ ). В наших расчетах мы учтем только члены порядка  $\sqrt{\varepsilon_0}$ . Следует отметить, что величины  $\sqrt{\varepsilon} = \sqrt{1 - \beta^2 \sin^2 \theta}$  и  $\cos \theta$  также будут иметь порядок  $\sqrt{\varepsilon_0} = \sqrt{1 - \beta^2}$ .

Вычислим в рассматриваемом приближении аргумент  $z$ . Для этого мы должны прежде всего найти величину

$$1 - \frac{x}{x_0} = 1 - \frac{x^2 \sin^2 \theta}{4\gamma x_0}.$$

Полагая  $\beta_{||} = 0$  и воспользовавшись в указанном приближении соотношениями

$$K \approx \sqrt{4\gamma n}, \quad K' \approx \sqrt{4\gamma n'} = \sqrt{4\gamma(n - \nu)},$$

\*) Асимптотическим приближением для функций Лагерра при  $x = x'_0 + 0$  (см. (21.27)) мы воспользуемся в § 22 при рассмотрении рождения пары в магнитном поле.

найдем

$$1 - \frac{x}{x_0} = 1 - \frac{(\sqrt{n} - \sqrt{n' + \nu \varepsilon})^2}{(\sqrt{n} - \sqrt{n'})^2 (1 - \varepsilon)} \approx \sqrt{\frac{n}{n'}} \varepsilon.$$

Последующие члены разложения мы отбросили, так как они будут иметь порядок  $\varepsilon$  (относительно основного). Тогда, учитывая, что согласно (21.10)

$$y \approx \frac{4}{3} \varepsilon_0^{3/2} n \sqrt{\frac{x_0}{n'}},$$

получим

$$z = \frac{1}{2} y \left( \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \right)^{3/2}. \quad (21.28)$$

При определении матричных элементов  $\bar{\alpha}_n$  (см. (21.4)) необходимо найти асимптотическое значение функции Лагерра, когда квантовое число  $n$  или  $n'$  уменьшается на единицу. Для этого воспользуемся соотношениями (точными)

$$\begin{aligned} I_{n, n'-1} &= \sqrt{\frac{x}{n'}} \left( \frac{n - n' - x}{2x} I_{nn'} - I'_{nn'} \right), \\ I_{n-1, n'} &= \sqrt{\frac{x}{n}} \left( \frac{n - n' + x}{2x} I_{nn'} + I'_{nn'} \right), \\ I_{n-1, n'-1} &= \frac{x}{\sqrt{nn'}} \left( \frac{n + n' - x}{2x} I_{nn'} - I'_{nn'} \right). \end{aligned} \quad (21.29)$$

Подставим в (21.29) вместо  $I_{nn'}$  и  $I'_{nn'}$  их асимптотические значения (21.25) и (21.26), учтем, что в данном приближении согласно (21.11) можем положить

$$\sqrt{n/n'} \approx K/K' = (1 + \xi_0 y),$$

а аргумент  $x$ , входящий в множитель перед  $I_{nn'}$  и  $I'_{nn'}$ , заметить его предельным значением

$$x \rightarrow x_0 \approx (\sqrt{n} - \sqrt{n'})^2.$$

Тогда находим [5, 13]

$$\begin{pmatrix} I_{nn'} \\ I_{n, n'-1} \\ I_{n-1, n'} \\ I_{n-1, n'-1} \end{pmatrix} = 2N \sqrt{\varepsilon} \left[ K_1 + \begin{pmatrix} 0 \\ -(1 + \xi_0 y) \\ 1 \\ -\xi_0 y \end{pmatrix} \sqrt{\varepsilon} K_2 \right], \quad (21.30)$$

где нормировочный коэффициент

$$N = (1 + \xi_0 y)^{1/2} / 2\pi \sqrt{3}. \quad (21.31)$$

Аргументом функций  $I_{nn'}$  и т. д. является величина  $x$  (см. (21.6)), а аргументом функций  $K_{1/3}$ ,  $K_{2/3}$  — величина  $z$  (см. (21.28)).

**в) Излучение с учетом «поперечной» поляризации спина электрона (эффект самополяризации).** Для коэффициентов  $A$  и  $B$ , входящих в равенство (21.5), имеем

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} A_3 \\ A_4 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 \\ \xi \end{pmatrix}, & \begin{pmatrix} B_3 \\ B_4 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 \\ \xi \end{pmatrix} \left(1 \pm \frac{1}{2} \xi \sqrt{\varepsilon_0}\right), \\ \begin{pmatrix} A'_3 \\ A'_4 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 \\ \xi' \end{pmatrix} \left(1 \mp \frac{1}{2} \xi_0 y \cos \theta\right), \\ \begin{pmatrix} B'_3 \\ B'_4 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 \\ \xi' \end{pmatrix} \left(1 \pm \frac{1}{2} \xi' \sqrt{\varepsilon_0} (1 + \xi_0 y)\right). \end{aligned} \quad (21.32)$$

При выводе формул (21.32) мы ограничились основным членом и членом первого приближения, пропорциональным членам порядка  $\sqrt{\varepsilon_0}$ . Кроме того, мы учли, что согласно равенствам (21.11) и (21.9)

$$\frac{x}{K'} = \xi_0 y, \quad \frac{K}{\sqrt{K^2 - 4\nu\nu}} = \frac{K}{K' \sqrt{1 + \frac{x^2}{K^2} \cos^2 \theta}} \approx (1 + \xi_0 y).$$

С помощью формул (21.4), (21.30) и (21.32) найдем следующие значения матричных элементов:

для  $\sigma$ -компоненты

$$\begin{aligned} \Phi_2 = (-i\bar{\alpha}_1)^2 = N^2 \left\{ \frac{1 + \xi\xi'}{2} [(2 + \xi_0 y) \varepsilon K_{2/3} - \xi \sqrt{\varepsilon_0} \varepsilon \xi_0 y K_{1/3}]^2 + \right. \\ \left. + \frac{1 - \xi\xi'}{2} \xi_0^2 y^2 \varepsilon \cos^2 \theta K_{1/3}^2 \right\}, \end{aligned} \quad (21.33)$$

для  $\pi$ -компоненты

$$\begin{aligned} \Phi_3 = (\bar{\alpha}_3 \sin \theta - \bar{\alpha}_2 \cos \theta)^2 = N^2 \left[ \frac{1 + \xi\xi'}{2} (2 + \xi_0 y)^2 \cos^2 \theta \varepsilon K_{1/3}^2 + \right. \\ \left. + \frac{1 - \xi\xi'}{2} \xi_0^2 y^2 (\varepsilon K_{2/3} + \xi \sqrt{\varepsilon_0} \varepsilon K_{1/3})^2 \right]. \end{aligned} \quad (21.34)$$

Аналогичным способом могут быть выведены формулы и для случая круговой поляризации (см. (20.10)).

Подставляя (21.33) и (21.34) в выражение для вероятности перехода (21.15) и воспользовавшись интегралами\*)

$$\int_0^{\pi} \epsilon^2 K_{2/3}^2(z) \sin \theta d\theta = \frac{\pi \epsilon_0^{3/2}}{\sqrt{3} y} \left[ \int_y^{\infty} K_{1/3}(x) dx + K_{2/3}(y) \right],$$

$$\int_0^{\pi} \epsilon K_{1/3}^2(z) \sin \theta \cos^2 \theta d\theta = \frac{\pi \epsilon_0^{3/2}}{\sqrt{3} y} \left[ \int_y^{\infty} K_{3/3}(x) dx - K_{2/3}(y) \right],$$

$$\int_0^{\pi} \epsilon K_{1/3}^2(z) \sin \theta d\theta = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} \frac{\epsilon_0^{3/2}}{y} \int_y^{\infty} K_{1/3}(x) dx, \quad (21.35)$$

$$\int_0^{\pi} \epsilon^{1/2} K_{2/3}(z) K_{1/3}(z) \sin \theta d\theta = \frac{2\pi \epsilon_0^2}{\sqrt{3} y} K_{1/3}(y),$$

$$\int_0^{\pi} \epsilon^{1/2} \cos^2 \theta K_{2/3}(z) K_{1/3}(z) \sin \theta d\theta = \frac{2\pi \epsilon_0^3}{3\sqrt{3} y^2} \int_y^{\infty} K_{1/3}(x) dx,$$

а также соотношением

$$K_{1/3}(z) + K_{5/3}(z) = -2K_{2/3}(z),$$

найдем

$$\omega(\zeta, \zeta') = \frac{\sqrt{3}}{2\pi} \frac{e_0^2}{R\hbar} \frac{E}{m_0 c^2} \int_0^{\infty} dy \left\{ \frac{1 + \zeta\zeta'}{2} \left[ (1 - 2\xi_0 y + 3\xi_0^2 y^2) \times \right. \right.$$

$$\times \int_y^{\infty} K_{5/3}(x) dx + \frac{1}{2} \xi_0^2 y^2 K_{2/3}(y) - \zeta' \left( \xi_0 y - \frac{5}{2} \xi_0^2 y^2 \right) K_{1/3}(y) \left. \right] +$$

$$\left. + \frac{1 - \zeta\zeta'}{2} \xi_0^2 y^2 \frac{1}{2} [K_{2/3}(y) - \zeta K_{1/3}(y)] \right\}. \quad (21.36)$$

При вычислении (21.36) были удержаны члены порядка  $\xi_0 y$  и  $(\xi_0 y)^2$  по сравнению с единицей (квазиквантовое приближение). Взяв интеграл по  $y$  при помощи соотношения

$$\int_0^{\infty} y^{q-1} K_p(y) dy = 2^{q-2} \Gamma\left(\frac{q-p}{2}\right) \Gamma\left(\frac{q+p}{2}\right), \quad (21.37)$$

\*) Для того чтобы вычислить интегралы (21.35), мы должны сделать замену  $u = \cos \theta$  и растянуть верхний предел до бесконечности [5].

где  $\Gamma((q-p)/2)$  — гамма-функция Эйлера, получим

$$\omega(\zeta, \zeta') = \frac{5\sqrt{3}}{6} \frac{e_0^2 c}{\hbar c} \frac{E}{m_0 c^2} \left\{ \frac{1 + \zeta\zeta'}{2} \left[ 1 - \frac{16\sqrt{3}}{45} \xi_0 + \frac{25}{18} \xi_0^2 - \frac{\zeta'}{5} \left( 1 - \frac{20\sqrt{3}}{9} \xi_0 \right) \xi_0 \right] + \frac{1 - \zeta\zeta'}{2} \frac{1}{6} \xi_0^2 \left( 1 - \zeta' \frac{8\sqrt{3}}{15} \right) \right\}. \quad (21.38)$$

В выражении (21.38) члены, пропорциональные множителям  $(1 \pm \zeta\zeta')/2$ , характеризуют переходы без переворота и с переворотом спина. Они не могут привести к явлениям самополяризации\*). Члены же, пропорциональные  $\zeta'$ , приводят к тому, что в результате квантовых «встрясок» может произойти явление самополяризации. Соответствующая вероятность перехода с переворотом спина ( $\zeta' = -\zeta$ ) равна

$$\omega(\zeta) = \frac{1}{2\tau} \left( 1 + \zeta \frac{8\sqrt{3}}{15} \right), \quad (21.39)$$

где время релаксации  $\tau$  равно

$$\tau = \frac{8\hbar^2}{5\sqrt{3} m_0 c e_0^2} \left( \frac{m_0 c^2}{E} \right)^2 \left( \frac{H_0}{H} \right)^3. \quad (21.40)$$

При выводе формулы (21.39) вместо радиуса мы подставили его значение  $R \approx E/e_0 H$  и ввели еще швингеровское поле  $H_0$ .

Из формулы (21.39) видно, что вероятность перехода из состояния  $\zeta = 1$  (спин направлен по магнитному полю, соответствующее число частиц мы обозначим через  $n_\uparrow$ ) в состояние  $\zeta' = -1$  (спин направлен против магнитного поля, соответствующее число частиц мы обозначим через  $n_\downarrow$ ) будет значительно больше, чем обратный переход ( $\zeta = -1, \zeta' = 1$ )\*\*).

Мы можем составить кинетическое уравнение для описания процесса самополяризации электронов

$$\frac{dn_\downarrow}{dt} = n_\uparrow \omega_{\zeta=1} - n_\downarrow \omega_{\zeta=-1}, \quad \frac{dn_\uparrow}{dt} = n_\downarrow \omega_{\zeta=-1} - n_\uparrow \omega_{\zeta=1} \quad (21.41)$$

при условиях, что

$$n_\downarrow + n_\uparrow = n = \text{const.}$$

\*) Это связано с тем, что эти члены зависят лишь от взаимной ориентации спинов  $\zeta$  и  $\zeta'$ .

\*\*) Наглядно это можно объяснить следующим образом. В результате излучения у электрона будет появляться тенденция перейти в состояние с наименьшим значением энергии в магнитном поле, равным

$$V_{\text{магн}} = -(\mu H).$$

Поэтому спин электронов должен стремиться ориентироваться против магнитного поля. Для позитронов, наоборот, преимущественное направление спина должно быть параллельно магнитному полю.

Если в начальный момент времени ( $t = 0$ ) мы имеем электроны с неполяризованным спином:

$$n_{\downarrow}^0 = n_{\uparrow}^0 = n/2,$$

то, интегрируя уравнения (21.41), найдем [14]

$$\begin{pmatrix} n_{\downarrow} \\ n_{\uparrow} \end{pmatrix} = \frac{15 \pm 8\sqrt{3}(1 - e^{-t/\tau})}{30}. \quad (21.42)$$

Предельное значение степени поляризации ( $t \gg \tau$ ) равно

$$\frac{n_{\downarrow\infty}}{n_{\uparrow\infty}} = \frac{15 + 8\sqrt{3}}{15 - 8\sqrt{3}}, \quad (21.43)$$

т. е. в предельном случае 96% электронов должно иметь спин, ориентированный против магнитного поля.

Эксперименты по обнаружению эффекта самополяризации были произведены под руководством французского физика Пьера Марэна на накопительном кольце АКО (АСО) в лаборатории линейных ускорителей в Орсе (Orsay) [15]. Опыты проводились с позитронами, с тем чтобы избежать излишнее рассеяние частиц на остаточном газе, ядра которого также имеют положительный заряд. В этом накопительном кольце радиус был равен 1,9 м, а максимальная энергия позитрона — 536 Мэв. Время работы накопительного кольца могло быть доведено до 25 часов.

В основу обнаружения самополяризации была положена формула рассеяния двух позитронов, находящихся в одном пучке. Если рассеяние благодаря радиальным колебаниям происходит на достаточно большие углы, то оба позитрона одновременно выходят из системы ускорения и на двух счетчиках, настроенных на систему совпадений, одновременно наблюдается регистрация обеих частиц. Этот так называемый эффект Тушека зависит от направления спина частиц.

Численные же коэффициенты можно вычислить, зная размеры сгустка, размещения двух счетчиков и т. д. В частности, для накопительного кольца АКО теория дает следующую зависимость числа выбывших пар позитронов от рассеяния в зависимости от направления спина (более подробно см. [15]):

$$Y = \text{const} [1 - 0,22(\xi, \xi')]. \quad (21.44)$$

Если в формулу (21.44) подставить теоретическое значение степени поляризации (21.42), то она принимает вид

$$Y = a - b(1 - e^{-t/\tau}). \quad (21.45)$$

Эксперимент показал, что парное убывание числа частиц в 1 сек действительно происходит закону (21.45), а стабилизация



наступает через  $t_{\text{эксп}} = 167 \pm 37$  мин. При этом число частиц с поляризованным спином стабилизируется и становится на 19% меньше, если бы частицы были неполяризованы. Теория же дает для времени  $t_{\text{теор}} = 163$  мин и уменьшение убывания по сравнению с неполяризованными частицами на 22%.

Эффект самополяризации на накопительных кольцах был обнаружен также в Новосибирском институте ядерной физики группой Байера (см. [16]). В этих экспериментах были использованы другие методы исследования.

Учет аномального момента, дающего вклад в оператор функции Гамильтона:

$$V^{\text{магн}} = \frac{\alpha}{2\pi} \mu_0 \rho_3 \sigma_3 H, \quad (21.46)$$

не может деполяризовать «поперечную» поляризацию, так как энергия (21.46) коммутирует и с оператором  $\hat{H}$  (19.47), и с оператором  $\mu_3$ , описывающим «поперечную» поляризацию (см. (19.80)). Как было отмечено выше, учет вакуумного момента может деполяризовать лишь продольную поляризацию, поскольку оператор продольной поляризации (см. (19.75)), хотя и коммутирует с  $\hat{H}$ , но не коммутирует с оператором (21.46). Поэтому если электроны вначале были даже продольно поляризованными, то учет вакуумного момента быстро их деполяризует\*).

### г) Влияние квантовых эффектов на интенсивность излучения.

В основу теории мы положили формулу (21.13). В частности, если вместо функций Лагерра, которые входят в матричные элементы, подставить их асимптотические значения (21.33) и (21.34), то после суммирования по конечным состояниям спина ( $\xi' = \pm 1$ ) и усреднения по начальным состояниям ( $\xi = \pm 1$ ) найдем для полной интенсивности излучения следующее выражение:

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2} \sum_{\xi\xi'} W(\xi, \xi') = \\ &= \frac{e c e_0^2}{8\pi^2 \epsilon_0^{1/2} R^2} \int_0^\infty dy \int_0^\pi \sin \theta d\theta \frac{y^2}{(1 + \xi_0 y)^4} \left[ \left( 1 + \xi_0 y + \frac{1}{2} \xi_0^2 y^2 \right) \times \right. \\ &\quad \left. \times (\epsilon^2 K_{2/3}^2 + \epsilon \cos^2 \theta K_{1/3}^2) + \frac{1}{2} \epsilon \epsilon_0 \xi_0^2 y^2 K_{1/3}^2 \right]. \quad (21.47) \end{aligned}$$

\* Заметим, что в случае резонансов, когда частота прецессии спина  $\Omega = (\alpha/2\pi) e_0 H/m_0 c$ , связанная с аномальным магнитным моментом электрона, кратна линейной комбинации частот кругового движения  $\omega_0$ , бетатронных  $\omega_k$  и  $\omega_s$  и синхротронных колебаний, поляризация становится неустойчивой. В опытах Марэна (1973 г.) наблюдалось две таких резонансных частоты  $\omega_1 = \omega_0$ ,  $\omega_2 = 2\omega_0 - \omega_k$  при соответствующих значениях энергии электрона 440 Мэв и 509 Мэв [15].

Функции  $K_{1/3}$  и  $K_{2/3}$  в этом выражении зависят от аргумента  $z = {}^{1/2}y(\epsilon/\epsilon_0)^{1/2}$ .

Проинтегрируем полученную формулу по углу  $\theta$  с помощью равенства (21.35):

$$W = W^{\text{кл}} \int_0^\infty f(y) dy, \quad (21.48)$$

где функция

$$f(y) = \frac{9\sqrt{3}}{8\pi} \frac{y}{(1 + \xi_0 y)^3} \left[ \int_y^\infty K_{1/3}(x) dx + \frac{\xi_0 y'}{1 + \xi_0 y} K_{2/3}(y) \right] \quad (21.49)$$

описывает спектральное распределение интенсивности излучения по квантовой теории\*). Величина

$$W^{\text{кл}} = \frac{2}{3} \frac{e_0^2 c}{R^2} \left( \frac{E}{m_0 c^2} \right)^4 = \frac{2}{3} r_0^2 c H^2 \left( \frac{E}{m_0 c^2} \right)^2 \quad (21.50)$$

равна интенсивности излучения в классическом приближении, а  $r_0 = e_0^2/m_0 c^2$  — классический радиус электрона.

Рассмотрим квазиквантовый случай, когда энергия электрона  $E$  остается меньше критического значения  $E_{1/2}$ , т. е.  $E \ll E_{1/2}$ . В этом случае общие формулы допускают разложение по параметру  $\xi_1 = (E/E_{1/2})^2 \ll 1$  (см. (21.12)). Это соответствует разложению интенсивности излучения по возрастающим степеням постоянной Планка  $\hbar$ . Ограничиваясь членами не выше чем  $\xi_0^2$ , имеем

$$f(y) = \frac{9\sqrt{3}}{8\pi} y \left[ (1 - 3\xi_0 y + 6\xi_0^2 y^2) \int_y^\infty K_{1/3}(x) dx + \xi_0^2 y^2 K_{2/3}(y) \right]. \quad (21.51)$$

Интегрируя (21.48) при помощи формулы (21.37), найдем\*\*)

$$W = W^{\text{кл}} \left\{ 1 - \frac{55\sqrt{3}}{24} \xi_0 + \frac{56}{3} \xi_0^2 + \frac{8}{3} \xi_0^3 \right\}. \quad (21.52)$$

\*) Заметим, что если произвести расчет излучения для бесспинового электрона, т. е. по теории Клейна — Гордона, то вместо функции (21.49) получаем [1, 5]

$$f^{\text{К-Г}}(y) = \frac{9\sqrt{3}}{8\pi} \frac{y}{(1 + \xi_0 y)^3} \int_y^\infty K_{1/3}(x) dx. \quad (21.49a)$$

Таким образом, учет спина неполяризованных электронов приводит к появлению в правой части (21.49) второго члена, пропорционального  $\xi_0^2$ , т. е. второй степени относительно постоянной Планка ( $\hbar^2$ ).

\*\*) Поляризация излучаемых фотонов была рассмотрена нами в классической теории (см. (10.117)). Обобщение же формул для интенсивности с учетом поляризации фотона и спина электрона на общий случай квантовой теории было произведено в монографии [5].

Последний член  $\frac{8}{3}\xi_0^2$ , обусловленный спином неполяризованного электрона, пропорционален  $\hbar^2$ , поскольку при вычислении интенсивности излучения для бесспиновых релятивистских частиц, подчиняющихся уравнению Клейна — Гордона (см. (21.49а)), мы получим формулу (21.52) без члена, пропорционального  $\frac{8}{3}\xi_0^2$ .

Полагая в (21.52)  $\xi_0 = 0$ , находим классическую формулу для интенсивности синхротронного излучения:

$$W = W^{\text{кл.}}$$

Квантовые же поправки для интенсивности излучения с учетом членов, пропорциональных  $\xi_0$  (т. е.  $\hbar$ ), согласно (21.52) равны \*)

$$W = W^{\text{кл.}} \left\{ 1 - \frac{55\sqrt{3}}{16} \frac{\hbar}{m_0 c R} \left( \frac{E}{m_0 c^2} \right)^2 + \dots \right\}. \quad (21.53)$$

Рассмотрим ультраквантовый случай, когда

$$E \gg E_{1/2} \quad \text{или} \quad \xi_0 \gg 1. \quad (21.54)$$

Взяв интеграл, входящий в формулу (21.49а), по частям:

$$\int_0^\infty dy \frac{y}{(1 + \xi_0 y)^3} \int_y^\infty K_{5/2}(x) dx = \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{y^2}{(1 + \xi_0 y)^2} K_{5/2}(y) dy, \quad (21.55)$$

для интенсивности излучения получаем

$$\begin{aligned} W &= W^{\text{кл.}} \int_0^\infty f(y) dy = \\ &= W^{\text{кл.}} \frac{9\sqrt{3}}{8\pi} \int_0^\infty dy \left[ \frac{1}{2} \frac{y^2}{(1 + \xi_0 y)^2} K_{5/2}(y) + \frac{\xi_0^2 y^3}{(1 + \xi_0 y)^4} K_{3/2}(y) \right]. \quad (21.56) \end{aligned}$$

Заметим, что функции  $y^2 K_{5/2}(y)$  и  $y^3 K_{3/2}(y)$  достигают максимума при  $y \sim 1$ , после чего они начинают экспоненциально убывать. В классическом и квазиквантовом приближениях, когда  $\xi_0 \ll 1$ , учитываются обе области  $y < 1$  и  $y > 1$ , и поэтому основной вклад в излучение получается при  $y \sim 1$ . В ультраквантовом же случае, когда  $\xi_0 \gg 1$ , благодаря наличию в знаменателе множителя  $(1 + \xi_0 y)^2$  спектр обрезается при значениях  $y$ , много меньших единицы. Тогда для функций  $K_\mu(y)$  можно воспользоваться

\*) Формула (21.53) по теории Дирака была получена нами при участии Клепикова, а для бесспинового электрона — Швингером (цитаты обеих работ приведены в [17]). Оба результата, как и следовало ожидать, совпадают друг с другом, так как расхождение должно наблюдаться лишь в членах, пропорциональных  $\xi_0^2$ .

асимптотической формулой

$$K_{\mu}(y) \approx 2^{\mu-1} \Gamma(\mu) / y^{\mu}, \quad (21.57)$$

которая для интенсивности излучения дает значение

$$W^{y\text{-кв}} = \frac{9\sqrt{3}}{8\pi} \frac{\Gamma(2/3)}{2^{1/3}} W^{\text{кл}} \int_0^{\infty} dy \left[ \frac{2}{3} \frac{y^{1/3}}{(1 + \xi_0 y)^2} + \frac{\xi_0^2 y^{7/3}}{(1 + \xi_0 y)^4} \right]. \quad (21.58)$$

Воспользовавшись интегралом

$$\int_0^{\infty} \frac{y^p dy}{(1 + \xi_0 y)^q} = \frac{1}{\xi_0^{p+1}} \frac{\Gamma(p+1) \Gamma(q-p-1)}{\Gamma(q)}, \quad (21.59)$$

находим [18, 19, 5]

$$W^{y\text{-кв}} = \frac{2^{8/3}}{9} \Gamma(2/3) W^{\text{кл}} \xi_0^{-4/3}, \quad (21.60)$$

где

$$\xi_0 = \frac{3}{2} \frac{H}{H_0} \frac{E}{m_0 c^2} \gg 1.$$

Заметим, что, в отличие от квазиклассической теории ( $\xi_0 \ll 1$ ) (когда квантовые эффекты в интенсивности излучения проявляются как небольшие поправки к классическим формулам), в ультраквантовом случае основной член интенсивности излучения уже обладает квантовой природой. Поэтому переход к классическому приближению становится невозможным. Это связано с тем обстоятельством, что в квазиквантовом случае максимум излучения соответствует частоте

$$\omega_{\text{макс}} \approx \frac{1}{2} \omega_0 \epsilon_0^{-3/2} \approx \frac{1}{2} \frac{c}{R} \epsilon_0^{-3/2}, \quad (21.61)$$

а в ультраквантовом случае спектр обрывается на частоте

$$\omega_{\text{макс}}^{y\text{-кв}} = \frac{E}{\hbar} = \frac{m_0 c^2}{\hbar} \epsilon_0^{-1/2} \ll \omega_{\text{макс}}. \quad (21.62)$$

Поэтому электрон не может излучать энергию бóльшую, чем его полная энергия. Наоборот, в квазиквантовом случае, когда

$$\omega_{\text{макс}} = \frac{c}{2R} \left( \frac{E}{m_0 c^2} \right)^3 \ll \omega^{y\text{-кв}}, \quad (21.63)$$

т. е. когда

$$E \ll E_{1/2} \sim m_0 c^2 \left( \frac{\hbar}{m_0 c R} \right)^{1/2}, \quad \xi_0 \ll 1,$$

этот обрыв является несущественным, и квантовые эффекты дают лишь небольшие поправки (см. (21.53)).

В современных электронных синхротронах магнитное поле  $H$  имеет порядок  $10^4$  гс, и учитывая, что  $H_0 \sim 10^{13}$  гс, квантовые эффекты могут стать заметными лишь в области энергии

$E \sim E_{1/2} \sim 10^3 \text{ Гэв}$  (см., например, [20]). Однако этот критерий относится лишь к интенсивности излучения. Квантовое возбуждение бетатронных колебаний, а также явление самополяризации спина могут происходить при значительно меньших энергиях ( $E \sim 500 \text{ Мэв}$ ).

С первого взгляда может показаться, что ультраквантовый случай ( $\xi_0 > 1$ ) является в настоящее время неосуществимым. Однако имеются серьезные основания предполагать, что в пульсарах магнитное поле  $H$  может достигнуть значений  $10^{10}$ — $10^{11} \text{ гс}$ . Тогда ультраквантовый случай может приобрести реальное значение при исследовании нетеплового излучения пульсаров. Заметим, что при  $H > H_0$  представление функций Лагерра через функции  $K_{1/3}$  и  $K_{2/3}$  теряет свой смысл и этот случай требует дополнительного рассмотрения [21].

## § 22. ВЗАИМНОЕ ПРЕВРАЩЕНИЕ ФОТОНОВ И ЭЛЕКТРОННО-ПОЗИТРОННЫХ ПАР В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

**а) Общие положения.** Как было отмечено выше (см. (15.84)), уравнение Дирака допускает решения как с положительной ( $\varepsilon > 0$ ), так и с отрицательной ( $\varepsilon < 0$ ) энергиями. Решения с отрицательной энергией являются характерными не только для спинорного уравнения Дирака, но они возникают в любой релятивистской теории, включая даже и классическую. В самом деле, в релятивистской теории энергия свободной частицы  $E$  связана с ее импульсом и массой покоя соотношением

$$E^2 = c^2 p^2 + m_0^2 c^4, \quad (22.1)$$

из которого следуют два решения:

$$E = \pm \sqrt{c^2 p^2 + m_0^2 c^4}. \quad (22.2)$$

В классической теории состояния с отрицательной энергией можно вообще не рассматривать, поскольку в процессе движения частицы ее энергия может изменяться только непрерывным образом. Переходы электронов из состояний с положительной энергией в состояние с отрицательной энергией, разделенные барьером  $2m_0 c^2$ , являются невозможными. Поэтому, отбросив в классической теории состояния с отрицательной энергией, мы можем их в дальнейшем вообще не вводить.

Положение существенно изменяется в квантовой теории, где переходы возможны не только при непрерывном изменении энергии, но также и между дискретными состояниями. Для того чтобы избежать переходов электрона в состояния с отрицательной энергией, Дирак предложил все уровни с отрицательной энергией считать заполненными электронами (электронно-по-

зитронный вакуум), благодаря чему электроны в силу запрета Паули не могут в обычных условиях перейти на эти уровни.

С другой стороны, под действием гамма-кванта большой энергии ( $E_\gamma > 2m_0c^2$ ) возможны вынужденные переходы электрона из состояний с отрицательной в состояние с положительной энергией. Тогда возникают электрон с положительной энергией и «дырка» на фоне электронно-позитронного вакуума (см. § 16).

С помощью преобразования зарядового сопряжения мы можем показать, что эта «дырка» на фоне отрицательных состояний представляет собою частицу с положительной энергией и положительным зарядом, т. е. является позитроном (см. (16.51) \*).

Превращение гамма-квантов в электрон ( $e^-$ ) и позитрон ( $e^+$ ) мы можем записать с помощью следующей реакции:

$$\gamma + \gamma \rightarrow e^- + e^+. \quad (22.3)$$

Теория Дирака допускает и обратный процесс. При наличии «дырки» электрон с положительной энергией может перейти на свободный уровень состояний с отрицательной энергией. Тогда мы будем иметь превращение пары электрон — позитрон в гамма-кванты (аннигиляция)\*\*):

$$e^- + e^+ \rightarrow 2\gamma. \quad (22.4)$$

Все эти реакции могут быть вычислены как с помощью модели «дырок», так и по теории вторичного квантования.

Экспериментальное открытие позитрона подтвердило теорию электронно-позитронного вакуума Дирака. Таким образом, открылся новый этап теории элементарных частиц, учитывающий возможность их взаимных превращений.

**б) Однофотонное рождение пар электронов и позитронов в магнитном поле.** Один гамма-квант, движущийся с импульсом  $\hbar\mathbf{k}$ , не может спонтанно превращаться в пару электрон — позитрон. В самом деле, при однофотонном рождении пары не могут быть одновременно удовлетворены законы сохранения энергии и импульса

$$\mathbf{x} = K^- + K^+, \quad \mathbf{x} = \mathbf{k}^- + \mathbf{k}^+, \quad (22.5)$$

где  $\mathbf{k}^-$  и  $\mathbf{k}^+$  — соответственно импульсы, а  $K^- = \sqrt{(\mathbf{k}^-)^2 + k_0^2}$  и

\*) Теорию позитрона, а также теорию электронно-позитронного вакуума можно также изложить с помощью вторичного квантования. В этом случае теория принимает по существу симметричный вид, т. е. электроны и позитроны являются равноправными частицами (см. (16.11) и (16.12)).

\*\*) Если нет внешних электромагнитных полей, то электрон и позитрон могут превращаться минимум в два гамма-кванта, иначе не будут выполняться законы сохранения (см. (22.5)).

$K^+$  — энергии электрона и позитрона. Поэтому для образования пары необходимо, кроме гамма-кванта, наличие другой частицы (или внешнего поля), которая взяла бы часть импульса на себя. Например, пара может образоваться, когда гамма-квант большой энергии ( $E_\gamma = c\hbar\kappa > 2m_0c^2$ ) проходит вблизи ядра.

