Э. Спеньер

АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ТОПОЛОГИЯ

Книга известного американского математика, содержащая весьма полное и последовательное изложение идей, методов и результатов современной алгебраической топологии, включая теорию гомотопий, гомологии, теорию препятствий и т. д. После каждой главы приводятся упражнения, удачно дополняющие основной текст. От читателя не требуется почти никаких предварительных знаний в этой области.

Книга может служить как учебником, так и справочником по алгебраической топологии и будет полезна весьма широкому кругу математиков, начиная со студентов младших курсов.

Содержание

Предметный указатель

ПРЕДИСЛОВИЕ

Эта книга представляет собой изложение основных идей алгебраической топологии. Она предназначается для использования как в качестве учебника, так и для ссылок. Особое внимание обращается на идею *естественности*, так что эту книгу можно было бы назвать «Функториальная топология». От читателя не требуется никаких предварительных знаний по алгебраической топологии, однако предполагается, что он знаком с элементами общей топологии и алгебры и достаточно искушен в математике. Необходимые предварительные сведения кратко изложены во введении.

Так как эта книга — учебник, изложение в начальных главах гораздо подробнее, чем в последних. Предполагается, что по мере изучения предмета читатель приобретет определенную свободу обращения с излагаемым материалом и в связи с этим возьмет на себя (и чем дальше, тем в бо́льшей степени) восполнение деталей доказательств. Поскольку мы имели в виду и использование этой книги для ссылок, была сделана попытка включить в нее основные понятия независимо от того, используются ли они в книге или нет. В результате в ней охвачен больший материал, чем обычно в курсах алгебраической топологии.

Собранный в книге материал можно разбить на три основные части, каждая из которых состоит из трех глав. Глава делится на несколько параграфов, в которых с той или иной степенью подробности разрабатываются отдельные темы и которые являются связными частями текста. Основная тема первых трех глав — фундаментальная группа. В главе 1 дается ее определение, в главе 2 она применяется при изучении накрывающих пространств и в главе 3 (где вводятся полиэдры) описывается в терминах образующих и соотношений. В этой части книги особое внимание уделяется понятию функтора и его применениям с тем, чтобы возбудить интерес к другим функторам алгебраической топологии.

Главы 4, 5 и 6 посвящены теории гомологий. Глава 4 содержит первоначальные определения этой теории, глава 5 — дальнейшие алгебраические понятия, такие, как когомологии, $\smile$-произведение, когомологические операции, а в главе 6 изучаются топологические многообразия. Вместе с каждым новым понятием указываются приложения, иллюстрирующие его полезность.

В последующих трех главах изучается теория гомотопий. В главе 7 рассмотрены основные факты о гомотопических группах, в главе 8 содержится их приложение к теории препятствий и, наконец, в главе 9 вычисляются некоторые гомотопические группы сфер. Главное внимание мы уделяем приложениям введенного ранее алгебраического аппарата к геометрии.

В книге содержится, вероятно, больше материала, чем можно изложить в годовом курсе. Основой первоначального курса алгебраической топологии может служить глава 4. Она содержит элементарные сведения о гомологиях и некоторые наиболее важные их применения. Неплохой односеместровый курс можно построить на базе первых четырех глав, опуская (или ограничиваясь беглым обзором) § 5 и 6 гл. 1, § 7 и 8 гл. 2, § 8 гл. 3 и, наконец, § 8 гл. 4. Второй односеместровый курс можно построить на гл. 5—8 или гл. 5, 7—9. Для студентов, уже знакомых с теорией гомологий и связанными с ней алгебраическими понятиями, вполне доступен курс теории гомотопий, основанный на последних трех главах.

Все главы заканчиваются упражнениями. Они объединены в группы, каждая из которых посвящена одной или нескольким близким темам. За несколькими исключениями мы не ссылаемся ни на какие упражнения ни в основном тексте, ни в последующих упражнениях. Имеется несколько типов упражнений. В некоторых из них даются примеры, иллюстрирующие общую теорию, развитую ранее, в других разобраны частные случаи, в полной общности обсуждаемые позднее, а некоторые посвящены темам, вообще не представленным в основном тексте. Среди упражнений есть как шаблонные, так и более трудные; последние часто снабжены указаниями. Иногда тема, связанная с основным текстом, развивается в серии упражнений, ей посвященной.

Примеры в тексте обычно приведены либо без пояснений, либо с краткими описаниями нужных свойств. Это относится как к примерам, иллюстрирующим новые понятия, так и к контрпримерам.

В каждом случае проверка того, что пример обладает нужными свойствами, оставлена читателю в качестве упражнения.

Символ ■ означает конец доказательства. Он ставится также в конце тех утверждений, которые либо были доказаны перед их формулировкой, либо легко получаются из предыдущих результатов. Библиографические ссылки даются в подстрочных примечаниях по мере надобности. Все утверждения в любом параграфе и в любой группе упражнений нумеруются последовательно в едином порядке. Ссылка на некоторое утверждение записывается с помощью трех цифр (средняя может заменяться буквой), из которых первая означает номер главы, вторая — номер параграфа или индекс группы упражнений, а третья — номер утверждения внутри параграфа. Так, номер 3.2.2 отсылает к утверждению 2 из § 2 гл. 3.

Идея написать эту книгу возникла при просмотре записей лекций по двум курсам, прочитанным мной в Чикагском университете в 1955 году. Мне очень приятно выразить здесь свою глубокую признательность Гвидо Вейсу и Эдварду Хальперну, записавшим эти лекции. За последующие годы алгебраическая топология сильно изменилась; в соответствии с этим менялись и мои планы относительно книги, в результате чего настоящая книга во многом отличается от первоначальных записей.

Окончательный вариант рукописи и корректуры прочитал Пер Холм. Он сделал ряд полезных замечаний, улучшивших текст. Я искренне благодарен ему за это и за дружескую поддержку в трудные минуты.

Эдвин Спеньер

ВВЕДЕНИЕ

Мы предполагаем, что читатель владеет основными понятиями теории множеств, общей топологии и алгебры. Ниже приводится краткая сводка понятий и результатов из этих областей, которые используются в настоящей книге. Более подробно сформулированы те из них, которые либо не вполне общеприняты, либо особенно важны для дальнейшего изложения.

§ 1. Теория множеств [1])

Термины «множество», «семейство» и «совокупность» являются синонимами. Термин «класс» используется тогда, когда не предполагается, что речь идет о множестве (например, класс всех множеств). Если X — множество, а $P(x)$ — утверждение, которое для каждого $x \in X$ либо истинно, либо ложно, то символом

$$\{x \in X \mid P(x)\}$$

обозначается подмножество всех тех элементов $x \in X$, для которых $P(x)$ истинно.

Если $J = \{j\}$ — некоторое множество, а $\{A_j\}$ — семейство множеств, занумерованных индексами из J, то *объединение* множеств этого семейства обозначается символом $\bigcup A_j$ $\left(\text{или} \bigcup\limits_{j \in J} A_j\right)$, *пересечение* — символом $\bigcap A_j$ $\left(\text{или} \bigcap\limits_{j \in J} A_j\right)$, *прямое произведение* — символом $\prod A_j$ $\left(\text{или} \prod\limits_{j \in J} A_j\right)$ и, наконец, *сумма* [называемая иногда *дизъюнктным объединением* и определяемая как объединение $\bigcup (j \times A_j)$] — символом $\bigvee A_j$ $\left(\text{или} \bigvee\limits_{j \in J} A_j\right)$. В случае когда $J = \{1, \ldots, n\}$, мы также используем обозначения $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$, $A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n$, $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ и $A_1 \vee A_2 \vee \ldots \vee A_n$ соответственно для объединения, пересечения, прямого произведения и суммы.

---

[1]) Более подробное изложение см. в книге: Halmos P. R., Naïve set theory, Princeton, 1960. [См. также Александров П. С., Введение в общую теорию множеств и функций, М., 1948. — *Прим. перев.*]

Отображение (или *функция*) f множества A в множество B обозначается символом $f\colon A \to B$. Множество всех отображений множества A в множество B обозначается B^A. Если $A' \subset A$, то определено *отображение вложения* $i\colon A' \to A$, для которого мы используем обозначение $i\colon A' \subset A$, чтобы подчеркнуть, что A' является подмножеством множества A, а i — отображением вложения (его называют также просто *вложением*). Отображение вложения множества A в себя называется *тождественным отображением* множества A и обозначается символом 1_A. Если $J' \subset J$, то мы имеем вложение

$$i_{J'}\colon \bigvee_{j \in J'} A_j \subset \bigvee_{j \in J} A_j.$$

Отношением эквивалентности на множестве A называется отношение $\sim$ между элементами множества A, являющееся *рефлексивным* (т. е. $a \sim a$ для всех $a \in A$), *симметричным* (т. е. если $a \sim a'$, то и $a' \sim a$ для $a, a' \in A$) и *транзитивным* (т. е. если $a \sim a'$ и $a' \sim a''$, то $a \sim a''$ для a, a', $a'' \in A$). *Классом эквивалентности* элемента $a \in A$ по отношению эквивалентности $\sim$ называется подмножество $\{a' \in A \,|\, a' \sim a\}$. Множество всех классов эквивалентности элементов множества A по отношению эквивалентности $\sim$ обозначается символом $A/\sim$ и называется *фактормножеством* множества A. Определена *проекция* $A \to A/\sim$, переводящая элемент $a \in A$ в его класс эквивалентности. Если J' — непустое подмножество множества J, то определена проекция

$$p_{J'}\colon \prod_{j \in J} A_j \to \prod_{j \in J'} A_j$$

(которая является проекцией и в смысле данного выше определения).

Пусть заданы два отображения $f\colon A \to B$ и $g\colon B \to C$. Их *композицией* $g \circ f$ (или просто gf) называется отображение множества A в C, определенное равенством $(g \circ f)(a) = g(f(a))$ $(a \in A)$. *Ограничением отображения* $f\colon A \to B$ на подмножество $A' \subset A$ называется отображение $f|A'\colon A' \to B$, определенное равенством $(f|A')(a') = f(a')$, $a' \in A'$ (таким образом, $f|A' = f \circ i$, где $i\colon A' \subset A$ — вложение). В свою очередь отображение f называется *продолжением отображения* $f|A'$ *на множество* A.

Отображение $f\colon A \to B$ называется *инъективным*, если из равенства $f(a_1) = f(a_2)$ следует, что $a_1 = a_2$ $(a_1, a_2 \in A)$. Отображение $f\colon A \to B$ называется *сюръективным*, если для всякого $b \in B$ существует элемент $a \in A$, такой, что $b = f(a)$. Наконец, *биективным* или *взаимно однозначным* называется отображение, являющееся одновременно инъективным и сюръективным.

Множество A называется *частично упорядоченным*, если в нем для некоторых пар элементов установлено рефлексивное и транзитивное отношение порядка, обозначаемое символом $\leqslant$ (при этом не предполагается, что отношения $a \leqslant a'$ и $a' \leqslant a$ влекут за собой равенство $a = a'$). *Линейно упорядоченным* называется такое частично упорядоченное множество A, что для любых элементов $a, a' \in A$ имеет место либо отношение $a \leqslant a'$, либо отношение $a' \leqslant a$; при этом предполагается, что отношение порядка удовлетворяет условию: если $a \leqslant a'$ и $a' \leqslant a$, то $a = a'$.

1. **Лемма Цорна.** *Частично упорядоченное множество, в котором каждое линейно упорядоченное подмножество имеет верхнюю грань, содержит максимальный элемент.*

Частично упорядоченное множество Λ, в котором для любых двух элементов $\alpha, \beta \in \Lambda$ существует такой элемент $\gamma \in \Lambda$, что $\alpha \leqslant \gamma$ и $\beta \leqslant \gamma$, называется *направленным*. *Прямым спектром множеств* над направленным множеством $\Lambda = \{\alpha\}$ называется совокупность $\{A^\alpha, f_\alpha^\beta\}$ множеств A^α и отображений f_α^β: $A^\alpha \to A^\beta$, определенных для каждой пары $\alpha, \beta \in \Lambda$ (где $\alpha \leqslant \beta$), такая, что

(a) $f_\alpha^\alpha = 1_{A^\alpha}$: $A^\alpha \subset A^\alpha$ для всех $\alpha \in \Lambda$;

(b) $f_\alpha^\gamma = f_\beta^\gamma \circ f_\alpha^\beta$: $A^\alpha \to A^\gamma$ для $\alpha \leqslant \beta \leqslant \gamma$ $\quad (\alpha, \beta, \gamma \in \Lambda)$.

Пределом $\varinjlim \{A^\alpha\}$ *прямого спектра множеств* называется фактор-множество $\bigvee A^\alpha/\sim$ суммы $\bigvee A^\alpha$ по отношению эквивалентности, при котором $a^\alpha \sim a^\beta$, если существует такое $\gamma \in \Lambda$, что $\alpha \leqslant \gamma$, $\beta \leqslant \gamma$ и $f_\alpha^\gamma a^\alpha = f_\beta^\gamma a^\beta$. Для каждого $\alpha \in \Lambda$ можно определить отображение i_α: $A^\alpha \to \varinjlim \{A^\alpha\}$, такое, что если $\alpha \leqslant \beta$, то $i_\alpha = i_\beta \circ f_\alpha^\beta$.

2. *Пусть заданы прямой спектр множеств* $\{A^\alpha, f_\alpha^\beta\}$, *множество* B *и отображения* g_α: $A^\alpha \to B$ *для каждого* $\alpha \in \Lambda$, *такие, что* $g_\alpha = g_\beta \circ f_\alpha^\beta$, *если* $\alpha \leqslant \beta$. *Тогда существует единственное отображение* g: $\varinjlim \{A^\alpha\} \to B$, *такое, что* $g \circ i_\alpha = g_\alpha$ *для всех* $\alpha \in \Lambda$.

3. *В обозначениях предложения* 2 *отображение* g *биективно тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия*:

(a) $B = \bigcup g_\alpha(A^\alpha)$;

(b) $g_\alpha(a^\alpha) = g_\beta(a^\beta)$ *тогда и только тогда, когда существует такое* $\gamma \in \Lambda$, *что* $\alpha \leqslant \gamma$, $\beta \leqslant \gamma$ *и* $f_\alpha^\gamma(a^\alpha) = f_\beta^\gamma(a^\beta)$.

Пусть $\{A_j\}$ — совокупность множеств с индексами из множества $J = \{j\}$, а $\Lambda = \{\alpha\}$ — совокупность конечных подмножеств множества J. Положим по определению $\alpha \leqslant \beta$ $(\alpha, \beta \in \Lambda)$, если $\alpha \subset \beta$. Тогда Λ становится направленным множеством. Определим прямой спектр $\{A^\alpha, f_\alpha^\beta\}$ множеств A^α, полагая $A^\alpha = \bigvee_{j \in \alpha} A_j$ и считая f_α^β: $A^\alpha \to A^\beta$ вложением, если $\alpha \leqslant \beta$. Пусть g_α: $A^\alpha \to \bigvee_{j \in J} A_j$ — вложение $(\alpha \in \Lambda)$.

4. *В указанных выше обозначениях отображение* $g\colon \varinjlim\{A^\alpha\} \to \to \bigvee_{j \in J} A_j$ *биективно и* $g \circ i_\alpha = g_\alpha$ *(т. е. любая сумма множеств является пределом прямого спектра конечных прямых сумм).*

Обратный спектр множеств $\{A_\alpha, f_\alpha^\beta\}$ над направленным множеством $\Lambda = \{\alpha\}$ представляет собой совокупность множеств A_α и отображений $f_\alpha^\beta\colon A_\beta \to A_\alpha$, определенных для каждой пары $\alpha, \beta \in \Lambda$ (где $\alpha \leqslant \beta$), такую, что

(a) $f_\alpha^\alpha = 1_{A_\alpha}\colon A_\alpha \subset A_\alpha$ для всех $\alpha \in \Lambda$;

(b) $f_\alpha^\gamma = f_\alpha^\beta \circ f_\beta^\gamma\colon A_\gamma \to A_\alpha$ для $\alpha \leqslant \beta \leqslant \gamma$ $(\alpha, \beta, \gamma \in \Lambda)$.

Пределом $\varprojlim\{A_\alpha\}$ *обратного спектра множеств* называется подмножество произведения $\prod A_\alpha$, состоящее из всех таких наборов (a_α), что при $\alpha \leqslant \beta$ имеет место равенство $a_\alpha = f_\alpha^\beta a_\beta$. Для каждого $\alpha \in \Lambda$ можно определить отображение $p_\alpha\colon \varprojlim\{A_\alpha\} \to A_\alpha$, такое, что $p_\alpha = f_\alpha^\beta \circ p_\beta$, если $\alpha \leqslant \beta$.

5. *Пусть заданы обратный спектр множеств* $\{A_\alpha, f_\alpha^\beta\}$, *множество* B *и отображения* $g_\alpha\colon B \to A_\alpha$ *для каждого* $\alpha \in \Lambda$, *такие, что* $g_\alpha = f_\alpha^\beta \circ g_\beta$, *если* $\alpha \leqslant \beta$. *Тогда существует единственное отображение* $g\colon B \to \varprojlim\{A_\alpha\}$, *такое, что* $g_\alpha = p_\alpha \circ g$ *для всех* $\alpha \in \Lambda$.

6. *В обозначениях предложения* 5 *отображение* g *биективно тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия*:

(a) *если* $g_\alpha(b) = g_\alpha(b')$ *для всех* $\alpha \in \Lambda$, *то* $b = b'$;

(b) *пусть набор* $(a_\alpha) \in \prod A_\alpha$ *таков, что* $a_\alpha = f_\alpha^\beta a_\beta$ *при* $\alpha \leqslant \beta$. *Тогда существует такое* $b \in B$, *что* $g_\alpha(b) = a_\alpha$ *для всех* $\alpha \in \Lambda$.

Пусть $\{A^j\}$ — совокупность множеств с индексами из множества $J = \{j\}$. Пусть $\Lambda = \{\alpha\}$ — совокупность конечных непустых подмножеств множества J. Положим по определению $\alpha \leqslant \beta$ $(\alpha, \beta \in \Lambda)$, если $\alpha \subset \beta$. Тогда Λ становится направленным множеством и мы получаем обратный спектр $\{A_\alpha, f_\alpha^\beta\}$ множеств A_α, полагая по определению $A_\alpha = \prod_{j \in \alpha} A^j$ и считая $f_\alpha^\beta\colon A_\beta \to A_\alpha$ проекцией, если $\alpha \leqslant \beta$. Для каждого $\alpha \in \Lambda$ через $g_\alpha\colon \prod_{j \in J} A^j \to A_\alpha$ обозначим естественную проекцию.

7. *В указанных обозначениях отображение* $g\colon \prod_{j \in J} A^j \to \varprojlim\{A_\alpha\}$ *биективно и* $g_\alpha = p_\alpha \circ g$ *(т. е. каждое прямое произведение является пределом обратного спектра конечных прямых произведений).*

§ 2. Общая топология[1])

Говоря о топологическом пространстве (в большинстве случаев мы называем его просто пространством), мы не будем предполагать, что в нем выполняются те или иные аксиомы отделимости, за исключением случаев, когда это специально оговорено. Паракомпактные, нормальные и регулярные пространства всегда предполагаются хаусдорфовыми. Непрерывное отображение одного топологического пространства в другое будет называться также просто отображением.

Пусть заданы множество X, совокупность $\{X_j\}_{j \in J}$ топологических пространств и отображения f_j: $X \to X_j$. *Топологией, индуцированной на множестве* X семейством отображений $\{f_j\}$, называется слабейшая (самая грубая) топология, в которой все отображения f_j непрерывны.

1. *Топология, индуцированная на множестве X семейством отображений $\{f_j: X \to X_j\}$, характеризуется следующим свойством: для произвольного топологического пространства Y отображение g: $Y \to X$ непрерывно тогда и только тогда, когда отображения $f_j \circ g$: $Y \to X_j$ непрерывны для всех $j \in J$.*

Подпространством топологического пространства X называется подмножество A множества X, топология которого индуцирована вложением $A \subset X$. *Дискретным подмножеством* топологического пространства X называется такое его подпространство, каждое подмножество которого замкнуто в X. *Топологическим произведением* семейства $\{X_j\}_{j \in J}$ топологических пространств называется прямое произведение $\prod X_j$ с топологией, индуцированной семейством проекций p_j: $\prod X_j \to X_j$ $(j \in J)$. Если $\{X_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ — обратный спектр топологических пространств (т. е. X_α при каждом $\alpha \in \Lambda$ есть топологическое пространство, а отображения f_α^β: $X_\beta \to X_\alpha$, определенные для каждой пары $\alpha, \beta \in \Lambda$, связанной отношением $\alpha \leqslant \beta$, непрерывны), то предел обратного спектра $\varprojlim \{X_\alpha\}$ наделяется топологией, индуцированной семейством отображений p_α: $\varprojlim \{X_\alpha\} \to X_\alpha$ $(\alpha \in \Lambda)$.

Пусть заданы множество X, совокупность $\{X_j\}_{j \in J}$ топологических пространств и отображения g_j: $X_j \to X$. *Топологией, коиндуцированной на множестве* X семейством отображений $\{g_j\}$, называется сильнейшая (самая тонкая) топология, в которой все отображения g_j непрерывны.

[1]) Более подробное изложение см. в книгах: Келли Дж., Общая топология, М., 1968, и Hu S. T., Elements of General Topology, San Francisco, 1964. [См. также Куратовский К., Топология, т. 1, М., 1967; т. 2, М., 1969. — *Прим. перев.*]

2. *Топология, коиндуцированная на множестве X семейством отображений $\{g_j: X_j \to X\}$, характеризуется следующим свойством: для произвольного топологического пространства Y отображение $f: X \to Y$ непрерывно тогда и только тогда, когда отображение $f \circ g_j: X_j \to Y$ непрерывно для каждого $j \in J$.*

Факторпространством топологического пространства X называется фактормножество X' множества X с топологией, коиндуцированной проекцией $X \to X'$. Если $A \subset X$, то символом X/A будет обозначаться факторпространство пространства X, полученное отождествлением всех точек множества A с одной точкой. *Топологической суммой* (или *несвязной суммой*) совокупности $\{X_j\}_{j \in J}$ топологических пространств называется сумма $\bigvee X_j$ с топологией, коиндуцированной семейством вложений $i_j: X_j \to \bigvee X_j$ $(j \in J)$. Если $\{X^\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ — прямой спектр топологических пространств (т. е. X^α при каждом $\alpha \in \Lambda$ есть топологическое пространство, а отображения $f_\alpha^\beta: X^\alpha \to X^\beta$, определенные для каждой пары $\alpha, \beta \in \Lambda$, связанной отношением $\alpha \leqslant \beta$, непрерывны), то предел прямого спектра $\varinjlim \{X^\alpha\}$ наделяется топологией, коиндуцированной семейством отображений $i_\alpha: X^\alpha \to \varinjlim \{X^\alpha\}$ $(\alpha \in \Lambda)$.

Пусть $\mathfrak{A} = \{A\}$ — некоторая совокупность подпространств топологического пространства X. Говорят, что *топология на X согласована с $\mathfrak{A}$*, если топология на множестве X коиндуцирована вложениями $A \subset X$. (Часто говорят, что топология пространства X *слабее*, чем $\mathfrak{A}$.)

3. *Для того чтобы топология на X была согласована с $\mathfrak{A}$, необходимо и достаточно, чтобы подмножество B множества X было замкнутым (или открытым) в X тогда и только тогда, когда $B \cap A$ замкнуто (или открыто) в A для каждого $A \in \mathfrak{A}$.*

4. *Если $\mathfrak{A}$ — произвольное открытое покрытие или локально конечное замкнутое покрытие пространства X, то топология на X согласована с $\mathfrak{A}$.*

5. *Пусть X — некоторое множество, и пусть $\{A_j\}_{j \in J}$ — совокупность топологических пространств, каждое из которых принадлежит X. Предположим, что для любых $j, j' \in J$ множество $A_j \cap A_{j'}$ является замкнутым (или открытым) подмножеством множеств A_j и $A_{j'}$, и топология на $A_j \cap A_{j'}$, индуцированная множеством A_j, совпадает с топологией, индуцированной множеством $A_{j'}$. Тогда топология, коиндуцированная на X семейством вложений $\{A_j \subset X\}$, характеризуется следующими свойствами: для каждого индекса $j \in J$ множество A_j является замкнутым (или открытым) в X, и топология пространства X согласована с семейством множеств $\{A_j\}$.*

Топология пространства X, рассмотренная в предложении 5, будет называться *топологией, согласованной с семейством подпространств* $\{A_j\}$. *Компактно порожденным пространством* называется хаусдорфово пространство, топология которого согласована с семейством его компактных подмножеств (такое пространство иногда называют *хаусдорфовым k-пространством*).

6. *Хаусдорфово пространство, которое либо локально компактно, либо удовлетворяет первой аксиоме счетности, является компактно порожденным.*

7. *Если X — компактно порожденное, а Y — локально компактное хаусдорфово пространство, то пространство $X \times Y$ является компактно порожденным.*

Если X и Y — некоторые топологические пространства, $A \subset X$ и $B \subset Y$, то символом $\langle A; B\rangle$ обозначается множество всех непрерывных отображений f: $X \to Y$, при которых $f(A) \subset B$. Символом Y^X обозначается пространство всех непрерывных отображений пространства X в пространство Y, снабженное *компактно-открытой топологией* (т. е. топологией, базой открытых множеств которой является семейство $\{\langle K; U\rangle\}$, где K — компактное подмножество пространства X, а U — открытое подмножество пространства Y). Если $A \subset X$ и $B \subset Y$, то через $(Y, B)^{(X, A)}$ обозначается подпространство пространства Y^X, состоящее из всех отображений f: $X \to Y$, удовлетворяющих условию $f(A) \subset B$. Определим отображение E: $Y^X \times \times X \to Y$ равенством $E(f, x) = f(x)$. Для всякого отображения g: $Z \to Y^X$ композиция

$$Z \times X \xrightarrow{g \times 1} Y^X \times X \xrightarrow{E} Y$$

отображает пространство $Z \times X$ в пространство Y.

8. **Теорема об экспоненциальном соответствии.** *Если X — локально компактное хаусдорфово пространство, а Y и Z — произвольные топологические пространства, то отображение g: $Z \to Y^X$ непрерывно тогда и только тогда, когда непрерывно отображение $E \circ (g \times 1)$: $Z \times X \to Y$.*

9. **Экспоненциальный закон.** *Если X — локально компактное хаусдорфово пространство, Z — хаусдорфово пространство, а Y — произвольное топологическое пространство, то отображение ψ: $(Y^X)^Z \to Y^{Z \times X}$, определенное равенством $\psi(g) = E \circ (g \times 1)$, является гомеоморфизмом.*

10. *Если X — компактное хаусдорфово пространство, а Y — метрическое пространство с метрикой d, то на пространстве Y^X можно ввести метрику d', полагая*

$$d'(f, g) = \sup\{d(f(x), g(x)) \mid x \in X\}.$$

§ 3. Теория групп [1])

Гомоморфизм называется *мономорфизмом*, *эпиморфизмом* или *изоморфизмом*, если он является соответственно инъективным, сюръективным или биективным отображением. Если $\{G_j\}_{j \in J}$ — некоторое семейство групп, то *прямым произведением групп* этого семейства называется множество $\prod G_j$ с групповой операцией, определенной соотношением $(g_j)(g'_j) = (g_j g'_j)$. Если $\{G_\alpha\}$ — обратный спектр групп (т. е. если G_α при каждом $\alpha \in \Lambda$ есть группа, а f^β_α: $G_\beta \to G_\alpha$ есть гомоморфизм для каждой пары $\alpha, \beta \in \Lambda$, связанной отношением $\alpha \leqslant \beta$), то предел обратного спектра $\varprojlim\{G_\alpha\}$ (представляющий собой множество) есть подгруппа группы $\prod G_\alpha$.

Пусть A — подмножество группы G. Говорят, что группа G *свободно порождена* множеством A, а A — *множество свободных образующих* группы G, или *свободный базис*, если для любого отображения f: $A \to H$, где H — некоторая группа, существует единственный гомоморфизм φ: $G \to H$, являющийся продолжением отображения f. Группа называется *свободной*, если она свободно порождена некоторым своим подмножеством. Для любого множества A *свободной группой, порожденной множеством* A, называется группа $F(A)$, содержащая A в качестве свободного базиса. Такие группы $F(A)$ существуют, и любые две из них канонически изоморфны.

1. *Всякая группа изоморфна факторгруппе некоторой свободной группы.*

Копредставление группы G состоит из множества A *образующих*, множества $B \subset F(A)$ *соотношений* и отображения f: $A \to G$, такого, что продолжение его до гомоморфизма φ: $F(A) \to G$ является эпиморфизмом, ядро которого — нормальный делитель группы $F(A)$, порожденный множеством B. Если A и B — конечные множества, то копредставление называется *конечным*, а группа G называется *конечно копредставленной.*

§ 4. Модули [2])

Нас будут в основном интересовать R-модули в случае, когда R является областью главных идеалов. Однако мы начнем с описания

[1]) Подробное изложение элементарной теории групп читатель найдет в книге: Birkhoff G., MacLane S., A Survey of Modern Algebra, New York, 1953. Свободные группы рассматриваются в книге Кроуэлл Р., Фокс Р., Введение в теорию узлов, М., 1967. [См. также Ленг С., Алгебра, М., 1968. — *Прим. перев.*]

[2]) Более подробное изложение имеется в книгах: Картан А., Эйленберг С., Гомологическая алгебра, М., 1960; Маклейн С., Гомология, М., 1966. [См. также Бурбаки Н., Алгебра. Модули, кольца, формы, М., 1966. — *Прим. перев.*]

свойств R-модулей над произвольным коммутативным кольцом R с единицей, действующей тождественным образом на каждом рассматриваемом модуле[1]). Для всякого гомоморфизма $\varphi: A \to B$ R-модулей определим следующие R-модули:

$$\ker \varphi = \{a \in A \mid \varphi(a) = 0\} \subset A;$$
$$\operatorname{im} \varphi = \{b \in B \mid b = \varphi(a) \text{ для некоторого } a \in A\} \subset B;$$
$$\operatorname{coker} \varphi = B/\operatorname{im} \varphi.$$

1. Теорема Нётер об изоморфизме. *Пусть A и B — некоторые подмодули модуля C, и пусть $A + B$ — подмодуль, порожденный множеством $A \cup B$. Тогда вложение $A \subset A + B$ переводит $A \cap B$ в B и индуцирует изоморфизм R-модулей*

$$A/(A \cap B) \quad \text{и} \quad (A + B)/B.$$

Если $\{A_j\}_{j \in J}$ — некоторое семейство R-модулей, то *прямое произведение* $\prod A_j$ является R-модулем; *прямая сумма* $\bigoplus A_j$ также представляет собой R-модуль (прямой суммой $\bigoplus A_j$ называется подмодуль модуля $\prod A_j$, состоящий из всех наборов, в которых лишь конечное число координат отлично от нуля). Предел $\varprojlim\{A_\alpha\}$ обратного спектра R-модулей (и гомоморфизмов $f_\alpha^\beta: A_\beta \to A_\alpha$ при $\alpha \leqslant \beta$) есть R-модуль; предел прямого спектра R-модулей (и гомоморфизмов), также является R-модулем.

2. *Всякий R-модуль изоморфен пределу прямого спектра своих конечно порожденных подмодулей, упорядоченных по включению.*

Если A и B — некоторые R-модули, то их *тензорное произведение* $A \underset{R}{\otimes} B$ (или $A \otimes B$) является R-модулем. Элементам $a \in A$ и $b \in B$ соответствует элемент $a \otimes b \in A \otimes B$. Модуль $A \otimes B$ порожден элементами $\{a \otimes b \mid a \in A, b \in B\}$ и соотношениями (где $a, a' \in A$, $b, b' \in B$ и $r, r' \in R$)

$$(ra + r'a') \otimes b = r(a \otimes b) + r'(a' \otimes b),$$
$$a \otimes (rb + r'b') = r(a \otimes b) + r'(a \otimes b').$$

Если на одном из модулей A или B определена структура R'-модуля, то $A \underset{R}{\otimes} B$ также является R'-модулем.

3. *Для любого R-модуля A гомоморфизмы $a \to a \otimes 1$ и $a \to 1 \otimes a$ определяют изоморфизмы между модулем A и соответственно модулями $A \otimes R$ и $R \otimes A$.*

4. *Для любых R-модулей A и B определен изоморфизм модулей $A \otimes B$ и $B \otimes A$, при котором $a \otimes b$ переходит в $b \otimes a$.*

[1]) Такие модули обычно называются *унитарными*. — *Прим. перев.*

5. *Пусть A и B суть R-модули, а B и C суть R'-модули. Тогда определен изоморфизм между модулями $\left(A \underset{R}{\otimes} B\right) \underset{R'}{\otimes} C$ и $A \underset{R}{\otimes} \left(B \underset{R'}{\otimes} C\right)$ (которые рассматриваются как R- и R'-модули), переводящий $(a \otimes b) \otimes c$ в $a \otimes (b \otimes c)$.*

Модулем гомоморфизмов $\mathrm{Hom}(A, B)$ (или $\mathrm{Hom}_R(A, B)$) двух R-модулей A и B называется R-модуль, элементами которого служат R-гомоморфизмы $A \to B$. Если один из модулей A или B является также R'-модулем, то и $\mathrm{Hom}_R(A, B)$ является R'-модулем.

6. *Пусть A и B суть R-модули, а B и C суть R'-модули. Тогда определен изоморфизм между модулями $\mathrm{Hom}_{R'}\left(A \underset{R}{\otimes} B, C\right)$ и $\mathrm{Hom}_R(A, \mathrm{Hom}_{R'}(B, C))$ (которые рассматриваются как R- и R'-модули), переводящий R'-гомоморфизм $\varphi\colon A \underset{R}{\otimes} B \to C$ в R-гомоморфизм $\varphi'\colon A \to \mathrm{Hom}_{R'}(B, C)$, такой, что $\varphi'(a)(b) = \varphi(a \otimes b)$.*

Подмножество S R-модуля A называется *базисом модуля A* (и модуль A называется *свободно порожденным* над R множеством S), если любое отображение $f\colon S \to B$, где B — некоторый R-модуль, допускает единственное продолжение до R-гомоморфизма $\varphi\colon A \to B$. Модуль называется *свободным*, если он имеет базис. Для любого множества S *свободным модулем*, *порожденным множеством S*, называется модуль $F_R(S)$ всех ненулевых финитных[1]) функций $S \to R$ (с поточечным сложением и умножением на скаляры); при этом элемент $s \in S$ отождествляется с характеристической функцией этого элемента. Модуль $F_R(S)$ содержит множество S в качестве базиса, и любой модуль, содержащий S в качестве базиса, канонически изоморфен $F_R(S)$.

7. *Всякий R-модуль изоморфен фактормодулю некоторого свободного R-модуля.*

8. *Если A' — такой подмодуль модуля A, что фактормодуль A/A' является свободным, то модуль A изоморфен прямой сумме $A' \oplus A/A'$.*

Предположим теперь, что кольцо R является областью главных идеалов (т. е. областью целостности, в которой каждый идеал — главный). *Подмодулем кручения* $\mathrm{Tor}\,A$ R-модуля A называется модуль

$$\mathrm{Tor}\,A = \{a \in A \mid ra = 0 \text{ для некоторого ненулевого } r \in R\}.$$

Если $\mathrm{Tor}\,A = 0$, то говорят, что модуль A *не имеет кручения.*

---

[1]) *Финитной функцией* в данном случае называется функция, принимающая ненулевые значения лишь на конечном множестве элементов. Другими словами, финитная функция есть формальная линейная комбинация конечного числа элементов множества S с коэффициентами из кольца R. — *Прим. перев.*

9. *Над областью главных идеалов всякий подмодуль свободного модуля свободен.*

10. *Над областью главных идеалов конечно порожденный модуль свободен тогда и только тогда, когда у него нет кручения.*

11. *Над областью главных идеалов модуль* $A/\mathrm{Tor}\,A$ *не имеет кручения.*

Если A — конечно порожденный модуль над областью главных идеалов R, то его *рангом* $\rho(A)$ называется число элементов базиса фактормодуля $A/\mathrm{Tor}\,A$.

12. *Если* A' — *подмодуль конечно порожденного модуля* A (*над областью главных идеалов*), *то*

$$\rho(A)=\rho(A')+\rho(A/A').$$

Пусть φ: $A \to A$ — эндоморфизм конечно порожденного модуля (над областью главных идеалов R). Его *следом* $\mathrm{Tr}\,\varphi$ называется элемент кольца R, являющийся следом эндоморфизма φ', индуцированного эндоморфизмом φ на свободном модуле $A/\mathrm{Tor}\,A$ (другими словами, если модуль $A/\mathrm{Tor}\,A$ имеет базис $a_1, \ldots, a_n$ и $\varphi'(a_i) = \sum r_{ij}a_j$, то $\mathrm{Tr}\,\varphi = \sum r_{ii}$).

13. *Пусть* φ — *эндоморфизм конечно порожденного модуля* A, *и пусть* A' — *подмодуль модуля* A, *такой, что* $\varphi(A') \subset A'$. *Тогда ограничение* $\varphi|A'$ *является эндоморфизмом модуля* A' *и* φ *индуцирует эндоморфизм* φ'' *модуля* A/A'. *Следы этих эндоморфизмов связаны соотношением*

$$\mathrm{Tr}\,\varphi = \mathrm{Tr}\,(\varphi|A') + \mathrm{Tr}\,\varphi''.$$

Модуль с одной образующей называется *циклическим*. Над областью главных идеалов R такой модуль A задается с точностью до изоморфизма элементом $r_A \in R$, который порождает идеал, аннулирующий модуль A (элемент r_A определен с точностью до умножения на обратимые элементы кольца R).

14. Структурная теорема для конечно порожденных модулей. *Над областью главных идеалов каждый конечно порожденный модуль является прямой суммой некоторого свободного модуля и циклических модулей* $A_1, \ldots, A_q$, *для которых соответствующие элементы* $r_1, \ldots, r_q \in R$ *обладают тем свойством, что* r_i *делит* r_{i+1} $(1 \leqslant i \leqslant q-1)$. *Элементы* $r_1, \ldots, r_q$ *определены однозначно с точностью до умножения на обратимые элементы кольца* R *и вместе с рангом модуля характеризуют этот модуль с точностью до изоморфизма.*

§ 5. Евклидовы пространства

Мы используем следующие обозначения:

$\varnothing$ — пустое множество;
$\mathbf{Z}$ — кольцо целых чисел;
$\mathbf{Z}_m$ — кольцо вычетов по модулю m;
$\mathbf{R}$ — поле действительных чисел;
$\mathbf{C}$ — поле комплексных чисел;
$\mathbf{Q}$ — тело кватернионов;
$\mathbf{R}^n$ — n-мерное евклидово пространство над полем действительных чисел с метрикой $\|x\| = \sqrt{\sum x_i^2}$ и скалярным произведением $\langle x, y\rangle = \sum x_i y_i$;
0 — начало координат в $\mathbf{R}^n$;
I — замкнутый единичный интервал;
$\dot{I}$ — $\{0, 1\} \subset I$;
I^n — n-мерный куб $\{x \in \mathbf{R}^n \mid 0 \leqslant x_i \leqslant 1,\ 1 \leqslant i \leqslant n\}$;
$\dot{I}^n$ — $\{x \in I^n \mid x_i = 0$ или $x_i = 1$ для некоторого $i\}$;
E^n — n-мерный шар $\{x \in \mathbf{R}^n \mid \|x\| \leqslant 1\}$;
S^{n-1} — $(n-1)$-мерная сфера $\{x \in \mathbf{R}^n \mid \|x\| = 1\}$;
P^n — n-мерное проективное пространство — факторпространство сферы S^n относительно отождествления диаметрально противоположных точек x и $-x$.

Замкнутым отрезком действительного векторного пространства, соединяющим точки x и y (обозначается $[x, y]$), называется множество точек вида $tx + (1-t)y$ при $0 \leqslant t \leqslant 1$ (следовательно, $I = [0, 1]$). Если $x \neq y$, то *прямой*, определенной точками x и y, называется множество $\{tx + (1-t)y \mid t \in \mathbf{R}\}$. Подмножество C действительного векторного пространства называется *линейным многообразием*, если для любых точек $x, y \in C$ определенная ими прямая также принадлежит C. Подмножество C называется *выпуклым*, если для любых точек $x, y \in C$ имеет место включение $[x, y] \subset C$. *Выпуклым телом*[1]) в $\mathbf{R}^n$ называется выпуклое подмножество пространства $\mathbf{R}^n$, содержащее открытое в $\mathbf{R}^n$ непустое подмножество (таким образом, I^n и E^n — выпуклые тела в $\mathbf{R}^n$).

1. *Если C — выпуклое тело в $\mathbf{R}^n$, а C' — выпуклое тело в $\mathbf{R}^m$, то $C \times C'$ — выпуклое тело в $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m = \mathbf{R}^{n+m}$.*

2. *Любые два компактных выпуклых тела в $\mathbf{R}^n$ гомеоморфны.*

Подмножество S действительного векторного пространства называется *аффинно независимым*, если для любого конечного набора различных элементов $x_0, x_1, \ldots, x_m \in S$ и любых чисел $t_0, t_1, \ldots$

[1]) Общие свойства выпуклых множеств изложены в книге: Valentine F. A., Convex Sets, New York, 1964.

$\ldots, t_m \in \mathbf{R}$, таких, что $\sum t_i = 0$, равенство $\sum t_i x_i = 0$ имеет место только тогда, когда $t_i = 0$ при $0 \leqslant i \leqslant m$ (это эквивалентно условию, что векторы $x_1 - x_0, x_2 - x_0, \ldots, x_m - x_0$ линейно независимы).

3. *В пространстве* $\mathbf{R}^n$ *существует аффинно независимое подмножество, содержащее* $n+1$ *элементов, и не существует аффинно независимых подмножеств, содержащих более* $n+1$ *элементов.*

4. *Выпуклым множеством, порожденным заданными точками* $x_0, x_1, \ldots, x_m \in \mathbf{R}^n$, *называется множество всех точек вида* $\sum t_i x_i$, *где* $0 \leqslant t_i \leqslant 1$, $\sum t_i = 1$. *Множество* $\{x_0, x_1, \ldots, x_m\}$ *аффинно независимо тогда и только тогда, когда каждая точка* x *выпуклого множества, порожденного этим множеством, имеет единственное представление в виде* $x = \sum t_i x_i$, *где* $0 \leqslant t_i \leqslant 1$ *при* $0 \leqslant i \leqslant m$; $\sum t_i = 1$.

ДРУГИЕ КНИГИ ПО АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ ТОПОЛОГИИ [1])

1. Александров, Хопф (Alexandroff P., Hopf H.), Topologie, Berlin, 1935.
2. Бургин (Bourgin D. G.), Modern Algebraic Topology, New York, 1963.
3. Годеман Р., Алгебраическая топология и теория пучков, М., 1961.
4. Зейферт Г., Трельфалль В., Топология, М.—Л., 1938.
5. Кернс (Cairns S. S.), Introductory Topology, New York, 1962.

6*. Лекции первой летней топологической школы (г. Горький), *Успехи матем. н.* **XXI**, вып. 5 (131) (1966).

7. Лефшец С., Алгебраическая топология, М., 1959.
8. Лефшец (Lefschetz S.), Introduction to Topology, Princeton, N. J., 1949.
9. Понтрягин Л. С., Основы комбинаторной топологии, М., 1947.

10*. Расслоенные пространства и их приложения, Сб. переводов, М., 1958.

11. Стинрод Н., Топология косых произведений, М., 1953.
12. Стинрод Н., Эйленберг С., Основания алгебраической топологии, М., 1958.
13. Уайльдер (Wilder R. L.), Topology of Manifolds, Amer. Math. Soc. Colloquium Series, v. 32, New York, 1949.
14. Уоллес (Wallace A. H.), An Introduction to Algebraic Topology, London, 1957.

15*. Фукс Д. Б., Фоменко А. Т., Гутенмахер В. Л., Гомотопическая топология, М., 1969.

16. Хилтон П., Уайли С., Теория гомологий, М., 1966.
17. Хокинг, Янг (Hocking J. G., Young G. S.), Topology, Reading, 1961.
18. Ху Сы-цзян, Теория гомотопий, М., 1964.
19. Шуберт (Schubert H.), Topologie, Stuttgart, 1964.

---

[1]) Работы, отмеченные звездочкой, добавлены переводчиком. — *Прим. перев.*

Глава 1

ГОМОТОПИЯ И ФУНДАМЕНТАЛЬНАЯ ГРУППА

Топология — это наука о топологических пространствах и их непрерывных отображениях. Стандартная задача топологии — классификация таких пространств и отображений с точностью до гомеоморфизма. Более слабое отношение эквивалентности, использующее понятие непрерывной деформации, приводит к другой задаче классификации. Эта последняя задача исключительно важна для алгебраической топологии, так как именно здесь ее методы оказываются наиболее эффективными.

Для наших целей вполне подходит определение алгебраической топологии как науки, которая занимается изучением топологических пространств и их непрерывных отображений с помощью алгебраических объектов — групп, колец, гомоморфизмов. Переход от топологии к алгебре осуществляется при помощи отображений, называемых функторами. По этой причине § 1.1 и 1.2 посвящены фундаментальным понятиям категории и функтора.

В § 1.3 и 1.4 вводится понятие непрерывной деформации, известной под названием гомотопии. Далее мы определяем категорию гомотопических типов и некоторые функторы на этой категории, важные для дальнейшего. В § 1.5 и 1.6 изучаются условия, при которых эти функторы на категории гомотопических типов принимают значения в категории групп. Кратко упоминаемые функторы гомотопических групп представляют примеры функторов такого рода.

Первым функтором, который мы рассматриваем подробно, является функтор фундаментальной группы, указывающий на то, какого рода функторы изучаются в алгебраической топологии. Он определяется и исследуется в § 1.7 и 1.8. Некоторые применения этого функтора представлены в упражнениях, помещенных в конце главы. В гл. 2 этот функтор используется для систематического изучения и классификации накрывающих пространств.

§ 1. Категории

Алгебраическое представление топологии — это некоторое отображение топологии в алгебру. Такое представление позволяет превратить топологическую задачу в соответствующую ей алгебраическую; если при этом имеется достаточно много представлений такого рода, то топологическая задача разрешима тогда (и только тогда), когда разрешимы все соответствующие алгебраические задачи.

Определение такого представления, формально называемого функтором, дается в следующем параграфе. Этот параграф посвящен понятию категории, поскольку функторы являются естественными отображениями категорий.

Интуитивно можно представлять себе категорию как совокупность множеств (возможно, имеющих дополнительную структуру) и отображений (сохраняющих эту дополнительную структуру). Более точно, *категория* $\mathscr{C}$ состоит из

(a) некоторого класса объектов;

(b) множеств $\hom(X, Y)$ *морфизмов* с *областью определения* X и *областью значений* Y для каждой упорядоченной пары объектов X и Y; если $f \in \hom(X, Y)$, то мы пишем $f\colon X \to Y$ или $X \xrightarrow{f} Y$;

(c) функции, сопоставляющей каждой упорядоченной тройке объектов X, Y и Z и паре морфизмов $f\colon X \to Y$ и $g\colon Y \to Z$ их *композицию*

$$gf = g \circ f\colon X \to Z.$$

При этом должны выполняться две следующие аксиомы:

Ассоциативность. *Если $f\colon X \to Y$, $g\colon Y \to Z$ и $h\colon Z \to W$ — некоторые морфизмы, то*

$$h(gf) = (hg)f\colon X \to W.$$

Существование единицы. *Для всякого объекта Y существует такой морфизм $1_Y\colon Y \to Y$, что для произвольных морфизмов $f\colon X \to Y$ и $h\colon Y \to Z$ мы имеем $1_Y f = f$ и $h 1_Y = h$.*

Если класс объектов является множеством, то категория называется *малой*. В большинстве случаев мы можем ограничиться малыми категориями, но было бы неудобно каждый раз, прежде чем рассматривать категорию, выделять некоторое множество объектов. Например, когда нам придется иметь дело с категориями, объектами которых являются множества или группы, мы предпочитаем рассматривать класс всех множеств или групп, а не подбирать в каждом примере подходящее множество множеств или множество групп.

Из двух сформулированных аксиом вытекает единственность морфизма 1_Y (см. лемму 1 ниже), который называется *тождественным морфизмом объекта* Y. Если для двух морфизмов $f\colon X \to Y$ и $g\colon Y \to X$ выполняется равенство $gf = 1_X$, то g называется *левым обратным* к f, а f — *правым обратным* к g. *Двусторонне обратным* (или просто *обратным*) к морфизму f называется морфизм, являющийся одновременно левым и правым обратным к f. Морфизм

$f\colon X \to Y$ называется *эквивалентностью* (обозначается $f\colon X \approx Y$), если существует двусторонне обратный к морфизму f морфизм $g\colon Y \to X$. Если $g'\colon Y \to X$ — левый обратный к f, а $g''\colon Y \to X$ — правый обратный к f, то равенства

$$g' = g' 1_Y = g'(fg'') = (g'f)g'' = 1_X g'' = g''$$

показывают, что $g' = g''$. Таким образом, получаем следующее утверждение:

1. Лемма. *Если морфизм $f\colon X \to Y$ имеет правый обратный и левый обратный, то они совпадают и f является эквивалентностью.* ■

В частности, отсюда вытекает, что эквивалентность $f\colon X \approx Y$ имеет единственный обратный морфизм $f^{-1}\colon Y \to X$ и f^{-1} также является эквивалентностью. Если существует какая-нибудь эквивалентность $f\colon X \approx Y$, то мы будем называть объекты X и Y *эквивалентными:* $X \approx Y$. Ясно, что композиция эквивалентностей является эквивалентностью; поэтому отношение $X \approx Y$ представляет собой отношение эквивалентности на всяком множестве объектов категории $\mathscr{C}$.

Приведем несколько примеров категорий.

2. Категория множеств и функций (классом объектов этой категории является класс всех множеств, и для двух множеств X и Y множество $\hom(X, Y)$ есть множество всех функций из X в Y).

3. Категория топологических пространств и непрерывных отображений.

4. Категория групп и гомоморфизмов.

5. Категория R-модулей и R-гомоморфизмов.

6. Категория нормированных колец (над $\mathbf{R}$) и непрерывных гомоморфизмов.

7. Категория множеств и инъективных (или сюръективных или биективных) отображений.

8. Категория *множеств с отмеченной точкой* (множеством с отмеченной точкой называется непустое множество с выделенным элементом) и функций, сохраняющих отмеченную точку.

9. Категория *топологических пространств с отмеченной точкой* (топологическим пространством с отмеченной точкой называется непустое топологическое пространство, в котором выделена некоторая точка) и непрерывных отображений, сохраняющих отмеченную точку.

10. Категория конечных множеств и функций.

11. Пусть на X установлено частичное упорядочение $\leqslant$. Тогда можно определить категорию, объекты которой представляют собой элементы множества X, а множество $\mathrm{hom}(x, x')$ либо состоит из единственного элемента — упорядоченной пары (x, x'), либо пусто, в зависимости от того, какое из соотношений имеет место: $x \leqslant x'$ или $x \nleqslant x'$.

12. Категория групп и классов сопряженных гомоморфизмов (т. е. морфизм $G \to G'$ этой категории — это класс эквивалентности гомоморфизмов $G \to G'$, причем два гомоморфизма считаются эквивалентными, если они отличаются на внутренний автоморфизм группы G').

Подкатегорией $\mathscr{C}' \subset \mathscr{C}$ называется такая категория, что

(a) объекты категории $\mathscr{C}'$ являются объектами категории $\mathscr{C}$;

(b) для объектов X' и Y' категории $\mathscr{C}'$ имеет место включение $\mathrm{hom}_{\mathscr{C}'}(X', Y') \subset \mathrm{hom}_{\mathscr{C}}(X', Y')$;

(c) если f': $X' \to Y'$ и g': $Y' \to Z'$ — морфизмы категории $\mathscr{C}'$, то их композиция в $\mathscr{C}'$ совпадает с композицией в $\mathscr{C}$.

Категория $\mathscr{C}'$ называется *полной подкатегорией* категории $\mathscr{C}$, если для объектов $X', Y' \in \mathscr{C}'$ имеет место равенство $\mathrm{hom}_{\mathscr{C}'}(X', Y') = \mathrm{hom}_{\mathscr{C}}(X', Y')$. Категория из примера 7 является подкатегорией категории из примера 2, а категория из примера 10 — полной подкатегорией категории из примера 2. Категории из примеров 3, 4, 5, 6 и 8 не являются подкатегориями категории множеств, так как каждый объект этих категорий состоит из множества и некоторой дополнительной структуры на нем и, следовательно, одно и то же множество может соответствовать разным объектам этих категорий. В примерах 11 и 12 морфизмы соответствующих категорий не являются функциями, и, следовательно, ни одна из этих категорий не может быть подкатегорией категории множеств.

Диаграмма морфизмов вида

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & Y \arrow[d, "h"] \\ X' \arrow[r, "f'"] & Y' \end{tikzcd}$$

называется *коммутативной*, если любые две композиции морфизмов с одной и той же областью определения и одной и той же областью значений совпадают. Таким образом, эта диаграмма коммутативна тогда и только тогда, когда $h \circ f = f' \circ g$.

Сейчас мы опишем некоторые категории, связанные с заданной категорией. Если задана категория $\mathscr{C}$, то можно построить *категорию морфизмов* категории $\mathscr{C}$. Ее объектами служат морфизмы $X \xrightarrow{f} Y$, а морфизмом объекта $X \xrightarrow{f} Y$ в объект $X' \xrightarrow{f'} X'$ называется такая пара морфизмов $g\colon X \to X'$ и $h\colon Y \to Y'$, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ {\scriptstyle g}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle h} \\ X' & \xrightarrow{f'} & Y' \end{array}$$

коммутативна. Аналогичным образом, диаграммы более общих, чем $X \xrightarrow{f} Y$, морфизмов из $\mathscr{C}$ являются объектами соответствующих категорий, связанных с $\mathscr{C}$.

Пусть $\mathscr{C}$ — категория, объектами которой являются множества с дополнительными структурами (такими, например, как выделенный элемент или топология), а морфизмами — функции, сохраняющие эти дополнительные структуры. Например, $\mathscr{C}$ может быть любой из категорий примеров 2—10. Можно определить ассоциированную с $\mathscr{C}$ категорию, называемую *категорией пар категории* $\mathscr{C}$. Ее объектами служат инъективные морфизмы $i\colon A \to X$ (поскольку морфизмы такой категории $\mathscr{C}$ являются отображениями, можно рассмотреть те из них, которые инъективны), а морфизмами — коммутативные диаграммы

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{i} & X \\ {\scriptstyle g}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle h} \\ B & \xrightarrow{j} & Y \end{array}$$

Таким образом, категория пар категории $\mathscr{C}$ является полной подкатегорией категории морфизмов категории $\mathscr{C}$. Обозначение (X, A) мы будем использовать для пары, состоящей из объекта X и вложения $i\colon A \subset X$, а обозначение $f\colon (X, A) \to (Y, B)$ — для морфизма $f\colon X \to Y$ категории $\mathscr{C}$, такого, что $f(i(A)) \subset j(B)$. Следовательно, объектами категории пар категории $\mathscr{C}$ являются пары (X, A), а морфизмами — морфизмы пар $f\colon (X, A) \to (Y, B)$.

Если $\mathscr{C}_1$ и $\mathscr{C}_2$ — категории, то их *произведением* $\mathscr{C}_1 \times \mathscr{C}_2$ называется категория, объектами которой являются упорядоченные пары (Y_1, Y_2) объектов $Y_1 \in \mathscr{C}_1$ и $Y_2 \in \mathscr{C}_2$, а морфизмами $(X_1, X_2) \to (Y_1, Y_2)$ — упорядоченные пары морфизмов (f_1, f_2), где $f_1\colon X_1 \to Y_1$ — морфизм из категории $\mathscr{C}_1$, а $f_2\colon X_2 \to Y_2$ — из $\mathscr{C}_2$. Аналогично можно определить произведение любого семейства категорий с индексами из некоторого множества.

По данной категории $\mathscr{C}$ можно построить *дуальную* категорию $\mathscr{C}^*$, объекты которой Y^* находятся в биективном соответствии с объектами Y категории $\mathscr{C}$, а морфизмы $f^*\colon Y^* \to X^*$ — во взаимно однозначном соответствии с морфизмами $f\colon X \to Y$ (при этом композиция f^*g^* по определению равна $(gf)^*$, где $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ — композиция в категории $\mathscr{C}$). Мы отождествляем категории $(\mathscr{C}^*)^*$ и $\mathscr{C}$; значит, $(X^*)^* = X$ и $(f^*)^* = f$.

Покажем теперь, как нужно понимать суммы и произведения, пределы прямых и обратных спектров в произвольных категориях. Объект X категории $\mathscr{C}$ называется *инициальным*, если для любого объекта Y категории $\mathscr{C}$ множество $\hom(X, Y)$ состоит в точности из одного элемента. Аналогично, объект Z категории $\mathscr{C}$ называется *терминальным*, если для любого объекта Y категории $\mathscr{C}$ множество $\hom(Y, Z)$ состоит в точности из одного элемента. Заметим, что любые два инициальных объекта категории $\mathscr{C}$ эквивалентны; аналогично, эквивалентны любые два терминальных объекта категории $\mathscr{C}$. В примерах 2 и 3 пустое множество является инициальным объектом, а одноточечное множество — терминальным объектом. В примере 4 тривиальная группа является одновременно инициальным и терминальным объектом. В примере 7 категория множеств и биективных отображений не имеет ни инициального, ни терминального объектов.

Пусть $\{Y_j\}_{j \in J}$ — некоторое множество объектов категории $\mathscr{C}$. Пусть $\mathscr{S}\{Y_j\}$ — категория, объектами которой служат семейства морфизмов $\{f_j\}_{j \in J}$ категории $\mathscr{C}$ с одной и той же областью значений. В этой категории морфизмом объекта $\{f_j\colon Y_j \to Z\}$ в объект $\{f'_j\colon Y_j \to Z'\}$ называется морфизм $g\colon Z \to Z'$ из $\mathscr{C}$, такой, что $gf_j = f'_j$ для каждого $j \in J$. Инициальный объект категории $\mathscr{S}\{Y_j\}$ называется *суммой* семейства $\{Y_j\}$. Данное семейство может иметь или не иметь сумму в категории $\mathscr{C}$. Дизъюнктное объединение является суммой в категории множеств, несвязная сумма — в категории топологических пространств, свободное произведение — в категории групп, прямая сумма — в категории R-модулей. В категории конечных множеств, вообще говоря, лишь конечное семейство имеет сумму. Аналогично, в категории конечно порожденных R-модулей, вообще говоря, лишь конечное семейство имеет сумму.

Двойственным образом, для заданного семейства $\{Y_j\}_{j \in J}$ объектов категории $\mathscr{C}$ определим категорию $\mathscr{P}\{Y_j\}$, считая ее объектами семейства морфизмов $\{g_j\}_{j \in J}$ категории $\mathscr{C}$ с одной и той же областью определения; морфизмом объекта $\{g_j\colon X \to Y_j\}$ в объект $\{g'_j\colon X' \to Y_j\}$ называется такой морфизм $f\colon X \to X'$ категории $\mathscr{C}$, что $g'_j f = g_j$ для всех $j \in J$. Терминальный объект категории $\mathscr{P}\{Y_j\}$ называется *произведением* семейства $\{Y_j\}$. В категории множеств произведением является прямое произведение множеств, в категории топологических пространств — топологическое произведение, в категории групп или R-модулей — прямое произведение. В категории конечных множеств (или конечно порожденных R-модулей), вообще говоря, лишь конечное семейство имеет произведение.

Прямым спектром $\{Y^\alpha, f_\alpha^\beta\}$ в категории $\mathscr{C}$ называется семейство объектов $\{Y^\alpha\}$ с индексами из направленного множества $\Lambda = \{\alpha\}$ и семейство морфизмов $\{f_\alpha^\beta\colon Y^\alpha \to Y^\beta\}$ из $\mathscr{C}$ (определенных при $\alpha \leqslant \beta$), для которых

(a) $f_\alpha^\alpha = 1_{Y^\alpha}\colon Y^\alpha \to Y^\alpha, \quad \alpha \in \Lambda$;

(b) $f_\alpha^\gamma = f_\beta^\gamma \circ f_\alpha^\beta\colon Y^\alpha \to Y^\gamma$ при $\alpha \leqslant \beta \leqslant \gamma \quad (\alpha, \beta, \gamma \in \Lambda)$.

Можно определить категорию $\operatorname{dir}\{Y^\alpha, f_\alpha^\beta\}$, объектами которой служат семейства морфизмов $\{g_\alpha\colon Y^\alpha \to Z\}_{\alpha\in\Lambda}$, таких, что $g_\alpha = g_\beta \circ f_\alpha^\beta$, если $\alpha \leqslant \beta$ $(\alpha, \beta \in \Lambda)$. В этой категории морфизмом объекта $\{g_\alpha\colon Y^\alpha \to Z\}$ в объект $\{g'_\alpha\colon Y^\alpha \to Z'\}$ называется такой морфизм $h\colon Z \to Z'$ категории $\mathscr{C}$, что $hg_\alpha = g'_\alpha$ $(\alpha \in \Lambda)$. Инициальный объект категории $\operatorname{dir}\{Y^\alpha, f_\alpha^\beta\}$ называется *пределом прямого спектра* $\{Y^\alpha, f_\alpha^\beta\}$. Пределы прямых спектров множеств, топологических пространств, групп и R-модулей являются примерами пределов прямых спектров в соответствующих категориях.

Двойственным образом, *обратным спектром* $\{Y_\alpha, f_\alpha^\beta\}$ в категории $\mathscr{C}$ называется семейство объектов $\{Y_\alpha\}$ с индексами из направленного множества $\Lambda = \{\alpha\}$ и семейство морфизмов $\{f_\alpha^\beta\colon Y_\beta \to Y_\alpha\}$ категории $\mathscr{C}$ (определенных, если $\alpha \leqslant \beta$), для которых

(a) $f_\alpha^\alpha = 1_{Y_\alpha}\colon Y_\alpha \to Y_\alpha$ для $\alpha \in \Lambda$;

(b) $f_\alpha^\gamma = f_\alpha^\beta \circ f_\beta^\gamma\colon Y_\gamma \to Y_\alpha$ при $\alpha \leqslant \beta \leqslant \gamma \quad (\alpha, \beta, \gamma \in \Lambda)$.

Можно определить категорию $\operatorname{inv}\{Y_\alpha, f_\alpha^\beta\}$, объектами которой являются занумерованные семейства таких морфизмов $\{g_\alpha\colon X \to Y_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$, что $g_\alpha = f_\alpha^\beta \circ g_\beta$, если $\alpha \leqslant \beta$ $(\alpha, \beta \in \Lambda)$, а морфизмом объекта $\{g_\alpha\colon X \to Y_\alpha\}$ в объект $\{g'_\alpha\colon X' \to Y_\alpha\}$ является морфизм $h\colon X \to X'$ категории $\mathscr{C}$, такой, что $g'_\alpha h = g_\alpha$ при $\alpha \in \Lambda$. Терминальный объект категории $\operatorname{inv}\{Y_\alpha, f_\alpha^\beta\}$ называется *пределом обратного спектра* $\{Y_\alpha, f_\alpha^\beta\}$. Пределы обратных спектров множеств, топологических пространств, групп и R-модулей являются примерами пределов обратных спектров в соответствующих категориях.

Аналогичным образом можно определить предел прямого или обратного спектра для произвольного семейства объектов категории $\mathscr{C}$ и выбранного семейства морфизмов категории $\mathscr{C}$ между этими объектами. Подробности мы опускаем.

§ 2. Функторы

При изучении категорий мы интересуемся главным образом отображениями одной категории в другую. Отображения, обладающие естественными свойствами сохранения единиц и композиций, называются функторами. В этом параграфе излагается определение функторов одного или более переменных, некоторые примеры и приложения и дается определение естественного преобразования функторов.

Пусть $\mathscr{C}$ и $\mathscr{D}$ — некоторые категории. *Ковариантным* (соответственно *контравариантным*) *функтором* T из $\mathscr{C}$ в $\mathscr{D}$ называется функция, которая каждому объекту X из $\mathscr{C}$ сопоставляет объект $T(X)$ из $\mathscr{D}$ и каждому морфизму $f\colon X \to Y$ из $\mathscr{C}$ — морфизм $T(f)\colon T(X) \to T(Y)$ (соответственно $T(f)\colon T(Y) \to T(X)$) из $\mathscr{D}$ таким образом, что имеют место следующие соотношения:

(a) $T(1_X) = 1_{T(X)}$;

(b) $T(gf) = T(g)\,T(f)$ (соответственно $T(gf) = T(f)\,T(g)$).

Приведем несколько примеров функторов:

1. Ковариантный функтор из категории топологических пространств и непрерывных отображений в категорию множеств и функций, сопоставляющий топологическому пространству множество составляющих его точек. Этот функтор называется *пренебрегающим функтором*, поскольку он «пренебрегает» структурой топологического пространства.

2. Ковариантный функтор из категории множеств и функций в категорию R-модулей и R-гомоморфизмов, сопоставляющий каждому множеству свободный R-модуль, порожденный этим множеством.

3. Зафиксировав R-модуль M_0, мы получим ковариантный (соответственно контравариантный) функтор из категории R-модулей и гомоморфизмов в ту же самую категорию, если поставим в соответствие R-модулю M R-модуль $\mathrm{Hom}_R(M_0, M)$ (соответственно $\mathrm{Hom}_R(M, M_0)$).

4. Для любой категории $\mathscr{C}$ и объекта Y из $\mathscr{C}$ можно определить ковариантный функтор π_Y (или контравариантный функтор π^Y) из категории $\mathscr{C}$ в категорию множеств и функций, поставив в соответствие объекту Z (или X) из $\mathscr{C}$ множество $\pi_Y(Z) = \mathrm{hom}(Y, Z)$ (или $\pi^Y(X) = \mathrm{hom}(X, Y)$), а морфизму $h\colon Z \to Z'$ (или $f\colon X \to X'$) — функцию

$$h_{\#}\colon \mathrm{hom}(Y, Z) \to \mathrm{hom}(Y, Z') \quad (\text{или } f^{\#}\colon \mathrm{hom}(X', Y) \to \mathrm{hom}(X, Y)),$$

где $h_{\#}(g) = h \circ g$ для $g\colon Y \to Z$ (или $f^{\#}(g') = g' \circ f$ для $g'\colon X' \to Y$).

5. Контравариантный функтор C из категории компактных хаусдорфовых пространств и непрерывных отображений в категорию нормированных колец над $\mathbf{R}$ и непрерывных гомоморфизмов, сопоставляющий пространству X нормированное кольцо непрерывных вещественнозначных функций на нем.

6. Можно определить ковариантный функтор H_0 из категории топологических пространств и непрерывных отображений в категорию абелевых групп и гомоморфизмов, такой, что $H_0(X)$ — свободная абелева группа, порожденная множеством компонент связности пространства X, а гомоморфизм $H_0(f)\colon H_0(X) \to H_0(Y)$ получается следующим образом: если C — компонента связности пространства X, а C' — компонента связности пространства Y, содержащая $f(C)$, то $H_0(f)(C) = C'$.

7. Прямой спектр (соответственно обратный спектр) в категории $\mathscr{C}$ есть ковариантный (соответственно контравариантный) функтор из категории направленных множеств (определенных, как в примере 1.1.11) в категорию $\mathscr{C}$.

8. Для всякой категории $\mathscr{C}$ определен контравариантный функтор из $\mathscr{C}$ в дуальную категорию $\mathscr{C}^*$, сопоставляющий объекту X из $\mathscr{C}$ объект X^* из $\mathscr{C}^*$, а морфизму $f\colon X \to Y$ из $\mathscr{C}$ — морфизм $f^*\colon Y^* \to X^*$ из $\mathscr{C}^*$.

Заметим, что каждому контравариантному функтору на $\mathscr{C}$ соответствует ковариантный функтор на $\mathscr{C}^*$, и обратно. Следовательно, каждый функтор можно рассматривать как ковариантный функтор на соответствующей категории. Несмотря на это, нам удобнее рассматривать как ковариантные, так и контравариантные функторы на одной и той же категории $\mathscr{C}$, чем только ковариантные функторы на двух разных категориях.

Каждый функтор из категории топологических пространств и непрерывных отображений в некоторую алгебраическую категорию (такую, как категория абелевых групп и гомоморфизмов) заменяет топологическую категорию на алгебраическую. Алгебраическая топология и занимается изучением таких функторов; мы покажем, как простые замечания о таких функторах могут быть использованы для получения необходимых условий разрешимости топологических проблем.

9. Теорема. *Пусть T — функтор из категории $\mathscr{C}$ в категорию $\mathscr{D}$. Тогда T переводит эквивалентность в категории $\mathscr{C}$ в эквивалентность в категории $\mathscr{D}$.*

Доказательство. Предположим, что T — ковариантный функтор (доказательство в случае контравариантного функтора совершенно аналогично). Пусть $f\colon X \to Y$ — эквивалентность в $\mathscr{C}$. Тогда $f^{-1}f = 1_X$. Следовательно,

$$1_{T(X)} = T(1_X) = T(f^{-1})\,T(f).$$

Аналогично, $T(f)\,T(f^{-1}) = 1_{T(Y)}$. Таким образом, морфизм $T(f^{-1})$ является двусторонне обратным к $T(f)$ и, следовательно, $T(f)$ — эквивалентность в $\mathscr{D}$. ■

В частности, если T — алгебраический функтор на категории топологических пространств и непрерывных отображений, то необходимым условием гомеоморфности пространств X и Y является эквивалентность объектов $T(X)$ и $T(Y)$. Таким образом, благодаря функтору H_0 из примера 6 мы видим, что прямая линия $\mathbf{R}$ и плоскость $\mathbf{R}^2$ не гомеоморфны (если бы они были гомеоморфны, то $\mathbf{R}-0$ было бы гомеоморфно $\mathbf{R}^2-p$ для некоторой точки $p \in \mathbf{R}^2$; но $H_0(\mathbf{R}-0)$ — свободная абелева группа с двумя образующими, в то время как группа $H_0(\mathbf{R}^2-p)$ имеет лишь одну образующую). Этот пример тривиален. Однако в гл. 4 мы введем гомологические функторы H_q, являющиеся обобщением функтора H_0, которые можно фактически тем же способом использовать для доказательства негомеоморфности пространств $\mathbf{R}^n$ и $\mathbf{R}^m$ при $n \neq m$.

При применении алгебраических функторов к топологическим задачам алгебраическая структура часто будет играть существенную роль. Например, пусть функтор T_0 получен композицией функтора H_0 и пренебрегающего функтора, который сопоставляет каждой абелевой группе множество ее элементов. Функтор T_0 доставляет меньше информации и не дает достаточно сильного необходимого условия гомеоморфности (например, $T_0(\mathbf{R}-0)$ и $T_0(\mathbf{R}^2-p)$ — счетные бесконечные множества, эквивалентные в категории множеств и функций). По этой причине важно рассматривать функторы, использующие как можно больше разнообразных алгебраических структур. В дальнейшем мы будем рассматривать функторы, зависящие от данного топологического пространства. Эти функторы принимают значения в категории множеств и функций, но некоторые из них, зависящие от специальных свойств определяющих их пространств, являются функторами в категорию групп и гомоморфизмов. Будет показано, что эта дополнительная алгебраическая структура во многих случаях весьма полезна.

Покажем, как можно применять функторы к задачам другого рода. Пусть A — подпространство топологического пространства X, и пусть $f\colon A \to Y$ — непрерывное отображение. *Задача продолжения* состоит в том, чтобы выяснить, имеет ли отображение f непрерывное продолжение на все X; другими словами, можно ли построить непрерывное отображение, показанное пунктирной стрелкой:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, phantom, "\subset"] \arrow[dr, "f"'] & X \arrow[d, dashed] \\ & Y \end{tikzcd}$$

чтобы эта диаграмма стала коммутативной.

10. Теорема. *Пусть T — ковариантный (или контравариантный) функтор из категории топологических пространств и непрерывных отображений в некоторую категорию $\mathscr{C}$. Необходимым условием* *того, чтобы отображение* $f\colon A \to Y$ (*где* $i\colon A \subset X$) *можно было продолжить на все* X, *является существование морфизма* $\varphi\colon T(X) \to T(Y)$ (*или* $\varphi\colon T(Y) \to T(X)$), *такого, что* $\varphi \circ T(i) = T(f)$ (*или* $T(f) = T(i) \circ \varphi$).

Доказательство. Предположим, что $f'\colon X \to Y$ — продолжение отображения f. Тогда $f'i = f$. Следовательно, $T(f') \circ T(i) = T(f)$ (или $T(i) \circ T(f') = T(f)$) и, значит, в качестве морфизма φ можно взять $T(f')$. ■

Этот результат можно использовать для доказательства того, что тождественное отображение пространства $\dot{I}$ нельзя продолжить до непрерывного отображения $I \to \dot{I}$. Используя функтор H_0, получаем, что необходимым условием является существование гомоморфизма $\varphi\colon H_0(I) \to H_0(\dot{I})$, такого, что $\varphi \circ H_0(i) = H_0(1_{\dot{I}})$ (где $i\colon \dot{I} \subset I$). Поскольку $H_0(\dot{I})$ — свободная абелева группа с двумя образующими, а $H_0(I)$ — свободная абелева группа с одной образующей, такого гомоморфизма не существует. Этот пример тоже тривиален, но на нем хорошо видно, как работает метод. Общие гомологические функторы H_q, определение которых будет дано позднее, можно аналогичным образом использовать для доказательства того, что не существует непрерывного отображения $E^{n+1} \to S^n$, тождественного на сфере S^n.

Итак, функторы позволяют получить необходимые условия разрешимости топологических задач. Иногда возникает ситуация, когда эти необходимые условия являются также и достаточными. Например, функтор C из примера 5 дает необходимые и достаточные условия гомеоморфности: два компактных хаусдорфовых пространства гомеоморфны тогда и только тогда, когда кольца $C(X)$ и $C(Y)$ изоморфны[1]. Этот результат не особенно полезен, поскольку установить изоморфность или неизоморфность двух нормированных колец вряд ли проще, чем определить, гомеоморфны или нет два компактных хаусдорфовых пространства. Мы ищем функторы в такие категории, которые устроены до некоторой степени проще, чем категория топологических пространств, так чтобы алгебраические проблемы, возникающие в таких категориях, могли быть эффективно разрешены. Одной из основных проблем алгебраической топологии является нахождение достаточно большого количества таких функторов, чтобы разрешимость частной топологической задачи была эквивалентна разрешимости соответствующих (более простых) алгебраических задач.

---

[1]) См. теорему D на стр. 330 книги: Simmons G. F., Introduction to Topology and Modern Analysis, New York, 1963. [См. также Гельфанд И. М., Райков Д. А. и Шилов Г. Е., Коммутативные нормированные кольца, М., 1960. — *Прим. перев.*]

Для того чтобы иметь возможность сравнивать функторы один с другим, удобно дать подходящее определение отображения функторов. Пусть T_1 и T_2 — функторы одного и того же типа (т. е. оба ковариантные или контравариантные) из категории $\mathscr{C}$ в категорию $\mathscr{D}$. *Естественным преобразованием* φ функтора T_1 в функтор T_2 называется соответствие между объектами категории $\mathscr{C}$ и морфизмами категории $\mathscr{D}$, такое, что для каждого морфизма $f\colon X \to Y$ категории $\mathscr{C}$ одна из двух следующих диаграмм:

$$\begin{tikzcd} T_1(X) \arrow[r, "T_1(f)"] \arrow[d, "\varphi(X)"'] & T_1(Y) \arrow[d, "\varphi(Y)"] \\ T_2(X) \arrow[r, "T_2(f)"] & T_2(Y) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} T_1(X) \arrow[d, "\varphi(X)"'] & T_1(Y) \arrow[l, "T_1(f)"'] \arrow[d, "\varphi(Y)"] \\ T_2(X) & T_2(Y) \arrow[l, "T_2(f)"'] \end{tikzcd}$$

T_1 и T_2 ковариантны, *T_1 и T_2 контравариантны*

соответствующая рассматриваемому случаю, коммутативна.

Если φ — естественное преобразование функтора T_1 в функтор T_2, такое, что морфизм $\varphi(X)$ является эквивалентностью в $\mathscr{D}$ для каждого объекта X из $\mathscr{C}$, то φ называется *естественной эквивалентностью.*

Рассмотрим, например, объекты Y_1 и Y_2 категории $\mathscr{C}$ и некоторый морфизм $g\colon Y_1 \to Y_2$. В этом случае имеется естественное преобразование $g^{\#}$ ковариантного функтора π_{Y_2} в ковариантный функтор π_{Y_1} и естественное преобразование $g_{\#}$ контравариантного функтора π^{Y_1} в контравариантный функтор π^{Y_2}. Если g — эквивалентность в $\mathscr{C}$, то оба эти преобразования являются естественными эквивалентностями.

Интересно также рассматривать функторы от многих переменных. Пусть $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$ и $\mathscr{D}$ — категории; ковариантный функтор из $\mathscr{C}_1 \times \mathscr{C}_2$ в $\mathscr{D}$ называется *функтором от двух переменных, ковариантным* по каждому из них. Ковариантный функтор из категории $\mathscr{C}_1 \times \mathscr{C}_2$ в категорию $\mathscr{D}$, рассматриваемый как функция, определенная на упорядоченных парах (X_1, X_2), где X_1 — объект из $\mathscr{C}_1$, а X_2 — объект из $\mathscr{C}_2$, называется *функтором от двух переменных, ковариантным* по первому и *контравариантным* по второму переменному. Аналогичным образом можно определить функторы многих переменных, ковариантные по одним и контравариантные по другим переменным.

Для произвольной категории $\mathscr{C}$ можно построить функтор от двух переменных из $\mathscr{C}$ в категорию множеств и функций, контравариантный по первому аргументу и ковариантный по второму. Этот функтор ставит в соответствие упорядоченной паре объектов X и Y из $\mathscr{C}$ множество $\hom(X, Y)$, а упорядоченной паре морфизмов $f\colon X' \to X$ и $g\colon Y \to Y'$ функцию $f^{\#}g_{\#} = g_{\#}f^{\#}\colon \hom(X, Y) \to \hom(X', Y')$.

§ 3. Гомотопия

Проблему классификации топологических пространств и непрерывных отображений с точностью до топологической эквивалентности невозможно, по-видимому, решить, непосредственно используя вычислимые алгебраические функторы, подобные тем, которые были определены в § 1.2[1]). Большинство вычислимых функторов именно в силу своей вычислимости инвариантно относительно непрерывных деформаций. Таким образом, эти функторы не различают пространств (и отображений), которые можно непрерывно деформировать друг в друга; самое большее, на что можно надеяться, — что такие функторы характеризуют пространства и отображения с точностью до непрерывной деформации.

Интуитивное представление о непрерывной деформации мы уточним в этом параграфе с помощью понятия гомотопии. Это приведет нас к категории гомотопических типов, имеющей важное значение для алгебраической топологии. Ее объектами служат топологические пространства, а морфизмами — классы эквивалентности непрерывных отображений (два отображения считаются эквивалентными, если их можно продеформировать друг в друга). Из технических соображений мы будем рассматривать не только категорию гомотопических типов топологических пространств, но и более широкую категорию гомотопических типов пар.

Парой топологических пространств (X, A) называется пара, состоящая из топологического пространства X и его подпространства $A \subset X$. Если подпространство A пусто ($A = \varnothing$), то мы не будем различать пару (X, A) и пространство X. *Подпарой* $(X', A') \subset (X, A)$ называется пара, для которой $X' \subset X$ и $A' \subset A$. *Отображением пар* f: $(X, A) \to (Y, B)$ называется непрерывное отображение f: $X \to Y$, такое, что $f(A) \subset B$. Таким образом, как и в § 1.1, мы получаем категорию пар топологических пространств и непрерывных отображений пар, содержащую в качестве полных подкатегорий категорию топологических пространств и непрерывных отображений и категорию пространств с отмеченной точкой и непрерывных отображений, сохраняющих отмеченную точку.

Для пары (X, A) через $(X, A) \times I$ мы будем обозначать пару $(X \times I, A \times I)$. Пусть $X' \subset X$; предположим, что два отображения f_0, f_1: $(X, A) \to (Y, B)$ совпадают на X' (т. е. $f_0 | X' = f_1 | X'$).

[1]) Здесь, по-видимому, небесполезно спросить, насколько оправдана сама постановка вопроса о топологической классификации. На наш взгляд, проблема топологической классификации просто бессмысленна для топологических пространств достаточно общей природы, но ее постановка имела громадное значение, так как в результате стало ясно, какие проблемы этого направления действительно имеют смысл. В частности, это привело к пониманию того, что вычислимость алгебраических функторов есть следствие их приспособленности для решения гораздо более «грубых» задач и что поэтому именно такие задачи и надо решать. — *Прим. ред.*

В таком случае отображение f_0 называется *гомотопным отображению* f_1 *относительно* X' (обозначается $f_0 \simeq f_1 \operatorname{rel} X'$), если существует отображение

$$F\colon (X,\ A) \times I \to (Y,\ B),$$

для которого $F(x, 0) = f_0(x)$, $F(x, 1) = f_1(x)$ при $x \in X$ и $F(x, t) = f_0(x)$ при $x \in X'$ и $t \in I$. Такое отображение F называется *гомотопией относительно* X' между отображениями f_0 и f_1 (обозначается $F\colon f_0 \simeq f_1 \operatorname{rel} X'$). Если $X' = \varnothing$, то мы будем опускать слова «относительно $\varnothing$». Ясно, что если $f_0 \simeq f_1 \operatorname{rel} X'$, то $f_0 \simeq f_1 \operatorname{rel} X''$ для любого $X'' \subset X'$. Отображение пространства X в пространство Y называется *гомотопным нулю*, или *несущественным*, если оно гомотопно некоторому постоянному отображению.

Для всякого $t \in I$ формула $h_t(x) = (x, t)$ определяет отображение $h_t\colon (X, A) \to (X, A) \times I$. Если $F\colon f_0 \simeq f_1 \operatorname{rel} X'$, то $Fh_0 = f_0$, $Fh_1 = f_1$ и $Fh_t | X' = f_0 | X'$ для всех $t \in I$. Значит, совокупность отображений $\{Fh_t\}_{t \in I}$ является однопараметрическим семейством отображений[1]) пары (X, A) в (Y, B), совпадающих на X' и переводящих отображение $f_0 = Fh_0$ в отображение $f_1 = Fh_1$. Следовательно, гомотопия $f_0 \simeq f_1 \operatorname{rel} X'$ соответствует интуитивному представлению о непрерывной деформации отображения f_0 в отображение f_1 с помощью отображений, совпадающих на X'. Заметим, что если $f_0 \simeq f_1 \operatorname{rel} X'$, то обычно существует много отображений F, осуществляющих гомотопию между f_0 и f_1 относительно X' (см. пример 3 ниже).

1. Пример. Пусть $X = Y = \mathbf{R}^n$, и пусть $f_0(x) = x$, $f_1(x) = 0$ при $x \in \mathbf{R}^n$ (т. е. $f_0 = 1_{\mathbf{R}^n}$, а f_1 — постоянное отображение пространства $\mathbf{R}^n$ в его начало координат). Если определить отображение $F\colon \mathbf{R}^n \times I \to \mathbf{R}^n$ по формуле

$$F(x,\ t) = (1 - t)\, x,$$

то $F\colon f_0 \simeq f_1 \operatorname{rel} 0$.

2. Пример. Пусть $X = Y = I$, и пусть $f_0(t) = t$, $f_1(t) = 0$ при $t \in I$. Если отображение $F\colon I \times I \to I$ определить по формуле

$$F(t,\ t') = (1 - t')\, t,$$

то $F\colon f_0 \simeq f_1 \operatorname{rel} 0$.

---

[1]) Однопараметрическое семейство отображений $f_t\colon (X, A) \to (Y, B)$ $(t \in I)$ называется *непрерывным*, если функция $f_t(x)$ непрерывна как функция переменных x и t, и в этом случае отображение $(x, t) \to f_t(x)$ является гомотопией, связывающей f_0 и f_1. Соответствующее отображение $t \to f_t$ отрезка I в пространство $(Y, B)^{(X,\ A)}$ всегда непрерывно (пространство $(Y, B)^{(X,\ A)} = \{g\colon (X, A) \to (Y, B)\}$ наделено компактно-открытой топологией). Обратно, если X — локально компактное хаусдорфово пространство, то, как вытекает из теоремы 2.8 введения, для любого непрерывного отображения $\varphi\colon I \to (Y, B)^{(X,\ A)}$ однопараметрическое семейство $\varphi(t)$ непрерывно и определяет гомотопию, связывающую отображения $\varphi(0)$ и $\varphi(1)$.

3. Пример. Пусть $X = Y = E^2 = \{z \in \mathbf{C} \mid z = re^{i\theta},\ 0 \leqslant r \leqslant 1\}$, и пусть $A = B = S^1 = \{z \in \mathbf{C} \mid z = e^{i\theta}\}$. Предположим, что $f_0\colon (E^2, S^1) \to (E^2, S^1)$ — тождественное отображение, и пусть $f_1\colon (E^2, S^1) \to (E^2, S^1)$ — антиподальное отображение (т. е. $f_1(re^{i\theta}) = re^{i(\theta+\pi)}$). Определим гомотопию $F\colon f_0 \simeq f_1 \operatorname{rel} 0$ формулой $F(re^{i\theta}, t) = re^{i(\theta+t\pi)}$. Другую гомотопию $F'\colon f_0 \simeq f_1 \operatorname{rel} 0$ можно определить формулой $F'(re^{i\theta}, t) = re^{i(\theta-t\pi)}$.

4. Пример. Пусть X — произвольное пространство, а Y — выпуклое подмножество пространства $\mathbf{R}^n$. Пусть два отображения $f_0, f_1\colon X \to Y$ совпадают на некотором подпространстве $X' \subset X$. Тогда $f_0 \simeq f_1 \operatorname{rel} X'$, так как отображение $F\colon X \times I \to Y$, определенное формулой

$$F(x, t) = tf_1(x) + (1 - t) f_0(x),$$

является гомотопией между f_0 и f_1 относительно X'.

Пример 4 является обобщением примеров 1 и 2. В примере 3 пространство E^2 выпукло, однако этот пример нельзя рассматривать как частный случай примера 4, поскольку множество S^1 на каждом шаге должно отображаться в себя, а оно не является выпуклым множеством.

Для определения категории гомотопических типов нам понадобятся следующие простые результаты.

5. Теорема. *Гомотопия относительно X' является отношением эквивалентности на множестве отображений пары (X, A) в пару (Y, B).*

Доказательство. *Рефлексивность.* Для $f\colon (X, A) \to (Y, B)$ определим отображение $F\colon f \simeq f \operatorname{rel} X'$, полагая $F(x, t) = f(x)$.

Симметричность. Если $F\colon f_0 \simeq f_1 \operatorname{rel} X'$, то определим отображение $F'\colon f_1 \simeq f_0 \operatorname{rel} X'$, полагая $F'(x, t) = F(x, 1 - t)$.

Транзитивность. Если $F\colon f_0 \simeq f_1 \operatorname{rel} X'$ и $G\colon f_1 \simeq f_2 \operatorname{rel} X'$, то определим $H\colon f_0 \simeq f_2 \operatorname{rel} X'$ формулой

$$H(x, t) = \begin{cases} F(x, 2t), & 0 \leqslant t \leqslant 1/2, \\ G(x, 2t - 1), & 1/2 \leqslant t \leqslant 1. \end{cases}$$

Заметим, что отображение H непрерывно, поскольку его ограничение на каждое из замкнутых множеств $X \times [0, 1/2]$ и $X \times [1/2, 1]$ непрерывно. ∎

Отсюда вытекает, что множество отображений (X, A) в (Y, B) разбивается на непересекающиеся классы эквивалентности по отношению гомотопности относительно X'. Эти классы эквивалентности называются *гомотопическими классами относительно X'*; множество этих классов обозначим $[X, A; Y, B]_{X'}$. Если задано отображение $f\colon (X, A) \to (Y, B)$, то через $[f]_{X'}$ мы обозначим элемент множества $[X, A; Y, B]_{X'}$, определенный отображением f. При обозначении гомотопических классов относительно пустого множества индекс $\varnothing$ будет опускаться.

6. Теорема. *Композиции гомотопных отображений гомотопны.*

Доказательство. Пусть отображения $f_0, f_1\colon (X, A)\to(Y, B)$ гомотопны относительно X', и пусть отображения $g_0, g_1\colon (Y, B)\to\to(Z, C)$ гомотопны относительно Y', причем $f_1(X')\subset Y'$. Пусть $F\colon f_0\simeq f_1 \operatorname{rel} X'$ и $G\colon g_0\simeq g_1 \operatorname{rel} Y'$ — соответствующие гомотопии. Покажем, что отображения g_0f_0, $g_1f_1\colon (X, A)\to(Z, C)$ гомотопны относительно X'. Композиция

$$(X,\ A)\times I\xrightarrow{F}(Y,\ B)\xrightarrow{g_0}(Z,\ C)$$

является гомотопией между отображениями g_0f_0 и g_0f_1 относительно X', а композиция

$$(X,\ A)\times I\xrightarrow{f_1\times 1_I}(Y,\ B)\times I\xrightarrow{G}(Z,\ C)$$

представляет собой гомотопию между отображениями g_0f_1 и g_1f_1 относительно $f_1^{-1}(Y')$. Поскольку $X'\subset f_1^{-1}(Y')$, мы получаем, что $g_0f_0\simeq g_0f_1 \operatorname{rel} X'$ и $g_0f_1\simeq g_1f_1 \operatorname{rel} X'$. Утверждение теперь вытекает из теоремы 5. ∎

Теорема 6 показывает, что можно определить *категорию гомотопических типов пар*, объектами которой служат пары топологических пространств, а морфизмами — гомотопические классы отображений (относительно пустого множества). Эта категория содержит в качестве полной подкатегории *категорию гомотопических типов топологических пространств* (сокращенно — *категорию гомотопических типов*) и *категорию гомотопических типов топологических пространств с отмеченной точкой.* Можно определить ковариантный функтор из категории пар и непрерывных отображений в категорию гомотопических типов пар, переводящий каждую пару в себя и ставящий в соответствие каждому отображению f его гомотопический класс $[f]$. Как было замечено в начале этого параграфа, большинство рассматриваемых нами алгебраических функторов будет определено в соответствующей категории гомотопических типов. Диаграмма пар топологических пространств и отображений называется *гомотопически коммутативной*, если ее можно превратить в коммутативную диаграмму в категории гомотопических типов (т. е. когда каждое отображение заменяется его гомотопическим классом).

Как и в примере 1.2.4, для любой пары (P, Q) существует ковариантный функтор $\pi_{(P,\,Q)}$ (или контравариантный функтор $\pi^{(P,\,Q)}$) из категории гомотопических типов пар в категорию множеств и функций: $\pi_{(P,\,Q)}(X,\ A)=[P,\ Q;\ X,\ A]$ (или $\pi^{(P,\,Q)}(X,\ A)=$

$=[X, A; P, Q])$ и $\pi_{(P, Q)}([f])=f_{\#}$ (или $\pi^{(P, Q)}([f])=f^{\#}$) для отображения $f\colon (X, A)\to(Y, B)$, где $f_{\#}[g]=[fg]$ для $g\colon (P, Q)\to(X, A)$ (или $f^{\#}[h]=[hf]$ для $h\colon (Y, B)\to(P, Q)$). Для всякого отображения $\alpha\colon (P, Q)\to(P', Q')$ можно определить естественное преобразование $\alpha^{\#}$ функтора $\pi_{(P', Q')}$ в функтор $\pi_{(P, Q)}$ и естественное преобразование $\alpha_{\#}$ функтора $\pi^{(P, Q)}$ в функтор $\pi^{(P', Q')}$.

Отображение $f\colon (X,A)\to(Y,B)$ называется *гомотопической эквивалентностью*, если $[f]$ является эквивалентностью в категории гомотопических типов пар. Отображение $g\colon (Y,B)\to(X,A)$ называется *гомотопически обратным* к f, если в категории гомотопических типов пар имеет место равенство $[g]=[f]^{-1}$. Говорят, что пары (X,A) и (Y,B) имеют *один и тот же гомотопический тип*, если они эквивалентны в категории гомотопических типов пар.

Самое простое непустое пространство состоит из одной точки. Охарактеризуем гомотопический тип такого пространства следующим образом. Топологическое пространство X называется *стягиваемым*, если тождественное отображение пространства X гомотопно некоторому постоянному отображению пространства X в себя. Гомотопия отображения 1_X в постоянное отображение пространства X в точку $x_0\in X$ называется *стягиванием* пространства X в точку x_0. Примеры 1 и 2 показывают, что пространства $\mathbf{R}^n$ и I стягиваемы; пример 4 показывает, что любое выпуклое подмножество пространства $\mathbf{R}^n$ стягиваемо. Следующую лемму можно рассматривать как обобщение примера 4.

7. Лемма. *Любые два отображения произвольного пространства в стягиваемое пространство гомотопны.*

Доказательство. Пусть Y — стягиваемое пространство, и пусть $1_Y\simeq c$, где c — некоторое постоянное отображение пространства Y в себя. Пусть $f_0, f_1\colon X\to Y$ — произвольные отображения. Из теоремы 6 получаем, что $f_0=1_Yf_0\simeq cf_0$ и аналогично $f_1\simeq cf_1$. Поскольку $cf_0=cf_1$, из теоремы 5 следует, что $f_0\simeq f_1$. ■

8. Следствие. *Если пространство Y стягиваемо, то любые два постоянных отображения Y в себя гомотопны, а тождественное отображение гомотопно любому постоянному отображению Y в себя.* ■

Интересно заметить, что лемму 7 нельзя распространить на случай относительных гомотопий. Другими словами, если f_0 и f_1 — некоторые отображения X в стягиваемое пространство Y, совпадающие на $X'\subset X$, то не всегда $f_0\simeq f_1 \operatorname{rel} X'$ (хотя пример 4 показывает, что для выпуклых подмножеств пространства $\mathbf{R}^n$ это верно). Следующий пример иллюстрирует этот факт. Позже мы к нему еще вернемся.

9. Пример. *Гребенкой* Y (рис. 1) называется пространство

$$Y=\{(x, y)\in \mathbf{R}^2 \mid 0\leqslant y\leqslant 1,\ x=0, \tfrac{1}{n}\ n=1, 2,\dots, \text{ или } y=0,\ 0\leqslant x\leqslant 1\}.$$

Пусть отображение F: $Y\times I\to Y$ определено формулой $F((x, y), t) = (x, (1-t)y)$. Тогда F есть гомотопия тождественного отображения 1_Y в проекцию пространства Y на ось абсцисс. Поскольку последнее отображение гомотопно постоянному отображению, пространство Y стягиваемо. Пусть c: $Y\to Y$ — постоянное отображение

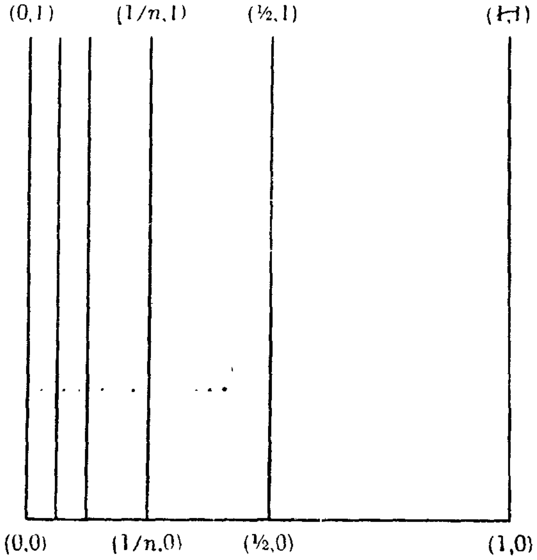


Рис. 1. Гребенка.

в точку $(0, 1)$. Согласно следствию 8, имеет место соотношение $1_Y\simeq c$, но, хотя эти отображения и совпадают в точке $(0, 1)$, не существует соединяющей их гомотопии относительно $(0, 1)$.

Следующая теорема показывает, что стягиваемые пространства являются гомотопически простейшими пространствами.

10. Теорема. *Пространство стягиваемо тогда и только тогда, когда оно имеет гомотопический тип одноточечного пространства.*

Доказательство. Предположим, что X стягиваемо, и пусть F: $X\times I\to X$ — стягивание X в некоторую точку $x_0\in X$. Пусть P — одноточечное пространство, состоящее из точки x_0, и пусть f: $X\to P$ и j: $P\subset X$. Тогда $fj = 1_P$ и F: $1_X\simeq jf$. Следовательно, $[j]=[f]^{-1}$ и f является гомотопической эквивалентностью между X и P.

Обратно, если X имеет тот же гомотопический тип, что и одноточечное пространство P, то пусть $f\colon X \to P$ — некоторая гомотопическая эквивалентность, а $g\colon P \to X$ — гомотопически обратное к ней отображение. В таком случае $1_X \simeq gf$. Поскольку отображение gf постоянно, пространство X стягиваемо. ■

11. Следствие. *Любые два стягиваемых пространства имеют один и тот же гомотопический тип, а всякое непрерывное отображение одного стягиваемого пространства в другое является гомотопической эквивалентностью.*

Доказательство. Первая часть вытекает из теоремы 10 и транзитивности свойства иметь один и тот же гомотопический тип. Вторая часть вытекает из первой части и леммы 7 (а также из очевидного факта, что любое отображение, гомотопное гомотопической эквивалентности, само является гомотопической эквивалентностью). ■

Следующий результат устанавливает важную связь между гомотопией и продолжимостью отображений.

12. Теорема. *Пусть $p_0 \in S^n$, и пусть $f\colon S^n \to Y$ — некоторое отображение. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(a) *f гомотопно постоянному отображению;*

(b) *f можно непрерывно продолжить на весь шар E^{n+1};*

(c) *f гомотопно постоянному отображению относительно p_0.*

Доказательство. (a)$\Rightarrow$(b). Пусть $F\colon f \simeq c$, где c — некоторое постоянное отображение сферы S^n в $y_0 \in Y$. Определим продолжение f' отображения f на E^{n+1}, полагая

$$f'(x) = \begin{cases} y_0, & 0 \leqslant \|x\| \leqslant \frac{1}{2}, \\ F\left(\frac{x}{\|x\|},\ 2 - 2\|x\|\right), & \frac{1}{2} \leqslant \|x\| \leqslant 1. \end{cases}$$

Поскольку $F(x, 1) = y_0$ для всех $x \in S^n$, отображение f' определено корректно. Оно непрерывно, так как его ограничение на каждое из замкнутых множеств $\{x \in E^{n+1} \mid 0 \leqslant \|x\| \leqslant 1/2\}$ и $\{x \in E^{n+1} \mid 1/2 \leqslant \|x\| \leqslant 1\}$ непрерывно. Поскольку $F(x, 0) = f(x)$ при $x \in S^n$, мы имеем $f' \mid S^n = f$, и, следовательно, f' является непрерывным продолжением отображения f на E^{n+1}.

(b) $\Rightarrow$ (c). Если f имеет непрерывное продолжение $f'\colon E^{n+1} \to Y$, то определим отображение $F\colon S^n \times I \to Y$ формулой

$$F(x, t) = f'((1 - t)x + tp_0).$$

Тогда $F(x, 0) = f'(x) = f(x)$ и $F(x, 1) = f'(p_0)$ при $x \in S^n$. Поскольку $F(p_0, t) = f'(p_0)$ при $t \in I$, отображение F является гомотопией относительно p_0 между f и постоянным отображением в точку $f'(p_0)$.

(c) $\Rightarrow$ (a). Это очевидно. ■

Теорема 12 в сочетании с леммой 7 дает такой результат:

13. Следствие. *Всякое непрерывное отображение сферы S^n в стягиваемое пространство можно непрерывно продолжить на весь шар E^{n+1}.* ■

§ 4. Ретракция и деформация

Этот параграф в основном посвящен отображениям вложения. Мы выясним, имеет ли такое отображение левое обратное, правое обратное или двусторонне обратное отображение в категории топологических пространств и непрерывных отображений или в категории гомотопических типов[1]).

Подпространство A топологического пространства X называется *ретрактом* пространства X, если для вложения $i\colon A \subset X$ существует левый обратный в категории топологических пространств и непрерывных отображений. Следовательно, A тогда и только тогда является ретрактом пространства X, когда существует непрерывное отображение $r\colon X \to A$, такое, что $ri = 1_A$ (т. е. $r(x) = x$ при $x \in A$). Такое отображение r называется *ретракцией* X на A.

Подпространство A пространства X называется *слабым ретрактом* пространства X, если вложение $i\colon A \subset X$ имеет левый гомотопически обратный (т. е. левый обратный элемент в категории гомотопических типов). Следовательно, A тогда и только тогда является слабым ретрактом пространства X, когда существует непрерывное отображение $r\colon X \to A$, такое, что $ri \simeq 1_A$. Это отображение называется *слабой ретракцией* X на A.

Одноточечное пространство является ретрактом любого содержащего его пространства. Дискретное пространство, состоящее более чем из одной точки, не может являться слабым ретрактом никакого содержащего его связного пространства. Если подпространство A есть ретракт пространства X, то оно является и слабым ретрактом X. Обратное неверно, как видно из следующего примера:

1. Пример. Пусть X — замкнутый единичный квадрат I^2 на плоскости $\mathbf{R}^2$, и пусть A — гребенка из примера 1.3.9. Тогда оба про-

---

[1]) Многие результаты этого параграфа можно найти в статье: Fox R. H., On homotopy type and deformation retracts, *Ann. Math.*, **44** (1943), 40—50 [см. также Samelson H., Remark on a paper by R. H. Fox, *Ann. Math.*, **45** (1944), 448—449]. [На русском языке изложение этих вопросов можно найти в книге: Ху Сы-цзян, Теория гомотопий, гл. I, М., 1964. — *Прим. перев.*]

странства X и A стягиваемы, и, согласно следствию 1.3.11, вложение $i\colon A \subset X$ является гомотопической эквивалентностью. Следовательно, A — слабый ретракт X. Однако можно доказать, что A не является ретрактом X.

Несмотря на то что, вообще говоря, слабый ретракт не является ретрактом, для некоторых подпространств A пространства X эти два понятия совпадают. Так как эта ситуация встречается довольно часто, естественно рассмотреть ее особо. Пусть (X, A) — некоторая пара, а Y — некоторое пространство. Говорят, что пара (X, A) обладает *свойством продолжения гомотопии относительно* Y, если для любых отображений $g\colon X \to Y$ и $G\colon A \times I \to Y$, таких, что $g(x) = G(x, 0)$ для $x \in A$, существует отображение $F\colon X \times I \to Y$, такое, что $F(x, 0) = g(x)$ для $x \in X$ и $F|A \times I = G$. Если рассматривать g как отображение $X \times 0 \to Y$, то существование F равносильно существованию отображения, соответствующего пунктирной стрелке:

$$\begin{tikzcd} A \times 0 \arrow[rr, phantom, "\subset"] \arrow[d, phantom, "\cap"] & & A \times I \arrow[dl, "G"'] \arrow[d, phantom, "\cap"] \\ {} & Y & {} \\ X \times 0 \arrow[ur, "g"] \arrow[rr, phantom, "\subset"] & & X \times I \arrow[ul, dashed] \end{tikzcd}$$

такого, что эта диаграмма коммутативна.

Если пара (X, A) обладает свойством продолжения гомотопии относительно Y и отображения $f_0, f_1\colon A \to Y$ гомотопны, причем f_0 можно продолжить на все X, то и f_1 можно продолжить на все X. Действительно, пусть $g\colon X \to Y$ — продолжение отображения f_0, а $G\colon A \times I \to Y$ — гомотопия между f_0 и f_1. Тогда из свойства продолжения гомотопии вытекает существование отображения $F\colon X \times I \to Y$, которое служит продолжением G, и, следовательно, $F(x, 1)$ — продолжение отображения f_1. Отсюда вытекает, что возможность продолжения отображения $A \to Y$ на все X зависит только от гомотопического класса этого отображения. Следовательно, задачу продолжения отображения $A \to Y$ естественно рассматривать в категории гомотопических типов.

Особенно важен случай, когда пара (X, A) удовлетворяет условию продолжения гомотопии относительно любого пространства. Более общо, назовем отображение $f\colon X' \to X$ *корасслоением*, если для любых отображений $g\colon X \to Y$ и $G\colon X' \times I \to Y$ (где Y произвольно), таких, что $g(f(x')) = G(x', 0)$ при $x' \in X'$, существует отображение $F\colon X \times I \to Y$, для которого $F(x, 0) = g(x)$ при $x \in X$ и $F(f(x'), t) = G(x', t)$ при $x' \in X'$, $t \in I$. Если g рассматривать как отображение $X \times 0 \to Y$, то существование F равносильно существованию отображения, представленного пунктирной стрелкой:

$$\begin{tikzcd}
X' \times 0 \arrow[rr, phantom, "\subset"] \arrow[dd, "f \times 1_0"'] & & X' \times I \arrow[dl, "G"'] \arrow[dd, "f \times 1_I"] \\
& Y & \\
X \times 0 \arrow[ur, "g"] \arrow[rr, phantom, "\subset"] & & X \times I \arrow[ul, dashed]
\end{tikzcd}$$

такого, что эта диаграмма коммутативна. Таким образом, вложение $i\colon A \subset X$ тогда и только тогда является корасслоением, когда пара (X, A) обладает свойством продолжения гомотопии относительно любого пространства.

2. Теорема. *Если пара (X, A) обладает свойством продолжения гомотопии относительно A, то A тогда и только тогда является слабым ретрактом пространства X, когда A является ретрактом X.*

Доказательство. Покажем, что каждая слабая ретракция $r\colon X \to A$ гомотопна ретракции. Пусть $i\colon A \subset X$; тогда $ri \simeq 1_A$. Пусть $G\colon A \times I \to A$ — гомотопия от ri к 1_A; значит, $G(x, 0) = r(x)$ при $x \in A$. Поскольку пара (X, A) удовлетворяет свойству продолжения гомотопии относительно A, существует отображение $F\colon X \times \times I \to A$, являющееся продолжением отображения G, такое, что $F(x, 0) = r(x)$ при $x \in X$. Если отображение $r'\colon X \to A$ определить формулой $r'(x) = F(x, 1)$, то r' будет ретракцией X на A, а F — гомотопией от r к r'. ∎

Наряду с вложениями, обладающими левым гомотопически обратным, можно рассматривать вложения, обладающие правым гомотопически обратным. Это приводит к следующим определениям. Если $X' \subset X$, то *деформацией* D подпространства X' в X называется гомотопия

$$D\colon X' \times I \to X,$$

для которой $D(x', 0) = x'$ при $x' \in X'$. Если, более того, множество $D(X' \times 1)$ принадлежит некоторому подпространству A пространства X, то D называется *деформацией X' в A*, а X' называется *деформируемым в A в пространстве X*. Пространство X называется *деформируемым в подпространство A*, если оно деформируемо по себе в A. Следовательно, пространство X стягиваемо тогда и только тогда, когда оно деформируемо в одну из своих точек.

3. Лемма. *Пространство X деформируемо в подпространство A тогда и только тогда, когда вложение $i\colon A \subset X$ имеет правый гомотопически обратный.*

Доказательство. Если i имеет правый гомотопически обратный $f\colon X \to A$, то $if \simeq 1_X$. Пусть $F\colon X \times I \to X$ — гомотопия от 1_X к if; значит, $F(x, 0) = x$ и F — деформация X, причем $F(X \times 1) = if(X) \subset A$; следовательно, X деформируемо в A.

Обратно, если X деформируемо в A, то пусть $D\colon X \times I \to X$ — такая деформация, что $D(X \times 1) \subset A$. Пусть отображение $f\colon X \to A$ определено равенством

$$if(x) = D(x, 1) \qquad (x \in X).$$

Тогда $D\colon 1_X \simeq if$, т. е. f — правый гомотопически обратный к i. ∎

Заметим, что вложение $i\colon A \subset X$ в категории топологических пространств и непрерывных отображений никогда не имеет правого обратного, за исключением тривиального случая $A = X$.

Рассмотрим теперь вложения, являющиеся гомотопическими эквивалентностями. Подпространство $A \subset X$ называется *слабым деформационным ретрактом* пространства X, если вложение $i\colon A \subset X$ является гомотопической эквивалентностью. Из леммы 1.1.1 и леммы 3 мы получаем следующий результат:

4. Лемма. *Подпространство A тогда и только тогда является слабым деформационным ретрактом пространства X, когда одновременно A есть слабый ретракт пространства X и X деформируемо в A.* ∎

Как и в случае слабого ретракта, существует понятие более удобное, чем понятие слабого деформационного ретракта. Подпространство A называется *сильным деформационным ретрактом* пространства X, если существует ретракция r пространства X на A, такая, что $1_X \simeq ir \operatorname{rel} A$, где $i\colon A \subset X$. Гомотопия $F\colon 1_X \simeq ir \operatorname{rel} A$ называется *сильной деформационной ретракцией* X на A.

Можно ввести также промежуточное понятие, полезное для сравнения слабой и сильной форм, определенных выше. Подпространство A называется *деформационным ретрактом* пространства X, если существует ретракция X на A, такая, что $1_X \simeq ir$, где $i\colon A \subset X$. Если $F\colon 1_X \simeq ir$, то F называется *деформационной ретракцией* X на A. Гомотопия $F\colon X \times I \to X$ тогда и только тогда является деформационной ретракцией, когда $F(x, 0) = x$ при $x \in X$, $F(X \times 1) \subset A$ и $F(x, 1) = x$ при $x \in A$. Эта гомотопия тогда и только тогда является сильной деформационной ретракцией, когда она удовлетворяет еще условию $F(x, t) = x$ при $x \in A$, $t \in I$.

5. Пример. Как вытекает из примера 1.3.4, всякое одноточечное подмножество некоторого выпуклого подмножества пространства $\mathbf{R}^n$ является сильным деформационным ретрактом этого выпуклого множества.

6. Пример. Сфера S^n является сильным деформационным ретрактом пространства $\mathbf{R}^{n+1} - 0$. Отображение F: $(\mathbf{R}^{n+1} - 0) \times I \to \mathbf{R}^{n+1} - 0$, определенное формулой

$$F(x, t) = (1-t)\,x + \frac{tx}{\|x\|}, \qquad x \in \mathbf{R}^{n+1} - 0, \qquad t \in I,$$

является сильной деформационной ретракцией $\mathbf{R}^{n+1} - 0$ на S^n.

Ясно, что сильный деформационный ретракт является деформационным ретрактом, а деформационный ретракт в свою очередь — слабым деформационным ретрактом. Следующие примеры показывают, что ни одна из этих импликаций не обратима.

7. Пример. Как и в примере 1 этого параграфа, пусть X — замкнутый единичный квадрат на плоскости, а A — гребенка. Как было замечено в примере 1, вложение $A \subset X$ является гомотопической эквивалентностью, но A не является ретрактом X. Таким образом, A — слабый деформационный ретракт пространства X, не являющийся его деформационным ретрактом.

8. Пример. Пусть X — гребенка, а A — одноточечное подпространство в X, состоящее из точки $(0, 1)$. Поскольку X стягиваемо, существует гомотопия F от 1_X к постоянному отображению $X \to A$. Такое отображение F является деформационной ретракцией X в A. Однако, как было замечено в примере 1.3.9, не существует гомотопии относительно A между 1_X и постоянным отображением в A; следовательно, A — деформационный ретракт пространства X, не являющийся его сильным деформационным ретрактом.

При выполнении некоторых свойств продолжения гомотопии все три разновидности деформационных ретрактов, как мы сейчас докажем, совпадают.

9. Лемма. *Если X деформируемо в ретракт A, то A — деформационный ретракт X.*

Доказательство. Пусть r: $X \to A$ — ретракция, а i: $A \subset X$ — вложение. Тогда r является левым гомотопически обратным к i. Поскольку X деформируемо в A, из леммы 3 вытекает, что i имеет правый гомотопически обратный. По лемме 1.1.1, r является также и правым гомотопически обратным к i. Поскольку $1_X \simeq ir$, мы заключаем, что A — деформационный ретракт пространства X. ■

Лемма 9 в сочетании с теоремой 2 приводит к такому утверждению:

10. Следствие. *Если пара (X, A) удовлетворяет свойству продолжения гомотопии относительно A, то A тогда и только тогда является слабым деформационным ретрактом пространства X, когда A — деформационный ретракт X.* ■

11. Теорема. *Если пара* $(X \times I,\ (X \times 0) \cup (A \times I) \cup (X \times 1))$ *удовлетворяет свойству продолжения гомотопии относительно* X *и* A *замкнуто в* X, *то* A *тогда и только тогда является деформационным ретрактом пространства* X, *когда* A — *сильный деформационный ретракт* X.

Доказательство. Если A — деформационный ретракт пространства X, то пусть $F\colon X \times I \to X$ — гомотопия от 1_X к ir, где $r\colon X \to A$ — ретракция, а $i\colon A \subset X$ — вложение. Определим гомотопию

$$G\colon [(X \times 0) \cup (A \times I) \cup (X \times 1)] \times I \to X$$

следующими равенствами:

$$\begin{aligned} &G((x, 0), t') = x, && x \in X, \quad t' \in I; \\ &G((x, t), t') = F(x, (1 - t')\, t), && x \in A;\ t,\ t' \in I; \\ &G((x, 1), t') = F(r(x), 1 - t'), && x \in X, \quad t' \in I. \end{aligned}$$

Гомотопия G определена корректно, поскольку при $x \in A$

$$G((x, 0), t') = x = F(x, 0)$$

(по первым двум равенствам) и

$$G((x, 1), t') = F(x, 1 - t') = F(r(x), 1 - t')$$

(по последним двум равенствам). Отображение G непрерывно, поскольку его ограничение на каждое из замкнутых множеств $(X \times 0) \times I$, $(A \times I) \times I$ и $(X \times 1) \times I$ непрерывно. При $(x, t) \in (X \times 0) \cup (A \times I) \cup (X \times 1)$ имеет место равенство $G((x, t), 0) = F(x, t)$ (потому, что $F(x, 0) = x$ и $F(r(x), 1) = ir(r(x)) = r(x) = F(x, 1)$, поскольку r — ретракция). Следовательно, ограничение G на $[(X \times 0) \cup (A \times I) \cup (X \times 1)] \times 0$ можно продолжить на $(X \times I) \times 0$. Так как по предположению выполняется свойство продолжения гомотопии, то ограничение G на $[(X \times 0) \cup (A \times I) \cup (X \times 1)] \times 1$ можно продолжить на $(X \times I) \times 1$. Пусть $G'\colon (X \times I) \times 1 \to X$ — такое продолжение. Определим отображение $H\colon X \times I \to X$ формулой $H(x, t) = G'((x, t), 1)$. В результате получаем следующие равенства:

$$\begin{aligned} &H(x, 0) = G'((x, 0), 1) = G((x, 0,), 1) = x, && x \in X, \\ &H(x, 1) = G((x, 1), 1) = F(r(x), 0) = r(x), && x \in X, \\ &H(x, t) = G((x, t), 1) = F(x, 0) = x, && x \in A,\ t \in I. \end{aligned}$$

Следовательно, H — гомотопия относительно A от 1_X к ir, и, значит, A — сильный деформационный ретракт пространства X. ■

Теперь мы докажем, что всякое отображение в категории гомотопических типов эквивалентно некоторому вложению, являющемуся корасслоением. Пусть задано отображение $f\colon X \to Y$. Обозначим через Z_f факторпространство топологической суммы пространств $X \times I$ и Y, полученное отождествлением точки $(x, 1) \in X \times I$ с точкой $f(x) \in Y$ для всех $x \in X$. Пространство Z_f называется *цилиндром отображения* f (рис. 2).

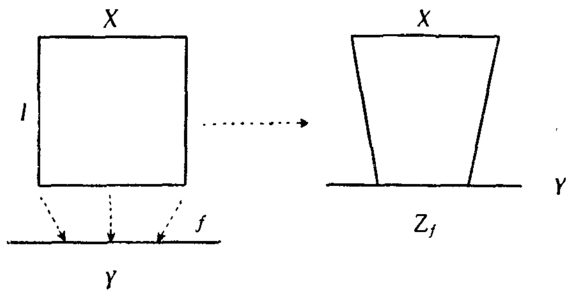


Рис. 2. Цилиндр отображения.

Мы используем обозначение $[x, t]$ для точек пространства Z_f, соответствующих точкам $(x, t) \in X \times I$ при указанном отождествлении, и обозначение $[y]$ для точек пространства Z_f, соответствующих точкам $y \in Y$ (таким образом, $[x, 1] = [f(x)]$ при $x \in X$). Формула $i(x) = [x, 0]$ определяет вложение $i\colon X \to Z_f$, а формула $j(y) = [y]$ — вложение $j\colon Y \to Z_f$. Эти вложения позволяют рассматривать X и Y как подпространства пространства Z_f. Ретракция $r\colon Z_f \to Y$ определяется формулами $r[x, t] = [f(x)]$ при $x \in X$ и $t \in I$ и $r[y] = [y]$ при $y \in Y$.

12. Теорема. *Пусть задано отображение $f\colon X \to Y$. Тогда определена коммутативная диаграмма*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "i"] \arrow[dr, "f"'] & & Z_f \arrow[dl, "r"] \\ & Y & \end{tikzcd}$$

такая, что

(a) $1_{Z_f} \simeq jr \operatorname{rel} Y$;

(b) *отображение i является корасслоением.*

Доказательство. По определению имеет место равенство $ri = f$, и, значит, диаграмма коммутативна.

(a) Определим гомотопию $F\colon Z_f \times I \to Z_f$ формулами

$$F([x, t], t') = [x, (1 - t')t + t'], \qquad x \in X;\ t, t' \in I;$$
$$F([y], t') = [y], \qquad y \in Y;\ t' \in I.$$

Тогда $F\colon 1_{Z_f} \simeq jr \operatorname{rel} Y$.

(b) Пусть $g\colon Z_f \to W$ и $G\colon X \times I \to W$ — такие отображения, что $g([x, 0]) = G(x, 0)$ при $x \in X$. Если определить гомотопию $H\colon Z_f \times I \to W$ формулами

$$H([y], t') = g[y], \qquad y \in Y,\ t' \in I,$$

$$H([x, t], t') = \begin{cases} g([x, t+(t-1)t']), & t+(t-1)t' \geqslant 0, \\ G(x, (1-t)t'-t), & t+(t-1)t' \leqslant 0, \end{cases}$$

то $H([x, t], 0) = g([x, t])$, $H([y], 0) = g([y])$ и $H \mid X \times I = G$. ■

Из этой теоремы вытекает, что отображение $i\colon X \subset Z_f$, являющееся корасслоением, эквивалентно в категории гомотопических типов отображению $f\colon X \to Y$. Цилиндр отображения можно использовать при доказательстве следующего любопытного результата:

13. Теорема. *Два пространства X и Y тогда и только тогда имеют один и тот же гомотопический тип, когда они могут быть вложены как слабые деформационные ретракты в одно и то же пространство Z.*

Доказательство. Если X и Y можно вложить как слабые деформационные ретракты в одно и то же пространство Z, то оба пространства X и Y имеют тот же гомотопический тип, что и пространство Z, и, следовательно, сформулированное условие является достаточным.

Обратно, если $f\colon X \to Y$ — гомотопическая эквивалентность, то по теореме 12 композиция $X \xrightarrow{i} Z_f \xrightarrow{r} Y$, где Z_f — цилиндр отображения f, также является гомотопической эквивалентностью. Поскольку r — гомотопическая эквивалентность, отсюда следует, что i — тоже гомотопическая эквивалентность. По теореме 12(a) вложение $j\colon Y \to Z_f$ является гомотопической эквивалентностью. Следовательно, X и Y можно вложить как слабые деформационные ретракты в Z_f. ■

Все рассмотренные понятия можно определить для пар. Например, пара $(X', A') \subset (X, A)$ называется *сильным деформационным ретрактом*, если существует отображение $F\colon (X, A) \times I \to \to (X, A)$, такое, что $F(x, 0) = x$ при $x \in X$, $F(X \times 1) \subset X'$, $F(A \times 1) \subset A'$ и $F(x', t) = x'$ при $x' \in X'$, $t \in I$. *Цилиндром отображения* $f\colon (X, A) \to (Y, B)$, где A замкнуто в X, называется пара (Z_{f_1}, Z_{f_2}), где Z_{f_1} — цилиндр отображения $f_1\colon X \to Y$, определенного отображением f, а Z_{f_2} — цилиндр отображения $f_2\colon A \to B$, определенного отображением f. Отображение $f\colon (X', A') \to (X, A)$ называется *корасслоением*, если для отображений $g\colon (X, A) \to (Y, B)$ и $G\colon (X', A') \times I \to (Y, B)$ (здесь пара (Y, B) произвольна), таких, что $G(x', 0) = gf(x')$ при $x' \in X'$, существует отображение

$F: (X, A) \times I \to (Y, B)$, для которого $F(x, 0) = f(x)$ при $x \in X$ и $G(x', t) = F(f(x'), t)$ при $x' \in X'$, $t \in I$. Все результаты этого параграфа останутся верными, если их подходящим образом сформулировать для пар.

