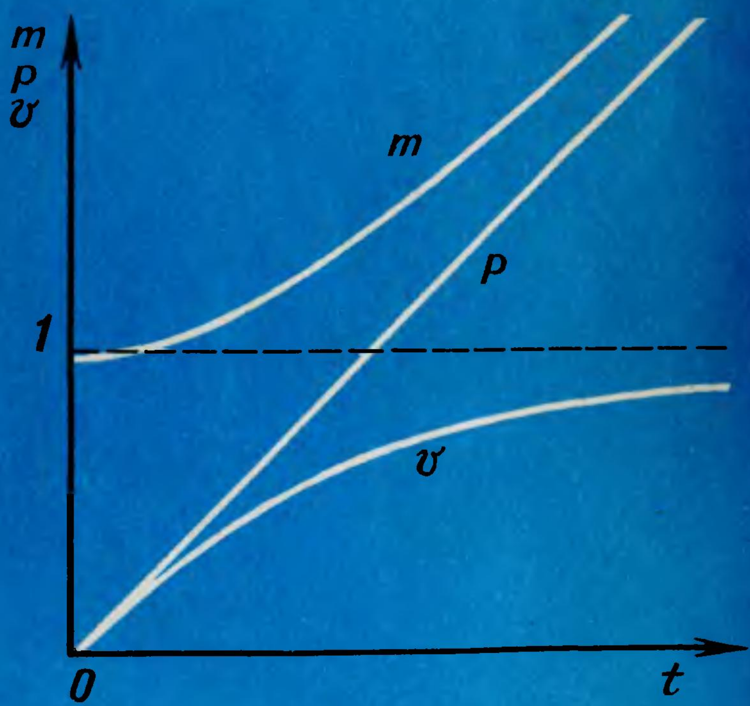
Цена 10 коп.

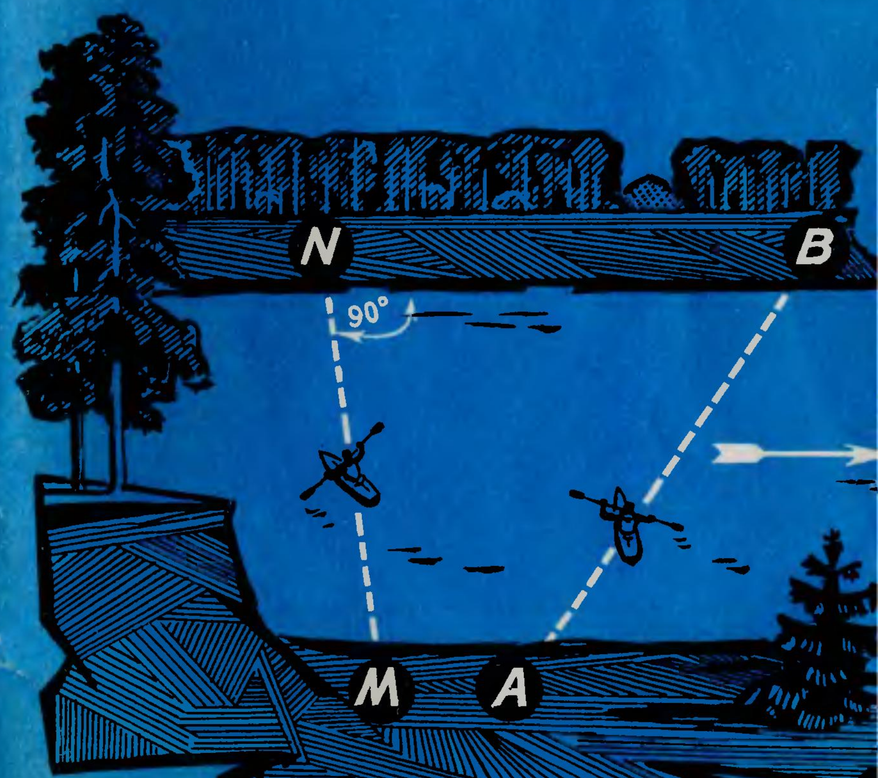


Физика

Библиотечка физико-математической школы

Ю.И.СОКОЛОВСКИЙ

ЭЛЕМЕНТАРНЫЙ ЗАДАЧНИК ПО ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ



Физика Библиотечка физико-математической школы

Ю. И. СОКОЛОВСКИЙ

ЭЛЕМЕНТАРНЫЙ ЗАДАЧНИК ПО ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

(с решениями)

Издательство «Наука»
Главная редакция
физико-математической литературы
Москва 1971

530.1
С 59
УДК 530.12

Физика

Библиотечка
физико-математической школы

Редактор серии
Я. А. Смородинский

2-3-1
64—70

СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

В поражающий наше воображение эйнштейновский мир околосветовых скоростей хотелось бы заглянуть каждому. Но истинно увлекающегося физикой не могут удовлетворить одни только общие рассуждения. Он хочет не удивляться, а понимать, научиться (хотя бы и в очень скромных размерах) самостоятельно применять законы и формулы теории относительности.

Вернейший путь к этому — через решение задач. Они помогают постичь глубинный смысл утверждений, которые подчас представляются начинающим либо непостижимыми, либо же, наоборот, обманчиво простыми. Сознательно оперируя в раздумии над задачей трудными понятиями, вживаешься в их суть, приобретаешь желанную физическую интуицию. Попутно совершенствуешь и познания из области классической физики, так как многое из казавшегося «давно известным» предстает неожиданно в новом свете. Оттачиваются и качества ума, полезные при изучении любых областей науки.

Наоборот, при чисто пассивном, «беллетристическом» чтении научно-популярных книг по теории относительности весьма велика опасность превратно понять написанное, да еще и заразиться при этом дурной привычкой глубокомысленно щеголять словами, точное значение которых и самому не ясно. Поэтому-то иногда и предостерегают от чересчур раннего увлечения теорией Эйнштейна. Мы же скажем немножко иначе: пусть каждый интересующийся приобщается в меру сил к теории относительности, *но только с решением задач*!

Предлагаемый вниманию читателей элементарный задачник как раз и предназначается для школьников старших классов, изучающих специальную теорию относительности факультативно или самостоятельно. Но он может пригодиться и взрослым, которые желают всерьез «подружиться» с теорией Эйнштейна в порядке самообразования. Расположение и характер задач соответствуют способу изложения, принятому в книге того же автора «Начала теории относительности», которая выпущена в 1970 г. издательством «Просвещение» (Москва) в качестве учебного пособия для факультативных занятий в школе (подходят и предыдущие издания: Москва, «Просвещение», 1964; Новосибирск, Западно-Сибирское книжное изд-во, 1967; а также украинский перевод — Киев, «Радянська школа», 1967).

Но, конечно, задачник может быть использован также и при изучении теории относительности по другим источникам. Надо только иметь в виду, что под скоростью v в задачнике понимается отношение скорости тела к световой скорости, а расстояния обычно предполагаются выраженными в световых единицах (например, в световых секундах или же световых годах). Для скорости света во всех задачах принимается округленное значение 300 000 *км/сек.*

Для ориентации читателей задачи условно разделены на три группы: легкие (Л), средние (С) и трудные (Т) — соответствующие пометки даются в скобках рядом с их номерами. Только две особо отмеченные задачи требуют знаний и навыков по математике, немного выходящих за рамки обязательной школьной программы; все остальные решаются совершенно элементарно.

Может показаться, что некоторые задачи (например, 32, 48, 58) даны преждевременно. В действительности же они подготавливают к лучшему восприятию последующего материала: размышляя над ними, учащиеся самостоятельно подходят к идеям, которые потом будут систематически излагаться в курсе. Этим активизируется познавательная деятельность.

Ко всем задачам даны ответы, а к трудным и средним — также и полные решения. Кроме того, к каждой из трудных задач имеется указание. Иногда это — строго дозированный намек, сдвигающий с мертвой точки, а иногда и развернутая канва («программа») всего решения. Такие наводящие указания способствуют расширению круга лиц, активно размышляющих над задачами. Однако заглядывать в указания, а вслед за тем и в решения рекомендуется только после достаточно напряженных и длительных поисков собственного подхода.

Не стоит особенно огорчаться, если не удается справиться с некоторыми из задач, помеченных как «трудные»: одни из них требуют для элементарного решения искусственных приемов, не всякому приходящих в голову, другие предполагают широкий кругозор в соседних областях физики и т. д. Уже успешное освоение хотя бы всех «легких» задач и части «средних» свидетельствует о том, что Вы сумели в какой-то мере приобщиться к теории Эйнштейна, которая еще недавно считалась «непостижимой для простых смертных».

Однако в любом случае очень полезно внимательно разобраться в приведенных здесь решениях задач повышенной трудности: ввиду лаконизма текста и непривычности основных понятий, такой разбор уже и сам по себе — поучительное упражнение, способствующее углублению знаний, конкретизации их и приобретению важных навыков. А некоторые задачи (например, 22—25, 55, 67, 78, 80, 89, 94, 95) фактически представляют собой как бы дополнительные главы курса, рассчитанные на самостоятельное изучение. Они познакомят Вас с релятивистским эффектом Доплера, преобразованиями Лоренца, инвариантностью интервала, превращениями элементарных частиц ... Вы сможете убедиться, что уже и элементарные начала теории относительности, при творческом отношении к делу, открывают дальнейший путь и вширь, и вглубь.

В этот сборник вошли 24 задачи из методического пособия того же автора «Уроки теории относительности в школе» (Новосибирск, НГУ, 1965) и 71 новая. Идея задачи 2 заимствована у Дж. Пойя, задач 65, 80 и 81 — у Р. Фейнмана; все остальные задачи (за исключением пары общеизвестных из области классической физики) составлены автором специально для этой книги (в сокращенном виде она была впервые ротапринтирована небольшим тиражом в 1968 г., а решения и ответы — в 1969).

Так как это, по-видимому, первый опыт написания задачника по теории относительности, адресованного школьникам, в нем могут быть промахи. Автор будет признателен всем, кто о них сообщит. Замечания, вопросы и предложения просьба направлять по адресу: Новосибирск, 90, Университет, кафедра педагогики. Особенно важны суждения учителей и школьников насчет классификации задач по степени их трудности.

Автор

УСЛОВИЯ ЗАДАЧ

Относительность в классической физике

1 (Л). Дробинки вылетают из ствола охотничьего ружья со скоростью 112 *м/сек*. Какова будет скорость дробинки в системе «Земля», если стрельба из того же ружья производится с борта лодки, плывущей со скоростью 15 *м/сек* относительно Земли? Рассмотреть случаи стрельбы в направлении движения лодки, навстречу и перпендикулярно этому движению. Сопротивление воздуха во внимание не принимать, так как каждый раз речь идет о начальной скорости дробинки сразу же по вылете из ствола.

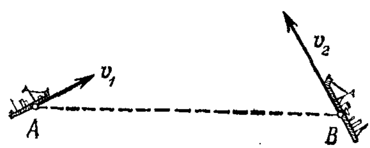


Рис. 1.

2 (Т). Начальные положения и векторы скоростей двух кораблей заданы графически (рис. 1). Корабли движутся без ускорения. Каким будет наименьшее расстояние между ними?

3 (С). Плывя вверх по течению и проплывая под мостом, лодочник потерял запасное весло. Обнаружив через некоторое время пропажу, он повернул обратно и через час после поворота догнал весло в трех километрах ниже моста. Какова скорость течения?

4 (Л). Поезд движется относительно Земли с постоянной по величине и направлению скоростью 60 *км/ч*. В 7 часов утра погас прожектор локомотива, а в 7 часов 10 минут — хвостовой фонарь поезда. Определить расстояние между этими событиями а) в системе «Поезд»; б) в системе «Земля», если длина поезда 1 *км*.

5 (Л). В какой системе отсчета расстояние между событиями «Выстрел пушки» и «Разрыв ее снаряда» (при попадании его в цель) равно нулю?

6 (С). В системе «Звезды» один нейтрон покоится, другой же летит от него со скоростью v. В какой из инерциальных систем отсчета суммарная кинетическая энергия нейтронов минимальна?

7 (С). Как быстрее и с наименьшей затратой энергии переправиться на лодке через реку с параллельными берегами (рис. 2): направив продольную ось лодки перпендикулярно берегу (и тем самым допуская снос лодки течением,

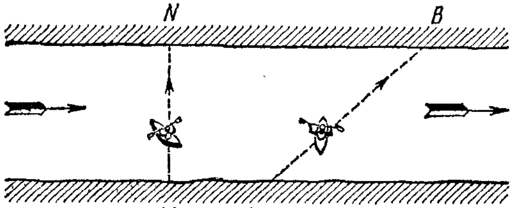


Рис. 2.

прямая AB) или направив ось лодки наискось (против течения) с таким расчетом, чтобы причалить к противоположному берегу точно напротив пункта отправления (прямая MN)?

8 (С). Монета лежит в центре картонного кружка радиусом R. Картону рывком сообщают горизонтальную скорость v, которую затем поддерживают постоянной. При каких значениях этой скорости монета соскочит с картона, а при каких — удержится на нем, если коэффициент трения k? Монету считать материальной точкой.

9 (Т). Один свободный протон первоначально покоится; другой летит точно на него издалека (из «бесконечности») с начальной скоростью v. Определить минимальное расстояние, до которого сблизятся протоны.

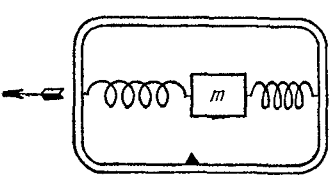


Рис. 3.

10 (С). Каково ускорение самолета в инерциальной системе отсчета, если указатель установленного в нем пружинного акселерометра (рис. 3, см. также § 4 книги автора «Начала теории относительности») сместился на 2 *см* влево? Масса грузика $m=200$ *г*, жесткость каждой из пружин $k=35$ *н/м*?

11 (С). Писатели-фантасты (С. Лем в «Астронавтах», Г. Мартынов в «Каллистянах» и др.) рассказывают о необычных ощущениях космонавтов при равномерном и прямолинейном полете межзвездного корабля с околосветовой скоростью. Авторы видят причину болезненного состояния космонавтов в увеличении их масс «в соответствии с теорией относительности Эйнштейна». Зная об этой теории лишь то, что в ней полностью сохраняет силу принцип относительности, выскажите суждение о правдоподобности такого влияния околосветовой скорости полета на самочувствие космонавтов.

Проблема одновременности

12 (С). Звезда-спутник обращается вокруг очень массивного центрального светила по круговой орбите, плоскость которой проходит через Землю. Надо нарисовать следующие графики: по горизонтальной оси откладывается момент времени t испускания звездой-спутником определенной «порции» света, а по вертикальной оси — момент τ, когда эта порция доходит до Земли. Набросайте два таких графика — один в предположении, что скорость света не зависит от движения источника, другой — что скорость источника прибавляется к скорости испускаемого им света. Изменением расстояния от звезды-спутника до Земли пренебречь.

13 (С). Фотонная ракета «Фантазия-1» вылетела с Земли в направлении звезды «Вега»; через год вслед за ней с того же ракетодрома стартовала ракета «Фантазия-2», а еще через год — «Фантазия-3». Все три ракеты совершают полет (в системе «Звезды») вдоль одной и той же прямой и с совершенно одинаковой постоянной скоростью 150 000 *км/сек*. Командиры ракет «Фантазия-1» и «Фантазия-3» сверяют свои часы по специальному радиосигналу с «Фантазии-2». Насколько они при этом ошибаются с точки зрения жителей Земли?

14 (Л). Начертите оси пространственно-временных диаграмм в системе «Альфа», принимаемой за неподвижную, а также в системе «Бета», которая движется относительно системы «Альфа» в положительном направлении со скоростью 0,3 световой единицы. Отметьте на этой диаграмме два альфацентрически одновременных события A и B, а также два бетацентрически одновременных события M и N.

Какое из событий A и M произошло раньше в системе «Альфа»? А в системе «Бета»?

15 (Л). Начертите оси пространственно-временных диаграмм в системах «Альфа» и «Бета», из которых первая принимается за неподвижную, а вторая движется относительно нее в отрицательном направлении со скоростью 120 000 *км/сек*. Отметьте произвольное событие A, а также альфа- и бетацентрически одновременные ему события B и C, происшедшие дальше от начала координат. Нанесите еще события M и N, альфацентрически и бетацентрически одноместные событию A, но случившиеся позже. Укажите событие R, которое в системе «Альфа» произошло раньше, а в системе «Бета» — позже события A.