Рассмотрим однофотонное рождение пары в постоянном и однородном магнитном поле. В основу расчета положим «дырочный» вариант теории Дирака, согласно которому появление пары рассматривается как вынужденный переход электрона с отрицательного уровня ( $\epsilon' = -1$ ) на положительный ( $\epsilon = 1$ ). При этом, очевидно, фотон должен обладать энергией не меньше, чем  $2m_0c^2$ . Энергию взаимодействия электрона с фотоном выберем в виде (см. (18.3))

$$U = \frac{e_0}{L^{3/2}} \sqrt{\frac{2\pi c\hbar}{\kappa}} (\mathbf{a}\mathbf{a}) e^{-i c\kappa t + i \kappa r}. \quad (22.6)$$

Начальное состояние мы возьмем с отрицательной энергией (позитрон), а конечное — с положительной (электрон). Для вероятности этого перехода, приводящего к рождению пары с учетом спиновых состояний, следует взять выражение (см. (18.20)) \*

$$\omega = \frac{4\pi^2 e_0^2}{L^3 \hbar \kappa} \sum (\bar{\mathbf{a}}^* \mathbf{a}^+) (\bar{\mathbf{a}}\mathbf{a}) \delta(K + K' - \kappa) \delta_{k_3, \kappa_3 + k'_3}. \quad (22.7)$$

В (22.7) сумма берется по всем состояниям электрона  $n, s, k_3, \zeta$ , т. е. частицы с положительной энергией ( $\epsilon = 1, \epsilon K = K = K^- > 0, k_3 = (2\pi/L)n_3 = k_3^-, \zeta = \zeta^-$ ), и позитрона  $n', s', k'_3, \zeta'$ , т. е. частицы с отрицательной энергией ( $\epsilon' = -1, -\epsilon' K' = K' = K^+ > 0, k'_3 = (2\pi/L)n'_3 = -k_3^+, \zeta' = -\zeta^+$ ), где в скобках указаны энергия, импульс и проекция спина на ось  $z$ , относящиеся соответственно к электронам ( $K^-$  и т. д.) и позитронам ( $K^+$  и т. д.). В дальнейшем мы хотим найти вероятность перехода, в которой спиновая зависимость выделена явно. Тогда полная вероятность будет равна \*\*)

$$\omega = \sum_{\zeta} \omega(\zeta). \quad (22.8)$$

При суммировании по радиальному квантовому числу  $s'$  мы учтем, что

$$\sum_{s'=0}^{\infty} I_{ss'}^2(x) = 1.$$

\*) Значения матричных элементов  $\bar{\mathbf{a}}$  определяются формулой (20.2)

\*\*) Выражение (22.8) означает

$$\sum_{\zeta} \omega(\zeta) = \sum_{\zeta^-, \zeta^+ = \pm 1} \omega(\zeta^-, \zeta^+). \quad (22.8a)$$

Суммирование по  $s$  мы искусственно ограничим неким максимальным значением  $s_{\text{макс}}$ . Благодаря этому двойную сумму мы оборвем на этом максимальном значении:

$$\sum_{s, s'} I_{ss'}^2(x) = s_{\text{макс}} = \gamma a_{\text{макс}}^2,$$

где  $a_{\text{макс}}$  — максимальный разброс центра орбиты круговой траектории электрона, с которой величина  $s_{\text{макс}}$  согласно (см. (19.29)) связана соотношением

$$a_{\text{макс}} = \sqrt{s_{\text{макс}}/\gamma}.$$

Предположим, что площадь этого разброса определяется площадью нормировочного объема (куба периодичности) волны, т. е.

$$\pi a_{\text{макс}}^2 = L^2.$$

Тогда

$$\sum_{s, s'} I_{ss'}^2(x) = \frac{\gamma}{\pi} L^2. \quad (22.9)$$

Произведем суммирование по величинам  $n_3$  и  $n'_3$ . Для этого предположим, что падающий фотон распространяется перпендикулярно оси  $z$ :

$$\theta = \pi/2, \quad \kappa_3 = \kappa \cos \theta = 0. \quad (22.10)$$

Поэтому суммирование по  $n_3$  и  $n'_3$  дает следующее значение:

$$\sum_{n_3, n'_3} \delta_{k_3, \kappa_3 + k'_3} = \sum_{n_3, n'_3} \delta_{n_3, n'_3} = \frac{L}{2\pi} \int dk_3. \quad (22.11)$$

Кроме того, из (22.11) и (22.10) видно, что

$$n_3 = n'_3 \quad \text{или} \quad k_3^- = -k_3^+,$$

т. е. электрон и позитрон вылетают с импульсами, проекции которых на ось  $z$  равны по абсолютному значению, но имеют противоположное направление, т. е. эта сумма, так же как и проекция импульса начального фотона, равна нулю (закон сохранения импульса вдоль магнитного поля). В плоскости  $xy$  часть импульса берет на себя магнитное поле, и поэтому мы не можем записать в явном виде закон сохранения импульса.

Усредняя по состояниям поляризации начального фотона импульса  $\hbar \mathbf{k}$  в равенстве (22.7), мы должны положить отличной от нуля лишь одну квадратичную комбинацию:

$$a_{s'}^+(\mathbf{x}) a_s(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} (\delta_{ss'} - \kappa_s^0 \kappa_{s'}^0). \quad (22.12)$$



Тогда, принимая во внимание равенства (22.9) — (22.12), мы найдем для вероятности перехода (см. (22.7) и (22.8)) выражение

$$\omega(\zeta) = \frac{1}{2} \frac{e_0^2}{\hbar c} \frac{m_0 c^2}{\hbar} \frac{m_0 c^2}{E_\gamma} \frac{H}{H_0} \times \\ \times \int_{-\infty}^{\infty} dk_3 \sum_{n, n'} (|\bar{a}_1|^2 + |\bar{a}_3|^2) \delta(K^- + K^+ - \kappa). \quad (22.13)$$

При вычислении матричных элементов  $\bar{a}$  в равенствах (19.84) и (19.85) следует учитывать как положительные ( $\epsilon = 1$ ), так и отрицательные ( $\epsilon' = -1$ ) энергии:

$$\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{pmatrix} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} B_3(A_3 + A_4) \\ B_4(A_4 - A_3) \\ B_3(A_3 - A_4) \\ B_4(A_4 + A_3) \end{pmatrix}, \quad (22.14)$$

где

$$\begin{pmatrix} A_3 \\ A_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \epsilon \zeta \end{pmatrix} \sqrt{1 \pm \epsilon \frac{k_3}{K}}, \quad \begin{pmatrix} B_3 \\ B_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \zeta \end{pmatrix} \sqrt{1 \pm \zeta \frac{k_0}{K_0}} \quad (22.15)$$

( $K_0 = \sqrt{K^2 - k_3^2}$ ). Тогда матричные элементы (21.4) будут равны

$$-i\bar{a}_1 = \frac{1}{4} (A'_3 A_4 + A'_4 A_3) (B'_3 B_4 I_{n, n'-1} - B'_4 B_3 I_{n-1, n'}), \\ i\bar{a}_3 = \frac{1}{4} (A'_3 A_3 - A'_4 A_4) (B'_3 B_3 I_{n-1, n'-1} + B'_4 B_4 I_{n, n'}), \quad (22.16)$$

причем функции Лагерра  $I_{n, n'}$  и т. д. при  $\theta = \pi/2$  зависят от аргумента (см. (21.6))

$$x = \kappa^2/4\gamma. \quad (22.17)$$

Учитывая закон сохранения энергии ( $\kappa = K^- + K^+$ ), мы можем написать

$$x = \left( \sqrt{n + \frac{k_0^2}{4\gamma} + \frac{k_3^2}{4\gamma}} + \sqrt{n' + \frac{k_0^2}{4\gamma} + \frac{k_3^2}{4\gamma}} \right)^2. \quad (22.18)$$

С помощью (21.29) и (22.17) можно выразить все матричные элементы через функцию  $I_{n, n'}$  и ее производную  $I'_{n, n'}$ .

Далее мы будем рассматривать наиболее интересный для нас релятивистский случай, когда энергии электрона и позитрона столь велики, что величины  $k_0/K$  и  $k_3/K$  мы можем положить значительно меньшими единицы. Сохраняя в разложе-

ниях члены не выше, чем  $k_0/K$  или  $k_3/K$ , получим для матричных элементов

$$-i\bar{\alpha}_1 \approx \frac{1 + \xi^- \xi^+}{4} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{nn'}} \{ (\sqrt{n'} - \sqrt{n}) I'_{nn'} + \xi \sqrt{p} I_{nn'} \} + \frac{1 - \xi^- \xi^+}{4} \frac{\sqrt{rx}}{\sqrt{nn'}} I_{nn'}, \quad (22.19)$$

$$\bar{\alpha}_3 \approx \frac{1 - \xi^- \xi^+}{4} \sqrt{r} \frac{\sqrt{n} - \sqrt{n'}}{\sqrt{nn'}} I_{nn'} - \frac{1 - \xi^- \xi^+}{8} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{nn'}} [ \sqrt{x} I'_{nn'} + \xi \sqrt{p} I_{nn'} ]. \quad (22.20)$$

Здесь мы ввели обозначения

$$r = k_3^2/4\gamma, \quad p = k_3^2/4\gamma, \quad k_3 = k_3^- = -k_3^+. \quad (22.21)$$

В области больших энергий электрона и позитрона спектр энергии становится квазинепрерывным, и поэтому в (22.13) можно сделать переход от суммы по квантовым числам  $n$  и  $n'$  к соответствующим интегралам. Тогда будем иметь

$$\omega(\xi) = \frac{1}{2} \frac{e_0^2}{\hbar c} \frac{m_0 c^2}{\hbar} \frac{m_0 c^2}{E_\gamma} \frac{H}{H_0} \int_{-\infty}^{\infty} dk_3 \int_0^{\infty} dn \int_0^{\infty} dn' \Phi \delta(K^- + K^+ - \kappa), \quad (22.22)$$

где  $\Phi = |\bar{\alpha}_1|^2 + |\bar{\alpha}_3|^2$ . Произведем интегрирование по  $n'$ , учитывая, что от этой переменной зависит дельта-функция \*)

$$\delta(K^- + K^+ - \kappa) = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{n+p+r}}{\sqrt{\gamma}} \delta(n' - x - n + 2\sqrt{x(n+p+r)}). \quad (22.23)$$

При этом следует установить пределы интегрирования по числу  $n$  и переменной  $r = k_3^2/4\gamma$ . Пределы для верхнего значения  $n$  определяются из условия, что аргумент дельта-функции должен содержать особую точку, обращающую его в нуль:

$$n' = x + n - 2\sqrt{x(n+p+r)}. \quad (22.24)$$

Полагая  $n' = n$ , находим верхний предел для величины  $n_{\text{макс}} = x/4 - p - r$ . Не нарушая общности, интегрирование мы

\*) Напомним, что интегрирование при наличии дельта-функции следует производить с помощью формулы (см. также (2.48))

$$\delta\{f(x)\} = \frac{\delta(x - x_0)}{|\partial f(x)/\partial x|_{x=x_0}}.$$

можем производить при условии  $n \leq n'$ , а затем удвоить полученный результат. Из условия  $n = n' = 0$  определяется также верхний предел интегрирования по  $r$ :  $r_{\text{макс}} = x/4 - p$ .

Итак, выражение для вероятности рождения пары принимает вид

$$\omega(\xi) = 2 \frac{e_0^2}{\hbar c} \frac{m_0 c^2}{\hbar} \frac{m_0 c^2}{E_Y} \frac{H}{H_0} \int_0^{x/4-p} \frac{dr}{\sqrt{r}} \int_0^{x/4-p-r} dn [V\bar{x} - \sqrt{n+p+r}] \Phi. \quad (22.25)$$

Учитывая значение матричных элементов (22.20), получаем

$$\omega(\xi) = 2 \frac{e_0^2}{\hbar c} \frac{m_0 c^2}{\hbar} \frac{m_0 c^2}{E_Y} \frac{H}{H_0} B, \quad (22.26)$$

где

$$B = \int_0^{x/4-p} \frac{dr}{\sqrt{r}} \int_0^{x/4-p-r} \frac{dn}{n\sqrt{n'}} S, \quad (22.27)$$

$$S = \frac{1 + \xi^- \xi^+}{8} \{x(\sqrt{n} - \sqrt{n'})^2 I_{nn'}^2 + (px + r(\sqrt{n} - \sqrt{n'})^2) I_{nn'}^2 + \\ + 2\xi^- \sqrt{p} x (\sqrt{n} - \sqrt{n'}) I_{nn'} I'_{nn'}\} + \\ + \frac{1 - \xi^- \xi^+}{8} \{rx + px) I_{nn'}^2 + x^2 I_{nn'}^2 + 2\xi^- \sqrt{pq} x I_{nn'} I'_{nn'}\}. \quad (22.28)$$

Используем аппроксимацию функций Лагерра (21.27) при  $x = x'_0 + 0$ , где

$$x'_0 = (\sqrt{n} + \sqrt{n'})^2, \quad z = \frac{2}{3} \sqrt{nn'} \frac{(x - x'_0)^{3/2}}{x'_0}. \quad (22.29)$$

Введем новые переменные интегрирования, полагая

$$n = \frac{x}{4} (1 - \text{th } y)^2, \quad r = p \text{ sh }^2 y'. \quad (22.30)$$

Тогда получаем

$$\omega(\xi) = \frac{3}{4\pi^2} \frac{e_0^2}{\hbar c} \frac{m_0 c^2}{\hbar} \frac{H}{H_0} q^2 B_1, \quad (22.31)$$

где

$$B_1 = \int_0^\infty dy' \int_0^\infty dy \text{ ch }^3 y' \left\{ \frac{1 + \xi^- \xi^+}{2} [\text{sh}^2 y' \text{ ch}^2 y K_{2/3}^2(z) + \right. \\ + (\text{ch}^2 y \text{ ch}^2 y' - \text{sh}^2 y') K_{1/3}^2(z) - 2\xi^- \text{ sh } y \text{ ch } y' K_{1/3}(z) K_{2/3}(z)] + \\ \left. + \frac{1 - \xi^- \xi^+}{2} [\text{ch}^2 y' \text{ ch}^2 y (K_{2/3}^2(z) + K_{1/3}^2(z)) - \right. \\ \left. - 2\xi^- \text{ ch } y' \text{ ch}^2 y K_{1/3}(z) K_{2/3}(z)] \right\}. \quad (22.32)$$

Здесь

$$q = \frac{8}{3} \frac{p^{3/2}}{\sqrt{x}} = \frac{4}{3} \frac{H_0}{H} \frac{m_0 c^2}{E_{\gamma}}, \quad z = q \operatorname{ch}^3 y' \operatorname{ch}^2 y. \quad (22.33)$$

При интегрировании по переменной  $y'$  произведем замену переменной  $\operatorname{sh} y' = t$ . Тогда, воспользовавшись соотношениями

$$\int_0^{\infty} (1+t^2)^2 K_{1/3}^2(z) dt = \frac{\pi}{2\sqrt{3}a} \left[ K_{1/3}(a) + \int_a^{\infty} K_{1/3}(y') dy' \right], \quad (22.34)$$

$$\int_0^{\infty} (1+t^2)^2 K_{2/3}^2(z) dt = \frac{\pi}{2\sqrt{3}a} \left[ 3K_{2/3}(a) - \int_a^{\infty} K_{1/3}(y') dy' \right],$$

где  $a = 2q \operatorname{ch}^2 y$ , получаем

$$\omega(\xi) = \frac{e_0^2}{\hbar c} \frac{m_0 c^2}{\hbar} \frac{H}{H_0} \frac{\sqrt{3}}{4\pi} q \int_0^{\infty} dy S, \quad (22.35)$$

$$S = \frac{1 + \xi^- \xi^+}{2} \{ \operatorname{th}^2 y K_{2/3}(a) + 2q \operatorname{sh}^2 y K_{1/3}(a) - \xi^- \operatorname{th} y K_{1/3}(a) \} +$$

$$+ \frac{1 - \xi^- \xi^+}{2} \{ K_{2/3}(a) - \xi^- K_{1/3}(a) \}. \quad (22.36)$$

Дальнейшее интегрирование, к сожалению, в точном виде провести пока что не удалось. Поэтому рассмотрим асимптотическое поведение этих выражений в двух крайних случаях.

Прежде всего рассмотрим случай сравнительно малых энергий гамма-кванта:

$$E_{\gamma} \ll \frac{4}{3} \frac{H_0}{H} m_0 c^2, \quad q \gg 1. \quad (22.37)$$

Вычисляя приближенно значение интегралов, используя асимптотическое значение бесселевых функций:

$$K_{\mu}(z) \approx \sqrt{\pi/2z} e^{-z}, \quad (22.38)$$

находим

$$\int_0^{\infty} \operatorname{sh}^2 y K_{1/3}(2q \operatorname{ch}^2 y) dy \approx \frac{\pi e^{-2q}}{8\sqrt{2}q^2}, \quad (22.39)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{\operatorname{ch}^{2s} y} K_{\mu}(2q \operatorname{ch}^2 y) dy \approx \frac{\sqrt{2} \pi}{8q} e^{-2q},$$

где  $s = 0, 1, \dots$

Из (22.35), (22.36) находим

$$\omega(\xi) = \omega_{\infty} \left\{ \frac{1 + \xi^{-}\xi^{+}}{12} + \frac{(1 - \xi^{-})(1 - \xi^{-}\xi^{+})}{6} \right\}, \quad (22.40)$$

где просуммированная по спинам обеих частиц полная вероятность имеет вид [13, 18]

$$\omega_{\infty} = \sum_{\xi} \omega(\xi) = \frac{3\sqrt{3}}{16\sqrt{2}} \frac{e_0^2}{\hbar c} \frac{m_0 c^2}{\hbar} \frac{H}{H_0} e^{-2q}, \quad q \gg 1. \quad (22.41)$$

Из этих формул следует, что более вероятным является рождение пары с противоположно ориентированными спинами, причем спин электрона должен быть ориентирован против магнитного поля ( $\xi^{-} = -1$ ):

$$\omega^{\wedge\vee} = \frac{1 - \xi^{-}}{3} \omega_{\infty} = \frac{2}{3} \omega_{\infty}. \quad (22.42)$$

Рассмотрим другой предельный случай, когда

$$E_{\vee} \gg \frac{4}{3} \frac{H_0}{H} m_0 c^2, \quad q \ll 1 \quad (22.43)$$

(сверхсильное магнитное поле или большие энергии фотонов). Тогда, воспользовавшись асимптотическим поведением функции Бесселя малого аргумента:

$$K_{\mu}(q) \approx 2^{\mu-1} \Gamma(\mu)/q^{\mu}, \quad (22.44)$$

получаем

$$\int_0^{\infty} K_{2/3}(2q \operatorname{ch}^2 y) dy = \frac{\pi}{\sqrt{3}} \frac{\Gamma(5/6)}{\Gamma(7/6)} \frac{1}{2^{1/3} q^{2/3}}, \quad (22.45)$$

и поэтому

$$\omega(\xi) = \omega_0 \left\{ \frac{3}{40} (1 + \xi^{-}\xi^{+}) + \frac{7}{40} (1 - \xi^{-}\xi^{+}) \right\}. \quad (22.46)$$

Суммируя по спиновым состояниям, найдем полную вероятность рождения пары:

$$\omega_0 = \frac{5}{7} \frac{\Gamma(5/6)}{\Gamma(7/6)} \frac{1}{2^{1/3}} \frac{e_0^2}{\hbar c} \frac{m_0 c^2}{\hbar} \frac{H}{H_0} q^{1/3} \quad \text{при } q \ll 1. \quad (22.47)$$

Из (22.46) следует, что и в случае очень больших значений энергии фотона также более вероятным является рождение пар с противоположно ориентированными спинами.

В силу наличия экспоненциального множителя\*) в формуле (22.41) вероятность рождения пары при  $q \gg 1$ , т. е. при сравнительно малых энергиях фотона:

$$E_{\gamma}/2m_0c^2 < \frac{2}{3} \frac{H_0}{H}, \quad (22.48)$$

практически обращается в нуль. Только при больших энергиях фотона:

$$\frac{E_{\gamma}}{2m_0c^2} > \frac{2}{3} \frac{H_0}{H}$$

эта вероятность становится практически отличной от нуля. Максимум вероятности рождения пары наступает при  $q = 0,1$ .

Таким образом, в сильных магнитных полях может наблюдаться заметное поглощение фотонов вследствие рождения пар. Вероятность этого процесса зависит не только от энергии фотона, но и от спиновых свойств частиц.

Исследование рождения пары в ультрарелятивистском случае приобретает интерес в связи с предположением, что в космических объектах (например в пульсарах) при изотропном сжатии возможно образование сверхсильных магнитных полей порядка  $10^{11}$ — $10^{12}$  гс. При прохождении фотона в этом поле должны возникать пары, которые в свою очередь порождают фотоны и т. д. Возможно, что состояния с  $q \sim 1$  могут быть созданы и в земных условиях в сверхсильных ускорителях, которые могут породить гамма-кванты большой энергии.

Таким образом, может начаться каскадный процесс, весьма похожий на тот, который может наблюдаться при прохождении космической частицы сквозь вещество. Только в макроскопическом магнитном поле этот каскадный процесс будет характеризовать микроструктуру не обычного вещества (например свинца или другого вещества), а электронно-позитронного и электромагнитного вакуумов.

**в) Однофотонная аннигиляция пары.** Аналогичным путем мы можем вычислить и обратный процесс, т. е. однофотонную аннигиляцию пары в магнитном поле. Если мы положим энергию электрона равной энергии позитрона ( $E^- = E^+ = E$ ) и

\*) Появление экспоненциального множителя, равного

$$2q = \frac{4}{3} \frac{2m_0c^2}{E_{\gamma}} \frac{H_0}{H},$$

при порождении частиц в результате движения частиц в магнитном поле является весьма характерным, когда масса порождаемых частиц, т. е. величина  $2m_0$ , отлична от нуля. Такой множитель появляется, например, при рождении протонами л-мезонов:

$$2q_{\pi} \sim \frac{m_{\pi}c^2}{E_p} \frac{H'_0}{H}, \quad H'_0 = \frac{M_p^2c^3}{e_0\hbar} \approx 10^{19} \text{ гс.}$$

предположим, что они вращаются в плоскости, перпендикулярной к магнитному полю ( $k_z^- = k_z^+ = 0$ ), то фотон будет излучаться с энергией  $E_\gamma = 2E$  ( $\kappa = 2K$ ), и у него также будет отсутствовать импульс вдоль поля ( $\kappa_z = 0$ ). Для вероятности однофотонной аннигиляции следует воспользоваться выражением

$$\omega = \frac{4\pi^2 e_0^2}{L^3 \hbar} \sum_{\kappa, \kappa'} \frac{1}{\kappa} (\bar{a}^* a) (\bar{a} a^+) \delta(K^- + K^+ - \kappa), \quad (22.49)$$

где

$$a_s(\kappa) a_{s'}^+(\kappa') = (\delta_{ss'} - \kappa_s^0 \kappa_{s'}^0) \delta_{\kappa\kappa'}.$$

Производя усреднение по состояниям спиновой поляризации электрона и позитрона, с помощью преобразований, аналогичных тем, с помощью которых мы вычислили однофотонное рождение пары (см. п. б)), найдем

$$\omega = \frac{1}{3\pi} \frac{e_0^2 c}{c \hbar L} \left( \frac{m_0 c^2}{E} \right)^4 \Phi(q), \quad (22.50)$$

$$\Phi(q) = 2K_{1/2}^2(q) + K_{3/2}^2(q), \quad (22.51)$$

$$q = \frac{4}{3} \frac{H_0}{H} \frac{m_0 c^2}{E_\gamma} = \frac{2}{3} \frac{H_0}{H} \frac{m_0 c^2}{E}. \quad (22.52)$$

Из формулы (22.51) легко найти, что

$$\Phi(q) = \begin{cases} \frac{3\pi}{2q} e^{-2q}; & q \gg 1, \\ \frac{1}{2^{2/3} q^{4/3}} \Gamma^2(2/3); & q \ll 1. \end{cases} \quad (22.53)$$

Величину же  $L$  мы можем положить равной амплитуде вертикальных бетатронных колебаний.

Заметим, что вероятность однофотонной аннигиляции достигает максимального значения при  $q \approx 2$ , т. е. при \*)

$$E_{\text{макс}} \approx \frac{1}{3} m_0 c^2 \frac{H_0}{H}. \quad (22.54)$$

Если взять отношение максимальной вероятности однофотонной аннигиляции  $\omega^{\text{одн}}$  при  $E = E_{\text{макс}}$  к соответствующей этой же энергии электрона и позитрона вероятности двухфотонной аннигиляции, то это отношение будет равно

$$\frac{\omega^{\text{одн}}}{\omega^{\text{двух}}} \sim \left( \frac{H}{H_0} \right)^2 \frac{1}{\ln(H_0/3H)}. \quad (22.55)$$

\*) Энергия  $E_{\text{макс}} = 1/2 (E_\gamma)_{\text{макс}}$  соответствует максимальной вероятности однофотонной аннигиляции.

Отсюда видно, что при  $H \ll H_0$  в основном должна преобладать двухфотонная аннигиляция. Только при  $H \sim H_0$  эти вероятности могут сравняться. Однако при  $H > H_0$  асимптотическое выражение для функций Лагерра (особенно при  $H \gg H_0$ ) может и не иметь места [21]. Поэтому, как было отмечено, этот вопрос требует дополнительного исследования.

### § 23. ВАКУУМНЫЙ МАГНИТНЫЙ МОМЕНТ ЭЛЕКТРОНА

**а) Общие положения.** Как известно, теоретическое объяснение природы аномального магнитного момента электрона и расчет его величины были впервые даны Швингером [22]. Рассматривая часть энергии вакуумного взаимодействия электрона, появляющуюся при наличии внешнего магнитного поля, Швингер показал, что линейные по вектору напряженности магнитного поля члены в нерелятивистском приближении приводят к изменению фактора Ланде  $g$  у электрона. Вследствие этого гамилтониан обобщенного уравнения Дирака должен иметь вид

$$H = c(\alpha P) + \rho_3 m_0 c^2 + \frac{\alpha}{2\pi} \mu_0 \rho_3 (\sigma H), \quad (23.1)$$

где  $\alpha = e_0^2/\hbar c$  — постоянная тонкой структуры, а  $\mu_0 = e_0 \hbar/2m_0 c$  — магнетон Бора.

Расчеты, проведенные вначале по теории возмущений с точностью до членов порядка  $\alpha$ , в дальнейшем были продолжены вплоть до величины  $\alpha^3$ . При этом оказалось, что электрон во внешнем постоянном магнитном поле ведет себя так, как если бы он обладал статическим магнитным моментом, равным

$$\mu = -\mu_0 \left\{ 1 + \frac{\alpha}{2\pi} - 0,328 \frac{\alpha^2}{\pi^2} + 0,13 \frac{\alpha^3}{\pi^3} \right\}. \quad (23.2)$$

В связи с большими возможностями высокоразвитой прецизионной экспериментальной техники измерения магнитного момента электрона представляет интерес более полное исследование энергии вакуумного взаимодействия.

Прежде всего следует заметить, что величина магнитного момента электрона в общем случае является довольно сложной функцией, зависящей от величины напряженности внешнего магнитного поля. Впервые на эту особенность было обращено внимание Гупта [23], который в первом порядке теории возмущений по  $\alpha$  рассмотрел не только линейный, но и высшие члены разложения величины магнитного момента по характерному параметру  $g^{-1}$ , где

$$g = \frac{H_0}{2H}, \quad H_0 = \frac{m_0^2 c^3}{e_0 \hbar} = 4,41 \cdot 10^{13} \text{ эс}. \quad (23.3)$$



Это обстоятельство может оказаться интересным с точки зрения измерения величины магнитного момента, поскольку отброшенные в формуле (23.2) поправки, зависящие от напряженности поля в первом порядке по  $\alpha$ , могут стать заметными на фоне более высоких степеней разложения теории возмущений по квадрату заряда.

Далее необходимо подчеркнуть, что во всех перечисленных работах рассматривалось нерелятивистское приближение задачи. В связи с этим можно ожидать, что в случае релятивистского электрона величина его магнитного момента является не только функцией напряженности поля, но может также оказаться зависящей и от энергии электрона.

Наконец, отметим, что во всех указанных работах был рассмотрен только случай, когда напряженность поля ограничена пределами изменения  $0 < H \ll H_0$ . Несмотря на то, что критическое значение  $H_0$  намного превышает по своей величине все достигнутые к настоящему времени поля, исследование поведения магнитного момента электрона в условиях «сильного» поля может тем не менее представлять интерес с точки зрения общей теории.

Здесь мы хотим провести исследование величины вакуумного магнитного момента электрона в первом порядке теории возмущений по величине  $\alpha$ , свободное от указанных выше ограничений. При этом мы распространим метод Латинжера [24] со случая  $n = 0$  на случай произвольных значений  $n$  ( $H < H_0$ ).

**б) Радиационные поправки к уравнению Дирака.** Взаимодействие электрона с электромагнитным вакуумом может быть описано с помощью введения в уравнение Дирака радиационных поправок — оператора массы [4]. При этом уравнение Дирака приводится к следующему виду:

$$\{E - H\} \psi(\mathbf{r}) = \int G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \psi(\mathbf{r}') d^3r' = R \psi(\mathbf{r}), \quad (23.4)$$

где  $E = c\hbar K$  — энергия электрона, а гамильтониан  $H$  содержит только внешнее поле. Ядро в правой части уравнения Дирака

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{e_0^2}{4\pi^2} \sum_{n', \varepsilon} \int \frac{d^3\kappa}{\kappa} e^{i\kappa r} \frac{\alpha_\mu \psi_{n'}(\mathbf{r}) \psi_{n'}^\dagger(\mathbf{r}') \alpha_\mu}{K - \varepsilon(K_{n'} + \kappa)} e^{-i\kappa r'} \quad (23.5)$$

предполагает суммирование по всем промежуточным состояниям, включая состояния с положительной ( $\varepsilon = 1$ ) и отрицательной ( $\varepsilon = -1$ ) энергией. В этой формуле предполагается также суммирование по индексу  $\mu$  (от 1 до 4) ( $\alpha_\mu = \boldsymbol{\alpha}, i\gamma_4$ ), причем функции  $\psi_n(\mathbf{r})$  удовлетворяют обычному уравнению Дирака (без правой части).

Рассматривая далее правую часть уравнения (23.4) как возмущение, замечаем, что радиационные поправки к энергии, а

также вероятность переходов полностью определяются матричными элементами оператора  $R$ , характеризующего эффективную энергию вакуумного взаимодействия.

Заметим, что оператор массы (правая часть уравнения (23.4)) содержит бесконечную полевую массу  $\delta m$ . Эта бесконечная величина может быть скомпенсирована с помощью перенормировки массы. Однако в наших расчетах полевая масса выпадает из рассмотрения, и результаты оказываются конечными без всякой перенормировки.

Вычисление матричных элементов оператора  $R$  можно провести обычным методом с помощью точных волновых функций электрона в магнитном поле. Радиационная поправка к энергии при этом определяется диагональным элементом оператора  $R$ :

$$W_{\zeta\zeta'} = \int \psi_{n\zeta'}^+(\mathbf{r}) R \psi_{n\zeta}(\mathbf{r}) d^3x = \int \psi_{n\zeta'}^+(\mathbf{r}) G(\mathbf{r}\mathbf{r}') \psi_{n\zeta}(\mathbf{r}') d^3x d^3x'. \quad (23.6)$$

Здесь индексы  $\zeta, \zeta' = \pm 1$  характеризуют зависимость энергии вакуумного взаимодействия от начальной  $\zeta$  и конечной  $\zeta'$  ориентации спина.

Если мы воспользуемся соотношением  $\sigma_3^0 \psi = \zeta \psi$  (см. (19.101), (20.8), (20.9), (20.19)), то для (23.6) получим

$$W_{\zeta\zeta'} = W_{\zeta\zeta'}^{(1)} + W_{\zeta\zeta'}^{(2)} = \\ = \frac{e_0^2}{4\pi} \sum_{n', \varepsilon} \int_0^\infty \frac{x dx \sin \theta d\theta}{K - \varepsilon (K' + \varkappa)} [F_1(\varkappa, \theta) + F_2(\varkappa, \theta)], \quad (23.7)$$

где

$$F_1 = (D_1 D_1' + D_{-1} D_{-1}') \left\{ \left( 1 - \varepsilon \frac{k_0^2}{KK'} \right) [I_{n, n'-1}^2 + I_{n-1, n'}^2] - \right. \\ \left. - \varepsilon \frac{k_0^2}{KK'} [I_{n-1, n'-1}^2 + I_{n, n'}^2] - 2\varepsilon \frac{4\gamma \sqrt{nn'}}{KK'} I_{n, n'} I_{n-1, n'-1} \right\}, \\ F_2 = (D_{-1} D_{-1}' - D_1 D_1') \frac{k_0}{K} \left[ \left( 1 - \varepsilon \frac{K}{K'} \right) \frac{n' - n}{x} - \varepsilon \frac{K}{K'} \right] [I_{n, n'}^2 - I_{n-1, n'-1}^2] \quad (23.8)$$

выражаются через известные функции Лагерра (см. (23.8)) от аргумента

$$z = \varkappa^2 \sin^2 \theta / 4\gamma. \quad (23.9)$$

Спиновые коэффициенты  $D_1$  и  $D_{-1}$  удовлетворяют требованию нормировки (19.102)

$$D_1^2 + D_{-1}^2 = 1. \quad (23.10)$$

Заметим, что непосредственно с наличием аномального магнитного момента электрона мы должны связать величину  $W_{\zeta\zeta'}^{(2)}$ . Действительно, именно эта величина, пропорциональная

билинейной комбинации  $(D_{-1}D'_{-1} - D_1D'_1)$ , в зависимости от выбора оператора поляризации либо явно зависит от ориентации спина (поперечная поляризация), либо вызывает переходы с изменением ориентации спина (продольная поляризация). Очевидно, что  $W_{\xi\xi'}^{(1)}$  этими свойствами не обладает.

Известно, что часть вакуумного оператора  $R$  (см. (23.4)), связанного с аномальным магнитным моментом, в нерелятивистском приближении обычно заменяется оператором  $R' = \Delta\mu\rho_3(\sigma H)$  (см. (23.1)), где постоянная величина  $\Delta\mu = -\alpha\mu_0/2\pi$  интерпретируется как аномальный момент электрона.

Паули показал, что подобное обобщение уравнения Дирака является ковариантным, поэтому можно предполагать, что и в общем случае замена  $R \rightarrow R'$  остается справедливой, однако величина  $\Delta\mu$  может теперь оказаться функцией напряженности магнитного поля и энергии электрона.

Сравнивая матричные элементы оператора  $R'$

$$W'_{\xi\xi'} = \int \psi_{\xi'}^{\dagger}(\mathbf{r}) R' \psi_{\xi}(\mathbf{r}) d^3\mathbf{r} = \Delta\mu (D_1 D'_1 - D_{-1} D'_{-1}) H$$

с энергией вакуумного взаимодействия  $W_{\xi\xi'}$  (23.8), находим такую замену возможной, если выбрать  $\Delta\mu$  в виде

$$\Delta\mu = \frac{W_{\xi\xi'}^{(2)}}{H(D_1 D'_1 - D_{-1} D'_{-1})} = -\frac{\alpha}{2\pi} \mu_0 f(n, g). \quad (23.11)$$

Производя суммирование в  $W_{\xi\xi'}^{(2)}$  по знаковому множителю  $\epsilon = E_{n'}/|E_{n'}|$ , для функции  $f(n, g)$  получим

$$f(n, g) = -8g \sum_{n'=0}^{\infty} \int_0^{\infty} \int_0^{\pi/2} \frac{x dx \sin \theta d\theta}{(V\eta + x^2 \cos^2 \theta + x)^2 - 1} \times \\ \times \left[ 1 + \frac{\eta - 1 + x^2 \sin^2 \theta}{x \sin^2 \theta V\eta + x^2 \cos^2 \theta} \right] [I_{n, n'}^2(z) - I_{n-1, n'-1}^2(z)], \quad (23.12)$$

причем

$$g = \frac{\kappa_0^2}{4\gamma} = \frac{H_0}{2H}, \quad \eta = \frac{n' + g}{n + g}, \quad z = (n + g)x^2 \sin^2 \theta.$$

Существенно, что выражение (23.12) не содержит расходястей и является конечным во всей области изменения энергии и внешнего поля.