§ 5. *H*-пространства

В некоторых случаях на множестве гомотопических классов отображений одного пространства (или пары) в другое можно определить естественную структуру группы. В этом параграфе мы рассмотрим такие пространства P, что на множестве $[X; P]$ можно определить структуру группы для всех пространств X. Неудивительно, что существует тесная связь между естественными структурами группы на множестве $[X; P]$ для всех X и «группоподобными» структурами на пространстве P.

Мы будем проводить все рассуждения для категории гомотопических типов топологических пространств с отмеченной точкой, хотя многие результаты верны и для категории гомотопических типов топологических пространств. Если X и Y — топологические пространства с отмеченной точкой, то через $[X; Y]$ мы будем обозначать множество гомотопических классов непрерывных отображений, сохраняющих отмеченную точку (при этом рассматриваются лишь гомотопии относительно отмеченной точки). Таким образом, $[X; Y]$ — множество морфизмов объекта X в объект Y в категории гомотопических типов топологических пространств с отмеченной точкой.

Одним из способов введения структуры группы на множестве $[X; P]$ является задание структуры группы на P. Предположим поэтому, что P — топологическая группа с единичным элементом в качестве отмеченной точки. Тогда на множестве всех сохраняющих отмеченную точку непрерывных отображений $X \to P$ имеется закон композиции, определенный поточечным перемножением отображений. Другими словами, если заданы отображения $g_1, g_2: X \to P$, то отображение $g_1 g_2: X \to P$ определяется формулой $g_1 g_2(x) = g_1(x) g_2(x)$, где в правой части стоит произведение в группе P. Множество сохраняющих отмеченную точку непрерывных отображений $X \to P$ с этим законом композиции является группой (абелевой, если группа P абелева). Этот закон композиции переносится на гомотопические классы и определяет операцию $[g_1][g_2] = [g_1 g_2]$, откуда мы получаем следующую теорему:

1. Теорема. *Если P — топологическая группа, то π^P является контравариантным функтором из категории гомотопических типов топологических пространств с отмеченной точкой в категорию групп и гомоморфизмов.* ∎

Рассмотрим два примера.

2. Окружность S^1 является абелевой топологической группой (мультипликативная группа комплексных чисел, по модулю равных единице). Следовательно, множество $[X; S^1]$ является абелевой группой, и для любого отображения $f\colon X \to Y$ индуцированное им отображение $f^{\#}\colon [Y; S^1] \to [X; S^1]$ является гомоморфизмом.

3. Сфера S^3 является топологической группой (мультипликативная группа кватернионов, по модулю равных единице). Следовательно, $[X; S^3]$ — группа, и для любого отображения $f\colon X \to Y$ индуцированное им отображение $f^{\#}\colon [Y; S^3] \to [X; S^3]$ является гомоморфизмом.

Рассмотренная структура группы на множестве $[X; P]$ была получена из структуры группы на множестве непрерывных отображений X в P, сохраняющих отмеченную точку. Но бывают случаи, когда множество $[X; P]$ допускает естественную структуру группы, в то время как множество непрерывных отображений X в P, сохраняющих отмеченную точку, такой структуры не имеет. Например, если P — пространство с отмеченной точкой, имеющее тот же гомотопический тип, что и некоторая топологическая группа P', то функтор π^P естественно эквивалентен функтору $\pi^{P'}$. Следовательно, π^P можно рассматривать как функтор в категорию групп. Приводимые ниже определения будут использованы для описания дополнительной структуры на пространствах с отмеченной точкой, необходимой для того, чтобы функтор π^P принимал значения в категории групп и гомоморфизмов.

Пусть заданы отображения $f\colon X \to Y$ и $g\colon X \to Z$. Определим отображение

$$(f, g)\colon X \to Y \times Z,$$

полагая $(f, g)(x) = (f(x), g(x))$ для $x \in X$.

По определению *H-пространство* состоит из топологического пространства P с отмеченной точкой и непрерывного отображения (умножения)

$$\mu\colon P \times P \to P,$$

для которого постоянное отображение в отмеченную точку $c\colon P \to P$ служит *гомотопической единицей*. Это означает, что каждая из композиций

$$P \xrightarrow{(c,\,1)} P \times P \xrightarrow{\mu} P \qquad \text{и} \qquad P \xrightarrow{(1,\,c)} P \times P \xrightarrow{\mu} P$$

гомотопна тождественному отображению 1_P. Умножение μ называется *гомотопически ассоциативным*, если диаграмма

$$\begin{array}{ccc} P \times P \times P & \xrightarrow{\mu \times 1} & P \times P \\ {\scriptstyle 1 \times \mu}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mu} \\ P \times P & \xrightarrow{\mu} & P \end{array}$$

гомотопически коммутативна, т. е. если $\mu\circ(\mu\times 1)\simeq\mu\circ(1\times\mu)$. Непрерывное отображение $\varphi\colon P\to P$ называется *гомотопически обратным* для P и μ, если обе композиции

$$P\xrightarrow{(1,\varphi)}P\times P\xrightarrow{\mu}P \qquad \text{и} \qquad P\xrightarrow{(\varphi,1)}P\times P\xrightarrow{\mu}P$$

гомотопны постоянному отображению $c\colon P\to P$.

Гомотопически ассоциативное H-пространство с гомотопически обратным отображением удовлетворяет аксиомам группы с точностью до гомотопии. Такое пространство с отмеченной точкой называется *H-группой*. Ясно, что всякая топологическая группа является H-группой.

Умножение μ в некотором H-пространстве называется *гомотопически коммутативным*, если диаграмма

$$\begin{tikzcd} P\times P \arrow[rr, "T"] \arrow[dr, "\mu"'] & & P\times P \arrow[dl, "\mu"] \\ & P & \end{tikzcd}$$

где $T(p_1, p_2)=(p_2, p_1)$, гомотопически коммутативна. H-группа с гомотопически коммутативным умножением называется *абелевой*.

Пусть P и P' суть H-пространства с умножениями соответственно μ и μ'; непрерывное отображение $\alpha\colon P\to P'$ называется *гомоморфизмом*, если диаграмма

$$\begin{tikzcd} P\times P \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "\alpha\times\alpha"'] & P \arrow[d, "\alpha"] \\ P'\times P' \arrow[r, "\mu'"] & P' \end{tikzcd}$$

гомотопически коммутативна.

4. Теорема. *Топологическое пространство с отмеченной точкой, имеющее тот же гомотопический тип, что и некоторое H-пространство (или H-группа), само является H-пространством (или H-группой), и при этом гомотопическая эквивалентность является гомоморфизмом.*

Доказательство. Пусть отображения $f\colon P\to P'$ и $g\colon P'\to P$ гомотопически обратны одно другому, и пусть P является H-пространством с умножением $\mu\colon P\times P\to P$. Если отображение $\mu'\colon P'\times P'\to P'$ определить как композицию

$$P'\times P'\xrightarrow{g\times g}P\times P\xrightarrow{\mu}P\xrightarrow{f}P',$$

то μ' станет непрерывным умножением в P'. При этом композиция $P'\xrightarrow{(1,c')}P'\times P'\xrightarrow{\mu'}P'$ совпадает с композицией $P'\xrightarrow{g}$ $\to P\xrightarrow{(1,c)}P\times P\xrightarrow{\mu}P\xrightarrow{f}P'$, которая в свою очередь гомотопна композиции $P'\xrightarrow{g}P\xrightarrow{f}P'$. Поскольку $fg\simeq 1_{P'}$, отображение

$\mu' \circ (1, c')$ гомотопно $1_{P'}$. Аналогично отображение $\mu' \circ (c', 1)$ гомотопно $1_{P'}$. Следовательно, P' является H-пространством. Поскольку диаграмма

$$\begin{array}{ccc} P' \times P' & \xrightarrow{\mu'} & P' \\ {\scriptstyle g\times g}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g} \\ P \times P & \xrightarrow{\mu} & P \end{array}$$

гомотопически коммутативна, отображение g (а также и f) является гомоморфизмом. Если μ гомотопически ассоциативно или гомотопически коммутативно, то тем же свойством обладает и μ'. Если отображение $\varphi\colon P \to P$ — гомотопически обратное для P, то отображение $f\varphi g\colon P' \to P'$ является гомотопически обратным для P'. ∎

Если P является H-пространством, то для каждого пространства X с отмеченной точкой на множестве $[X; P]$ можно определить закон композиции, положив $[g_1][g_2] = [\mu \circ (g_1, g_2)]$. Если P является H-группой, то множество $[X; P]$ станет группой относительно этого закона композиции и для всякого отображения $f\colon X \to Y$ индуцированное им отображение $f^\#\colon [Y; P] \to [X; P]$ будет гомоморфизмом. Таким образом, мы получили следующую теорему:

5. Теорема. *Если P — некоторая H-группа, то π^P — контравариантный функтор из категории гомотопических типов топологических пространств с отмеченной точкой в категорию групп и гомоморфизмов. Если H-группа P абелева, то этот функтор принимает значения в категории абелевых групп.* ∎

Интересно, что верно также следующее обращение теоремы 5:

6. Теорема. *Если P — топологическое пространство с отмеченной точкой, такое, что функтор π^P принимает значения в категории групп, то P является H-группой (абелевой, если функтор π^P принимает значения в категории абелевых групп). Более того, для каждого пространства X с отмеченной точкой структура группы на множестве $\pi^P(X)$ совпадает со структурой группы, рассмотренной в теореме 5.*

Доказательство. Пусть $p_1\colon P \times P \to P$ и $p_2\colon P \times P \to P$ — проекции, и пусть $\mu\colon P \times P \to P$ — такое отображение, что $[\mu] = [p_1] * [p_2]$, где символом $*$ мы обозначили закон композиции в группе $[P \times P; P]$. Для любых отображений $f, g\colon X \to P$ индуцированное ими отображение $(f, g)^\#\colon [P \times P; P] \to [X; P]$ является гомоморфизмом и имеют место равенства

$$[\mu \circ (f, g)] = (f, g)^\# [\mu] = (f, g)^\# ([p_1] * [p_2]) = \\ = (f, g)^\# [p_1] * (f, g)^\# [p_2] = [f] * [g].$$

Отсюда видно, что умножение в $[X; P]$ индуцировано отображением μ.

Пусть X — одноточечное пространство. Отображение $X \to c(P) \in P$ порождает единичный элемент группы $[X; P]$. Поскольку единственное отображение $P \to X$ индуцирует гомоморфизм $[X; P] \to [P; P]$, отсюда вытекает, что композиция $P \to X \to P$, совпадающая с постоянным отображением c: $P \to P$, представляет собой единичный элемент группы $[P; P]$. Следовательно, $\mu \circ (1_P, c) \simeq 1_P$ и $\mu \circ (c, 1_P) \simeq 1_P$. Поэтому P является H-пространством.

Докажем, что μ гомотопически ассоциативно. Пусть отображения q_1, q_2, q_3: $P \times P \times P \to P$ — проекции. Тогда

$$[\mu \circ (1 \times \mu)] = (1 \times \mu)^{\#} [\mu] = (1 \times \mu)^{\#} [p_1] * (1 \times \mu)^{\#} [p_2] =$$
$$= [q_1] * [\mu \circ (q_2, q_3)] = [q_1] * ([q_2] * [q_3]).$$

Аналогично

$$[\mu \circ (\mu \times 1)] = ([q_1] * [q_2]) * [q_3].$$

Поскольку умножение в группе $[P \times P \times P; P]$ ассоциативно, имеем $\mu \circ (1 \times \mu) \simeq \mu \circ (\mu \times 1)$.

Докажем, что тождественное отображение пространства P обладает гомотопически обратным. Пусть φ: $P \to P$ — такое отображение, что $[1_P] * [\varphi] = [c]$. Тогда $\mu(1_P, \varphi) \simeq c$. Кроме того, $[\varphi] * [1_P] = [c]$, и поэтому $\mu(\varphi, 1_P) \simeq c$. Следовательно, отображение φ гомотопически обратно к P.

Все это доказывает, что P является H-группой и что умножение в группах, определенных функтором π^P, индуцировано умножением в пространстве P. Если группа $[P \times P; P]$ абелева, то аналогичные рассуждения показывают, что P является абелевой H-группой. ■

Следующее дополнение к теоремам 5 и 6 легко получить аналогичными методами:

7. Теорема. *Пусть α: $P \to P'$ — отображение одной H-группы в другую. Отображение $\alpha_{\#}$ тогда и только тогда является естественным преобразованием функтора π^P в $\pi^{P'}$ (как функторов в категорию групп), когда α — гомоморфизм.* ■

Опишем один особенно полезный пример H-группы. Пусть Y — топологическое пространство с отмеченной точкой y_0. *Пространством петель* пространства *Y с отмеченной точкой y_0* (обозначается ΩY или $\Omega(Y, y_0)$) называется пространство непрерывных отображений ω: $(I, \dot{I}) \to (Y, y_0)$, наделенное компактно-открытой топологией. Отмеченной точкой ω_0 пространства ΩY будем считать постоянное отображение $I \to y_0$. Определим отображение

$$\mu: \Omega Y \times \Omega Y \to \Omega Y,$$

положив

$$\mu(\omega, \omega')(t) = \begin{cases} \omega(2t), & 0 \leqslant t \leqslant 1/2, \\ \omega'(2t-1), & 1/2 \leqslant t \leqslant 1. \end{cases}$$

Докажем, что μ непрерывно. Пусть E: $\Omega Y \times I \to Y$ — отображение, определенное в конце § 2 введения. По теореме 2.8 введения достаточно показать, что композиция

$$\Omega Y \times \Omega Y \times I \xrightarrow{\mu \times I} \Omega Y \times I \xrightarrow{E} Y$$

непрерывна. Формула, определяющая отображение μ, показывает, что эта композиция непрерывна на каждом из замкнутых множеств

$$\Omega Y \times \Omega Y \times [0, 1/2] \quad \text{и} \quad \Omega Y \times \Omega Y \times [1/2, 1].$$

Построим несколько гомотопий, чтобы показать, что пространство ΩY является H-группой. Аналогичные формулы будут использованы в § 1.7 при определении гомотопий (незамкнутых) путей на топологическом пространстве.

Чтобы доказать, что отображение $\omega \to \mu(\omega, \omega_0)$ гомотопно тождественному отображению пространства ΩY, определим отображение F: $\Omega Y \times I \to \Omega Y$, полагая

$$F(\omega, t)(t') = \begin{cases} \omega\left(\dfrac{2t'}{t+1}\right), & 0 \leqslant t' \leqslant \dfrac{t+1}{2}, \\ y_0, & \dfrac{t+1}{2} \leqslant t' \leqslant 1. \end{cases}$$

Эта формула показывает, что отображение $E(F \times 1): (\Omega Y \times I) \times I \to Y$ непрерывно. Следовательно, отображение F непрерывно и представляет собой гомотопию от $\omega \to \mu(\omega, \omega_0)$ к $1_{\Omega Y}$. Аналогично, отображение $\omega \to \mu(\omega_0, \omega)$ гомотопно $1_{\Omega Y}$. Значит, ΩY является H-пространством с умножением μ.

Для доказательства гомотопической ассоциативности отображения μ определим отображение

$$G\colon \Omega Y \times \Omega Y \times \Omega Y \times I \to \Omega Y$$

формулой

$$E(G \times 1_I)(\omega, \omega', \omega'', t, t') = \begin{cases} \omega\left(\dfrac{4t'}{t+1}\right), & 0 \leqslant t' \leqslant \dfrac{t+1}{4}, \\ \omega'(4t'-t-1), & \dfrac{t+1}{4} \leqslant t' \leqslant \dfrac{t+2}{4}, \\ \omega''\left(\dfrac{4t'-2-t}{2-t}\right), & \dfrac{t+2}{4} \leqslant t' \leqslant 1. \end{cases}$$

Тогда G: $\mu \circ (\mu \times 1_{\Omega Y}) \simeq \mu \circ (1_{\Omega Y} \times \mu)$ и, значит, μ гомотопически ассоциативно.

Определим гомотопически обратное отображение $\varphi\colon \Omega Y \to \Omega Y$ формулой $\varphi(\omega)(t) = \omega(1-t)$. Определим, далее, отображение $H\colon \Omega Y \times I \to \Omega Y$, полагая

$$E(H \times 1)(\omega, t, t') = \begin{cases} y_0, & 0 \leqslant t' \leqslant \frac{t}{2}, \\ \omega(2t'-t), & \frac{t}{2} \leqslant t' \leqslant \frac{1}{2}, \\ \omega(2-2t'-t), & \frac{1}{2} \leqslant t' \leqslant 1-\frac{t}{2}, \\ y_0, & 1-\frac{t}{2} \leqslant t' \leqslant 1. \end{cases}$$

Отображение H служит гомотопией между отображением $\omega \to \mu(\omega, \varphi(\omega))$ и постоянным отображением пространства ΩY в себя. Аналогично, существует гомотопия между отображением $\omega \to \mu(\varphi(\omega), \omega)$ и постоянным отображением пространства ΩY в себя. Следовательно, φ является гомотопически обратным для ΩY, и, таким образом, пространство ΩY представляет собой H-группу.

Если отображение $h\colon Y \to Y'$ сохраняет отмеченную точку, то можно определить отображение

$$\Omega h\colon \Omega Y \to \Omega Y',$$

положив $\Omega h(\omega)(t) = h(\omega(t))$. Ясно, что Ωh — гомоморфизм. Подытожим полученные результаты о пространстве петель в следующей теореме:

8. Теорема. *Функтор Ω является ковариантным функтором из категории топологических пространств с отмеченной точкой и непрерывных отображений в категорию H-групп и непрерывных гомоморфизмов.* ■

Функтор Ω также сохраняет гомотопии. Более точно, если отображения $h_0, h_1\colon Y \to Y'$ связаны гомотопией h_t, то отображения $\Omega h_0, \Omega h_1\colon \Omega Y \to \Omega Y'$ связаны гомотопией Ωh_t, которая является непрерывным гомоморфизмом при каждом $t \in I$.

§ 6. Надстройка

Этот параграф посвящен в основном результатам, двойственным результатам предыдущего параграфа. Мы будем рассматривать пространства Q с отмеченной точкой, для которых π_Q является ковариантным функтором из категории гомотопических типов пространств с отмеченной точкой в категорию групп и гомоморфизмов. Это приводит к понятию H-когруппы, двойственному понятию H-группы. Важным примером H-когруппы является надстройка над пространством с отмеченной точкой — понятие, двойственное понятию пространства петель. Гомотопические группы пространства, определяемые в этом параграфе, являются примерами групп гомотопических классов отображений надстроек в рассматриваемое пространство.

Пусть X и Y — топологические пространства с отмеченной точкой. Их сумму в категории топологических пространств с отмеченной точкой обозначим $X \vee Y$. Если X имеет отмеченную точку x_0, а Y — отмеченную точку y_0, то пространство $X \vee Y$ можно рассматривать как подпространство $X \times y_0 \cup x_0 \times Y$ пространства $X \times Y$. Для заданных отображений f: $X \to Z$ и g: $Y \to Z$ обозначим через (f, g): $X \vee Y \to Z$ отображение, определенное характеристическим свойством суммы (т. е. $(f, g) \mid X = f$ и $(f, g) \mid Y = g$).

Топологическое пространство Q с отмеченной точкой называется *Н-когруппой*, если определено непрерывное отображение (коумножение)

$$\nu\colon Q \to Q \vee Q,$$

для которого выполняются следующие условия:

Существование гомотопической единицы. Если c: $Q \to Q$ — постоянное отображение в отмеченную точку, то обе композиции

$$Q \xrightarrow{\nu} Q \vee Q \xrightarrow{(c,\,1)} Q \quad \text{и} \quad Q \xrightarrow{\nu} Q \vee Q \xrightarrow{(1,\,c)} Q$$

гомотопны тождественному отображению 1_Q.

Гомотопическая ассоциативность. Диаграмма

$$\begin{tikzcd} Q \arrow[r, "\nu"] \arrow[d, "\nu"'] & Q \vee Q \arrow[d, "1 \vee \nu"] \\ Q \vee Q \arrow[r, "\nu \vee 1"] & Q \vee Q \vee Q \end{tikzcd}$$

гомотопически коммутативна.

Существование гомотопически обратного. Существует отображение ψ: $Q \to Q$, такое, что обе композиции

$$Q \xrightarrow{\nu} Q \vee Q \xrightarrow{(1,\,\psi)} Q \quad \text{и} \quad Q \xrightarrow{\nu} Q \vee Q \xrightarrow{(\psi,\,1)} Q$$

гомотопны постоянному отображению c: $Q \to Q$.

Если X — произвольное пространство с отмеченной точкой, а Q — некоторая H-когруппа, то на множестве $[Q; X]$ можно определить композицию, положив $[f_1][f_2] = [(f_1, f_2) \circ \nu]$; при этом множество $[Q; X]$ становится группой.

Говорят, что Q есть *абелева* H-когруппа, если диаграмма

$$\begin{tikzcd} & Q \arrow[dl, "\nu"'] \arrow[dr, "\nu"] & \\ Q \vee Q \arrow[rr, "T'"] & & Q \vee Q \end{tikzcd}$$

где $T'(q_1, q_2) = (q_2, q_1)$ при $q_1, q_2 \in Q$, гомотопически коммутативна.

Пусть Q и Q' суть H-когруппы с коумножениями соответственно ν и ν'; непрерывное отображение β: $Q \to Q'$ называется *гомоморфизмом*, если диаграмма

$$\begin{array}{ccc} Q & \xrightarrow{\nu} & Q \vee Q \\ {\scriptstyle\beta}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\beta\vee\beta} \\ Q' & \xrightarrow{\nu'} & Q' \vee Q' \end{array}$$

гомотопически коммутативна.

Доказательства следующих теорем двойственны доказательствам соответствующих теорем об H-группах (см. теоремы 1.5.4—1.5.7) и поэтому опущены.

1. Теорема. *Пространство с отмеченной точкой, имеющее тот же гомотопический тип, что и некоторая H-когруппа, само является H-когруппой, и при этом гомотопическая эквивалентность является гомоморфизмом.* ■

2. Теорема. *Если Q — некоторая H-когруппа, то π_Q представляет собой ковариантный функтор из категории гомотопических типов пространств с отмеченной точкой в категорию групп и гомоморфизмов. Если H-когруппа Q абелева, то этот функтор принимает значения в категории абелевых групп.* ■

3. Теорема. *Пусть Q — пространство с отмеченной точкой, такое, что функтор π_Q принимает значения в категории групп. Тогда Q является H-когруппой (абелевой, если π_Q принимает значения в категории абелевых групп). Более того, структура группы на множестве $\pi_Q(X)$ совпадает со структурой, определенной в теореме 2, которая индуцируется структурой H-когруппы на Q.* ■

4. Теорема. *Пусть β: $Q \to Q'$ — отображение одной H-когруппы в другую. Отображение $\beta^{\#}$ тогда и только тогда является естественным преобразованием функтора $\pi_{Q'}$ в функтор π_Q (как функторов в категорию групп), когда β — гомоморфизм.* ■

Приведем пример H-когруппы, двойственный уже рассмотренному нами примеру H-группы — пространству петель. Пусть Z — топологическое пространство с отмеченной точкой z_0. *Надстройкой* над Z (обозначается SZ) называется факторпространство пространства $Z \times I$, полученное стягиванием подмножества $(Z \times 0) \cup (z_0 \times I) \cup (Z \times 1)$ в одну точку. Определенное таким образом пространство иногда называют *приведенной надстройкой*, а термин «надстройка» используют для соответствующего понятия в категории пространств без отмеченной точки. Надстройка в этой последней категории получается из пространства $Z \times I$ стягиванием $Z \times 0$ в одну точку, а $Z \times 1$ — в другую.

Если $(z, t) \in Z \times I$, то через $[z, t]$ обозначим соответствующую точку пространства SZ при проекции $Z \times I \to SZ$. Следовательно, $[z, 0] = [z_0, t] = [z', 1]$ для всех $z, z' \in Z$, $t \in I$. Точка $[z_0, 0] \in SZ$ обозначается также через z_0, и SZ рассматривается как пространство с отмеченной точкой z_0. Если задано отображение $f\colon Z \to Z'$, то формула $Sf[z, t] = [f(z), t]$ определяет отображение $Sf\colon SZ \to SZ'$. Таким образом, S — ковариантный функтор на категории пространств с отмеченной точкой и непрерывных отображений. Мы

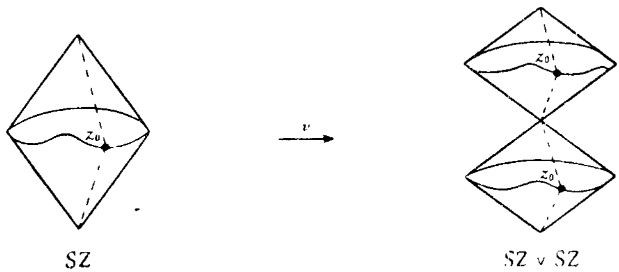


Рис. 3.

докажем, что этот функтор принимает значения в категории H-когрупп и гомоморфизмов. Для этого определим отображение

$$\nu\colon SZ \to SZ \vee SZ$$

формулой [1])

$$\nu([z, t]) = \begin{cases} ([z, 2t], z_0), & 0 \leqslant t \leqslant 1/2, \\ (z_0, [z_0, 2t-1]), & 1/2 \leqslant t \leqslant 1. \end{cases}$$

Как это отображение действует, показано на рис. 3 (пунктирные линии на самом деле стянуты в одну точку).

Отображение ν определяет на SZ структуру H-когруппы, такую, что для отображения $f\colon Z \to Z'$ отображение Sf есть гомоморфизм. Это можно проверить непосредственно или вывести из доказанных выше свойств пространства петель. Мы будем действовать вторым способом.

Функторы Ω и S, определенные на категории пространств с отмеченной точкой и непрерывных отображений, являются примерами *сопряженных функторов*. Это означает, что для любых пространств Z и Y имеет место эквивалентность

$$\hom(SZ, Y) \approx \hom(Z, \Omega Y),$$

где обе части следует рассматривать как множества морфизмов в категории пространств с отмеченной точкой и непрерывных

[1]) Здесь предполагается, что $SZ \vee SZ$ отождествляется с соответствующим подпространством произведения $SZ \times SZ$. — *Прим. ред.*

отображений. Эта эквивалентность есть следствие теоремы 2.8 введения; если задано отображение $g\colon Z \to \Omega Y$, то соответствующее отображение $g'\colon SZ \to Y$ определяется равенством $g'[z, t] = g(z)(t)$ $(z \in Z, t \in I)$. Очевидно, что если $h\colon Y \to Y'$, то $(\Omega h \circ g)' = h \circ g'$, и если $f\colon Z' \to Z$, то $(g \circ f)' = g' \circ Sf$. Значит, эквивалентность $g \longleftrightarrow g'$ есть следствие естественной эквивалентности функторов $\hom(S\cdot\,, \cdot)$ и $\hom(\cdot\,, \Omega\cdot)$.

Эта естественная эквивалентность сохраняется при переходе в категорию гомотопических типов пространств с отмеченной точкой. Для пространств с отмеченной точкой гомотопия $G\colon Z \times I \to Y$ должна отображать множество $z_0 \times I$ в точку y_0. Следовательно, она определяет отображение $F\colon Z \times I/z_0 \times I \to Y$. Пространство $S(Z \times I/z_0 \times I)$ можно отождествить с $SZ \times I/z_0 \times I$ при помощи гомеоморфизма

$$[(z, t), t'] \longleftrightarrow ([z, t'], t), \quad z \in Z;\ t,\ t' \in I.$$

Отсюда вытекает, что гомотопии $F\colon Z \times I/z_0 \times I \to \Omega Y$ находятся во взаимно однозначном соответствии с гомотопиями $F'\colon SZ \times \times I/z_0 \times I \to Y$. Следовательно, установленная выше эквивалентность дает эквивалентность

$$[SZ;\, Y] \approx [Z;\, \Omega Y],$$

такую, что если отображения $g\colon Z \to \Omega Y$ и $g'\colon SZ \to Y$ связаны равенством $g'[z, t] = g(z)(t)$, то $[g']$ соответствует $[g]$. Поэтому имеет место естественная эквивалентность функторов $[S\cdot\,;\,\cdot\,]$ и $[\,\cdot\,;\,\Omega\,\cdot\,]$.

Из этих замечаний вытекает, что для любого фиксированного пространства Z с отмеченной точкой функтор π_{SZ} естественно эквивалентен композиции функторов $\pi_Z \circ \Omega$. Здесь Ω следует рассматривать как функтор в категорию гомотопических типов H-групп и гомоморфизмов. В таком случае композиция $\pi_Z \circ \Omega$ принимает значения в категории групп и гомоморфизмов. По теореме 3 пространство SZ является H-когруппой, и определенное выше отображение $\nu\colon SZ \to SZ \vee SZ$ является коумножением H-когруппы SZ (или гомотопно ему). Аналогично, если имеется отображение $f\colon Z \to Z'$, то естественное преобразование $(Sf)^{\#}$ функтора $\pi_{SZ'}$ в функтор π_{SZ} соответствует естественному преобразованию $f^{\#}$ композиции $\pi_{Z'} \circ \Omega$ в композицию $\pi_Z \circ \Omega$. Поскольку последнее является естественным преобразованием в категории групп, то таким же является и $(Sf)^{\#}$. Значит, по теореме 4, Sf есть гомоморфизм H-когруппы SZ в H-когруппу SZ'.

Подытожим эти утверждения в следующей теореме:

5. Теорема. *Функтор надстройки S является ковариантным функтором из категории пространств с отмеченной точкой в категорию H-когрупп и непрерывных гомоморфизмов.* ■

Функтор S также сохраняет гомотопии. Точнее, если отображения f_0, f_1: $Z \to Z'$ связаны гомотопией f_t, то отображения Sf_0 и Sf_1 связаны гомотопией Sf_t, являющейся непрерывным гомоморфизмом при каждом $t \in I$.

Покажем теперь, что при $n \geqslant 1$ сферы S^n гомеоморфны надстройкам, и получим таким образом одно интересное семейство H-когрупп. Соответствующие функторы известны под названием функторов гомотопических групп и особенно важны в алгебраической топологии.

6. Лемма. *При $n \geqslant 0$ пространство $S(S^n)$ гомеоморфно S^{n+1}.*

Доказательство. Пусть $p_0 = (1, 0, \ldots, 0)$ — отмеченная точка сферы S^n. Рассмотрим $\mathbf{R}^{n+1}$ как подпространство в $\mathbf{R}^{n+2}$, состоящее из точек, $(n+2)$-я координата которых равна нулю. Тогда сфера S^n является экватором в S^{n+1}:

$$S^n = \{z \in \mathbf{R}^{n+2} \mid \|z\| = 1 \text{ и } z_{n+2} = 0\}.$$

Шар E^{n+1} также будем считать вложенным в E^{n+2}:

$$E^{n+1} = \{z \in \mathbf{R}^{n+2} \mid \|z\| \leqslant 1 \text{ и } z_{n+2} = 0\}.$$

Пусть H_+ и H_- — две замкнутые полусферы в S^{n+1}, ограниченные экватором S^n:

$$H_+ = \{z \in S^{n+1} \mid z_{n+2} \geqslant 0\} \quad \text{и} \quad H_- = \{z \in S^{n+1} \mid z_{n+2} \leqslant 0\},$$

причем $S^{n+1} = H_+ \cup H_-$ и $S^n = H_+ \cap H_-$. Более того, проекция $\mathbf{R}^{n+2} \to \mathbf{R}^{n+1}$ определяет проекции p_+: $H_+ \to E^{n+1}$ и p_-: $H_- \to E^{n+1}$, являющиеся гомеоморфизмами. Определим отображение f: $S(S^n) \to$ $\to S^{n+1}$ формулой

$$f[z, t] = \begin{cases} p_-^{-1}(2tz + (1-2t)p_0), & 0 \leqslant t \leqslant 1/2, \\ p_+^{-1}((2-2t)z + (2t-1)p_0), & 1/2 \leqslant t \leqslant 1. \end{cases}$$

Легко проверить, что мы получили гомеоморфизм f: $S(S^n) \approx$ $\approx S^{n+1}$. ■

При $n \geqslant 1$ функтор *n-й гомотопической группы* π_n является ковариантным функтором на категории гомотопических типов пространств с отмеченной точкой; $\pi_n = \pi S^n$. Из теорем 6 и 5 вытекает, что эти функторы принимают значения в категории групп и гомоморфизмов.

В последних двух параграфах этой главы мы дадим другое определение функтора π_1 и изучим его более детально. В гл. 7 мы вернемся к изучению высших гомотопических групп π_n.

Следующее необходимое и достаточное условие того, чтобы отображение $S^n \to X$ представляло единичный элемент группы $\pi_n(X)$, вытекает непосредственно из теоремы 1.3.12.

7. Теорема. *Отображение α: $S^n \to X$ тогда и только тогда представляет единичный элемент группы $\pi_n(X)$ $(n \geqslant 1)$, когда оно допускает непрерывное продолжение на E^{n+1}.* ■

Прежде чем закончить этот параграф, рассмотрим связь между двумя возможными структурами группы на множестве $[X; Y]$ для двух фиксированных пространств X и Y с отмеченной точкой (например, если X есть H-когруппа, а Y есть H-группа, то множество $[X; Y]$ можно наделить структурой группы двумя различными способами). Оказывается, что при довольно общих предположениях два закона композиции на множестве $\hom(X, Y)$ в некоторой категории совпадают. Докажем это утверждение.

8. Теорема. *Пусть X и Y — объекты некоторой категории, и пусть $*$ и $*'$ — два закона композиции на множестве $\hom(X, Y)$, такие, что*

(a) *$*$ и $*'$ имеют общую двустороннюю единицу;*

(b) *$*$ и $*'$ взаимно дистрибутивны.*

Тогда законы $*$ и $*'$ совпадают и каждый из них коммутативен и ассоциативен.

Доказательство. Условие (a) означает существование отображения f_0: $X \to Y$, такого, что для любого отображения f: $X \to Y$ имеют место равенства

$$f * f_0 = f_0 * f = f = f *' f_0 = f_0 *' f.$$

Условие (b) означает, что для отображений f_1, g_1, f_2, g_2: $X \to Y$ мы имеем

$$(f_1 * f_2) *' (g_1 * g_2) = (f_1 *' g_1) * (f_2 *' g_2).$$

Если f, g: $X \to Y$, то

$$f * g = (f *' f_0) * (f_0 *' g) = (f * f_0) *' (f_0 * g) = f *' g,$$
$$g * f = (f_0 *' g) * (f *' f_0) = (f_0 * f) *' (g * f_0) = f *' g.$$

Следовательно, $f * g = f *' g = g * f$. Ассоциативность доказывается так:

$$(f * g) * h = (f * g) *' (f_0 * h) = (f *' f_0) * (g *' h) = f * (g * h). \ \blacksquare$$

9. Следствие. *Для всякого H-пространства P и всякой H-когруппы Q множество $[Q; P]$ представляет собой абелеву группу, и структура группы определяется умножением в P.*

Доказательство. Утверждение вытекает из того, что два закона композиции на множестве $[Q; P]$, определенные коумножением в Q и умножением в P, удовлетворяют условиям теоремы 8. ■

Заметим, что если P является просто H-пространством (но не H-группой), то закон композиции на множестве $[X; P]$, определяемый умножением в P, вообще говоря, не будет структурой группы на $[X; P]$. Однако если X является H-когруппой (например, надстройкой), то из следствия 9 вытекает, что этот закон композиции представляет собой структуру группы на $[X; P]$. В этом случае структура группы на $[X; P]$ не зависит от выбора отображения, задающего умножение в P (как в H-пространстве).

10. Следствие. *Если P есть H-пространство, то группы $\pi_n(P)$ абелевы при всех $n \geqslant 1$, и структура группы в $\pi_n(P)$ определяется умножением в P.* ■

Для двойной надстройки $S(SZ)$, точки которой представляются в виде $[[z, t], t']$, где $z \in Z$ и $t, t' \in I$, существуют два закона композиции на множестве отображений $S(SZ) \to X$. Более точно, если даны два отображения $f, g\colon S(SZ) \to X$, то положим

$$(f * g)[[z, t], t'] = \begin{cases} f[[z, 2t], t'], & 0 \leqslant t \leqslant 1/2, \\ g[[z, 2t-1], t'], & 1/2 \leqslant t \leqslant 1; \end{cases}$$

$$(f *' g)[[z, t], t'] = \begin{cases} f[[z, t], 2t'], & 0 \leqslant t' \leqslant 1/2, \\ g[[z, t], 2t'-1], & 1/2 \leqslant t' \leqslant 1. \end{cases}$$

Соответствующие композиции в $[S(SZ); X]$ удовлетворяют предположениям теоремы 8. Следовательно, они совпадают, и $[S(SZ); X]$ — абелева группа. В частности, мы получаем такое утверждение:

11. Следствие. *Если $n \geqslant 2$, то π_n является функтором в категорию абелевых групп.* ■

Аналогичные рассуждения можно применить к пространству петель ΩP, где P само является H-пространством. В пространстве ΩP существует умножение, поскольку это пространство петель, и другое умножение, полученное из первоначального умножения на P. Соответствующие законы композиции на множестве $[X; \Omega P]$ удовлетворяют предположениям теоремы 8. Следовательно, если P есть H-пространство, то $\pi^{\Omega P}$ — контравариантный функтор в категорию абелевых групп.

§ 7. Фундаментальный группоид

В этом параграфе рассматриваются пути в топологическом пространстве. Это приводит к другому описанию (см. § 1.8) первой гомотопической группы π_1, определенной в § 1.6. Мы будем строить гомотопии между путями в произвольном топологическом пространстве, которые являются обобщениями (на незамкнутые пути) гомотопий, использованных в § 1.5 для доказательства того, что пространство петель является H-группой, и определяются теми же формулами (за исключением того, что аргументы t и t' меняются местами). Ясно, что этого переписывания формул можно было бы избежать, если, не обращаясь к пространству петель, доказать соответствующие общие результаты о пространствах путей. Однако есть надежда, что такое повторение поможет лучше понять эти формулы.

Группоидом называется малая категория, каждый морфизм которой является эквивалентностью. Перечислим без доказательства некоторые сведения о группоидах, непосредственно следующие из общих свойств категорий.

1. *Отношение между объектами A и B некоторого группоида, определяемое условием* $\hom(A, B) \neq \varnothing$, *является отношением эквивалентности.* ∎

Классы эквивалентности по этому отношению называются *компонентами* группоида. Группоид называется *связным*, если он имеет ровно одну компоненту.

2. *Для любого объекта A некоторого группоида закон композиции, сопоставляющий морфизмам f, g: $A \to A$ морфизм $f \circ g$: $A \to A$, является групповой операцией на множестве* $\hom(A, A)$. ∎

3. *На всяком группоиде определен ковариантный функтор в категорию групп и гомоморфизмов, сопоставляющий объекту A группу* $\hom(A, A)$, *а морфизму f: $A \to B$ — гомоморфизм*

$$h_f\colon \hom(A, A) \to \hom(B, B),$$

определенный равенством $h_f(g) = f \circ g \circ f^{-1}$ для g: $A \to A$. ∎

Поскольку каждый морфизм f: $A \to B$ группоида представляет собой эквивалентность, h_f: $\hom(A, A) \to \hom(B, B)$ — изоморфизм. Следующее утверждение описывает совокупность изоморфизмов, полученных с помощью всевозможных морфизмов f: $A \to B$.

4. *Если A и B принадлежат одной и той же компоненте группоида, то совокупность изоморфизмов $\{h_f \mid f\colon A \to B\}$ является классом сопряженности изоморфизмов* $\hom(A, A) \to \hom(B, B)$. ∎

5. *Пусть F — ковариантный функтор из группоида $\mathscr{C}$ в группоид $\mathscr{C}'$. Тогда F переводит каждую компоненту группоида $\mathscr{C}$ в некоторую компоненту группоида $\mathscr{C}'$, и существует естественное преобразование $F_*(A)$ ковариантного функтора* $\hom_{\mathscr{C}}(A, A)$ *на $\mathscr{C}$ в ковариантный функтор* $\hom_{\mathscr{C}'}(F(A), F(A))$ *на $\mathscr{C}'$:*

$$F_*(A)(f) = F(f)\colon F(A) \to F(A); \qquad f\colon A \to A. \ \blacksquare$$

Имея в виду эти общие замечания о группоидах, приступим к определению фундаментального группоида. *Путем* ω в топологическом пространстве X называется непрерывное отображение $\omega\colon I \to X$ (заметим, что путем называется именно отображение, а не его образ $\omega(I)$). *Началом* пути называется точка $\omega(0)$ (обозначается $\operatorname{orig}\omega$), а *концом* — точка $\omega(1)$ (обозначается $\operatorname{end}\omega$). Мы также будем говорить, что ω является *путем от* $\omega(0)$ *до* $\omega(1)$. *Замкнутым путем*, или *петлей, в точке* $x_0 \in X$ называется путь ω, для которого $\omega(0) = x_0 = \omega(1)$. Если ω и ω' — пути в X, такие, что конец ω совпадает с началом ω', то можно определить *произведение путей* $\omega * \omega'$ в X, полагая

$$(\omega * \omega')(t) = \begin{cases} \omega(2t), & 0 \leqslant t \leqslant 1/2, \\ \omega'(2t-1), & 1/2 \leqslant t \leqslant 1. \end{cases}$$

При этом начало пути $\omega * \omega'$ совпадает с началом ω, а конец — с концом ω'.

Нам хотелось бы построить категорию, объектами которой были бы точки пространства X, морфизмами объекта x_0 в x_1 — пути от x_0 до x_1, а композицией морфизмов — произведение путей. Однако так определенные объекты и морфизмы не удовлетворяют ни одной из аксиом теории категорий. В самом деле, не для всякой точки существует тождественный морфизм, и для произведения путей, вообще говоря, не выполняется закон ассоциативности (т. е. путь $\omega * (\omega' * \omega'')$, как правило, отличается от пути $(\omega * \omega') * \omega''$). Тем не менее категорию можно получить, если морфизмы определить не как пути, а как гомотопические классы путей.

Два пути ω и ω' в X для краткости называют *гомотопными* (обозначается $\omega \simeq \omega'$), если они гомотопны относительно $\dot{I}$. Таким образом, необходимым условием гомотопности $\omega \simeq \omega'$ является условие $\omega(0) = \omega'(0)$ и $\omega(1) = \omega'(1)$. Для любых точек x_0, $x_1 \in X$ отношение $\omega \simeq \omega'$ является отношением эквивалентности на множестве путей от x_0 до x_1. Соответствующие классы эквивалентности называются *классами путей*, и если ω — путь в X, то содержащий его класс обозначается символом $[\omega]$. Поскольку два пути, принадлежащие одному и тому же классу, имеют общие начало и конец, можно говорить о начале и конце класса путей.

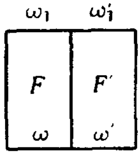
Мы построим категорию, объектами которой являются точки пространства X, а морфизмами объекта x_0 в x_1 — классы путей с началом x_0 и концом x_1. Следующая лемма показывает, что класс произведения двух путей зависит только от классов сомножителей, что будет использовано при определении композиции в этой категории.

6. Лемма. *Пусть* $[\omega]$ *и* $[\omega']$ — *классы путей в* X, *такие, что* $\operatorname{end}[\omega] = \operatorname{orig}[\omega']$. *Тогда существует корректно определенный класс* *путей* $[\omega]*[\omega'] = [\omega * \omega']$, *для которого* $\mathrm{orig}([\omega]*[\omega']) = \mathrm{orig}[\omega]$ *и* $\mathrm{end}([\omega]*[\omega']) = \mathrm{end}[\omega']$.

Доказательство. Докажем, что из $\omega \simeq \omega_1$ и $\omega' \simeq \omega_1'$ следует $\omega * \omega' \simeq \omega_1 * \omega_1'$. Пусть $F: I \times I \to X$ — гомотопия относительно $\dot{I}$ от ω к ω_1, и пусть $F': I \times I \to X$ — гомотопия относительно $\dot{I}$ от ω' к ω_1'. Гомотопия $F * F': I \times I \to X$ определяется по формуле

$$(F*F')(t, t') = \begin{cases} F(2t, t'), & 0 \leqslant t \leqslant 1/2, \\ F'(2t-1, t'), & 1/2 \leqslant t \leqslant 1, \end{cases}$$

как показано на диаграмме



$F * F'$

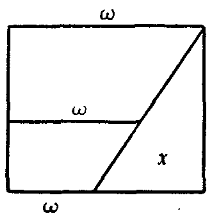
Следовательно, $F * F': \omega * \omega' \simeq \omega_1 * \omega_1' \operatorname{rel} \dot{I}$. ■

7. Теорема. *Для каждого топологического пространства* X *определена категория* $\mathscr{P}(X)$, *объектами которой являются точки пространства* X, *морфизмами объекта* x_0 *в* x_1 — *классы путей с началом* x_0 *и концом* x_1, *а композицией — произведение классов путей.*

Доказательство. Докажем существование тождественных морфизмов. Пусть $\varepsilon_x: I \to X$ для любого $x \in X$ — постоянное отображение I в точку x. Покажем, что $[\varepsilon_x] = 1_x$. Если ω — такой путь, что $\omega(1) = x$, то мы должны доказать, что $\omega * \varepsilon_x \simeq \omega$ (и аналогичное свойство для путей с началом в x). Такая гомотопия $F: I \times I \to X$ определяется по формуле

$$F(t, t') = \begin{cases} \omega\left(\dfrac{2t}{t'+1}\right), & 0 \leqslant t \leqslant \dfrac{t'+1}{2}, \\ x, & \dfrac{t'+1}{2} \leqslant t \leqslant 1, \end{cases}$$

как показано на диаграмме



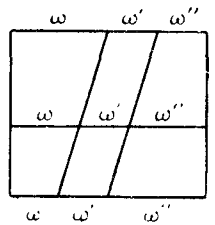
F

Аналогичная гомотопия показывает, что если $\omega(0) = x$, то $\varepsilon_x * \omega \simeq \omega$.

Докажем ассоциативность композиции морфизмов. Пусть ω, ω' и ω'' — такие пути, что $\operatorname{end}\omega = \operatorname{orig}\omega'$ и $\operatorname{end}\omega' = \operatorname{orig}\omega''$. Мы должны доказать, что $(\omega * \omega') * \omega'' \simeq \omega * (\omega' * \omega'')$. Соответствующая гомотопия $G\colon I \times I \to X$ определяется формулой

$$G(t, t') = \begin{cases} \omega\left(\dfrac{4t}{t'+1}\right), & 0 \leqslant t \leqslant \dfrac{t'+1}{4}, \\ \omega'(4t - t' - 1), & \dfrac{t'+1}{4} \leqslant t \leqslant \dfrac{t'+2}{4}, \\ \omega''\left(\dfrac{4t-2-t'}{2-t'}\right), & \dfrac{t'+2}{4} \leqslant t \leqslant 1, \end{cases}$$

как показано на диаграмме



C

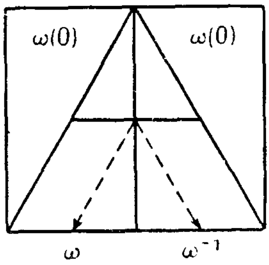
Категория $\mathscr{P}(X)$ называется *категорией классов путей* пространства X, или *фундаментальным группоидом* пространства X. Покажем, что $\mathscr{P}(X)$ — группоид.

8. Теорема. *Категория $\mathscr{P}(X)$ является группоидом.*

Доказательство. Для данного пути ω в X определим путь $\omega^{-1}\colon I \to X$ по формуле $\omega^{-1}(t) = \omega(1 - t)$ и докажем, что $[\omega^{-1}] = [\omega]^{-1}$ в $\mathscr{P}(X)$. Для этого мы должны показать, что $\omega * \omega^{-1} \simeq \varepsilon_{\omega(0)}$ (откуда будет следовать, что и $\omega^{-1} * \omega \simeq \varepsilon_{\omega(1)}$, поскольку $\omega = (\omega^{-1})^{-1}$). Нужная нам гомотопия $H\colon I \times I \to X$ определяется по формуле

$$H(t, t') = \begin{cases} \omega(0), & 0 \leqslant t \leqslant t'/2, \\ \omega(2t - t'), & t'/2 \leqslant t \leqslant 1/2, \\ \omega(2 - 2t - t'), & 1/2 \leqslant t \leqslant 1 - (t'/2), \\ \omega(0), & 1 - (t'/2) \leqslant t \leqslant 1, \end{cases}$$

как показано на диаграмме



H

Итак, мы построили фундаментальный группоид. Его компоненты называются *компонентами линейной связности* пространства X. Ясно, что точки x_0 и x_1 тогда и только тогда принадлежат одной и той же компоненте линейной связности пространства X, когда существует путь ω в X из x_0 в x_1. Пространство X называется *линейно связным*, если его фундаментальный группоид связен. Следующее предложение дает другое описание компонент линейной связности.

9. Теорема. *Компоненты линейной связности пространства* X *являются максимальными линейно связными подпространствами в X.*

Доказательство. Пусть A — компонента линейной связности пространства X, и пусть ω — такой путь в X, что $\omega(0) \in A$. Покажем, что ω является путем в A. Для каждого $t \in I$ определим путь ω_t: $I \to X$, полагая $\omega_t(t') = \omega(tt')$ $(t' \in I)$. Тогда ω_t является путем в X из $\omega(0)$ в $\omega(t)$. Следовательно, $\omega(t)$ принадлежит той же компоненте линейной связности, что и x_0, а именно A. Это верно для каждого $t \in I$, поэтому ω — путь в A.

Компонента A линейно связна: если $x_0, x_1 \in A$, то существует путь ω в X из x_0 в x_1. Как мы только что доказали, ω — путь в A. Следовательно, любые две точки из A можно соединить путем в A, и, значит, A линейно связна. Поскольку каждый путь в X, начинающийся в A, остается в A, A является максимальным линейно связным подмножеством в X. ■

10. Лемма. *Линейно связное пространство связно.*

Доказательство. Если ω — путь в X, то $\omega(I)$, будучи непрерывным образом связного пространства, связно. Следовательно, точки $\omega(0)$ и $\omega(1)$ принадлежат одной и той же компоненте связности пространства X. Если X линейно связно, то любые две его точки принадлежат одной и той же компоненте связности и, значит, X связно. ■

Обращение леммы 10 неверно, как показывает следующий пример:

11. Пример. Пусть X — подпространство пространства $\mathbf{R}^2$, определенное соотношением

$$X = \left\{ (x, y) \in \mathbf{R}^2 \,|\, x > 0, \quad y = \sin\frac{1}{x} \text{ или } x = 0, \ -1 \leqslant y \leqslant 1 \right\}.$$

Подпространство X связно, но не является линейно связным.

Для заданного отображения $f\colon X \to Y$ определим ковариантный функтор $f_{\#}$ из $\mathscr{P}(X)$ в $\mathscr{P}(Y)$, переводящий объект x категории $\mathscr{P}(X)$ в объект $f(x)$ категории $\mathscr{P}(Y)$, а морфизм $[\omega]$ категории $\mathscr{P}(X)$ в морфизм $f_{\#}[\omega] = [f \circ \omega]$ категории $\mathscr{P}(Y)$. Легко видеть, что отображение $f_{\#}$ действительно является функтором. С помощью первой части утверждения 5 или непосредственно легко установить, что f отображает каждую компоненту линейной связности пространства X в некоторую компоненту линейной связности пространства Y. Следовательно, определен ковариантный функтор π_0 из категории топологических пространств и непрерывных отображений в категорию множеств и функций, такой, что $\pi_0(X)$ есть множество компонент линейной связности пространства X, а отображение

$$\pi_0(f) = f_{\#}\colon \pi_0(X) \to \pi_0(Y)$$

переводит компоненту линейной связности пространства X, содержащую точку x, в компоненту линейной связности пространства Y, содержащую точку $f(x)$. Если $F\colon f_0 \simeq f_1$, то для каждой точки $x \in X$ существует путь ω_x в Y из $f_0(x)$ в $f_1(x)$, определенный равенством $\omega_x(t) = F(x, t)\ (t \in I)$. Следовательно, точки $f_0(x)$ и $f_1(x)$ принадлежат одной и той же компоненте линейной связности пространства Y и $f_{0\#} = f_{1\#}$. Отсюда вытекает, что π_0 можно рассматривать как ковариантный функтор из категории гомотопических типов в категорию множеств и функций. Этот функтор следующим образом характеризует функтор π_X для стягиваемых пространств X:

12. Теорема. *Если X — стягиваемое пространство, то функторы π_X и π_0 на категории гомотопических типов естественно эквивалентны.*

Доказательство. Если X и X' имеют один и тот же гомотопический тип, то функторы π_X и $\pi_{X'}$ естественно эквивалентны. Из следствия 1.3.11 вытекает, что для одноточечного пространства P функторы π_X и π_P естественно эквивалентны. Следовательно, достаточно доказать, что функторы π_P и π_0 естественно эквивалентны.

Множество $\pi_0(P)$ состоит из единственной компоненты линейной связности пространства P, и естественное преобразование

$$\psi\colon \pi_P \to \pi_0$$

определяется равенством $\psi[f] = f_{\#}(P)$ при $[f] \in [P; X]$. Поскольку множество X^P находится во взаимно однозначном соответствии с точками пространства X таким образом, что гомотопии $P \times I \to X$ соответствуют путям $I \to X$, то ψ — естественная эквивалентность. ■

Функтор π_0 тесно связан с функтором H_0 из примера 1.2.6. Действительно, для пространства X, компоненты связности которого совпадают с компонентами линейной связности, функтор H_0 представляет собой композицию π_0 и функтора, ставящего в соответствие каждому множеству абелеву группу, порожденную этим множеством. В частности, π_0 можно использовать для получения результатов § 1.2, которые были выведены при помощи функтора H_0.

§ 8. Фундаментальная группа

Выбирая фиксированную точку $x_0 \in X$ и рассматривая классы путей в X, имеющие точку x_0 своим началом и концом, мы получим группу, называемую фундаментальной группой. Мы докажем, что эта группа естественно изоморфна первой гомотопической группе π_1, определенной в § 1.6. В заключение этого параграфа мы вычислим фундаментальную группу окружности.

Пусть X — некоторое топологическое пространство, и пусть $x_0 \in X$. *Фундаментальной группой* пространства X в точке x_0 (обозначается $\pi(X, x_0)$) называется группа классов путей, начинающихся и кончающихся в точке x_0. Из теоремы 1.7.8 и предложения 1.7.2 вытекает, что это действительно группа и что для любого отображения $f\colon (X, x_0) \to (Y, y_0)$ морфизм $f_{\#}$ является гомоморфизмом группы $\pi(X, x_0)$ в группу $\pi(Y, y_0)$. Если отображения $f, f'\colon (X, x_0) \to (Y, y_0)$ гомотопны, то

$$f_{\#} = f'_{\#}\colon \pi(X, x_0) \to \pi(Y, y_0).$$

Таким образом, мы доказали следующую теорему:

1. Теорема. *Можно определить ковариантный функтор из категории гомотопических типов пространств с отмеченной точкой в категорию групп, сопоставляющий каждому пространству с отмеченной точкой его фундаментальную группу, а каждому отображению f гомоморфизм $f_{\#}$.* ■

Покажем теперь, что функтор фундаментальной группы π естественно эквивалентен функтору π_1, определенному в § 1.6. Пусть отображение $\lambda\colon I \to S(S^0)$ определено формулой $\lambda(t) = [-1, t]$, где S^0 состоит из двух точек -1 и 1, причем 1 — отмеченная точка.

Тогда λ индуцирует биективное соответствие $\lambda^{\#}$ между гомотопическими классами отображений $(S(S^0), 1) \to (X, x_0)$ и классами замкнутых путей в X в точке x_0, определенное формулой

$$\lambda^{\#}[g] = [g\lambda], \quad \text{где} \quad g\colon (S(S^0), 1) \to (X, x_0).$$

Из определения закона композиции на множестве $[S(S^0); X]$ и на множестве $\pi(X, x_0)$ видно, что $\lambda^{\#}$ является изоморфизмом групп. Для всякого отображения $f\colon (X, x_0) \to (Y, y_0)$ отображение $\lambda^{\#}$ коммутирует с $f_{\#}$. Кроме того, по лемме 1.6.6 пространство $S(S^0)$ гомеоморфно S^1.

2. Теорема. *Отображение $\lambda^{\#}$ является естественной эквивалентностью функтора π_1 первой гомотопической группы и функтора π фундаментальной группы.* ■

Иногда будет удобнее рассматривать элементы группы $\pi(X, x_0)$ как гомотопические классы отображений $(S^1, p_0) \to (X, x_0)$, а не как классы путей.

Поскольку всякий замкнутый путь в точке x_0 (и всякая гомотопия между такими путями) должен лежать в компоненте линейной связности A пространства X, содержащей точку x_0, мы имеем $\pi(A, x_0) \approx \pi(X, x_0)$. Следовательно, фундаментальная группа может дать информацию только о той компоненте линейной связности пространства X, которая содержит точку x_0. Из общих свойств группоидов мы заключаем (см. предложения 1.7.3 и 1.7.4), что если $[\omega]$ — класс путей в X с началом x_0 и концом x_1, то $h_{[\omega]}$ является изоморфизмом $\pi(X, x_1)$ на $\pi(X, x_0)$.

3. Теорема. *Фундаментальные группы линейно связного пространства в различных точках изоморфны при помощи изоморфизмов, определенных однозначно с точностью до сопряжения.* ■

Хотя фундаментальные группы в различных точках линейно связного пространства изоморфны, мы все-таки не можем отождествить их, поскольку этот изоморфизм не является единственным. Если фундаментальная группа в некоторой точке (а следовательно, и в любой другой точке) абелева, то все изоморфизмы совпадают. Вообще говоря, фундаментальная группа не обязательно абелева; тем не менее имеет место общий результат о коммутативности фундаментальной группы, вытекающий из теоремы 2 и следствия 1.6.10.

4. Теорема. *Фундаментальная группа в произвольной точке линейно связного H-пространства абелева, и если ω и ω' — замкнутые пути с началом и концом в этой точке, то*

$$[\omega] * [\omega'] = [\mu \circ (\omega, \omega')],$$

где μ — умножение в этом H-пространстве. ■

Пространство X называется *n-связным* ($n \geqslant 0$), если всякое непрерывное отображение $f\colon S^k \to X$ ($k \leqslant n$) можно непрерывно продолжить на E^{k+1}. Если $n = 1$, такое пространство называется *односвязным*. Заметим, что если $0 \leqslant m \leqslant n$, то n-связное пространство является также и m-связным. Из теоремы 1.6.7 вытекает, что пространство X тогда и только тогда является n-связным, когда оно линейно связно и когда все группы $\pi_k(X, x)$ ($x \in X$, $1 \leqslant l \leqslant n$) тривиальны. С помощью следствия 1.3.13 получаем такой результат:

5. Лемма. *Стягиваемое пространство является n-связным для каждого $n \geqslant 0$.* ■

Заметим, что пространство тогда и только тогда является 0-связным, когда оно линейно связно, а односвязным — тогда и только тогда, когда оно линейно связно и $\pi(X, x_0) = 0$ для некоторой (и тем самым для всякой) точки $x_0 \in X$.

Из теоремы 1 мы знаем, что два пространства с отмеченной точкой одного и того же гомотопического типа имеют изоморфные фундаментальные группы. Чтобы доказать аналогичный результат для двух линейно связных пространств, имеющих один и тот же гомотопический тип как пространства без отмеченной точки, нам понадобятся некоторые предварительные сведения.

6. Лемма. *Пусть задано отображение $h\colon I \times I \to X$, и пусть пути α_0, α_1, β_0 и β_1 в X определяются ограничением h на стороны квадрата $I \times I$ [т. е. $\alpha_i(t) = h(i, t)$, $\beta_i(t) = h(t, i)$]. Тогда $(\alpha_0 * \beta_1) * (\alpha_1^{-1} * \beta_0^{-1})$ — замкнутый путь в X в точке $h(0, 0)$, представляющий тривиальный элемент группы $\pi(X, h(0, 0))$.*

Доказательство. Пусть α'_0, α'_1, β'_0 и β'_1 — пути в $I \times I$, $\alpha'_i(t) = (i, t)$ и $\beta'_i(t) = (t, i)$. Тогда замкнутый путь $(\alpha'_0 * \beta'_1) * (\alpha_1'^{-1} * \beta_0'^{-1})$ в $I \times I$ отображением h переводится в путь $(\alpha_0 * \beta_1) * (\alpha_1^{-1} * \beta_0^{-1})$. Поскольку $I \times I$ — выпуклое подмножество пространства $\mathbf{R}^2$, оно стягиваемо и, следовательно (по лемме 5), односвязно. Значит,

$$(\alpha'_0 * \beta'_1) * (\alpha_1'^{-1} * \beta_0'^{-1}) \simeq \varepsilon_{(0,0)},$$

$$(\alpha_0 * \beta_1) * (\alpha_1^{-1} * \beta_0^{-1}) = h \circ \left((\alpha'_0 * \beta'_1) * (\alpha_1'^{-1} * \beta_0'^{-1}) \right) \simeq h \circ \varepsilon_{(0,0)} = \varepsilon_{h(0,0)}. \quad ■$$

7. Теорема. *Пусть отображения $f\colon (X, x_0) \to (Y, y_0)$ и $g\colon (X, x_0) \to (Y, y_1)$ гомотопны как отображения X в Y. Тогда в Y существует путь ω из y_0 в y_1, такой, что*

$$f_{\#} = h_{[\omega]} \circ g_{\#}\colon \pi(X, x_0) \to \pi(Y, y_0).$$

Доказательство. Пусть $F\colon X \times I \to Y$ — гомотопия между отображениями f и g, и пусть путь $\omega\colon I \to Y$ определен равенством

$\omega(t) = F(x_0, t)$. Тогда ω — путь в Y из y_0 в y_1. Если ω' — какой-нибудь замкнутый путь в X в точке x_0, то пусть гомотопия $h: I \times I \to Y$ определена равенством $h(t, t') = F(\omega'(t), t')$. Тогда $h(0, t') = F(x_0, t') = \omega(t')$, $h(t, 1) = g\omega'(t)$, $h(1, t') = \omega(t')$ и $h(t, 0) = f\omega'(t)$. Из леммы 6 получаем, что

$$(\omega * g\omega') * \left(\omega^{-1} * (f\omega')^{-1}\right) \simeq \varepsilon_{y_0}.$$

Отсюда вытекает, что $[\omega] \circ g_{\#}[\omega'] \circ [\omega]^{-1} = f_{\#}[\omega']$, т. е. $(h_{[\omega]} \circ g_{\#})[\omega'] = f_{\#}[\omega']$. Поскольку $[\omega']$ — произвольный элемент группы $\pi(X, x_0)$, имеем $h_{[\omega]} \circ g_{\#} = f_{\#}$. ■

8. **Теорема.** *Два линейно связных пространства одного и того же гомотопического типа имеют изоморфные фундаментальные группы.*

Доказательство. Пусть $f: X \to Y$ — гомотопическая эквивалентность с гомотопически обратным $g: Y \to X$. Пусть $x_0 \in X$; положим $y_0 = f(x_0)$, $x_1 = g(y_0)$ и $y_1 = f(x_1)$. Пусть $f_0: (X, x_0) \to (Y, y_0)$ и $f_1: (X, x_1) \to (Y, y_1)$ — отображения, определенные отображением f (т. е. f_0 и f_1 совпадают с f, но рассматриваются как отображения пар), и пусть $g': (Y, y_0) \to (X, x_1)$ — отображение, определенное отображением g. Тогда $g' \circ f_0: (X, x_0) \to (X, x_1)$ как отображение X в X гомотопно вложению $1_{(X, x_0)}: (X, x_0) \subset (X, x_0)$, а $f_1 \circ g': (Y, y_0) \to (Y, y_1)$ как отображение Y в Y гомотопно вложению $1_{(Y, y_0)}: (Y, y_0) \subset (Y, y_0)$. Из теоремы 7 вытекает существование пути ω в X из x_1 в x_0 и пути ω' в Y из y_1 в y_0, таких, что

$$h_{[\omega]} = (g' \circ f_0)_{\#} = g'_{\#} \circ f_{0\#} \quad \text{и} \quad h_{[\omega']} = (f_1 \circ g')_{\#} = f_{1\#} \circ g'_{\#}.$$

Следовательно, мы имеем коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
\pi(X, x_0) \arrow[r, "h_{[\omega]}"] \arrow[d, "f_{0\#}"'] & \pi(X, x_1) \arrow[d, "f_{1\#}"] \\
\pi(Y, y_0) \arrow[r, "h_{[\omega']}"'] \arrow[ur, "g'_{\#}"] & \pi(Y, y_1)
\end{tikzcd}$$

где $g'_{\#}$ — эпиморфизм, так как эпиморфизмом является $h_{[\omega]}$, и мономорфизм, так как мономорфизмом является $h_{[\omega']}$. Следовательно, $g'_{\#}$ — изоморфизм. ■

Закончим этот параграф примером пространства с нетривиальной фундаментальной группой. Для этого вычислим $\pi(S^1, p_0)$, где $S^1 = \{e^{i\theta}\}$, $p_0 = 1$, следуя методу, использованному Такером [1]).

[1]) См. Tucker A. W., Some topological properties of disk and sphere, Proceedings of the Canadian Mathematical Congress, 1945, pp. 285—309.

Экспоненциальное отображение ex: $\mathbf{R} \to S^1$ определяется формулой $ex(t) = e^{2\pi i t}$. Это отображение непрерывно, $ex(t_1 + t_2) = ex(t_1) \times ex(t_2)$ (где в правой части стоит умножение комплексных чисел), и равенство $ex(t_1) = ex(t_2)$ имеет место тогда и только тогда, когда разность $t_1 - t_2$ является целым числом. Отсюда вытекает, что ограничение $ex \mid (-1/2, 1/2)$ представляет собой гомеоморфизм открытого интервала $(-1/2, 1/2)$ на $S^1 - \{e^{\pi i}\}$. Определим отображение

$$lg\colon S^1 - \{e^{\pi i}\} \to (-1/2, 1/2)$$

как обратное к отображению $ex \mid (-1/2, 1/2)$.

Подмножество $X \subset \mathbf{R}^n$ называется *звездным* относительно точки $x_0 \in X$, если для любой точки $x \in X$ замкнутый отрезок $[x_0, x]$ принадлежит множеству X.

9. Лемма. *Пусть множество X компактно и звездно относительно точки $x_0 \in X$. Для любого непрерывного отображения $f\colon X \to S^1$ и любой точки $t_0 \in \mathbf{R}$, такой, что $ex(t_0) = f(x_0)$, существует непрерывное отображение $f'\colon X \to \mathbf{R}$, такое, что $f'(x_0) = t_0$ и $ex(f'(x)) = f(x)$ для всех точек $x \in X$.*

Доказательство. Ясно, что при помощи параллельного переноса можно добиться того, чтобы X стало звездным относительно начала координат; поэтому без ограничения общности можно считать, что $x_0 = 0$. Поскольку X компактно, функция f равномерно непрерывна, и, значит, существует такое $\varepsilon > 0$, что при $\|x - x'\| < \varepsilon$ имеет место неравенство $\|f(x) - f(x')\| < 2$ (т. е. точки $f(x)$ и $f(x')$ не являются диаметрально противоположными в S^1). Поскольку X ограничено, существует такое натуральное n, что $\|x\|/n < \varepsilon$ для всех $x \in X$. Тогда для всех $0 \leqslant j < n$ и всех $x \in X$ имеем

$$\left\| \frac{(j+1)x}{n} - \frac{jx}{n} \right\| = \frac{\|x\|}{n} < \varepsilon,$$

$$\left\| f\left(\frac{(j+1)x}{n}\right) - f\left(\frac{jx}{n}\right) \right\| < 2.$$

Отсюда вытекает, что частное $f\left(\frac{(j+1)x}{n}\right) \Big/ f\left(\frac{jx}{n}\right)$ принадлежит множеству $S^1 - \{e^{\pi i}\}$. Пусть отображение $g_j\colon X \to S^1 - \{e^{\pi i}\}$ $(0 \leqslant j < n)$ определено равенством $g_j(x) = f\left(\frac{(j+1)x}{n}\right) \Big/ f\left(\frac{jx}{n}\right)$. Тогда для всех точек $x \in X$ имеем

$$f(x) = f(0)\, g_0(x)\, g_1(x) \ldots g_{n-1}(x).$$

Определим отображение $f'\colon X \to \mathbf{R}$, полагая

$$f'(x) = t_0 + lg(g_0(x)) + lg(g_1(x)) + \ldots + lg(g_{n-1}(x)).$$

Являясь суммой $n+1$ непрерывных отображений X в $\mathbf{R}$, отображение f' само непрерывно. Ясно, что $f'(0)=t_0$ и $ex(f'(x))=f(x)$. ■

10. Лемма. *Пусть X — связное пространство, и пусть отображения $f', g'\colon X \to \mathbf{R}$ таковы, что $ex\circ f' = ex\circ g'$ и $f'(x_0)=g'(x_0)$ для некоторой точки $x_0 \in X$. Тогда $f'=g'$.*

Доказательство. Положим $h=f'-g'\colon X\to\mathbf{R}$. Поскольку $ex\circ f' = ex\circ g'$, $ex\circ h$ является постоянным отображением X в p_0. Следовательно, h — непрерывное отображение X в $\mathbf{R}$, принимающее лишь целые значения. Так как пространство X связно, то отображение h постоянно, а поскольку $h(x_0)=0$, то $h(x)=0$ для всех $x\in X$. ■

Пусть $\alpha\colon I\to S^1$ — замкнутый путь в точке p_0. Поскольку отрезок I — звездное множество относительно точки 0 и $\alpha(0)=p_0=ex(0)$, из леммы 9 вытекает существование отображения $\alpha'\colon I\to\mathbf{R}$, такого, что $\alpha'(0)=0$ и $ex\circ\alpha'=\alpha$. По лемме 10 отображение α' однозначно определяется этими условиями. Поскольку $ex(\alpha'(1))=p_0$, отсюда вытекает, что $\alpha'(1)$ — целое число. Определим *степень* отображения α равенством $\deg\alpha=\alpha'(1)$.

11. Лемма. *Пусть α и β — замкнутые гомотопные пути в S^1 в точке p_0. Тогда $\deg\alpha=\deg\beta$.*

Доказательство. Пусть $F\colon I\times I\to S^1$ — гомотопия относительно $\dot I$ от α до β. Поскольку $I\times I$ — звездное подмножество пространства $\mathbf{R}^2$ относительно точки $(0,0)$, из леммы 9 вытекает существование отображения $F'\colon I\times I\to\mathbf{R}$, такого, что $F'(0,0)=0$ и $ex\circ F'=F$. Поскольку F — гомотопия относительно $\dot I$, имеем $F(0,t')=F(1,t')=p_0 (t'\in I)$. Следовательно, отображения $F'(0,t')$ и $F'(1,t')$ принимают только целые значения для всех $t'\in I$. Отсюда вытекает, что $F'(0,t')$ и $F'(1,t')$ — постоянные отображения. Так как $F'(0,0)=0$, то $F'(0,t')=0$ для всех $t'\in I$. Определим отображения α', $\beta'\colon I\to\mathbf{R}$, полагая $\alpha'(t)=F'(t,0)$ и $\beta'(t)=F'(t,1)$. Следовательно, $\alpha'(0)=0$ и $ex\circ\alpha'=\alpha$. Значит, $\deg\alpha=\alpha'(1)=F'(1,0)$. Аналогично $\beta'(0)=0$ и $ex\circ\beta'=\beta$, так что $\deg\beta=\beta'(1)=F'(1,1)$. Поскольку отображение $F'(1,t')$ постоянно, имеем $F'(1,0)=F'(1,1)$ и $\deg\alpha=\deg\beta$. ■

Отсюда вытекает, что существует корректно определенная функция deg из $\pi(S^1,p_0)$ в $\mathbf{Z}$, заданная равенством

$$deg([\alpha])=\deg\alpha,$$

где α — замкнутый путь в S^1 в точке p_0.

12. Теорема. *Функция deg осуществляет изоморфизм*

$$deg\colon \pi(S^1,\ p_0)\approx\mathbf{Z}.$$

Доказательство. Покажем, что deg — гомоморфизм. Пусть α и β — два замкнутых пути в S^1 в точке p_0, и пусть $\alpha\cdot\beta$ — поточечное произведение этих путей относительно умножения в S^1. Нам известно (теорема 4), что $[\alpha]*[\beta]=[\alpha\cdot\beta]$. Пусть отображения $\alpha', \beta'\colon I\to\mathbf{R}$ таковы, что $\alpha'(0)=0$, $ex\circ\alpha'=\alpha$, $\beta'(0)=0$ и $ex\circ\beta'=\beta$. Тогда отображение $\alpha'+\beta'\colon I\to\mathbf{R}$ обладает свойствами $(\alpha'+\beta')(0)=0$ и $ex\circ(\alpha'+\beta')=\alpha\cdot\beta$. Следовательно,

$$deg([\alpha]*[\beta])=deg[\alpha\cdot\beta]=(\alpha'+\beta')(1)=$$
$$=\deg\alpha+\deg\beta=deg([\alpha])+deg([\beta]).$$

Это показывает, что deg — гомоморфизм.

Функция deg является эпиморфизмом: для каждого целого n определим путь α'_n в $\mathbf{R}$, полагая $\alpha'_n(t)=tn$. Пусть $\alpha_n=ex\circ\alpha'_n$. Тогда ясно, что $deg([\alpha_n])=\alpha'_n(1)=n$.

Функция deg является мономорфизмом. В самом деле, если $deg([\alpha])=0$, то существует замкнутый путь α' в $\mathbf{R}$ в точке 0, такой, что $ex\circ\alpha'=\alpha$. Поскольку $\mathbf{R}$ односвязно (так как $\mathbf{R}$ стягиваемо и можно применить лемму 5), $\alpha'\simeq\varepsilon_0$. Значит, $ex\circ\alpha'\simeq\varepsilon_{p_0}$. Следовательно, $\alpha\simeq\varepsilon_{p_0}$, и $[\alpha]$ — единичный элемент группы $\pi(S^1, p_0)$. ■

Метод, который мы использовали для вычисления группы $\pi(S^1, p_0)$, будет обобщен в гл. 2 для выяснения связей между фундаментальной группой пространства и фундаментальными группами его накрывающих пространств.

Из теоремы 2 вытекает, что $\pi(S^1, p_0)\approx[S^1, p_0;\ S^1, p_0]$. Поскольку S^1 — топологическая группа, множество $[S^1;\ S^1]$ (без использования отмеченных точек) также является группой относительно поточечного умножения отображений, и существует очевидный гомоморфизм

$$\gamma\colon [S^1,\ p_0;\ S^1,\ p_0]\to[S^1;\ S^1].$$

13. Лемма. *Гомоморфизм*

$$\gamma\colon [S^1,\ p_0;\ S^1,\ p_0]\to[S^1;\ S^1]$$

является изоморфизмом.

Доказательство. Покажем, что γ — эпиморфизм. Пусть задано отображение $f\colon S^1\to S^1$, и пусть $f(p_0)=e^{i\theta}$ для некоторого $0\leqslant\theta<2\pi$. Определим гомотопию $F\colon S^1\times I\to S^1$, полагая

$$F(z,\ t)=f(z)\cdot e^{-it\theta}.$$

Тогда F является гомотопией от f до такого отображения f', что $f'(p_0)=p_0$. Следовательно, $\gamma[f']_{p_0}=[f']=[f]$.

Покажем, что γ — мономорфизм. Пусть отображение $f\colon (S^1, p_0)\to(S^1, p_0)$ таково, что $\gamma[f]_{p_0}=[f]$ — тривиальный элемент. Тогда отображение $f: S^1 \to S^1$ гомотопно постоянному отображению. По теореме 1.3.12 отображение f гомотопно постоянному отображению относительно p_0. Следовательно, $[f]_{p_0}$ — тривиальный элемент. ■

Из теоремы 12 и леммы 13 вытекает, что $[S^1; S^1] \approx \mathbf{Z}$. Для каждого целого n отображение $z \to z^n$ окружности S^1 в себя представляет гомотопический класс, соответствующий числу n при построенном нами изоморфизме.

УПРАЖНЕНИЯ

A. Стягиваемые пространства

1. *Конусом* над топологическим пространством X с *вершиной* v называется цилиндр постоянного отображения $X \to v$. Докажите, что пространство X стягиваемо тогда и только тогда, когда оно является ретрактом всякого конуса над X.

2. Докажите, что сфера S^n тогда и только тогда является ретрактом шара E^{n+1}, когда она стягиваема.

3. Докажите, что если CX — конус над X, то пара (CX, X) обладает свойством продолжения гомотопии относительно любого пространства.

4. Докажите, что пространство Y стягиваемо тогда и только тогда, когда для всякой пары (X, A), обладающей свойством продолжения гомотопии относительно Y, любое отображение $A \to Y$ можно продолжить на все X.

5. Пусть Y — гребенка из примера 1.3.9, и пусть y_0 — точка $(0, 1) \in Y$. Пусть Y' — другой экземпляр пространства Y с соответствующей точкой y_0'. Пусть пространство X получено из несвязной суммы пространств Y и Y' отождествлением точек y_0 и y_0'. Докажите, что пространство X n-связно для всех n, но не стягиваемо. [*Указание*. Любое стягивание X по себе должно быть гомотопией относительно y_0.]

B. Приклеивание пространств

1. Пусть A — подпространство пространства X, и пусть $f: A \to Y$ — непрерывное отображение. Говорят, что пространство Z есть результат *приклеивания* пространства X к пространству Y по отображению f, если оно получено из несвязной суммы X и Y отождествлением точек $x \in A$ с точками $f(x) \in Y$ для всех $x \in A$. Докажите, что если X и Y — нормальные пространства и A замкнуто в X, то Z — нормальное пространство.

2. Пространство X называется *бинормальным*, если $X \times I$ — нормальное пространство. Докажите, что если X — бинормальное пространство, Y — нормальное пространство, а отображение $f: X \to Y$ непрерывно, то цилиндр отображения f есть нормальное пространство.

3. Пусть задано непрерывное отображение $f: A \to Y$, где A — подпространство пространства X. Докажите, что отображение f тогда и только тогда можно продолжить на все X, когда пространство Y является ретрактом результата приклеивания пространства X к Y по отображению f.

4. Пусть Z — результат приклеивания пространства X к пространству Y по некоторому отображению $f\colon A \to Y$. Докажите, что пара (Z, Y) тогда и только тогда обладает свойством продолжения гомотопии относительно некоторого пространства W, когда пара (X, A) обладает этим свойством относительно W.

C. Абсолютные ретракты и абсолютные окрестностные ретракты

Пространство Y называется *абсолютным ретрактом* (соответственно *абсолютным окрестностным ретрактом*), если для всякого нормального пространства X, его замкнутого подмножества $A \subset X$ и непрерывного отображения $f\colon A \to Y$ существует продолжение f на все X (соответственно на некоторую окрестность множества A в X).

1. Докажите, что нормальное пространство Y является абсолютным ретрактом (соответственно абсолютным окрестностным ретрактом) тогда и только тогда, когда при любом вложении Y как замкнутого подмножества в нормальное пространство Z пространство Y является ретрактом Z (соответственно ретрактом некоторой окрестности Y в Z).

2. Докажите, что произведение любого числа абсолютных ретрактов (соответственно конечного числа абсолютных окрестностных ретрактов) также является абсолютным ретрактом (соответственно абсолютным окрестностным ретрактом).

3. Докажите, что пространства $\mathbf{R}^n$ являются абсолютными ретрактами при всех n.

4. Докажите, что ретракт абсолютного ретракта также является абсолютным ретрактом и что ретракт всякого открытого подмножества абсолютного окрестностного ретракта также является абсолютным окрестностным ретрактом.

5. Докажите, что при всех n шар E^n является абсолютным ретрактом, а сфера S^n — абсолютным окрестностным ретрактом.

6. Докажите, что бинормальный абсолютный окрестностный ретракт *локально стягиваем* (т. е. для любой точки x каждая ее окрестность U содержит окрестность V точки x, деформируемую в x внутри U).

7. Докажите, что бинормальный абсолютный окрестностный ретракт является абсолютным ретрактом тогда и только тогда, когда он стягиваем.

D. Продолжение гомотопии

1. Пусть A — замкнутое подмножество нормального пространства X, отображение $f\colon X \to Y$ непрерывно (здесь пространство Y произвольно), и пусть $G\colon A \times I \to Y$ — гомотопия ограничения $f|A$. Покажите, что если существует гомотопия $G'\colon U \times I \to Y$ отображения $f|U$, продолжающая G, где U — некоторая открытая окрестность A, то существует гомотопия $F\colon X \times I \to Y$ отображения f, продолжающая G.

2. *Теорема Борсука о продолжении гомотопии.* Пусть A — замкнутое подпространство бинормального пространства X. Тогда пара (X, A) обладает свойством продолжения гомотопии относительно любого абсолютного окрестностного ретракта Y.

3. Пусть A — замкнутое подмножество бинормального пространства X, и пусть подпространство $A \times I \cup X \times 0 \subset X \times I$ представляет собой абсолютный окрестностный ретракт. Тогда пара (X, A) обладает свойством продолжения гомотопии относительно любого пространства Y.

4. Пусть A — замкнутое подмножество пространства X, а B — некоторое подмножество пространства Y. Предположим, что пара (X, A) обладает свойством продолжения гомотопии относительно B, а пара $(X \times I, X \times \dot{I} \cup A \times I)$ — относительно Y. Докажите, что если отображение $f\colon (X, A) \to (Y, B)$ гомотопно (как отображение пар) некоторому отображению, переводящему X в B, то оно гомотопно такому отображению уже относительно A.

E. Корасслоения

1. Докажите, что всякое корасслоение является инъективным отображением.

2. Докажите, что композиция корасслоений является корасслоением.

3. Докажите, что для любого пространства X и его подпространства A вложение $A \subset X$ тогда и только тогда является корасслоением, когда $X \times 0 \cup A \times I$ — ретракт $X \times I$.

4. Пусть A — подпространство хаусдорфова пространства X. Докажите, что если $A \subset X$ — корасслоение, то A замкнуто в X.

5. Предположим, что пространство X является объединением замкнутых подмножеств X_1 и X_2, и пусть подмножество $A \subset X$ таково, что $X_1 \cap X_2 \subset A$. Докажите, что если вложения $A \cap X_1 \subset X_1$ и $A \cap X_2 \subset X_2$ являются корасслоениями, то этим свойством обладает и вложение $A \subset X$.

6. Пусть A — замкнутое подпространство пространства X. Докажите эквивалентность следующих условий [1]:

(a) вложение $A \subset X$ является корасслоением;

(b) существуют деформация $D\colon X \times I \to X \operatorname{rel} A$ (т. е. $D(x, 0) = x$ и $D(a, t) = a$ при $x \in X$, $a \in A$ и $t \in I$) и отображение $\varphi\colon X \to I$, такие, что $A = \varphi^{-1}(1)$ и $D(\varphi^{-1}(0, 1] \times 1) \subset A$;

(c) существуют окрестность U подпространства A, деформируемая внутри X в A относительно A (т. е. существует гомотопия $H\colon U \times I \to X$, такая, что $H(x, 0) = x$, $H(a, t) = a$ и $H(x, 1) \in A$ при $x \in U$, $a \in A$ и $t \in I$), и отображение $\varphi\colon X \to I$, такое, что $A = \varphi^{-1}(1)$ и $\varphi(x) = 0$, если $x \in X - U$.

7. Докажите, что если вложения $A \subset X$ и $B \subset Y$ являются корасслоениями, где A и B замкнуты соответственно в X и Y, то вложения $A \times B \subset X \times B \cup A \times Y$ и $X \times B \cup A \times Y \subset X \times Y$ также являются корасслоениями.

F. Локальные системы [2]

1. *Локальной системой* на пространстве X называется ковариантный функтор из фундаментального группоида пространства X в некоторую категорию. Покажите, что для всякой категории $\mathscr{C}$ существует категория локальных систем на X со значениями в $\mathscr{C}$. [Две локальные системы на X называются *эквивалентными*, если они представлены эквивалентными объектами этой категории.]

2. Пусть задано некоторое отображение $f\colon X \to Y$. Покажите, что f индуцирует ковариантный функтор из категории локальных систем на Y со значениями в $\mathscr{C}$ в категорию локальных систем на X со значениями в $\mathscr{C}$.

3. Если A — объект категории $\mathscr{C}$, то пусть $\operatorname{Aut} A$—группа его самоэквивалентностей. Покажите, что если $\varphi\colon A \approx B$ — эквивалентность в $\mathscr{C}$, то отображение

[1] Для нормального пространства X эквивалентность условий (a) и (c) доказана в статье: Young G. S., A condition for the absolute homotopy extension property, *Am. Math. Monthly*, 71 (1964), 896—897.

[2] См. Steenrod N. E., Homology with local coefficients, *Ann. Math.*, 44 (1943), 610—627.

$\bar{\varphi}$: $\operatorname{Aut} A \to \operatorname{Aut} B$, определенное формулой $\bar{\varphi}(\alpha) = \varphi \circ \alpha \circ \varphi^{-1}$, является изоморфизмом.

4. Покажите, что если Γ — локальная система на X и $x_0 \in X$, то Γ индуцирует гомоморфизм

$$\overline{\Gamma}_{x_0}\colon \pi(X, x_0) \to \operatorname{Aut} \Gamma(x_0).$$

5. Докажите, что для линейно связного пространства X две локальные системы Γ и Γ' на X со значениями в $\mathscr{C}$ эквивалентны тогда и только тогда, когда существует эквивалентность φ: $\Gamma(x_0) \approx \Gamma'(x_0)$, такая, что гомоморфизмы $\bar{\varphi} \circ \overline{\Gamma}_{x_0}$ и $\overline{\Gamma}'_{x_0}$ являются сопряженными в $\operatorname{Aut} \Gamma'(x_0)$.

6. Пусть заданы линейно связное пространство X, объект $A \in \mathscr{C}$ и некоторый гомоморфизм α: $\pi(X, x_0) \to \operatorname{Aut} A$. Докажите, что существует локальная система Γ на X со значениями в $\mathscr{C}$, такая, что $\Gamma(x_0) = A$ и $\overline{\Gamma}_{x_0} = \alpha$.

G. Фундаментальная группа

1. Докажите, что функтор фундаментальной группы коммутирует с прямыми произведениями.

2. Докажите, что если ω и ω' — пути в X из x_0 в x_1, то $\omega \simeq \omega'$ тогда и только тогда, когда $\omega * \omega'^{-1} \simeq \varepsilon_{x_0}$.

3. Пусть пространство X является объединением двух открытых односвязных подмножеств U и V, пересечение которых $U \cap V$ непусто и линейно связно. Докажите, что в этом случае X односвязно.

4. Докажите, что сфера S^n односвязна при $n \geqslant 2$.

5. Докажите, что если существует пространство с неабелевой фундаментальной группой, то «восьмерка» (т. е. пространство, полученное объединением двух окружностей с одной общей точкой) имеет неабелеву фундаментальную группу (ср. упражнение 2.B.4).

6. Пусть f: $I \to \mathbf{R}^2$ — непрерывно дифференцируемая простая замкнутая кривая на плоскости с не обращающимся в нуль касательным вектором (т. е. $f(0) = f(1)$, $f'(0) = f'(1)$ и $f'(t) \neq 0$ при $0 \leqslant t \leqslant 1$). Пусть ω: $I \to S^1$ — замкнутый путь, определенный формулой $\omega(t) = f'(t)/\|f'(t)\|$. Докажите, что $[\omega]$ — образующая группы $\pi(S^1)$ [1]).

7. Пусть X — подмножество плоскости, представляющее собой объединение окружностей C_n радиуса $1/n$ с центром $(1/n, 0)$ для всех натуральных n. Пусть Y — подмножество пространства $\mathbf{R}^3$ (в которое $\mathbf{R}^2$ вложена как плоскость $x_3 = 0$), состоящее из замкнутых отрезков, соединяющих точку $(0, 0, 1)$ с X, а Y' — отражение множества Y относительно начала координат. Тогда Y и Y' — замкнутые односвязные подмножества пространства $\mathbf{R}^3$, такие, что пересечение $Y \cap Y'$ состоит из одной точки. Докажите, что пространство $Y \cup Y'$ не односвязно [2]).

---

[1]) См. Hopf H., Über die Drehung der Tangenten und Sehnen ebener Kurven, *Compositio Math.*, **2** (1935), 50—62. По поводу обобщений см. Whitney H., On regular closed curves in the plane, *Compositio Math.*, **4** (1937), 276—284, и Smale S., Regular curves on Riemannian manifolds, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **87** (1958), 495—512.

[2]) См. Griffiths H. B., The fundamental group of two spaces with a common point, *Quarterly J. Math.*, **5** (1954), 175—190.

H. Некоторые приложения фундаментальной группы

1. Докажите, что S^1 не является ретрактом E^2.

2. Докажите, что S^1 и S^n (при $n \geqslant 2$) не могут иметь один и тот же гомотопический тип.

3. Докажите, что $\mathbf{R}^2$ и $\mathbf{R}^n$ $(n > 2)$ не гомеоморфны.

4. Пусть $p(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0$ — полином степени n с комплексными коэффициентами, имеющий коэффициент 1 при старшем члене, и пусть $q(z) = z^n$. При $r > 0$ положим $C_r = \{x \in \mathbf{R}^2 \mid \| x \| = r\}$. Докажите, что если r достаточно велико, то $p \mid C_r$ и $q \mid C_r$ — гомотопные отображения C_r в $\mathbf{R}^2 - 0$.

5. *Основная теорема алгебры.* Докажите, что всякий полином с комплексными коэффициентами имеет корень. [*Указание.* Для любого $r > 0$ отображение $q \mid C_r \colon C_r \to \mathbf{R}^2 - 0$ не гомотопно нулю, ибо оно индуцирует нетривиальный гомоморфизм фундаментальных групп.]

Глава 2

НАКРЫВАЮЩИЕ ПРОСТРАНСТВА И РАССЛОЕНИЯ

Теория накрывающих пространств важна не только в топологии, но и в дифференциальной геометрии, теории функций комплексного переменного, теории групп Ли. Эта теория излагается здесь по той причине, что функтор фундаментальной группы позволяет полностью свести задачи теории накрытий к соответствующим алгебраическим задачам. Это обстоятельство оправдывает и наш интерес к функтору фундаментальной группы.

В этой главе наряду с изложением теории накрывающих пространств вводятся тесно связанные с ней понятия расслоенного пространства [1]) и расслоения. Эти понятия будут рассмотрены позднее в ином аспекте, а пока мы будем придерживаться взгляда, что некоторые расслоения (а именно обладающие свойством единственности накрывающего пути) являются обобщенными накрывающими пространствами. По этой причине такие расслоения будут рассмотрены подробно.

Накрывающие пространства определяются в § 2.1, а расслоения — в § 2.2, где доказывается, что каждое накрывающее пространство является расслоением. В § 2.3 исследуются соотношения между фундаментальными группами пространства расслоения и базы для расслоений, удовлетворяющих свойству единственности накрывающего пути; § 2.4 содержит решение задачи поднятия для таких расслоений в терминах функтора фундаментальной группы.

Теорема о поднятии применяется в § 2.5 к задаче классификации накрывающих пространств над связным локально линейно связным пространством в терминах подгрупп его фундаментальной группы. Это позволяет построить накрывающее пространство по данному пространству и по данной подгруппе его фундаментальной группы. В § 2.6 рассматривается обратная задача, т. е. исходное пространство строится по данному накрывающему пространству и подходящей группе преобразований, действующей на этом пространстве.

В § 2.7 определяются расслоенные пространства как естественное обобщение накрывающих пространств. Главным результатом

---

[1]) Так мы переводим термин fiber bundle. Иногда fiber bundle переводят *косое произведение*. — *Прим. ред.*

этого параграфа является теорема о том, что локальные расслоения являются расслоениями. Из этого вытекает, что расслоенное пространство над паракомпактной базой является расслоением. В § 2.8 рассматриваются свойства общих расслоений, а также понятие послойной гомотопической эквивалентности. Это понадобится нам при дальнейшем изучении теории гомотопий.

§ 1. Накрывающие отображения

Накрывающее отображение — это непрерывное отображение, являющееся локальным гомеоморфизмом. В настоящем параграфе определяются это и связанные с ним понятия, приводятся их элементарные свойства и некоторые примеры.

Пусть $p\colon \tilde{X} \to X$ — непрерывное отображение. Говорят, что открытое множество $U \subset X$ *просто накрыто* отображением p, если $p^{-1}(U)$ представляет собой несвязную сумму открытых подмножеств пространства $\tilde{X}$, таких, что ограничение отображения p на каждое из них есть гомеоморфизм на множество U. Ясно, что если U просто накрыто отображением p, то и каждое открытое подмножество множества U просто накрыто отображением p. Непрерывное отображение $p\colon \tilde{X} \to X$ называется *накрывающим отображением*, если каждая точка $x \in X$ имеет окрестность, просто накрытую отображением p. В этом случае $\tilde{X}$ называется *накрывающим пространством*, а X — *базой* накрывающего отображения p.

Приведем несколько примеров накрывающих отображений.

1. Всякий гомеоморфизм есть накрывающее отображение.

2. Если $\tilde{X}$ есть произведение X и дискретного пространства, то естественная проекция $\tilde{X} \to X$ является накрывающим отображением.

3. Отображение $ex\colon \mathbf{R} \to S^1$, определенное формулой $ex(t) = e^{2\pi i t}$ (см. § 1.8), является накрывающим отображением.

4. Для любого натурального n отображение $p\colon S^1 \to S^1$, определенное равенством $p(z) = z^n$, является накрывающим отображением.

5. Для любого целого $n \geqslant 1$ отображение $p\colon S^n \to \mathbf{R}P^n$, получающееся отождествлением диаметрально противоположных точек, является накрывающим отображением.

6. Если G — некоторая топологическая группа, H — ее дискретная подгруппа, а G/H — пространство левых (или правых) смежных классов, то проекция $G \to G/H$ является накрывающим отображением.

Непрерывное отображение $f\colon Y \to X$ называется *локальным гомеоморфизмом*, если каждая точка $y \in Y$ имеет открытую окрестность, которую f гомеоморфно отображает на некоторое открытое подмножество пространства X. Если это так, то каждая точка пространства Y имеет сколь угодно малые окрестности, обладающие указанным свойством, и мы получаем следующее утверждение:

7. Лемма. *Локальный гомеоморфизм является открытым отображением.* ■

8. Лемма. *Накрывающее отображение является локальным гомеоморфизмом.*

Доказательство. Пусть $p\colon \tilde{X} \to X$ — накрывающее отображение, и пусть $\tilde{x} \in \tilde{X}$. Пусть U — какая-нибудь открытая окрестность точки $p(\tilde{x})$, просто накрытая отображением p. Тогда $p^{-1}(U)$ является несвязной суммой открытых множеств, каждое из которых p гомеоморфно отображает на U. Пусть $\tilde{U}$ — то из этих множеств, которое содержит точку $\tilde{x}$. Тогда $\tilde{U}$ является открытой окрестностью точки $\tilde{x}$, для которой $p|\tilde{U}$ — гомеоморфизм множества $\tilde{U}$ на открытое подмножество U пространства X. ■

Как видно из следующего примера, локальный гомеоморфизм может и не быть накрывающим отображением.

9. Пример. Пусть $p\colon (0, 3) \to S^1$ — ограничение отображения $ex\colon \mathbf{R} \to S^1$ примера 3 на открытый интервал $(0, 3)$. Являясь ограничением локального гомеоморфизма на открытое подмножество, отображение p также представляет собой локальный гомеоморфизм. Кроме того, оно сюръективно, однако не может быть накрывающим отображением, поскольку комплексное число $1 \in S^1$ не имеет окрестности, просто накрытой отображением p.

Следующее предложение вытекает из лемм 7, 8 и сюръективности накрывающего отображения (последнее следует непосредственно из определения).

10. Следствие. *Накрывающее отображение представляет базу в качестве факторпространства своего накрывающего пространства.* ■

Как показывает следующая теорема, для локально связного пространства накрывающее отображение сводится к ограничениям на компоненты связности.

11. Теорема. *Если X локально связно, то непрерывное отображение $p\colon \tilde{X} \to X$ тогда и только тогда является накрывающим ото-*

бражением, когда для каждой компоненты связности C пространства X отображение

$$p \mid p^{-1}(C) \colon p^{-1}(C) \to C$$

есть накрывающее отображение.

Доказательство. Пусть p — накрывающее отображение, C — компонента связности пространства X, $x \in C$ и U — открытая окрестность точки x, просто накрытая отображением p. Пусть V — компонента связности множества U, содержащая точку x. Поскольку X локально связно, V открыто в X, а следовательно, также и в C. Ясно, что V просто накрыто отображением $p|p^{-1}(C)$ и, значит, $p|p^{-1}(C)$ — накрывающее отображение.

Обратно, предположим, что $p|p^{-1}(C)\colon p^{-1}(C) \to C$ является накрывающим отображением на каждой компоненте связности C пространства X. Пусть $x \in C$, и пусть U — открытая окрестность точки x в C, просто накрытая отображением $p|p^{-1}(C)$. Поскольку X локально связно, C открыто в X. Значит, U открыто также и в X и просто накрыто отображением p. Следовательно, p — накрывающее отображение. ∎

Вообще говоря, представление прообраза просто накрытого открытого множества в виде несвязной суммы открытых подмножеств, каждое из которых гомеоморфно отображается на него, не единственно (рассмотрите случай просто накрытого дискретного множества); однако в случае связных просто накрытых открытых множеств существует следующее описание этих открытых подмножеств:

12. Лемма. *Пусть U — открытое связное подмножество пространства X, просто накрытое непрерывным отображением $p\colon \tilde{X} \to X$. Тогда p гомеоморфно отображает каждую компоненту связности множества $p^{-1}(U)$ на U.*

Доказательство. По предположению $p^{-1}(U)$ является несвязной суммой открытых подмножеств, каждое из которых p гомеоморфно отображает на U. Поскольку U связно, каждое из этих открытых подмножеств тоже связно. Поскольку все они открыты и не пересекаются, каждое из них является компонентой связности множества $p^{-1}(U)$. ∎

13. Следствие. *Рассмотрим коммутативную диаграмму*

$$\begin{tikzcd} \tilde{X}_1 \arrow[rr, "p"] \arrow[dr, "p_1"'] & & \tilde{X}_2 \arrow[dl, "p_2"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

где X локально связно, а p_1 и p_2 — накрывающие отображения.

Если p сюръективно, то оно тоже является накрывающим отображением.

Доказательство. Если U — связное открытое подмножество пространства X, просто накрытое отображениями p_1 и p_2, то из леммы 12 легко получить, что каждая компонента связности множества $p_2^{-1}(U)$ просто накрыта отображением p.■

14. Теорема. *Если p: $\tilde{X} \to X$ — накрывающее отображение с локально связной базой, то для любой компоненты связности $\tilde{C}$ пространства $\tilde{X}$ отображение*

$$p|\tilde{C}\colon \tilde{C} \to p(\tilde{C})$$

является накрывающим отображением на некоторую компоненту связности пространства X.

Доказательство. Пусть $\tilde{C}$ — некоторая компонента связности пространства $\tilde{X}$. Мы покажем, что $p(\tilde{C})$ — компонента связности пространства X. Прежде всего множество $p(\tilde{C})$ связно. Покажем, что оно открыто и замкнуто в X. Пусть точка x принадлежит замыканию множества $p(\tilde{C})$, и пусть U — открытая связная окрестность точки x, просто накрытая отображением p. Поскольку U пересекается с $p(\tilde{C})$, $p^{-1}(U)$ пересекается с $\tilde{C}$. Следовательно, некоторая компонента связности $\tilde{U}$ множества $p^{-1}(U)$ пересекается с $\tilde{C}$. Поскольку $\tilde{C}$ — компонента связности $\tilde{X}$, имеем $\tilde{U} \subset \tilde{C}$. Отсюда по лемме 12 получаем, что $p(\tilde{C}) \supset p(\tilde{U}) = U$. Следовательно, замыкание множества $p(\tilde{C})$ содержится в его внутренности, откуда вытекает, что $p(\tilde{C})$ открыто и замкнуто. Те же самые рассуждения показывают, что если $x \in p(\tilde{C})$ и U — открытая связная окрестность точки x в X, просто накрытая отображением p, то $U \subset p(\tilde{C})$ и $(p|\tilde{C})^{-1}(U)$ — несвязная сумма тех компонент связности множества $p^{-1}(U)$, которые пересекаются с $\tilde{C}$. Из леммы 12 следует, что U просто накрыто отображением $p|\tilde{C}$. Следовательно, $p|\tilde{C}$: $\tilde{C} \to p(\tilde{C})$ — накрывающее отображение.■

Следующий пример показывает, что обращение теоремы 14 неверно.

15. Пример. Пусть $X = S^1 \times S^1 \times \ldots$ — произведение счетного числа окружностей, и для $n \geqslant 1$ положим $\tilde{X}_n = \mathbf{R}^n \times S^1 \times S^1 \times \ldots$. Определим отображение p_n: $\tilde{X}_n \to X$, полагая

$$p_n(t_1, \ldots, t_n, z_1, z_2, \ldots) = (ex(t_1), \ldots, ex(t_n), z_1, z_2, \ldots).$$

Пусть $\tilde{X} = \bigvee \tilde{X}_n$; определим отображение p: $\tilde{X} \to X$ таким образом, чтобы $p|\tilde{X}_n = p_n$. Компонентами связности пространства $\tilde{X}$ являются пространства $\tilde{X}_n$, и отображение $p|\tilde{X}_n = p_n$: $\tilde{X}_n \to X$ представляет собой накрывающее отображение. Однако p не является накрывающим отображением, поскольку никакое открытое подмножество пространства X не может быть просто накрыто отображением p.

Для дальнейшего нам хотелось бы иметь аналоги теорем 11 и 14, в которых слова «компонента связности» были бы заменены словами «компонента линейной связности». Для этого понадобится следующее определение: топологическое пространство называется *локально линейно связным*, если компоненты линейной связности его открытых подмножеств также открыты. Следующие предложения вытекают непосредственно из этого определения.

16. *Любое открытое подмножество локально линейно связного пространства само локально линейно связно.* ■

17. *Локально линейно связное пространство является локально связным.* ■

18. *В локально линейно связном пространстве компоненты связности и компоненты линейной связности совпадают.* ■

19. *Связное локально линейно связное пространство является линейно связным.* ■

Из утверждений 17 и 18 мы получаем следующий аналог теорем 11 и 14.

20. Теорема. *Если X локально линейно связно, то непрерывное отображение p: $\tilde{X} \to X$ тогда и только тогда является накрывающим отображением, когда для каждой компоненты линейной связности A пространства X отображение*

$$p \mid p^{-1}(A)\colon\ p^{-1}(A) \to A$$

представляет собой накрывающее отображение. Если в этом случае $\tilde{A}$ — некоторая компонента линейной связности пространства $\tilde{X}$, то $p|\tilde{A}$ — накрывающее отображение $\tilde{A}$ на некоторую компоненту линейной связности пространства X. ■

§ 2. Свойство накрывающей гомотопии

Свойство накрывающей гомотопии двойственно свойству продолжения гомотопии. Оно приводит к понятию расслоения, которое двойственно понятию корасслоения, введенному в § 1.4. В этом параграфе мы определяем понятие расслоения и доказываем, что накрывающее отображение является частным случаем расслоения. Этот специальный класс расслоений будет рассматриваться как обобщение накрывающих отображений, и наше дальнейшее изучение накрывающих отображений будет основано на исследовании этого более общего понятия. В конце главы мы вернемся к общему изучению расслоений.

Мы начинаем с важной задачи алгебраической топологии, называемой задачей поднятия, которая двойственна задаче продолжения. Пусть $p\colon E \to B$ и $f\colon X \to B$ — некоторые отображения. *Задача поднятия* отображения f состоит в том, чтобы определить, существует ли непрерывное отображение $f'\colon X \to E$, для которого $f = p \circ f'$, т. е. существует ли непрерывное отображение, обозначенное пунктирной стрелкой на диаграмме

$$\begin{tikzcd} & E \arrow[d, "p"] \\ X \arrow[ur, dashed, "f'"] \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd}$$

для которого эта диаграмма коммутативна. Если такое отображение f' существует, то говорят, что f можно *поднять* в E, и называют f' *поднятием* отображения f. Для того чтобы задача поднятия была задачей в категории гомотопических типов, нам необходим аналог свойства продолжения гомотопии, называемый свойством накрывающей гомотопии и определяемый следующим образом. Говорят, что отображение $p\colon E \to B$ обладает *свойством накрывающей гомотопии относительно пространства* X, если для любых отображений $f'\colon X \to E$ и $F\colon X \times I \to B$, таких, что $F(x, 0) = pf'(x)$, $x \in X$, существует отображение $F'\colon X \times I \to E$, для которого $F'(x, 0) = f'(x)$ при $x \in X$ и $p \circ F' = F$. Если f' рассматривать как отображение $X \times 0$ в E, то существование F' равносильно существованию отображения, изображенного пунктирной стрелкой на диаграмме

$$\begin{tikzcd} X \times 0 \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "\cap"] & E \arrow[d, "p"] \\ X \times I \arrow[ur, dashed] \arrow[r, "F"'] & B \end{tikzcd}$$

и делающего ее коммутативной.

Если отображение $p\colon E \to B$ обладает свойством накрывающей гомотопии относительно X, а отображения $f_0, f_1\colon X \to B$ гомотопны, то очевидно, что отображение f_0 можно поднять в E тогда и только тогда, когда f_1 можно поднять в E. Следовательно, возможность поднятия отображения $X \to B$ в E является свойством гомотопического класса этого отображения. Поэтому свойство накрывающей гомотопии переводит задачу поднятия отображения $X \to B$ в задачу на категории гомотопических типов.

Отображение $p\colon E \to B$ называется *расслоением* (или иногда *расслоенным пространством в смысле Гуревича*), если p обладает свойством накрывающей гомотопии относительно любого пространства. Пространство E называется *пространством расслоения*, а B — *базой* этого расслоения. Для $b \in B$ множество $p^{-1}(b)$ называется *слоем над точкой* b.

Если $p\colon E \to B$ — расслоение, то любой путь ω в B, такой, что $\omega(0) \in p(E)$, можно поднять до пути в E. В самом деле, путь ω

можно рассматривать как гомотопию ω: $P \times I \to B$, где P — одноточечное пространство, а точка $e_0 \in E$, такая, что $p(e_0) = \omega(0)$, соответствует отображению f: $P \to E$, для которого $pf(P) = \omega(P \times 0)$. Из того, что p обладает свойством накрывающей гомотопии, вытекает существование пути $\tilde{\omega}$ в E, для которого $\tilde{\omega}(0) = e_0$ и $p \circ \tilde{\omega} = \omega$. Тогда $\tilde{\omega}$ — поднятие пути ω.

1. Пример. Пусть F — произвольное пространство, и пусть p: $B \times F \to B$ — проекция на первый сомножитель. Тогда p — расслоение и слой над произвольной точкой $b \in B$ гомеоморфен F.

Для доказательства того, что накрывающие отображения являются расслоениями, мы прежде всего установим *свойство единственности поднятия* накрывающих отображений для связных пространств.

2. Теорема. *Пусть p: $\tilde{X} \to X$ — накрывающее отображение, и пусть f, g: $Y \to \tilde{X}$ — поднятия одного и того же отображения* (т. е. $p \circ f = p \circ g$). *Если пространство Y связно, а отображения f и g совпадают в некоторой точке из Y, то $f = g$.*

Доказательство. Пусть $Y_1 = \{y \in Y \mid f(y) = g(y)\}$. Покажем, что Y_1 открыто в Y. Если $y \in Y_1$, то пусть U — открытая окрестность точки $pf(y)$, просто накрытая отображением p. Пусть открытое подмножество $\tilde{U}$ пространства $\tilde{X}$, содержащее точку $f(y)$, таково, что p гомеоморфно отображает $\tilde{U}$ на U. Тогда $f^{-1}(\tilde{U}) \cap g^{-1}(\tilde{U})$ — открытое подмножество из Y, содержащее y и содержащееся в Y_1.

Пусть $Y_2 = \{y \in Y \mid f(y) \neq g(y)\}$. Покажем, что множество Y_2 также открыто в Y (если бы мы предположили, что $\tilde{X}$ — хаусдорфово пространство, это следовало бы из общих свойств хаусдорфовых пространств). Пусть $y \in Y_2$, и пусть U — открытая окрестность точки $pf(y)$, просто накрытая отображением p. Поскольку $f(y) \neq g(y)$, существуют открытые непересекающиеся подмножества $\tilde{U}_1$ и $\tilde{U}_2$ пространства $\tilde{X}$, такие, что $f(y) \in \tilde{U}_1$, $g(y) \in \tilde{U}_2$ и p гомеоморфно отображает каждое из них на U. Тогда $f^{-1}(\tilde{U}_1) \cap g^{-1}(\tilde{U}_2)$ — открытое подмножество из Y, содержащее y и содержащееся в Y_2.

Поскольку $Y = Y_1 \cup Y_2$ и открытые множества Y_1 и Y_2 не пересекаются, из связности пространства Y вытекает, что либо $Y_1 = \varnothing$, либо $Y_1 = Y$. По предположению $Y_1 \neq \varnothing$, значит, $Y_1 = Y$ и $f = g$. ■

Теперь мы в состоянии доказать, что накрывающее отображение обладает свойством накрывающей гомотопии.

3. Теорема. *Накрывающее отображение является расслоением.*

Доказательство. Пусть p: $\tilde{X} \to X$ — накрывающее отображение, и пусть отображения f': $Y \to \tilde{X}$ и F: $Y \times I \to X$ таковы, что $F(y, 0) = pf'(y)$ при $y \in Y$. Мы покажем, что для каждой точки $y \in Y$ существуют такая открытая окрестность N_y точки y в Y и такое отображение F'_y: $N_y \times I \to \tilde{X}$, что $F'_y(y', 0) = f'(y')$ $(y' \in N_y)$ и $pF'_y = F \mid N_y \times I$. Предположим, что мы уже имеем такие окрестности N_y и отображения F'_y. Если $y'' \in N_y \cap N_{y'}$, то отображения $F'_y \mid y'' \times I$ и $F'_{y'} \mid y'' \times I$ связного пространства $y'' \times I$ в $\tilde{X}$ таковы, что при $t \in I$ имеют место равенства

$$p \circ (F'_y \mid y'' \times I)(y'', t) = F(y'', t) = p \circ (F'_{y'} \mid y'' \times I)(y'', t).$$

Поскольку $(F'_y \mid y'' \times I)(y'', 0) = f'(y'') = (F'_{y'} \mid y'' \times I)(y'', 0)$, из теоремы 2 вытекает, что $F'_y \mid y'' \times I = F'_{y'} \mid y'' \times I$. Так как это верно для любых точек $y'' \in N_y \cap N_{y'}$, то $F'_y \mid (N_y \cap N_{y'}) \times I = F'_{y'} \mid (N_y \cap N_{y'}) \times I$. Следовательно, существует непрерывное отображение F': $Y \times I \to \tilde{X}$, для которого $F' \mid N_y \times I = F'_y$, и F' является поднятием отображения F, таким, что $F'(y, 0) = f'(y)$ при $y \in Y$. Итак, теорема сведена к построению открытых окрестностей N_y и отображений F'_y.

Из того что p: $\tilde{X} \to X$ — накрывающее отображение (а также из компактности отрезка I), вытекает, что для каждой точки $y \in Y$ существуют ее открытая окрестность N_y и последовательность $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_m = 1$ точек отрезка I, такие, что при $i = 1, \ldots, m$ множество $F(N_y \times [t_{i-1}, t_i])$ содержится в некотором открытом подмножестве пространства X, просто накрытом отображением p. Покажем, что существует отображение F'_y: $N_y \times I \to \tilde{X}$ с нужными свойствами. Для этого достаточно определить отображения

$$G_i\colon N_y \times [t_{i-1}, t_i] \to \tilde{X}, \quad i = 1, \ldots, m,$$

для которых

$$\begin{aligned} &p \circ G_i = F \mid N_y \times [t_{i-1}, t_i], \\ &G_1(y', 0) = f'(y'), \qquad y' \in N_y, \\ &G_{i-1}(y', t_{i-1}) = G_i(y', t_{i-1}), \quad y' \in N_y, \quad i = 2, \ldots, m, \end{aligned}$$

так как набор таких отображений G_i позволяет определить отображение F'_y: $N_y \times I \to \tilde{X}$ по формуле $F'_y \mid N_y \times [t_{i-1}, t_i] = G_i$ и такие отображения F'_y обладают требуемыми свойствами.

Отображения G_i определяются индукцией по i. Для определения G_1 возьмем открытое подмножество U пространства X, просто накрытое отображением p и такое, что $F(N_y \times [t_0, t_1]) \subset U$. Пусть $\{\tilde{U}_j\}$ — совокупность непересекающихся открытых подмножеств пространства $\tilde{X}$, таких, что $p^{-1}(U) = \bigcup \tilde{U}_j$ и p гомеоморфно отображает $\tilde{U}_j$ на U для всех j. Пусть $V_j = f'^{-1}(\tilde{U}_j)$. Тогда $\{V_j\}$ — совокупность непересекающихся открытых множеств, покрывающих N_y. Пусть G_1 — единственное отображение, которое для каждого j переводит $V_j \times [t_0, t_1]$ в $\tilde{U}_j$ и является поднятием отображения $F | V_j \times [t_0, t_1]$. Тем самым G_1 определено.

Предположим, что G_{i-1} уже определено для $1 < i \leqslant m$. Пусть U' — открытое подмножество пространства X, просто накрытое отображением p и такое, что $F(N_y \times [t_{i-1}, t_i]) \subset U'$. Пусть $\{\tilde{U}'_k\}$ — совокупность непересекающихся открытых множеств пространства $\tilde{X}$, таких, что $p^{-1}(U') = \bigcup \tilde{U}'_k$ и p гомеоморфно отображает $\tilde{U}'_k$ на U' для каждого k. Пусть $V'_k = \{y' \in N_y \mid G_{i-1}(y', t_{i-1}) \subset \tilde{U}'_k\}$. Тогда $\{V'_k\}$ — совокупность непересекающихся открытых множеств, покрывающих N_y. Определим G_i как единственное отображение, которое для каждого k переводит $V'_k \times [t_{i-1}, t_i]$ в $\tilde{U}'_k$, поднимая отображение $F | V'_k \times [t_{i-1}, t_i]$. Это полностью определяет G_i. ■

Говорят, что отображение p: $E \to B$ обладает *свойством единственности накрывающего пути*, если для любых путей ω и ω' в E, таких, что $p \circ \omega = p \circ \omega'$ и $\omega(0) = \omega'(0)$, имеет место равенство $\omega = \omega'$. Из теоремы 2 вытекает, что накрывающее отображение обладает свойством единственности накрывающего пути.

4. Лемма. *Если отображение обладает свойством единственности накрывающего пути, то оно также обладает свойством единственности поднятия для любого линейно связного пространства.*

Доказательство. Пусть отображение p: $E \to B$ обладает свойством единственности накрывающего пути. Пусть Y — линейно связное пространство, и пусть отображения f, g: $Y \to E$ таковы, что $p \circ f = p \circ g$ и $f(y_0) = g(y_0)$ для некоторой точки $y_0 \in Y$. Мы должны убедиться в том, что $f = g$. Пусть $y \in Y$, и пусть ω — путь в Y от y_0 до y. Тогда $f \circ \omega$ и $g \circ \omega$ — пути в E, являющиеся поднятиями одного и того же пути из B и имеющие общее начало. Поскольку p обладает свойством единственности накрывающего пути, $f \circ \omega = g \circ \omega$. Следовательно,

$$f(y) = (f \circ \omega)(1) = (g \circ \omega)(1) = g(y). \ ■$$

Следующая теорема характеризует расслоения со свойством единственности накрывающего пути.

5. Теорема. *Расслоение обладает свойством единственности накрывающего пути тогда и только тогда, когда в каждом слое все пути постоянны.*

Доказательство. Пусть расслоение p: $E \to B$ обладает свойством единственности накрывающего пути. Пусть ω — путь в слое $p^{-1}(b)$, и пусть ω' — постоянный путь в слое $p^{-1}(b)$, такой что $\omega'(0)=\omega(0)$. Тогда $p\circ\omega=p\circ\omega'$, откуда вытекает, что $\omega=\omega'$. Следовательно, ω — постоянный путь.

Обратно, предположим, что $p\colon E\to B$ — расслоение, в каждом слое которого все пути постоянны. Пусть пути ω и ω' в E таковы, что $p\circ\omega=p\circ\omega'$ и $\omega(0)=\omega'(0)$. При $t\in I$ определим путь ω''_t в E по формуле

$$\omega''_t(t')=\begin{cases}\omega((1-2t')t), & 0\leqslant t'\leqslant 1/2,\\ \omega'((2t'-1)t), & 1/2\leqslant t'\leqslant 1.\end{cases}$$

Тогда ω''_t — путь в E от $\omega(t)$ до $\omega'(t)$, а $p\circ\omega''_t$ — замкнутый путь в B, гомотопный относительно $\dot I$ постоянному пути в точке $p(\omega(t))$. Поскольку p обладает свойством накрывающей гомотопии, существует отображение $F'\colon I\times I\to E$, такое, что $F'(t',0)=\omega''_t(t')$ и F' переводит множество $0\times I\cup I\times 1\cup 1\times I$ в слой $p^{-1}(p(\omega(t)))$. Поскольку слой $p^{-1}(p\omega(t))$ не имеет непостоянных путей, F' отображает $0\times I$, $I\times 1$ и $1\times I$ в одну и ту же точку. Поэтому $F'(0,0)=F'(1,0)$. Следовательно, $\omega''_t(0)=\omega''_t(1)$ и $\omega(t)=\omega'(t)$. ■

Мы уже видели, что накрывающие отображения являются расслоениями со свойством единственности накрывающего пути. В § 2.4 мы покажем, что при некоторых слабых ограничениях на базу любое расслоение со свойством единственности накрывающего пути является накрывающим отображением. Одна из причин изучения расслоений со свойством единственности накрывающего пути как обобщенных накрывающих отображений состоит в том, что для них легко доказать следующие две теоремы, которые для накрывающих отображений неверны:

6. Теорема. *Композиция расслоений (со свойством единственности накрывающего пути) является расслоением (со свойством единственности накрывающего пути).* ■

7. Теорема. *Произведение расслоений (со свойством единственности накрывающего пути) является расслоением (со свойством единственности накрывающего пути).* ■

Следующий пример показывает, что для накрывающих отображений теорема 6 неверна.

8. Пример. Пусть пространства X и X_n $(n\geqslant 1)$ являются счетными произведениями окружностей. Пусть $\tilde X_n=\mathbf{R}^n\times X$; определим отображение $p_n\colon \tilde X_n\to X_n$, полагая

$$p_n(t_1\,\ldots,\,t_n,\,z_1,\,z_2,\,\ldots)=(ex(t_1),\,\ldots,\,ex(t_n),\,z_1,\,z_2,\,\ldots).$$

Тогда p_n — накрывающее отображение $(n\geqslant 1)$. Из теоремы 2.1.11 вытекает, что $\vee p_n\colon \vee\tilde X_n\to\vee X_n$ также является накрывающим отображением. Поскольку $\vee X_n$ — произведение пространства X и множества целых положительных чисел, то можно определить накрывающее отображение $\vee X_n \to X$ (см. пример 2.1.2). Композиция

$$\vee \tilde{X}_n \to \vee X_n \to X$$

не является накрывающим отображением (ср. пример 2.1.15).

Теорема 7 также неверна для накрывающих отображений.

9. Пример. Пусть для $n \geqslant 1$ накрывающее отображение p_n: $\tilde{X}_n \to X_n$ определено отображением ex: $\mathbf{R} \to S^1$. Тогда

$$\prod p_n: \prod \tilde{X}_n \to \prod X_n$$

не является накрывающим отображением.