16 (С). В системе «Звезды» события P и Q произошли на расстоянии $3 \cdot 10^6$ *км* друг от друга, причем сначала событие P, а через 15 *сек* после него событие Q. Существует ли инерциальная система отсчета, в которой событие Q случилось раньше события P? А другая инерциальная система, в которой события P и Q произошли в одном и том же месте?

17 (С). В системе «Звезды» событие B произошло через 1 *сек* после события A и на расстоянии 600 000 *км* от него. С какой скоростью и в каком направлении должна лететь ракета, чтобы в связанной с ней инерциальной системе отсчета события A и B были одновременны?

18 (С). Я вышел из дома через 5 *мин* после отхода поезда. Однако в некоторой другой инерциальной системе «Бета» поезд отходит через 10 *мин* после моего выхода из дома. Могу ли я воспользоваться системой «Бета», чтобы поспеть к поезду? Разъяснение должно быть четким.

19 (С). Прокомментируйте с помощью пространственно-временной диаграммы следующие стихи, посвященные фантастическому пока полету к другим звездам со скоростью, близкой к скорости света:

Честь друзьям, вперед смотрящим,
Звездолетчикам бесстрашным!
Что зовем мы настоящим —
Вы считаете вчерашним.

Обратив же в час свободный
Взор к Земле, к друзьям, вас ждущим,
Наше здешнее «сегодня»
Вы считаете грядущим!

Замедление хода времени

20 (Л). Во сколько раз замедляется ход времени при скорости движения 240 000 *км/сек*?

21 (С). Продолжительность существования мю-мезона около 2 *мксек* (по истечении этого срока 90% мю-мезонов претерпевают распад). С какой скоростью должен двигаться мю-мезон, чтобы пролететь, не распадаясь, расстояние 30 *км*?

22 (С). При определенных изменениях внутреннего состояния покоящегося атома водорода излучаются радиоволны частотой 1,4 *Ггц* (длина волны 21 *см*). На какую частоту надо настроить приемник радиотелескопа, чтобы уловить такое излучение, если оно приходит на Землю от водородных атомов, движущихся в космосе перпендикулярно направлению на Землю со скоростью 0,7 скорости света?

23 (С). Покоящийся (относительно звезд) атом водорода излучает радиоволны частоты $f_0 = 1{,}4$ *Ггц*. Они улавливаются радиоприемником ракеты, летящей (в момент приема) со скоростью 0,7 световой единицы перпендикулярно прямой, соединяющей точку излучения с ракетой. Какую частоту колебаний принимаемой радиоволны измерят космонавты?

24 (Т). Не позволяют ли эффекты, рассмотренные в двух предыдущих задачах, отличать истинное (т. е. абсолютное) движение от кажущегося (относительного)? Ведь понижение частоты принимаемых радиоволн по сравнению с характерной для водорода величиной 1,4 *Ггц*, описанное в задаче 22, должно иметь место лишь в том случае, когда Земля неподвижна, а излучающий атом движется с большой скоростью перпендикулярно прямой Земля — атом. Если же, наоборот, излучающий атом покоится, а движется Земля, то все должно получаться иначе — в духе задачи 23. Благодаря такому различию можно как будто установить, сопоставляя расчеты с опытом, какое из двух тел (Земля или излучающий атом) находится в истинном движении. Разъясните описанный парадокс.

25 (Т). Электрический ток в антенне радиопередатчика колеблется с частотой f_0. Какие частоты токов, наводимых радиоволнами в антенне приемника, будут измерены наблюдателями в двух случаях: а) когда приемник покоится, а передатчик приближается к нему со скоростью v; б) когда неподвижен передатчик, приемник же движется к нему со

скоростью v? Не противоречит ли полученный результат принципу относительности? Внесите, если нужно, поправку на релятивистское замедление темпа времени и сопоставьте полученные формулы с принципом относительности.

Сокращение размеров

26 (Л). На ракете имеется эталон метра, расположенный вдоль ракеты. Какую длину имеет он для наблюдателя, относительно которого ракета летит со скоростью 0,8 световой единицы?

27 (Т). Стержень AB, расположенный параллельно неподвижной стенке MN на очень маленьком от нее расстоянии (рис. 4), движется в продольном направлении со скоростью v, которая соответствует релятивистскому коэффициенту $K = 3$. В стенке имеется круглое отверстие («окно»)

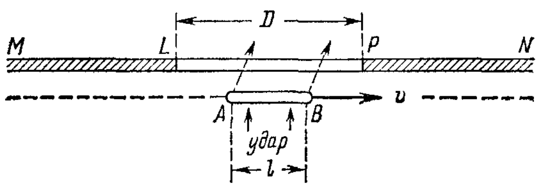


Рис. 4.

LP диаметром D. Собственная длина стержня в два раза превышает диаметр окна: $l_0 = 2D$. Но в состоянии движения длина стержня $l = l_0/3$ меньше диаметра окна. Поэтому в момент прохождения середины стержня мимо центра отверстия стержень можно протолкнуть сквозь окно резким ударом в поперечном направлении. Но если рассмотреть этот же опыт в системе «Стержень», придется признать сократившимся не стержень, а стенку с отверстием, так что пройти сквозь отверстие стержень уже не сможет. Как это согласовать с принципом относительности?

28 (С). Каким станет угол между диагоналями квадрата, когда он будет двигаться со скоростью 270 000 *км/сек* в направлении, параллельном одной из его сторон?

29 (С). Как сказывается быстрое движение на объеме тела? Рекомендуется сначала рассмотреть прямоугольный брусок, движущийся в направлении одного из своих ребер, а затем постараться обобщить результат и на тела произвольной формы.

30 (С). Изготовлены две одинаковые ванны. Одна приведена в быстрое движение и наполнена водой, другая осталась неподвижной. Вода из движущейся ванны перетекает в неподвижную. Заполнит ли она ее?

31 (Т). В инерциальной системе отсчета «Альфа» две ракеты летят с одинаковыми околосветовыми скоростями вдоль проходящей через них прямой линии (геометрические размеры ракет малы по сравнению с расстоянием между ними). Ракеты соединены друг с другом не растянутым, но и не «провисающим» проводом. В некоторый момент времени обе ракеты останавливаются, причем процесс торможения длится очень недолго, а главное у обеих ракет протекает во времени совершенно одинаково. Порвется или «провиснет» провод, связывающий ракеты? Ответьте на тот же вопрос также и в инерциальной системе «Бета», относительно которой обе ракеты сначала покоились. Выполняется ли в данном случае принцип относительности?

32 (С). Межзвездный корабль летит (по отношению к системе «Звезды») со скоростью, которая соответствует релятивистскому коэффициенту $K = 10$. На передней стенке кабины расположены часы. Длина их секундной стрелки 6 *см*. С какой линейной скоростью движется конец этой стрелки относительно циферблата? Ответьте на этот вопрос а) с позиции кораблецентриста и б) с позиции звездоцентриста. Плоскость циферблата перпендикулярна направлению полета.

Преобразоввние поперечной скорости

33 (Л). Поперек космического корабля идет космонавт со скоростью 5 *км/ч*. Какова составляющая его скорости в поперечном направлении для наблюдателя на Земле, если ракета удаляется от нее со скоростью 180 000 *км/сек*?

34 (Л). Два атома летят в космосе относительно системы «Звезды» по взаимно перпендикулярным траекториям со скоростью 0,9 и 0,8 световой. Какое будет между ними расстояние (в световых секундах) через 10 *сек* после их встречи?

35 (Л). Вокруг продольной оси ракеты вращается маховик. Линейная скорость точек его обода в системе «Ракета» составляет 30 *м/сек*. Чему она равна в системе «Земля», если скорость ракеты относительно Земли 200 000 *км/сек*?

36 (С). В инерциальной системе отсчета «Ракета» покоившийся вначале шар начинает двигаться в поперечном направлении с ускорением $a_р$. Каким ускорением $a_з$ обладает этот же шар в системе «Звезды», если относительно нее ракета летит в направлении своей продольной оси со скоростью v?

37 (С). В системе отсчета «Земля» нейтрон и альфа-частица летят по взаимно перпендикулярным траекториям со скоростями v_1 и v_2, которым соответствуют релятивистские коэффициенты K_1 и K_2. Выразить через K_1 и K_2 релятивистский коэффициент K, характеризующий движение нейтрона в инерциальной системе отсчета «Альфа-частица».

38 (Т). Нейтрино летит поперек ракеты со скоростью света относительно ракеты. Ракета же сама движется относительно звезд с околосветовой скоростью v. Определить полную скорость нейтрино в системе «Звезды».

«Сложение» параллельных скоростей

39 (Л). На фотонной ракете, летящей со скоростью 225 000 *км/сек* относительно Земли, установлен ускоритель, разгоняющий электроны до скорости 240 000 *км/сек* относительно ракеты в направлении ее движения. Какова скорость этих электронов в системе «Земля»?

40 (Л). То же для случая встречного движения электронов и ракеты.

41 (Л). Нейтральная частица летит со скоростью 0,90 световой. За нею вдогонку, на расстоянии 0,01 световой микросекунды, летит другая частица со скоростью 0,95 световых единиц. Через сколько времени произойдет соударение? Какова скорость второй частицы в системе отсчета, связанной с первой частицей?

42 (Т). Относительно некоторой инерциальной системы отсчета электрон и протон летят навстречу друг другу со скоростями v_1 и v_2, которым соответствуют релятивистские коэффициенты K_1 и K_2. Выразить через K_1 и K_2 релятивистский коэффициент K, характеризующий движение электрона в инерциальной системе отсчета «Протон».

43 (Т). В инерциальной системе отсчета «Космический корабль» неподвижное вначале тело под действием приложенной к нему силы начинает двигаться вдоль продольной оси корабля от его кормы к носу с постоянным ускорением $a_к$, достигая через очень короткий промежуток времени $\Delta t_к$ скорости $\Delta u_к$. Определить, на сколько увеличивается при этом скорость данного тела в системе «Звезды» и каким

будет в этой системе отсчета его ускорение $a_з$. Корабль движется относительно звезд вперед с постоянной скоростью v.

44 (Т). Укажите конкретную ошибку в следующем рассуждении. Ракета летит равномерно и прямолинейно относительно Земли со скоростью v, которой соответствует релятивистский коэффициент K (рис. 5). От кормы ракеты

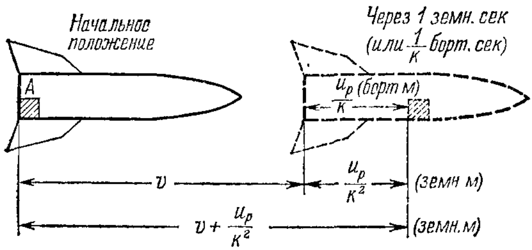


Рис. 5.

в направлении ее полета движется тело A со скоростью $u_р$ относительно ракеты. В системе «Земля» за одну секунду земного времени ракета проходит расстояние v, при этом часы ракеты отсчитывают $1/K$ бортовой секунды и тело A удаляется от кормы на расстояние $u_р/K$ бортовых метра. Но каждый бортовой метр в K раз короче земного; следовательно, удаление тела A от кормы ракеты составляет $u_р/K^2$ земных метров. Итак, через 1 земную секунду тело A окажется на расстоянии $v+u_р/K^2$ земных метров от своего первоначального положения (корма ракеты сместилась на расстояние v, а тело A отошло от кормы вперед на расстояние $u_р/K^2$). Путь, пройденный за единицу времени, есть скорость. Значит, скорость тела A в системе «Земля»

$$u_з = v + \frac{u_р}{K^2} = v + u_р(1-v^2).$$

Полученная формула не совпадает с эйнштейновской формулой «сложения» продольных скоростей. В чем дело?

Релятивистская масса

45 (Л). С какой скоростью должен лететь протон, чтобы его релятивистская масса равнялась массе покоя альфа-частицы (которая в четыре раза больше, чем масса покоя протона)?

46 (С). Прямоугольный стеклянный брусок движется вдоль одного из своих ребер со скоростью 290 000 *км/сек*. Какова плотность (релятивистская масса в единице объема) этого бруска в состоянии движения, если табличная плотность данного сорта стекла 2,45 *г/см*³? Нельзя ли обобщить полученный результат на тело произвольной формы?

47 (Т). Построить график зависимости периода обращения протона в циклотроне от его скорости при медленных и очень быстрых движениях (качественно).

48 (С). Протон летит к северу со скоростью $v_p=0{,}7$ световой единицы, а альфа-частица — к югу со скоростью $v_\alpha=0{,}2$ световой единицы. В каком направлении движется центр масс этой системы, если у альфа-частицы масса покоя в 4 раза больше, чем у протона?

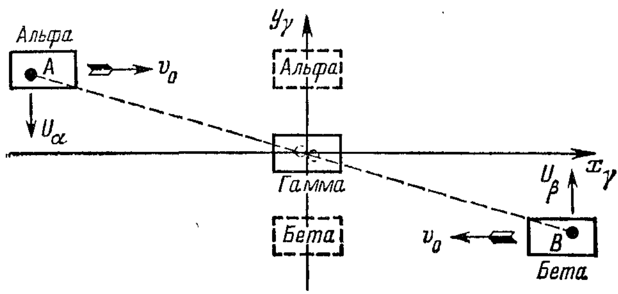


Рис. 6.

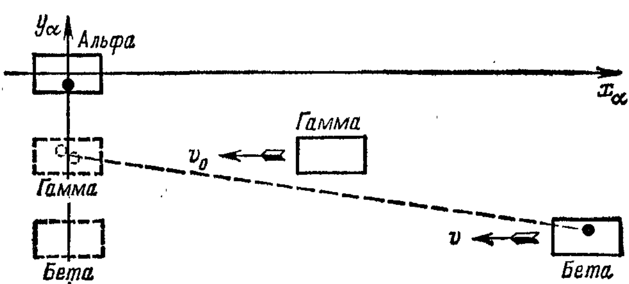


Рис. 7.

49 (Т). Рис. 6 и 7 иллюстрируют мысленный эксперимент с неупругим соударением шаров, на основании которого можно установить зависимость массы от скорости (см. книгу автора «Начала теории относительности», параграф «Релятивистская масса»). Рис. 6 построен с позиций гаммацентриста; шары A и B движутся симметрично. Рис. 7 построен в системе «Альфа», где скорости шаров в направлении оси y различаются в K раз ($w_{A\alpha}=Kw_{B\alpha}$). Как может объяснить альфацентрист, что шары сталкиваются точно посредине между ракетами «Альфа» и «Бета»?

50 (Т). Разъясните с позиций альфацентриста следующий парадокс, который можно усмотреть на рис. 7 (см. предыдущую задачу). Если скорость v_0 ракеты «Гамма» близка к световой, то скорость v ракеты «Бета» может только чуть-чуть превышать v_0. Как же тогда получается, что ракета «Бета» прибывает к ракете «Альфа» одновременно с ракетой «Гамма», т. е. проходит за то же самое время двойное расстояние?

Импульс в теории относительности

51 (Л). Построить график зависимости скорости и массы от импульса для тела с массой покоя 1 *кг* путем переноса

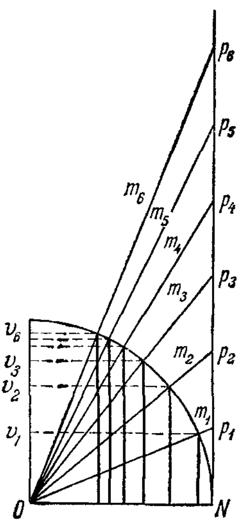


Рис. 8.

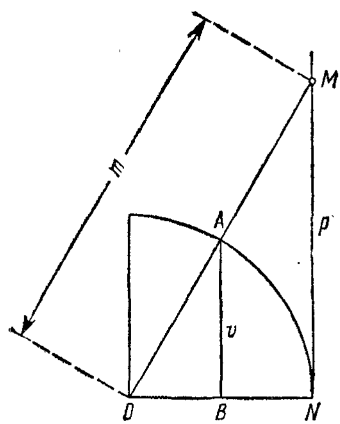


Рис. 9.

соответствующих отрезков с номограммы (рис. 8), графически иллюстрирующей взаимосвязь указанных величин *).

*) Подробнее см. «Начала теории относительности», рис. 37 и 38.

52 (С). Снабдите номограмму (рис. 9), выражающую связь между скоростью, массой и импульсом *), такими надписями, которые позволяли бы пользоваться ею также и в тех случаях, когда указанные величины выражены не в световых единицах, а в обычных единицах системы СИ. А затем измените эти надписи, чтобы сделать номограмму применимой и для тел, масса покоя которых отличается от единицы.