Случай «основного» состояния электрона ( $n = 0$ ) является в некотором смысле особым. В этом состоянии спин электрона может быть ориентирован только против направления магнитного поля ( $D_1 = 0, D_{-1} = 1$ ), и поэтому разделение энергии вакуумного взаимодействия на части указанным выше способом невозможно. В этом случае вся величина энергии

$$W_{\xi\xi'} = W_{\xi\xi'}^{(1)} + W_{\xi\xi'}^{(2)}$$

связана с магнитным моментом электрона и для функции  $f(0, g)$  получаем

$$f(0, g) = -8g \sum_{n'=0}^{\infty} \int_0^{\infty} \int_0^{\pi/2} \frac{x dx \sin \theta d\theta}{(\sqrt{\eta' + x^2 \cos^2 \theta} + x)^2 - 1} \times \\ \times \left[ \frac{x}{\sqrt{\eta' + x^2 \cos^2 \theta}} I_{0, n'-1}^2(z') + \left( 2 + \frac{2x^2 \sin^2 \theta + \eta' - 1}{x \sin^2 \theta \sqrt{\eta' + x^2 \cos^2 \theta}} \right) I_{0, n'}^2(z') \right], \quad (23.13)$$

причем

$$\eta' = \eta_{n=0} = 1 + \frac{n'}{g}, \quad z' = z_{n=0} = gx^2 \sin^2 \theta.$$

Это выражение содержит расходимость, которая не связана с магнитным полем и устраняется перенормировкой массы.

Исследуем более детально слабое магнитное поле  $H \ll H_0$  ( $g \gg 1$ ). В этом случае оказывается удобным заменить сумму по квантовому числу  $n'$  в (23.12) и (23.13) интегралом с помощью введения дельта-функции:

$$\sum_{n'=0}^{\infty} f_{n'}(n') = \sum_{n'=-\infty}^{+\infty} \int f_{n'}(x) \delta(x - n') dx, \quad (23.14)$$

поскольку суммы с функциями Лагерра легко берутся:

$$\sum_{n'=0}^{\infty} I_{n, n'}^2(x) e^{-in'\varphi} = e^{-i(n\varphi + x \sin \varphi)} I_{n, n} \left( 4x \sin^2 \frac{\varphi}{2} \right). \quad (23.15)$$

С помощью этих соотношений получим

$$f(n, g) = \\ = \frac{4g}{\pi} \int_0^{\infty} x dx \int_0^{\pi/2} \sin \theta d\theta \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\lambda e^{i\lambda \xi}}{(\sqrt{1 + \xi + x^2} + x)^2 - 1} F, \quad (23.16)$$

где функция  $F$  имеет вид:

1) при  $n \neq 0$

$$F = \frac{y Q_{n-1}^1(y)}{n!} e^{-\Phi} \left\{ 1 + \frac{\xi + 2x^2 \sin^2 \theta}{x \sin^2 \theta \sqrt{1 + \xi + x^2}} \right\}, \quad (23.17)$$

$Q_n^1$  — полином Лагерра,

$$y = 4(n + g)x^2 \sin^2 \theta \sin^2 \frac{\lambda}{2(n + g)}, \quad (23.18)$$

$$\Phi = 2(n + g)x^2 \sin^2 \theta \left\{ \sin^2 \frac{\lambda}{2(n + g)} + \frac{i}{2} \left( \sin \frac{\lambda}{n + g} - \frac{\lambda}{n + g} \right) \right\}; \quad (23.19)$$

2) при  $n=0$ ,  $\Phi = \Phi_0$  (регуляризованное выражение)

$$F = \left( 2 + \frac{\xi + 3x^2 \sin^2 \theta}{x \sin^2 \theta \sqrt{1 + \xi + x^2}} \right) (1 - e^{-\Phi_0}) + \frac{x}{\sqrt{1 + \xi + x^2}} \left( 1 - e^{-\Phi_0 - i \frac{\lambda}{g}} \right), \quad (23.20)$$

причем  $\Phi_0$  определяется выражением (23.19), если в нем положить  $n=0$ .

**в) Случай малых  $n$ .** Рассмотрим далее область не слишком высоких значений энергии:

$$n \ll g, \quad \text{т. е.} \quad v \ll c.$$

Разлагая в (23.17) и (23.20) по величинам  $n + g \gg 1$ ,  $g \gg 1$ , причем  $n \ll g$ , получаем

$$\begin{aligned} \Delta\mu &= -\frac{\alpha}{2\pi} \mu_0 f(n, g), \\ f(n, g) &= 1 - \frac{7}{3g^2} \left( \ln g - \frac{576 \ln 2 - 83}{420} \right), \\ f(0, g) &= 1 - \frac{1}{g} \left( \frac{4}{3} \ln g - \frac{13}{18} \right). \end{aligned} \quad (23.21)$$

Из этих формул следует, что нелинейные поправки и величина аномального момента наиболее заметны в «основном» состоянии электрона ( $n=0$ ).

В возбужденном состоянии ( $n \neq 0$ ) поправки по полю имеют квадратично-логарифмический характер и не зависят от энергии электрона.

Таким образом, выводы Швингера о величине магнитного момента электрона получают обобщение на случай возбужденных состояний, однако при релятивистских энергиях этот вывод требует существенного уточнения.

**г) Случай больших  $n$ .** Исследуем поведение функции  $f(n, g)$  в другом крайнем случае, когда

$$n/g = (E/m_0 c^2)^2 = 1/(1 - \beta^2) \gg 1,$$

однако при этом мы предполагаем, что  $g = H_0/2H \gg 1$ . Здесь необходимо вернуться к исходной формуле (23.12). Основной вклад при  $n \gg g \gg 1$  будут давать переходы на большие промежуточные уровни  $n' \gg 1$ , поэтому вместо суммирования по  $n'$  можно перейти к интегрированию по переменной  $u = (\sqrt{n} - \sqrt{n'})/\sqrt{n'}$ , т. е.

$$n' = \frac{n}{(1+u)^2}, \quad dn' = -\frac{2n du}{(1+u)^3}. \quad (23.22)$$

Подынтегральное выражение в (23.12) имеет полюс при  $x = x_p + i\varepsilon$  (где  $\varepsilon$  — бесконечно малая величина). Значение  $x_p$  с учетом того, что  $\cos^2 \theta \sim g/n \ll 1$ , легко находится:

$$x_p = \frac{u}{1+u} - \frac{1}{2(1+u)} \left[ u^2 \cos^2 \theta + \frac{g}{n} ((1+u)^2 - 1) \right]. \quad (23.23)$$

Поскольку основной вклад в интеграл дает область вблизи полюса (23.23), то для функций Лагерра  $I_n, n'(z)$  и  $I_{n-1}, n'_{-1}(z)$ , зависящих от аргумента

$$z \sim z(x_p) = n \left( \frac{u}{1+u} \right)^2 \left\{ 1 - \left( \frac{g}{n} + \cos^2 \theta \right) (1+u) \right\}, \quad (23.24)$$

применима аппроксимация через функции  $K_{1/3}$  и  $K_{2/3}$ , полученная ранее (см. (21.26), (21.30)). Выполняя интегрирование по углам  $\theta$  с помощью формулы (21.35), находим

$$f(n, g) = \frac{2\sqrt{3}}{\pi \xi_0} \int_0^\infty \frac{du u}{(1+u)^3} \int_0^\infty \frac{dx}{x - x_p - i\varepsilon} K_{1/3}(\tilde{y}), \quad (23.25)$$

где

$$\tilde{y} = y \left( 1 - 3 \frac{x - x_p}{u} \frac{n}{g} \right), \quad y = u/\xi_0,$$

( $\xi_0 = 3/4 \sqrt{n/g^3}$  — введенный ранее (21.12) характерный параметр синхротронного излучения).

Наконец, интегрирование по  $x$  проводим с учетом интегрального представления для функции  $K_{1/3}(y)$ :

$$K_{1/3}(y) = \frac{1}{y\sqrt{3}} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \exp \left\{ i \left( x + \frac{4x^3}{27y^2} \right) \right\}, \quad (23.26)$$

а также соотношения

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\lambda}{\lambda + i\varepsilon} f(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\lambda}{\lambda} f(\lambda) - i\pi \frac{e}{|\varepsilon|} f(0), \quad (23.27)$$

где первое, действительное, слагаемое в правой части равенства представляет собой интеграл в смысле главного значения. Учитывая, что действительная часть функции  $f(n, g)$  определяет энергию взаимодействия вакуумного момента с магнитным полем, а мнимая часть — интенсивность синхротронного излучения, находим

$$\operatorname{Re} f(n, g) = 2 \int_0^\infty \frac{du}{(1+u)^3} \int_0^\infty dt \sin \left( t + \frac{4\xi_0^2}{27u^2} t^3 \right). \quad (23.28)$$

Рассмотрим зависимость  $\Delta\mu$  от  $\xi_0$ , используя интегралы

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{p-1} dx}{(1+x)^{p+r}} = \frac{\Gamma(p)\Gamma(r)}{\Gamma(p+r)},$$

$$\int_0^{\infty} x^{p-1} \sin x dx = \Gamma(p) \sin \frac{\pi p}{2}.$$
(23.29)

Тогда для величины аномального магнитного момента получим

$$\frac{\Delta\mu}{\mu_0} = -\frac{\alpha}{2\pi} \operatorname{Re} f(n, g) =$$

$$= \begin{cases} -\frac{\alpha}{2\pi}; & \xi_0 \ll 1 \quad (\text{квазиквантовый} \\ & \text{случай}), \\ \frac{-\alpha\Gamma(1/3)}{9\sqrt{3}(2\xi_0)^{2/3}}; & \xi_0 \gg 1 \quad (\text{ультраквантовый} \\ & \text{случай}). \end{cases}$$
(23.30)

Впервые случай  $n \gg g^3$ , т. е.  $\xi_0 \gg 1$ , был рассмотрен Терновым, Багровым и др. [25]. В дальнейшем численный коэффициент был уточнен в работе Ритуса, а также Байера и др. [26]. Итак, если энергия электрона удовлетворяет критерию

$$E \gg E_{\text{кр}} = m_0 c^2 \frac{H_0}{H},$$
(23.31)

то величина аномального момента электрона резко убывает с энергией:

$$\frac{\Delta\mu}{\mu_0} = -\frac{\alpha}{2\pi} \frac{2\pi\Gamma(1/3)}{9\sqrt{3}(2\xi_0)^{2/3}}.$$
(23.32)

Таким образом, вакуумный магнитный момент электрона является сложной функцией напряженности магнитного поля и энергии частицы. В заключение заметим, что случай сильного ( $H \sim H_0$ ) и сверхсильного магнитного поля ( $H \gg H_0$ ) требует особого рассмотрения [21].

## § 24. РАССЕЙАНИЕ ЭЛЕКТРОНОМ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ПЛОСКОЙ ВОЛНЫ, ПОЛЯРИЗОВАННОЙ ПО КРУГУ

**а) Нелинейная классическая теория.** Начало развития квантовой теории излучения заряда, движущегося в электромагнитном поле плоской волны, было положено известной работой Клейна и Нишины, в которой было рассмотрено рассеяние фотона на покоящемся электроне. При этом была получена формула изменения частоты рассеянного фотона в релятивистском обобщении (эффект Комптона). В последующих работах были

детально изучены свойства рассеянных фотонов. В частности, рассматривалась зависимость сечения рассеяния одиночного фотона от его поляризации, а также от ориентации спина электрона [27, 28].

До недавнего времени отсутствовали источники мощных электромагнитных волн, поэтому изучение роли интенсивности волны в процессе рассеяния было ограниченным. Тем не менее, в [29] была рассмотрена задача о взаимодействии электрона с электромагнитной волной высокой интенсивности и было установлено, что при некоторых условиях формулы сечения рассеяния существенно зависят от интенсивности электромагнитной волны.

В связи с развитием лазерной техники и получением мощных пучков монохроматического излучения в последние годы возник интерес к процессам, происходящим в электромагнитной волне высокой интенсивности. Результаты [29] получили дальнейшее развитие в [30—33].

Некоторые важные особенности излучения электрона при его движении в поле плоской электромагнитной волны были установлены в работах [34, 35]. В частности, с помощью ковариантных операторов удалось детально проследить роль спина электрона в процессах рассеяния в поле линейно поляризованной волны, а также выявить глубокую аналогию рассматриваемой задачи с синхротронным излучением. Эта аналогия имеет место и в классической и в квантовой теории и открывает путь к новому пониманию физического содержания явления.

Рассмотрим сейчас задачу об излучении электрона, движущегося в поле плоской электромагнитной циркулярно поляризованной волны, когда вектор-потенциал можно представить в виде (см. (8.95))

$$\mathbf{A} = -\frac{cE_0}{\omega_0} (\mathbf{e}_1 \sin \omega_0 \xi - \mathbf{e}_2 g \cos \omega_0 \xi). \quad (24.1)$$

Волна распространяется вдоль оси  $z$ ,  $\xi = t - z/c$ ,  $g$  характеризует правую ( $g = 1$ ) и левую ( $g = -1$ ) круговую поляризацию [36].

**б) Теория рассеяния.** В поле поляризованной по кругу электромагнитной волны электрон движется по спирали (см. (8.114)), имея постоянную скорость вдоль направления распространения волны

$$v_{\parallel} = c\beta_{\parallel} = c \frac{1 + \gamma^2 - \alpha^2}{1 + \gamma^2 + \alpha^2}, \quad (24.2)$$

где  $\gamma = e_0 E_0 / m_0 c \omega_0$ ,  $\alpha = (E - cp_3) / m_0 c^2$  — интеграл движения,  $E$  — полная энергия электрона,  $p_3$  — импульс вдоль оси  $z$ . При этом в плоскости, перпендикулярной к направлению распространения



волны (плоскость  $xy$ ), электрон движется по окружности радиуса  $R^*$ ), равного

$$R = e_0 E_0 / m_0 \alpha \omega_0^2. \quad (24.3)$$

Таким образом, уравнения движения частицы имеют вид

$$\begin{aligned} x &= R \cos \omega_0 \xi = R \cos \omega t, & y &= R \sin \omega_0 \xi = R \sin \omega t, \\ z &= \frac{c}{2\alpha^2} (1 + \gamma^2 - \alpha^2) \xi = v_{\parallel} t, & t &= \frac{1}{2\alpha^2} (1 + \gamma^2 + \alpha^2) \xi, \end{aligned} \quad (24.4)$$

где  $\omega = \omega_0 (1 - \beta_{\parallel})$ .

Рассмотрим излучение движущегося электрона методами классической теории (см. § 10). Тогда для мощности излучения, т. е. для энергии, излучаемой зарядом в 1 сек, мы получаем аналог формулы Шотта для случая движения заряда по винтовой траектории (см. формулы (10.43) и (10.72)):

$$\begin{aligned} W &= \frac{ce_0^2}{R^2} \beta_0^2 \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu^2 \int_0^{\pi} (1 + \beta_{\parallel} \cos \theta_0) \sin \theta_0 d\theta_0 \times \\ &\times \{l_{\sigma} \beta_0 J'_{\nu}(\nu \beta_0 \sin \theta_0) - g l_{\pi} \operatorname{ctg} \theta_0 J_{\nu}(\nu \beta_0 \sin \theta_0)\}^2. \end{aligned} \quad (24.5)$$

Эта формула учитывает поляризационные свойства излучения: при  $l_{\sigma} = 1$ ,  $l_{\pi} = 0$  мы, как и обычно, получим  $\sigma$ -компоненту линейной поляризации, а при  $l_{\sigma} = 0$ ,  $l_{\pi} = 1$  —  $\pi$ -компоненту. Для анализа круговой поляризации следует положить  $l_{\sigma} = l_{\pi} = 1/\sqrt{2}$  (правая) или  $l_{\sigma} = -l_{\pi} = 1/\sqrt{2}$  (левая). Величина  $\beta_0$ , входящая в формулу (24.5), пропорциональна напряженности электрического поля волны (см. (10.72)):

$$\beta_0 = \gamma / \sqrt{1 + \gamma^2}, \quad \gamma = e_0 E_0 / m_0 \omega_0 c. \quad (24.6)$$

В случае отсутствия движения частицы вдоль оси  $z$  ( $\beta_{\parallel} = 0$ ), т. е. при чисто круговом движении  $\beta_0 = \omega_0 R / c$ . Угол  $\theta_0$  связан с обычным сферическим углом  $\theta$  преобразованиями Лоренца:

$$\cos \theta_0 = \frac{\cos \theta - \beta_{\parallel}}{1 - \beta_{\parallel} \cos \theta}, \quad \sin \theta_0 = \frac{\sqrt{1 - \beta_{\parallel}^2} \sin \theta}{1 - \beta_{\parallel} \cos \theta}. \quad (24.7)$$

И, наконец, частота излучения  $\omega_{\nu}$  связана с частотой падающей волны  $\omega_0$  соотношением

$$\omega_{\nu} = \frac{(1 - \beta_{\parallel}) \nu \omega_0}{1 - \beta_{\parallel} \cos \theta} = \frac{1 + \beta_{\parallel} \cos \theta_0}{1 + \beta_{\parallel}} \nu \omega_0. \quad (24.8)$$

\* В случае линейно поляризованной волны движение в плоскости, перпендикулярной к направлению распространения волны, существенно отличается от окружности.

Интегрируя по телесному углу и суммируя по номеру гармоники  $\nu$ , получаем выражение для полной мощности излучения

$$W_{\sigma} = \frac{6 + \beta_0^2}{8} W^{\text{кл}}, \quad W_{\pi} = \frac{2 - \beta_0^2}{8} W^{\text{кл}}, \quad (24.9)$$

где (см. также (10.73))

$$W^{\text{кл}} = \frac{2}{3} \frac{e_0^4 \alpha^2 E_0^2}{m_0^2 c^3} = \frac{2}{3} \frac{e_0^2 c}{R^2} \gamma^4. \quad (24.10)$$

Определим полное сечение рассеяния  $\sigma$  как отношение мощности излучения к величине падающего потока энергии плоской волны:

$$\sigma = \frac{W}{|\mathcal{E}|}, \quad |\mathcal{E}| = \left| \frac{c}{4\pi} [\mathbf{E}\mathbf{H}] \right| = \frac{cE_0^2}{4\pi}. \quad (24.11)$$

В дальнейшем изложении мы ограничиваемся случаем чисто кругового движения, когда  $\beta_{\parallel} = 0$ . Тогда

$$\beta_0 = \gamma / \sqrt{1 + \gamma^2}, \quad R = \gamma c / \omega_0 \sqrt{1 + \gamma^2}. \quad (24.12)$$

Суммируя (24.9) по состояниям линейной поляризации, находим

$$W = \frac{2}{3} \frac{e_0^2 \omega_0^2}{c} \gamma^2 (1 + \gamma^2). \quad (24.13)$$

При этом для полного сечения рассеяния мы получаем обобщенные формулы Томсона\*):

$$\sigma = \frac{8\pi r_0^2}{3} (1 + \gamma^2), \quad r_0 = \frac{e_0^2}{m_0 c^2}. \quad (24.14)$$

В случае очень слабого поля электромагнитной волны ( $\gamma \ll \ll 1$ ) формула (24.14) переходит в классическую формулу Томсона

$$\sigma = \sigma^T = 8\pi r_0^2 / 3. \quad (24.15)$$

Для более детального анализа роли интенсивности падающей волны введено парциальное дифференциальное сечение рассеяния, характеризуемое номером гармоники  $\nu$ . В случае чисто кругового движения имеем

$$\frac{d\sigma_{\nu}}{d\Omega} = \frac{dW_{\nu}}{d\Omega \mathcal{E}} = \frac{2r_0^2 \nu^2}{\gamma^2} \{ \beta_0^2 J_{\nu}^2(\nu\beta_0 \sin \theta) + \text{ctg}^2 \theta J_{\nu}^2(\nu\beta_0 \sin \theta) \}. \quad (24.16)$$

\*) Формула (24.14) имеет место в предположении малости эффективного сечения ( $\sigma \ll \lambda^2 = 4\pi^2 c^2 / \omega_0^2$ ), т. е. без учета реакции излучения. В противном случае необходимо использовать теорию затухания (см. [37—39]).

Рассматривая теперь случай слабого поля электромагнитной волны:

$$\beta_0 = \frac{\gamma}{\sqrt{1+\gamma^2}} \sim \gamma = \frac{e_0 E_0}{m_0 c \omega_0} \ll 1, \quad (24.17)$$

мы приходим к аналогу нерелятивистского приближения теории синхротронного излучения. Исходя из асимптотического поведения бесселевых функций при малом значении аргумента  $x$ :

$$J_\nu(x) \approx (x/2)^\nu / \nu! \quad (24.18)$$

получаем

$$\frac{d\sigma_\nu}{d\Omega} = \frac{r_0^2}{2} (1 + \cos^2 \theta) \nu^2 \frac{(\nu \gamma \sin \theta)^{2(\nu-1)}}{[(\nu-1)!]^2}. \quad (24.19)$$

При  $\nu = 1$  следует формула Томсона. Это соответствует общим выводам теории синхротронного излучения: максимум интенсивности излучения нерелятивистского электрона падает на основной тон  $\nu = 1$ . Излучение более высоких гармоник убывает как

$$\beta_0^{2\nu} \approx \gamma^{2\nu}, \quad \gamma \ll 1.$$

Положение изменяется в случае сильного поля, когда  $\gamma \gg 1$ . Тогда, как это следует из общей теории синхротронного излучения (см. (10.52)), максимум излучения ультрарелятивистского электрона:

$$\beta_0 = \frac{\gamma}{\sqrt{1+\gamma^2}} \approx 1 - \frac{1}{2\gamma^2} \rightarrow 1, \quad \gamma \gg 1, \quad (24.20)$$

падает на высокие гармоники:

$$\nu \approx (1 - \beta_0^2)^{-3/2} \sim \gamma^3.$$

Поэтому роль интенсивности падающей плоской волны становится существенной. Этот вывод является следствием классической теории и не связан с учетом квантовых поправок \*). В этом случае максимум сечения приходится на гармонику

$$\nu \approx (e_0 E_0 / m_0 c \omega_0)^3.$$

Найдем, наконец, полное сечение рассеяния. Интегрируя формулу (24.16) по телесному углу  $d\Omega$ , находим парциальное сечение рассеяния

$$\sigma_\nu = \frac{4\pi r_0^2}{\gamma^2} \nu^2 \int_0^\pi \{ \beta_0^2 J_\nu^2(\nu \beta_0 \sin \theta) + \text{ctg}^2 \theta J_\nu^2(\nu \beta_0 \sin \theta) \} \sin \theta d\theta. \quad (24.21)$$

\*) К аналогичному выводу авторы работ [30, 31] приходят из соображений квантовой теории.

При этом полное сечение можно получить суммированием по номеру гармоники  $\nu$ :

$$\sigma = \sum_{\nu=1}^{\infty} \sigma_{\nu}. \quad (24.22)$$

В случае слабого поля, когда  $\gamma \ll 1$ , в сумме (24.22) достаточно ограничиться членом с  $\nu = 1$ . Тогда мы приходим к формуле Томсона  $\sigma = \sigma_T$  (см. (24.15)). В другом крайнем случае, когда  $\gamma \gg 1$ , следует применить аппроксимацию функций Бесселя, так же как в теории синхротронного излучения (см. (10.102), (10.104)):

$$\begin{aligned} J_{\nu}(\nu\beta_0 \sin \theta) &= \frac{\sqrt{\varepsilon}}{\pi\sqrt{3}} K_{1/2} \left( \frac{\nu}{3} \varepsilon^{1/2} \right), \\ J'_{\nu}(\nu\beta_0 \sin \theta) &= \frac{\varepsilon}{\pi\sqrt{3}} K_{3/2} \left( \frac{\nu}{3} \varepsilon^{1/2} \right), \\ \varepsilon &= 1 - \beta_0^2 \sin^2 \theta. \end{aligned} \quad (24.23)$$

Производя интегрирование по углу  $\theta$  (см. (10.117), (10.119) и (10.120)), а также заменяя суммирование по  $\nu$  интегрированием по переменной  $y$ , имеем

$$\begin{aligned} \sigma &= \int_0^{\infty} \sigma_{\nu} d\nu = \\ &= \frac{8\pi r_0^2}{3} (1 + \gamma^2) \int_0^{\infty} \varphi(y) dy \approx \frac{8\pi r_0^2}{3} \gamma^2 \int_0^{\infty} \varphi(y) dy, \quad \gamma \gg 1, \end{aligned} \quad (24.24)$$

где

$$\varphi(y) = \frac{9\sqrt{3}}{8\pi} y \int_y^{\infty} K_{5/2}(x) dx, \quad (24.25)$$

а переменная  $y$  связана с номером гармоники  $\nu$  соотношением

$$y = \frac{2\nu}{3} (1 - \beta_0^2)^{3/2}. \quad (24.26)$$

Интегрирование по переменной  $y$  в формуле (24.24) приводит к результату (24.14) в случае больших  $\gamma$ :

$$\sigma = \frac{8\pi r_0^2}{3} \gamma^2. \quad (24.27)$$

Таким образом, в случае больших значений интенсивности падающей волны полное сечение рассеяния зависит от напряженности электрического поля волны ( $\gamma = e_0 E_0 / m_0 c \omega_0$ ) и существенно отличается от томсоновского.

**в) Квантовая теория излучения.** Найдем мощность излучения электрона, движущегося в поле плоской электромагнитной волны, методами квантовой теории. Поступая по аналогии с теорией синхротронного излучения (см. (20.54)), с помощью точных волновых функций теории Дирака (см. (19.52)) находим для мощности излучения следующее выражение (просуммированное по состояниям поляризации фотонов и спина электрона):

$$W = \frac{ce_0^2\beta_0^2}{R^2} \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu^2 \int_0^{\pi} \frac{\sin \theta_0 d\theta_0 (1 + \beta_{\parallel} \cos \theta_0)}{[1 + \xi (1 - \cos \theta_0)]^4} S, \quad (24.28)$$

где

$$S = J_{\nu}^2 (\nu\beta_0 \sin \theta_0) \beta_0^2 \left[ 1 + \xi(1 - \cos \theta_0) + \frac{\xi^2}{2}(1 - \cos \theta_0)^2 \right] + \\ + J_{\nu}^2 (\nu\beta_0 \sin \theta_0) \left[ \text{ctg}^2 \theta_0 \left( 1 + \xi(1 - \cos \theta_0) + \frac{\xi^2}{2}(1 - \cos \theta_0)^2 \right) + \right. \\ \left. + (1 - \beta_0^2) \frac{\xi^2}{2}(1 - \cos \theta_0)^2 \right]. \quad (24.29)$$

Параметр  $\xi$  пропорционален постоянной Планка  $\hbar$

$$\xi = \frac{\hbar\nu\omega_0}{m_0c^2} \frac{\alpha}{1 + \gamma^2}. \quad (24.30)$$

Частота излучения отличается от классического выражения (24.8):

$$\omega' = \frac{(1 - \beta_{\parallel}) \nu\omega_0}{1 - \beta_{\parallel} \cos \theta + \xi(1 + \beta_{\parallel})(1 - \cos \theta)} = \frac{\omega^{\text{кл}}}{1 + \xi(1 - \cos \theta_0)}, \quad (24.31)$$

где

$$\omega^{\text{кл}} = \frac{1 + \beta_{\parallel} \cos \theta_0}{1 + \beta_{\parallel}} \nu\omega_0. \quad (24.32)$$

Этот вывод является общим следствием квантовой теории рассеяния света на электроне (комpton-эффект, см., например, [4]) \*). В случае перехода к классической теории ( $\hbar \rightarrow 0$ ) параметр  $\xi$  следует устремить к нулю, и тогда мы возвращаемся к полученным ранее результатам (см. (24.5)).

С целью упрощения дальнейшего рассмотрения задачи ограничимся чисто круговым движением электрона, когда  $\beta_{\parallel} = 0$ . При этом

$$\theta_0 = \theta, \quad \omega^{\text{кл}} = \nu\omega_0, \quad \xi = \frac{\hbar\nu\omega_0}{m_0c^2} \frac{1}{\sqrt{1 + \gamma^2}}, \quad (24.33)$$

или

$$\xi = \frac{\nu\omega_0 - \omega'}{(1 - \cos \theta) \omega'}.$$

\*) Заметим, что обычная формула комpton-эффекта получается из (24.31) при  $\nu = 1$ ,  $\gamma = 0$ ,  $\beta_{\parallel} = 0$ .

Выражая все величины в формуле (24.28) через частоту излучения фотонов электроном  $\omega'$  (см. (24.31)), получим [35] при  $\beta_{||} = 0$ :

$$\frac{dW}{d\Omega} = \frac{e_0^2 \omega_0^2}{2\pi c} \sum_{\nu=1}^{\infty} \left( \frac{\omega'}{\nu \omega_0} \right)^4 \nu^2 S, \quad (24.34)$$

где

$$S = \frac{1}{2} \left\{ \left( 1 + \frac{\nu^2 \omega_0^2}{\omega'^2} \right) \left[ \beta_0^2 J_{\nu}^{\prime 2}(\nu \beta_0 \sin \theta) + \operatorname{ctg}^2 \theta J_{\nu}^2(\nu \beta_0 \sin \theta) \right] + \right. \\ \left. + (1 - \beta_0^2) \left( 1 - \frac{\nu \omega_0}{\omega'} \right)^2 J_{\nu}^2(\nu \beta_0 \sin \theta) \right\}. \quad (24.35)$$

Для дальнейшего анализа полученных результатов нам необходимо ввести понятие дифференциального парциального сечения процесса рассеяния в случае квантовой теории. Определим парциальное эффективное сечение как отношение вероятности квантового перехода в 1 секунду с излучением кванта гармоник  $\nu$  к плотности падающего потока, отвечающего поглощению энергии  $\hbar \nu \omega_0$  гармоник  $\nu$ :

$$d\sigma_{\nu} = \frac{d\omega_{\nu}}{N} = \frac{dW_{\nu}}{\hbar \omega' N}, \quad N = \frac{c E_0^2}{4\pi} \frac{1}{\hbar \nu \omega_0}. \quad (24.36)$$

Тогда имеем

$$\frac{d\sigma_{\nu}}{d\Omega} = \frac{4\pi}{c E_0^2} \left( \frac{\nu \omega_0}{\omega'} \right) \frac{dW_{\nu}}{d\Omega}. \quad (24.37)$$

Заметим, что при переходе к классической теории ( $\hbar \rightarrow 0$ )  $\omega' = \nu \omega_0$ , и мы получаем ранее приведенный результат (см. формулу (24.16)). Формула для дифференциального парциального сечения рассеяния, таким образом, получает следующее выражение:

$$\frac{d\sigma_{\nu}}{d\Omega} = \frac{e_0^2 \omega_0^2}{c^2 E_0^2} \left( \frac{\omega'}{\nu \omega_0} \right)^3 \nu^2 S_{\nu}, \quad (24.38)$$

где  $S_{\nu}$  определено соотношением

$$S_{\nu} = \left( 1 + \frac{\nu^2 \omega_0^2}{\omega'^2} \right) \left\{ \beta_0^2 J_{\nu}^{\prime 2}(\nu \beta_0 \sin \theta) + \operatorname{ctg}^2 \theta J_{\nu}^2(\nu \beta_0 \sin \theta) \right\} + \\ + \left( 1 - \frac{\nu \omega_0}{\omega'} \right)^2 (1 - \beta_0^2) J_{\nu}^2(\nu \beta_0 \sin \theta). \quad (24.39)$$

Рассмотрим частный случай слабого поля электромагнитной волны, когда  $\gamma \ll 1$ . При этом можно применить аппроксимацию функций Бесселя в виде (24.18). Это приводит к формуле

$$\frac{d\sigma_{\nu}}{d\Omega} = \frac{r_0^2}{2} \left( \frac{\omega'}{\nu \omega_0} \right)^2 \left\{ \frac{\nu \omega_0}{\omega'} + \frac{\omega'}{\nu \omega_0} - \sin^2 \theta \right\} \nu^2 \frac{(\nu \gamma \sin \theta)^{2(\nu-1)}}{[(\nu-1)!]^2}. \quad (24.40)$$

Поскольку  $\beta_0 \approx \gamma \ll 1$ , все гармоники с  $\nu > 1$  сильно подавлены, а для основного тона  $\nu = 1$  мы получаем формулу Клейна — Нишины в виде [35]

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{r_0^2}{2} \left( \frac{\omega'}{\omega_0} \right)^2 \left\{ \frac{\omega_0}{\omega'} + \frac{\omega'}{\omega_0} - \sin^2 \theta \right\}. \quad (24.41)$$

В другом крайнем случае больших значений напряженности поля ( $\gamma \gg 1$ ) формулы для интенсивности излучения (24.28), (24.29) могут быть упрощены, если использовать аппроксимации для функций Бесселя (24.23). Тогда после интегрирования по углу  $\theta$  мы приходим к выражению

$$W = W_{\text{кл}} \frac{9\sqrt{3}}{8\pi} \int_0^\infty \frac{y dy}{(1 + \xi_0 y)^4} \cdot S(y), \quad (24.42)$$

где

$$S(y) = (2 + 2\xi_0 y + \xi_0^2 y^2) K_{2/3}(y) - (1 + \xi_0 y) \int_y^\infty K_{1/3}(x) dx. \quad (24.43)$$

При этом мы перешли от суммы по  $\nu$  к интегралу по  $y = 2/3 \nu \gamma^{-3}$  и ввели новый параметр

$$\xi_0 = \frac{3}{2} \gamma \frac{E_\delta}{H_0} = \frac{3}{2} \frac{E_0}{H_0} \sqrt{\left( \frac{E}{m_0 c^2} \right)^2 - 1} = \frac{3}{2} \frac{E}{m_0 c^2} \frac{E_0}{H_0} \quad (24.44)$$

при

$$\frac{E}{m_0 c^2} \gg 1.$$

Заметим, что в этом приближении теория излучения в точности совпадает с излучением ультрарелятивистского электрона в однородном магнитном поле (см. § 21). Отсюда легко получить эффективное сечение для рассеяния:

$$\sigma = \frac{8\pi r_0^2}{3} \gamma^2 \int_0^\infty \Phi(y) dy, \quad (24.45)$$

где

$$\Phi(y) = \frac{9\sqrt{3}}{8\pi} \frac{y}{(1 + \xi_0 y)^4} \left\{ (2 + 2\xi_0 y + \xi_0^2 y^2) K_{2/3}(y) - (1 + \xi_0 y) \int_y^\infty K_{1/3}(x) dx \right\}. \quad (24.46)$$

В частном случае классического приближения  $\xi_0 = 0$  эта формула переходит в (24.25).

Заметим, что аналогия излучения электрона в поле плоской электромагнитной волны и синхротронного излучения обуслов-

лена одинаковым характером движения электрона в обеих задачах: и в том и в другом случае электрон движется по окружности (или по винтовой линии), имея постоянную составляющую скорости в направлении оси  $z$ .