Из теоремы 6 вытекает, что можно определить категорию, объектами которой являются топологические пространства, а морфизмами — расслоения со свойством единственности накрывающего пути. Из теоремы 7 вытекает, что в этой категории существуют произведения. Легко проверить, что в ней существуют также и суммы. Сейчас мы определим категорию, зависящую от данной базы, которая нам очень поможет при изучении накрывающих отображений или расслоений. Для заданного пространства X построим категорию, объектами которой служат отображения p: $\tilde{X} \to X$, являющиеся расслоениями со свойством единственности накрывающего пути, а морфизмами — коммутативные диаграммы

$$\begin{tikzcd} \tilde{X}_1 \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "p_1"'] & & \tilde{X}_2 \arrow[dl, "p_2"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

Пусть p_j: $\tilde{X}_j \to X$ — некоторое множество объектов этой категории; определим отображение p: $\vee \tilde{X}_j \to X$ таким образом, чтобы выполнялось условие $p|\tilde{X}_j = p_j$. Тогда p также является объектом этой категории и представляет собой сумму семейства $\{p_j\}$.

Докажем, что в этой категории можно определить также и произведения. Рассмотрим отображения p_j: $\tilde{X}_j \to X$ и положим

$$\tilde{X} = \{(x_j) \in \prod \tilde{X}_j \mid p_j(x_j) = p_{j'}(x_{j'}) \text{ для всех } j,\ j'\}.$$

Определим отображение p: $\tilde{X} \to X$ равенством $p((x_j)) = p_j(x_j)$. Если каждое p_j является расслоением, то и p — расслоение, и если каждое p_j обладает свойством единственности накрывающего пути, то p тоже обладает этим свойством. Следовательно, p есть произведение семейства объектов $\{p_j\}$ в категории расслоений со свойством единственности накрывающего пути. Это отображение p называется *расслоенным произведением* отображений $\{p_j\}$. Мы рассмотрим его более подробно в § 2.8.

Можно определить аналогичную категорию, объектами которой являются накрывающие отображения с базой X, а морфизмами — коммутативные диаграммы. Эта категория допускает конечные суммы и произведения; произвольные суммы и произведения в этой категории, вообще говоря, не существуют. Действительно, определим для каждого n отображение

$$p_n\colon \mathbf{R}^n \times S^1 \times S^1 \times \ldots \to S^1 \times S^1 \times \ldots,$$

полагая $p_n(t_1, \ldots, t_n, z_1, z_2, \ldots) = \left(e^{2\pi i t_1}, \ldots, e^{2\pi i t_n}, z_1, z_2, \ldots\right)$, как в примере 8. Для совокупности $\{p_n\}$ в категории накрывающих отображений с базой X не существует ни суммы, ни произведения.

§ 3. Связь с фундаментальной группой

Для расслоений со свойством единственности накрывающего пути фундаментальная группа пространства расслоения изоморфна некоторой подгруппе фундаментальной группы базы. Рассмотрение соответствующих подгрупп фундаментальной группы приводит к классификации таких расслоений. Более того, в следующем параграфе мы увидим, что функтор фундаментальной группы полностью решает задачу поднятия для расслоений со свойством единственности накрывающего пути. Этот параграф посвящен выяснению связи между фундаментальными группами пространства расслоения и базы для расслоений со свойством единственности накрывающего пути.

Прежде всего отметим одно локальное свойство расслоений, аналогичное доказанному в теореме 2.1.14.

1. Лемма. *Пусть $p\colon E \to B$ — некоторое расслоение. Если A — произвольная компонента линейной связности пространства E, то $p(A)$ — компонента линейной связности пространства B и $p|A\colon A \to p(A)$ — расслоение.*

Доказательство. Множество $p(A)$, будучи образом при непрерывном отображении линейно связного пространства, само линейно связно. Это максимальное линейно связное подмножество в B. Действительно, если ω — путь в B, начинающийся в $p(A)$, то существует поднятие $\tilde{\omega}$ пути ω, начинающееся в A. Поскольку A — компонента линейной связности пространства E, путь $\tilde{\omega}$ принадлежит A. Следовательно, $\omega = p \circ \tilde{\omega}$ — путь в $p(A)$, т. е. $p(A)$ — максимальное линейно связное подмножество пространства B и, значит, по теореме 1.7.9, — компонента линейной связности пространства B.

Покажем, что отображение $p|A\colon A \to p(A)$ обладает свойством накрывающей гомотопии. Пусть отображения $f'\colon Y \to A$ и

$F\colon Y \times I \to p(A)$ таковы, что $F(y, 0) = p(f'(y))$. Поскольку p — расслоение, существует отображение $F'\colon Y \times I \to E$, для которого $p \circ F' = F$ и $F'(y, 0) = f'(y)$. Для любой точки $y \in Y$ отображение F' должно переводить $y \times I$ в компоненту линейной связности пространства E, содержащую $F'(y, 0)$. Следовательно, $F'(y \times I) \subset A$ для всех y и $F'\colon Y \times I \to A$ — поднятие отображения F, такое, что $F'(y, 0) = f'(y)$. ■

Для локально линейно связных пространств имеет место следующий аналог теоремы 2.1.20, сводящий изучение расслоений к изучению расслоений с линейно связными пространством расслоения и базой:

2. Теорема. *Пусть $p\colon E \to B$ — некоторое отображение. Если E локально линейно связно, то p тогда и только тогда является расслоением, когда для каждой компоненты линейной связности A пространства E множество $p(A)$ представляет собой компоненту линейной связности пространства B и $p|A\colon A \to p(A)$ — расслоение.*

Доказательство. Если $p\colon E \to B$ — расслоение, а A — компонента линейной связности пространства E, то из леммы 1 вытекает, что $p(A)$ — компонента линейной связности пространства B и $p|A\colon A \to p(A)$ — расслоение.

Докажем обратное утверждение. Пусть отображения $f'\colon Y \to E$ и $F\colon Y \times I \to B$ таковы, что $F(y, 0) = f'(y)$. Пусть $\{A_j\}$ — множество компонент линейной связности пространства E. Тогда A_j — непересекающиеся открытые подмножества пространства E. Пусть $V_j = f'^{-1}(A_j)$. Совокупность $\{V_j\}$ непересекающихся множеств образует открытое покрытие пространства Y. Следовательно, для построения отображения $F'\colon Y \times I \to E$, такого, что $p \circ F' = F$ и $F'(y, 0) = f'(y)$, достаточно построить для всех j отображения $F'_j\colon V_j \times I \to E$, такие, что $p \circ F'_j = F | V_j \times I$ и $F'_j(y, 0) = f'(y)$.

Множество $F(y \times I)$ содержится в компоненте линейной связности пространства B, содержащей $F(y, 0) = p(f'(y))$; поэтому из того, что $p(A_j)$ — компонента линейной связности пространства B, вытекает, что $F(V_j \times I) \subset p(A_j)$ для всех j. Поскольку $p|A_j\colon A_j \to p(A_j)$ — расслоение, существует отображение $F'_j\colon V_j \times I \to A_j$, для которого $p(F'_j) = F | V_j \times I$ и $F'_j(y, 0) = f'(y)$ при $y \in V_j$. Следовательно, p обладает свойством накрывающей гомотопии. ■

Так как каждый путь в топологическом пространстве принадлежит некоторой компоненте линейной связности этого пространства, ясно, что теорема 2 останется верной, если в ней слово «расслоение» всюду заменить словами «расслоение со свойством единственности накрывающего пути».

Главный результат о расслоениях со свойством единственности накрывающего пути сформулирован в следующем предложении:

3. Лемма. *Пусть $p\colon \tilde{X}\to X$ — расслоение со свойством единственности накрывающего пути. Если пути ω и ω' в $\tilde{X}$ таковы, что* $\omega(0)=\omega'(0)$ и $p\circ\omega\simeq p\circ\omega'$, то $\omega\simeq\omega'$.

Доказательство. Пусть $F\colon I\times I\to X$ — гомотопия относительно $\dot{I}$, соединяющая $p\circ\omega$ с $p\circ\omega'$ (т. е. $F(t,0)=p\omega(t)$, $F(t,1)=p\omega'(t)$, $F(0,t)=p\omega(0)$ и $F(1,t)=p\omega(1)$). По свойству накрывающей гомотопии для расслоений существует отображение $F'\colon I\times I\to\tilde{X}$, для которого $F'(t,0)=\omega t$ и $p\circ F'=F$. Тогда множества $F'(0\times I)$ и $F'(1\times I)$ содержатся соответственно в $p^{-1}(p\omega(0))$ и $p^{-1}(p\omega(1))$. По теореме 2.2.5 множества $F'(0\times I)$ и $F'(1\times I)$ состоят каждое из одной точки. Следовательно, F' — гомотопия относительно $\dot{I}$ от ω до некоторого пути ω'', такого, что $\omega''(0)=\omega(0)$ и $p\circ\omega''=p\circ\omega'$. Поскольку $\omega'(0)=\omega(0)$, а p — расслоение со свойством единственности накрывающего пути, $\omega'=\omega''$ и $F'\colon \omega\simeq\omega'\ \mathrm{rel}\ \dot{I}$. ■

Из леммы 3 вытекает, что если $p\colon \tilde{X}\to X$ — расслоение со свойством единственности накрывающего пути, то для любых двух объектов $\tilde{x}_0$ и $\tilde{x}_1$ фундаментального группоида пространства $\tilde{X}$ отображение $p_{\#}$ является инъективным отображением множества $\hom(\tilde{x}_0,\tilde{x}_1)$ в $\hom(p(\tilde{x}_0),p(\tilde{x}_1))$. В частности, если $\tilde{x}_0=\tilde{x}_1$, мы приходим к следующей теореме:

4. Теорема. *Пусть $p\colon \tilde{X}\to X$ — расслоение со свойством единственности накрывающего пути. Для всякой точки $\tilde{x}_0\in\tilde{X}$ гомоморфизм*

$$p_{\#}\colon \pi(\tilde{X},\tilde{x}_0)\to\pi(X,x_0)$$

является мономорфизмом. ■

Этот последний результат образует основу редукции задач о расслоениях со свойством единственности накрывающего пути к задачам, связанным с фундаментальной группой. Для того чтобы фундаментальная группа полностью заменяла пространство в рассматриваемых нами вопросах, мы предположим, что все пространства линейно связны. Из теоремы 2 вытекает, что для класса локально линейно связных пространств это предположение не ограничивает общности.

5. Лемма. *Пусть $p\colon \tilde{X}\to X$ — расслоение со свойством единственности накрывающего пути, причем пространство $\tilde{X}$ непусто и линейно связно. Если $\tilde{x}_0$, $\tilde{x}_1\in\tilde{X}$, то существует путь ω в X от $p(\tilde{x}_0)$ до $p(\tilde{x}_1)$, для которого*

$$p_{\#}\pi(\tilde{X},\tilde{x}_0)=h_{[\omega]}p_{\#}\pi(\tilde{X},\tilde{x}_1).$$

Обратно, для любого пути ω *в* X *от* $p(\tilde{x}_0)$ *до* x_1 *существует точка* $\tilde{x}_1 \in p^{-1}(x_1)$, *для которой*

$$h_{[\omega]}p_{\#}\pi(\tilde{X}, \tilde{x}_1) = p_{\#}\pi(\tilde{X}, \tilde{x}_0).$$

Доказательство. Докажем первую часть. Пусть $\tilde{\omega}$ — путь в $\tilde{X}$ от $\tilde{x}_0$ до $\tilde{x}_1$. Тогда $\pi(\tilde{X}, \tilde{x}_0) = h_{[\tilde{\omega}]}\pi(\tilde{X}, \tilde{x}_1)$. Следовательно,

$$p_{\#}\pi(\tilde{X}, \tilde{x}_0) = h_{[p \circ \tilde{\omega}]}p_{\#}\pi(\tilde{X}, \tilde{x}_1)$$

и $p \circ \tilde{\omega}$ — искомый путь от $p(\tilde{x}_0)$ до $p(\tilde{x}_1)$.

Обратно, если задан путь ω в X от $p(\tilde{x}_0)$ до x_1, то пусть $\tilde{\omega}$ — такой путь в $\tilde{X}$, что $\tilde{\omega}(0) = \tilde{x}_0$ и $p\tilde{\omega} = \omega$. Если $\tilde{x}_1 = \tilde{\omega}(1)$, то

$$h_{[\omega]}p_{\#}\pi(\tilde{X}, \tilde{x}_1) = p_{\#}(h_{[\tilde{\omega}]}\pi(\tilde{X}, \tilde{x}_1)) = p_{\#}\pi(\tilde{X}, \tilde{x}_0). \blacksquare$$

Отсюда легко получить следующий результат:

6. Теорема. *Пусть* $p: \tilde{X} \to X$ — *расслоение со свойством единственности накрывающего пути, причем* $\tilde{X}$ — *непустое линейно связное пространство. При* $x_0 \in p(\tilde{X})$ *множество* $\{p_{\#}\pi(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \mid \tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)\}$ *является классом сопряженных подгрупп группы* $\pi(X, x_0)$. *Если* ω — *путь в* $p(\tilde{X})$ *от* x_0 *до* x_1, *то* $h_{[\omega]}$ *переводит соответствующий класс сопряженных подгрупп группы* $\pi(X, x_1)$ *в указанный класс сопряженных подгрупп группы* $\pi(X, x_0)$. $\blacksquare$

Пусть $p: \tilde{X} \to X$ — расслоение, и пусть ω — путь в X, начинающийся в точке x_0. Определим отображение $F_\omega: p^{-1}(x_0) \times I \to X$ равенством $F_\omega(\tilde{x}, t) = \omega(t)$; пусть $i: p^{-1}(x_0) \subset \tilde{X}$. Тогда $pi(\tilde{x}) = F_\omega(\tilde{x}, 0)$ для $\tilde{x} \in p^{-1}(x_0)$. Из того что p обладает свойством накрывающей гомотопии, вытекает существование такого отображения $G_\omega: p^{-1}(x_0) \times I \to \tilde{X}$, что $G_\omega(\tilde{x}, 0) = i(\tilde{x}) = \tilde{x}$ и $p \circ G_\omega = F_\omega$.

Предположим теперь, что p обладает свойством единственности накрывающего пути. Мы докажем, что отображение $\tilde{x} \to G_\omega(\tilde{x}, 1)$ слоя $p^{-1}(x_0)$ в слой $p^{-1}(\omega(1))$ зависит только от класса пути ω. Пусть $\omega' \simeq \omega$ и пусть отображение $G'_{\omega'}: p^{-1}(x_0) \times I \to \tilde{X}$ таково, что $G'_{\omega'}(\tilde{x}, 0) = \tilde{x}$ и $p \circ G'_{\omega'} = F_{\omega'}$. Определим для любой точки $\tilde{x} \in p^{-1}(x_0)$ пути $\tilde{\omega}$ и $\tilde{\omega}'$ в $\tilde{X}$, полагая $\tilde{\omega}(t) = G_\omega(\tilde{x}, t)$ и $\tilde{\omega}'(t) = G'_{\omega'}(\tilde{x}, t)$. Тогда пути $\tilde{\omega}$ и $\tilde{\omega}'$ начинаются в точке $\tilde{x}$ и

$$p \circ \tilde{\omega} = \omega \simeq \omega' = p \circ \tilde{\omega}'.$$

Из леммы 3 вытекает, что $\tilde{\omega} \simeq \tilde{\omega}'$. Значит, для каждой точки $\tilde{x} \in p^{-1}(x_0)$ имеет место равенство $G_\omega(\tilde{x}, 1) = G'_\omega(\tilde{x}, 1)$. Следовательно, можно определить непрерывное отображение

$$f_{[\omega]}: p^{-1}(\omega(0)) \to p^{-1}(\omega(1)),$$

полагая $f_{[\omega]}(\tilde{x}) = G_\omega(\tilde{x}, 1)$, где G_ω определено выше. Ясно, что если $\omega(1) = \omega'(0)$, то $f_{[\omega]*[\omega']} = f_{[\omega']} \circ f_{[\omega]}$.

7. Теорема. *Пусть p: $\tilde{X} \to X$ — расслоение со свойством единственности накрывающего пути. Тогда определен контравариантный функтор из фундаментального группоида пространства X в категорию топологических пространств и отображений, сопоставляющий точке $x \in X$ слой над ней, а классу путей $[\omega]$ отображение $f_{[\omega]}$.* ■

Тот факт, что $f_{[\omega]}$ — гомеоморфизм для каждого класса $[\omega]$, приводит к такому следствию:

8. Следствие. *Если p: $\tilde{X} \to X$ — расслоение со свойством единственности накрывающего пути, а пространство X линейно связно, то любые два слоя этого расслоения гомеоморфны.* ■

Если пространство X линейно связно, а p: $\tilde{X} \to X$ — расслоение со свойством единственности накрывающего пути, то *числом листов* (или *кратностью*) отображения p называется мощность множества $p^{-1}(x)$ (по следствию 8 эта мощность не зависит от выбора точки $x \in X$). Если пространство расслоения линейно связно, то кратность следующим образом определяется классом сопряженности:

9. Теорема. *Пусть p: $\tilde{X} \to X$ — расслоение со свойством единственности накрывающего пути, причем X и $\tilde{X}$ непусты и линейно связны. Если $\tilde{x}_0 \in \tilde{X}$, то кратность отображения p совпадает с индексом подгруппы $p_\# \pi(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ в группе $\pi(X, p(\tilde{x}_0))$.*

Доказательство. Согласно теореме 7, $\pi(X, p(\tilde{x}_0))$ действует как группа правых преобразований слоя $p^{-1}(p(\tilde{x}_0))$ по формуле $\tilde{x} \circ [\omega] = f_{[\omega]}(\tilde{x})$ для $\tilde{x} \in p^{-1}(p(\tilde{x}_0))$. При $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2 \in p^{-1}(p(\tilde{x}_0))$ пусть $\tilde{\omega}$ — некоторый путь в $\tilde{X}$ от $\tilde{x}_1$ до $\tilde{x}_2$. Тогда $[p \circ \tilde{\omega}] \in \pi(X, p(\tilde{x}_0))$ и $\tilde{x}_1 \circ [p\tilde{\omega}] = \tilde{x}_2$. Следовательно, группа $\pi(X, p(\tilde{x}_0))$ транзитивно действует на множестве $p^{-1}(p(\tilde{x}_0))$. Ясно, что группа изотропии точки $\tilde{x}_0$ (т. е. подгруппа группы $\pi(X, p(\tilde{x}_0))$, оставляющая неподвижной точку $\tilde{x}_0$) совпадает с группой $p_\#\pi(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$. Из общих соображений [1]) вытекает, что имеется взаимно однозначное соответствие между множеством правых смежных классов по подгруппе $p_\#\pi(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ группы $\pi(X, p(\tilde{x}_0))$ и множеством $p^{-1}(p(\tilde{x}_0))$. ■

10. Пример. При $n \geqslant 2$ накрытие p: $S^n \to \mathbf{R}P^n$ из примера 2.1.5 имеет кратность 2. Поскольку сфера S^n односвязна, $\pi(\mathbf{R}P^n) \approx \mathbf{Z}_2$ при $n \geqslant 2$.

---

[1]) Для любой группы G, транзитивно действующей справа на множестве S, имеет место естественное взаимно однозначное соответствие между множеством правых смежных классов по подгруппе изотропии (любой точки $s \in S$) и множеством S.

Расслоение $p\colon \tilde{X} \to X$ со свойством единственности накрывающего пути называется *регулярным*, если для любого замкнутого пути ω в X все его поднятия $\tilde{\omega}$ одновременно замкнуты или не замкнуты.

11. Теорема. *Пусть $p\colon \tilde{X} \to X$ — расслоение со свойством единственности накрывающего пути; p регулярно тогда и только тогда, когда из равенства $p(\tilde{x}_0) = p(\tilde{x}_1)$ следует $p_{\#}\pi(\tilde{X}, \tilde{x}_0) = p_{\#}\pi(\tilde{X}, \tilde{x}_1)$.*

Доказательство. Предположим, что p регулярно; пусть $\tilde{\omega}$ — некоторый замкнутый путь в $\tilde{X}$ в точке $\tilde{x}_0$. Тогда $\tilde{\omega}$ — замкнутое поднятие пути $p\tilde{\omega}$. Следовательно, существует замкнутое поднятие $\tilde{\omega}_1$ пути $p\tilde{\omega}$ в точке $\tilde{x}_1$. Отсюда вытекает, что $p_{\#}[\tilde{\omega}] = [p\tilde{\omega}] = p_{\#}[\tilde{\omega}_1]$. Следовательно, $p_{\#}\pi(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \subset p_{\#}\pi(\tilde{X}, \tilde{x}_1)$. Поскольку это сопряженные подгруппы в группе $\pi(X, p(\tilde{x}_0))$, они совпадают.

Обратно, пусть $p_{\#}\pi(\tilde{X}, \tilde{x}_0) = p_{\#}\pi(\tilde{X}, \tilde{x}_1)$ всякий раз, когда $p(\tilde{x}_0) = p(\tilde{x}_1)$, и пусть ω — замкнутый путь в X в точке $p(\tilde{x}_0)$, имеющий замкнутое поднятие $\tilde{\omega}$ в точке $\tilde{x}_0$. Тогда

$$[\omega] = p_{\#}[\tilde{\omega}] \in p_{\#}\pi(\tilde{X}, \tilde{x}_0) = p_{\#}\pi(\tilde{X}, \tilde{x}_1).$$

Следовательно, существует замкнутый путь $\tilde{\omega}_1$ в $\tilde{X}$ в точке $\tilde{x}_1$, для которого $p\tilde{\omega}_1 \simeq \omega$. Если поднятие $\tilde{\omega}_1'$ пути ω таково, что $\tilde{\omega}_1'(0) = \tilde{x}_1$, то (поскольку p обладает свойством единственности накрывающего пути) $\tilde{\omega}_1 = \tilde{\omega}_1'$. Значит, $\tilde{\omega}_1'$ — замкнутое поднятие пути ω в точке $\tilde{x}_1$ и, следовательно, расслоение p регулярно. ■

В случае непустого линейно связного пространства $\tilde{X}$ теоремы 6 и 11 дают следующий результат:

12. Теорема. *Пусть $p\colon \tilde{X} \to X$ — расслоение со свойством единственности накрывающего пути, причем $\tilde{X}$ — непустое линейно связное пространство. В таком случае p регулярно тогда и только тогда, когда для некоторой точки $\tilde{x}_0 \in \tilde{X}$ подгруппа $p_{\#}\pi(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ есть нормальный делитель группы $\pi(X, p(\tilde{x}_0))$.* ■

§ 4. Задача поднятия

В этом параграфе будет показано, что функтор фундаментальной группы решает задачу поднятия для расслоений со свойством единственности накрывающего пути. Как следствие при этом получается классификация накрывающих отображений, которую мы рассмотрим в следующем параграфе.

Наш первый результат состоит в том, что любое отображение стягиваемого пространства в базу некоторого расслоения может быть поднято.

1. Лемма. *Пусть p: $E \to B$ — некоторое расслоение. Любое отображение стягиваемого пространства в базу B, образ которого принадлежит множеству $p(E)$, можно поднять в E.*

Доказательство. Пусть пространство Y стягиваемо, и пусть f: $Y \to B$ — такое отображение, что $f(Y) \subset p(E)$. Поскольку Y стягиваемо, f гомотопно постоянному отображению Y в некоторую точку множества $f(Y)$. Поскольку $f(Y) \subset p(E)$, это постоянное отображение можно поднять в E. В силу свойства накрывающей гомотопии отсюда следует, что f можно поднять в E. ∎

С использованием функтора фундаментальной группы технически проще рассматривать задачу поднятия для пространств с отмеченной точкой.

2. Лемма. *Пусть p: $(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to (X, x_0)$ — расслоение со свойством единственности накрывающего пути. Если точка y_0 является сильным деформационным ретрактом пространства Y, то любое отображение $(Y, y_0) \to (X, x_0)$ можно поднять до отображения $(Y, y_0) \to (\tilde{X}, \tilde{x}_0)$.*

Доказательство. Пусть f: $(Y, y_0) \to (X, x_0)$ — некоторое отображение. Отображение f гомотопно относительно y_0 постоянному отображению $Y \to x_0$. Но это постоянное отображение можно поднять до отображения $Y \to \tilde{x}_0$. Согласно свойству накрывающей гомотопии, f можно поднять до отображения f': $Y \to \tilde{X}$, которое гомотопно постоянному отображению $Y \to \tilde{x}_0$, причем эта гомотопия переводит $y_0 \times I$ в $p^{-1}(x_0)$. Поскольку все пути в слое $p^{-1}(x_0)$ постоянны (теорема 2.2.5), $f'(y_0) = \tilde{x}_0$. ∎

Мы будем применять теорему 2 к стягиваемым пространствам для поднятия их факторпространств. Стандартный способ представления некоторого пространства в виде факторпространства некоторого стягиваемого пространства состоит в использовании для этой цели его пространства путей. Пусть $y_0 \in Y$. *Пространством путей* $P(Y, y_0)$ называется пространство непрерывных отображений ω: $(I, 0) \to (Y, y_0)$, наделенное компактно-открытой топологией. Определим отображение φ: $P(Y, y_0) \to Y$ равенством $\varphi(\omega) = \omega(1)$. Если U — открытое подмножество пространства Y, то множество

$$\varphi^{-1}(U) = \langle 1;\ U \rangle = \{\omega \in P(Y,\ y_0) \mid \omega(1) \in U\}$$

открыто в пространстве $P(Y, y_0)$. Следовательно, отображение φ непрерывно.

3. Лемма. *Постоянный путь в точке y_0 является сильным деформационным ретрактом пространства путей $P(Y, y_0)$.*

Доказательство. Сильная деформационная ретракция $F\colon P(Y, y_0) \times I \to P(Y, y_0)$ в постоянный путь в точке y_0 определяется равенством

$$F(\omega, t)(t') = \omega((1-t)t'), \quad \omega \in P(Y, y_0); \quad t, t' \in I. \ \blacksquare$$

Мы уже показали, что φ — непрерывное отображение стягиваемого пространства путей $P(Y, y_0)$ в Y. Если Y линейно связно, то ясно, что φ сюръективно. Если вдобавок Y локально линейно связно, то, как показывает следующее предложение, φ есть отображение на факторпространство.

4. Теорема. *Связное локально линейно связное пространство Y представляется с помощью отображения φ как факторпространство своего пространства путей $P(Y, y_0)$.*

Доказательство. Мы знаем, что отображение φ непрерывно. Поскольку связное локально линейно связное пространство линейно связно, это отображение сюръективно. Для завершения доказательства достаточно показать, что φ — открытое отображение. Пусть $\omega \in P(Y, y_0)$, и пусть $W = \bigcap\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} \langle K_i; U_i \rangle$ — некоторая окрестность пути ω, где K_i — компакт в I, а множество U_i открыто в Y. Занумеруем множества K_i таким образом, чтобы для некоторого $0 \leqslant k \leqslant n$ выполнялись условия $1 \in K_1 \cap \ldots \cap K_k$ и $1 \notin K_{k+1} \cup \ldots \cup K_n$. Поскольку $\omega(1) \in U_1 \cap \ldots \cap U_k$, существует линейно связная окрестность V точки $\omega(1)$, содержащаяся в $U_1 \cap \ldots \cap U_k$. Выберем $0 < t' < 1$ так, чтобы $[t', 1] \cap (K_{k+1} \cup \ldots \cup K_n) = \varnothing$ и $\omega([t', 1]) \subset V$.

Докажем включение $\varphi(W) \supset V$, что и завершит доказательство. Пусть $y' \in V$, и пусть ω' — путь в V от $\omega(t')$ до y'. Определим путь $\tilde{\omega}\colon I \to Y$ формулой

$$\tilde{\omega}(t) = \begin{cases} \omega(t), & 0 \leqslant t \leqslant t', \\ \omega'\left(\dfrac{t-t'}{1-t'}\right), & t' \leqslant t \leqslant 1. \end{cases}$$

Если $i > k$, то $\tilde{\omega}(K_i) = \omega(K_i) \subset U_i$. При $i \leqslant k$

$$\tilde{\omega}(K_i) = \tilde{\omega}(K_i \cap [0, t']) \cup \tilde{\omega}(K_i \cap [t', 1]) \subset \omega(K_i) \cup \omega'(I) \subset U_i \cup V = U_i.$$

Значит, $\tilde{\omega} \in W$ и $\varphi(\tilde{\omega}) = y'$. Следовательно, $\varphi(W) \supset V$. $\blacksquare$

Собрав вместе полученные результаты, мы придем к следующей *теореме о поднятии*:

5. Теорема. *Пусть $p\colon (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to (X, x_0)$ — расслоение со свойством единственности накрывающего пути. Пусть Y — связное локально линейно связное пространство. Необходимым и достаточным* *условием того, чтобы отображение* $f\colon (Y, y_0) \to (X, x_0)$ *допускало поднятие* $(Y, y_0) \to (\tilde{X}, \tilde{x}_0)$, *является выполнение соотношения*

$$f_{\#}\pi(Y,\ y_0) \subset p_{\#}\pi(\tilde{X},\ \tilde{x}_0).$$

Доказательство. Если $f'\colon (Y, y_0) \to (\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ — некоторое поднятие отображения f, то $f = p \circ f'$ и

$$f_{\#}\pi(Y,\ y_0) = p_{\#}f'_{\#}\pi(Y,\ y_0) \subset p_{\#}\pi(\tilde{X},\ \tilde{x}_0),$$

т. е. условие необходимо.

Докажем его достаточность. Из лемм 2 и 3 вытекает, что если ω_0 — постоянный путь в точке y_0, то композицию

$$(P(Y,\ y_0),\ \omega_0) \xrightarrow{\varphi} (Y,\ y_0) \xrightarrow{f} (X,\ x_0)$$

можно поднять до отображения $\tilde{f}\colon (P(Y, y_0), \omega_0) \to (\tilde{X}, \tilde{x}_0)$. Мы покажем, что если $f_{\#}\pi(Y,\ y_0) \subset p_{\#}\pi(\tilde{X},\ \tilde{x}_0)$ и пути $\omega, \omega' \in P(Y, y_0)$ таковы, что $\varphi(\omega) = \varphi(\omega')$, то $\tilde{f}(\omega) = \tilde{f}(\omega')$. Пусть $\tilde{\omega}$ и $\tilde{\omega}'$ — пути в $P(Y, y_0)$ от ω_0 соответственно до ω и до ω', определенные равенствами $\tilde{\omega}(t)(t') = \omega(tt')$ и $\tilde{\omega}'(t)(t') = \omega'(tt')$. Тогда пути $\tilde{f} \circ \tilde{\omega}$ и $\tilde{f} \circ \tilde{\omega}'$ в $\tilde{X}$ от $\tilde{x}_0$ соответственно до $\tilde{f}(\omega)$ и до $\tilde{f}(\omega')$ таковы, что

$$p \circ \tilde{f} \circ \tilde{\omega} = f \circ \varphi \circ \tilde{\omega} = f \circ \omega \quad \text{и} \quad p \circ \tilde{f} \circ \tilde{\omega}' = f \circ \omega'.$$

Поскольку $\omega * \omega'^{-1}$ — замкнутый путь в пространстве Y в точке y_0 и $f_{\#}\pi(Y,\ y_0) \subset p_{\#}\pi(\tilde{X},\ \tilde{x}_0)$, в пространстве $\tilde{X}$ существует замкнутый путь $\bar{\omega}$ в точке $\tilde{x}_0$, для которого $(f \circ \omega) * (f \circ \omega')^{-1} \simeq p \circ \bar{\omega}$. Тогда

$$p \circ (\tilde{f} \circ \tilde{\omega}) = f \circ \omega \simeq (p \circ \bar{\omega}) * (f \circ \omega') = p \circ (\bar{\omega} * (\tilde{f} \circ \tilde{\omega}')).$$

По лемме 2.3.3 существует гомотопия $\tilde{f} \circ \tilde{\omega} \simeq \bar{\omega} * (\tilde{f} \circ \tilde{\omega}')$. В частности, конец пути $\tilde{f} \circ \tilde{\omega}$ (точка $\tilde{f}(\omega)$) совпадает с концом пути $\tilde{f} \circ \tilde{\omega}'$ (точкой $\tilde{f}(\omega')$).

Отсюда вытекает, что существует непрерывное (см. теорему 4) отображение $f'\colon (Y, y_0) \to (\tilde{X}, \tilde{x}_0)$, для которого $f' \circ \varphi = \tilde{f}$. Поскольку

$$p \circ f' \circ \varphi = p \circ \tilde{f} = f \circ \varphi,$$

а φ — сюръективное отображение, $p \circ f' = f$. Следовательно, f' — поднятие отображения f. ■

Пусть $p\colon E \to B$ — расслоение. *Сечением* расслоения p называется непрерывное отображение $s\colon B \to E$, для которого $p \circ s = 1_B$ (таким образом, сечение — правый обратный морфизм для отображения p). Из свойства накрывающей гомотопии легко вывести, что сечение расслоения p существует тогда и только тогда, когда класс $[p]$ имеет правый обратный в категории гомотопических типов. Поскольку сечение является поднятием тождественного отображения $B \subset B$, из теоремы 5 вытекает такое утверждение:

6. Следствие. *Пусть* $p\colon (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to (X, x_0)$ — *расслоение со свойством единственности накрывающего пути. Если пространство* X *связно и локально линейно связно, то сечение* $(X, x_0) \to (\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ *расслоения* p *существует в том и только в том случае, когда* $p_{\#}\pi(\tilde{X}, \tilde{x}_0) = \pi(X, x_0)$. ∎

7. Следствие. *Пусть* $p\colon \tilde{X} \to X$ — *расслоение со свойством единственности накрывающего пути. Если* $\tilde{X}$ — *непустое линейно связное пространство, а пространство* X *связно и локально линейно связно, то* p *тогда и только тогда является гомеоморфизмом, когда для некоторой точки* $\tilde{x}_0 \in \tilde{X}$ *имеет место равенство* $p_{\#}\pi(\tilde{X}, \tilde{x}_0) = \pi(X, p(\tilde{x}_0))$.

Доказательство. Если p — гомеоморфизм, то $p_{\#}\pi(\tilde{X}, \tilde{x}_0) = \pi(X, p(\tilde{x}_0))$. Обратно, если $p_{\#}\pi(\tilde{X}, \tilde{x}_0) = \pi(X, p(\tilde{x}_0))$, то, по теореме 2.3.9, p есть взаимно однозначное отображение. Согласно следствию 6, оно имеет непрерывное правое обратное отображение. Следовательно, p — гомеоморфизм. ∎

Если $p\colon \tilde{X} \to X$ — накрывающее отображение, а пространство $\tilde{X}$ линейно связно, то необходимым и достаточным условием того, чтобы p было гомеоморфизмом, является выполнение равенства $p_{\#}\pi(\tilde{X}, \tilde{x}_0) = \pi(X, p(\tilde{x}_0))$ для некоторой точки $\tilde{x}_0 \in \tilde{X}$. Из этого условия вытекает, что p биективно, а в силу лемм 2.1.8 и 2.1.7 отображение p открыто. Следовательно, для накрывающих отображений утверждение следствия 7 выполняется и без предположения, что пространство X локально линейно связно. Однако это утверждение неверно для расслоений со свойством единственности накрывающего пути, если X не является локально линейно связным, так как p необязательно открыто. Следующий пример показывает это.

8. Пример. Пусть X — подпространство пространства $\mathbf{R}^2$, определенное как объединение следующих четырех множеств (рис. 4):

$$\begin{aligned}
A_1 &= \{(x, y) \mid x = 0, \ -2 \leqslant y \leqslant 1\},\\
A_2 &= \{(x, y) \mid 0 \leqslant x \leqslant 1, \ y = -2\},\\
A_3 &= \{(x, y) \mid x = 1, \ -2 \leqslant y \leqslant 0\},\\
A_4 &= \{(x, y) \mid 0 < x \leqslant 1, \ y = \sin(2\pi/x)\}.
\end{aligned}$$

Пусть $\tilde{X}$ — полуинтервал $[0, 4)$. Определим отображение $p\colon \tilde{X} \to X$ следующим образом: $[0, 1]$ линейно отображается на A_1, $[1, 2]$ и $[2, 3]$ линейно отображаются соответственно на A_2 и A_3, а $[3, 4]$ — гомеоморфно на A_4 с помощью отображения $t \to (t - 3, \sin(2\pi/(t - 3)))$.

Тогда оба пространства $\tilde{X}$ и X линейно связны и p: $\tilde{X} \to X$ — расслоение со свойством единственности накрывающего пути. Однако p не является гомеоморфизмом, хотя пространства $\tilde{X}$ и X односвязны.

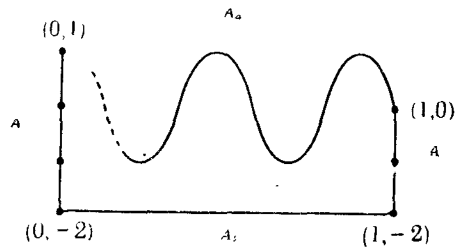


Рис. 4.

Для локально линейно связных пространств из теоремы о поднятии можно получить следующий критерий, позволяющий узнать, когда открытое линейно связное подмножество базы просто накрыто рассматриваемым расслоением:

9. Лемма. *Пусть p: $\tilde{X} \to X$ — расслоение со свойством единственности накрывающего пути. Предположим, что пространства $\tilde{X}$ и X локально линейно связны; пусть U — открытое связное подмножество пространства X. Множество U просто накрыто отображением p тогда и только тогда, когда всякое поднятие в $\tilde{X}$ замкнутого пути в U есть замкнутый путь.*

Доказательство. Если U просто накрыто отображением p, а $\tilde{\omega}$ — некоторый путь в $p^{-1}(U)$, то $\tilde{\omega}$ — путь в некоторой компоненте линейной связности $\tilde{U}$ множества $p^{-1}(U)$. По лемме 2.1.12 p — гомеоморфизм $\tilde{U}$ на U. Следовательно, если $p \circ \tilde{\omega}$ — замкнутый путь в U, то $\tilde{\omega}$ — замкнутый путь в $\tilde{U}$. Итак, условие необходимо.

Оно также и достаточно. Действительно, если $x_0 \in U$ и $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$, то предположение, что каждое поднятие замкнутого пути в U в точке x_0 является замкнутым путем в $\tilde{X}$, влечет за собой в группе $\pi(X, x_0)$ включение

$$i_{\#}\pi(U, x_0) \subset p_{\#}\pi(\tilde{X}, \tilde{x}_0),$$

где i: $(U, x_0) \subset (X, x_0)$. По теореме 5 существует поднятие $i'_{\tilde{x}_0}$: $(U, x_0) \to (\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ отображения i. Совокупность $\{i'_{\tilde{x}_0}(U) \mid \tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)\}$ состоит из непересекающихся (по лемме 2.2.4) линейно связных множеств. Мы покажем, что их объединение совпадает с $p^{-1}(U)$. Если $\tilde{x} \in p^{-1}(U)$, то пусть ω — путь в U от $p(\tilde{x})$ до x_0, а $\tilde{\omega}$ — такое его поднятие, что $\tilde{\omega}(0) = \tilde{x}$. Тогда $\tilde{\omega}(1) \in p^{-1}(x_0)$, и, следовательно,

$\tilde{\omega}$ — путь в $i'_{\tilde{\omega}(1)}(U)$. Значит, $\tilde{x} \in i'_{\tilde{\omega}(1)}(U)$ и $\{i'_{\tilde{x}_0}(U) \mid \tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)\}$ — разбиение $p^{-1}(U)$ на линейно связные множества. Поскольку множество $p^{-1}(U)$ открыто, а пространство $\tilde{X}$ локально линейно связно, $i'_{\tilde{x}_0}(U)$ открыто в $\tilde{X}$ для каждой точки $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$. Ясно, что p — гомеоморфизм множества $i'_{\tilde{x}_0}(U)$ на U для каждой точки $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$, и, значит, U просто накрыто отображением p. ■

Пространство X называется *полулокально односвязным*, если для каждой точки $x_0 \in X$ существует окрестность N, такая, что гомоморфизм $\pi(N, x_0) \to \pi(X, x_0)$ тривиален.

10. Теорема. *Всякое расслоение со свойством единственности накрывающего пути, для которого база локально линейно связна и полулокально односвязна, а пространство расслоения локально линейно связно, является накрывающим отображением.*

Доказательство. Из леммы 9 и определения полулокальной односвязности вытекает, что каждая точка базы имеет открытую окрестность, просто накрытую этим расслоением. ■

§ 5. Классификация накрывающих отображений

В этом параграфе приводится классификация накрывающих отображений над связной локально линейно связной базой. Эта классификация опирается на теорему о поднятии и сводит задачу об эквивалентности накрывающих отображений к задаче о сопряженности соответствующих подгрупп фундаментальной группы базы. Большая часть этого параграфа посвящена построению накрывающего отображения, соответствующего данной подгруппе фундаментальной группы базы.

Пусть X — связное пространство. *Категорией связных накрытий над X* называется категория, объектами которой являются накрывающие отображения $p: \tilde{X} \to X$, где $\tilde{X}$ связно, а морфизмами — коммутативные диаграммы

$$\begin{tikzcd} \tilde{X}_1 \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "p_1"'] & & \tilde{X}_2 \arrow[dl, "p_2"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

Если X локально линейно связно, а $p: \tilde{X} \to X$ — объект этой категории, то по лемме 2.1.8 отображение p является локальным гомеоморфизмом, а $\tilde{X}$ тоже локально линейно связно. Покажем, что в этом случае каждый морфизм этой категории является накрывающим отображением.

1. Лемма. *В категории связных накрытий над связным локально линейно связным пространством каждый морфизм сам является накрывающим отображением.*

Доказательство. Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd} \tilde{X}_1 \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "p_1"'] & & \tilde{X}_2 \arrow[dl, "p_2"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

где p_1 и p_2 — накрывающие отображения, а пространство X локально линейно связно. Из следствия 2.1.13 вытекает, что f — накрывающее отображение, если оно сюръективно.

Поскольку пространство $\tilde{X}_2$ связно и локально линейно связно, оно линейно связно. Выберем произвольные точки $\tilde{x}_1 \in \tilde{X}_1$ и $\tilde{x}_2 \in \tilde{X}_2$, и пусть $\tilde{\omega}_2$ — путь в $\tilde{X}_2$ от $f(\tilde{x}_1)$ до $\tilde{x}_2$. Поскольку p_1 — расслоение, существует такой путь $\tilde{\omega}_1$ в $\tilde{X}_1$, начинающийся в $\tilde{x}_1$, что $p_1 \circ \tilde{\omega}_1 = p_2 \circ \tilde{\omega}_2$. Так как p_2 обладает свойством единственности накрывающего пути, то $f \circ \tilde{\omega}_1 = \tilde{\omega}_2$. Следовательно,

$$f(\tilde{\omega}_1(1)) = \tilde{\omega}_2(1) = \tilde{x}_2,$$

что и доказывает сюръективность отображения f. ■

Следующая теорема описывает условия, при которых определен морфизм одного объекта в другой в категории связных накрытий над пространством X.

2. Теорема. *Пусть $p_1\colon \tilde{X}_1 \to X$ и $p_2\colon \tilde{X}_2 \to X$ — объекты категории связных накрытий над связным локально линейно связным пространством X. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(a) *существует накрывающее отображение $f\colon \tilde{X}_1 \to \tilde{X}_2$, для которого $p_2 \circ f = p_1$;*

(b) *если точки $\tilde{x}_1 \in \tilde{X}_1$ и $\tilde{x}_2 \in \tilde{X}_2$ таковы, что $p_1(\tilde{x}_1) = p_2(\tilde{x}_2)$, то подгруппа $p_{1\#}\pi(\tilde{X}_1, \tilde{x}_1)$ сопряжена в группе $\pi(X, p_1(\tilde{x}_1))$ с некоторой подгруппой группы $p_{2\#}\pi(\tilde{X}_2, \tilde{x}_2)$;*

(c) *существуют такие точки $\tilde{x}_1 \in \tilde{X}_1$ и $\tilde{x}_2 \in \tilde{X}_2$, что $p_1(\tilde{x}_1) = p_2(\tilde{x}_2)$ и подгруппа $p_{1\#}\pi(\tilde{X}_1, \tilde{x}_1)$ сопряжена в группе $\pi(X, p_1(\tilde{x}_1))$ с некоторой подгруппой группы $p_{2\#}\pi(\tilde{X}_2, \tilde{x}_2)$.*

Доказательство. (a)$\Rightarrow$(b). Рассмотрим отображение $f\colon \tilde{X}_1 \to \tilde{X}_2$, для которого $p_2 \circ f = p_1$. Если точки $\tilde{x}_1 \in \tilde{X}_1$ и $\tilde{x}_2 \in \tilde{X}_2$ таковы, что $p_1(\tilde{x}_1) = p_2(\tilde{x}_2)$, то

$$p_{1\#}\pi(\tilde{X}_1, \tilde{x}_1) = p_{2\#} \circ f_{\#}\pi(\tilde{X}_1, \tilde{x}_1) \subset p_{2\#}\pi(\tilde{X}_2, f(\tilde{x}_1)).$$

Поскольку точки $f(\tilde{x}_1)$ и $\tilde{x}_2$ принадлежат одному и тому же слою расслоения $p_2\colon \tilde{X}_2 \to X$, из теоремы 2.3.6 вытекает, что подгруппы $p_{2\#}\pi(\tilde{X}_2, f(\tilde{x}_1))$ и $p_{2\#}\pi(\tilde{X}_2, \tilde{x}_2)$ сопряжены в группе $\pi(X, p_1(\tilde{x}_1))$.

(b)$\Rightarrow$(c). Доказательство тривиально.

(c)$\Rightarrow$(a). Предположим, что точки $\tilde{x}_1 \in \tilde{X}_1$ и $\tilde{x}_2 \in \tilde{X}_2$ таковы, что $p_1(\tilde{x}_1) = p_2(\tilde{x}_2)$ и подгруппа $p_{1\#}\pi(\tilde{X}_1, \tilde{x}_1)$ сопряжена в группе

$\pi(X, p_1(\tilde{x}_1))$ с некоторой подгруппой группы $p_{2\#}\pi(\tilde{X}_2, \tilde{x}_2)$. По теореме 2.3.6 существует точка $\tilde{x}_2' \in \tilde{X}_2$, для которой $p_2(\tilde{x}_2') = p_2(\tilde{x}_2)$ и

$$p_{1\#}\pi(\tilde{X}_1, \tilde{x}_1) \subset p_{2\#}\pi(\tilde{X}_2, \tilde{x}_2').$$

Поскольку $\tilde{X}_1$ — связное локально линейно связное пространство, из теоремы о поднятии вытекает существование отображения $f\colon (\tilde{X}_1, \tilde{x}_1) \to (\tilde{X}_2, \tilde{x}_2')$, для которого $p_2 \circ f = p_1$. ■

3. **Следствие.** *Два объекта категории связных накрытий над связным локально линейно связным пространством X эквивалентны тогда и только тогда, когда их фундаментальные группы (в точках, лежащих над одной и той же точкой пространства X) отображаются в сопряженные подгруппы фундаментальной группы пространства X (в тех же точках).* ■

Приведем два примера.

4. Каждая нетривиальная подгруппа группы $\pi(S^1) \approx \mathbf{Z}$ является бесконечной циклической, поэтому, согласно следствию 3, всякое связное накрытие $\tilde{X} \to S^1$ эквивалентно ex: $\mathbf{R} \to S^1$ или отображению $S^1 \to S^1$, переводящему z в z^n для некоторого целого положительного n.

5. Поскольку при $n \geqslant 2$ имеет место изоморфизм $\pi(\mathbf{R}P^n) \approx \mathbf{Z}_2$, всякое связное накрытие $\tilde{X} \to \mathbf{R}P^n$ эквивалентно двулистному накрытию $S^n \to \mathbf{R}P^n$ или тривиальному накрытию $\mathbf{R}P^n \subset \mathbf{R}P^n$.

Универсальным накрывающим пространством связного пространства X называется объект $p\colon \tilde{X} \to X$ категории связных накрытий над X, такой, что для любого объекта $p'\colon \tilde{X}' \to X$ этой категории существует морфизм

$$\begin{tikzcd} \tilde{X} \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "p"'] & & \tilde{X}' \arrow[dl, "p'"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

этой категории. Следующий результат легко выводится из теоремы 2 и следствия 3.

6. **Следствие.** *Два универсальных накрывающих пространства над связным локально линейно связным пространством эквивалентны.* ■

Из теоремы 2 вытекает еще такой результат:

7. **Следствие.** *Односвязное накрывающее пространство над связным локально линейно связным пространством X является универсальным накрывающим пространством для X.* ■

Сведя задачу сравнения накрывающих пространств над X к задаче сравнения соответствующих им подгрупп фундаментальной группы пространства X, мы займемся определением того, какие подгруппы фундаментальной группы соответствуют накрытиям. Для этого необходимо научиться строить накрывающие пространства. Пусть X — некоторое пространство и $\mathcal{U}$ — его открытое покрытие. Если $x_0 \in X$, то пусть $\pi(\mathcal{U}, x_0)$ — подгруппа группы $\pi(X, x_0)$, порожденная гомотопическими классами замкнутых путей, представителями которых являются пути вида $(\omega * \omega') * \omega^{-1}$, где ω' — замкнутый путь, принадлежащий некоторому элементу системы $\mathcal{U}$, а ω — путь от x_0 до $\omega'(0)$. Легко проверить следующие утверждения:

8. *Если открытое покрытие $\mathcal{V}$ пространства X является измельчением покрытия $\mathcal{U}$, то $\pi(\mathcal{V}, x_0) \subset \pi(\mathcal{U}, x_0)$.* ■

9. *Подгруппа $\pi(\mathcal{U}, x_0)$ есть нормальный делитель группы $\pi(X, x_0)$.* ■

10. *Если ω — некоторый путь в X, то $h_{[\omega]}\pi(\mathcal{U}, \omega(1)) = \pi(\mathcal{U}, \omega(0))$.* ■

Связь групп $\pi(\mathcal{U}, x_0)$ с накрывающими отображениями объясняется следующим предложением:

11. Лемма. *Пусть $p\colon \tilde{X} \to X$ — накрывающее отображение, и пусть $\mathcal{U}$ — покрытие пространства X открытыми множествами, каждое из которых просто накрыто отображением p. Тогда для любой точки $\tilde{x}_0 \in \tilde{X}$ имеет место включение*

$$\pi(\mathcal{U},\ p(\tilde{x}_0)) \subset p_{\#}\pi(\tilde{X},\ \tilde{x}_0).$$

Доказательство. Если ω' — замкнутый путь, принадлежащий некоторому элементу совокупности $\mathcal{U}$, то по лемме 2.4.9 каждое поднятие пути ω' является замкнутым путем в $\tilde{X}$. Значит, каждый путь вида $(\omega * \omega') * \omega^{-1}$, где ω' — замкнутый путь, принадлежащий некоторому элементу из $\mathcal{U}$, можно поднять до некоторого замкнутого пути (а именно, до пути $(\tilde{\omega} * \tilde{\omega}') * \tilde{\omega}^{-1}$, где $\tilde{\omega}$ и $\tilde{\omega}'$ — поднятия путей ω и ω' соответственно). Следовательно, любой элемент группы $\pi(\mathcal{U}, p(\tilde{x}_0))$ имеет представитель, который можно поднять до замкнутого пути в точке $\tilde{x}_0$. ■

Следующая теорема характеризует те расслоения со свойством единственности накрывающего пути, которые являются накрывающими отображениями.

12. Теорема. *Пусть $p\colon \tilde{X} \to X$ — расслоение со свойством единственности накрывающего пути, причем X и $\tilde{X}$ — связные локально линейно связные пространства. В этом случае p тогда и только* *тогда является накрывающим отображением, когда существуют открытое покрытие* $\mathcal{U}$ *пространства* X *и точка* $\tilde{x}_0 \in \tilde{X}$, *такие, что*

$$\pi(\mathcal{U},\ p(\tilde{x}_0)) \subset p_{\#}\pi(\tilde{X},\ \tilde{x}_0).$$

Доказательство. Если p — накрывающее отображение, то нужный результат получается из леммы 11. Обратно, если существуют такое покрытие $\mathcal{U}$ и такая точка $\tilde{x}_0 \in \tilde{X}$, то из предложений 9 и 10 вытекает, что для любой точки $\tilde{x}'_0 \in \tilde{X}$ имеет место включение $\pi(\mathcal{U},\ p(\tilde{x}'_0)) \subset p_{\#}\pi(\tilde{X},\ \tilde{x}'_0)$. Используя лемму 2.4.9, получаем, что каждый элемент из $\mathcal{U}$ просто накрыт отображением p. ■

Лемма 11 дает необходимое условие того, чтобы подгруппа группы $\pi(X, x_0)$ соответствовала некоторому накрытию. В следующей теореме мы доказываем, что это условие также и достаточно.

13. Теорема. *Пусть* X — *связное локально линейно связное пространство, и пусть* $x_0 \in X$. *Пусть* H — *некоторая подгруппа группы* $\pi(X, x_0)$ *и существует открытое покрытие* $\mathcal{U}$ *пространства* X, *такое, что* $\pi(\mathcal{U}, x_0) \subset H$. *Тогда существует накрывающее отображение* p: $(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to (X, x_0)$, для которого $p_{\#}\pi(\tilde{X}, \tilde{x}_0) = H$.

Доказательство. Предположим, что такое накрывающее отображение существует и, сверх того, что пространство $\tilde{X}$ линейно связно. Отображение φ: $(P(X, x_0), \omega_0) \to (X, x_0)$ пространства путей пространства X можно поднять до отображения φ': $(P(X, x_0), \omega_0) \to (\tilde{X}, \tilde{x}_0)$, являющегося сюръективным. Если ω и ω' — элементы из $P(X, x_0)$, то $\varphi'(\omega) = \varphi'(\omega')$ тогда и только тогда, когда $\varphi(\omega) = \varphi(\omega')$ и $[\omega * \omega'^{-1}] \in p_{\#}\pi(\tilde{X}, \tilde{x}_0) = H$. Следовательно, для линейно связного пространства $\tilde{X}$ имеет место взаимно однозначное соответствие между точками пространства $\tilde{X}$ и классами эквивалентности пространства $P(X, x_0)$, получающимися при отождествлении всех путей ω и ω', для которых $\omega(1) = \omega'(1)$ и $[\omega * \omega'^{-1}] \in H$ (поскольку H — группа, мы на самом деле получаем отношение эквивалентности). Следовательно, вполне естественно пытаться строить пространство $\tilde{X}$, наделяя подходящей топологией такие классы эквивалентности пространства $P(X, x_0)$. Мы могли бы начать с компактно-открытой топологии на $P(X, x_0)$, а затем использовать фактортопологию для множества классов эквивалентности, но, по-видимому, это не проще, чем определить топологию непосредственно на множестве классов эквивалентности, как это и делается ниже.

Рассмотрим множество всех путей в X, начинающихся в точке x_0. Если ω и ω' — два таких пути, то положим $\omega \sim \omega'$, когда $\omega(1) = \omega'(1)$ и $[\omega * \omega'^{-1}] \in H$. Тем самым определено отношение эквивалентности. Класс эквивалентности пути ω будет обозначаться символом $\langle\omega\rangle$. Пусть $\tilde{X}$ — множество всех классов эквивалентности. Определим отображение $p\colon \tilde{X}\to X$, полагая $p(\langle\omega\rangle)=\omega(1)$. Если U — некоторое открытое множество в X, а ω — путь, начинающийся в точке x_0 и заканчивающийся в некоторой точке множества U, то через $\langle\omega, U\rangle$ будет обозначаться подмножество в $\tilde{X}$, состоящее из всех классов эквивалентности, имеющих представитель вида $\omega*\omega'$, где ω' — путь в U, начинающийся в точке $\omega(1)$.

Покажем, что совокупность $\{\langle\omega, U\rangle\}$ представляет собой базу некоторой топологии на $\tilde{X}$. Если $\langle\omega'\rangle\in\langle\omega, U\rangle$, то $\omega'\sim\omega*\omega''$ для некоторого пути ω'', лежащего в U. Если $\bar{\omega}$ — произвольный путь в U, начинающийся в $\omega'(1)$, то

$$\omega'*\bar{\omega}\sim(\omega*\omega'')*\bar{\omega}\sim\omega*(\omega''*\bar{\omega}),$$

откуда $\langle\omega', U\rangle\subset\langle\omega, U\rangle$. Поскольку $\omega\sim\omega'*\omega''^{-1}$, то $\langle\omega\rangle\in\langle\omega', U\rangle$. Те же рассуждения показывают, что $\langle\omega, U\rangle\subset\langle\omega', U\rangle$, и, значит, $\langle\omega, U\rangle=\langle\omega', U\rangle$. Следовательно, если $\langle\omega''\rangle\in\langle\omega, U\rangle\cap\langle\omega', U'\rangle$, то $\langle\omega'', U\cap U'\rangle\subset\langle\omega, U\rangle\cap\langle\omega', U'\rangle$, и, таким образом, совокупность $\{\langle\omega, U\rangle\}$ представляет собой базу некоторой топологии на $\tilde{X}$.

Наделим множество $\tilde{X}$ этой топологией. Тогда отображение p непрерывно. В самом деле, если $p(\langle\omega\rangle)\in U$, то $p(\langle\omega, U\rangle)\subset U$. Отображение p также открыто, поскольку ясно, что $p(\langle\omega, U\rangle)$ — компонента линейной связности множества U, содержащая точку $\omega(1)$, а значит, вследствие локальной линейной связности пространства X — открытое множество.

Пусть $\mathcal{U}$ — такое открытое покрытие пространства X, что $\pi(\mathcal{U}, x_0)\subset H$, и пусть V — открытое линейно связное подмножество пространства X, содержащееся в некотором элементе покрытия $\mathcal{U}$. Покажем, что V просто накрыто отображением p, откуда будет следовать, что p — накрывающее отображение.

Если $\langle\omega\rangle\in p^{-1}(V)$, то $\langle\omega, V\rangle\subset p^{-1}(V)$. Множества $\{\langle\omega, V\rangle\mid\langle\omega\rangle\in p^{-1}(V)\}$ открыты, и их объединение совпадает с $p^{-1}(V)$. Если $\langle\omega, V\rangle\cap\langle\omega', V\rangle\neq\varnothing$, то найдется такой путь ω'', что $\langle\omega''\rangle\in\langle\omega, V\rangle\cap\langle\omega', V\rangle$. Тогда $\langle\omega'', V\rangle=\langle\omega, V\rangle$ и $\langle\omega'', V\rangle=\langle\omega', V\rangle$. Следовательно, множества $\{\langle\omega, V\rangle\mid\langle\omega\rangle\in p^{-1}(V)\}$ совпадают или не пересекаются. Чтобы доказать, что V просто накрыто отображением p, достаточно показать, что p биективно отображает каждое множество $\langle\omega, V\rangle$ на V (поскольку уже доказано, что p непрерывно и открыто). Если $x\in V$, то пусть ω' — путь в V от $\omega(1)$ до x. Тогда $\langle\omega*\omega'\rangle\in\langle\omega, V\rangle$ и $p(\langle\omega*\omega'\rangle)=x$, откуда получаем, что p сюръективно. Предположим, что $p\langle\omega*\omega_1\rangle=p\langle\omega*\omega_2\rangle$. Тогда $\omega_1(1)=\omega_2(1)$, и, значит, $(\omega*\omega_1)*(\omega*\omega_2)^{-1}$ — замкнутый путь в X в точке x_0. Далее,

$$\left[(\omega*\omega_1)*(\omega*\omega_2)^{-1}\right]=\left[(\omega*(\omega_1*\omega_2^{-1}))*\omega^{-1}\right].$$

Поскольку $\omega_1 * \omega_2^{-1}$ — путь в V, а V содержится в некотором элементе из $\mathcal{U}$, то $[(\omega * (\omega_1 * \omega_2^{-1})) * \omega^{-1}] \in \pi(\mathcal{U}, x_0) \subset H$. Следовательно, $\omega * \omega_1 \sim \omega * \omega_2$ и $\langle \omega * \omega_1 \rangle = \langle \omega * \omega_2 \rangle$. Отсюда вытекает, что отображение p инъективно.

Итак, мы показали, что p: $\tilde{X} \to X$ — накрывающее отображение. Пусть $\tilde{x}_0 = \langle \omega_0 \rangle$, где ω_0 — постоянный путь в X в точке x_0. Осталось лишь проверить, что $p_{\#}\pi(\tilde{X}, \tilde{x}_0) = H$. Для этого нам понадобится явное выражение для пути, являющегося поднятием некоторого пути из X, начинающегося в x_0. Пусть путь ω в X начинается в x_0. Для каждого $t \in I$ определим путь ω_t в X, начинающийся в той же точке x_0, равенством $\omega_t(t') = \omega(tt')$, а путь $\tilde{\omega}$: $I \to \tilde{X}$ — равенством $\tilde{\omega}(t) = \langle \omega_t \rangle$. Докажем, что путь $\tilde{\omega}$ непрерывен. Если $\tilde{\omega}(t_0) \in \langle \omega', U \rangle$, то $p\tilde{\omega}(t_0) = \omega(t_0) \in U$ и $\langle \omega', U \rangle = \langle \tilde{\omega}(t_0), U \rangle$. Пусть N — любой открытый интервал отрезка I, содержащий точку t_0, причем $\omega(N) \subset U$. Если $t \in N$, то $\omega_t \sim \omega_{t_0} * \omega_{t_0, t}$, где $\omega_{t_0, t}(t') = \omega(t_0 + t'(t - t_0))$. Следовательно, при $t \in N$

$$\tilde{\omega}(t) = \langle \omega_t \rangle = \langle \tilde{\omega}(t_0) * \omega_{t_0, t} \rangle \in \langle \tilde{\omega}(t_0), U \rangle = \langle \omega', U \rangle,$$

и, значит, путь $\tilde{\omega}$ непрерывен. Более того, $p\tilde{\omega}(t) = \omega_t(1) = \omega(t)$. Следовательно, $\tilde{\omega}$ — поднятие пути ω, начинающееся в точке $\tilde{\omega}(0) = \tilde{x}_0$ и кончающееся в точке $\tilde{\omega}(1) = \langle \omega \rangle$.

Если $[\omega] \in H$, то $\omega \sim \omega_0$ и $\langle \omega \rangle = \tilde{x}_0$. Следовательно, поднятие $\tilde{\omega}$ пути ω, построенное выше, является замкнутым путем пространства $\tilde{X}$ в точке $\tilde{x}_0$; это доказывает, что $H \subset p_{\#}\pi(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$. С другой стороны, если $\tilde{\omega}'$ — замкнутый путь в $\tilde{X}$ в точке $\tilde{x}_0$, причем $p\tilde{\omega}' = \omega$, то пусть $\tilde{\omega}$ — построенный выше путь в $\tilde{X}$. Поскольку $\tilde{\omega}$ — поднятие пути ω, начинающееся в точке $\tilde{x}_0$, то из свойства единственности накрывающего пути для p вытекает равенство $\tilde{\omega} = \tilde{\omega}'$. Следовательно, $\tilde{\omega}(1) = \tilde{\omega}'(1) = \tilde{x}_0$. Поскольку $\tilde{\omega}(1) = \langle \omega \rangle$, имеем $\omega \sim \omega_0$, откуда следует, что $p_{\#}\pi(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \subset H$. ■

Пространство X является полулокально односвязным (см. § 2.4) тогда и только тогда, когда существует открытое покрытие $\mathcal{U}$ пространства X, для которого $\pi(\mathcal{U}, x_0) = 0$. Таким образом, мы приходим к следующему результату:

14. Следствие. *Связное локально линейно связное пространство X имеет односвязное накрывающее пространство тогда и только тогда, когда X полулокально односвязно.* ■

С помощью следствий 14, 6 и теоремы 2 получаем такой результат:

15. Следствие. *Всякое универсальное накрывающее пространство связного локально линейно связного и полулокально односвязного пространства односвязно.* ■

Не всякое связное локально линейно связное пространство имеет универсальное накрывающее пространство. Приведем два примера:

16. Произведение бесконечного множества окружностей не имеет универсального накрывающего пространства.

17. Пусть X — подпространство пространства $\mathbf{R}^2$, являющееся объединением окружностей C_n с центром $(1/n, 0)$ и радиусом $1/n$ при $n \geqslant 1$. Тогда X связно и локально линейно связно, но не имеет универсального накрывающего пространства.

Может случиться, что связное локально линейно связное пространство обладает универсальным накрывающим пространством, не являющимся односвязным. Приведем пример:

18. Пример. Пусть Y_1 — конус, основание которого X есть пространство, рассмотренное в примере 17. [Наглядно пространство Y_1 можно представлять себе как множество в $\mathbf{R}^3$, состоящее из отрезков, соединяющих точки множества X с точкой $(0, 0, 1)$.] Пусть y_1 — точка, в которой все окружности пространства X касаются одна другой, а (Y_2, y_2) — другой экземпляр пары (Y_1, y_1). Пусть $Z = Y_1 \vee Y_2$. Тогда Z связно и локально линейно связно, но не односвязно (см. упражнение 1.G.7; замкнутый путь, обегающий уменьшающиеся окружности в пространствах Y_1 и Y_2 поочередно, не гомотопен нулю). В то же время Y_1 и Y_2 — замкнутые стягиваемые подпространства пространства Z. По теореме о поднятии каждое из них можно поднять в любое накрытие пространства Z, причем любое поднятие точек y_1 и y_2 можно реализовать таким образом. Следовательно, всякое накрывающее пространство с базой Z имеет сечение. Отсюда вытекает, что любое связное накрытие над Z гомеоморфно Z. ■

В категории расслоений со свойством единственности накрывающего пути над фиксированной линейно связной базой (и с линейно связным пространством расслоения) всегда существует универсальный объект (т. е. объект, для которого имеются морфизмы в любой другой объект этой категории). Наметим доказательство этого факта. Пусть X — линейно связное пространство, и пусть $\mathscr{X}(X)$ — совокупность топологических пространств, которые как множества совпадают с одним из прямых произведений множества X на множество правых смежных классов некоторой подгруппы фундаментальной группы пространства X. Из теоремы 2.3.9 вытекает, что любое расслоение, база и пространство расслоения которого линейно связны, эквивалентно расслоению $\tilde{X} \to X$, где $\tilde{X} \in \mathscr{X}(X)$. Поскольку $\mathscr{X}(X)$ — множество, те расслоения $\tilde{X} \to X$ со свойством единственности накрывающего пути, для которых $\tilde{X}$ линейно связно, также образуют множество. Мы можем образовать расслоенное произведение из элементов этого множества (как в § 2.2). Это расслоенное произведение и будет искомым универсальным расслоением со свойством единственности накрывающего пути.

Если X — связное локально линейно связное пространство, то из теоремы 13 вытекает, что для любого открытого покрытия $\mathscr{U}$ пространства X существует линейно связное накрытие над X, фундаментальная группа которого изоморфна $\pi(\mathscr{U}, x_0)$. Отсюда вытекает также, что если $\tilde{X}$ — универсальный объект категории линейно связных расслоений над X со свойством единственности накрывающего пути, то группа $\pi(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ изоморфна некоторой подгруппе группы $\bigcap_{\mathscr{U}} \pi(\mathscr{U}, x_0)$. В частности, если $\bigcap_{\mathscr{U}} \pi(\mathscr{U}, x_0) = 0$, то X имеет односвязное расслоение со свойством единственности накрывающего пути, являющееся универсальным объектом этой категории. Таким образом, пространства примеров 16 и 17 оба имеют универсальные расслоения со свойством единственности накрывающего пути, причем эти расслоения односвязны. Пространство Z примера 18 является своим собственным универсальным расслоением со свойством единственности накрывающего пути.

§ 6. Накрывающие преобразования

В этом параграфе мы рассмотрим задачу, обратную к изученной в предыдущем параграфе, где мы строили накрывающие отображения по заданным базисным пространствам. Теперь нас интересует вопрос, какие имеются накрывающие отображения с заданным накрывающим пространством. Мы докажем, что любое регулярное накрывающее пространство обладает группой накрывающих преобразований. Соответствующее накрывающее отображение оказывается эквивалентным проекции накрывающего пространства на пространство орбит группы накрывающих преобразований.

Пусть $p\colon \tilde{X} \to X$ — расслоение со свойством единственности накрывающего пути. Очевидно, определена *группа самоэквивалентностей* этого расслоения (самоэквивалентностью называется гомеоморфизм $f\colon \tilde{X} \to \tilde{X}$, такой, что $p \circ f = p$). Обозначим эту группу через $G(\tilde{X}|X)$. В том случае, когда $p\colon \tilde{X} \to X$ — накрывающее отображение, группа $G(\tilde{X}|X)$ называется также *группой накрывающих преобразований* отображения p. Существует далеко идущая аналогия между $G(\tilde{X}|X)$ и группой автоморфизмов некоторого расширения заданного поля, оставляющих неподвижным каждый элемент исходного поля.

Если пространство $\tilde{X}$ линейно связно, то из леммы 2.2.4 вытекает, что две самоэквивалентности накрывающего отображения $p\colon \tilde{X} \to X$, совпадающие в одной точке, совпадают всюду. Следовательно, мы приходим к такой лемме:

1. Лемма. *Пусть $p\colon \tilde{X} \to X$ — расслоение со свойством единственности накрывающего пути. Если пространство $\tilde{X}$ линейно связно и $\tilde{x}_0 \in \tilde{X}$, то отображение $f \to f(\tilde{x}_0)$ представляет собой вложение множества $G(\tilde{X}|X)$ в слой отображения p над точкой $p(\tilde{x}_0)$.* ■

Теорема 2.3.9 устанавливает взаимно однозначное соответствие между множеством правых смежных классов группы $\pi(X, p(\tilde{x}_0))$ по подгруппе $p_{\#}\pi(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ и множеством точек слоя отображения p над точкой $p(\tilde{x}_0)$. Обращение этого соответствия и отображение леммы 1 позволяют получить вложение ψ группы $G(\tilde{X}|X)$ в множество правых смежных классов группы $\pi(X, p(\tilde{x}_0))$ по подгруппе $p_{\#}\pi(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$. Точное определение отображения ψ состоит в следующем. Для заданного элемента $f \in G(\tilde{X}|X)$ пусть $\tilde{\omega}$ — путь в $\tilde{X}$ от $\tilde{x}_0$ до $f(\tilde{x}_0)$. Тогда $p \circ \tilde{\omega}$ — замкнутый путь в X в точке $p(\tilde{x}_0)$, и правый класс смежности $(p_{\#}\pi(\tilde{X}, \tilde{x}_0))[p \circ \tilde{\omega}]$ не зависит от выбора пути $\tilde{\omega}$. Функция ψ сопоставляет элементу f этот класс.

Если $\tilde{x}_0 \in \tilde{X}$, то пусть $N(p_{\#}\pi(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$ — нормализатор подгруппы $p_{\#}\pi(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ в группе $\pi(X, p(\tilde{x}_0))$. Таким образом, $N(p_{\#}\pi(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$ — подгруппа группы $\pi(X, p(\tilde{x}_0))$, состоящая из всех элементов $[\omega] \in \pi(X, p(\tilde{x}_0))$, отображающих подгруппу $p_{\#}\pi(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ в себя при сопряжении на элемент $[\omega]$; $N(p_{\#}\pi(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$ — максимальная подгруппа в $\pi(X, p(\tilde{x}_0))$, содержащая $p_{\#}\pi(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ в качестве нормального делителя.

2. Теорема. *Пусть $p\colon \tilde{X} \to X$ — расслоение со свойством единственности накрывающего пути. Пусть пространство $\tilde{X}$ линейно связно, и пусть $\tilde{x}_0 \in \tilde{X}$. Тогда ψ — мономорфизм группы $G(\tilde{X}|X)$ в факторгруппу $N(p_{\#}\pi(\tilde{X}, \tilde{x}_0))/p_{\#}\pi(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$. Если $\tilde{X}$ также является локально линейно связным, то ψ — изоморфизм.*

Доказательство. Мы уже знаем, что ψ — вложение. Покажем теперь, что ψ является функцией из $G(\tilde{X}|X)$ в множество правых смежных классов группы $N(p_{\#}\pi(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$ по подгруппе $p_{\#}\pi(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$. Для всякого пути $\tilde{\omega}$ в $\tilde{X}$ из точки $\tilde{x}_0$ в $f(\tilde{x}_0)$ имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc}
\pi(\tilde{X}, \tilde{x}_0) & \xleftarrow{h_{[\tilde{\omega}]}} & \pi(\tilde{X}, f(\tilde{x}_0)) \\
\downarrow{\scriptstyle p_{\#}} & & \downarrow{\scriptstyle p_{\#}} \\
\pi(X, p(\tilde{x}_0)) & \xleftarrow{h_{[p \circ \tilde{\omega}]}} & \pi(X, p(\tilde{x}_0))
\end{array}$$

Поскольку $f\colon (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to (\tilde{X}, f(\tilde{x}_0))$ — гомеоморфизм, имеем

$$f_{\#}\pi(\tilde{X}, \tilde{x}_0) = \pi(\tilde{X}, f(\tilde{x}_0));$$

но $p_{\#}f_{\#} = p_{\#}$, поэтому

$$h_{[p\circ\tilde{\omega}]}p_{\#}\pi(\tilde{X}, f(\tilde{x}_0)) = h_{[p\circ\tilde{\omega}]}p_{\#}f_{\#}\pi(\tilde{X}, \tilde{x}_0) = h_{[p\circ\tilde{\omega}]}p_{\#}\pi(\tilde{X}, \tilde{x}_0) =$$
$$= p_{\#}h_{[\tilde{\omega}]}\pi(\tilde{X}, f(\tilde{x}_0)) = p_{\#}\pi(\tilde{X}, \tilde{x}_0).$$

Следовательно, $[p\circ\tilde{\omega}] \in N(p_{\#}\pi(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$. Так как $\psi(f)$ совпадает с правым смежным классом $(p_{\#}\pi(\tilde{X}, \tilde{x}_0))[p\circ\tilde{\omega}]$, то ψ — вложение $G(\tilde{X}|X)$ в множество правых смежных классов группы $N(p_{\#}\pi(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$ по подгруппе $p_{\#}\pi(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$.

Проверим теперь, что ψ — гомоморфизм. Пусть $f_1, f_2 \in G(\tilde{X}|X)$, а $\tilde{\omega}_1$ и $\tilde{\omega}_2$ — пути в $\tilde{X}$ от точки $\tilde{x}_0$ до точек $f_1(\tilde{x}_0)$ и $f_2(\tilde{x}_0)$ соответственно. Тогда $f_1\circ\tilde{\omega}_2$ — путь от $f_1(\tilde{x}_0)$ до $f_1f_2(\tilde{x}_0)$, а $\tilde{\omega}_1 * (f_1\circ\tilde{\omega}_2)$ — путь от $\tilde{x}_0$ до $f_1f_2(\tilde{x}_0)$. Следовательно, $\psi(f_1f_2)$ совпадает с правым смежным классом

$$(p_{\#}\pi(\tilde{X}, \tilde{x}_0))[(p\circ\tilde{\omega}_1)*(p\circ f_1\circ\tilde{\omega}_2)] = (p_{\#}\pi(\tilde{X}, \tilde{x}_0))[p\circ\tilde{\omega}_1]*[p\circ\tilde{\omega}_2],$$

а значит, с классом $\psi(f_1)\circ\psi(f_2)$.

Покажем, наконец, что если пространство $\tilde{X}$ локально линейно связно, то ψ является эпиморфизмом на множество правых смежных классов группы $N(p_{\#}\pi(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$ по подгруппе $p_{\#}\pi(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$. Предположим, что элемент $[\omega] \in \pi(X, p(\tilde{x}_0))$ принадлежит группе $N(p_{\#}\pi(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$. Пусть $\tilde{\omega}$ — поднятие пути ω, кончающееся в $\tilde{x}_0$, и пусть $\tilde{x} = \tilde{\omega}(0)$. Тогда

$$p_{\#}\pi(\tilde{X}, \tilde{x}_0) = h_{[\omega]}(p_{\#}\pi(\tilde{X}, \tilde{x}_0)) = p_{\#}(h_{[\tilde{\omega}]}\pi(\tilde{X}, \tilde{x}_0)) = p_{\#}\pi(\tilde{X}, \tilde{x}).$$

Поскольку X связно и локально линейно связно, из теоремы о поднятии вытекает существование отображений $f\colon (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to (\tilde{X}, \tilde{x})$ и $g\colon (\tilde{X}, \tilde{x}) \to (\tilde{X}, \tilde{x}_0)$, для которых $p\circ f = p$ и $p\circ g = p$. Из свойства единственности накрывающей гомотопии (лемма 2.2.4) вытекает, что $f\circ g = 1_{\tilde{X}}$ и $g\circ f = 1_{\tilde{X}}$. Следовательно, $f \in G(\tilde{X}|X)$ и $\psi(f)$ совпадает с правым смежным классом $(p_{\#}\pi(\tilde{X}, \tilde{x}_0))[\omega]^{-1}$. ∎

Теорема 2 в сочетании с теоремой 2.3.12 приводит к такому результату:

3. Следствие. *Пусть $p\colon \tilde{X} \to X$ — расслоение со свойством единственности накрывающего пути. Если пространство X связно и локально линейно связно, то p регулярно тогда и только тогда, когда группа $G(\tilde{X}|X)$ транзитивно действует на каждом слое расслоения p. В этом случае*

$$\psi\colon G(\tilde{X}|X) \approx \pi(X, p(\tilde{x}_0))/p_{\#}\pi(\tilde{X}, x_0), \qquad \tilde{x}_0 \in \tilde{X}. \ ∎$$

Если пространство $\tilde{X}$ односвязно, то любое расслоение $p\colon \tilde{X}\to X$ регулярно, и мы получаем такой результат:

4. Следствие. *Пусть $p\colon \tilde{X}\to X$ — расслоение со свойством единственности накрывающего пути, причем $\tilde{X}$ односвязно, локально линейно связно и непусто. Тогда группа самоэквивалентностей расслоения p изоморфна фундаментальной группе пространства X.* ∎

Если $p\colon \tilde{X}\to X$ — регулярное накрывающее отображение, а пространство $\tilde{X}$ связно и локально линейно связно, то X гомеоморфно пространству орбит группы $G(\tilde{X}|X)$ (*орбитой* группы преобразований G, действующей на множестве S, называется множество классов эквивалентности множества S по следующему отношению эквивалентности: $s_1\sim s_2$, если существует элемент $g\in G$, для которого $gs_1=s_2$). Нас интересует обратная задача: какие условия необходимо наложить на группу G гомеоморфизмов топологического пространства Y, чтобы проекция Y на пространство орбит Y/G была регулярным накрывающим отображением, группа накрывающих преобразований которого совпадала бы с G?

Группа G гомеоморфизмов топологического пространства Y называется *разрывной*, если каждая ее орбита G в Y представляет собой дискретное подмножество пространства Y. Группа G называется *вполне разрывной*, если для каждой точки $y\in Y$ существует такая ее открытая окрестность U, что если множества gU и $g'U$ пересекаются, $g, g'\in G$, то $g=g'$. Говорят, что группа G *действует без неподвижных точек*, если единственным элементом, имеющим неподвижные точки, является единичный элемент. Следующие утверждения очевидны.

5. *Вполне разрывная группа гомеоморфизмов является разрывной и действует без неподвижных точек.* ∎

6. *Конечная группа гомеоморфизмов, действующая без неподвижных точек на хаусдорфовом пространстве, вполне разрывна.* ∎

Если G — группа накрывающих преобразований некоторого накрывающего отображения, то несложная проверка показывает, что G вполне разрывна. Мы покажем, что всякая вполне разрывная группа гомеоморфизмов определяет накрывающее отображение.

7. Теорема. *Пусть G — вполне разрывная группа гомеоморфизмов некоторого пространства Y. Тогда отображение пространства Y на пространство орбит Y/G является накрывающим. Если пространство Y связно, то это накрывающее отображение регулярно и G — его группа накрывающих преобразований.*

Доказательство. Пусть $p\colon Y\to Y/G$ — указанное отображение. Оно непрерывно и, кроме того, открыто, так как если множество U открыто в Y, то $p^{-1}(p(U))=\bigcup\{gU|g\in G\}$ открыто в Y

и, следовательно, $p(U)$открыто в Y/G. Пусть U — открытое подмножество пространства Y, такое, что если gU и $g'U$ пересекаются, то $g = g'$. Мы покажем, что множество $p(U)$ просто накрыто отображением p. Из предположений о множестве U вытекает, что $\{gU \mid g \in G\}$ — совокупность непересекающихся открытых множеств, объединение которых совпадает с $p^{-1}(p(U))$. Достаточно показать, что $p \mid gU$ — биективное отображение gU на $p(U)$. Если $y \in U$, то $p(gy) = p(y)$, и, значит, $p(gU) = p(U)$. Если $p(gy_1) = p(gy_2)$ при $y_1, y_2 \in U$, то существует такой элемент $g' \in G$, что $gy_1 = g'gy_2$. Значит, gU пересекается с $g'gU$, откуда $g = g'g$. Следовательно, $g' = 1_Y$ и $gy_1 = gy_2$. Мы доказали, что p — гомеоморфизм gU на $p(U)$. Поскольку группа G вполне разрывна, множества $p(U)$, просто накрытые отображением p, образуют открытое покрытие пространства Y/G.

Поскольку $p(gy) = p(y)$, мы видим, что группа G содержится в группе накрывающих преобразований отображения p. Так как G транзитивно действует на слоях отображения p, то из теоремы 2.2.2 вытекает, что если пространство Y связно, то G совпадает с группой всех накрывающих преобразований. Но эта группа накрывающих преобразований транзитивно действует на каждом слое, поэтому рассматриваемое накрывающее отображение регулярно. ∎

8. Следствие. *Пусть G — вполне разрывная группа гомеоморфизмов односвязного пространства Y. Тогда фундаментальная группа пространства орбит Y/G изоморфна группе G.*

Доказательство. Согласно теореме 7, группа G совпадает с группой накрывающих преобразований регулярного накрывающего отображения p: $Y \to Y/G$. По теореме 2 отображение ψ является мономорфизмом группы G в фундаментальную группу пространства Y/G. Так как G транзитивно действует на слоях расслоения p, то ψ — изоморфизм. ∎

9. Пример. Пусть $S^3 = \{(z_0, z_1) \in \mathbf{C}^2 \mid |z_0|^2 + |z_1|^2 = 1\}$, и пусть p и q — взаимно простые целые числа. Определим отображение h: $S^3 \to S^3$ формулой

$$h(z_0, z_1) = (e^{2\pi i/p} z_0,\ e^{2\pi i q/p} z_1).$$

Тогда h — гомеоморфизм сферы S^3 с периодом p (т. е. $h^p = 1$) и группа $\mathbf{Z}_p$ действует на S^3 по следующей формуле:

$$n(z_0, z_1) = h^n(z_0, z_1),$$

где буквой n мы обозначили класс вычетов числа n по модулю p. Группа $\mathbf{Z}_p$ действует на S^3 без неподвижных точек. Пространство орбит этого действия группы $\mathbf{Z}_p$ на S^3 называется *линзовым пространством* и обозначается $L(p, q)$. Из предложения 6 и следствия 8 мы заключаем, что фундаментальная группа пространства $L(p, q)$ изоморфна $\mathbf{Z}_p$.

10. Пример. Пусть $S^{2n+1}=\{(z_0, z_1, \ldots, z_n)\in \mathbf{C}^{n+1} \mid \sum |z_i|^2=1\}$, и пусть $q_1, \ldots, q_n$ — целые числа, взаимно простые с числом p. Определим отображение h: $S^{2n+1}\to S^{2n+1}$ формулой

$$h(z_0, z_1, \ldots, z_n)=\left(e^{2\pi i/p}z_0, e^{2\pi i q_1/p}z_1, \ldots, e^{2\pi i q_n/p}z_n\right).$$

Здесь, как и в примере 9, отображение h определяет действие группы $\mathbf{Z}_p$ на S^{2n+1} без неподвижных точек. Соответствующее пространство орбит называется *обобщенным линзовым пространством* и обозначается через $L(p, q_1, \ldots, q_n)$. Его фундаментальная группа изоморфна группе $\mathbf{Z}_p$. ■

Теорему 7 можно использовать для доказательства того, что проекция $Y\to Y/G$ является регулярным расслоением со свойством единственности накрывающего пути даже в том случае, если эта проекция не есть накрывающее отображение. Заметим, что если группа G действует на Y без неподвижных точек, то так же действует и любая ее подгруппа, и если G' — нормальный делитель группы G, то G/G' действует без неподвижных точек на пространстве Y/G'.

11. Теорема. *Пусть G — группа гомеоморфизмов, действующая без неподвижных точек на линейно связном пространстве Y. Предположим, что задана убывающая последовательность подгрупп*

$$G=G_0\supset G_1\supset \ldots \supset G_n\supset G_{n+1}\supset \ldots,$$

удовлетворяющая следующим условиям:

(a) $\bigcap G_n=\{1_Y\}$;

(b) G_{n+1} *— нормальный делитель в G_n для $n\geqslant 0$;*

(c) G_n/G_{n+1} *— вполне разрывная группа гомеоморфизмов пространства Y/G_{n+1}, и проекция $Y\to Y/G_n$ является замкнутым отображением для $n\geqslant 0$;*

(d) *всякая орбита группы G_n в Y компактна при всех $n\geqslant 0$.*

Тогда проекция p: $Y\to Y/G$ является регулярным расслоением со свойством единственности накрывающего пути и его группа самоэквивалентностей совпадает с G.

Доказательство. Поскольку $Y/G_n=(Y/G_{n+1})/(G_n/G_{n+1})$, из свойства (c) и теоремы 7 вытекает, что проекция

$$p_{n+1}\colon Y/G_{n+1}\to Y/G_n$$

является регулярным накрывающим отображением для $n\geqslant 0$. Пусть

$$\tilde{Y}=\{(y_n)\in \prod (Y/G_n) \mid p_{n+1}(y_{n+1})=y_n,\ n\geqslant 0\}.$$

Определим отображение $\tilde{p}$: $\tilde{Y}\to Y/G$, полагая $\tilde{p}((y_n))=y_0$. Легко проверить, что $\tilde{p}$ представляет собой расслоение со свойством единственности накрывающего пути (оно является расслоенным произведением отображений $\{p_j\}$).

Для всех $n \geqslant 0$ определено непрерывное замкнутое отображение φ_n: $Y \to Y/G_n$, такое, что $p_{n+1} \circ \varphi_{n+1} = \varphi_n$. Следовательно, существует единственное замкнутое непрерывное отображение φ: $Y \to \tilde{Y}$, определяемое равенством $\varphi(y) = (\varphi_n(y))$. Очевидно, $\tilde{p} \circ \varphi = p$. Покажем, что φ — гомеоморфизм. Для этого достаточно показать, что оно биективно. Если $\varphi(y) = \varphi(y')$, то для всякого $n \geqslant 0$ существует такой элемент $g_n \in G_n$, что $y = g_n y'$. Тогда $g_n y' = g_m y'$ для всех m и n. Поскольку G действует без неподвижных точек, $g_m = g_n$ для всех m и n. Следовательно, $g_n \in G_m$ для всех m, и в силу условия (a) $g_n = 1_Y$. Отсюда вытекает, что $y = y'$, и, следовательно, φ инъективно.

Если $(y_n) \subset \tilde{Y}$, то $\varphi_n^{-1}(y_n)$ — орбита группы G_n в пространстве Y. По свойству (d) множество $\varphi_n^{-1}(y_n)$ компактно. Так как

$$\varphi_n^{-1}(y_n) = \varphi_{n+1}^{-1} p_{n+1}^{-1}(y_n) \supset \varphi_{n+1}^{-1}(y_{n+1}),$$

то совокупность $\{\varphi_n^{-1}(y_n)\}$ состоит из замкнутых множеств и обладает тем свойством, что пересечение любого конечного числа множеств этой совокупности непусто. Следовательно, $\bigcap \varphi_n^{-1}(y_n) \neq \varnothing$. Если $y \in \bigcap \varphi_n^{-1}(y_n)$, то $\varphi(y) = (y_n)$. Это показывает, что φ сюръективно.

Мы показали, что φ: $Y \to \tilde{Y}$ — гомеоморфизм. Следовательно, проекция p: $Y \to Y/G$ есть расслоение со свойством единственности накрывающего пути. Поскольку каждый элемент группы G является самоэквивалентностью расслоения p, группа самоэквивалентностей расслоения p действует транзитивно на каждом слое. Согласно следствию 3, p — регулярное расслоение, а G — группа его самоэквивалентностей. ■

§ 7. Расслоенные пространства

Накрывающее пространство локально является произведением базы и некоторого дискретного пространства. В этом параграфе мы вводим более общее понятие расслоенного пространства, которое локально представляет собой произведение базы и слоя. Главный результат этого параграфа состоит в том, что проекция расслоенного пространства на свою базу является расслоением[1]).

Расслоенным пространством называется система $\xi = (E, B, F, p)$, состоящая из *пространства расслоения* E, *базы* B, *слоя* F и *проекции* p: $E \to B$. При этом требуется существование такого открытого

[1]) По поводу общей теории расслоенных пространств см. Стинрод Н., Топология косых произведений, М., 1953.

покрытия $\{U\}$ пространства B и таких гомеоморфизмов φ_U: $U \times F \to p^{-1}(U)$ для каждого множества $U \in \{U\}$, что композиция

$$U \times F \xrightarrow{\varphi_U} p^{-1}(U) \xrightarrow{p} U$$

представляет собой проекцию на первый сомножитель. Значит, проекции p: $E \to B$ и $B \times F \to B$ локально эквивалентны. *Слоем над точкой* $b \in B$ называется множество $p^{-1}(b)$. Заметим, что пространство $p^{-1}(b)$ гомеоморфно F для всякой точки $b \in B$. При определении расслоенного пространства обычно еще задается его структурная группа G, состоящая из гомеоморфизмов слоя F. Определим это понятие.

Пусть G — группа гомеоморфизмов слоя F. Если задано пространство F' и совокупность $\Phi = \{\varphi\}$ гомеоморфизмов φ: $F \to F'$, то определим гомеоморфизм φg: $F \to F'$ ($\varphi \in \Phi$, $g \in G$) равенством $\varphi g(y) = \varphi(g(y))$ ($y \in F$). Совокупность Φ называется *G-структурой* на F', если

(a) при $\varphi \in \Phi$ и $g \in G$ имеем $\varphi g \in \Phi$;

(b) для заданных φ_1, $\varphi_2 \in \Phi$ найдется такое $g \in G$, что $\varphi_1 = \varphi_2 g$.

Условие (a) показывает, что G действует справа на Φ, а условие (b) — что это действие транзитивно. Говорят, что расслоенное пространство (E, B, F, p) обладает *структурной группой* G, если каждый слой $p^{-1}(b)$ наделен такой G-структурой $\Phi(b)$, что существуют открытое покрытие $\{U\}$ пространства B и гомеоморфизмы φ_U: $U \times F \to p^{-1}(U)$ для каждого множества $U \in \{U\}$, обладающие следующим свойством: если $b \in U$, то отображение $F \to p^{-1}(b)$, переводящее точку x в точку $\varphi_U(b, x)$, принадлежит множеству $\Phi(b)$. Ясно, что всякое расслоенное пространство всегда можно наделить структурой расслоенного пространства со структурной группой, состоящей из всех гомеоморфизмов слоя F. Понятно также, что данное расслоенное пространство иногда можно наделить структурой расслоенного пространства с двумя различными структурными группами гомеоморфизмов слоя F.

Действительным n-мерным векторным расслоением называется расслоенное пространство, слоем которого является пространство $\mathbf{R}^n$, а структурной группой — полная линейная группа $GL(\mathbf{R}^n)$, состоящая из всех линейных автоморфизмов пространства $\mathbf{R}^n$. *Комплексным n-мерным векторным расслоением* называется расслоенное пространство, слой которого есть $\mathbf{C}^n$, а структурная группа $GL(\mathbf{C}^n)$. Приведем несколько примеров.

1. Для пространств B и F *расслоением-произведением* называется расслоенное пространство $(B \times F, B, F, p)$, где p: $B \times F \to B$ — проекция на первый сомножитель. Это расслоенное пространство допускает в качестве структурной группы тривиальную группу.

2. Пусть $p\colon \tilde{X} \to X$ — накрывающее отображение, причем пространство X связно. Если $x_0 \in X$, то $(\tilde{X}, X, p^{-1}(x_0), p)$ является расслоенным пространством. [Если пространство X линейно связно, то его можно наделить структурой расслоенного пространства со структурной группой $\pi(X, x_0)$. При этом $\pi(X, x_0)$ действует на $p^{-1}(x_0)$ по формуле $[\omega]\tilde{x} = \tilde{x}[\omega]^{-1}$, правую часть которой надо понимать так же, как в доказательстве теоремы 2.3.9.]

3. Пусть M — дифференцируемое n-мерное многообразие, и пусть $T(M)$ — множество всех касательных векторов к многообразию M. Можно определить расслоенное пространство $(T(M), M, \mathbf{R}^n, p)$, где проекция $p\colon T(M) \to M$ сопоставляет каждому касательному вектору его начало. Оно называется *касательным пучком* и обозначается через $\tau(M)$. Поскольку его можно наделить структурной группой $GL(\mathbf{R}^n)$, оно является n-мерным векторным расслоением. Если M — комплексное многообразие комплексной размерности n, то $\tau(M)$ — комплексное n-мерное векторное расслоение.

4. Пусть H — замкнутая подгруппа группы Ли G, G/H — факторпространство левых смежных классов и $p\colon G \to G/H$ — проекция. Тогда $(G, G/H, H, p)$ — расслоенное пространство со структурной группой H, действующей на себе левыми сдвигами.

5. Представим S^n как объединение двух замкнутых полусфер E^n_- и E^n_+, пересекающихся по экватору S^{n-1}. Пусть G — группа гомеоморфизмов некоторого пространства F. При заданном отображении $\varphi\colon S^{n-1} \to G$ пусть E_φ — пространство, полученное из суммы $(E^n_- \times F) \vee (E^n_+ \times F)$ отождествлением $(x, y) \in E^n_- \times F$ с $(x, \varphi(x)\, y) \in E^n_+ \times F$ $(x \in S^{n-1}$ и $y \in F)$. Это отождествление совместимо с проекциями $E^n_- \times F \to E^n_-$ и $E^n_+ \times F \to E^n_+$. Следовательно, существует отображение $p_\varphi\colon E_\varphi \to S^n$, для которого каждая из композиций

$$E^n_- \times F \to E_\varphi \xrightarrow{p_\varphi} S^n \quad \text{и} \quad E^n_+ \times F \to E_\varphi \xrightarrow{p_\varphi} S^n$$

является проекцией на первый сомножитель. Тогда $(E_\varphi, S^n, F, p_\varphi)$ — расслоенное пространство (со структурной группой G). О нем говорят, что оно определено *характеристическим отображением* φ.

6. Пусть $\mathbf{C}P^n$ — комплексное n-мерное проективное пространство с обычной системой однородных координат. Если числа $z_0, z_1, \ldots, z_n \in \mathbf{C}$ не все равны нулю, то пусть $[z_0, z_1, \ldots, z_n] \in \mathbf{C}P^n$ — точка пространства $\mathbf{C}P^n$, имеющая однородные координаты $z_0, z_1, \ldots, z_n$. Рассмотрим сферу S^{2n+1} как множество $\{(z_0, z_1, \ldots, z_n) \in \mathbf{C}^{n+1} \mid \sum |z_i|^2 = 1\}$ и определим отображение $p\colon S^{2n+1} \to \mathbf{C}P^n$ формулой $p(z_0, z_1, \ldots, z_n) = [z_0, z_1, \ldots, z_n]$. Если

$U_i \subseteq \mathbf{C}P^n$ — подмножество, состоящее из всех тех точек, i-я однородная координата которых не равна нулю, то легко видеть, что $p^{-1}(U_i)$ гомеоморфно $U_i \times S^1$. Следовательно, $(S^{2n+1}, \mathbf{C}P^n, S^1, p)$ — расслоенное пространство (имеющее структурную группу S^1, которая действует на себе левыми сдвигами). Оно называется *расслоением Хопфа.*

7. Если $\mathbf{Q}$ — тело кватернионов, то можно определить аналогичное отображение p: $S^{4n+3} \to \mathbf{Q}P^n$ и *кватернионное расслоение Хопфа* $(S^{4n+3}, \mathbf{Q}P^n, S^3, p)$ (имеющее в качестве структурной группы группу S^3, которая действует на себе левыми сдвигами). ■

Наличие структурной группы не существенно для наших целей. Так, мы определяем *расслоение на n-мерные сферы* как расслоенное пространство со слоем S^n (обычно оно снабжается группой — *ортогональной группой* $O(n+1)$, состоящей из всех изометрий, принадлежащих группе $GL(\mathbf{R}^{n+1})$). Если ξ — расслоение на n-мерные сферы, то его пространство расслоения будет обозначаться через $\dot{E}_\xi$. Цилиндр проекции $\dot{E}_\xi \to B$ является пространством расслоения E_ξ расслоенного пространства $(E_\xi, B, E^{n+1}, p_\xi)$, где p_ξ: $E_\xi \to B$ — ретракция цилиндра отображения на B (а $p_\xi | \dot{E}_\xi$: $\dot{E}_\xi \to B$ — исходная проекция).

Если $\xi = (E, B, \mathbf{R}^{n+1}, p)$ — некоторое $(n+1)$-мерное векторное расслоение со структурной группой $O(n+1)$, то в каждом слое $p^{-1}(b)$ можно ввести норму. Подмножество $E' \subset E$, состоящее из элементов E с нормой единица, является пространством расслоения на n-мерные сферы $(E', B, S^n, p|E')$ и называется *расслоением на единичные n-мерные сферы* расслоения ξ. Если база B $(n+1)$-мерного векторного расслоения есть паракомпактное хаусдорфово пространство, то это расслоение всегда можно наделить структурной группой $O(n+1)$. В частности, можно определить *расслоение единичных касательных векторов* над гладким паракомпактным многообразием.

Два расслоенных пространства (E_1, B, F, p_1) и (E_2, B, F, p_2) с одним и тем же слоем и одной и той же базой называются *эквивалентными*, если существует такой гомеоморфизм h: $E_1 \to E_2$, что $p_2 \circ h = p_1$. Если оба они имеют одну и ту же структурную группу G, то они называются *G-эквивалентными* в том случае, когда гомеоморфизм h обладает следующим дополнительным свойством: если $\varphi \in \Phi_1(b)$, то $h \circ \varphi \in \Phi_2(b)$, $b \in B$. Расслоенное пространство называется *тривиальным*, если оно эквивалентно расслоению-произведению (см. пример 1), или, что то же самое, если оно допускает тривиальную группу в качестве своей структурной группы.

Как показывает пример 2, расслоенные пространства связаны с накрывающими пространствами почти так же, как расслоения связаны с расслоениями со свойством единственности накрывающего пути. Оставшаяся часть этого параграфа посвящена доказательству того, что в расслоенном пространстве (E, B, F, p), база B которого — паракомпактное хаусдорфово пространство, проекция p является расслоением.

Отображение p: $E \to B$ называется *локальным расслоением*, если существует такое открытое покрытие $\{U\}$ пространства B, что $p|p^{-1}(U)$: $p^{-1}(U) \to U$ — расслоение для каждого множества $U \in \{U\}$. Ясно, что расслоение всегда является локальным расслоением [1]) и что проекция расслоенного пространства также является локальным расслоением.

Для данного отображения p: $E \to B$ определим подпространство $\bar{B} \subset E \times B^I$ формулой

$$\bar{B} = \{(e, \omega) \in E \times B^I \mid \omega(0) = p(e)\}.$$

Существует отображение $\bar{p}$: $E^I \to \bar{B}$, определяемое равенством $\bar{p}(\bar{\omega}) = (\bar{\omega}(0), p \circ \bar{\omega})$ для всякого $\bar{\omega}: I \to E$. *Накрывающей функцией* для p называется отображение

$$\lambda: \bar{B} \to E^I,$$

являющееся правым обратным для $\bar{p}$ [2]). Таким образом, накрывающая функция сопоставляет каждой точке $e \in E$ и каждому пути ω в B, начинающемуся в $p(e)$, путь $\lambda(e, \omega)$ в E, начинающийся в e и накрывающий путь ω. Следующая теорема содержит описание связи между накрывающими функциями и расслоениями.

8. Теорема. *Отображение p: $E \to B$ тогда и только тогда является расслоением, когда p обладает накрывающей функцией.*

Доказательство. Доказательство состоит в повторном использовании теоремы 2.8 из введения. Пусть p — расслоение, а отображения f': $\bar{B} \to E$ и F: $\bar{B} \times I \to B$ определены равенствами $f'(e, \omega) = e$ и $F((e, \omega), t) = \omega(t)$. Тогда

$$F((e, \omega), 0) = \omega(0) = p(e) = (p \circ f')(e, \omega).$$

Поскольку p обладает свойством накрывающей гомотопии, существует такое отображение F': $\bar{B} \times I \to E$, что $F'((e, \omega), 0) =$

[1]) Излагаемое нами доказательство обратного утверждения для паракомпактных хаусдорфовых пространств B содержится в работе: Hurewicz W., On the concept of fibre space, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, **41** (1955), 956—961. Другое доказательство можно найти в статье: Huebsch W., On the covering homotopy theorem, *Ann. Math.*, **61** (1955), 555—563. Обобщения и некоторые смежные вопросы рассматриваются в статье: Dold A., Partitions of unity in the theory of fibrations, *Ann. Math.*, 78 (1963), 223—255.

[2]) Накрывающая функция является обобщением понятия связности в дифференциальной геометрии. Связность — это по существу специальный вид накрывающей функции в касательном пучке $\tau(M)$ дифференцируемого многообразия. — *Прим. ред.*

$= f'(e, \omega) = e$ и $p \circ F' = F$. Отображение F' определяет накрывающую функцию λ для проекции p по формуле $\lambda(e, \omega)(t) = F'((e, \omega), t)$.

Обратно, если λ — накрывающая функция для p, а отображения f': $X \to E$ и F: $X \times I \to B$ таковы, что $F(x, 0) = pf'(x)$, то определим отображение g: $X \to B^I$ равенством $g(x)(t) = F(x, t)$. Существует такое отображение F': $X \times I \to E$, что $F'(x, t) = \lambda(f'(x), g(x))(t)$. Поскольку $F'(x, 0) = f'(x)$ и $p \circ F' = F$, отображение p обладает свойством накрывающей гомотопии. ■

Пусть задано отображение p: $E \to B$, и пусть W — подмножество пространства B^I. Определим пространство $\tilde{W}$ формулой

$$\tilde{W} = \{(e, \omega, s) \in E \times W \times I \mid \omega(s) = p(e)\}.$$

Расширенной накрывающей функцией над W называется такое отображение

$$\Lambda: \tilde{W} \to E^I,$$

что $p(\Lambda(e, \omega, s)(t)) = \omega(t)$ и $\Lambda(e, \omega, s)(s) = e$. Таким образом, расширенная накрывающая функция — это отображение, накрывающее пути такими путями, которые проходят через данную точку пространства E при заданном значении параметра. Естественно надеяться, что имеется следующая связь между существованием накрывающих функций и расширенных накрывающих функций:

9. Лемма. *Отображение p: $E \to B$ тогда и только тогда обладает накрывающей функцией, когда существует расширенная накрывающая функция над B^I.*

Доказательство. Если Λ — расширенная накрывающая функция над B^I, то накрывающая функция λ отображения p определяется равенством $\lambda(e, \omega) = \Lambda(e, \omega, 0)$.

Докажем обратное утверждение. Возьмем некоторый путь ω в B и определим пути ω_s и ω^s в B равенствами

$$\omega_s(t) = \begin{cases} \omega(s - t), & 0 \leqslant t \leqslant s, \\ \omega(0), & s \leqslant t \leqslant 1, \end{cases}$$

$$\omega^s(t) = \begin{cases} \omega(s + t), & 0 \leqslant t \leqslant 1 - s, \\ \omega(1), & 1 - s \leqslant t \leqslant 1. \end{cases}$$

Соответствия $(\omega, s) \to \omega_s$ и $(\omega, s) \to \omega^s$ определяют непрерывные отображения $B^I \times I \to B^I$. Задав накрывающую функцию λ: $\overline{B} \to E^I$ отображения p, определим расширенную накрывающую функцию Λ над B^I равенством

$$\Lambda(e, \omega, s)(t) = \begin{cases} \lambda(e, \omega_s)(s - t), & 0 \leqslant t \leqslant s, \\ \lambda(e, \omega^s)(t - s), & s \leqslant t \leqslant 1. \end{cases}$$ ■

Основным шагом в доказательстве того, что локальное расслоение является расслоением, будет склеивание расширенных накрывающих функций над различными открытыми подмножествами пространства B^I. Для этого нам понадобится еще одно понятие. Покрытие $\{W\}$ пространства X называется *нумерируемым*, если оно локально конечно и если для каждого W существует такая функция $f_W\colon X \to [0, 1]$, что $W = \{x \in X \mid f_W(x) \neq 0\}$.

10. Лемма. *Пусть $p\colon E \to B$ — некоторое отображение. Если имеется нумерируемое покрытие $\{W_j\}$ пространства B^I, такое, что для каждого j существует расширенная накрывающая функция над W_j, то существует накрывающая функция отображения p.*

Доказательство. Пусть $J = \{j\}$ — множество индексов, и пусть для каждого $j \in J$ отображение $f_j\colon B^I \to I$ таково, что $W_j = \{\omega \in B^I \mid f_j(\omega) \neq 0\}$. Для любого подмножества $\alpha \subset J$ положим $W_\alpha = \bigcup\limits_{j \in \alpha} W_j$. Определим функцию $f_\alpha\colon B^I \to \mathbf{R}$ равенством

$$f_\alpha(\omega) = \sum_{j \in \alpha} f_j(\omega)$$

(поскольку покрытие $\{W_j\}$ локально конечно, эта сумма конечна, и, значит, функция f_α непрерывна). Следовательно, если $\omega \in B^I$, то $f_\alpha(\omega) \geqslant 0$ и

$$W_\alpha = \{\omega \in B^I \mid f_\alpha(\omega) \neq 0\}.$$

Положим $\bar{B}_\alpha = \{(e, \omega) \in \bar{B} \mid \omega \in W_\alpha\}$.

Рассмотрим множество пар (α, λ_α), где $\alpha \subset J$, а $\lambda_\alpha\colon \bar{B}_\alpha \to E^I$ — накрывающая функция над $\bar{B}_\alpha$ [т. е. $\lambda_\alpha(e, \omega)(0) = e$ и $p\lambda_\alpha(e, \omega)(t) = \omega(t)$]. Определим частичное упорядочение $\leqslant$ на этом множестве, считая, что $(\alpha, \lambda_\alpha) \leqslant (\beta, \lambda_\beta)$, если $\alpha \subset \beta$, и $\lambda_\alpha(e, \omega) = \lambda_\beta(e, \omega)$ всякий раз, когда $(e, \omega) \in \bar{B}_\alpha$ и $f_\alpha(\omega) = f_\beta(\omega)$ (таким образом, если $(e, \omega) \in \bar{B}_\alpha$ и $\lambda_\alpha(e, \omega) \neq \lambda_\beta(e, \omega)$, то $\omega \in W_j$ при некотором $j \in \beta - \alpha$).

Докажем, что каждое линейно упорядоченное подмножество $\{(\alpha_i, \lambda_{\alpha_i})\}$ имеет верхнюю грань. Положим $\beta = \bigcup \alpha_i$. Определим отображение $\lambda_\beta\colon \bar{B}_\beta \to E^I$ таким образом, чтобы $(\alpha_i, \lambda_{\alpha_i}) \leqslant (\beta, \lambda_\beta)$ для всех i. Пусть U — открытое подмножество множества W_β, пересекающееся лишь с конечным числом множеств W_j (где $j \in \beta$), скажем с множествами $W_{j_1}, \ldots, W_{j_r}$ (W_β может быть покрыто такими множествами U). Выберем i так, чтобы все индексы $j_1, \ldots, j_r$ принадлежали множеству α_i. Тогда при $\alpha_i \subset \alpha_k$ получаем $f_{\alpha_i} \mid U = f_{\alpha_k} \mid U$. Поскольку $(\alpha_i, \lambda_{\alpha_i}) \leqslant (\alpha_k, \lambda_{\alpha_k})$, отсюда вытекает, что $\lambda_{\alpha_i}(e, \omega) = \lambda_{\alpha_k}(e, \omega)$ при $(e, \omega) \in \bar{B}_{\alpha_i}$ $(\omega \in U)$. Следовательно, существует такое отображение $\lambda_\beta\colon \bar{B}_\beta \to E^I$, что $\lambda_\beta(e, \omega) = \lambda_{\alpha_i}(e, \omega)$ для достаточно большого α_i. Покажем теперь, что $(\alpha_i, \lambda_{\alpha_i}) \leqslant (\beta, \lambda_\beta)$. Если $(e, \omega) \in \bar{B}_{\alpha_i}$ и $\lambda_{\alpha_i}(e, \omega) \neq \lambda_\beta(e, \omega)$, то существует такое α_k, что $(\alpha_i, \lambda_{\alpha_i}) \leqslant (\alpha_k, \lambda_{\alpha_k})$ и $\lambda_{\alpha_i}(e, \omega) \neq \lambda_{\alpha_k}(e, \omega)$. Значит, $\omega \in W_j$ при некотором $j \in \alpha_k - \alpha_i$. Отсюда вытекает, что $\omega \in W_j$ при некотором $j \in \beta - \alpha_i$, и, следовательно, $(\alpha_i, \lambda_{\alpha_i}) \leqslant (\beta, \lambda_\beta)$.

Существование максимального элемента (α, λ_α) в нашем упорядоченном множестве вытекает из леммы Цорна. Для завершения доказательства нам осталось лишь показать, что $\alpha = J$. Если $\alpha \neq J$, то пусть $j_0 \in J - \alpha$ и $\beta = \alpha \cup \{j_0\}$. Определим отображение $g\colon W_\beta \to \mathbf{R}$ равенством $g(\omega) = f_\alpha(\omega)/f_\beta(\omega)$. Тогда $0 \leqslant g(\omega) \leqslant 1$, $g(\omega) \neq 0 \Leftrightarrow \omega \in W_\alpha$ и $g(\omega) \neq 1 \Leftrightarrow \omega \in W_{j_0}$. Определим отображение $\mu\colon \bar{B}_{j_0} \to E$ равенством

$$\mu(e, \omega) = \begin{cases} \lambda_\alpha(e, \omega)(g(\omega)), & g(\omega) \neq 0, \\ e, & g(\omega) = 0. \end{cases}$$

Отображение μ непрерывно. Пусть Λ — расширенная накрывающая функция над W_{j_0}. Определим отображение $\lambda_\beta\colon \bar{B}_\beta \to E^I$ формулой

$$\lambda_\beta(e, \omega)(t) = \begin{cases} \lambda_\alpha(e, \omega)(t), & 0 \leqslant t \leqslant g(\omega), \quad g(\omega) \neq 0, \\ \Lambda(\mu(e, \omega), \omega, g(\omega))(t), & g(\omega) \leqslant t \leqslant 1, \quad g(\omega) \neq 1. \end{cases}$$

В таком случае λ_β — корректно определенная накрывающая функция над множеством W_β. Более того, если $\lambda_\alpha(e, \omega) \neq \lambda_\beta(e, \omega)$, то $g(\omega) \neq 1$ и $\omega \in W_{j_0}$. Поскольку $j_0 \in \beta - \alpha$, это значит, что $(\alpha, \lambda_\alpha) < (\beta, \lambda_\beta)$, вопреки предположению о максимальности пары (α, λ_α). ■

В случае когда p обладает свойством единственности накрывающего пути, лемма 10 выполняется для всякого открытого покрытия $\{W_j\}$ пространства B^I, такого, что для каждого j существует накрывающая функция над W_j (ибо в силу единственности накрывающих путей можно склеивать расширенные накрывающие функции в накрывающую функцию отображения p). Это уже было использовано при доказательстве теоремы о том, что всякое накрывающее отображение является расслоением (теорема 2.2.3), которая справедлива без всяких ограничений на базу.

11. Лемма. *Пусть отображение $p\colon E \to B$ и подмножества $U_1, \ldots, U_k$ пространства B таковы, что существуют расширенные накрывающие функции над $U_1^I, \ldots, U_k^I$. Пусть W — подмножество пространства B^I, определенное условиями*

$$W = \left\{ \omega \in B^I \,\middle|\, \omega\left(\left[\frac{i-1}{k}, \frac{i}{k}\right]\right) \subset U_i,\ i = 1, \ldots, k \right\}.$$

Тогда существует расширенная накрывающая функция над W.

Доказательство. Пусть Λ_i — расширенная накрывающая функция над U_i^I $(i = 1, \ldots, k)$. Для заданного пути $\omega \in W$ пусть ω_i — путь, совпадающий с ω на $[(i-1)/k, i/k]$ и сводящийся к постоянному пути на интервалах $[0, (i-1)/k]$ и $[i/k, 1]$. Возьмем элемент $(e, \omega, s) \in \tilde{W}$, для которого $(n-1)/k \leqslant s \leqslant n/k$, и определим точки $e_i \in E$ $(i = 1, \ldots, k)$ по индукции равенствами

$$\begin{aligned} e_{n-1} &= \Lambda_n(e, \omega_n, s)\left(\frac{n-1}{k}\right), \\ e_n &= \Lambda_n(e, \omega_n, s)\left(\frac{n}{k}\right), \\ e_{i-1} &= \Lambda_{i-1}\left(e_i, \omega_{i-1}, \frac{i}{k}\right)\left(\frac{i-1}{k}\right), \quad 0 \leqslant i < n-1, \\ e_{i+1} &= \Lambda_{i+1}\left(e_i, \omega_{i+1}, \frac{i}{k}\right)\left(\frac{i+1}{k}\right), \quad n < i+1 \leqslant k. \end{aligned}$$

Расширенная накрывающая функция Λ над W определяется по формуле

$$\Lambda(e, \omega, s)(t) = \Lambda_i\left(e_{i-1}, \omega_i, \frac{i-1}{k}\right)(t), \quad \frac{i-1}{k} \leqslant t \leqslant \frac{i}{k}, \quad i = 1, \ldots, k. \blacksquare$$

Теперь мы подготовлены к доказательству основного результата о переходе от локальных расслоений к расслоениям.

12. Теорема. *Если отображение $p\colon E \to B$ и нумерируемое покрытие $\mathcal{U}$ пространства B таковы, что $p|p^{-1}(U)\colon p^{-1}(U) \to U$ есть расслоение для всякого $U \in \mathcal{U}$, то p — расслоение.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{U} = \{U_j\}$. Для всякого множества индексов $j_1, \ldots, j_k$ $(k \geqslant 1)$ определим подмножество $W_{j_1 j_2 \ldots j_k}$ пространства B^I условиями

$$W_{j_1 j_2 \ldots j_k} = \left\{\omega \in B^I \,\middle|\, \omega\left(\left[\frac{i-1}{k}, \frac{i}{k}\right]\right) \subset U_{j_i}, \ i = 1, \ldots, k\right\}.$$

Ясно, что совокупность $\{W_{j_1 j_2 \ldots j_k}\}$ (k меняется) представляет собой открытое покрытие пространства B^I. Каждое множество $W_{j_1 j_2 \ldots j_k}$ обладает расширенной накрывающей функцией согласно лемме 11. При фиксированном k покрытие $\{W_{j_1 j_2 \ldots j_k}\}$ локально конечно. Действительно, если $\omega \in B^I$, то для каждого $i = 1, \ldots, k$ существует окрестность V_i множества $\omega[(i-1)/k, i/k]$, пересекающаяся лишь с конечным числом множеств U_j. Тогда $\bigcap_{1 \leqslant i \leqslant k} \langle[(i-1)/k, i/k], V_i\rangle$ является окрестностью пути ω и пересекается только с конечным числом множеств $W_{j_1 j_2 \ldots j_k}$. Для каждого j пусть $f_j\colon B \to I$ — непрерывное отображение, такое, что

$f_j(b) \neq 0$ тогда и только тогда, когда $b \in U_j$. Определим функцию $\bar{f}_{j_1 j_2 \dots j_k}\colon B^I \to I$ равенством

$$\bar{f}_{j_1 j_2 \dots j_k}(\omega) = \inf \left\{ f_{j_i}(\omega(t)) \,\Big|\, \frac{i-1}{k} \leqslant t \leqslant \frac{i}{k},\ i = 1, \dots, k \right\}.$$

Следовательно, $\bar{f}_{j_1 j_2 \dots j_k}(\omega) \neq 0$ тогда и только тогда, когда $\omega \in W_{j_1 j_2 \dots j_k}$.

К сожалению, совокупность $\{W_{j_1 j_2 \dots j_k}\}$ (для всех k) не является локально конечным покрытием, иначе мы закончили бы доказательство с помощью леммы 10. Эта трудность преодолевается изменением множеств $W_{j_1 j_2 \dots j_k}$. Поскольку для фиксированного m совокупность $\{W_{j_1 j_2 \dots j_k}\}$ $(k < m)$ является локально конечной, сумма функций $\bar{f}_{j_1 j_2 \dots j_k}$ $(k < m)$ представляет собой непрерывную действительную функцию g_m на B^I. Положим по определению

$$f'_{j_1 j_2 \dots j_m} = \inf \left(\sup \left(0, \bar{f}_{j_1 j_2 \dots j_m} - m g_m \right), 1 \right).$$

Тогда $f'_{j_1 j_2 \dots j_m}\colon B^I \to I$; пусть $W'_{j_1 j_2 \dots j_m} = \{\omega \in B^I \mid f'_{j_1 j_2 \dots j_m}(\omega) \neq 0\}$. Ясно, что $W'_{j_1 j_2 \dots j_m} \subset W_{j_1 j_2 \dots j_m}$. Следовательно, существует расширенная накрывающая функция над $W'_{j_1 j_2 \dots j_m}$. Для завершения доказательства, согласно лемме 10, достаточно проверить, что совокупность $\{W'_{j_1 j_2 \dots j_k}\}$ (с переменным k) является локально конечным покрытием пространства B^I.

Если $\omega \in B^I$, то пусть m — наименьшее целое число, такое, что $\bar{f}_{j_1 j_2 \dots j_m}(\omega) \neq 0$ для некоторого набора $j_1, j_2, \dots, j_m$. Тогда $g_m(\omega) = 0$ и

$$f'_{j_1 j_2 \dots j_m}(\omega) = \bar{f}_{j_1 j_2 \dots j_m}(\omega) \neq 0.$$

Следовательно, $\omega \in W'_{j_1 j_2 \dots j_m}$, откуда получаем, что $\{W'_{j_1 j_2 \dots j_m}\}$ — покрытие пространства B^I. Для доказательства локальной конечности выберем N таким образом, чтобы $N > m$ и $\bar{f}_{j_1 j_2 \dots j_m}(\omega) > 1/N$. Тогда $g_N(\omega) > 1/N$ и $N g_N(\omega) > 1$. Следовательно, $N g_N(\omega') > 1$ для всех путей ω', принадлежащих некоторой окрестности V пути ω. Отсюда следует, что все функции $f'_{j_1 j_2 \dots j_k}$ $(k \geqslant N)$ обращаются в нуль на V. Но это означает, что соответствующее множество $W'_{j_1 j_2 \dots j_k}$ не пересекается с V. Поскольку совокупность $\{W'_{j_1 j_2 \dots j_k}\}$ при $k < N$ локально конечна, то и совокупность $\{W'_{j_1 j_2 \dots j_k}\}$ (для всех k) также локально конечна. ■

Тот факт, что любое открытое покрытие паракомпактного хаусдорфова пространства обладает нумерируемым измельчением, приводит к следующей теореме:

13. Теорема. *Если B — паракомпактное хаусдорфово пространство, то отображение p: $E \to B$ тогда и только тогда является расслоением, когда оно является локальным расслоением.* ■

Проекция, связанная с расслоенным пространством, является расслоением. Отсюда мы получаем такое следствие:

14. Следствие. *Если (E, B, F, p) — расслоенное пространство, база B которого паракомпактна и хаусдорфова, то p — расслоение.* ■

§ 8. Расслоения

Этот параграф посвящен общему рассмотрению расслоений. Мы установим связь между корасслоениями и расслоениями, что позволит строить расслоения из корасслоений при помощи функциональных пространств. Мы также докажем, что произвольное отображение эквивалентно с точностью до гомотопии некоторому расслоению (этот факт двойствен соответствующему результату для корасслоений). Кроме того, здесь вводятся понятия послойного гомотопического типа и индуцированного расслоения и доказывается, что гомотопные отображения индуцируют послойно гомотопически эквивалентные расслоения.

Начнем с аналога теоремы 2.7.8 для корасслоений. Пусть задано отображение f: $X' \to X$, и пусть $\overline{X}$ — факторпространство суммы $(X' \times I) \vee (X \times 0)$, полученное отождествлением точки $(x', 0) \in X' \times I$ с точкой $(f(x'), 0) \in X \times 0$ для всех $x' \in X'$. Через $[x', t]$ и $[x, 0]$ мы обозначаем точки пространства $\overline{X}$, соответствующие точкам $(x', t) \in X' \times I$ и $(x, 0) \in X \times 0$. Следовательно, $[x', 0] = [f(x'), 0]$. Определим отображение

$$\bar{i}\colon \overline{X} \to X \times I,$$

полагая

$$\bar{i}[x', t] = (f(x'), t), \qquad x' \in X', \quad t \in I,$$
$$\bar{i}[x, 0] = (x, 0), \qquad x \in X.$$

Ретрагирующим отображением для f называется отображение

$$\rho\colon X \times I \to \overline{X},$$

являющееся левым обратным к $\bar{i}$. В случае когда f — вложение, $\bar{i}$ также является вложением, и ретрагирующее отображение для f представляет собой ретракцию $X \times I$ на подпространство $X' \times I \cup X \times 0$.