53 (С). На основании номограммы (рис. 8 и 9) *) выразите скорость v, приобретаемую за время t под действием постоянной силы F неподвижным вначале телом с массой покоя $m_0=1$. Как изменится полученная формула, если масса покоя отличается от единицы?

54 (С). На фотонной или ионной ракете установлен пружинный акселерометр (например, вроде упоминавшегося в задаче 10, рис. 3) и автоматический регулятор работы двигателя, благодаря которому в течение всего полета показание акселерометра не меняется и соответствует значению ускорения $a_0=10$ *м/сек*^{2}. Какую скорость относительно Земли будет иметь ракета через $3\cdot10^7$ *сек* (чуть меньше года) полета по земному времени? А через $1{,}2\cdot10^8$ *сек* с момента старта? Для сравнения сначала укажите, какие ответы на эти же вопросы дала бы классическая механика.

55 (Для умеющих дифференцировать). Исходя из справедливого в теории относительности закона импульса:

$$d(m\boldsymbol{v})=\boldsymbol{F}\,dt,$$

и рассматривая в отдельности каждый из двух следующих случаев: а) когда сила $\boldsymbol{F}$ перпендикулярна скорости $\boldsymbol{v}$ и б) когда они обе направлены по одной прямой, вывести формулы релятивистской динамики, аналогичные второму закону Ньютона:

$$m'\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}=\boldsymbol{F},$$

и при этом определить значения коэффициента пропорциональности m' для каждого из двух указанных направлений силы по отношению к скорости (т. е. так называемую «поперечную» и «продольную» массы тела).

56 (С). Используя номограмму (рис. 9), выразите аналитически релятивистскую массу m тела с единичной массой покоя через его импульс p.

*) Подробнее см. «Начала теории относительности», рис. 37 и 38.

Обобщите полученный результат на случай тела с любой массой покоя m_0, считая ее заданной.

57 (С). Пусть тело движется с такой скоростью v, что приращение его массы из-за движения по сравнению с его же массой покоя едва заметно. Выразите это приращение (т. е. кинетическую массу) через массу покоя и скорость тела в простейшей форме, используя для этого результат предыдущей задачи и формулу приближенных вычислений

$$\sqrt{1+\alpha} \approx 1+\frac{\alpha}{2},$$

справедливую при $\alpha \ll 1$. Как может быть кратко сформулирован полученный результат? Согласуется ли он с правилами размерностей?

58 (С). Какую массу будет иметь электрон, который вначале покоился, после воздействия на него силы $F=3\cdot10^{-16}$ *н* в течение $t=4$ *мксек*? Масса покоя электрона $m_0=9\cdot10^{-31}$ *кг*. Для расчета воспользоваться номограммой, надписи на которой изменены согласно указаниям задачи 52 (см. рис. 17 на стр. 40), или результатом задачи 56.

Кинетическая энергия

59 (Л). Определить кинетическую энергию электрона при скорости 0,75 световой единицы по классическим и релятивистским формулам. Масса покоя электрона $9\cdot10^{-31}$ *кг*.

60 (С). Насколько увеличится масса электрона после прохождения им в ускоряющем электрическом поле разности потенциалов в 1 млн. вольт? Заряд электрона $e=1{,}6\cdot10^{-19}$ *к*.

61 (С). Протон летит с начальной скоростью $V=270\,000$ *км/сек* в тормозящем электрическом поле. Какую разность потенциалов он сможет преодолеть? Заряд протона $1{,}6\cdot10^{-19}$ *к*, масса покоя $1{,}67\cdot10^{-27}$ *кг*. Ответ дать в рамках классической физики и в рамках теории относительности.

62 (Для знающих математику сверх программы). Покажите, что при малых скоростях релятивистская формула кинетической энергии переходит в классическую.

63 (Т). Ускоритель имеет конструкцию циклотрона, но частота ускоряющего электрического поля в зазоре меняется

по мере набора скорости ускоряемой частицей таким образом, что при каждом пролете ею зазора сила оказывается попутной и постоянной по величине *). К концу первого миллиарда оборотов частица достигла очень большой скорости v_1, которой соответствует релятивистский коэффициент $K_1 \gg 1$. Какой станет ее скорость v_2 (и соответствующий ей релятивистский коэффициент K_2) еще через миллиард оборотов?

64 (С). Пользуясь номограммой (рис. 17), выразите кинетическую энергию $E_{кин}$ тела с массой покоя m_0 через его импульс p. Сравните полученную формулу с классической.

65 (С). Масса покоя протона около 1 *Гэв*. В космических лучах встречаются протоны с кинетической энергией порядка 10^{10} *Гэв* (появление их удается определить косвенными методами). Пусть протон с такой энергией пересекает по диаметру Галактику. Длина этого диаметра 10^5 световых лет. Сколько времени потребуется протону на такое путешествие «с его точки зрения»?

66 (С). Заряженная частица (например, ион), ускоряясь в постоянном электрическом поле, достигает скорости $v_1=0{,}8$ световой единицы. Какую скорость v_2 наберет на том же пути другая частица, имеющая такой же заряд, но в 4 раза меньшую массу покоя? Для сравнения сначала дайте ответ в рамках классической механики.

67 (Т). При соударении быстро движущегося протона, имеющего кинетическую энергию около 6 *Гэв*, с неподвижным протоном возможно образование пары протон — антипротон. При меньшей скорости ударяющего протона такая реакция не произойдет. С какими минимальными одинаковыми кинетическими энергиями должны бы двигаться два протона навстречу друг другу, чтобы при их столкновении могла бы иметь место указанная реакция? Масса покоя протона около 1 *Гэв*.

Взаимосвязь массы и энергии

68 (Л). В 1970 г. электростанции Советского Союза выработали 740 млрд. *квт-ч* электроэнергии. Какой массе соответствует такое количество энергии?

---

*) Ускоритель, основанный на такой идее, называется *синхроциклотроном* или же *фазотроном*.

69 (Л). На сколько процентов увеличится масса воды при нагревании ее на 100°С?

70 (Л). Сколько стоит один грамм света при тарифе на электроэнергию 4 копейки за киловатт-час и коэффициенте полезного действия электрического источника света 10%?

71 (С). Внутренность сферической камеры радиусом 1,5 *м* с поглощающими стенками освещается расположенным в ее центре электрическим светильником мощностью 50 *вт* с коэффициентом полезного действия 10%. Определить массу света, находящегося в камере, и сравнить с массой атома.

72 (С). Мощность излучения Солнца $4 \cdot 10^{26}$ *вт*. На сколько тонн уменьшается масса Солнца за каждую секунду? С каким ускорением двигалось бы Солнце и какую скорость приобрело бы оно за год, если бы весь свет испускался Солнцем только в одном направлении? Масса Солнца $2 \cdot 10^{30}$ *кг*.

73 (С). Искусственный спутник Земли «Эхо-1» представлял собой шар диаметром 30 *м*, изготовленный из очень тонкой пленки и наполненный разреженным воздухом. Масса этого спутника составляла около 60 *кг*. Какое ускорение испытывал он под действием светового давления солнечных лучей, если каждую секунду на него падало 10^6 *дж* солнечного света, который частично поглощался, частично же равномерно рассеивался во все стороны? Какая скорость могла бы накопиться таким образом за 10 дней (приблизительно миллион секунд)?

74 (С). Допустим, что между катодом и анодом вакуумного прибора имеется напряжение 1 млн. вольт. Из катода вылетает (с очень малой начальной скоростью) электрон, который затем попадает на анод. Насколько увеличатся или уменьшатся вследствие этого масса катода, масса анода и масса существующего между ними электрического поля? Что изменится после того, как восстановится первоначальная температура частей прибора?

75 (С). Сколько джоулей энергии высвобождается при термоядерном синтезе 4 *г* гелия из дейтерия и трития с выделением нейтрона? Сравните с теплотворной способностью бензина.

76 (С). Теплоизолированный электрокипятильник космической лаборатории имеет сопротивление $R=10$ *ом* и питается от источника электрической энергии постоянного тока с напряжением $U=300$ *в*, расположенного на расстоянии

$l=4$ *м* от кипятильника. Лаборатория покоится. С какой скоростью и в каком направлении станет она двигаться после выключения кипятильника? Масса лаборатории $m_0=500$ *кг*.

77 (С). Определить общую энергию (в джоулях) гамма-квантов, возникающих в результате аннигиляции электрона и позитрона.

78 (С). При столкновении двух протонов, движущихся навстречу друг другу с одинаковыми скоростями, происходит иногда рождение пары протон — антипротон:

$$p+p \rightarrow p+p+p+\tilde{p}.$$

При какой минимальной кинетической энергии каждого из сталкивающихся протонов такая реакция энергетически возможна, если масса покоя протона около 1 *Гэв*? Сравните с результатом задачи 67.

Задачи на разные темы

79 (С). Проволочное кольцо радиусом $r_0=4$ *м* первоначально покоится. Затем его приводят во вращение вокруг оси, перпендикулярной плоскости кольца и проходящей через его центр. Какой величины достигла бы линейная скорость v точек кольца, если бы его угловую скорость удалось довести до значения $\omega=10^8$ *рад/сек*? Материал кольца считать предельно жестким (насколько это допускает теория относительности).

80 (Т). Частица с массой покоя m_0, двигаясь со скоростью 4/5 скорости света, испытывает неупругое столкновение с другой такой же покоящейся частицей. При этом частицы соединяются друг с другом, образуя новую «составную» частицу. Какую релятивистскую массу, скорость и массу покоя будет иметь эта образовавшаяся частица?

81 (Т). Покоящийся пи-мезон распадается на мю-мезон и нейтрино. Масса покоя пи-мезона 273 m_0, а мю-мезона 207 m_0, где m_0 — масса покоя электрона. Нейтрино же (подобно фотону) массы покоя не имеет. Определить скорость образовавшегося мю-мезона (в долях скорости света). Желающие могут определить также и энергию получившихся частиц.

82 (С). В классической механике два шара с одинаковыми массами при центральном абсолютно упругом соударении обмениваются скоростями. Можно ли распространить это правило также и на случай околосветовых скоростей, если

понимать при этом под «массами» шаров а) их релятивистские массы или б) их массы покоя?

83 (С). Сохраняет ли силу в теории относительности известное правило классической динамики: в результате центрального абсолютно упругого соударения двух шаров с равнопротивоположными импульсами скорость каждого из них меняется на равнопротивоположную?

84 (С). В кабине межзвездного корабля, покоящегося на ракетодроме, на одной из ее продольных стенок укреплен прожектор, посылающий тонкий луч света поперек корабля. При этом луч света падает точно на фотоэлемент, установленный на противоположной стенке. Будет ли фотоэлемент по-прежнему облучаться светом во время равномерного и прямолинейного полета корабля относительно звезд с околосветовой скоростью? Обосновать ответ, ведя рассуждения а) в системе отсчета «Корабль» и б) в системе отсчета «Звезды».

85 (С). В принципе может быть осуществлен длинный стережень (или фронт плоской волны), параллельный оси x, равномерно приближающийся к этой оси. Почему нельзя использовать момент его совпадения с осью x для абсолютно одновременного пуска всех часов, расположенных на оси? Для упрощения задачи мы ограничиваемся рассмотрением только таких инерциальных систем отсчета, которые движутся относительно друг друга лишь в направлении оси x.

86 (С). Положите одну на другую две расчески с различной частотой зубьев и двигайте одну из них (более частозубую) вдоль другой (ожидаемый эффект лучше заметен, если смотреть на свет сквозь сложенные расчески, держа их на расстоянии вытянутой руки). Как вы полагаете, может ли наблюдаемое при этом движение темных и светлых полос происходить с быстротой, превышающей скорость света?

87 (С). Может ли свободный электрон поглотить фотон, т. е. возможна ли в принципе реакция, в начале которой существует две частицы: фотон и покоящийся электрон, а в конце — только движущийся электрон? Почему предположение о том, что вначале электрон покоился, не ограничивает общности результата?

88 (Т). Определить импульсы и массы (в движении) продуктов реакции термоядерного синтеза

$$\mathrm{D} + \mathrm{T} \longrightarrow \mathrm{He} + \mathrm{n},$$

если масса покоя дейтерия 2,015, трития 3,016, гелия 4,003, а нейтрона 1,009 углеродных единиц.

89 (Т). В инерциальной системе отсчета «Альфа» событие S произошло в момент t_α и в точке с координатой x_α. Определить момент t_β и координату x_β этого же события в другой инерциальной системе «Бета», которая движется относительно «Альфы» с постоянной скоростью v в направлении их совпадающих осей x. Начальное событие в обеих системах отсчета — одно и то же. Ответ дать с позиций а) классической физики и б) теории относительности. (Выводимые при решении этой задачи формулы известны в физике как «преобразование Галилея» и «преобразование Лоренца».)

90 (Л). От Земли до Сириуса — 10 световых лет. Как же объяснят звездолетчики (со своей собственной точки зрения) свой прилет к Сириусу через два года после вылета с Земли (звездолет движется со скоростью, соответствующей релятивистскому коэффициенту $K=5$)?

91 (С). По трубе, покоящейся в инерциальной системе отсчета, течет прозрачная жидкость со скоростью $V \ll c$. Внутри жидкости в направлении ее движения распространяется свет. Сколько времени потребуется ему, чтобы пройти расстояние l от одного конца трубы до другого? Показатель преломления данной жидкости (в состоянии покоя) n.

92 (С). В прошлом столетии существовало мнение, что «светоносный эфир», содержащийся в движущемся прозрачном теле, «частично увлекается» этим телом, а именно, движется в том же направлении, что и тело, со скоростью

$$V_{\text{эф}} = V\left(1 - \frac{1}{n^2}\right),$$

где V — скорость тела, а n — показатель преломления. Опыт Физо, измерившего в 1851 г. скорость распространения света в текущей воде, подтвердил эту формулу (предложенную Френелем в 1818 г.). Как это может быть объяснено с позиций теории относительности?

93 (Т). В 1725 г. была открыта *аберрация света* — видимое смещение звезд на небесной сфере вследствие движения Земли. В отличие от параллакса, аберрация обусловлена изменениями не положения, а скорости Земли (при аберрации величина углового смещения не зависит от расстояния до звезды). Если свет — это поток корпускул, аберрацию легко понять уже в рамках классической физики. Но если свет — волны, то без теории относительности не обойтись. Объясните аберрацию с корпускулярной и волновой точек зрения.

94 (Т). Интервалом между двумя событиями A и B называется величина

$$s=\sqrt{t^2-r^2},$$

где t — промежуток времени между моментами этих событий (например, в секундах), а r — расстояние между точками, где эти события произошли (в световых секундах). Величины t и r (каждая в отдельности) зависят, конечно, от того, в какой системе отсчета рассматриваются эти события. Докажите, что, несмотря на это, интервал s между двумя событиями от выбора инерциальной системы отсчета не зависит. Для этого рекомендуется сравнить величины, наблюдаемые в системе «Альфа», где события A и B одноместны, и в произвольной инерциальной системе «Бета». Рассуждения лучше всего вести на пространственно-временной диаграмме в «промежуточной» («симметрирующей») системе «Гамма», относительно которой «Альфа» и «Бета» движутся симметрично.

95 (С). 50-летний ученый отправился в межзвездную экспедицию и через 41 год высадился на незнакомой планете на расстоянии 40 световых лет от Земли (все данные в системе «Звезды»). В каком возрасте он вступил на эту планету? При решении рекомендуется воспользоваться результатом предыдущей задачи.

РЕШЕНИЯ, УКАЗАНИЯ, ОТВЕТЫ

Решения трудных и средних задач

Обращайтесь к «Решениям» только после того, как уже исчерпаны все возможности самостоятельно справиться с задачей, а если она из категории «трудных» — воспользуйтесь сначала «Указаниями» (стр. 57).

2. Перейдем в систему отсчета «Первый корабль». Тогда первый корабль покоится, а второй движется со скоростью $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_2-\boldsymbol{v}_1$; траектория его — прямая вдоль вектора $\boldsymbol{v}$ (рис. 10). Наименьшее его расстояние от первого корабля — по перпендикуляру к траектории $AC \perp BC$. Ответ дается графически отрезком AC.

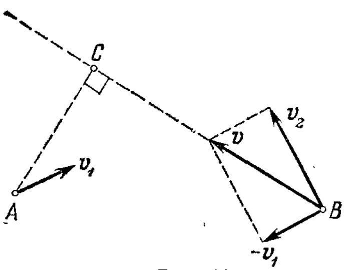


Рис. 10.