### § 25. ВЫНУЖДЕННЫЕ ПЕРЕХОДЫ В ТЕОРИИ СИНХРОТРОННОГО ИЗЛУЧЕНИЯ

**а) Общие формулы.** Рассмотрим вынужденное излучение электрона, движущегося в постоянном и однородном магнитном поле.

Вероятность вынужденных переходов из состояния с энергией  $E_n$  в состояние  $E_{n'}$  определяется выражением [4]

$$\omega_{nn'} = \frac{2\pi e_0^2 c N(\mathbf{x})}{\hbar L^3 \kappa} \{(\bar{\mathbf{a}}^* \bar{\mathbf{a}}) - (\bar{\mathbf{a}}^* \mathbf{x}^0)(\bar{\mathbf{a}} \mathbf{x}^0)\} \frac{\partial}{\partial t} \left| \int_0^t e^{-i\kappa t (\kappa_{nn'} \mp \kappa)} dt \right|^2, \quad (25.1)$$

причем знак минус перед  $\kappa$  соответствует вынужденному излучению, а плюс — поглощению. В формуле (25.1)

$$\omega_{nn'} = c \kappa_{nn'} = \frac{E_n - E_{n'}}{\hbar}$$

— частота излучения,  $N(\mathbf{x})$  — число падающих квантов внешней электромагнитной волны с импульсом  $\hbar \mathbf{x} = \hbar \kappa \mathbf{x}^0$ .

Если электрон в начальном состоянии обладает конечным временем жизни  $\tau$ , то в формуле (25.1) интеграл по времени следует заменить согласно

$$\frac{\partial}{\partial t} \left| \int_0^t e^{-i\kappa t (\kappa_{nn'} \mp \kappa)} dt \right|^2 \rightarrow \frac{\left| \int_0^t e^{-i\kappa t (\kappa_{nn'} \mp \kappa) - \frac{t}{2\tau}} dt \right|^2}{\tau} = \frac{4\tau}{4c^2 \tau^2 (|\kappa_{nn'}| - \kappa)^2 + 1}. \quad (25.2)$$

Последний интеграл взят в предположении, что  $t \gg \tau$ . В предельном случае больших значений  $\tau$  правая часть равенства (25.2) обращается в дельта-функцию.

Число фотонов  $N(\mathbf{x})$  в объеме  $L^3$  связано с вектором электрической напряженности  $\mathbf{E}$  внешней электромагнитной волны при помощи соотношения

$$\mathbf{E}^2/4\pi = \hbar c \kappa N(\mathbf{x})/L^3, \quad (25.3)$$

поскольку левая и правая части этого равенства определяют энергию поля в единице объема.



Если внешняя электромагнитная волна распространяется под углом  $\theta$  к оси  $z$ , то выражение (25.1) мы можем привести к виду

$$\omega_{nn'} = \frac{e_0^2 E^2}{\hbar^2 \kappa^2} (|\bar{\alpha}_1|^2 + \cos^2 \theta |\bar{\alpha}_2|^2) \frac{2\tau}{4c^2 \tau^2 (|\kappa_{nn'} - \kappa|^2 + 1)}, \quad (25.4)$$

причем матричные элементы определяются выражением

$$\bar{\alpha}_\mu = \int \psi_n^+ e^{-i\kappa r} \alpha_\mu \psi_n d^3x. \quad (25.5)$$

Рассматривая плоское движение ( $k_3 = 0$ ) согласно (19.60) для энергии будем иметь следующее выражение:

$$E_n = c\hbar K_n = c\hbar \sqrt{k_0^2 + 4\gamma n}, \quad (25.6)$$

где

$$\gamma = e_0 H / 2c\hbar, \quad \rho = \gamma r^2.$$

В дальнейшем рассмотрим слабо релятивистский случай, когда мы можем ограничиться лишь членами порядка  $\beta^2$ . Тогда для энергии электрона находим выражение

$$K \approx k_0 + n \frac{\Omega}{c} \left[ 1 - n \frac{\hbar \Omega}{2m_0 c^2} \right], \quad (25.7)$$

где  $\Omega = e_0 H / m_0 c$  — циклотронная частота, а при вычислении матричных элементов (25.5) можно ограничиться дипольным приближением ( $e^{-i\kappa r} \approx 1$ ). Тогда матричные элементы (25.5) становятся равными

$$\bar{\alpha}_\mu = \frac{1}{2\gamma} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\infty d\rho \psi_{n's'}^+ (\rho, \varphi) \alpha_\mu \psi_{ns} (\rho, \varphi). \quad (25.8)$$

Волновые функции согласно (19.53), (19.65) и (19.73) в слабо релятивистском случае мы можем представить в виде

$$\psi_{ns} (\rho, \varphi) = \sqrt{\frac{\gamma}{\pi}} \begin{pmatrix} 0 \\ ie^{i\varphi} J_{n,s}(\rho) \\ \frac{\sqrt{\gamma n}}{k_0} e^{i(l-1)\varphi} J_{n-1,s}(\rho) \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (25.9)$$

При выводе выражения (25.9) мы в равенстве (19.73) положили  $K = k_0$ ,  $D_1 = 0$ ,  $D_{-1} = 1$ . Вообще говоря, если пренебрегать спиновыми эффектами, то на коэффициенты  $D_1$  и  $D_{-1}$  можно наложить любые условия, лишь бы выполнялось соотношение

$$|D_1|^2 + |D_{-1}|^2 = 1. \quad (25.10)$$

Учитывая условие ортогональности

$$\delta_{ll'} \int_0^{\infty} d\rho I_{n', s'}(\rho) I_{n, s}(\rho) = \delta_{nn'} \delta_{ll'}, \quad (25.11)$$

с помощью (25.9) и (25.8) для матричных элементов, входящих в равенство (25.4), легко найти следующее выражение:

$$|\bar{\alpha}_1|^2 = |\bar{\alpha}_2|^2 = \frac{\hbar\Omega}{2m_0c^2} ((n+1)\delta_{n', n+1} + n\delta_{n', n-1}) \delta_{ss'}, \quad (25.12)$$

т. е. в дипольном приближении возможны следующие переходы:

1) переход с излучением ( $n \rightarrow n-1, s \rightarrow s$ ):

$$\kappa_{n, n-1} = \frac{E_n - E_{n-1}}{\hbar c} = \frac{\Omega}{c} \left( 1 - \frac{\hbar\Omega}{2m_0c^2} (2n-1) \right); \quad (25.13)$$

2) переход с поглощением ( $n \rightarrow n+1, s \rightarrow s$ ):

$$|\kappa_{n, n+1}| = \frac{|E_n - E_{n+1}|}{\hbar c} = \frac{\Omega}{c} \left( 1 - \frac{\hbar\Omega}{2m_0c^2} (2n+1) \right). \quad (25.14)$$

Весьма существенным является тот факт, что эти частоты не равны друг другу, т. е. благодаря учету релятивистских поправок уровни становятся не эквидистантными. Поэтому если одну из частот, например  $\kappa_{n, n-1}$ , положим приближенно равной  $\Omega/c$ :

$$\kappa_{n, n-1} \approx \Omega/c, \quad (25.15)$$

то другая будет равна

$$|\kappa_{n, n+1}| = \Omega/c - \Omega_1/c, \quad (25.16)$$

где  $\Omega_1 = \hbar\Omega^2/m_0c^2$ .

Для суммарной энергии вынужденного излучения и поглощения имеем следующую формулу:

$$\begin{aligned} W &= \hbar c (\kappa_{n, n-1} \omega_{n, n-1} - |\kappa_{n, n+1}| \omega_{n, n+1}) = \\ &= \frac{e_0^2 E^2 \Omega^2 \tau (1 + \cos^2 \theta)}{m_0 \omega^2} \left( \frac{n}{4\tau^2 (\Omega - \omega)^2 + 1} - \frac{(n+1) \left( 1 - \frac{\Omega_1}{\Omega} \right)}{4\tau^2 (\Omega - \Omega_1 - \omega)^2 + 1} \right). \end{aligned} \quad (25.17)$$

Отсюда видно, что если уровни были бы эквидистантными ( $\Omega_1 = 0$ ), то наша система всегда бы поглощала электромагнитное излучение ( $W < 0$ ). Однако благодаря тому, что  $\Omega_1 \neq 0$ , выражение (25.17) может стать положительной величиной.

Ограничиваясь в (25.17) линейными относительно  $\Omega_1$  членами, найдем

$$W = - \frac{e_0^2 E^2 \Omega^2 \tau (1 + \cos^2 \theta)}{m_0 \omega^2 (1 + x^2)} \left[ 1 + \beta^2 \frac{2\tau\Omega x}{1 + x^2} \right], \quad (25.18)$$

где  $x = 2\pi(\Omega - \omega)$ . При выводе формулы (25.18) мы учли значение для радиуса орбиты  $R = m_0 v c / e_0 H = \sqrt{n/\gamma}$ , из которого следует, что

$$n\hbar\Omega = m_0 v^2 / 2. \quad (25.19)$$

Кроме того, по сравнению с единицей мы отбросили члены порядка  $\beta^2$  и выше.

Формула (25.18) была получена Шнейдером (см. [40], а также [5]). Из этой формулы видно, что при нарушении резонанса ( $\omega > \Omega$ ) второй член может стать величиной отрицательной и начать превалировать над первым. Тогда система станет источником излучения, т. е. образует своеобразный мазер ( $W > 0$ ). Эта идея легла в основу построения соответствующего прибора, который уже работает [41, 42].

Заметим, что в общем случае можно получить следующую формулу для суммарной энергии вынужденного поглощения и излучения на гармонике  $\nu$  (для  $\theta = \pi/2 \pm \Delta\theta$ ,  $\Delta\theta < m_0 c^2/E$ ) [43, 44]:

$$W_\nu = -\frac{e_0^2 E^2 \tau}{m_0} \frac{m_0 c^2}{E} \frac{4\nu J'_\nu(\nu\beta)}{1+x^2\nu^2} \times \left\{ \frac{(1-\beta^2)}{\beta} \frac{J_\nu(\nu\beta)}{J'_\nu(\nu\beta)} - \frac{3}{2\nu} \beta^2 + \beta^2 \frac{2\Omega_2 \tau \nu x}{1+x^2\nu^2} \right\}, \quad (25.20)$$

где частота

$$\Omega_2 = \Omega \frac{m_0 c^2}{E} = \frac{e_0 H c}{E}, \quad x = 2\pi \left( \Omega_2 - \frac{\omega}{\nu} \right).$$

В слабо релятивистском приближении ( $\beta \ll 1$ ,  $\beta^2 \neq 0$ ,  $\Omega_2 = \Omega$ ) выражение (25.20) мы можем привести к виду

$$W_\nu = -\frac{e_0^2 E^2 \tau}{m_0} \frac{\nu}{1+x^2\nu^2} \left( \frac{\nu\beta}{2} \right)^{2(\nu-1)} \frac{1}{((\nu-1)!)^2} \left( 1 + \beta^2 \frac{2\Omega_2 \tau \nu x}{1+\nu^2 x^2} \right). \quad (25.21)$$

При  $\nu = 1$  это выражение переходит в формулу Шнейдера (25.18) для случая  $\theta = \pi/2$ . Из (25.21) видно, что вынужденное излучение гармоник может превышать поглощение ( $W_\nu > 0$ ), так же как и для основного тона ( $\nu = 1$ ), только при нарушении резонанса ( $x < 0$ ), причем интенсивность излучения высшей гармоники относительно предыдущей имеет порядок  $\beta^2$ .

В ультрарелятивистском же приближении ( $\beta \rightarrow 1$ ) при условии

$$\nu \ll \frac{1}{(1-\beta^2)^{1/2}} = \nu_{\text{макс}}, \quad (25.22)$$

где  $\nu_{\text{макс}}$  — номер гармоники, соответствующей максимуму спонтанного излучения, становится возможным излучение гармоник даже в случае резонанса:

$$x = \Omega_2 - \omega/\nu = 0. \quad (25.23)$$

Тогда формула (25.20) для  $\sigma$ -компоненты принимает вид

$$W_{\nu} = \frac{(162)^{1/3} \Gamma^2(2/3)}{\pi^2} \frac{e_0^2 E^2 \tau}{\nu^{4/3} m_0} \frac{m_0 c^2}{E} \left( 1 - \frac{2^{3/4} \pi \nu^{1/3} (1 - \beta^2)}{3^{11/6} \Gamma^2(2/3)} \right). \quad (25.24)$$

Отсюда видно, что излучение будет превалировать над поглощением лишь для гармоник

$$\nu < 1/(1 - \beta^2)^{3/4} = \sqrt{\nu_{\text{макс}}}, \quad (25.25)$$

причем  $\pi$ -компонента всегда будет поглощаться.

Из формулы (25.24) следует, что интенсивность вынужденного излучения должна падать с увеличением  $\nu$ , обращаясь при  $\nu \sim \sqrt{\nu_{\text{макс}}}$  в нуль. В случае  $\nu > \sqrt{\nu_{\text{макс}}}$  система должна начать поглощать электромагнитное излучение.

**б) Вынужденное излучение в скрещенных полях.** Оказывается, что если к постоянному магнитному полю, характеризующему вектор-потенциалом

$$A_x = -1/2 Hy, \quad A_y = 1/2 Hx, \quad A_z = 0, \quad (25.26)$$

добавить еще и электростатическое с потенциальной энергией

$$V = -e_0 \Phi, \quad (25.27)$$

то можно подобрать его таким образом, что индуцированное излучение будет превалировать над поглощением уже в основном нерелятивистском члене.

Конкретно потенциальную энергию электростатического поля, добавляемого к магнитному (см. (25.26)), мы выберем в следующем виде [45]:

$$V = -\frac{e_0^2 a}{2} (r^2 - 2z^2), \quad (25.28)$$

где  $r^2 = x^2 + y^2$ . Этот вид потенциальной энергии используется также при анализе работы магнетрона [46]. Потенциал (25.28) выбран таким образом, чтобы в рассматриваемой области пространства плотность внешних зарядов равнялась нулю:

$$\rho = -\frac{1}{4\pi e_0} \nabla^2 V = 0. \quad (25.29)$$

Кроме того, чтобы движение по оси  $z$  было устойчивым, необходимо выбрать постоянную  $a$ , имеющую размерность  $\text{см}^{-3}$ , положительной величиной ( $a > 0$ ).

Для нахождения волновой функции электрона в скрещенном магнитном и электростатическом (см. (25.28)) полях воспользуемся уравнением Шредингера:

$$i\hbar \frac{\partial \psi(t)}{\partial t} = \left( \frac{\mathbf{P}^2}{2m_0} + V \right) \psi(t), \quad (25.30)$$

где  $\mathbf{P} = -i\hbar \nabla + e_0 \mathbf{A}/c$  — оператор кинетического импульса.

Так как потенциальная энергия не зависит от времени и угловой координаты  $\varphi$  ( $x = r \cos \varphi$ ), то решение уравнения (25.30) в цилиндрических координатах следует искать в виде

$$\psi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-i \frac{E}{\hbar} t + i l \varphi} v(r) u(z), \quad (25.31)$$

где  $l$  — орбитальное квантовое число, принимающее положительные и отрицательные целые значения.

Радиальная  $v$  и аксиальная  $u$  части волновых функций могут быть найдены соответственно из уравнений

$$u'' + \left( \frac{2m_0}{\hbar^2} E_2 - \lambda_1^2 z^2 \right) u = 0, \quad (25.32)$$

$$v'' + \frac{1}{r} v' + \left( \frac{2m_0 E_1}{\hbar^2} - \frac{l^2}{r^2} - \lambda^2 r^2 \right) v = 0. \quad (25.33)$$

Здесь штрих у функций  $v$  и  $u$  означает производные соответственно по  $r$  и  $z$ , а для постоянных  $\lambda$  и  $\lambda_1$  имеем выражения

$$\lambda = \gamma \left( 1 - \frac{4am_0c^2}{H^2} \right)^{1/2}, \quad \gamma = \frac{e_0 H}{2c\hbar}, \quad \lambda_1 = \frac{e_0}{\hbar} \sqrt{2am_0}. \quad (25.34)$$

Отсюда видно, что не только движение по  $z$ , но и движение по радиусу  $r$  будет устойчивым, когда коэффициент  $a$  лежит в пределах

$$0 < a < H^2/4m_0c^2. \quad (25.35)$$

Таким образом, фокусировку циклического движения электрона мы можем производить не только с помощью введения неоднородного магнитного поля (при  $z = 0$   $H = \text{const } r^{-q}$ , причем  $0 < q < 1$ ), но и с помощью добавления к постоянному магнитному полю (не дающему фокусировки по оси  $z$ ) электростатического поля (25.28) со значением постоянной  $a$ , удовлетворяющей неравенству (25.35).

Отсюда легко найти следующее значение для энергии:

$$E = \frac{e_0 H \hbar l}{2m_0 c} + E_1 + E_2 = \hbar (\omega_H (n + 1/2) - \omega_E (s + 1/2) + \omega_z (k + 1/2)), \quad (25.36)$$

где

$$\omega_H = \frac{1}{2} (\Omega + \Omega_a), \quad \omega_E = \frac{1}{2} (\Omega - \Omega_a),$$

$$\omega_z = \sqrt{\frac{2e_0^2 a}{m_0}}, \quad \Omega = \frac{e_0 H}{m_0 c}, \quad \Omega_a = \Omega \sqrt{1 - \frac{4am_0c^2}{H^2}}. \quad (25.37)$$

Для ортонормированных волновых функций мы находим выражения

$$u_k = \sqrt[4]{\frac{\lambda_1}{\pi}} \frac{1}{V 2^k k!} H_k(\sqrt{\lambda_1} z) e^{-\lambda_1 z^2/2}, \quad (25.38)$$

$$v_{ls} = \sqrt{2\lambda} I_{n,s}(\lambda r^2), \quad (25.39)$$

где полиномы Эрмита

$$H_k(\xi) = (-1)^k e^{\xi^2} \frac{d^k e^{-\xi^2}}{d\xi^k}, \quad \xi = \sqrt{\lambda_1} z, \quad (25.40)$$

а функции Лагерра (25.39), так же как и в задаче «светящегося» электрона, равны

$$I_{n,s}(\rho) = \frac{1}{V(s+l)! s!} e^{-\rho/2} \rho^{l/2} Q_s^l(\rho), \quad \rho = \lambda r^2. \quad (25.41)$$

В случае отрицательных значений  $l$  мы можем воспользоваться соотношением

$$Q_s^{-l}(\rho) = (-1)^l \rho^{|l|} Q_{s-|l|}^{|l|}(\rho). \quad (25.42)$$

Поскольку нижний индекс у полиномов Лагерра, а также у полиномов Эрмита должен быть целым и положительным (включая нуль), мы можем найти область изменения всех квантовых чисел:

аксиального:

$$k = 0, 1, 2, \dots;$$

орбитального:

$$l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots;$$

радиального:

$$s = \begin{cases} 0, 1, 2, \dots & \text{при } l \geq 0, \\ -l, -l+1, -l+2, \dots & \text{при } l < 0 \end{cases}$$

и главного:

$$n = l + s = \begin{cases} l, l+1, l+2, \dots & \text{при } l \geq 0, \\ 0, 1, 2, \dots & \text{при } l < 0. \end{cases}$$

Заметим, что при отсутствии электростатического поля ( $a = 0$ ) система становится вырожденной, т. е. зависимость  $E$  от  $s$  исчезает.

В классическом приближении в плоскости  $xy$  траектория движения описывается эпитрохойдой:

$$x + iy = R_0 e^{i\omega_H t} + r_0 e^{-i(\omega_E t + \varphi)},$$

причем радиусы  $R_0$  и  $r_0$  связаны с квантовыми числами соотношениями

$$R_0 = \sqrt{n/\lambda}, \quad r_0 = \sqrt{s/\lambda}. \quad (25.43)$$

При квантовом переходе

$$(n, s, k) \rightarrow (n', s', k') \quad (25.44)$$

соответствующая частота может быть найдена из равенства \*)

$$\omega_{jj'} = \frac{1}{\hbar} (E_{n's'k'} - E_{nsk}) = \omega_H (n - n') - \omega_E (s - s') + \omega_z (k - k'). \quad (25.45)$$

Для вероятности вынужденного перехода под действием внешней электромагнитной волны частоты  $\omega = c\kappa$  с волновым вектором  $\kappa$ , составляющим угол  $\theta$  с осью  $z$ , мы имеем выражение

$$\omega_{jj'} = \frac{2\pi e_0^2 c}{\hbar L^3 \kappa} N(\kappa) \frac{1}{m_0^2 c^2} (|\bar{P}_x|^2 + \cos^2 \theta |\bar{P}_y|^2 + \sin^2 \theta |\bar{P}_z|^2) \frac{1}{\tau} \left| \int_0^\tau e^{-it(\omega_{jj'} \mp \omega) - \frac{t}{2\tau}} dt \right|^2, \quad (25.46)$$

где  $\tau$  — среднее значение времени пребывания электрона в начальном состоянии, причем перед  $\omega$  должны выбрать соответственно знак минус или плюс в зависимости от того, имеем ли мы вынужденное излучение ( $\omega_{jj'} > 0$ ) или поглощение ( $\omega_{jj'} < 0$ ) фотонов;  $N(\kappa)$  — число фотонов в объеме  $L^3$  связано с амплитудой электрической напряженности  $E$  внешней электромагнитной волны при помощи соотношения (25.3).

В случае  $t \gg \tau$  мы можем положить (см. (25.2))

$$\frac{1}{\tau} \left| \int_0^\tau e^{-it(\omega_{jj'} \mp \omega) - \frac{t}{2\tau}} dt \right|^2 = \frac{4\tau}{4\tau^2 (|\omega_{jj'}| - \omega)^2 + 1}. \quad (25.47)$$

Для матричных элементов, характеризующих переход (25.44), имеем следующее выражение:

$$\bar{P} = \int \psi_{n', s', k'}^+ e^{-i\kappa r} \mathbf{P} \psi_{n, s, k} d^3x, \quad (25.48)$$

где

$$\psi_{n, s, k} = \frac{e^{i\varphi}}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{2\lambda} I_{n, s}(\lambda r^2) \sqrt{\frac{\lambda_1}{\pi}} \frac{1}{\sqrt{2^k k!}} e^{-\frac{1}{2} \lambda_1 z^2} H_k(\sqrt{\lambda_1} z). \quad (25.49)$$

\*) Под индексом  $j$  будем понимать три квантовых числа  $n, s, k$ .

Ограничиваясь дипольным приближением ( $e^{-ixr} \approx 1$ ), имеем

$$P_{x,y} \psi_{n,s,k} = \frac{i\hbar}{2} \frac{(\gamma + \lambda)}{\sqrt{\lambda}} \{ \sqrt{n+1} \psi_{n+1,s,k} \mp \sqrt{n} \psi_{n-1,s,k} \} + \\ + \frac{i\hbar}{2} \frac{\gamma - \lambda}{\sqrt{\lambda}} \{ \mp \sqrt{s+1} \psi_{n,s+1,k} + \sqrt{s} \psi_{n,s-1,k} \}. \quad (25.50)$$

Верхние знаки относятся к индексу  $x$ , а нижние — к индексу  $y$ . Аналогичным способом находим

$$P_z \psi_{n,s,k} = i\hbar \sqrt{\frac{\lambda_1}{2}} \{ \sqrt{k+1} \psi_{n,s,k+1} - \sqrt{k} \psi_{n,s,k-1} \}. \quad (25.51)$$

Учитывая условие ортонормированности, получаем

$$|\bar{P}_x|^2 = |\bar{P}_y|^2 = \frac{m_0^2}{4\lambda} \{ \omega_H^2 [(n+1)\delta_{n',n+1} + n\delta_{n',n-1}] \delta_{ss'} \delta_{kk'} + \\ + \omega_E^2 [(s+1)\delta_{s',s+1} + s\delta_{s',s-1}] \delta_{nn'} \delta_{kk'} \}, \quad (25.52) \\ |\bar{P}_z|^2 = \frac{m_0^2 \omega_z^2}{2\lambda_1} [(k+1)\delta_{k',k+1} + k\delta_{k',k-1}] \delta_{nn'} \delta_{ss'}.$$

Отсюда находим правила отбора и соответствующие частоты излучения\*):

- 1)  $\Delta n = \pm 1, \Delta s = 0, \Delta k = 0, \omega_{n, n \mp 1} = \pm \omega_H;$
- 2)  $\Delta n = 0, \Delta s = 0, \Delta k = \pm 1, \omega_{k, k \mp 1} = \pm \omega_z;$  (25.53)
- 3)  $\Delta n = 0, \Delta s = \pm 1, \Delta k = 0, \omega_{s, s \mp 1} = \mp \omega_E.$

Найдем суммарную энергию вынужденного излучения и поглощения.

В случае 1) с помощью формул (25.46) и (25.53) получаем

$$W_1 = \hbar \omega_H (\omega_{n,n-1} - \omega_{n,n+1}) = \\ = - \frac{e_0^2 \omega_H^3 E^2 (1 + \cos^2 \theta)}{m_0 \omega^2 \Omega_a} \frac{\tau}{1 + 4\tau^2 (\omega_H - \omega)^2}. \quad (25.54)$$

Выражение (25.54) при  $a = 0$  дает первый нерелятивистский член формулы Шнейдера (см. (25.18)). Как и следовало ожидать, электромагнитные волны, лежащие вблизи частоты  $\omega_H$ , должны поглощаться ( $W < 0$ ). Напомним, что в данном случае излучение возможно только за счет релятивистских поправок, и то при нарушении резонанса (см. (25.18)).

\*) Квантовые числа, которые при заданном переходе не изменяются, в дальнейшем будем опускать.



В случае 2) (изменяется квантовое число  $k$ ) в области частот  $\omega \sim \omega_z$  мы снова будем иметь поглощение, поскольку

$$W_2 = \hbar\omega_z(\omega_{k, k-1} - \omega_{k, k+1}) = \\ = - \frac{e_0^2 \omega_z^2 E^2 (1 - \cos^2 \theta)}{m_0 \omega^2} \frac{\tau}{1 + 4\tau^2 (\omega_z - \omega)^2}. \quad (25.55)$$

Наконец, в случае 3) (изменяется квантовое число  $s$ ) находим

$$W_3 = \hbar\omega_E(\omega_{s, s+1} - \omega_{s, s-1}) = \\ = \frac{e_0^2 \omega_E^3 E^2 (1 + \cos^2 \theta)}{m_0 \omega^2 \Omega_a} \frac{\tau}{1 + 4\tau^2 (\omega_E - \omega)^2}, \quad (25.56)$$

т. е. рассматриваемая система вынужденно должна излучать даже в нерелятивистском приближении, причем максимум излучения приходится на область резонанса ( $\omega = \omega_E$ )\*).

## § 26. ВЛИЯНИЕ СИНХРОТРОННОГО ИЗЛУЧЕНИЯ НА ДВИЖЕНИЕ ЭЛЕКТРОНОВ В НЕОДНОРОДНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

**а) Движение электронов в аксиально-симметричном магнитном поле.** Задачу о движении электрона в неоднородном аксиально-симметричном магнитном поле проще всего решать в цилиндрических координатах ( $r, \varphi, z$ ):

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \varphi = \arctg(y/x). \quad (26.1)$$

Как будет показано ниже, устойчивое равновесие при движении электрона вблизи равновесной квазиклассической орбиты возможно в поле, которое в плоскости этой орбиты ( $z = 0$ ) изменяется по закону

$$H_x = H_y = 0, \quad H_z = br^{-q}, \quad (26.2)$$

---

\* На базе этих теоретических расчетов был построен Грэффом и др. [47] соответствующий прибор. Кроме магнитного поля  $H$ , изменяющегося в пределах 80—4000 гс, создавалось еще электростатическое поле типа (25.28) с помощью четырехполюсной камеры. В магнитном поле при  $H = 100$  гс и в области электростатического потенциала 10 в частота  $\omega_z$  имела порядок 40 Мгц, циклотронная частота  $\omega_H = 300$  Мгц и частота смещения  $\omega_E = 5$  Мгц. В этих экспериментах наблюдалась потеря энергии на частотах порядка  $\omega_z, \omega_H$ , а на частоте  $\omega_E$ , наоборот, — возбуждение колебаний, благодаря чему электроны начинают покидать камеру. Эти экспериментальные факты находятся в согласии с теоретическими предсказаниями (см. (25.54) — (25.56)).

причем показатель спадания поля  $q$  для устойчивости равновесия должен лежать в пределах  $0 < q < 1$  (так называемая мягкая фокусировка, см. ниже \*).

Учитывая условие отсутствия внешних токов

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = 0, \quad (26.3)$$

$z \rightarrow 0$

находим соответствующие условию (26.2) составляющие вектор-потенциала, пренебрегая величинами порядка  $(z/r)^4$  [5, 50]:

$$\begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix} \frac{b}{r^q (2-q)} \left[ 1 + \frac{q(2-q)}{2r^2} z^2 \right]. \quad (26.4)$$

Из (26.4) для магнитного поля находим значения

$$H_z = \frac{b}{r^q} \left( 1 - \frac{1}{2} q^2 \frac{z^2}{r^2} \right), \quad H_x = -\frac{xz}{r^2} \frac{qb}{r^q}, \quad H_y = -\frac{yz}{r^2} \frac{qb}{r^q}. \quad (26.5)$$

Мы будем рассматривать задачу в приближении, учитывающем лишь квантовые эффекты первого порядка по постоянной Планка  $\hbar$ . Найдем прежде всего решения релятивистского скалярного уравнения Клейна — Гордона, т. е. пренебрегая спиновыми эффектами, во внешнем магнитном поле (26.4):

$$(E^2 - c^2 \mathbf{P}^2 - m_0^2 c^4) \psi = 0, \quad (26.6)$$

где

$$\mathbf{P} = -i\hbar \nabla + \frac{e_0}{c} \mathbf{A}.$$

Представляя уравнение (26.6) в виде

$$\left( E^2 + c^2 \hbar^2 \nabla^2 - e_0^2 A^2 - \frac{2e_0 \hbar c}{i} (\mathbf{A} \nabla) - m_0^2 c^4 \right) \psi = 0 \quad (26.7)$$

---

\*) При жесткой фокусировке ( $|q| \gg 1$ ) траектория разбивается на ряд участков, причем в одном из соседних участков  $q > 0$  (устойчивость по оси  $z$  и неустойчивость в направлении  $r$ ), а в другом — наоборот,  $q < 0$  (устойчивость по  $r$  и неустойчивость по  $z$ ). Оказывается, можно подобрать такую разбивку участков, что движение в целом становится устойчивым, а амплитуда бетатронных колебаний будет значительно меньше, чем при мягкой фокусировке. Поэтому электронные синхротроны со сверхвысокими энергиями (как правило, свыше 1 Гэв) построены с жесткой фокусировкой, например, для ускорителя в Гамбурге ДЭЗИ  $E = 7,5$  Гэв,  $R = 32$  м,  $|q| = 70$ , число пар магнитных элементов 24. Точно так же на жесткой фокусировке построены Кембриджский ускоритель СЕА и Ереванский ускоритель АРУС. Жесткая фокусировка была предложена Кристофелесом и детально разработана Ливингстоном и Курантом [48]. В нашей монографии мы не станем ее развивать и отсылаем читателям к специальной литературе по проектированию ускорителей (например [49]).

и подставляя в него составляющие вектор-потенциала (26.4), имеем

$$E^2\psi + c^2\hbar^2 \left[ \frac{1}{\sqrt{r}} \frac{\partial^2}{\partial r^2} \sqrt{r} \psi + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \frac{\psi}{4r^2} \right] - \\ - \frac{e_0^2 b^2}{r^{2(q-1)} (2-q)^2} \left[ 1 + \frac{q(2-q)z^2}{r^2} \right] \psi - \\ - \frac{2e_0 \hbar c}{i} \frac{b}{r^q (2-q)} \left[ 1 + \frac{q(2-q)z^2}{2r^2} \right] \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} - m_0^2 c^4 \psi = 0. \quad (26.8)$$

В последнем уравнении мы пренебрегли членами порядка  $(z/r)^4$ . Решение уравнения (26.8) ищем в виде

$$\psi(t) = e^{-i \frac{E}{\hbar} t} \psi = \frac{e^{-i \frac{E}{\hbar} t + i l \varphi}}{\sqrt{2\pi r}} \sqrt{\frac{m_0 c^2}{E}} v(r) u(z). \quad (26.9)$$

Из условия нормировки волновой функции

$$\frac{i\hbar}{2m_0 c^2} \int d^3x \left( \psi^*(t) \frac{\partial \psi(t)}{\partial t} - \frac{\partial \psi^*(t)}{\partial t} \psi(t) \right) = \frac{E}{m_0 c^2} \int d^3x \psi^* \psi = 1 \quad (26.10)$$

получаем

$$\int_0^\infty v^2 dr = 1, \quad \int_{-\infty}^\infty u^2 dz = 1.$$

Подставляя (26.9) в (26.8), находим уравнения, которым подчиняются функции  $v(r)$  и  $u(z)$ :

$$\frac{d^2 v}{dr^2} + f(r) v = 0, \quad (26.11)$$

$$\frac{d^2 u}{dz^2} + F(z^2, r) u = 0. \quad (26.12)$$

В равенствах (26.11) и (26.12) мы положили \*)

$$f(r) = \frac{E^2 - m_0^2 c^4}{c^2 \hbar^2} - \alpha_1 - f_1(r, l), \\ F(z^2, r) = \alpha_1 - F_1(z^2, r, l), \quad (26.13)$$

где

$$f_1(r) = \gamma^2 r^{2(1-q)} + 2\gamma l r^{-q} + \frac{l^2 - 1/4}{r^2}, \\ F_1(z^2, r) = z^2 q(2-q) \gamma^2 r^{-2q} \left( 1 + \frac{l}{\gamma} r^{q-2} \right), \quad (26.14)$$

причем  $\gamma = e_0 b / c \hbar (2-q)$ , а  $\alpha_1$  является постоянной разделения.

\*) В дальнейшем можно принять  $l^2 - 1/4 \approx l^2 \gg 1$ .

При решении уравнения (26.11) ограничимся приближением малых колебаний около равновесной квазиклассической круговой орбиты, радиус которой  $R$  находится из условия минимума эффективной потенциальной энергии в уравнении для  $v(r)$ .