1. Теорема. *Отображение $f\colon X' \to X$ тогда и только тогда является корасслоением, когда для него существует ретрагирующее отображение*[1].

Доказательство. Пусть f — корасслоение, а $g\colon X \to \overline{X}$ $G\colon X' \times I \to \overline{X}$ — отображения, определяемые равенствами $g(x) = [x, 0]$ и $G(x', t) = [x', t]$. Так как

$$G(x', 0) = [x', 0] = [f(x'), 0] = gf(x'),$$

то из того, что f — корасслоение, вытекает существование такого отображения $\rho\colon X \times I \to \overline{X}$, что $\rho(x, 0) = g(x)$ и $\rho(f(x'), t) = G(x', t)$. Это отображение ρ и есть искомое ретрагирующее отображение для f.

Обратно, для заданных отображений $g\colon X \to Y$ и $G\colon X' \times I \to Y$, таких, что $G(x', 0) = gf(x')$ при $x' \in X'$, определим отображение

$$\overline{G}\colon \overline{X} \to Y$$

равенствами $\overline{G}[x', t] = G(x', t)$ и $\overline{G}[x, 0] = g(x)$. Если $\rho\colon X \times I \to \overline{X}$ — ретрагирующее отображение для f, то отображение $F = \overline{G} \circ \rho\colon X \times I \to Y$ обладает свойствами $F(x, 0) = g(x)$ и $F(f(x'), t) = G(x', t)$, откуда видно, что f — корасслоение. ■

Сказанное приводит к следующему построению расслоений из корасслоений:

2. Теорема. *Пусть $f\colon X' \to X$ — корасслоение, где X' и X — локально компактные хаусдорфовы пространства, и пусть Y — произвольное пространство. Тогда отображение $p\colon Y^X \to Y^{X'}$, задаваемое равенством $p(g) = g \circ f$, является расслоением.*

Доказательство. Пусть $\rho\colon X \times I \to \overline{X}$ — ретрагирующее отображение для f (которое существует согласно теореме 1). Тогда ρ определяет отображение

$$\rho'\colon Y^{\overline{X}} \to Y^{X \times I},$$

такое, что $\rho'(g) = g \circ \rho$ для $g\colon \overline{X} \to Y$. Поскольку X' и X — локально компактные хаусдорфовы пространства, пространство $\overline{X}$ тоже обладает этими свойствами. Поэтому из теоремы 2.9 введения вытекает, что $Y^{X \times I} \approx (Y^X)^I$ и

$$Y^{\overline{X}} \approx \{(g, G) \in Y^X \times (Y^{X'})^I \mid g \circ f = G(0)\}.$$

Следовательно, ρ' соответствует при этом изоморфизме накрывающей функции для отображения $p\colon Y^X \to Y^{X'}$, и, значит, по теореме 2.7.8, p является расслоением. ■

---

[1] Ср. упражнение 1.Е.3. — *Прим. перев.*

3. Следствие. *Для всякого пространства Y отображение p: $Y^I \to Y \times Y$, задаваемое равенством $p(\omega) = (\omega(0), \omega(1))$, где ω: $I \to Y$, является расслоением.*

Доказательство. Поскольку подпространство $\dot{I} \times I \cup I \times 0$ есть ретракт пространства $I \times I$, вложение $\dot{I} \subset I$ является корасслоением (или, что эквивалентно, пара $(I, \dot{I})$ обладает свойством продолжения гомотопии относительно любого пространства). Нужный нам результат получается теперь из теоремы 2 и того факта, что отображение $g \to (g(0), g(1))$, где g: $\dot{I} \to Y$, является гомеоморфизмом пространства $Y^{\dot{I}}$ на $Y \times Y$. ■

Пусть f: $B' \to B$ и p: $E \to B$ — некоторые отображения, и пусть E' — подмножество пространства $B' \times E$, определенное условием

$$E' = \{(b', e) \in B' \times E \mid f(b') = p(e)\}.$$

Пространство E' называется *расслоенным произведением* пространств B' и E (более точно — расслоенным произведением отображений f и p; ср. § 2.2). Заметим, что существуют отображения p': $E' \to B'$ и f': $E' \to E$, определяемые равенствами $p'(b', e) = b'$ и $f'(b', e) = e$. Пространство E' и отображения p' и f' можно охарактеризовать как произведение отображений f: $B' \to B$ и p: $E \to B$ в категории, объекты которой представляют собой непрерывные отображения с областью значений B, а морфизмы — коммутативные диаграммы

$$\begin{tikzcd} X_1 \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "g_1"'] & & X_2 \arrow[dl, "g_2"] \\ & B & \end{tikzcd}$$

Легко проверить следующие свойства:

4. *Если p инъективно (или сюръективно), то таким же будет и p'.* ■

5. *Если p: $B \times F \to B$ — тривиальное расслоение, то p': $E' \to B'$ эквивалентно тривиальному расслоению $B' \times F \to B'$.* ■

6. *Если p — расслоение (со свойством единственности накрывающего пути), то таким же будет и p'.* ■

7. *Если p — расслоение, то f тогда и только тогда можно поднять в E, когда p' допускает сечение.* ■

Заметим, что, поскольку расслоенное произведение симметрично относительно B и E (точнее, относительно f и p), можно сформулировать аналогичные утверждения, заменив p и p' на f и f'.

Если p: $E \to B$ — расслоение (или накрывающее отображение), а f: $B' \to B$ — произвольное отображение, то из свойства 6 (или свойства 5) вытекает, что p': $E' \to B'$ — расслоение (или накрывающее отображение). В таком случае оно называется *расслоением, индуцированным отображением* f из p (или *накрывающим отображением, индуцированным отображением* f из p). Если $\xi = (E, B, F, p)$ — расслоенное пространство, а f: $B' \to B$ — некоторое отображение, то из свойства 5 вытекает, что (E', B', F, p') — расслоенное пространство. Оно называется *расслоенным пространством, индуцированным отображением* f из ξ, и обозначается $f^*\xi$. Если i: $B' \subset B$ — вложение, то через $E|B'$ мы обозначаем расслоенное произведение пространств B' и E. Если ξ — расслоенное пространство с базой B, то через $\xi|B'$ мы обозначаем расслоенное пространство над B', индуцированное вложением i. Заметим, что $\xi|B'$ эквивалентно расслоенному пространству $(p^{-1}(B'), B', F, p|p^{-1}(B'))$.

8. Следствие. *Пусть заданы пространство Y и точка $y_0 \in Y$. Пусть отображение p: $P(Y, y_0) \to Y$ ставит в соответствие каждому пути с началом y_0 его конец. Тогда p — расслоение, слоем которого над точкой y_0 является пространство петель ΩY.*

Доказательство. Пусть отображение f: $Y \to Y \times Y$ определено равенством $f(y) = (y_0, y)$, и пусть $\bar{p}$: $Y^I \to Y \times Y$ — расслоение, определенное в следствии 3. Расслоение, индуцированное отображением f, эквивалентно отображению p: $P(Y, y_0) \to Y$, где $p(\omega) = \omega(1)$. Его слой $p^{-1}(y_0)$ над точкой y_0 есть по определению пространство петель ΩY. ■

Из следствия 3 вытекает, что отображение p': $Y^I \to Y$, определенное условием $p'(\omega) = \omega(0)$ [или $p'(\omega) = \omega(1)$], является расслоением, ибо оно есть композиция расслоений $Y^I \to Y \times Y \to Y$. Если p: $E \to B$ — некоторое отображение, а p': $B^I \to B$ — расслоение, определяемое равенством $p'(\omega) = \omega(0)$, то расслоенное произведение пространств E и B^I как раз является пространством $\bar{B}$, использованным при определении накрывающей функции отображения p.

Эти замечания о расслоенных произведениях и индуцированных расслоениях имеют аналоги для корасслоений. Если заданы отображения f_1: $X \to X_1$ и f_2: $X \to X_2$, то *корасслоенной суммой* пространств X_1 и X_2 называется факторпространство X' пространства $X_1 \vee X_2$, полученное отождествлением точек $f_1(x)$ и $f_2(x)$ для всех $x \in X$. Определены отображения i_1: $X_1 \to X'$ и i_2: $X_2 \to X'$, которые характеризуют X' как сумму отображений f_1 и f_2 в категории, объектами которой являются отображения с областью определения X, а морфизмами — соответствующие коммутативные диаграммы. Если f_1: $X \to X_1$ — корасслоение, то таким же будет и

$i_2\colon X_2 \to X'$. Оно называется *корасслоением, индуцированным отображением* f_2 из f_1.

Отображение $h_0\colon X' \to X' \times I$, определяемое соотношением $h_0(x') = (x', 0)$, является корасслоением для любого пространства X'. Если $f\colon X' \to X$ — произвольное отображение, то корасслоенная сумма $X' \times I$ и X является как раз пространством $\overline{X}$, использованным при определении ретрагирующего отображения для f.

Пусть $p\colon E \to B$ — некоторое расслоение. Отображения $f_0, f_1\colon X \to E$ называются *послойно гомотопными* (обозначается $f_0 \underset{p}{\simeq} f_1$), если существует такая гомотопия $F\colon f_0 \simeq f_1$, что $pF(x, t) = pf_0(x)$ для $x \in X$ и $t \in I$. В этом случае $p \circ f_0 = p \circ f_1$. Послойная гомотопия определяет отношение эквивалентности на множестве отображений $X \to E$. Соответствующее множество классов эквивалентности обозначается через $[X; E]_p$. Если задано отображение $f\colon X \to E$, то через $[f]_p$ обозначается его класс послойной гомотопии. Понятие послойной гомотопии двойственно понятию относительной гомотопии.

Теперь мы воспользуемся индуцированными расслоениями для доказательства того, что любое отображение является расслоением с точностью до гомотопической эквивалентности. Пусть $f\colon X \to Y$ — некоторое отображение, а $p'\colon Y^I \to Y$ — расслоение, определяемое равенством $p'(\omega) = \omega(0)$. Пусть $p\colon P_f \to X$ — расслоение, индуцированное отображением f из p'. Оно называется *расслоением путей отображения* f. Это понятие двойственно понятию цилиндра отображения. Расслоение p имеет сечение $s\colon X \to P_f$, определяемое формулой $s(x) = (x, \omega_{f(x)})$, где $\omega_{f(x)}$ — постоянный путь в Y в точке $f(x)$. Существует также отображение $p''\colon P_f \to Y$, определяемое равенством $p''(x, \omega) = \omega(1)$. Имеет место теорема, двойственная теореме 1.4.12.

9. Теорема. *Пусть задано отображение $f\colon X \to Y$. Тогда существует коммутативная диаграмма*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "s"] \arrow[dr, "f"'] & & P_f \arrow[dl, "p''"] \\ & Y & \end{tikzcd}$$

такая, что

(a) $1_{P_f} \underset{p}{\simeq} s \circ p$;

(b) p'' *является расслоением.*

Доказательство. Диаграмма коммутативна согласно определению использованных в ней отображений.

(a) Определим отображение $F\colon P_f \times I \to P_f$ формулой $F((x, \omega), t) = (x, \omega_{1-t})$, где $\omega_{1-t}(t') = \omega((1 - t)t')$. Тогда F является послойной гомотопией от 1_{P_f} до $s \circ p$.

(b) Пусть отображения $g\colon W\to P_f$ и $G\colon W\times I\to Y$ таковы, что $G(w,0)=p''g(w)$, $w\in W$. Тогда существуют отображения $g'\colon W\to X$ и $g''\colon W\to Y^I$, такие, что $g''(w)(0)=fg'(w)$ и $g(w)=(g'(w),g''(w))$, $w\in W$. Определим поднятие $G'\colon W\times I\to P_f$ отображения G, начинающееся с отображения g, равенством $G'(w,t)=(g'(w),\bar g(w,t))$, где $\bar g(w,t)\in Y^I$ задается формулой

$$\bar g(w,t)(t')=\begin{cases} g''(w)(2t'/(2-t)), & 0\leqslant 2t'\leqslant 2-t\leqslant 2, \quad w\in W,\\ G(w,2t'+t-2), & 1\leqslant 2-t\leqslant 2t'\leqslant 2, \quad w\in W.\end{cases}$$

Поскольку p'' обладает свойством накрывающей гомотопии, оно является расслоением. ■

Отсюда следует, что в категории гомотопических типов отображений с областью значений Y расслоение $p''\colon P_f\to Y$ эквивалентно (при помощи отображений $s\colon X\to P_f$ и $p\colon P_f\to X$) первоначальному отображению $f\colon X\to Y$. Заменяя f эквивалентным расслоением, мы тем самым заменяем X пространством P_f того же гомотопического типа, в то время как в § 1.4 мы, заменяя f эквивалентным корасслоением, заменяли Y пространством Z_f того же гомотопического типа.

Два расслоения $p_1\colon E_1\to B$ и $p_2\colon E_2\to B$ называются *послойно гомотопически эквивалентными* (или расслоениями *одного и того же послойного гомотопического типа*), если существуют отображения $f\colon E_1\to E_2$ и $g\colon E_2\to E_1$, такие, что $g\circ f\underset{p_1}{\simeq}1_{E_1}$ и $f\circ g\underset{p_2}{\simeq}1_{E_2}$ (причем оба отображения f и g сохраняют слои в том смысле, что $p_2\circ f=p_1$ и $p_1\circ g=p_2$). Каждое из отображений f и g называется *послойной гомотопической эквивалентностью*. В оставшейся части этого параграфа мы будем заниматься послойной гомотопической эквивалентностью.

Начнем со следующего результата, касающегося поднятия гомотопных отображений:

10. Теорема. *Пусть $p\colon E\to B$ — расслоение, а F_0, $F_1\colon X\times I\to E$ — некоторые отображения. Для всяких гомотопий $H\colon p_0\circ F_0\simeq p\circ F_1$ и $G\colon F_0|X\times 0\simeq F_1|X\times 0$, таких, что $H(x,0,t)=pG(x,0,t)$, существует поднятие $H'\colon X\times I\times I\to E$ отображения H, являющееся гомотопией от F_0 до F_1 и продолжением отображения G.*

Доказательство. Пусть $A=(I\times 0)\cup(0\times I)\cup(I\times 1)\subset I\times I$. Определим отображение $f\colon X\times A\to E$ равенствами

$$f(x,t,0)=F_0(x,t),$$
$$f(x,0,t)=G(x,0,t),$$
$$f(x,t,1)=F_1(x,t).$$

Тогда $H|X \times A = p \circ f$. Поскольку существует гомеоморфизм $I \times I$ на себя, переводящий A на $I \times 0$, можно построить гомеоморфизм $X \times I \times I$ на себя, переводящий $X \times A$ на $X \times I \times 0$. Так как p обладает свойством накрывающей гомотопии, существует поднятие H': $X \times I \times I \to E$ отображения H, для которого $H'|X \times A = f$. ■

Для постоянных гомотопий H и G получаем такое следствие:

11. Следствие. *Пусть p: $E \to B$ — некоторое расслоение, а F_0, F_1: $X \times I \to E$ — поднятия одного и того же отображения, такие, что $F_0|X \times 0 = F_1|X \times 0$. Тогда $F_0 \underset{p}{\simeq} F_1 \operatorname{rel} X \times 0$.* ■

Пусть p: $E \to B$ — некоторое расслоение, а ω: $I \to B$ — путь в его базе. Поскольку p обладает свойством накрывающей гомотопии, существует отображение F: $p^{-1}(\omega(0)) \times I \to E$, для которого $pF(x, t) = \omega(t)$ и $F(x, 0) = x$ при $x \in p^{-1}(\omega(0))$, $t \in I$. Пусть f: $p^{-1}(\omega(0)) \to p^{-1}(\omega(1))$ — отображение, определенное равенством $f(x) = F(x, 1)$. Из теоремы 10 вытекает, что если $\omega \simeq \omega'$ — гомотопные пути в B и отображения F, F': $p^{-1}(\omega(0)) \times I \to E$ таковы, что $pF(x, t) = \omega(t)$, $pF'(x, t) = \omega'(t)$ и $F(x, 0) = x = F'(x, 0)$ для $x \in p^{-1}(\omega(0))$, $t \in I$, то отображения f, f': p^{-1}: $(\omega(0)) \to p^{-1}(\omega(1))$, определенные равенствами $f(x) = F(x, 1)$ и $f'(x) = F'(x, 1)$, гомотопны. Следовательно, корректно определен гомотопический класс $[f] \in [p^{-1}(\omega(0)); p^{-1}(\omega(1))]$, соответствующий классу путей $[\omega]$ в B. Положим $h[\omega] = [f]$.

Теорема 2.3.7 для произвольных расслоений принимает следующий вид:

12. Теорема. *Пусть p: $E \to B$ — некоторое расслоение. Существует контравариантный функтор из фундаментального группоида пространства B в категорию гомотопических типов, сопоставляющий точке $b \in B$ слой над ней, а классу путей $[\omega]$ — гомотопический класс $h[\omega]$.*

Доказательство. Для постоянного пути ω_b в точке b определим отображение F: $p^{-1}(b) \times I \to E$ формулой $F(x, t) = x$. Соответствующее отображение f: $p^{-1}(b) \to p^{-1}(b)$, определяемое равенством $f(x) = F(x, 1)$, является тождественным. Следовательно,

$$h[\omega_b] = [1_{p^{-1}(b)}],$$

откуда видно, что h сохраняет тождественные отображения.

Пусть ω и ω' — такие пути в B, что $\omega(1) = \omega'(0)$. Рассмотрим отображение F: $p^{-1}(\omega(0)) \times I \to E$, такое, что $F(x, 0) = x$ и $pF(x, t) = \omega(t)$ для $x \in p^{-1}(\omega(0))$, $t \in I$, и отображение F': $p^{-1}(\omega(1)) \times I \to E$, такое, что $F'(x', 0) = x'$ и $pF'(x', t) = \omega'(t)$ для $x' \in p^{-1}(\omega'(0))$, $t \in I$. Пусть отображение f: $p^{-1}(\omega(0)) \to$

$\to p^{-1}(\omega'(0))$ определено равенством $f(x)=F(x, 1)$. Определим отображение $F''\colon p^{-1}(\omega(0))\times I\to E$ формулами

$$F''(x, t)=\begin{cases} F(x, 2t), & 0\leqslant t\leqslant 1/2, \quad x\in p^{-1}(\omega(0)),\\ F'(f(x), 2t-1), & 1/2\leqslant t\leqslant 1, \quad x\in p^{-1}(\omega(0)).\end{cases}$$

Тогда $pF''(x, t)=(\omega*\omega')(t)$ и $F''(x, 0)=x$ для $x\in p^{-1}(\omega(0))$, $t\in I$. Пусть отображение $f'\colon p^{-1}(\omega'(0))\to p^{-1}(\omega'(1))$ определено равенством $f'(x')=F'(x', 1)$. Тогда $F''(x, 1)=f'(f(x))$ для $x\in p^{-1}(\omega(0))$, откуда получаем, что

$$h[\omega*\omega']=h[\omega']*h[\omega].$$

Следовательно, h — контравариантный функтор. ∎

Эта теорема приводит к следующему аналогу для произвольных расслоений следствия 2.3.8:

13. Следствие. *Если $p\colon E\to B$ — расслоение с линейно связной базой, то любые два слоя имеют один и тот же гомотопический тип.* ∎

Следующий результат показывает, что гомотопные отображения индуцируют послойно гомотопически эквивалентные расслоения.

14. Теорема. *Пусть $p\colon E\to B$ — некоторое расслоение, и пусть отображения $f_0, f_1\colon X\to B$ гомотопны. Тогда расслоения, индуцированные из p отображениями f_0 и f_1, послойно гомотопически эквивалентны.*

Доказательство. Пусть $p_0\colon E_0\to X$ и $p_1\colon E_1\to X$ — расслоения, индуцированные из p соответственно отображениями f и f_1, и пусть $f_0'\colon E_0\to E$ и $f_1'\colon E_1\to E$ — соответствующие отображения, такие, что $p\circ f_0'=f_0\circ p_0$ и $p\circ f_1'=f_1\circ p_1$. Если $F\colon X\times I\to B$ — гомотопия отображения f_0 в f_1, то существуют такие отображения $F_0'\colon E_0\times I\to E$ и $F_1'\colon E_1\times I\to E$, что $p\circ F_0'=F\circ(p_0\times 1_I)$, $p\circ F_1'=F\circ(p_1\times 1_I)$, $F_0'|E_0\times 0=f_0'$ и $F_1'|E_1\times 1=f_1'$. Определим отображения $g_0\colon E_0\to E_1$ и $g_1\colon E_1\to E_0$ следующими условиями: $F_0'(x, 1)=f_1'g_0(x)$ для $x\in E_0$ и $F_1'(y, 0)=f_0'g_1(y)$ для $y\in E_1$. Тогда

$$p\circ F_0'\circ(g_1\times 1_I)=F\circ(p_0\times 1_I)\circ(g_1\times 1_I)=F\circ(p_1\times 1_I),$$
$$F_0'\circ(g_1\times 1_I)|E_1\times 0=F_1'|E_1\times 0.$$

Из теоремы 10 вытекает, что $F_1' \underset{p}{\simeq} F_0' \circ (g_1 \times 1_I)$. Аналогично получаем гомотопию $F_0' \underset{p}{\simeq} F_1' \circ (g_0 \times 1_I)$. Отсюда вытекает, что $g_0 g_1 \underset{p_1}{\simeq} 1_{E_1}$ и $g_1 g_0 \underset{p_0}{\simeq} 1_{E_0}$. ■

Ясно, что постоянное отображение индуцирует тривиальное расслоение. Поэтому имеет место следующий результат:

15. Следствие. *Если p: $E \to B$ — расслоение, а пространство B стягиваемо, то p послойно гомотопически эквивалентно тривиальному расслоению $B \times p^{-1}(b_0) \to B$, где $b_0 \in B$ — произвольная точка.* ■

Пусть пространство B является соединением некоторого пространства Y и S^0, т. е. $B = C_-Y \cup C_+Y$, где C_-Y и C_+Y — конусы над Y и $C_-Y \cap C_+Y = Y$. Пусть $y_0 \in Y$, и пусть p: $E \to B$ — расслоение со слоем $F_0 = p^{-1}(y_0)$. Из следствия 15 вытекает, что существуют послойные гомотопические эквивалентности f_-: $C_-Y \times F_0 \to p^{-1}(C_-Y)$ и g_+: $p^{-1}(C_+Y) \to C_+Y \times F_0$. *Склеивающей функцией* μ: $Y \times F_0 \to F_0$ расслоения p называется функция μ, определяемая уравнением

$$g_+ f_-(y, z) = (y, \mu(y, z)), \quad y \in Y, \quad z \in F_0,$$

где f_-: $C_-Y \times F_0 \to p^{-1}(C_-Y)$ и g_+: $p^{-1}(C_+Y) \to C_+Y \times F_0$ — указанные гомотопические эквивалентности. Если C_-Y и C_+Y стягиваются в точку y_0 относительно y_0, то из теоремы 10 следует, что f_- и g_+ можно выбрать таким образом, чтобы отображение $z \to f_-(y_0, z)$ было гомотопно вложению $F_0 \subset p^{-1}(C_-Y)$, а отображение $z \to g_+(z)$ — гомотопно отображению $z \to (y_0, z)$ слоя F_0 в $C_+Y \times F_0$. В этом случае склеивающая функция μ, соответствующая f_- и g_+, обладает тем свойством, что отображение $z \to \mu(y_0, z)$ гомотопно тождественному отображению $F_0 \subset F_0$.

Пусть E_φ — расслоенное пространство с базой S^n, определяемое характеристическим отображением φ: $S^{n-1} \to G$, как указано в примере 2.7.5 (G — группа гомеоморфизмов слоя F). Тогда $E_-^n = C_-S^{n-1}$ и $E_+^n = C_+S^{n-1}$. Легко проверить, что отображения f_- и g_+ можно выбрать так, чтобы соответствующей им склеивающей функцией μ: $S^{n-1} \times F \to F$ было отображение $\mu(x, z) = \varphi(x) z$.

УПРАЖНЕНИЯ

А. Локальная связность

1. Докажите, что пространство X локально линейно связно тогда и только тогда, когда для каждой точки x из X и любой ее окрестности U найдется такая окрестность V точки x, что любые две точки из V можно соединить путем в U.

2. Пусть X — некоторое пространство, а $\overline{X}$ — множество X, наделенное топологией, порожденной компонентами линейной связности открытых множеств пространства X. Докажите, что пространство $\overline{X}$ локально линейно связно и что тождественное отображение множества X индуцирует непрерывное отображение j: $\overline{X} \to X$, обладающее тем свойством, что для любого локально линейно связного пространства Y отображение f: $Y \to \overline{X}$ непрерывно тогда и только тогда, когда непрерывно отображение $j \circ f$: $Y \to X$.

3. Пусть пространства X и $\overline{X}$ и отображение j: $\overline{X} \to X$ такие же, как и в упражнении 2. Докажите, что $j_{\#}$: $\pi(\overline{X}, x_0) \approx \pi(X, x_0)$.

B. Накрывающие пространства

1. Пусть X — объединение двух замкнутых односвязных и локально линейно связных подпространств A и B, пересечение которых $A \cap B$ состоит из одной точки. Докажите, что если p: $\tilde{X} \to X$ — непустое линейно связное расслоение со свойством единственности накрывающего пути, то p — гомеоморфизм.

2. Пусть $\tilde{X} = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x$ или y — целое число$\}$, и пусть

$$X = S^1 \vee S^1 = \{(z_1, z_2) \in S^1 \times S^1 \mid z_1 = 1 \quad \text{или} \quad z_2 = 1\}.$$

Докажите, что отображение p: $\tilde{X} \to X$, определяемое формулой $p(x, y) = (e^{2\pi ix}, e^{2\pi iy})$, является накрывающим отображением.

3. Пусть отображение p: $\tilde{X} \to X$ такое же, как и в упражнении 2. Определим подпространство $Y \subset \tilde{X}$ условием

$$Y = \{(x, y) \in \tilde{X} \mid 0 \leqslant x \leqslant 1, \quad 0 \leqslant y \leqslant 1\}.$$

Докажите, что Y — ретракт пространства $\tilde{X}$ и что $(p \mid Y)_{\#}$ переводит образующую группы $\pi(Y)$ в коммутатор двух элементов группы $\pi(X)$, соответствующих двум окружностям пространства X.

4. Докажите, что группа $\pi(S^1 \vee S^1)$ неабелева.

C. Накрывающее пространство ex: $\mathbf{R} \to S^1$

1. Докажите, что отображение f: $X \to S^1$ произвольного пространства X можно поднять до такого отображения $\tilde{f}$: $X \to \mathbf{R}$, что $f = ex \circ \tilde{f}$, тогда и только тогда, когда f гомотопно нулю.

2. Пусть X — связное локально линейно связное пространство с отмеченной точкой $x_0 \in X$. Докажите, что отображение

$$[X, x_0; S^1, 1] \to \operatorname{Hom}(\pi(X, x_0), \pi(S^1, 1)),$$

сопоставляющее классу $[f]$ гомоморфизм

$$f_{\#}: \pi(X, x_0) \to \pi(S^1, 1),$$

является мономорфизмом (множество гомотопических классов является группой, поскольку S^1 — группа).

3. Докажите, что любые два отображения односвязного локально линейно связного пространства в S^1 гомотопны.

4. Докажите, что всякое отображение действительного проективного пространства $\mathbf{R}P^n$ $(n \geqslant 2)$ в S^1 гомотопно нулю.

5. Докажите, что не существует отображений f: $S^n \to S^1$ ($n \geqslant 2$), для которых $f(-x) = -f(x)$.

6. *Теорема Борсука — Улама.* Докажите, что если отображение f: $S^2 \to \mathbf{R}^2$ таково, что $f(-x) = -f(x)$, то существует точка $x_0 \in S^2$, для которой $f(x_0) = 0$.

D. Накрывающие пространства топологических групп

1. Пусть H — подгруппа топологической группы G, и пусть G/H — однородное пространство правых смежных классов. Докажите, что проекция $G \to G/H$ тогда и только тогда является накрывающим отображением, когда группа H дискретна.

2. Докажите, что связное локально линейно связное накрывающее пространство над топологической группой можно наделить структурой группы, превращающей его в топологическую группу, а проекцию в гомоморфизм.

Локальным гомоморфизмом φ одной топологической группы G в другую G' называется такое непрерывное отображение некоторой окрестности U единицы e группы G в группу G', что если $g_1, g_2, g_1g_2 \in U$, то $\varphi(g_1g_2) = \varphi(g_1)\varphi(g_2)$. *Локальным изоморфизмом* групп G и G' называется такой гомеоморфизм φ некоторой окрестности U единицы e на некоторую окрестность U' единицы e', что φ и φ^{-1} оба являются локальными гомоморфизмами (в этом случае G и G' называются *локально изоморфными*).

3. Докажите, что непрерывный гомоморфизм φ: $G \to G'$ одной связной топологической группы в другую тогда и только тогда является накрывающим отображением, когда существует такая окрестность U единицы e в G, что $\varphi \mid U$ — локальный изоморфизм G на G'.

4. Пусть φ — локальный гомоморфизм связной топологической группы G в топологическую группу G', определенный на связной окрестности U единицы e группы G. Пусть $\tilde{G}$ — подгруппа группы $G \times G'$, порожденная графиком отображения φ (т. е. множеством $\{(g, g') \in G \times G' \mid g' = \varphi(g),\ g \in U\}$). Группу $\tilde{G}$ можно наделить топологией, взяв в качестве базы открытых окрестностей точки (e, e') графики отображений $\varphi \mid N$, где N пробегает все окрестности единицы e в G. Докажите, что $\tilde{G}$ — связная топологическая группа, проекция p_1: $\tilde{G} \to G$ есть накрывающее отображение, а проекция p_2: $\tilde{G} \to G'$ непрерывна.

5. Докажите, что две связные локально линейно связные топологические группы локально изоморфны тогда и только тогда, когда существует топологическая группа, являющаяся накрытием для каждой из них.

6. Докажите, что если G — односвязная локально линейно связная топологическая группа, а φ — локальный гомоморфизм G в топологическую группу G', то существует непрерывный гомоморфизм φ': $G \to G'$, совпадающий с φ на некоторой окрестности единицы e в G.

E. Расслоения

1. Докажите, что если p: $E \to B$ — расслоение, то $p(E)$ — объединение некоторых компонент линейной связности пространства B.

2. Докажите, что если база некоторого расслоения линейно связна и некоторый его слой линейно связен, то и пространство расслоения линейно связно.

3. Пусть p: $E \to B$ — некоторое расслоение, а X — локально компактное хаусдорфово пространство. Определим отображение p': $E^X \to B^X$ равенством $p'(g) = p \circ g$, g: $X \to E$. Докажите, что p' — расслоение.

4. Пусть $p\colon E \to B$ — расслоение, $b_0 \in p(E)$ и $F = p^{-1}(b_0)$. Пусть X — некоторое пространство, рассматриваемое как подмножество конуса CX. Докажите, что отображение

$$p_{\#}\colon [CX,\ X;\ E,\ F] \to [CX,\ X;\ B,\ b_0]$$

биективно.

5. Пусть $p\colon E \to B$ — некоторое расслоение, $e_0 \in E$, $b_0 = p(e_0)$ и $F = p^{-1}(b_0)$. Докажите, что если база B односвязна, то $\pi(F, e_0) \to \pi(E, e_0)$ — эпиморфизм.

6. Пусть $p\colon E \to B$ — некоторое расслоение, $e_0 \in E$ и $b_0 = p(e_0)$. Докажите, что если слой $p^{-1}(b_0)$ односвязен, то

$$p_{\#}\colon \pi(E,\ e_0) \approx \pi(B,\ b_0).$$

7. Пусть $p\colon E \to B$ — некоторое расслоение и $b_0 \in p(E)$. Докажите, что если E односвязно, то имеет место взаимно однозначное соответствие между элементами группы $\pi(B, b_0)$ и множеством компонент линейной связности пространства $p^{-1}(b_0)$.

Глава 3

ПОЛИЭДРЫ

В главе 2 функтор фундаментальной группы был использован для классификации накрывающих пространств. Теперь мы рассмотрим задачу вычисления фундаментальной группы некоторых пространств специального вида. Мы покажем, что фундаментальные группы многих пространств (принадлежащих классу полиэдров) могут быть описаны в терминах образующих и соотношений между ними.

Полиэдром называется топологическое пространство, допускающее триангуляцию посредством симплициального комплекса. Поэтому мы начинаем с изучения категории симплициальных комплексов. Симплициальный комплекс представляет собой абстрактную схему вершин и симплексов (каждый симплекс есть конечное множество вершин). Ассоциированное с таким симплициальным комплексом топологическое пространство строится склеиванием выпуклых клеток с помощью отождествлений, предписываемых этой абстрактной схемой. Поскольку топологические свойства таких пространств определяются абстрактной схемой, изучение симплициальных комплексов и полиэдров часто называют комбинаторной топологией.

Компактные полиэдры допускают триангуляцию посредством конечного симплициального комплекса. Поэтому эти пространства эффективно описываются в конечных терминах и образуют именно тот класс пространств, для которых уместно ставить вопросы, связанные с вычислением функторов.

В § 3.1 и 3.2 приводятся определения и элементарные топологические свойства полиэдров. В § 3.3 вводится понятие подразделения симплициального комплекса и доказывается, что компактный полиэдр допускает сколь угодно мелкие триангуляции. Этот результат используется в § 3.4 при доказательстве теоремы о симплициальной аппроксимации, в которой утверждается, что непрерывное отображение компактного полиэдра в произвольный полиэдр можно аппроксимировать симплициальным отображением.

Техника симплициальной аппроксимации используется в § 3.5 для доказательства того, что множество гомотопических классов непрерывных отображений компактного полиэдра в произвольный полиэдр можно абстрактно описать в терминах триангуляций данного полиэдра. Этот результат позволяет получить (§ 3.6) абстрактное описание фундаментальной группы полиэдра как группы ломаных его триангуляции, что используется в § 3.7 для выбора системы образующих и соотношений в фундаментальной группе полиэдра. В § 3.7 также показано, что функтор фундаментальной группы дает точное представление категории гомотопических типов связных одномерных полиэдров. В § 3.8 помещены применения полученных результатов о фундаментальной группе, а также несколько примеров полиэдров и описание фундаментальной группы произвольной поверхности.

§ 1. Симплициальные комплексы

Этот параграф содержит определение категории симплициальных комплексов и ковариантных функторов из этой категории в категорию топологических пространств.

Симплициальный комплекс K состоит из множества $\{v\}$ *вершин* и множества $\{s\}$ непустых конечных подмножеств множества $\{v\}$, называемых *симплексами*, таких, что

(a) любое множество, состоящее ровно из одной вершины, является симплексом;

(b) любое непустое подмножество симплекса является симплексом.

Симплекс s, содержащий ровно $q+1$ вершин, называется *q-мерным* симплексом. Это число q мы называем *размерностью* симплекса s и пишем $\dim s = q$. Если $s' \subset s$, то s' называется *гранью* симплекса s (*собственной*, когда $s' \neq s$, *p-мерной*, когда $\dim s' = p$). Если s — некоторый *q-мерный* симплекс, то s — его единственная *q-мерная* грань, так что его грань s' является собственной тогда и только тогда, когда $\dim s' < q$. Всякий симплекс имеет только конечное число граней. Поскольку всякая грань любой грани симплекса s сама является его гранью, симплексы комплекса K частично упорядочены ($s' \leqslant s$, если s' — грань симплекса s).

Из свойства (a) следует, что нульмерные симплексы комплекса K находятся во взаимно однозначном соответствии с вершинами этого комплекса. Из условия (b) следует, что всякий симплекс определяется своими нульмерными гранями. Следовательно, комплекс K можно рассматривать как множество составляющих его симплексов, и мы будем отождествлять вершины комплекса K с соответствующими им нульмерными симплексами.

Приведем несколько примеров.

1. Пустое множество симплексов является симплициальным комплексом и обозначается $\varnothing$.

2. Для любого множества A множество всех его непустых конечных подмножеств является симплициальным комплексом.

3. Пусть s — симплекс симплициального комплекса K. Множество всех его граней образует симплициальный комплекс, обозначаемый $\bar{s}$.

4. Пусть s — некоторый симплекс симплициального комплекса K. Множество всех собственных граней симплекса s образует симплициальный комплекс, обозначаемый $\dot{s}$.

5. Пусть K — симплициальный комплекс. Его *q-мерным остовом* K^q называется симплициальный комплекс, состоящий из всех p-мерных симплексов комплекса K, где $p \leqslant q$.

6. Если задано множество X и совокупность $\mathscr{W} = \{W\}$ его подмножеств, то *нервом* совокупности $\mathscr{W}$ (обозначается $K(\mathscr{W})$) называется симплициальный комплекс, симплексами которого являются конечные непустые подмножества из $\mathscr{W}$, пересечение которых непусто. Следовательно, вершины комплекса $K(\mathscr{W})$ — это элементы совокупности $\mathscr{W}$, не являющиеся пустым множеством.

7. Пусть K_1 и K_2 — симплициальные комплексы. Их *соединением* $K_1 * K_2$ называется симплициальный комплекс

$$K_1 * K_2 = K_1 \vee K_2 \cup \{s_1 \vee s_2 \mid s_1 \in K_1,\ s_2 \in K_2\}.$$

Значит, множество вершин комплекса $K_1 * K_2$ есть дизъюнктное объединение множества вершин комплекса K_1 и множества вершин комплекса K_2.

8. Можно определить симплициальный комплекс, множество вершин которого совпадает с $\mathbf{Z}$, а множеством симплексов является множество

$$\{\{n\} \mid n \in \mathbf{Z}\} \cup \{\{n,\ n+1\} \mid n \in \mathbf{Z}\}.$$

9. Введем в множестве $\mathbf{Z}^n$ при $n \geqslant 1$ частичное упорядочение по координатам (т. е. $x \leqslant x'$, $x,\ x' \in \mathbf{Z}^n$, если для всех координат $x_i \in \mathbf{Z}$ имеет место неравенство $x_i \leqslant x_i'$). Можно определить симплициальный комплекс, множество вершин которого совпадает с $\mathbf{Z}^n$, а симплексы — конечные непустые линейно упорядоченные подмножества $\{x^0, \ldots, x^q\}$ множества $\mathbf{Z}^n$ (т. е. $x^0 \leqslant x^1 \leqslant \ldots \leqslant x^q$), такие, что для всех $1 \leqslant i \leqslant n$ имеем $x_i^q - x_i^0 = 0$ или 1.

Пусть K — симплициальный комплекс. Его *размерность* $\dim K$ равна по определению

(a) -1, если K пусто;

(b) n, если K содержит хотя бы один n-мерный симплекс, но не содержит $(n+1)$-мерных симплексов;

(c) ∞, если для всякого $n \geqslant 0$ найдется n-мерный симплекс, принадлежащий K.

Комплекс K называется *конечным*, если он состоит лишь из конечного числа симплексов. Если комплекс K конечен, то $\dim K < \infty$; обратное неверно — комплекс из примера 8 бесконечен, однако его размерность равна 1.

Симплициальным отображением $\varphi\colon K_1 \to K_2$ называется отображение, переводящее вершины комплекса K_1 в вершины K_2, такое, что для любого симплекса $s \in K_1$ его образ $\varphi(s)$ является симплексом комплекса K_2. Для любого K можно определить тождественное симплициальное отображение $1_K\colon K \to K$, соответствующее тождественному отображению вершин. Если заданы симплициальные отображения $K_1 \xrightarrow{\varphi} K_2 \xrightarrow{\psi} K_3$, то симплициальное отображение $\psi \circ \varphi\colon K_1 \to K_3$ соответствует композиции отображений вершин. Следовательно, можно определить категорию симплициальных комплексов и симплициальных отображений.

Подкомплексом L симплициального комплекса K (обозначается $L \subset K$) называется подмножество из K (т. е. $s \in L \Rightarrow s \in K$), являющееся симплициальным комплексом. Ясно, что подмножество L комплекса K тогда и только тогда является симплициальным комплексом, когда каждый симплекс в K, представляющий собой грань некоторого симплекса из L, сам является симплексом из L. Если $L \subset K$, то очевидным образом определено симплициальное вложение $i\colon L \subset K$.

Подкомплекс $L \subset K$ называется *полным*, если каждый симплекс из K, все вершины которого принадлежат L, сам содержится в L. Можно определить подкомплекс N комплекса K, состоящий из всех таких симплексов в K, ни одна вершина которых не принадлежит L. Ясно, что N — максимальный подкомплекс комплекса K, не пересекающийся с L. Если $s = \{v_0, v_1, \ldots, v_q\}$ — некоторый симплекс из K, то имеются три возможности: ни одна вершина s не принадлежит L (в этом случае $s \in N$); все вершины этого симплекса принадлежат L (тогда в случае полного подкомплекса L имеем $s \in L$); все вершины симплекса s можно занумеровать таким образом, чтобы $v_i \in L$, если $i \leqslant p$, и $v_i \notin L$, если $i > p$ $(0 \leqslant p < q)$. В последнем случае $s = s' \cup s''$, где симплекс $s' = \{v_0, \ldots, v_p\}$ принадлежит L, если L полный, а симплекс $s'' = \{v_{p+1}, \ldots, v_q\}$ принадлежит N. Итак, мы имеем следующее утверждение:

10. Лемма. *Если L — полный подкомплекс в K, а N — максимальный подкомплекс в K, не пересекающийся с L, то всякий симплекс комплекса K или принадлежит либо N, либо L, или может быть представлен в виде $s' \cup s''$, где s' и s'' — некоторые симплексы, $s' \in L$, $s'' \in N$.* ■

Можно определить категорию *симплициальных пар* (K, L) (где K — симплициальный комплекс, а L — его подкомплекс, возможно пустой) и симплициальных отображений $\varphi\colon (K_1, L_1) \to (K_2, L_2)$ (т. е. φ — симплициальное отображение, $\varphi\colon K_1 \to K_2$, такое, что $\varphi(L_1) \subset L_2$). Категория симплициальных комплексов является полной подкатегорией категории симплициальных пар. Можно также определить категорию *симплициальных комплексов K с отмеченной вершиной* и симплициальных отображений, сохраняющих отмеченную вершину. Это полная подкатегория категории симплициальных пар. Приведем несколько примеров.

11. Для любого числа q q-мерный остов K^q является подкомплексом комплекса K, и если $p \leqslant q$, то K^p — подкомплекс в K^q.

12. Для любого симплекса $s \in K$ определены подкомплексы $\dot{s} \subset \bar{s} \subset K$.

13. Если $\{L_j\}_{j \in J}$ — некоторое семейство подкомплексов комплекса K, то $\bigcup L_j$ и $\bigcap L_j$ — также подкомплексы комплекса K.

14. Если $A \subset X$, $\mathscr{W} = \{W\}$ — некоторая совокупность подмножеств множества X, а $K_A(\mathscr{W})$ — совокупность конечных непустых подмножеств из $\mathscr{W}$, пересечение которых имеет общие точки с A, то $K_A(\mathscr{W})$ — подкомплекс нерва $K(\mathscr{W})$.

Определим теперь ковариантный функтор из категории симплициальных комплексов и симплициальных отображений в категорию топологических пространств и непрерывных отображений. Для непустого симплициального комплекса K символом $|K|$ обозначим множество всех функций α из множества вершин комплекса K в I, таких, что

(a) для каждой α множество $\{v \in K \mid \alpha(v) \neq 0\}$ представляет собой симплекс из K (в частности, неравенство $\alpha(v) \neq 0$ имеет место лишь для конечного множества вершин);

(b) для любой α имеет место равенство $\sum\limits_{v \in K} \alpha(v) = 1$.

Если $K = \varnothing$, то положим по определению $|K| = \varnothing$.

Действительное число $\alpha(v)$ называется v-й *барицентрической координатой* функции α. В множестве $|K|$ можно ввести метрику, положив

$$d(\alpha, \beta) = \sqrt{\sum_{v \in K} (\alpha(v) - \beta(v))^2}.$$

Топология на $|K|$, определенная этой метрикой, называется *метрической топологией*. Множество $|K|$, наделенное метрической топологией, обозначается $|K|_d$.

Определим другую топологию на $|K|$. Если $s \in K$, то *замкнутый симплекс* $|s|$ определяется как множество

$$|s| = \{\alpha \in |K| \mid \alpha(v) \neq 0 \Rightarrow v \in s\}.$$

Если s — некоторый q-мерный симплекс, то множество $|s|$ находится во взаимно однозначном соответствии с множеством $\{x \in \mathbf{R}^{q+1} \mid 0 \leqslant x_i \leqslant 1,\ \sum x_i = 1\}$. Более того, метрическая топология на $|K|_d$ индуцирует на $|s|$ топологию, превращающую его в топологическое пространство $|s|_d$, гомеоморфное указанному компактному выпуклому подмножеству пространства $\mathbf{R}^{q+1}$. Если $s_1, s_2 \in K$, то ясно, что пересечение $s_1 \cap s_2$ либо пусто (в этом случае $|s_1| \cap |s_2| = \varnothing$), либо является одновременно гранью симплекса s_1 и гранью симплекса s_2 (в этом случае $|s_1 \cap s_2| = |s_1| \cap |s_2|$). Следовательно, в любом случае $|s_1|_d \cap |s_2|_d$ представляет собой замкнутое множество в $|s_1|_d$ и в $|s_2|_d$, и топология, индуцированная на этом пересечении из $|s_1|_d$, совпадает с топологией, индуцированной на нем из $|s_2|_d$. Из теоремы 2.5 введения вытекает, что можно определить топологию на $|K|$, согласованную с системой $\{|s|_d \mid s \in K\}$. Эта топология будет называться *когерентной топологией*. *Пространством комплекса* K (обозначается через $|K|$) называется множество $|K|$, наделенное когерентной топологией. (То, что мы называем здесь когерентной топологией, известно в литературе под названием слабой топологии.) Заметим, что $|\bar{s}| = |s|_d$; символ $|s|$ мы будем также использовать для обозначения пространства $|\bar{s}|$.

Подмножество $A \subset |K|$ тогда и только тогда открыто (или замкнуто) в когерентной топологии, когда множество $A \cap |s|$ открыто (или замкнуто) в $|s|$ для каждого $s \in K$; таким образом, имеют место следующая теорема и ее следствие:

15. Теорема. *Отображение f: $|K| \to X$, где X — некоторое топологическое пространство, тогда и только тогда непрерывно в когерентной топологии, когда отображение $f \mid |s|$: $|s| \to X$ непрерывно для каждого симплекса $s \in K$.* ■

16. Следствие. *Отображение f: $|K| \to X$ тогда и только тогда непрерывно в когерентной топологии, когда отображение $f \mid |K^q|$: $|K^q| \to X$ непрерывно для каждого $q \geqslant 0$.* ■

Из теоремы 15 следует, что тождественное отображение множества $|K|$ является непрерывным отображением $|K| \to |K|_d$. Заметим, что $L \subset K \Rightarrow |L| \subset |K|$ и что $|L|_d$ — замкнутое подмножество пространства $|K|_d$ (откуда следует, что $|L|$ — замкнутое подмножество в $|K|$). Более того, если $\{L_j\}_{j \in J}$ — некоторая совокупность подкомплексов комплекса K, то $\bigcup |L_j| = |\bigcup L_j|$ и $\bigcap |L_j| = |\bigcap L_j|$.

Когерентная топология обладает следующим свойством:

17. Теорема. *Пространство $|K|$, соответствующее симплициальному комплексу K, является нормальным хаусдорфовым пространством.*

Доказательство. Поскольку пространство $|K|_d$ хаусдорфово, а отображение $i\colon |K| \to |K|_d$ непрерывно, $|K|$ — хаусдорфово пространство. Для доказательства нормальности $|K|$ достаточно показать, что если A — замкнутое подмножество в $|K|$, то каждое непрерывное отображение $f\colon A \to I$ можно непрерывно продолжить на все $|K|$. Из теоремы 15 следует, что существование такого продолжения для f равносильно существованию семейства непрерывных отображений $\{f_s\colon |s| \to I \mid s \in K\}$, такого, что

(a) если s' — грань симплекса s, то $f_s \| s' | = f_{s'}$;

(b) $f_s|(A \cap |s|) = f|(A \cap |s|)$.

Существование семейства $\{f_s\}$ доказывается индукцией по $\dim s$. Пусть s — нульмерный симплекс; тогда $|s|$ состоит из одной точки, и если $|s| \in A$, то положим по определению $f_s = f \| s |$, а если $|s| \notin A$, то значение f_s зададим произвольно.

Пусть $q > 0$, и пусть отображения f_s уже определены на всех симплексах s, $\dim s < q$, и удовлетворяют условиям (a) и (b). Для данного q-мерного симплекса s зададим отображение $f'_s\colon |\dot{s}| \cup (A \cap |s|) \to I$ условиями

$$f'_s \| s' | = f_{s'}, \qquad s' \text{ — грань симплекса } s,$$

$$f'_s|(A \cap |s|) = f|(A \cap |s|).$$

Поскольку семейство $\{f_{s'}\}_{\dim s' < q}$ удовлетворяет условиям (a) и (b), то f'_s является непрерывным отображением замкнутого подмножества $|\dot{s}| \cup (A \cap |s|)$ симплекса $|s|$ в I. По теореме Титце о продолжении[1]) существует непрерывное продолжение $f_s\colon |s| \to I$ отображения f'_s. ■

Тем же способом можно доказать, что пространство $|K|$ совершенно нормально (т. е. что каждое замкнутое подмножество пространства $|K|$ является множеством нулей некоторой действительнозначной функции на $|K|$) и паракомпактно.

Для $s \in K$ *открытый симплекс* $\langle s \rangle \in |K|$ определяется следующим образом:

$$\langle s \rangle = \{\alpha \in |K| \mid \alpha(v) \neq 0 \Leftrightarrow v \in s\}.$$

Хотя замкнутый симплекс представляет собой замкнутое множество в $|K|$, открытый симплекс не обязательно открыт в $|K|$.

---

[1]) См., например, Лефшец С., Алгебраическая топология, ИЛ, М., 1949, стр. 46. — *Прим. перев.*

Однако открытый симплекс $\langle s\rangle$ является открытым подмножеством в $|s|$, поскольку $\langle s\rangle = |s| - |\dot{s}|$. Каждая точка $\alpha \in |K|$ принадлежит единственному открытому симплексу (а именно, открытому симплексу $\langle s\rangle$, где $s = \{v \in K \mid \alpha(v) \neq 0\}$). Следовательно, открытые симплексы образуют разбиение пространства $|K|$.

Если A — непустое подмножество в $|K|$, содержащееся в некотором замкнутом симплексе $|s|$, то существует единственный наименьший симплекс $s \in K$, такой, что $A \subset |s|$. Этот наименьший симплекс называется *носителем* множества A в K. Если $A \subset \langle s\rangle$, то носителем множества A непременно является симплекс s. В частности, всякая точка α из $|K|$ имеет в качестве носителя такой симплекс s, для которого справедливо включение $\alpha \in \langle s\rangle$.

18. Лемма. *Пусть $A \subset |K|$. Тогда A содержит дискретное подмножество (относительно когерентной топологии), имеющее ровно одну точку из каждого открытого симплекса, пересекающегося с A.*

Доказательство. Пусть $s \in K$ — некоторый симплекс. Если $A \cap \langle s\rangle \neq \varnothing$, то выберем некоторую точку $\alpha_s \in A \cap \langle s\rangle$ и положим $A' = \{\alpha_s\}$. Поскольку каждый замкнутый симплекс может содержать не более чем конечное подмножество из A', всякое подмножество множества A' замкнуто в когерентной топологии и A' дискретно. ■

Компактное подмножество любого топологического пространства не может содержать бесконечное дискретное подмножество, поэтому имеет место следующее предложение:

19. Следствие. *Всякое компактное подмножество пространства $|K|$ содержится в объединении конечного числа открытых симплексов.* ■

Пространство конечного симплициального комплекса компактно. Из следствия 19 вытекает обратное утверждение.

20. Следствие. *Симплициальный комплекс K тогда и только тогда конечен, когда пространство $|K|$ компактно.*

Докажем следующий аналог теоремы 15 для гомотопий:

21. Теорема. *Отображение $F\colon |K| \times I \to X$ тогда и только тогда непрерывно, когда его ограничение $F|(|s| \times I)\colon |s| \times I \to X$ непрерывно для каждого симплекса $s \in K$.*

Доказательство. Топология пространства $|K|$ согласована с семейством его замкнутых симплексов, а каждый замкнутый симплекс представляет собой замкнутое компактное подмножество в $|K|$. Отсюда следует, что пространство $|K|$ является компактно порожденным. Из теоремы 2.7 введения вытекает, что пространство $|K| \times I$ также является компактно порожденным.

Согласно следствию 19, для каждого компактного подмножества из $|K| \times I$ существует конечный подкомплекс $L \subset K$, такой, что это подмножество содержится в $|L| \times I$. Следовательно, топология пространства $|K| \times I$ согласована с семейством $\{|L| \times I \mid L \subset K$, L — конечный подкомплекс$\}$.

Ясно, что эта топология совпадает с топологией, согласованной с семейством $\{|s| \times I \mid s \in K\}$ (так как если L — конечный подкомплекс, то топология пространства $|L| \times I$ согласована с семейством $\{|s| \times I \mid s \in L\}$). ■

Если $\varphi\colon K_1 \to K_2$ — симплициальное отображение, то можно определить непрерывное отображение $|\varphi|_d\colon |K_1|_d \to |K_2|_d$, полагая

$$|\varphi|_d(\alpha)(v') = \sum_{\varphi(v)=v'} \alpha(v), \qquad v' \in K_2.$$

Та же самая формула определяет непрерывное отображение $|\varphi|\colon |K_1| \to |K_2|$, и мы получаем коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd} |K_1| \arrow[r] \arrow[d, "|\varphi|"'] & |K_1|_d \arrow[d, "|\varphi|_d"] \\ |K_2| \arrow[r] & |K_2|_d \end{tikzcd}$$

Несложная проверка показывает, что $|\cdot|$ и $|\cdot|_d$ являются ковариантными функторами из категории симплициальных комплексов в категорию топологических пространств, а соответствие $|K| \to |K|_d$ представляет собой естественное преобразование этих функторов. Эти функторы можно рассматривать на категории симплициальных пар со значениями в категории пар топологических пространств.

Триангуляцией (K, f) топологического пространства X называют симплициальный комплекс K и гомеоморфизм $f\colon |K| \to X$. Если пространство X допускает триангуляцию, то оно называется *полиэдром*. Аналогично, *триангуляция* $((K, L), f)$ пары (X, A) состоит из симплициальной пары (K, L) и гомеоморфизма $f\colon (|K|, |L|) \to (X, A)$. Если пара (X, A) допускает триангуляцию, то она называется *полиэдральной парой*. Вообще говоря, один и тот же полиэдр может обладать триангуляциями (K_1, f_1) и (K_2, f_2) с неизоморфными симплициальными комплексами K_1 и K_2.

Приведем несколько примеров.

22. Для каждого $n \geqslant 1$ пара (E^{n+1}, S^n) гомеоморфна паре $(|\bar{s}|, |\dot{s}|)$, где s есть $(n+1)$-мерный симплекс. Следовательно, (E^{n+1}, S^n) — полиэдральная пара.

23. Пусть K — симплициальный комплекс из примера 8. Определим отображение $f\colon |K| \to \mathbf{R}$ так: $f(|\{n\}|) = n$, а $f \mid |\{n, n+1\}|$ гомеоморфно отображает $|\{n, n+1\}|$ на замкнутый интервал

$[n, n+1]$. Тогда (K, f) — триангуляция пространства $\mathbf{R}$ и $\mathbf{R}$ — полиэдр.

24. Пусть K — симплициальный комплекс из примера 9 ($n \geqslant 1$). Определим отображение $f\colon |K| \to \mathbf{R}^n$, полагая $(f(\alpha))_i = \sum_{x \in \mathbf{Z}^n} \alpha(x)(x)_i$. Тогда (K, f) — триангуляция пространства $\mathbf{R}^n$ и $\mathbf{R}^n$ — полиэдр.

Звездой вершины $v \in K$ называется множество

$$\operatorname{st} v = \{\alpha \in |K| \mid \alpha(v) \neq 0\}.$$

Так как $\alpha \to \alpha(v)$ — непрерывное отображение из $|K|_d$ в I, то $\operatorname{st} v$ является открытым множеством в $|K|_d$, а следовательно, и в $|K|$. Из определения немедленно получаем, что

$$\alpha \in \operatorname{st} v \Leftrightarrow v \text{ является вершиной носителя } \alpha \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \alpha \in \langle s \rangle, \text{ где } s \text{ имеет } v \text{ своей вершиной.}$$

Следовательно, $\operatorname{st} v = \bigcup \{\langle s \rangle \mid v \text{ — вершина симплекса } s\}$.

25. Лемма. *Пусть $L \subset K$, и пусть $v_0, v_1, \ldots, v_q$ — некоторые вершины комплекса K. В таком случае $v_0, v_1, \ldots, v_q$ тогда и только тогда являются вершинами некоторого симплекса в L, когда*

$$\bigcap_{0 \leqslant i \leqslant q} \operatorname{st} v_i \cap |L| \neq \varnothing.$$

Доказательство. Если существует симплекс $s \in L$ с вершинами $v_0, \ldots, v_q$, то для каждого i выполняется включение $\langle s \rangle \subset \operatorname{st} v_i$. Значит, $\langle s \rangle \subset |L|$. Следовательно, $\bigcap \operatorname{st} v_i \cap |L| \neq \varnothing$. Обратно, пусть $\bigcap \operatorname{st} v_i \cap |L| \neq \varnothing$ и $\alpha \in \bigcap \operatorname{st} v_i \cap |L|$. Тогда $\alpha(v_i) \neq 0$ $(0 \leqslant i \leqslant q)$, и носителем функции α является симплекс s в L, вершинами которого, в частности, являются $v_0, \ldots, v_q$. Следовательно, множество $\{v_0, \ldots, v_q\}$ является гранью симплекса s и должно принадлежать L, так как L — комплекс. ■

Эта лемма приводит к установлению связи между комплексом K и открытым покрытием пространства $|K|$ звездами вершин.

26. Теорема. *Пусть $\mathcal{U} = \{\operatorname{st} v \mid v \in K\}$. Отображение вершин φ комплекса K в комплекс $K(\mathcal{U})$, определенное равенством $\varphi(v) = \operatorname{st} v$, порождает симплициальный изоморфизм $\varphi\colon K \approx K(\mathcal{U})$, и для каждого подкомплекса $L \subset K$ имеем $\varphi | L\colon L \approx K_{|L|}(\mathcal{U})$.* ■

§ 2. Линейность в симплициальных комплексах

Структура линейного векторного пространства на множестве всех действительнозначных функций, заданных на некотором множестве, позволяет говорить о линейности в пространстве симплициального комплекса. Этот параграф посвящен изучению этой линейности. Мы покажем, что замкнутый симплекс $|s|$ гомеоморфен конусу с основанием $|\dot{s}|$. Отсюда следует, что замкнутый симплекс можно параметризовать «полярными координатами», которые весьма удобны для построения отображений. Этими координатами мы воспользуемся для доказательства того, что полиэдральная пара удовлетворяет свойству продолжения гомотопии относительно любого пространства.

Мы рассмотрим также линейные вложения пространства симплициального комплекса в евклидово пространство. Это приведет нас к обсуждению свойств локально конечных симплициальных комплексов. Такие комплексы характеризуются тем свойством, что их пространства локально компактны, или, что эквивалентно, когерентная и метрическая топологии на этих пространствах совпадают.

Пусть K — некоторый симплициальный комплекс, и пусть точки $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ принадлежат замкнутому симплексу $|s|$. Если действительные числа $t_1, \ldots, t_p$ таковы, что $0 \leqslant t_i \leqslant 1$ $(i = 1, \ldots, p)$ и $\sum t_i = 1$, то функция $\alpha = \sum t_i \alpha_i$ тоже является точкой из $|s|$. Следовательно, каждый замкнутый симплекс можно наделить такой линейной структурой, что выпуклая линейная комбинация его точек снова принадлежит этому симплексу. Обратно, если носителем функции $\alpha = \sum t_i \alpha_i$ является симплекс s (т. е. если $\alpha \in \langle s \rangle$), то $\alpha_i \in |s|$ для каждого i. Таким образом, мы доказали следующую лемму:

1. Лемма. *Выпуклая линейная комбинация точек пространства $|K|$ тогда и только тогда снова является точкой из $|K|$, когда все эти точки принадлежат одному и тому же замкнутому симплексу.* ∎

Нам будет удобно отождествить вершины комплекса K с их характеристическими функциями. Другими словами, если v — вершина K, то мы будем рассматривать v как функцию на вершинах $v' \in K$, такую, что

$$v(v') = \begin{cases} 0, & v \neq v', \\ 1, & v = v'. \end{cases}$$

Если $\alpha \in |K|$, то мы можем написать $\alpha = \sum_{v \in K} \alpha(v) v$, где сумма справа есть выпуклая комбинация точек из $|K|$.

Пусть X — топологическое пространство, являющееся подмножеством некоторого действительного векторного пространства. Предположим, что топология пространства X согласована с семейством его пересечений со всеми конечномерными подпространствами, причем всякое такое пересечение наделено топологией подпространства конечномерного топологического линейного пространства, которому оно принадлежит. Например, X может быть евклидовым пространством или пространством некоторого симплициального комплекса. Непрерывное отображение $f\colon |K|\to X$ называется *линейным на* K, если оно линейно в барицентрических координатах. Другими словами, f называется линейным, если для каждого $\alpha\in|K|$ точка $\sum_{v\in K}\alpha(v)f(v)$ принадлежит X и

$$f(\alpha)=\sum_{v\in K}\alpha(v)f(v).$$

Ясно, что линейное отображение однозначно определено отображением f_0 вершин комплекса K в X, при котором $f_0(v)=f(v)$. Обратно, отображение f_0 вершин комплекса K в пространство X тогда и только тогда можно продолжить до линейного отображения $f\colon |K|\to X$, когда для каждого симплекса $s\in K$ выпуклая оболочка множества $f_0(s)$ принадлежит пространству X.

Если $\varphi\colon K_1\to K_2$ — симплициальное отображение, то по определению отображения $|\varphi|$

$$|\varphi|(\alpha)=\sum\alpha(v)|\varphi|(v).$$

Следовательно, отображение $|\varphi|$ линейно.

Пусть X — топологическое пространство. *Конусом* $X*w$ *с основанием* X и *вершиной* w называется цилиндр постоянного отображения $X\to w$. Точки пространства $X*w$ параметризуются символами $[x,t]$ $(x\in X, t\in I)$, где точка $[x,0]$ отождествляется с $x\in X$, а $[x,1]$ отождествляется с w для всех $x\in X$. Поскольку w — сильный деформационный ретракт пространства $X*w$, конус является стягиваемым пространством.

2. Лемма. *Для любого симплекса* s *из* K *конус* $|\dot{s}|*w$ *гомеоморфен* $|s|$.

Доказательство. Выберем точку $w_0\in\langle s\rangle$ и определим отображение $f\colon |\dot{s}|*w\to|s|$, полагая $f([\alpha,t])=tw_0+(1-t)\alpha$. Тогда f непрерывно (поскольку линейные операции в $|s|$ непрерывны). Покажем, что отображение f биективно. Пусть $f([\alpha,t])=f([\beta,t'])$ $(\alpha,\beta\in|\dot{s}|$ и $t,t'\in I)$. Тогда

$$tw_0+(1-t)\alpha=t'w_0+(1-t')\beta.$$

Пусть симплекс s имеет вершины $v_0, v_1, \ldots, v_q$. Предположим, что $\alpha=\sum\alpha_iv_i$, $\beta=\sum\beta_iv_i$ и $w_0=\sum\gamma_iv_i$. Поскольку $\alpha,\beta\in|\dot{s}|$, существует такое j, что $\alpha_j=0$, и существует такое k, что $\beta_k=0$. Значит,

$$t\gamma_j=t'\gamma_j+(1-t')\beta_j \quad\text{и}\quad (t-t')\gamma_j=(1-t')\beta_j.$$

Так как $\gamma_j\neq0$, то $t\geqslant t'$. Аналогично получаем, что $t\gamma_k+(1-t)\alpha_k=t'\gamma_k$, и потому $t'\geqslant t$. Следовательно, $t=t'$. Отсюда вытекает, что $(1-t)\alpha=(1-t)\beta$, и если $t\neq1$, то $\alpha=\beta$. Следовательно, либо

$t = t'$ и $\alpha = \beta$, либо $t = t' = 1$. В любом случае выполняется равенство $[\alpha, t] = [\beta, t']$. Значит, отображение f инъективно.

Покажем теперь, что f сюръективно. Ясно, что $f([\alpha, 0]) = \alpha$ и $f([\alpha, 1]) = w_0$. Значит, образ отображения f содержит $|\dot{s}|$ и w_0. Покажем, что каждая точка множества $\langle s \rangle - w_0$ принадлежит единственному отрезку от w_0 до некоторой точки из $|\dot{s}|$. Пусть $\alpha \in \langle s \rangle$, причем $\alpha \neq w_0$. Предположим, что $\alpha = \sum \alpha_i v_i$. Рассмотрим функцию $\varphi(t') = (1 + t')\alpha - t'w_0$. Имеем $\varphi(0) = \alpha \in \langle s \rangle$. Когда t' возрастает, барицентрические координаты точки $\varphi(t')$ изменяются непрерывно. Поскольку $\alpha \neq w_0$, существует такое i, что $\alpha_i < \gamma_i$. Следовательно,

$$\varphi(t')(v_i) = \alpha_i - t'(\gamma_i - \alpha_i)$$

есть монотонно убывающая функция аргумента t'. Из ее непрерывности следует существование единственного числа $t' > 0$, такого, что $\varphi(t')(v_i) = 0$. Следовательно, среди всех таких t' существует наименьшее $t'_0 > 0$, для которого $\varphi(t'_0)(v_i) = 0$ при всех $0 \leqslant i \leqslant q$. Значит, $\varphi(t'_0) \in |\dot{s}|$ и

$$\alpha = \frac{t'_0}{1 + t'_0} w_0 + \frac{1}{1 + t'_0} \varphi(t'_0),$$

откуда вытекает, что $\alpha = f\left(\left[\varphi(t'_0),\ t'_0/(1 + t'_0)\right]\right)$. Следовательно, отображение f сюръективно.

Поскольку f — непрерывное биективное отображение компактного пространства на хаусдорфово пространство, оно является гомеоморфизмом. ∎

Центром $b(s)$ симплекса $s = \{v_0, v_1, \ldots, v_q\}$ называется точка

$$b(s) = \sum_{0 \leqslant i \leqslant q} \frac{1}{q + 1} v_i.$$

Ясно, что $b(s) \in \langle s \rangle$, и, значит, носителем точки $b(s)$ является симплекс s. Из леммы 2 следует существование гомеоморфизма симплекса $|s|$ на $|\dot{s}| * w$, переводящего точку w в центр $b(s)$. Если $\alpha \in |\dot{s}|$ и $t \in I$, то точка $tb(s) + (1 - t)\alpha$ параметризована *полярными координатами* $[\alpha, t]$, где $[\alpha, t]$ — точка конуса $|\dot{s}| * w$, соответствующая данной точке из $|s|$. Значит, $[\alpha, 0] = \alpha$ и $[\alpha, 1] = b(s)$ для всех $\alpha \in |\dot{s}|$. Полярные координаты мы используем для построения следующей гомотопии.

3. Лемма. *Для любого симплекса s подмножество $|s| \times 0 \cup |\dot{s}| \times I$ является сильным деформационным ретрактом пространства $|s| \times I$.*

Доказательство. Если s — нульмерный симплекс, то $|\dot{s}| = \varnothing$. Мы знаем, что точка $|s| \times 0$ является сильным деформационным ретрактом отрезка $|s|\times I$. Если $\dim s>0$, то мы определим деформационную ретракцию

$$F\colon |s|\times I\times I\to |s|\times I$$

на $|s|\times 0\cup|\dot{s}|\times I$ по следующей формуле, записанной в полярных координатах:

$$F([\alpha,\ t],\ t',\ t'')=\begin{cases}\left(\left[\alpha,\ (1-t'')\,t+\dfrac{t''(2t-t')}{2-t'}\right],\ (1-t'')\,t'\right), & t'\leqslant 2t,\\[2mm] \left([\alpha,\ (1-t'')\,t],\ (1-t'')\,t'+\dfrac{t''(t'-2t)}{1-t}\right), & 2t\leqslant t'.\end{cases}$$

В случае одномерного и двумерного симплексов см. рис. 5.

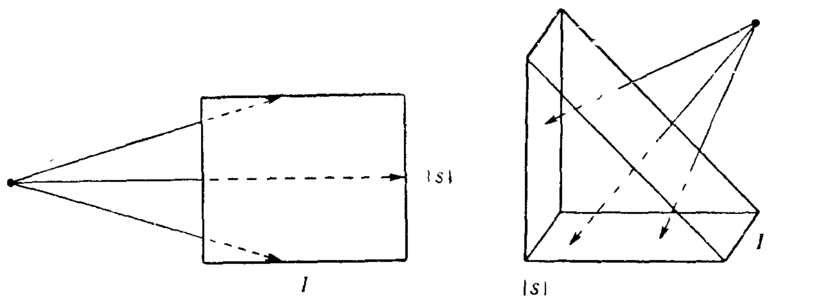


Рис. 5.

4. **Следствие.** *Для любого подкомплекса $L\subset K$ подпространство $|K|\times 0\cup|L|\times I$ является сильным деформационным ретрактом пространства $|K|\times I$.*

Доказательство. Пусть $X^n=|K|\times 0\cup|K^n\cup L|\times I$ $(n\geqslant -1)$. Прежде всего покажем, что для $n\geqslant 0$ пространство X^{n-1} является сильным деформационным ретрактом пространства X^n. Для каждого n-мерного симплекса $s\in K-L$ определим отображение $F_s\colon |s|\times I\times I\to|s|\times I$ как сильную деформационную ретракцию $|s|\times I$ на $|s|\times 0\cup|\dot{s}|\times I$, построенную при доказательстве леммы 3. Если $n\geqslant 0$, то определим отображение

$$F_n\colon X^n\times I\to X^n$$

условиями

$$F_n\,||\,s|\times I\times I=F_s \qquad \text{для } n\text{-мерного симплекса } s\in K-L,$$

$$F_n(x,\ t)=x, \qquad x\in X^{n-1},\ t\in I.$$

Тогда отображение F_n корректно определено и непрерывно (поскольку для каждого симплекса s ограничение $F_n\,|\,|s|\times I\times I$ непрерывно), и F_n — сильная деформационная ретракция X^n на X^{n-1}.

Пусть ретракция $f_n\colon X^n \to X^{n-1}$ определена формулой $f_n(x) = F_n(x, 1)$ для $x \in X^n$. Пусть $a_n = 1/n$ $(n \geqslant 1)$. Определим гомотопию $G_n\colon X^n \times I \to X^n$ индукцией по n:

$$G_0(x,\ t) = \begin{cases} x, & 0 \leqslant t \leqslant a_2, \\ F_0\left(x,\ \dfrac{t-a_2}{1-a_2}\right), & a_2 \leqslant t \leqslant 1, \end{cases}$$

$$G_n(x,\ t) = \begin{cases} x, & 0 \leqslant t \leqslant a_{n+2}, \\ F_n\left(x,\ \dfrac{t-a_{n+2}}{a_{n+1}-a_{n+2}}\right), & a_{n+2} \leqslant t \leqslant a_{n+1}, \\ G_{n-1}(f_n(x),\ t), & a_{n+1} \leqslant t \leqslant 1. \end{cases}$$

Легко проверить индукцией по n, что G_n является сильной деформационной ретракцией X^n на X^{n-1}, причем $G_n | X^{n-1} \times I = G_{n-1}$. Следовательно, существует отображение

$$G\colon |K| \times I \times I \to |K| \times I,$$

такое, что $G | X^n \times I = G_n$. Значит, G представляет собой сильную деформационную ретракцию $|K| \times I$ на $|K| \times 0 \cup |L| \times I$. ■

5. Следствие. *Полиэдральная пара обладает свойством продолжения гомотопии относительно любого пространства.*

Доказательство. Достаточно доказать, что если $L \subset K$, то пара $(|K|, |L|)$ удовлетворяет свойству продолжения гомотопии относительно произвольного пространства Y. Пусть отображения $g\colon |K| \to Y$ и $G\colon |L| \times I \to Y$ таковы, что $G(\alpha, 0) = g(\alpha)$ $(\alpha \in |L|)$. Пусть отображение $f\colon |K| \times 0 \cup |L| \times I \to Y$ определено равенствами $f(\alpha, 0) = g(\alpha)$ при $\alpha \in |K|$ и $f(\alpha, t) = G(\alpha, t)$ при $\alpha \in |L|$, $t \in I$. Поскольку $|L|$ замкнуто в $|K|$, отображение f непрерывно Пространство $|K| \times 0 \cup |L| \times I$ есть ретракт пространства $|K| \times I$ (см. следствие 4). Следовательно, f можно продолжить до непрерывного отображения $F\colon |K| \times I \to Y$. Тогда $F(\alpha, 0) = g(\alpha)$ при $\alpha \in |K|$ и $F | |L| \times I = G$. ■

Рассмотрим теперь линейные вложения пространства $|K|$ в евклидовы пространства.

6. Лемма. *Линейное отображение $f\colon |s| \to \mathbf{R}^n$ тогда и только тогда является вложением, когда оно переводит множество вершин симплекса s в аффинно независимое множество в $\mathbf{R}^n$.*

Доказательство. Пусть $f(v_i) = p_i$, где $s = \{v_i\}$. Мы покажем, что множество $\{p_i\}$ тогда и только тогда является аффинно зависимым, когда отображение f не инъективно. Множество $\{p_i\}$ тогда и только тогда аффинно зависимо, когда существуют числа α_i, не все равные нулю, такие, что $\sum \alpha_i p_i = 0$ и $\sum \alpha_i = 0$. Предположим, что точки p_i занумерованы так, что $\alpha_i \geqslant 0$ для $i \leqslant j_0$ и $\alpha_i < 0$ для $i > j_0$. Тогда $\sum\limits_{i \leqslant j_0} \alpha_i p_i = \sum\limits_{i > j_0} (-\alpha_i) p_i$. Если $a = \sum\limits_{i \leqslant j_0} \alpha_i = \sum\limits_{i > j_0} (-\alpha_i)$, то $\sum\limits_{i \leqslant j_0} (\alpha_i/a) p_i = \sum\limits_{i > j_0} (-\alpha_i/a) p_i$. Из линейности отображения f следует, что $f\left(\sum\limits_{i \leqslant j_0} (\alpha_i/a) v_i\right) = f\left(\sum\limits_{i > j_0} (-\alpha_i/a) v_i\right)$. Это показывает, что отображение f не инъективно.

Обратно, если f не инъективно, то для некоторого j_0 имеет место равенство $f(\sum \alpha_i v_i) = f(\sum \beta_i v_i)$, где $\alpha_{j_0} \neq \beta_{j_0}$. Тогда $\sum (\alpha_i - \beta_i) p_i = 0$ и $\sum (\alpha_i - \beta_i) = 0$. Поскольку $\alpha_{j_0} - \beta_{j_0} \neq 0$, множество $\{p_i\}$ аффинно зависимо. ■

Симплициальный комплекс K называется *локально конечным*, если каждая его вершина v принадлежит лишь конечному числу симплексов из K.

7. **Лемма.** *Если комплекс K локально конечен, то каждая точка пространства $|K|_d$ имеет окрестность вида $|L|_d$, где L — конечный подкомплекс комплекса K.*

Доказательство. Пусть $\alpha \in |K|_d$. Тогда $\alpha \in \operatorname{st} v$ для некоторой вершины v из K. Поскольку v является вершиной лишь для конечного числа симплексов $\{s_i\}$ из K, то $\operatorname{st} v$ содержится в компактном множестве $\bigcup |s_i|$. Пусть $L = \{s \in K \mid s$ — грань симплекса s_i для некоторого $i\}$. Тогда L — конечный подкомплекс в K и $\alpha \in \operatorname{st} v \subset |L|_d$. ■

8. **Теорема.** *Пусть K — некоторый симплициальный комплекс. Тогда эквивалентны следующие условия:*

(a) *комплекс K локально конечен;*
(b) *пространство $|K|$ локально компактно;*
(c) *отображение $|K| \to |K|_d$ является гомеоморфизмом;*
(d) *пространство $|K|$ метризуемо;*
(e) *пространство $|K|$ удовлетворяет первой аксиоме счетности.*

Доказательство. (a)$\Rightarrow$(b). Из леммы 7 вытекает, что если α — точка пространства $|K|_d$, то существует конечный подкомплекс $L \subset K$, такой, что α содержится во внутренности множества $|L|_d$. Тогда α содержится также и во внутренности подмножества $|L|$ пространства $|K|$. Следовательно, $|L|$ — компактная окрестность точки α в $|K|$.

(b)$\Rightarrow$(c). Покажем, что отображение $|K| \to |K|_d$ открыто. Пусть U — открытое подмножество в $|K|$ с компактным замыканием $\overline{U}$ в $|K|$. Достаточно показать, что U открыто в $|K|_d$. Поскольку $\overline{U}$ компактно, существует конечный подкомплекс $L \subset K$, такой, что

$\bar{U} \subset |L|$ (см. следствие 3.1.19). Пусть подкомплекс K_1 комплекса K определен условием

$$K_1 = \{s \in K \mid |s| \cap U = \varnothing\}.$$

Если $s \in K - K_1$, то $|s| \cap U$ — непустое открытое подмножество симплекса $|s|$. Следовательно, $\langle s \rangle \cap U \neq \varnothing$ и $\langle s \rangle \cap |L| \neq \varnothing$. Так как открытые симплексы пространства $|K|$ образуют разбиение этого пространства, то $s \in L$, и мы получаем, что $K = K_1 \cup L$. Далее, $|K|_d - |K_1|_d$ — открытое подмножество пространства $|K|_d$. Поскольку комплекс L конечен, отображение $|L| \to |L|_d$ является гомеоморфизмом. Следовательно, множество U открыто как в $|L|_d$, так и в $|L|_d - |K_1|_d$. Но $|L|_d - |K_1|_d = |K|_d - |K_1|_d$, поэтому U открыто в $|K|_d$.

(c) $\Rightarrow$ (d). Поскольку $|K|_d$ метризуемо, то, если пространства $|K|$ и $|K|_d$ гомеоморфны, $|K|$ также метризуемо.

(d) $\Rightarrow$ (e). Всякое метризуемое пространство удовлетворяет первой аксиоме счетности.

(e) $\Rightarrow$ (a). Предположим, что комплекс K не является локально конечным, и пусть v — вершина бесконечного множества симплексов $\{s_i\}_{i=1,2,\ldots}$ комплекса K. Из первой аксиомы счетности следует, что точка v обладает счетной базой окрестностей $\{U_i\}_{i=1,2,\ldots}$ в $|K|$. Без ограничения общности можно предполагать, что $U_i \supset U_{i+1}$ для всех $i \geqslant 1$. Соотношение $\langle s_i \rangle \cap U_i \neq \varnothing$ выполняется для каждого i, поскольку v, будучи вершиной симплекса s_i, принадлежит замыканию множества $\langle s_i \rangle$. Пусть $\alpha_i \in \langle s_i \rangle \cap U_i$. Тогда последовательность $\{\alpha_i\}$ сходится к v (поскольку каждое U_i содержит все α_j для $j \geqslant i$). Но в когерентной топологии множество $\{\alpha_i\}$ дискретно, так как с каждым замкнутым симплексом $|s|$ оно пересекается лишь по конечному множеству. ■

Реализацией симплициального комплекса K в пространстве $\mathbf{R}^n$ называется линейное вложение пространства $|K|$ в $\mathbf{R}^n$. Следующая теорема описывает те комплексы K, которые допускают реализацию в некотором евклидовом пространстве.

9. Теорема. *Если K допускает реализацию в некотором $\mathbf{R}^n$, то комплекс K является счетным локально конечным и* $\dim K \leqslant n$. *Обратно, если K — счетный локально конечный комплекс и* $\dim K \leqslant n$, *то K допускает реализацию в виде замкнутого подмножества пространства* $\mathbf{R}^{2n+1}$.

Доказательство. Пусть $f\colon |K| \to \mathbf{R}^n$ — некоторое линейное вложение. Если комплекс K не является счетным, то из леммы 3.1.18 вытекает, что пространство $|K|$ содержит несчетное дискретное подмножество A'. Тогда $f(A')$ — несчетное дискретное подмножество пространства $\mathbf{R}^n$, что невозможно, поскольку пространство $\mathbf{R}^n$ сепарабельно. Следовательно, K — счетный комплекс. Ясно, что пространство $|K|$ метризуемо. По теореме 8 комплекс K локально конечен. Далее, из леммы 6 и теоремы 5.3 введения вытекает, что $\dim K \leqslant n$.

Докажем обратное утверждение. Пусть $\{p_i\}$ — последовательность точек пространства $\mathbf{R}^{2n+1}$, такая, что

(a) любое множество $2n+2$ точек p_i аффинно независимо;

(b) если C — какое-нибудь компактное подмножество из $\mathbf{R}^{2n+1}$, то существует такое число j, что множество C не пересекается с выпуклым подмножеством пространства $\mathbf{R}^{2n+1}$, порожденным множеством $\{p_i \mid i \geqslant j\}$.

Пусть, например, $H_1 \supset H_2 \supset \ldots$ — убывающая последовательность замкнутых полупространств пространства $\mathbf{R}^{2n+1}$, такая, что $\bigcap H_i = \varnothing$. Предположим, что все точки p_i уже определены для $i < q$. Определим по индукции p_q как такую точку из H_q, которая не принадлежит ни одному из конечного числа линейных многообразий, порожденных $2n+1$ или меньшим количеством точек совокупности $\{p_i \mid 1 \leqslant i \leqslant j-1\}$.

Предположим, что K — счетный локально конечный комплекс, что $\dim K \leqslant n$ и $\{v_i\}_{i=1,2,\ldots}$ — некоторая нумерация его вершин. Определим линейное отображение $f\colon |K| \to \mathbf{R}^{2n+1}$ равенством $f(v_i) = p_i$. Из условия (a) вытекает, что для любого $s \in K$ ограничение $f \mid |s|$ является линейным вложением $|s|$ в $|K|$, и если $s, s' \in K$, то

$$f(|s| \cap |s'|) = f(|s|) \cap f(|s'|).$$

Следовательно, f инъективно. Из условия (b) вытекает, что если C — какое-нибудь компактное подмножество в $\mathbf{R}^{2n+1}$, то существует такой номер j, что $f^{-1}(C) \subset \bigcup\{\operatorname{st} v_i \mid i \leqslant j\}$. Поскольку комплекс K локально конечен, $f^{-1}(C) \subset |L|$ для некоторого конечного подкомплекса $L \subset K$. Следовательно, $f^{-1}(C)$ — компактное подмножество в $|K|$. Если A — замкнутое подмножество в $|K|$, а C — компактное подмножество в $\mathbf{R}^{2n+1}$, то множество $f(A) \cap C = f(A \cap f^{-1}(C))$ замкнуто в C (так как $A \cap f^{-1}(C)$ — замкнутое подмножество компактного подмножества $f^{-1}(C)$ в $|K|$ и $f \mid f^{-1}(C)$ — гомеоморфизм $f^{-1}(C)$ на $f(f^{-1}(C))$). Следовательно, отображение f замкнуто и является линейным вложением $|K|$ в $\mathbf{R}^{2n+1}$, имеющим замкнутый образ. ■

§ 3. Подразделения

При изучении симплициальных комплексов нас главным образом интересуют определяемые ими полиэдры. При изучении полиэдров важно рассматривать различные их триангуляции и связи между ними. Этот параграф посвящен доказательству существования «мелких» триангуляций полиэдров; это будет использовано в следующем параграфе для доказательства того, что произвольное непрерывное отображение одного полиэдра в другой можно аппроксимировать симплициальными отображениями.

Пусть K — некоторый симплициальный комплекс. *Подразделением* комплекса K называется симплициальный комплекс K', такой, что

(a) вершины комплекса K' являются точками в $|K|$;

(b) если s' — симплекс из K', то существует некоторый симплекс s из K, такой, что $s' \subset |s|$ (т. е. s' является конечным непустым подмножеством в $|s|$);

(c) линейное отображение $|K'| \to |K|$, переводящее каждую вершину из K' в соответствующую ей точку из $|K|$, является гомеоморфизмом.

Заметим, что из условий (a) и (b) следует, что каждый симплекс s' из K' имеет в качестве носителя некоторый симплекс $s \in K$. Если K' — подразделение комплекса K, то мы будем отождествлять пространства $|K'|$ и $|K|$, пользуясь линейным гомеоморфизмом условия (c). Следующее утверждение вытекает непосредственно из определения.

1. *Всякое подразделение некоторого подразделения комплекса K само является подразделением комплекса K.* ■

Верен также следующий факт, хотя доказать его несколько труднее.

2. *Пусть K' и K'' — подразделения комплекса K. Существует подразделение K''' комплекса K, являющееся подразделением как K', так и K''.* ■

Итак, утверждения 1 и 2 показывают, что подразделения комплекса K образуют направленное множество по отношению частичного упорядочения, определяемого операцией подразделения.

3. Лемма. *Пусть симплициальные комплексы K и K' удовлетворяют условиям* (a) *и* (b). *Если $s \in K$ — носитель симплекса $s' \in K'$, то $\langle s' \rangle \subset \langle s \rangle$.*

Доказательство. Пусть $v_0', \ldots, v_p'$ — вершины симплекса s', а $v_0, \ldots, v_q$ — вершины носителя s симплекса s'. Поскольку $s' \subset |s|$, то при $0 \leqslant i \leqslant p$ имеет место равенство $v_i' = \sum \alpha_{ij} v_j$. Поскольку s — наименьший из таких симплексов, для всякого $0 \leqslant j \leqslant q$ существует такое число $0 \leqslant i \leqslant p$, что $\alpha_{ij} \neq 0$. Пусть $\beta \in \langle s' \rangle$. Тогда

$$\beta = \sum_i \beta_i v_i' = \sum_j \left(\sum_i \beta_i \alpha_{ij} \right) v_j,$$

а так как $\beta_i > 0$ для всех i, то $\sum \beta_i \alpha_{ij} > 0$ для всех j. Следовательно, $\beta \in \langle s \rangle$ *и* $\langle s' \rangle \subset \langle s \rangle$. ■

4. Теорема. *Пусть K' и K — симплициальные комплексы, удовлетворяющие условиям* (a) *и* (b). *Тогда K' в том и только в том случае является подразделением комплекса K, когда для любого симплекса $s \in K$ множество $\{\langle s' \rangle \mid s' \in K', \langle s' \rangle \subset \langle s \rangle\}$ является конечным разбиением симплекса $\langle s \rangle$.*

Доказательство. Предположим, что комплексы K' и K удовлетворяют не только условиям (a) и (b), но также и тому условию, что $\{\langle s' \rangle \mid s' \in K', \langle s' \rangle \subset \langle s \rangle\}$ — конечное разбиение пространства $\langle s \rangle$ для любого $s \in K$. Поскольку каждый симплекс $s \in K$ имеет лишь конечное число граней, из этого следует, что комплекс

$$K'(s) = \{s' \in K' \mid \text{существует грань } s_1 \text{ симплекса } s, \text{ такая, что } \langle s' \rangle \subset \langle s_1 \rangle\}$$

является конечным подкомплексом комплекса K', и линейное отображение $h_s\colon |K'(s)| \to |s|$, переводящее каждую вершину из $K'(s)$ в себя, является гомеоморфизмом. Следовательно, существует непрерывное отображение $g\colon |K| \to |K'|$, такое, что $g \mid |s| = h_s^{-1}$ при $s \in K$; оно является обратным к линейному отображению $h\colon |K'| \to |K|$. Следовательно, h — гомеоморфизм, и комплексы K' и K удовлетворяют условию (c).

Обратно, если K' — некоторое подразделение комплекса K, то $\{s' \mid s' \in K'\}$ — разбиение пространства $|K'| = |K|$. Пусть $s \in K$; рассмотрим множества $\langle s' \rangle \cap \langle s \rangle$, где $s' \in K'$. Из леммы 3 вытекает, что либо $\langle s' \rangle \cap \langle s \rangle = \varnothing$, либо $\langle s' \rangle \subset \langle s \rangle$. Следовательно, $\{\langle s' \rangle \mid s' \in K', \langle s' \rangle \subset \langle s \rangle\}$ — разбиение пространства $\langle s \rangle$. Поскольку множество $|s|$ компактно, из следствия 3.1.19 вытекает, что полученное разбиение пространства $\langle s \rangle$ конечно. ■

Мы используем этот результат для доказательства того, что всякое подразделение комплекса K одновременно определяет подразделение всякого подкомплекса комплекса K.

5. Следствие. *Пусть K' — подразделение комплекса K, и пусть L — подкомплекс в K. Тогда существует единственный подкомплекс L' в K', являющийся подразделением комплекса L.*

Доказательство. Если L' — подкомплекс из K', являющийся подразделением комплекса L, то $L' = \{s' \in K' \mid \langle s' \rangle \subset |L|\}$, что доказывает единственность L'. Чтобы доказать существование такого L', мы покажем, что подкомплекс $\{s' \in K' \mid \langle s' \rangle \subset |L|\}$ обладает всеми нужными нам свойствами. Ясно, что это множество является подкомплексом (обозначим его через L') комплекса K' и что L' и L удовлетворяют условиям (a) и (b). Используем теорему 4 для доказательства того, что L' — подразделение комплекса L. Если $s \in L$, то по теореме 4 множество $\{\langle s'\rangle \mid s' \in K', \langle s'\rangle \subset \langle s\rangle\}$ является конечным разбиением пространства $\langle s\rangle$. Из определения комплекса L' получаем равенство

$$\{\langle s'\rangle \mid s' \in K', \langle s'\rangle \subset \langle s\rangle\} = \{\langle s'\rangle \mid s' \in L', \langle s'\rangle \subset \langle s\rangle\}.$$

Следовательно (теорема 4), L' — подразделение комплекса L. ∎

Подразделение L' комплекса L, построенное в следствии 5, называется *подразделением подкомплекса L, индуцированным подразделением K'*, и обозначается $K'|L$.

Следующие два утверждения вытекают непосредственно из определения подразделения.

6. *Если отображение $f\colon |K| \to X$ линейно на K, а K' — некоторое подразделение комплекса K, то f линейно также и на K'.* ∎

7. *Если $((K, L), f)$ — некоторая триангуляция пары (X, A), а K' — подразделение комплекса K, то $((K', K'|L), f)$ — также триангуляция пары (X, A).* ∎

Для произвольного симплициального комплекса мы построим некоторое конкретное подразделение, называемое барицентрическим подразделением. Для этого нам понадобится следующая лемма, которая показывает, как продолжить подразделение комплекса $\dot{s}$ до подразделения всего симплекса $\bar{s}$:

8. **Лемма.** *Пусть s — симплекс некоторого комплекса, и пусть K' — некоторое подразделение его края $\dot{s}$. Тогда для любой точки $w_0 \in \langle s\rangle$ комплекс $K' * w_0$ является подразделением симплекса $\bar{s}$.*

Доказательство. В формулировке леммы вершина w_0 рассматривается как симплициальный комплекс, имеющий единственную вершину, а $K' * w_0$ — как соединение комплексов, определенное в примере 3.1.7. Ясно, что $K' * w_0$ удовлетворяет требованиям (a) и (b). Из леммы 3.2.2 следует, что всякая точка из $|s|$ либо совпадает с w_0, либо принадлежит $|\dot{s}|$, либо содержится в единственном открытом симплексе вида $\langle s' \cup \{w_0\}\rangle$, где $s' \in K'$. Следовательно, открытые симплексы из $|K' * w_0|$ образуют конечное разбиение пространства $|s|$ и, по теореме 4, $K' * w_0$ — подразделение симплекса $\bar{s}$. ∎

Подразделения симплекса $\bar{s}$, полученные применением леммы 8, для двумерного симплекса s изображены на рис. 6.

Теперь мы подготовлены к доказательству существования барицентрического подразделения. Пусть K — симплициальный комплекс. Определим $\operatorname{sd} K$ как симплициальный комплекс, вершинами которого являются центры симплексов из K, а симплексами — конечные непустые совокупности центров симплексов, принадлежащих линейно упорядоченной системе симплексов из K. Другими словами, симплексами комплекса $\operatorname{sd} K$ являются конечные множества $\{b(s_0), \ldots, b(s_q)\}$, такие, что s_{i-1} — грань симплекса s_i $(i=1, \ldots, q)$. Мы всегда будем предполагать, что вершины симплексов комплекса $\operatorname{sd} K$ занумерованы в этом порядке.

Ясно, что $\operatorname{sd} K$ является симплициальным комплексом, причем если L — подкомплекс в K, то $\operatorname{sd} L$ — подкомплекс в $\operatorname{sd} K$. Более

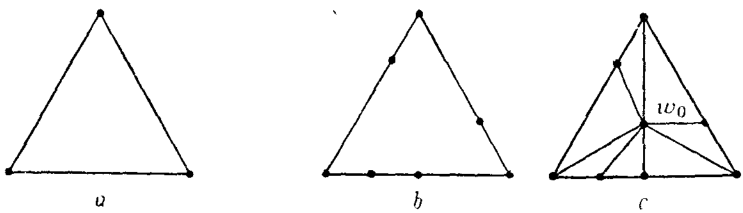


Рис. 6. a — треугольник и его ребра $(\dot{s})$; b — подразделение границы треугольника (K'); c — соответствующее подразделение треугольника $\bar{s}$ $(K' * w_0)$.

того, если $b(s_q)$ — последняя вершина симплекса $s' \in \operatorname{sd} K$, то $s' \subset |s_q|$, а поскольку s_q — носитель вершины $b(s_q)$, то s_q — носитель симплекса s'. Следовательно, комплексы $\operatorname{sd} K$ и K удовлетворяют условиям (a) и (b).

9. Теорема. *Комплекс* $\operatorname{sd} K$ — *подразделение комплекса* K.

Доказательство. Покажем, что $\operatorname{sd} K$ и K удовлетворяют условиям теоремы 4. Если $s \in K$, то из леммы 3 и только что сделанного замечания вытекает, что

$$\{s' \in \operatorname{sd} K \mid \langle s' \rangle \subset \langle s \rangle\} = \{s' \in \operatorname{sd} K \mid \text{последняя вершина симплекса } s' \text{ совпадает с } b(s)\} = \{s' \in \operatorname{sd} \bar{s} \mid \langle s' \rangle \subset \langle s \rangle\}.$$

Следовательно, достаточно показать, что $\operatorname{sd} \bar{s}$ — подразделение симплекса $\bar{s}$ для каждого $s \in K$. Мы сделаем это индукцией по $\dim s$. Если $\dim s = 0$, то $\operatorname{sd} \bar{s} = \bar{s}$ — подразделение $\bar{s}$. Пусть $q > 0$. Предположим, что $\operatorname{sd} \bar{s}_1$ — подразделение симплекса $\bar{s}_1$ для любого s_1, $\dim s_1 < q$, и пусть s — некоторый q-мерный симплекс. По предположению индукции $\operatorname{sd} \dot{s}$ является подразделением комплекса $\dot{s}$. Определение подразделения $\operatorname{sd} K$ показывает, что $\operatorname{sd} \bar{s} = \operatorname{sd} \dot{s} * b(s)$. Из леммы 8 следует, что мы получили подразделение симплекса $\bar{s}$. ■

Подразделение $\operatorname{sd} K$ называется *барицентрическим подразделением комплекса* K. *Итерированное барицентрическое подразделение* $\operatorname{sd}^n K$ $(n \geqslant 0)$ определяется по индукции равенствами

$$\operatorname{sd}^0 K = K,$$
$$\operatorname{sd}^n K = \operatorname{sd}(\operatorname{sd}^{n-1} K), \quad n \geqslant 1.$$

10. Лемма. *Если L — некоторый подкомплекс комплекса K, то* $\operatorname{sd} L$ — *полный подкомплекс комплекса* $\operatorname{sd} K$.

Доказательство. Пусть $\{b(s_0), \ldots, b(s_q)\}$ — симплекс комплекса $\operatorname{sd} K$, все вершины которого принадлежат $\operatorname{sd} L$. Тогда s_{i-1} является гранью s_i при $i = 1, \ldots, q$, и для всех i имеет место включение $s_i \in L$. Следовательно, $\{b(s_0), \ldots, b(s_q)\} \in \operatorname{sd} L$. ■

11. Следствие. *Пусть (X, A) — некоторая полиэдральная пара. Тогда A является сильным деформационным ретрактом некоторой окрестности A в X.*

Доказательство. Используя утверждение 7 и лемму 10, мы сводим доказательство к случаю, когда $(X, A) = (|K|, |L|)$, где L — полный подкомплекс в K. Пусть N — максимальный подкомплекс в K, не пересекающийся с L. Мы докажем, что $|L|$ является сильным деформационным ретрактом окрестности $|K| - |N|$. Если $\alpha \in |K| - |N|$, то по лемме 3.1.10 либо $\alpha \in |L|$, либо существуют вершины $v_0, \ldots, v_p \in L$ и $v_{p+1}, \ldots, v_q \in N$ $(0 \leqslant p,\ p+1 \leqslant q)$, такие, что $\alpha \in \langle v_0, \ldots, v_q \rangle$. В последнем случае $\alpha = \sum\limits_{0 \leqslant i \leqslant q} \alpha_i v_i$, где $\alpha_i > 0$, и мы положим $a = \sum\limits_{0 \leqslant i \leqslant p} \alpha_i$. Тогда $0 < a < 1$.

Пусть $\alpha_i' = \alpha_i / a$ при $0 \leqslant i \leqslant p$ и $\alpha_i'' = \alpha_i/(1-a)$ при $p+1 \leqslant i \leqslant q$. Тогда $\alpha = a\alpha' + (1-a)\alpha''$, где точка $\alpha' = \sum\limits_{0 \leqslant i \leqslant p} \alpha_i' v_i$ принадлежит $|L|$, а точка $\alpha'' = \sum\limits_{p+1 \leqslant i \leqslant q} \alpha_i'' v_i$ принадлежит $|N|$. Сильная деформационная ретракция $F\colon (|K| - |N|) \times I \to |K| - |N|$ окрестности $|K| - |N|$ на $|L|$ определяется формулой

$$F(\alpha, t) = \begin{cases} \alpha, & \alpha \in |L|,\ t \in I, \\ t\alpha' + (1-t)\alpha, & \alpha \in |K| - (|N| \cup |L|),\ t \in I. \end{cases}$$

Отображение F непрерывно, поскольку непрерывно отображение $F \mid |L| \times I$, и для всякого симплекса из K вида $s' \cup s''$, где $s' \in L$, а $s'' \in N$, ограничение $F \mid [|s' \cup s''| \cap (|K| - |N|)] \times I$ также непрерывно. ■

Пусть X — некоторый полиэдр, а $\mathcal{U}$ — его открытое покрытие. Назовем триангуляцию (K, f) полиэдра X *более мелкой*, чем покрытие $\mathcal{U}$, если для каждой вершины $v \in K$ существует такой элемент $U \in \mathcal{U}$, что $f(\operatorname{st} v) \subset U$. Назовем симплициальный комплекс K *более мелким*, чем открытое покрытие $\mathcal{U}$ пространства $|K|$, если триангуляция $(K, 1_{|K|})$ пространства $|K|$ более мелкая, чем $\mathcal{U}$ (т. е. если для каждой вершины $v \in K$ существует открытое множество $U \in \mathcal{U}$, такое, что $\operatorname{st} v \subset U$). Мы сейчас докажем, что для всякого открытого покрытия компактного полиэдра существует триангуляция, более мелкая, чем покрытие $\mathcal{U}$.

Метрика пространства $|K|$ называется *линейной на* K, если она индуцирована метрикой $\mathbf{R}^n$ при реализации комплекса K в $\mathbf{R}^n$. Всякий конечный симплициальный комплекс обладает линейной метрикой, и если K' — подразделение комплекса K, то линейная метрика пространства $|K|$ индуцирует линейную метрику пространства $|K'|$.

12. Лемма. *Если задана метрика, линейная на m-мерном симплексе s, то для каждого симплекса $s' \in \operatorname{sd} \bar{s}$ имеем*[1])

$$\operatorname{diam}|s'| \leqslant \frac{m}{m+1} \operatorname{diam}|s|.$$

Доказательство. Пусть $\{p_j \mid 0 \leqslant j \leqslant m\}$ — точки пространства $\mathbf{R}^n$; предположим, что y является выпуклой линейной комбинацией точек $\{p_j\}$ (т. е. $y = \sum t_j p_j$, где $\sum t_j = 1$ и $t_j \geqslant 0$). Пусть $x \in \mathbf{R}^n$. Тогда

$$\|x - y\| = \left\|x - \sum t_j p_j\right\| = \left\|\sum t_j (x - p_j)\right\| \leqslant \sum t_j \|x - p_j\|.$$

Следовательно, $\|x - y\| \leqslant \sup \|x - p_j\|$. Если x также является выпуклой линейной комбинацией точек $\{p_j\}$, то $\|x - y\| \leqslant \sup \|p_i - p_j\|$.

Будем считать, что симплекс $|s|$ линейно вложен в $\mathbf{R}^n$ и что его вершины совпадают с точками $p_0, p_1, \ldots, p_m$. Тогда, как только что доказано, $\operatorname{diam}|s| \leqslant \sup \|p_i - p_j\|$, и если s' — некоторый симплекс из $\operatorname{sd} \bar{s}$, то $\operatorname{diam}|s'| \leqslant \sup\{\|p' - p''\| \mid p', p'' \in s'\}$. Следовательно, достаточно показать, что если $p' = (p_0 + \ldots + p_q)/(q+1)$ и $p'' = (p_0 + \ldots + p_r)/(r+1)$, где $q \leqslant r$, то $\|p' - p''\| \leqslant [m/(m+1)] \times \sup \|p_i - p_j\|$. Вновь используя доказанную оценку, получаем

$$\|p' - p''\| \leqslant \sup\{\|p_i - p''\| \mid 0 \leqslant i \leqslant q\},$$

а при $0 \leqslant i \leqslant q$

$$\|p_i - p''\| = \left\|p_i - \frac{1}{r+1} \sum_{0 \leqslant j \leqslant r} p_j\right\| \leqslant \frac{1}{r+1} \sum_{0 \leqslant j \leqslant r} \|p_i - p_j\| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{r}{r+1} \sup \|p_i - p_j\|.$$

Следовательно,

$$\|p' - p''\| \leqslant \frac{r}{r+1} \sup\{\|p_i - p_j\| \mid 0 \leqslant i \leqslant q,\ 0 \leqslant j \leqslant r\} \leqslant \frac{r}{r+1} \operatorname{diam}|s|.$$

Так как $r \leqslant m$, то $r/(r+1) \leqslant m/(m+1)$ и

$$\operatorname{diam}|s'| \leqslant [m/(m+1)] \operatorname{diam}|s|. \ \blacksquare$$

[1]) Диаметром некоторого множества A, лежащего в метрическом пространстве, называется число $\max\limits_{x, y \in A} \rho(x, y)$. — *Прим. ред.*

Если на пространстве $|K|$ задана некоторая метрика, то *мелкость* комплекса K (обозначается $\operatorname{mesh} K$) определяется равенством

$$\operatorname{mesh} K = \sup\{\operatorname{diam}|s| \mid s \in K\}.$$

13. Следствие. *Если K — некоторый m-мерный комплекс, а пространство $|K|$ наделено метрикой, линейной на K, то*

$$\operatorname{mesh}(\operatorname{sd} K) \leqslant \frac{m}{m+1} \operatorname{mesh} K. \blacksquare$$

Это следствие позволяет установить важный результат, к которому мы стремились.

14. Теорема. *Пусть $\mathcal{U}$ — некоторое открытое покрытие компактного полиэдра X. Тогда X допускает триангуляцию, более мелкую, чем $\mathcal{U}$.*

Доказательство. Пусть (K, f) — некоторая триангуляция пространства X. Мы покажем, что существует такое целое число N, что триангуляция $(\operatorname{sd}^n K, f)$ мельче, чем $\mathcal{U}$, при $n \geqslant N$. Пусть пространство $|K|$ наделено метрикой, линейной на K, и пусть $\varepsilon > 0$ — лебегово число открытого покрытия $f^{-1}\mathcal{U} = \{f^{-1}U \mid U \in \mathcal{U}\}$ относительно этой метрики (т. е. если $A \subset |K|$ и $\operatorname{diam} A \leqslant \varepsilon$, то $f(A)$ принадлежит некоторому элементу покрытия $\mathcal{U}$). Такое число $\varepsilon > 0$ существует, поскольку пространство $|K|$ компактно. Пусть $m = \dim K$. Выберем N таким образом, чтобы $[m/(m+1)]^N \times \operatorname{mesh} K \leqslant \varepsilon/2$ (существование такого N следует из того, что $\lim\limits_{n\to\infty} [m/(m+1)]^n = 0$). Если $n \geqslant N$, то (следствие 13) $\operatorname{mesh} \operatorname{sd}^n K \leqslant \varepsilon/2$. Если v' — какая-нибудь вершина комплекса $\operatorname{sd}^n K$, то $\operatorname{diam}(\operatorname{st} v') \leqslant 2 \operatorname{mesh} \operatorname{sd}^n K \leqslant \varepsilon$. Следовательно, $f(\operatorname{st} v')$ содержится в некотором элементе покрытия $\mathcal{U}$ и триангуляция $(\operatorname{sd}^n K, f)$ более мелкая, чем $\mathcal{U}$, при $n \geqslant N$. $\blacksquare$

Этот последний результат верен, даже если пространство X некомпактно. Точнее, если (K, f) — некоторая триангуляция полиэдра X, а $\mathcal{U}$ — его открытое покрытие, то существует подразделение K' комплекса K, такое, что триангуляция (K', f) более мелкая, чем $\mathcal{U}$[1]). Однако если X некомпактно, то K' нельзя, вообще говоря, выбрать как итерированное барицентрическое подразделение комплекса K, и, значит, доказательство в этом случае более сложно, чем доказательство теоремы 14. Нам это утверждение понадобится только в том виде, как оно было сформулировано в теореме 14, так что мы опускаем дальнейшее рассмотрение этого общего случая.

[1]) См. теорему 35 статьи: Whitehead J. H. C., Simplicial spaces, nuclei, and m-groups, *Proc. London Math. Soc.*, **45** (1939), 243—327.

§ 4. Симплициальная аппроксимация

Непрерывное отображение пространств симплициальных комплексов можно подходящим образом аппроксимировать симплициальными отображениями. Этот параграф содержит определение аппроксимации, характеризацию аппроксимаций и доказательство существования аппроксимаций для отображений компактного полиэдра в произвольный полиэдр. В конце параграфа мы при помощи полученного результата выведем некоторые свойства связности для сфер.

Пусть K_1 и K_2 — некоторые симплициальные комплексы, и пусть отображение $f\colon |K_1| \to |K_2|$ непрерывно. Симплициальное отображение $\varphi\colon K_1 \to K_2$ называется *симплициальной аппроксимацией* отображения f, если из $f(\alpha) \in \langle s_2 \rangle$ следует, что $|\varphi|(\alpha) \in |s_2|$ ($\alpha \in |K_1|$, $s_2 \in K_2$). Заметим, что если v — вершина комплекса K_1, а $f(v)$ — вершина комплекса K_2, то $|\varphi|(v) = f(v)$. Следовательно, имеет место такой результат:

1. Лемма. *Пусть $f\colon |K_1| \to |K_2|$ — некоторое отображение, и пусть для некоторого подкомплекса $L_1 \subset K_1$ ограничение $f \,|\, |L_1|$ индуцировано некоторым симплициальным отображением $L_1 \to K_2$. Если $\varphi\colon K_1 \to K_2$ — симплициальная аппроксимация отображения f, то $|\varphi| \,|\, |L_1| = f \,|\, |L_1|$.* ■

В частности, единственной симплициальной аппроксимацией отображения $|\varphi|\colon |K_1| \to |K_2|$, индуцированного некоторым симплициальным отображением $\varphi\colon K_1 \to K_2$, является само φ. Симплициальная аппроксимация является аппроксимацией в следующем смысле:

2. Лемма. *Пусть $\varphi\colon K_1 \to K_2$ — симплициальная аппроксимация отображения $f\colon |K_1| \to |K_2|$, и пусть $A \subset |K_1|$ — подмножество из $|K_1|$, на котором отображения $|\varphi|$ и f совпадают. Тогда $|\varphi| \simeq f \operatorname{rel} A$.*

Доказательство. Гомотопия относительно A от $|\varphi|$ к f определяется равенством

$$F(\alpha, t) = tf(\alpha) + (1-t)(|\varphi|(\alpha)), \quad \alpha \in |K_1|, \ t \in I.$$

Правая часть имеет смысл, так как если $f(\alpha) \in \langle s_2 \rangle$, то $|\varphi|(\alpha) \in |s_2|$ и потому $F(\alpha, t) \in |s_2|$ для $t \in I$. Легко доказывается непрерывность отображения F. Ясно, что если $\alpha \in A$, то $F(\alpha, t) = f(\alpha)$ для всех $t \in I$. Следовательно, $F\colon |\varphi| \simeq f \operatorname{rel} A$. ■

Следующая теорема дает полезную характеризацию симплициальных аппроксимаций.

3. Теорема. *Отображение φ множества вершин комплекса K_1 в множество вершин комплекса K_2 тогда и только тогда является* *симплициальной аппроксимацией отображения* $f\colon |K_1| \to |K_2|$, *когда для каждой вершины* $v \in K_1$ *выполняется соотношение*

$$f(\operatorname{st} v) \subset \operatorname{st} \varphi(v).$$

Доказательство. Предположим, что φ — симплициальная аппроксимация отображения f. Пусть $\alpha \in \operatorname{st} v$, и пусть $f(\alpha) \in \langle s_2 \rangle$. Тогда $\alpha(v) \neq 0$ и $|\varphi|(\alpha) \in |s_2|$. Поскольку φ — симплициальное отображение, $|\varphi|(\alpha)(\varphi(v)) \neq 0$. Следовательно, $\varphi(v)$ является вершиной симплекса $|s_2|$ и $f(\alpha) \in \operatorname{st} \varphi(v)$. Так как это выполняется для каждой точки $\alpha \in \operatorname{st} v$, то $f(\operatorname{st} v) \subset \operatorname{st} \varphi(v)$.

Обратно, предположим, что φ — такое отображение множества вершин комплекса K_1 в множество вершин комплекса K_2, что $f(\operatorname{st} v) \subset \operatorname{st} \varphi(v)$ для каждой вершины $v \in K_1$. Покажем, что φ — симплициальное отображение. Если $\{v_i\}$ — вершины некоторого симплекса из K_1, то $\bigcap \operatorname{st} v_i \neq \varnothing$ (по лемме 3.1.25) и

$$\varnothing \neq f\left(\bigcap \operatorname{st} v_i\right) \subset \bigcap f(\operatorname{st} v_i) \subset \bigcap \operatorname{st} \varphi(v_i).$$

Из леммы 3.1.25 также следует, что $\{\varphi(v_i)\}$ — вершины некоторого симплекса комплекса K_2. Следовательно, $\varphi\colon K_1 \to K_2$ — симплициальное отображение.

Покажем, что φ — симплициальная аппроксимация отображения f. Предположим, что $\alpha \in \langle s_1 \rangle$, $f(\alpha) \in \langle s_2 \rangle$ и v — некоторая произвольная вершина симплекса s_1. Тогда $\alpha \in \operatorname{st} v$ и (по предположению) $f(\alpha) \in \operatorname{st} \varphi(v)$. Следовательно, $\varphi(v)$ — вершина симплекса s_2. Аналогичное утверждение имеет место для каждой вершины v симплекса s_1. Поскольку φ — симплициальное отображение, $|\varphi|(|s_1|) \subset |s_2|$. Следовательно, $|\varphi|(\alpha) \in |s_2|$, и φ — симплициальная аппроксимация отображения f. ■

Нас интересуют также симплициальные аппроксимации $\varphi\colon (K_1, L_1) \to (K_2, L_2)$ отображений $f\colon (|K_1|, |L_1|) \to (|K_2|, |L_2|)$. Следующее утверждение показывает, что любая симплициальная аппроксимация $K_1 \to K_2$ отображения $f\colon (|K_1|, |L_1|) \to (|K_2|, |L_2|)$ автоматически является симплициальной аппроксимацией отображения пар.

4. Следствие. *Пусть* $f\colon |K_1| \to |K_2|$ — *такое отображение, что* $f(|L_1|) \subset |L_2|$, *где* $L_1 \subset K_1$, $L_2 \subset K_2$, *и пусть* $\varphi\colon K_1 \to K_2$ — *симплициальная аппроксимация отображения* f. *Тогда* $\varphi | L_1$ *переводит* L_1 *в* L_2 *и является симплициальной аппроксимацией отображения* $f \,|\, |L_1|$.

Доказательство. Как вытекает из теоремы 3, достаточно показать, что если v — вершина из L_1, то $\varphi(v)$ — такая вершина из L_2, что

$$f(\operatorname{st} v \cap |L_1|) \subset \operatorname{st} \varphi(v) \cap |L_2|.$$

Так как φ — симплициальная аппроксимация отображения f, то $f(\operatorname{st} v) \subset \operatorname{st} \varphi(v)$, и если v — вершина из L_1, то $f(v) \in \langle s_2 \rangle$ для некоторого $s_2 \in L_2$ (поскольку $f(|L_1|) \subset |L_2|$). Следовательно, $\varphi(v)$ — вершина комплекса L_2 и

$$f(\operatorname{st} v \cap |L_1|) \subset f(\operatorname{st} v) \cap |L_2| \subset \operatorname{st} \varphi(v) \cap |L_2|. \blacksquare$$

Из следствия 4 вытекает, что всякая симплициальная аппроксимация отображения $f\colon (|K_1|, |L_1|) \to (|K_2|, |L_2|)$ является симплициальным отображением $\varphi\colon (K_1, L_1) \to (K_2, L_2)$. По лемме 2 отображения f и $|\varphi|$ гомотопны как отображения пар.

5. Следствие. *Композиция симплициальных аппроксимаций двух отображений является симплициальной аппроксимацией композиции этих отображений.*

Доказательство. Пусть $\varphi\colon K_1 \to K_2$ — симплициальная аппроксимация отображения $f\colon |K_1| \to |K_2|$, а $\psi\colon K_2 \to K_3$ — симплициальная аппроксимация отображения $g\colon |K_2| \to |K_3|$. Тогда по теореме 3 для вершины $v \in K_1$ имеют место соотношения

$$gf(\operatorname{st} v) \subset g(\operatorname{st} \varphi(v)) \subset \operatorname{st} \psi\varphi(v)$$

и $\psi\varphi\colon K_1 \to K_3$ является, следовательно, симплициальной аппроксимацией отображения $gf\colon |K_1| \to |K_3|$. $\blacksquare$

Теорема 3 приводит к следующему необходимому и достаточному условию существования симплициальной аппроксимации отображения:

6. Теорема. *Отображение $f\colon |K_1| \to |K_2|$ тогда и только тогда допускает симплициальную аппроксимацию $K_1 \to K_2$, когда комплекс K_1 более мелкий, чем открытое покрытие $\{f^{-1}(\operatorname{st} v) \mid v$ — вершина в $K_2\}$.*

Доказательство. По теореме 3 симплициальная аппроксимация отображения f существует тогда и только тогда, когда для каждой вершины $v_1 \in K_1$ найдется вершина $v_2 \in K_2$, такая, что $\operatorname{st} v_1 \subset f^{-1}(\operatorname{st} v_2)$. Это эквивалентно условию, что комплекс K_1 более мелкий, чем покрытие $\mathcal{U}$. $\blacksquare$

Если K' — некоторое подразделение комплекса K, то для вершин $v' \in K'$ и $v \in K$ имеет место соотношение

$$v' \in \operatorname{st}_K v \Leftrightarrow \operatorname{st}_{K'} v' \subset \operatorname{st}_K v.$$

В сочетании с теоремой 3 отсюда получается такое следствие:

7. Следствие. *Пусть K' — подразделение комплекса K. Отображение φ множества вершин комплекса K' в множество вершин* *комплекса K тогда и только тогда является симплициальной аппроксимацией тождественного отображения* $|K'| \subset |K|$, *когда* $v' \in \operatorname{st} \varphi(v')$ *для каждой вершины* $v' \in K'$. ■

В частности, если K' — подразделение комплекса K, то существует симплициальная аппроксимация $K' \to K$ тождественного отображения $|K'| \subset |K|$. Объединяя теоремы 6 и 3.3.14 и следствие 4, получаем *теорему о симплициальной аппроксимации*:

8. Теорема. *Пусть* (K_1, L_1) — *конечная симплициальная пара, и пусть* $f\colon (|K_1|, |L_1|) \to (|K_2|, |L_2|)$ — *некоторое отображение. Тогда найдется целое* N, *такое, что при* $n \geqslant N$ *существуют симплициальные аппроксимации* $(\operatorname{sd}^n K_1, \operatorname{sd}^n L_1) \to (K_2, L_2)$ *отображения* f. ■

Как было замечено в конце § 3, теорема 3.3.14 верна также для произвольных полиэдров X. Следовательно, если K_1 — некоторый комплекс (вообще говоря, бесконечный), а $f\colon |K_1| \to |K_2|$ — произвольное отображение, то существуют подразделение K_1' комплекса K_1 и симплициальная аппроксимация $K_1' \to K_2$ отображения $f\colon |K_1'| \to |K_2|$. Однако если комплекс K_1 бесконечен, то в общем случае в качестве K_1' нельзя взять итерированное барицентрическое подразделение комплекса K_1.

9. Пример. Если комплекс $\dot{s}$ образован всеми собственными гранями двумерного симплекса s, то пространство $|\dot{s}|$ гомеоморфно S^1. Следовательно, $[|\dot{s}|; |\dot{s}|]$ — бесконечное множество. Поскольку комплекс $\dot{s}$ конечен, существует лишь конечное число симплициальных отображений $\operatorname{sd}^n \dot{s} \to \dot{s}$ для каждого n. Следовательно, для каждого n существует отображение $|\dot{s}| \to |\dot{s}|$, не имеющее симплициальной аппроксимации $\operatorname{sd}^n \dot{s} \to \dot{s}$.

10. Пример. Пусть $\dot{s}$ — комплекс из примера 9, и пусть v_0, v_1 и v_2 — его вершины. Определим отображение $f\colon |\dot{s}| \to |\dot{s}|$, линейное на $\operatorname{sd} \dot{s}$, с помощью соотношений

$$f(v_0) = b\{v_0, v_1\}, \quad f(v_1) = b\{v_1, v_2\}, \quad f(v_2) = b\{v_2, v_0\},$$
$$f(b\{v_0, v_1\}) = v_1, \quad f(b\{v_1, v_2\}) = v_2, \quad f(b\{v_2, v_0\}) = v_0.$$

Тогда $f \simeq |1_{\dot{s}}|$, но симплициальной аппроксимации $\dot{s} \to \dot{s}$ отображения f не существует. Существует ровно 8 симплициальных аппроксимаций $\varphi\colon \operatorname{sd} \dot{s} \to \dot{s}$ отображения f (отображение φ уже определено на v_0, v_1, v_2, а $\varphi(b\{v_0, v_1\}) = v_0$ или v_1, $\varphi(b\{v_1, v_2\}) = v_1$ или v_2 и $\varphi(b\{v_2, v_0\}) = v_2$ или v_0).

При помощи техники симплициальной аппроксимации можно доказать следующий полезный результат:

11. Теорема. *Сфера* S^n $(n-1)$-*связна при* $n \geqslant 1$.