3. В системе отсчета «Вода» очевидно, что путь туда и обратно продолжался одинаковое время. Значит, всего от потери до находки прошло два часа. За это время весло проплыло 3 *км*. Скорость течения 3 *км* : 2 *ч*$=1,5$ *км/ч*.

6. Движение новой системы отсчета (относительно звезд) перпендикулярно прямой, проходящей через оба нейтрона, только увеличит модули обеих скоростей, а значит, и суммарную кинетическую энергию. Если же новая система движется со скоростью x вдоль упомянутой прямой, то скорости нейтронов в этой новой системе будут, соответственно, $v-x$ и x, а суммарная кинетическая энергия

$$\frac{m}{2}\left[(v-x)^2+x^2\right],$$

где m — масса нейтрона. Не интересуясь постоянным множителем $m/2$, выясним, при каком значении x выражение

$$(v-x)^2+x^2=v^2-2(v-x)x$$

минимально. Очевидно, при максимальном значении произведения $(v-x)x$. Но это произведение выражает площадь прямоугольника со сторонами $v-x$ и x, т. е. с периметром $2v$. А известно, что среди всех прямоугольников с данным периметром самую большую площадь имеет квадрат. Следовательно, суммарная кинетическая энергия минимальна при $v-x=x$, т. е. при $x=v/2$ — в так называемой «симметрирующей» системе отсчета, относительно которой оба протона движутся симметрично, с равнопротивоположными скоростями.

Максимальное свойство квадрата, на которое мы опирались, проще всего доказывается простым преобразованием:

$$(v-x)x=\left[\frac{v}{2}+\left(\frac{v}{2}-x\right)\right]\cdot\left[\frac{v}{2}-\left(\frac{v}{2}-x\right)\right]=$$
$$=\left(\frac{v}{2}\right)^2-\left(\frac{v}{2}-x\right)^2,$$

откуда ясно, что максимум достигается при обращении последнего члена в нуль, т. е. при $x=v/2$.

7. В системе «Вода» надо плыть перпендикулярно берегам. Следовательно, в системе «Земля» — по прямой AB, не борясь с течением.

8. В системе «Картон» монета, получив скорость v_1, должна дойти до края кружка, т. е. пройти путь R. По закону сохранения энергии

$$\frac{mv^2}{2}=kmgR,$$

откуда

$$v=\sqrt{2kgR}.$$

При бóльших скоростях монета соскочит.

9. Перейдем в «симметрирующую» систему отсчета, в которой оба протона в начальный момент движутся симметрично навстречу друг другу — со скоростями $\pm v/2$ (эта система отсчета относительно исходной сама движется со скоростью $v/2$ в ту же сторону, что и второй протон). Тогда оба протона взаимным отталкиванием будут одинаково тормозить друг друга и остановятся одновременно. В момент

остановки у них будет только потенциальная (электрическая) энергия $E_{\text{пот}} = k\frac{q^2}{r}$ $\Big($заряд q в поле другого заряда q, создающего на расстоянии r потенциал $\varphi = k\frac{q}{r}$, где $k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9\cdot 10^9\ \frac{н\cdot м^2}{к^2}\Big)$. Она должна быть равна суммарной начальной кинетической энергии двух частиц:

$$k\frac{q^2}{r} = 2\cdot\frac{1}{2}m\left(\frac{v}{2}\right)^2,$$

откуда

$$r = \frac{4kq^2}{mv^2}.$$

10. Грузик в системе «Самолет» покоится и, следовательно, в инерциальной системе движется с ускорением $-a$, где a — ускорение самолета относительно инерциальной системы отсчета.

Применяя в *инерциальном* отсчетнике второй закон Ньютона, имеем

$$|-a| = a = \frac{2F}{m} = \frac{2\cdot 0{,}7\ н}{0{,}2\ кг} = 7\ м/сек^2.$$

11. Согласно принципу относительности законы природы одинаковы во всех инерциальных системах отсчета. Поэтому мы можем с одинаковым правом вести рассуждения как в системе «Звезды», так и в системе «Корабль». Но ведь в системе «Корабль» космонавты почти покоятся, так что нет никаких причин для изменения их самочувствия.

Иначе можно сказать, что если бы наблюдались явления, описываемые фантастами, то человеческий организм мог бы служить противоречащим принципу относительности индикатором абсолютной скорости.

Каков же действительный смысл известного утверждения теории относительности Эйнштейна об увеличении массы каждого тела с увеличением его скорости, подробно разъясняется, например, в книге «Начала теории относительности», § 20. Сейчас отметим только, что это увеличение массы космонавтов наблюдается не в системе отсчета «Корабль», а в системе отсчета «Звезды», по отношению к которой они движутся с околосветовой скоростью.

12. Прямолинейный график *I* (рис. 11) соответствует предположению о независимости скорости света от движения источника (тогда $\tau = t + \frac{r}{c}$, где r — расстояние от звезды до Земли, а c — скорость света). Волнистые графики 2 и 3 построены в предположении, что скорость источника добавляется к скорости испускаемого им света. В моменты $t=0$, t_2, t_4 ..., когда скорость звезды в направлении к Земле равна нулю, свет распространяется в сторону Земли со скоростью c, т. е. приходит к нам с таким же запаздыванием, как если бы скорость его не зависела от движения источника (точки A, B, C, D всех графиков совпадают). В моменты t_1 и t_5, когда звезда удаляется от Земли, свет идет к Земле с меньшей скоростью и достигает нас позже (точки M_2, M_3 расположены выше, чем M_1). В момент t_3 звезда движется в сторону Земли, ее скорость арифметически прибавляется к скорости света, и он приходит к нам раньше (точки N_2, N_3 ниже, чем N_1).

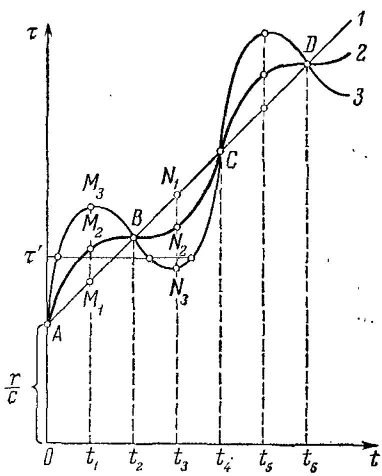


Рис. 11.

Графики 2 и 3 соответствуют различным линейным скоростям движения звезды по орбите (при более быстром движении эффект сильнее). Заслуживает внимания тот факт, что в момент τ' более «быстрая» звезда видна с Земли сразу в трех положениях.

13. В системе «Земля» расстояние между соседними ракетами — по 0,5 светового года. С точки зрения геоцентриста сигнал с «Фантазии-2» приближается к ракете «Фантазия-1» со скоростью 0,5 скорости света, а к «Фантазии-3» — со скоростью 1,5 скорости света. Следовательно, ракету «Фантазия-1» сигнал догонит через 1 год, а «Фантазию-3» повстречает через одну треть года. Ошибка в согласовании часов (с точки зрения геоцентриста) составит 2/3 года (часы на передней ракете пущены на 8 месяцев позже, чем на задней).

Все это можно проиллюстрировать пространственно-временной диаграммой (рис. 12). Здесь A_1, A_2, A_3 — старты ракет «Фантазия-1», «Фантазия-2» и «Фантазия-3», A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 — графики их полета. Точка D изображает излучение радиосигнала, а прямые DP и DQ — распространение его в разные стороны. Точки P и Q соответствуют

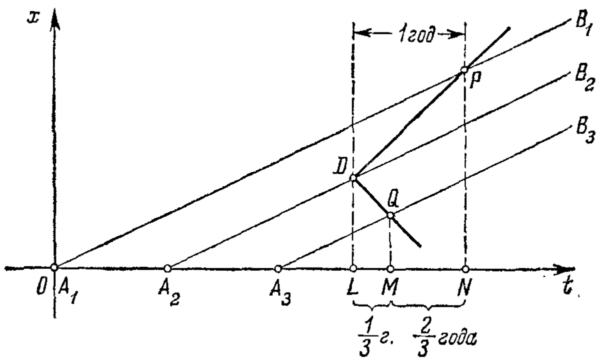


Рис. 12.

приему сигнала ракетами «Фантазия-1» и «Фантазия-3», «Ошибка» космонавтов в согласовании часов (с точки зрения звездоцентриста) изображается отрезком MN.

16. За 15 *сек* свет проходит расстояние $4{,}5 \cdot 10^6$ *км*. Это больше, чем расстояние в пространстве между событиями P и Q. Значит, в принципе событие P могло быть причиной события Q, а последовательность таких событий во времени ни в какой инерциальной системе отсчета не может оказаться перевернутой. Зато какая-нибудь ракета вполне могла за 15 *сек* перелететь (с постоянной скоростью, меньшей c) от места события P к месту события Q. В отсчетнике (системе отсчета), связанном с этой ракетой, события P и Q произошли в одном месте.

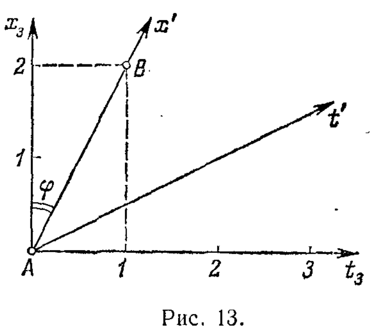


Рис. 13.

17. Построим пространственно-временной график (рис. 13) в системе «Звезды», приняв событие A за начальное, и отметим на нем событие B. Теперь легко провести через A и B ось нулевого времени той системы, в которой события A и B одновременны. Наклон φ этой оси к вертикали таков, что $\operatorname{tg} \varphi = v$, так что $v = 0{,}5$ св. ед.

Ось $A t'$ есть график движения искомой системы отсчета (точнее, ее начала координат) относительно исходной. Следовательно, в исходной системе отсчета искомая должна двигаться в направлении от места свершения более раннего события A к месту свершения более позднего события B.

18. В задаче рассматриваются два события: мой выход из дома и отправление поезда. Согласно условию задачи, при смене системы отсчета последовательность этих событий во времени меняется на противоположную. Значит, события эти не могут находиться друг с другом в причинной связи; даже световой сигнал не смог бы поспеть от одного события к другому. Иными словами, из условий задачи вытекает, что эти события удалены друг от друга в пространстве на очень большое расстояние.

В частности, если вести рассуждения в системе «Бета», придется признать, что на прохождение до вокзала (откуда отходит поезд) даже светового или телевизионного сигнала о моем выходе из дома потребовалось бы более десяти минут. А мне-то самому уж и заведомо не преодолеть это расстояние за те десять минут, которые оказались в моем распоряжении благодаря смене системы отсчета.

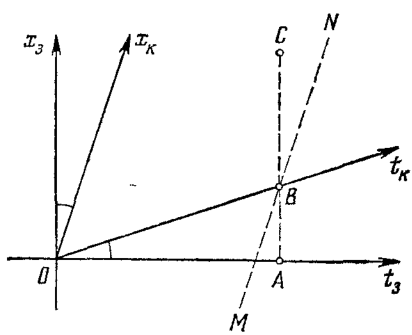


Рис. 14.

19. Правильность стихотворения с точки зрения теории относительности явствует из пространственно - временной диаграммы (рис. 14). Оси $t_з$ и $x_з$ соответствуют системе «Земля», оси $t_к$ и $x_к$ — системе «Космический корабль». Прямая $O t_к$ является также и графиком движения корабля, так что он явно летит в сторону положительных x. Пусть точка A соответствует моменту и месту сочинения стихов. С позиции поэта (находящегося на Земле и пользующегося системой «Земля») положение корабля в это мгновение изображается точкой B. Космонавты «смотрят вперед» и рассуждают о некотором событии C, которое поэт считает происходящим впереди корабля в момент сочинения стихов (геоцентрическая одновременность!). Космонавты тоже считают, что событие C произошло впереди корабля, но в п р о ш л о м, так как точка C располагается левее кораблецентрической линии одновременности MN. Событие же A («Наше здешнее сегодня», по выражению поэта) находится для космонавтов в области неконтролируемого будущего (точка A правее их линии одновременности MN).

21. По законам классической механики, чтобы пролететь 30 *км* за 2 *мксек*, нужна скорость $15 \cdot 10^6$ *км/сек*, т. е. во много раз больше скорости света. Значит, мю-мезону удается преодолеть такое большое расстояние лишь благодаря тому, что «старение» его замедленно во много раз. Но это возможно только при скоростях полета, очень близких к скорости света. В системе «Земля» пролет тридцати километров с такой скоростью занял бы 100 *мксек*, а мю-мезон может существовать лишь 2 *мксек*. Следовательно, $K=50$, откуда $v=299\,940$ *км/сек*.

22. Мы не знаем, какие радиоволны излучает движущийся атом водорода. Но в собственной системе отсчета он покоится и, следовательно, излучает электромагнитные колебания с частотой 1,4 *Ггц*, т. е. 1,4 колебания за «атомную» наносекунду *). Однако, с точки зрения геоцентристов, «атомная» наносекунда в K раз продолжительнее «земной», где $K=1{,}4$. Поэтому с земной точки зрения период колебания в K раз больше, а частота в K раз ниже, т. е. равна 1 *Ггц* (никаких эффектов, связанных с изменением величины запаздывания при распространении, учитывать не надо, так как при поперечном движении атома расстояние практически не меняется). Описанное явление называют «поперечным эффектом Доплера».

23. Космонавты будут сопоставлять принятые радиоволны со своими эталонами частоты, например, с излучением находящихся на ракете атомов водорода, или просто «подсчитывать» число колебаний за единицу времени. Но секунды у них — растянутые в $K=1{,}4$ раза и электроны в атомах колеблются во столько же раз медленнее. Поэтому частота дошедших до них радиоволн будет воспринята ими как более высокая (а именно, $Kf_0 \approx 2$ *Ггц*).

---

*) 1 наносекунда $= 10^{-9}$ *сек*.

24. Все дело в том, что только в одной из обеих систем отсчета прямая космический атом — Земля перпендикулярна скорости движения. В условиях задачи 22 предполагается, что приемник и излучатель находятся на одном перпендикуляре к их относительной скорости в момент излучения, а в условиях задачи 23 — в момент приема радиоволн. А это далеко не одно и то же: за время распространения движущийся объект проходит путь, почти равный минимальному расстоянию между приемником и излучателем, что соответствует изменению направления соединяющей их прямой почти на 45°. По-разному поставленные опыты приводят к неодинаковым результатам — в этом нельзя усмотреть ни малейшего нарушения равноправности инерциальных систем отсчета.

25. а) По собственному времени передатчика период колебаний тока в его антенне $T_0=1/f_0$; по времени же той системы отсчета, в которой передатчик движется, этот период длится $T'=T_0K=K/f_0$. Пусть в точке A (рис. 15)

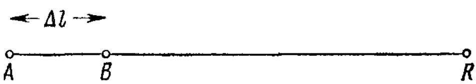


Рис. 15.

был излучен максимум первого цикла радиоволны, а по истечении периода T' в точке B — максимум второго цикла. В неподвижную точку приема R второй максимум дойдет после первого с запозданием не на T', а на $T''=T'-\Delta l/c$ (так как второй максимум не затрачивает времени на прохождение отрезка Δl со скоростью c). Но $\Delta l=vT'$, так что максимумы приходят к наблюдателю через промежутки времени

$$T''=T'-\frac{vT'}{c}=T'\left(1-\frac{v}{c}\right)=T_0K\left(1-\frac{v}{c}\right)$$

или в световых единицах (т. е. при $c=1$)

$$T''=T_0K(1-v)=T_0\sqrt{\frac{1-v}{1+v}}.$$

Следовательно, измеряемая наблюдателем частота колебаний тока в антенне приемника

$$f''=\frac{1}{T''}=f_0\sqrt{\frac{1+v}{1-v}}$$

(продольный эффект Доплера).