Вводя новую переменную  $\rho = r - R$ , характеризующую радиальные колебания, мы имеем

$$\frac{d^2v}{dr^2} = \frac{d^2v}{d\rho^2},$$

$$f(r) = f(\rho + R) = f(R) + \rho f'(R) + \frac{\rho^2}{2} f''(R) + \dots, \quad (26.15)$$

причем радиус равновесной орбиты находится из условия

$$f'(R) = -\frac{\partial f_1(R, l)}{\partial R} = 2(1-q)\gamma^2 R^{1-2q} - 2\gamma l q R^{-q-1} - 2l^2 R^{-3} = 0. \quad (26.16)$$

Отсюда получаем, что

$$l = \gamma(1-q) R^{2-q}$$

или

$$R = \left( \frac{l}{\gamma(1-q)} \right)^{\frac{1}{2-q}}. \quad (26.17)$$

Введем новые постоянные величины

$$\alpha = f(R) = \frac{E^2 - m_0^2 c^4}{c^2 \hbar^2} - \alpha_1 - \frac{e_0^2}{c^2 \hbar^2} R^2 H^2(R), \quad (26.18)$$

$$\lambda = \sqrt{-\frac{1}{2} f''(R)} = \gamma(2-q) \sqrt{1-q} R^{-q} = \frac{e_0 H(R)}{c \hbar} \sqrt{1-q}.$$

Учитывая эти соотношения, дифференциальное уравнение для радиальных колебаний (26.11) можем записать в виде

$$\frac{d^2v}{d\rho^2} + (\alpha - \lambda^2 \rho^2) v = 0. \quad (26.19)$$

Точно так же для дифференциального уравнения  $z$ -колебаний (см. (26.12)) при  $r = R$  имеем

$$\frac{d^2u}{dz^2} + (\alpha_1 - \lambda_1^2 z^2) u = 0, \quad (26.20)$$

где

$$\lambda_1 = \frac{e_0 H(R)}{c \hbar} \sqrt{q}. \quad (26.21)$$

Из формул (26.18) и (26.21) видно, что радиальные колебания будут устойчивыми ( $\lambda^2 > 0$ ) при  $q < 1$ , а вертикальные колебания устойчивы ( $\lambda_1^2 > 0$ ) при  $q > 0$ . Таким образом, параметр, характеризующий радиальную неоднородность поля, должен изменяться в пределах

$$0 < q < 1,$$

что обеспечивает устойчивость так называемой мягкой фокусировки электронов около равновесной орбиты.

Уравнения (26.19) и (26.20) являются уравнениями гармонических осцилляторов с собственными значениями

$$\alpha = \lambda(2s + 1), \quad \alpha_1 = \lambda_1(2k + 1), \quad (26.22)$$

где  $s, k = 0, 1, 2, \dots$  — радиальное и аксиальное (вертикальное) квантовые числа. Соответствующая радиальная собственная функция  $v_s$  имеет вид

$$v_s = \sqrt[4]{\frac{\lambda}{\pi}} \frac{1}{\sqrt{2^s s!}} e^{-\lambda \rho^2/2} H_s(\sqrt{\lambda} \rho), \quad (26.23)$$

где  $\rho = r - R$ , причем  $r$  изменяется в пределах  $0 \leq r < \infty$  \*). Это решение имеет место при  $|\rho/R| \ll 1$ , когда пределы интегрирования по  $\rho$  при вычислении нормировочного коэффициента можно растянуть от  $-\infty$  до  $+\infty$ . Собственные функции вертикальных колебаний имеют вид

$$u_k = \sqrt[4]{\frac{\lambda_1}{\pi}} \frac{1}{\sqrt{2^k k!}} e^{-\lambda_1 z^2/2} H_k(\sqrt{\lambda_1} z). \quad (26.24)$$

В соотношениях (26.23) и (26.24)  $H_s$  и  $H_k$  являются полиномами Эрмита.

С помощью формул (26.23) и (26.24) для средних квадратичных отклонений мы находим \*\*)

$$\frac{a^2}{2} = \langle \rho^2 \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho^2 v_s^2 d\rho = \frac{c\hbar(s + 1/2)}{e_0 H(R) \sqrt{1-q}}, \quad (26.25)$$

$$\frac{b^2}{2} = \langle z^2 \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} z^2 u_k^2 dz = \frac{c\hbar(k + 1/2)}{e_0 H(R) \sqrt{q}},$$

а из (26.22), (26.18) получаем собственные значения для энергии электрона:

$$E_{lsk} = \sqrt{e_0^2 H^2(R) R^2 + m_0^2 c^4 + 2e_0 H(R) (\sqrt{1-q} c\hbar s + \sqrt{q} c\hbar k)} \approx \approx E_l + E'_{lsk}. \quad (26.26)$$

Здесь

$$E_l = \sqrt{e_0^2 H^2(R) R^2 + m_0^2 c^4} \quad (26.27)$$

\*) В однородном поле под величиной  $\rho$  мы понимали значение  $\gamma r^2$  (см. (19.8)). В неоднородном поле под  $\rho$  мы понимаем радиальные отклонения от равновесной орбиты  $\rho = r - R$ .

\*\*) Здесь  $a^2$  и  $b^2$  являются квадратами амплитуд радиальных и вертикальных (аксиальных) бетатронных колебаний.

— энергия, характеризующая вращение по окружности (основная часть энергии), а

$$E'_{l'sk} = \frac{e_0 H(R)}{E_l} (\sqrt{1-q} c \hbar s + \sqrt{q} c \hbar k) \quad (26.28)$$

— радиальные и вертикальные колебания. Используя формулу (26.26), а также соотношение  $E = m_0 c^2 / \sqrt{1-\beta^2}$ , находим выражение для скорости движения электрона ( $v = c\beta$ ):

$$\beta = \frac{\sqrt{e_0^2 H^2(R) R^2 + 2e_0 H(R) \left[ \sqrt{1-q} c \hbar \left( s + \frac{1}{2} \right) + \sqrt{q} c \hbar \left( k + \frac{1}{2} \right) \right]}}{E} \approx \frac{e_0 H(R) R}{E_l}. \quad (26.29)$$

Дифференцируя выражение (26.26) по адиабатическим инвариантам  $\hbar l$ ,  $\hbar s$  и  $\hbar k$ , находим соответствующие значения для круговой частоты вращения  $\omega_l$  и частот радиальных  $\omega_s$  и вертикальных  $\omega_k$  колебаний. Учитывая зависимость  $R$  от  $l$ , с помощью формулы

$$\frac{\partial R}{\hbar \partial l} = \frac{c}{e_0 H(R) R (1-q)}$$

получаем

$$\begin{aligned} \omega_l &= \frac{\partial E}{\partial R} \frac{\partial R}{\hbar \partial l} = \\ &= \frac{c e_0 H(R)}{E_l} \left\{ 1 - \frac{c \hbar [q + \beta^2 (1-q)]}{R^2 e_0 H(R) (1-q)} \left[ \sqrt{1-q} \left( s + \frac{1}{2} \right) + \sqrt{q} \left( k + \frac{1}{2} \right) \right] \right\} \approx \\ &\approx \omega_0 \approx \frac{c e_0 H(R)}{E_l}, \quad (26.30) \end{aligned}$$

$$\omega_s = \frac{\partial E}{\hbar \partial s} = \omega_0 \sqrt{1-q}, \quad (26.31)$$

$$\omega_k = \frac{\partial E}{\hbar \partial k} = \omega_0 \sqrt{q}. \quad (26.32)$$

Для того чтобы определить вторую производную, мы должны продифференцировать (26.30) по адиабатическому инварианту. Тогда, отбрасывая малые члены, пропорциональные  $s$  и  $k$ , получаем

$$\frac{\partial^2 E}{\hbar^2 \partial l^2} \approx -\frac{c^2}{R^2 E_l} \left( \frac{q}{1-q} + \beta^2 \right). \quad (26.33)$$

**б) Общие формулы для матричных элементов и вероятности перехода при синхротронном излучении.** Рассмотрим квантовые переходы между состояниями электрона, заданными решениями релятивистского скалярного уравнения. Эти решения, как было

показано в предыдущем параграфе, имеют вид

$$\Psi_{l s k} = \frac{e^{i l \varphi}}{\sqrt{2 \pi r}} \sqrt{\frac{m_0 c^2}{E}} v_s(\rho) u_k(z). \quad (26.34)$$

Здесь  $\rho = r - R(l)$ , а функция  $v_s(\rho)$ ,  $u_k(z)$  и энергия  $E = E_{l s k}$  заданы формулами (26.23), (26.24) и (26.26). Вследствие излучения фотона электрон переходит из одного квантового состояния  $n(l, s, k)$  в другое  $n'(l', s', k')$ , при этом энергия изменяется на величину

$$\begin{aligned} E_{l s k} - E_{l' s' k'} &\equiv \hbar \omega_{n n'} = \\ &= \frac{\partial E}{\partial l} \nu + \frac{\partial E}{\partial s} (s - s') + \frac{\partial E}{\partial k} (k - k') - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 E}{\partial l^2} \nu^2 + \dots, \end{aligned} \quad (26.35)$$

где  $\nu = l - l'$ . Учитывая формулы (26.30) — (26.33), находим частоту перехода

$$\begin{aligned} \omega_{n n'} &= c \kappa_{n n'} = \\ &= \omega_l \nu + \omega_s (s - s') + \omega_k (k - k') + \frac{c^2 \hbar \nu^2}{2 R^2 E_l} \left( \frac{q}{1 - q} + \beta^2 \right). \end{aligned} \quad (26.36)$$

Вероятность квантового перехода для скалярного случая определяется формулой, аналогичной формуле для дираковских состояний (см. (18.21)), с тем различием, что матричные элементы берутся не от матриц Дирака  $\alpha$ , а от оператора

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{P}}{m_0 c} &= \left( -i \hbar \nabla + \frac{e_0}{c} \mathbf{A} \right) \frac{1}{m_0 c}, \\ \omega_{n n'} &= \frac{e_0^2}{2 \pi \hbar} \int \frac{d^3 \kappa}{\kappa} \Phi_{n' n} \delta(\kappa_{n n'} - \kappa). \end{aligned} \quad (26.37)$$

Здесь

$$\Phi_{n' n} = \frac{1}{m_0^2 c^2} [ |\bar{P}_x|^2 + |\bar{P}_y \cos \theta - \bar{P}_z \sin \theta|^2 ], \quad (26.38)$$

а матричный элемент равен

$$\frac{\bar{\mathbf{P}}}{m_0 c} = \frac{1}{m_0 c} \int d^3 x \Psi_{l' s' k'}^* e^{-i \mathbf{x} \cdot \mathbf{r}} \mathbf{P} \Psi_{l s k}. \quad (26.39)$$

Частота испускаемого фотона  $\omega = \kappa c$ , а волновой вектор фотона  $\kappa$  лежит в плоскости  $zy$ .

Для вычисления матричных элементов (26.39) учтем действие операторов импульса на волновую функцию:

$$(P_x \pm iP_y) \psi_{lsk} = \pm i\hbar \sqrt{\frac{m_0 c^2}{E}} \frac{e^{i(l \pm 1)\varphi}}{\sqrt{2\pi r}} \left[ \left( \frac{2-q}{1-q} \right) \frac{l}{R} v_s \mp \sqrt{\frac{\lambda}{2}} (\sqrt{s} v_{s-1} - \sqrt{s+1} v_{s+1}) \right] u_k, \quad (26.40)$$

$$P_z \psi_{lsk} = -i\hbar \frac{e^{i\ell\varphi}}{\sqrt{2\pi r}} \sqrt{\frac{m_0 c^2 \lambda_1}{2E}} (\sqrt{k} u_{k-1} - \sqrt{k+1} u_{k+1}) v_s.$$

Эти выражения справедливы с точностью до малых порядка  $\rho/R$  и  $z/R$  включительно. Членами порядка  $\rho^2/R^2$  и  $z^2/R^2$ , а также  $1/l$  мы пренебрегаем.

Интегрирование в (26.39) по  $z$  и  $r$  в цилиндрической системе координат ( $d^3x = r dr d\varphi dz$ ) сводится к интегралам двух типов:

$$u_{k'k} = \int_{-\infty}^{\infty} u_{k'} e^{-i\kappa \cos \theta z} u_k dz = \\ = (2^{k+k'} k! k'! \pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} H_k(x) H_{k'}(x) \exp\left(-x^2 - \frac{i\kappa_3 x}{\sqrt{\lambda_1}}\right) dx, \quad (26.41)$$

$$v_{s's} = \int_{-\infty}^{\infty} v_{s'}(\rho') e^{-i\kappa r \sin \theta \sin \varphi} v_s(\rho) d\rho = \\ = (2^{s+s'} s! s'! \pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} H_s(x_1) H_{s'}(x'_1) \times \\ \times \exp\left\{-x^2 + \frac{1}{2}(R_1^2 + R_1'^2) + x(R_1 + R_1') - i \frac{\kappa_2 x \sin \varphi}{\sqrt{\lambda}}\right\} dx. \quad (26.42)$$

В этих формулах  $\rho = r - R(l)$ ,  $\rho' = r - R(l')$ ,  $\lambda(l) \approx \lambda(l')$ ,  $R_1 = \sqrt{\lambda} R$ ,  $R_1' = \sqrt{\lambda} R'$ ,  $\kappa_3 = \kappa \cos \theta$ ,  $\kappa_2 = \kappa \sin \theta$ ,  $x_1 = x - R_1$ ,  $x_1' = x - R_1' = x - R_1(l')$ .

Воспользуемся известным интегралом от произведения полиномов Эрмита ( $m \leq n$ ,  $x_y = x + y$ ,  $x_z = x + z$ )

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} H_m(x_y) H_n(x_z) dx = 2^n \sqrt{\pi} z^{n-m} Q_m^{n-m}(-2yz), \quad (26.43)$$

в котором  $Q_m^{n-m}$  — обобщенный полином Лагерра (см. (17.105)).



В результате интегралы (26.41) и (26.42) выразятся через функции Лагерра  $I_{kk'}$  и  $I_{ss'}$ :

$$u_{k'k} = \left(-i \frac{\cos \theta}{|\cos \theta|}\right)^{k-k'} I_{kk'}(f),$$

$$v_{ss'} = (-1)^{s-s'} \exp\left\{i(s-s')\alpha - \frac{i}{2}\kappa_2(R+R')\sin\varphi\right\} I_{ss'}(g). \quad (26.44)$$

Здесь  $\alpha = \text{arctg}[\kappa_2 \sin\varphi/\lambda(R-R')]$ , а аргументы функций Лагерра равны

$$f = \kappa_3^2/2\lambda_1, \quad g = \lambda(R-R')^2/2\cos^2\alpha. \quad (26.45)$$

Принимая во внимание формулы (26.44) для интегралов по  $z$  и  $r$ , приведем матричные элементы к виду

$$\frac{1}{m_0c} \begin{pmatrix} \bar{P}_x \\ \bar{P}_y \end{pmatrix} = \frac{(-1)^{s-s'}}{2\pi} \left(-i \frac{\cos \theta}{|\cos \theta|}\right)^{k-k'} I_{kk'}(f) \frac{c\hbar\gamma(2-q)R^{1-q}}{\sqrt{EE'}} \times$$

$$\times \int_0^{2\pi} d\varphi \exp\{i\nu\varphi - i\xi \sin\varphi + i\alpha(s-s')\} \times$$

$$\times \left[ \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \end{pmatrix} I_{ss'}(g) + i \frac{\nu\sqrt{1-q}}{l(2-q)} I'_{ss'}(g) \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix} + \right.$$

$$\left. + \frac{s-s'+g}{\nu} (1-q) I_{ss'}(g) \sin\alpha \cos\alpha \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix} \right], \quad (26.46)$$

$$\frac{\bar{P}_z}{m_0c} = \frac{(-1)^{s-s'}}{2\pi} \left(-i \frac{\cos \theta}{|\cos \theta|}\right)^{k-k'} I_{kk'}(f) \frac{c\hbar\lambda_1}{\kappa\sqrt{EE'}\cos\theta} (k-k'+f) \times$$

$$\times \int_0^{2\pi} d\varphi \exp\{i\nu\varphi - i\xi \sin\varphi + i\alpha(s-s')\} I_{ss'}(g), \quad (26.47)$$

причем в квантовом случае

$$\xi = \kappa \frac{R+R'}{2} \sin\theta.$$

Интегрирование по  $\varphi$  точно выполнить не удастся. Однако в рассматриваемых частных случаях интегралы по  $\varphi$  берутся с достаточным для нас приближением.

**в) Влияние синхротронного излучения на потери энергии и на бетатронные колебания.** Изменение некоторой физической величины  $F_n$ , связанной с переходом  $n(l, s, k) \rightarrow n'(l', s', k')$ , можно описать формулой

$$\left\langle \frac{dF}{dt} \right\rangle = \sum_{n'} (F_{n'} - F_n) \omega_{nn'}, \quad (26.48)$$

в которой  $\omega_{nn'}$  — вероятность соответствующего перехода. С помощью этой формулы получим прежде всего выражение для

мощности излучения в классическом приближении. Рассмотрим простейший случай, когда отсутствуют радиальные и аксиальные колебания. Тогда, пренебрегая в матричных элементах (26.46), (26.47) квантовыми членами порядка  $\hbar$  и выражая интегралы по  $\varphi$  через функции Бесселя и их производные  $J_\nu$  и  $J'_\nu$ , получим вероятность перехода

$$\omega_{nn'} = \frac{e_0^2}{\hbar} \beta^2 \int_0^\pi d\theta \sin \theta \int_0^\infty d\kappa \kappa \delta(\kappa - \kappa_{nn'}) \times \\ \times \left( J_\nu'^2(\xi) + \frac{\nu^2}{\xi^2} \cos^2 \theta J_\nu^2(\xi) \right) I_{kk'}^2(f) I_{ss'}^2(g), \quad (26.49)$$

где  $\xi = \kappa R \sin \theta$ .

Полагая  $F_n = E$  и учитывая формулы (26.36) и (26.31) для частоты перехода, найдем

$$F_{n'} - F_n = E' - E = -c\hbar\kappa_{nn'} = -c\hbar \frac{\nu\beta}{R}. \quad (26.50)$$

Подставляя теперь (26.49) и (26.50) в соотношение (26.48), интегрируем вероятность по  $\kappa$  с помощью дельта-функции. Суммирование по  $k'$  и  $s'$  проводится точно, поскольку (см. (20.45))

$$\sum_{s'} I_{ss'}^2(g) = \sum_{k'} I_{kk'}^2(f) = 1. \quad (26.51)$$

Таким образом, для мощности синхротронного излучения, т. е. средней потери энергии, получим следующее выражение в классическом приближении:

$$W^{кл} = - \left\langle \frac{dE}{dt} \right\rangle = \\ = \frac{ce_0^2\beta^2}{R^2} \sum_\nu \nu^2 \int_0^\pi d\theta \sin \theta \left[ \beta^2 J_\nu'^2(\xi) + \text{ctg}^2 \theta J_\nu^2(\xi) \right], \quad (26.52)$$

где

$$\xi = \nu\beta \sin \theta. \quad (26.53)$$

Поскольку мы с самого начала предположили отсутствие бетатронных колебаний, то эта формула в точности совпала с известным классическим выражением для излучения в однородном магнитном поле (10.28).

Интегрируя в (26.52) по  $\theta$  и суммируя по гармоникам  $\nu$ , так же как и в § 10, мы легко получаем полную мощность излучения, а также ее приближенное значение в ультрарелятивистском случае:

$$W^{кл} = \frac{2}{3} \frac{ce_0^2\beta^4}{R^2(1-\beta^2)^2} \approx \frac{2}{3} \frac{ce_0^2}{R^2} \left( \frac{E}{mc^2} \right)^4, \quad 1 - \beta^2 \ll 1. \quad (26.54)$$

Найдем теперь влияние синхротронного излучения на бета-тронные колебания. Для этого мы должны прежде всего вычислить изменение квантовых чисел  $k$  и  $s$  вследствие синхротронного излучения.

При вычислении  $\langle dk/dt \rangle$  следует положить

$$F_{n'} - F_n = k' - k, \quad \kappa_{nn'} = \frac{\nu\beta}{R} + (k - k') \frac{\beta\sqrt{q}}{R}; \quad (26.55)$$

при этом вероятность перехода с учетом членов порядка  $(k - k')$  в матричных элементах (26.46) и (26.47) представим в виде

$$\begin{aligned} \omega_{nn'} = \frac{e_0^2}{\hbar} \int_0^\pi d\theta \sin \theta \int_0^\infty d\kappa \kappa \delta(\kappa - \kappa_{nn'}) \left[ \beta^2 J_\nu'^2(\xi) + \frac{\beta^2 \nu^2 \cos^2 \theta}{\xi^2} J_\nu^2(\xi) - \right. \\ \left. - 2\beta \frac{\nu \hbar c \lambda_1}{\xi \kappa E} (k - k') J_\nu^2(\xi) \right] I_{kk'}^2(f) I_{ss'}^2(g). \quad (26.56) \end{aligned}$$

Функцию Бесселя и ее производную в этой формуле мы запишем с помощью известного (см. (10.102), (10.104)) асимптотического представления  $\xi \rightarrow \nu - 0$ , имеющего место в ультрарелятивистском приближении.

Для дельта-функции, в аргумент которой согласно (26.55) входит разность  $k' - k$ , нам достаточно ограничиться следующим разложением:

$$\begin{aligned} \delta \left[ \frac{\nu\beta}{R} + (k - k') \frac{\beta\sqrt{q}}{R} - \kappa \right] = \\ = \delta \left( \frac{\nu\beta}{R} - \kappa \right) + (k - k') \sqrt{q} \frac{\beta}{R} \delta' \left( \frac{\nu\beta}{R} - \kappa \right) + \dots \\ \dots + \frac{1}{n!} \left[ (k - k') \sqrt{q} \frac{\beta}{R} \right]^n \delta^{(n)} \left( \frac{\nu\beta}{R} - \kappa \right) + \dots \quad (26.57) \end{aligned}$$

Тогда сумма по  $k'$  для каждого слагаемого разложения (26.57) может быть взята с помощью следующей формулы суммирования функций Лагерра:

$$\sum_{n'=0}^{\infty} (n - n')^\mu e^{iy(n-n')} I_{nn'}^2(x) = \left( -i \frac{\partial}{\partial y} \right)^\mu \left[ e^{-ix \sin y} I_{nn'} \left( 4x \sin^2 \frac{y}{2} \right) \right] \quad (26.58)$$

( $\mu = 0, 1, 2, \dots$ ), из которой, в частности, следует

$$\sum_{n'=0}^{\infty} (n' - n) I_{nn'}^2(x) = x, \quad (26.59)$$

$$\sum_{n'=0}^{\infty} (n' - n)^2 I_{nn'}^2(x) = x^2 + (2n + 1)x, \quad (26.60)$$

и т. д.

Ограничиваясь первыми двумя членами разложения дельта-функции (26.57), мы получим  $\langle dk/dt \rangle$  в виде суммы двух слагаемых:

$$\left\langle \frac{dk}{dt} \right\rangle = \left\langle \frac{dk}{dt} \right\rangle_1 + \left\langle \frac{dk}{dt} \right\rangle_2. \quad (26.61)$$

Первое слагаемое не зависит от  $k$  и получается при суммировании линейных по  $(k' - k)$  членов с помощью формулы (26.59):

$$\left\langle \frac{dk}{dt} \right\rangle_1 = \frac{e_0^2 c}{6\pi^2 R^2 E \sqrt{q}} \int_0^\infty d\nu \nu^3 \int_0^\pi d\theta \sin \theta \cos^2 \theta \left[ \varepsilon^2 K_{2/3}^2 \left( \frac{\nu}{3} \varepsilon^{3/2} \right) + \varepsilon \cos^2 \theta K_{1/3}^2 \left( \frac{\nu}{3} \varepsilon^{3/2} \right) \right]. \quad (26.62)$$

Здесь введена величина  $\varepsilon = 1 - \beta^2 \sin^2 \theta$ , которая в ультрарелятивистском случае много меньше единицы ( $\varepsilon \approx \varepsilon_0 + \cos^2 \theta \ll 1$ ,  $\varepsilon_0 = 1 - \beta^2 \ll 1$ ); суммирование по гармоникам  $\nu$  заменено интегрированием, поскольку максимум синхротронного излучения приходится на область больших  $\nu \gg 1$ .

Второе слагаемое пропорционально  $k$  и получается за счет квадратичных по  $(k' - k)$  членов с помощью формулы (26.60):

$$\left\langle \frac{dk}{dt} \right\rangle_2 = -\frac{k}{E} \frac{ce_0^2}{R^2 3\pi^2} \int_0^\infty d\nu \nu^2 \int_0^\pi d\theta \sin \theta \cos^2 \theta \left\{ \frac{\partial}{\partial \beta} \left[ \varepsilon^2 K_{2/3}^2 \left( \frac{\nu}{3} \varepsilon^{3/2} \right) + \varepsilon \cos^2 \theta K_{1/3}^2 \left( \frac{\nu}{3} \varepsilon^{3/2} \right) \right] - 2\varepsilon K_{1/3}^2 \left( \frac{\nu}{3} \varepsilon^{3/2} \right) \right\}. \quad (26.63)$$

Здесь мы учли следующее операторное соотношение, которое легко проверяется путем интегрирования по частям по переменной  $x$ :

$$\delta' \left( \frac{\nu\beta}{R} - x \right) \rightarrow \frac{R}{\nu} \delta \left( \frac{\nu\beta}{R} - x \right) \frac{\partial}{\partial \beta}. \quad (26.64)$$

Проведем необходимое интегрирование в равенствах (26.62) и (26.63) с помощью общих формул

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty x^{\rho-1} K_\mu(x) K_\nu(x) dx = \\ & = \frac{2^{\rho-3}}{(\rho-1)!} \Gamma\left(\frac{\rho+\mu+\nu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\rho+\mu-\nu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\rho-\mu+\nu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\rho-\mu-\nu}{2}\right), \\ & \quad \rho = 1, 2, 3, \dots > \mu + \nu, \\ & \int_0^\pi \frac{d\theta \sin \theta \cos^{2s} \theta}{(1 - \beta^2 \sin^2 \theta)^\rho} \approx \frac{\Gamma(\rho - s - 1/2) \Gamma(s + 1/2)}{\Gamma(\rho) (1 - \beta^2)^{\rho - s - 1/2}}, \quad \rho > s + 1/2. \end{aligned} \quad (26.65)$$

В результате для суммарного изменения квантового числа получаем \*)

$$\left\langle \frac{dk}{dt} \right\rangle = \left\langle \frac{dk}{dt} \right\rangle_1 + \left\langle \frac{dk}{dt} \right\rangle_2 = \frac{13}{48\sqrt{3}} \frac{e_0^2 c}{R^2 m c^2 \sqrt{q}} \left( \frac{E}{m c^2} \right)^4 - \frac{k}{E} W^{\text{кл}}, \quad (26.66)$$

где  $W^{\text{кл}}$  определяется формулой (26.54).

Точно так же при вычислении изменения радиального квантового числа  $s$  мы должны положить

$$F_{n'} - F_n = s' - s, \quad \kappa_{nn'} = \frac{\nu\beta}{R} + (s - s') \frac{\beta \sqrt{1-q}}{R}. \quad (26.67)$$

В этом случае необходимо учитывать уже четыре члена в разложении дельта-функции:

$$\begin{aligned} & \delta \left[ \frac{\nu\beta}{R} + (s - s') \frac{\beta \sqrt{1-q}}{R} - \kappa \right] = \\ & = \delta \left( \frac{\nu\beta}{R} - \kappa \right) + \frac{\beta \sqrt{1-q} (s - s')}{R} \delta' \left( \frac{\nu\beta}{R} - \kappa \right) + \frac{1}{2} \left[ \frac{\beta \sqrt{1-q}}{R} (s - s') \right]^2 \times \\ & \times \delta'' \left( \frac{\nu\beta}{R} - \kappa \right) + \frac{1}{6} \left[ \frac{\beta \sqrt{1-q}}{R} (s - s') \right]^3 \delta''' \left( \frac{\nu\beta}{R} - \kappa \right). \quad (26.68) \end{aligned}$$

Сумма по  $s'$  находится с помощью формулы (26.58) для функции  $I_{ss'}(g)$ , после чего проводится интегрирование по  $\varphi$  в матричных элементах (26.46), (26.47). Получающиеся при этом функции Бесселя заменяем их асимптотическими выражениями (10.102), (10.104) и в результате находим

$$\left\langle \frac{ds}{dt} \right\rangle = \left\langle \frac{ds}{dt} \right\rangle_1 + \left\langle \frac{ds}{dt} \right\rangle_2. \quad (26.69)$$

Первое слагаемое, аналогичное (26.62), получается при суммировании линейных по  $(s - s')$  членов и не зависит от  $s$ :

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{ds}{dt} \right\rangle_1 = & \frac{c e_0^2}{6\pi^2 R^2 E (1-q)^{3/2}} \int_0^\infty d\nu \nu^3 \int_0^\pi d\theta \sin \theta \left[ \varepsilon^2 K_{2/8}^2 \left( \frac{\nu}{3} \varepsilon^{3/2} \right) + \right. \\ & \left. + \varepsilon \cos^2 \theta K_{1/8}^2 \left( \frac{\nu}{3} \varepsilon^{3/2} \right) \right]; \quad (26.70) \end{aligned}$$

\*) Первый член правой части равенства (26.66), описывающий квантовые возбуждения, был получен в работе [50]; второй же член, соответствующий классическому затуханию, — в работе Гутброта [51] (см. также [5]). Обратим внимание на то, что первый член в разложении (26.57) является квантовым и лишь второй член дает классическое затухание.

второе (сумма второго, третьего и четвертого членов разложения (26.68)) дает слагаемое, пропорциональное  $s$ :

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{ds}{dt} \right\rangle_2 = & -\frac{s}{E} \frac{ce_0^2}{R^2 3\pi^2} \int_0^\infty dv v \int_0^\pi d\theta \sin \theta \left\{ \frac{v}{1-q} (\epsilon^2 K_{2/3}^2 + \epsilon \cos^2 \theta K_{1/3}^2) - \right. \\ & - v\epsilon_0 \frac{\partial}{\partial \beta} (\epsilon^2 K_{2/3}^2) + \frac{1}{3} \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} (\epsilon^{3/2} K_{1/3} K_{2/3}) + 2 \frac{\partial}{\partial \beta} (\epsilon^{3/2} K_{1/3} K_{2/3}) - \\ & \left. - \frac{2}{3} \cos^2 \theta \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} (\epsilon^{3/2} K_{1/3} K_{2/3}) \right\}. \quad (26.71) \end{aligned}$$

Здесь  $K_{1/3} \equiv K_{1/3} \left( \frac{v}{3} \epsilon^{3/2} \right)$ .

Необходимо иметь в виду, что разложение дельта-функции (26.68) является, по существу, разложением по малому параметру  $1 - \beta^2$ , при этом основные члены сокращаются, и поэтому при разложении необходимо учитывать члены более высокого порядка по  $1 - \beta^2$ . Интегрирование в равенствах (26.70) и (26.71) проводится с помощью формул (26.65), после чего для первого слагаемого получаем

$$\left\langle \frac{ds}{dt} \right\rangle_1 = \frac{55}{48\sqrt{3}} \frac{e_0^2 c}{R^2 m c^2 (1-q)^{3/2}} \left( \frac{E}{m_0 c^2} \right)^6, \quad (26.72)$$

а для второго слагаемого

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{ds}{dt} \right\rangle_2 = & -\frac{s}{E} \frac{ce_0^2}{R^2} \left[ \left( \frac{2}{3} \frac{1}{1-q} - \frac{1}{3} \right) \frac{1}{(1-\beta^2)^2} - \frac{1}{6} \frac{\partial}{\partial \beta} \frac{1}{1-\beta^2} \right] = \\ = & -\frac{s}{E} \frac{ce_0^2}{R^2} \left( \frac{2}{3} \frac{1}{1-q} - \frac{2}{3} \right) \frac{1}{(1-\beta^2)^2} = -\frac{q}{1-q} \frac{s}{E} W^{\text{кл}}. \quad (26.73) \end{aligned}$$

Отсюда для полного изменения радиального квантового числа  $s$  имеем (см. [51], а также [5]) \*)

$$\left\langle \frac{ds}{dt} \right\rangle = \frac{55}{48\sqrt{3}} \frac{e_0^2 c}{R^2 m c^2 (1-q)^{3/2}} \left( \frac{E}{m c^2} \right)^6 - \frac{q}{1-q} \frac{s}{E} W^{\text{кл}}. \quad (26.74)$$

Из формул (26.66) и (26.74) видно, что при учете синхротронного излучения квадраты амплитуд бетатронных колебаний  $a^2$  и  $b^2$  (см. формулы (26.25), (26.26)) будут изменяться по закону [5]

$$\frac{da^2}{dt} = \frac{55}{24\sqrt{3}} \frac{e_0^2 \hbar}{(1-q)^2 R m_0^2 c^2} \left( \frac{E}{m_0 c^2} \right)^5 - a^2 \frac{q}{1-q} \frac{W^{\text{кл}}}{E}, \quad (26.75)$$

$$\frac{db^2}{dt} = \frac{13}{24\sqrt{3}} \frac{e_0^2 \hbar}{q R m_0^2 c^2} \left( \frac{E}{m_0 c^2} \right)^3 - b^2 \frac{W^{\text{кл}}}{E}. \quad (26.76)$$

\*) Так же как и для вертикальных колебаний, первый член в разложении (26.68) является квантовым, а три последующих дают в сумме классическое затухание.

Первые слагаемые в правых частях равенств (26.75) и (26.76) характеризуют квантовое возбуждение бетатронных колебаний, связанное с флуктуационным характером излучения. Они представляют собой типичные квантовые члены и обращаются в нуль при  $\hbar \rightarrow 0$ . Вторые слагаемые в этих равенствах, не зависящие от  $\hbar$ , описывают обычное классическое затухание колебаний вследствие излучения. Они могут быть также получены классическими методами.