Доказательство. Согласно теореме 1.6.7, достаточно показать, что при $m<n$ всякое отображение $S^m \to S^n$ гомотопно нулю. Пусть s_1 — некоторый $(m+1)$-мерный симплекс, а s_2 — некоторый $(n+1)$-мерный симплекс. Тогда S^m и S^n гомеоморфны соответственно $|\dot{s}_1|$ и $|\dot{s}_2|$. По теореме 8 и лемме 2 достаточно показать, что если φ: $\mathrm{sd}^i \dot{s}_1 \to \dot{s}_2$ — какое-нибудь симплициальное отображение, то $|\varphi|$ гомотопно нулю. Поскольку $\dim(\mathrm{sd}^i \dot{s}_1) = m<n$, отображение φ переводит $\mathrm{sd}^i \dot{s}_1$ в m-мерный остов комплекса $\dot{s}_2$. Следовательно, существует некоторая точка $\alpha \in |\dot{s}_2|$, такая, что

$$|\varphi|(|\mathrm{sd}^i \dot{s}_1|) \subset |\dot{s}_2| - \alpha.$$

Поскольку множество $|\dot{s}_2| - \alpha$ гомеоморфно сфере S^n с выколотой точкой, которая в свою очередь гомеоморфна $\mathbf{R}^n$, это множество стягиваемо. Следовательно, отображение $|\varphi|$ гомотопно нулю. ■

В частности, мы имеем

12. Следствие. *При $n>1$ сфера S^n односвязна.* ■

Поскольку сфера S^n локально линейно связна, из следствия 12 и теоремы о поднятии вытекает, что всякое непрерывное отображение f: $S^n \to S^1$ можно пропустить через накрывающее отображение ex: $\mathbf{R} \to S^1$. Так как прямая $\mathbf{R}$ стягиваема, получаем

13. Следствие. *При $n>1$ всякое непрерывное отображение $S^n \to S^1$ гомотопно нулю.* ■

§ 5. Классы сопряженности

В предыдущем параграфе было показано, что любое непрерывное отображение пространств симплициальных комплексов обладает симплициальной аппроксимацией на достаточно мелком подразделении комплекса области определения этого отображения. Вообще говоря, симплициальная аппроксимация данного непрерывного отображения не единственна, и в этом параграфе мы изучаем эту неединственность.

Мы определяем аналог гомотопии (и называем это понятие сопряженностью) в категории симплициальных пар и симплициальных отображений. Будет показано, что симплициальные аппроксимации одного и того же непрерывного отображения являются сопряженными. Основной результат этого параграфа — доказательство существования биективного соответствия между множеством гомотопических классов непрерывных отображений (из пространства конечного симплициального комплекса в пространство произвольного симплициального комплекса) и пределом прямого спектра некоторой последовательности классов сопряженности симплициальных отображений.

Пусть (K_1, L_1) и (K_2, L_2) — некоторые симплициальные пары. Два симплициальных отображения φ, φ': $(K_1, L_1) \to (K_2, L_2)$ называются *сопряженными*, если для всякого симплекса $s \in K_1$ (или $s \in L_1$) множество $\varphi(s) \cup \varphi'(s)$ является симплексом в K_2 (или в L_2). Очевидно, это отношение рефлексивно и симметрично на множестве симплициальных отображений $(K_1, L_1) \to (K_2, L_2)$, но, вообще говоря, не транзитивно. Тем не менее можно построить отношение эквивалентности (оно обозначается $\varphi \sim \varphi'$) на этом множестве симплициальных отображений. Положим по определению $\varphi \sim \varphi'$, если существует конечная последовательность отображений $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n$, такая, что $\varphi_0 = \varphi$, $\varphi_n = \varphi'$, а φ_{i-1} и φ_i являются сопряженными, $i = 1, 2, \ldots, n$. Соответствующие классы эквивалентности называются *классами сопряженности*; множество классов сопряженности симплициальных отображений (K_1, L_1) в (K_2, L_2) обозначается $[K_1, L_1; K_2, L_2]$. Если φ: $(K_1, L_1) \to (K_2, L_2)$ — некоторое симплициальное отображение, то его класс сопряженности обозначается через $[\varphi]$.

Мы увидим, что классы сопряженности являются алгебраическими аналогами гомотопических классов. Докажем сначала, что можно брать композиции классов сопряженности.

1. Лемма. *Композиции сопряженных симплициальных отображений являются сопряженными.*

Доказательство. Рассмотрим сопряженные отображения φ, φ': $(K_1, L_1) \to (K_2, L_2)$ и сопряженные отображения ψ, ψ': $(K_2, L_2) \to$ $\to (K_3, L_3)$. Если s — симплекс в K_1 (или в L_1), то $\varphi(s) \cup \varphi'(s)$ — симплекс в K_2 (или в L_2). Следовательно, множество

$$\psi(\varphi(s) \cup \varphi'(s)) \cup \psi'(\varphi(s) \cup \varphi'(s))$$

является симплексом в K_3 (или в L_3). Отсюда следует, что подмножество $\psi\varphi(s) \cup \psi'\varphi'(s)$ является симплексом в K_3 (или в L_3) и что $\psi\varphi$, $\psi'\varphi'$: $(K_1, L_1) \to (K_3, L_3)$ — сопряженные отображения. ■

Из леммы 1 видно, что если $\varphi \sim \varphi'$ и $\psi \sim \psi'$, то $\psi\varphi \sim \psi\varphi' \sim \psi'\varphi'$. Следовательно, корректно определена композиция классов сопряженности

$$[\psi] \circ [\varphi] = [\psi\varphi]$$

(для композиции $(K_1, L_1) \xrightarrow{\varphi} (K_2, L_2) \xrightarrow{\psi} (K_3, L_3)$). Таким образом, можно определить *категорию типов сопряженности*, объектами которой являются симплициальные пары, а морфизмами — классы сопряженности симплициальных отображений. В этой категории существуют полные подкатегории, определяемые парами $(K, \varnothing)$ или симплициальными комплексами с отмеченной вершиной.

2. Лемма. *Сопряженные симплициальные отображения, совпадающие на некотором подкомплексе, определяют непрерывные отображения, гомотопные относительно пространства этого подкомплекса.*

Доказательство. Пусть φ, φ': $(K_1, L_1) \to (K_2, L_2)$ — сопряженные отображения, совпадающие на подкомплексе $L \subset K$. Определим гомотопию F: $(|K_1| \times I, |L_1| \times I) \to (|K_2|, |L_2|) \operatorname{rel} |L|$ от $|\varphi|$ до $|\varphi'|$ формулой

$$F(\alpha, t) = (1-t)(|\varphi|(\alpha)) + t(|\varphi'|(\alpha)), \quad \alpha \in |K_1|, \qquad t \in I. \blacksquare$$

Так как гомотопия определяет отношение эквивалентности, то в случае, когда $\varphi \sim \varphi'$, также и $|\varphi| \simeq |\varphi'|$. Поэтому имеет место

3. Следствие. *Существует ковариантный функтор из категории типов сопряженности симплициальных пар в категорию гомотопических типов пар топологических пространств, сопоставляющий паре (K, L) пару $(|K|, |L|)$, а классу $[\varphi]$ гомотопический класс $[|\varphi|]$.* $\blacksquare$

Следующее предложение касается различных симплициальных аппроксимаций одного и того же непрерывного отображения.

4. Лемма. *Две симплициальные аппроксимации $(K_1, L_1) \to (K_2, L_2)$ одного и того же непрерывного отображения являются сопряженными.*

Доказательство. Пусть φ, φ': $(K_1, L_1) \to (K_2, L_2)$ — симплициальные аппроксимации отображения f: $(|K_1|, |L_1|) \to (|K_2|, |L_2|)$, и пусть $\{v_i\}$ — симплекс в K_1. Тогда $\bigcap \operatorname{st} v_i \neq \varnothing$. По теореме 3.4.3

$$\varnothing \neq f(\bigcap \operatorname{st} v_i) \subset \bigcap f(\operatorname{st} v_i) \subset \bigcap (\operatorname{st} \varphi(v_i) \cap \operatorname{st} \varphi'(v_i)).$$

Следовательно, $\{\varphi(v_i)\} \cup \{\varphi'(v_i)\}$ — симплекс в K_2. Если $\{v_i\}$ — симплекс в L_1, то аналогичные рассуждения показывают, что $\{\varphi(v_i)\} \cup \{\varphi'(v_i)\}$ — симплекс в L_2. Следовательно, φ и φ' — сопряженные отображения. $\blacksquare$

Поскольку для получения симплициальной аппроксимации произвольного непрерывного отображения необходимо произвести подразделение, хотелось бы думать, что при подразделениях классы сопряженности находятся в биективном соответствии с гомотопическими классами. Следующий пример показывает, какова на самом деле связь между гомотопностью и сопряженностью.

5. Пример. Пусть s — двумерный симплекс с вершинами v_0, v_1 и v_2, и пусть $K_1 = K_2 = \dot{s}$. Всякое отображение множества вершин комплекса K_1 в множество вершин комплекса K_2 является симплициальным отображением. Следовательно, существует ровно 27 симплициальных отображений $K_1 \to K_2$. Из них ровно 21 отображение переводит K_1 в собственный подкомплекс комплекса K_2, и эти отображения составляют один класс сопряженности. Из оставшихся шести отображений, каждое из которых является единственным элементом своего класса сопряженности, три четные перестановки вершин определяют гомотопные непрерывные отображения, соответствующие одной образующей группы

$$[|K_1|;\ |K_2|] \approx [S^1;\ S^1] \approx \mathbf{Z},$$

а три нечетные перестановки соответствуют другой образующей этой группы. Следовательно, множество $[K_1;\ K_2]$ состоит из семи элементов, а образ отображения

$$[K_1;\ K_2] \to [|K_1|;\ |K_2|]$$

— из трех элементов.

Этот пример показывает, что симплициальные отображения, определяющие гомотопные непрерывные отображения, не обязаны принадлежать одному и тому же классу сопряженности. Из следующей теоремы видно, что конечный симплициальный комплекс можно подразделить так, чтобы гомотопные отображения пространства этого комплекса допускали симплициальные аппроксимации отображениями, принадлежащими одному и тому же классу сопряженности. Этот результат представляет собой аналог теоремы о симплициальной аппроксимации для гомотопий.

6. Теорема. *Пусть отображения* $f, f'\colon (|K_1|, |L_1|) \to (|K_2|, |L_2|)$, *где* K_1 — *конечный комплекс, гомотопны. Тогда существует такое число* N, *что отображения* f *и* f' *обладают симплициальными аппроксимациями соответственно*

$$\varphi, \varphi'\colon (\mathrm{sd}^N K_1,\ \mathrm{sd}^N L_1) \to (K_2,\ L_2),$$

принадлежащими одному и тому же классу сопряженности.

Доказательство. Пусть $F\colon (|K_1| \times I, |L_1| \times I) \to (|K_2|, |L_2|)$ — гомотопия от f до f'. Поскольку пространство $|K_1|$ компактно, существует последовательность точек $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = 1$ единичного интервала I, обладающая следующим свойством: если $\alpha \in |K_1|$ и $i = 1, 2, \ldots, n$, то найдется такая вершина $v \in K_2$, что обе точки $F(\alpha, t_{i-1})$ и $F(\alpha, t_i)$ принадлежат $\mathrm{st}\, v$. Пусть отображение $f_i\colon\ (|K_1|,\ |L_1|) \to (|K_2|,\ |L_2|)$ определено равенством $f_i(\alpha) = F(\alpha,\ t_i)$. Тогда $f = f_0$ и $f' = f_n$. Для $i = 1, 2, \ldots, n$ множества

$$\mathcal{U}_i = \{f_i^{-1}(\mathrm{st}\, v) \cap f_{i-1}^{-1}(\mathrm{st}\, v) \mid v \in K_2\}$$

образуют открытое покрытие пространства $|K_1|$. В качестве N возьмем достаточно большое число, для которого комплекс $\mathrm{sd}^N K_1$

более мелкий, чем покрытие $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, \ldots, \mathcal{U}_n$ (согласно теореме 3.3.14, такое число N существует). Пусть φ_i $(i=1, 2, \ldots, n)$ — отображение множества вершин комплекса $\operatorname{sd}^N K_1$ в множество вершин комплекса K_2, такое, что

$$f_i(\operatorname{st} v) \cup f_{i-1}(\operatorname{st} v) \subset \operatorname{st} \varphi_i(v)$$

для каждой вершины $v \in K_1$ (отображение φ_i существует, поскольку комплекс $\operatorname{sd}^N K_1$ более мелкий, чем покрытие $\{\mathcal{U}_i\}$). По теореме 3.4.3 отображение

$$\varphi_i\colon (\operatorname{sd}^N K_1, \operatorname{sd}^N L_1) \to (K_2, L_2)$$

является симплициальной аппроксимацией отображений f_i и f_{i-1}. Поскольку φ_i и φ_{i+1} — симплициальные аппроксимации отображения f_i, из леммы 4 вытекает, что φ_i и φ_{i+1} — сопряженные отображения $(i=1, 2, \ldots, n-1)$. Следовательно, $\varphi_1 \sim \varphi_n$, φ_1 — симплициальная аппроксимация отображения $f_0=f$, а φ_n — отображения $f_n=f'$. ■

В отличие от теоремы о симплициальной аппроксимации эта теорема явно неверна, если комплекс K_1 не является конечным. А именно если заданы гомотопные отображения $f, f'\colon |K_1| \to |K_2|$, то совсем не обязательно найдется подразделение K_1' комплекса K_1, для которого f и f' обладают симплициальными аппроксимациями $K_1' \to K_2$, принадлежащими одному и тому же классу сопряженности.

7. Пример. Пусть $K_1=K_2$ — симплициальный комплекс из примера 3.1.8. Пространство этого комплекса гомеоморфно $\mathbf{R}$. Пусть $\varphi\colon K_1 \to K_2$ — тождественное симплициальное отображение, и пусть $\varphi'\colon K_1 \to K_2$ — постоянное отображение, переводящее каждую вершину комплекса K_1 в отмеченную вершину 0 комплекса K_2. Поскольку прямая $\mathbf{R}$ стягиваема, $|\varphi| \simeq |\varphi'|$. Однако если K_1' — подразделение комплекса K_1, то симплициальная аппроксимация $\psi\colon K_1' \to K_2$ отображения $|\varphi|$ должна быть отображением на все вершины комплекса K_2, а симплициальная аппроксимация $\psi'\colon K_1' \to K_2$ отображения $|\varphi'|$ должна быть постоянным отображением в 0. Поскольку образы двух сопряженных отображений содержат оба либо конечное, либо бесконечное множество вершин, ψ и ψ' не могут принадлежать одному и тому же классу сопряженности.

Мы покажем, что если K_1 — конечный комплекс, то множество гомотопических классов отображений $[|K_1|, |L_1|; |K_2|, |L_2|]$ является пределом прямого спектра классов сопряженности

$$[\operatorname{sd}^n K_1, \operatorname{sd}^n L_1; K_2, L_2].$$

Заметим, что существуют симплициальные аппроксимации $(\mathrm{sd}\,K_1, \mathrm{sd}\,L_1) \to (K_1, L_1)$ тождественного отображения $(|\mathrm{sd}\,K_1|, |\mathrm{sd}\,L_1|) \subset (|K_1|, |L_1|)$ (следствие 3.4.7) и любые две из них являются сопряженными (лемма 4). Поскольку композиции сопряженных симплициальных отображений сопряжены (лемма 1), существует корректно определенное отображение

$$sd\colon [K_1, L_1; K_2, L_2] \to [\mathrm{sd}\,K_1, \mathrm{sd}\,L_1; K_2, L_2],$$

заданное соотношением

$$sd[\varphi] = [\varphi\lambda],$$

где $\lambda\colon (\mathrm{sd}\,K_1, \mathrm{sd}\,L_1) \to (K_1, L_1)$ — какая-нибудь симплициальная аппроксимация тождественного отображения $(|\mathrm{sd}\,K_1|, |\mathrm{sd}\,L_1|) \subset (|K_1|, |L_1|)$, а $\varphi\colon (K_1, L_1) \to (K_2, L_2)$ — произвольное симплициальное отображение. Итерируя это построение, получаем последовательность

$$\ldots \to [\mathrm{sd}^n K_1, \mathrm{sd}^n L_1; K_2, L_2] \xrightarrow{sd} [\mathrm{sd}^{n+1} K_1, \mathrm{sd}^{n+1} L_1; K_2, L_2] \to \ldots,$$

которая начинается слева множеством $[K_1, L_1; K_2, L_2]$ и распространяется вправо до бесконечности. Предел прямого спектра $\varinjlim\{\mathrm{sd}^n K_1, \mathrm{sd}^n L_1; K_2, L_2]\}$ представляет собой функтор от двух аргументов, контравариантный по (K_1, L_1) и ковариантный по (K_2, L_2). Для конечного комплекса K_1 этот функтор естественно эквивалентен функтору $[|K_1|, |L_1|; |K_2|, |L_2|]$.

8. Теорема. *Если K_1 — конечный симплициальный комплекс, то имеет место естественная эквивалентность*

$$\varinjlim\{[\mathrm{sd}^n K_1, \mathrm{sd}^n L_1; K_2, L_2]\} \approx [|K_1|, |L_1|; |K_2|, |L_2|].$$

Доказательство. Отображение предела прямого спектра в множество $[|K_1|, |L_1|; |K_2|, |L_2|]$ определяется последовательностью функций

$$f_n\colon [\mathrm{sd}^n K_1, \mathrm{sd}^n L_1; K_2, L_2] \to [|K_1|, |L_1|; |K_2|, |L_2|]$$

$(n \geqslant 0)$, такой, что $f_n = f_{n+1} \circ sd$ для $n \geqslant 0$. Для отображения $\varphi\colon (\mathrm{sd}^n K_1, \mathrm{sd}^n L_1) \to (K_2, L_2)$ последовательность $\{f_n\}$ определяется по формуле $f_n[\varphi] = [|\varphi|]$. В самом деле, если

$$\lambda_n\colon (\mathrm{sd}^{n+1} K_1, \mathrm{sd}^{n+1} L_1) \to (\mathrm{sd}^n K_1, \mathrm{sd}^n L_1)$$

является симплициальной аппроксимацией тождественного отображения

$$(|\mathrm{sd}^{n+1} K_1|, |\mathrm{sd}^{n+1} L_1|) \subset (|\mathrm{sd}^n K_1|, |\mathrm{sd}^n L_1|),$$

то, согласно лемме 3.4.2, $|\lambda_n| \simeq 1$ и

$$f_{n+1} sd[\varphi] = [|\varphi\lambda_n|] \simeq [|\varphi|] = f_n[\varphi].$$

Последовательность $\{f_n\}$ определяет естественное отображение

$$f\colon \varinjlim\{[\mathrm{sd}^n K_1,\ \mathrm{sd}^n L_1;\ K_2,\ L_2]\} \to [\,|K_1|,\ |L_1|;\ |K_2|,\ |L_2|\,].$$

Покажем, что отображение f биективно.

Из теоремы о симплициальной аппроксимации легко выводится, что последовательность $\{f_n\}$ удовлетворяет условию (a) теоремы 1.3 введения. Действительно, если $g\colon (|K_1|,\ |L_1|) \to (|K_2|,\ |L_2|)$ — некоторое отображение, а $\varphi\colon (\mathrm{sd}^n K_1,\ \mathrm{sd}^n L_1) \to (K_2,\ L_2)$ — его симплициальная аппроксимация, то $|\varphi| \simeq g$ и

$$f_n[\varphi] = [\,|\varphi|\,] = [g].$$

Покажем, что последовательность $\{f_n\}$ удовлетворяет и условию (b) указанной теоремы. Пусть отображения

$$\varphi,\ \varphi'\colon (\mathrm{sd}^n K_1,\ \mathrm{sd}^n L_1) \to (K_2,\ L_2)$$

таковы, что $|\varphi| \simeq |\varphi'|$. Согласно теореме 6, существует такое число $m \geqslant n$, что $|\varphi|$ и $|\varphi'|$ обладают симплициальными аппроксимациями

$$\psi,\ \psi'\colon (\mathrm{sd}^m K_1,\ \mathrm{sd}^m L_1) \to (K_2,\ L_2)$$

из одного класса сопряженности. Пусть отображение

$$\lambda_{m,\,n}\colon (\mathrm{sd}^m K_1,\ \mathrm{sd}^m L_1) \to (\mathrm{sd}^n K_1,\ \mathrm{sd}^n L_1)$$

является композицией $\lambda_{m,\,n} = \lambda_n \circ \lambda_{n+1} \circ \ldots \circ \lambda_{m-1}$. Тогда $\lambda_{m,\,n}$ — симплициальная аппроксимация тождественного отображения и, поскольку φ — симплициальная аппроксимация отображения $|\varphi|$, $\varphi\lambda_{m,\,n}$ — также симплициальная аппроксимация отображения $|\varphi|$ (следствие 3.4.5). По лемме 4 отображение $\varphi\lambda_{m,\,n}$ сопряжено с ψ. Аналогично, отображение $\varphi'\lambda_{m,\,n}$ сопряжено с ψ'. Поскольку ψ и ψ' принадлежат одному и тому же классу сопряженности, то же верно для $\varphi\lambda_{m,\,n}$ и $\varphi'\lambda_{m,\,n}$. Это означает, что в множестве $[\mathrm{sd}^m K_1,\ \mathrm{sd}^m L_1;\ K_2,\ L_2]$ выполняется равенство $sd^{m-n}[\varphi] = sd^{m-n}[\varphi']$. ■

Для конечных симплициальных комплексов K_1 только что доказанная теорема позволяет получить алгебраическое описание множества $[\,|K_1|,\ |L_1|;\ |K_2|,\ |L_2|\,]$. В качестве приложения заметим, что если K_2 — счетный комплекс, то существует лишь счетное число симплициальных отображений $(\mathrm{sd}^n K_1,\ \mathrm{sd}^n L_1) \to (K_2,\ L_2)$ при $n \geqslant 0$. Следовательно, множество $[\mathrm{sd}^n K_1,\ \mathrm{sd}^n L_1;\ K_2,\ L_2]$ счетно при $n \geqslant 0$. Поскольку предел прямого спектра счетных множеств сам является счетным множеством, мы получаем

9. Следствие. *Пусть $(X,\ A)$ и $(Y,\ B)$ — полиэдральные пары, причем пространство X компактно, а Y — пространство счетного комплекса. Тогда $[X,\ A;\ Y,\ B]$ — счетное множество.* ■

§ 6. Группоид ломаных

В предыдущем параграфе было показано, что для конечного комплекса K_1 множество $[|K_1|; |K_2|]$ совпадает с пределом по подразделениям комплекса K_1, причем комплекс K_2 не подразделяется. В частности, для любого симплициального комплекса K множество классов путей в $|K|$ от вершины v_0 до вершины v_1 определяется симплициальной структурой комплекса K. В настоящем параграфе мы уточняем смысл этого высказывания, вводя симплициальный аналог фундаментального группоида топологического пространства. В следующем параграфе мы опишем фундаментальную группу полиэдра в терминах образующих и соотношений между ними.

Ребром e симплициального комплекса K называется упорядоченная пара вершин (v, v'), принадлежащих некоторому одному и тому же симплексу s из K. Первая вершина v называется *началом* ребра e ($\operatorname{orig} e$), а вторая v' — *концом* ребра e ($\operatorname{end} e$). *Ломаной* ζ в K называется конечная непустая последовательность $e_1, e_2, \ldots, e_r$ ребер из K, такая, что $\operatorname{end} e_i = \operatorname{orig} e_{i+1}$ при $i = 1, \ldots, r-1$. Положим по определению $\operatorname{orig}\zeta = \operatorname{orig} e_1$ и $\operatorname{end}\zeta = \operatorname{end} e_r$. *Замкнутой ломаной* в вершине $v_0 \in K$ называется ломаная ζ, такая, что $\operatorname{orig}\zeta = v_0 = \operatorname{end}\zeta$. Если ζ_1 и ζ_2 — ломаные в K, такие, что $\operatorname{end}\zeta_1 = \operatorname{orig}\zeta_2$, то их *произведением* $\zeta_1\zeta_2$ называется ломаная, состоящая из последовательности ребер ζ_1, за которыми идет последовательность ребер ζ_2. При этом $\operatorname{orig}\zeta_1\zeta_2 = \operatorname{orig}\zeta_1$ и $\operatorname{end}\zeta_1\zeta_2 = \operatorname{end}\zeta_2$. Ясно, что если $\operatorname{end}\zeta_1 = \operatorname{orig}\zeta_2$ и $\operatorname{end}\zeta_2 = \operatorname{orig}\zeta_3$, то $\zeta_1(\zeta_2\zeta_3) = (\zeta_1\zeta_2)\zeta_3$. Таким образом, произведение ломаных ассоциативно. Однако для этого произведения не существует ни левого, ни правого единичного элемента. Чтобы получить категорию (как это было сделано для путей в топологическом пространстве), необходимо ввести на множестве ломаных комплекса K отношение эквивалентности.

Две ломаные ζ и ζ' в K называются *просто эквивалентными*, если существуют вершины v, v' и v'' комплекса K, принадлежащие одному и тому же симплексу, такие, что неупорядоченная пара $\{\zeta, \zeta'\}$ есть одна из следующих пар:

неупорядоченная пара $\{(v, v''), (v, v')(v', v'')\}$;
неупорядоченная пара $\{\zeta_1(v, v''), \zeta_1(v, v')(v', v'')\}$ для некоторой ломаной $\zeta_1 \in K$ с $\operatorname{end}\zeta_1 = v$;
неупорядоченная пара $\{(v, v'')\zeta_2, (v, v')(v', v'')\zeta_2\}$ для некоторой ломаной $\zeta_2 \in K$ с $\operatorname{orig}\zeta_2 = v''$;
неупорядоченная пара $\{\zeta_1(v, v'')\zeta_2, \zeta_1(v, v')(v', v'')\zeta_2\}$ для некоторых ломаных ζ_1 и ζ_2 из K с $\operatorname{end}\zeta_1 = v$ и $\operatorname{orig}\zeta_2 = v''$.

Две ломаные ζ и ζ' называются *эквивалентными* (обозначается $\zeta \sim \zeta'$), если существует такая конечная последовательность ломаных $\zeta_0, \zeta_1, \ldots, \zeta_n$, что $\zeta = \zeta_0$ и $\zeta' = \zeta_n$, а ζ_{i-1} и ζ_i просто эквивалентны при $i = 1, \ldots, n-1$. Мы получили отношение эквивалентности.

Легко проверить следующие утверждения:

1. *Если* $\zeta \sim \zeta'$, *то* ζ *и* ζ' *имеют одно и то же начало и один и тот же конец.* ■

2. *Если* $\zeta_1 \sim \zeta_1'$, $\zeta_2 \sim \zeta_2'$ *и* $\operatorname{end} \zeta_1 = \operatorname{orig} \zeta_2$, *то* $\zeta_1\zeta_2 \sim \zeta_1'\zeta_2'$. ■

3. *Если* $\operatorname{orig} \zeta = v_1$ *и* $\operatorname{end} \zeta = v_2$, *то* $(v_1, v_1)\zeta \sim \zeta \sim \zeta(v_2, v_2)$. ■

Если ζ — ломаная, то символом $[\zeta]$ обозначается ее класс эквивалентности. Из утверждения 1 следует, что корректно определены $\operatorname{orig}[\zeta]$ и $\operatorname{end}[\zeta]$ ($\operatorname{orig}[\zeta] = \operatorname{orig} \zeta$ и $\operatorname{end}[\zeta] = \operatorname{end} \zeta$). Из утверждения 2 следует, что корректно определена композиция $[\zeta_1] \circ [\zeta_2] = [\zeta_1\zeta_2]$, если $\operatorname{end} \zeta_1 = \operatorname{orig} \zeta_2$. Из сказанного получаем следующий симплициальный аналог теоремы 1.7.7:

4. Теорема. *Существует категория* $\mathscr{E}(K)$, *объектами которой являются вершины комплекса* K, *морфизмами из* v_1 *в* v_0 — *классы эквивалентности ломаных* $[\zeta]$, *для которых* $\operatorname{orig}[\zeta] = v_0$, $\operatorname{end}[\zeta] = v_1$, *а композицией морфизмов — произведение* $[\zeta_1] \circ [\zeta_2]$.

Доказательство. Существование тождественных морфизмов следует из утверждения 3, а ассоциативность композиции является следствием ассоциативности произведения ломаных. ■

Покажем теперь, что категория $\mathscr{E}(K)$ является группоидом. Если $e = (v, v')$ — ребро комплекса K, то положим по определению $e^{-1} = (v', v)$, а если $\zeta = e_1 \ldots e_r$ — ломаная в K, то пусть $\zeta^{-1} = e_r^{-1} \ldots e_1^{-1}$. Легко проверить следующие утверждения:

5. $(\zeta^{-1})^{-1} = \zeta$. ■

6. $\operatorname{orig} \zeta^{-1} = \operatorname{end} \zeta$ *и* $\operatorname{end} \zeta^{-1} = \operatorname{orig} \zeta$. ■

7. *Если* $\zeta_1 \sim \zeta_2$, *то* $\zeta_1^{-1} \sim \zeta_2^{-1}$. ■

8. *Если* $\operatorname{orig} \zeta = v_1$ *и* $\operatorname{end} \zeta = v_2$, *то* $\zeta\zeta^{-1} \sim (v_1, v_1)$ *и* $\zeta^{-1}\zeta \sim (v_2, v_2)$. ■

Отсюда следует, что в категории $\mathscr{E}(K)$ выполняется равенство $[\zeta^{-1}] = [\zeta]^{-1}$, и поэтому категория $\mathscr{E}(K)$ представляет собой группоид. Он называется *группоидом ломаных* комплекса K. Если v_0 — вершина в K, то $[\zeta] \circ [\zeta']$ — групповая операция на множестве элементов из $\mathscr{E}(K)$, имеющих одно и то же начало и конец v_0. Соответствующая группа называется *группой ломаных комплекса* K *с отмеченной вершиной* v_0 и обозначается $E(K, v_0)$.

Сравним $\mathscr{E}(K)$ (и $E(K, v_0)$) с $\mathscr{P}(|K|)$ (и $\pi(|K|, v_0)$). Пусть I_r ($r \geqslant 1$) — подразделение отрезка I на r одинаковых подинтервалов, т. е. симплициальный комплекс

$$I_r = \left\{\left\{\frac{i}{r}\right\}\middle| 0 \leqslant i \leqslant r\right\} \cup \left\{\left\{\frac{i-1}{r}, \frac{i}{r}\right\}\middle| 1 \leqslant i \leqslant r\right\}.$$

Если задана ломаная $\zeta = e_1 \dots e_r$ комплекса K, образованная r ребрами, то определим симплициальное отображение $\varphi_\zeta\colon I_r \to K$, полагая

$$\varphi_\zeta\left(\frac{i}{r}\right) = \begin{cases} \operatorname{orig} e_{i+1}, & 0 \leqslant i \leqslant r-1, \\ \operatorname{end} e_i, & 1 \leqslant i \leqslant r. \end{cases}$$

Тогда $|\varphi_\zeta|\colon I \to |K|$ есть путь в $|K|$. Легко проверить следующие утверждения:

9. $\operatorname{orig}|\varphi_\zeta| = \operatorname{orig}\zeta$ *и* $\operatorname{end}|\varphi_\zeta| = \operatorname{end}\zeta$. ■

10. *Если* $\zeta \sim \zeta'$, *то* $|\varphi_\zeta| \simeq |\varphi_{\zeta'}| \operatorname{rel} \dot{I}$. ■

11. *Если* $\operatorname{end}\zeta_1 = \operatorname{orig}\zeta_2$, *то* $|\varphi_{\zeta_1\zeta_2}| \simeq |\varphi_{\zeta_1}| * |\varphi_{\zeta_2}| \operatorname{rel} \dot{I}$. ■

Отсюда следует, что можно определить естественное преобразование ρ группоида $\mathscr{E}(K)$ в группоид $\mathscr{P}(|K|)$, сопоставляющее вершине $v \in K$ точку $v \in |K|$, а морфизму $[\zeta]$ в $\mathscr{E}(K)$ морфизм $[|\varphi_\zeta|]$ в $\mathscr{P}(|K|)$. Мы докажем, что для вершин $v_0, v_1 \in K$ преобразование ρ определяет биективное соответствие

$$\rho\colon \hom_{\mathscr{E}}(v_1, v_0) \approx \hom_{\mathscr{P}}(v_1, v_0).$$

Это можно вывести из теоремы 3.5.8, но имеется также и прямое доказательство (которое не кажется нам более длинным, чем доказательство, основанное на теореме 3.5.8).

12. Лемма. *Для любых вершин* $v_0, v_1 \in K$ *отображение*

$$\rho\colon \hom_{\mathscr{E}}(v_1, v_0) \to \hom_{\mathscr{P}}(v_1, v_0)$$

сюръективно.

Доказательство. Пусть $\omega\colon I \to |K|$ — путь от v_0 до v_1. Поскольку $I = |I_1|$, из теоремы 3.4.8 вытекает, что существует симплициальное отображение

$$\varphi\colon \operatorname{sd}^n I_1 \to K,$$

являющееся симплициальной аппроксимацией пути ω. Так как $\operatorname{sd}^n I_1 = I_{2^n}$, то существует ломаная $\zeta = e_1 \dots e_{2^n}$, определяемая равенством $e_i = (\varphi((i-1)/2^n), \varphi(i/2^n))$, такая, что $\varphi = \varphi_\zeta$. Поскольку $\varphi(0) = \omega(0)$ и $\varphi(1) = \omega(1)$, из леммы 3.4.2 следует, что $|\varphi| \simeq \omega \operatorname{rel} \dot{I}$. Значит, $[\omega] = [|\varphi|] = [|\varphi_\zeta|] = \rho[\zeta]$. ■

Для доказательства того, что отображение ρ инъективно, нам понадобятся следующие утверждения:

13. Лемма. *Для любого симплекса s всякие две ломаные в $\bar{s}$ с общим началом и общим концом эквивалентны.*

Доказательство. Достаточно доказать, что если ζ — какая-нибудь ломаная в $\bar{s}$ от $\operatorname{orig}\zeta = v$ до $\operatorname{end}\zeta = v'$, то ζ эквивалентна ломаной, состоящей из единственного ребра (v, v'). Это доказывается индукцией по числу ребер, образующих ломаную ζ. ■

14. Лемма. *Пусть ломаные ζ и ζ' в K таковы, что φ_ζ, $\varphi_{\zeta'}$: $I_r \to K$ — сопряженные отображения. Тогда $\zeta \sim \zeta'$.*

Доказательство. Пусть $\zeta = e_1 \ldots e_r$, где $e_i = (v_{i-1}, v_i)$, и пусть $\zeta' = e'_1 \ldots e'_r$, где $e'_i = (v'_{i-1}, v'_i)$. Положим $\bar{e}_i = (v_i, v'_i)$ при $0 \leqslant i \leqslant r$ ($\bar{e}_i$ — ребро в K, поскольку φ_ζ и $\varphi_{\zeta'}$ — сопряженные отображения). Из определения эквивалентности получаем, что

$$\zeta \sim e_1\bar{e}_1\bar{e}_1^{-1}e_2\bar{e}_2 \ldots \bar{e}_{r-1}^{-1}e_r.$$

В силу сопряженности отображений φ_ζ и $\varphi_{\zeta'}$ для каждого индекса $1 \leqslant i \leqslant r$ существует некоторый симплекс s_i из K, такой, что все ребра e_i, e'_i, $\bar{e}_{i-1}$ и $\bar{e}_i$ принадлежат $\bar{s}_i$. Из леммы 13 следует, что $e_1\bar{e}_1 \sim e'_1$, $\bar{e}_{i-1}^{-1}e_i\bar{e}_i \sim e'_i$ при $2 \leqslant i \leqslant r-1$ и $\bar{e}_{r-1}^{-1}e_r \sim e'_r$. Значит,

$$e_1\bar{e}_1\bar{e}_1^{-1}e_2\bar{e}_2 \ldots \bar{e}_{r-1}^{-1}e_r \sim e'_1e'_2 \ldots e'_r = \zeta'. \ ■$$

15. Лемма. *Пусть $\zeta = e_1 \ldots e_r$ — ломаная в K, и пусть λ: $I_{2r} \to I_r$ — симплициальная аппроксимация тождественного отображения $|I_{2r}| \subset |I_r|$. Тогда $\varphi_\zeta\lambda = \varphi_{\zeta'}$: $I_{2r} \to K$ для некоторой ломаной $\zeta' = e'_1 \ldots e'_{2r}$ и $\zeta \sim \zeta'$.*

Доказательство. Пусть $e_i = (v_{i-1}, v_i)$ при $0 \leqslant i \leqslant r$. Тогда $e'_{2i-1}e'_{2i} = (v_{i-1}, \bar{v}_i)(\bar{v}_i, v_i)$ для вершины $\bar{v}_i$, совпадающей либо с v_{i-1}, либо с v_i. Из леммы 13 следует, что $e'_{2i-1}e'_{2i} \sim e_i$ и $\zeta' \sim \zeta$. ■

Теперь мы готовы к доказательству основного результата о группоиде ломаных.

16. Теорема. *Для вершин v_0, $v_1 \in K$ отображение*

$$\rho: \hom_{\mathscr{E}}(v_1, v_0) \to \hom_{\mathscr{P}}(v_1, v_0)$$

биективно.

Доказательство. В силу леммы 12 нам осталось лишь убедиться в том, что отображение ρ инъективно. Предположим, что ломаные ζ и ζ' от v_0 до v_1 таковы, что $|\varphi_\zeta| \simeq |\varphi_{\zeta'}| \operatorname{rel} \dot{I}$. Присоединяя достаточное количество тривиальных путей (v_1, v_1) к концу ζ или к концу ζ', мы можем заменить ζ и ζ' эквивалентными ломаными, имеющими одинаковое число ребер. Следовательно, не теряя общности, можно считать, что ζ и ζ' состоят из r ребер каждая. Тогда отображения $\varphi_\zeta, \varphi_{\zeta'}: I_r \to K$ таковы, что $|\varphi_\zeta| \simeq |\varphi_{\zeta'}| \operatorname{rel} \dot{I}$. По теореме 3.5.6 существует такое число m, что если λ: $\operatorname{sd}^m I_r \to I_r$ — симплициальная аппроксимация тождественного отображения, то отображения $\varphi_\zeta\lambda$ и $\varphi_{\zeta'}\lambda$ принадлежат одному классу сопряженности. Значит, $\varphi_\zeta\lambda = \varphi_{\zeta_1}$ и $\varphi_{\zeta'}\lambda = \varphi_{\zeta'_1}$ для ломаных ζ_1 и ζ'_1 из K. Из леммы 15 (и индукцией по m) выводим, что $\zeta \sim \zeta_1$ и $\zeta' \sim \zeta'_1$. Из леммы 14 следует, что $\zeta_1 \sim \zeta'_1$. Значит, $\zeta \sim \zeta'$. ■

Если φ: $K_1 \to K_2$ — симплициальное отображение, то можно построить ковариантный функтор $\varphi_\#$: $\mathscr{E}(K_1) \to \mathscr{E}(K_2)$, полагая

$$\varphi_\# [\zeta] = [\varphi(\zeta)],$$

где $\varphi(\zeta) = (\varphi(v_0), \varphi(v_1)) \dots (\varphi(v_{r-1}), \varphi(v_r))$, если $\zeta = (v_0, v_1) \dots$ $\dots (v_{r-1}, v_r)$. Легко проверить коммутативность следующей диаграммы:

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{E}(K_1) \arrow[r, "\varphi_\#"] \arrow[d, "\rho"'] & \mathscr{E}(K_2) \arrow[d, "\rho"] \\
\mathscr{P}(|K_1|) \arrow[r, "|\varphi|_\#"] & \mathscr{P}(|K_2|)
\end{tikzcd}$$

Итак, мы имеем

17. Следствие. *На категории симплициальных комплексов K с отмеченной вершиной v_0 отображение ρ является естественной эквивалентностью ковариантных функторов $E(K, v_0)$ и $\pi(|K|, v_0)$.* ■

Заметим, что группоид $\mathscr{E}(K)$ определяется двумерным остовом комплекса K. Иначе говоря, ломаная комплекса K определяется парами вершин, где каждая пара принадлежит некоторому симплексу, а эквивалентность ломаных определяется тройками вершин, где каждая тройка принадлежит некоторому симплексу. Следовательно, $\mathscr{E}(K^2) \approx \mathscr{E}(K)$.

18. Следствие. *Для любого симплициального комплекса с отмеченной вершиной (K, v_0) вложение $K^2 \subset K$ индуцирует изоморфизм*

$$\pi(|K^2|, v_0) \approx \pi(|K|, v_0). \blacksquare$$

Если s — симплекс в K, то любые две его вершины принадлежат одной и той же компоненте группоида $\mathscr{E}(K)$. Следовательно, компоненты $\{E_j\}$ группоида $\mathscr{E}(K)$ определяют разбиение комплекса K на подкомплексы $\{K_j\}$, называемые *компонентами* комплекса K, которые определяются равенством $K_j = \{s \in K \mid s$ имеет вершину, принадлежащую $E_j\}$. Комплекс K называется *связным*, если он состоит ровно из одной компоненты.

19. Теорема. *Если $\{K_j\}$ — компоненты комплекса K, то $\{|K_j|\}$ — компоненты линейной связности пространства $|K|$.*

Доказательство. Если v — вершина комплекса K, то множество $\operatorname{st} v$ линейно связно и, следовательно, принадлежит той же самой компоненте линейной связности пространства $|K|$, что и v. Из теоремы 16 следует, что две вершины комплекса K тогда и только тогда принадлежат одной и той же компоненте группоида $\mathscr{P}(|K|)$, когда они принадлежат одной и той же компоненте группоида $\mathscr{E}(K)$. Следовательно, если $\{E_j\}$ — множество компонент группоида $\mathscr{E}(K)$, то компонентами линейной связности пространства $|K|$ являются множества $\{P_j\}$, определенные равенством $P_j = \bigcup \{\operatorname{st} v \mid v \in E_j\}$. Ясно, что $P_j = |K_j|$. ∎

§ 7. Графы

Мы покажем, как можно определить систему образующих и соотношения между ними для группы ломаных $E(K, v_0)$. Это даст нам метод нахождения образующих и соотношений для фундаментальной группы полиэдра. Поскольку каждая ломаная комплекса K является ломаной в одномерном остове комплекса K, мы начинаем с описания группы ломаных одномерного комплекса.

Одномерный симплициальный комплекс называется *графом*. Односвязный граф называется *деревом*.

1. Лемма. *Граф в том и только в том случае является деревом, когда он стягиваем*[1]).

Доказательство. Поскольку стягиваемое пространство односвязно, стягиваемый граф является деревом. Обратно, пусть K — дерево, и пусть α_0 — некоторая точка из $|K|$. Определим гомотопию $F\colon |K| \times I \to |K|$ тождественного отображения 1 пространства $|K|$ в постоянное отображение c пространства $|K|$ в точку α_0. Из линейной связности пространства $|K|$ вытекает, что для каждой вершины v из K существует путь ω_v в $|K|$ от v

[1]) Симплициальный комплекс называется *стягиваемым*, если его пространство стягиваемо. — *Прим. перев.*

до α_0. Определим теперь отображение F на $v\times I$ равенством $F(v, t)=\omega_v(t)$. Для каждого одномерного симплекса s из K отображение F определено на подмножестве $(|s|\times 0)\cup(|s|\times 1)\cup(|\dot s|\times I)$ пространства $|s|\times I$. Поскольку пространство $|K|$ односвязно, а пара $(|s|\times I,\ (|s|\times 0)\cup(|s|\times 1)\cup(|\dot s|\times I))$ гомеоморфна паре (E^2, S^1), отображение F можно продолжить на $|s|\times I$. Таким способом мы получаем отображение $F\colon |K|\times I\to|K|$, ограничение которого на каждое подмножество вида $|s|\times I$ непрерывно. Следовательно, отображение F непрерывно и $F\colon 1\simeq c$. ∎

2. Лемма. *Пусть K — связный симплициальный комплекс. Тогда K содержит некоторое максимальное дерево и всякое максимальное дерево содержит все вершины комплекса K.*

Доказательство. Совокупность содержащихся в K деревьев частично упорядочена по включению. Пусть $\{K_j\}$ — некоторое линейно упорядоченное множество деревьев в K, и пусть $T=\bigcup K_j$. Покажем, что комплекс T является деревом. Поскольку все комплексы K_j одномерны, то и T одномерен. Так как $\{K_j\}$ — линейно упорядоченное множество деревьев, то каждый конечный подкомплекс из T содержится в некотором K_j. Покажем, что комплекс T односвязен. Пусть задано некоторое отображение $f\colon S^i\to|T|$ $(i=0$ или $1)$. Множество $f(S^i)$ компактно и, следовательно, содержится в некотором $|K_j|$. Поскольку пространство $|K_j|$ односвязно, отображение $f\colon S^i\to|K_j|$ можно продолжить до отображения $f'\colon E^{i+1}\to|K_j|\subset|T|$. Следовательно, пространство $|T|$ односвязно.

Итак, мы получаем, что всякое линейно упорядоченное множество деревьев в K имеет в качестве своей верхней грани снова дерево. Лемма Цорна обеспечивает существование максимальных деревьев в K. Если T — некоторое максимальное дерево в K, содержащее не все вершины комплекса K, то из связности K вытекает существование одномерного симплекса $\{v_1, v_2\}\in K$, такого, что $v_1\in T$, $v_2\notin T$. Пусть $T_1=T\cup\{\{v_2\}, \{v_1, v_2\}\}$. Поскольку вершина v_1 является сильным деформационным ретрактом отрезка $|\{v_1, v_2\}|$, пространство $|T|$ является сильным деформационным ретрактом пространства $|T_1|$. Следовательно, $|T_1|$ стягиваемо, и, значит, дерево T_1 строго больше, чем T, вопреки максимальности T. ∎

Из леммы 2 следует, что если K — связный комплекс, а T — некоторое максимальное дерево в K, то комплекс $K-T$ образован симплексами размерности $\geqslant 1$. Поскольку пространство $|T|$ стягиваемо, каждая ломаная в K, как мы увидим ниже, определяется своей частью в $K-T$. Это оправдывает следующее определение:

Пусть T — максимальное дерево связного комплекса K. Обозначим через G группу, порожденную ребрами (v, v') комплекса K, на образующие которой налагаются следующие соотношения:

(a) если (v, v') — ребро из T, то $(v, v') = 1$;

(b) если v, v' и v'' — вершины некоторого симплекса комплекса K, то $(v, v')(v', v'') = (v, v'')$.

3. Теорема. *В этих обозначениях имеет место изоморфизм* $E(K, v_0) \approx G$.

Доказательство. Поскольку комплекс T связен и содержит все вершины из K, для каждой вершины $v \in K$ существует ломаная ζ_v в T, такая, что $\operatorname{orig}\zeta_v = v_0$ и $\operatorname{end}\zeta_v = v$. Если (v, v') — ребро из K, то $\zeta_v(v, v')\zeta_{v'}^{-1}$ — замкнутая ломаная в K в вершине v_0. Следовательно, существует гомоморфизм α свободной группы F, порожденной ребрами комплекса K, в группу $E(K, v_0)$, определенный равенством $\alpha(v, v') = \left[\zeta_v(v, v')\zeta_{v'}^{-1}\right]$.

Покажем, что гомоморфизм α можно пропустить через группу G. Если (v, v') — какое-нибудь ребро из T, то $\zeta_v(v, v')\zeta_{v'}^{-1}$ — замкнутая ломаная в T. Поскольку комплекс T односвязен, $\left[\zeta_v(v, v')\zeta_{v'}^{-1}\right] = 1$, и α переводит соотношения типа (a) в единицу. Если v, v' и v'' — вершины некоторого симплекса из K, то

$$\left[\zeta_v(v, v')\zeta_{v'}^{-1}\right] \circ \left[\zeta_{v'}(v', v'')\zeta_{v''}^{-1}\right] = \\ = \left[\zeta_v(v, v')(v', v'')\zeta_{v''}^{-1}\right] = \left[\zeta_v(v, v'')\zeta_{v''}^{-1}\right].$$

Следовательно, $\alpha((v, v')(v', v'')) = \alpha(v, v'')$, и, значит, существует гомоморфизм $\alpha'\colon G \to E(K, v_0)$, такой, что $\alpha'(v, v') = \alpha(v, v') = \left[\zeta_v(v, v')\zeta_{v'}^{-1}\right]$.

Для доказательства того, что α' является изоморфизмом, построим обратный гомоморфизм $\beta'\colon E(K, v_0) \to G$ следующим образом. Для каждой замкнутой ломаной $\zeta = e_1 \ldots e_r$ положим $\beta(\zeta) = e_1 \ldots e_r$, где правая часть рассматривается как произведение в группе G. Если ломаные ζ и ζ' просто эквивалентны, то $\beta(\zeta) = \beta(\zeta')$ по условию (b). Следовательно, существует такой гомоморфизм $\beta'\colon E(K, v_0) \to G$, что $\beta'[\zeta] = \beta(\zeta)$.

Покажем, что гомоморфизмы α' и β' взаимно обратны. Если задана ломаная $\zeta = (v_0, v_1)(v_1, v_2) \ldots (v_r, v_0)$, то $\alpha'\beta'[\zeta] = [\zeta']$, где

$$\zeta' = \zeta_{v_0}(v_0, v_1)\zeta_{v_1}^{-1}\zeta_{v_1}(v_1, v_2)\zeta_{v_2}^{-1} \ldots \zeta_{v_r}(v_r, v_0)\zeta_{v_0}^{-1} \sim \\ \sim \zeta_{v_0}(v_0, v_1)(v_1, v_2) \ldots (v_r, v_0)\zeta_{v_0}^{-1}.$$

Поскольку ζ_{v_0} — замкнутая ломаная в односвязном комплексе T, имеем $\zeta_{v_0} \sim 1$ и $\zeta' \sim \zeta$. Следовательно, $\alpha'\beta'$ — тождественный гомоморфизм группы $E(K, v_0)$.

Рассмотрим элемент $\beta'\alpha'(v, v') = \beta(\zeta_v)(v, v')\beta(\zeta_{v'}^{-1})$. Поскольку ζ_v и $\zeta_{v'}^{-1}$ — ломаные в T, они являются композициями ребер из T. В силу соотношений типа (а) оба элемента $\beta(\zeta_v)$ и $\beta(\zeta_{v'}^{-1})$ равны единице. Следовательно, $\beta'\alpha'(v, v') = (v, v')$ и, поскольку множество $\{(v, v')\}$ порождает группу G, $\beta'\alpha'$ — тождественный гомоморфизм группы G. ■

Если комплекс K конечен, то он имеет лишь конечное число ребер и группа G конечно порождена. При этом существует лишь конечное число соотношений типа (а) и (b). Таким образом, группа G представляется как факторгруппа конечно порожденной свободной группы по конечно порожденной подгруппе. Мы получили

4. Следствие. *Если K — конечный связный симплициальный комплекс, то группа $E(K, v_0)$ конечно копредставлена*[1]. ■

5. Следствие. *Если K — связный граф, то $E(K, v_0)$ — свободная группа. Если T — максимальное дерево в K, то образующие группы $E(K, v_0)$ находятся в биективном соответствии с одномерными симплексами подкомплекса $K - T$.*

Доказательство. Рассмотрим группу G. Ввиду соотношений типа (а) необходимо рассмотреть лишь те ребра из K, которые не содержатся в T. Но каждое такое ребро e соответствует упорядоченной паре вершин некоторого одномерного симплекса из $K - T$. Из соотношений типа (b) следует, что ребро с противоположной ориентацией соответствует элементу e^{-1} в G. Следовательно, группа G порождается всеми одномерными симплексами из $K - T$. Между этими образующими не может быть соотношений, поскольку если v, v' и v'' — вершины некоторого симплекса из $K - T$, то по крайней мере две из них совпадают. Если $v = v'$ или $v' = v''$, то соответствующее соотношение типа (b) вырождается в тривиальное соотношение $1(v', v'') = (v', v'')$ или $(v, v')\,1 = (v, v')$. Если $v = v''$, то соответствующим соотношением является соотношение $(v, v')(v', v) = 1$, которое в терминах наших образующих записывается как $ee^{-1} = 1$. ■

6. Пример. Пусть $J = \{j\}$ — некоторое множество, и пусть X — пространство с отмеченной точкой, являющееся суммой (в категории пространств с отмеченной точкой) окружностей $\{S_j^1\}_{j \in J}$

[1]) Определение копредставления см. в § 3 введения. — *Прим. ред.*

с отмеченной точкой. Каждую окружность S_j^1 можно триангулировать как край $\dot{s}_j$ двумерного симплекса $s_j = \{v_j, v_j', v_j''\}$, вершина v_j которого соответствует отмеченной точке в S_j^1. Тогда триангуляцией пространства X служит комплекс K с вершинами

$$\{v\} \cup \{v_j', v_j''\}_{j \in J}$$

и одномерными симплексами

$$\{\{v, v_j'\}\}_{j \in J} \cup \{\{v, v_j''\}\}_{j \in J} \cup \{\{v_j', v_j''\}\}_{j \in J}.$$

Пусть T — максимальное дерево в K, такое, что $K - T$ образовано семейством $\{\{v_j', v_j''\}\}_{j \in J}$. Из следствия 5 получаем, что $E(K, v)$ — свободная группа, образующие которой находятся в биективном соответствии с элементами множества J. Следовательно, имеет место изоморфизм группы $\pi(X, x_0)$ (где точка x_0 соответствует вершине v) и свободной группы, образующие которой биективно соответствуют элементам множества J.

7. Пример. Пусть X — дополнение на плоскости $\mathbf{R}^2$ к множеству, состоящему из p непересекающихся замкнутых кругов или точек. Тогда X имеет тот же гомотопический тип, что и сумма p окружностей с отмеченной точкой. Следовательно, фундаментальная группа пространства X является свободной группой с p образующими.

Для связных графов функтор фундаментальной группы реализует точное представление категории пространств этих графов и гомотопических классов отображений в терминах групп и гомоморфизмов. Справедлива следующая

8. Теорема. *Пусть K_1 и K_2 — связные графы, и пусть v_0 — вершина графа K_1. Тогда*

(a) *всякое непрерывное отображение $f\colon |K_1| \to |K_2|$ гомотопно такому непрерывному отображению $f'\colon |K_1| \to |K_2|$, что $f'(v_0)$ — вершина комплекса K_2;*

(b) *если v_0' — какая-нибудь вершина комплекса K_2, а $h\colon \pi(|K_1|, v_0) \to \pi(|K_2|, v_0')$ — произвольный гомоморфизм, то существует такое непрерывное отображение $f\colon (|K_1|, v_0) \to (|K_2|, v_0')$, что $h = f_{\#}$;*

(c) *пусть v_0' и v_0'' — вершины комплекса K_2, и пусть отображения $f_1, f_2\colon |K_1| \to |K_2|$ таковы, что $f_1(v_0) = v_0'$ и $f_2(v_0) = v_0''$. Тогда $f_1 \simeq f_2$ в том и только в том случае, когда существует такой* *путь* ω *в* $|K_2|$ *от* v_0' *до* v_0'', *что следующая диаграмма коммутативна*:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & \pi(|K_1|,\ v_0) \arrow[dl, "f_{1\#}"'] \arrow[dr, "f_{2\#}"] & \\ \pi(|K_2|,\ v_0') & & \pi(|K_2|,\ v_0'') \arrow[ll, "h_{[\omega]}"'] \end{tikzcd}$$

Доказательство. Поскольку комплекс K_2 связен, он и линейно связен, и утверждение (a) следует из того, что пара $(|K_1|,\ v_0)$ обладает свойством продолжения гомотопии относительно $|K_2|$ (согласно следствию 3.2.5).

Докажем (b). Пусть T — некоторое максимальное дерево в K_1. Пусть $\{s_j\}$ — симплексы комплекса $K_1 - T$. Для каждого индекса j через $e_j = (v_j,\ v_j')$ обозначим ребро, вершинами которого являются вершины симплекса s_j, взятые в некотором порядке. Для каждой вершины v из K_1 существует ломаная ζ_v в T от v_0 до v. Положим для каждого j

$$\omega_j = \left|\zeta_{v_j} e_j \zeta_{v_j'}^{-1}\right|.$$

Тогда $[\omega_j] \in \pi(|K_1|,\ v_0)$ и в силу следствий 5 и 3.6.17 множество $\{\omega_j\}$ является системой свободных образующих группы $\pi(|K_1|,\ v_0)$. Для всякого j пусть ω_j' — замкнутый путь в пространстве $|K_2|$ с началом в точке v_0', такой, что $h_{[\omega_j]} = [\omega_j']$. Определим непрерывное отображение

$$f\colon (|K_1|,\ v_0) \to (|K_2|,\ v_0')$$

условиями $f(|T|) = v_0'$ и $f\,|\,|s_j| = f(tv' + (1-t)\,v_j) = \omega_j'(t)$ (точки пространства $|s_j|$ записываются в виде $tv_j' + (1-t)\,v_j$, $t \in I$). Отображение f непрерывно, поскольку его ограничение на T и на любой симплекс $|s_j|$ непрерывно. Ясно, что $f_{\#}[\omega_j] = [\omega_j'] = h_{[\omega_j]}$. Следовательно, $f_{\#} = h$.

Докажем (c). Заметим, что если $f_1 \simeq f_2$, то существует путь ω в $|K_2|$ от v_0' до v_0'', такой, что $f_{1\#} = h_{[\omega]} f_{2\#}$ (теорема 1.8.7). Обратно, пусть $f_{1\#} = h_{[\omega]} f_{2\#}$, T — максимальное дерево в K_1, и для каждой вершины v графа K_1 пусть ζ_v — ломаная в T от v_0 до v. Определим гомотопию $F\colon |K_1| \times I \to |K_2|$ от f_1 до f_2 в несколько этапов. Прежде всего положим $F(x,\ 0) = f_1(x)$ и $F(x,\ 1) = f_2(x)$, $x \in |K_1|$. Тогда отображение F определено на $(|K_1| \times 0) \cup (|K_1| \times 1)$. Если v — вершина графа K_1, то положим $F(v,\ t) = ((f_1(|\zeta_v^{-1}|) * \omega) * f_2|\zeta_v|)(t)$ при $t \in I$. Тогда $F(v,\ 0) = f_1(v)$ и $F(v,\ 1) = f_2(v)$, и, значит, F определено на $|K_1^0| \times I$ и согласовано с предыдущим определением на подпространстве $(|K_1|\times 0)\cup(|K_1|\times 1)$. Теперь осталось только продолжить F на $|s|\times I$ для каждого одномерного симплекса $s\in K_1$. Пусть v и v' — вершины симплекса s, рассматриваемые в некотором порядке. Тогда $|s|\times I$ — квадрат. Запишем его границу произвольным образом в виде произведения, например:

$$(|(v,\ v')|\times 0)*(v'\times I)*(|(v',\ v)|\times 1)*(v\times I)^{-1}.$$

Отображение F тогда и только тогда можно продолжить на $|s|\times I$, когда оно переводит это произведение в гомотопный нулю путь в $|K_2|$. Выписанный нами путь отображение F переводит в путь, гомотопный следующему произведению:

$$f_1|(v,\ v')|*\left(f_1\left|\zeta_{v'}^{-1}\right|*\omega*f_2|\zeta_{v'}|\right)*f_2|(v',v)|*\left(f_2\left|\zeta_v^{-1}\right|*\omega^{-1}*f_1|\zeta_v|\right)\simeq$$

$$\simeq f_1|(v,\ v')|*f_1\left|\zeta_{v'}^{-1}\right|*\left(\omega*f_2\left(|\zeta_{v'}|*|(v',\ v)|*\left|\zeta_v^{-1}\right|\right)*\omega^{-1}\right)*f_1|\zeta_v|\simeq$$

$$\simeq f_1|(v,\ v')|*f_1\left|\zeta_{v'}^{-1}\right|*f_1\left(|\zeta_{v'}|*|(v',\ v)|*\left|\zeta_v^{-1}\right|\right)*f_1\ |\zeta_v|\simeq\varepsilon_{f_1(v)}.$$

Следовательно, F можно продолжить на $|s|\times I$ и полученное отображение $F\colon |K_1|\times I\to|K_2|$ непрерывно, поскольку для каждого замкнутого симплекса $|s|$ пространства $|K_1|$ его ограничение на $|s|\times I$ непрерывно. Итак, $F\colon f_1\simeq f_2$. ■

Из теоремы 8b следует, что если отображение $f\colon (|K_1|,\ v_0)\to$ $\to(|K_2|,\ v_0')$ индуцирует изоморфизм $f_\#\colon \pi(|K_1|,\ v_0)\approx\pi(|K_2|,\ v_0')$, то существует непрерывное отображение $g\colon (|K_2|,\ v_0')\to(|K_1|,\ v_0)$, такое, что $g_\#=(f_\#)^{-1}$. Из теоремы 8c вытекает, что $gf\simeq 1_{|K_1|}$ и $fg\simeq 1_{|K_2|}$. Отсюда мы получаем

9. Следствие. *Пусть K_1 и K_2 — связные графы, v_0 — некоторая вершина из K_1, а v_0' — некоторая вершина из K_2. Непрерывное отображение $f\colon (|K_1|,\ v_0)\to(|K_2|,\ v_0')$ тогда и только тогда является гомотопической эквивалентностью, когда оно индуцирует изоморфизм $f_\#\colon \pi(|K_1|,\ v_0)\approx\pi(|K_2|,\ v_0')$.* ■

Использованное при доказательстве теоремы 8c последовательное продолжение гомотопии F является стандартным методом построения непрерывных отображений пространств симплициальных комплексов. При этом отображение строится сначала на одном остове, а затем продолжается на следующий.

§ 8. Примеры и приложения

Этот параграф содержит разнообразные результаты, касающиеся фундаментальной группы. Мы начинаем с некоторых приложений к теории свободных групп. В частности, мы покажем, что всякая подгруппа свободной группы свободна. Затем мы выясним, как влияет на фундаментальную группу приклеивание к рассматриваемому пространству двумерной клетки. Полученные при этом результаты используются для доказательства того, что любая группа может быть реализована как фундаментальная группа некоторого пространства. Наконец, мы покажем, как можно описать фундаментальную группу произвольной поверхности в терминах образующих и соотношений.

Если K — некоторый симплициальный комплекс и $a \in |K|$ имеет носитель s (т. е. $a \in \langle s \rangle$), то для любого подразделения K' комплекса $\dot{s}$ симплициальный комплекс $K' * a$ является подразделением комплекса $\bar{s}$ (лемма 3.3.8). Отсюда вытекает, что можно построить модифицированное барицентрическое подразделение комплекса K, вершинами которого будут a и центры отличных от s симплексов комплекса K. Следовательно, существует подразделение комплекса K, для которого a является вершиной. Мы получили следующий результат:

1. Лемма. *Если $a \in |K|$, то существует подразделение K' комплекса K, имеющее a своей вершиной.* ■

2. Теорема. *Всякий полиэдр локально стягиваем.*

Доказательство. Согласно лемме 1, достаточно показать, что если v — вершина симплициального комплекса K, то каждая окрестность U точки v в $|K|$ содержит окрестность V точки v, деформируемую внутри U в v. Пусть U — некоторая окрестность точки v, и пусть $A = \operatorname{st} v$. Определим гомотопию $F: A \times I \to |K|$ равенством

$$F(\alpha, t) = tv + (1-t)\alpha.$$

Тогда F является деформацией окрестности A в точку v внутри $|K|$ и $F(v \times I) = v \in U$. Следовательно, существует некоторая окрестность V точки v в A, такая, что $F(V \times I) \subset U$. Так как множество $A = \operatorname{st} v$ открыто в $|K|$, то V — окрестность точки v в $|K|$. Поскольку $F | V \times I$ — деформация окрестности V в точку v внутри U, пространство $|K|$ локально стягиваемо. ■

Из теоремы 2 следует, что к полиэдрам можно применить теорию накрывающих отображений. При этом каждой подгруппе фундаментальной группы полиэдра соответствует накрывающее отображение. Покажем теперь, что всякое накрывающее отображение с полиэдром в качестве базы соответствует некоторому симплициальному отображению.

3. Теорема. *Пусть $p: \tilde{X} \to X$ — некоторое накрывающее отображение, где X — полиэдр. Тогда $\tilde{X}$ также является полиэдром,* *причем той же размерности, что X. При этом накрывающее отображение p соответствует симплициальному отображению.*

Доказательство. Пусть $p\colon \tilde{X}\to|K|$ — накрывающее отображение. Для всякого $s\in K$ замкнутый симплекс $|s|$ односвязен. Из теоремы о поднятии вытекает, что вложение $|s|\subset|K|$ можно поднять до отображения $|s|\to\tilde{X}$, а из теоремы о единственности поднятия вытекает, что образы двух таких поднятий либо совпадают, либо не пересекаются. Следовательно, существует столько поднятий симплекса $|s|$, сколько листов пространства $\tilde{X}$ находится над ним.

Рассмотрим симплициальный комплекс $\tilde{K}$, имеющий в качестве вершин множество $\{p^{-1}(v)\mid v$ — вершина комплекса $K\}$ и в качестве симплексов множество $\{\tilde{s}\}$, причем $\tilde{s}=\{\tilde{v}_0,\ldots,\tilde{v}_q\}$ есть симплекс в $\tilde{K}$ тогда и только тогда, когда найдутся симплекс $s=\{v_0,\ldots,v_q\}$ комплекса K и поднятие $f_{\tilde{s}}\colon|s|\to\tilde{X}$, такие, что $f_{\tilde{s}}(v_i)=\tilde{v}_i$, $0\leqslant i\leqslant q$ (симплекс $s=p(\tilde{s})$ и отображение $f_{\tilde{s}}$ в рассматриваемом случае единственны). Тогда $\tilde{K}$ — симплициальный комплекс той же размерности, что и K. Если $\tilde{s}_1$ — грань симплекса $\tilde{s}$, то $p(\tilde{s}_1)$ — грань симплекса $p(\tilde{s})$ и $f_{\tilde{s}}\,|\,|p(\tilde{s}_1)|=f_{\tilde{s}_1}$. Следовательно, набор отображений $\{f_{\tilde{s}}\}_{\tilde{s}\in\tilde{K}}$ определяет непрерывное отображение $f\colon|\tilde{K}|\to\tilde{X}$, для которого

$$f\left(\sum\alpha_i\tilde{v}_i\right)=f_{\tilde{s}}\left(\sum\alpha_i p(\tilde{v}_i)\right),\qquad \sum\alpha_i\tilde{v}_i\in|\tilde{s}|.$$

Пусть симплициальное отображение $\varphi\colon\tilde{K}\to K$ определено равенством $\varphi(\tilde{v})=p(\tilde{v})$. Тогда коммутативна следующая диаграмма:

$$\begin{tikzcd}
|\tilde{K}| \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "|\varphi|"'] & & \tilde{X} \arrow[dl, "p"] \\
& |K| &
\end{tikzcd}$$

Для завершения доказательства достаточно показать, что $(\tilde{K}, f)$ — триангуляция пространства $\tilde{X}$ (т. е. что отображение f — гомеоморфизм). Если v — некоторая вершина комплекса K, то звезда $\operatorname{st}v$, будучи стягиваемой, просто накрыта отображением p. Для $\tilde{v}\in p^{-1}(v)$ пусть $U_{\tilde{v}}$ — компонента связности множества $p^{-1}(\operatorname{st}v)$, содержащая $\tilde{v}$. Тогда $p\,|\,U_{\tilde{v}}$ — гомеоморфизм $U_{\tilde{v}}$ на $\operatorname{st}v$. Согласно определению комплекса $\tilde{K}$ и отображения φ, ограничение $|\varphi|\,|\operatorname{st}\tilde{v}$ является гомеоморфизмом $\operatorname{st}\tilde{v}$ на $\operatorname{st}v$ при $\tilde{v}\in p^{-1}(v)$. Из коммутативности написанной выше диаграммы получаем, что $f\,|\operatorname{st}\tilde{v}$ — гомеоморфизм $\operatorname{st}\tilde{v}$ на $U_{\tilde{v}}$ для $\tilde{v}\in p^{-1}(v)$. Поскольку $|\varphi|^{-1}(\operatorname{st}v)=\bigcup\{\operatorname{st}\tilde{v}\mid\tilde{v}\in p^{-1}(v)\}$, то $f\,|\,|\varphi|^{-1}(\operatorname{st}v)$ — гомеоморфизм $|\varphi|^{-1}(\mathrm{st}\, v)$ на $p^{-1}(\mathrm{st}\, v)$. Так как это верно для каждой вершины v комплекса K, то f является гомеоморфизмом полиэдра $|\tilde{K}|$ на $\tilde{X}$. ■

Интересным применением полученных результатов является такое утверждение:

4. Следствие. *Всякая подгруппа свободной группы свободна.*

Доказательство. Пусть F — свободная группа. Как показывает пример 3.7.6, существует полиэдр (а именно букет окружностей) X с отмеченной точкой x_0, для которого $\pi(X, x_0) \approx F$. Пусть F' — подгруппа группы F. При указанном изоморфизме группе F' соответствует некоторая подгруппа $H \subset \pi(X, x_0)$. Пусть накрывающее отображение p: $\tilde{X} \to X$ таково, что пространство $\tilde{X}$ линейно связно, $p(\tilde{x}_0) = x_0$ и $p_{\#}\pi(\tilde{X}, \tilde{x}_0) = H$. Из теоремы 3 следует, что $\tilde{X}$ гомеоморфно пространству некоторого связного графа. Согласно следствию 3.7.5, $\pi(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ — свободная группа. ■

Если K — конечный связный граф, то из следствия 3.7.5 вытекает, что $E(K, v_0)$ — свободная группа с $(1 - n_0 + n_1)$ образующими, где n_0 — число вершин комплекса K, а n_1 — число его одномерных симплексов. Если накрывающее отображение p: $\tilde{X} \to |K|$ имеет кратность m, то число q-мерных симплексов соответствующей триангуляции $(\tilde{K}, f)$ пространства $\tilde{X}$ (построенной в теореме 3) равно mn_q, где n_q — число q-мерных симплексов комплекса K. Таким образом, метод, использованный при доказательстве следствия 4, позволяет получить такое

5. Следствие. *Пусть F — свободная группа с n образующими, и пусть F' — подгруппа индекса m группы F. Тогда F' — свободная группа с $1 - m + mn$ образующими.* ■

Изучим теперь, как изменяется фундаментальная группа пространства при приклеивании к нему клеток. Пусть A — замкнутое подмножество пространства X. Говорят, что пространство X *получено* из A *приклеиванием n-мерных клеток* $\{e_j^n\}$ $(n \geqslant 0)$, если

(a) e_j^n — замкнутое подмножество в X при каждом j;

(b) если $\dot{e}_j^n = e_j^n \cap A$, то при $j \neq j'$ множества $e_j^n - \dot{e}_j^n$ и $e_{j'}^n - \dot{e}_{j'}^n$ не пересекаются;

(c) топология пространства X согласована с $\{A, e_j^n\}$;

(d) для каждого j существует такое отображение

$$f_j\colon (E^n, S^{n-1}) \to (e_j^n, \dot{e}_j^n),$$

что $f_j(E^n) = e_j^n$, f_j гомеоморфно отображает $E^n - S^{n-1}$ на $e_j^n - \dot{e}_j^n$ и всякое компактное подмножество из $e_j^n - \dot{e}_j^n$ замкнуто в e_j^n.

Заметим, что если $n = 0$, то X является несвязной суммой A и некоторого дискретного пространства. Отображение f_j: $(E^n, S^{n-1}) \to (e_j^n, \dot{e}_j^n)$, удовлетворяющее условию (d), называется *характеристическим отображением* для клетки e_j^n, а $f_j | S^{n-1}$: $S^{n-1} \to A$ называется *приклеивающим отображением* для клетки e_j^n. Пространство X однозначно определяется множеством A и семейством $\{f_j | S^{n-1}\}$ приклеивающих отображений. Если задано множество A и семейство отображений $\{g_j$: $S^{n-1} \to A\}$, то из A приклеиванием n-мерных клеток $\{e_j^n\}$ с помощью отображений g_j получается пространство X. Оно определяется как факторпространство несвязной суммы $(\bigvee E_j^n) \vee A$ (где $E_j^n = E^n$ для каждого j), которое получается отождествлением точек $z \in S_j^{n-1}$ и $g_j(z) \in A$. Тогда композиция вложения $(E_j^n, S_j^{n-1}) \subset ((\bigvee E_j^n) \vee A, (\bigvee S_j^{n-1}) \vee A)$ и проекции последнего пространства на (X, A) совпадает с характеристическим отображением f_j: $(E_j^n, S_j^{n-1}) \to (X, A)$ для n-мерной клетки $e_j^n = f_j(E_j^n)$. Приведем два примера.

6. Если K — симплициальный комплекс, то пространство $|K^q|$ получается из $|K^{q-1}|$ приклеиванием q-мерных клеток $\{|s| \mid s$ есть q-мерный симплекс комплекса $K\}$.

7. Пусть F_i для $i = 1, 2, 4$ совпадает соответственно с $\mathbf{R}$, $\mathbf{C}$, $\mathbf{Q}$, и пусть F_iP^q — соответственно действительное, комплексное или кватернионное проективное пространство размерности q. Пространство F_iP^q вкладывается в F_iP^{q+1} при помощи отображения $[t_0, t_1, \ldots, t_q] \to [t_0, t_1, \ldots, t_q, 0]$ $(t_j \in F_i)$. В таком случае F_iP^{q+1} получается из F_iP^q приклеиванием единственной $(q+1)\,i$-мерной клетки. Если отождествить $E^{(q+1)\,i}$ с множеством $\{(t_0, t_1, \ldots, t_q) \in F_i^{q+1} \mid \sum |t_j|^2 \leqslant 1\}$, то характеристическое отображение $f: (E^{(q+1)\,i}, S^{(q+1)\,i-1}) \to (F_iP^{q+1}, F_iP^q)$ для этой клетки определяется соотношением

$$f(t_0, t_1, \ldots, t_q) = \left[t_0, t_1, \ldots, t_q, 1 - \sum |t_j|^2\right].$$

8. Лемма. *Пусть пространство X получено из A приклеиванием n-мерных клеток, где $n \geqslant 2$. Тогда для любой точки $x_0 \in A$ вложение i: $(A, x_0) \subset (X, x_0)$ индуцирует эпиморфизм*

$$i_\#: \pi(A, x_0) \to \pi(X, x_0).$$

Доказательство. Пусть X получено из A приклеиванием n-мерных клеток $\{e_j^n\}$. Выберем некоторую точку $y_j \in e_j^n - \dot{e}_j^n$ для каждого j. Пусть B_j — окрестность точки y_j в $e_j^n - \dot{e}_j^n$, гомеоморфная E^n. Предположим, что ω: $(I, \dot{I}) \to (X, x_0)$ — замкнутый путь в точке x_0. Покажем, что ω гомотопен некоторому пути, целиком лежащему в $U = X - \{y_j\}_j$. Поскольку отрезок I компактен, его можно подразделить точками $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = 1$ таким образом, чтобы при $0 \leqslant i < n$ либо $\omega[t_i, t_{i+1}] \subset U$, либо $\omega[t_i, t_{i+1}] \subset \subset B_j$ для некоторого j. Если $\omega[t_i, t_{i+1}] \cup \omega[t_{i+1}, t_{i+2}] \subset B_j$, то в рассматриваемом подразделении можно опустить точку t_{i+1}, и при этом получится другое подразделение отрезка I с тем же свойством. Продолжая этот процесс, мы получим такое подразделение, что если $\omega[t_i, t_{i+1}] \subset B_j$, то ни $\omega[t_{i-1}, t_i]$, ни $\omega[t_{i+1}, t_{i+2}]$ не принадлежат B_j. Отсюда вытекает, что $\omega(t_i) \neq y_j$ и $\omega(t_{i+1}) \neq y_j$. Для каждого такого номера i путь $\omega \mid [t_i, t_{i+1}]$ гомотопен относительно $\{t_i, t_{i+1}\}$ некоторому пути, целиком принадлежащему $B_j - y_j$, так как множество $B_j - y_j$ линейно связно, а B_j односвязно. Поскольку существует лишь конечное число таких подинтервалов отрезка I, $\omega \simeq \omega'$, где $\omega'(I) \subset U$.

Сфера S^{n-1} является сильным деформационным ретрактом шара E^n с выколотой точкой. Следовательно, $\dot{e}_j^n$ — сильный деформационный ретракт множества $e_j^n - y_j$. Отсюда следует, что A — сильный деформационный ретракт множества U и $\omega' \simeq \omega''$, где $\omega''(I) \subset A$. Значит, имеет место равенство $i_{\#}[\omega''] = [\omega]$. ■

9. Следствие. *Для всех* $q \geqslant 0$ *пространства* $\mathbf{C}P^n$ *и* $\mathbf{Q}P^n$ *односвязны.*

Доказательство. Поскольку $\mathbf{C}P^0$ и $\mathbf{Q}P^0$ — одноточечные пространства, результат выводится индукцией по q из леммы 8 и того факта, что $\mathbf{C}P^{q+1}$ получается из $\mathbf{C}P^q$ приклеиванием $2(q+1)$-мерной клетки, а $\mathbf{Q}P^{q+1}$ получается из $\mathbf{Q}P^q$ приклеиванием $4(q+1)$-мерной клетки. ■

Теперь нам хотелось бы вычислить ядро гомоморфизма $i_{\#}$ для $n = 2$[1]. Для любого заданного отображения g: $S^1 \to A$ в линейно связное пространство A и заданной точки $x_0 \in A$ можно следующим образом определить нормальный делитель группы $\pi(A, x_0)$. Если $g(p_0) = x_1$, а ω — путь в A от x_0 до x_1, то $h_{[\omega]} g_{\#}(\pi(S^1, p_0))$ — циклическая подгруппа группы $\pi(A, x_0)$. При другом выборе пути ω мы получаем сопряженную ей подгруппу группы $\pi(A, x_0)$. Следовательно, нормальный делитель группы

[1]) Если $n > 2$, то $i_{\#}$ — изоморфизм. — *Прим. ред.*

$\pi(A, x_0)$, порожденный подгруппой $h_{[\omega]}g_{\#}(\pi(S^1, p_0))$, не зависит от выбора пути ω. Аналогичные рассуждения можно применить к семейству отображений $\{g_j: S^1 \to A\}$. Таким образом, корректно определен нормальный делитель группы $\pi(A, x_0)$, соответствующий этому семейству отображений.

10. Теорема. *Пусть A — связный полиэдр, и пусть пространство X получено из A приклеиванием двумерных клеток с помощью отображений $\{g_j: S^1 \to A\}$. Если N — нормальный делитель в $\pi(A, x_0)$, определенный отображениями $\{g_j\}$, то гомоморфизм*

$$i_{\#}: \pi(A, x_0) \to \pi(X, x_0)$$

является эпиморфизмом с ядром N.

Доказательство. Из леммы 8 вытекает, что $i_{\#}$ — сюръективное отображение. Пусть накрывающее отображение $p: \tilde{A} \to A$ таково, что пространство $\tilde{A}$ линейно связно, $p(\tilde{x}_0) = x_0$ и $p_{\#}(\pi(\tilde{A}, \tilde{x}_0)) = N$. Так как N — нормальный делитель в $\pi(A, x_0)$, то p — регулярное отображение. Поскольку подгруппа N определяется отображениями $\{g_j\}$, каждое g_j поднимается до отображения $\tilde{g}_j: S^1 \to \tilde{A}$. Пусть пространство $\tilde{X}$ получено из $\tilde{A}$ приклеиванием двумерных клеток для всех поднятых отображений $\{\tilde{g}_j\}$. Продолжим p до отображения $p': \tilde{X} \to X$, переводящего гомеоморфно каждую двумерную клетку из $\tilde{X}$ на соответствующую двумерную клетку из X. Легко видеть, что тогда p' также является накрывающим отображением.

Из определения подгруппы N получаем $i_{\#}(N) = 1$. Предположим, что элемент $[\omega] \in \pi(A, x_0)$ принадлежит ядру гомоморфизма $i_{\#}$. Пусть $\tilde{\omega}$ — какое-нибудь поднятие пути ω в $\tilde{A}$, такое, что $\tilde{\omega}(0) = \tilde{x}_0$. Тогда $\tilde{\omega}$ — поднятие пути ω в $\tilde{X}$. Поскольку путь ω гомотопен нулю в X, $\tilde{\omega}$ — замкнутый путь в $\tilde{X}$; значит, $\tilde{\omega}$ — замкнутый путь в $\tilde{A}$, и потому

$$[\omega] = p_{\#}[\tilde{\omega}] \in N. \blacksquare$$

Заметим, что для справедливости теоремы 10 вовсе не обязательно предполагать, что A — связный полиэдр. Достаточно, чтобы пространство A было линейно связным, локально линейно связным и полулокально односвязным.

11. Следствие. *Для любой группы G существует пространство X, такое, что $\pi(X, x_0) \approx G$.*

Доказательство. Представим группу G в виде фактор-группы свободной группы F по нормальному делителю N. Существует полиэдр A, такой, что $\pi(A, x_0) \approx F$ (на самом деле, как видно из примера 3.7.6, в качестве A можно взять букет окружностей). Для каждого элемента $\lambda \in N$ пусть отображение g_λ: $(S^1, p_0) \to (A, x_0)$ таково, что $[g_\lambda]$ соответствует λ при изоморфизме $\pi(A, x_0) \approx F$. Пусть пространство X получено из A приклеиванием двумерных клеток для всех отображений $\{g_\lambda\}$. Из теоремы 10 следует, что имеет место изоморфизм $\pi(X, x_0) \approx G$. ■

Теперь посмотрим, что дают эти результаты для поверхностей. Поверхности являются пространствами конечных двумерных псевдомногообразий без края. *Псевдомногообразием размерности n без края* (или *абсолютным n-мерным циклом*) называется симплициальный комплекс K, такой, что

(a) каждый симплекс комплекса K является гранью некоторого n-мерного симплекса из K;

(b) каждый $(n-1)$-мерный симплекс комплекса K является гранью ровно двух n-мерных симплексов из K;

(c) если s и s' — некоторые n-мерные симплексы комплекса K, то существует конечная последовательность $s = s_1, s_2, \ldots, s_m = s'$ n-мерных симплексов из K, для которой s_i и s_{i+1} обладают общей $(n-1)$-мерной гранью при $1 \leqslant i < m$.

Мы определим *поверхность* как пространство конечного двумерного псевдомногообразия без края. С помощью разрезания и склеивания можно показать[1]), что всякая поверхность представляется в нормальной форме в виде многоугольника со склеенными сторонами. Поверхности разбиваются на классы гомеоморфных, причем каждый класс характеризуется «числом ручек» $h \geqslant 0$ у поверхности и числом k вклеенных в нее листов Мёбиуса. Сфера без ручек — это двуугольник, стороны которого склеиваются, как показано на рис. 7. Это просто двумерная сфера S^2. При $h > 0$ сфера с h ручками изображается, как на рис. 8. Сфера с одной ручкой гомеоморфна *тору*.

При $k \geqslant 1$ сфера с k листами Мёбиуса изображается, как на рис. 9. Сфера с одним листом Мёбиуса гомеоморфна действительной проективной плоскости $\mathbf{R}P^2$, а сфера с двумя листами Мёбиуса — *бутылке Клейна*.

Нормальная форма есть представление сферы с $h \geqslant 1$ ручками как букета $2h$ окружностей с единственной двумерной клеткой, приклеенной соответствующим отображением края. Если A — букет $2h$ окружностей, то $\pi(A)$ — свободная группа с $2h$ образующими, которые мы обозначим a_i и b_i при $1 \leqslant i \leqslant n$. Если X — сфера с h ручками, то X получается из A приклеиванием к A единственной двумерной клетки при помощи отображения g: $S^1 \to A$,

[1]) См. Lefschetz S., Introduction to Topology, Princeton, 1949, и Зейферт X. и Трельфалль В., Топология, М.—Л., 1938.

такого, что $g_{\#}$ переводит образующую группы $\pi(S^1)$ в элемент $a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1} \ldots a_hb_ha_h^{-1}b_h^{-1} \in \pi(A)$. Теорема 10 дает нам описание группы $\pi(X)$ в терминах образующих и соотношений. Аналогич-

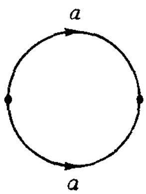


Рис. 7. Сфера без ручек.

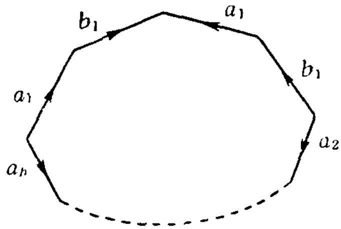


Рис. 8. Сфера с $h>0$ ручками.

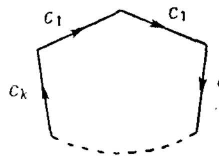


Рис. 9. Сфера с k листами Мёбиуса.

ные замечания можно применить к сфере с $k \geqslant 1$ листами Мёбиуса. Сформулируем окончательный результат:

12. *Фундаментальная группа поверхности является*

(a) *тривиальной для сферы без ручек;*

(b) *группой с образующими* $a_1, b_1, \ldots, a_h, b_h$ *и единственным соотношением* $a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1} \ldots a_hb_ha_h^{-1}b_h^{-1} = 1$ *для сферы* с $h \geqslant 1$ *ручками;*

(c) *группой с образующими* $c_1, c_2, \ldots, c_k$ *и единственным соотношением* $c_1^2c_2^2 \ldots c_k^2 = 1$ *для сферы с* $k \geqslant 1$ *листами Мёбиуса.* ■

УПРАЖНЕНИЯ

A. Топологические свойства полиэдров

1. Докажите, что компактный полиэдр есть абсолютный окрестностный ретракт. (*Указание.* Пусть $X = |K|$, и пусть K — подкомплекс симплекса s. Используйте индукцию по числу симплексов в $s - K$ и тот факт, что ретракт открытого множества в абсолютном окрестностном ретракте сам является абсолютным окрестностным ретрактом.)

2. Приведите пример такого пространства X и его замкнутого подмножества $A \subset X$, что A и X — полиэдры, но пара (X, A) не является полиэдральной парой.

3. Докажите, что всякое открытое подмножество компактного полиэдра является полиэдром. (*Указание.* Поскольку $|K| - U$ есть множество типа G_δ [1]),

---

[1]) То есть пересечение не более чем счетного числа открытых множеств.— *Прим. перев.*

существует последовательность открытых подмножеств $V_i \subset |K|$, такая, что $\bigcap V_i = |K| - U$. Индукцией по n постройте последовательность подразделений K_n и подкомплексов $L_n \subset K_n$, такую, что (a) K_n более мелкое, чем покрытие $\{U, V_n\}$; (b) L_n — максимальный подкомплекс в K_n, обладающий свойством $|L_n| \subset U$; (c) K_{n+1} — подразделение комплекса K_n, содержащее L_n в качестве подкомплекса. Тогда симплициальный комплекс $L = \bigcup L_n$ таков, что $|L| = |K| - U$.)

4. Пусть пространство Y n-связно, а K — некоторый симплициальный комплекс. Докажите, что всякое непрерывное отображение $|K| \to Y$ гомотопно отображению, переводящему $|K^n|$ в одну точку. Покажите, что если отображения f_0, f_1: $(|K|, |K^n|) \to (Y, y_0)$ гомотопны, то они гомотопны относительно $|K^{n-1}|$.

5. Пусть пространство Y n-связно для каждого n, и пусть (X, A) — произвольная полиэдральная пара. Докажите, что два отображения $X \to Y$, совпадающие на A, гомотопны относительно A.

6. Докажите, что полиэдр тогда и только тогда стягиваем, когда он n-связен для каждого n. Если полиэдр имеет конечную размерность m, то он стягиваем тогда и только тогда, когда он m-связен.

B. Примеры

1. Докажите, что $\mathbf{R}P^n$ является полиэдром для всех n.

2. Пусть симплициальный комплекс K образован вершинами $v_1, \ldots, v_p$ и симплексами $\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \ldots, \{v_{p-1}, v_p\}, \{v_p, v_1\}$, и пусть I — симплициальный комплекс с вершинами 0 и 1 и одномерным симплексом $\{0, 1\}$. Тогда $K * I$ — симплициальный комплекс с вершинами $v_1, \ldots, v_p$, 0, 1. Пусть целое число q взаимно просто с p. Будем считать, что вершины v_i определены для всех i, но $v_i = v_j$, если $i \equiv j \bmod p$. Рассмотрим пространство X, полученное из $|K * I|$ линейным отождествлением двумерных симплексов $\{v_i, v_{i+1}, 0\}$ и $\{v_{i+q}, v_{i+q+1}, 1\}$ для всех i. Докажите, что X гомеоморфно линзовому пространству $L(p, q)$ и что X — полиэдр.

3. Докажите, что обобщенное линзовое пространство $L(p, q_1, \ldots, q_n)$ является полиэдром.

4. Докажите, что если X и Y — полиэдры, причем один из них локально компактен, то $X * Y$ и $X \times Y$ — тоже полиэдры.

C. Псевдомногообразия

Симплициальный комплекс называется *однородно n-мерным*, если каждый его симплекс является гранью некоторого n-мерного симплекса этого комплекса. Симплициальный комплекс K называется *n-мерным псевдомногообразием*, если

(a) K — однородно n-мерный комплекс;

(b) каждый $(n-1)$-мерный симплекс комплекса K является гранью не более чем двух n-мерных симплексов из K;

(c) если s и s' — два n-мерных симплекса комплекса K, то существует конечная последовательность $s = s_1, s_2, \ldots, s_m = s'$ n-мерных симплексов из K, такая, что s_i и s_{i+1} имеет общую $(n-1)$-мерную грань $(1 \leqslant i < m)$.

Краем n-мерного псевдомногообразия K (обозначается $\dot{K}$) называется подкомплекс комплекса K, образованный множеством $(n-1)$-мерных симплексов из K, каждый из которых является гранью ровно одного n-мерного симплекса из K. (Если край $\dot{K}$ пуст, то K называется n-мерным псевдомногообразием без края, см. § 3.8.)

1. Докажите, что n-мерный симплекс s является n-мерным псевдомногообразием, причем его край, рассматриваемый как псевдомногообразие, совпадает с $\dot{s}$.

2. Покажите, что если K — некоторое псевдомногообразие, а L — подразделение комплекса K, то L также является псевдомногообразием и $\dot{L} = L \mid \dot{K}$.

3. Покажите, что если K является одномерным конечным псевдомногообразием, то его край $\dot{K}$ является либо пустым множеством, либо состоит ровно из двух вершин.

4. Приведите пример n-мерного псевдомногообразия K, край которого $\dot{K}$ не является ни пустым множеством, ни $(n-1)$-мерным псевдомногообразием.

D. Симплициальные отображения

В первых четырех упражнениях комплекс K предполагается конечным n-мерным псевдомногообразием ($n > 0$), край которого $\dot{K}$ непуст. Через K' мы обозначаем симплициальное подразделение комплекса K, а через φ: $K' \to K$ — такое симплициальное отображение, что $\varphi \mid \dot{K}'$ переводит $\dot{K}'$ в $\dot{K}$ и является симплициальной аппроксимацией тождественного отображения $|\dot{K}'| \subset |\dot{K}|$. Будем также считать, что s^{n-1} — некоторый фиксированный $(n-1)$-мерный симплекс края $\dot{K}$, а s^n — единственный n-мерный симплекс псевдомногообразия K, содержащий s^{n-1} в качестве грани.

1. Для каждого n-мерного симплекса s' подразделения K' обозначим через $\alpha(s')$ число его $(n-1)$-мерных граней, которые φ отображает на s^{n-1}. Покажите, что равенство $\alpha(s') = 1$ выполняется в том и только в том случае, когда φ отображает s' на s^n, и что в противном случае $\alpha(s') = 0$ или 2.

2. Докажите, что число n-мерных симплексов комплекса K', которые φ отображает на s^n, имеет ту же четность, что и число $(n-1)$-мерных симплексов края $\dot{K}'$, которые φ отображает на s^{n-1}. (*Указание.* Оба эти числа имеют ту же четность, что и $\sum \alpha(s')$, где суммирование распространено на все n-мерные симплексы s' из K'.)

3. *Лемма Шпернера.* Докажите, что число n-мерных симплексов подразделения K', которые φ отображает на s^n, нечетно. (*Указание.* Используйте индукцию по n.)

4. Докажите, что $|\dot{K}|$ не является ретрактом $|K|$.

5. *Теорема Брауэра о неподвижной точке.* Докажите, что всякое непрерывное отображение шара E^n в себя имеет неподвижную точку.

E. Цилиндры симплициальных отображений

Пусть φ: $K \to L$ — симплициальное отображение одного симплициального комплекса в другой, множества вершин которых мы будем считать непересекающимися. Предположим, что вершины комплекса K линейно упорядочены. *Цилиндром M симплициального отображения* φ называется симплициальный комплекс, множеством вершин которого является объединение множеств вершин комплексов K и L, а симплексами — симплексы комплексов K и L и все подмножества множеств вида $\{v_0, \ldots, v_k, \varphi(v_k), \ldots, \varphi(v_p)\}$, где $\{v_0, v_1, \ldots, v_p\}$ — симплекс в K, причем $v_0 < v_1 < \ldots < v_p$.

1. Покажите, что вложения i: $K \subset M$ и j: $L \subset M$ являются симплициальными отображениями. Пусть отображение ρ: $M \to L$ определено равенством $\rho(v) = \varphi(v)$, если вершина v принадлежит K, и равенством $\rho(v') = v'$, если вершина v' принадлежит L. Докажите, что в таком случае ρ является симплициальным отображением, причем $\varphi = \rho \circ i$ и $\rho \circ j = 1_L$.

2. Докажите, что если комплекс K конечен, то $j \circ \rho$ и 1_M — сопряженные отображения.

3. Докажите, что пространство $|M|$ гомеоморфно цилиндру непрерывного отображения $|\varphi|$: $|K| \to |L|$.

F. Группы ломаных

1. Если K — симплициальный комплекс, то можно определить биективное соответствие между классами эквивалентности локальных систем над K со значениями в некоторой категории $\mathscr{C}$ и классами естественных эквивалентностей ковариантных функторов из группоида ломаных комплекса K в ту же категорию $\mathscr{C}$. Докажите это.

2. *Теорема Ван Кампена для симплициальных комплексов*[1]. Пусть K — связный симплициальный комплекс, а L_1 и L_2 — его связные подкомплексы, такие, что $L_1 \cap L_2$ связно и $K = L_1 \cup L_2$. Пусть v_0 — некоторая вершина комплекса $L_1 \cap L_2$, и пусть i_1: $(L_1 \cap L_2, v_0) \subset (L_1, v_0)$ и i_2: $(L_1 \cap L_2, v_0) \subset (L_2, v_0)$. Докажите, что группа $E(K, v_0)$ изоморфна факторгруппе свободного произведения групп $E(L_1, v_0)$ и $E(L_2, v_0)$ по нормальному делителю, порожденному множеством

$$\left\{(i_{1\#}[\zeta]) \circ (i_{2\#}[\zeta]^{-1}) \mid [\zeta] \in E(L_1 \cap L_2, v_0)\right\}.$$

3. Покажите, что если G — конечно копредставленная группа, то существует конечный связный двумерный симплициальный комплекс K, группа ломаных которого изоморфна G.

4. Пусть X — некоторое пространство, и пусть $x_0 \in X$. Докажите, что существуют полиэдр Y с отмеченной точкой $y_0 \in Y$ и непрерывное отображение f: $(Y, y_0) \to (X, x_0)$, такие, что $f_\#$: $\pi(Y, y_0) \approx \pi(X, x_0)$.

G. Нервы покрытий

Если $\mathcal{U} = \{U\}$ — открытое покрытие пространства X, а $K(\mathcal{U})$ — нерв этого покрытия, то *каноническим отображением* f: $X \to |K(\mathcal{U})|$ называется такое непрерывное отображение, что для каждого элемента $U \in \mathcal{U}$ выполняется включение $f^{-1}(\mathrm{st}\, U) \subset U$.

1. Докажите, что если $\mathcal{U}$ — локально конечное открытое покрытие пространства X, то имеет место биективное соответствие между каноническими отображениями $X \to |K(\mathcal{U})|$ и разбиениями единицы, подчиненными покрытию $\mathcal{U}$[2].

---

[1] Случай топологических пространств см. в работе: Olum P., Non-abelian cohomology and Van Kampen's theorem, *Ann. Math.*, **68** (1958), 658—668.

[2] Говорят, что разбиение единицы $\{\psi_i\}_{i \in I}$ *подчинено покрытию* $\mathcal{U}$, если для каждой функции ψ_i существует такой элемент $U_i \in \mathcal{U}$, что $\mathrm{supp}\, \psi_i \subset U_i$. — *Прим. перев.*

2. Докажите, что если $\mathcal{U}$ — локально конечное открытое покрытие пространства X, то любые два канонических отображения $X \to |K(\mathcal{U})|$ гомотопны.

Если открытые покрытия $\mathcal{U}$ и $\mathcal{V}$ пространства X таковы, что $\mathcal{V}$ является измельчением $\mathcal{U}$, то ***канонической проекцией*** $\mathcal{V}$ на $\mathcal{U}$ называется функция φ, сопоставляющая каждому $V \in \mathcal{V}$ такой элемент $\varphi(V) \in \mathcal{U}$, что $V \subset \varphi(V)$.

3. Докажите, что каноническая проекция $\mathcal{V}$ на $\mathcal{U}$ определяет симплициальное отображение $K(\mathcal{V}) \to K(\mathcal{U})$ и любые две канонические проекции $\mathcal{V}$ на $\mathcal{U}$ определяют сопряженные симплициальные отображения $K(\mathcal{V}) \to K(\mathcal{U})$.

4. Докажите, что если φ: $K(\mathcal{V}) \to K(\mathcal{U})$ — каноническая проекция а f: $X \to |K(\mathcal{V})|$ — каноническое отображение, то композиция $|\varphi| \circ f$: $X \to |K(\mathcal{U})|$ является каноническим отображением.

5. Пусть X — паракомпактное пространство, а g: $X \to |K|$ — некоторое непрерывное отображение (где K — симплициальный комплекс). Докажите, что существуют локально конечное открытое покрытие $\mathcal{U}$ пространства X и симплициальное отображение φ: $K(\mathcal{U}) \to K$, такие, что для любого канонического отображения f: $X \to |K(\mathcal{U})|$ композиция $|\varphi| \circ f$ гомотопна g. (*Указание.* Возьмите в качестве $\mathcal{U}$ локально конечное открытое измельчение открытого покрытия $\{g^{-1}(\mathrm{st}\, v) \mid v$ — вершина комплекса $K\}$ и для всякого $U \in \mathcal{U}$ выберите в качестве $\varphi(U)$ такую вершину комплекса K, что $U \subset g^{-1}(\mathrm{st}\, \varphi(U))$.)

6. Пусть X — компактное хаусдорфово пространство, и пусть K — некоторый симплициальный комплекс. Докажите, что имеет место биективное соответствие

$$\varinjlim \{[K(\mathcal{U});\ K]\} \approx [X;\ |K|].$$

Предел прямого спектра берется здесь по семейству конечных открытых покрытий пространства X, образующих направленное множество по измельчению. Соответствующие отображения индуцированы каноническими проекциями, а искомое отображение — каноническими отображениями.

H. Теория размерности

Говорят, что топологическое пространство X имеет *размерность* $\leqslant n$ (сокращенно $\dim X \leqslant n$), если каждое открытое покрытие пространства X допускает открытое измельчение, нерв которого — симплициальный комплекс размерности $\leqslant n$. Если $\dim X \leqslant n$, но $\dim X \not\leqslant n-1$, то говорят, что пространство X имеет *размерность* n (обозначается $\dim X = n$). Если $\dim X \not\leqslant n$ для каждого n, то мы пишем $\dim X = \infty$.

1. Докажите, что если A — замкнутое подмножество пространства X, то $\dim A \leqslant \dim X$.

2. Докажите, что если K — конечный симплициальный комплекс и $\dim K \leqslant n$, то $\dim |K| \leqslant n$.

3. Покажите, что $\dim |s| = n$, где s есть n-мерный симплекс. (*Указание.* Пусть $\mathcal{U}$ — открытое покрытие симплекса $|s|$ звездами его вершин. Предположим, что существует измельчение $\mathcal{V}$ покрытия $\mathcal{U}$, такое, что $\dim K(\mathcal{V}) \leqslant n-1$. Пусть подразделение K' симплекса s более мелкое, чем $\mathcal{V}$. Тогда существуют симплициальные отображения $K' \to K(\mathcal{V}) \to s$, композиция которых λ является симплициальной аппроксимацией тождественного отображения $|K'| \subset |s|$.)

4. Пусть X — некоторое паракомпактное пространство, причем $\dim X \leqslant n$. Докажите, что если $m > n$, то всякое отображение $X \to S^m$ гомотопно нулю.

5. Пусть X — компактное метрическое пространство, а C — пространство непрерывных отображений $f\colon X \to \mathbf{R}^{2n+1}$, топология которого определяется метрикой

$$d(f, g) = \sup\{\| f(x) - g(x) \| \mid x \in X\}.$$

Докажите, что C является полным метрическим пространством. Покажите, что если

$$C_m = \left\{ f \in C \mid \operatorname{diam} f^{-1}(z) < \frac{1}{m} \text{ для всех } z \in \mathbf{R}^{2n+1} \right\},$$

то C_m — открытое подмножество пространства C для каждого целого положительного m и $\bigcap C_m$ — множество гомеоморфизмов X в $\mathbf{R}^{2n+1}$ [1]).

6. Докажите, что если X — компактное метрическое пространство размерности $\leqslant n$, то C_m — всюду плотное подмножество в C для каждого целого положительного m. (*Указание.* Пусть $\mathcal{U}$ — конечное открытое покрытие пространства X множествами диаметра $< 1/m$, такое, что $\dim K(\mathcal{U}) \leqslant n$, и пусть $h\colon |K(\mathcal{U})| \to \mathbf{R}^{2n+1}$ — некоторая реализация комплекса $K(\mathcal{U})$. Если $f\colon X \to |K(\mathcal{U})|$ — какое-нибудь каноническое отображение, то $h \circ f \in C_m$. Покажите, что если заданы отображение $g\colon X \to \mathbf{R}^{2n+1}$ и число $\varepsilon > 0$, то $\mathcal{U}$ и h можно выбрать таким образом, чтобы $d(h \circ f, g) < \varepsilon$.)

7. Докажите, что если X — компактное метрическое пространство размерности $\leqslant n$, то X можно вложить в $\mathbf{R}^{2n+1}$ (на самом деле множество гомеоморфизмов пространства X в $\mathbf{R}^{2n+1}$ всюду плотно в C).

---

[1]) Утверждение этой задачи справедливо для евклидова пространства произвольной размерности, а не только для $\mathbf{R}^{2n+1}$. — *Прим. ред.*

Глава 4
ГОМОЛОГИИ

В этой главе вводится понятие теории гомологий, играющее фундаментальную роль в алгебраической топологии. Теория гомологий определяется последовательностью ковариантных функторов H_n в категорию абелевых групп. Мы определим теорию гомологий на двух категориях — теорию сингулярных гомологий на категории пар топологических пространств и теорию симплициальных гомологий на категории симплициальных пар. Первая из них по определению топологически инвариантна, и с ней легче работать в формальных рассуждениях, зато вторую легче представлять себе геометрически, и по определению она эффективно вычислима для конечных комплексов. Основной результат, устанавливающий связь этих двух теорий, утверждает, что сингулярные гомологии полиэдра изоморфны симплициальным гомологиям симплициального комплекса, являющегося какой-нибудь из триангуляций этого полиэдра.

Функтор H_n измеряет количество «n-мерных дырок» в данном пространстве (или в симплициальном комплексе) в том смысле, что у n-мерной сферы S^n имеется ровно одна n-мерная дырка и ни одной m-мерной дырки при $m \neq n$. Нульмерной дыркой называется пара точек в различных компонентах линейной связности; значит, функтор H_0 описывает линейную связность. Функторы H_n описывают многомерную связность, и поэтому теорию гомологий можно использовать для доказательства многомерных аналогов таких результатов, которые в низших размерностях доказываются с помощью понятия связности.

Параграфы 4.1 и 4.2 посвящены определению категории цепных комплексов и соответствующему понятию гомотопии в этой категории. Теория гомологий вводится как естественно определенная последовательность ковариантных функторов из категории цепных комплексов в категорию абелевых групп.

Теория симплициальных гомологий определяется с помощью ковариантного функтора из категории симплициальных комплексов в категорию цепных комплексов. Эта теория подробно изучается в § 4.3, где мы доказываем совпадение двух различных определений (одно из которых использует ориентированные симплексы, а другое — упорядоченные). Аналогичным способом определяется теория сингулярных гомологий с помощью ковариантного функтора из категории топологических пространств в категорию цепных комплексов. Основные свойства этой теории рассматриваются в § 4.4, где показано, что для определения сингулярных гомологий достаточно рассматривать «малые» сингулярные симплексы.

В § 4.5 вводится понятие точной последовательности. Все гомологические функторы включаются в некоторую точную гомологическую последовательность, и поэтому гораздо удобнее рассматривать все эти функторы одновременно, чем по отдельности. Параграф 4.6 посвящен точной последовательности Майера — Виеториса, которая связывает гомологии объединения двух пространств (или симплициальных комплексов), гомологии самих этих пространств и гомологии их пересечения. Мы используем ее, чтобы доказать изоморфизм между группами симплициальных гомологий симплициального комплекса и группами сингулярных гомологий соответствующего ему пространства.

В § 4.7 содержатся некоторые применения теории гомологий. В частности, доказывается, что евклидовы пространства различных размерностей не гомеоморфны. Мы также доказываем теорему Брауэра о неподвижной точке, а также более общую теорему Лефшеца о неподвижных точках. Наконец, мы доказываем брауэровское обобщение теоремы Жордана о кривых (а именно, что любая $(n-1)$-мерная сфера, будучи вложена в S^n, делит S^n на две компоненты связности) и устанавливаем инвариантность области. В § 4.8 речь идет об аксиоматическом построении теории гомологий, данном Эйленбергом и Стинродом, и о некоторых связанных с этим понятиях.

§ 1. Цепные комплексы

В этом параграфе вводится категория цепных комплексов и цепных отображений и гомологический функтор на этой категории. Кроме того, мы определяем ковариантные функторы из категории симплициальных комплексов и из категории топологических пространств в категорию цепных комплексов. Их композиция с гомологическим функтором определяет теорию гомологий на категории симплициальных комплексов и на категории топологических пространств.

Дифференциальной группой называется абелева группа C, наделенная таким эндоморфизмом $\partial\colon C \to C$, что $\partial\partial = 0$. Эндоморфизм ∂ называется *дифференциалом*, или *граничным оператором* группы C. Рассмотрим категорию, объектами которой являются дифференциальные группы, а морфизмами — гомоморфизмы, коммутирующие с дифференциалами.

Для дифференциальной группы C определим подгруппу *циклов*, полагая $Z(C) = \ker \partial$, и подгруппу *границ*, полагая $B(C) = \operatorname{im} \partial$.

Поскольку $\partial\partial = 0$, $B(C) \subset Z(C)$. *Группа гомологий* $H(C)$ определяется как факторгруппа

$$H(C) = Z(C)/B(C).$$

Элементы группы $H(C)$ называются *классами гомологий*. Если z — некоторый цикл, то его класс гомологий в $H(C)$ обозначается через $\{z\}$. Два цикла z_1 и z_2 называются *гомологичными* (обозначается $z_1 \sim z_2$), если их разность является границей, т. е. если $\{z_1\} = \{z_2\}$.

Если τ: $C \to C'$ — гомоморфизм дифференциальных групп, коммутирующий с дифференциалами, то τ переводит циклы и границы группы C соответственно в циклы и границы группы C'. Следовательно, τ индуцирует гомоморфизм

$$\tau_*\colon H(C) \to H(C'),$$

такой, что $\tau_*\{z\} = \{\tau(z)\}$ для $z \in Z(C)$. Поскольку $(\tau_1\tau_2)_* = \tau_{1*}\tau_{2*}$, существует ковариантный функтор из категории дифференциальных групп в категорию абелевых групп, сопоставляющий группе C ее группу гомологий $H(C)$, а гомоморфизму τ индуцированный им гомоморфизм τ_*.

Градуированной группой называется группа $C = \{C_q\}$, образованная совокупностью абелевых групп C_q, занумерованных целыми числами. Элементы группы C_q называются элементами *степени* q. *Гомоморфизмом* τ: $C \to C'$ *степени* d одной градуированной группы в другую называется совокупность $\tau = \{\tau_q\colon C_q \to C'_{q+d}\}$ гомоморфизмов, занумерованных целыми числами. Мы будем опускать индекс q у гомоморфизма τ_q в тех случаях, когда исключена возможность недоразумения. Очевидно, что композиция гомоморфизмов степени соответственно d и d' является гомоморфизмом степени $d + d'$. Таким образом, определена категория градуированных групп и их гомоморфизмов (где каждый гомоморфизм имеет некоторую степень). Категория градуированных групп и гомоморфизмов фиксированной степени 0 является ее подкатегорией. Сумма двух гомоморфизмов степени 0 из C в C' снова является гомоморфизмом степени 0 из C в C', поэтому $\mathrm{hom}(C, C')$ — абелева группа ($\mathrm{hom}(C, C')$ является множеством морфизмов в категории, морфизмами которой служат гомоморфизмы степени 0).

Градуированной дифференциальной группой (сокращенно *DG-группой*) называется градуированная группа с дифференциалом, согласованным с градуировкой (т. е. этот дифференциал является эндоморфизмом степени r для некоторого r). *Цепным комплексом* называется градуированная дифференциальная группа, дифференциал которой имеет степень -1. Таким образом, цепной комплекс C состоит из последовательности абелевых групп C_q и гомоморфизмов

$$\partial_q\colon C_q \to C_{q-1},$$

занумерованных целыми числами, причем композиция

$$C_{q+1} \xrightarrow{\partial_{q+1}} C_q \xrightarrow{\partial_q} C_{q-1}$$

есть тривиальный гомоморфизм. Элементы группы C_q называются *q-мерными цепями* данного комплекса. Большинство рассматриваемых нами цепных комплексов будет обладать еще тем дополнительным свойством, что $C_q = 0$ при $q < 0$. Такие комплексы называются *неотрицательными. Свободным цепным комплексом* называется цепной комплекс, у которого C_q — свободная абелева группа для каждого q.

Группа циклов $Z(C)$ произвольной DG-группы является градуированной группой; она образована совокупностью групп $\{Z_q(C) = \ker \partial_q\}$. Группа границ $B(C)$ также градуирована и образована группами $\{B_q(C) = \operatorname{im} \partial_{q+1}\}$. Наконец, группа гомологий $H(C)$ — это градуированная группа, состоящая из групп $\{H_q(C) = Z_q(C)/B_q(C)\}$.

Цепным отображением $\tau\colon C \to C'$ (его называют также *цепным преобразованием*) одного цепного комплекса в другой называется гомоморфизм степени 0, коммутирующий с дифференциалами. Следовательно, τ представляет собой совокупность $\{\tau_q\colon C_q \to C'_q\}$ гомоморфизмов, таких, что коммутативны все диаграммы

$$\begin{array}{ccc} C_q & \xrightarrow{\partial_q} & C_{q-1} \\ {\scriptstyle\tau_q}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\tau_{q-1}} \\ C'_q & \xrightarrow{\partial'_q} & C'_{q-1} \end{array}$$

Ясно, что таким образом мы получаем *категорию цепных комплексов*, объектами которой являются цепные комплексы, а морфизмами — цепные отображения. Ясно также, что если C и C' — два объекта этой категории, то $\hom(C, C')$ — абелева группа.

Если $\tau\colon C \to C'$ — цепное отображение, то *индуцированный гомоморфизм*

$$\tau_*\colon H(C) \to H(C')$$

является гомоморфизмом степени 0 и $(\tau_*)_q \{z\} = \{\tau_q(z)\}$ при $z \in Z_q(C)$. Легко проверить, что имеет место следующая

1. Теорема. *Существует ковариантный функтор из категории цепных комплексов в категорию градуированных абелевых групп и гомоморфизмов степени 0, сопоставляющий цепному комплексу C его группу гомологий $H(C)$, а цепному отображению τ — индуцированный им гомоморфизм τ_*. Для любых цепных комплексов C и C' соответствие $\tau \to \tau_*$ определяет гомоморфизм* $\hom(C, C') \to \hom(H(C), H(C'))$. ■

Подкомплексом C' цепного комплекса C (обозначается $C' \subset C$) называется такой цепной комплекс, что $C'_q \subset C_q$ и $\partial'_q = \partial_q | C'_q$ для всех q. Существует вложение i: $C' \subset C$, образованное совокупностью вложений $\{C'_q \subset C_q\}$. Можно определить также *цепной факторкомплекс* $C/C' = \{C_q/C'_q\}$ с граничным оператором, индуцированным переходом к факторкомплексу из граничного оператора комплекса C. Совокупность проекций $\{C_q \to C_q/C'_q\}$ называется *цепной проекцией* $C \to C/C'$.

Построим ковариантный функтор из категории симплициальных комплексов в категорию свободных цепных комплексов. Пусть K — симплициальный комплекс. *Ориентированным q-мерным симплексом* из K называется q-мерный симплекс $s \in K$ вместе с некоторым классом эквивалентности линейных упорядочений множества вершин симплекса s. При этом два упорядочения считаются эквивалентными, если они различаются на четную перестановку вершин. Если $v_0, v_1, \ldots, v_q$ — вершины симплекса s, то символом $[v_0, v_1, \ldots, v_q]$ обозначается ориентированный q-мерный симплекс из K, состоящий из симплекса s и класса эквивалентности данного упорядочения $v_0 < v_1 < \ldots < v_q$ его вершин.

При $q < 0$ не существует ориентированных q-мерных симплексов. Для каждой вершины v из K имеется единственный ориентированный нульмерный симплекс $[v]$, а каждому q-мерному симплексу ($q \geqslant 1$) соответствуют в точности два ориентированных q-мерных симплекса. Пусть $C_q(K)$ — абелева группа, порожденная ориентированными q-мерными симплексами σ^q и соотношениями $\sigma_1^q + \sigma_2^q = 0$, если σ_1^q и σ_2^q — различные ориентированные q-мерные симплексы, соответствующие одному и тому же q-мерному симплексу из K. Тогда $C_q(K) = 0$ для $q < 0$; при $q \geqslant 0$ группа $C_q(K)$ является свободной абелевой группой и ее ранг совпадает с числом q-мерных симплексов комплекса K. Если комплекс K пуст, то $C_q(K) = 0$ для всех q.

Определим гомоморфизмы ∂_q: $C_q(K) \to C_{q-1}(K)$ ($q \geqslant 1$). Для образующих положим

(а) $$\partial_q [v_0, v_1, \ldots, v_q] = \sum_{0 \leqslant i \leqslant q} (-1)^i [v_0, v_1, \ldots, \hat{v}_i, \ldots, v_q],$$

где $[v_0, v_1, \ldots, \hat{v}_i, \ldots, v_q]$ — ориентированный $(q-1)$-мерный симплекс, полученный выбрасыванием вершины v_i. Если в группе $C_q(K)$ выполнено соотношение $\sigma_1^q + \sigma_2^q = 0$, то, как легко проверить, в группе $C_{q-1}(K)$ выполнено соотношение $\partial_q(\sigma_1^q) + \partial_q(\sigma_2^q) = 0$. Следовательно, ∂_q продолжается до гомоморфизма $C_q(K)$ в $C_{q-1}(K)$. Будем считать, что при $q \leqslant 0$ гомоморфизм ∂_q тривиален. Не трудно показать, что для всех q имеет место равенство $\partial_q \partial_{q+1} = 0$.

Следовательно, определен свободный неотрицательный цепной комплекс $C(K) = \{C_q(K), \partial_q\}$, называемый *ориентированным цепным комплексом* симплициального комплекса K. Его группа гомологий (обозначается $H(K)$) является градуированной группой $\{H_q(K) = H_q(C(K))\}$ и называется *группой ориентированных гомологий* комплекса K. Группа $H_q(K)$ называется *q-мерной группой ориентированных гомологий* комплекса K.

Если комплекс K реализован в некотором евклидовом пространстве, то ориентированными q-мерными симплексами из K являются q-мерные симплексы из K, наделенные ориентацией (в смысле линейной алгебры) выпуклых оболочек, натянутых на

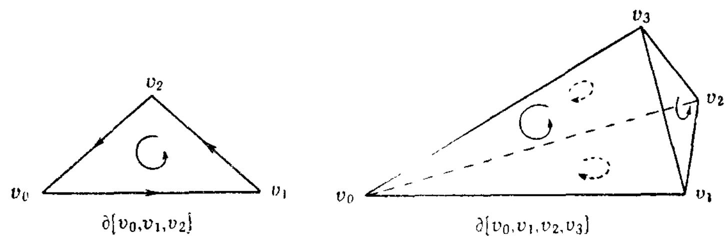


Рис. 10.

них. Границей ориентированного q-мерного симплекса является сумма его ориентированных $(q-1)$-мерных граней, причем ориентация каждой грани согласована с ориентацией самого q-мерного симплекса, как показано на рис. 10.

Ориентированный q-мерный цикл z из K является «замкнутой» совокупностью ориентированных q-мерных симплексов в том смысле, что каждый $(q-1)$-мерный симплекс входит в границу цикла z одинаковое число раз с противоположными ориентациями. Тогда $H_q(K)$ — группа классов эквивалентности таких q-мерных циклов; два цикла эквивалентны, если их разность является границей. Таким образом, интуитивно группа $H_q(K)$ соответствует группе, порожденной q-мерными «дырками» в пространстве $|K|$.

Удобно считать, что в группах цепей $C_q(K)$ имеются дополнительные образующие и дополнительные соотношения. Если v_0, $v_1, \ldots, v_q$ — вершины (не обязательно различные) некоторого симплекса из K, то будем считать элемент $[v_0, v_1, \ldots, v_q] \in C_q(K)$ равным нулю, если не все вершины различны, и совпадающим с ориентированным q-мерным симплексом, определенным выше, если все вершины различны. Соотношение (а) остается справедливым и для этих дополнительных образующих (если не все вершины $v_0, v_1, \ldots, v_q$ различны, то левая часть соотношения (а) обращается в нуль; легко проверить, что тогда и правая часть обращается в нуль).

Если $\varphi\colon K_1 \to K_2$ — симплициальное отображение, то можно построить цепное отображение $C(\varphi)\colon C(K_1) \to C(K_2)$, положив

(b) $$C(\varphi)([v_0, v_1, \ldots, v_q]) = [\varphi(v_0), \varphi(v_1), \ldots, \varphi(v_q)].$$

Заметим, что если $v_0, v_1, \ldots, v_q$ — различные вершины некоторого симплекса из K_1, то все $\varphi(v_0), \varphi(v_1), \ldots, \varphi(v_q)$ являются вершинами некоторого симплекса из K_2, но не обязательно различными. Следовательно, правая часть соотношения (b) могла бы и не иметь смысла, если бы мы не определили $[v_0, v_1, \ldots, v_q]$ как элемент из C_q, независимо от того, различны или нет вершины $v_0, v_1, \ldots, v_q$. Легко проверить, что $C(\varphi)$ — цепное отображение.

2. Теорема. *Существует ковариантный функтор C из категории симплициальных комплексов в категорию цепных комплексов, сопоставляющий комплексу K его ориентированный цепной комплекс $C(K)$.* ■

Композиция функтора C и гомологического функтора называется *функтором ориентированных гомологий*; этот функтор действует из категории симплициальных комплексов в категорию градуированных групп. Симплициальному комплексу K сопоставляется градуированная группа $H(K) = \{H_q(K) = H_q(C(K))\}$, а симплициальному отображению $\varphi\colon K_1 \to K_2$ — гомоморфизм $\varphi_*\colon H(K_1) \to H(K_2)$ степени 0, индуцированный отображением $C(\varphi)\colon C(K_1) \to C(K_2)$. Если L — некоторый подкомплекс комплекса K и $i\colon L \subset K$ — вложение, то $C(i)\colon C(L) \to C(K)$ — мономорфизм и с его помощью мы будем отождествлять $C(L)$ с соответствующим подкомплексом комплекса $C(K)$.