б) Покоящийся передатчик излучает волны с периодом $T_0=1/f_0$ и длиной волны $\lambda_0=c/f_0$. Антенна приемника движется навстречу этим волнам со скоростью v. Следовательно, с точки зрения физика, пользующегося системой отсчета «Передатчик», она встречает за секунду $\frac{c+v}{\lambda}$ максимумов волн. Но это — за секунду системы «Передатчик», а за более долгую секунду системы «Приемник» $K\frac{c+v}{\lambda}$ максимумов. Это и есть частота f тока в антенне приемника, измеренная наблюдателем, движущимся вместе с приемником. Следовательно (при $c=1$),

$$f=\frac{K(1+v)}{\lambda}=Kf_0(1+v)=f_0\sqrt{\frac{1+v}{1-v}}.$$

В согласии с принципом относительности результат получился одинаковым в обеих системах отсчета. Если бы мы не учли замедления процессов в движущихся телах в K раз, измеряемые частоты при рассуждении в различных отсчетниках получились бы неодинаковыми:

$$f''=\frac{f_0}{1-v};\quad f=f_0(1+v),$$

что противоречило бы принципу относительности.

27. Рассуждение в отсчетнике (системе отсчета) «Стенка» (в котором изложено и условие задачи) сомнений не вызывает. При этом весьма существенно, что в любой момент времени стержень и стенка друг другу параллельны (см. рис. 4). Обозначим через r_A и r_B расстояния концов A и B движущегося стержня от стенки. После удара оба расстояния (r_A и r_B) с течением времени убывают, но в любой момент $r_A=r_B$ (это и является выражением поперечности удара; для четкости картины лучше представить себе, что одинаковые удары были нанесены по обоим концам стержня, но обязательно одновременно).

Рассмотрим теперь явления в отсчетнике «Стержень», точнее, в инерциальном отсчетнике «Стержень до удара» (в процессе удара стержень испытывает ускорения, отсчетник же продолжает двигаться относительно стенки равномерно-прямолинейно). В этой системе отсчета стенка все время движется в продольном направлении, а стержень сначала неподвижен, но после удара и он движется, приближаясь к стенке. Однако сообщившие это движение удары по концам A и B нанесены не одновременно: ведь в отсчетнике «Стержень» иное понимание одновременности (убедитесь самостоятельно на пространственно-временной диаграмме, что удар по концу B предшествует удару по A). Этим вызывается перекос стержня, который и позволяет ему проникнуть сквозь меньшее по размерам отверстие.

Неизбежность нарушения параллельности между стержнем и стенкой можно обосновать и не вникая в подробности того, как был осуществлен удар. Достаточно и того, что параллельность имела место в отсчетнике «Стенка», т. е. любые стенкоцентрически одновременные значения r_A и r_B равнялись друг другу. Уже поэтому стержнецентрически одновременные значения r_A и r_B обязательно отличаются друг от друга, так как в системе «Стенка» они относятся к различным моментам времени, а расстояния r_A и r_B меняются со временем.

Подумайте, как можно было бы объяснить происхождение перекоса в случае, когда удар наносится только в одном месте — точно посредине стержня (ответ на этот трудный вопрос напечатан на стр. 57).

28. Продольный размер квадрата сократится в 2,3 раза, поперечный останется прежним. Угол между диагоналями 48°.

29. Длина бруска сокращается в K раз, продольные же размеры остаются неизменными. Поэтому и объем уменьшается в K раз. Объем тела произвольной формы может быть определен как сумма объемов очень малых параллелепипедов.

30. Движение влияет не только на объем ванны, но и на объем налитой в нее «порции» воды. Следовательно, вода из движущейся ванны, утратив свое движение, как раз заполнит неподвижную ванну.

31. В системе «Альфа» очевидно, что провод «провиснет»: ведь при переходе в состояние покоя он удлинится в K раз, расстояние же между ракетами при одновременном и одинаковом торможении измениться не может. В системе «Бета» ракеты не тормозятся, а ускоряются; провод при этом укорачивается, но уменьшается также и расстояние между ракетами, так как стартуют они разновременно (передняя позже задней). Справедливость принципа относительности (который требует провисания провода) обеспечивается тем, что второй эффект преобладает количественно. Рекомендуется проиллюстрировать все эти рассуждения пространственно-временной диаграммой.

32. а) В системе «Корабль» конец стрелки описывает окружность длиной 12π *см* за 60 *сек*. Его линейная скорость $12\pi/60$ *см/сек*$=0{,}628$ *см/сек*.

б) В системе «Звезды» тот же путь (поперечные размеры не изменяются!) проходится за 600 *сек* («звездные» секунды в K раз короче!). Следовательно, скорость 0,0628 *см/сек*.

36. В отсчетнике «Ракета» через 1 *сек* шар достигает скорости $v_р=a_р$ *сек*. В системе «Звезды» эта скорость имеет величину $v_з=v_р/K=a_р/K$, причем достигнута она за K *сек*. А это соответствует ускорению

$$a_з=\frac{v_з}{t_з}=\frac{v_з}{K}=\frac{a_р}{K^2}\,.$$

37. В системе отсчета «Альфа-частица» Земля движется со скоростью $-v_2$, а скорость нейтрона имеет две взаимно перпендикулярные составляющие: $-v_2$ (движение вместе с Землей) и v_1/K_2 (движение относительно Земли, пересчитанное в системе «Альфа-частица»). Квадрат модуля полной скорости нейтрона v в системе «Альфа-частица»

$$v^2=v_2^2+\frac{v_1^2}{K_2^2}\,.$$

Для определения коэффициента K найдем сначала

$$1-v^2=1-v_2^2-\frac{v_1^2}{K_2^2}=\frac{1}{K_2^2}-\frac{v_1^2}{K_2^2}=\frac{1-v_1^2}{K_2^2}=\frac{1}{K_1^2K_2^2}\,,$$

откуда

$$K=\frac{1}{\sqrt{1-v^2}}=K_1K_2.$$

38. В системе «Звезды» скорость нейтрино имеет две составляющие: продольную (вдоль движения ракеты) $u_з=v$ и поперечную $w_з=w_р/K=1/K$ (здесь единица в числителе — скорость света). Квадрат полной скорости нейтрино в системе «Звезды»

$$(u_з')^2=u_з^2+w_з^2=v^2+\frac{1}{K^2}=v^2+(1-v^2)=1.$$

Как и следовало ожидать, в любой инерциальной системе нейтрино имеет одинаковую по модулю скорость, совпадающую со световой, но только она по-разному проектируется на оси координат (так как направление полета нейтрино з а в и с и т от системы отсчета).

42. В формулу для квадрата искомого коэффициента K:

$$K^2=\frac{1}{1-v^2},$$

следует подставить выражение v через v_1 и v_2:

$$v=\frac{v_1+v_2}{1+v_1v_2}.$$

В полученную таким путем формулу

$$K^2=\frac{(1+v_1v_2)^2}{(1-v_1^2)(1-v_2^2)}$$

подставляем выражения для v_1 и v_2 через K_1 и K_2

$$v_1=\frac{\sqrt{K_1^2-1}}{K_1}; \quad v_2=\frac{\sqrt{K_2^2-1}}{K_2},$$

получаемые из формул

$$K_1=\frac{1}{\sqrt{1-v_1^2}}; \quad K_2=\frac{1}{\sqrt{1-v_2^2}}.$$

Это дает

$$K=K_1K_2+\sqrt{(K_1^2-1)(K_2^2-1)}.$$

43. К концу указанного промежутка времени скорость тела в системе «Корабль» станет $\Delta u_к=a_к\Delta t_к$. В системе «Звезды» вначале скорость тела была v, а через время $\Delta t_з=K\Delta t_к$ достигла значения

$$u_з'=\frac{v+\Delta u_к}{1+v\Delta u_к}.$$

Приращение скорости тела в системе «Звезды»

$$\Delta u_з=u_з'-u_з=\frac{v+\Delta u_к}{1+v\Delta u_к}-v=\frac{\Delta u_к(1-v^2)}{1+v\Delta u_к}.$$

При малом $\Delta t_к$ величиной $\Delta u_к=a_к\Delta t_к$ в знаменателе можно пренебречь:

$$\Delta u_з\approx\Delta u_к(1-v^2)=\frac{\Delta u_к}{K^2}.$$

Ускорение тела в системе «Звезды»

$$a_з=\frac{\Delta u_з}{\Delta t_з}=\frac{\Delta u_к}{K^2\cdot K\,\Delta t_к}=\frac{\Delta u_к}{\Delta t_к}\cdot\frac{1}{K^3}=\frac{a_к}{K^3}.$$

44. В рассуждении упущена из виду относительность одновременности. Те положения кормы ракеты и тела A, которые отметит геоцентрист «через одну секунду», для ракетоцентриста не будут даже одновременными. Если, делая свои отметки, геоцентрист обратит внимание на показания бортовых часов, то он обнаружит, что в момент отметки бортовые часы на корме показывают $1/K$, а другие бортовые часы, к которым приблизилось тело A, показывают иное время (по диаграмме нетрудно определить, что меньшее). Но при определении скорости в системе «Ракета» следует делить пройденный путь именно на показание часов в пункте прибытия.

Иначе можно сказать, что в K раз медленнее идут часы, покоящиеся в движущейся системе. При определении же скорости имеет значение разность показаний часовых механизмов в начале и конце пути, а тут уже вступает в игру понятие одновременности, зависящее от системы отсчета. Рекомендуется еще раз проследить все это на рис. 34 книги «Начала теории относительности».

46. Движение увеличивает массу бруска в K раз и во столько же раз уменьшает его объем (продольное сжатие). Плотность увеличивается в K^2 раз, достигая значения 45 *г/см*^{3}. От формы тела этот результат не зависит, так как любое тело может быть разбито на малые параллелепипеды.

47. Угловая скорость движения протона определяется из второго закона Ньютона:

$$\omega v = \frac{evB}{m}$$

(слева — центростремительное ускорение, справа в числителе — лоренцева сила), откуда

$$\omega = \frac{eB}{m}.$$

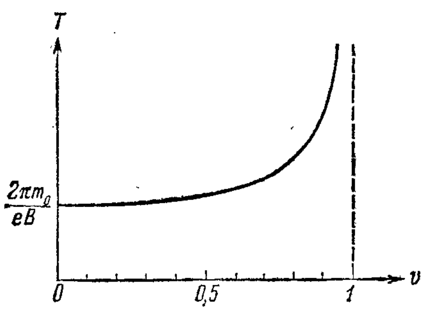


Рис. 16.

Период обращения

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi m}{eB}$$

пропорционален массе, чем и определяется характер зависимости его от скорости:

$$T = \frac{2\pi m_0}{eB\sqrt{1-v^2}} \quad \text{(рис. 16)}.$$

48. Центр масс движется в ту же сторону, что и частица, для которой произведение массы на скорость больше. Для протона

$$m_p v_p = \frac{m_0}{\sqrt{1-0,7^2}} \cdot 0,7 \approx m_0;$$

для альфа-частицы

$$m_\alpha v_\alpha = \frac{4m_0}{\sqrt{1-0,2^2}} \cdot 0,2 \approx 0,8m_0,$$

где m_0 — масса покоя протона. Центр масс движется, как и протон, к северу.

49. Выстрелы с ракет «Альфа» и «Бета» одновременны только с позиций гаммацентриста. В системе же «Альфа» ракета «Бета» выстрелила своим шаром раньше, нежели ракета «Альфа».

50. Рис. 6 является «мгновенной фотографией» взаимного расположения ракет в определенный момент времени только в системе «Гамма». Допустим, что в упомянутый момент на каждый из ракет вспыхнул фонарь. Эти три вспышки одновременны в отсчетнике «Гамма», но разновременны в отсчетнике «Альфа» (где вначале зажегся фонарь «Бета», затем — «Гамма» и еще позже — «Альфа»).

По мнению альфацентриста, к моменту вспышки на ракете «Альфа» ракета «Гамма» успеет к ней несколько приблизиться; ракета же «Бета» приблизится еще значительнее (ведь на ней вспышка произошла с бо́льшим опережением). Таким образом, при альфацентрическом понимании одновременности «мгновенная фотография» взаимного расположения ракет отличается от рис. 6 и 7: ракета «Гамма» гораздо ближе к «Бета», чем к «Альфа». Этим и разъясняется парадокс.

52. При $m_0=1$ и использовании световых единиц

$$AB=v; \quad OM=m; \quad MN=p; \quad OA=ON=1$$

(см. рис. 9). В обычной же системе СИ масса имеет такое же числовое значение, так как тоже измеряется в килограммах, но под величиной v следует понимать уже отношение V/c, где числитель и знаменатель выражены в одинаковых единицах (а именно — в *м/сек*). Тогда

$$p=mv=\frac{mV}{c}=\frac{P}{c},$$

где $P=mV$ — импульс в *кг·м/сек*, а $c=3\cdot10^8$ *м/сек*. Поэтому если по-прежнему принимать радиус окружности за единицу масштаба номограммы, то

$$AB=\frac{V}{c};\quad OM=m;\quad MN=\frac{P}{c}.$$

Для тела с массой покоя $m_0\neq1$ отрезок OM изображает не кинетическую массу, а ее отношение к массе покоя ($OM=m/m_0$). Аналогично и фактический импульс в m_0 раз больше изображаемого отрезком MN. Поэтому в световых единицах

$$AB=v;\quad OM=\frac{m}{m_0}=K;$$

$$MN=\frac{p}{m_0}=Kv,$$

а в обычных единицах системы СИ

$$AB=\frac{V}{c};\quad OM=\frac{m}{m_0};$$

$$MN=\frac{P}{m_0c}.$$

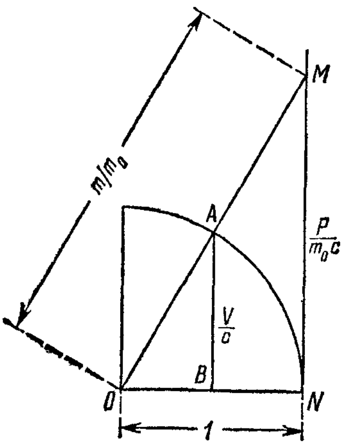


Рис. 17.

Соответствующие надписи нанесены непосредственно на номограмме, показанной на рис. 17. Обратите внимание, что все величины — безразмерные, а радиус окружности принимается за единицу.

Но иногда удобнее принять, что радиус номограммы изображает импульс m_0c. Тогда другие отрезки номограммы будут изображать (в том же масштабе) следующие величины (тоже, конечно, имеющие размерность импульса):

$$AB=m_0V;\quad OM=mc;\quad MN=P.$$

Такие надписи нанесены на рис. 18.

53. Под действием постоянной силы импульс растет пропорционально времени: $P=Ft$ или, в световых единицах,

$$p=ft\quad\left(\text{где } p=mv=\frac{P}{c},\ \text{а } f=\frac{F}{c}\right).$$

Скорость

$$v=\frac{p}{m}=\frac{p}{\sqrt{1+p^2}},$$

так как из прямоугольного треугольника OMN (см. рис. 9) $m^2=1+p^2$. Подставляем значение $p=ft$:

$$v=\frac{ft}{\sqrt{1+(ft)^2}}.$$

При $m_0\neq 1$ радиус окружности изображает уже не единичную массу, а m_0, поэтому из того же треугольника

$$m^2=m_0^2+p^2,$$

так что

$$v=\frac{p}{m}=\frac{p}{\sqrt{m_0^2+p^2}}=$$

$$=\frac{ft}{\sqrt{m_0^2+(ft)^2}}=\frac{a_0t}{\sqrt{1+(a_0t)^2}},$$

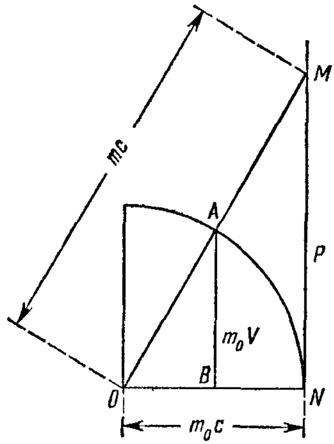


Рис. 18.

где $a_0=f/m_0$ — ускорение под действием той же силы при малой скорости (выраженное в световых единицах).

54. Согласно классической механике, $v_1=300\,000$ *км/сек*, $v_2=1\,200\,000$ *км/сек*. В теории относительности тот факт, что стрелка акселерометра «застыла» на делении $a_0=10$ *м/сек*^{2}, вовсе не означает, что ускорение ракеты относительно звезд постоянно; он свидетельствует только о постоянстве приложенной к ракете силы. В соответствии с формулой, выведенной в решении задачи 53,

$$v=\frac{a_0t}{\sqrt{1+(a_0t)^2}}$$

(куда надо подставить ускорение в световых единицах) находим $v_1=0{,}7$ св. ед.$=210\,000$ *км/сек*, $v_2=0{,}97$ св. ед.$=$ $=291\,000$ *км/сек*.