В предельном случае  $da^2/dt = 0$  мы находим максимальное значение амплитуды колебаний  $a_{\text{бер}}^2$ :

$$a_{\text{бер}}^2 = \frac{55}{16\sqrt{3}} \frac{\hbar R}{q(1-q)m_0c} \left( \frac{E}{m_0c^2} \right)^2. \quad (26.77)$$

Аналогичным путем находим предельное значение

$$b_{\text{бер}}^2 = \frac{13}{16\sqrt{3}} \frac{1}{q} \frac{R\hbar}{m_0c}. \quad (26.78)$$

Наконец, определим еще первую квантовую поправку к мощности синхротронного излучения. Ради простоты найдем ее при отсутствии радиальных и вертикальных бетатронных колебаний ( $s = k = 0$ ). В этом случае согласно (26.36) мы должны положить

$$F_{n'} - F_n = E' - E = -\frac{c\hbar\beta}{R} \left( v - s' \sqrt{1-q} - k' \sqrt{q} + \right. \\ \left. + \frac{c\hbar v^2}{2RE\beta} \frac{q(1-\beta^2) + \beta^2}{1-q} \right), \quad s = k = 0. \quad (26.79)$$

Основным членом в правой части этого равенства будет первый член  $\sim v$ . Все остальные дадут поправки порядка  $1 - \beta^2$ , и в нашем приближении могут быть отброшены. В самом деле, согласно (26.59) мы можем написать

$$\sum_{s'=0}^{\infty} s' I_{s'0}^2(g) = g \approx \frac{v^2 c \hbar}{2RE(1-q)^{3/2}}, \quad (26.80) \\ \sum_{k'=0}^{\infty} k' I_{k'0}^2(f) = f \approx \frac{v^2 c \hbar \cos^2 \theta}{2RE \sqrt{q}}.$$

Учитывая (26.80), мы видим, что основной член в последнем слагаемом в (26.79) сокращается со вторым слагаемым  $\sim s'$ , а остальные члены имеют порядок  $1 - \beta^2$  по отношению к первому. Таким образом,

$$F_{n'} - F_n = E' - E = -c\hbar v \beta / R. \quad (26.81)$$

Подставляя это равенство в формулу (26.48) и используя матричные элементы (26.46) и (26.47), для мощности излучения с учетом первой квантовой поправки имеем следующее выражение:

$$W = - \left\langle \frac{dE}{dt} \right\rangle = \frac{e_0^2 c}{3\pi^2 R^2} \int_0^\pi d\theta \sin \theta \int_0^\infty dv' v'^2 \left( 1 - 3 \frac{\hbar v' c}{RE} \right) \times \\ \times \left[ \varepsilon^2 K_{2/3}^2 \left( \frac{v'}{3} \varepsilon^{3/2} \right) + \varepsilon \cos^2 \theta K_{1/3}^2 \left( \frac{v'}{3} \varepsilon^{3/2} \right) \right], \quad (26.82)$$

где  $v' = v(1 + \hbar v c / RE)$ . Отсюда с помощью интегралов (26.65) получаем

$$W = - \left\langle \frac{dE}{dt} \right\rangle = W^{\text{кл}} \left( 1 - \frac{55\sqrt{3}}{16} \frac{\hbar}{m_0 c R} \left( \frac{E}{m_0 c^2} \right)^2 \right). \quad (26.83)$$

Классическая мощность излучения  $W^{\text{кл}}$  была уже вычислена нами ранее (см. (26.53)). Второе слагаемое в равенстве (26.83) представляет собой искомую квантовую поправку, которая также совпадает с соответствующим значением для случая постоянного и однородного магнитного поля (см. (21.53)).

Аналогичным способом мы можем найти также квантовые поправки к синхротронным колебаниям [52]. Однако этот вопрос мы разберем более простым квазиклассическим методом (см. § 27).

**г) Движение электронов в аксиально-симметричном фокусирующем поле по теории Дирака.** Задача о движении релятивистского электрона в неоднородном аксиально-симметричном магнитном поле фокусирующего типа допускает решения не только по уравнению Клейна — Гордона (см. (26.9)), но также и по теории Дирака [53]. Для определения собственных функций задачи мы рассмотрим лишь члены, соответствующие гармоническим колебаниям (см. также (26.19) и (26.20)), когда в эффективной потенциальной энергии учитываются члены, пропорциональные квадрату отклонения от равновесной орбиты. Членами, начиная с кубического, описывающими, в частности, связь между радиальными и вертикальными колебаниями, будем пренебрегать.

Магнитное поле вблизи равновесной орбиты ( $z = 0$ ), так же как и в случае теории Клейна — Гордона, имеет вид (26.2) ( $0 < q < 1$ , мягкая фокусировка), а соответствующее значение для вектора потенциала определяется равенством (26.4).

Решение уравнения Дирака

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi = \{c(\alpha \mathbf{P}) + \rho_3 m_0 c^2\} \psi, \quad \mathbf{P} = \mathbf{p} + \frac{e_0}{c} \mathbf{A}, \quad (26.84)$$



можно искать в виде

$$\psi(t) = \psi e^{-i \frac{E}{\hbar} t} = e^{-i \frac{E}{\hbar} t} \frac{N}{\sqrt{r}} \begin{Bmatrix} e^{i(l-1)\varphi} \psi_1 \\ e^{i l \varphi} \psi_2 \\ e^{i(l-1)\varphi} \psi_3 \\ e^{i l \varphi} \psi_4 \end{Bmatrix}, \quad (26.85)$$

где  $l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  — азимутальное квантовое число,  $E = \hbar c K$  — полная энергия электрона, а  $N$  — нормировочный коэффициент.

Система четырех уравнений для компонент волновой функции  $\psi_\mu$  ( $\mu = 1, 2, 3, 4$ ):

$$\begin{aligned} (K \mp k_0) \psi_{1,3} + i R_2 \psi_{4,2} + i \frac{\partial}{\partial z} \psi_{3,1} &= 0, \\ (K \mp k_0) \psi_{2,4} + i R_1 \psi_{3,1} - i \frac{\partial}{\partial z} \psi_{4,2} &= 0, \end{aligned} \quad (26.86)$$

где

$$\begin{aligned} R_{1,2} &= \frac{d}{dr} \mp \frac{l-1/2}{r} \mp \gamma r^{1-q} \left[ 1 + \frac{q(2-q)}{2} \left( \frac{z}{r} \right)^2 \right], \\ k_0 &= m_0 c / \hbar, \quad \gamma = e_0 b / (2-q) c \hbar, \end{aligned}$$

допускает лишь решение в приближении гармонических колебаний (независимые бета-тронные вертикальные и радиальные колебания).

С этой целью разложим операторы  $R_{1,2}$  по малым величинам отклонения от равновесной орбиты

$$\frac{\rho}{R} = \frac{r-R}{R} \quad \text{и} \quad \frac{z}{R},$$

радиус которой  $R$ , так же как и в случае уравнения Клейна — Гордона, определяется из требования обращения в нуль линейных по  $\rho$  членов при  $l \gg 1$ :

$$\frac{d}{dr} \left\{ \frac{l-1/2}{r} + \gamma r^{1-q} \right\} = 0, \quad R = \left\{ \frac{l-1/2}{\gamma(1-q)} \right\}^{\frac{1}{2-q}}, \quad (26.87)$$

т. е. (см. также (26.17)).

Квадрируя (26.86), получим уравнения второго порядка, в которых переменные  $\rho$  и  $z$  разделяются, если ограничиться членами порядка  $l^{-3/2}$ . Положим

$$\begin{aligned} \psi_{1,2} &= v_s \left( \sqrt{\lambda} \rho \pm \frac{a}{2} \right) \left[ \Phi_1(\sqrt{\lambda_1} z) \pm \Phi_2(\sqrt{\lambda_1} z) \right], \\ \psi_{3,4} &= i v_s \left( \sqrt{\lambda} \rho \pm \frac{a}{2} \right) \left[ \Phi_3(\sqrt{\lambda_1} z) \pm \Phi_4(\sqrt{\lambda_1} z) \right], \end{aligned} \quad (26.88)$$

где  $v_s$  — ортонормированные функции Эрмита (см. (26.23)), а постоянные  $\lambda$  и  $\lambda_1$  определяются равенствами (26.18) и (26.21).

Тогда волновая функция принимает вид

$$\Psi(t) = \frac{4}{2\sqrt{2\pi r}} e^{-i\frac{E}{\hbar}t} \times \left\{ \begin{aligned} & \sqrt{1 + \frac{k_0}{K}} v_s \left( \sqrt{\lambda} \rho + \frac{a}{2} \right) \left[ C_2 u_k \left( \sqrt{\lambda_1} z - \frac{b_1}{2} \right) + C_3 u_k \left( \sqrt{\lambda_1} z + \frac{b_1}{2} \right) \right] e^{i(l-1)\varphi}, \\ & \sqrt{1 + \frac{k_0}{K}} v_s \left( \sqrt{\lambda} \rho - \frac{a}{2} \right) \left[ C_2 u_k \left( \sqrt{\lambda_1} z - \frac{b_1}{2} \right) - C_3 u_k \left( \sqrt{\lambda_1} z + \frac{b_1}{2} \right) \right] e^{il\varphi}, \\ & i \sqrt{1 - \frac{k_0}{K}} v_s \left( \sqrt{\lambda} \rho + \frac{a}{2} \right) \left[ C_3 u_k \left( \sqrt{\lambda_1} z - \frac{b_1}{2} \right) - C_2 u_k \left( \sqrt{\lambda_1} z + \frac{b_1}{2} \right) \right] e^{i(l-1)\varphi}, \\ & i \sqrt{1 - \frac{k_0}{K}} v_s \left( \sqrt{\lambda} \rho - \frac{a}{2} \right) \left[ C_3 u_k \left( \sqrt{\lambda_1} z - \frac{b_1}{2} \right) + C_2 u_k \left( \sqrt{\lambda_1} z + \frac{b_1}{2} \right) \right] e^{il\varphi}. \end{aligned} \right\} \quad (26.89)$$

Здесь  $v_s$  и  $u_k$  — функции Эрмита;  $s = 0, 1, 2, \dots$  и  $k = 0, 1, 2, \dots$  — радиальное и вертикальное квантовые числа; постоянные  $a$  и  $b_1$  соответственно равны

$$a = \sqrt[4]{1-q} \sqrt{\frac{1-q}{2-q}} \frac{1}{\sqrt{l - \frac{1}{2}}}, \quad (26.90)$$

$$b_1 = \sqrt[4]{q} \sqrt{\frac{1-q}{2-q}} \frac{1}{\sqrt{l - \frac{1}{2}}};$$

числа  $C_2$  и  $C_3$  характеризуют спиновые состояния электрона и удовлетворяют условию

$$C_2^2 + C_3^2 = 1.$$

Для спектра энергии получаем выражение

$$E = c\hbar \left\{ \left[ \frac{\left(l - \frac{1}{2}\right)(2-q)}{R(1-q)} \right]^2 [1 + a^2(2s+1) + b_1^2(2k+1)] + k_0^2 \right\}^{1/2} =$$

$$= \{e_0^2 H^2(R) R^2 + e_0 H(R) \sqrt{1-q} c\hbar (2s+1) +$$

$$+ e_0 H(R) \sqrt{q} c\hbar (2k+1) + (c\hbar k_0)^2\}^{1/2} \approx E_l + E'_{lsk}. \quad (26.91)$$

Здесь  $E_l$  соответствует энергии вращения электрона на равновесной орбите:

$$E_l = [e_0^2 H^2(R) R^2 + m_0^2 c^4]^{1/2},$$

а

$$E'_{lsk} = \hbar\beta\omega_0 [\sqrt{1-q}(s + 1/2) + \sqrt{q}(k + 1/2)] \quad (26.92)$$

— энергии бетатронных колебаний. В случае однородного магнитного поля ( $q = 0$ ) спектр энергии совпадает с найденным выше (см. (19.60)) значением

$$K = \sqrt{k_0^2 + k_3^2 + 4n\gamma},$$

где  $n = l + s$  — главное квантовое число.

Заметим, что в случае неоднородного магнитного поля с аксиальной симметрией оператор поляризации (тензор поляризации)

$$\mu = \sigma + \rho_2 \left[ \sigma \frac{\mathbf{p}}{m_0 c} \right] \quad (26.93)$$

не является интегралом движения. Поэтому проекцию спина на заданное направление можно характеризовать лишь средним значением, которое при вычислении с помощью волновой функции (26.89) равно

$$\bar{\mu}_3 = 2C_2 C_3 \left( 1 - \frac{q}{2} \frac{\bar{z}^2}{R^2} \right). \quad (26.94)$$

При движении электрона в плоскости орбиты вращения электрона коэффициенты  $C_2$  и  $C_3$  допускают простую интерпретацию: при  $C_2 = C_3 = 1/\sqrt{2}$  спин электрона направлен вдоль оси симметрии поля; при  $C_2 = -C_3 = 1/\sqrt{2}$  направление спина противоположно полю. В случае аксиальной фокусировки ( $q \neq 0$ ) проекция спина на направление поля несколько изменяется, однако это изменение остается малым, пока амплитуда  $z$  колебаний достаточно мала:

$$(z/R)^2 \ll 1.$$

Поэтому учет неоднородности поля не может изменить порядка эффекта самополяризации, вычисленного для случая однородного поля (см. (21.43)).

## § 27. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

**а) Замечания о различных методах расчета синхротронного излучения.** При малых энергиях ( $E < 100$  Мэв) синхротронное излучение описывается классической электродинамикой и приводит лишь к небольшим потерям энергии электрона. Однако при возрастании энергии электронов до значений выше нескольких сотен Мэв это излучение становится столь существенным, что приходится компенсировать эти потери с помощью автофазировки Векслера — Мак-Миллана. Начиная с энергий  $E \sim 0,5$  Гэв и выше, без учета квантовых эффектов становится невозможной постройка современных электронных синхротронов и в особенности накопительных колец электронов.

Ниже мы кратко хотим охарактеризовать основные существующие методы расчета.

**б) Решение с помощью релятивистских квантовых уравнений \*).** Решая задачу с помощью уравнения Клейна — Гордона или Дирака, необходимо найти собственные значения для энергии и волновые функции электрона во внешнем макроскопическом магнитном поле. Полученные таким образом решения дают возможность вычислить частоты и интенсивности излучения. Этот метод может быть использован в любой области энергий электронов, начиная с нерелятивистской и кончая ультраквантовой.

В области  $E < E_{1/2} = m_0 c^2 \left( \frac{m_0 c R}{\hbar} \right)^{1/2}$  излучение является классическим, и квантовыми эффектами можно вообще пренебречь. При  $E_{1/2} < E \ll E_{3/2} = m_0 c^2 \left( \frac{m_0 c R}{\hbar} \right)^{3/2}$  (квазиквантовая область) излучение происходит в основном по классическим законам. Однако квантовый характер излучения приводит к возникновению флуктуационного уширения орбиты электронов, а также (в накопителях) к самополяризации спина электронов. В ультраквантовой области  $E \sim E_{3/2}$  не только существенно изменяется форма спектра излучения, но и становится существенным однофотонное рождение электронно-позитронных пар и даже возникновение ливней.

Метод решения с помощью релятивистских квантовых уравнений изложен в четвертой части настоящей монографии (см. §§ 20—21). Он может быть использован как для однородного магнитного поля, так и для неоднородного поля для ускорителей с мягкой фокусировкой.

**в) Квазиклассический учет квантовых флуктуаций.** Этот метод основан на том, что в классическое уравнение движения электрона с радиационным затуханием вводятся флуктуационные силы \*\*), учитывающие дискретный характер излучения фотонов. В основу берутся классические уравнения Дирака — Лоренца для точечного электрона (см. § 11)

$$\begin{aligned} m_0 \ddot{\mathbf{r}} &= -e_0 \dot{\mathbf{t}} \mathbf{E} - \frac{e_0}{c} [\dot{\mathbf{r}} \mathbf{H}] - \frac{2}{3} \frac{e_0^2}{c^5} (\dot{\mathbf{r}} \omega_4^2 - \ddot{\mathbf{r}} c^2), \\ m_0 c^2 \dot{\mathbf{t}} &= -e_0 (\dot{\mathbf{r}} \mathbf{E}) - \frac{2}{3} \frac{e_0^2}{c^3} (\dot{\mathbf{t}} \omega_4^2 - \ddot{\mathbf{t}} c^2), \end{aligned} \quad (27.1)$$

где точкой обозначена производная по собственному времени,  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  — соответственно внешнее электрическое и магнитное

\*) См. работы Соколова, Тернова и др. [3—5, 13].

\*\*\*) См. работы Сэндса [54], Коломенского, Лебедева, а также Робинсона [49, 55].

поля, а  $\omega_4^2 = \ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2 - c^2 \dot{t}^2$  — квадрат четырехмерного ускорения.

Рассмотрим слабофокусирующее магнитное поле, которое в цилиндрических координатах  $r$  и  $\varphi$  в плоскости  $xy$ , т. е. при  $z \rightarrow 0$ , имеет вид (см. (26.5))

$$H_r = -zqb/r^{q+1}, \quad H_\varphi = 0, \quad H_z = b/r^q, \quad (27.2)$$

где  $r^2 = x^2 + y^2$ , а  $q$  — показатель спадания поля, который в случае слабой фокусировки лежит в пределах  $0 < q < 1$ . Электрическое ускоряющее поле в простейшем случае можно выбрать в виде одной бегущей волны [5]

$$E_r = 0, \quad E_\varphi = -\frac{V_0}{2\pi r e_0} \sin(\varphi - \omega_0 t), \quad E_z = 0. \quad (27.3)$$

Внешнее магнитное поле (27.2) стремится удержать электроны в плоскости  $z = 0$  около равновесной круговой орбиты, а электрическое поле (27.3) направлено по касательной к круговой траектории и не создает дополнительного магнитного поля, поскольку  $\text{rot } \mathbf{E} = 0$ . В ультрарелятивистском случае  $E \gg m_0 c^2$  в уравнениях (27.1) можно пренебречь членами  $\sim \ddot{r}$  и  $\ddot{t}$  [5] и, кроме того, положить

$$\omega_4^2 \approx (E/m_0 c^2)^4 \omega^2, \quad (27.4)$$

где  $\omega^2$  — квадрат трехмерного ускорения электрона. Тогда, учитывая, что величина

$$\frac{2}{3} \frac{e_0^2}{c^3} \left( \frac{E}{m_0 c^2} \right)^4 \omega^2 = W \quad (27.4a)$$

равняется классической интенсивности излучения в магнитном поле, уравнения (27.1) могут быть записаны в цилиндрических координатах следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{E}{c^2} (r'' - r\varphi'^2) + \frac{E'r'}{c^2} &= -\frac{e_0 r \varphi'}{c} \frac{b}{r^q} - \frac{r'}{c^2} W, \\ \frac{E}{c^2} (r\varphi'' + 2r'\varphi') + \frac{E'r\varphi'}{c^2} &= \frac{V_0}{2\pi r} \sin(\varphi - \omega_0 t) + \frac{e_0 b r'}{c r^q} - \frac{r\varphi'}{c^2} W, \\ \frac{E}{c^2} z'' + \frac{E'}{c^2} z' + \frac{e_0 \varphi' z}{c} q \frac{b}{r^q} &= -\frac{z'}{c^2} W, \end{aligned} \quad (27.5)$$

$$E' = \varphi' \frac{V_0}{2\pi} \sin(\varphi - \omega_0 t) - W.$$

В последних уравнениях от производных по собственному времени мы перешли к производным по времени  $t$ , которые обозначены штрихом.

Введем теперь малые отклонения

$$\rho = r - R_0, \quad \psi = \varphi - \omega_0 t - \varphi_0, \quad z, \quad \varepsilon = E - E_0 \quad (27.6)$$

от равновесных постоянных значений

$$R_0 = c/\omega_0, \quad E_0 = e_0 R_0 H(R_0) = e_0 b R_0^{1-q},$$

а угол  $\varphi_0$  подбирается из условия, чтобы в уравнениях для колебаний отсутствовал постоянный член (см. ниже).

Ограничиваясь в дальнейшем линейными членами относительно малых отклонений, мы из условия

$$r\omega = R_0\omega_0 = c$$

получаем

$$\psi' = -c\rho/R_0^2. \quad (27.7)$$

Учитывая соотношения (27.6) и (27.7), имеем

$$\begin{aligned} \omega_r &= r'' - r\varphi'^2 = -\frac{c^2}{R_0} \left( 1 - \frac{\rho}{R_0} - \frac{\rho''R_0}{c^2} \right), \\ \omega_\varphi &= r\varphi'' + 2r'\varphi' = \rho' \frac{c}{R_0}, \quad \omega_z = z''. \end{aligned} \quad (27.8)$$

Отсюда в линейном приближении находим: для квадрата трехмерного ускорения

$$\omega^2 = (\omega_r^2 + \omega_\varphi^2 + \omega_z^2) = \frac{c^4}{R_0^2} \left( 1 - 2\frac{\rho}{R_0} - 2\frac{\rho''R_0}{c^2} \right), \quad (27.9)$$

для энергии излучения

$$W = W_0 \left( 1 + \frac{4e}{E_0} - 2\frac{\rho}{R_0} - 2\frac{\rho''R_0}{c^2} \right), \quad (27.10)$$

где постоянная

$$W_0 = \frac{2}{3} e_0^2 \left( \frac{E_0}{m_0 c^2} \right)^4 \frac{c}{R_0^2} \quad (27.11)$$

представляет собою излучение электрона, находящегося на равновесной орбите.

Заметим, что одно из релятивистских уравнений Дирака — Лоренца (27.5) является следствием трех остальных (см. (11.21)). Поэтому первое из этих уравнений мы можем отбросить.

Подставляя в (27.5) вместо  $\varphi - \omega_0 t$  его значение из (27.6), получаем

$$\begin{aligned} \epsilon' - \psi \frac{\omega_0 V_0}{2\pi} \cos \varphi_0 - \psi' \frac{V_0}{2\pi} \sin \varphi_0 + W_0 \left( \frac{4e}{E_0} - \frac{2\rho}{R_0} - \frac{2\rho''R_0}{c^2} \right) = \\ = \frac{\omega_0 V_0}{2\pi} \sin \varphi_0 - W_0. \end{aligned} \quad (27.12)$$

Подберем точку равновесной фазы  $\varphi_0$  из условия, что правая часть равенства (27.12) (т.е. постоянный член) обращается в нуль. Тогда для определения  $\varphi_0$  имеем:

$$\frac{V_0 \omega_0}{2\pi} \sin \varphi_0 = W_0, \quad (27.13)$$

а из (27.5) найдем следующие уравнения для определения колебаний:

$$\rho'' + \omega_0^2(1 - q)\rho + \frac{V_0 \omega_0}{2\pi E_0} \sin \varphi_0 \rho' - c\omega_0 \frac{\varepsilon}{E_0} = 0, \quad (27.14)$$

$$\varepsilon' - \frac{V_0 \omega_0 \cos \varphi_0}{2\pi} \psi + W_0 \left[ 2 \frac{\varepsilon}{E_0} + \frac{\rho}{R} (1 - 2q) \right] = 0, \quad (27.15)$$

$$z'' + q\omega_0^2 z + \frac{W_0}{E_0} z' = 0. \quad (27.16)$$

Решение системы уравнений (27.14) — (27.15) с учетом (27.7) может быть записано в виде

$$\rho = \rho_{\text{бет}} + \rho_{\text{син}}, \quad (27.17)$$

$$\rho_{\text{бет}} = a_1 e^{-\Gamma_1 \frac{t}{2}} \cos(\omega_1 t + \delta_1), \quad (27.18)$$

$$\rho_{\text{син}} = a_2 e^{-\Gamma_2 \frac{t}{2}} \cos(\omega_2 t + \delta_2), \quad (27.19)$$

где собственные частоты колебаний  $\omega_1$  и  $\omega_2$  и декременты затухания  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  при условии, что ускоряющее поле — слабое:

$$\frac{V_0 \cos \varphi_0}{E_0(1 - q)} \ll 1, \quad (27.20)$$

равны \*)

$$\omega_1 = \omega_0 \sqrt{1 - q}, \quad \omega_2 = \omega_0 \left[ \frac{V_0 \cos \varphi_0}{2\pi E_0(1 - q)} \right]^{1/2},$$

$$\Gamma_1 = \frac{q}{1 - q} \frac{W_0}{E_0}, \quad \Gamma_2 = \frac{3 - 4q}{1 - q} \frac{W_0}{E_0}, \quad (27.21)$$

где  $V_0$  — ускоряющее сравнительно слабое поле.

Таким образом, при условии (27.20) уравнения (27.14) и (27.15), описывающие радиальные бетатронные и синхротронные

\*) Коэффициент затухания для радиальных бетатронных колебаний следует также из формулы (26.75), полученной нами из релятивистского квантового уравнения для мягкой фокусировки ( $0 < q < 1$ ). Квазиклассический метод позволяет обобщить эту формулу и на случай жесткой фокусировки ( $|q| \gg 1$ , причем величина  $q$  принимает попеременно то положительные, то отрицательные значения). В случае жесткой фокусировки коэффициент  $\Gamma_1$  становится отрицательной величиной, т.е. мы имеем не затухание, а экспоненциальное по времени возбуждение колебаний, даже ограничиваясь классической теорией («антидемпинг»-эффект). Мы не будем более подробно останавливаться на этом вопросе; заметим лишь, что способы борьбы с «антидемпинг»-эффектом рассмотрены в специальной литературе (см. [49]).

колебания, разделяются, и  $\rho$  может быть представлено в виде суммы быстрых бетатронных  $\rho_{\text{бет}}$  и медленных синхротронных колебаний  $\rho_{\text{син}}$  с соответствующими частотами  $\omega_1$  и  $\omega_2$  и декрементами затухания  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$ .

Решение для вертикальных колебаний может быть найдено из (27.16):

$$z = be^{-\Gamma \frac{t}{2}} \cos(\sqrt{q} \omega_0 t + \delta), \quad (27.22)$$

где декремент затухания

$$\Gamma = W_0/E_0. \quad (27.23)$$

Значения энергии  $\varepsilon$  и фазы  $\psi$  могут быть легко получены из уравнений (27.15) и (27.7).

Как видно, классические уравнения Дирака — Лоренца (27.5) описывают лишь радиационные затухания, которые в отсутствие квантовых эффектов привели бы к сжатию электронного пучка в точку и к прекращению работы ускорителя. Однако учет квантовых эффектов приводит к флуктуационной раскачке.

Таким образом, электронные синхротроны (в особенности накопители) работают по принципу того, что классическое затухание Коломенского — Лебедева — Робинзона приходит в состояние равновесия с квантовым возбуждением Соколова — Тернова (см. ниже). В самом деле, на основании формулы для вероятности излучения (20.62) легко найти, что за один оборот электроном будет излучаться единичное число фотонов:

$$N_{\text{обор}} \sim \frac{e_0^2}{\hbar c} \frac{E}{m_0 c^2}. \quad (27.24)$$

С учетом формулы (4.8) внезапное изменение положения мгновенной равновесной орбиты  $\Delta R_i$  при испускании кванта в момент времени  $t_i$  описывается с помощью дельтаобразной силы вида

$$F_r = m \sum_i \Delta R_i \frac{d}{dt} \delta(t - t_i), \quad (27.25)$$

где  $m = E/c^2$  — масса движущегося электрона. Точно так же излучение кванта изменяет проекцию импульса на ось  $z$  на величину  $\Delta p_{zi}$ , что эквивалентно введению мгновенной силы

$$F_z = \sum_i \Delta p_{zi} \delta(t - t_i). \quad (27.26)$$

Принимая во внимание вышесказанное, мы можем учесть влияние флуктуационного характера излучения на радиально-



фазовые колебания путем введения в правую часть уравнения (27.15) флуктуационного члена

$$\sum_i \hbar \omega_i \delta(t - t_i) - W_0, \quad (27.27)$$

где  $\omega_i$  — частота испущенного фотона. Чтобы проинтегрировать полученную таким образом неоднородную систему (27.14) — (27.15), запишем дельта-функцию в виде интеграла Фурье:

$$\delta(t - t_i) = \frac{1}{2\pi} \int d\omega e^{i\omega(t-t_i)}. \quad (27.28)$$

Тогда для вынужденной части решения  $\rho^{KB}$  мы находим

$$\begin{aligned} \rho^{KB} &= \frac{1}{2\pi} \frac{c\omega_0}{E_0} \sum_i \hbar \omega_i \times \\ &\times \frac{d}{dt} \int d\omega \frac{e^{i\omega(t-t_i)}}{(\omega^2 - \omega_1^2)(\omega^2 - \omega_2^2) + i\omega \frac{W_0}{E_0} (-3\omega^2 + \omega_0^2(3 - 4q))}. \end{aligned} \quad (27.29)$$

Беря интеграл по  $\omega$  с помощью теории вычетов, получаем

$$\begin{aligned} \rho^{KB} &= \rho_{\text{бет}}^{KB} + \rho_{\text{син}}^{KB} = \\ &= \frac{c\omega_0}{E_0} \sum_{t_i < t} \hbar \omega_i \left[ \frac{\cos \omega_1(t-t_i)}{\omega_1^2 - \omega_2^2} e^{-\Gamma_1(t-t_i)/2} + \frac{\cos \omega_2(t-t_i)}{\omega_2^2 - \omega_1^2} e^{-\Gamma_2(t-t_i)/2} \right]. \end{aligned} \quad (27.30)$$

Амплитуда колебаний  $a = \sqrt{2\langle \rho^2 \rangle}$  определяется с помощью усреднения, которое производится по формуле

$$\langle \rho^2 \rangle = \lim_{\Delta t_i \rightarrow 0} \sum_i \rho_i = \int_0^\infty dy \omega(y) \int_0^t dt' \rho^2(t'), \quad (27.31)$$

где  $\Delta t_i = t_{i+1} - t_i$ , а  $\omega(y)$  — вероятность излучения (см. формулу (21.36) при  $\xi = 0$ ).

Учитывая (27.31), а также тот факт, что фотоны излучаются статистически независимо, т. е. для среднего значения мы имеем

$$\overline{\cos \omega_{1,2}(t - t_i) \cos \omega_{1,2}(t - t_j)} = \frac{1}{2} \delta_{ij},$$

и вычисляя интеграл по  $y$ , находим:

$$a^2 = 2\langle \rho^2 \rangle = a_{\text{бет}}^2(t) + a_{\text{син}}^2(t), \quad (27.32)$$

где

$$a_{\text{бет}}^2(t) = a_1^2 \exp\left(-\int_0^t \Gamma_1(t') dt'\right) + \\ + \frac{55}{24\sqrt{3}} \frac{e_0^2 \hbar}{R_0 m_0^2 c^2 (1-q)^2} \int_0^t dt'' \left(\frac{E_0(t'')}{m_0 c^2}\right)^5 \exp\left(-\int_{t'}^t \Gamma_1(t'') dt''\right),$$

$$a_{\text{син}}^2(t) = a_2^2 \exp\left(-\int_0^t \Gamma_2(t') dt'\right) + \\ + \frac{55}{24\sqrt{3}} \frac{e_0^2 \hbar}{R_0 m_0^2 c^2 (1-q)^2} \int_0^t dt'' \left(\frac{E_0(t'')}{m_0 c^2}\right)^5 \exp\left(-\int_{t'}^t \Gamma_2(t'') dt''\right).$$

Здесь мы учли медленное адиабатическое изменение энергии  $E_0 = E_0(t)$  в ускорителе и сделали замену  $\Gamma t \rightarrow \int_0^t \Gamma(t') dt'$ .

При больших значениях времени  $t \gg 1/\Gamma_1$  и  $t \gg 1/\Gamma_2$  для амплитуды радиальных колебаний  $a$  получаем следующее предельное значение \*):

$$a = \sqrt{a_{\text{бет}}^2 + a_{\text{син}}^2}, \\ \left. \begin{matrix} a_{\text{бет}}^2 \\ a_{\text{син}}^2 \end{matrix} \right\} = \frac{55}{24\sqrt{3}} \frac{e_0^2 \hbar}{R_0 m_0^2 c^2 (1-q)^2} \left(\frac{E_0}{m_0 c^2}\right)^5 \left\{ \begin{matrix} 1/\Gamma_1, \\ 1/\Gamma_2. \end{matrix} \right. \quad (27.33)$$

Таким образом, с учетом флуктуационного характера излучения амплитуда  $a$  стремится не к нулю (как следовало из классической теории), а к конечному пределу (27.33), что находится в согласии с экспериментальными данными, полученными Королевым, Куликовым и др. на синхротроне ФИАН (рис. 17), а также Воробьевым и др. на Томском синхротроне «Сириус» [56], [57].

Оценим также влияние квантовых флуктуаций на синхротронные фазовые колебания. С учетом формулы (27.7) из (27.30) легко получить

$$\langle \Psi_{\text{син}}^2 \rangle = \left(\frac{c}{\omega_2 R_0^2}\right)^2 \langle \rho_{\text{син}}^2 \rangle = \frac{55\sqrt{3}}{64(3-4q)} \frac{\hbar c}{e_0^2} \frac{m_0 c^2}{E_0} \text{tg } \varphi_0.$$

\*) Подставляя в (27.33) вместо коэффициента затухания значения (27.21), мы с помощью метода Коломенского — Лебедева — Робинсона [49] найдем предельное значение для амплитуды бетатронных колебаний, совпадающее со значением, полученным с помощью релятивистской квантовой теории (см. (26.77)).

При сравнительно больших  $\varphi_0$  эта флуктуационная величина может достигать значений, выходящих из области устойчивых колебаний, охватываемой так называемой сепаратриссой [58, 59], и электроны будут выбывать из стационарного режима ускорения. Подобное явление было экспериментально наблюдаено Сэндсом [11], который обнаружил на синхротроне Калифорнийского Технологического института, что квантовые флуктуации фазы выводят электроны из стационарного режима и приводят, если не

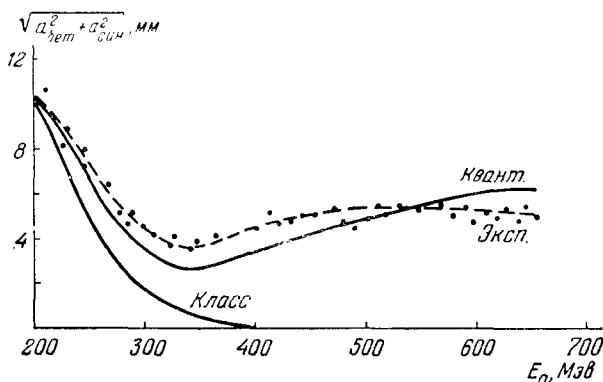


Рис. 17. Экспериментальное обнаружение квантового возбуждения радиальных бетатронных и синхронных колебаний.

принять соответствующих мер, к прекращению работы синхротрона \*).

Заметим, что развитый выше метод может быть использован лишь в квазиклассическом случае, и с его помощью нельзя рассматривать самополяризацию электронов. Однако его преимуществом является относительная простота и возможность применения как к слабофокусирующему, так и к жесткофокусирующему полю ( $|q| \gg 1$ , «антидемпинг»-эффект).

**г) Операторный метод \*\*).** В основе метода лежит использование зависящих от времени (гейзенберговских) операторов  $\mathbf{r}(t)$  и  $\mathbf{v}(t)$  электрона в магнитном поле. При этом квантовые эф-

\*) Предельное значение для амплитуды вертикальных колебаний может быть найдено из уравнения (27.6) путем введения в правую часть дополнительной флуктуационной силы (27.26), что приводит к результату (26.76). В формуле (27.26) мы должны положить  $\Delta p_{z1} = \hbar \omega \cos \theta_1 / c$ . Заметим, что эксперимент дает значительно большее значение для амплитуды вертикальных колебаний, чем это следует из данного вывода. Этот факт остается еще необъясненным. Возможно, что это связано с перекачкой радиальных колебаний в вертикальные.