Построим теперь функтор сингулярных цепей из категории топологических пространств в категорию цепных комплексов. Пусть $p_0, p_1, p_2, \ldots$ — фиксированная раз и навсегда бесконечная последовательность различных элементов. Пусть Δ^q — пространство симплициального комплекса (где $q \geqslant 0$), состоящего из всех непустых подмножеств множества $\{p_0, p_1, \ldots, p_q\}$ (следовательно, Δ^q есть замкнутый симплекс $|p_0, p_1, \ldots, p_q|$). Если $q \geqslant 0$ и $0 \leqslant i \leqslant q+1$, то линейное отображение

$$e^i_{q+1}\colon \Delta^q \to \Delta^{q+1}$$

определяется отображением вершин

$$e^i_{q+1}(p_j) = \begin{cases} p_j, & j < i, \\ p_{j+1}, & j \geqslant i. \end{cases}$$

Тогда $e^i_{q+1}(\Delta^q)$ есть замкнутый симплекс $|p_0, p_1, \ldots, \hat{p}_i, \ldots, p_{q+1}|$ в Δ^{q+1}, расположенный напротив вершины p_i. Прямое вычисление показывает, что

3. *Если* $0 \leqslant j < i \leqslant q+1$, *то* $e^i_{q+2}e^j_{q+1} = e^j_{q+2}e^{i-1}_{q+1}$. ∎

Пусть X — некоторое топологическое пространство. Если $q \geqslant 0$, то *q-мерным сингулярным симплексом σ пространства X* называется непрерывное отображение

$$\sigma\colon \Delta^q \to X.$$

Если $q > 0$ и $0 \leqslant i \leqslant q$, то *$i$-й гранью симплекса* σ (обозначается $\sigma^{(i)}$) называется $(q-1)$-мерный сингулярный симплекс пространства X, совпадающий с композицией

$$\sigma^{(i)} = \sigma \circ e^i_q\colon \Delta^{q-1} \to \Delta^q \to X.$$

Из утверждения 3 следует, что

4. *Если* $q > 1$ *и* $0 \leqslant j < i < q$, *то* $(\sigma^{(i)})^{(j)} = (\sigma^{(j)})^{(i-1)}$. ∎

Сингулярным цепным комплексом пространства X (обозначается $\Delta(X)$) называется неотрицательный свободный цепной комплекс $\Delta(X) = \{\Delta_q(X), \partial_q\}$, где $\Delta_q(X)$ — свободная абелева группа, порожденная q-мерными сингулярными симплексами пространства X при $q \geqslant 0$ ($\Delta_q(X) = 0$ для $q < 0$). Для $q \geqslant 1$ гомоморфизм ∂_q определяется равенством

$$\partial_q(\sigma) = \sum_{0 \leqslant i \leqslant q} (-1)^i \sigma^{(i)}.$$

Мм получили цепной комплекс, поскольку равенство $\partial_q\partial_{q+1} = 0$ является непосредственным следствием утверждения 4. Если пространство X пусто, то $\Delta_q(X) = 0$ для всех q.

Если отображение $f\colon X \to Y$ непрерывно, то можно определить цепное отображение

$$\Delta(f)\colon \Delta(X) \to \Delta(Y),$$

полагая $\Delta(f)(\sigma) = f \circ \sigma$ для всякого q-мерного сингулярного симплекса $\sigma\colon \Delta^q \to X$. Итак, мы получили следующий результат:

5. Теорема. *Существует ковариантный функтор Δ из категории топологических пространств в категорию цепных комплексов, сопоставляющий пространству X его сингулярный цепной комплекс* $\Delta(X)$. ∎

Композиция функтора Δ и гомологического функтора является ковариантным функтором (и называется *функтором сингулярных гомологий*) из категории топологических пространств в категорию градуированных групп. Пространству X этот функтор сопоставляет градуированную группу $H(X)=\{H_q(X)=H_q(\Delta(X))\}$, а отображению $f\colon X\to Y$ — гомоморфизм

$$f_*\colon H(X)\to H(Y)$$

степени 0, индуцированный цепным отображением $\Delta(f)\colon \Delta(X)\to\Delta(Y)$. Группа $H_q(X)$ называется *q-мерной группой сингулярных гомологий* пространства X. Если A — подпространство пространства X и $i\colon A\subset X$, то отображение $\Delta(i)\colon \Delta(A)\to\Delta(X)$ является мономорфизмом, и с его помощью мы будем отождествлять $\Delta(A)$ с соответствующим подкомплексом комплекса $\Delta(X)$.

Категория цепных комплексов допускает суммы и произведения произвольных семейств. Другими словами, если $\{C^j\}_{j\in J}$ — семейство цепных комплексов, то можно определить цепной комплекс — *сумму* $\bigoplus C^j$ и цепной комплекс — *произведение* $\prod C^j$; при этом выполняются равенства $(\bigoplus C^j)_q=\bigoplus C^j_q$ и $(\prod C^j)_q=\prod C^j_q$ для всех q. Отсюда вытекает, что $Z_q(\bigoplus C^j)=\bigoplus Z_q(C^j)$, $B_q(\bigoplus C^j)=\bigoplus B_q(C^j)$, $Z_q(\prod C^j)=\prod Z_q(C^j)$ и $B_q(\prod C^j)=\prod B_q(C^j)$ для всех q. Следовательно, $H(\bigoplus C^j)=\bigoplus H(C^j)$ и $H(\prod C^j)=\prod H(C^j)$.

6. Теорема. *В категории цепных комплексов гомологический функтор коммутирует с произвольными суммами и произведениями.* ■

Категория цепных комплексов допускает также пределы прямых и обратных спектров (q-мерная группа цепей которых совпадает с соответствующим пределом q-мерной группы цепей элементов спектра).

7. Теорема. *Гомологический функтор коммутирует с пределами прямых спектров.*

Доказательство. Пусть $\{C^\alpha, \tau^\beta_\alpha\}$ — прямой спектр цепных комплексов, и пусть $\{C, i_\alpha\}$ — предел этого прямого спектра (т. е. заданы отображения $i_\alpha\colon C^\alpha\to C$, причем $i_\alpha=i_\beta\circ\tau^\beta_\alpha\colon C^\alpha\to C^\beta\to C$, если $\alpha\leqslant\beta$). Тогда $\{H(C^\alpha), \tau^\beta_{\alpha*}\}$ является прямым спектром градуированных групп, и мы докажем, что $\{H(C), i_{\alpha*}\}$ совпадает с пределом этого прямого спектра.

Покажем, что выполнено условие 1.3а из введения. Пусть $\{z\}\in H_q(C)$. Тогда $z=i_\alpha c^\alpha$ для некоторого $c^\alpha\in(C^\alpha)_q$. Поскольку

$$0=\partial_q z=\partial_q i_\alpha c^\alpha=i_\alpha\partial^\alpha_q c^\alpha,$$

существует индекс β ($\alpha\leqslant\beta$), такой, что $\tau^\beta_\alpha\partial^\alpha_q c^\alpha=0$. Значит, $\tau^\beta_\alpha c^\alpha$ — цикл группы $(C^\beta)_q$ и $i_\beta\tau^\beta_\alpha c^\alpha=i_\alpha c^\alpha=z$. Следовательно, $i_{\beta*}\{\tau^\beta_\alpha c^\alpha\}=\{z\}$.

Покажем, что условие 1.3b из введения также выполняется. Поскольку мы имеем дело с пределом прямого спектра групп, достаточно показать, что если элемент $\{z^\alpha\} \in H_q(C^\alpha)$ принадлежит ядру гомоморфизма $i_{\alpha*}$, то существует такой индекс γ $(\alpha \leqslant \gamma)$, что элемент $\{z^\alpha\}$ принадлежит ядру гомоморфизма $\tau^\gamma_{\alpha*}$. Если $i_{\alpha*}\{z^\alpha\} = 0$, то $i_\alpha z^\alpha = \partial_{q+1} c$ для некоторого $c \in C_{q+1}$. Поскольку $c = i_\beta c^\beta$ для некоторого β, мы получаем $i_\alpha z^\alpha = i_\beta \partial^\beta_{q+1} c^\beta$. Выберем γ' таким образом, чтобы α, $\beta \leqslant \gamma'$. Тогда $i_{\gamma'}(\tau^{\gamma'}_\alpha z^\alpha - \tau^{\gamma'}_\beta \partial^\beta_{q+1} c^\beta) = 0$. Следовательно, существует индекс γ $(\gamma' \leqslant \gamma)$, такой, что

$$\tau^\gamma_{\gamma'}(\tau^{\gamma'}_\alpha z^\alpha - \tau^{\gamma'}_\beta \partial^\beta_{q+1} c^\beta) = 0.$$

Тогда $\tau^\gamma_\alpha z^\alpha = \partial^\gamma_{q+1}(\tau^\gamma_\beta c^\beta)$, и, значит, $\tau^\gamma_{\alpha*}\{z^\alpha\} = 0$. ■

Гомологический функтор, вообще говоря, не коммутирует с пределами обратных спектров. Проиллюстрируем это утверждение на примере:

8. Пример. Для каждого целого $n \geqslant 1$ определим цепные комплексы C_n так: $(C_n)_q = 0$ при $q \neq 0$, 1 и $(C_n)_0$ и $(C_n)_1$ совпадают с группой целых чисел $\mathbf{Z}$ для всех n. Дифференциал $(C_n)_1 \xrightarrow{(\partial_n)_1} (C_n)_0$ будем считать умножением на 2. Для каждого n определим цепное отображение $\tau^n\colon C_{n+1} \to C_n$ как умножение на 3 на каждой группе цепей и для $n \leqslant m$ определим отображение $\tau^m_n\colon C_m \to C_n$ как композицию $\tau^m_n = \tau^n \tau^{n+1} \ldots \tau^{m-1}$. Тогда $\{C_n, \tau^m_n\}$ является обратным спектром и его пределом служит тривиальный цепной комплекс. Следовательно, для всех q имеет место равенство $H_q(\varprojlim \{C_n, \tau^m_n\}) = 0$. Но $H_0(C_n) \approx \mathbf{Z}_2$ для всех n и $\tau^m_{n*}\colon H_0(C_m) \approx H_0(C_n)$ для всех $n \leqslant m$. Следовательно, $\varprojlim \{H_0(C_n), \tau^m_{n*}\} \approx \mathbf{Z}_2$.

§ 2. Цепная гомотопия

В этом параграфе рассматривается гомотопия в категории цепных комплексов. Мы докажем, что для свободных цепных комплексов стягиваемость эквивалентна тривиальности всех групп гомологий. Это приведет нас к методу построения цепных отображений и гомотопий с помощью общей процедуры, известной под названием метода ацикличных моделей. Заканчивается параграф определением конуса цепного отображения и выяснением его связи с этим цепным отображением.

Пусть τ, $\tau'\colon C \to C'$ — цепные отображения. *Цепной гомотопией* D от τ до τ' (обозначается $D\colon \tau \simeq \tau'$) называется гомоморфизм $D = \{D_q\}$ степени 1 из C в C', такой, что для всех q имеет место равенство

$$\partial'_{q+1} D_q + D_{q-1} \partial_q = \tau_q - \tau'_q\colon C_q \to C'_q.$$

Если существует цепная гомотопия от τ до τ', то мы говорим, что отображения τ и τ' *цепно гомотопны*, и пишем $\tau \simeq \tau'$. Легко видеть, что цепная гомотопия определяет отношение эквивалентности на множестве цепных отображений из C в C'. Соответствующее множество классов эквивалентности обозначается через $[C; C']$; если $\tau\colon C \to C'$ — некоторое цепное отображение, то его класс эквивалентности обозначается $[\tau]$.

1. Лемма. *Композиции цепно гомотопных цепных отображений цепно гомотопны.*

Доказательство. Пусть $D\colon \tau \simeq \tau'$, где $\tau, \tau'\colon C \to C'$, и $\bar{D}\colon \bar{\tau} \simeq \bar{\tau}'$, где $\bar{\tau}, \bar{\tau}'\colon C' \to C''$. Тогда отображение

$$\bar{\tau}D + \bar{D}\tau'\colon C \to C' \to C''$$

имеет степень 1 и является цепной гомотопией от $\bar{\tau}\tau$ до $\bar{\tau}'\tau'$. ■

Отсюда вытекает, что можно определить категорию, объектами которой являются цепные комплексы, а морфизмами — гомотопические классы цепных отображений. Цепное отображение $\tau\colon C \to C'$ называется *цепной эквивалентностью*, если $[\tau]$ является эквивалентностью в категории гомотопических типов цепных комплексов. Если существует цепная эквивалентность между C и C', то мы говорим, что C и C' *цепно эквивалентны*.

2. Теорема. *Если отображения $\tau, \tau'\colon C \to C'$ цепно гомотопны, то*

$$\tau_* = \tau'_*\colon H(C) \to H(C').$$

Доказательство. Пусть $D\colon \tau \simeq \tau'$. Для любого цикла $z \in Z_q(C)$ имеет место равенство

$$\partial'_{q+1}D_q(z) = \tau_q(z) - \tau'_q(z),$$

показывающее, что $\tau_q(z) \sim \tau'_q(z)$ и $\tau_*\{z\} = \tau'_*\{z\}$. ■

Цепным стягиванием цепного комплекса C называется гомотопия от тождественного цепного отображения 1_C до нулевого цепного отображения 0_C комплекса C в себя. Если существует цепное стягивание комплекса C, то C называется *цепно стягиваемым*. Комплекс C называется *ацикличным*, если $H(C) = 0$ (т. е. если $H_q(C) = 0$ для всех q).

3. Следствие. *Цепно стягиваемый цепной комплекс ацикличен.*

Доказательство. Пусть цепной комплекс C таков, что $1_C \simeq 0_C$. Из теоремы 2 следует, что $(1_C)_* = (0_C)_*$. Более того, $(1_C)_* = 1_{H(C)}$ и $(0_C)_* = 0_{H(C)}$. Следовательно, $1_{H(C)} = 0_{H(C)}$, но это равенство может иметь место лишь в том случае, когда $H(C) = 0$. ■

Обращение следствия 3 неверно.

4. Пример. Пусть C — цепной комплекс, для которого $C_q = 0$, если $q \neq 0$, 1, 2, и пусть последовательность $C_2 \xrightarrow{\partial_2} C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0$ совпадает с последовательностью $\mathbf{Z} \xrightarrow{\alpha} \mathbf{Z} \xrightarrow{\beta} \mathbf{Z}_2$, где $\alpha(n) = 2n$, $\beta(2m) = 0$ и $\beta(2m+1) = 1$. Тогда комплекс C ацикличен, но не стягиваем. Действительно, если бы существовало некоторое цепное стягивание D: $1_C \simeq 0_C$, то гомоморфизм β имел бы правый обратный D_0: $\mathbf{Z}_2 \to \mathbf{Z}$, однако всякий гомоморфизм $\mathbf{Z}_2 \to \mathbf{Z}$ тривиален.

Если C — свободный цепной комплекс, то обращение следствия 3 уже имеет место.

5. Теорема. *Свободный цепной комплекс тогда и только тогда ацикличен, когда он стягиваем.*

Доказательство. Мы покажем, что свободный ацикличный цепной комплекс C стягиваем. В этом случае дифференциал ∂_q для каждого q является эпиморфизмом C_q на $B_{q-1}(C) = Z_{q-1}(C)$. Поскольку группа C_{q-1} свободна, группа $Z_{q-1}(C)$ тоже свободна, и, значит, существует гомоморфизм

$$s_{q-1}\colon Z_{q-1}(C) \to C_q,$$

являющийся правым обратным к ∂_q. Тогда гомоморфизм $1_{C_q} - s_{q-1}\partial_q$ переводит C_q в $Z_q(C)$. Определим совокупность гомоморфизмов $\{D_q\}$, полагая

$$D_q = s_q\left(1_{C_q} - s_{q-1}\partial_q\right)\colon C_q \to C_{q+1}.$$

Тогда

$$\partial_{q+1}D_q + D_{q-1}\partial_q = 1_{C_q} - s_{q-1}\partial_q + s_{q-1}\left(1_{C_{q-1}} - s_{q-2}\partial_{q-1}\right)\partial_q = 1_{C_q},$$

откуда видно, что $\{D_q\}$ — цепное стягивание комплекса C. ∎

Метод доказательства теоремы 5 — это стандартный метод построения цепных отображений и гомотопий из свободного цепного комплекса в ацикличный цепной комплекс. Разовьем теперь этот метод, чтобы получить общий способ построения цепных отображений и цепных гомотопий, называемый *методом ацикличных моделей*. Этот метод будет неоднократно использоваться при последующем изложении. Мы рассмотрим здесь частный случай метода ацикличных моделей, достаточный для нужных нам приложений [1]).

Категорией с моделями называется категория $\mathscr{C}$, в которой выделен класс $\mathfrak{M}$ объектов, называемых *моделями*. Если задан

[1]) Общее изложение можно найти в работе: Eilenberg S., Mac Lane S., Acyclic models, *Am. J. Math.*, **79** (1953), 189—199. [См. также Годеман Р., Алгебраическая топология и теория пучков, М., 1961, гл. I, § 2.5.—*Прим. перев.*]

ковариантный функтор G из категории $\mathscr{C}$ с моделями $\mathfrak{M}$ в категорию абелевых групп, то *базисом* функтора G называется совокупность $\{g_j \in G(M_j)\}_{j\in J}$, где $M_j \in \mathfrak{M}$, такая, что для любого объекта X из $\mathscr{C}$ совокупность элементов

$$\{G(f)(g_j)\}_{j\in J,\, f\in \hom(M_j,\, X)}$$

служит базисом группы $G(X)$. Если функтор G обладает базисом, то он называется *свободным функтором* на категории $\mathscr{C}$ с моделями $\mathfrak{M}$. В этом случае гомоморфизм $G(h)$ (где $h\in\hom(X,\,Y)$) переводит всякий элемент базиса группы $G(X)$ в некоторый элемент базиса группы $G(Y)$. Следовательно, функтор G является композицией ковариантного функтора, сопоставляющего всякому объекту X множество $\{G(f)(g_j)\,|\,j\in J,\ f\in\hom(M_j,\,X)\}$, и ковариантного функтора примера 1.2.2, сопоставляющего каждому множеству порожденную им свободную абелеву группу.

Пусть G — ковариантный функтор из категории $\mathscr{C}$ с моделями $\mathfrak{M}$ в категорию цепных комплексов. Функтор G называется *свободным*, если каждый G_q является свободным функтором в категорию абелевых групп.

6. Пример. Пусть K — симплициальный комплекс, и пусть $\mathscr{C}(K)$ — категория, определенная частично упорядоченным множеством подкомплексов из K (см. пример 1.1.11). Пусть $\mathfrak{M}(K) = \{\bar{s}\,|\,s\in K\}$ — множество моделей категории $\mathscr{C}(K)$. Мы покажем, что ковариантный функтор C, сопоставляющий каждому подкомплексу комплекса K ориентированный цепной комплекс его цепей, является свободным неотрицательным[1]) функтором из категории $\mathscr{C}(K)$ с моделями $\mathfrak{M}(K)$ в категорию цепных комплексов. Для каждой модели $\bar{s}$ размерности q выберем раз и навсегда ориентированный q-мерный симплекс $\sigma(s)$, являющийся образующей группы $C_q(\bar{s})$. Тогда семейство $\{\sigma(s)\,|\,\dim s = q\}_{s\in K}$ представляет собой базис функтора C_q. Следовательно, C_q — свободный функтор с моделями $\mathfrak{M}(K)$.

7. Пример. Пусть $\mathscr{C}$ — категория топологических пространств с моделями $\mathfrak{M} = \{\Delta^q\,|\,q\geqslant 0\}$, и пусть Δ — функтор сингулярных цепей. Тогда Δ является свободным и неотрицательным функтором на категории $\mathscr{C}$ с моделями $\mathfrak{M}$. Действительно, если $\xi_q\colon \Delta^q\subset\Delta^q$, то $\{\xi_q\in\Delta_q(\Delta^q)\}$ — базис функтора Δ_q.

Пусть G — ковариантный функтор из некоторой категории $\mathscr{C}$ в категорию цепных комплексов. Для всех q определены ковариантные функторы $H_q(G)$ из категории $\mathscr{C}$ в категорию абелевых групп, сопоставляющие объекту X группу $H_q(G(X))$. Пусть $\mathscr{C}$ — категория с моделями $\mathfrak{M}$; функтор G из $\mathscr{C}$ в категорию цепных ком-

[1]) Это означает, что $C_q = 0$ при $q < 0$. — *Прим. ред.*

плексов называется *ацикличным в положительных размерностях*, если $H_q(G(M))=0$ для всех $q>0$ и всех $M\in\mathfrak{M}$. Докажем теперь основной результат о построении цепных отображений и гомотопий.

8. Теорема. *Пусть $\mathscr{C}$ — категория с моделями $\mathfrak{M}$, и пусть G и G' — ковариантные функторы из $\mathscr{C}$ в категорию цепных комплексов, причем функтор G свободен и неотрицателен, а функтор G' ацикличен в положительных размерностях. Тогда*

(a) *любое естественное преобразование $H_0(G)\to H_0(G')$ индуцировано естественным цепным отображением τ: $G\to G'$;*

(b) *два естественных цепных отображения τ, τ': $G\to G'$, индуцирующие одно и то же естественное преобразование $H_0(G)\to$ $\to H_0(G')$, естественно цепно гомотопны.*

Доказательство. Для каждого объекта $X\in\mathscr{C}$ мы должны определить цепное отображение $\tau(X)$: $G(X)\to G'(X)$ (или цепную гомотопию $D(X)$: $\tau(X)\simeq\tau'(X)$), такое, что если h: $X\to Y$ — некоторый морфизм в $\mathscr{C}$, то

$$\tau(Y)\,G(h)=G'(h)\,\tau(X)\qquad[\text{или } D(Y)\,G(h)=G'(h)\,D(X)].$$

Если $q\geqslant 0$, то пусть $\{g_j\in G_q(M_j)\}_{j\in J_q}$ — базис функтора G_q, где $M_j\in\mathfrak{M}$ для каждого $j\in J_q$. Тогда группа $G_q(X)$ обладает базисом

$$\{G_q(f)(g_j)\}_{j\in J_q,\ f\in\hom(M_j,\ X)}.$$

Отсюда следует, что $\tau_q(X)$ (или $D_q(X)$) определяется совокупностью $\{\tau_q(M_j)(g_j)\}_{j\in J_q}$ и соотношением

$$\text{(a)}\qquad \tau_q(X)\left(\sum n_{ij}G_q(f_{ij})(g_j)\right)=\sum n_{ij}G'_q(f_{ij})\,\tau_q(M_j)(g_j)$$

(или совокупностью $\{D_q(M_j)\,g_j\}_{j\in J_q}$ и соотношением

$$\text{(b)}\qquad D_q(X)\left(\sum n_{ij}G_q(f_{ij})(g_j)\right)=\sum n_{ij}G'_q(f_{ij})\,D_q(M_j)(g_j)\text{)}.$$

Мы определим $\tau_q(X)$ индукцией по q таким образом, чтобы

$$\text{(c)}\qquad \partial\tau_q(X)=\tau_{q-1}(X)\,\partial,$$

и определим $D_q(X)$ индукцией по q так, чтобы

$$\text{(d)}\qquad \partial D_q(X)=\tau_q(X)-\tau'_q(X)-D_{q-1}(X)\,\partial.$$

Если τ_i (или D_i) определено при $i<q$, где $q>0$, то достаточно определить $\tau_q(M_j)(g_j)$ для $j\in J_q$ таким образом, чтобы

$$\text{(e)}\qquad \partial\tau_q(M_j)(g_j)=\tau_{q-1}(M_j)(\partial g_j),$$

и определить $D_q(M_j)(g_j)$ при $j \in J_q$ таким образом, чтобы

(f) $$\partial D_q(M_j)(g_j) = \tau_q(M_j)(g_j) - \tau'_q(M_j)(g_j) - D_{q-1}(M_j)(\partial g_j),$$

поскольку $\tau_q(X)$ (и $D_q(X)$) можно получить тогда с помощью соотношения (a) (или (b)). В этом случае отображения $\tau_q(X)$ (и $D_q(X)$) будут естественными и удовлетворят соотношениям (c) и (d).

Для данного естественного преобразования φ: $H_0(G) \to H_0(G')$ индуктивное построение отображения τ выполняется следующим образом. Для $q = 0$ пусть $\tau_0(M_j)(g_j)$ ($j \in J_0$) — такой элемент группы $G'_0(M_j)$, что $\{\tau_0(M_j)(g_j)\} = \varphi(M_j)\{(g_j)\}$ [1]. С помощью (a) определим теперь $\tau_0(X)$ для произвольных X. Тогда для всякого $g \in G_0(X)$ имеем $\{\tau_0(X)(g)\} = \varphi(X)\{g\}$. В частности, если $j \in J_1$, то $\tau_0(M_j)(\partial g_j)$ является границей в $G'_0(M_j)$. Следовательно, элементы $\tau_1(M_j)(g_j) \in$ $\in G'_1(M_j)$ можно определить так, чтобы $\partial\tau_1(M_j)(g_j) = \tau_0(M_j)(\partial g_j)$. С помощью (a) определяем гомоморфизм $\tau_1(X)$ при произвольных X. Предположим, что отображения τ_i уже определены для всех $i < q$, где $q > 1$, таким образом, что выполняется соотношение (c). Заметим, что правая часть соотношения (e) является циклом в $G'_{q-1}(M_j)$. Так как $q > 1$, то $H_{q-1}(G'(M_j)) = 0$, и мы определяем элемент $\tau_q(M_j)(g_j)$ так, чтобы выполнялось соотношение (e). Определив далее гомоморфизм $\tau_q(X)$ для произвольного X таким образом, чтобы выполнялось соотношение (a), завершаем построение отображения τ.

Пусть теперь отображения τ, τ': $G \to G'$ индуцируют одно и то же естественное преобразование $H_0(G) \to H_0(G')$. Определим $D_0(M_j)(g_j)$ ($j \in J_0$) как элемент группы $G'_1(M_j)$, граница которого равна $\tau_0(M_j)(g_j) - \tau'_0(M_j)(g_j)$. Тогда $D_0(X)$ определяется для всех X с помощью соотношения (b). Предположим, что отображения D_i уже определены для $i < q$, где $q > 0$, таким образом, что выполнено соотношение (d). Заметим, что правая часть (f) является циклом в $G'_q(M_j)$. Так как $q > 0$, то $H_q(G'(M_j)) = 0$, и этот цикл является границей. Определим элемент $D_q(M_j)(g_j) \in G'_{q+1}(M_j)$ так, чтобы выполнялось (f). Теперь используем соотношение (b), чтобы определить $D_q(X)$ для произвольного X. Отображение D построено. ■

Из только что доказанной теоремы можно получить другое доказательство теоремы 5 для неотрицательных комплексов.

---

[1]) Класс гомологий, соответствующий циклу α, обозначается через $\{\alpha\}$. Для понимания написанной формулы следует помнить, что нульмерная цепь является циклом неотрицательного комплекса. — *Прим. ред.*

Действительно, пусть C — свободный неотрицательный цепной комплекс, а $\mathscr{C}$ — категория, состоящая из единственного объекта X и единственного морфизма 1_X. Комплекс C можно рассматривать как ковариантный функтор, определенный на категории $\mathscr{C}$ с моделью $\{X\}$. Значит, C — свободный неотрицательный функтор, и если C — ацикличный цепной комплекс, то функтор C ацикличен в положительных размерностях. Поскольку 1_C и 0_C — цепные преобразования комплекса C, индуцирующие один и тот же гомоморфизм группы $H_0(C)=0$, из теоремы 8 следует, что $1_C \simeq 0_C$, т. е. что комплекс C стягиваем.

Существует полезный алгебраический объект (родственный цилиндру отображения; см. § 1.4), который мы сейчас опишем. Пусть τ: $C \to C'$ — некоторое цепное отображение. *Конусом отображения* τ называется цепной комплекс $\bar{C}=\{\bar{C}_q, \bar{\partial}_q\}$, определяемый последовательностью групп $\bar{C}_q = C_{q-1} \oplus C'_q$ и дифференциалов

$$\bar{\partial}_q(c, c') = (-\partial_{q-1}(c), \ \tau(c) + \partial'_q(c')), \qquad c \in C_{q-1}, \ c' \in C'_q.$$

Легко проверяется следующий результат:

9. Лемма. *Конус $\bar{C}$ является цепным комплексом. Если C и C' — свободные цепные комплексы, то таков же и комплекс $\bar{C}$.* ■

Целесообразность введения конусов отображений видна из следующей теоремы:

10. Теорема. *Цепное отображение тогда и только тогда является цепной эквивалентностью, когда его конус цепно стягиваем.*

Доказательство. Предположим, что τ: $C \to C'$ — цепная эквивалентность. Значит, существуют такие отображения τ': $C' \to C$, D: $C \to C$ и D': $C' \to C'$, что D: $\tau'\tau \simeq 1_C$ и D': $\tau\tau' \simeq 1_{C'}$. Определим гомотопию $\bar{D}$: $\bar{C} \to \bar{C}$, полагая $\bar{D}(c, c') = (c_1, c_2)$, где

$$c_1 = D(c) + \tau' D' \tau(c) - \tau'\tau D(c) + \tau'(c'),$$
$$c_2 = D'\tau D(c) - D'D'\tau(c) - D'(c').$$

Непосредственное вычисление показывает, что $\bar{D}$ является цепным стягиванием комплекса $\bar{C}$.

Обратно, предположим, что $\bar{D}$ — цепное стягивание комплекса $\bar{C}$. Определим отображения τ': $C' \to C$, D: $C \to C$ и D': $C' \to C'$ соотношениями

$$(\tau'(c'), \ -D'(c')) = \bar{D}(0, c'),$$
$$(D(c), \cdot) = \bar{D}(c, 0).$$

Прямая проверка показывает, что τ' является цепным отображением и что D: $\tau'\tau \simeq 1_C$ и D': $\tau\tau' \simeq 1_{C'}$. Следовательно, τ — цепная эквивалентность. ∎

Объединяя этот результат с теоремой 5 и леммой 9, получаем такое

11. Следствие. *Цепное отображение свободного цепного комплекса в свободный цепной комплекс тогда и только тогда является эквивалентностью, когда конус этого отображения ацикличен.* ∎

§ 3. Гомологии симплициальных комплексов

Этот параграф начинается с изучения цепных комплексов с аугментацией и приведенных групп гомологий таких комплексов. Затем мы определяем упорядоченный цепной комплекс симплициального комплекса и доказываем, что он цепно эквивалентен ориентированному цепному комплексу. Этот результат мы используем для доказательства того, что симплициальные отображения из одного и того же класса сопряженности индуцируют цепно гомотопные цепные отображения. Кроме того, мы вычисляем группу $H_0(K)$ в терминах компонент комплекса K. В конце параграфа определяются относительные группы гомологий и эйлерова характеристика симплициальной пары.

В категории непустых симплициальных комплексов всякий симплициальный комплекс P, состоящий из единственной вершины, является терминальным объектом. Если K — непустой симплициальный комплекс, то симплициальное отображение $K \to P$ обладает правым обратным. Следовательно, индуцированное отображение групп гомологий $H(K) \to H(P)$ также обладает правым обратным и, стало быть, является эпиморфизмом. Так как $H_q(P) = 0$ при $q \neq 0$ и $H_0(P) \approx \mathbf{Z}$, отсюда следует, что существует эпиморфизм $H_0(K) \to \mathbf{Z}$. Поскольку $H_0(K) = C_0(K)/\partial_1 C_1(K)$, то тем самым определен эпиморфизм ε: $C_0(K) \to \mathbf{Z}$, для которого $\varepsilon\partial_1 = 0$. Аналогично, в категории непустых топологических пространств X всякое одноточечное множество является терминальным объектом. Точно такие же рассуждения показывают, что можно определить эпиморфизм ε: $\Delta_0(X) \to \mathbf{Z}$, для которого $\varepsilon\partial_1 = 0$. Этим мотивируется следующее определение аугментации:

Аугментацией (*над кольцом* $\mathbf{Z}$) цепного комплекса C называется эпиморфизм ε: $C_0 \to \mathbf{Z}$, для которого композиция $\varepsilon\partial_1$: $C_1 \to C_0 \to \mathbf{Z}$ тривиальна. *Цепным комплексом с аугментацией* называется неотрицательный цепной комплекс, наделенный аугментацией. Аугментацию ε можно рассматривать как эпиморфное цепное отображение комплекса C на цепной комплекс (обозначаемый также через $\mathbf{Z}$), единственной нетривиальной группой цепей которого служит нульмерная группа, изоморфная группе $\mathbf{Z}$. Ясно, что для этого цепного комплекса $\mathbf{Z}$ имеют место равенства $H_q(\mathbf{Z})=0$, если $q\neq 0$, и $H_0(\mathbf{Z})\approx\mathbf{Z}$. Следовательно, ε индуцирует эпиморфизм ε_*: $H_0(C)\to\mathbf{Z}$. Таким образом, цепной комплекс с аугментацией всегда обладает нетривиальной нульмерной группой гомологий.

Ориентированный цепной комплекс $C(K)$ непустого симплициального комплекса K наделяется аугментацией с помощью гомоморфизма ε: $C_0(K)\to\mathbf{Z}$, определенного равенством $\varepsilon([v])=1$ для каждой вершины v комплекса K. Сингулярный цепной комплекс $\Delta(X)$ непустого пространства X наделяется аугментацией ε: $\Delta_0(X)\to\mathbf{Z}$, определенной равенством $\varepsilon(\sigma)=1$ для каждого нульмерного сингулярного симплекса σ пространства X.

Говорят, что цепное отображение τ: $C\to C'$ цепных комплексов с аугментацией *сохраняет аугментацию*, если $\varepsilon'\circ\tau=\varepsilon$: $C_0\to\mathbf{Z}$. Заметим, что отображение τ тогда и только тогда сохраняет аугментацию, когда этим свойством обладает гомоморфизм τ_*, т. е. тогда и только тогда, когда $\varepsilon'_*\circ\tau_*=\varepsilon_*$: $H_0(C)\to\mathbf{Z}$. Можно рассмотреть категорию цепных комплексов с аугментацией и цепных отображений, сохраняющих аугментацию. Цепная гомотопия в этой категории определяется просто как цепная гомотопия.

Мы хотим функториальным образом выделить нетривиальную часть группы гомологий $H_0(C)$ цепного комплекса C с аугментацией. *Приведенным цепным комплексом* $\tilde{C}$ цепного комплекса C с аугментацией называется следующий цепной комплекс: $\tilde{C}_q=C_q$, если $q\neq 0$, $\tilde{C}_0=\ker\varepsilon$ и $\tilde{\partial}_q=\partial_q$ (заметим, что $\partial_1(\tilde{C}_1)\subset\tilde{C}_0$, потому что $\varepsilon\partial_1=0$). Таким образом, $\tilde{C}$ является ядром цепного отображения ε: $C\to\mathbf{Z}$. Если τ: $C\to C'$ — цепное отображение, сохраняющее аугментацию, то τ индуцирует цепное отображение $\tilde{C}\to\tilde{C}'$ приведенных цепных комплексов. Группа гомологий $H(\tilde{C})$ называется *приведенной группой гомологий* комплекса C и обозначается через $\tilde{H}(C)$. Для непустого симплициального комплекса K положим по определению $\tilde{H}(K)=\tilde{H}(C(K))$, а для непустого топологического пространства X положим по определению $\tilde{H}(X)=\tilde{H}(\Delta(X))$. Поскольку цепной комплекс пустого симплициального комплекса или пустого топологического пространства не имеет аугментации, приведенные группы в этом случае не определены. По этой причине рассуждения, опирающиеся на приведенные группы требуют специальной проверки для случая пустых комплексов или пространств.

Ясно, что определено цепное вложение $\tilde{C}\subset C$.

1. Лемма. *Пусть C — цепной комплекс с аугментацией. Тогда*

$$H_q(C) \approx \begin{cases} \tilde{H}_q(C), & q \neq 0, \\ \tilde{H}_0(C) \oplus \mathbf{Z}, & q = 0. \end{cases}$$

Доказательство. Поскольку $\mathbf{Z}$ — свободная группа, $C_0 \approx \tilde{C}_0 \oplus \mathbf{Z}$. Тогда $Z_q(C) = Z_q(\tilde{C})$, если $q \neq 0$, $Z_0(C) \approx Z_0(\tilde{C}) \oplus \mathbf{Z}$ и $B_q(C) = B_q(\tilde{C})$ для всех q. ■

Ясно, что если τ: $C \to C'$ — сохраняющее аугментацию цепное отображение, то изоморфизм, указанный в лемме 1, коммутирует с гомоморфизмом τ_*. Очевидно также, что если C — свободный цепной комплекс с аугментацией, то $\tilde{C}$ — свободный цепной комплекс.

Из леммы 1 вытекает, что если C — цепной комплекс с аугментацией, то $H_0(C) \neq 0$. Следовательно, цепной комплекс с аугментацией не может быть ацикличным. Самое большее, на что мы можем рассчитывать, — это ацикличность комплекса $\tilde{C}$.

2. Лемма. *Пусть C — цепной комплекс с аугментацией. Комплекс $\tilde{C}$ тогда и только тогда цепно стягиваем, когда аугментация ε является цепной эквивалентностью цепных комплексов C и $\mathbf{Z}$.*

Доказательство. Пусть $\bar{C}$ — конус цепного отображения ε: $C \to \mathbf{Z}$. Тогда $\bar{C}_0 \approx \mathbf{Z}$, $\bar{C}_q = C_{q-1}$ при $q > 0$, $\bar{\partial}_1 = \varepsilon$ и $\bar{\partial}_q = -\partial_{q-1}$ при $q > 1$. Из теоремы 4.2.10 следует, что ε тогда и только тогда является цепной эквивалентностью, когда комплекс $\bar{C}$ цепно стягиваем.

Мы покажем, что стягиваемость комплекса $\bar{C}$ равносильна стягиваемости комплекса $\tilde{C}$. Если $\bar{D}$: $\bar{C} \to \bar{C}$ — цепное стягивание комплекса $\bar{C}$, то определим цепное стягивание $\tilde{D}$: $\tilde{C} \to \tilde{C}$ комплекса $\tilde{C}$, полагая $\tilde{D}_{q-1} = -\bar{D}_q | \tilde{C}_{q-1}$. Обратно, если $\tilde{D}$ — цепное стягивание комплекса $\tilde{C}$, то определим цепное стягивание $\bar{D}$: $\bar{C} \to \bar{C}$ таким образом, чтобы гомоморфизм $\bar{D}_0$: $\mathbf{Z} \to C_0$ был правым обратным к ε: $C_0 \to \mathbf{Z}$, гомоморфизм $\bar{D}_1$: $C_0 \to C_1$ был тривиален на $\bar{D}_0(\mathbf{Z})$ и совпадал с $-\tilde{D}_0$ на $\tilde{C}_0$ и чтобы при $q > 1$ гомоморфизм $\bar{D}_q$: $C_{q-1} \to C_q$ совпадал с $-D_{q-1}$. ■

Пусть $\mathscr{C}$ — категория с моделями $\mathfrak{M}$. Функтор G' из $\mathscr{C}$ в категорию цепных комплексов с аугментацией (и цепных отображений, сохраняющих аугментацию) называется *ацикличным*, если ацикличны все комплексы $\tilde{G}'(M)$, где $M \in \mathfrak{M}$. Теорема об ацикличных моделях для цепных комплексов с аугментацией принимает следующий вид:

3. Теорема. *Пусть $\mathscr{C}$ — категория с моделями $\mathfrak{M}$, и пусть ковариантные функторы G и G' из $\mathscr{C}$ в категорию цепных комплексов с аугментацией таковы, что G свободен, а G' ацикличен. Тогда существуют сохраняющие аугментацию естественные преобразования функтора G в функтор G' и любые два из них естественно цепно гомотопны.*

Доказательство. Пусть $\{g_j \in G_0(M_j)\}_{j \in J_0}$ — базис функтора G_0. Из леммы 1 следует, что ε': $H_0(G'(M_j)) \approx \mathbf{Z}$ и что существует единственный элемент $z_j \in H_0(G'(M_j))$, для которого $\varepsilon'(z_j) = \varepsilon(g_j)$. Определим естественное преобразование $H_0(G) \to H_0(G')$, считая, что элемент $\{\sum n_{ij} G_0(f_{ij})(g_j)\} \in H_0(G(X))$ переходит в элемент $\{\sum n_{ij} G'_0(f_{ij})(z_j)\} \in H_0(G'(X))$ для $j \in J_0$ и $f_{ij} \in \hom(M_j, X)$ (где X — произвольный объект категории $\mathscr{C}$). Это единственное естественное преобразование $H_0(G) \to H_0(G')$, коммутирующее с аугментацией. Наша теорема теперь вытекает из теоремы 4.2.8. ■

При условиях теоремы 3 существует единственное естественное преобразование функтора $H(G)$ в функтор $H(G')$, коммутирующее с аугментацией. Оно индуцировано произвольным естественным сохраняющим аугментацию цепным отображением функтора G в функтор G'.

4. Следствие. *Пусть G и G' — свободные и ацикличные ковариантные функторы из категории $\mathscr{C}$ с моделями $\mathfrak{M}$ в категорию цепных комплексов с аугментацией. Тогда G и G' естественно цепно эквивалентны. Более того, всякое естественное цепное отображение функтора G в функтор G', сохраняющее аугментацию, является естественной цепной эквивалентностью.*

Доказательство. Пусть τ: $G \to G'$ — естественное цепное отображение, сохраняющее аугментацию (его существование доказано в теореме 3). По теореме 3 существуют естественное цепное отображение τ': $G' \to G$, сохраняющее аугментацию, и естественные цепные гомотопии D: $\tau' \circ \tau \simeq 1_G$ и D': $\tau \circ \tau' \simeq 1_{G'}$. ■

В конечном счете мы хотим изучить связь между цепным комплексом $C(K)$ симплициального комплекса K и сингулярным цепным комплексом $\Delta(|K|)$ пространства комплекса K. С этой целью мы введем цепной комплекс $\Delta(K)$, занимающий промежуточное положение между интересующими нас комплексами. Пусть K — некоторый симплициальный комплекс. *Упорядоченным q-мерным симплексом* комплекса K называется последовательность $v_0, v_1, \ldots, v_q$ его вершин, принадлежащих некоторому его симплексу. Мы воспользуемся символом $(v_0, v_1, \ldots, v_q)$ для обозначения упорядоченного q-мерного симплекса, отвечающего последовательности вершин $v_0, v_1, \ldots, v_q$. При $q<0$ упорядоченных q-мерных симплексов не существует. Упорядоченный нульмерный симплекс (v) — это то же самое, что и ориентированный нульмерный симплекс $[v]$, а упорядоченный одномерный симплекс (v, v') — это ребро комплекса K.

Определим теперь свободный неотрицательный цепной комплекс, называемый *упорядоченным цепным комплексом* комплекса K, полагая $\Delta(K) = \{\Delta_q(K), \partial_q\}$, где $\Delta_q(K)$ — свободная абелева группа, порожденная упорядоченными q-мерными симплексами комплекса K ($\Delta_q(K) = 0$, если $q<0$), а дифференциалы ∂_q задаются равенствами

$$\partial_q(v_0, v_1, \ldots, v_q) = \sum_{0 \leqslant i \leqslant q} (-1)^i (v_0, v_1, \ldots, \hat{v}_i, \ldots, v_q).$$

Итак, $\Delta(K)$ — цепной комплекс. Если комплекс K непуст, то $\Delta(K)$ можно наделить аугментацией, полагая $\varepsilon(v) = 1$ для каждой вершины v комплекса K. Если φ: $K_1 \to K_2$ — некоторое симплициальное отображение, то сохраняющее аугментацию цепное отображение

$$\Delta(\varphi): \Delta(K_1) \to \Delta(K_2)$$

можно определить равенством

$$\Delta(\varphi)(v_0, v_1, \ldots, v_q) = (\varphi(v_0), \varphi(v_1), \ldots, \varphi(v_q)).$$

В итоге нами получена следующая

5. Теорема. *Существует ковариантный функтор Δ из категории непустых симплициальных комплексов в категорию свободных цепных комплексов с аугментацией, сопоставляющий комплексу K упорядоченный цепной комплекс $\Delta(K)$.* ■

Если L — подкомплекс комплекса K, а i: $L \subset K$ — вложение, то гомоморфизм $\Delta(i)$: $\Delta(L) \to \Delta(K)$ является мономорфизмом. С помощью этого мономорфизма мы будем отождествлять $\Delta(L)$ с соответствующим подкомплексом комплекса $\Delta(K)$. Если $\mathscr{C}(K)$ — категория, определенная частично упорядоченным множеством подкомплексов комплекса K, и $\mathfrak{M}(K) = \{\bar{s} \mid s \in K\}$, то Δ является свободным функтором, определенным на категории $\mathscr{C}(K)$ с моделями $\mathfrak{M}(K)$.

Для всякого симплициального комплекса K можно определить сюръективное цепное отображение (которое сохраняет аугментацию, если комплекс K непуст)

$$\mu: \Delta(K) \to C(K),$$

полагая $\mu(v_0, v_1, \ldots, v_q) = [v_0, v_1, \ldots, v_q]$. Тогда μ является естественным преобразованием функтора Δ в функтор C, определенных на категории симплициальных комплексов. Мы покажем, что это преобразование является для каждого симплициального комплекса цепной эквивалентностью. Следующая теорема будет использована при доказательстве того, что Δ и C — ацикличные функторы на категории $\mathscr{C}(K)$ с моделями $\mathfrak{M}(K)$.

6. Теорема. *Пусть K — некоторый симплициальный комплекс, и пусть w — симплициальный комплекс, состоящий из единственной вершины. Тогда комплексы $\tilde{\Delta}(K * w)$ и $\tilde{C}(K * w)$ цепно стягиваемы.*

Доказательство. Поскольку доказательства аналогичны, мы проведем подробное доказательство лишь для упорядоченного комплекса. Согласно лемме 2, достаточно доказать, что аугментация ε: $\Delta(K * w) \to \mathbf{Z}$ является цепной эквивалентностью. Определим гомоморфизм τ: $\mathbf{Z} \to \Delta_0(K * w)$, полагая $\tau(1) = (w)$, и рассмотрим его как цепное отображение τ: $\mathbf{Z} \to \Delta(K * w)$. Тогда $\varepsilon \circ \tau = 1_{\mathbf{Z}}$. Для доказательства того, что $1_{\Delta(K*w)} \simeq \tau \circ \varepsilon$, определим цепную гомотопию D: $1_{\Delta(K*w)} \simeq \tau \circ \varepsilon$ следующим равенством:

$$D(v_0, v_1, \ldots, v_q) = (w, v_0, v_1, \ldots, v_q). \blacksquare$$

Поскольку q-мерный симплекс является соединением $(q-1)$-мерной грани и противолежащей вершины, получаем такое

7. Следствие. *Для всякого симплекса $s \in K$ комплексы $\tilde{\Delta}(\bar{s})$ и $\tilde{C}(\bar{s})$ ацикличны.* $\blacksquare$

8. Теорема. *Для всякого симплициального комплекса K естественное цепное отображение μ: $\Delta(K) \to C(K)$ является цепной эквивалентностью.*

Доказательство. Если комплекс K пуст, то $\Delta(K) = C(K)$ и μ — тождественное отображение, так что в этом случае утверждение верно. Если комплекс K непуст, то из следствия 7 вытекает, что Δ и C — свободные ацикличные функторы на категории $\mathscr{C}(K)$ с моделями $\mathfrak{M}(K) = \{\bar{s} \mid s \in K\}$. Согласно следствию 4, μ — естественная цепная эквивалентность функторов Δ и C, определенных на категории $\mathscr{C}(K)$. В частности, μ: $\Delta(K) \to C(K)$ — цепная эквивалентность. $\blacksquare$

Следующий результат показывает, что функторы Δ и C переводят сопряженность симплициальных отображений в гомотопию цепных отображений. Его также можно было бы доказать с помощью метода ацикличных моделей.

9. Теорема. *Пусть отображения φ, φ': $K_1 \to K_2$ принадлежат одному и тому же классу сопряженности. Тогда отображения*

$\Delta(\varphi)$, $\Delta(\varphi')$: $\Delta(K_1) \to \Delta(K_2)$ *цепно гомотопны и, аналогично, отображения* $C(\varphi)$, $C(\varphi')$: $C(K_1) \to C(K_2)$ *цепно гомотопны.*

Доказательство. Поскольку цепная гомотопия определяет отношение эквивалентности, достаточно доказать теорему в случае, когда φ и φ' — сопряженные отображения. Цепная гомотопия D: $\Delta(\varphi) \simeq \Delta(\varphi')$ определяется формулой

$$D(v_0, v_1, \ldots, v_q) = \sum_{0 \leqslant i \leqslant q} (-1)^i (\varphi'(v_0), \ldots, \varphi'(v_i), \varphi(v_i), \ldots, \varphi(v_q)).$$

Тот факт, что отображения $C(\varphi)$ и $C(\varphi')$ цепно гомотопны, следует из теоремы 8 и из того, что отображения $\Delta(\varphi)$ и $\Delta(\varphi')$ цепно гомотопны. ■

10. Теорема. *Группы гомологий произвольного комплекса являются прямыми суммами групп гомологий его компонент.*

Доказательство. Если $\{K_j\}$ — компоненты комплекса K, то $\oplus C(K_j) = C(K)$. Требуемый результат получается отсюда с помощью теоремы 4.1.6. ■

Если $\{K_\alpha\}$ — направленная по включению совокупность конечных подкомплексов комплекса K, то $C(K) \approx \varinjlim \{C(K_\alpha)\}$. С помощью теоремы 4.1.7 мы получаем следующий результат:

11. Теорема. *Группы гомологий симплициального комплекса изоморфны пределу прямого спектра групп гомологий его конечных подкомплексов.* ■

Теперь мы в состоянии вычислить группу $H_0(K)$.

12. Лемма. *Если K — непустой связный симплициальный комплекс, то* $\tilde{H}_0(K) = 0$.

Доказательство. Пусть v_0 — фиксированная вершина комплекса K. Для всякой вершины v этого комплекса пусть $e_1 e_2 \ldots e_r$ — ломаная с началом v_0 и концом v. Тогда $e_1 + e_2 + \ldots + e_r$ есть одномерная цепь $c_v \in \Delta_1(K)$, такая, что $\partial c_v = v - v_0$. Поскольку $\varepsilon(\sum n_v v) = \sum n_v$, мы видим, что если $\sum n_v v$ — какая-нибудь нульмерная цепь в $\tilde{\Delta}_0(K)$, то $\sum n_v = 0$ и

$$\partial\left(\sum n_v c_v\right) = \sum n_v v - \sum n_v v_0 = \sum n_v v.$$

Следовательно, $\tilde{H}_0(\Delta(K)) = 0$ и, согласно теореме 8, $\tilde{H}_0(K) = 0$. ■

13. Следствие. *Для всякого симплициального комплекса K группа $H_0(K)$ является свободной группой и ее ранг совпадает с числом непустых компонент комплекса K.*

Доказательство. Если комплекс K пуст, то $H_0(K)=0$, и утверждение в этом случае верно. Если комплекс K непуст и связен, то из лемм 12 и 1 следует, что $H_0(K)\approx \mathbf{Z}$. Общее утверждение вытекает тогда из теоремы 10. ■

Для всякого подкомплекса L комплекса K можно определить *группу ориентированных гомологий комплекса K относительно L* (относительную группу ориентированных гомологий), а именно $H(K, L)=\{H_q(K, L)=H_q(C(K)/C(L))\}$. Если подкомплекс L пуст, то группа $H(K, \varnothing)=H(K)$ называется *абсолютной группой ориентированных гомологий комплекса K*. Аналогично можно определить группу $H(\Delta(K)/\Delta(L))$ *упорядоченных гомологий комплекса K относительно L* — обобщение *абсолютной группы упорядоченных гомологий* $H(\Delta(K), \Delta(\varnothing))$. Относительные группы гомологий $H(K, L)$ и $H(\Delta(K), \Delta(L))$ являются ковариантными функторами из категории симплициальных пар в категорию градуированных групп.

Если группа $H_q(K, L)$ конечно порождена (что всегда выполняется, если $K-L$ содержит лишь конечное число симплексов), то из структурной теоремы (теорема 4.14 из введения) следует, что группа $H_q(K, L)$ является прямой суммой свободной группы и конечного числа конечных циклических групп $\mathbf{Z}_{n_1}\oplus\mathbf{Z}_{n_2}\oplus\ldots\oplus\mathbf{Z}_{n_k}$, где n_i — делитель числа n_{i+1} $(i=1, \ldots, k-1)$. Ранг $\rho(H_q(K, L))$ называется *q-м числом Бетти пары* (K, L), а числа $n_1, n_2, \ldots, n_k$ называются *q-ми коэффициентами кручения* (или *q-ми числами кручения*) *пары* (K, L); q-е число Бетти и q-е коэффициенты кручения определяют группу $H_q(K, L)$ с точностью до изоморфизма.

Градуированная группа C называется *конечно порожденной*, если группы C_q конечно порождены для всех q и равенство $C_q=0$ имеет место для всех q, за исключением конечного числа. Очевидно, если C — конечно порожденный цепной комплекс, то $H(C)$ — конечно порожденная градуированная группа. *Эйлеровой характеристикой* (называемой также *характеристикой Эйлера — Пуанкаре*) конечно порожденной градуированной группы C называется число (обозначается $\chi(C)$)

$$\chi(C)=\sum(-1)^q\rho(C_q).$$

14. Теорема. *Пусть C — конечно порожденный цепной комплекс. Тогда*

$$\chi(C)=\chi(H(C)).$$

Доказательство. Согласно определению, $Z_q(C)\subset C_q$ и $C_q/Z_q(C)\approx B_{q-1}(C)$. По теореме 4.12 из введения

$$\rho(C_q)=\rho(Z_q(C))+\rho(B_{q-1}(C)).$$

Аналогично, $H_q(C) = Z_q(C)/B_q(C)$ и, согласно той же теореме,

$$\rho(Z_q(C)) = \rho(H_q(C)) + \rho(B_q(C)).$$

Исключая $\rho(Z_q(C))$, получаем

$$\rho(C_q) = \rho(H_q(C)) + \rho(B_q(C)) + \rho(B_{q-1}(C)).$$

Умножая это равенство на $(-1)^q$ и суммируя по всем q, получаем требуемый результат. ■

Если группа $H(K, L)$ конечно порождена, то ее эйлерова характеристика называется *эйлеровой характеристикой пары* (K, L) и обозначается $\chi(K, L)$.

15. Следствие. *Если комплекс $K - L$ состоит из конечного числа симплексов и α_q — число его q-мерных симплексов, то*

$$\chi(K, L) = \sum (-1)^q \alpha_q.$$

Доказательство. Если $K - L$ содержит конечное число симплексов, то $C_q(K)/C_q(L)$ — свободная группа ранга α_q и утверждение следует из теоремы 14. ■

§ 4. Сингулярные гомологии

В этом параграфе мы определяем естественное цепное преобразование упорядоченного цепного комплекса симплициального комплекса в сингулярный комплекс его пространства. В § 4.6 будет показано, что это преобразование является цепной эквивалентностью для каждого симплициального комплекса K. Мы также докажем (используя метод ацикличных моделей), что гомотопные непрерывные отображения индуцируют цепно гомотопные цепные отображения сингулярных цепных комплексов. Это приведет нас к вычислению группы $H_0(X)$ в терминах компонент линейной связности пространства X. В заключение мы докажем, что подкомплекс сингулярного цепного комплекса, порожденный «малыми» сингулярными симплексами, цепно эквивалентен этому сингулярному цепному комплексу[1]).

Пусть K — некоторый симплициальный комплекс, а $(v_0, v_1, \ldots$ $\ldots, v_q)$ — его упорядоченный q-мерный симплекс. Существует q-мерный сингулярный симплекс пространства $|K|$, являющийся линейным отображением $\Delta^q \to |K|$, переводящим p_i в v_i при $0 \leqslant i \leqslant q$. Таким образом, мы получаем вложение комплекса $\Delta(K)$ в комплекс $\Delta(|K|)$, являющееся сохраняющим аугментацию цепным отображением

$$\nu\colon \Delta(K) \to \Delta(|K|),$$

[1]) Наше изложение аналогично изложению в статье: Eilenberg S., Singular homology theory, *Ann. Math.*, **45** (1944), 407—447.

переводящим $(v_0, v_1, \ldots, v_q)$ в линейный сингулярный симплекс, определенный выше. Отображение ν является естественным цепным преобразованием ковариантного функтора $\Delta(\cdot)$ в ковариантный функтор $\Delta(|\cdot|)$ на категории симплициальных комплексов. В § 6 будет показано, что ν — естественная цепная эквивалентность. Сейчас мы докажем, что ν является цепной эквивалентностью для комплекса $\bar{s}$ всякого симплекса s.

1. Лемма. *Пусть X — звездное подмножество некоторого евклидова пространства. Приведенный сингулярный комплекс пространства X цепно стягиваем.*

Доказательство. Без ограничения общности можно считать пространство X звездным относительно начала координат. Определим гомоморфизм $\tau\colon \mathbf{Z} \to \Delta_0(X)$, считая $\tau(1)$ равным сингулярному симплексу $\Delta^0 \to X$, являющемуся постоянным отображением в начало координат 0. Тогда $\varepsilon \circ \tau = 1_{\mathbf{Z}}$. Определим цепную гомотопию $D\colon \Delta(X) \to \Delta(X)$ от $1_{\Delta(X)}$ до $\tau \circ \varepsilon$. Если $\sigma\colon \Delta^q \to X$ — некоторый сингулярный q-мерный симплекс пространства X, то пусть $D(\sigma)\colon \Delta^{q+1} \to X$ — сингулярный $(q+1)$-мерный симплекс, определенный равенством

$$D(\sigma)(tp_0 + (1-t)\alpha) = (1-t)\sigma(\alpha),$$

где $\alpha \in |p_1, \ldots, p_{q+1}|$ и $t \in I$. Если $q > 0$, то $(D(\sigma))^{(0)} = \sigma$ и $(D(\sigma))^{(i+1)} = D(\sigma^{(i)})$ при $0 \leqslant i \leqslant q$. Если же $q = 0$, то $(D(\sigma))^{(0)} = \sigma$ и $(D(\sigma))^{(1)} = \tau(1)$. Следовательно,

$$\partial D + D\partial = 1_{\Delta(X)} - \tau \circ \varepsilon$$

и $D\colon 1_{\Delta(X)} \simeq \tau \circ \varepsilon$. Из леммы 4.3.2 теперь вытекает, что комплекс $\tilde{\Delta}(X)$ цепно стягиваем. ■

2. Следствие. *Для всякого симплекса s цепное отображение ν индуцирует изоморфизм между группой упорядоченных гомологий комплекса $\bar{s}$ и группой сингулярных гомологий пространства $|\bar{s}|$.*

Доказательство. Поскольку ν сохраняет аугментацию, ν индуцирует гомоморфизм $\tilde{\nu}_*$ групп $\tilde{H}(\Delta(\bar{s}))$ и $\tilde{H}(|\bar{s}|)$. С помощью изоморфизма леммы 4.3.1 получаем $\nu_* = \tilde{\nu}_* \oplus 1_{\mathbf{Z}}$. Из следствия 4.3.7 вытекает, что $\tilde{H}(\Delta(\bar{s})) = 0$. Согласно лемме 1 и следствию 4.2.3, $\tilde{H}(|\bar{s}|) = 0$. Следовательно, ν_* является изоморфизмом. ■

Используем теперь лемму 1 для доказательства того, что если отображения $f_0, f_1\colon X \to Y$ гомотопны, то отображения $\Delta(f_0)$, $\Delta(f_1)\colon \Delta(X) \to \Delta(Y)$ цепно гомотопны. Прежде всего мы докажем это для отображений $h_0, h_1\colon X \to X \times I$, где $h_0(x) = (x, 0)$ и $h_1(x) = (x, 1)$.

3. Теорема. *Отображения* h_0, h_1: $X \to X \times I$ *индуцируют естественно цепно гомотопные отображения*

$$\Delta(h_0) \simeq \Delta(h_1)\colon\ \Delta(X) \to \Delta(X \times I).$$

Доказательство. Пусть $\Delta'(X) = \Delta(X \times I)$. Тогда Δ и Δ' — ковариантные функторы из категории топологических пространств в категорию цепных комплексов с аугментацией, а $\Delta(h_0)$ и $\Delta(h_1)$ — естественные цепные преобразования функтора Δ в функтор Δ', сохраняющие аугментацию. Так как Δ — свободный функтор относительно моделей $\{\Delta^q\}$, а комплексы

$$\tilde{\Delta}'(\Delta^q) = \tilde{\Delta}(\Delta^q \times I)$$

ацикличны (по лемме 1), то из теоремы 4.3.3 следует, что функторы $\Delta(h_0)$ и $\Delta(h_1)$ естественно цепно эквивалентны. ∎

Из этого частного случая вытекает общий результат.

4. Следствие. *Если отображения* f_0, f_1: $X \to Y$ *гомотопны, то*

$$\Delta(f_0) \simeq \Delta(f_1)\colon\ \Delta(X) \to \Delta(Y).$$

Доказательство. Пусть F: $X \times I \to Y$ — гомотопия от f_0 до f_1. Тогда $f_0 = Fh_0$ и $f_1 = Fh_1$. Следовательно, используя теорему 3, получаем

$$\Delta(f_0) = \Delta(F)\,\Delta(h_0) \simeq \Delta(F)\,\Delta(h_1) = \Delta(f_1). \ ∎$$

Поскольку симплекс Δ^q линейно связен для любого q, всякий сингулярный симплекс σ: $\Delta^q \to X$ переводит Δ^q в некоторую компоненту линейной связности пространства X. Следовательно, если $\{X_j\}$ — совокупность компонент линейной связности пространства X, то $\Delta(X) = \bigoplus \Delta(X_j)$. С помощью теоремы 4.1.6 получается следующая

5. Теорема. *Группа сингулярных гомологий топологического пространства является прямой суммой групп сингулярных гомологий его компонент линейной связности.* ∎

Поскольку пространство Δ^q компактно, всякий сингулярный симплекс σ: $\Delta^q \to X$ переводит Δ^q в некоторое компактное подмножество пространства X. Следовательно, если $\{X_\alpha\}$ — совокупность всех компактных подмножеств пространства X, направленная по включению, то $\Delta(X) \approx \varinjlim\{\Delta(X_\alpha)\}$. Применяя теорему 4.1.7, получаем следующий результат:

6. Теорема. *Группа сингулярных гомологий топологического пространства изоморфна пределу прямого спектра групп сингулярных гомологий его компактных подмножеств.* ∎

Вычислим теперь нульмерную группу сингулярных гомологий топологического пространства.

7. Лемма. *Если X — непустое линейно связное топологическое пространство, то* $\tilde{H}_0(X)=0$.

Доказательство. Пусть x_0 — фиксированная точка пространства X. Для любой точки $x \in X$ существует путь ω_x от x_0 до x. Поскольку симплекс Δ^1 гомеоморфен отрезку I, путь ω_x соответствует одномерному сингулярному симплексу $\sigma_x\colon \Delta^1 \to X$, для которого $\sigma_x^{(0)}=x$ и $\sigma_x^{(1)}=x_0$. Всякий нульмерный сингулярный симплекс пространства X отождествляется с точкой этого пространства. Следовательно, нульмерная цепь (т. е. нульмерный цикл) в X является суммой $\sum n_x x$, где $n_x=0$ для всех, за исключением конечного числа, точек x. Поскольку $\varepsilon\left(\sum n_x x\right)=\sum n_x$, мы видим что если $\varepsilon\left(\sum n_x x\right)=0$ (т. е. если $\sum n_x x \in \tilde{\Delta}_0(X)$), то

$$\partial\left(\sum n_x\sigma_x\right)=\sum n_x x-\left(\sum n_x\right)x_0=\sum n_x x.$$

Следовательно, $\tilde{H}_0(X)=0$. ■

8. Следствие. *Для всякого топологического пространства X группа $H_0(X)$ является свободной группой, ранг которой равен числу непустых компонент линейной связности этого пространства.*

Доказательство. Если X пусто, то $H_0(X)=0$, и утверждение в этом случае справедливо. Если X непусто и линейно связно, то из лемм 7 и 4.3.1 вытекает, что $H_0(X)\approx \mathbf{Z}$. Общий результат получается применением теоремы 5. ■

Если A — подпространство пространства X, то *группой сингулярных гомологий пространства X относительно подпространства A* (относительной группой сингулярных гомологий) называется группа $H(X, A)=\{H_q(X, A)=H_q(\Delta(X)/\Delta(A))\}$. Группа $H(X,\varnothing)=$ $=H(X)$ называется *абсолютной группой сингулярных гомологий пространства X*. Относительная группа гомологий является ковариантным функтором из категории пар топологических пространств в категорию градуированных групп. Мы покажем, что этот функтор можно считать определенным на категории гомотопических типов пар.

9. Теорема. *Если отображения $f_0, f_1\colon (X, A)\to(Y, B)$ гомотопны, то*

$$f_{0*}=f_{1*}\colon H(X, A)\to H(Y, B).$$

Доказательство. Пусть $F\colon (X\times I, A\times I)\to(Y, B)$ — гомотопия от f_0 до f_1. Тогда $f_0=F\bar{h}_0$ и $f_1=F\bar{h}_1$, где отображения $\bar{h}_0, \bar{h}_1\colon (X, A)\to(X\times I, A\times I)$ определяются равенствами $\bar{h}_0(x)=(x, 0)$ и $\bar{h}_1(x)=(x, 1)$. Согласно теореме 3, существует естественная цепная гомотопия $D\colon \Delta(h_0)\simeq\Delta(h_1)$, где отображения $h_0, h_1\colon X\to X\times I$

соответствуют отображениям $\bar{h}_0$ и $\bar{h}_1$ [1]). Поскольку D — естественная гомотопия, $D(\Delta(A)) \subset \Delta(A \times I)$ и для $i = 0, 1$ имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccccc} \Delta(A) & \subset & \Delta(X) & \to & \Delta(X)/\Delta(A) \\ \downarrow{\scriptstyle \Delta(h_i)} & & \downarrow{\scriptstyle \Delta(h_i)} & & \downarrow{\scriptstyle \Delta(\bar{h}_i)} \\ \Delta(A \times I) & \subset & \Delta(X \times I) & \to & \Delta(X \times I)/\Delta(A \times I) \end{array}$$

Цепная гомотопия $\bar{D}$: $\Delta(\bar{h}_0) \simeq \Delta(\bar{h}_1)$ получается из гомотопии D переходом к факторкомплексам. По теореме 4.2.2

$$\bar{h}_{0*} = \bar{h}_{1*}: H(X, A) \to H(X \times I, A \times I).$$

Тогда

$$f_{0*} = F_* \bar{h}_{0*} = F_* \bar{h}_{1*} = f_{1*}. \blacksquare$$

Если группа $H_q(X, A)$ конечно порождена, то ее ранг называется *q-м числом Бетти пары* (X, A), а порядки конечных циклических слагаемых, фигурирующие в структурной теореме, называются *q-ми коэффициентами кручения* (или *q-ми числами кручения*) *пары* (X, A). Если группа $H(X, A)$ конечно порождена, то ее эйлерова характеристика называется *эйлеровой характеристикой пары* (X, A) и обозначается $\chi(X, A)$.

Оставшаяся часть этого параграфа посвящена доказательству того, что подкомплекс сингулярного цепного комплекса, порожденный малыми сингулярными симплексами, цепно эквивалентен этому сингулярному комплексу. Начнем с определения подразделения цепного отображения в сингулярной теории. Сингулярный симплекс σ: $\Delta^q \to \Delta^n$ называется *линейным*, если $\sigma\left(\sum t_i p_i\right) = \sum t_i \sigma(p_i)$, где $t_i \in I$ и $\sum t_i = 1$. Если симплекс σ линеен, то линейны и его грани $\sigma^{(i)}$ при $0 \leqslant i \leqslant q$. Следовательно, множество линейных симплексов в Δ^n порождает подкомплекс $\Delta'(\Delta^n) \subset \Delta(\Delta^n)$.

Линейный симплекс σ в Δ^n полностью определяется точками $\sigma(p_i)$. В случае когда $x_0, x_1, \ldots, x_q \in \Delta^n$, мы будем символом $(x_0, x_1, \ldots, x_q)$ обозначать такой линейный симплекс σ: $\Delta^q \to \Delta^n$, для которого $\sigma(p_i) = x_i$. В этих обозначениях, очевидно,

$$\partial(x_0, \ldots, x_q) = \sum (-1)^i (x_0, \ldots, \hat{x}_i, \ldots, x_q).$$

Тождественное отображение ξ_n: $\Delta^n \subset \Delta^n$ является линейным симплексом. $\xi_n = (p_0, p_1, \ldots, p_n)$.

Пусть b_n — центр симплекса Δ^n (т. е. $b_n = \sum (1/(n+1)) p_i$). Для произвольного $q \geqslant 0$ гомоморфизм

$$\beta_n: \Delta'_q(\Delta^n) \to \Delta'_{q+1}(\Delta^n)$$

---

[1]) То есть h_i — это отображение $\bar{h}_i$, рассматриваемое не как отображение пары (X, A), а как отображение пространства X.— *Прим. ред.*

определим формулой

$$\beta_n(x_0, \ldots, x_q) = (b_n, x_0, \ldots, x_q).$$

Пусть отображение $\tau\colon \mathbf{Z} \to \Delta_0'(\Delta^n)$ определено условием $\tau(1) = (b_n)$. Прямое вычисление показывает, что

10. $$\beta_n\colon 1_{\Delta'(\Delta^n)} \simeq \tau \circ \varepsilon. \ \blacksquare$$

Для всякого топологического пространства X мы сейчас определим сохраняющее аугментацию цепное отображение

$$sd\colon \Delta(X) \to \Delta(X)$$

и цепную деформацию

$$D\colon \Delta(X) \to \Delta(X)$$

от sd до $1_{\Delta(X)}$, причем оба отображения будут функториальны по X, т. е. если $f\colon X \to Y$ — некоторое непрерывное отображение, то коммутативны следующие диаграммы:

$$\begin{array}{ccc} \Delta(X) & \xrightarrow{sd} & \Delta(X) \\ {\scriptstyle\Delta(f)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\Delta(f)} \\ \Delta(Y) & \xrightarrow{sd} & \Delta(Y) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \Delta(X) & \xrightarrow{D} & \Delta(X) \\ {\scriptstyle\Delta(f)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\Delta(f)} \\ \Delta(Y) & \xrightarrow{D} & \Delta(Y) \end{array}$$

Оба отображения sd и D определяются на q-мерных цепях индукцией по q. Если c — нульмерная цепь, то положим $sd(c) = c$ и $D(c) = 0$. Допустим, что sd и D уже определены на q-мерных цепях ($0 \leqslant q < n$, $n \geqslant 1$). Определим sd и D на универсальном сингулярном n-мерном симплексе $\xi_n\colon \Delta^n \subset \Delta^n$ формулами

$$sd(\xi_n) = \beta_n(sd\,\partial(\xi_n)),$$
$$D(\xi_n) = \beta_n(sd(\xi_n) - \xi_n - D\,\partial(\xi_n)).$$

Положим, далее, для любого сингулярного n-мерного симплекса $\sigma\colon \Delta^n \to X$

$$sd(\sigma) = \Delta(\sigma)(sd(\xi_n)),$$
$$D(\sigma) = \Delta(\sigma)(D(\xi_n)).$$

Тогда sd и D обладают всеми требуемыми свойствами.

Если X — метрическое пространство и $c = \sum n_\sigma \sigma$ — некоторая его q-мерная сингулярная цепь, положим

$$\operatorname{mesh} c = \sup\{\operatorname{diam} \sigma(\Delta^q) \mid n_\sigma \neq 0\}.$$

11. Лемма. *Пусть симплекс Δ^n наделен линейной метрикой, и пусть c — его линейная q-мерная цепь. Тогда*

$$\operatorname{mesh}(sd\,c) \leqslant \frac{q}{q+1} \operatorname{mesh} c.$$

Доказательство. Доказательство мы проведем индукцией по q с использованием индуктивного определения отображения sd. Достаточно показать, что если $\sigma=(x_0, x_1, \ldots, x_q)$ — линейный q-мерный симплекс пространства Δ^n, то $\operatorname{mesh}(sd\sigma)\leqslant(q/(q+1))\operatorname{mesh}\sigma$. Если $b=\sum(1/(q+1))\,x_i$, то вычисление, аналогичное выполненному в лемме 3.3.12, показывает, что расстояние от b до любой выпуклой линейной комбинации точек $x_0, x_1, \ldots, x_q$ меньше или равно $(q/(q+1))\operatorname{mesh}(x_0, x_1, \ldots, x_q)$. Следовательно,

$$\operatorname{mesh}(sd\,\sigma)\leqslant\sup\left(\frac{q}{q+1}\operatorname{mesh}\sigma,\ \operatorname{mesh}(sd\,\partial\sigma)\right).$$

По индукции получаем

$$\operatorname{mesh}(sd\,\partial\sigma)\leqslant\frac{q-1}{q}\operatorname{mesh}\partial\sigma\leqslant\frac{q}{q+1}\operatorname{mesh}\sigma,$$

что и дает требуемый результат. ■

Определим, далее, сохраняющие аугментацию цепные отображения $(m\geqslant 0)$

$$sd^m\colon \Delta(X)\to\Delta(X)$$

по индукции следующим образом:

$$sd^0=1_{\Delta(X)},\qquad sd^m=sd\,(sd^{m-1}),\qquad m\geqslant 1.$$

Тогда из леммы 11 вытекает такое

12. Следствие. *Пусть симплекс Δ^n наделен линейной метрикой, и пусть $c\in\Delta'_q(\Delta^n)$. Тогда*

$$\operatorname{mesh}(sd^m\,c)\leqslant(q/(q+1))^m\operatorname{mesh}c.\ ■$$

Пусть $\mathcal{U}=\{A\}$ — некоторая совокупность подмножеств топологического пространства X, и пусть $\Delta(\mathcal{U})$ — подкомплекс комплекса $\Delta(X)$, порожденный сингулярными q-мерными симплексами $\sigma\colon\Delta^q\to X$, такими, что $\sigma(\Delta^q)\subset A$ для некоторого элемента $A\in\mathcal{U}$ (если $\sigma(\Delta^q)\subset A$, то $\sigma^{(i)}(\Delta^{q-1})\subset A$, и, значит, $\Delta(\mathcal{U})$ — подкомплекс комплекса $\Delta(X)$). Поскольку оба отображения sd и D естественны, $sd(\Delta(\mathcal{U}))\subset\Delta(\mathcal{U})$ и $D(\Delta(\mathcal{U}))\subset\Delta(\mathcal{U})$.

13. Лемма. *Пусть совокупность $\mathcal{U}=\{A\}$ такова, что $X=\bigcup\{\operatorname{int}A\mid A\in\mathcal{U}\}$. Для всякого сингулярного q-мерного симплекса σ пространства X существует такое число $m\geqslant 0$, что $sd^m\sigma\in\Delta(\mathcal{U})$.*

Доказательство. Поскольку $X=\bigcup\{\operatorname{int}A\mid A\in\mathcal{U}\}$, мы имеем $\Delta^q=\bigcup\{\sigma^{-1}(\operatorname{int}A)\mid A\in\mathcal{U}\}$. Пусть пространство Δ^q наделено линейной метрикой, и пусть $\lambda>0$ — число Лебега открытого покрытия $\{\sigma^{-1}(\operatorname{int}A)\mid A\in\mathcal{U}\}$ пространства Δ^q относительно этой метрики. Выберем число $m\geqslant 0$ таким образом, чтобы $(q/(q+1))^m\operatorname{diam}\Delta^q\leqslant\lambda$.

Согласно следствию 12, имеем $\operatorname{mesh}(sd^m\xi_q)\leqslant\lambda$. Следовательно, каждый линейный сингулярный симплекс комплекса $sd^m\xi_q$ отображается в одно из множеств $\sigma^{-1}(\operatorname{int} A)$, $A\in\mathcal{U}$. Тогда $sd^m\sigma = \Delta(\sigma)\,sd^m\xi_q$ — цепь в $\Delta(\mathcal{U})$. ∎

Теперь мы готовы к доказательству цепной эквивалентности, упомянутой раньше.

14. Теорема. *Пусть совокупность $\mathcal{U}=\{A\}$ такова, что $X = \bigcup\{\operatorname{int} A \mid A\in\mathcal{U}\}$. Тогда вложение $\Delta(\mathcal{U})\subset\Delta(X)$ является цепной эквивалентностью.*

Доказательство. Для каждого сингулярного симплекса σ в X пусть $m(\sigma)$ — наименьшее неотрицательное целое число, такое, что $sd^{m(\sigma)}\sigma\in\Delta(\mathcal{U})$. По лемме 13 такое число $m(\sigma)$ существует; ясно, что $m(\sigma)=0$ тогда и только тогда, когда $\sigma\in\Delta(\mathcal{U})$. Более того, $m(\sigma^{(i)})\leqslant m(\sigma)$ для $0\leqslant i\leqslant\deg\sigma$.

Определим отображение $\bar D\colon \Delta(X)\to\Delta(X)$ равенством $\bar D(\sigma) = \sum\limits_{0\leqslant j\leqslant m(\sigma)-1} Dsd^j(\sigma)$. Равенство $\bar D(\sigma)=0$ имеет место тогда и только тогда, когда $\sigma\in\Delta(\mathcal{U})$. Кроме того,

$$\begin{aligned}\partial\bar D(\sigma) &= \sum sd^{j+1}(\sigma)-\sum sd^j(\sigma)-\sum Dsd^j(\partial\sigma) = \\ &= sd^{m(\sigma)}(\sigma)-\sigma-\sum_{0\leqslant j\leqslant m(\sigma)-1}\sum_i(-1)^i Dsd^j(\sigma^{(i)});\end{aligned}$$

$$\bar D\,\partial(\sigma)=\sum_i(-1)^i\sum_{0\leqslant j\leqslant m(\sigma^{(i)})-1} Dsd^j(\sigma^{(i)}).$$

Следовательно, элемент

$$\sigma+\partial\bar D(\sigma)+\bar D\,\partial(\sigma)=\sum_i(-1)^i\sum_{m(\sigma^{(i)})\leqslant j\leqslant m(\sigma)-1} Dsd^j(\sigma^{(i)})$$

принадлежит подкомплексу $\Delta(\mathcal{U})$. Определим отображение $\tau\colon\Delta(X)\to\Delta(\mathcal{U})$ равенством $\tau(\sigma)=\sigma+\partial\bar D(\sigma)+\bar D\,\partial(\sigma)$. Тогда τ — цепное отображение, сохраняющее аугментацию. Ясно, что если $i\colon\Delta(\mathcal{U})\subset\Delta(X)$, то $\tau\circ i=1_{\Delta(\mathcal{U})}$ и $\bar D\colon i\circ\tau\simeq 1_{\Delta(X)}$. Следовательно, $[\tau]=[i]^{-1}$ и i является цепной эквивалентностью. ∎

§ 5. Точность

В этом параграфе мы исследуем связи между группами гомологий комплексов C', C и C/C', где C' — подкомплекс комплекса C. Сжатый способ описания этих связей основан на понятии точной последовательности. Основным результатом этого параграфа будет доказательство существования точной последовательности, связывающей гомологии комплексов C', C и C/C'.

Трехчленная последовательность абелевых групп и гомоморфизмов

$$G' \xrightarrow{\alpha} G \xrightarrow{\beta} G''$$

называется *точной в члене* G, если $\ker\beta = \operatorname{im}\alpha$. Последовательность абелевых групп и гомоморфизмов, занумерованных целыми числами (которая может быть ограниченной или нет с одной или с двух сторон):

$$\ldots \to G_{n+1} \xrightarrow{\alpha_{n+1}} G_n \xrightarrow{\alpha_n} G_{n-1} \to \ldots$$

называется *точной последовательностью*, если каждая ее трехчленная подпоследовательность групп, следующих друг за другом, точна в своем среднем члене. Заметим, что точная последовательность, заканчивающаяся с одной стороны тривиальной группой, может быть продолжена до бесконечной точной последовательности приписыванием тривиальных групп и гомоморфизмов.

Короткой точной последовательностью абелевых групп

$$0 \to G' \xrightarrow{\alpha} G \xrightarrow{\beta} G'' \to 0$$

называется пятичленная точная последовательность, на концах которой стоит тривиальная группа. В такой точной последовательности α является мономорфизмом, а β — эпиморфизмом, и ядро β совпадает с $\alpha(G')$. Следовательно, α является изоморфизмом группы G' на подгруппу $\alpha(G') \subset G$, а β индуцирует изоморфизм факторгруппы $G/\alpha(G')$ на группу G''. Группа G называется *расширением группы G' посредством группы G''*.

Для данной точной последовательности

$$\ldots \to G_{n+1} \xrightarrow{\alpha_{n+1}} G_n \xrightarrow{\alpha_n} G_{n-1} \to \ldots$$

положим $G'_n = \ker\alpha_n = \operatorname{im}\alpha_{n+1}$. Тогда из нее получаются короткие точные последовательности

$$0 \to G'_n \to G_n \to G'_{n-1} \to 0$$

для каждой группы G_n, не являющейся ни одним из концов первоначальной последовательности. Композиция отображений $G_n \to G'_{n-1} \to G_{n-1}$ совпадает с α_n.

Гомоморфизмом γ одной точной последовательности $\{G_n \xrightarrow{\alpha_n} G_{n-1}\}$ в другую $\{H_n \xrightarrow{\beta_n} H_{n-1}\}$ с тем же множеством индексов (т. е. той же самой длины) называется последовательность $\{\gamma_n\colon G_n \to H_n\}$ гомоморфизмов, таких, что коммутативна следующая диаграмма:

$$\begin{array}{ccccccccc}
\ldots \to & G_{n+1} & \xrightarrow{\alpha_{n+1}} & G_n & \xrightarrow{\alpha_n} & G_{n-1} & \to \ldots \\
& \downarrow{\scriptstyle\gamma_{n+1}} & & \downarrow{\scriptstyle\gamma_n} & & \downarrow{\scriptstyle\gamma_{n-1}} & \\
\ldots \to & H_{n+1} & \xrightarrow{\beta_{n+1}} & H_n & \xrightarrow{\beta_n} & H_{n-1} & \to \ldots
\end{array}$$

Можно определить категорию точных последовательностей с одним и тем же множеством индексов. В частности, существует категория коротких точных последовательностей и категория точных последовательностей, множеством индексов которых являются все целые числа.

Заметим, что последовательность абелевых групп и гомоморфизмов

$$\ldots \to C_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \to \ldots$$

тогда и только тогда является цепным комплексом, когда $\operatorname{im} \partial_{n+1} \subset \ker \partial_n$ для всех n. Это лишь одно из условий точности в члене C_n. Для цепного комплекса C группа $H_n(C) = \ker \partial_n / \operatorname{im} \partial_{n+1}$ является мерой неточности в члене C_n. Таким образом, цепной комплекс тогда и только тогда является точной последовательностью, когда его градуированная группа гомологий тривиальна. В любом случае тот факт, что группа гомологий измеряет неточность цепного комплекса, наводит на мысль о существовании каких-нибудь соотношений между гомологиями и точностью, и это на самом деле так.

Короткой точной последовательностью цепных комплексов

$$0 \to C' \xrightarrow{\alpha} C \xrightarrow{\beta} C'' \to 0$$

называется такая пятичленная последовательность цепных комплексов и цепных отображений, что для каждого q имеет место короткая точная последовательность абелевых групп

$$0 \to C'_q \xrightarrow{\alpha_q} C_q \xrightarrow{\beta_q} C''_q \to 0.$$

Гомоморфизмом одной короткой точной последовательности цепных комплексов в другую называется совокупность цепных отображений, таких, что коммутативна следующая диаграмма:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & C' & \xrightarrow{\alpha} & C & \xrightarrow{\beta} & C'' & \to & 0 \\ & & {\scriptstyle \tau'}\downarrow & & {\scriptstyle \tau}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \tau''} & & \\ 0 & \to & \bar{C}' & \xrightarrow{\bar{\alpha}} & \bar{C} & \xrightarrow{\bar{\beta}} & \bar{C}'' & \to & 0 \end{array}$$

Тем самым определена категория коротких точных последовательностей цепных комплексов и гомоморфизмов.

1. Пример. Пусть C' — подкомплекс цепного комплекса C, и пусть i: $C' \subset C$ и j: $C \to C/C'$ — цепное вложение и цепная проекция. Имеет место короткая точная последовательность цепных комплексов $0 \to C' \xrightarrow{i} C \xrightarrow{j} C/C' \to 0$. Для данного подкомплекса $\bar{C}' \subset \bar{C}$ и цепного отображения τ: $C \to \bar{C}$, такого, что $\tau(C') \subset \bar{C}'$, можно определить гомоморфизм

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 \to & C' & \xrightarrow{i} & C & \xrightarrow{j} & C/C' & \to 0 \\ & \downarrow{\scriptstyle\tau'} & & \downarrow{\scriptstyle\tau} & & \downarrow{\scriptstyle\tau''} & \\ 0 \to & \overline{C}' & \xrightarrow{\bar{i}} & \overline{C} & \xrightarrow{\bar{j}} & \overline{C}/\overline{C}' & \to 0 \end{array}$$

где $\tau' = \tau \mid C'$, а τ'' индуцировано отображением τ при переходе к факторкомплексу.

2. Пример. Для цепного комплекса C с аугментацией определена короткая точная последовательность цепных комплексов

$$0 \to \tilde{C} \to C \xrightarrow{\varepsilon} \mathbf{Z} \to 0.$$

Можно построить ковариантный функтор C из категории симплициальных пар в категорию коротких точных последовательностей цепных комплексов, сопоставляющий паре (K, L) короткую точную последовательность

$$0 \to C(L) \to C(K) \to C(K)/C(L) \to 0.$$

Аналогично, существует ковариантный функтор Δ из категории пар топологических пространств в категорию коротких точных последовательностей цепных комплексов, сопоставляющий паре (X, A) короткую точную последовательность

$$0 \to \Delta(A) \to \Delta(X) \to \Delta(X)/\Delta(A) \to 0.$$

Кроме того, существует ковариантный функтор Δ из категории симплициальных пар в категорию коротких точных последовательностей цепных комплексов, сопоставляющий паре (K, L) короткую точную последовательность

$$0 \to \Delta(L) \to \Delta(K) \to \Delta(K)/\Delta(L) \to 0.$$

Отображение μ является естественным преобразованием функтора Δ в функтор C, а ν — естественным преобразованием Δ в $\Delta(|\cdot|)$ (оба эти преобразования определены на категории коротких точных последовательностей цепных комплексов).

Определим ковариантные функторы H', H и H'' из категории коротких точных последовательностей цепных комплексов

$$0 \to C' \xrightarrow{\alpha} C \xrightarrow{\beta} C'' \to 0$$

в категорию градуированных групп таким образом, чтобы H', H и H'' переводили члены этой последовательности соответственно в $H(C')$, $H(C)$ и $H(C'')$.

3. Лемма. *На категории коротких точных последовательностей цепных комплексов*

$$0 \to C' \xrightarrow{\alpha} C \xrightarrow{\beta} C'' \to 0$$

существует естественное преобразование ∂_*: $H'' \to H'$, *такое, что если* $\{z''\} \in H(C'')$, *то* $\partial_*\{z''\} = \{\alpha^{-1}\partial\beta^{-1}z''\} \in H(C')$.

Доказательство. Имеет место коммутативная диаграмма:

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \to & C'_{q+1} & \xrightarrow{\alpha} & C_{q+1} & \xrightarrow{\beta} & C''_{q+1} & \to & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle\partial'} & & \downarrow{\scriptstyle\partial} & & \downarrow{\scriptstyle\partial''} & & \\
0 & \to & C'_q & \xrightarrow{\alpha} & C_q & \xrightarrow{\beta} & C''_q & \to & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle\partial'} & & \downarrow{\scriptstyle\partial} & & \downarrow{\scriptstyle\partial''} & & \\
0 & \to & C'_{q-1} & \xrightarrow{\alpha} & C_{q-1} & \xrightarrow{\beta} & C''_{q-1} & \to & 0
\end{array}$$

каждая строка которой представляет собой короткую точную последовательность групп. Если z'' — некоторый q-мерный цикл комплекса C'', то пусть элемент $c \in C_q$ таков, что $\beta(c) = z''$. Тогда $\beta(\partial c) = \partial''\beta(c) = \partial''z'' = 0$. Следовательно, существует единственный элемент $c' \in C'_{q-1}$, такой, что $\alpha(c') = \partial c$. Тогда $\alpha(\partial'c') = \partial\alpha(c') = \partial\partial c = 0$. Поскольку α — мономорфизм, $\partial'c' = 0$. Следовательно, c' является $(q-1)$-мерным циклом комплекса C'.

Мы покажем, что класс гомологий цикла c' в C' зависит только от класса гомологий цикла z'' в C'', и тем самым докажем существование корректно определенного гомоморфизма $\partial_*\{z''\} = \{c'\}$. Пусть элемент $c_1 \in C_q$ таков, что $\beta(c_1) \sim z''$. Значит, существует элемент $d'' \in C''_{q+1}$, такой, что $\beta(c_1) = \beta(c) + \partial''d''$. Выберем элемент $d \in C_{q+1}$ так, чтобы $\beta(d) = d''$. Тогда $\beta(c_1) = \beta(c) + \partial''\beta(d) = \beta(c + \partial d)$. Следовательно, существует элемент $d' \in C'_q$, такой, что $c_1 = c + \partial d + \alpha(d')$ и $\partial c_1 = \partial c + \partial\alpha(d') = \alpha(c') + \alpha(\partial'd') = \alpha(c' + \partial'd')$. Значит, $\alpha^{-1}(\partial c_1) = c' + \partial'd' \sim c'$ и $\{\alpha^{-1}(\partial c_1)\} = \{\alpha^{-1}(\partial c)\}$. Это показывает, что отображение ∂_* корректно определено.

Докажем, что ∂_* — естественное преобразование. Пусть задана коммутативная диаграмма цепных отображений

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \to & C' & \xrightarrow{\alpha} & C & \xrightarrow{\beta} & C'' & \to & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle\tau'} & & \downarrow{\scriptstyle\tau} & & \downarrow{\scriptstyle\tau''} & & \\
0 & \to & \bar{C}' & \xrightarrow{\bar{\alpha}} & \bar{C} & \xrightarrow{\bar{\beta}} & \bar{C}'' & \to & 0
\end{array}$$

строки которой являются короткими точными последовательностями. Тогда

$$\begin{aligned}
\tau'_*\partial_*\{z''\} &= \tau'_*\{\alpha^{-1}\partial\beta^{-1}z''\} = \{\tau'\alpha^{-1}\partial\beta^{-1}z''\} = \\
&= \{\bar{\alpha}^{-1}\tau\partial\beta^{-1}z''\} = \{\bar{\alpha}^{-1}\bar{\partial}\bar{\beta}^{-1}\tau''z''\} = \bar{\partial}_*\tau''_*\{z''\}. \ \blacksquare
\end{aligned}$$

Естественное преобразование ∂_* называется *связывающим гомоморфизмом*; он играет важную роль в следующей *теореме о точности*:

4. Теорема. *Существует ковариантный функтор из категории коротких точных последовательностей цепных комплексов в категорию точных последовательностей групп, сопоставляющий короткой точной последовательности*

$$0 \to C' \xrightarrow{\alpha} C \xrightarrow{\beta} C'' \to 0$$

последовательность

$$\ldots \xrightarrow{\partial_*} H_q(C') \xrightarrow{\alpha_*} H_q(C) \xrightarrow{\beta_*} H_q(C'') \xrightarrow{\partial_*} H_{q-1}(C') \xrightarrow{\alpha_*} \ldots .$$

Доказательство. Последовательность групп гомологий функториально определена на коротких точных последовательностях, поскольку ∂_* — естественное преобразование. Осталось только проверить, что эта последовательность точна. Для этого нужно доказать точность в членах $H_q(C')$, $H_q(C)$ и $H_q(C'')$, причем всякий раз для доказательства точности необходимо проверить выполнение двух включений. Следовательно, доказательство точности этой последовательности состоит из шести частей. Мы докажем точность лишь в члене $H_q(C'')$, предоставив остальное читателю.

(a) $\operatorname{im} \beta_* \subset \ker \partial_*$. Пусть $\{z\} \in H_q(C)$. Тогда

$$\partial_* \beta_* \{z\} = \partial_* \{\beta(z)\} = \{\alpha^{-1} \partial \beta^{-1} \beta(z)\} = \{\alpha^{-1} \partial z\} = \{\alpha^{-1}(0)\} = 0.$$

(b) $\ker \partial_* \subset \operatorname{im} \beta_*$. Пусть $\{z''\} \in \ker \partial_*$. Тогда существует элемент $c \in C_q$, такой, что $\beta(c) = z''$ и $\alpha^{-1}\partial(c) = \partial'(d')$ для некоторого $d' \in C'_q$. Для разности $c - \alpha(d') \in C_q$ имеем

$$\partial(c - \alpha(d')) = \partial c - \alpha(\partial' d') = 0.$$

Следовательно, $\{c - \alpha(d')\} \in H_q(C)$ и

$$\beta_* \{c - \alpha(d')\} = \{\beta(c) - \beta\alpha(d')\} = \{z''\}. \ \blacksquare$$

Объединяя теорему 4 с примером 2, мы снова получаем лемму 4.3.1. В качестве примера применения теоремы о точности приведем ее непосредственное следствие:

5. Следствие. *Пусть задана короткая точная последовательность цепных комплексов*

$$0 \to C' \xrightarrow{\alpha} C \xrightarrow{\beta} C'' \to 0.$$

(a) *Комплекс C' ацикличен тогда и только тогда, когда β_*: $H(C) \approx H(C'')$.*

(b) *Комплекс C ацикличен тогда и только тогда, когда ∂_*: $H(C'') \approx H(C')$.*

(c) *Комплекс* C'' *ацикличен тогда и только тогда, когда* α_*: $H(C') \approx H(C)$. ∎

Следует заметить, что гомоморфизм ∂_* утверждения (b) имеет степень -1. Из следствия 5 вытекает, что если какие-нибудь два цепных комплекса из трех C', C и C'' ацикличны, то ацикличен и третий.

6. Следствие. *Если задана точная последовательность абелевых групп*

$$\ldots \to G_{n+1} \xrightarrow{\alpha_{n+1}} G_n \xrightarrow{\alpha_n} G_{n-1} \to \ldots$$

и ее подпоследовательность

$$\ldots \to G'_{n+1} \xrightarrow{\alpha'_{n+1}} G'_n \xrightarrow{\alpha'_n} G'_{n-1} \to \ldots$$

(*т. е.* $G'_n \subset G_n$ *и* $\alpha'_n = \alpha_n \mid G'_n$), *то эта подпоследовательность тогда и только тогда является точной, когда точна факторпоследовательность*

$$\ldots \to G_n/G'_n \to G_{n-1}/G'_{n-1} \to \ldots .$$

Доказательство. Пусть C — цепной комплекс, состоящий из исходной точной последовательности, и пусть C' — его подкомплекс, образованный заданной подпоследовательностью. Тогда цепной факторкомплекс C/C' является факторпоследовательностью. Поскольку C — точная последовательность, комплекс C ацикличен и ∂_*: $H_q(C/C') \approx H_{q-1}(C')$. Следовательно, комплекс C' точен (т. е. $H(C') = 0$) тогда и только тогда, когда комплекс C/C' точен (т. е. $H(C/C') = 0$). ∎

7. Теорема. *Предел прямого спектра точных последовательностей является точной последовательностью.*

Доказательство. Всякая точная последовательность является ацикличным цепным комплексом. Предел прямого спектра также будет цепным комплексом, который по теореме 4.1.7 ацикличен. Следовательно, предел прямого спектра точных последовательностей есть точная последовательность. ∎

Этот результат становится неверным, если предел прямого спектра заменить пределом обратного спектра, поскольку гомологический функтор не коммутирует с пределами обратных спектров.

Пусть K — симплициальный комплекс, и пусть $L_1 \subset L_2 \subset K$. В силу теоремы Нётер об изоморфизме существует короткая точная последовательность цепных комплексов

$$0 \to C(L_2)/C(L_1) \xrightarrow{i} C(K)/C(L_1) \xrightarrow{j} C(K)/C(L_2) \to 0.$$

Согласно теореме 4, существует точная последовательность

$$\ldots \xrightarrow{\partial_*} H_q(L_2, L_1) \xrightarrow{i_*} H_q(K, L_1) \xrightarrow{j_*} H_q(K, L_2) \xrightarrow{\partial_*} \\ \to H_{q-1}(L_2, L_1) \xrightarrow{i_*} \ldots,$$

где гомоморфизм i_* индуцирован вложением $i\colon (L_2, L_1) \subset (K, L_1)$, гомоморфизм j_* — вложением $j\colon (K, L_1) \subset (K, L_2)$, а ∂_* — связывающий гомоморфизм. Эта последовательность называется *гомологической точной последовательностью триады* (K, L_2, L_1). Она функториальна на триадах. Если $L_1 = \varnothing$, то получающаяся точная последовательность

$$\ldots \xrightarrow{\partial_*} H_q(L_2) \xrightarrow{i_*} H_q(K) \xrightarrow{j_*} H_q(K, L_2) \xrightarrow{\partial_*} H_{q-1}(L_2) \xrightarrow{i_*} \ldots$$

называется *гомологической последовательностью пары* (K, L_2). Она функториальна на парах.

Поскольку триаду $(K, L_2, \varnothing)$ можно вложить в триаду (K, L_2, L_1), получаем следующий результат:

8. Лемма. *Связывающий гомоморфизм* $\partial_*\colon H_q(K, L_2) \to H_{q-1}(L_2, L_1)$ *триады* (K, L_2, L_1) *совпадает с композицией*

$$H_q(K, L_2) \xrightarrow{\partial_*} H_{q-1}(L_2) \xrightarrow{k_*} H_{q-1}(L_2, L_1)$$

связывающего гомоморфизма пары (K, L_2) *и гомоморфизма, индуцированного вложением* $k\colon (L_2, \varnothing) \subset (L_2, L_1)$. ■

Если L — непустой подкомплекс симплициального комплекса K, то $\tilde{C}(L) \subset \tilde{C}(K)$ и из теоремы Нётер об изоморфизме вытекает, что $\tilde{C}(K)/\tilde{C}(L) \approx C(K)/C(L)$. Следовательно, существует короткая точная последовательность цепных комплексов

$$0 \to \tilde{C}(L) \xrightarrow{i} \tilde{C}(K) \xrightarrow{j} C(K)/C(L) \to 0.$$

Соответствующая точная последовательность

$$\ldots \xrightarrow{\partial_*} \tilde{H}_q(L) \xrightarrow{i_*} \tilde{H}_q(K) \xrightarrow{j_*} H_q(K, L) \xrightarrow{\partial_*} \tilde{H}_{q-1}(L) \xrightarrow{i_*} \ldots$$

называется *приведенной гомологической последовательностью пары* (K, L). Она не определена, если $L = \varnothing$, поскольку в этом случае комплекс $C(L)$ не имеет аугментации.

Точно таким же образом можно определить *сингулярную гомологическую последовательность триады* (X, A, B) и *пары* (X, A). Если множество A непусто, то также определяется *приведенная сингулярная гомологическая последовательность пары* (X, A). Все эти последовательности точны, и имеет место аналог леммы 8, устанавливающий соотношение между связывающим гомоморфизмом триады и связывающим гомоморфизмом пары.

9. Лемма. *Пусть s есть n-мерный симплекс. Тогда*

$$H_q(\bar{s}, \dot{s}) = \begin{cases} 0, & q \neq n, \\ \mathbf{Z}, & q = n. \end{cases}$$

Доказательство. Если $q \neq n$, то $C_q(\dot{s}) = C_q(\bar{s})$. Следовательно, $[C(\bar{s})/C(\dot{s})]_q = 0$, если $q \neq n$, и $[C(\bar{s})/C(\dot{s})]_n \approx \mathbf{Z}$. ■

Так как, согласно следствию 4.3.7, $\tilde{H}(\bar{s}) = 0$, то из точности приведенной гомологической последовательности пары $(\bar{s}, \dot{s})$ следует, что ∂_*: $H_q(\bar{s}, \dot{s}) \approx \tilde{H}_{q-1}(\dot{s})$ для всех q. Таким образом, мы получаем

10. Следствие. *Пусть s есть n-мерный симплекс. Тогда*

$$\tilde{H}_q(\dot{s}) \approx \begin{cases} 0, & q \neq n-1, \\ \mathbf{Z}, & q = n-1. \end{cases} \blacksquare$$

Мы закончим этот параграф *леммой о пяти гомоморфизмах* (называемой так потому, что в ее формулировке используются пятичленные точные последовательности).

11. Лемма. *Если задана коммутативная диаграмма абелевых групп и гомоморфизмов*

$$\begin{tikzcd} G_5 \arrow[r, "\alpha_5"] \arrow[d, "\gamma_5"] & G_4 \arrow[r, "\alpha_4"] \arrow[d, "\gamma_4"] & G_3 \arrow[r, "\alpha_3"] \arrow[d, "\gamma_3"] & G_2 \arrow[r, "\alpha_2"] \arrow[d, "\gamma_2"] & G_1 \arrow[d, "\gamma_1"] \\ H_5 \arrow[r, "\beta_5"] & H_4 \arrow[r, "\beta_4"] & H_3 \arrow[r, "\beta_3"] & H_2 \arrow[r, "\beta_2"] & H_1 \end{tikzcd}$$

в которой каждая строка точна и γ_1, γ_2, γ_4 и γ_5 — изоморфизмы, то γ_3 — тоже изоморфизм.

Доказательство. Доказательство проводится непосредственно. Покажем, что γ_3 — мономорфизм. Пусть $\gamma_3(g_3) = 0$. Тогда $\gamma_2\alpha_3(g_3) = \beta_3\gamma_3(g_3) = 0$. Следовательно, $\alpha_3(g_3) = 0$. Значит, существует такое $g_4 \in G_4$, что $\alpha_4(g_4) = g_3$. Тогда $\beta_4\gamma_4(g_4) = 0$ и существует $h_5 \in H_5$, такое, что $\beta_5(h_5) = \gamma_4(g_4)$. Рассмотрим такой элемент $g_5 \in G_5$, что $\gamma_5(g_5) = h_5$. Тогда $\gamma_4(\alpha_5(g_5)) = \gamma_4(g_4)$ и, значит, $g_4 = \alpha_5(g_5)$. Следовательно, $g_3 = \alpha_4\alpha_5(g_5) = 0$.

Покажем, что γ_3 — эпиморфизм. Пусть $h_3 \in H_3$. Существует такой элемент $g_2 \in G_2$, что $\gamma_2(g_2) = \beta_3(h_3)$. Тогда $\gamma_1\alpha_2(g_2) = \beta_2\beta_3(h_3) = 0$. Следовательно, $\alpha_2(g_2) = 0$, и существует $g_3 \in G_3$, такое, что $\alpha_3(g_3) = g_2$. Тогда $\beta_3(h_3 - \gamma_3(g_3)) = 0$, и существует $h_4 \in H_4$, такое, что $\beta_4(h_4) = h_3 - \gamma_3(g_3)$. Пусть элемент $g_4 \in G_4$ таков, что $\gamma_4(g_4) = h_4$. Тогда $g_3 + \alpha_4(g_4) \in G_3$ и $\gamma_3(g_3 + \alpha_4(g_4)) = \gamma_3(g_3) + \beta_4(h_4) = h_3$. ■

Заметим, что в первой части доказательства мы воспользовались только тем, что γ_2 и γ_4 — мономорфизмы, а γ_5 — эпиморфизм, а во второй части — тем, что γ_2 и γ_4 — эпиморфизмы, а γ_1 —

мономорфизм. Подобный способ доказательства называется *диаграммным поиском* и в дальнейшем будет опускаться.

Мы будем часто пользоваться леммой о пяти гомоморфизмах. Упомянем следующий типичный пример. Для произвольной симплициальной пары (K, L) естественное преобразование μ теории упорядоченных гомологий индуцирует гомоморфизм соответствующих точных последовательностей

$$\begin{tikzcd} \ldots \arrow[r] & H_q(\Delta(L)) \arrow[r] \arrow[d, "\mu_*"] & H_q(\Delta(K)) \arrow[r] \arrow[d, "\mu_*"] & H_q(\Delta(K)/\Delta(L)) \arrow[r] \arrow[d, "\mu_*"] & \ldots \\ \ldots \arrow[r] & H_q(L) \arrow[r] & H_q(K) \arrow[r] & H_q(K, L) \arrow[r] & \ldots \end{tikzcd}$$

По теореме 4.3.8 отображение μ_* является изоморфизмом на абсолютных группах. Из леммы о пяти гомоморфизмах вытекает, что оно является изоморфизмом и на относительных группах.

12. Следствие. *Для любой симплициальной пары (K, L) естественное преобразование μ индуцирует изоморфизм между последовательностью упорядоченных гомологий пары (K, L) и последовательностью ориентированных гомологий пары (K, L).* ■

§ 6. Последовательность Майера — Виеториса

Существует точная последовательность, связывающая гомологии объединения двух пространств с гомологиями каждого из них и гомологиями пересечения. Эта последовательность позволяет по индукции вычислять гомологии пространств, склеенных из кусков, гомологии которых известны. Мы построим эту точную последовательность, а также ее аналог для относительных групп гомологий и используем ее для доказательства того факта, что естественное преобразование ν функтора $\Delta(K)$ в функтор $\Delta(|K|)$ является цепной эквивалентностью для любого симплициального комплекса K.

Пусть K_1 и K_2 — подкомплексы симплициального комплекса K. Тогда $K_1 \cap K_2$ и $K_1 \cup K_2$ — подкомплексы в K и $C(K_1)$, $C(K_2) \subset C(K)$. Ясно, что $C(K_1 \cap K_2) = C(K_1) \cap C(K_2)$ и $C(K_1) + C(K_2) = C(K_1 \cup K_2)$. Пусть i_1: $K_1 \cap K_2 \subset K_1$, i_2: $K_1 \cap K_2 \subset K_2$, j_1: $K_1 \subset K_1 \cup K_2$ и j_2: $K_2 \subset K_1 \cup K_2$ — вложения. Тогда мы имеем короткую точную последовательность цепных комплексов

$$0 \to C(K_1 \cap K_2) \xrightarrow{i} C(K_1) \oplus C(K_2) \xrightarrow{j} C(K_1 \cup K_2) \to 0,$$

где $i(c) = (C(i_1)c, \ -C(i_2)c)$ и $j(c_1, c_2) = C(j_1)c_1 + C(j_2)c_2$. Соответствующая точная последовательность групп гомологий

$$\ldots \xrightarrow{\partial_*} H_q(K_1 \cap K_2) \xrightarrow{i_*} H_q(K_1) \oplus H_q(K_2) \xrightarrow{j_*}$$
$$\to H_q(K_1 \cup K_2) \xrightarrow{\partial_*} H_{q-1}(K_1 \cap K_2) \xrightarrow{i_*} \ldots$$

называется *последовательностью Майера — Виеториса* подкомплексов K_1 и K_2. Гомоморфизмы i_* и j_* последовательности Майера — Виеториса выражаются через гомоморфизмы, индуцированные вложениями:

$$i_*(z) = (i_{1*}z, \ -i_{2*}z) \quad \text{и} \quad j_*(z_1, z_2) = j_{1*}z_1 + j_{2*}z_2,$$

где $z \in H(K_1 \cap K_2)$, $z_1 \in H(K_1)$ и $z_2 \in H(K_2)$.

Если $K_1 \cap K_2 \neq \varnothing$, то имеется следующая коммутативная диаграмма абелевых групп и гомоморфизмов:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 \to & C_0(K_1 \cap K_2) & \xrightarrow{i} & C_0(K_1) \oplus C_0(K_2) & \xrightarrow{j} & C_0(K_1 \cup K_2) & \to 0 \\ & \downarrow{\scriptstyle \varepsilon} & & \downarrow{\scriptstyle \varepsilon \oplus \varepsilon} & & \downarrow{\scriptstyle \varepsilon} & \\ 0 \to & \mathbf{Z} & \xrightarrow{\alpha} & \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z} & \xrightarrow{\beta} & \mathbf{Z} & \to 0 \end{array}$$

где $\alpha(n) = (n, -n)$ и $\beta(n, m) = n + m$. Поскольку строки точны, а вертикальные гомоморфизмы являются эпиморфизмами, из следствия 4.5.6 вытекает, что существует точная последовательность ядер

$$0 \to \tilde{C}_0(K_1 \cap K_2) \xrightarrow{i} \tilde{C}_0(K_1) \oplus \tilde{C}_0(K_2) \xrightarrow{j} \tilde{C}_0(K_1 \cup K_2) \to 0$$

и, следовательно, существует короткая точная последовательность цепных комплексов

$$0 \to \tilde{C}(K_1 \cap K_2) \xrightarrow{i} \tilde{C}(K_1) \oplus \tilde{C}(K_2) \xrightarrow{j} \tilde{C}(K_1 \cup K_2) \to 0.$$

Соответствующая точная последовательность приведенных групп гомологий

$$\ldots \xrightarrow{\partial_*} \tilde{H}_q(K_1 \cap K_2) \xrightarrow{i_*} \tilde{H}_q(K_1) \oplus \tilde{H}_q(K_2) \xrightarrow{j_*} \tilde{H}_q(K_1 \cup K_2) \xrightarrow{\partial_*} \ldots$$

называется *приведенной последовательностью Майера — Виеториса* комплексов K_1 и K_2.

Если (K_1, L_1) и (K_2, L_2) — симплициальные пары подкомплексов комплекса K, то имеет место также короткая точная последовательность

$$0 \to C(L_1 \cap L_2) \to C(L_1) \oplus C(L_2) \to C(L_1 \cup L_2) \to 0,$$

являющаяся подпоследовательностью короткой точной последовательности

$$0 \to C(K_1 \cap K_2) \to C(K_1) \oplus C(K_2) \to C(K_1 \cup K_2) \to 0.$$

Из следствия 4.5.6 вытекает, что факторпоследовательность является короткой точной последовательностью цепных комплексов

$$0 \to C(K_1 \cap K_2)/C(L_1 \cap L_2) \to C(K_1)/C(L_1) \oplus C(K_2)/C(L_2) \to$$
$$\to C(K_1 \cup K_2)/C(L_1 \cup L_2) \to 0.$$

Соответствующая точная последовательность групп гомологий

$$\ldots \xrightarrow{\partial_*} H_q(K_1 \cap K_2,\ L_1 \cap L_2) \xrightarrow{i_*} H_q(K_1,\ L_1) \oplus H_q(K_2,\ L_2) \xrightarrow{j_*}$$
$$\xrightarrow{j_*} H_q(K_1 \cup K_2,\ L_1 \cup L_2) \xrightarrow{\partial_*} \ldots$$

называется *относительной последовательностью Майера — Виеториса* пар (K_1, L_1) и (K_2, L_2).

Относительная последовательность Майера—Виеториса является обобщением точных последовательностей триады и пары. Действительно, если дана триада (K, L_1, L_2), то легко видеть, что относительная последовательность Майера — Виеториса пар (K, L_2) и (L_1, L_1) является гомологической последовательностью триады (K, L_1, L_2), определенной в § 4.5. В случае $L_2 = \varnothing$ относительная последовательность Майера — Виеториса пар $(K, \varnothing)$ и (L_1, L_1) является гомологической последовательностью пары (K, L_1).

Вложение $(K_1, L_1) \subset (K_2, L_2)$ называется *отображением вырезания*, если $K_1 - L_1 = K_2 - L_2$. Точность последовательности Майера — Виеториса тесно связана со следующим *свойством вырезания* (и даже эквивалентна ему):

1. Теорема. *Всякое отображение вырезания симплициальных пар индуцирует изоморфизм в гомологиях.*

Доказательство. Если $(K_1, L_1) \subset (K_2, L_2)$ — отображение вырезания, то $K_2 = K_1 \cup L_2$ и $L_1 = K_1 \cap L_2$. Из теоремы Нётер об изоморфизме следует, что

$$C(K_1)/C(L_1) \approx [C(K_1) + C(L_2)]/C(L_2) \approx C(K_2)/C(L_2). \ \blacksquare$$

Для упорядоченных цепных комплексов если K_1 и K_2 — подкомплексы некоторого симплициального комплекса, то $\Delta(K_1 \cup K_2) = \Delta(K_1) + \Delta(K_2)$. Следовательно, все предыдущие результаты останутся верными, если повсюду ориентированные гомологии заменить упорядоченными гомологиями.

Вложение $(X_1, A_1) \subset (X_2, A_2)$ одной пары топологических пространств в другую называется *отображением вырезания*, если $X_1 - A_1 = X_2 - A_2$. *Неверно*, что всякое отображение вырезания индуцирует изоморфизм групп сингулярных гомологий. Более того, неверно, что для любых двух подмножеств X_1 и X_2 топологического пространства соответствующая последовательность Майера — Виеториса точна.

2. Пример. Пусть отображение $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ определено равенством

$$f(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x}, & x > 0, \\ 0, & x \leqslant 0, \end{cases}$$

и пусть $X_+ = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid y \geqslant f(x)$ или $x = 0, \mid y \mid \leqslant 1\}$ и $X_- = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid y \leqslant f(x)$ или $x = 0, \mid y \mid \leqslant 1\}$. Тогда X_+ и X_- — замкнутые линейно связные подмножества пространства $\mathbf{R}^2$, такие, что $X_+ \cup X_- = \mathbf{R}^2$, а $X_+ \cap X_-$ состоит из двух компонент линейной связности. Следовательно, не существует гомоморфизма $\tilde{H}_1(X_1 \cup X_2) \to \tilde{H}_0(X_1 \cap X_2)$, делающего последовательность

$$\tilde{H}_1(X_1 \cup X_2) \to \tilde{H}_0(X_1 \cap X_2) \to \tilde{H}_0(X_1) \oplus \tilde{H}_0(X_2)$$

точной в члене $\tilde{H}_0(X_1 \cap X_2)$ (группы на концах тривиальны, хотя $\tilde{H}_0(X_1 \cap X_2) \neq 0$).

Тем не менее для некоторых подмножеств X_1 и X_2 топологического пространства можно получить последовательность Майера — Виеториса. Пусть X_1 и X_2 — подмножества некоторого пространства. Говорят, что *пара подмножеств* $\{X_1, X_2\}$ *удовлетворяет аксиоме вырезания*, если цепное вложение $\Delta(X_1) + \Delta(X_2) \subset \Delta(X_1 \cup X_2)$ индуцирует изоморфизм гомологий. Следующий результат вытекает из теоремы 4.4.14.

3. Теорема. *Если* $X_1 \cup X_2 = \operatorname{int}_{X_1 \cup X_2} X_1 \cup \operatorname{int}_{X_1 \cup X_2} X_2$, *то пара* $\{X_1, X_2\}$ *удовлетворяет аксиоме вырезания.* ■

В частности, если $A \subset X$, то пара $\{X, A\}$ всегда удовлетворяет аксиоме вырезания. Связь между парами $\{X_1, X_2\}$, удовлетворяющими аксиоме вырезания, и отображениями вырезания выражается следующим образом:

4. Теорема. *Пара* $\{X_1, X_2\}$ *тогда и только тогда удовлетворяет аксиоме вырезания, когда отображение вырезания* $(X_1, X_1 \cap X_2) \subset (X_1 \cup X_2, X_2)$ *индуцирует изоморфизм сингулярных гомологий.*

Доказательство. Рассмотрим коммутативную диаграмму цепных отображений, индуцированных вложениями:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] \Delta(X_1)/\Delta(X_1 \cap X_2) \arrow[rr, "\Delta(j)"] \arrow[dr, "i"'] & & \Delta(X_1 \cup X_2)/\Delta(X_2) \\ & {[\Delta(X_1) + \Delta(X_2)]/\Delta(X_2)} \arrow[ur, "i'"'] & \end{tikzcd}$$

где j есть отображение вырезания $j\colon (X_1, X_1 \cap X_2) \to (X_1 \cup X_2, X_2)$. По теореме Нётер об изоморфизме i является изоморфизмом. Следовательно, $j_* = i'_* i_*$ тогда и только тогда является изоморфизмом, когда i'_* — изоморфизм. Используя точность гомологической последовательности пары и лемму о пяти гомоморфизмах[1]), получаем, что i'_* тогда и только тогда является изоморфизмом, когда вложение $\Delta(X_1) + \Delta(X_2) \subset \Delta(X_1 \cup X_2)$ индуцирует изоморфизм

[1]) То есть нужно рассмотреть две гомологические точные последовательности, соответствующие парам $\Delta(X_2) \subset \Delta(X_1 \cup X_2)$ и $\Delta(X_2) \subset [\Delta(X_1) + \Delta(X_2)]$, и их гомоморфизм, порожденный отображением $\Delta(X_1) + \Delta(X_2) \to \Delta(X_1 \cup X_2)$. — *Прим. ред.*

гомологий. Но последнее условие есть как раз условие того, что пара $\{X_1, X_2\}$ удовлетворяет аксиоме вырезания. ■

Это влечет за собой следующее *свойство вырезания для сингулярной теории*:

5. Следствие. *Пусть множества $U \subset A \subset X$ таковы, что $\bar{U} \subset \operatorname{int} A$. Тогда отображение вырезания $(X - U, A - U) \subset (X, A)$ индуцирует изоморфизм сингулярных гомологий.*

Доказательство. Из условия $\bar{U} \subset \operatorname{int} A$ следует, что $\operatorname{int}(X - U) \supset X - \bar{U} \supset X - \operatorname{int} A$. По теореме 3 пара $\{A, X - U\}$ удовлетворяет аксиоме вырезания; наше утверждение получается отсюда с помощью теоремы 4. ■

Для всяких подпространств X_1 и X_2 некоторого топологического пространства имеет место равенство $\Delta(X_1 \cap X_2) = \Delta(X_1) \cap \Delta(X_2)$ и, стало быть, определена короткая точная последовательность сингулярных цепных комплексов

$$0 \to \Delta(X_1 \cap X_2) \xrightarrow{i} \Delta(X_1) \oplus \Delta(X_2) \xrightarrow{j} \Delta(X_1) + \Delta(X_2) \to 0.$$

Отсюда получаем точную последовательность

$$\ldots \xrightarrow{\partial_*} H_q(X_1 \cap X_2) \xrightarrow{i_*} H_q(X_1) \oplus H_q(X_2) \xrightarrow{j_*}$$
$$\xrightarrow{j_*} H_q(\Delta(X_1) + \Delta(X_2)) \xrightarrow{\partial_*} H_{q-1}(X_1 \cap X_2) \to \ldots .$$

Если пара $\{X_1, X_2\}$ удовлетворяет аксиоме вырезания, то группу $H_q(\Delta(X_1) + \Delta(X_2))$ можно заменить группой $H_q(X_1 \cup X_2)$ и точная последовательность принимает следующий вид:

$$\ldots \xrightarrow{\partial_*} H_q(X_1 \cap X_2) \xrightarrow{i_*} H_q(X_1) \oplus H_q(X_2) \xrightarrow{j_*}$$
$$\xrightarrow{j_*} H_q(X_1 \cup X_2) \xrightarrow{\partial_*} H_{q-1}(X_1 \cap X_2) \to \ldots,$$

где $i_*(z) = (i_{1*}z, -i_{2*}z)$ и $j_*(z_1, z_2) = j_{1*}z_1 + j_{2*}z_2$ при $z \in H(X_1 \cap X_2)$, $z_1 \in H(X_1)$ и $z_2 \in H(X_2)$. Это так называемая *последовательность Майера — Виеториса в сингулярной теории для пары $\{X_1, X_2\}$, удовлетворяющей аксиоме вырезания.* Аналогично, если $X_1 \cap X_2 \neq \varnothing$, то можно построить приведенную последовательность Майера — Виеториса пары $\{X_1, X_2\}$.

Пусть (X_1, A_1) и (X_2, A_2) — пары, образованные подмножествами пространства X; мы говорим, что *пара пар $\{(X_1, A_1), (X_2, A_2)\}$ удовлетворяет аксиоме вырезания*, если обе пары $\{X_1, X_2\}$ и $\{A_1, A_2\}$ удовлетворяют аксиоме вырезания. В данной ситуации из леммы о пяти гомоморфизмах следует, что отображение, индуцированное вложением

$$[\Delta(X_1) + \Delta(X_2)]/[\Delta(A_1) + \Delta(A_2)] \to \Delta(X_1 \cup X_2)/\Delta(A_1 \cup A_2),$$

индуцирует изоморфизм гомологий. Следовательно, если пара пар $\{(X_1, A_1), (X_2, A_2)\}$ удовлетворяет аксиоме вырезания, то имеет место точная последовательность

$$\ldots \xrightarrow{\partial_*} H_q(X_1 \cap X_2, A_1 \cap A_2) \xrightarrow{i_*} H_q(X_1, A_1) \oplus H_q(X_2, A_2) \xrightarrow{j_*}$$
$$\xrightarrow{j_*} H_q(X_1 \cup X_2, A_1 \cup A_2) \xrightarrow{\partial_*} \ldots,$$

называемая *относительной последовательностью Майера — Виеториса пары пар* $\{(X_1, A_1), (X_2, A_2)\}$.

Эта относительная последовательность Майера — Виеториса является обобщением точной последовательности триады (или пары). Действительно, если дана триада (X, A, B), то пара пар $\{(X, B), (A, A)\}$ всегда удовлетворяет аксиоме вырезания и относительная последовательность Майера — Виеториса пары пар $\{(X, B), (A, A)\}$ совпадает с гомологической последовательностью триады (X, A, B).

Мы воспользуемся последовательностью Майера — Виеториса для вычисления сингулярных гомологий сферы.