55. а) Когда производная вектора $m\boldsymbol{v}$ перпендикулярна самому вектору, модуль вектора не меняется, меняется только его направление. Постоянство модуля mv означает постоянство v (если бы изменялось v, то изменялось бы и mv, так как m меняется в ту же сторону, что и v, а при постоянном v неизменно и m). Ввиду постоянства m из

$$\frac{d(m\boldsymbol{v})}{dt}=\boldsymbol{F}$$

следует

$$m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}=\boldsymbol{F},$$

т. е. «поперечная» масса попросту совпадает с релятивистской массой m.

б) Когда сила и скорость направлены по одной прямой, можно «спроектировать» уравнение на направление движения, подставив выражение m через m_0 и v:

$$\frac{d}{dt}\frac{m_0 v}{\sqrt{1-v^2}}=F,$$

откуда после выполнения дифференцирования (по правилу дифференцирования сложной функции, зависящей от t через v)

$$\frac{m_0}{(1-v^2)^{\frac{3}{2}}}\cdot\frac{dv}{dt}=F,$$

что может быть записано и так:

$$m'\frac{dv}{dt}=F,$$

где «продольная» масса

$$m'=\frac{m_0}{(1-v^2)^{\frac{3}{2}}}=m_0K^3.$$

56. Из прямоугольного треугольника OMN (рис. 9)

$$m=\sqrt{1+p^2}.$$

Эта формула справедлива в световых единицах при $m_0=1$. Аналогично из рис. 17

$$m=\sqrt{m_0^2+(P/c)^2}$$

или в световых единицах

$$m=\sqrt{m_0^2+p^2}.$$

57. Последнюю формулу предыдущего решения можно преобразовать так:

$$m = m_0 \sqrt{1+\left(\frac{p}{m_0}\right)^2} \approx m_0 \left[1+\frac{1}{2}\left(\frac{p}{m_0}\right)^2\right] = m_0 + \frac{p^2}{2m_0}.$$

Следовательно, кинетическая масса

$$\Delta m = m - m_0 = \frac{p^2}{2m_0}.$$

Но ввиду малости различия между m и m_0

$$p = mv \approx m_0 v,$$

так что

$$\Delta m \approx \frac{m_0 v^2}{2}$$

— пока скорости невелики, кинетическая масса приблизительно равна кинетической энергии! С размерностями все в порядке, ибо в световых единицах v — величина безразмерная, так что энергия, подобно массе, измеряется в килограммах. Получите сами аналогичную формулу в системе СИ (исходя из предпоследней формулы решения предыдущей задачи).

58. В прямоугольном треугольнике ONM (рис. 17) гипотенуза $OM = m/m_0$, а катеты $ON = 1$, $NM = P/m_0c$. Поэтому

$$\left(\frac{m}{m_0}\right)^2 = 1 + \left(\frac{P}{m_0 c}\right)^2,$$

откуда

$$m = \sqrt{m_0^2 + \left(\frac{P}{c}\right)^2}.$$

Но $P = Ft$, так что

$$m = \sqrt{m_0^2 + \left(\frac{Ft}{c}\right)^2} = 4{,}1 \cdot 10^{-30}\ кг.$$

60. В релятивистских единицах приращение массы $\Delta m = m - m_0$ совпадает с приобретенной электроном кинетической энергией, которая, в свою очередь, равна eU, где U — пройденная электроном разность потенциалов. В обычных же единицах

$$\Delta m = \frac{eU}{c^2} = \frac{1{,}6 \cdot 10^{-19}\ к \cdot 10^6\ в}{9 \cdot 10^{16}\ м^2/сек^2} = 1{,}8 \cdot 10^{-30}\ кг,$$

что вдвое превышает массу покоящегося электрона.

61. Движение в тормозящем поле продолжается, пока вся кинетическая энергия протона $E_{\text{кин}}$ не перейдет в потенциальную eu, где u — разность потенциалов конечной и начальной точек. Поэтому в классической физике

$$E_{\text{кин}} = \frac{m_0 V^2}{2} = eu,$$

откуда

$$u = \frac{m_0 V^2}{2e} = 3{,}8 \cdot 10^8 \textit{ в} = 0{,}38 \textbf{\textit{ Гв.}}$$

В теории же относительности

$$E_{\text{кин}} = m - m_0 = m_0 (K - 1).$$

Но начальной скорости протона $v = 0{,}9$ соответствует $K = 2{,}29$, так что

$$E_{\text{кин}} = 1{,}29 m_0 = 2{,}15 \cdot 10^{-27} \textit{ кг} = 1{,}9 \cdot 10^{-10} \textit{ дж.}$$

Приравнивая эту кинетическую энергию потенциальной, находим

$$u = \frac{E_{\text{кин}}}{e} = 1{,}21 \cdot 10^9 \textit{ в} = 1{,}21 \textbf{\textit{ Гв.}}$$

62. Требуется доказать, что при $v \ll 1$

$$m_0 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - v^2}} - 1 \right) \approx \frac{m_0 v^2}{2}.$$

Для этого достаточно убедиться, что

$$\frac{1}{\sqrt{1 - v^2}} \approx 1 + \frac{v^2}{2}. \qquad (1)$$

В зависимости от математической подготовки приближенное равенство (1) доказывается различными способами.

1) Запишем левую часть (1) в виде $\sqrt{\frac{1}{1 - v^2}}$ и преобразуем подкоренное выражение, используя малость величины v^4 не только по сравнению с единицей, но даже и по сравнению с v^2:

$$\frac{1}{1 - v^2} \approx \frac{1 - v^4}{1 - v^2} = 1 + v^2 \approx 1 + v^2 + \frac{v^4}{4} = \left(1 + \frac{v^2}{2} \right)^2.$$

После этого приближенное равенство (1) становится очевидным.

2) Разложим левую часть (1) по формуле бинома Ньютона:

$$(1-v^2)^{-\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2}v^2+\frac{3}{8}v^4+\ldots$$

и отбросим члены с более высокой степенью малости, чем v^2.

3) Разложим функцию $(1-x)^{-\frac{1}{2}}$ в ряд Тейлора:

$$(1-x)^{-\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2}x+\frac{3}{8}x^2+\ldots,$$

подставим $x=v^2$ и ограничимся первыми двумя членами.

63. При каждом обороте ускоряемой частицы электрическое поле совершает одинаковую работу. За первый миллиард оборотов накоплена кинетическая энергия $m_0(K_1-1)$, за второй миллиард будет набрано еще столько же. Значит к концу второго миллиарда кинетическая энергия достигнет значения $2m_0(K_1-1)$, но она же может быть записана и как $m_0(K_2-1)$. Отсюда $K_2=2K_1-1\approx 2K_1$, или (выражая релятивистские коэффициенты через соответствующие им скорости)

$$\frac{1}{\sqrt{1-v_2^2}}=\frac{2}{\sqrt{1-v_1^2}},$$

так что

$$v_2=\frac{1}{2}\sqrt{3+v_1^2}.$$

64. Согласно номограмме (рис. 17; см. также решение задачи 56), $m^2=m_0^2+p^2$; поэтому

$$E_{\text{кин}}=m-m_0=\sqrt{m_0^2+p^2}-m_0. \qquad (1)$$

В классической же физике

$$E_{\text{кин}}=\frac{m_0v^2}{2}=\frac{(m_0v)^2}{2m_0}=\frac{p^2}{2m_0} \qquad (2)$$

(все величины выражены в световых единицах). При малых v формула (1) переходит в формулу (2), в чем проще всего убедиться так:

$$m^2 = m_0^2 + p^2;$$
$$m^2 - m_0^2 = p^2;$$
$$(m - m_0)(m + m_0) = p^2;$$
$$E_{\text{кин}} = m - m_0 = \frac{p^2}{m + m_0} \approx \frac{p^2}{2m_0}.$$

Кто ранее решал задачи 56 и 57, мог бы прямо воспользоваться полученными там результатами, так как в теории относительности кинетическая энергия (в световых единицах) равняется кинетической массе.

65. Релятивистский коэффициент столь быстрых протонов порядка 10^{10}, их скорость чрезвычайно близка к световой. С земной точки зрения такой протон затрачивает на пересечение Галактики около 10^5 лет. Но в системе «Протон» время течет медленнее в 10^{10} раз; значит, «с точки зрения протона» его путешествие через Галактику продлится всего лишь

$$\frac{10^5 \text{ лет}}{10^{10}} = 10^{-5} \text{ лет} \approx 5 \textit{ мин.}$$

66. Поле сообщает частице определенную кинетическую энергию. В классической механике $E_{\text{кин}} = mv^2/2$, поэтому при заданной кинетической энергии частица с меньшей массой будет иметь во столько же раз бо́льший квадрат скорости; в условиях задачи это дает $v_2 = 1{,}6$ св. ед. (быстрее света!). В теории относительности

$$E_{\text{кин}} = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v_1^2}} = \frac{m_0}{4\sqrt{1 - v_2^2}},$$

где m_0 и $v_1 = 0{,}8$ — масса покоя и конечная скорость первой частицы, $m_0/4$ и v_2 — масса покоя и конечная скорость второй частицы. Из этого уравнения находим

$$v_2 = \frac{\sqrt{15 + v_1^2}}{4} = 0{,}99 \text{ св. ед.}$$

67. Нужно, чтобы первый протон в системе отсчета «Второй протон» имел кинетическую энергию (а, значит, и кинетическую массу) 6 *Гэв*, т. е. полную массу 7 *Гэв*. Следовательно, скорость движения первого протона относительно второго должна соответствовать релятивистскому коэффициенту $K=7$. При решении задачи 42 была выведена формула

$$K = K_1K_2 + \sqrt{(K_1^2-1)(K_2^2-1)},$$

позволяющая вычислять релятивистский коэффициент K результирующего движения по релятивистским коэффициентам K_1 и K_2 слагаемых движений. В нашем случае оба протона движутся симметрично, так что их релятивистские коэффициенты одинаковы $K_1=K_2=K_0$. Тогда $K=2K_0^2-1$; подставив в эту формулу $K=7$, найдем $K_0=2$, т. е. релятивистская масса каждого протона в системе «Лаборатория» должна вдвое превышать его массу покоя, равную 1 *Гэв*. Следовательно, протон должен обладать кинетической энергией в 1 *Гэв*.

Возможен и более прямой (но громоздкий) путь решения этой задачи. Скорость v, соответствующая коэффициенту $K=7$, может быть определена из соотношения

$$\frac{1}{\sqrt{1-v^2}} = 7,$$

откуда $v=\sqrt{48/7}$. Такая скорость должна получаться в результате релятивистского сложения двух одинаковых встречных скоростей v_0 (скорость первого протона в системе «Второй протон» слагается из скорости первого протона в системе «Лаборатория» и скорости лаборатории в системе «Второй протон»):

$$\frac{\sqrt{48}}{7} = \frac{2v_0}{1+v_0^2}.$$

Найдя отсюда $v_0=0{,}87$, вычисляем соответствующее ей K_0 (оно окажется равным 2), а далее рассуждаем, как и ранее.

71. Свет от светильника до поглощающей стенки идет $5\cdot10^{-9}$ *сек*. За это время светильник успевает излучить $50\cdot10\%\cdot5\cdot10^{-9}$ *дж*$=2{,}5\cdot10^{-8}$ *дж* света. Именно столько света содержится в любой момент в освещенной камере. Масса такого количества энергии $m=2{,}8\cdot10^{-25}$ *кг*, что приблизительно соответствует массе одного атома лютеция (или 175 атомов водорода).

72. В секунду испускается $4\cdot10^{26}$ *дж* или $4{,}5\cdot10^{6}$ *т* света. Этот свет обладает импульсом $4{,}5\cdot10^{9}$ *кг*$\cdot3\cdot10^{8}$ *м/сек*. Такой же по модулю импульс получило бы за секунду Солнце, если бы весь свет испускался только в одну сторону. Но изменение импульса за секунду равно силе. Под действием этой силы Солнце имело бы ускорение

$$\frac{4{,}5\cdot 10^9\cdot 3\cdot 10^8}{2\cdot 10^{30}}\ м/сек^2 = 6{,}7\cdot 10^{-13}\ м/сек^2.$$

За год (приблизительно $3\cdot 10^7$ *сек*) была бы набрана скорость $2\cdot 10^{-6}$ *м/сек*=20 *мкм/сек.*

73. 10^6 *дж* света обладает массой $\frac{10^6}{(3\cdot 10^8)^2}$ *кг* и импульсом $\frac{10^6}{(3\cdot 10^8)^2}\cdot 3\cdot 10^8$ *кг·м/сек.* При поглощении или равномерном рассеянии во все стороны этот импульс передается спутнику и равен действующей на спутник силе. Эта сила сообщает спутнику ускорение $\frac{10^6}{3\cdot 10^8\cdot 60} = 5{,}5\cdot 10^{-5}$ *м/сек*^{2}.

За миллион секунд набралась бы скорость 55 *м/сек.*

74. Легко сосчитать, что при прохождении разности потенциалов 10^6 *в* энергия, а значит и масса электрона, увеличивается на $1{,}8\cdot 10^{-30}$ *г*, т. е. примерно на $2m_0$ — две массы покоя электрона (см. решение задачи 60). Энергия эта, а значит и масса, заимствуется у электрического поля. Таким образом, масса катода уменьшается на m_0, масса электрического поля — на $2m_0$, а масса анода увеличивается на $3m_0$. Такую именно массу ($3m_0$) приносит с собою на анод быстро летящий электрон. После попадания на анод электрон практически полностью утрачивает свою скорость и масса его уменьшается до m_0; но зато нагревается анод и общая масса его атомов увеличивается на $2m_0$ — в соответствии с количеством полученного тепла. Охлаждаясь до первоначальной температуры, анод теряет эту добавочную массу $2m_0$, так что масса анода остается увеличенной по сравнению с первоначальной только на m_0.

75. Дефект массы при синтезе одного грамм-атома (четырех граммов) гелия из 5 *г* изотопов водорода составляет 19 *мг* (см., например, «Начала теории относительности», § 24). Это соответствует освобождению энергии в $1{,}7\cdot 10^{12}$ *дж*; 5 *г* бензина выделяют при сгорании около $2{,}3\cdot 10^5$ *дж*, т. е. примерно в 7 млн. раз меньше.

76. При включенной спирали ежесекундно энергия U^2/R, а значит и масса U^2/Rc^2, перемещалась на расстояние l, что соответствует импульсу $U^2 l/Rc^2$. Этот импульс должен сохраниться и после выключения спирали, но тогда станет двигаться вся лаборатория со скоростью v, так что из условия сохранения импульса

$$mv = \frac{U^2 l}{Rc^2},$$

откуда

$$v = \frac{U^2 l}{Rc^2 m} = 8 \cdot 10^{-16} \text{ м/сек.}$$

77. Масса покоя электрона $m_0 = 9 \cdot 10^{-31}$ *кг*; такова же и масса покоя позитрона. Их общая масса $1{,}8 \cdot 10^{-30}$ *кг* в результате реакции аннигиляции становится массой возникших при этом гамма-квантов. Значит, энергия этих квантов $E = mc^2 = 1{,}6 \cdot 10^{-13}$ *дж*.

78. Минимальная энергия требуется, когда все частицы после реакции покоятся. Тогда масса полученных частиц $4m_0$ (антипротон имеет такую же массу покоя m_0, как и протон). А до реакции была масса $2m = 2m_0 + 2m_{\text{кин}}$. Следовательно, на основании закона сохранения релятивистской массы (он же — закон сохранения энергии) $m_{\text{кин}} = m_0$, т. е. кинетическая масса (кинетическая энергия) каждого из сталкивающихся протонов должна быть равна $m_0 \approx 1$ *Гэв*.

79. Необходимо учесть продольное сокращение дуг, составляющих кольцо. При линейной скорости v длина каждой дуги, а значит и всей окружности кольца, уменьшается в K раз; во столько же раз уменьшается и его радиус:

$$r = \frac{r_0}{K} = r_0 \sqrt{1 - v^2}.$$

Линейная скорость $v = r\omega = r_0 \omega \sqrt{1 - v^2}$ или

$$v^2 = r_0^2 \omega^2 (1 - v^2),$$

откуда

$$v = \frac{r_0 \omega}{\sqrt{1 + (r_0 \omega)^2}} = 0{,}8 \text{ св. ед.} = 240\,000 \text{ км/сек}$$

(все величины выражены в световых единицах).