\*\* ) См. Швингер [17], Байер и Катков [60].

факты, связанные с некоммутативностью динамических переменных электрона между собой, малы и имеют порядок

$$\frac{\hbar\omega_0}{E} = \frac{H}{H_0} \left( \frac{m_0c^2}{E} \right)^2 \ll 1, \quad (27.34)$$

где  $\omega_0 = c/R$ ,  $R$  — радиус квазиклассической орбиты электрона, а его энергия  $E \gg m_0c^2$  и магнитное поле  $H \ll H_0 = \frac{m_0^2c^3}{e_0\hbar} = 4,41 \cdot 10^{13}$  эс. Поэтому некоммутативностью операторов электрона между собой можно пренебречь, учитывая лишь их коммутаторы с операторами электромагнитного поля излучения.

Матричный элемент перехода электрона при излучении фотона в первом порядке теории возмущений

$$V_{ab} = -\frac{i}{\hbar} \frac{e_0}{L^{3/2}} \sqrt{\frac{2\pi c\hbar}{\kappa}} \int_0^t e^{i\kappa t} dt \int \varphi_a^* Q \varphi_b d^3x, \quad (27.35)$$

$$Q = \frac{v_{\zeta'}^{\dagger}}{\sqrt{2H}} (\alpha\alpha^+) e^{-i\kappa r} \frac{v_{\zeta}}{\sqrt{2H}}$$

записывается с помощью квазиклассических волновых функций частицы во внешнем поле, когда волновые функции  $\psi_a$  и  $\psi_b$ , заданы в операторной форме:

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{2H}} v_{\zeta}(P_{\mu}) e^{-iHt/\hbar} \varphi(\mathbf{r}).$$

здесь  $\varphi_b(\mathbf{r})$  и  $\varphi_a(\mathbf{r})$  — квазиклассические скалярные волновые функции начального  $b$  и конечного  $a$  состояний электрона, а спиноры  $v_{\zeta}$  и  $v_{\zeta'}$ , которые описывают их спиновые свойства, имеют вид

$$v_{\zeta}(P_{\mu}) = \left( \begin{array}{c} \sqrt{H + m_0c^2} \omega_{\zeta} \\ (\sigma\mathbf{P}) \\ \sqrt{H + m_0c^2} \omega_{\zeta} \end{array} \right), \quad (27.36)$$

где составляющие четырехмерного оператора импульса

$$P_{\mu} = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x_{\mu}} + \frac{e_0}{c} A_{\mu}.$$

Принимая во внимание, что  $x_4 = i'ct$ ,  $A_4 = i'\Phi = 0$ , найдем:

$$\mathbf{P} = \frac{\hbar}{i} \nabla + \frac{e_0}{c} \mathbf{A},$$

$$P_4 = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x_4} = \frac{i'H}{c} = i' \sqrt{m_0^2c^2 + \mathbf{P}^2}.$$

Величина  $\omega_{\zeta} = \begin{pmatrix} \omega_{\zeta_1} \\ \omega_{\zeta_2} \end{pmatrix}$  представляет собой двухкомпонентный спинор, описывающий спиновые свойства электрона,  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{a}^+$  — ампли-

туды излучаемых фотонов, с помощью которых можно, в частности, учесть и их поляризацию. Заметим, что явный вид функций  $\varphi(\mathbf{r})$  в дальнейшем не используется. Переходя в (27.35) к гейзенберговскому представлению для операторов частицы  $\mathbf{r}(t)$  и скорости  $\mathbf{v}(t)$  и производя суммирование по конечным состояниям с учетом полноты системы волновых функций  $\varphi_a$ , находим вероятность излучения:

$$d\omega = \frac{e_0^2 c}{4\pi^2 \hbar} \frac{d^3 \kappa}{\kappa} \int d\tau e^{-i\omega\tau} \int \varphi_b^* R^+(t_1) e^{i\kappa\mathbf{r}(t_1)} e^{-i\kappa\mathbf{r}(t_2)} R(t_2) \varphi_b d^3 x, \quad (27.37)$$

где  $t_1 = t + \tau/2$ ,  $t_2 = t - \tau/2$ . В формуле (27.37) оператор

$$R(t) = \frac{v_{\xi}^{\dagger}(P_{\mu}'(t))}{\sqrt{2H'}} (a a^{\dagger}) \frac{v_{\xi}(P_{\mu}(t))}{\sqrt{2H}} \quad (27.38)$$

зависит от времени  $t$ ,  $P_{\mu}' = P_{\mu}(t) - \hbar \kappa_{\mu}$  (где  $\kappa_4 = i'\kappa$ ),

$$H'(t) = P_4' \frac{c}{i'} = H(t) - c\hbar\kappa, \quad P'(t) = P(t) - \hbar\kappa.$$

Оператор Гейзенберга  $P_{\mu}(t)$  зависит от времени  $t$ . Вычисление (27.37) сводится к коммутированию операторов  $\mathbf{r}(t_1)$  и  $\mathbf{r}(t_2)$  и последующему усреднению по квазиклассическим состояниям  $\varphi_b$ , приводящему к замене операторов  $\mathbf{r}(t)$  и  $\mathbf{v}(t)$  соответствующими классическими величинами. Окончательно получается следующая формула для вероятности:

$$d\omega = -\frac{e_0^2}{\hbar c} \frac{\omega d\omega}{4\pi^2} d\Omega \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \left( \frac{m_0^2 c^4}{EE'} + \frac{E^2 + E'^2}{4E'^2} \frac{\tau^2}{c^2} \left( \frac{d\mathbf{v}}{dt} \right)^2 \right) \times \\ \times \exp \left\{ -i\omega\tau \frac{E}{E'} \left( 1 - \frac{(\kappa^0 \mathbf{v})}{c} + \frac{\tau^2}{24c^2} \left( \frac{d\mathbf{v}}{dt} \right)^2 \right) \right\} > 0, \quad (27.39)$$

где  $E' = E - \hbar\omega$ ,  $\kappa^0 = \kappa/\kappa$ ,  $\omega = c\kappa$ .

С помощью (27.37) — (27.39) легко получить вероятность синхротронного излучения, выраженную через функции  $K_{1/3}$  и  $K_{2/3}$ , а также самополяризацию спина электронов (21.36).

Изменение динамической величины  $F(P_{\mu})$  частицы под влиянием излучения описывается уравнением

$$\frac{dF(P_{\mu})}{dt} = \int d\omega [F(P_{\mu}'(t)) - F(P_{\mu}(t))] + \left( \frac{dF}{dt} \right)_i, \quad (27.40)$$

где  $(dF/dt)_i$  не зависит от излучения, а вероятность  $d\omega$  определяется формулой (27.39). Заметим, что в (27.40)  $P_{\mu}(t)$ ,  $P_{\mu}'(t) = P_{\mu}(t) - \hbar\kappa_{\mu}$  — классические значения импульса частицы (не оператора), связанные с оператором  $P_{\mu}(t)$  соотношением  $P_{\mu}(t) = \int \varphi_b^{\dagger} P_{\mu}(t) \varphi_b d^3 x$ .

Используя (27.39) и (27.40), можно получить как классическое затухание, так и квантовую раскачку бетатронных и синхротронных колебаний частицы в неоднородном фокусирующем поле ускорителей (см. (27.32)).

Итак, при исследовании синхротронного излучения в настоящее время применяются три теоретических метода. Первый из них [3—5] основан на решениях уравнения Дирака и позволяет описать движения электрона в постоянном и однородном магнитном поле. Его применение дает возможность получить точные формулы и лишь при конкретном их анализе сделать те или иные приближения, порядок которых легко оценить математически.

Этот метод позволяет провести исследования во всем интервале изменения энергии, начиная с нерелятивистского и кончая ультраквантовым случаем. С его помощью удалось получить не только классические релятивистские формулы, но учесть также и квантовые эффекты, которые начинают проявляться в так называемой квазиквантовой области (при  $H \sim 10^4$  гс) с энергиями порядка 500 Мэв ( $E_{1/5} \leq E \ll E_{1/2}$ ). Точно так же впервые было предсказано квантовое возбуждение бетатронных колебаний и явление самополяризации и было впервые исследовано влияние квантовых эффектов на интенсивность излучения, которые начинают проявляться в так называемой ультраквантовой области  $E \sim 10^3$  Гэв ( $E \geq E_{1/2}$ ). На основе этого метода удалось получить не только квантовое возбуждение (основной член), но и в неоднородном поле — классическое затухание бетатронных колебаний, которое, как ни странно, описывается последующими членами разложения.

С помощью теории Дирака пока что не удалось исследовать так называемую жесткую фокусировку и учесть различные технические детали в синхротроне, которые вносят некоторые поправки к полученным результатам. Все основные явления, впервые предсказанные с помощью квантового метода, затем были обнаружены экспериментально.

Возможно, что только с помощью релятивистской квантовой теории удастся исследовать движение электрона в сверхсильных магнитных полях  $H \geq H_0$ , существование которых по всем данным должно наблюдаться в пульсарах, или нейтронных звездах.

Второй метод учета квантовых эффектов, развитый в работах [49, 54], в математическом отношении значительно проще первого и позволяет довольно элементарно учесть многие технические детали, влияющие на квантовые эффекты, например, неоднородность поля и классический эффект затухания, который в случае мягкой фокусировки приводит к «демпинг»-эффекту, а в случае жесткой фокусировки — к «антидемпинг»-эффекту.

Однако введение квантовых флуктуационных сил в классическую теорию носит полуэмпирический характер. Поэтому выводы этой теории могут быть проверены лишь на основе предельного перехода к задачам, допускающим точные решения по квантовой теории Дирака. Наконец, третий метод исследования, который можно назвать операторным, был развит в работах [60]. Он позволяет учесть не только квантовые флуктуационные силы, как в [49], но и исследовать также явление самополяризации. В операторном методе приходится вводить приближения с самого начала и исследовать в процессе всего вычисления порядок отброшенных членов. Многие результаты, полученные в квазиквантовой области с помощью точных решений уравнения Дирака, в том числе явление самополяризации, могут быть получены также с помощью весьма перспективного операторного метода, позволяющего сравнительно просто учитывать многие технические детали.

Операторный метод, по-видимому, пригоден только для больших квантовых чисел (точнее, при  $E \gg m_0 c^2$ ) при сравнительно слабых магнитных полях  $H \ll H_0$ , в противоположность точному методу, основанному на квантовом уравнении Дирака, позволяющему исследовать область как больших, так и малых квантовых чисел, т. е. случаи  $E \geq m_0 c^2$  и любые  $H$ , включая область  $H \geq H_0$ .

**д) Основы экспериментального исследования синхротронного излучения и новое в его практическом использовании.** В весьма краткой истории развития синхротронного излучения можно отметить три этапа.

На первом этапе синхротронное излучение рассматривалось как исключительно отрицательное явление, поскольку потери энергий на излучение определили верхнюю границу энергии электронов в бетатроне\*). После появления первой работы Иваненко и Померанчука (1944 г.) [61] все запроектированные и строящиеся бетатроны в США с энергией в несколько сот Мэв и выше были законсервированы. Поэтому была поставлена задача «борьбы» с синхротронным излучением. Автофазировка, разработанная Векслером в СССР и Мак-Милланом в США в 1954 г. [63], дала возможность строить электронные циклические ускорители — синхротроны на более высокие энергии, поскольку она позволяла компенсировать не только релятивистское увеличение массы (как в бетатроне), но и потери энергии на излучение.

Второй этап связан с изучением физических свойств самого синхротронного излучения с помощью обобщения классической и квантовой электродинамики на ультрарелятивистский случай и экспериментальной проверки этих свойств.

\*) Теория бетатрона была разработана Видероз, Терлецким, Керстом (см. монографию Воробьева [62]).

В 1948 г. Иваненко и Соколов [38] нашли формулу для спектрального распределения синхротронного излучения. Тот же результат годом позже (1949) был опубликован и Швингером (см. формулу (10.119)). Само синхротронное излучение впервые было обнаружено Блюнттом по радиационному сокращению радиуса орбиты, а в 1947 г. Сьюте и группа Поллака наблюдали синхротронное излучение визуально. Спектр синхротронного излучения исследовался Адо и Черенковым [64] на ускорителе ФИАН С-25 при энергии электронов 150—225 Мэв. Томбулиан и Гартман детально изучили спектр синхротронного излучения в вакуумной ультрафиолетовой области спектра (так называемый вакуумный ультрафиолет) при максимальной энергии электронов в 320 Мэв [65] (русский перевод см. в [66]).

Систематическое экспериментальное исследование свойств синхротронного излучения у нас в стране было начато учеными Московского университета совместно с учеными Физического Института АН СССР еще в 1954 г., сначала на синхротроне С-25 с энергией 250 Мэв, а несколько позже на синхротроне С-60 с энергией 680 Мэв.

Поляризационные свойства синхротронного излучения были экспериментально исследованы Королевым и Куликовым с сотрудниками на синхротроне ФИАН (см. § 10). В этих опытах в согласии с теоретическими расчетами были обнаружены две компоненты линейной поляризации излучения, а затем и круговая поляризация [13]. Согласно теории, начиная с энергии порядка 500 Мэв квантовые флуктуации должны менять классическую картину движения электрона в ускорителе [3]. Экспериментально квантовые флуктуации радиуса были обнаружены в опытах Королева и Куликова с сотрудниками [56] на синхротроне ФИАН на 680 Мэв, а затем группой Воробьева на Томском ускорителе «Сириус» \*). Помимо радиационного затухания, в этих опытах было наглядно подтверждено существование квантового возбуждения колебаний (см. выше рис. 17).

В 1963 г. был предсказан теоретически еще эффект самополяризации электронов в магнитном поле за счет синхротронного излучения [14]. Недавно этот эффект был обнаружен экспериментально на накопителе в Орсе (Франция) [15, 16]. Кроме того, как мы указывали выше, синхротронное излучение нашло применение в астрофизике (астрофизики его называют магнито-тормозным).

Наконец, наступил третий этап развития синхротронного излучения, связанный с широким его использованием в

---

\*) Томский ускоритель «Сириус» обладает наибольшей энергией (1,2 Гэв) из существующих электронных синхротронов с мягкой фокусировкой. Более подробно он описан в статье Воробьева и др. [67].



экспериментах по физике твердого тела, химии, биологии и др. В связи с этим встал вопрос о строительстве специальных источников синхротронного излучения, лучшими из которых наряду с ондуляторами и электронными синхротронами оказываются накопительные кольца \*).

Особенно интересными являются последние работы по применению синхротронного излучения для рентгеноструктурного анализа в молекулярной биологии. При этом синхротрон используется как мощный источник рентгеновских лучей. Интенсивность излучения при  $\lambda = 2 \text{ \AA}$  после монохроматизации на два порядка выше, чем у лучших рентгеновских источников. Заметим, что максимум интенсивности излучения для ускорителя ДЭЗИ приходится на  $0,3 \text{ \AA}$ .

Изучение фотохимического действия синхротронного излучения позволяет перекрыть область энергии квантов, промежуточную между обычной фотохимией и радиационной химией.

Этот практически единственный калибровочный источник (с заданной поляризацией и кривой для интенсивности излучения) в области вакуумного ультрафиолета и мягкого рентгена используется так же, как светометрический стандарт.

При всем многообразии методов исследования спектроскопии твердого тела наиболее плодотворным до настоящего времени оказался метод с использованием синхротронного излучения. Оптические исследования твердого тела до этого были существенно ограничены отсутствием подходящих источников в области энергий, превышающих  $10 \text{ эв}$  (длина волны короче  $1200 \text{ \AA}$ ). Синхротронное излучение позволило надежно измерять оптические характеристики твердого тела в широкой области спектра от ультрафиолета до рентгена. В диапазоне энергий от  $5$  до  $50 \text{ эв}$  сосредоточена основная структура электронного спектра, характерная для твердого тела: межзонные переходы, экситоны, плазмоны. Важную информацию об электронной структуре кристалла дают также и спектры электронных переходов из внутренних оболочек, образующих кристалл атомов. Возбуждение этих переходов требует уже энергий до нескольких сотен электрон-вольт.

Исследования спектров поглощения и отражения твердых тел дополняются изучением рентгеновских эмиссионных спектров при возбуждении синхротронным излучением. Важную информацию дают также изучения энергетического и углового распределения фотоэлектронов, исследование спектров действия синхротронного излучения в области больших энергий кванта, в частности, измерения спектров возбуждений люминесценции.

---

\* Более подробно применение синхротронного излучения описано в сб. [66] (см. также [68—72]).

Исследования свойств самого синхротронного излучения продолжают и имеют большое значение для выяснения новых возможностей использования синхротронного излучения, а также для проверки ряда выводов релятивистской электродинамики.

В настоящее время во многих странах, где имеются электронные ускорители, ведутся спектроскопические и рентгеноструктурные исследования с применением синхротронного излучения. Большая группа экспериментаторов под руководством Хензела и Скибовского\*) работает на электронном ускорителе ДЭЗИ (Гамбург, ФРГ), занимаясь главным образом спектроскопией твердого тела. В последнее время здесь начаты работы по биологии и молекулярной спектроскопии. Пуск накопителя ДОРИС в комплексе этого научного центра, а также строительство нового оптического канала на синхротроне позволяют существенно расширить работы по биологии, молекулярной спектроскопии и спектроскопии твердого тела.

В США эксперименты с использованием синхротронного излучения были начаты в Национальном бюро стандартов. В настоящее время группа Висконсинского университета ведет исследования по спектроскопии твердого тела и газов на накопителе с энергией 240 Мэв. На ускорителе в Кембридже (Массачусеттс, США) также ведутся спектроскопические работы. В Японии большая группа синхротронного излучения работает в Институте ядерных исследований Токийского университета. Помимо действующего синхротрона здесь строится накопитель, который будет использоваться как источник излучения. Два оптических канала для спектроскопических исследований созданы в Дарзбери (Англия) на ускорителе НИНА на 4 Гэв. Есть оптические каналы на ускорителе во Фраскати (Италия), в Лунде (Швеция) и в Орсе (Франция).

Многие устаревшие для задач ядерной физики ускорители используются исключительно как источники света. Вместе с тем строятся новые накопители, специально предназначенные для использования в качестве источников синхротронного излучения.

С 1968 года группа сотрудников МГУ, занимающихся синхротронным излучением, совместно с лабораторией электронов высоких энергий ФИАН, руководимой Черенковым, используют для вакуумной ультрафиолетовой спектроскопии синхротронное излучение ускорителя ФИАН на 680 Мэв. Для этой цели создан специальный оптический канал. На этой установке впервые получены оптические характеристики многих кристаллов в спектральной области до 50 эв [68, 70].

Использование синхротронного излучения позволило получить спектры отражения ряда диэлектриков и полупроводников

\*) Эти работы изложены в сб. [66], а также [72].

в области фундаментального поглощения, в частности, в лаборатории ДЭЗИ были исследованы монокристаллы сапфира, фторида кадмия (рис. 18), сульфида цинка, щелочно-земельных сульфатов и целого ряда других соединений. Исследовались оптические характеристики щелочноземельных оксидов и сульфидов. Высокая степень поляризации синхротронного излучения была использована, в частности, для измерения спектров отражения сапфира при различной ориентации оптической оси кристалла по отношению к электрическому вектору синхротронного излучения [66].

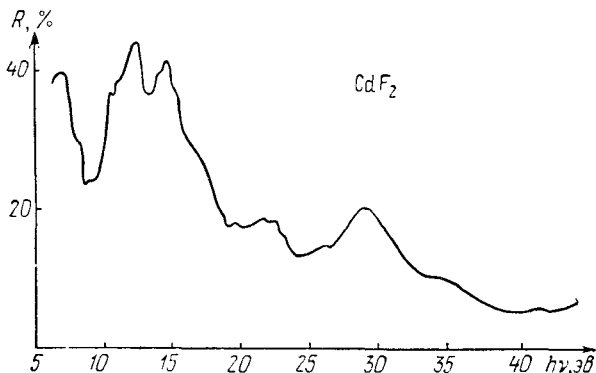


Рис. 18. Спектр отражения монокристалла фторида кадмия, полученный с помощью синхротронного излучения.

Интересные результаты были получены при исследовании спектров возбуждения люминесценции кристаллофосфоров. При возбуждении квантами, энергия которых превышает две ширины запрещенной зоны, наблюдалось увеличение квантового выхода люминесценции — эффект фотонного умножения, заключающийся в том, что один квант, возбуждающий радиации, рождает два и более квантов свечения.

Работы по вакуумной ультрафиолетовой спектроскопии и синхротронному излучению продолжают экспериментаторами и теоретиками МГУ совместно с лабораторией фотомезонных процессов ФИАН на новом ускорителе на 1,3 Гэв в Пахре (в лаборатории Черенкова), который впоследствии будет использован в качестве накопителя. На ускорителя в Пахре сооружается несколько оптических каналов, на которых можно проводить эталонирование, а также проведение экспериментов по физике твердого тела, молекулярной физике и биологии [70].

Эксперименты по синхротронному излучению развертываются и в других научных центрах нашей страны: в Ереване на уско-

рителе АРУС на 6 Гэв (см. [73]), но с жесткой фокусировкой и малым временем жизни, в Томске на 1,2 Гэв с мягкой фокусировкой и сравнительно большим временем жизни [67], в Новосибирске, где впервые в СССР построены накопительные кольца [16], в Институте Физических проблем АН СССР, где проектируется специальный источник синхротронного излучения [71].

Спектроскопия синхротронного излучения, включающая в себя вакуумную ультрафиолетовую и рентгеновскую части спектра, развивается все шире и шире, открывая перед теоретиками и экспериментаторами (см. [74—76]) новые области, ранее мало доступные для исследования\*).

Много интересных результатов с элементарными частицами получены на Серпуховском протонном ускорителе с энергией 70 Гэв (см. [78]).

Весьма перспективны эксперименты на электронном синхротроне по исследованию волновых свойств отдельных частиц (например интерференция одного электрона или одного фотона) [79]. С другой стороны, возникают и новые проблемы, связанные с ультрарелятивистским движением пучка электронов, состоящего из многих частиц.

---

\*) Самым мощным синхротроном с жесткой фокусировкой является электронный синхротрон (Корнельский — США) с энергией в 10 Гэв [77].

## ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

### I. Дельта-функция и ее применение

1. П. А. М. Дирак, Принципы квантовой механики, Физматгиз, 1960.
2. А. А. Соколов, Дельта-функция и ее применение к решению некоторых задач геофизики, Свердловск, 1946.
3. Д. Д. Иваненко, А. А. Соколов, Классическая теория поля, Гостехиздат, 1951.
4. Сб. «Синхротронное излучение», под ред. А. А. Соколова и И. М. Тернова, «Наука», 1966; A. A. Sokolov, I. M. Ternov, Synchrotron Radiation, Akademie-Verlag, Berlin, 1968.
5. Сб. «Синхротронное излучение в исследовании твердых тел», составленный О. Ф. Куликовым и В. В. Михайлиным, под ред. А. А. Соколова, «Мир», 1970.
6. C. W. Misner, Phys. Rev. Letters 28, 994 (1972); J. A. Tyson, D. H. Douglass, Phys. Rev. Letters 28, 991 (1972).
7. M. Davis et al., Phys. Rev. Letters 27, 1466 (1971).
8. И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилор, Обобщенные функции и действия над ними, Физматгиз, 1958.

### II. Классическая электродинамика

1. И. Е. Тамм, Основы теории электричества, Гостехиздат, 1946.
2. Я. И. Френкель, Электродинамика, т. I, ОНТИ, 1934.
3. Д. Д. Иваненко, А. А. Соколов, Классическая теория поля, Гостехиздат, 1951.
4. Р. Беккер, Электронная теория, ОНТИ, 1936.
5. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Теория поля, 6-е изд., «Наука», 1973.
6. В. А. Фок, Теория пространства, времени и тяготения, Физматгиз, 1961.
7. А. А. Соколов, Введение в квантовую электродинамику, Физматгиз, 1958.
8. Я. И. Френкель, Курс теоретической механики, Гостехиздат, 1940.
9. А. Вебстер, Механика материальных точек, твердых и жидких тел, ОНТИ, 1933.
10. А. А. Соколов, Ю. М. Лоскутов, И. М. Тернов, Квантовая механика, «Просвещение», 1965.
11. Л. Бриллюэн, Атом Бора, ОНТИ, 1935.
12. А. Зоммерфельд, Строение атома и спектры, т. I, Гостехиздат, 1956.
13. D. M. Volkov, Zs. f. Phys. 94, 750 (1935).
14. R. Redmond, J. Math. Phys. 6, 1163 (1965).
15. П. А. Черенков, ДАН СССР 2, 451 (1934); С. И. Вавилов, ДАН СССР 2, 457 (1934); И. М. Франк, И. Е. Тамм, ДАН СССР 14, 107 (1937).
16. П. А. Черенков, И. Е. Тамм, И. М. Франк, Нобелевские лекции 1958 г., УФН 68, 377, 387, 397 (1959).
17. А. Б. Кукунов, Вестник Моск. унив., Физика и астр., № 5, 606 (1971).
18. Д. Джелли, Черенковское излучение, ИЛ, 1960.
19. Г. Н. Ватсон, Теория бесселевых функций, ч. I, ИЛ, 1949.
20. А. Н. Матвеев, Вестник Моск. унив., Физика и астр., № 10, 33 (1951).

21. *H. Motz*, J. Appl. Phys. **22**, 527 (1957); сб. «Миллиметровые и субмиллиметровые волны», ИЛ, 1952; *Н. А. Корхмазян, С. С. Элбакян*, ДАН СССР **203**, 791 (1972); *В. Н. Байер, В. М. Катков, В. М. Страховенко*, ЖЭТФ **63**, 2121 (1972).
22. *А. А. Соколов, И. М. Тернов и др.*, Изв. вузов, Физика, № 5, 43 (1968); Zs. f. Phys. **211**, 1 (1968); *А. А. Соколов, В. Ч. Жуковский, М. М. Колесникова*, Изв. вузов, Физика, № 2, 108 (1969).
23. *А. А. Соколов, Д. В. Гальцов, М. М. Колесникова*, Изв. вузов, Физика, № 4, 14 (1971).
24. *G. A. Schott*, Electromagnetic Radiation, Cambridge, 1912.
25. *А. А. Соколов, И. М. Тернов*, ЖЭТФ **31**, 473 (1956).
26. *И. С. Градштейн, И. М. Рыжик*, Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, 5-е изд., «Наука», 1971.
27. *Д. Д. Иваненко, А. А. Соколов*, ДАН СССР **59**, 1551 (1948); J. Schwinger, Phys. Rev. **75**, 1912 (1949); Phys. Rev. **D 7**, 1696 (1973).
28. *Ф. А. Королев, О. Ф. Куликов и др.*, ДАН СССР **110**, 542 (1956); *P. Jost*, Phys. Rev. Letters **4**, 558 (1960); *А. А. Воробьев, М. М. Никитин, А. В. Кожевников*, Атомная энергия **29**, 389 (1970); *М. Н. Никитин и др.*, Изв. вузов, Физика, № 4, 164 (1972); № 3, 104 (1972).
29. Сб. «Синхротронное излучение», под ред. *А. А. Соколова и И. М. Тернова*, «Наука», 1966.
30. Сб. «Синхротронное излучение в исследовании твердых тел», составленный *О. Ф. Куликовым и В. В. Михайлиным*, под ред. *А. А. Соколова*, «Мир», 1970.
31. *H. Alfvén, N. Herlofson*, Phys. Rev. **78**, 616 (1950); *И. С. Шкловский*, Космическое радиоизлучение, Гостехиздат, 1956; *Д. Я. Маргынов*, Курс общей астрофизики, «Наука», 1971.
32. *А. Пахольчик*, Радиоастрофизика, «Мир», 1973.
33. *K. Westfold*, Astrophys. J. **130**, 241 (1959).
34. *В. Л. Гинзбург, С. И. Сыроватский*, УФН **87**, 65 (1965).
35. *В. Л. Гинзбург и др.*, УФН **94**, 63 (1968).
36. *P. A. M. Dirac*, Proc. Roy. Soc. **A167**, 1948 (1938).
37. *M. Born*, Ann. d. Phys. **30**, 1 (1909); *В. Паули*, Теория относительности, Гостехиздат, 1947.
38. *В. Л. Гинзбург*, УФН **97**, 569 (1969).
39. *А. А. Соколов*, Вестник Моск. унив., Физика и астр., № 2, 33 (1947); ЖЭТФ **18**, 280 (1948).
40. *Дж. Джексон*, Классическая электродинамика, «Мир», 1965.
41. *F. Rohrlich*, Amer. J. Phys. **28**, 639 (1960).
42. *А. А. Sokolov, B. A. Lysov*, Phys. Rev. **128**, 2422 (1962).
43. *M. Schwartz*, Phys. Rev. **123**, 1903 (1961).
44. *А. А. Соколов, Б. А. Лысов, М. М. Колесникова*, Труды МОПИ по теории поля, 1965, вып. 1, стр. 3.
45. *А. А. Соколов, М. М. Колесникова*, Вестник Моск. унив., Физика и астр., № 2, 198 (1971); *А. А. Соколов*, в сб. статей памяти *А. З. Петрова* «Гравитация», Наукова Думка, Киев, 1972, стр. 255.
46. *Г. Е. Гернет*, ДАН СССР **168**, 63 (1966).
47. *А. В. Борисов, Ю. В. Грац*, Изв. вузов, Физика, № 3, 87 (1972).
48. *N. D. Sen Gupta*, Phys. Letters **32A**, 103 (1940).
49. *G. N. Plass*, Rev. Mod. Phys., **33**, 37 (1961).

### III. Квантовая релятивистская теория

1. *А. А. Соколов*, Введение в квантовую электродинамику, Физматгиз, 1958.
2. *А. А. Соколов, И. М. Тернов*, Квантовая механика и атомная физика, «Просвещение», 1970.
3. *W. Heisenberg, W. Pauli*, Zs. f. Phys. **56**, 1 (1929); **59**, 168 (1930).
4. *P. A. M. Dirac*, Proc. Roy. Soc. **A114**, 243 (1927).

5. *P. Jordan, O. Klein, Zs. f. Phys.* **45**, 751 (1927).
6. *А. И. Ахиезер, В. Б. Берестецкий*, Квантовая электродинамика, 3-е изд., «Наука», 1969.
7. *В. Гайлер*, Квантовая теория излучения, ИЛ, 1956.
8. *V. A. Fock, V. Podolsky, Sow. Phys.* **1**, 801 (1932).
9. *O. Klein, Zs. f. Phys.* **37**, 895 (1926); *W. Gordon, Zs. f. Phys.* **40**, 121 (1926).
10. *V. Fock, Zs. f. Phys.* **38**, 242 (1926).
11. *С. Швeбер*, Введение в релятивистскую квантовую теорию поля, ИЛ, 1963.
12. *W. Pauli, V. Weisskopf, Helv. Phys. Acta* **7**, 709 (1934).
13. *P. A. M. Dirac, Proc. Roy. Soc. A* **117**, 610 (1928); **118**, 341 (1928).
14. *П. А. М. Дирак*, Приципы квантовой механики, Физматгиз, 1960.
15. *В. Б. Берестецкий, Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский*, Релятивистская квантовая теория, ч. I, «Наука», 1968.
16. *В. Паули*, Релятивистская теория элементарных частиц, ИЛ, 1947.
17. *Ю. М. Широков, ЖЭТФ* **21**, 748 (1951); **35**, 1005 (1958).
18. *A. A. Sokolov, Ann. d. Phys.* **8**, 327 (1961).
19. *A. A. Sokolov, J. Phys. USSR* **9**, 363 (1945).
20. *V. Bargman, E. Wigner, Proc. Nat. Acad. Sci. USA* **34**, 211 (1948).
21. *А. А. Соколов, М. М. Колесникова, ЖЭТФ* **38**, 1778 (1960); *А. А. Соколов, Н. М. Тернов, Ю. М. Лоскутов, ЖЭТФ* **36**, 930 (1959).
22. *D. Fradkin, R. Good, Rev. Mod. Phys.* **33**, 343 (1961).
23. *J. Hilgevoord, S. Wouthysen, Nucl. Phys.* **40**, 1 (1963).
24. *S. Stech, Zs. f. Phys.* **144**, 214 (1956).
25. Сб. «Синхротронное излучение», под ред. А. А. Соколова и И. М. Тернова, «Наука», 1966.
26. *L. Foldy, A. Wouthysen, Phys. Rev.* **78**, 29 (1950).
27. *А. С. Давыдов*, Квантовая механика, 1-е изд., Физматгиз, 1963.
28. *W. Pauli, Rev. Mod. Phys.* **13**, 203 (1941).
29. *P. Jordan, E. Wigner, Zs. f. Phys.* **47**, 631 (1928).
30. *D. D. Iwanenko, A. A. Sokolow, Sow. Phys.* **11**, 590 (1937).
31. *А. А. Соколов, И. М. Тернов, Ю. М. Лоскутов, Ann. d. Phys.* **5**, 241 (1960); *А. А. Соколов, Ю. П. Иванов, М. М. Колесникова, Изв. вузов, Физика*, № 6, 51 (1964).
32. *G. Ludérs, Det. Kong. Danske Videnskab. Selskab. Mat.-Fys. Modd.* **28**, № 5 (1954); Сб. «Н. Бор и развитие физики», под ред. В. Паули, ИЛ, 1958.
33. *W. Pauli, Papp. Septieme Conseil Phys. lo Solvay, Bruxelles*, 1933.
34. *F. Reines, C. Cowan, Phys. Rev.* **92**, 830 (1953).
35. *T. Lee, C. Yang, Phys. Rev.* **104**, 254 (1956).
36. *C. Wu et al., Phys. Rev.* **105**, 1413 (1957).
37. *R. Garwin, L. Lederman, M. Weinrich, Phys. Rev.* **105**, 1415 (1957).
38. *J. Fridman, V. Telegdi, Phys. Rev.* **105**, 1681 (1957).
39. Сб. «Новые свойства и симметрии элементарных частиц», под ред. И. М. Халатникова, ИЛ, 1957.
40. *Л. Д. Ландау, ЖЭТФ* **32**, 405 (1957).
41. *G. Danly et al., Phys. Rev. Letters* **9**, 36 (1962).
42. *А. А. Соколов, В. К. Керимов, Ann. d. Phys.* **2**, 46 (1958); *А. А. Соколов, Phys. Letters* **3**, 21 (1963).
43. *Б. М. Понтекорво, УФН* **104**, 3 (1971).
44. *E. Konopinski, H. Mahmoud, Phys. Rev.* **92**, 1045 (1953).
45. *R. Feynman, M. Gell-Mann, Phys. Rev.* **109**, 193 (1958).
46. *Б. К. Керимов, Изв. АН СССР, сер. физ.*, **23**, 923 (1959).
47. *А. А. Соколов*, Несохранение четности как проявление поляризационных свойств. Некоторые материалы совещания по слабым взаимодействиям элементарных частиц, 9—11 мая, 1961 г. Труды ОИЯИ, Дубна.