6. Теорема. *Если $n \geqslant 0$, то*

$$\tilde{H}_q(S^n) \approx \begin{cases} 0, & q \neq n, \\ \mathbf{Z}, & q = n. \end{cases}$$

Доказательство. Пусть p и p' — две различные точки сферы S^n. Оба пространства $S^n - p$ и $S^n - p'$ стягиваемы (каждое из них гомеоморфно $\mathbf{R}^n$), поэтому $\tilde{H}(S^n - p) = 0 = \tilde{H}(S^n - p')$. Так как $S^n - p$ и $S^n - p'$ — открытые подмножества в S^n, то из теоремы 3 следует, что пара $\{S^n - p, S^n - p'\}$ удовлетворяет аксиоме вырезания. Из точности соответствующей последовательности Майера — Виеториса вытекает, что

$$\partial_*\colon \tilde{H}_q(S^n) \approx \tilde{H}_{q-1}(S^n - (p \cup p')).$$

Поскольку пространство $S^n - (p \cup p')$ имеет тот же гомотопический тип, что и S^{n-1}, существует изоморфизм $\tilde{H}_{q-1}(S^n - (p \cup p')) \approx \approx \tilde{H}_{q-1}(S^{n-1})$. Далее доказательство продолжается по индукции. Проверка того, что для $n = 0$ теорема верна, тривиальна. ■

Сейчас мы докажем, что пара, образованная полиэдральными подмножествами полиэдра, удовлетворяет аксиоме вырезания.

7. Лемма. *Пусть K_1 и K_2 — подкомплексы симплициального комплекса K. Тогда пара $\{|K_1|, |K_2|\}$ удовлетворяет аксиоме вырезания.*

Доказательство. Пусть V — окрестность подпространства $|K_1 \cap K_2|$ в $|K_1|$, для которой $|K_1 \cap K_2|$ является сильным деформационным ретрактом (такая окрестность V существует согласно следствию 3.3.11). Имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd}
\ldots \arrow[r] & H_q(|K_1 \cap K_2|) \arrow[r] \arrow[d, "i_*"'] & H_q(|K_1|) \arrow[r] \arrow[d, "1"'] & H_q(|K_1|, |K_1 \cap K_2|) \arrow[r] \arrow[d, "j_*"'] & \ldots \\
\ldots \arrow[r] & H_q(V) \arrow[r] & H_q(|K_1|) \arrow[r] & H_q(|K_1|, V) \arrow[r] & \ldots
\end{tikzcd}$$

Поскольку $i\colon |K_1 \cap K_2| \subset V$ — гомотопическая эквивалентность, то $i_*\colon H(|K_1 \cap K_2|) \approx H(V)$. Из леммы о пяти гомоморфизмах следует, что $j_*\colon H(|K_1|, |K_1 \cap K_2|) \approx H(|K_1|, V)$.

Множество $V \cup |K_2|$ является окрестностью $|K_2|$ в $|K_1 \cup K_2|$, для которой $|K_2|$ — сильный деформационный ретракт. Следовательно, аналогично можно доказать, что

$$j'_*\colon H(|K_1 \cup K_2|, |K_2|) \approx H(|K_1 \cup K_2|, V \cup |K_2|).$$

По теореме 4 пара $\{|K_1|, |K_2|\}$ тогда и только тогда удовлетворяет аксиоме вырезания, когда отображение вырезания $(|K_1|, |K_1 \cap K_2|) \subset (|K_1 \cup K_2|, |K_2|)$ индуцирует изоморфизм гомологий. Используя изоморфизмы j_* и j'_*, получаем, что это выполняется тогда и только тогда, когда отображение вырезания $(|K_1|, V) \subset (|K_1 \cup K_2|, V \cup |K_2|)$ индуцирует изоморфизм гомологий. По теореме 4, это эквивалентно условию, что пара $\{|K_1|, V \cup |K_2|\}$ удовлетворяет аксиоме вырезания. Но это так согласно теореме 3, поскольку $|K_2| \subset \operatorname{int}(V \cup |K_2|)$ и $|K_1| - |K_2| \subset \operatorname{int}|K_1|$. ■

8. Теорема. *Для любой симплициальной пары (K, L) естественное преобразование ν индуцирует изоморфизм последовательности упорядоченных гомологий пары (K, L) и последовательности сингулярных гомологий пары $(|K|, |L|)$.*

Доказательство. Достаточно доказать, что для любого симплициального комплекса K имеет место изоморфизм $\nu_*\colon H(\Delta(K)) \approx H(|K|)$, поскольку тогда теорема будет вытекать из леммы о пяти гомоморфизмах. Мы докажем этот изоморфизм прежде всего для конечных симплициальных комплексов индукцией по числу симплексов. Если K содержит лишь один симплекс, то $K = \bar{s}$, где s — нульмерный симплекс, и утверждение вытекает из следствия 4.4.2.

Предположим, что теорема уже доказана для симплициальных комплексов с числом симплексов, меньшим m, где $m > 1$, и пусть комплекс K содержит ровно m симплексов. Пусть s — некоторый симплекс комплекса K максимальной размерности, и пусть L — подкомплекс в K, образованный всеми отличными от s симплексами. Тогда $K = L \cup \bar{s}$ и $\dot{s} = L \cap \bar{s}$. Поскольку L содержит ровно $m-1$ симплексов, ν_* осуществляет изоморфизмы $H(\Delta(L)) \approx H(|L|)$ и $H(\Delta(\dot{s})) \approx H(|\dot{s}|)$. В силу следствия 4.4.2, $\nu_*\colon H(\Delta(\bar{s})) \approx H(|\bar{s}|)$. Из точности упорядоченной последовательности Майера — Виеториса комплексов L и $\bar{s}$ и последовательности Майера — Виеториса в сингулярной теории для пространств $|L|$ и $|\bar{s}|$ (которая существует по лемме 7) с помощью леммы о пяти гомоморфизмах получаем ν_*: $H(\Delta(K)) \approx H(|K|)$.

Если комплекс K бесконечен, то пусть $\{K_\alpha\}$ — семейство всех его конечных подкомплексов, направленное по включению. Из теоремы 4.3.11 следует, что $H(\Delta(K)) \approx \varinjlim H(\Delta(K_\alpha))$, а из теоремы 4.4.6 — что $H(|K|) \approx \varinjlim H(|K_\alpha|)$. Теперь утверждение теоремы для комплекса K очевидно, поскольку ν_* — естественное преобразование. ■

Сейчас мы покажем, что для свободных цепных комплексов цепное отображение тогда и только тогда является цепной эквивалентностью, когда оно индуцирует изоморфизм гомологий. Сначала мы построим точную последовательность, содержащую гомоморфизм, индуцированный цепным отображением.

9. Лемма. *Пусть* τ: $C \to C'$ — *цепное отображение, и пусть* $\bar{C}$ — *конус отображения* τ. *Тогда имеет место точная последовательность*

$$\ldots \to H_{q+1}(\bar{C}) \to H_q(C) \xrightarrow{\tau_*} H_q(C') \to H_q(\bar{C}) \to \ldots .$$

Доказательство. Пусть α: $C' \to \bar{C}$ — цепное отображение, определяемое формулой $\alpha(c) = (0, c)$. Тогда α является вложением C' как подкомплекса в $\bar{C}$, и факторкомплекс $\bar{C}/C'$ таков, что $(\bar{C}/C')_q \approx C_{q-1}$. Граничный оператор комплекса $\bar{C}/C'$ соответствует при этом изоморфизме граничному оператору комплекса C, взятому с противоположным знаком. Нужная нам точная последовательность получается теперь из точной последовательности групп гомологий, построенной для короткой точной последовательности цепных комплексов

$$0 \to C' \xrightarrow{\alpha} \bar{C} \to \bar{C}/C' \to 0$$

путем замены $H_q(\bar{C}/C')$ на $H_{q-1}(C)$ и проверки того факта, что связывающий гомоморфизм ∂_*: $H_{q+1}(\bar{C}/C') \to H_q(C')$ соответствует гомоморфизму $\tau_*: H_q(C) \to H_q(C')$. ■

10. Теорема. *Если* C *и* C' — *свободные цепные комплексы, то цепное отображение* τ: $C \to C'$ *тогда и только тогда является цепной эквивалентностью, когда* τ_*: $H(C) \approx H(C')$.

Доказательство. В силу следствия 4.2.11 отображение τ тогда и только тогда является цепной эквивалентностью, когда комплекс $\bar{C}$ ацикличен. Из леммы 9 и следствия 4.5.5 вытекает, что комплекс $\bar{C}$ тогда и только тогда ацикличен, когда τ_*: $H(C) \approx \approx H(C')$. ■

Поскольку $\Delta(K)/\Delta(L)$ и $\Delta(|K|)/\Delta(|L|)$ — свободные цепные комплексы, мы тем самым получаем такое

11. Следствие. *Для всякой симплициальной пары* (K, L) *отображение* ν *является цепной эквивалентностью комплексов* $\Delta(K)/\Delta(L)$ *и* $\Delta(|K|)/\Delta(|L|)$. ■

Если φ: $K_1 \to K_2$ — симплициальное отображение, то имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccccc}
H(K_1) & \xleftarrow[\approx]{\mu_*} & H(\Delta(K_1)) & \xrightarrow[\approx]{\nu_*} & H(|K_1|) \\
\downarrow{\scriptstyle\varphi_*} & & \downarrow{\scriptstyle\Delta(\varphi)_*} & & \downarrow{\scriptstyle|\varphi|_*} \\
H(K_2) & \xleftarrow[\approx]{\mu_*} & H(\Delta(K_2)) & \xrightarrow[\approx]{\nu_*} & H(|K_2|)
\end{array}$$

В частности, если K' — некоторое подразделение комплекса K, а φ: $K' \to K$ — симплициальная аппроксимация тождественного отображения $|K'| \subset |K|$, то

$$|\varphi| \simeq 1_{|K|} \quad \text{и} \quad |\varphi|_* = 1_{H(|K|)}.$$

Из коммутативности приведенной диаграммы получаем следующий результат:

12. Теорема. *Пусть* K' *— некоторое подразделение комплекса* K, *и пусть* φ: $K' \to K$ *— симплициальная аппроксимация тождественного отображения* $|K'| \subset |K|$. *Тогда*

$$\varphi_*\colon H(K') \approx H(K). \ ■$$

Согласно теореме 10, отображение $C(\varphi)$: $C(K') \to C(K)$ является цепной эквивалентностью. Было бы полезно построить цепное отображение $C(K) \to C(K')$, являющееся цепно гомотопически обратным к $C(\varphi)$. Если K' — некоторое подразделение комплекса K, то сохраняющее аугментацию цепное отображение τ: $C(K) \to C(K')$ называется *цепным отображением подразделения,* если τ: $C(L) \subset \subset C(K' \mid L)$ для каждого подкомплекса $L \subset K$ (т. е. если τ является естественным цепным преобразованием функтора C в функтор $C(K' \mid \cdot)$ на категории $\mathscr{C}(K)$).

13. Теорема. *Если* K' *— некоторое подразделение комплекса* K, *то существуют цепные отображения подразделения* τ: $C(K) \to C(K')$. *Если* φ: $K' \to K$ *— некоторая симплициальная аппроксимация тождественного отображения* $|K'| \subset |K|$, *то* $\tau_* = \varphi_*^{-1}$: $H(K) \approx H(K')$.

Доказательство. Если s — какой-нибудь симплекс комплекса K, то комплекс $\tilde{C}(K' \mid \bar{s})$ ацикличен (так как $\tilde{H}(K' \mid \bar{s}) \approx$

$\approx \tilde{H}(|\bar{s}|)=0$). Следовательно, на категории $\mathscr{C}(K)$ подкомплексов комплекса K с моделями $\mathfrak{M}(K)=\{\bar{s} \mid s \in K\}$ функтор C свободен, а функтор $C(K' | \cdot)$ ацикличен. Из теоремы 4.3.3 следует, что существует естественное цепное преобразование τ функтора C в функтор $C(K' | \cdot)$, сохраняющее аугментацию.

Если τ — цепное отображение подразделения, а $\varphi\colon K' \to K$ — симплициальная аппроксимация тождественного отображения $|K'| \subset |K|$, то композиция

$$C(\varphi)\tau\colon\ C(K) \to C(K)$$

является в категории $\mathscr{C}(K)$ естественным цепным преобразованием, сохраняющим аугментацию, из C в C. Поскольку функтор C ацикличен и свободен относительно моделей $\mathfrak{M}(K)$, из теоремы 4.3.3 следует, что $C(\varphi)\tau \simeq 1_{C(K)}$. Следовательно, $\varphi_*\tau_* = 1_{H(K)}$. Согласно теореме 12, гомоморфизм φ_* является изоморфизмом; поэтому $\tau_* = \varphi_*^{-1}$. ■

§ 7. Некоторые применения гомологий

В этом параграфе мы используем гомологии для некоторых применений, упомянутых раньше. Мы докажем, что евклидовы пространства различных размерностей не гомеоморфны, а также что S^n не является ретрактом E^{n+1} (что, как легко видеть, эквивалентно теореме Брауэра о неподвижной точке). Это приведет нас к общему рассмотрению неподвижных точек отображений, и мы докажем теорему Лефшеца о неподвижной точке. В конце параграфа мы рассмотрим свойства отделимости для сферы. Будут даны доказательства брауэровского обобщения теоремы Жордана о кривых и теоремы об инвариантности области.

1. Теорема. *Если $n \neq m$, то сферы S^n и S^m не могут иметь один и тот же гомотопический тип.*

Доказательство. Из теорем 4.6.6 следует, что $\tilde{H}_n(S^n) \neq 0$, в то время как $\tilde{H}_n(S^m) = 0$. ■

2. Следствие. *Если $n \neq m$, то пространства $\mathbf{R}^n$ и $\mathbf{R}^m$ не гомеоморфны.*

Доказательство. Если бы $\mathbf{R}^n$ и $\mathbf{R}^m$ были гомеоморфны, то их одноточечные компактификации S^n и S^m тоже были бы гомеоморфны, что противоречит теореме 1. ■

Оба пространства $\mathbf{R}^n$ и $\mathbf{R}^m$ стягиваемы. Следовательно, они имеют один и тот же гомотопический тип, и их нельзя различить с помощью групп гомологий. Чтобы их различить, необходимо рассматривать связанные с ними пространства, обладающие неизоморфными группами гомологий. Мы выбрали для доказательства их одноточечные компактификации. Другое доказательство можно получить, используя тот факт, что пространство $\mathbf{R}^n$ с выколотой точкой гомотопически эквивалентно сфере S^{n-1}.

Эти два результата иллюстрируют применение гомологий к задаче классификации пространств с точностью до гомотопического типа. Следующее применение относится к задаче продолжения.

3. Лемма. *Пусть пара (X, A) такова, что A является ретрактом пространства X. Тогда*

$$H(X) \approx H(A) \oplus H(X, A).$$

Доказательство. Пусть i: $A \subset X$ и j: $(X, \varnothing) \subset (X, A)$ — вложения, а r: $X \to A$ — ретракция. Тогда $r \circ i = 1_A$. Следовательно, $r_* i_* = 1_{H(A)}$ и i_* является мономорфизмом группы $H(A)$ на прямое слагаемое группы $H(X)$. Другое слагаемое представляет собой ядро гомоморфизма r_*. Из точности гомологической последовательности пары (X, A)

$$\ldots \to H_{q+1}(X, A) \xrightarrow{\partial_*} H_q(A) \xrightarrow{i_*} H_q(X) \xrightarrow{j_*} H_q(X, A) \xrightarrow{\partial_*} \ldots$$

получаем, что ∂_* является тривиальным отображением, поскольку $\ker i_* = 0$. Следовательно, j_* — эпиморфизм. Поскольку $\ker j_* = \operatorname{im} i_*$, отображение j_* индуцирует изоморфизм $\ker r_*$ на $H(X, A)$. ■

Заметим, что лемма 3 останется верной, если A — слабый ретракт пространства X.

4. Следствие. *Если $n \geqslant 0$, то S^n не является ретрактом шара E^{n+1}.*

Доказательство. Согласно теореме 4.6.6, $\tilde{H}_n(S^n) \neq 0$. Поскольку шар E^{n+1} стягиваем, $\tilde{H}_n(E^{n+1}) = 0$. Следовательно, группа $H(S^n)$ не может быть изоморфна прямому слагаемому группы $H(E^{n+1})$. ■

Из этого результата вытекает следующая *теорема Брауэра о неподвижной точке*:

5. Теорема. *Если $n \geqslant 0$, то всякое непрерывное отображение шара E^n в себя имеет неподвижную точку.*

Доказательство. Если $n = 0$, то доказывать нечего. Пусть $n > 0$, и пусть f: $E^n \to E^n$ — некоторое непрерывное отображение. Если f не имеет неподвижных точек, то определим отображение g: $E^n \to S^{n-1}$ следующим образом: точка $g(x)$ совпадает с единственной точкой сферы S^{n-1}, лежащей на луче, который выходит из $f(x)$ и проходит через x (рис. 11). Очевидно, g является ретракцией шара E^n на S^{n-1}, что противоречит следствию 4. ■

На самом деле мы доказали, что теорема 5 вытекает из следствия 4. Верно и обратное, ибо если r: $E^{n+1} \to S^n$ — ретракция, то отображение f: $E^{n+1} \to E^{n+1}$, определяемое равенством $f(x) = -r(x)$, не имеет неподвижных точек.

Существует интересное обобщение теоремы 5, содержащее критерий, позволяющий определить, имеет ли некоторое отображение пространства X в себя неподвижные точки, даже если не всякое отображение X в себя имеет неподвижные точки. Это обобщение также иллюстрирует другой тип применения гомологий: здесь основой является алгебраический подсчет числа неподвижных точек, который формулируется в гомологических терминах. Такого рода применения гомологий встречаются довольно часто. Обычно при этом речь идет об определенном множестве особенностей пространства X (например, множестве неподвижных точек отображения $X \to X$, множестве разрывов какого-нибудь отображения $X \to Y$, множестве самопересечений локального гомеоморфизма $X \to \mathbf{R}^n$ и т. д.) и измерении этого множества при помощи соответствующего ему класса гомологий.

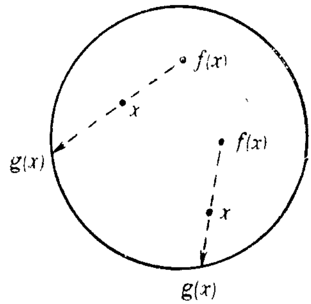


Рис. 11.

Пусть C — конечно порожденная градуированная группа, и пусть h: $C \to C$ — ее эндоморфизм нулевой степени. *Число Лефшеца* $\lambda(h)$ этого эндоморфизма определяется по формуле

$$\lambda(h) = \sum (-1)^q \operatorname{Tr} h_q,$$

где h_q: $C_q \to C_q$ — ограничение эндоморфизма h на C_q. Следующая *формула Хопфа* приравнивает число Лефшеца цепного отображения и индуцированного им гомоморфизма гомологий.

6. Теорема. *Пусть C — конечно порожденный цепной комплекс, и пусть τ: $C \to C$ — цепное отображение. Тогда*

$$\lambda(\tau) = \lambda(\tau_*).$$

Доказательство. Доказательство аналогично доказательству соответствующего утверждения об эйлеровой характеристике (теорема 4.3.14). Эйлерова характеристика равна числу Лефшеца тождественного отображения. Здесь нужно лишь заменить теорему 4.12 из введения теоремой 4.13. Детали мы оставляем читателю. ■

Пусть f: $X \to X$ — некоторое отображение, и пусть группы гомологий пространства X конечно порождены. *Числом Лефшеца отображения* f (обозначается $\lambda(f)$) называется число Лефшеца гомоморфизма $f_*: H(X) \to H(X)$, индуцированного этим отображением. Оно равно алгебраическому числу классов гомологий, инвариантных относительно f_*. Следующая *теорема Лефшеца о неподвижной точке* показывает, что условие $\lambda(f) \neq 0$ является достаточным для того, чтобы отображение f имело неподвижные точки.

7. Теорема. *Пусть X — компактный полиэдр, и пусть f: $X \to X$ — некоторое отображение. Если $\lambda(f) \neq 0$, то f имеет неподвижную точку.*

Доказательство. Предположим, что отображение f не имеет неподвижных точек, и докажем, что тогда $\lambda(f) = 0$. Не теряя общности, можно считать, что $X = |L|$ для некоторого конечного симплициального комплекса L. Так как $|L|$ — компактное метрическое пространство, то при условии, что f не имеет неподвижных точек, существует такое число $a > 0$, что $d(\alpha, f(\alpha)) > a$ для всех $\alpha \in |L|$. Пусть K — подразделение комплекса L, такое, что $\operatorname{mesh} K < a/3$, и пусть K' — подразделение комплекса K, для которого существует симплициальное отображение φ: $K' \to K$, являющееся симплициальной аппроксимацией первоначального отображения f: $|K| \to |K|$. Поскольку точки $|\varphi|(\alpha)$ и $f(\alpha)$ принадлежат одному и тому же симплексу комплекса K, имеем $d(|\varphi|(\alpha), f(\alpha)) < a/3$ $(\alpha \in |K|)$. Если s — какой-нибудь симплекс комплекса K, то $|s|$ и $|\varphi|(|s|)$ не пересекаются, так как если точка $\alpha \in |s|$ совпадает с некоторой точкой $|\varphi|(\beta)$, $\beta \in |s|$, то

$$d(\beta, f(\beta)) \leqslant d(\beta, \alpha) + d(|\varphi|(\beta), f(\beta)) < 2a/3,$$

что противоречит выбору числа a.

Пусть τ: $C(K) \to C(K')$ — цепное отображение подразделения (которое существует согласно теореме 4.6.13). Тогда $C(\varphi)\tau$: $C(K) \to C(K)$ — цепное отображение. Если σ — ориентированный q-мерный симплекс, соответствующий некоторому q-мерному симплексу s комплекса K, то $C(\varphi)\tau(\sigma)$ является q-мерной цепью на максимальном подкомплексе комплекса K, не пересекающемся с s. Следовательно, $C(\varphi)\tau(\sigma)$ является q-мерной цепью с нулевым коэффициентом на σ. Поскольку это выполняется для каждого симплекса σ, все слагаемые в выражении для $\operatorname{Tr}(C(\varphi)\tau)_q$ равны нулю, и, значит, $\operatorname{Tr}(C(\varphi)\tau)_q = 0$ для всех q, откуда следует, что $\lambda(C(\varphi)\tau) = 0$. По теореме 6 также имеет место равенство $\lambda((C(\varphi)\tau)_*) = 0$. Пусть φ': $K' \to K$ — симплициальная аппроксимация тождественного отображения $|K'| \subset |K|$. Имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd}
H(K) & H(K') \arrow[l, "\varphi'_*"'] \arrow[r, "\varphi_*"] & H(K) \\
H(\Delta(K)) \arrow[u, "\approx"'] \arrow[d, "\approx"] & H(\Delta(K')) \arrow[l, "\Delta(\varphi')_*"'] \arrow[r, "\Delta(\varphi)_*"] \arrow[u, "\approx"'] \arrow[d, "\approx"] & H(\Delta(K)) \arrow[u, "\approx"'] \arrow[d, "\approx"] \\
H(|K|) & H(|K'|) \arrow[l, "|\varphi'|_*=1"'] \arrow[r, "|\varphi|_*=f_*"] & H(|K|)
\end{tikzcd}$$

из которой следует, что

$$\lambda(f_*) = \lambda\left(|\varphi|_*(|\varphi'|_*)^{-1}\right) = \lambda\left(\varphi_*(\varphi'_*)^{-1}\right).$$

Согласно теореме 4.6.13, $(\varphi'_*)^{-1} = \tau_*$ и $\lambda\left(\varphi_*(\varphi'_*)^{-1}\right) = \lambda(\varphi_*\tau_*) = \lambda([C(\varphi)\,\tau]_*)$. Следовательно, $\lambda(f) = 0$. ■

Полученный результат приводит к следующему обобщению теоремы Брауэра о неподвижной точке:

8. Следствие. *Всякое непрерывное отображение компактного стягиваемого полиэдра в себя имеет неподвижную точку.*

Доказательство. Если полиэдр X стягиваем, то $\tilde{H}(X) = 0$, и для любого отображения $f\colon X \to X$ имеет место равенство $\lambda(f) = 1$ (поскольку f_* является тождественным отображением на $H_0(X) \approx \mathbf{Z}$). ■

Этот результат неверен для некомпактных полиэдров. Действительно, прямая линия $\mathbf{R}$ является стягиваемым полиэдром, а любой ее параллельный перенос, отличный от тождественного $1_{\mathbf{R}}$, не имеет неподвижных точек.

Для непрерывного отображения $f\colon S^n \to S^n$ его *степенью* $\deg f$ называется однозначно определенное целое число, такое, что

$$f_*(z) = (\deg f)\,z, \qquad z \in \tilde{H}_n(S^n).$$

Следующее утверждение очевидно.

9. *Для всякого отображения $f\colon S^n \to S^n$ имеет место равенство $\lambda(f) = 1 + (-1)^n \deg f$.* ■

Поскольку антиподальное отображение $S^n \to S^n$ не имеет неподвижных точек, из утверждения 9 и теоремы 7 вытекает

10. Следствие. *Антиподальное отображение сферы S^n имеет степень $(-1)^{n+1}$.* ■

11. Следствие. *Если число n четно, то не существует непрерывного отображения $f\colon S^n \to S^n$, такого, что x и $f(x)$ ортогональны для всех $x \in S^n$.*

Доказательство. Предположим, что такое отображение существует. Определим гомотопию $F\colon f \simeq 1_{S^n}$ равенством

$$F(x, t) = \frac{(1-t) f(x) + tx}{\|(1-t) f(x) + tx\|}.$$

Это определение корректно, поскольку из условия ортогональности x и $f(x)$ следует, что $\|(1-t) f(x) + tx\|^2 = (1-t)^2 + t^2 \neq 0$ при $0 \leqslant t \leqslant 1$. Поскольку $f \simeq 1_{S^n}$, имеем $\lambda(f) = \lambda(1_{S^n}) = 1 + (-1)^n \neq 0$. Следовательно, по теореме 7 отображение f должно иметь неподвижную точку, что противоречит ортогональности x и $f(x)$ для всех x. ∎

Последний результат эквивалентен утверждению, что на четномерной сфере S^n не существует непрерывного касательного векторного поля, нигде не обращающегося в нуль. Для нечетных n такие векторные поля существуют, так как отображение $f\colon S^{2m-1} \to S^{2m-1}$, определяемое равенством

$$f(x_1, \ldots, x_{2m}) = (-x_2, x_1, \ldots, -x_{2m}, x_{2m-1}),$$

непрерывно и обладает тем свойством, что x и $f(x)$ ортогональны для всех x.

Вместо того чтобы рассматривать векторные поля, мы будем рассматривать однопараметрические группы гомеоморфизмов. *Потоком* на пространстве X называется такое непрерывное отображение

$$\psi\colon \mathbf{R} \times X \to X,$$

что

(a) $\psi(t_1 + t_2, x) = \psi(t_1, \psi(t_2, x))$; $t_1, t_2 \in \mathbf{R}$; $x \in X$;

(b) $\psi(0, x) = x$, $x \in X$.

Пусть для всякого $t \in \mathbf{R}$ отображение $\psi_t\colon X \to X$ определено равенством $\psi_t(x) = \psi(t, x)$. Тогда из условий (a) и (b) вытекает, что $\psi_{-t} = (\psi_t)^{-1}$, и, значит, ψ_t является гомеоморфизмом пространства X при всех $t \in \mathbf{R}$. *Неподвижной точкой потока* называется точка $x_0 \in X$, такая, что $\psi(t, x_0) = x_0$ для всех $t \in \mathbf{R}$.

12. Теорема. *Если X — компактный полиэдр, причем $\chi(X) \neq 0$, то любой поток на X имеет неподвижную точку.*

Доказательство. Всякое отображение ψ_t гомотопно тождественному 1_X (гомотопия $F\colon X \times I \to X$ определяется по формуле $F(x, t') = \psi((1-t')t, x)$). Следовательно,

$$\lambda(\psi_t) = \lambda(1_X) = \chi(X) \neq 0.$$

Значит, в силу теоремы 7 каждое отображение ψ_t имеет неподвижную точку. Пусть $n \geqslant 1$, и пусть A_n — замкнутое подмножество пространства X, состоящее из неподвижных точек отображения $\psi_{1/2^n}$. Тогда $A_{n+1} \subset A_n$ и $\{A_n\}$ является убывающей последовательностью непустых замкнутых подмножеств компактного пространства X. Пусть $F = \bigcap A_n$. Тогда F непусто и каждая его точка неподвижна относительно отображения ψ_t, где t имеет вид $1/2^n$, $n \geqslant 1$. Отсюда следует, что каждая точка множества F неподвижна относительно отображений ψ_t для всех двоично-рациональных значений $t = m/2^n$. Поскольку двоично-рациональные числа образуют всюду плотное подмножество прямой $\mathbf{R}$, каждая точка множества F неподвижна относительно ψ_t для всех t. ■

Теперь обратимся к свойствам отделимости для сферы.

13. Лемма. *Если подмножество $A \subset S^n$ гомеоморфно кубу I^k, $0 \leqslant k \leqslant n$, то $\tilde{H}(S^n - A) = 0$.*

Доказательство. Докажем эту лемму индукцией по k. Если $k = 0$, то A состоит из одной точки и $S^n - A$ гомеоморфно $\mathbf{R}^n$. Следовательно, $\tilde{H}(S^n - A) = 0$.

Предположим, что мы уже доказали наше утверждение для $k < m$, $m \geqslant 1$, и пусть A гомеоморфно I^m. Будем считать, что A гомеоморфно $B \times I$, где B гомеоморфно I^{m-1}, и обозначим этот гомеоморфизм через h: $B \times I \to A$. Пусть $A' = h(B \times [0, 1/2])$ и $A'' = h(B \times [1/2, 1])$. Тогда $A = A' \cup A''$ и $A' \cap A''$ гомеоморфно $B \times (1/2)$. По предположению индукции имеет место равенство $\tilde{H}(S^n - (A' \cap A'')) = 0$. Поскольку оба множества $S^n - A'$ и $S^n - A''$ открыты, составленная из них пара удовлетворяет аксиоме вырезания; поэтому из точности соответствующей приведенной последовательности Майера — Виеториса получаем

$$i_*\colon \tilde{H}_q(S^n - A) \approx \tilde{H}_q(S^n - A') \oplus \tilde{H}_q(S^n - A'').$$

Если элемент $z \in \tilde{H}_q(S^n - A)$ не равен нулю, то либо $i'_* z \neq 0$ в $\tilde{H}_q(S^n - A')$, либо $i''_* z \neq 0$ в $\tilde{H}_q(S^n - A'')$, где i': $S^n - A \subset S^n - A'$ и i'': $S^n - A \subset S^n - A''$. Предположим, что $i'_* z \neq 0$. Повторяя эти рассуждения для A' и т. д., мы получим последовательность множеств

$$A \supset A_1 \supset A_2 \supset \ldots,$$

такую, что

(a) вложение $S^n - A \subset S^n - A_j$ переводит элемент z в ненулевой элемент группы $\tilde{H}_q(S^n - A_j)$;

(b) $\bigcap A_i$ гомеоморфно I^{m-1}.

Поскольку каждое компактное подмножество из $S^n - \bigcap A_i$ содержится в $S^n - A_j$ для некоторого j, из теоремы 4.4.6 следует, что $\tilde{H}_q(S^n - \bigcap A_i) \approx \varinjlim \{\tilde{H}_q(S^n - A_j)\}$. Мы пришли к противоречию, так как по условию (a) элемент z определяет ненулевой элемент группы $\varinjlim \{\tilde{H}_q(S^n - A_j)\}$, а по условию (b) и по предположению индукции $\tilde{H}_q(S^n - \bigcap A_i) = 0$. ■

14. Следствие. *Пусть B — подмножество сферы S^n, гомеоморфное S^k $(0 \leqslant k \leqslant n-1)$. Тогда*

$$\tilde{H}_q(S^n - B) \approx \begin{cases} 0, & q \neq n-k-1, \\ \mathbf{Z}, & q = n-k-1. \end{cases}$$

Доказательство. Воспользуемся индукцией по k. Если $k = 0$, то B состоит из двух точек и $S^n - B$ имеет гомотопический тип сферы S^{n-1}. Следовательно,

$$\tilde{H}_q(S^n - B) \approx \begin{cases} 0, & q \neq n-1, \\ \mathbf{Z}, & q = n-1. \end{cases}$$

Если $k \geqslant 1$, то положим $B = A_1 \cup A_2$, где A_1 и A_2 — замкнутые полусферы в S^k. Допустим, что мы уже доказали наше утверждение для $k-1$. Заметим, что полусферы A_1 и A_2 гомеоморфны I^k, а $A_1 \cap A_2$ гомеоморфно S^{k-1}. Поскольку множества $S^n - A_1$ и $S^n - A_2$ открыты, пара $\{S^n - A_1, S^n - A_2\}$ удовлетворяет аксиоме вырезания. Значит, существует точная приведенная последовательность Майера — Виеториса

$$\ldots \to \tilde{H}_{q+1}(S^n - A_1) \oplus \tilde{H}_{q+1}(S^n - A_2) \to \tilde{H}_{q+1}(S^n - (A_1 \cap A_2)) \to$$
$$\to \tilde{H}_q(S^n - B) \to \tilde{H}_q(S^n - A_1) \oplus \tilde{H}_q(S^n - A_2) \to \ldots .$$

Группы на концах выписанной последовательности обращаются в нуль в силу леммы 13. Нужное нам утверждение получается теперь из предположения индукции. ■

Для частного случая вложения $(n-1)$-мерной сферы в S^n получаем следующую *теорему Жордана — Брауэра*:

15. Теорема. *Если $(n-1)$-мерная сфера вложена в S^n, то она разбивает S^n на две компоненты и является их общей границей.*

Доказательство. Если множество $B \subset S^n$ гомеоморфно S^{n-1}, то, согласно следствию 14, $\tilde{H}_0(S^n - B) \approx \mathbf{Z}$. Следовательно, $S^n - B$ состоит из двух компонент линейной связности. Поскольку $S^n - B$ — открытое множество в S^n, оно локально линейно связно и его компоненты линейной связности, скажем U и V, являются его компонентами связности.

Ясно, что B содержит границы множеств U и V. Докажем, что $B \subset \overline{U} \cap \overline{V}$. Пусть $x \in B$, и пусть N — некоторая окрестность точки x в S^n. Пусть подмножество $A \subset B \cap N$ таково, что $B - A$ гомеоморфно I^{n-1}. Тогда, согласно лемме 13, $\tilde{H}(S^n - (B - A)) = 0$, и, значит, пространство $S^n - (B - A)$ линейно связно. Если $p \in U$ и $q \in V$, то существует путь ω в $S^n - (B - A)$ от p до q. Поскольку p и q принадлежат различным компонентам линейной связности множества $S^n - B$, ω пересекается с A. Следовательно, множеству A принадлежит некоторая точка из $\overline{U}$ и некоторая точка из $\overline{V}$. Значит, окрестность N пересекается с $\overline{U}$ и $\overline{V}$, и $x \in \overline{U} \cap \overline{V}$. ■

С этой теоремой связана следующая *теорема Брауэра об инвариантности области*:

16. Теорема. *Пусть U и V — гомеоморфные подмножества сферы S^n и множество U открыто в ней. Тогда множество V также открыто в S^n.*

Доказательство. Пусть $h\colon U \to V$ — гомеоморфизм и $h(x) = y$. Пусть A — окрестность точки x в U, гомеоморфная I^n, с границей B, гомеоморфной S^{n-1}. Пусть $A' = h(A) \subset V$, и пусть $B' = h(B)$. Согласно лемме 13, множество $S^n - A'$ связно, а в силу теоремы 15 множество $S^n - B'$ состоит из двух компонент. Поскольку

$$S^n - B' = (S^n - A') \cup (A' - B'),$$

а множества $S^n - A'$ и $A' - B'$ связны, они являются компонентами связности множества $S^n - B'$. Следовательно, $A' - B'$ — открытое подмножество в S^n. Так как $y \in A' - B' \subset V$ и точка y произвольна, множество V открыто в S^n. ■

§ 8. Аксиоматическое описание теории гомологий

Стинрод и Эйленберг [1]) предложили простой набор аксиом, полностью характеризующих теорию гомологий на классе компактных полиэдральных пар. В этом параграфе рассматривается эта система аксиом и относящиеся к ней понятия. Для компактных полиэдральных пар эта система является категоричной (т. е. две теории, удовлетворяющие им, совпадают). Таким образом, аксиомы представляют собой основные утверждения, из которых могут быть выведены все остальные свойства теории гомологий.

---

[1]) См. Стинрод Н., Эйленберг С., Основания алгебраической топологии, Физматгиз, М., 1958.

Во многих случаях доказательства, основанные на аксиомах, оказываются проще и намного элегантнее, чем доказательства, основанные на первоначальном определении теории гомологий.

Прежде чем сформулировать аксиомы, полезно подобрать подходящую категорию пар топологических пространств и отображений (Эйленберг и Стинрод называют их «допустимыми»). Мы не будем определять эти категории. Такой является категория всех пар топологических пространств и ее полные подкатегории, состоящие из полиэдральных пар или компактных полиэдральных пар. Для наших целей удобно считать, что теория гомологий определена на категории всех пар топологических пространств; пространство X мы будем отождествлять с парой $(X, \varnothing)$.

Теория гомологий H с дифференциалом ∂ состоит из

(a) ковариантного функтора H из категории пар топологических пространств в категорию градуированных абелевых групп и гомоморфизмов нулевой степени (т. е. $H(X, A)=\{H_q(X, A)\}$);

(b) естественного преобразования ∂ степени -1, переводящего $H(X, A)$ в $H(A, \varnothing)$ (т. е. $\partial(X, A)=\{\partial_q(X, A)\colon H_q(X, A)\to H_{q-1}(A)\}$).

При этом должны выполняться следующие аксиомы:

1. Аксиома гомотопии. *Если отображения $f_0, f_1\colon (X, A)\to(Y, B)$ гомотопны, то*

$$H(f_0)=H(f_1)\colon H(X, A)\to H(Y, B).$$

2. Аксиома точности. *Для всякой пары (X, A) и вложений $i\colon A\subset X$ и $j\colon X\subset(X, A)$ имеет место точная последовательность*

$$\ldots \xrightarrow{\partial_{q+1}(X, A)} H_q(A)\xrightarrow{H_q(i)} H_q(X)\xrightarrow{H_q(j)} H_q(X, A)\xrightarrow{\partial_q(X, A)}$$
$$\to H_{q-1}(A)\xrightarrow{H_{q-1}(i)}\ldots.$$

3. Аксиома вырезания. *Для любой пары (X, A), если U — открытое подмножество в X, такое, что $\bar U\subset \operatorname{int} A$, то отображение вырезания $j\colon (X-U, A-U)\subset(X, A)$ индуцирует изоморфизм*

$$H(j)\colon H(X-U, A-U)\approx H(X, A).$$

4. Аксиома размерности. *На полной подкатегории одноточечных пространств существует естественная эквивалентность функтора H и постоянного функтора. Иными словами, если P — одноточечное пространство, то*

$$H_q(P)=\begin{cases}0, & q\neq 0,\\ \mathbf{Z}, & q=0.\end{cases}$$

Очевидно, аксиома гомотопии равносильна утверждению, что теория гомологий может быть пропущена через категорию гомотопических типов пар топологических пространств.

Теория сингулярных гомологий является примером теории гомологий. Действительно, аксиома гомотопии есть следствие теоремы 4.4.9, аксиома вырезания вытекает из следствия 4.6.5, аксиома точности является следствием теоремы 4.5.4, а аксиома размерности вытекает из лемм 4.4.1 и 4.3.1. Таким образом, теории гомологий существуют.

Для всякой теории гомологий можно следующим образом определить приведенные группы. Если пространство X непусто, то пусть $c\colon X \to P$ — единственное отображение в некоторое одноточечное пространство P. Приведенная группа $\tilde{H}(X)$ определяется как ядро гомоморфизма

$$H(c)\colon H(X) \to H(P).$$

Поскольку отображение c имеет правое обратное, гомоморфизм $H(c)$ также имеет правый обратный. Следовательно,

$$H(X) \approx \tilde{H}(X) \oplus H(P),$$

и приведенные группы обладают свойствами, аналогичными свойствам приведенных групп сингулярных гомологий.

Пусть дана триада $B \subset A \subset X$, и пусть $k\colon A \subset (A, B)$ — вложение. Определим гомоморфизм $\partial(X, A, B)\colon H(X, A) \to H(A, B)$ как композицию

$$\partial(X, A, B) = H(k)\,\partial(X, A)\colon H(X, A) \to H(A) \to H(A, B).$$

5. Теорема. *Для всякой триады (X, A, B) и соответствующих ей вложений $i\colon (A, B) \subset (X, B)$ и $j\colon (X, B) \subset (X, A)$ имеет место точная последовательность*

$$\ldots \to H_q(A, B) \xrightarrow{H_q(i)} H_q(X, B) \xrightarrow{H_q(j)} H_q(X, A) \xrightarrow{\partial_q(X, A, B)} \to H_{q-1}(A, B) \to \ldots .$$

Доказательство. При доказательстве используется метод диаграммного поиска, основанный на аксиоме точности. Мы докажем точность лишь в члене $H_q(A, B)$, предоставив остальное читателю.

(a) $\operatorname{im} \partial_{q+1}(X, A, B) \subset \ker H_q(i)$. Гомоморфизм $H_q(i)\,\partial_{q+1}(X, A, B)$ является композицией

$$H_{q+1}(X, A) \xrightarrow{\partial_{q+1}(X, A)} H_q(A) \xrightarrow{H_q(k)} H_q(A, B) \xrightarrow{H_q(i)} H_q(X, B),$$

равной в свою очередь композиции

$$H_{q+1}(X, A) \xrightarrow{\partial_{q+1}(X, A)} H_q(A) \xrightarrow{H_q(i')} H_q(X) \xrightarrow{H_q(i'')} H_q(X, B),$$

где $i'\colon A \subset X$ и $i''\colon X \subset (X, B)$. Согласно аксиоме 2, $H_q(i')\,\partial_{q+1}(X, A) = 0$. Следовательно, $H_q(i)\,\partial_{q+1}(X, A, B) = 0$.

(b) $\ker H_q(i) \subset \operatorname{im} \partial_{q+1}(X, A, B)$. Пусть элемент $z \in H_q(A, B)$, причем $H_q(i) z = 0$. Тогда $\partial_q(X, B) H_q(i) z = 0$, и так как $\partial_q(A, B) = \partial_q(X, B) H_q(i)$, то $\partial_q(A, B) z = 0$. По аксиоме 2 существует такой элемент $z' \in H_q(A)$, что $H_q(k) z' = z$. Поскольку композиция

$$H_q(A) \xrightarrow{H_q(i')} H_q(X) \xrightarrow{H_q(i'')} H_q(X, B)$$

совпадает с композицией $H_q(i) H_q(k)$, мы видим, что

$$H_q(i'') H_q(i') z' = H_q(i) H_q(k) z' = H_q(i) z = 0.$$

По аксиоме 2 существует такой элемент $z'' \in H_q(B)$, что если j': $B \subset X$, то $H_q(i') z' = H_q(j') z''$. Если j'': $B \subset A$, то $H_q(j') = H_q(i') H_q(j'')$. Следовательно, $H_q(i')(z' - H_q(j'') z'') = 0$. Снова из аксиомы 2 выводим существование такого элемента $\bar{z} \in H_{q+1}(X, A)$, что $\partial_{q+1}(X, A) \bar{z} = z' - H_q(j'') z''$. Поскольку $H_q(k) H_q(j'') = 0$, имеем

$$\partial_{q+1}(X, A, B) \bar{z} = H_q(k) \partial_{q+1}(X, A) \bar{z} = H_q(k) z' - H_q(k) H_q(j'') z'' = z.$$

Таким образом, элемент z принадлежит подгруппе $\operatorname{im} \partial_{q+1}(X, A, B)$. ∎

Точная последовательность теоремы 5 называется *гомологической последовательностью триады* (X, A, B). Если $B = \varnothing$, то она сводится к гомологической последовательности пары (X, A).

Пусть H и ∂, H' и ∂' — некоторые теории гомологий. *Гомоморфизмом* теории (H, ∂) в теорию (H', ∂') называется естественное преобразование h функтора H в функтор H', коммутирующее с дифференциалами ∂ и ∂', т. е. такое, что для каждой пары (X, A) имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} H(X, A) & \xrightarrow{\partial(X, A)} & H(A) \\ {\scriptstyle h(X, A)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle h(A)} \\ H'(X, A) & \xrightarrow{\partial'(X, A)} & H'(A) \end{array}$$

в которой вертикальные отображения являются гомоморфизмами нулевой степени. Ввиду аксиомы размерности гомоморфизм h индуцирует гомоморфизм h_0: $\mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$, характеризующий h на одноточечных пространствах. Основной результат, доказанный Эйленбергом и Стинродом, заключается в следующем. Для всякого гомоморфизма h_0: $\mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$ существует единственный гомоморфизм h из теории (H, ∂) в теорию (H', ∂') (обе теории определены на категории компактных полиэдральных пар), индуцирующий гомоморфизм h_0. Мы не будем это доказывать и ограничимся доказательством того, что гомоморфизм h, являющийся изоморфизмом для одноточечных пространств, является изоморфизмом для любой компактной полиэдральной пары. Это послужит нам иллюстрацией использования аксиом, и в то же время этого достаточно для наших дальнейших применений.

Следующая лемма легко получается из аксиомы точности и леммы о пяти гомоморфизмах (или из теоремы 5 и аксиомы 2).

6. Лемма. *Пусть $A' \subset A \subset X$. В таком случае изоморфизм $H(A') \approx H(A)$ имеет место тогда и только тогда, когда $H(X, A') \approx H(X, A)$ (оба изоморфизма индуцированы вложениями).* ■

Сейчас мы докажем усиленное свойство вырезания. Отображение f: $(X, A) \to (Y, B)$ называется *относительным гомеоморфизмом*, если оно гомеоморфно отображает $X - A$ на $Y - B$. Приведем несколько примеров:

7. Отображение вырезания $(X - U, A - U) \subset (X, A)$, где $U \subset A$, является относительным гомеоморфизмом.

8. Если пространство X получено из A приклеиванием n-мерной клетки e и f: $(E^n, S^{n-1}) \to (e, \dot{e})$ — характеристическое отображение для клетки e, то f — относительный гомеоморфизм.

9. Теорема. *Пусть X — компактное хаусдорфово пространство, и пусть A — замкнутое подмножество в X, являющееся сильным деформационным ретрактом одной из своих замкнутых окрестностей в X. Пусть f: $(X, A) \to (Y, B)$ — некоторый относительный гомеоморфизм, где пространство Y хаусдорфово, а множество B замкнуто в Y. Тогда для всякой теории гомологий имеет место изоморфизм $H(f)$: $H(X, A) \approx H(Y, B)$.*

Доказательство. Пусть N — замкнутая окрестность множества A в X, такая, что A является ее сильным деформационным ретрактом. Пусть U — открытое множество в X, для которого $A \subset U \subset \bar{U} \subset \operatorname{int} N$ (такое множество U существует, так как пространство X нормально). Пусть F: $N \times I \to N$ — сильная деформационная ретракция N на A.

Положим $N' = f(N) \cup B$, $U' = f(U) \cup B$ и определим гомотопию F': $N' \times I \to N'$ равенствами

$$F'(y, t) = y, \qquad y \in B, \qquad t \in I,$$
$$F'(y, t) = f\left(F\left(f^{-1}(y), t\right)\right), \qquad y \in f(N), \qquad t \in I.$$

Тогда отображение F' корректно определено и непрерывно на каждом из замкнутых множеств $B \times I$ и $f(N) \times I$. Следовательно, отображение F' непрерывно и легко проверить, что оно является сильной деформационной ретракцией окрестности N' на B. Поскольку множество $X - \bar{U}$ открыто в $X - A$, множество $Y - (f(\bar{U}) \cup B)$ открыто в $Y - B$, а поскольку B замкнуто, оно открыто и в Y. Следовательно, $f(\bar{U}) \cup B$ замкнуто в Y и $\bar{U}' \subset f(\bar{U}) \cup B \subset N'$.

Так как множество $\operatorname{int} N$ открыто, то $X - \operatorname{int} N$ замкнуто и, следовательно, компактно в X. Тогда $f(X - \operatorname{int} N)$ компактно и, следовательно, замкнуто в Y. Поскольку $X - \operatorname{int} N \subset X - A$, из того факта, что f — относительный гомеоморфизм, получаем $f(X - \operatorname{int} N) = Y - f(\operatorname{int} N)$, откуда следует, что множество $f(\operatorname{int} N)$ открыто в Y. Снова из того факта, что f — относительный гомеоморфизм, и того, что $f(A) \subset B$, получаем $f^{-1}(B - f(A)) = \varnothing$, откуда $f^{-1}(Y - (B - f(A))) = X$, и, значит, множество $Y - (B - f(A)) = f(X)$ компактно и тем самым замкнуто в Y. Следовательно, множество $B - f(A)$ открыто в Y, откуда множество $f(\operatorname{int} N) \cup B = f(\operatorname{int} N) \cup (B - f(A))$ (так как $A \subset \operatorname{int} N$) открыто в Y и, значит, $f(\bar{U}) \cup B \subset f(\operatorname{int} N) \cup B \subset \operatorname{int} N'$ (так как $f(\operatorname{int} N) \cup B \subset f(N) \cup B = N'$).

Так как $X - U$ — замкнутое, а следовательно, и компактное подмножество в x, то $f(X - U) = Y - U'$ — компактное подмножество пространства Y. Поскольку пространство Y хаусдорфово, множество $Y - U'$ замкнуто в Y, а U' открыто в Y. Таким образом, получаем включения $B \subset U' \subset \bar{U}' \subset N'$ и коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd} H(X, A) \arrow[r, "\approx"'] \arrow[d, "H(f)"'] & H(X, N) \arrow[d] & H(X - U, N - U) \arrow[l, "\approx"] \arrow[d, "\approx"] \\ H(Y, B) \arrow[r, "\approx"'] & H(Y, N') & H(Y - U', N' - U') \arrow[l, "\approx"] \end{tikzcd}$$

где вертикальные гомоморфизмы индуцированы отображением f, а горизонтальные — вложениями. Поскольку A и B являются сильными деформационными ретрактами своих окрестностей N и N' соответственно, то $H(A) \approx H(N)$ и $H(B) \approx H(N')$. Из леммы 6 следует, что горизонтальные гомоморфизмы слева являются изоморфизмами. Горизонтальные гомоморфизмы справа являются изоморфизмами по аксиоме вырезания. Правый вертикальный гомоморфизм является изоморфизмом, так как он индуцирован гомеоморфизмом. Из коммутативности этой диаграммы следует, что $H(f)$ — тоже изоморфизм. ■

10. Теорема. *Пусть h — гомоморфизм теории (H, ∂) в теорию (H', ∂'), являющийся изоморфизмом для одноточечных пространств. Тогда для любой компактной полиэдральной пары (X, A) имеет место изоморфизм $h(X, A)$: $H(X, A) \approx H'(X, A)$.*

Доказательство. В силу леммы о пяти гомоморфизмах достаточно доказать изоморфизм $h(X)$: $H(X) \approx H'(X)$ для произвольного компактного полиэдра X. Пусть K — конечный симплициальный комплекс. Нам нужно лишь доказать, что $h(|K|)$: $H(|K|) \approx H'(|K|)$. Докажем это индукцией по числу симплексов комплекса K. Если K состоит ровно из одного симплекса, то $|K|$ — одноточечное пространство и $h(|K|)$ — изоморфизм по условию теоремы.

Предположим, что комплекс K имеет ровно m симплексов, где $m>0$, и что h является изоморфизмом для пространств симплициальных комплексов, имеющих меньше m симплексов. Допустим, что $\dim K = n$ и что s — некоторый n-мерный симплекс комплекса K. Пусть L — подкомплекс комплекса K, образованный всеми симплексами, отличными от s. В силу леммы о пяти гомоморфизмах и аксиомы точности гомоморфизм $h(|K|)$ тогда и только тогда является изоморфизмом, когда $h(|K|, |L|)$ изоморфизм. Если $j:(|s|, |\dot{s}|) \subset (|K|, |L|)$, то из теоремы 9 следует, что $H(j)$ и $H'(j)$ — изоморфизмы. Следовательно, достаточно показать, что $h(|s|, |\dot{s}|)$ — изоморфизм.

Если $n=0$, то $(|s|, |\dot{s}|)$ — одноточечное пространство и $h(|s|, |\dot{s}|)$ — изоморфизм по предположению. Если $n>0$, то, поскольку $|s|$ имеет гомотопический тип одноточечного пространства, $h(|s|)$ — изоморфизм. По лемме о пяти гомоморфизмах и аксиоме точности $h(|s|, |\dot{s}|)$ тогда и только тогда является изоморфизмом, когда $h(|\dot{s}|)$ — изоморфизм. Но $\dot{s}$ — собственный подкомплекс комплекса K. Следовательно, $h(|\dot{s}|)$ является изоморфизмом по предположению индукции. ■

Чтобы распространить этот результат на произвольные (не обязательно компактные) полиэдральные пары, необходима дополнительная аксиома. Пара (X, A), где пространство X компактно, а множество A замкнуто в X, называется *компактной парой.*

11. Аксиома компактных носителей. *Для любой пары (X, A) и фиксированного элемента $z \in H_q(X, A)$ существует компактная пара $(X', A') \subset (X, A)$, такая, что элемент z принадлежит образу гомоморфизма $H_q(X', A') \to H_q(X, A)$.*

Теория гомологий (H, ∂), удовлетворяющая аксиоме 11, называется *теорией гомологий с компактными носителями.* Ясно, что теория сингулярных гомологий является теорией гомологий с компактными носителями. Мы увидим, что всякая теория гомологий с компактными носителями удовлетворяет аналогу теоремы 4.4.6. Основным звеном при доказательстве этого результата является следующая лемма:

12. Лемма. *Пусть H — теория гомологий с компактными носителями, и пусть (X', A') — компактная пара в (X, A). Для всякого элемента $z \in H_q(X', A')$, принадлежащего ядру гомоморфизма $H_q(X', A') \to H_q(X, A)$, найдется такая компактная пара (X'', A''), $(X', A') \subset (X'', A'') \subset (X, A)$, что z принадлежит ядру гомоморфизма $H_q(X', A') \to H_q(X'', A'')$.*

Доказательство. В этом доказательстве все необозначенные гомоморфизмы индуцированы вложениями. Элемент z принадлежит ядру композиции

$$H_q(X', A') \xrightarrow{H_q(i)} H_q(X, A') \to H_q(X, A).$$

По теореме 5 элемент $H_q(i)z$ содержится в образе гомоморфизма $H_q(A, A') \to H_q(X, A')$. Согласно аксиоме 11, существует компактное пространство A'', такое, что $A' \subset A'' \subset A$, и элемент $H_q(i)z$ содержится в образе композиции $H_q(A'', A') \to H_q(A, A') \to H_q(X, A')$. В силу теоремы 5 композиция $H_q(A'', A') \to H_q(X, A') \to H_q(X, A'')$ тривиальна. Следовательно, элемент z содержится в ядре гомоморфизма $H_q(X', A') \to H_q(X, A'')$ для некоторого компакта A'', содержащего A'. Поскольку элемент z принадлежит ядру композиции

$$H_q(X', A') \xrightarrow{H_q(j)} H_q(X' \cup A'', A'') \to H_q(X, A''),$$

из теоремы 5 вытекает, что $H_q(j)z$ принадлежит образу гомоморфизма

$$\partial_{q+1}\colon H_{q+1}(X, X' \cup A'') \to H_q(X' \cup A'', A'').$$

Согласно аксиоме 11, существует такое компактное подпространство X'', содержащее $X' \cup A''$, что элемент $H_q(j)z$ принадлежит образу композиции

$$H_{q+1}(X'', X' \cup A'') \to H_{q+1}(X, X' \cup A'') \xrightarrow{\partial_{q+1}} H_q(X' \cup A'', A'').$$

Эта композиция совпадает с гомоморфизмом

$$\partial_{q+1}\colon H_{q+1}(X'', X' \cup A'') \to H_q(X' \cup A'', A'').$$

В силу теоремы 5 композиция

$$H_{q+1}(X'', X' \cup A'') \xrightarrow{\partial_{q+1}} H_q(X' \cup A'', A'') \to H_q(X'', A'')$$

тривиальна. Следовательно, элемент z принадлежит ядру гомоморфизма $H_q(X', A') \to H_q(X'', A'')$. ■

Для всякой пары (X, A) семейство компактных пар (X', A'), содержащихся в (X, A), направлено по включению. Для любой теории гомологий (H, ∂) группы $\{H(X', A') \mid$ пара (X', A') компактна и $\subset (X, A)\}$ образуют прямой спектр, и отображения $H(X', A') \to H(X, A)$ определяют гомоморфизм $i\colon \varinjlim\{H(X', A')\} \to H(X, A)$.

13. Теорема. *Теория гомологий (H, ∂) тогда и только тогда является теорией гомологий с компактными носителями, когда для любой пары (X, A) имеет место изоморфизм $i\colon \varinjlim\{H(X', A')\} \approx H(X, A)$, где (X', A') пробегает семейство компактных пар, содержащихся в паре (X, A).*

Доказательство. Аксиома 11 равносильна условию, что i — эпиморфизм. Следовательно, если i — изоморфизм, то (H, ∂) —

теория гомологий с компактными носителями. Обратно, если H — теория гомологий с компактными носителями, то i является эпиморфизмом, а в силу леммы 12 и мономорфизмом. ■

14. Теорема. *Пусть h — гомоморфизм теории (H, ∂) в теорию (H', ∂'), являющийся изоморфизмом для одноточечных пространств. Если (H, ∂) и (H', ∂') — теории гомологий с компактными носителями, то h — изоморфизм для любой полиэдральной пары.*

Доказательство. Утверждение следует из теорем 10 и 13 и из того факта, что для любой полиэдральной пары (X, A) содержащиеся в ней компактные полиэдральные пары (X', A') образуют конфинальное подмножество семейства всех компактных пар в (X, A). ■

УПРАЖНЕНИЯ

А. Цепно гомотопические классы

1. Покажите, что для любых цепных комплексов C и C' множество $[C; C']$ является абелевой группой (с групповой операцией $[\tau_1] + [\tau_2] = [\tau_1 + \tau_2]$) и существует гомоморфизм

$$\varphi\colon [C; C'] \to \operatorname{Hom}(H(C), H(C')),$$

такой, что $\varphi[\tau] = \tau_*$.

2. Докажите, что если C — свободный цепной комплекс, то гомоморфизм φ является эпиморфизмом.

3. Докажите, что если C — свободный цепной комплекс и комплекс $H(C)$ тоже свободный, то φ является изоморфизмом.

В. Эйлерова характеристика

1. Пусть (X, A) — такая пара, что какие-нибудь две из трех групп $H(A)$, $H(X)$ и $H(X, A)$ конечно порождены. Докажите, что тогда и третья группа конечно порождена и $\chi(X) = \chi(A) + \chi(X, A)$.

2. Пусть пара $\{X_1, X_2\}$ подмножеств пространства X удовлетворяет аксиоме вырезания, и пусть группы $H(X_1)$ и $H(X_2)$ конечно порождены. Докажите, что группа $H(X_1 \cup X_2)$ тогда и только тогда конечно порождена, когда конечно порождена группа $H(X_1 \cap X_2)$, и в этом случае имеет место равенство

$$\chi(X_1) + \chi(X_2) = \chi(X_1 \cup X_2) + \chi(X_1 \cap X_2).$$

3. Пусть функция γ, определенная на классе компактных полиэдров с отмеченной точкой и принимающая целочисленные значения, удовлетворяет следующим условиям:

(a) если (X, x_0) гомеоморфно (Y, y_0), то $\gamma(X, x_0) = \gamma(Y, y_0)$;

(b) если (X, A) — компактная полиэдральная пара и $x_0 \in A$, то $\gamma(X, x_0) = \gamma(A, x_0) + \gamma(X/A, x_0')$, где X/A — пространство, полученное отождествлением подмножества A в одну точку x_0'.

Докажите, что для любого пространства X

$$\gamma(X, x_0) = \gamma(S^0, p_0)\,\chi(X, x_0).$$

(*Указание* [1]). Сначала докажите, что если z_0 — отмеченная точка шара E^n, принадлежащая S^{n-1}, то $\gamma(E^n, z_0) = 0$. Покажите, что результат верен для $X = S^n$, а затем используйте индукцию по числу симплексов триангуляции пространства X.)

4. Докажите, что если X и Y — компактные полиэдры, то

$$\chi(X \times Y) = \chi(X)\,\chi(Y).$$

C. Примеры

1. Пусть s есть n-мерный симплекс, и пусть $(s)^m$ — его m-мерный остов. Вычислите группу $H((s)^m)$.

2. Вычислите группы гомологий произвольной поверхности.

3. Вычислите группы гомологий линзового пространства $L(p, q)$.

4. Пусть A — подпространство сферы S^n, гомеоморфное букету $S^p \vee S^q$. Вычислите $H(S^n - A)$.

5. Пусть X — пространство, полученное из замкнутого треугольника с вершинами v_0, v_1 и v_2 линейным отождествлением ребер v_0v_1, v_1v_2 и v_2v_0 с ребрами v_1v_2, v_2v_0 и v_0v_1 соответственно. Вычислите $H(X)$.

6. Докажите, что для произвольных целых чисел $n > 0$ и $m > 1$ существует такой компактный полиэдр X, что

$$\tilde{H}_q(X) = \begin{cases} 0, & q \neq n, \\ \mathbf{Z}_m, & q = n. \end{cases}$$

7. Пусть H — конечно порожденная неотрицательно градуированная абелева группа, такая, что H_0 — свободная абелева группа. Докажите, что существует компактный полиэдр X, для которого $\tilde{H}(X) \approx H$.

D. Соединения и произведения

1. Докажите, что для любого пространства X имеет место изоморфизм (при всяком q)

$$\tilde{H}_q(X) \approx \tilde{H}_{q+1}(X * S^0).$$

(*Указание.* Если пространство Y стягиваемо, то стягиваемо и $X * Y$.)

2. Докажите, что для любого пространства X имеют место изоморфизмы

$$H_q(X \times S^n, X \times p_0) \approx H_{q-n}(X).$$

(*Указание.* Используйте индукцию по n и тот факт, что если Y стягиваемо, то $H(X \times Y, X \times y_0) = 0$.)

3. Вычислите группы гомологий n-мерного тора $(S^1)^n$.

4. Докажите, что если пространство гомеоморфно произведению конечного числа сфер, то число сфер, являющихся сомножителями, определено однозначно.

---

[1]) См. Watts C. E., On the Euler characteristic of polyhedra, *Proc. Am. Math. Soc.*, **13** (1962), 304—306.

Е. Ориентация

1. Пусть K есть n-мерное псевдомногообразие. Покажите, что можно занумеровать n-мерные симплексы комплекса K в (конечную или бесконечную) последовательность $s_0, s_1, \ldots, s_q, \ldots$ и найти последовательность $s'_1, s'_2, \ldots, s'_q, \ldots$ $(n-1)$-мерных симплексов, принадлежащих K, таким образом, чтобы при $q \geqslant 1$ симплекс s'_q был гранью симплекса s_q, а также гранью симплекса s_i для некоторого $i < q$.

2. Докажите, что для всякого конечного n-мерного псевдомногообразия K выполняется в точности одно из следующих утверждений:

(a) $H_n(K, \dot{K}) \approx \mathbf{Z}$ и $H_{n-1}(K, \dot{K})$ не имеет кручения;

(b) $H_n(K, \dot{K}) = 0$ и группа $H_{n-1}(K, \dot{K})$ содержит подгруппу, изоморфную $\mathbf{Z}_2$.

3. Пусть K — конечный симплициальный комплекс, однородно n-мерный и такой, что всякий $(n-1)$-мерный симплекс из K является гранью не более двух n-мерных симплексов из K. Пусть подкомплекс $\dot{K}$ в K образован всеми $(n-1)$-мерными симплексами из K, являющимися гранями ровно одного n-мерного симплекса из K. Докажите, что если пара $(K, \dot{K})$ удовлетворяет одному из утверждений (a) или (b) упражнения 2, то K является n-мерным псевдомногообразием.

Конечное n-мерное псевдомногообразие называется *ориентируемым* (или *неориентируемым*), если оно удовлетворяет утверждению (a) (или (b)) упражнения 2. *Ориентацией* n-мерного ориентируемого псевдомногообразия K называется произвольно выбранная образующая группы $H_n(K, \dot{K})$; *ориентированным* n-мерным псевдомногообразием называется n-мерное ориентируемое псевдомногообразие с выбранной ориентацией.

4. Пусть $z \in H_n(K, \dot{K})$ — ориентация конечного n-мерного псевдомногообразия. Докажите, что если s — некоторый n-мерный симплекс комплекса K, то существует единственная ориентация комплекса s (обозначаемая $z \mid s \in H_n(s, \dot{s})$ и называемая *индуцированной ориентацией* симплекса s), которая характеризуется тем свойством, что элементы z и $z \mid s$ соответствуют один другому при гомоморфизмах

$$H_n(K, \dot{K}) \to H_n(K, K-s) \xleftarrow[\approx]{} H_n(s, \dot{s}).$$

Семейство ориентаций $\{\sigma(s) \in H_n(s, \dot{s})\}$ для каждого n-мерного симплекса s в n-мерном псевдомногообразии называется *согласованным*, если для любого $(n-1)$-мерного симплекса s' комплекса $K-\dot{K}$, являющегося гранью двух n-мерных симплексов s_1 и s_2 из K, элементы $\sigma(s_1)$ и $-\sigma(s_2)$ соответствуют один другому при гомоморфизмах

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
H_n(s_1, \dot{s}_1) \arrow[r, "\partial"] & H_{n-1}(\dot{s}_1) \arrow[r] & H_{n-1}(\dot{s}_1, \dot{s}_1 - s') & \\
& & & H_{n-1}(s', \dot{s}') \arrow[ul, "\approx"'] \arrow[dl, "\approx"] \\
H_n(s_2, \dot{s}_2) \arrow[r, "\partial"] & H_{n-1}(\dot{s}_2) \arrow[r] & H_{n-1}(\dot{s}_2, \dot{s}_2 - s') &
\end{tikzcd}$$

5. Покажите, что если z — ориентация некоторого конечного n-мерного псевдомногообразия, то семейство $\{z \mid s\}$ согласовано. Обратно, докажите, что если дано согласованное семейство $\{\sigma(s)\}$ ориентаций n-мерных симплексов s конечного n-мерного псевдомногообразия K, то существует единственная ориентация z комплекса K, такая, что $z \mid s = \sigma(s)$ для каждого n-мерного симплекса s из K. Используйте это для определения ориентируемости произвольного (бесконечного) n-мерного псевдомногообразия. (*Указание.* Отождествите группу $H_n(K, K^{n-1})$ с семейством $\{\sigma(s) \in H_n(s, \dot{s})\}$, где s пробегает все n-мерные симплексы комплекса K, и покажите, что образ гомоморфизма $H_n(K, \dot{K}) \to H_n(K, K^{n-1})$ является согласованным семейством.)

F. Степени отображений

Пусть K_1 и K_2 — конечные n-мерные псевдомногообразия с ориентациями z_1 и z_2 соответственно. *Степенью* непрерывного отображения f: $(|K_1|, |\dot{K}_1|) \to (|K_2|, |\dot{K}_2|)$ (обозначается $\deg f$) называется такое целое число, что $f_*(z_1) = (\deg f) z_2$ (здесь $z_1 \in H_n(|K_1|, |\dot{K}_1|)$ и $z_2 \in H_n(|K_2|, |\dot{K}_2|)$).

1. Пусть φ: $(K_1, \dot{K}_1) \to (K_2, \dot{K}_2)$ — некоторая симплициальная аппроксимация отображения f, s_2 — фиксированный n-мерный симплекс комплекса K_2, и пусть $m_+(\varphi)$ (или $m_-(\varphi)$) есть число n-мерных симплексов s_1 комплекса K_1, таких, что отображение φ переводит индуцированную ориентацию $z_1 | s_1$ в индуцированную ориентацию $z_2 | s_2$ (или $-z_2 | s_2$). Докажите, что $\deg f = m_+(\varphi) - m_-(\varphi)$.

2. Пусть K — конечное ориентируемое n-мерное псевдомногообразие, а f: $(|K|, |\dot{K}|) \to (|K|, |\dot{K}|)$ — некоторое непрерывное отображение. Тогда существует однозначно определенное целое число $\deg f$, такое, что равенство $f_*(z) = (\deg f) z$ выполняется для любого элемента $z \in H_n(|K|, |\dot{K}|)$. Покажите, что для произвольных непрерывных отображений f, g: $(|K|, |\dot{K}|) \to (|K|, |\dot{K}|)$ имеет место равенство $\deg(g \circ f) = \deg g \cdot \deg f$.

3. Пусть отображение f: $S^n \to S^n$ таково, что $f(E^n_+) \subset E^n_+$ и $f(E^n_-) \subset E^n_-$, и пусть f': $S^{n-1} \to S^{n-1}$ — отображение, определяемое отображением f. Покажите, что $\deg f = \deg f'$.

4. Покажите, что для любого целого $n \geqslant 1$ и любого целого m существует отображение f: $S^n \to S^n$, такое, что $\deg f = m$.

G. Топологическая инвариантность псевдомногообразий

1. Пусть K — некоторый симплициальный комплекс, и пусть $x \in \langle s \rangle$, где s — симплекс из K. Докажите, что имеет место изоморфизм

$$H(|K|, |K| - \operatorname{st} s) \approx H(|K|, |K| - x).$$

2. Пусть K — некоторый симплициальный комплекс, и пусть $x \in \langle s \rangle$, где s — *главный* n-мерный симплекс комплекса K (т. е. не являющийся собственной гранью никакого другого симплекса из K). Покажите, что

$$H_q(|K|, |K| - x) \approx \begin{cases} 0, & q \neq n, \\ \mathbf{Z}, & q = n. \end{cases}$$

3. Докажите, что локально компактный полиэдр X тогда и только тогда имеет размерность n, когда n — наибольшее целое число, для которого существует точка $x \in X$, удовлетворяющая условию $H_n(X, X - x) \neq 0$.

4. Пусть X — локально компактный полиэдр. Для каждого n пусть X_n — замыкание множества всех $x \in X$, имеющих окрестность U, такую, что $H_n(X, X - y) \approx \mathbf{Z}$ для всех $y \in U$. Если K — некоторый симплициальный комплекс, являющийся триангуляцией пространства X, а K_n — его подкомплекс, порожденный всеми главными n-мерными симплексами из K, то K_n — триангуляция пространства X_n. Докажите это.

5. Докажите, что свойство быть однородно n-мерным является топологически инвариантным свойством симплициальных комплексов (так что можно говорить об однородно n-мерных полиэдрах).

6. Пусть K — произвольный симплициальный комплекс, являющийся триангуляцией однородно n-мерного полиэдра X. Докажите, что каждый $(n-1)$-мерный симплекс комплекса K тогда и только тогда является гранью не более двух его n-мерных симплексов, когда $H_q(A, A-x)=0$ для всех $x \in A$ и всех $q \geqslant n-1$, где A — замыкание в пространстве X множества $\{x \in X \mid$ группа $H_n(X, X-x)$ не является циклической$\}$.

7. Пусть X — однородно n-мерный полиэдр, удовлетворяющий условиям упражнения 6. Пусть $\dot{X}=B_{n-1}$, где B — замыкание в X множества $\{x \in X \mid H_n(X, X-x)=0\}$, а B_{n-1} определяется через B, как в упражнении 4. Докажите, что если K — любой симплициальный комплекс, являющийся триангуляцией пространства X, то подкомплекс в K, порожденный $(n-1)$-мерными симплексами из K, являющимися гранями ровно одного n-мерного симплекса из K, представляет собой триангуляцию пространства $\dot{X}$.

8. Докажите, что свойство быть конечным n-мерным псевдомногообразием является топологически инвариантным свойством симплициальных комплексов.

H. Группы ломаных

1. Пусть K — связный симплициальный комплекс с отмеченной вершиной $v_0 \in K$. Для всякого его ребра $e=(v_0, v_1)$ пусть $[e]$ — одномерный ориентированный симплекс $[v_0, v_1]$. Пусть $\zeta = e_1 e_2 \ldots e_r$ — замкнутая ломаная в K, начинающаяся в точке v_0, и пусть $\psi(\zeta)=[e_1]+[e_2]+\ldots+[e_r] \in C_1(K)$. Докажите, что $\psi(\zeta)$ — цикл, причем циклы $\psi(\zeta)$ и $\psi(\zeta')$ гомологичны, если ζ и ζ' — эквивалентные ломаные.

2. Докажите, что существует естественное преобразование $\psi\colon E(K, v_0) \to H_1(K)$ (оба функтора определены на категории связных симплициальных комплексов с отмеченной вершиной), определяемое равенством $\psi[\zeta]=\{\psi(\zeta)\}$.

3. Докажите, что гомоморфизм ψ является эпиморфизмом и его ядро совпадает с коммутантом группы $E(K, v_0)$.

I. Аксиоматическая теория гомологий

В этой группе упражнений H обозначает произвольную теорию гомологий.

1. Пусть X_1 и X_2 — подпространства пространства X. Докажите эквивалентность следующих утверждений:

(a) Отображение вырезания $(X_1, X_1 \cap X_2) \subset (X_1 \cup X_2, X_2)$ индуцирует изоморфизм гомологий.

(b) Отображение вырезания $(X_2, X_1 \cap X_2) \subset (X_1, \cup X_2\ X_1)$ индуцирует изоморфизм гомологий.

(c) Вложения

$$i_1\colon (X_1, X_1 \cap X_2) \subset (X_1 \cup X_2, X_1 \cap X_2),$$
$$i_2\colon (X_2, X_1 \cap X_2) \subset (X_1 \cup X_2, X_1 \cap X_2)$$

индуцируют мономорфизмы гомологий и

$$H(X_1 \cup X_2, X_1 \cap X_2) \approx i_{1*}H(X_1, X_1 \cap X_2) \oplus i_{2*}H(X_2, X_1 \cap X_2).$$

(d) Вложения

$$j_1\colon (X_1 \cup X_2, X_1 \cap X_2) \subset (X_1 \cup X_2, X_1),$$
$$j_2\colon (X_1 \cup X_2, X_1 \cap X_2) \subset (X_1 \cup X_2, X_2)$$

индуцируют эпиморфизмы гомологий, а j_{1*} и j_{2*} индуцируют изоморфизм

$$H(X_1 \cup X_2, X_1 \cap X_2) \approx H(X_1 \cup X_2, X_1) \oplus H(X_1 \cup X_2, X_2).$$

(e) Для любого множества $A \subset X_1 \cap X_2$ имеет место точная последовательность Майера — Виеториса

$$\ldots \to H_q(X_1 \cap X_2, A) \to H_q(X_1, A) \oplus H_q(X_2, A) \to$$
$$\to H_q(X_1 \cup X_2, A) \to H_{q-1}(X_1 \cap X_2, A) \to \ldots .$$

(f) Для любого множества $Y \supset X_1 \cup X_2$ имеет место точная последовательность Майера — Виеториса

$$\ldots \to H_q(Y, X_1 \cap X_2) \to H_q(Y, X_1) \oplus H_q(Y, X_2) \to$$
$$\to H_q(Y, X_1 \cup X_2) \to H_{q-1}(Y, X_1 \cap X_2) \to \ldots .$$

2. Пусть замкнутые подпространства $X_1, \ldots, X_m$ и A пространства X таковы, что

(a) $X = \bigcup X_i$;

(b) если $i \neq j$, то $X_i \cap X_j = A$;

(c) если $i \neq j$, то $\overline{X_i - A}$ не пересекается с $\overline{X_j - A}$.

Докажите, что всякий гомоморфизм $H(X_i, A) \to H(X, A)$ является мономорфизмом и что $H(X, A)$ — прямая сумма их образов.

3. Пусть $\{X_j\}_{j \in J}$ (где множество J может быть бесконечным) — совокупность замкнутых подмножеств пространства X, и пусть для некоторого подпространства A пространства X выполняются условия (a), (b) и (c) упражнения 2. Предположим еще, что всякое компактное подмножество пространства X содержится в объединении некоторой конечной совокупности множеств $\{X_j\}$ и что H — теория гомологий с компактными носителями. Докажите, что $H(X, A) \approx \bigoplus\limits_{j \in J} H(X_j, A)$.

4. Пусть (X, A) — некоторая пара топологических пространств, и пусть $\{X_s\}$ — занумерованное целыми числами семейство подпространств пространства X, такое, что

(a) $A = X_{-1}$;

(b) $X_s \subset X_{s+1}$ для всех s;

(c) $X = \bigcup X_s$ и всякое компактное подмножество пространства X целиком содержится в X_s для некоторого s;

(d) если $q \neq s$ и $s \geqslant 0$, то $H_q(X_s, X_{s-1}) = 0$.

Пусть $C = \{C_q, \partial_q\}$ — неотрицательный цепной комплекс, $C_q = H_q(X_q, X_{q-1})$ $(q \geqslant 0)$, а ∂_q — граничный оператор триады (X_q, X_{q-1}, X_{q-2}) $(q \geqslant 1)$. Докажите, что если H — теория гомологий с компактными носителями, то $H(X, A) = H(C)$. (*Указание.* Докажите, что имеют место точные последовательности

$$H_{q+1}(X_{q+1}, X_q) \xrightarrow{\partial} H_q(X_q) \to H_q(X) \to 0,$$
$$0 \to H_q(X_q) \to H_q(X_q, X_{q-1}) \to H_{q-1}(X_{q-1}).)$$

5. Пусть теория гомологий H определена на категории компактных пар. Докажите, что существует продолжение теории H до теории гомологий $\overline{H}$ с компактными носителями, такой, что $\overline{H}(X, A) = \varinjlim \{\widetilde{H}(X', A') \mid (X', A')$ — компактная пара в $(X, A)\}$.

Глава 5

ПРОИЗВЕДЕНИЯ

Теперь мы уже подготовлены к определению теории гомологий над более общими областями коэффициентов. Гомологии, которые мы рассматривали в предыдущей главе, соответствуют частному случаю целочисленных коэффициентов. Обобщение понятия гомологий производится чисто алгебраическим путем. Если заданы цепной комплекс C и абелева группа G, то их тензорное произведение $C \otimes G = \{C_q \otimes G, \partial_q \otimes 1\}$ является цепным комплексом, и гомологии комплекса $C \otimes G$ называются гомологиями комплекса C с коэффициентами в группе G.

Мы введем также понятия коцепного комплекса и когомологий. Эти понятия двойственны понятиям цепного комплекса и гомологий и возникают при замене функтора тензорного произведения функтором Hom.

Мы докажем формулы универсальных коэффициентов, выражающие гомологии и когомологии с произвольными коэффициентами некоторого пространства как функторы от целочисленных гомологий того же пространства. Хотя эти новые функторы не могут различать пространства, не различаемые функтором целочисленных гомологий, их стоит рассматривать, поскольку часто случается так, что наиболее естественный функтор для данной геометрической проблемы определяется самой этой проблемой и вовсе не обязан совпадать с функтором целочисленных гомологий. Например, в теории препятствий, которую мы будем изучать в гл. 8, естественным образом появляются когомологии пространства с коэффициентами в гомотопических группах другого пространства.

В дальнейшем мы увидим, что группа когомологий, кроме аддитивной структуры, обладает еще и мультипликативной структурой, что делает когомологии более мощным средством исследования, чем гомологии. Мы укажем некоторые применения этой дополнительной мультипликативной структуры, важнейшим из которых будет изучение гомологических свойств расслоенных пространств, где мы докажем точность последовательности Тома — Гизина для расслоений на сферы.

В конце главы помещено краткое обсуждение когомологических операций. По определению это естественные преобразования одной теории когомологий в другую; когомологические операции увеличивают возможности когомологий как средства исследования. Мы определим одно множество когомологических операций, известных под названием квадратов Стинрода, и установим их важнейшие свойства.

Параграфы 5.1 и 5.2 посвящены гомологиям с коэффициентами общего вида, а также доказательству формулы универсальных коэффициентов для гомологий. В § 5.3 рассматривается тензорное произведение двух цепных комплексов и доказывается формула Кюннета, выражающая гомологии тензорного произведения как функтор гомологий комплексов-сомножителей. Это применяется затем к геометрическому вопросу — вычислению гомологий произведения пространств через гомологии сомножителей.

Параграфы 5.4 и 5.5 содержат двойственные понятия коцепного комплекса и когомологий и соответствующую формулу универсальных коэффициентов. В § 5.6 определяются $\smile$- и $\frown$-произведения, причем $\smile$-произведение как раз и задает ту самую мультипликативную структуру в когомологиях, о которой было упомянуто выше, а $\frown$-произведение является к нему двойственным и «перемножает» когомологии и гомологии. Эти произведения используются в § 5.7 для изучения гомологий и когомологий расслоенных пространств. Мы докажем теорему Лере — Хирша, в которой утверждается, что гомологии и когомологии некоторых расслоенных пространств аддитивно изоморфны гомологиям и когомологиям произведения базы и слоя.

Параграф 5.8 посвящен изучению алгебры когомологий. Точность последовательности Тома — Гизина используется для вычисления алгебры когомологий проективных пространств, а это в свою очередь используется для доказательства теоремы Борсука — Улама. Там же рассматриваются алгебры Хопфа, которые появляются в связи с изучением когомологий H-пространств. В § 5.9 определяются квадраты Стинрода и доказываются их элементарные свойства. Они будут применяться позднее.

§ 1. Гомологии с коэффициентами

В этом параграфе мы обобщаем понятия, относящиеся к цепным комплексам, на тот случай, когда группы цепей являются модулями над некоторым кольцом. Тензорное произведение такого цепного комплекса на фиксированный модуль M является снова цепным комплексом, а его градуированный модуль гомологий есть функтор, зависящий от первоначального цепного комплекса и модуля M. Эти модули гомологий обладают свойствами, аналогичными установленным в предыдущей главе для комплексов абелевых групп. Заканчивается параграф определением теории гомологий с коэффициентами в произвольном модуле. Это аналогично абстрактному понятию теории гомологий (с целыми коэффициентами), введенному в предыдущей главе.

Всюду в этом параграфе R обозначает коммутативное кольцо с единицей. Мы будем рассматривать R-модули и их гомоморфизмы. *Цепным комплексом над кольцом* R (обозначается $C = \{C_q, \partial_q\}$) называется последовательность R-модулей C_q и R-гомоморфизмов ∂_q: $C_q \to C_{q-1}$, такая, что $\partial_q \partial_{q+1} = 0$ для всех q. Определим градуированный модуль гомологий, полагая

$$H(C) = \{H_q(C) = \ker \partial_q / \operatorname{im} \partial_{q+1}\}.$$

Для цепных комплексов над R можно определить понятия цепного отображения и цепной гомотопии, и утверждения о цепных комплексах абелевых групп обобщаются очевидным образом на случай цепных комплексов над кольцом R. В частности, в категории коротких точных последовательностей цепных комплексов над R

$$0 \to C' \to C \to C'' \to 0$$

существует функториальный связывающий гомоморфизм

$$\partial_*: H_q(C'') \to H_{q-1}(C')$$

и функториальная точная последовательность

$$\ldots \xrightarrow{\partial_*} H_q(C') \to H_q(C) \to H_q(C'') \xrightarrow{\partial_*} H_{q-1}(C') \to \ldots .$$

Пусть C — цепной комплекс над R, а G' — некоторый R-модуль. *Аугментацией комплекса* C *над* G' называется эпиморфизм ε: $C_0 \to G'$, такой, что $\varepsilon \circ \partial_1 = 0$. *Цепным комплексом с аугментацией* над модулем G' называется неотрицательный цепной комплекс C, обладающий аугментацией над модулем G'.

Если $C = \{C_q, \partial_q\}$ — цепной комплекс над R, а G — некоторый R-модуль, то $C \otimes G = \{C_q \otimes G, \partial_q \otimes 1\}$ также является цепным комплексом над R[1]). Если комплекс C обладает аугментацией над G', то комплекс $C \otimes G$ обладает аугментацией над $G' \otimes G$. Градуированный модуль гомологий $H(C \otimes G)$ называется *модулем гомологий комплекса* C *с коэффициентами в* G и обозначается $H(C; G)$. Если τ: $C \to C'$ — цепное отображение, то

$$\tau \otimes 1: C \otimes G \to C' \otimes G$$

— тоже цепное отображение, и τ_*: $H(C; G) \to H(C'; G)$ обозначает гомоморфизм, индуцированный отображением $\tau \otimes 1$. Для всякого гомоморфизма φ: $G \to G'$ можно определить цепное отображение $1 \otimes \varphi$: $C \otimes G \to C \otimes G'$, индуцирующее гомоморфизм

$$\varphi_*: H(C; G) \to H(C; G').$$

[1]) Здесь и ниже рассматриваются тензорные произведения над R. — *Прим. ред.*

Эти замечания суммируются в следующем предложении:

1. Теорема. *Существует ковариантный функтор двух переменных из категории цепных комплексов над кольцом R и категории R-модулей в категорию градуированных R-модулей, сопоставляющий цепному комплексу C и модулю G модуль гомологий комплекса C с коэффициентами в G.* ■

Заметим, что если элемент $c \in C_q$ является циклом комплекса C и $g \in G$, то элемент $c \otimes g \in C_q \otimes G$ является циклом комплекса $C \otimes G$, а если c — граница, то и $c \otimes g$ — граница. Следовательно, определено билинейное отображение

$$H_q(C) \times G \to H_q(C;\ G),$$

сопоставляющее паре $(\{c\},\ g)$ класс гомологий $\{c \otimes g\}$. Этому же отображению соответствует гомоморфизм

$$\mu\colon\ H(C) \otimes G \to H(C;\ G),$$

такой, что $\mu(\{c\} \otimes g) = \{c \otimes g\}$, $c \in Z(C)$. Легко проверить, что μ является естественным преобразованием на произведении категории цепных комплексов и категории модулей.

Если C — цепной комплекс над $\mathbf{Z}$, а G — некоторый R-модуль, то произведение $C \underset{\mathbf{Z}}{\otimes} G$ является цепным комплексом над R. Из теоремы 4.5 введения следует, что $\mathbf{Z}$-модуль гомологий комплекса C с коэффициентами в G изоморфен, как градуированный R-модуль, R-модулю гомологий комплекса $C \underset{\mathbf{Z}}{\otimes} R$ с коэффициентами в G[1]).

2. Пример. Пусть $C(K)$ — ориентированный цепной комплекс симплициального комплекса K. Для заданных абелевой группы G и симплициальной пары $(K,\ L)$ *группой ориентированных гомологий пары* $(K,\ L)$ *с коэффициентами в* G (обозначается $H(K,\ L;\ G)$) называется градуированная группа гомологий комплекса $[C(K)/C(L)] \otimes G$ (наделенная аугментацией над $\mathbf{Z} \otimes G \approx G$). Тогда $H(K,\ L;\ G)$ — ковариантный функтор двух переменных из категории симплициальных пар и категории абелевых групп в категорию градуированных абелевых групп. Если, кроме того, группа G является R-модулем, то $H(K,\ L;\ G)$ — градуированный R-модуль. Аналогичные замечания можно применить к упорядоченному цепному комплексу $\Delta(K)/\Delta(L)$.

3. Пример. Пусть $(X,\ A)$ — пара топологических пространств, а G — некоторая абелева группа. *Группой сингулярных гомологий пары* $(X,\ A)$ *с коэффициентами в* G (обозначается $H(X,\ A;\ G)$)

---

[1]) Гомологии $\mathbf{Z}$-комплекса C с коэффициентами в R-модуле G — это гомологии комплекса $C \underset{\mathbf{Z}}{\otimes} G$. — *Прим. ред.*

называется градуированная группа гомологий комплекса $[\Delta(X)/\Delta(A)] \otimes G$ (наделенная аугментацией над G). Это ковариантный функтор двух переменных из категории пар топологических пространств и категории абелевых групп в категорию градуированных абелевых групп. Если G, кроме того, является R-модулем, то $H(X, A; G)$ — градуированный R-модуль.

Поскольку кольцо R коммутативно, для любых R-модулей G и G' имеет место канонический изоморфизм $G \otimes G' \approx G' \otimes G$. Следовательно, если C — цепной комплекс над R, то $G \otimes C$ канонически изоморфно $C \otimes G$. Значит, с помощью комплекса $G \otimes C$ не получается новых модулей гомологий.

Напомним некоторые общие свойства тензорных произведений, которые будут особенно важны в следующем параграфе.

4. Лемма. *Тензорное произведение двух эпиморфизмов снова является эпиморфизмом.*

Доказательство. Пусть $\alpha\colon A \to A''$ и $\beta\colon B \to B''$ — эпиморфизмы. Модуль $A'' \otimes B''$ порождается элементами вида $a'' \otimes b''$, где $a'' \in A''$ и $b'' \in B''$. Поскольку α и β — эпиморфизмы, модуль $A'' \otimes B''$ порождается элементами вида $\alpha(a) \otimes \beta(b)$, где $a \in A$ и $b \in B$. Так как $(\alpha \otimes \beta)(a \otimes b) = \alpha(a) \otimes \beta(b)$, то $A'' \otimes B''$ порождается множеством $(\alpha \otimes \beta)(A \otimes B)$, откуда видно, что $\alpha \otimes \beta$ — эпиморфизм. ■

Тензорное произведение двух мономорфизмов, вообще говоря, не является мономорфизмом (см. пример 7 ниже). Следующая лемма показывает, что если α и β — эпиморфизмы, то можно сделать некоторые выводы о ядре гомоморфизма $\alpha \otimes \beta$.

5. Лемма. *Если α и β — эпиморфизмы, то ядро гомоморфизма $\alpha \otimes \beta$ порождается элементами вида $a \otimes b$, где $a \in \ker \alpha$ или $b \in \ker \beta$.*

Доказательство. Пусть $\alpha\colon A \to A''$ и $\beta\colon B \to B''$ — эпиморфизмы, и пусть D — подмодуль модуля $A \otimes B$, порожденный элементами вида $a \otimes b$, где либо $a \in \ker \alpha$, либо $b \in \ker \beta$. Пусть $p\colon A \otimes B \to (A \otimes B)/D$ — проекция. Существует корректно определенное билинейное отображение

$$A'' \times B'' \to (A \otimes B)/D,$$

переводящее (a'', b'') в $p(a \otimes b)$, где элементы $a \in A$ и $b \in B$ выбираются таким образом, чтобы $\alpha(a) = a''$ и $\beta(b) = b''$. Этому билинейному отображению соответствует гомоморфизм

$$\psi\colon A'' \otimes B'' \to (A \otimes B)/D,$$

такой, что $\psi(a''\otimes b'')=p(a\otimes b)$, где $\alpha(a)=a''$ и $\beta(b)=b''$. Очевидно, гомоморфизм p совпадает с композицией

$$A\otimes B\xrightarrow{\alpha\otimes\beta}A''\otimes B''\xrightarrow{\psi}(A\otimes B)/D.$$

Отсюда следует, что $\ker(\alpha\otimes\beta)\subset D$. Обратное включение очевидно. Следовательно, $\ker(\alpha\otimes\beta)=D$. ■

6. Следствие. *Если даны точная последовательность*

$$A'\to A\to A''\to 0$$

и некоторый модуль B, то имеет место точная последовательность

$$A'\otimes B\to A\otimes B\to A''\otimes B\to 0.$$

Доказательство. Из леммы 4 следует, что гомоморфизм $A\otimes B\to A''\otimes B$ является эпиморфизмом, и, значит, рассматриваемая последовательность точна в члене $A''\otimes B$. Если подмодуль $\bar{A}\subset A$ есть образ гомоморфизма $A'\to A$, то, согласно лемме 4, гомоморфизм $A'\otimes B\to\bar{A}\otimes B$ является эпиморфизмом. Поскольку $\bar{A}$ — ядро гомоморфизма $A\to A''$, из леммы 5 следует, что ядро гомоморфизма $A\otimes B\to A''\otimes B$ совпадает с образом гомоморфизма $\bar{A}\otimes B\to A\otimes B$. Поэтому последовательность точна в члене $A\otimes B$. ■

Короткая точная последовательность после тензорного умножения вовсе не обязана оставаться точной. Проиллюстрируем это утверждение на примере.

7. Пример. Рассмотрим короткую точную последовательность абелевых групп

$$0\to\mathbf{Z}\xrightarrow{\alpha}\mathbf{Z}\xrightarrow{\beta}\mathbf{Z}_2\to 0,$$

где $\alpha(1)=2$, а $\beta(1)$ — образующая $\bar{1}$ группы $\mathbf{Z}_2$. Тензорное произведение этой последовательности и группы $\mathbf{Z}_2$ не будет короткой точной последовательностью, так как отображение $\alpha\otimes 1\colon\mathbf{Z}\otimes\mathbf{Z}_2\to\to\mathbf{Z}\otimes\mathbf{Z}_2$ не является мономорфизмом ($\mathbf{Z}\otimes\mathbf{Z}_2\approx\mathbf{Z}_2\neq 0$, но $(\alpha\otimes 1)(1\otimes\bar{1})=2\otimes\bar{1}=1\otimes 2\cdot\bar{1}=0$).

8. Теорема. *Функтор тензорного умножения коммутирует с прямыми суммами.*

Доказательство. Пусть $A=\bigoplus A_j$; рассмотрим билинейное отображение $A\times B\to\bigoplus(A_j\otimes B)$, переводящее пару $\left(\sum a_j,\ b\right)$ в элемент $\sum(a_j\otimes b)$, и гомоморфизмы $A_j\otimes B\to A\otimes B$ (для всех j). Используя характеристические свойства тензорного произведения и прямой суммы, получаем следующие коммутативные диаграммы[1]):

$$\begin{tikzcd} A \times B \arrow[d] \arrow[dr] & \\ A \otimes B \arrow[r, "\varphi"] & \bigoplus (A_j \otimes B) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & A_j \otimes B \arrow[d] \arrow[dl] \\ A \otimes B & \bigoplus (A_j \otimes B) \arrow[l, "\psi"'] \end{tikzcd}$$

Ясно, что отображения φ и ψ взаимно обратны. Отсюда получаем, что $A \otimes B \approx \bigoplus (A_j \otimes B)$. Если, кроме того, $B = \bigoplus B_k$, то аналогично

$$A \otimes B \approx \bigoplus_{j,\,k} (A_j \otimes B_k). \ \blacksquare$$

9. Теорема. *Функтор тензорного умножения коммутирует с пределами прямых спектров.*

Доказательство. Пусть $A = \varinjlim \{A^\alpha\}$. Рассмотрим билинейное отображение $A \times B \to \varinjlim \{A^\alpha \otimes B\}$, переводящее пару $(\{a\}, b)$ в $\{a \otimes b\}$, где $a \in A^\alpha$, и гомоморфизмы $A^\alpha \otimes B \to A \otimes B$ (для всех α). Используя характеристические свойства тензорного произведения и предела прямого спектра, получаем следующие коммутативные диаграммы:

$$\begin{tikzcd} A \times B \arrow[d] \arrow[dr] & \\ A \otimes B \arrow[r, "\varphi"] & \varinjlim \{A^\alpha \otimes B\} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & A^\alpha \otimes B \arrow[d] \arrow[dl] \\ A \otimes B & \varinjlim \{A^\alpha \otimes B\} \arrow[l, "\psi"'] \end{tikzcd}$$

Ясно, что отображения φ и ψ взаимно обратны. Отсюда получаем, что $A \otimes B \approx \varinjlim \{A^\alpha \otimes B\}$. Если, кроме того, $B = \varinjlim \{B^\beta\}$, то аналогично

$$A \otimes B \approx \varinjlim \{A^\alpha \otimes B^\beta\}. \ \blacksquare$$

Рассмотрим теперь один специальный класс коротких точных последовательностей. Эти последовательности обладают тем свойством, что при тензорном умножении их на произвольный модуль

---

[1]) Тензорное произведение $P \otimes Q$ есть инициальный объект категории, объектами которой являются билинейные отображения $P \times Q \to L$, а морфизмы $f \to g$ соответствуют коммутативным диаграммам

$$\begin{tikzcd} L_1 \arrow[r] & L_2 \\ & P \times Q \arrow[ul, "f"] \arrow[u, "g"'] \end{tikzcd}$$

Отображение φ здесь означает единственный морфизм инициального объекта $P \otimes Q$ этой категории. Аналогично следует понимать отображение ψ (см. § 1.1). — *Прим. ред.*

получается снова точная последовательность. Короткая точная последовательность

$$0 \to A' \xrightarrow{\alpha} A \xrightarrow{\beta} A'' \to 0$$

называется *расщепляющейся*, если гомоморфизм β имеет правый обратный (т. е. если существует гомоморфизм $\beta'\colon A'' \to A$, такой, что $\beta \circ \beta' = 1_{A''}$). В этом случае мы будем также говорить, что последовательность *расщепляется*.

10. Пример. Всякая короткая точная последовательность $0 \to A' \to A \xrightarrow{\beta} A'' \to 0$, где A'' — свободный модуль, расщепляется. Действительно, пусть $\{a''_j\}$ — некоторый базис модуля A''; для каждого j выберем элемент $a_j \in A$, такой, что $\beta(a_j) = a''_j$. Пусть гомоморфизм $\beta'\colon A'' \to A$ определен равенством $\beta'(a''_j) = a_j$ для всех j. Тогда β' — правый обратный к β.

11. Лемма. *Для данной короткой точной последовательности*

$$0 \to A' \xrightarrow{\alpha} A \xrightarrow{\beta} A'' \to 0$$

определим гомоморфизмы $A' \xrightarrow{i} A' \oplus A'' \xrightarrow{p} A''$ *равенствами* $i(a') = (a', 0)$ *и* $p(a', a'') = a''$. *Тогда следующие условия эквивалентны*:

(a) *заданная последовательность расщепляется*;

(b) *имеет место коммутативная диаграмма*

$$\begin{tikzcd}
& A \arrow[dr, "\beta"] & \\
A' \arrow[ur, "\alpha"] \arrow[dr, "i"'] & & A'' \\
& A' \oplus A'' \arrow[uu, "\gamma'"] \arrow[ur, "p"'] &
\end{tikzcd}$$

(c) *имеет место коммутативная диаграмма*

$$\begin{tikzcd}
& A \arrow[dr, "\beta"] \arrow[dd, "\gamma"] & \\
A' \arrow[ur, "\alpha"] \arrow[dr, "i"'] & & A'' \\
& A' \oplus A'' \arrow[ur, "p"'] &
\end{tikzcd}$$

(d) *гомоморфизм* α *имеет левый обратный.*

Доказательство. Пусть гомоморфизм $\beta'\colon A'' \to A$ является правым обратным к β. Определим гомоморфизм $\gamma'\colon A' \oplus A'' \to A$ равенством $\gamma'(a', a'') = \alpha(a') + \beta'(a'')$. Тогда γ' обладает нужными свойствами. Обратно, для заданного гомоморфизма γ' определим гомоморфизм $\beta'\colon A'' \to A$ равенством $\beta'(a'') = \gamma'(0, a'')$. Тогда β' — правый обратный для β, и, значит, последовательность расщепляется. Таким образом, условия (a) и (b) эквивалентны. Аналогичные рассуждения показывают, что условия (c) и (d) также эквивалентны. Из леммы о пяти гомоморфизмах следует, что для диаграммы из условия (b) (или (c)) гомоморфизм γ' (или γ) непременно является изоморфизмом. Следовательно, условия (b) и (c) эквивалентны, причем гомоморфизмы γ' и γ^{-1} совпадают. ■

12. Следствие. *Для всякой расщепляющейся короткой точной последовательности*

$$0 \to A' \xrightarrow{\alpha} A \to A'' \to 0$$

и любого модуля B последовательность

$$0 \to A' \otimes B \xrightarrow{\alpha \otimes 1} A \otimes B \to A'' \otimes B \to 0$$

является расщепляющейся короткой точной последовательностью.

Доказательство. Ввиду следствия 6 и леммы 11 необходимо лишь доказать, что гомоморфизм $\alpha \otimes 1$ допускает левый обратный. По лемме 11 гомоморфизм α обладает левым обратным α'. Тогда $\alpha' \otimes 1$ — левый обратный для $\alpha \otimes 1$. ■

В случае когда $0 \to C' \to C \to C'' \to 0$ — расщепляющаяся короткая точная последовательность цепных комплексов, из следствия 12 вытекает, что для любого модуля G последовательность

$$0 \to C' \otimes G \to C \otimes G \to C'' \otimes G \to 0$$

является короткой точной последовательностью цепных комплексов. Эта короткая точная последовательность приводит к гомологической точной последовательности, и мы получаем следующий результат:

13. Теорема. *Для всякой расщепляющейся короткой точной последовательности цепных комплексов*

$$0 \to C' \to C \to C'' \to 0$$

и любого модуля G имеет место функториальная точная гомологическая последовательность

$$\ldots \to H_q(C';\, G) \to H_q(C;\, G) \to H_q(C'';\, G) \to H_{q-1}(C';\, G) \to \ldots . \ ■$$

Из этой теоремы вытекает точность последовательности сингулярных гомологий (и последовательности приведенных гомологий) любой пары с произвольными коэффициентами. Аналогично, имеет место точная последовательность триады с произвольными коэффициентами. Все эти последовательности (за исключением приведенной последовательности пары) являются частным случаем относительной последовательности Майера — Виеториса, точность которой мы сейчас установим. Если пара пар топологических пространств $\{(X_1, A_1), (X_2, A_2)\}$ удовлетворяет аксиоме вырезания, то короткая точная последовательность сингулярных цепных комплексов

$$0 \to \Delta(X_1 \cap X_2)/\Delta(A_1 \cap A_2) \to$$
$$\to \Delta(X_1)/\Delta(A_1) \oplus \Delta(X_2)/\Delta(A_2) \to \Delta(X_1 \cup X_2)/\Delta(A_1 \cup A_2) \to 0$$

расщепляется (в силу примера 10, так как $\Delta(X_1 \cup X_2)/\Delta(A_1 \cup A_2)$ — свободная абелева группа). Таким образом, мы приходим к следующему результату:

14. Следствие. *Если пара пар топологических пространств $\{(X_1, A_1), (X_2, A_2)\}$ удовлетворяет аксиоме вырезания, а G — произвольный R-модуль, то имеет место относительная точная последовательность Майера — Виеториса пары пар $\{(X_1, A_1), (X_2, A_2)\}$ с коэффициентами в G.* ■

Для фиксированного модуля G сингулярные гомологии пары (X, A) с коэффициентами в G удовлетворяют всем аксиомам теории гомологий, за исключением аксиомы размерности (все аксиомы легко проверить, кроме аксиомы точности, которая вытекает из следствия 14). Если P — одноточечнсе пространство, то имеет место функториальный изоморфизм $H_0(P; G) \approx G$. Это приводит к следующему определению.

Пусть G — некоторый R-модуль. *Теорией гомологий с коэффициентами в G* называется ковариантный функтор H из категории пар топологических пространств в категорию градуированных R-модулей и естественное преобразование ∂: $H(X, A) \to H(A)$ степени -1, удовлетворяющие аксиомам гомотопии, точности и вырезания, а также следующей модификации аксиомы размерности: на категории одноточечных пространств имеет место естественная эквивалентность функтора H и постоянного функтора, сопоставляющего всякому одноточечному пространству градуированный модуль, тривиальный в ненулевых размерностях и равный G в размерности 0. Теория гомологий с коэффициентами в $\mathbf{Z}$ называется *целочисленной теорией гомологий*. Целочисленная теория гомологий совпадает с теорией гомологий, определенной в § 4.8.

Сингулярные гомологии с коэффициентами в G являются примером теории гомологий с коэффициентами в G. Теорема единственности 4.8.10 верна для теорий гомологий с произвольными коэффициентами.

В следующем параграфе мы опишем, каким образом модули сингулярных гомологий с произвольными коэффициентами определяются группами целочисленных сингулярных гомологий.

§ 2. Теорема об универсальных коэффициентах для гомологий

Чтобы выразить группу $H(C; G)$ через группы $H(C)$ и G, необходимо ввести некоторые функторы от модулей, ассоциированные с функтором тензорного умножения. В этом параграфе мы даем определение таких функторов и изучаем их в частном случае областей главных идеалов. Это приводит нас к теореме об универсальных коэффициентах. В следующем параграфе эти новые функторы будут использованы для вычисления гомологий произведения пространств.

Пусть A — некоторый R-модуль. *Резольвентой* модуля A (над кольцом R) называется точная последовательность

$$\ldots \to C_n \xrightarrow{\partial_n} \ldots \longrightarrow C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0 \xrightarrow{\varepsilon} A \to 0.$$

Если каждый R-модуль C_q свободный, то резольвента называется *свободной*. Таким образом, резольвента модуля A состоит из цепного комплекса $C = \{C_q, \partial_q\}$ над R, обладающего аугментацией над A, для которого приведенный комплекс $\tilde{C}$ ацикличен. Резольвента является свободной тогда и только тогда, когда C — свободный цепной комплекс.

Всякий R-модуль A имеет свободные резольвенты. В самом деле, для произвольного R-модуля B можно рассмотреть свободный R-модуль $F(B)$, порожденный элементами модуля B, и каноническое отображение $F(B) \to B$. *Канонической* свободной резольвентой модуля A называется следующая резольвента (определяемая по индукции):

$$\ldots \to F(\ker \partial_q) \xrightarrow{\partial_{q+1}} F(\ker \partial_{q-1}) \xrightarrow{\partial_q} \ldots$$
$$\ldots \to F(\ker \varepsilon) \xrightarrow{\partial_1} F(A) \xrightarrow{\varepsilon} A \to 0.$$

К цепным комплексам над кольцом R можно применять метод ацикличных моделей. Применяя его к категории, состоящей из единственного объекта и единственного морфизма, получаем следующий результат:

1. Теорема. *Пусть C — свободный неотрицательный цепной комплекс с аугментацией над A, и пусть C' — резольвента модуля A'. Всякий гомоморфизм φ: $A \to A'$ продолжается до сохраняющего аугментацию цепного отображения*

$$\begin{array}{ccccccccc}
\ldots \to & C_{q+1} & \to & C_q & \to \ldots \to & C_0 & \xrightarrow{\varepsilon} & A & \to 0 \\
& \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\varphi} & \\
\ldots \to & C'_{q+1} & \to & C'_q & \to \ldots \to & C'_0 & \xrightarrow{\varepsilon'} & A' & \to 0
\end{array}$$

и любые два таких отображения цепно гомотопны. ■

Применяя это к случаю $\varphi = 1_A$: $A \subset A$, получаем такое

2. Следствие. *Если C и C' — свободные резольвенты модуля A, то комплексы C и C' канонически цепно эквивалентны.* ■

Если заданы модули A и B и свободная резольвента C модуля A, то из следствия 2 вытекает, что градуированный модуль $H(C;\ B)$ зависит только от A и B. Пусть C — каноническая свободная резольвента модуля A. Определим q-е *периодическое произведение*, полагая $\operatorname{Tor}_q(A,\ B) = H_q(C;\ B)$, $q \geqslant 0$. Оно является ковариантным функтором от A и от B. Из короткой точной последовательности

$$0 \to \partial_1 C_1 \to C_0 \xrightarrow{\varepsilon} A \to 0$$

с помощью следствия 5.1.6 получается точная последовательность

$$\partial_1 C_1 \otimes B \to C_0 \otimes B \xrightarrow{\varepsilon \otimes 1} A \otimes B \to 0.$$

Согласно определению, группа $\operatorname{Tor}_0(A,\ B)$ является нульмерным модулем гомологий цепного комплекса

$$\ldots \to C_2 \otimes B \to C_1 \otimes B \xrightarrow{\partial_1 \otimes 1} C_0 \otimes B \to 0.$$

Следовательно, $\operatorname{Tor}_0(A,\ B) = (C_0 \otimes B)/\operatorname{im}(\partial_1 \otimes 1)$. Из приведенной выше точной последовательности получаем

$$\operatorname{im}(\partial_1 \otimes 1) = \operatorname{im}(\partial_1 C_1 \otimes B \to C_0 \otimes B) = \ker(\varepsilon \otimes 1).$$

Следовательно,

$$\operatorname{Tor}_0(A,\ B) = (C_0 \otimes B)/\ker(\varepsilon \otimes 1) \approx A \otimes B,$$

и, таким образом, функтор $\operatorname{Tor}_0(A,\ B)$ естественно эквивалентен функтору $A \otimes B$.

Все предыдущие замечания были справедливы для произвольного коммутативного кольца с единицей. В оставшейся части этого параграфа мы ограничимся случаем, когда R — область главных идеалов. Над областью главных идеалов всякий подмодуль свободного модуля свободен. Следовательно, всякий модуль A допускает короткую свободную резольвенту вида

$$0 \to C_1 \to C_0 \to A \to 0$$

(можно просто положить $C_0 = F(A)$ и $C_1 = \ker[F(A) \to A]$). Такая короткая свободная резольвента модуля A есть не что иное, как копредставление[1]) модуля A. Поскольку существуют короткие свободные резольвенты, $\operatorname{Tor}_q(A,\ B) = 0$ при $q > 1$. Определим *периодическое произведение* $A * B$, считая его равным $\operatorname{Tor}_1(A,\ B)$. Оно характеризуется тем свойством, что для любого копредстав-

[1]) Понятие копредставления модуля аналогично соответствующему понятию для групп (см. § 3 введения). — *Прим. ред.*

ления модуля A

$$0 \to C_1 \to C_0 \to A \to 0$$

имеет место точная последовательность

$$0 \to A * B \to C_1 \otimes B \to C_0 \otimes B \to A \otimes B \to 0.$$

Действительно, $A * B \approx H_1(C \otimes B) = \ker(C_1 \otimes B \to C_0 \otimes B)$, потому что $C_2 \otimes B = 0$.

Периодическое произведение является ковариантным функтором каждого из своих аргументов. Поскольку тензорное произведение коммутирует с прямыми суммами и пределами прямых спектров (теоремы 5.1.8 и 5.1.9) и предел прямого спектра точных последовательностей является точной последовательностью (теорема 4.5.7), то периодическое произведение тоже коммутирует с прямыми суммами и пределами прямых спектров. Это произведение обязано своим названием тому, что оно зависит только от подмодулей кручения модулей A и B (см. следствие 11 ниже).

3. Пример. Если модуль A свободный, то он имеет копредставление

$$0 \to 0 \to A \to A \to 0,$$

откуда видно, что $A * B = 0$ для любого B.

4. Пример. Если A — циклический R-модуль, аннулятор которого порождается элементом $v \in R$, то $A \approx R/vR$ и копредставление модуля A имеет вид

$$0 \to R \xrightarrow{\alpha} R \to A \to 0,$$

где $\alpha(v') = vv'$, $v' \in R$. Для любого модуля B имеет место изоморфизм $R \otimes B \approx B$, переводящий $1 \otimes b$ в b. При этом изоморфизме отображение $\alpha \otimes 1\colon R \otimes B \to R \otimes B$ соответствует отображению $\alpha'\colon B \to B$, где $\alpha'(b) = vb$ при $b \in B$. Следовательно, $\ker \alpha'$ — подмодуль модуля B, аннулируемый элементом v, и, значит,

$$(R/vR) * B \approx \{b \in B \mid vb = 0\}.$$

Приведенные примеры позволяют вычислить произведение $A * B$ для конечно порожденных модулей A (ввиду структурной теоремы 4.14 из введения). Теоретически это вполне определяет модуль $A * B$, поскольку всякий модуль A есть предел прямого спектра своих конечно порожденных подмодулей (см. теорему 4.2 из введения), а периодическое произведение коммутирует с пределами прямых спектров.

5. Лемма. *Если один из модулей A или B не имеет кручения, то $A * B = 0$.*

Доказательство. Поскольку периодическое произведение коммутирует с пределами прямых спектров, достаточно рассмотреть случай, когда оба модуля A и B конечно порождены, а в этом случае отсутствие кручения равносильно свойству быть свободным. Если модуль A свободный, то утверждение справедливо, как показывает пример 3. Если модуль B свободен и конечно порожден, то он изоморфен прямой сумме n экземпляров кольца R. Если

$$0 \to C_1 \to C_0 \to A \to 0$$

есть копредставление модуля A, то последовательность

$$C_1 \otimes B \to C_0 \otimes B \to A \otimes B \to 0$$

изоморфна прямой сумме n экземпляров последовательности $C_1 \otimes R \to C_0 \otimes R \to A \otimes R \to 0$. Так как $C_1 \otimes R \to C_0 \otimes R$ — мономорфизм, то $C_1 \otimes B \to C_0 \otimes B$ — тоже мономорфизм и $A * B = 0$. ■

Отсюда следует, что если R — поле, то $A * B = 0$ для любых R-модулей A и B. Следующий результат доказывается аналогично, сначала для конечно порожденных модулей (для которых отсутствие кручения эквивалентно свойству быть свободным), а затем переходом к пределу прямого спектра—для произвольных модулей.

6. Лемма. *Пусть заданы короткая точная последовательность модулей*

$$0 \to A' \to A \to A'' \to 0$$

и модуль B. Если один из модулей A'' или B не имеет кручения, то имеет место короткая точная последовательность

$$0 \to A' \otimes B \to A \otimes B \to A'' \otimes B \to 0.$$

Доказательство. Как было замечено выше, достаточно доказать это утверждение в случае, когда хотя бы один из модулей A'' или B свободен и конечно порожден. Если модуль A'' свободен, то исходная точная последовательность расщепляется (в силу примера 5.1.10) и требуемый результат вытекает из следствия 5.1.12. Если модуль B свободен и конечно порожден, то отображение $A' \otimes B \to A \otimes B$ является прямой суммой некоторого числа отображений $A' \otimes R \to A \otimes R$, а следовательно, мономорфизмом, и лемма вытекает из следствия 5.1.6. ■

Мы воспользуемся этим результатом для получения точной последовательности гомологий, соответствующей короткой точной последовательности модулей коэффициентов.

7. Теорема. *На произведении категории цепных комплексов C без кручения и категории коротких точных последовательностей модулей*

$$0 \to G' \xrightarrow{\varphi} G \xrightarrow{\psi} G'' \to 0$$

существует естественный связывающий гомоморфизм

$$\beta\colon H(C;\ G'') \to H(C;\ G')$$

степени -1 *и функториальная точная последовательность*

$$\ldots \to H_q(C;\ G') \xrightarrow{\varphi_*} H_q(C;\ G) \xrightarrow{\psi_*} H_q(C;\ G'') \xrightarrow{\beta} H_{q-1}(C;\ G') \to \ldots.$$

Доказательство. Согласно лемме 6, имеет место короткая точная последовательность цепных комплексов

$$0 \to C \otimes G' \xrightarrow{1\otimes\varphi} C \otimes G \xrightarrow{1\otimes\psi} C \otimes G'' \to 0.$$

Поскольку она функториальна относительно C и точной последовательности коэффициентов, требуемый результат следует из теоремы 4.5.4. ■

Связывающий гомоморфизм β, встречающийся в теореме 7, называется *гомологическим гомоморфизмом Бокштейна*, соответствующим последовательности коэффициентов $0 \to G' \xrightarrow{\varphi} G \xrightarrow{\psi} G'' \to 0$. Теорема 7 остается верной для произвольного коммутативного кольца R с единицей, если предположить, что C — свободный цепной комплекс над R.

Пусть C — цепной комплекс над R, и пусть G — произвольный R-модуль. В предыдущем параграфе мы определили гомоморфизм $\mu\colon H(C) \otimes G \to H(C;\ G)$. Этот гомоморфизм участвует в следующей *теореме об универсальных коэффициентах для гомологий*:

8. Теорема. *Пусть C — свободный цепной комплекс, а G — некоторый модуль. Тогда имеет место функториальная короткая точная последовательность*

$$0 \to H_q(C) \otimes G \xrightarrow{\mu} H_q(C \otimes G) \to H_{q-1}(C) * G \to 0,$$

и эта последовательность расщепляется.

Доказательство. Подкомплекс Z комплекса C, состоящий из циклов $Z_q = Z_q(C)$, обладает тривиальным граничным оператором. Пусть комплекс B состоит из групп $B_q = B_{q-1}(C)$, также снабженных тривиальным граничным оператором. Цепные комплексы B и Z являются свободными, и для них имеет место короткая точная последовательность

$$0 \to Z \xrightarrow{\alpha} C \xrightarrow{\beta} B \to 0,$$

$$\text{где } \alpha_q(z) = z \quad (z \in Z_q) \quad \text{и} \quad \beta_q(c) = \partial_q c \qquad (c \in C_q).$$

Поскольку B — свободный комплекс, эта короткая точная последовательность расщепляется. В силу теоремы 5.1.13 имеет место точная последовательность

$$\ldots \to H_q(Z;\ G) \xrightarrow{\alpha_*} H_q(C;\ G) \xrightarrow{\beta_*} H_q(B;\ G) \xrightarrow{\partial_*} H_{q-1}(Z;\ G) \to \ldots,$$

где $\partial_*\{b\}=\{\alpha_{q-1}^{-1}\partial_q\partial_q^{-1}b\}=\{\alpha_{q-1}^{-1}(b)\}$ для $b\in B_{q-1}$. Поскольку граничные операторы комплексов Z и B тривиальны, тривиальны и граничные операторы комплексов $Z\otimes G$ и $B\otimes G$. Следовательно, $H_q(Z;\ G)=Z_q\otimes G$ и $H_q(B;\ G)=B_q\otimes G=B_{q-1}(C)\otimes G$, так что предыдущая точная последовательность превращается в последовательность

$$\ldots\to B_q(C)\otimes G\xrightarrow{\gamma_q\otimes 1}Z_q(C)\otimes G\to H_q(C;\ G)\to$$
$$\to B_{q-1}(C)\otimes G\xrightarrow{\gamma_{q-1}\otimes 1}Z_{q-1}(C)\otimes G\to\ \ldots,$$

где $\gamma_q\colon B_q(C)\subset Z_q(C)$. Из этой последовательности получается короткая точная последовательность

$$0\to\operatorname{coker}(\gamma_q\otimes 1)\to H_q(C;\ G)\to\ker(\gamma_{q-1}\otimes 1)\to 0,$$

и теперь осталось только вычислить в явном виде модули, стоящие справа и слева от $H_q(C;\ G)$.

Поскольку модуль $Z_q(C)$ свободный, короткая точная последовательность

$$0\to B_q(C)\xrightarrow{\gamma_q}Z_q(C)\to H_q(C)\to 0$$

является копредставлением модуля $H_q(C)$. Согласно характеристическому свойству периодического произведения, имеет место короткая точная последовательность

$$0\to H_q(C)*G\to B_q(C)\otimes G\xrightarrow{\gamma_q\otimes 1}Z_q(C)\otimes G\to H_q(C)\otimes G\to 0.$$

Следовательно, $\operatorname{coker}(\gamma_q\otimes 1)\approx H_q(C)\otimes G$ и $\ker(\gamma_q\otimes 1)\approx H_q(C)*G$. Воспользовавшись этими равенствами, перепишем приведенную выше короткую точную последовательность в виде

$$0\to H_q(C)\otimes G\to H_q(C;\ G)\to H_{q-1}(C)*G\to 0.$$

Легко проверить, что гомоморфизм $H_q(C)\otimes G\to H_q(C;\ G)$ совпадает с μ.

Если $\tau\colon C\to C'$ — некоторое цепное отображение, то τ определяет коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & Z \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\tau'"'] & C \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\tau"'] & B \arrow[r] \arrow[d, "\tau''"] & 0 \\
0 \arrow[r] & Z' \arrow[r, "\alpha'"] & C' \arrow[r, "\beta'"] & B' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

из которой получается коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & H_q(C)\otimes G \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "\tau_*\otimes 1"'] & H_q(C;\ G) \arrow[r] \arrow[d, "\tau_*"] & H_{q-1}(C)*G \arrow[r] \arrow[d, "\tau_* * 1"] & 0 \\
0 \arrow[r] & H_q(C')\otimes G \arrow[r, "\mu"] & H_q(C';\ G) \arrow[r] & H_{q-1}(C')*G \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Следовательно, короткая точная последовательность для $H_q(C; G)$ функториальна.