80. Скорости 4/5 св. ед. соответствует $K = 5/3$. Релятивистская масса движущейся частицы $m = Km_0 = (5/3)m_0$ плюс масса покоящейся m_0 дают релятивистскую массу образующейся частицы $m' = (5/3)m_0 + m_0 = (8/3)m_0$. Скорость составной частицы определяем из закона сохранения импульса:

$$mv = m'v',$$

откуда $v' = (5/8)v = 1/2$ св. ед., что соответствует релятивистскому коэффициенту $K' = 1{,}15$. Следовательно, масса покоя составной частицы

$$m_0' = \frac{m'}{K'} = 2{,}3m_0.$$

81. Обозначив через μ релятивистскую массу нейтрино, а через v и K — скорость мю-мезона и соответствующий ей релятивистский коэффициент, пишем законы сохранения релятивистской массы и импульса:

$$273m_0 = 207m_0K + \mu;$$
$$207m_0Kv + \mu = 0$$

(нейтрино всегда летит со световой скоростью; в данном случае мы положили эту скорость равной $+1$, т. е. приняли направление движения нейтрино за положительное). Исключая из уравнений μ и сокращая на m_0, имеем

$$273 = 207K(1 - v) = 207\sqrt{\frac{1-v}{1+v}},$$

откуда $v = -0{,}27$ св. ед. (знак «минус» показывает, что мю-мезон движется в противоположном направлении сравнительно с нейтрино).

82. Допустим, что скорости шаров различны и соответствуют релятивистским коэффициентам K_1 и K_2.

Если одинаковы р е л я т и в и с т с к и е м а с с ы шаров (и каждая из них есть m), то их массы покоя различны:

$$m_{01} = \frac{m}{K_1}; \qquad m_{02} = \frac{m}{K_2}.$$

После обмена скоростями (а значит, и релятивистскими коэффициентами) релятивистские массы примут уже различные значения:

$$m_1 = m_{01}K_2 = \frac{m}{K_1}K_2; \quad m_2 = m_{02}K_1 = \frac{m}{K_2}K_1.$$

Следовательно, в результате соударения сумма релятивистских масс

$$m_1 + m_2 = m\frac{K_1^2 + K_2^2}{K_1K_2}$$

станет иной, чем была до соударения ($2m$). А это противоречит закону сохранения релятивистской массы (он же — закон сохранения энергии).

Если же одинаковы массы покоя шаров, то, обменявшись скоростями, они обменяются также и импульсами, энергиями и релятивистскими массами. Следовательно, суммарный импульс, суммарная энергия и суммарная релятивистская масса системы останутся без изменения, что вполне согласуется с законами релятивистской динамики.

83. Поворот вектора скорости на 180° при неизменности его модуля означает сохранение величины релятивистской массы (а значит и энергии) каждого шара при изменении знаков их импульсов. Этим обеспечивается сохранение суммарной релятивистской массы (и энергии); не изменяется и импульс, так как вначале он был равен нулю. Как видим, учет релятивистских эффектов не вносит здесь ничего нового.

84. а) В системе «Корабль» движение корабля отсутствует, так что утвердительный ответ очевиден.

б) В системе «Звезды», пока свет идет от источника до диафрагмы *Д*, формирующей луч (рис. 19), диафрагма успеет сместиться (вместе с кораблем), так что сквозь нее сможет пройти не строго поперечный (*ИА*), а косой луч *ИВ*. Вот он-то как раз и попадает на фотоэлемент. Если луч формируется не диафрагмой, а линзой или рефлектором, суть дела не меняется: за время прохождения света линза или зеркало успевают сместиться относительно точки излучения (в системе «Звезды»).

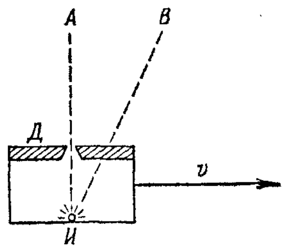


Рис. 19.

85. В других системах отсчета из-за иного понимания одновременности мгновенное положение стержня не будет признано параллельным оси x.

86. Движущиеся темные полосы — не материальные тела. Они образуются на время в одних местах (где закрывается просвет меж зубьями) и временно же возникают в других (где открывается просвет). Это — типичный пример распространения волны, когда изменения состояния в различных точках причинно между собой не связаны (§ 25—26 «Начал теории относительности»). В таких случаях теория относительности никаких ограничений на скорости не накладывает.

87. Всегда можно выбрать инерциальную систему отсчета, в которой рассматриваемый электрон в данный момент покоится (точнее его мгновенная скорость равна нулю). Фотон и в этой системе отсчета будет двигаться со скоростью света. Если бы покоящийся электрон мог поглотить фотон, должны были бы выполняться законы сохранения: массы —

$$m_0 + \mu = m$$

и импульса —

$$\mu = mv,$$

где m_0 — масса покоя электрона, μ — релятивистская масса и импульс фотона (скорость фотона равна единице), m и v — релятивистская масса и скорость электрона после поглощения фотона. Подставляя значение μ из второго равенства в первое, имеем $m_0 + mv = m$ или $m = \frac{m_0}{1-v}$. Но ведь релятивистская масса имеет иную, несовместимую с этим требованием зависимость от скорости:

$$m = m_0 K = \frac{m_0}{\sqrt{1-v^2}}.$$

Следовательно, электрон не в состоянии поглотить фотон (в ходе рассуждений мы молчаливо подразумевали, что масса покоя электрона не может измениться, так как внутри него невозможны никакие перестройки, связанные с изменением энергии покоя — в отличие, например, от атома, электрон не «возбуждается»).

88. Исходные ядра можно считать покоящимися. Следовательно, продукты реакции (He и n) обладают равнопротивоположными импульсами $\pm p$. По закону сохранения массы

$$2{,}015 + 3{,}016 = (4{,}003 + E_1) + (1{,}009 + E_2),$$

где E_1 и E_2 — кинетические энергии (кинетические массы) ядра гелия и нейтрона. Следовательно,

$$E_1 + E_2 = 0{,}019. \qquad (1)$$

Как показано в решении задачи 64, для любой частицы

$$E = m - m_0 = \frac{p^2}{m + m_0} \approx \frac{p^2}{2m_0}$$

(последнее выражение справедливо только при $m \approx m_0$, т. е. при малом дефекте массы, что как раз и имеет место в рассматриваемом случае). Поэтому уравнение (1) приобретает вид

$$\frac{p^2}{2 \cdot 4{,}003} + \frac{p^2}{2 \cdot 1{,}009} = 0{,}019,$$

откуда $p^2=0{,}03$ и $p=0{,}17$. Теперь по формуле

$$m=m_0+E=m_0+\frac{p^2}{2m_0}$$

легко находятся массы в движении:

$$m_1=4{,}003+\frac{0{,}03}{2\cdot 4{,}003}=4{,}007;$$

$$m_2=1{,}009+\frac{0{,}03}{2\cdot 1{,}009}=1{,}024.$$

Суммирование этих масс подтверждает правильность результата: $4{,}007+1{,}024=5{,}031=2{,}015+3{,}016$.

89. В классической физике $t_\beta=t_\alpha=t$ (во всех системах отсчета — единый счет времени), а $x_\beta=x_\alpha-vt$, что ясно из рис. 20 (см. также § 6 «Начал теории относительности»).

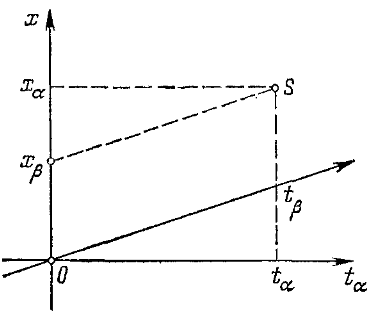


Рис. 20.

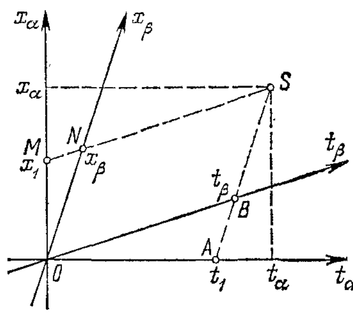


Рис. 21.

В теории относительности (рис. 21)

$$x_1=x_\alpha-vt_\alpha;\qquad t_1=t_\alpha-vx_\alpha,$$

где x_1 — координата события M, а t_1 — момент события A (и то, и другое в системе «Альфа»).

Далее будем рассуждать с позиций бетацентриста. События A и B одновременны, причем оба они произошли в момент t_β. Что же касается величины t_1, то это — показание движущихся часов, которое в $K=\frac{1}{\sqrt{1-v^2}}$ раз меньше, чем t_β; поэтому

$$t_\beta=Kt_1=K(t_\alpha-vx_\alpha). \qquad (1)$$

Из подобия треугольников OAB и OMN

$$\frac{x_\beta}{x_1} = \frac{t_\beta}{t_1} = K,$$

так что

$$x_\beta = Kx_1 = K(x_\alpha - vt_\alpha). \qquad (2)$$

Формулы (1) и (2) известны в науке как «преобразования Лоренца». Другой вывод преобразований Лоренца, тоже основанный на пространственно-временных диаграммах, интересующиеся найдут в книге автора «Теория относительности в элементарном изложении», Изд-во «Наука», 1964, § 14.

91. В соответствии с волновой теорией света показатель преломления $n = c/U$, где c — скорость света в вакууме, а U — скорость света в данном веществе (в системе отсчета, связанной с этим веществом).

Скорость света $u_т = U_т/c$ в системе «Труба» (где жидкость движется) релятивистски слагается из скорости света $u = U/c = 1/n$ в системе «Жидкость» и скорости $v = V/c$ движения самой жидкости (в световых единицах):

$$u_т = \frac{v+u}{1+vu} \approx (v+u)(1-vu) \approx v + u - vu^2$$

(квадратами и более высокими степенями v пренебрегаем). Следовательно, в обычных единицах

$$U_т = V + \frac{c}{n} - \frac{V}{n^2},$$

так что искомое время

$$t = \frac{l}{U_т} \approx \frac{l}{V + \frac{c}{n} - \frac{V}{n^2}}.$$

92. Пусть жидкость течет со скоростью $V = vc$ относительно инерциального отсчетника «Альфа». Как известно, показатель преломления жидкости $n = c/U_ж$, где c — скорость света в вакууме, а $U_ж$ — скорость распространения света в рассматриваемой жидкости (разумеется, при условии, что эта жидкость покоится), т. е. в системе отсчета «Жидкость». В световых единицах

$$u_ж = \frac{U_ж}{c} = \frac{1}{n}.$$

Скорость распространения света в движущейся жидкости, рассматриваемая в системе «Альфа», может быть определена по релятивистской формуле сложения скоростей

$$u_\alpha = \frac{v + u_ж}{1 + v u_ж},$$

что дает

$$u_\alpha = \frac{v + \frac{1}{n}}{1 + \frac{v}{n}} \approx \left(v + \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{v}{n}\right) \approx v\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) + \frac{1}{n}.$$

Альфацентрист обнаруживает, что свет распространяется в движущейся жидкости быстрее, чем в неподвижной, на величину

$$\Delta u_\alpha = u_\alpha - u_ж = u_\alpha - \frac{1}{n} = v\left(1 - \frac{1}{n^2}\right).$$

В классической теории «светоносного эфира» эта величина и истолковывалась как скорость движения самого «эфира» относительно системы «Альфа» (арифметически добавляющаяся к скорости распространения световых волн относительно «эфира»).

93. Чтобы световая корпускула, пройдя сквозь телескоп, создала изображение в его главном фокусе, оптическая ось телескопа должна быть параллельна вектору относительной скорости корпускулы по отношению к Земле $\boldsymbol{c} - \boldsymbol{V}_з$, где $\boldsymbol{c}$ и $\boldsymbol{V}_з$ — векторы скоростей корпускулы и Земли в системе «Звезды». Направление же вектора относительной скорости $\boldsymbol{c} - \boldsymbol{V}_з$ образует с прямой «Земля — звезда» угол

$$\psi = \operatorname{arctg}\frac{V_з}{c}.$$

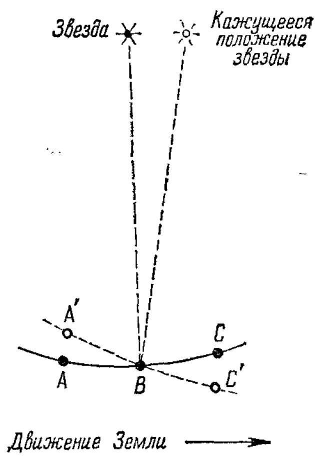


Рис. 22

С волновой точки зрения направление, в котором распространяется свет, перпендикулярно фронту волны, т. е. поверхности, во всех точках которой максимумы напряженности поля достигаются в один и тот же момент времени.

В системе «Звезды» фронт волны — сфера с рассматриваемой звездой в центре. Небольшой участок фронта волны вблизи Земли может рассматриваться как элемент плоскости, перпендикуляр к которому проходит через звезду. Обозначим через A, B и C (рис. 22) три точки фронта волны. В системе «Звезды» максимум напряженности приходит в указанные три точки одновременно.

Земля движется относительно звезд со скоростью $\boldsymbol{V}_з$, направление (а отчасти и величина) которой меняется с периодом в один год. Но в течение значительно более коротких промежутков времени это изменение почти не сказывается, что позволяет рассматривать Землю как почти инерциальную систему отсчета, движущуюся относительно звезд. В такой системе иная одновременность, так что максимум волны приходит в точку A *позже*, а в точку C *раньше*, чем в точку B. Одновременно же максимум приходит в точки A', B и C', которые и определяют расположение фронта волны в системе «Земля». Перпендикуляр к этому фронту как раз и указывает, в каком направлении будет видна звезда для наблюдателя, покоящегося относительно Земли. С изменением направления движения Земли в системе «Звезды» меняется и видимое положение звезды на небесной сфере.

94. Примем событие A за начальное во всех используемых системах отсчета. Тогда одноместное ему в системе

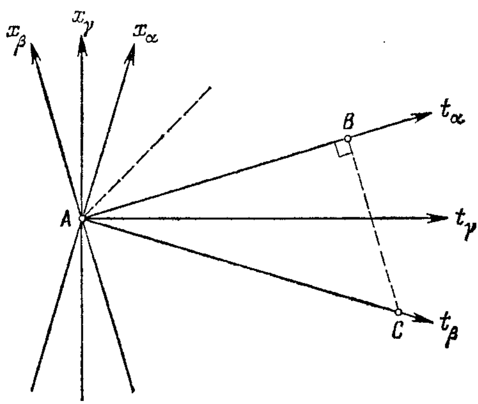


Рис. 23.

«Альфа» событие B изобразится точкой на оси t_α (рис. 23), причем $t_\alpha = AB$, $x_\alpha = 0$. В системе «Бета» тому же самому событию B соответствуют $t_\beta = AC$, $x_\beta = BC$; при этом $BC \perp AC$, а масштабы на осях систем «Альфа» и «Бета» в силу симметрии их движения одинаковы. Из прямоугольного треугольника ABC $t_{\beta}^2-x_{\beta}^2=t_{\alpha}^2=t_{\alpha}^2-x_{\alpha}^2$ (ведь $x_{\alpha}=0$). Так как система «Бета» выбрана произвольно, то такую же величину интервал между событиями A и B должен иметь и в любой другой инерциальной системе.

95. Интервал (см. задачу 94) между вылетом с Земли и высадкой на незнакомой планете во всех инерциальных системах отсчета одинаков; одинаков, конечно, и его квадрат: $t_з^2-x_з^2=t_к^2-x_к^2$, где $t_з=41$ год и $x_з=40$ св. лет — промежуток времени и расстояние в системе «Звезды», а $t_к$ и $x_к$ — промежуток времени и расстояние в системе «Корабль». Если учесть, что $x_к=0$, то легко определяется $t_к=\sqrt{41^2-40^2}=9$ лет. Такова длительность полета по часам корабля; настолько именно и постарел путешественник, так что к моменту высадки возраст его 59 лет.

Дополнение к решению задачи 27. Середина стержня в одной системе отсчета не является серединой того же стержня в другом отсчетнике. Ведь под серединой движущегося тела следует разуметь середину отрезка, ограниченного точками, с которыми концы стержня совпадают в один и тот же момент времени; одновременность же — понятие относительное.

Указания к трудным задачам

(***Прежде чем обращаться к «Указаниям», постарайтесь найти самостоятельный подход!***)

2. Рассмотрите движение в системе отсчета «Первый корабль».

9. Воспользуйтесь «симметрирующей» системой отсчета (в которой оба протона движутся навстречу друг другу с одинаковыми по модулю скоростями).