48. A. A. Sokolov, Max-Planck-Festschrift., Berlin, 1958, s. 309.
49. A. A. Sokolov, J. M. Loskutov, Ann. d. Phys. **5**, 42 (1959).
50. A. A. Соколов, Элементарные частицы, изд-во МГУ, 1963.
51. Б. К. Керимов, Ю. В. Романов, Изв. АН СССР, сер. физ. **29**, 1172 (1965).
52. А. А. Соколов, Ю. М. Лоскутов, И. М. Тернов, Квантовая механика, «Просвещение», 1965.
53. И. С. Градштейн, И. М. Рыжик, Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, 5-е изд., «Наука», 1971.
54. Ф. М. Морс, Г. Феибих, Методы теоретической физики, т. I и II, ИЛ, 1958.
55. O. Klein, Zs. f. Phys. **53**, 1957 (1929).
56. А. Зоммерфельд, Строение атома и спектры, Гостехиздат, 1956.
57. W. Lamb, R. Retherford, Phys. Rev. **72**, 241 (1947); S. Tribwasser, E. Dayhoff, W. Lamb, Phys. Rev. **89**, 98 (1953).
58. Н. Bethe, Phys. Rev. **72**, 339 (1947).
59. Сб. «Сдвиг уровней атомных электронов», под ред. Д. Д. Иваненко, ИЛ, 1950.
60. Сб. «Новейшее развитие квантовой электродинамики», под ред. Д. Д. Иваненко, ИЛ, 1954.
61. Н. Н. Боголюбов, Д. В. Ширков, Введение в теорию квантованных полей, Гостехиздат, 1957.
62. Г. Эйринг, Д. Уолтер, Д. Кимбал, Квантовая химия, ИЛ, 1948.
63. Г. Бете, Квантовая механика простейших систем, ОНТИ, 1935.
64. В. Ч. Жуковский, М. М. Колесникова, А. А. Соколов, И. Херрманн, Оптика и спектроскопия **28**, 622 (1970).
65. G. Breit, E. Teller, Astrophys. J. **91**, 215 (1940).
66. R. Schmieder, R. Marrus, Phys. Rev. Letters **25**, 1692 (1970).
67. Б. А. Зон, Л. П. Раппопорт, Письма ЖЭТФ **7**, 70 (1968).

#### IV. Синхротронное излучение с учетом квантовых эффектов

1. А. А. Соколов, А. Н. Матвеев, И. М. Тернов, ДАН СССР **102**, 65 (1955).
2. А. Н. Матвеев, ЖЭТФ **31**, 479 (1956).
3. А. А. Соколов, И. М. Тернов, ЖЭТФ **25**, 698 (1953).
4. А. А. Соколов, Введение в квантовую электродинамику, Физматгиз, 1958.
5. Сб. «Синхротронное излучение», под ред. А. А. Соколова и И. М. Тернова, «Наука», 1966.
6. А. А. Соколов, Н. П. Клепиков, И. М. Тернов, ЖЭТФ **23**, 632 (1952).
7. А. А. Соколов, И. М. Тернов, В. Г. Багров, Изв. вузов, Физика, № 5, 13 (1968); Zs. f. Phys. **211**, 1 (1968).
8. А. А. Соколов, В. Ч. Жуковский, М. М. Колесникова и др., Изв. вузов, Физика, № 2, 108 (1969).
9. А. А. Соколов, Д. Д. Иваненко, И. М. Тернов, ДАН СССР **111**, 334 (1956).
10. M. Sands, Proc. of the CERN Conf. of high energy accelerators and Instruments; Geneva, 1959.
11. M. Sands, Nuovo Cimento **25**, 599 (1969).
12. Ф. А. Королев, О. Ф. Куликов и др., ДАН СССР **134**, 314 (1960); Nuovo Cimento **18**, 1033 (1960).
13. A. A. Sokolov, I. M. Ternov, Synchrotron Radiation, Akademie-Verlag, Berlin, 1968.
14. А. А. Соколов, И. М. Тернов, Труды Международной конференции по ускорителям, Дубна, 21—27 авг. 1963; ДАН СССР **153**, 1053 (1963).
15. J. LeDuff, P. C. Marin и др., Orsay, Rap. Techn., 4—73 (1973); E. Storck, Zs. f. Naturforsch. **23a**, 1914 (1968).



16. В. Н. Байер, В. М. Катков, ЖЭТФ 52, 1422 (1967); В. Н. Байер, УФН, 105, 441 (1971); Я. С. Дорбенева, А. М. Кондратенко, ЖЭТФ 64, 1918 (1973).
17. А. А. Соколов, Н. П. Клепиков, И. М. Тернов, ЖЭТФ 24, 249 (1953); J. Schwinger, Proc. Nat. Acad. 40, 132 (1954).
18. Н. П. Клепиков, ЖЭТФ 26, 19 (1954); А. А. Соколов, А. Н. Маргеев, ЖЭТФ 30, 126 (1956); T. Erber, Rev. Mod. Phys. 38, 626 (1966).
19. D. White, Phys. Rev. D5, 1930 (1972); D6, 2080 (1972); C. Shen, D. White, Phys. Rev. Letters 28, 455 (1972).
20. В. В. Владимировский, ЖЭТФ 18, 392 (1948); J. Schwinger, Phys. Rev. 75, 1912 (1949).
21. A. A. Sokolov, V. Ch. Zhukovskii, N. S. Nikitina, Phys. Letters 43A, 85 (1973).
22. J. Schwinger, Phys. Rev. 73, 416 (1948); Ch. M. Sommerfield, Phys. Rev. 107, 328 (1957); R. G. Parsons, Phys. Rev. Letters 20, № 5, A9 (1968).
23. N. D. Sen Gupta, Nature 163, 686 (1949).
24. J. M. Luttinger, Phys. Rev. 74, 893 (1948).
25. И. М. Тернов, В. Г. Багров и др., ЖЭТФ 55, 2273 (1968).
26. В. И. Ритус, ЖЭТФ 57, 2176 (1969); В. Н. Байер, В. М. Катков, В. М. Страховенко, ДАН СССР 197, 66 (1971).
27. N. D. Sen Gupta, Bull. Calcutta Math. Soc. 44, 175 (1952).
28. А. А. Соколов, Б. А. Лысов, ЖЭТФ 34, 1351 (1958).
29. М. М. Альперин, ЖЭТФ 14, 3 (1944).
30. И. М. Гольдман, ЖЭТФ 46, 1412 (1964).
31. L. Brown, T. Kibble, Phys. Rev. 133A, 705 (1964).
32. А. И. Никишов, В. И. Ритус, ЖЭТФ 46, 776 (1964); 47, 1130 (1964).
33. I. M. Ternov, V. G. Bagrov, A. M. Kharaev, Ann. d. Phys. 22, 25 (1968).
34. И. М. Тернов, В. Г. Багров и др., Изв. вузов, Физика, 2, 50 (1968).
35. И. М. Тернов, В. Г. Багров и др., Изв. вузов, Физика, 8, 77 (1967).
36. D. Volkov, Zs. f. Phys. 94, 250 (1935).
37. A. A. Sokolov, J. Phys. USSR 5, 231 (1941).
38. Д. Д. Иваненко, А. А. Соколов, Классическая теория поля, 2-е изд., Гос-техиздат, 1951.
39. Я. Б. Зельдович, в сб. статей «Проблемы теоретической физики». Памяти И. Е. Тамма, «Наука», 1972.
40. J. Schneider, Phys. Rev. Letters 2, 504 (1959).
41. J. Hirshfield, J. Wachtel, Phys. Rev. Letters 12, 533 (1964).
42. А. В. Гапонов и др., Письма ЖЭТФ 2, 430 (1965); А. В. Гапонов, М. И. Петелин, В. К. Юлпатов, Изв. вузов, Радиофизика, № 9—10, 1376 (1967).
43. А. А. Соколов, И. М. Тернов, ДАН СССР 166, 1332 (1966); Письма ЖЭТФ 4, 90 (1966).
44. M. Friedman, M. Herndon, Phys. Rev. Letters 29, 55 (1972).
45. А. А. Соколов, Ю. Г. Павленко, Оптика и спектроскопия 22, 3 (1967).
46. П. Л. Капица, УФН 78, 181 (1962).
47. G. Graff, E. Klempt, Zs. f. Naturforsch. 22a, 1960 (1967); P. Urban, K. Wittman, Acta Physica Austriaca 35, 9 (1972).
48. E. Courant, M. Livingston, H. Snyder, Phys. Rev. 88, 1190 (1952) (перевод: «Проблемы современной физики», ИЛ, № 11, 1954); М. Ливингстон, Ускорители, ИЛ, 1956.
49. А. А. Коломенский, А. Н. Лебедев, Теория циклических ускорителей, Физматгиз, 1962; K. Robinson, Phys. Rev. 111, 373 (1958).
50. А. А. Соколов, И. М. Тернов, ЖЭТФ 28, 431 (1955); А. А. Соколов, И. М. Тернов, Г. М. Страховский, ЖЭТФ 31, 439 (1956).
51. F. Gutbrod, Zs. f. Phys. 168, 177 (1962); А. А. Соколов, И. М. Тернов, Ю. М. Лоскутов, Вестник МГУ, 3, 101 (1964).

52. А. А. Соколов, И. М. Тернов, В. Г. Багров, Изв. вузов, Физика, № 4, 12 (1970); *Ann. d. Phys.* **25**, 44 (1950).
53. В. Ч. Жуковский, Б. В. Холомай и др., Теор. и матем. физика **6**, 78 (1971).
54. M. Sands, *Phys. Rev.* **97**, 470 (1955).
55. А. А. Коломенский, А. Н. Лебедев, ЖЭТФ **30**, 207 (1956); **30**, 1161 (1956).
56. Ф. А. Королев, О. Ф. Куликов, А. Г. Еришов, ДАН СССР **134**, 314, (1960); см. А. А. Воробьев, А. Н. Диденко, А. В. Кожевников, Атомная энергия **24**, 25 (1968); **28**, 260 (1970).
57. Ф. А. Королев, А. Г. Еришов, О. Ф. Куликов, Ускоритель электронов на 680 Мэв, Атомиздат, 1962.
58. М. С. Рабинович, Труды ФИАН СССР **10**, 23 (1958).
59. N. Frank, *Phys. Rev.* **70**, 177 (1946) (перевод: в сб. «Резонансные циклические ускорители элементарных частиц» ИЛ, 1950).
60. В. Н. Байер, В. М. Катков, ЖЭТФ **53**, 1478 (1967); В. Н. Байер, В. М. Катков, В. С. Фадин, Излучение релятивистских электронов, Атомиздат, 1973.
61. Д. Д. Иваненко, И. Я. Померанчук, ДАН СССР **44**, 343 (1944).
62. А. А. Воробьев, Ускорители заряженных частиц, Госэнергоиздат, 1949.
63. В. И. Векслер, ДАН СССР **44**, 393 (1944); E. M. Mac-Millan, *Phys. Rev.* **68**, 143, 144 (1945).
64. J. Blewett, *Phys. Rev.* **69**, 87 (1946); C. Suits, *Sci. News Letters* **51**, 339 (1947); F. Elder et al., *Phys. Rev.* **71**, 829 (1947); Ю. М. Адо, П. А. Черенков, ДАН СССР **110**, 35 (1956).
65. D. Tombulian, P. Hartman, *Phys. Rev.* **102**, 1423 (1956).
66. Сб. «Синхротронное излучение в исследовании твердых тел», составленный О. Ф. Куликовым, В. В. Михайлиным, под ред. А. А. Соколова, «Мир», 1970.
67. А. А. Воробьев и др., Атомная энергия **21**, 435 (1966).
68. А. А. Соколов и др., Изв. вузов, Физика, № 12, 7 (1972).
69. В. В. Михайлин, С. Н. Иванов и др., ФТТ **15**, 1574 (1973).
70. Д. Ф. Алферов, П. А. Черенков и др., Труды III Всесоюзного совещания по ускорителям заряженных частиц, т. I, стр. 39, «Наука», 1973.
71. С. П. Капица, Природа, № 10, 22 (1971).
72. W. Hayes, *Contemporary Physics* **13**, 441 (1972).
73. А. И. Алиханян, Природа, № 12, 10 (1972).
74. C. Shen, *Phys. Rev.* **D6**, 2736 (1972).
75. М. Е. Герценштейн, А. Н. Малахов, Р. Ч. Бокун, Радиофизика **12**, 1401 (1969).
76. I. D. Londstreet, *Phys. Rev.* **153**, 1372 (1967).
77. Л. А. Арцимович, С. Ю. Лукьянов, Движение заряженных частиц в электрических и магнитных полях, «Наука», 1972.
78. А. А. Логунов, В. А. Ярба, Природа, № 11, 13 (1970).
79. И. А. Гришаев и др., ЖЭТФ **63**, 1645 (1972).

## ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Автофазировка Векслера — Макмиллана 138, 374  
Адиабатические инварианты 55  
Аксиально-симметричное магнитное поле 344  
Амплитуда Фурье 88  
Аннигиляция пары в магнитном поле двухфотонная 318  
— — — — — однофотонная 317  
Антидемпинг-эффект 366, 373  
Антинейтрино мюонное 211  
— электронное 211  
Антинейтрон 210  
Антипротон 210
- Бальмера серия 22  
Бета-распад 212  
Больцмана постоянная 247  
Борновская длина периодичности 14, 144  
Борновский куб периодичности 164  
Брейта — Теллера приближение 261
- Вакуум электромагнитный 153  
— электронно-позитронный 201  
Вакуумная ультрафиолетовая спектроскопия 376, 378  
Вакуумный магнитный момент электрона 319  
Вариационный принцип 46, 179  
— — уравнения Дирака 179  
— — — Клейна — Гордона 161  
— — электромагнитного поля 139  
Вектор аксиальный 195, 215  
— ковариантный 40  
— контравариантный 40  
— магнитной напряженности 43, 145  
— Пойнтинга 75, 83, 86, 90, 97, 245  
— полярный 195  
— электрической напряженности 43, 145  
Вектор-потенциал трехмерный 38, 39, 40, 42, 53, 144  
— четырехмерный 42, 45, 153
- Вероятность переходов 239  
— — вынужденных 246, 335, 339  
— — спонтанных 243, 246, 285  
Взаимодействие аксиально-векторное 212  
— векторное 212  
— псевдоскалярное 212  
— скалярное 212  
— тензорное 212  
Водородоподобный атом 56  
— — в паулевском приближении 235  
— — по квазиклассической теории Бора 56, 59, 60  
— — — квантовой теории Дирака 229, 233  
— — — — — Клейна — Гордона 218  
Время релаксации 76  
Выврожденная гипергеометрическая функция 220, 232, 264  
— — —, асимптотическое приближение 220, 237
- Гамильтониан 49, 191, 199, 240, 269  
Гамма-функция 224, 233, 286, 301, 302, 316, 318, 326  
Гармонический осциллятор 87  
— —, излучение 90, 91  
Гильбертово пространство 13  
Гиперболические орбиты 236  
Гиперболическое движение 126  
Граничные условия 30, 130  
— — для векторов электрической и магнитной напряженностей 78
- Движение электрона в магнитном поле 66, 263, 344  
— — — статическом магнитном поле и в поле плоской электромагнитной волны 71  
— — — по винтовой линии с компенсацией потерь энергии на излучение 135

- Дельта-функция 9, 12, 20, 82, 282, 294, 313  
 — — в пространстве нескольких измерений 22  
 — — двухмерная 22  
 — —, плотность точечного заряда 37, 121  
 — —, производная 18, 19, 21  
 — —, — от разрывной функции 18, 21, 35  
 — —, простейшие свойства 21  
 — —, разложение Фурье 14  
 Дельта-символ Кронекера — Вейерштрасса 12, 17, 164  
 Демпинг-эффект 373  
 Дираковская теория движения электрона в поле центральных сил 224  
 — — позитрона 204
- Закон сохранения момента количества движения 140, 182  
 — — тензора энергии 139, 162, 181  
 — — четности состояния в теории Дирака 239  
 Запоздывающее действие (воздействии) 24, 26, 35, 129
- Излучение электрона в поле плоской электромагнитной волны 101, 328, 330, 332  
 — — вынужденное в постоянном и однородном магнитном поле 335  
 — — — — скрещенных полях 339  
 — —, дипольное 91, 97, 248, 251, 256  
 — —, интенсивность 241, 385  
 — —, квадрупольное 32, 91, 250, 257  
 — —, магнитное 251, 257  
 Инвариантная скорость 101, 103, 120, 283  
 Инверсия пространства 195, 214, 216  
 Интеграл Фурье 84, 88, 94
- Канонические уравнения Гамильтона в релятивистской теории 50  
 Квадрупольные переходы 250, 256, 257  
 Квантование (вторичное) уравнения Дирака 199  
 — — — Клейна — Гордона 165  
 — — — электромагнитного поля 147, 153  
 — — по Бору 60  
 Квантовая система с переменным числом фотонов 151
- Квантовое возбуждение бетатронных колебаний 289, 357  
 — — число внутреннее 229, 233  
 — — — главное 221, 222, 264, 268  
 — — — магнитное 226, 234  
 — — — орбитальное 222, 234  
 — — — радиальное 233, 264  
 — — — спиновое 226  
 — — — эффективное 221  
 Квантовые флуктуации в неоднородном магнитном поле 357, 363, 367  
 — — — постоянном и однородном магнитном поле 287, 292  
 Квантовый синхротронный мазер 338  
 Классическая электродинамика Максвелла — Лоренца 37  
 Классический радиус электрона 289  
 Классическое затухание 289, 292, 356, 357, 366  
 — — уравнение Дирака — Лоренца 9, 120, 367  
 — — — —, гиперболическое движение 126  
 — — — —, — — для конечного промежутка времени 131  
 — — — —, движение по винтовой линии с компенсацией потерь энергии на излучение 135  
 — — — — для магнитного поля с учетом силы трения 132  
 — — — — и «парадокс Борна» 137  
 — — — —, начальные и конечные условия 128  
 — — — —, потери энергии 126  
 — — — —, прямолинейное движение 127  
 Коэффициенты затухания бетатронных и синхротронных колебаний 366  
 — Клебша — Гордана 228  
 — Эйнштейна для индуцированного (вынужденного) перехода 11, 239, 247  
 — — — спонтанного перехода 239, 246  
 Крабовидная туманность 12, 112
- Лагранжиан 45, 46, 48, 49, 142, 161  
 — дираковского поля 180  
 — комплексного скалярного поля 161  
 — электромагнитного поля 45  
 Лептонный заряд 211  
 Лэмбовский сдвиг 262
- Магнетон Бора 198  
 Магнитный момент электрона 185, 319

- Матрицы антисимметричного тензора  
   177  
   — — — третьего ранга 179  
   — — — четвертого ранга 178  
   — Дирака 350, 170, 176  
   — единичные трехмерные 189  
   — комплексно-сопряженные 206  
   — Паули 169, 170  
   — эрмитово-сопряженные 172  
 Матричный элемент 312  
 Метод Вентцеля — Крамерса —  
   Бриллюэна 107, 119, 295  
 Мнимые единицы ( $i$  и  $i'$ ) 8, 42, 175  
 Момент количества движения орби-  
   тальной 182, 224  
   — — — полный 184  
   — — — спиновый 182  
 Мю-мезоны 210, 211
- Начало наименьшего действия 51  
 Нейтрино 209, 215  
   —, двухкомпонентная теория 210  
   — мюонное 211  
   —, четырехкомпонентная теория 211  
   — электронное 211  
 Нейтрон 209  
 Непрерывный спектр в кулоновском  
   поле 237  
   —, нормировка волновых функций  
   237  
 Несохранение четности 210, 213, 214,  
   215  
 Нулевая энергия 153, 166
- Ондюлятор 92  
 Оператор Гейзенберга 372  
   — Даламбера 39  
   — импульса 157  
   — испускания частиц 166, 202  
   — Лапласа 30, 218, 263  
   — момента количества движения 184,  
   225  
   — обобщенного спина 185  
   — — тензора спина 186  
   — поглощения частиц 166, 202  
   — функции Гамильтона 171  
   — энергии 157, 171  
 Операторный метод 370  
 Опережающее воздействие 129  
 Опыт Королева — Куликова 112, 375  
   — по обнаружению эффекта самопо-  
   ляризации 303, 375  
   — Сэндса 370  
   — Хензела — Скибовского 377
- Парадокс Борна 137  
 Парциальное сечение рассеяния 330  
 Паулевское приближение 235  
 Перенормировка массы 323  
 Перестановочная функция 157  
 Перестановочные соотношения в слу-  
   чае статистики Бозе — Эйнштейна  
   156, 166  
   — — — — Ферми — Дирака 202  
   — — для амплитуд волновых функ-  
   ций Дирака 200  
   — — — — — Клейна — Гордона  
   166  
   — — — — поперечных составля-  
   ющих вектор-потенциала электромаг-  
   нитного поля 150, 156  
   — — — потенциалов электромагнит-  
   ного поля 156  
 Переходные процессы 239  
 Пи-мезоны 210  
 Плоская волна 71, 326  
 Плотность вероятности нахождения  
   частицы 192, 241  
   — заряда 171, 223  
   — тока 171  
   — энергии 171  
 Позитрон 206, 209  
 Полином Лежандра присоединенный  
   219  
 Полиномы Лежандра 221, 223, 264,  
   265, 268, 270, 282  
 Поляризация спиновая 185, 187, 194,  
   214, 273, 274, 293  
   — электромагнитного излучения 98,  
   99, 147, 277  
 Поперечные колебания 38  
 Постоянная Планка 8, 148, 157,  
   305  
   — Ридберга 222, 234  
   — тонкой структуры 222, 234, 319  
 Потенциал векторный 39  
   — запаздывающий 14, 15, 33, 34, 36,  
   39  
   — опережающий 34  
   — скалярный 39  
   — точечного заряда 39  
 Правила отбора 253, 257  
   — — для дипольных переходов 253  
   — — — квадрупольных переходов  
   257  
   — — — магнитных переходов 257  
   — — — перестановок для волновых функ-  
   ций 167  
 Представление Фолди — Вутхаузена  
   188, 189  
 Преобразование зарядового сопряже-  
   ния 309

- Преобразование инверсии пространства 195, 208, 214, 216  
 — калибровочное 38, 141  
 — Лоренца 41, 42, 173, 174  
 — обращения времени 207, 217  
 Приближение для функций Бесселя 110  
 Принцип запаздывающего действия 24, 26, 32, 36  
 Проблема Кеплера по релятивистской классической теории 56  
 — — — уравнению Дирака 229, 234  
 — — — Клейна — Гордона 218, 222  
 — Коши 130  
 Протон 209  
 Псевдовектор 179  
 — поляризации спина 186, 188, 190, 193  
 Псевдоскаляр 159  
 Псевдофотоны 155
- Разложение плоской волны по цилиндрическим функциям 87  
 Распад нейтрона 210  
 — протона 209  
 Рассеяние электроном электромагнитной плоской волны, поляризованной по кругу 326  
 Релятивистская квантовая механика 139  
 Решение уравнения Дирака в аксиально-симметричном магнитном поле 359  
 — — — кулоновском поле 229  
 — — — постоянном и однородном магнитном поле 268, 275  
 — — — случае свободного движения 192, 196  
 — — Клейна — Гордона в аксиально-симметричном магнитном поле 345  
 — — — кулоновском поле 218  
 — — — постоянном и однородном магнитном поле 261, 267  
 — — — случае свободного движения 163  
 Рождение пар электронов и позитронов в магнитном поле 309, 314  
 — — — — —, однофотонное 309  
 Розеточная траектория Зоммерфельда 59
- Самополяризация спина 300, 375  
 Самоускоряющее решение 130
- Сверхсильное магнитное поле 316  
 Сила Лоренца 54  
 — лучистого трения Дирака — Лоренца 121, 132  
 — самодействия 121, 122  
 Сильное обращение времени 214, 217  
 Символ Леви-Чивита 178, 179, 185  
 Синхротронное излучение, влияние квантовых флуктуаций 287, 369  
 — — в неоднородном магнитном поле 344  
 — —, движение по винтовой линии 96, 101, 103, 106, 118, 119  
 — —, затухание бетатронных и синхротронных колебаний 292, 256, 357, 366, 369  
 — —, интенсивность в квазиквантовом приближении 306  
 — —, — — ультраквантовом случае 307  
 — —, нерелятивистское приближение 106  
 — —, основные классические уравнения 92  
 — —, поляризационные свойства 97, 98, 116, 118, 283, 284, 375  
 — —, приближенная формула для спектрального распределения 113, 374  
 — —, приближенные формулы 113, 115, 118, 285, 288  
 — —, спектральное распределение Шотта 94, 97, 328  
 — —, угловое распределение 100  
 — —, ультраквантовый случай 306, 308  
 — —, экспериментальные исследования 374, 376  
 — —, эффект самополяризации 303  
 Скобки Пуассона квантовые 149  
 — — классические 50  
 Скорость четырехмерная 127  
 Слабое обращение времени 207, 217  
 Состояние с отрицательной энергией 155, 164  
 Спектральное распределение излучения в нерелятивистском случае при круговом движении 105  
 Спектрально-угловое распределение синхротронного излучения при движении по винтовой линии 119  
 Спин 153, 163, 192  
 Спин во внешнем поле 196  
 Спина псевдовектор 194, 272  
 — тензор 141, 143, 184, 194, 272  
 — трехмерный единичный вектор 193, 194, 272

- Спиновые свойства при наличии электромагнитного поля 196  
 — — свободного электрона 192  
 Спиноры 226  
 — шаровые 225, 227  
 Спиральность 21, 216  
 Среднее значение радиуса 267, 275  
 Средне-квадратичное значение радиуса 266, 275  
 Статистика Бозе — Эйнштейна 148, 152, 153  
 — Ферми — Дирака 153, 166, 200, 201  
 Сферическая или шаровая функция 218
- Тензор антисимметричный 178  
 — — второго ранга 43  
 — единичного трехмерного вектора поляризации 188  
 — ковариантный 40, 41  
 — контравариантный 40  
 — орбитального момента количества движения 182  
 — плотности «собственного» момента количества движения 184  
 — поляризации 186  
 — «смешанный» 41  
 — энергии 139, 141  
 — — канонический 139, 154, 162, 181, 182  
 — — метрический 114, 141, 182, 183  
 Теорема Людерса — Паули 207  
 — Пойнтинга 74, 77, 81, 96, 126  
 — Эренфеста 56, 60, 64  
 — Якоби 52, 53, 54, 62  
 Томсона формула 329  
 Тонкая структура по релятивистской теории Клейна — Гордона 222  
 — — — теории Дирака 234  
 — —, экспериментальная проверка 234, 235  
 Точечный заряд 76  
 — электрон 75  
 Трансформационные свойства волновой функции 173, 174
- Угловое распределение излучения 100  
 — — интенсивности излучения (приближенные формулы) 115, 116  
 — — л- и  $\sigma$ -компонент 112  
 Умножение матриц 169, 170  
 Уравнение Гамильтона — Якоби в нерелятивистском приближении 53  
 — — — релятивистской теории 50, 51, 67
- Уравнение Гамильтона — Якоби для поляризованной по кругу электромагнитной волны 67  
 — — — — постоянного однородного магнитного поля 61, 65  
 — — — — проблемы Кеплера 57  
 — — — — свободного движения 53  
 — — — — стационарного случая 53  
 — — — — при движении по окружности 54  
 — Даламбера 31, 34, 35, 39, 121, 141, 154  
 — — обобщенное 34  
 — движения для точечного электрона 47  
 — Дирака в ковариантной записи 175  
 — — для свободной частицы 190  
 — — квантовое 168, 171, 172, 173, 180, 268, 275  
 — — с радиационными поправками 320  
 — Дирака — Лоренца (классическое) 33, 120, 130  
 — Клейна — Гордона 158, 168, 218, 243, 267, 268, 275  
 — —, волновая функция 159, 218, 219, 263, 267  
 — — — для свободного движения 163  
 — Лагранжа 51  
 — — и Гамильтона в релятивистской теории 48  
 — Максвелла в среде 75  
 — — Лоренца в трехмерных обозначениях 37  
 — — — — четырехмерном виде 40, 42, 43  
 — — —, вторая группа 43  
 — — —, интегрирование 38  
 — — —, квантование 148  
 — — —, первая группа 43  
 — — —, релятивистски-ковариантная запись 42  
 — непрерывности 37, 80, 159, 173  
 — Пуассона 28  
 — — двухмерное на плоскости 29  
 — — одномерное 28  
 — — трехмерное 30  
 — теплопроводности 25, 36  
 — Шредингера 157, 219  
 — Юкавы 31  
 Ускорение четырехмерное 127, 128, 137  
 Условие Лоренца 38, 43, 77, 141  
 — нормировки 223  
 — ортонормированности 164, 199, 252  
 — периодичности 144

- Фейнмана — Гелл-Манна схема 212  
 Фокусировка жесткая 345  
 — мягкая 345  
 Формула Зоммерфельда 60  
 — Казимира 206  
 — Планка 248  
 — Шнейдера 337, 343  
 — Шотта 97, 329  
 Функция Бесселя 84, 91, 282, 285, 292, 316, 353, 356  
 — —, асимптотическое значение в первом приближении 36, 107, 110, 116, 331  
 — —, — — во втором приближении 110  
 — — мнимого аргумента 35, 36, 108  
 — Гамильтона 49, 199, 240, 269  
 — Гангеля 8  
 — Грина двухмерного уравнения Пуассона 22, 26, 29, 32, 34, 35, 36, 87  
 — — одномерного уравнения Пуассона 28  
 — — трехмерного уравнения Пуассона 30  
 — — уравнения Даламбера 33, 36  
 — — —, несингулярная часть 24, 32, 88, 94, 121  
 — — —, сингулярная часть 24, 32, 35, 88, 94, 121  
 — — теплопроводности 27, 36  
 — — Юкавы 31  
 — действия 44, 45, 51, 54  
 — калибровочная 141  
 — Лагерра 8, 264, 270, 294, 312, 323, 341  
 — —, асимптотическое значение 295, 298, 299  
 — Лагранжа 45, 46, 48, 49, 142, 180  
 — от числа фотонов 151  
 — Эрмита 276, 348, 361
- Центрально-симметричное поле 56, 218, 229  
 Циклотронная частота 73, 266
- Частота колебаний 56  
 Четность состояний 238  
 Четырехмерный псевдовектор поляризации 190
- Шаровые спиноры 225  
 — функции 227  
 Швингеровское магнитное поле 8, 289, 295  
 Шпуры 204
- Эквипотенциальные поверхности при движении электрона с постоянной скоростью 84  
 — — черенковского излучения 86  
 Электронный синхротрон 138  
 — — Корнельский 379  
 Эллипсоиды Хэвисайда 87  
 Эллиптическая поляризация 98  
 Энергия кинетическая электрона в релятивистском случае 49  
 — черенковского излучения 83  
 Эрмита полиномы 268, 341, 348  
 Эрмитово сопряжение 207  
 Эрмитово-сопряженная амплитуда 164  
 — — бесконечная матрица 150  
 — — матрица 164, 172  
 Эффект Доплера 120  
 — Комптона 327  
 — самополяризации 300, 375  
 — Тушека 303  
 — Черенкова 79, 84



*Арсений Александрович Соколов*  
*Игорь Михайлович Тернов*  
**РЕЛЯТИВИСТСКИЙ ЭЛЕКТРОН**

М., 1974 г., 392 стр. с илл.

Редакторы: *Л. И. Гладнева, М. М. Колесникова*

Техн. редактор *С. Я. Шкляр*

Корректор *Е. В. Сидоркина*

Сдано в набор 21/VIII 1973 г. Подписано к печати 19/II 1974 г.  
Бумага 60×90<sup>1/16</sup>. Тип. № 1. Физ. печ. л. 24,5. Условн.  
печ. л. 24,5. Уч.-изд. л. 22,64. Тираж 4000 экз. Т-02972.  
Цена книги 2 р. 16 к. Заказ № 776.

Издательство «Наука»

Главная редакция физико-математической литературы

117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

Ордена Трудового Красного Знамени Ленинградская  
типография № 2 имени Евгении Соколовой  
Союзполиграфпрома при Государственном комитете  
Совета Министров СССР по делам издательств,  
полиграфии и книжной торговли, 198052, Ленинград, Л-52,  
Измайловский проспект, 29

## СПИСОК ОПЕЧАТОК

Стр.	Строка	Напечатано	Должно быть
13	1 снизу	$\sum_n \alpha_n \psi_n(x') \psi_n(x)$	$\sum_n \alpha_n \psi_n^*(x') \psi_n(x)$
76	7 снизу	$t_0 \sim 10^{-7} \text{ сек}$	$t_0 \sim 10^{-17} \text{ сек}$
111	4 снизу	$W_{\pi, \sigma} = \frac{27}{8\pi^2} W \int_0^{\infty}$	$W_{\pi, \sigma} = \frac{27}{16\pi^2} W \int_0^{\infty}$
112	12 сверху	$= \frac{27}{8\pi^2} W y^2 (1 + \psi^2) K_{3/2}^2(\eta)$	$= \frac{27}{16\pi^2} W y^2 (1 + \psi^2)^2 K_{3/2}^2(\eta)$
112	14 сверху	$= \frac{27}{8\pi^2} W y^2 \psi \sqrt{1 + \psi^2} K_{1/2}^2(\eta)$	$= \frac{27}{16\pi^2} W y^2 \psi^2 (1 + \psi^2) K_{1/2}^2(\eta)$
116	2 сверху	$\int_0^{\infty} y^2 dy K_{1/2}(\eta)$	$\int_0^{\infty} y^2 dy K_{1/2}^2(\eta)$
116	17 снизу	$f_{\sigma}(\psi) = \frac{7}{(1 + \psi^2)^{1/2}}$	$f_{\sigma}(\psi) = \frac{7}{(1 + \psi^2)^{5/2}}$
147	12 снизу	$\sin \varphi = \frac{q_1^2 - q_{-1}^2}{2q_2q_3}$	$\sin \varphi = -\frac{q_1^2 - q_{-1}^2}{2q_2q_3}$
149	14 снизу	$i\omega_{nn'} x_{n'n}^* = \frac{i}{\hbar} (Hx - xH)_{n'n}$	$i\omega_{nn'} x_{n'n}^* = \frac{i}{\hbar} (Hx - xH)_{nn'}$
164	15 снизу	$= \pm i\hbar K$	$= \pm \hbar K$
351	8 снизу	$+ \frac{1}{2} (R_1^2 + R_1'^2) +$	$- \frac{1}{2} (R_1^2 + R_1'^2) +$

1936

1937

1938

1939