24. В обеих ли системах отсчета прямая «атом—Земля» перпендикулярна скорости движения?

25. а) Чему равен период колебаний тока в антенне передатчика по собственному времени передатчика? А по времени системы «Приемник»? Через какие промежутки времени доходят до приемника последовательные максимумы волн от передатчика, если учесть, что каждый последующий максимум излучается из более близкой точки? Какой частоты ток будет наведен в антенне приемника (по данным наблюдателя, находящегося в системе «Приемник»)?

б) Какова длина волны, излучаемой покоящимся передатчиком? Сколько максимумов волн повстречает за секунду по часам передатчика движущийся навстречу этим волнам приемник? А за секунду по часам приемника? Какова частота тока в приемной антенне, измеренная наблюдателем, который движется вместе с приемником? Сопоставьте результаты пунктов а) и б). Выполняется ли принцип относительности?

27. В обеих ли системах отсчета стержень всегда параллелен стенке?

31. Одновременно ли стартуют ракеты в системе «Бета»?

38. Учтите продольную и поперечную составляющие скорости нейтрино в отсчетнике «Звезды», а затем вычислите модуль полной скорости нейтрино.

42. В формуле для квадрата искомого коэффициента K выразите v через v_1 и v_2. В полученную формулу подставьте выражения скоростей v_1 и v_2 через K_1 и K_2.

43. Прибавьте релятивистски $\Delta u_к$ к скорости корабля, а затем вычтите скорость корабля арифметически. Получится $\Delta u_з$ — приращение скорости рассматриваемого тела в системе «Звезды». Поделите его на промежуток времени, за который оно произошло, но только выраженный тоже в системе «Звезды». Полученное выражение упростите, учитывая, что промежуток времени и $\Delta u_к$ стремятся к нулю.

44. Примите во внимание относительность одновременности. Одновременны ли для ракетоцентриста те положения кормы ракеты и тела A, которые геоцентрист отметит как положения их «через одну секунду»?

47. Определите угловую скорость движения протона из второго закона Ньютона, стараясь выразить ее через заряд протона e, его массу m и магнитную индукцию B. Какие из этих величин и как зависят от скорости? Как это скажется на периоде обращения? Если вы не знаете, какая сила действует на электрический заряд, движущийся в магнитном поле, воспользуйтесь дополнительным указанием на стр. 59.

49—50. Отнеситесь критически к использованию понятия «одновременно», которое фигурирует в данных рассуждениях не только явно, но и замаскировано.

63. Какую кинетическую энергию приобретает ускоряемая частица за первый миллиард оборотов (выразите ее через K_1)? Нельзя ли теперь сразу же написать (опять-таки через K_1), какой станет кинетическая энергия к концу второго миллиарда оборотов (учитывая, что при каждом обороте электрическое поле совершает одинаковую работу)? Выразите эту же кинетическую энергию непосредственно через K_2 и, сопоставляя полученные формулы, свяжите K_2 с K_1, а затем и v_2 с v_1.

67. Используйте результат, полученный при решении задачи 42.

80. Сначала из закона сохранения релятивистской массы определите релятивистскую массу образующейся частицы, затем из закона сохранения импульса — ее скорость и соответствующий релятивистский коэффициент. После этого вычислите и массу покоя.

81. Обозначив через μ релятивистскую массу нейтрино, через v и K — скорость мю-мезона и соответствующий ей релятивистский коэффициент, запишите законы сохранения релятивистской массы и импульса (учитывая, что мю-мезон и нейтрино разлетаются в противоположных направлениях). Исключив μ и выразив K через v, найдите v.

88. Исходные ядра можно считать покоящимися, так что продукты реакции (He и n) будут обладать равнопротивоположными импульсами $\pm p$. Обозначив кинетические энергии продуктов реакции через E_1 и E_2 и выразив их, в соответствии с решением задачи 64, через p, запишите закон сохранения энергии в применении к рассматриваемой реакции. Это даст возможность определить p, а затем и релятивистские массы.

89. Рассуждая в рамках теории относительности, постройте пространственно-временную диаграмму в системе «Альфа», нанеся на нее также и вспомогательные оси, соответствующие системе «Бета». Отметьте упомянутое в задаче событие S, а также бетацентрически одновременные ему события A (на оси t_α) и B (на оси t_β). Нанесите также бетацентрически одноместные с S события M (на оси x_α) и N (на оси x_β). Выразите координату x_1 события M (в системе «Альфа») и момент t_1 события A (тоже в системе «Альфа») через x_α и t_α. Далее рассуждайте с позиций бетацентриста и выразите t_β через t_1, а затем и через t_α и x_α. К аналогичным соотношениям для x_β можно перейти, хотя бы опираясь на подобие треугольников.

93. При объяснении аберрации с волновой точки зрения примите во внимание, что направление распространения света перпендикулярно фронту волны. А фронт волны — это множество точек, куда максимумы напряженности поля приходят одновременно.

94. Постройте диаграмму согласно рекомендациям задачи, приняв событие A за начальное во всех трех системах отсчета. Отметьте координаты и времена события B в системах «Альфа» и «Бета». Используйте для доказательства образовавшийся на диаграмме прямоугольный треугольник. Надо ли принимать в расчет различие масштабов на осях t_α и t_β?

Дополнительное указание к задаче 47. На точечный электрический заряд e, который движется со скоростью v перпендикулярно силовым линиям магнитного поля с магнитной индукцией B, действует сила $F = evB$. Эта сила перпендикулярна вектору скорости и магнитным силовым линиям. При этом векторы $\boldsymbol{F}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{B}$ образуют правую тройку, т. е. с ними можно совместить в той же последовательности большой, указательный и средний пальцы правой руки.

Ответы ко всем задачам

1. 127 *м/сек*; 97 *м/сек*; 113 *м/сек*;
2. См. указание.
3. 1,5 *км/час*.
4. а) 1 *км*. б) 9 *км*.
5. В системе «Снаряд».
6. В системе, где скорости нейтронов равнопротивоположны (см. решение).
7. См. решение.
8. $v = \sqrt{2kgR}$.
9. $r = \frac{4kq^2}{mv^2} = \frac{0,55}{v^2}\ \frac{м^3}{сек^2}$ (см. указание).
10. 7 *м/сек²*.
11. Такое влияние невозможно.
12. См. рис. 11 на стр. 29.
13. На 8 месяцев.
16. Не существует. Существует.
17. 0,5 св. ед.
18. Разумеется, не могу. Но нужно как следует разобраться, почему.
19. Стихи правильны (см. решение).
20. В 1,67 раза.
21. 299 940 *км/сек*.
22. 1 *Гц*.

23. 2 *Гц*.

24. Не позволяют (см. решение).

25. В обоих случаях измеряемая частота $f=f_0\sqrt{\dfrac{1+v}{1-v}}$ (см. указание).

26. 60 *см*.

27. В системе «Стержень» нарушена параллельность (см. решение).

28. 48°.

29. Объем уменьшается в K раз независимо от формы.

30. Заполнит.

31. Провод «провиснет» (см. указание).

32. а) 0,63 *см/сек*. б) 0,063 *см/сек*.

33. 4 *км/час*.

34. 12 световых секунд.

35. 22,4 *м/сек*.

36. $a_з=a_р/K^2$.

37. $K=K_1K_2$.

38. Она равна скорости света (но это надо обосновать!).

43. $\Delta u_з=\dfrac{\Delta u_к}{K^2}$; $a_з=\dfrac{a_к}{K^3}$ (см. указание).

44. Не принята во внимание относительность одновременности (см. решение).

45. 0,97 св. ед.=291 000 *км/сек*.

46. 45 *г/см*^{3}. Можно.

47. При малых скоростях период постоянен, при околосветовых — растет со скоростью пропорционально релятивистской массе (см. рис. 16).

48. К северу.

49. См. решение.

50. См. решение.

51. См. рис. 24.

52. См. решение.

53. $v=\dfrac{ft}{\sqrt{1+(ft)^2}}$;

$$v=\frac{ft}{\sqrt{m_0^2+(ft)^2}},\ \text{где}\ f=\frac{F}{c}.$$

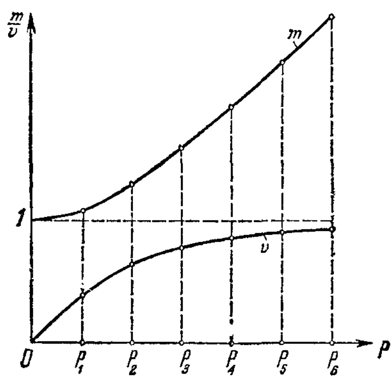


Рис. 24.

39. 290 000 *км/сек*.

40. —37 500 *км/сек*.

41. Через 0,2 *мксек*; 0,35 св. ед.

42. $K=K_1K_2+\sqrt{(K_1^2-1)(K_2^2-1)}$ (см. указание).

54. Классическая механика: 300 000 *км/сек*, 1 200 000 *км/сек*. Теория относительности: 210 000 *км/сек*, 291 000 *км/сек*.

55. а) $m'=m_0K$. б) $m'=m_0K^3$.

56. $m=\sqrt{m_0^2+p^2}$.

57. $\Delta m = \frac{m_0 v^2}{2}$.

58. $4{,}1 \cdot 10^{-30}$ *кг*.

59. По классическим формулам: $2{,}5 \cdot 10^{-31}$ *кг* $= 2{,}3 \cdot 10^{-14}$ *дж*. По релятивистским формулам: $4{,}5 \cdot 10^{-31}$ *кг* $= 4 \cdot 10^{-14}$ *дж*.

60. $1{,}8 \cdot 10^{-30}$ *кг*.

61. В классической физике: 0,38 *Гв* $= 3{,}8 \cdot 10^8$ *в*. В теории относительности: 1,21 *Гв* $= 1{,}21 \cdot 10^9$ *в*.

62. См. решение.

63. $K_2 = 2K_1 - 1 \approx 2K_1$; $v_2 \approx \frac{1}{2}\sqrt{3 + v_1^2}$ (см. указание).

64. См. решение.

65. 5 *мин*.

66. $v_2 = \frac{\sqrt{15 + v_1^2}}{4} = 0{,}99$ св. ед.

67. 1 *Гэв* и 1 *Гэв* (см. указание).

68. 30 *кг*.

69. На $4{,}6 \cdot 10^{-10}$ %.

70. 10 млн. рублей.

71. $2{,}8 \cdot 10^{-24}$ *кг*, один атом лютеция (или 175 атомов водорода).

72. $6{,}7 \cdot 10^{-13}$ *м/сек*^{2}; 20 *мкм/сек*.

73. $5{,}5 \cdot 10^{-5}$ *м/сек*^{2}; 55 *м/сек*.

74. Масса катода уменьшится на m_0, электрического поля — на $2m_0$, масса анода увеличится на $3m_0$ (из которых после охлаждения остается m_0).

75. $1{,}7 \cdot 10^{12}$ *дж*.

76. $v = \frac{U^2 l}{c^2 R m} = 8 \cdot 10^{-16}$ *м/сек*.

77. $1{,}6 \cdot 10^{-13}$ *дж*.

78. 1 *Гэв*.

79. 240 000 *км/сек*.

80. $m' = 2{,}7 m_0$; $v' = 0{,}5$ св. ед.; $m_0' = 2{,}3 m_0$ (см. указание).

81. $|v| = 0{,}27$ св. ед. (см. указание).

82. а) Нет. б) Да.

83. Да.

84. Да (см. решение).

85. См. решение.

86. Да, может.

87. Не может.

88. $p = 0{,}03$; $m_1 = 4{,}007$; $m_2 = 1{,}024$ (см. указание).

89. а) $x_\beta = x_\alpha - vt$; $t_\beta = t_\alpha = t$. б) $x_\beta = K(x_\alpha - v t_\alpha)$; $t_\beta = K(t_\alpha - v x_\alpha)$.

90. В системе «Звездолет» расстояние от Земли до Сириуса только два световых года.

91. $t \approx \frac{l}{V + \frac{c}{m} - \frac{V}{n^2}}$.

92. См. указание.

93. См. решение.

94. См. указание.

95. 59 лет.

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНАЯ ЛИТЕРАТУРА ПО ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

(В порядке нарастания трудности).

Ю. И. Соколовский, Сюрпризы околосветовых скоростей (диалог о теории относительности), «Знание», 1963, 22 стр.

Л. Д. Ландау и Ю. Б. Румер, Что такое теория относительности, «Сов. Россия», 1963, 74 стр.

М. Гарднер, Теория относительности для миллионов, Атомиздат, 1967, 190 стр.

Г. Б. Анфилов, Бегство от удивлений. Книга для юных любителей физики с философским складом ума, «Детская литература», 1967, 288 стр.

Дж. Шварц. Как это произошло. Иллюстрированный рассказ о том, как теория относительности устанавливает связи причин и следствий, «Мир», 1965, 157 стр.

А. Эйнштейн, О специальной и общей теории относительности (общедоступное изложение), В кн.: А. Эйнштейн, Собрание научных трудов, т. 1, «Наука», 1965.

Ю. И. Соколовский, Начала теории относительности. Пособие для факультативных занятий, «Просвещение», 1970, 158 стр.; Новосибирск, Зап.-Сибир. кн. изд-во, 1967, 155 стр.; «Просвещение», 1964, 146 стр.; укр. пер., Киев, изд-во «Радянська школа», 1967, 175 стр.

Г. Бонди, Относительность и здравый смысл, «Мир», 1967, 163 стр.

В. Курганов, Введение в теорию относительности, «Мир», 1968, 180 стр.

Ю. И. Соколовский, Теория относительности в элементарном изложенни, «Наука», 1964, 198 стр.; Харьков, Изд-во ХГУ, 1960, 174 стр.

К. Дьюрелл, Азбука теории относительности, «Мир», 1967, 160 стр.

А. И. Жуков, Введение в теорию относительности, Физматгиз, 1961, 171 стр.

М. Борн, Эйнштейновская теория относительности, «Мир», 1964, 452 стр.

Б. Г. Кузнецов, Беседы о теории относительности, Изд-во АН СССР, 1965, 223 стр.

М. В. Мостепаненко, Материалистическая сущность теории относительности, Соцэкгиз, 1962, 227 стр.

Х. Х. Ыйглане, В мире больших скоростей. Очерк о теории относительности, «Наука», 1967, 263 стр.

Д. Бом, Специальная теория относительности, «Мир», 1967, Э. Тейлор, Дж. Уиллер, Физика пространства-времени, «Мир», 1969, 256 стр.

Р. Неванлинна, Пространство, время и относительность, «Мир», 1966, 230 стр.

А. А. Фридман, Мир как пространство и время, «Наука», 1965, 110 стр.

А. З. Петров, Пространство-время и материя. Элементарный очерк современной теории относительности, Казань, Изд-во Казанск. ун-та, 1961, 80 стр.

Научно-художественные книги

Д. С. Данин, Неизбежность странного мира, «Молодая гвардия», 1966 (теория относительности посвящена только первая часть книги, содержащая 164 стр.).

В. П. Смилга, Очевидное? Нет, еще неизведанное... «Молодая гвардия», 1966, 350 стр.

Биографии А. Эйнштейна

Б. Г. Кузнецов, Эйнштейн, «Наука», 1967, 431 стр.

В. Е. Львов, Жизнь Альберта Эйнштейна, «Молодая гвардия», 1959, 380 стр.

К. Зелиг, Альберт Эйнштейн, Атомиздат, 1965, 231 стр.

Ф. Гернек, Альберт Эйнштейн. Жизнь во имя истины, гуманизма и мира, «Прогресс», 1966, 245 стр.

Юрий Иосифович Соколовский

ЭЛЕМЕНТАРНЫЙ ЗАДАЧНИК
ПО ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ
(с решениями)

М., 1971 г., 64 стр. с илл.

Редактор *Л. А. Русаков*
Техн. редактор *Л. А. Пыжова*
Корректор *Л. С. Сомова*

Сдано в набор 27/X 1970 г.
Подп. к печати 11/II 1971 г.
Бумага $84\times108^1/_{32}$.
Физ. печ. л. 2.
Усл. печ. л 3,36
Уч.-изд. л. 3,18
Т-02179.
Тираж 100 000 экз.
Цена книги 10 коп.
Заказ № 1529.

Издательство «Наука»
Главная редакция
физико-математической литературы
Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

Ордена Трудового Красного Знамени
Первая Образцовая типография
имени А. А. Жданова
Главполиграфпрома Комитета по печати
при Совете Министров СССР
Москва, М-54, Валовая, 28