Докажем теперь, что эта короткая точная последовательность расщепляется (но не функториально). Поскольку модуль $B_{q-1}(C)$ свободный и $\partial_q C_q = B_{q-1}(C)$, существуют гомоморфизмы h_q: $B_{q-1}(C) \to C_q$, такие, что $\partial_q h_q = 1$. Тогда гомоморфизм

$$h_q \otimes 1\colon B_{q-1}(C) \otimes G \to C_q \otimes G$$

переводит ядро гомоморфизма $\gamma_{q-1} \otimes 1$ в подмодуль циклов модуля $C_q \otimes G$ и индуцирует гомоморфизм $H_{q-1}(C) * G \to H_q(C; G)$, являющийся правым обратным к гомоморфизму $H_q(C; G) \to H_{q-1}(C) * G$ короткой точной последовательности в формулировке теоремы. ■

Мы используем этот результат для установления некоторых свойств периодического произведения; начнем со следующей *шестичленной точной последовательности*, связывающей тензорное произведение и периодическое произведение:

9. Следствие. *Пусть* $0 \to B' \xrightarrow{\alpha'} B \xrightarrow{\beta'} B'' \to 0$ — *короткая точная последовательность модулей, и пусть* A — *некоторый модуль. Тогда имеет место точная последовательность*

$$0 \to A * B' \xrightarrow{1*\alpha'} A * B \xrightarrow{1*\beta'} A * B'' \to$$
$$\to A \otimes B' \xrightarrow{1\otimes\alpha'} A \otimes B \xrightarrow{1\otimes\beta'} A \otimes B'' \to 0.$$

Доказательство. Пусть $0 \to C_1 \to C_0 \to A \to 0$ — копредставление модуля A, и пусть C — соответствующий свободный цепной комплекс, полученный приписыванием тривиальных групп с обеих сторон. Так как комплекс C свободный, из леммы 6 вытекает существование короткой точной последовательности цепных комплексов

$$0 \to C \otimes B' \xrightarrow{1\otimes\alpha'} C \otimes B \xrightarrow{1\otimes\beta'} C \otimes B'' \to 0.$$

Поскольку $H_q(C) = 0$ при $q \neq 0$ и $H_0(C) = A$, точная гомологическая последовательность для этой точной последовательности цепных комплексов (соответствующие члены которой мы получаем с помощью теоремы 8) и дает нам нужную точную последовательность. ■

Отсюда следует коммутативность периодического произведения.

10. Следствие. *Имеет место функториальный изоморфизм*

$$A * B \approx B * A.$$

Доказательство. Пусть $0 \to C_1 \to C_0 \to B \to 0$ — копредставление модуля B. Согласно следствию 9, имеет место точная последовательность

$$0 \to A * C_1 \to A * C_0 \to A * B \to A \otimes C_1 \to A \otimes C_0 \to A \otimes B \to 0.$$

Модуль C_0 свободный, поэтому, как показывает лемма 5, $A * C_0 = 0$, и, таким образом, имеет место точная последовательность

$$0 \to A * B \to A \otimes C_1 \to A \otimes C_0 \to A \otimes B \to 0.$$

Согласно характеристическому свойству произведения $B * A$, имеет место точная последовательность

$$0 \to B * A \to C_1 \otimes A \to C_0 \otimes A \to B \otimes A \to 0.$$

Функториальный изоморфизм $A * B \approx B * A$ теперь получается методом диаграммного поиска в коммутативной диаграмме

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 \to A * B \to & A \otimes C_1 & \to & A \otimes C_0 & \to & A \otimes B & \to 0 \\ & \downarrow{\approx} & & \downarrow{\approx} & & \downarrow{\approx} & \\ 0 \to B * A \to & C_1 \otimes A & \to & C_0 \otimes A & \to & B \otimes A & \to 0 \end{array}$$

где вертикальные отображения представляют собой функториальные изоморфизмы, выражающие коммутативность тензорного произведения. ■

Теперь мы покажем, что периодическое произведение зависит только от подмодулей кручения модулей A и B.

11. Следствие. *Пусть A и B — некоторые модули, и пусть i: $\operatorname{Tor} A \subset A$ и j: $\operatorname{Tor} B \subset B$. Тогда $i * j$: $\operatorname{Tor} A * \operatorname{Tor} B \approx A * B$.*

Доказательство. Имеет место точная последовательность

$$0 \to \operatorname{Tor} B \xrightarrow{j} B \to B/\operatorname{Tor} B \to 0,$$

где модуль $B/\operatorname{Tor} B$ не имеет кручения. Согласно лемме 5, $A * (B/\operatorname{Tor} B) = 0$, а, согласно следствию 9, $1 * j$: $A * \operatorname{Tor} B \approx A * B$. Аналогичные рассуждения позволяют получить изоморфизм $i * 1$: $\operatorname{Tor} A * \operatorname{Tor} B \approx A * \operatorname{Tor} B$, композиция которого с предыдущим и доказывает наше утверждение. ■

Используем эти результаты для обобщения теоремы об универсальных коэффициентах. Пусть задан цепной комплекс C над R; *свободной аппроксимацией комплекса C* называется цепное отображение τ: $\bar{C} \to C$, такое, что

(a) $\bar{C}$ — свободный цепной комплекс над R;
(b) τ — эпиморфизм;
(c) τ индуцирует изоморфизм τ_*: $H(\bar{C}) \approx H(C)$.

12. Лемма. *Каждый цепной комплекс C обладает свободной аппроксимацией, которая единственна с точностью до гомотопической эквивалентности.*

Доказательство. Для всякого $q \geqslant 0$ выберем эпиморфизм α_q: $F_q \to Z_q(C)$, где F_q — свободный R-модуль. Пусть $F'_q = \alpha_q^{-1}(B_q(C))$. Выберем гомоморфизм β_q: $F'_q \to C_{q+1}$ таким образом, чтобы $\partial_{q+1}\beta_q = \alpha_q \mid F'_q$ (такой гомоморфизм существует, так как модуль F'_q свободный, а ∂_{q+1}: $C_{q+1} \to B_q(C)$ — эпиморфизм). Положим $\bar{C}_q = F_q \oplus \oplus F'_{q-1}$ и определим гомоморфизмы

$$\bar{\partial}_q: \bar{C}_q \to \bar{C}_{q-1}, \quad \text{полагая } \bar{\partial}_q(a,\ b) = (b,\ 0),$$

$$\tau: \bar{C}_q \to C_q, \quad \text{полагая } \tau_q(a,\ b) = \alpha_q(a) + \beta_{q-1}(b).$$

Тогда $\bar{C} = \{\bar{C}_q,\ \bar{\partial}_q\}$ — свободный цепной комплекс, а $\tau = \{\tau_q\}$ — цепное отображение $\bar{C}$ в C. Отображение τ является эпиморфизмом, поскольку $\tau_q(\bar{C}_q) \supset \ker \partial_q$ и $\partial_q \tau_q(\bar{C}_q) \supset \operatorname{im} \partial_q$. Так как $Z_q(\bar{C}) = F_q$, $B_q(C) = F'_q$ и $\tau_q(Z_q(\bar{C})) = \alpha_q(F_q)$, то

$$\tau_*: Z_q(\bar{C})/B_q(\bar{C}) \approx Z_q(C)/B_q(C).$$

Следовательно, τ: $\bar{C} \to C$ — свободная аппроксимация комплекса C. Ее единственность следует из леммы 13, которую мы докажем ниже. ∎

Пусть τ: $\bar{C} \to C$ — некоторая свободная аппроксимация комплекса C. Рассмотрим подкомплекс $\bar{\bar{C}} = \{\bar{\bar{C}}_q = \ker \tau_q$: $\bar{C}_q \to C_q\}$ комплекса $\bar{C}$ и короткую точную последовательность цепных комплексов

$$0 \to \bar{\bar{C}} \xrightarrow{i} \bar{C} \xrightarrow{\tau} C \to 0.$$

Поскольку τ_*: $H(\bar{C}) \approx H(C)$, из точной гомологической последовательности для этой короткой точной последовательности вытекает, что комплекс $\bar{\bar{C}}$ ацикличен (см. следствие 4.5.5а). Поскольку $\bar{\bar{C}}$ — свободный цепной комплекс (как подкомплекс свободного цепного комплекса), он стягиваем (теорема 4.2.5). Используем этот факт в следующей лемме:

13. Лемма. *Пусть заданы свободная аппроксимация* τ: $\bar{C} \to C$ *комплекса* C, *свободный цепной комплекс* C' *и некоторое цепное отображение* τ': $C' \to C$. *Тогда существуют цепные отображения* $\bar{\tau}$: $C' \to \bar{C}$, *для которых* $\tau \circ \bar{\tau} = \tau'$, *и любые два из них гомотопны.*

Доказательство. Как и выше, существует короткая точная последовательность цепных комплексов

$$0 \to \bar{\bar{C}} \xrightarrow{i} \bar{C} \xrightarrow{\tau} C \to 0,$$

где комплекс $\bar{\bar{C}}$ цепно стягиваем. Пусть $D = \{D_q\colon \bar{\bar{C}}_q \to \bar{\bar{C}}_{q+1}\}$ — некоторое стягивание комплекса $\bar{\bar{C}}$. Так как модуль C'_q свободен и $\tau q\colon \bar{C}_q \to C_q$ — эпиморфизм, существует гомоморфизм $\varphi_q\colon C'_q \to \bar{C}_q$, такой, что $\tau_q\varphi_q = \tau'_q$. Тогда

$$h_q = \bar{\partial}_q\varphi_q - \varphi_{q-1}\partial'_q\colon C'_q \to \bar{C}_{q-1},$$

$$\tau_{q-1}h_q = \tau_{q-1}\bar{\partial}_q\varphi_q - \tau_{q-1}\varphi_{q-1}\partial'_q = \partial_q\tau_q\varphi_q - \tau'_{q-1}\partial'_q = \partial_q\tau'_q - \tau'_{q-1}\partial'_q = 0.$$

Следовательно, h_q является гомоморфизмом C'_q в $i(\bar{\bar{C}}_{q-1})$. Отсюда немедленно вытекает, что $\bar{\tau} = \{\bar{\tau}_q = \varphi_q - iD_{q-1}i^{-1}h_q\}$ есть такое цепное отображение $\bar{\tau}\colon C' \to \bar{C}$, что $\tau\bar{\tau} = \tau'$.

Если цепные отображения $\bar{\tau}$, $\bar{\tau}'\colon C' \to \bar{C}$ таковы, что $\tau\bar{\tau} = \tau\bar{\tau}'$, то $\bar{\tau} - \bar{\tau}' = i\psi$ для некоторого цепного отображения $\psi\colon C' \to \bar{\bar{C}}$. Непосредственно проверяется, что

$$\bar{D} = \{\bar{D}_q = iD_q\psi_q\colon C'_q \to \bar{C}'_{q+1}\}$$

является цепной гомотопией между $\bar{\tau}$ и $\bar{\tau}'$. ■

Если C — цепной комплекс над R, а G — некоторый R-модуль, то пусть цепной комплекс $C * G$ определен равенством $C * G = \{C_q * G,\ \partial_q * 1\}$. Мы используем это для общей теоремы об универсальных коэффициентах.

14. Теорема. *На подкатегории произведения категорий цепных комплексов C и модулей G, состоящей из ацикличных комплексов $C * G$, имеет место функториальная короткая точная последовательность*

$$0 \to H_q(C) \otimes G \xrightarrow{\mu} H_q(C;\ G) \to H_{q-1}(C) * G \to 0,$$

и эта точная последовательность расщепляется.

Доказательство. Пусть $\tau\colon \bar{C} \to C$ — некоторая свободная аппроксимация комплекса C (которая существует по лемме 12). Рассмотрим короткую точную последовательность

$$0 \to \bar{\bar{C}} \xrightarrow{i} \bar{C} \xrightarrow{\tau} C \to 0,$$

в которой комплекс $\bar{\bar{C}}$ ацикличен. В силу характеристического свойства периодического произведения имеет место точная последовательность цепных комплексов

$$0 \to C * G \to \bar{\bar{C}} \otimes G \xrightarrow{i \otimes 1} \bar{C} \otimes G \xrightarrow{\tau \otimes 1} C \otimes G \to 0,$$

из которой получаем две короткие точные последовательности

$$0 \to C * G \to \bar{\bar{C}} \otimes G \to \operatorname{im}(i \otimes 1) \to 0,$$

$$0 \to \operatorname{im}(i \otimes 1) \subset \bar{C} \otimes G \xrightarrow{\tau \otimes 1} C \otimes G \to 0.$$

В первой из них комплекс $C * G$ ацикличен по предположению, а комплекс $\bar{\bar{C}} \otimes G$ также ацикличен (согласно теореме 8, так как $\bar{\bar{C}}$ свободен и ацикличен). Из следствия 4.5.5c вытекает, что комплекс $\operatorname{im}(i \otimes 1)$ тоже ацикличен. Из второй короткой точной последовательности с помощью точной гомологической последовательности получаем

$$(\tau \otimes 1)_*\colon H(\bar{C} \otimes G) \approx H(C \otimes G).$$

Нужная нам короткая точная последовательность определена теперь так, что коммутативна следующая диаграмма:

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 \to & H_q(\bar{C}) \otimes G & \xrightarrow{\mu} & H_q(\bar{C} \otimes G) & \to & H_{q-1}(\bar{C}) * G & \to 0 \\
& \downarrow{\scriptstyle \tau_* \otimes 1} & & \downarrow{\scriptstyle (\tau \otimes 1)_*} & & \downarrow{\scriptstyle \tau_* * 1} & \\
0 \to & H_q(C) \otimes G & \xrightarrow{\mu} & H_q(C \otimes G) & \to & H_{q-1}(C) * G & \to 0
\end{array}$$

где верхняя строка — это короткая точная последовательность из теоремы 8 (так как все вертикальные гомоморфизмы являются изоморфизмами, то необозначенный гомоморфизм в нижней строке можно определить так, чтобы диаграмма стала коммутативной). Тогда нижняя последовательность расщепляется, поскольку расщепляется верхняя. Свойство функториальности полученной короткой точной последовательности (и тот факт, что она не зависит от выбора свободной аппроксимации комплекса C) вытекает из леммы 13. ■

Следует еще раз подчеркнуть, что последовательность из теоремы 14 расщепляется не функториально.

15. Следствие. *Пусть* $\tau\colon C \to C'$ — *такое цепное отображение цепных комплексов без кручения, что* $\tau_*\colon H(C) \approx H(C')$. *Тогда для любого* R-*модуля* G *отображение* τ *индуцирует изоморфизм*

$$\tau_*\colon H(C;\ G) \approx H(C';\ G).$$

Доказательство. Это следует из функториальности точной последовательности теоремы 14 и леммы о пяти гомоморфизмах. ■

Если считать в следствии 15 комплексы C и C' свободными, то τ является цепной эквивалентностью (по теореме 4.6.10) и $\tau \otimes 1\colon C \otimes G \to C' \otimes G$ также является цепной эквивалентностью.

Следовательно, τ_*: $H(C;\ G) \approx H(C';\ G)$. Следствие 15 показывает, что этот факт остается верным (даже если τ не является цепной эквивалентностью) для цепных комплексов без кручения. ■

§ 3. Формула Кюннета

В этом параграфе мы обобщим теорему об универсальных коэффициентах и получим формулу Кюннета, выражающую гомологии тензорного произведения двух цепных комплексов через гомологии сомножителей. Формула Кюннета приобретает геометрическое содержание благодаря теореме Эйленберга — Зильбера, утверждающей, что сингулярный комплекс произведения цепно эквивалентен тензорному произведению сингулярных комплексов сомножителей.

Пусть C и C' — градуированные R-модули. Их *тензорным произведением* $C \otimes C'$ называется градуированный модуль $\{(C \otimes C')_q\}$, где $(C \otimes C')_q = \bigoplus_{i+j=q} C_i \otimes C'_j$. Аналогично, их *периодическим произведением* $C * C'$ называется градуированный модуль $\left\{(C * C')_q = \bigoplus_{i+j=q} C_i * C'_j\right\}$. Если C и C' — цепные комплексы, то их тензорное (и периодическое) произведение является цепным комплексом $\{(C \otimes C')_q,\ \partial''_q\}$ (и $\{(C * C')_q,\ \bar{\partial}_q\}$), где при $c \in C_i$, $c' \in C'_j$ и $i+j=q$

$$\partial''_q (c \otimes c') = \partial_i c \otimes c' + (-1)^i c \otimes \partial'_j c'$$

(и $\bar{\partial}_q \mid C_i * C'_j = \partial_i * 1 + (-1)^i 1 * \partial_j$). Легко проверить, что $C \otimes C'$ (и $C * C'$) на самом деле является цепным комплексом [1]). Позже мы увидим, что тензорные произведения естественно появляются при изучении произведений пространств.

Если цепной комплекс C' таков, что $C'_q = 0$ при $q \neq 0$, то $C \otimes C'$ — это то же самое, что тензорное произведение комплекса C и модуля C'_0. Следовательно, тензорное произведение двух цепных комплексов является естественным обобщением тензорного произведения цепного комплекса и модуля. Поэтому есть основания надеяться, что существует обобщение теоремы об универсальных коэффициентах для выражения гомологий комплекса $C \otimes C'$ через гомологии комплексов C и C'.

Определим функториальный гомоморфизм нулевой степени

$$\mu\colon H(C) \otimes H(C') \to H(C \otimes C').$$

Если $c \in Z_i(C)$, а $c' \in Z_j(C')$, то $c \otimes c' \in Z_{i+j}(C \otimes C')$, а если c или c' является границей, то $c \otimes c'$ — также граница. Следова-

[1]) То есть что $\partial''_{q-1}\partial''_q = \bar{\partial}_{q-1}\bar{\partial}_q = 0$. — *Прим. ред.*

тельно, можно корректно определить гомоморфизм μ, полагая

$$\mu(\{c\}\otimes\{c'\})=\{c\otimes c'\}.$$

Этот гомоморфизм участвует в следующей *формуле Кюннета*:

1. Лемма. *Пусть C и C' — цепные комплексы, причем комплекс C' свободный. Тогда имеет место функториальная короткая точная последовательность*

$$0\to(H(C)\otimes H(C'))_q\xrightarrow{\mu}H_q(C\otimes C')\to(H(C)*H(C'))_{q-1}\to 0.$$

Если комплекс C тоже свободный, то эта короткая точная последовательность расщепляется.

Доказательство. Как и в доказательстве теоремы 5.2.8, пусть комплексы Z' и B' (с тривиальными граничными операторами) определены следующим образом: $Z'_q=Z_q(C')$ и $B'_q=B_{q-1}(C')$. Имеет место короткая точная последовательность цепных комплексов

$$0\to Z'\to C'\to B'\to 0.$$

Поскольку комплекс C' свободный, свободным является и комплекс B', и имеет место короткая точная последовательность

$$0\to C\otimes Z'\to C\otimes C'\to C\otimes B'\to 0,$$

из которой получается точная гомологическая последовательность

$$\ldots\to H_q(C\otimes Z')\to H_q(C\otimes C')\to H_q(C\otimes B')\xrightarrow{\partial_*}H_{q-1}(C\otimes Z')\to\ldots.$$

Заметим, что $C\otimes Z'=\oplus C^j$, где $(C^j)_q=C_{q-j}\otimes Z_j(C')$, и $C\otimes B'=\oplus\bar{C}^j$, где $(\bar{C}^j)_q=C_{q-j}\otimes B_{j-1}(C')$. Поскольку $Z_j(C')$ и $B_j(C')$ — свободные модули, из теоремы 5.2.14 следует, что

$$H_q(C\otimes Z')=\bigoplus_j H_q(C^j)=\bigoplus_{i+j=q}H_i(C)\otimes Z_j(C'),$$

$$H_q(C\otimes B')=\bigoplus_j H_q(\bar{C}^j)=\bigoplus_{i+j=q}H_i(C)\otimes B_j(C').$$

При этих изоморфизмах отображение ∂_* переходит в гомоморфизм $(-1)^i\otimes\gamma_j$, где γ_j: $B_j(C')\subset Z_j(C')$ — вложение. Следовательно, имеет место короткая точная последовательность

$$0\to\bigoplus_{i+j=q}(\operatorname{coker}(-1)^i\otimes\gamma_j)\to H_q(C\otimes C')\to\bigoplus_{i+j=q-1}(\ker(-1)^i\otimes\gamma_j)\to 0.$$

Для вычисления нужных нам двух членов в этой последовательности рассмотрим короткую точную последовательность

$$0\to B_j(C')\xrightarrow{(-1)^i\gamma_j}Z_j(C')\to H_j(C')\to 0.$$

Поскольку модуль $Z_j(C')$ свободный, то, как показывает следствие 5.2.9, имеет место точная последовательность

$$0 \to H_i(C) * H_j(C') \to H_i(C) \otimes B_j(C') \xrightarrow{(-1)^i \otimes \gamma_j} \\ \to H_i(C) \otimes Z_j(C') \to H_i(C) \otimes H_j(C') \to 0.$$

Следовательно,

$$\bigoplus_{i+j=q} (\operatorname{coker}(-1)^i \otimes \gamma_j) = \bigoplus_{i+j=q} H_i(C) \otimes H_j(C'),$$
$$\bigoplus_{i+j=q-1} (\ker(-1)^i \otimes \gamma_j) = \bigoplus_{i+j=q-1} H_i(C) * H_j(C').$$

Подставляя полученные выражения в написанную выше короткую точную последовательность, получаем короткую точную последовательность

$$0 \to (H(C) \otimes H(C'))_q \xrightarrow{\nu} H_q(C \otimes C') \to (H(C) * H(C'))_{q-1} \to 0.$$

Проверим теперь, что ν совпадает с отображением μ. Если $\{c\} \in H(C)$ и $\{c'\} \in H(C')$, то $\{c\} \otimes c' \in H(C) \otimes Z(C')$ и $\{c\} \otimes c' = \{c \otimes c'\}_{C \otimes Z(C')}$. Следовательно, $\nu(\{c\} \otimes \{c'\}) = \{c \otimes c'\}_{C \otimes C'} = \mu(\{c\} \otimes \{c'\})$. Итак, мы получили искомую короткую точную последовательность. Ясно, что она функториальна.

Предполагая теперь, что комплекс C тоже свободный, докажем, что эта последовательность расщепляется. Согласно лемме 5.1.11, для этого достаточно найти левый обратный для гомоморфизма μ. Поскольку комплексы C и C' свободные, комплексы $B(C)$, $B(C')$ тоже свободные, и существуют такие гомоморфизмы $p\colon C \to Z(C)$ и $p'\colon C' \to Z(C')$, что $p(c) = c$ при $c \in Z(C)$ и $p'(c') = c'$ при $c' \in Z(C')$. Тогда отображение

$$p \otimes p'\colon C \otimes C' \to Z(C) \otimes Z(C')$$

переводит комплекс $B(C \otimes C')$ (который содержится в объединении $\operatorname{im}(B(C) \otimes C' \to C \otimes C')$ и $\operatorname{im}(C \otimes B(C') \to C \otimes C')$) в объединение комплекса $\operatorname{im}(B(C) \otimes Z(C') \to Z(C) \otimes Z(C'))$ и комплекса $\operatorname{im}(Z(C) \otimes B(C') \to Z(C) \otimes Z(C'))$. Следовательно, композиция

$$Z(C \otimes C') \subset C \otimes C' \xrightarrow{p \otimes p'} Z(C) \otimes Z(C') \to H(C) \otimes H(C')$$

переводит комплекс $B(C \otimes C')$ в нуль и индуцирует гомоморфизм

$$H(C \otimes C') \to H(C) \otimes H(C'),$$

являющийся левым обратным для μ. ■

Аналогичная функториальная короткая точная последовательность может быть определена, если предположить, что комплекс C

(а не C') свободный. Эти короткие точные последовательности совпадают, если оба комплекса C и C' свободные[1]).

2. Следствие. *Если C' — свободный цепной комплекс, а один из комплексов C или C' ацикличен, то комплекс $C \otimes C'$ тоже ацикличен.* ■

Теперь мы обобщим лемму 1 и получим следующую общую формулу Кюннета.

3. Теорема. *На подкатегории произведения категории цепных комплексов на себя, состоящей из таких пар (C, C'), что комплекс $C * C'$ ацикличен, имеет место функториальная короткая точная последовательность*

$$0 \to (H(C) \otimes H(C'))_q \xrightarrow{\mu} H_q(C \otimes C') \to (H(C) * H(C'))_{q-1} \to 0,$$

и эта последовательность расщепляется.

Доказательство. Пусть $\tau: \bar{C} \to C$ и $\tau': \bar{C}' \to C'$ — свободные аппроксимации. Тогда имеет место короткая точная последовательность

$$0 \to \bar{\bar{C}}' \xrightarrow{i'} \bar{C}' \xrightarrow{\tau'} C' \to 0,$$

где комплекс $\bar{\bar{C}}'$ ацикличен. Поскольку комплекс $\bar{C}'$ свободный, соответствующая шестичленная точная последовательность превращается в точную последовательность

$$0 \to C * C' \to C \otimes \bar{\bar{C}}' \to C \otimes \bar{C}' \xrightarrow{1 \otimes \tau'} C \otimes C' \to 0.$$

Так как комплекс $C * C'$ ацикличен по предположению, а комплекс $C \otimes \bar{\bar{C}}'$ ацикличен в силу следствия 2, отсюда вытекает (как и при доказательстве теоремы 5.2.14), что существует изоморфизм

$$(1 \otimes \tau')_*: H(C \otimes \bar{C}') \approx H(C \otimes C').$$

Имеет место также короткая точная последовательность

$$0 \to \bar{\bar{C}} \xrightarrow{i} \bar{C} \xrightarrow{\tau} C \to 0,$$

где комплекс $\bar{\bar{C}}$ ацикличен. Поскольку комплекс $\bar{C}'$ свободный, имеет место короткая точная последовательность

$$0 \to \bar{\bar{C}} \otimes \bar{C}' \to \bar{C} \otimes \bar{C}' \xrightarrow{\tau \otimes 1} C \otimes \bar{C}' \to 0.$$

Согласно следствию 2, комплекс $\bar{\bar{C}} \otimes \bar{C}'$ ацикличен, и мы получаем изоморфизм

$$(\tau \otimes 1)_*: H(\bar{C} \otimes \bar{C}') \approx H(C \otimes \bar{C}').$$

---

[1]) Это доказано в статье: Kelley G. M., Observations on the Künneth theorem, *Proc. Cambr. Philos. Soc.*, **59** (1963), 575—587.

Следовательно, композиция $(\tau \otimes \tau')_* = (1 \otimes \tau')_* (\tau \otimes 1)_*$ является изоморфизмом $H(\bar{C} \otimes \bar{C}')$ на $H(C \otimes C')$. Нужная нам короткая точная последовательность определяется теперь таким образом, чтобы была коммутативна следующая диаграмма:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & H(\bar{C}) \otimes H(\bar{C}') \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "\tau_* \otimes \tau'_*"'] & H(\bar{C} \otimes \bar{C}') \arrow[r] \arrow[d, "(\tau \otimes \tau')_*"] & H(\bar{C}) * H(\bar{C}') \arrow[r] \arrow[d, "\tau_* * \tau'_*"] & 0 \\
0 \arrow[r] & H(C) \otimes H(C') \arrow[r, "\mu"] & H(C \otimes C') \arrow[r] & H(C) * H(C') \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

где верхняя строка — короткая точная последовательность леммы 1 (необозначенный гомоморфизм в нижней строке можно определить таким образом, чтобы диаграмма стала коммутативной, поскольку все вертикальные гомоморфизмы являются изоморфизмами). Тогда нижняя последовательность расщепляется, поскольку расщепляется верхняя.

Свойство функториальности этой последовательности (и тот факт, что она не зависит от свободных аппроксимаций комплексов $\bar{C}$ и $\bar{C}'$) вытекает из свойства функториальности последовательности леммы 1 и из леммы 5.2.13. ■

Пусть C и C' — цепные комплексы над R, а G и G' — некоторые R-модули. Композиция

$$H(C \otimes G) \otimes H(C' \otimes G') \xrightarrow{\mu} H[(C \otimes G) \otimes (C' \otimes G')] \to \\ \to H[(C \otimes C') \otimes (G \otimes G')]$$

(где гомоморфизм справа индуцирован каноническим изоморфизмом $(C \otimes G) \otimes (C' \otimes G') \approx (C \otimes C') \otimes (G \otimes G')$) является функториальным гомоморфизмом

$$\mu' \colon H(C;\ G) \otimes H(C';\ G') \to H(C \otimes C';\ G \otimes G'),$$

который называется *гомологическим прямым произведением*. Если $z \in H(C;\ G)$, а $z' \in H(C';\ G')$, то через

$$z \times z' \in H(C \otimes C';\ G \otimes G')$$

мы обозначаем образ элемента $z \otimes z'$ при этом гомоморфизме (т. е. $z \times z' = \mu'(z \otimes z')$).

4. Следствие. *Для цепных комплексов C и C' без кручения и модулей G и G', таких, что $G * G' = 0$, имеет место функториальная короткая точная последовательность*

$$0 \to [H(C;\ G) \otimes H(C';\ G')]_q \xrightarrow{\mu'} H_q(C \otimes C';\ G \otimes G') \to \\ \to [H(C;\ G) * H(C';\ G')]_{q-1} \to 0,$$

и эта последовательность расщепляется.

Доказательство. Это будет вытекать из теоремы 3, если только мы докажем, что комплекс $(C \otimes G) * (C' \otimes G')$ тривиален. Для доказательства равенства $(C \otimes G) * (C' \otimes G') = 0$ возьмем некоторое копредставление $0 \to F' \to F \to G \to 0$ модуля G. Поскольку $G * G' = 0$, имеет место точная последовательность

$$0 \to F' \otimes G' \to F \otimes G' \to G \otimes G' \to 0,$$

а так как комплексы C и C' — комплексы без кручения, имеет место точная последовательность

$$0 \to (C \otimes F') \otimes (C' \otimes G') \to (C \otimes F) \otimes (C' \otimes G') \to \\ \to (C \otimes G) \otimes (C' \otimes G') \to 0.$$

Поскольку имеет место также короткая точная последовательность

$$0 \to C \otimes F' \to C \otimes F \to C \otimes G \to 0,$$

где $C \otimes F$ — комплекс без кручения, отсюда вытекает, что комплекс $(C \otimes G) * (C' \otimes G')$ изоморфен ядру гомоморфизма

$$(C \otimes F') \otimes (C' \otimes G') \to (C \otimes F) \otimes (C' \otimes G')$$

и, значит, равен нулю. ■

Гомологическое прямое произведение обладает следующим свойством коммутативности по отношению к связывающему гомоморфизму:

5. Теорема. *Пусть* $0 \to \bar{\bar{C}} \to \bar{C} \to C \to 0$ — *расщепляющаяся короткая точная последовательность цепных комплексов, и пусть* $z \in H(C;\ G)$ *и* $z' \in H(C';\ G')$. *Тогда*

$$\partial_* (z \times z') = \partial_* z \times z',$$
$$\partial_* (z' \times z) = (-1)^{\deg z'} z' \times \partial_* z.$$

Доказательство. Имеет место коммутативная диаграмма цепных отображений

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \bar{\bar{C}} \otimes G & \longrightarrow & \bar{C} \otimes G & \longrightarrow & C \otimes G & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle \bar{\bar{\tau}}} & & \downarrow{\scriptstyle \bar{\tau}} & & \downarrow{\scriptstyle \tau} & & \\ 0 & \to & (\bar{\bar{C}} \otimes G) \otimes (C' \otimes G') & \to & (\bar{C} \otimes G) \otimes (C' \otimes G') & \to & (C \otimes G) \otimes (C' \otimes G') & \to & 0 \end{array}$$

строки которой точны, а вертикальные отображения получены с помощью тензорного умножения справа на такой элемент $c' \in Z(C' \otimes G')$, что $z' = \{c'\}$ (т. е. $\tau(c) = c \otimes c'$ при $c \in C \otimes G$). Поскольку c' — цикл, каждое вертикальное отображение действительно является цепным. Так как связывающий гомоморфизм функториален, имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccccc} H(C\otimes G) & \xrightarrow{\tau_*} & H((C\otimes G)\otimes(C'\otimes G')) & \xrightarrow[\approx]{} & H((C\otimes C')\otimes(G\otimes G')) \\ \downarrow{\scriptstyle\partial_*} & & \downarrow{\scriptstyle\partial_*} & & \downarrow{\scriptstyle\partial_*} \\ H(\overline{\overline{C}}\otimes G) & \xrightarrow{\overline{\overline{\tau}}_*} & H((\overline{\overline{C}}\otimes G)\otimes(C'\otimes G')) & \xrightarrow[\approx]{} & H((\overline{\overline{C}}\otimes C')\otimes(G\otimes G')) \end{array}$$

в которой каждое вертикальное отображение является соответствующим связывающим гомоморфизмом. Гомоморфизм верхней строки переводит z в $z\times z'$, а гомоморфизм нижней переводит $\partial_* z$ в $\partial_* z\times z'$. Это доказывает первую формулу. Вторая доказывается аналогичными рассуждениями; единственное отличие состоит в том, что отображение, которое получается при тензорном умножении слева на элемент c', не является цепным, так как оно или коммутирует, или антикоммутирует (в зависимости от степени элемента c') с граничным оператором. Это объясняет наличие множителя $(-1)^{\deg z'}$ во втором уравнении [1]. ∎

Следующая *теорема Эйленберга — Зильбера* [2] является связующим звеном между алгеброй тензорных произведений и геометрией произведений пространств.

6. Теорема. *На категории упорядоченных пар топологических пространств X и Y имеет место естественная эквивалентность функторов $\Delta(X\times Y)$ и $\Delta(X)\otimes\Delta(Y)$.*

Доказательство. Мы покажем, что оба функтора являются свободными и ацикличными относительно моделей $\{\Delta^p, \Delta^q\}_{p,\,q\geqslant 0}$. Пусть $d_n\in\Delta_n(\Delta^n\times\Delta^n)$ — сингулярный симплекс, являющийся диагональным отображением $\Delta^n\to\Delta^n\times\Delta^n$. Если $\sigma\colon\Delta^n\to X\times Y$ — какой-нибудь сингулярный n-мерный симплекс, то σ совпадает с композицией

$$\Delta^n\xrightarrow{d_n}\Delta^n\times\Delta^n\xrightarrow{\sigma'\times\sigma''}X\times Y,$$

где $\sigma'=p_1\circ\sigma$, $\sigma''=p_2\circ\sigma$, а p_1 и p_2 — проекции произведения $X\times Y$ на X и Y соответственно. Обратно, если заданы симплексы $\sigma'\colon\Delta^n\to X$ и $\sigma''\colon\Delta^n\to Y$, то им соответствует симплекс $\sigma=(\sigma'\times\sigma'')d_n\colon\Delta^n\to X\times Y$. Следовательно, единственный элемент $\{d_n\}$ образует базис для $\Delta_n(X\times Y)$, и, значит, комплекс $\Delta(X\times Y)$ свободен относительно моделей $\{\Delta^n, \Delta^n\}$, а потому и относительно моделей $\{\Delta^p, \Delta^q\}$. Так как симплексы Δ^p и Δ^q стягиваемы, стягиваемо и их произведение $\Delta^p\times\Delta^q$. Значит, комплекс

[1] То есть операция умножения слева на $(-1)^{\deg z'}c'$ есть цепное отображение. — *Прим. ред.*

[2] Эта теорема впервые появилась в работе: Eilenberg S., Zilber J. A., On products of complexes, *Am. J. Math.*, **75** (1953), 200–204.

$\tilde{\Delta}(\Delta^p \times \Delta^q)$ ацикличен, и мы доказали, что $\Delta(X \times Y)$ — свободный ацикличный функтор относительно моделей $\{\Delta^p, \Delta^q\}$.

Поскольку $\Delta_p(X)$ — свободная группа с базисом $\xi_p \in \Delta_p(\Delta^p)$, а $\Delta_q(Y)$ — свободная группа с базисом $\xi_q \in \Delta_q(\Delta^q)$, группа $\Delta_p(X) \otimes \Delta_q(Y)$ тоже свободная и имеет базис

$$\xi_p \otimes \xi_q \in \Delta_p(\Delta^p) \otimes \Delta_q(\Delta^q).$$

Следовательно, $[\Delta(X) \otimes \Delta(Y)]_n$ — свободная группа с базисом $\{\xi_p \otimes \xi_q\}_{p+q=n}$. Значит, функтор $\Delta(X) \otimes \Delta(Y)$ свободен относительно моделей $\{\Delta^p, \Delta^q\}$. Поскольку $\varepsilon\colon \Delta(\Delta^p) \to \mathbf{Z}$ и $\varepsilon\colon \Delta(\Delta^q) \to \mathbf{Z}$ — цепные эквивалентности, отсюда вытекает, что

$$\varepsilon \otimes \varepsilon\colon \Delta(\Delta^p) \otimes \Delta(\Delta^q) \to \mathbf{Z} \otimes \mathbf{Z} = \mathbf{Z}$$

также является цепной эквивалентностью. Следовательно, по лемме 4.3.2 приведенный комплекс комплекса $\Delta(\Delta^p) \otimes \Delta(\Delta^q)$ ацикличен, и мы видим, что функтор $\Delta(X) \otimes \Delta(Y)$ также свободен и ацикличен относительно моделей $\{\Delta^p, \Delta^q\}$. Теорема теперь получается с помощью метода ацикличных моделей. ■

Та же техника, основанная на методе ацикличных моделей, может быть использована для доказательства следующих результатов:

7. Теорема. *Для любых пространств X, Y и Z имеет место цепно гомотопически коммутативная диаграмма*

$$\begin{array}{ccc} \Delta((X \times Y) \times Z) & \approx & \Delta(X \times (Y \times Z)) \\ {\scriptstyle\approx}\updownarrow & & \updownarrow{\scriptstyle\approx} \\ [\Delta(X) \otimes \Delta(Y)] \otimes \Delta(Z) & \approx & \Delta(X) \otimes [\Delta(Y) \otimes \Delta(Z)] \end{array}$$

в которой вертикальные отображения — естественные цепные эквивалентности теоремы 6. ■

8. Теорема. *Для любых пространств X и Y имеет место цепно гомотопически коммутативная диаграмма*

$$\begin{array}{ccc} \Delta(X \times Y) & \approx & \Delta(Y \times X) \\ \updownarrow{\scriptstyle\approx} & & \updownarrow{\scriptstyle\approx} \\ \Delta(X) \otimes \Delta(Y) & \approx & \Delta(Y) \otimes \Delta(X) \end{array}$$

в которой нижнее отображение переводит $x \otimes y$ в $(-1)^{\deg x \deg y}\, y \otimes x$, а вертикальные отображения являются естественными цепными эквивалентностями теоремы 6. ■

Наличие знака в теореме 8 необходимо для того, чтобы сделать соответствующее отображение цепным (т. е. сделать так, чтобы оно коммутировало с граничным оператором).

Определим *произведение* $(X, A) \times (Y, B)$ пар топологических пространств (X, A) и (Y, B) как пару $(X \times Y, X \times B \cup A \times Y)$. Тогда справедлива следующая относительная форма теоремы Эйленберга — Зильбера:

9. Теорема. *На категории упорядоченных пар, состоящих из пар топологических пространств (X, A) и (Y, B), таких, что пара $\{X \times B, A \times Y\}$ удовлетворяет аксиоме вырезания, имеет место естественная цепная эквивалентность функторов $\Delta(X \times Y)/\Delta(X \times B \cup A \times Y)$ и $[\Delta(X)/\Delta(A)] \otimes [\Delta(Y)/\Delta(B)]$.*

Доказательство. Поскольку пара $\{X \times B, A \times Y\}$ удовлетворяет аксиоме вырезания, естественное отображение

$$\Delta(X \times Y)/[\Delta(X \times B) + \Delta(A \times Y)] \to \Delta(X \times Y)/\Delta(X \times B \cup A \times Y)$$

является цепной эквивалентностью. В силу теоремы 6 имеет место функториальная эквивалентность комплексов $\Delta(X) \otimes \Delta(Y)$ и $\Delta(X \times Y)$, переводящая $\Delta(X) \otimes \Delta(B)$ и $\Delta(A) \otimes \Delta(Y)$ в $\Delta(X \times B)$ и $\Delta(A \times Y)$ соответственно. Следовательно, имеет место функториальная цепная эквивалентность факторкомплекса

$$\Delta(X) \otimes \Delta(Y)/[\Delta(X) \otimes \Delta(B) + \Delta(A) \otimes \Delta(Y)] \approx [\Delta(X)/\Delta(A)] \otimes [\Delta(Y)/\Delta(B)]$$

с факторкомплексом

$$\Delta(X \times Y)/[\Delta(X \times B) + \Delta(A \times Y)].$$

Комбинация этих двух цепных эквивалентностей и дает нужный нам результат. ■

Для пар топологических пространств (X, A) и (Y, B) определим *гомологическое прямое произведение*

$$\mu' \colon H_p(X, A; G) \otimes H_q(Y, B; G') \to H_{p+q}((X, A) \times (Y, B); G \otimes G')$$

как гомологическое прямое произведение

$$\begin{gathered} H_p([\Delta(X)/\Delta(A)] \otimes G) \otimes H_q([\Delta(Y)/\Delta(B)] \otimes G') \\ \downarrow \\ H_{p+q}(([\Delta(X)/\Delta(A)] \otimes [\Delta(Y)/\Delta(B)]) \otimes (G \otimes G')), \end{gathered}$$

взятое в композиции с функториальным гомоморфизмом нижнего модуля в модуль

$$H_{p+q}(\Delta(X \times Y)/\Delta(X \times B \cup A \times Y); G \otimes G').$$

Если $z \in H_p(X, A; G)$ и $z' \in H_q(Y, B; G')$, то мы пишем

$$z \times z' = \mu'(z \otimes z') \in H_{p+q}((X, A) \times (Y, B); G \otimes G').$$

Поскольку комплексы $\Delta(X)/\Delta(A)$ и $\Delta(Y)/\Delta(B)$ свободны, мы можем, комбинируя теорему 9 со следствием 4, получить следующую формулу Кюннета для сингулярных гомологий:

10. Теорема. *Если пара* $\{X \times B,\ A \times Y\}$ *удовлетворяет аксиоме вырезания, а модули* G *и* G' *над областью главных идеалов таковы, что* $G * G' = 0$, *то имеет место функториальная короткая точная последовательность*

$$0 \to [H(X, A; G) \otimes H(Y, B; G')]_q \xrightarrow{\mu'} H_q((X, A) \times (Y, B); G \otimes G') \to$$
$$\to [H(X, A; G) * H(Y, B; G')]_{q-1} \to 0,$$

и эта последовательность расщепляется. ∎

В частности, если член справа в этой последовательности обращается в нуль (что всегда имеет место, когда R — поле), то гомологическое прямое произведение является изоморфизмом

$$\mu'\colon H(X, A; G) \otimes H(Y, B; G') \approx H((X, A) \times (Y, B); G \otimes G').$$

Следующие формулы вытекают из естественности отображения μ и теорем 5, 7 и 8.

11. *Пусть* $f\colon (X, A) \to (X', A')$ *и* $g\colon (Y, B) \to (Y', B')$ — *некоторые отображения, и пусть* $z \in H_p(X, A; G)$ *и* $z' \in H_q(Y, B; G')$. *Тогда в модуле*

$$H_{p+q}((X', A') \times (Y', B'); G \otimes G')$$

имеет место равенство

$$(f \times g)_*(z \times z') = f_* z \times g_* z'.\ ∎$$

12. *Пусть* $p\colon (X, A) \times Y \to (X, A)$ — *проекция на первый сомножитель, и пусть* $\varepsilon\colon H(Y; G') \to G'$ — *аугментация. Для элементов* $z \in H_q(X, A; G)$ *и* $z' \in H_r(Y; G')$ *в модуле* $H_{q+r}(X, A; G \otimes G')$ *имеет место равенство*

$$p_*(z \times z') = \mu(z \otimes \varepsilon(z')).\ ∎$$

13. *Для элементов* $z \in H_p(X, A; G)$, $z' \in H_q(Y, B; G')$ *и* $z'' \in H_r(Z, C; G'')$ *в модуле*

$$H_{p+q+r}((X, A) \times (Y, B) \times (Z, C); G \otimes G' \otimes G'')$$

имеет место равенство

$$z \times (z' \times z'') = (z \times z') \times z''.\ ∎$$

14. *Пусть*

$$T\colon (X, A) \times (Y, B) \to (Y, B) \times (X, A) \quad \text{и} \quad \varphi\colon G \otimes G' \to G' \otimes G$$

— отображения перестановки сомножителей. Для $z \in H_p(X, A; G)$ *и* $z' \in H_q(Y, B; G')$ *в модуле* $H_{p+q}((Y, B) \times (X, A); G \otimes G')$ *имеет место равенство* $T_*(z \times z') = (-1)^{pq} \varphi_*(z' \times z)$. ■

15. *Пусть пара пар* $\{(X_1, A_1), (X_2, A_2)\}$ *удовлетворяет аксиоме вырезания в пространстве* X, *и пусть* $z \in H_p(X_1 \cup X_2, A_1 \cup A_2; G)$ *и* $z' \in H_q(Y, B; G')$. *Для связывающего гомоморфизма соответствующей последовательности Майера — Виеториса имеет место равенство*

$$\partial_*(z \times z') = \partial_* z \times z'$$

в модуле $H_{p+q-1}((X_1 \cap X_2, A_1 \cap A_2) \times (Y, B); G \otimes G')$ *и равенство*

$$\partial_*(z' \times z) = (-1)^q z' \times \partial_* z$$

в модуле $H_{p+q-1}((Y, B) \times (X_1 \cap X_2, A_1 \cap A_2); G' \otimes G)$. ■

§ 4. Когомологии

Дифференциал цепного комплекса имеет степень -1. С цепными комплексами связано понятие коцепного комплекса, обладающего дифференциалом степени $+1$. Коцепные комплексы обладают многими свойствами, присущими цепным комплексам, и этот параграф посвящен обсуждению таких свойств. Функтор Hom ставит в соответствие каждому цепному комплексу коцепной комплекс, и обратно. Модуль когомологий пары топологических пространств с коэффициентами в G представляет собой модуль гомологий коцепного комплекса, полученного этим путем из сингулярного комплекса рассматриваемой пары. Заключительная часть параграфа посвящена краткому обсуждению аксиоматической теории когомологий.

На протяжении всего параграфа R обозначает коммутативное кольцо с единицей. *Коцепным комплексом* над R (обозначается $C^* = \{C^q, \delta^q\}$) называется градуированный R-модуль, рассматриваемый вместе с однородным дифференциалом δ степени $+1$, который называется *кограничным оператором* (таким образом, $\delta^q\colon C^q \to C^{q+1}$ и $\delta^{q+1}\delta^q = 0$ для всех q). Ядро оператора δ называется модулем *коциклов* $Z(C^*)$, а образ δ — модулем *кограниц* $B(C^*)$. Значит, $B(C^*) \subset Z(C^*)$, и *модуль когомологий* $H(C^*)$ определяется как факторкомплекс $Z(C^*)/B(C^*)$.

Если C^* — коцепной комплекс, то можно определить цепной комплекс C, полагая $C_q = C^{-q}$ и считая дифференциал $\partial_q\colon C_q \to C_{q-1}$ равным $\delta^{-q}\colon C^{-q} \to C^{-q+1}$. Тогда $H_q(C) = H^{-q}(C^*)$, и модуль когомологий комплекса C^* соответствует модулю гомологий комплекса C. Таким образом, результаты, касающиеся цепных комплексов, превращаются в результаты о коцепных комплексах.

Этим способом определяются понятия *коцепного отображения* и *коцепной гомотопии*, а также категория коцепных комплексов и классов коцепной гомотопии коцепных отображений. Модуль когомологий является ковариантным функтором из этой категории в категорию градуированных модулей. Далее, для короткой точной последовательности коцепных комплексов

$$0 \to \overline{\overline{C}}{}^* \xrightarrow{\alpha} \overline{C}{}^* \xrightarrow{\beta} C^* \to 0$$

существуют функториальный *связывающий гомоморфизм*

$$\delta^*\colon H(C^*) \to H(\overline{\overline{C}}{}^*)$$

степени $+1$ и функториальная точная когомологическая последовательность

$$\ldots \to H^q(C^*) \xrightarrow{\delta^*} H^{q+1}(\overline{\overline{C}}{}^*) \xrightarrow{\alpha^*} H^{q+1}(\overline{C}{}^*) \xrightarrow{\beta^*} H^{q+1}(C^*) \xrightarrow{\delta^*} \ldots.$$

Переходя от коцепного комплекса к цепному изменением знака степени, получаем следующие аналоги теорем 5.2.14 и 5.3.3:

1. Теорема. *Пусть заданы коцепной комплекс C^* и модуль G, причем модуль $C^* * G$ ацикличен. Тогда имеет место функториальная короткая точная последовательность*

$$0 \to H^q(C^*) \otimes G \xrightarrow{\mu} H^q(C^* \otimes G) \to H^{q+1}(C^*) * G \to 0,$$

и эта последовательность расщепляется. ∎

2. Теорема. *Пусть коцепные комплексы C^* и C'^* таковы, что $C^* * C'^*$ — ацикличный коцепной комплекс. Тогда имеет место функториальная короткая точная последовательность*

$$0 \to [H^*(C^*) \otimes H^*(C'^*)]^q \xrightarrow{\mu} H^q(C^* \otimes C'^*) \to [H^*(C^*) * H^*(C'^*)]^{q+1} \to 0,$$

и эта последовательность расщепляется. ∎

Имеет место также аналог следствия 5.3.4 для коцепных комплексов, который мы не будем формулировать как отдельную теорему. Если C^* — коцепной комплекс над R, а G — некоторый R-модуль, то *аугментацией* комплекса C^* над G называется мономорфизм $\eta\colon G \to C^0$, такой, что $\delta^0 \circ \eta = 0$. *Коцепным комплексом над G с аугментацией* называется неотрицательный коцепной комплекс C^* (т. е. $C^q = 0$ при $q < 0$), наделенный аугментацией над G. Такую аугментацию можно рассматривать как мономорфное цепное отображение в C^* коцепного комплекса (также обозначаемого через G), все q-мерные модули которого тривиальны, за исключением нульмерного, совпадающего с G. Ясно, что для этого тривиального комплекса $H^q(G) = 0$ при $q \neq 0$ и $H^0(G) = G$. Следовательно, η индуцирует мономорфизм $\eta^*\colon G \to H^0(C^*)$. *Приведенным коцепным комплексом* $\tilde{C}^*$, соответствующим коцепному комплексу C^* с аугментацией η, называется факторкомплекс, такой, что $\tilde{C}^q = C^q$, если $q \neq 0$, и $\tilde{C}^0 = \operatorname{coker} \eta$, а дифференциалы $\tilde{\delta}^q$ индуцированы соответствующими дифференциалами δ^q. Положим $\tilde{H}(C^*) = H(\tilde{C}^*)$. Поскольку имеется короткая точная последовательность коцепных комплексов

$$0 \to G \xrightarrow{\eta} C^* \to \tilde{C}^* \to 0,$$

мы видим, что $H^q(C^*) \approx \tilde{H}^q(C^*)$, если $q \neq 0$, и имеет место короткая точная последовательность

$$0 \to G \to H^0(C^*) \to \tilde{H}^0(C^*) \to 0.$$

Мы интересуемся коцепными комплексами постольку, поскольку они связаны с цепными комплексами. Пусть C — цепной комплекс над R, а G — некоторый R-модуль. Существует коцепной комплекс $\operatorname{Hom}(C, G) = \{\operatorname{Hom}(C_q, G), \delta^q\}$, где кограница $\delta^q f \in \operatorname{Hom}(C_{q+1}, G)$ элемента $f \in \operatorname{Hom}(C_q, G)$ определяется соотношением

$$(\delta^q f)(c) = f(\partial_{q+1} c), \quad c \in C_{q+1}.$$

Мы также будем писать $\langle f, c\rangle$ вместо $f(c)$ и считать, что $\langle f, c\rangle = 0$, если $\deg f \neq \deg c$. В этих обозначениях $\langle \delta^q f, c\rangle = \langle f, \partial_{q+1} c\rangle$.

Если комплекс C снабжен аугментацией ε: $C_0 \to G'$, то комплекс $\operatorname{Hom}(C, G)$ также обладает аугментацией

$$\eta\colon \operatorname{Hom}(G', G) \to \operatorname{Hom}(C_0, G),$$

где $\eta(f)(c) = f(\varepsilon(c))$ при $c \in C_0$ и $f \in \operatorname{Hom}(G', G)$. Легко проверить следующий результат:

3. Теорема. *Существует функтор двух аргументов, контравариантный относительно цепных комплексов C и ковариантный относительно модулей G, сопоставляющий цепному комплексу C и модулю G коцепной комплекс* $\operatorname{Hom}(C, G)$. ∎

Для цепного комплекса C и модуля G определим модуль *когомологий $H^*(C; G) = \{H^q(C; G)\}$ комплекса C с коэффициентами в G*, полагая

$$H^q(C; G) = H^q(\operatorname{Hom}(C, G)).$$

Из теоремы 3 следует, что $H^*(C; G)$ является контравариантным функтором по C и ковариантным функтором по G в категорию градуированных модулей. Для цепного отображения τ: $C \to C'$ через τ^*: $H^*(C'; G) \to H^*(C; G)$ мы обозначаем гомоморфизм, индуцированный коцепным отображением

$$\operatorname{Hom}(\tau, 1)\colon \operatorname{Hom}(C', G) \to \operatorname{Hom}(C, G),$$

а для гомоморфизма φ: $G \to G'$ через φ^*: $H^*(C; G) \to H^*(C; G')$ мы обозначаем гомоморфизм, индуцированный коцепным отображением $\mathrm{Hom}(1, \varphi)$: $\mathrm{Hom}(C, G) \to \mathrm{Hom}(C, G')$. Чтобы не спутать гомологии комплекса C с его когомологиями, мы иногда вместо $H(C; G)$ будем писать $H_*(C; G)$.

4. Пример. Для данной абелевой группы G и симплициальной пары (K, L) *группой ориентированных когомологий пары* (K, L) *с коэффициентами в* G (обозначается $H^*(K, L; G)$) называется градуированная группа когомологий коцепного комплекса $\mathrm{Hom}(C(K)/C(L), G)$ (обладающего аугментацией над $\mathrm{Hom}(\mathbf{Z}, G) \approx G$). Значит, $H^*(K, L; G)$ — функтор, контравариантный по (K, L) и ковариантный по G, в категорию градуированных абелевых групп. Если G является также R-модулем, то $H^*(K, L; G)$ — градуированный R-модуль.

5. Пример. Если (X, A) — пара топологических пространств, а G — абелева группа, то *группой сингулярных когомологий пары* (X, A) *с коэффициентами в* G (обозначается $H^*(X, A; G)$) называется градуированная группа когомологий коцепного комплекса $\mathrm{Hom}(\Delta(X)/\Delta(A), G)$ (обладающая аугментацией над G). Этот функтор контравариантен по (X, A) и ковариантен по G. Если группа G является R-модулем, то $H^*(X, A; G)$ — градуированный R-модуль. Если $(X', A') \subset (X, A)$ и $u \in H^*(X, A; G)$, то через $u|(X', A')$ мы обозначаем элемент модуля $H^*(X', A'; G)$, равный i^*u, где i: $(X', A') \subset (X, A)$. Через $1 \in H^0(X; R)$ мы обозначаем образ $1 \in R$ при аугментации η: $R \to H^0(X; R)$.

Напомним некоторые свойства функтора Hom. Легко проверяется такой аналог следствия 5.1.6.

6. Лемма. *Для заданных точной последовательности R-модулей*

$$A' \to A \to A'' \to 0$$

и R-модуля B имеет место точная последовательность

$$0 \to \mathrm{Hom}(A'', B) \to \mathrm{Hom}(A, B) \to \mathrm{Hom}(A', B). \blacksquare$$

Если $A' \to A$ — мономорфизм (т. е. если последовательность $0 \to A' \to A$ точна), то вовсе не обязательно, чтобы отображение $\mathrm{Hom}(A, B) \to \mathrm{Hom}(A', B)$ было эпиморфизмом (т. е. чтобы последовательность $\mathrm{Hom}(A, B) \to \mathrm{Hom}(A', B) \to 0$ была точной). Тем не менее имеет место такой аналог следствия 5.1.12 (который легко получается с помощью леммы 5.1.11):

7. Лемма. *Для расщепляющейся короткой точной последовательности R-модулей*

$$0 \to A' \to A \to A'' \to 0$$

и R-модуля B последовательность

$$0 \to \mathrm{Hom}(A'', B) \to \mathrm{Hom}(A, B) \to \mathrm{Hom}(A', B) \to 0$$

является расщепляющейся короткой точной последовательностью. $\blacksquare$

В случае когда $0 \to C' \to C \to C'' \to 0$ — расщепляющаяся короткая точная последовательность цепных комплексов, из леммы 7 вытекает, что для любого модуля G имеет место короткая точная последовательность коцепных комплексов

$$0 \to \operatorname{Hom}(C'', G) \to \operatorname{Hom}(C, G) \to \operatorname{Hom}(C', G) \to 0.$$

Это приводит к следующему результату:

8. Теорема. *Для данной расщепляющейся короткой точной последовательности цепных комплексов*

$$0 \to C' \to C \to C'' \to 0$$

и модуля G имеет место функториальная точная последовательность когомологий

$$\ldots \to H^q(C''; G) \to H^q(C; G) \to H^q(C'; G) \xrightarrow{\delta^*} H^{q+1}(C''; G) \to \ldots \blacksquare$$

Это в свою очередь приводит к *когомологической точной последовательности Майера — Виеториса*, аналогичной точной последовательности следствия 5.1.14.

9. Следствие. *Пусть $\{(X_1, A_1), (X_2, A_2)\}$ — пара пар, удовлетворяющая аксиоме вырезания, а G — некоторый R-модуль. Тогда имеет место функториальная точная последовательность когомологий*

$$\ldots \xrightarrow{\delta^*} H^q(X_1 \cup X_2, A_1 \cup A_2; G) \xrightarrow{j^*} H^q(X_1, A_1; G) \oplus H^q(X_2, A_2; G) \to$$
$$\xrightarrow{i^*} H^q(X_1 \cap X_2, A_1 \cap A_2; G) \xrightarrow{\delta^*} \ldots,$$

где $j^*(u) = (j_1^*(u), j_2^*(u))$, $i^*(u_1 + u_2) = i_1^* u_1 - i_2^* u_2$, а i_1, i_2, j_1 и j_2 — соответствующие вложения. $\blacksquare$

Если $\{X_j\}$ — множество компонент линейной связности пространства X, то $\Delta(X) = \bigoplus_j \Delta(X_j)$. Следовательно, $\operatorname{Hom}(\Delta(X), G) = \prod_j \operatorname{Hom}(\Delta(X_j), G)$. С помощью теоремы 4.1.6 мы получаем следующий результат:

10. Теорема. *Модуль сингулярных когомологий топологического пространства есть прямое произведение модулей сингулярных когомологий его компонент линейной связности.* $\blacksquare$

Поскольку гомологический функтор не коммутирует с пределами обратных спектров, неверно, что сингулярные когомологии пространства изоморфны пределу обратного спектра сингулярных когомологий компактных подмножеств этого пространства (т. е. общего аналога теоремы 4.4.6 для когомологий не существует).

Имеет место точная когомологическая последовательность, соответствующая короткой точной последовательности модулей коэффициентов (аналогичная встречающейся в теореме 5.2.7).

11. Теорема. *На категории свободных цепных комплексов C над R и коротких точных последовательностей R-модулей*

$$0 \to G' \xrightarrow{\varphi} G \xrightarrow{\psi} G'' \to 0$$

существуют функториальный связывающий гомоморфизм

$$\beta^*\colon H^*(C;\ G'') \to H^*(C;\ G')$$

степени $+1$ и функториальная точная последовательность

$$\ldots \to H^q(C;\ G') \xrightarrow{\varphi_*} H^q(C;\ G) \xrightarrow{\psi_*} H^q(C;\ G'') \xrightarrow{\beta^*} H^{q+1}(C;\ G') \to \ldots .$$

Доказательство. Поскольку C — свободный комплекс, имеет место короткая точная последовательность коцепных комплексов

$$0 \to \operatorname{Hom}(C,\ G') \xrightarrow{\bar\varphi} \operatorname{Hom}(C,\ G) \xrightarrow{\bar\psi} \operatorname{Hom}(C,\ G'') \to 0,$$

в которой гомоморфизмы $\bar\varphi$ и $\bar\psi$ индуцированы отображениями φ и ψ, откуда и получается требуемый результат. ■

Связывающий гомоморфизм β^* теоремы 11 называется *когомологическим гомоморфизмом Бокштейна*, соответствующим последовательности коэффициентов $0 \to G' \xrightarrow{\varphi} G \xrightarrow{\psi} G'' \to 0$.

Пусть G — некоторый R-модуль. *Теорией когомологий с коэффициентами в G* называется контравариантный функтор $H^* = \{H^q\}$ из категории пар топологических пространств в категорию градуированных R-модулей и естественное преобразование $\delta^*\colon H^*(A) \to$ $\to H^*(X,\ A)$ степени $+1$, для которых выполняются следующие аксиомы:

12. Аксиома гомотопии. *Если отображения $f_0,\ f_1\colon (X,\ A) \to (Y,\ B)$ гомотопны, то*

$$H^*(f_0) = H^*(f_1)\colon\ H^*(Y,\ B) \to H^*(X,\ A).$$

13. Аксиома точности. *Для любой пары $(X,\ A)$ и вложений $i\colon A \subset X$ и $j\colon X \subset (X,\ A)$ имеет место точная последовательность*

$$\ldots \xrightarrow{\delta^*} H^q(X,\ A) \xrightarrow{H^q(j)} H^q(X) \xrightarrow{H^q(i)} H^q(A) \xrightarrow{\delta^*} H^{q+1}(X,\ A) \to \ldots .$$

14. Аксиома вырезания. *Пусть $(X,\ A)$ — произвольная пара. Если открытое подмножество U пространства X таково, что $\bar U \subset \operatorname{int} A$, то отображение вырезания $j\colon (X - U,\ A - U) \subset (X,\ A)$ индуцирует изоморфизм*

$$H^*(j)\colon\ H^*(X,\ A) \approx H^*(X - U,\ A - U).$$

15. Аксиома размерности. *На категории одноточечных пространств имеет место естественная эквивалентность постоянного функтора G и функтора H^*.*

Теория сингулярных когомологий с коэффициентами в G является примером теории когомологий с коэффициентами в G (аксиома точности получается применением следствия 9 к соответствующей паре). Для теорий когомологий справедлива теорема единственности (т. е. гомоморфизм одной теории когомологий в другую, являющийся изоморфизмом для одноточечных пространств, является изоморфизмом для компактных полиэдральных пар).

Приведенные модули когомологий $\tilde{H}^*$ некоторой теории когомологий определяются следующим образом. Пусть пространство X непусто и $c: X \to P$ — единственное его отображение в одноточечное пространство P. Приведенный модуль $\tilde{H}^*(X)$ определяется как коядро гомоморфизма

$$H^*(c): H^*(P) \to H^*(X).$$

Поскольку отображение c имеет правое обратное, отображение $H^*(c)$ имеет левое обратное. Следовательно,

$$H^*(X) \approx \tilde{H}^*(X) \oplus H^*(P),$$

и приведенные модули когомологий обладают свойствами, аналогичными свойствам приведенных сингулярных модулей гомологий.

§ 5. Теорема об универсальных коэффициентах для когомологий

Этот параграф посвящен выяснению связей между когомологиями и гомологиями цепных комплексов. Для того чтобы выразить когомологии цепного комплекса через его гомологии, необходимо ввести некоторые функторы, которые связаны с модулем гомоморфизмов одного модуля в другой точно таким же образом, как периодическое произведение связано с тензорным произведением. Над областью главных идеалов существует только один такой функтор, а именно модуль расширений. Мы используем его для формулировки теорем об универсальных коэффициентах и формул Кюннета, которые мы доказываем в этом параграфе.

Пусть C — свободная резольвента модуля A, а B — произвольный модуль. Существует коцепной комплекс $\operatorname{Hom}(C, B) = \{[\operatorname{Hom}(C, B)]^q = \operatorname{Hom}(C_q, B), \delta^q\}$, модуль когомологий которого зависит только от A и B с точностью до канонического изоморфизма (и не зависит от резольвенты C). Пусть C — каноническая свободная резольвента модуля A. Определим группы $\operatorname{Ext}^q(A, B) = H^q(\operatorname{Hom}(C, B))$. Тогда $\operatorname{Ext}^q(A, B)$ — функтор двух аргументов, контравариантный по A и ковариантный по B, причем $\operatorname{Ext}^0(A, B)$ естественно эквивалентен $\operatorname{Hom}(A, B)$.

Над областью главных идеалов имеет место равенство $\mathrm{Ext}^q(A, B) = 0$ при $q > 1$; *модуль расширений* $\mathrm{Ext}(A, B)$ определяется как модуль $\mathrm{Ext}^1(A, B)$. Он характеризуется тем свойством, что для любого копредставления модуля A

$$0 \to C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0 \to A \to 0$$

имеет место точная последовательность

$$0 \to \mathrm{Hom}(A, B) \to \mathrm{Hom}(C_0, B) \xrightarrow{\mathrm{Hom}(\partial_1, 1)} \mathrm{Hom}(C_1, B) \to \mathrm{Ext}(A, B) \to 0.$$

Действительно, поскольку $\mathrm{Hom}(C_2, B) = 0$, имеем

$$\mathrm{Ext}(A, B) = H^1(C; B) = \mathrm{Hom}(C_1, B)/\mathrm{im}[\mathrm{Hom}(\partial_1, 1)] = \mathrm{coker}[\mathrm{Hom}(\partial_1, 1)].$$

Ясно, что функтор $\mathrm{Ext}(A, B)$ контравариантен по A и ковариантен по B. Его название объясняется той ролью, которую он играет при расширениях модуля A посредством модуля B; мы кратко опишем это после того, как рассмотрим следующие примеры:

1. Если A — свободный модуль, то он имеет копредставление

$$0 \to 0 \to A \to A \to 0,$$

откуда $\mathrm{Ext}(A, B) = 0$ для любого B.

2. Для всякого элемента $v \in R$ имеет место точная последовательность

$$0 \to R \xrightarrow{\alpha} R \to R/vR \to 0,$$

где $\alpha(v') = vv'$ $(v' \in R)$, являющаяся копредставлением модуля R/vR. Для любого R-модуля B имеет место изоморфизм $\mathrm{Hom}(R, B) \approx B$, при котором гомоморфизм $\mathrm{Hom}(\alpha, 1)$: $\mathrm{Hom}(R, B) \to \mathrm{Hom}(R, B)$ соответствует гомоморфизму α^*: $B \to B$, где $\alpha^*(b) = vb$. Следовательно, имеет место изоморфизм $\mathrm{coker}\,\mathrm{Hom}(\alpha, 1) \approx B/vB$, и мы доказали, что

$$\mathrm{Ext}(R/vR, B) \approx B/vB \approx (R/vR) \otimes B.$$

Поскольку функтор Hom коммутирует с конечными прямыми суммами, отсюда следует, что для любого конечно порожденного модуля A, совпадающего со своим подмодулем кручения, имеет место (нефункториальный) изоморфизм

$$\mathrm{Ext}(A, B) \approx A \otimes B,$$

так как такой модуль является конечной прямой суммой циклических модулей (по теореме 4.14 из введения).

Расширением модуля A посредством модуля B называется короткая точная последовательность

$$0 \to B \to E \to A \to 0.$$

С помощью подходящего определения эквивалентности расширений (посредством коммутативных диаграмм), суммы двух расширений, произведения расширения на элемент из R получается модуль, элементами которого являются классы эквивалентности расширений модуля A посредством модуля B. Этот модуль изоморфен модулю $\operatorname{Ext}(A, B)$. Действительно, для данного расширения $0 \to B \to E \to A \to 0$ и копредставления $0 \to C_1 \to C_0 \to A \to 0$ модуля A имеет место (в силу 5.2.1) коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & C_1 \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_1"'] & C_0 \arrow[d, "\varphi_0"'] \arrow[dr] & & \\ & & & A \arrow[r] & 0 \\ 0 \arrow[r] & B \arrow[r] & E \arrow[ur] & & \end{tikzcd}$$

определенная единственным образом с точностью по цепной гомотопии. Значит, элемент $\varphi_1 \in \operatorname{Hom}(C_1, B)$ единствен с точностью до $\operatorname{im}[\operatorname{Hom}(C_0, B) \to \operatorname{Hom}(C_1, B)]$ и определяет некоторый элемент группы $\operatorname{Ext}(A, B)$. Это соответствие индуцирует изоморфизм между модулем классов эквивалентности расширений модуля A посредством модуля B и модулем $\operatorname{Ext}(A, B)$.

Для данного градуированного модуля $C = \{C_q\}$ определен градуированный модуль $\operatorname{Ext}(C, B) = \{[\operatorname{Ext}(C, B)]^q = \operatorname{Ext}(C_q, B)\}$. Если C — цепной комплекс, то $\operatorname{Ext}(C, B)$ — коцепной комплекс с дифференциалом

$$\delta^q = \operatorname{Ext}(\partial_{q+1}, 1)\colon \operatorname{Ext}(C_q, B) \to \operatorname{Ext}(C_{q+1}, B).$$

Гомоморфизм

$$h\colon H^q(C; G) \to \operatorname{Hom}(H_q(C; G'), G \otimes G'),$$

естественный по C и по G, определяется равенством

$$(h\{f\})\left\{\sum c_i \otimes g'_i\right\} = \sum f(c_i) \otimes g'_i$$

для $\{f\} \in H^q(C; G)$ и $\left\{\sum c_i \otimes g'_i\right\} \in H_q(C; G')$ (следует проверить, что элемент $\sum f(c_i) \otimes g'_i$ не зависит от выбора элемента f в его классе гомологий и элемента $\sum c_i \otimes g'_i$ в его классе гомологий). Для элементов $u \in H^p(C; G)$ и $z \in H_q(C; G')$ будем считать выражение $\langle u, z\rangle \in G \otimes G'$ равным нулю, если $p \neq q$, и равным $h(u)(z)$, если $p = q$. В этих обозначениях

$$\left\langle \{f\}, \left\{\sum c_i \otimes g'_i\right\}\right\rangle = \sum \langle f, c_i\rangle \otimes g'_i.$$

Гомоморфизм h входит в следующую *теорему об универсальных коэффициентах для когомологий*:

3. Теорема. *Для цепного комплекса C и модуля G, таких, что* $\mathrm{Ext}(C, G)$ — *ацикличный цепной комплекс, имеет место функториальная короткая точная последовательность*

$$0 \to \mathrm{Ext}(H_{q-1}(C), G) \to H^q(C; G) \xrightarrow{h} \mathrm{Hom}(H_q(C), G) \to 0,$$

и эта последовательность расщепляется.

Доказательство. Прежде всего рассмотрим случай, когда C — свободный цепной комплекс. Тогда имеет место короткая точная последовательность цепных комплексов

$$0 \to Z \to C \to B \to 0,$$

где $Z_q = Z_q(C)$ и $B_q = B_{q-1}(C)$. Эта последовательность расщепляется, поскольку B — свободный комплекс. По теореме 5.4.8 существует точная последовательность когомологий

$$\ldots \to H^{q-1}(Z; G) \xrightarrow{\delta^*} H^q(B; G) \to H^q(C; G) \to$$
$$\to H^q(Z; G) \xrightarrow{\delta^*} H^{q+1}(B; G) \to \ldots.$$

Поскольку комплексы Z и B обладают тривиальными граничными операторами, $H^q(Z; G) = \mathrm{Hom}(Z_q(C); G)$ и $H^q(B; G) = \mathrm{Hom}(B_{q-1}(C), G)$. Более того, гомоморфизм

$$\delta^*\colon H^q(Z; G) \to H^{q+1}(B; G)$$

совпадает с гомоморфизмом

$$\mathrm{Hom}(\gamma_q, 1)\colon \mathrm{Hom}(Z_q(C), G) \to \mathrm{Hom}(B_q(C), G),$$

где $\gamma_q\colon B_q(C) \subset Z_q(C)$. Следовательно, имеет место функториальная короткая точная последовательность

$$0 \to \mathrm{coker}[\mathrm{Hom}(\gamma_{q-1}, 1)] \to H^q(C; G) \to \ker[\mathrm{Hom}(\gamma_q, 1)] \to 0.$$

Для вычисления входящих сюда модулей рассмотрим короткую точную последовательность

$$0 \to B_q(C) \xrightarrow{\gamma_q} Z_q(C) \to H_q(C) \to 0,$$

которая является копредставлением модуля $H_q(C)$. Согласно характеристическому свойству функтора Ext, имеет место точная последовательность

$$0 \to \mathrm{Hom}(H_q(C), G) \to \mathrm{Hom}(Z_q(C), G) \xrightarrow{\mathrm{Hom}(\gamma_q, 1)}$$
$$\to \mathrm{Hom}(B_q(C), G) \to \mathrm{Ext}(H_q(C), G) \to 0.$$

Следовательно,

$$\ker [\operatorname{Hom}(\gamma_q, 1)] \approx \operatorname{Hom}(H_q(C), G)$$

и

$$\operatorname{coker} [\operatorname{Hom}(\gamma_q, 1)] \approx \operatorname{Ext}(H_q(C), G).$$

Заменяя соответствующие члены в короткой точной последовательности, содержащей $H^q(C; G)$, получаем искомую короткую точную последовательность

$$0 \to \operatorname{Ext}(H_{q-1}(C), G) \to H^q(C; G) \to \operatorname{Hom}(H_q(C), G) \to 0,$$

где, как легко проверить, гомоморфизм $H^q(C; G) \to \operatorname{Hom}(H_q(C), G)$ совпадает с h. Эта последовательность функториальна и расщепляется (поскольку расщепляется последовательность цепных комплексов $0 \to Z \to C \to B \to 0$).

Для произвольного комплекса C, такого, что комплекс $\operatorname{Ext}(C, G)$ ацикличен, доказательство получается использованием свободной аппроксимации комплекса C (как и при доказательстве теоремы 5.2.14) и сведе́нием к случаю свободного комплекса. ■

Из теоремы 3 следует, что если X — линейно связное топологическое пространство, то $H^0(X; R)$ — циклический R-модуль, порожденный единицей 1 (или, другими словами, аугментация η: $R \to H^0(X; R)$ является изоморфизмом). Из теорем 3 и 5.4.10 следует, что для произвольного пространства X модуль $H^0(X; G)$ изоморфен прямому произведению стольких экземпляров модуля G, сколько компонент линейной связности насчитывает пространство X.

4. Следствие. *Если (X, A) — такая пара топологических пространств, что все модули $H_q(X, A; R)$ конечно порождены (при всех q), то свободные подмодули модулей $H^q(X, A; R)$ и $H_q(X, A; R)$ изоморфны и подмодули кручения модулей $H^q(X, A; R)$ и $H_{q-1}(X, A; R)$ изоморфны.*

Доказательство. Пусть $H_q(X, A; R) = F_q \oplus T_q$, где F_q — свободный модуль, а T_q — подмодуль кручения модуля H_q. Тогда

$$\operatorname{Hom}(H_q(X, A; R), R) \approx \operatorname{Hom}(F_q, R) \oplus \operatorname{Hom}(T_q, R) \approx F_q,$$

и в силу примера 2

$$\operatorname{Ext}(H_q(X, A; R), R) \approx \operatorname{Ext}(F_q, R) \oplus \operatorname{Ext}(T_q, R) \approx T_q.$$

Наше утверждение следует теперь из теоремы 3. ■

Для многих целей удобнее было бы иметь формулу, выражающую модуль $H^*(C; G)$ через $H^*(C; R)$. Такая формула существует в том случае, когда один из модулей C или G конечно порожден. Начнем с установления некоторых свойств конечно порожденных модулей.

Пусть $\mu\colon \operatorname{Hom}(A, G) \otimes G' \to \operatorname{Hom}(A, G \otimes G')$ — функториальный гомоморфизм, определяемый равенством $\mu(f \otimes g')(a) = f(a) \otimes g'$, где $f \in \operatorname{Hom}(A, G)$, $g' \in G'$ и $a \in A$.

5. Лемма. *Если A — свободный модуль, а модуль G' конечно порожден, то для любого модуля G отображение μ является изоморфизмом.*

Доказательство. Результат, очевидно, справедлив, если $G' = R$. Поскольку тензорное произведение и Hom оба коммутируют с конечными прямыми суммами, утверждение верно, если G' — конечно порожденный свободный модуль. Так как мы предположили, что G' конечно порожден, то имеет место короткая точная последовательность

$$0 \to \bar{\bar{G}} \to \bar{G} \to G' \to 0,$$

где $\bar{G}$ (а следовательно, и $\bar{\bar{G}}$) — конечно порожденный свободный модуль. Имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccccccc}
\operatorname{Hom}(A, G) \otimes \bar{\bar{G}} & \to & \operatorname{Hom}(A, G) \otimes \bar{G} & \to & \operatorname{Hom}(A, G) \otimes G' & \to & 0 \\
\downarrow{\scriptstyle\bar{\bar{\mu}}} & & \downarrow{\scriptstyle\bar{\mu}} & & \downarrow{\scriptstyle\mu} & & \\
\operatorname{Hom}(A, G \otimes \bar{\bar{G}}) & \to & \operatorname{Hom}(A, G \otimes \bar{G}) & \to & \operatorname{Hom}(A, G \otimes G') & \to & 0
\end{array}$$

с точными строками (точность верхней строки вытекает из следствия 5.1.6, а нижней — из того, что A — свободный модуль). Поскольку $\bar{\bar{\mu}}$ и $\bar{\mu}$ — изоморфизмы, из леммы о пяти гомоморфизмах вытекает, что μ — тоже изоморфизм. ■

Определим функториальный гомоморфизм

$$\mu\colon \operatorname{Hom}(A, G) \otimes \operatorname{Hom}(B, G') \to \operatorname{Hom}(A \otimes B, G \otimes G'),$$

полагая $\mu(f \otimes f')(a \otimes b) = f(a) \otimes f'(b)$, где $f \in \operatorname{Hom}(A, G)$, $f' \in \operatorname{Hom}(B, G')$, $a \in A$ и $b \in B$. В случае когда $B = R$, имеет место изоморфизм $\operatorname{Hom}(B, G') \approx G'$ и μ соответствует гомоморфизму леммы 5.

6. Лемма. *Если B — конечно порожденный свободный модуль, то для произвольных модулей A и G гомоморфизм μ является изоморфизмом*

$$\mu\colon \operatorname{Hom}(A, G) \otimes \operatorname{Hom}(B, R) \approx \operatorname{Hom}(A \otimes B, G).$$

Доказательство. Результат, очевидно, верен для $B = R$; а седовательно, и для конечного числа слагаемых вида R, поскольку обе части равенства коммутируют с конечными прямыми суммами. ■

7. Следствие. *Если A и B — свободные модули и либо A и B, либо B и G' конечно порождены, то μ — изоморфизм*

$$\mu\colon \operatorname{Hom}(A, G) \otimes \operatorname{Hom}(B, G') \approx \operatorname{Hom}(A \otimes B, G \otimes G').$$

Доказательство. Поскольку A и B — свободные модули, этим свойством обладает и их тензорное произведение $A \otimes B$. Если A и B конечно порождены, то и модуль $A \otimes B$ конечно порожден и имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd}
{[\operatorname{Hom}(R, G) \otimes \operatorname{Hom}(A, R)] \otimes [\operatorname{Hom}(R, G') \otimes \operatorname{Hom}(B, R)]} \arrow[r, "\bar\mu"] \arrow[d, "\mu \otimes \mu"'] & \operatorname{Hom}(R, G \otimes G') \otimes \operatorname{Hom}(A \otimes B, R) \arrow[d, "\mu"] \\
\operatorname{Hom}(A, G) \otimes \operatorname{Hom}(B, G') \arrow[r, "\mu"] & \operatorname{Hom}(A \otimes B, G \otimes G')
\end{tikzcd}$$

в которой $\bar\mu((f_1 \otimes f_2) \otimes (f_3 \otimes f_4)) = \mu(f_1 \otimes f_3) \otimes \mu(f_2 \otimes f_4)$. Согласно лемме 6, гомоморфизм $\bar\mu$ является изоморфизмом, так же как и оба вертикальных гомоморфизма. Следовательно, нижнее отображение — тоже изоморфизм. В случае когда B и G' конечно порождены, имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Hom}(A, G) \otimes \operatorname{Hom}(B, R) \otimes G' \arrow[r, "1 \otimes \mu"] \arrow[d, "\mu \otimes 1"'] & \operatorname{Hom}(A, G) \otimes \operatorname{Hom}(B, G') \arrow[d, "\mu"] \\
\operatorname{Hom}(A \otimes B, G) \otimes G' \arrow[r, "\mu"] & \operatorname{Hom}(A \otimes B, G \otimes G')
\end{tikzcd}$$

По лемме 5 оба горизонтальных отображения являются изоморфизмами, а по лемме 6 левое вертикальное отображение — тоже изоморфизм. Следовательно, и правое вертикальное отображение — изоморфизм. ■

Из леммы 5 вытекает, что если A — свободный конечно порожденный модуль, то μ — изоморфизм

$$\mu\colon \operatorname{Hom}(A, R) \otimes A \approx \operatorname{Hom}(A, A).$$

Следующая лемма является неполным обратным утверждением:

8. Лемма. *Пусть модуль A таков, что гомоморфизм*

$$\mu\colon \operatorname{Hom}(A, R) \otimes A \to \operatorname{Hom}(A, A)$$

является эпиморфизмом. Тогда A конечно порожден.

Доказательство. По предположению существуют такие элементы

$$f_i \in \operatorname{Hom}(A, R) \quad \text{и} \quad a_i \in A \quad (1 \leqslant i \leqslant n), \quad \text{что} \quad \mu\left(\sum f_i \otimes a_i\right) = 1_A.$$

Тогда для любого элемента $a \in A$ имеет место равенство

$$a = \mu\left(\sum f_i \otimes a_i\right)(a) = \sum f_i(a)\, a_i,$$

откуда видно, что модуль A порождается набором элементов $\{a_i\}$. ■

Градуированный модуль $\{C_q\}$ называется модулем *конечного типа*, если C_q конечно порожден для каждого q. Таким образом, модуль C конечного типа тогда и только тогда является конечно порожденным (как градуированный модуль), когда для всех, за исключением конечного числа, индексов q выполняется равенство $C_q = 0$. Следующая лемма утверждает, что цепной комплекс, гомологии которого имеют конечный тип, можно аппроксимировать цепным комплексом конечного типа:

9. Лемма. *Пусть свободный цепной комплекс C таков, что $H(C)$ — модуль конечного типа. Тогда существует свободный цепной комплекс C' конечного типа, цепно эквивалентный комплексу C.*

Доказательство. Для каждого q через F_q обозначим конечно порожденный подмодуль комплекса $Z_q(C)$, отображающийся на $H_q(C)$ при эпиморфизме $Z_q(C) \to H_q(C)$. Пусть F'_q — ядро эпиморфизма $F_q \to H_q(C)$. Определим цепной комплекс $C' = \{C'_q, \partial'_q\}$, полагая $C'_q = F_q \oplus F'_{q-1}$ и $\partial'_q(c, c') = (c', 0)$, где $c \in F_q$, $c' \in F'_{q-1}$. Тогда C' — свободный цепной комплекс конечного типа и $H_q(C') = F_q/F'_q \approx H_q(C)$. Определим цепную эквивалентность $\tau\colon C' \to C$. Для каждого q гомоморфизм $\varphi_q\colon F'_q \to C_{q+1}$ выберем так, чтобы $\partial_{q+1}\varphi_q(c') = c'$, $c' \in F'_q$. Определим далее отображение τ, полагая $\tau(c, c') = c + \varphi_{q-1}(c')$, $c \in F_q$ и $c' \in F'_{q-1}$. Тогда τ является цепным отображением и индуцирует изоморфизм $\tau_*\colon H(C') \approx H(C)$. Поскольку оба комплекса C' и C свободны, из теоремы 4.6.10 следует, что τ — цепная эквивалентность. ■

Теперь мы готовы к доказательству теоремы об универсальных коэффициентах.

10. Теорема. *Пусть C — свободный цепной комплекс, а G — некоторый модуль, причем либо $H(C)$ — модуль конечного типа, либо модуль G конечно порожден. Тогда имеет место функториальная короткая точная последовательность*

$$0 \to H^q(C; R) \otimes G \xrightarrow{\mu} H^q(C; G) \to H^{q+1}(C; R) * G \to 0,$$

и эта последовательность расщепляется.

Доказательство. Если модуль G конечно порожден, то из леммы 5 следует, что

$$\mu\colon \operatorname{Hom}(C, R) \otimes G \approx \operatorname{Hom}(C, G).$$

Поскольку модуль $\operatorname{Hom}(C, R)$ не имеет кручения, $\operatorname{Hom}(C, R) * G = 0$, и наше утверждение вытекает из теоремы 5.4.1.

Когда же $H(C)$ — модуль конечного типа, можно использовать лемму 9 для замены C свободным цепным комплексом C' конечного типа. Согласно следствию 7, $\mu\colon \operatorname{Hom}(C', R) \otimes G \approx \operatorname{Hom}(C', G)$, и наше утверждение снова получается для C' (а следовательно, и для C) с помощью теоремы 5.4.1. ■

Аналогичным путем можно получить следующую *формулу Кюннета для когомологий*:

11. Теорема. *Пусть C и C' — свободные цепные комплексы, а G и G' — такие модули над областью главных идеалов, что $G * G' = 0$, и либо $H(C)$ и $H(C')$ имеют конечный тип, либо $H(C')$ имеет конечный тип, а G' конечно порожден. Тогда имеет место функториальная короткая точная последовательность*

$$0 \to [H^*(C; G) \otimes H^*(C'; G')]^q \to H^q(C \otimes C'; G \otimes G') \to$$
$$\to [H^*(C; G) * H^*(C'; G')]^{q+1} \to 0,$$

и эта последовательность расщепляется.

Доказательство. В случае когда $H(C)$ и $H(C')$ — модули конечного типа, на основании леммы 9 можно заменить комплексы C и C' свободными цепными комплексами конечного типа. Следовательно, доказательство сводится к случаю, когда C и C' — комплексы конечного типа, или соответственно к случаю, когда C' — комплекс конечного типа, а G' — конечно порожденный модуль. Согласно следствию 7, $\mu\colon \operatorname{Hom}(C, G) \otimes \operatorname{Hom}(C', G') \approx \approx \operatorname{Hom}(C \otimes C', G \otimes G')$. Требуемый результат будет следовать теперь из теоремы 5.4.2, как только мы проверим, что комплекс $\operatorname{Hom}(C, G) * \operatorname{Hom}(C', G')$ ацикличен.

Покажем, что $\operatorname{Hom}(C, G) * \operatorname{Hom}(C', G') = 0$. В случае когда оба комплекса C и C' имеют конечный тип, модуль $\operatorname{Hom}(C_p, G)$ изоморфен прямой сумме конечного числа экземпляров G, а модуль $\operatorname{Hom}(C'_q, G')$ изоморфен прямой сумме конечного числа экземпляров G'. Так как по предположению $G * G' = 0$, то $\operatorname{Hom}(C_p, G) * * \operatorname{Hom}(C'_q, G') = 0$ и, таким образом, $\operatorname{Hom}(C, G) * \operatorname{Hom}(C', G') = 0$ в этом случае.

В случае когда комплекс C' имеет конечный тип, модуль $\operatorname{Hom}(C'_q, G')$ изоморфен прямой сумме конечного числа экземпляров G'. Следовательно, достаточно показать, что $\operatorname{Hom}(C, G) * G' = 0$, если модуль G' конечно порожден. Пусть точная последовательность

$$0 \to \bar{\bar{G}} \to \bar{G} \to G' \to 0$$

является свободной резольвентой модуля G', причем модуль $\bar{G}$ конечно порожден. Так как $G * G' = 0$, имеет место короткая точная последовательность

$$0 \to G \otimes \bar{\bar{G}} \to G \otimes \bar{G} \to G \otimes G' \to 0$$

и короткая точная последовательность коцепных комплексов (поскольку C — свободный комплекс)

$$0 \to \mathrm{Hom}(C,\ G \otimes \bar{\bar{G}}) \to \mathrm{Hom}(C,\ G \otimes \bar{G}) \to \mathrm{Hom}(C,\ G \otimes G') \to 0.$$

Используя лемму 5, мы приходим к точной последовательности

$$0 \to \mathrm{Hom}(C,\ G) \otimes \bar{\bar{G}} \to \mathrm{Hom}(C,\ G) \otimes \bar{G} \to \mathrm{Hom}(C,\ G) \otimes G' \to 0.$$

Следовательно, $\mathrm{Hom}(C,\ G) * G' = 0$, и, значит, $\mathrm{Hom}(C,\ G) * {} * \mathrm{Hom}(C',\ G') = 0$ в любом случае. ■

Если A — свободный конечно порожденный модуль, то

$$A \approx \mathrm{Hom}(\mathrm{Hom}(A,\ R),\ R).$$

Так как $\mathrm{Hom}(A,\ R)$ — тоже свободный и конечно порожденный модуль, то из следствия 7 вытекает, что

$$A \otimes G \approx \mathrm{Hom}(\mathrm{Hom}(A,\ R),\ R) \otimes \mathrm{Hom}(R,\ G) \approx \mathrm{Hom}(\mathrm{Hom}(A,\ R),\ G).$$

Мы используем этот изоморфизм для выражения гомологий через когомологии.

12. Теорема. *Пусть C — свободный цепной комплекс, такой, что $H(C)$ — модуль конечного типа. Тогда для любого модуля G имеет место функториальная короткая точная последовательность*

$$0 \to \mathrm{Ext}\left(H^{q+1}(C;\ R),\ G\right) \to H_q(C;\ G) \xrightarrow{h} \mathrm{Hom}\left(H^q(C;\ R),\ G\right) \to 0,$$

и эта последовательность расщепляется.

Доказательство. Используя лемму 9, можно свести задачу к случаю, когда C — комплекс конечного типа. Тогда $C \otimes G \approx {} \approx \mathrm{Hom}(\mathrm{Hom}(C,\ R),\ G)$, и требуемый результат получается согласно теореме 3, так как коцепной комплекс $\mathrm{Hom}(C,\ R)$ формально можно превратить в цепной, изменяя знак градуировки. ■

Следующий результат представляет собой вариант леммы 8, справедливый для гомологий и являющийся частичным обращением теоремы 10:

13. Теорема. *Пусть цепной комплекс C таков, что для каждого модуля G отображение* μ: $\mathrm{Hom}(C,\ R) \otimes G \to \mathrm{Hom}(C,\ G)$ *индуци-*

рует изоморфизм всех модулей когомологий. Тогда модуль $H_*(C)$ имеет конечный тип.

Доказательство. Из теоремы 3 с учетом изоморфизма μ: $H^q(\mathrm{Hom}(C, R) \otimes H_q(C)) \approx H^q(\mathrm{Hom}(C, H_q(C)))$ вытекает существование таких элементов $f_i \in \mathrm{Hom}(C_q, R)$ и $z_i \in H_q(C)$, что $h\mu\{\sum f_i \otimes z_i\} = 1_{H_q(C)}$. Значит, для каждого $z \in H_q(C)$ имеет место равенство

$$z = \langle \mu\{\sum f_i \otimes z_i\}, z\rangle = \sum \langle f_i, z\rangle z_i,$$

показывающее, что модуль $H_q(C)$ порождается элементами z_i. ■

Заметим, что если имеет место короткая точная последовательность теоремы 10 для данного комплекса C и всех модулей G, то выполняются условия теоремы 13, и, значит, $H(C)$ — модуль конечного типа.

§ 6. $\smile$- и $\frown$-произведения

Можно определить прямое произведение классов когомологий при помощи соответствующего отображения тензорного произведения когомологий двух пространств в когомологии произведения этих пространств. Вместе с диагональным отображением пространства в свой собственный квадрат это произведение порождает произведение в модуле когомологий пространства. Эта дополнительная мультипликативная структура превращает модуль когомологий в алгебру. В этом параграфе будет определено это произведение и будут установлены его простейшие свойства.

В случае когда пара $\{X \times B, A \times Y\}$ удовлетворяет аксиоме вырезания в пространстве $X \times Y$, можно определить *когомологическое прямое произведение*

$$\mu'\colon H^p(X, A; G) \otimes H^q(Y, B; G') \to H^{p+q}((X, A) \times (Y, B); G \otimes G'),$$

индуцированное функториальным гомоморфизмом

$$\begin{array}{c} \mathrm{Hom}(\Delta(X)/\Delta(A), G) \otimes \mathrm{Hom}(\Delta(Y)/\Delta(B), G') \\ \downarrow{\scriptstyle\mu} \\ \mathrm{Hom}([\Delta(X)/\Delta(A)] \otimes [\Delta(Y)/\Delta(B)], G \otimes G') \end{array}$$

и коцепной эквивалентностью Эйленберга — Зильбера нижнего модуля с модулем $\mathrm{Hom}(\Delta(X \times Y)/\Delta(X \times B \cup A \times Y), G \otimes G')$. Если $u \in H^p(X, A; G)$ и $v \in H^q(Y, B; G')$, то по определению

$$u \times v = \mu'(u \otimes v) \in H^{p+q}((X, A) \times (Y, B); G \otimes G').$$

Из теоремы 5.5.11 получаем следующую *формулу Кюннета для сингулярных когомологий*:

1. Теорема. *Пусть пара* $\{X \times B,\ A \times Y\}$ *удовлетворяет аксиоме вырезания в пространстве* $X \times Y$, *и пусть* G *и* G' — *такие модули, что* $G * G' = 0$. *Если либо модули* $H_*(X, A; R)$ *и* $H_*(Y, B; R)$ *имеют конечный тип, либо модуль* $H_*(Y, B; R)$ *имеет конечный тип, а модуль* G' *конечно порожден, то имеет место функториальная короткая точная последовательность*

$$0 \to [H^*(X, A; G) \otimes H^*(Y, B; G')]^q \xrightarrow{\mu'} H^q((X, A) \times (Y, B); G \otimes G') \to$$
$$\to [H^*(X, A; G) * H^*(Y, B; G')]^{q+1} \to 0,$$

и эта последовательность расщепляется. ■

Когомологическое прямое произведение удовлетворяет следующим аналогам предложений 5.3.11—5.3.15:

2. *Пусть* $f\colon (X, A) \to (X', A')$ *и* $g\colon (Y, B) \to (Y', B')$ — *некоторые отображения, и пусть* $u' \in H^p(X', A'; G)$ *и* $v' \in H^q(Y', B'; G')$. *Тогда в модуле* $H^{p+q}\big((X, A) \times (Y, B);\ G \otimes G'\big)$ *имеет место равенство*

$$(f \times g)^*(u' \times v') = f^*u' \times g^*v'. \ ■$$

3. *Пусть* $p\colon (X, A) \times Y \to (X, A)$ — *проекция на первый сомножитель, и пусть* $\eta\colon G' \to H^*(Y; G')$ — *аугментация. Для элемента* $u \in H^q(X, A; G)$ *в модуле* $H^q((X, A) \times Y;\ G \otimes G')$ *имеет место равенство*

$$p^*(\mu(u \otimes g')) = u \times \eta(g'). \ ■$$

4. *Если* $u \in H^p(X, A; G)$, $v \in H^q(Y, B; G')$ *и* $w \in H^r(Z, C; G'')$, *то в модуле* $H^{p+q+r}\big((X, A) \times (Y, B) \times (Z, C);\ G \otimes G' \otimes G''\big)$ *имеет место равенство*

$$u \times (v \times w) = (u \times v) \times w. \ ■$$

5. *Пусть* $T\colon (X, A) \times (Y, B) \to (Y, B) \times (X, A)$ *и* $\varphi\colon G \otimes G' \to G' \otimes G$ — *перестановки сомножителей. Для* $u \in H^p(X, A; G)$ *и* $v \in H^q(Y, B; G')$ *в модуле* $H^{p+q}((X, A) \times (Y, B);\ G' \otimes G)$ *имеет место равенство*

$$T^*(v \times u) = (-1)^{pq}\varphi_*(u \times v). \ ■$$

6. *Пусть пара пар* $\{(X_1, A_1), (X_2, A_2)\}$ *удовлетворяет аксиоме вырезания в пространстве* X, *и пусть* $u \in H^p(X_1 \cap X_2,\ A_1 \cap A_2; G)$ *и* $v \in H^q(Y, B; G')$. *Для связывающего гомоморфизма соответствующей последовательности Майера — Виеториса имеют место равенство*

$$\delta^*(u \times v) = \delta^* u \times v$$

в модуле $H^{p+q+1}\big((X_1 \cup X_2,\ A_1 \cup A_2) \times (Y, B);\ G \otimes G'\big)$ *и равенство*

$$\delta^*(v \times u) = (-1)^q\, v \times \delta^* u$$

в модуле $H^{p+q+1}\big((Y, B) \times (X_1 \cup X_2,\ A_1 \cup A_2);\ G' \otimes G\big)$. ■

Рассмотрим функторы $\Delta(X)$ и $\Delta(X)\otimes\Delta(X)$ на категории топологических пространств. Поскольку функтор $\Delta(X)$ свободен относительно моделей $\{\Delta^q\}_{q\geqslant 0}$, а функтор $\Delta(X)\otimes\Delta(X)$ ацикличен относительно моделей $\{\Delta^q\}_{q\geqslant 0}$ (т. е. приведенный комплекс, отвечающий комплексу $\Delta(\Delta^q)\otimes\Delta(\Delta^q)$, ацикличен для всех q), из теоремы 4.3.3 об ацикличных моделях следует, что существуют функториальные цепные отображения τ_*: $\Delta(X)\to\Delta(X)\otimes\Delta(X)$, сохраняющие аугментацию, и любые два таких отображения цепно гомотопны. Такое функториальное цепное отображение называется *диагональной аппроксимацией*. Это название возникло из-за того, что если τ'_X: $\Delta(X\times X)\to\Delta(X)\otimes\Delta(X)$ — некоторая функториальная цепная эквивалентность, существование которой обеспечивается теоремой Эйленберга — Зильбера, и d: $X\to X\times X$ — диагональное отображение, то композиция

$$\Delta(X)\xrightarrow{\Delta(d)}\Delta(X\times X)\xrightarrow{\tau'_X}\Delta(X)\otimes\Delta(X)$$

является диагональной аппроксимацией.

Мы построим конкретную диагональную аппроксимацию, называемую *диагональной аппроксимацией Александера — Уитни*. Пусть σ: $\Delta^q\to X$ — некоторый сингулярный q-мерный симплекс. Его *передняя i-мерная грань* ${}_i\sigma$ определяется при $0\leqslant i\leqslant q$ как композиция $\sigma\circ\lambda$, где λ: $\Delta^i\to\Delta^q$ — симплициальное отображение, действующее по формуле $\lambda(p_j)=p_j$, $0\leqslant j\leqslant i$. Аналогично *задней i-мерной гранью* σ_i, $0\leqslant i\leqslant q$, называется композиция $\sigma\circ\lambda'$, где λ': $\Delta^i\to\Delta^q$ — симплициальное отображение, определяемое равенством $\lambda'(p_j)=$ $=p_{j+q-i}$ для $0\leqslant j\leqslant i$. Легко проверить, что формула

$$\tau(\sigma)=\sum_{i+j=\deg\sigma}{}_i\sigma\otimes\sigma_j$$

определяет функториальное цепное отображение τ: $\Delta(X)\to\Delta(X)\otimes$ $\otimes\Delta(X)$; это цепное отображение называется диагональной аппроксимацией Александера — Уитни.

Пусть G и G' — некоторые R-модули. *Спариванием* модулей G и G' в R-модуль G'' называется гомоморфизм φ: $G\otimes G'\to G''$. Например, всегда существует спаривание модулей G и G' в $G\otimes G'$. Если заданы такое спаривание и некоторая диагональная аппроксимация τ, то функториальное коцепное отображение

$$\bar\tau_X\colon \operatorname{Hom}(\Delta(X),\ G)\otimes\operatorname{Hom}(\Delta(X),\ G')\to\operatorname{Hom}(\Delta(X),\ G'')$$

можно определить как композицию

$$\operatorname{Hom}(\Delta(X),\ G)\otimes\operatorname{Hom}(\Delta(X),\ G')\xrightarrow{\mu}$$
$$\to\operatorname{Hom}(\Delta(X)\otimes\Delta(X),\ G\otimes G')\xrightarrow{\operatorname{Hom}(\tau_X,\ \varphi)}\operatorname{Hom}(\Delta(X),\ G'').$$

Если $A \subset X$, то для элементов $f \in \mathrm{Hom}(\Delta(X), G)$ и $f' \in \mathrm{Hom}(\Delta(X), G')$ имеет место равенство

$$\bar{\tau}_X(f \otimes f') \mid \Delta(A) = \bar{\tau}_A(f \mid \Delta(A) \otimes f' \mid \Delta(A)).$$

Если $A_1, A_2 \subset X$ и f обращается в нуль на A_1, а f' обращается в нуль на A_2, то $\bar{\tau}_X(f \otimes f')$ обращается в нуль на $\Delta(A_1) + \Delta(A_2)$. В случае когда пара $\{A_1, A_2\}$ удовлетворяет аксиоме вырезания в X, из сказанного следует, что $\bar{\tau}_X$ индуцирует гомоморфизм

$$H^p(X, A_1; G) \otimes H^q(X, A_2; G') \to H^{p+q}(X, A_1 \cup A_2; G''),$$

который называется *произведением Колмогорова — Александера* или *$\smile$-произведением*. Если $u \in H^p(X, A_1; G)$ и $v \in H^q(X, A_2; G')$, то $\smile$-произведение этих элементов обозначается

$$u \smile v \in H^{p+q}(X, A_1 \cup A_2; G'').$$

Это произведение является билинейной функцией аргументов u и v и зависит лишь от спаривания φ, но не зависит от частного выбора диагональной аппроксимации. Диагональная аппроксимация Александера — Уитни определяет некоторое конкретное отображение $\bar{\tau}$, с помощью которого можно вычислять $\smile$-произведение коцепей $f \smile f'$,

$$f \in \mathrm{Hom}(\Delta_p(X), G) \quad \text{и} \quad f' \in \mathrm{Hom}(\Delta_q(X), G'),$$

по формуле

$$(f \smile f')(\sigma) = \varphi(f({}_p\sigma) \otimes f'(\sigma_q)).$$

В модуле $H^{p+q}(X, A_1 \cup A_2; G'')$ тогда имеет место равенство $\{f\} \smile \{f'\} = \{f \smile f'\}$.

Как было замечено выше, существуют диагональные аппроксимации, являющиеся композицией некоторого отображения с отображением $\Delta(d)$. Отсюда вытекает следующее соотношение, выражающее $\smile$-произведение в терминах когомологического прямого произведения:

7. Теорема. *Если пара $\{X \times A_2, A_1 \times X\}$ удовлетворяет аксиоме вырезания в пространстве $X \times X$ и φ: $G \otimes G' \to G''$ — некоторое спаривание, то для элементов $u \in H^p(X, A_1; G)$ и $v \in H^q(X, A_2; G')$ в модуле $H^{p+q}(X, A_1 \cup A_2; G'')$ имеет место равенство*

$$u \smile v = \varphi_*(d^*(u \times v)). \ \blacksquare$$

Произведение Колмогорова — Александера обладает следующими свойствами, аналогичными соответствующим свойствам когомологического прямого произведения:

8. *Пусть отображение f: $X \to Y$ переводит A_1 в B_1, A_2 в B_2, и пусть $u \in H^p(Y, B_1; G)$ и $v \in H^q(Y, B_2; G')$. Пусть отображения*

$f_1\colon (X, A_1) \to (Y, B_1)$, $f_2\colon (X, A_2) \to (Y, B_2)$ *и* $\bar{f}\colon (X, A_1 \cup A_2) \to (Y, B_1 \cup B_2)$ *определяются отображением* f. *Тогда в модуле* $H^{p+q}(X, A_1 \cup A_2;\ G'')$ *имеет место равенство*

$$\bar{f}^*(u \smile v) = f_1^* u \smile f_2^* v. \ \blacksquare$$

9. *Для любого элемента* $u \in H^q(X, A;\ G)$ *и для спаривания* $R \otimes G \approx G \approx G \otimes R$ *имеем*

$$1 \smile u = u = u \smile 1. \ \blacksquare$$

10. *Если заданы коммутативная диаграмма (где* φ, φ', ψ *и* ψ' *— спаривания)*

$$\begin{array}{ccc} G_1 \otimes (G_2 \otimes G_3) \approx (G_1 \otimes G_2) \otimes G_3 & \xrightarrow{\varphi \otimes 1} & G_{12} \otimes G_3 \\ {\scriptstyle 1 \otimes \varphi'} \downarrow & & \downarrow {\scriptstyle \psi} \\ G_1 \otimes G_{23} & \xrightarrow{\psi'} & G_{123} \end{array}$$

и элементы $u_1 \in H^p(X, A_1;\ G_1)$, $u_2 \in H^q(X, A_2;\ G_2)$ *и* $u_3 \in H^r(X, A_3;\ G_3)$, *то в модуле* $H^{p+q+r}(X, A_1 \cup A_2 \cup A_3;\ G_{123})$ *имеет место равенство*

$$u_1 \smile (u_2 \smile u_3) = (u_1 \smile u_2) \smile u_3. \ \blacksquare$$

11. *Для коммутативной диаграммы спариваний*

$$\begin{array}{ccc} G \otimes G' & \approx & G' \otimes G \\ & \searrow \quad \swarrow & \\ & G'' & \end{array}$$

и заданных элементов $u \in H^p(X, A_1;\ G)$ *и* $v \in H^q(X, A_2;\ G')$ *в модуле* $H^{p+q}(X, A_1 \cup A_2;\ G'')$ *имеет место равенство*

$$u \smile v = (-1)^{pq}\, v \smile u. \ \blacksquare$$

12. *Пусть пара пар* $\{(X_1, A_1), (X_2, A_2)\}$ *удовлетворяет аксиоме вырезания в пространстве* X, *и пусть* $A \subset X_1 \cup X_2$ *и* $i\colon (X_1 \cap X_2, A \cap X_1 \cap X_2) \subset (X_1 \cup X_2, A)$. *Тогда для элементов* $u \in H^p(X_1 \cap X_2, A_1 \cap A_2;\ G)$, $v \in H^q(X_1 \cup X_2, A;\ G')$ *и связывающих гомоморфизмов соответствующих последовательностей Майера — Виеториса в модуле* $H^{p+q+1}(X_1 \cup X_2, A_1 \cup A_2 \cup A;\ G'')$ *имеют место равенства*

$$\delta^*(u \smile i^* v) = \delta^* u \smile v,$$
$$\delta^*(i^* v \smile u) = (-1)^q\, v \smile \delta^* u. \ \blacksquare$$

Пусть $\tau'\colon \Delta(X \times Y) \to \Delta(X) \otimes \Delta(Y)$ — функториальная цепная эквивалентность, существование которой устанавливается теоремой Эйленберга — Зильбера, и пусть цепное отображение

$$T\colon [\Delta(X) \otimes \Delta(Y)] \otimes [\Delta(X) \otimes \Delta(Y)] \to [\Delta(X) \otimes \Delta(X)] \otimes [\Delta(Y) \otimes \Delta(Y)]$$

определено равенством

$$T((c\otimes d)\otimes(c'\otimes d'))=(-1)^{\deg d\,\deg c'}(c\otimes c')\otimes(d\otimes d').$$

Для всякой диагональной аппроксимации τ, как легко установить при помощи метода ацикличных моделей, диаграмма

$$\begin{tikzcd}
\Delta(X\times Y) \arrow[r, "\tau_{X\times Y}"] \arrow[d, "\tau'"'] & \Delta(X\times Y)\otimes\Delta(X\times Y) \arrow[d, "T\circ(\tau'\otimes\tau')"] \\
\Delta(X)\otimes\Delta(Y) \arrow[r, "\tau_X\otimes\tau_Y"] & {[\Delta(X)\otimes\Delta(X)]\otimes[\Delta(Y)\otimes\Delta(Y)]}
\end{tikzcd}$$

цепно гомотопически коммутативна. Отсюда получается следующее дополнительное соотношение между произведением Колмогорова — Александера и когомологическим прямым произведением:

13. Теорема. *Пусть* φ: $G_1\otimes G_2\to G$ *и* φ': $G_1'\otimes G_2'\to G'$ *— некоторые спаривания, и пусть модули* $G_1\otimes G_1'$ *и* $G_2\otimes G_2'$ *спарены в модуль* $G\otimes G'$ *посредством гомоморфизма*

$$(G_1\otimes G_1')\otimes(G_2\otimes G_2')\approx(G_1\otimes G_2)\otimes(G_1'\otimes G_2')\xrightarrow{\varphi\otimes\varphi'}G\otimes G'.$$

Если $u_1\in H^p(X, A_1; G_1)$, $u_2\in H^q(X, A_2; G_2)$, $v_1\in H^r(Y, B_1; G_1')$ *и* $v_2\in H^s(Y, B_2; G_2')$, *то при соответствующих предположениях о выполнении аксиомы вырезания в модуле*

$$H^{p+q+r+s}((X, A_1\cup A_2)\times(Y, B_1\cup B_2); G\otimes G')$$

имеет место равенство

$$(u_1\times v_1)\smile(u_2\times v_2)=(-1)^{qr}(u_1\smile u_2)\times(v_1\smile v_2). \blacksquare$$

Комбинируя теорему 13 с предложениями 3 и 9, получаем следующий результат, выражающий когомологическое прямое произведение в терминах $\smile$-произведения:

14. Следствие. *Пусть пара* $\{X\times B, A\times Y\}$ *удовлетворяет аксиоме вырезания в пространстве* $X\times Y$, *и пусть* p_1: $(X, A)\times Y\to(X, A)$ *и* p_2: $X\times(Y, B)\to(Y, B)$ *— проекции на соответствующие сомножители. Если* $u\in H^p(X, A; G)$ *и* $v\in H^q(Y, B; G')$, *то в модуле* $H^{p+q}((X, A)\times(Y, B); G\otimes G')$ *имеет место равенство*

$$u\times v=p_1^*(u)\smile p_2^*(v). \blacksquare$$

Используя этот последний результат, мы можем привести пример двух полиэдров, имеющих изоморфные модули гомологий и когомологий, но не изоморфные структуры $\smile$-произведений.

15. Пример. Пусть p и q — целые числа $\geqslant 1$, и пусть X — пространство, являющееся букетом сфер S^p, S^q и S^{p+q}. Если $i: S^p \subset X$, $j: S^q \subset X$ и $k: S^{p+q} \subset X$, то $i_* \tilde{H}(S^p) \oplus j_* \tilde{H}(S^q) \oplus k_* \tilde{H}(S^{p+q}) \approx \approx \tilde{H}(X)$. Вычисляя $H(S^p \times S^q)$ по формуле Кюннета, мы видим, что $H(X) \approx H(S^p \times S^q)$. Из формулы универсальных коэффициентов следует, что пространства X и $S^p \times S^q$ имеют изоморфные группы гомологий и когомологий для любой группы коэффициентов. Так как

$$k^*: H^{p+q}(X; \mathbf{Z}) \approx H^{p+q}(S^{p+q}; \mathbf{Z})$$

и k^* коммутирует с $\smile$-произведением, то отсюда следует, что $\smile$-произведение целочисленных классов когомологий пространства X степеней соответственно p и q равно нулю. Однако из следствия 14 вытекает, что существуют такие целочисленные классы когомологий пространства $S^p \times S^q$ степеней соответственно p и q, $\smile$-произведение которых не равно нулю. Следовательно, не существует изоморфизма между $H^*(X; \mathbf{Z})$ и $H^*(S^p \times S^q; \mathbf{Z})$, сохраняющего $\smile$-произведение. Значит, пространства X и $S^p \times S^q$ не гомеоморфны и даже не принадлежат одному гомотопическому типу.

Существует другое произведение, тесно связанное с $\smile$-произведением и являющееся спариванием гомологий и когомологий. Заметим, что если C и C' — цепные комплексы, а модули G и G' спарены в G'' посредством отображения φ, то функториальный гомоморфизм

$$h: \operatorname{Hom}(C', G) \otimes (C \otimes C' \otimes G') \to C \otimes G''$$

можно определить по формуле $h(f \otimes (c \otimes c' \otimes g')) = c \otimes \varphi(\langle f, c' \rangle \otimes g')$. Прямое вычисление показывает, что если $f \in \operatorname{Hom}(C'_q, G)$ и $\bar{c} \in (C \otimes C')_n \otimes G'$, то

$$\partial h(f \otimes \bar{c}) = (-1)^{n-q} h(\delta f \otimes \bar{c}) + h(f \otimes \partial \bar{c}).$$

Пусть X — некоторое пространство, а $\tau: \Delta(X) \to \Delta(X) \otimes \Delta(X)$ — диагональная аппроксимация. Определим функториальное отображение

$$\bar{\bar{\tau}}: \operatorname{Hom}(\Delta(X), G) \otimes (\Delta(X) \otimes G') \to \Delta(X) \otimes G'',$$

полагая $\bar{\bar{\tau}}(f \otimes c) = h(f \otimes \tau(c))$. Приведенная выше формула для граничного оператора показывает, что

$$\partial \bar{\bar{\tau}}(f \otimes c) = (-1)^{\deg c - \deg f} \bar{\bar{\tau}}(\delta f \otimes c) + \bar{\bar{\tau}}(f \otimes \partial c).$$

Заметим, что если A — такое подмножество пространства X, что элемент $f \in \operatorname{Hom}(\Delta(X), G)$ обращается в нуль на A, то для любого $c \in \Delta(A) \otimes G'$ имеет место равенство $\bar{\bar{\tau}}(f \otimes c) = 0$. Отсюда следует, что если $A_1, A_2 \subset X$, элемент $f \in \operatorname{Hom}(\Delta(X)/\Delta(A_1), G)$ является коциклом и цепь $c \in \Delta(X) \otimes G'$ такова, что $\partial c \in [\Delta(A_1)+\Delta(A_2)] \otimes G'$, то $\bar{\bar{\tau}}(f \otimes c)$ представляет собой цепь комплекса $\Delta(X) \otimes G''$, граница которой принадлежит $\Delta(A_2) \otimes G''$ (поскольку $\partial\bar{\bar{\tau}}(f \otimes c) = \bar{\bar{\tau}}(f \otimes \partial c)$). Более того, если f — кограница коцепи, обращающейся в нуль на $\Delta(A_1)$, или если цепь c равна границе по модулю $[\Delta(A_1) + \Delta(A_2)] \otimes G'$, то $\bar{\bar{\tau}}(f \otimes c)$ — граница по модулю $\Delta(A_2) \otimes G''$. Следовательно, $\bar{\bar{\tau}}$ определяет гомоморфизм (переводящий $\{f\} \otimes \{c\}$ в $\{\bar{\bar{\tau}}(f \otimes c)\}$)

$$H^q(X,\ A_1;\ G) \otimes H_n(\Delta(X)/[\Delta(A_1) + \Delta(A_2)];\ G') \to H_{n-q}(X,\ A_2;\ G'').$$

Если пара $\{A_1,\ A_2\}$ удовлетворяет аксиоме вырезания в пространстве X, получается гомоморфизм

$$H^q(X,\ A_1;\ G) \otimes H_n(X,\ A_1 \cup A_2;\ G') \to H_{n-q}(X,\ A_2;\ G''),$$

называемый *$\frown$-произведением*. Если $u \in H^q(X,\ A_1;\ G)$ и $z \in H_n(X,\ A_1 \cup A_2;\ G')$, то $\frown$-произведение этих элементов обозначается $u \frown z \in H_{n-q}(X,\ A_2;\ G'')$. Это произведение зависит от спаривания φ, но не зависит от частного выбора диагональной аппроксимации, использованной нами при определении $\bar{\bar{\tau}}$. Диагональная аппроксимация Александера — Уитни позволяет построить отображение $\bar{\bar{\tau}}$, определяющее $\frown$-произведение коцепей и цепей (обозначается $f \frown c$) по формуле

$$f \frown c = f \frown \Big(\sum_{\sigma} \sigma \otimes g'_{\sigma}\Big) = \sum_{\sigma} {}_{n-q}\sigma \otimes \varphi\big(\langle f,\ \sigma_q\rangle \otimes g'_{\sigma}\big),$$

где $f \in \operatorname{Hom}(\Delta_q(X),\ G)$ и $c = \sum_{\sigma} \sigma \otimes g'_{\sigma} \in \Delta(X) \otimes G'$. Тогда $\{f\} \frown \{c\} = \{f \frown c\}$.

Определенное так $\frown$-произведение обладает свойствами, аналогичными свойствам $\smile$-произведения.

16. *Пусть отображение $f\colon X \to Y$ переводит A_1 в B_1, A_2 в B_2, и пусть $u \in H^q(Y,\ B_1;\ G)$ и $z \in H_n(X,\ A_1 \cup A_2;\ G')$. Пусть отображения $\bar{f}\colon (X,\ A_1 \cup A_2) \to (Y,\ B_1 \cup B_2)$, $f_1\colon (X,\ A_1) \to (Y,\ B_1)$ и $f_2\colon (X,\ A_2) \to (Y,\ B_2)$ определяются отображением f. Тогда в модуле $H_{n-q}(Y,\ B_2;\ G'')$ имеет место равенство*

$$f_{2*}\big(f_1^* u \frown z\big) = u \frown \bar{f}_* z. \ \blacksquare$$

17. *Для любого элемента $z \in H_n(X,\ A;\ G)$ и спаривания $R \otimes G \approx G$ имеет место равенство*

$$1 \frown z = z. \ \blacksquare$$

18. *Если задана коммутативная диаграмма (в которой* φ, φ', ψ *и* ψ' *— спаривания)*

$$\begin{array}{ccc} G_1\otimes(G_2\otimes G_3)\approx(G_1\otimes G_2)\otimes G_3 & \xrightarrow{\varphi\otimes 1} & G_{12}\otimes G_3 \\ \Big\downarrow{\scriptstyle 1\otimes\varphi'} & & \Big\downarrow{\scriptstyle\psi} \\ G_1\otimes G_{23} & \xrightarrow{\psi'} & G_{123} \end{array}$$

и $u\in H^p(X, A_1; G_1)$, $v\in H^q(X, A_2; G_2)$ *и* $z\in H_n(X, A_1\cup A_2\cup A_3; G_3)$, *то в модуле* $H_{n-p-q}(X, A_3; G_{123})$ *имеет место равенство*

$$u\frown(v\frown z)=(u\smile v)\frown z. \ \blacksquare$$

19. *Пусть* $u\in H^q(X, A; G)$ *и* $z\in H_q(X, A; G')$, *и пусть* ε: $H_0(X; G\otimes G')\to G\otimes G'$ *— аугментация. Тогда в модуле* $G\otimes G'$ *имеет место равенство*

$$\varepsilon(u\frown z)=\langle u, z\rangle. \ \blacksquare$$

20. *Пусть пара пар* $\{(X_1, A_1), (X_2, A_2)\}$ *удовлетворяет аксиоме вырезания в пространстве* X, *и пусть* $A\subset X_1\cup X_2$ *и*

$$i\colon (X_1\cap X_2, A\cap X_1\cap X_2)\subset(X_1\cup X_2, A).$$

Если $u\in H^q(X_1\cup X_2, A; G)$ *и* $z\in H_n(X_1\cup X_2, A_1\cup A_2\cup A; G')$, *то для связывающих гомоморфизмов соответствующих последовательностей Майера — Виеториса в модуле* $H_{n-q-1}(X_1\cap X_2, A_1\cap A_2; G'')$ *имеет место равенство*

$$\partial_*(u\frown z)=i^*u\frown\partial_*z. \ \blacksquare$$

21. *Пусть* $u_1\in H^p(X, A_1; G_1)$, $u_2\in H^q(Y, B_1; G_2)$, $z_1\in H_m(X, A_1\cup A_2; G_1')$ *и* $z_2\in H_n(X, B_1\cup B_2; G_2')$, *и пусть модули* G_i *и* G_i' *спарены в* G_i'', $i=1, 2$, *а модули* $(G_1\otimes G_2)$ *и* $(G_1'\otimes G_2')$ *соответствующим образом спарены в* $G_1''\otimes G_2''$. *Тогда в модуле* $H_{m+n-p-q}((X, A_2)\times(Y, B_2); G_1''\otimes G_2'')$ *имеет место равенство*

$$(u_1\times u_2)\frown(z_1\times z_2)=(-1)^{p(n-q)}(u_1\frown z_1)\times(u_2\frown z_2). \ \blacksquare$$

§ 7. Гомологии расслоенных пространств

Определенные в предыдущем параграфе $\smile$- и $\frown$-произведения используются в этом параграфе для изучения гомологий расслоенных пространств. Мы покажем, что в случае, когда когомологии пространства расслоения эпиморфно отображаются на когомологии каждого слоя, гомологии (или когомологии) пространства расслоения изоморфны гомологиям (или когомологиям) произведения базы и слоя. Для ориентируемых расслоений на сферы это приводит к доказательству точности последовательности Тома — Гизина, которая будет использована в следующем параграфе для вычисления колец когомологий проективных пространств.

Начнем с некоторых алгебраических замечаний. Пусть $M=\{M_q\}$ — свободный конечно порожденный градуированный R-модуль, и пусть $M^*=\{M^q=\operatorname{Hom}(M_q, R)\}$. Пусть (X, A) — пара топологических пространств и $f: X\to Y$ — непрерывное отображение. Если задан гомоморфизм (степени 0) $\theta: M^*\to H^*(X, A; R)$, то для любого R-модуля G можно определить гомоморфизмы (степени 0)

$$\Phi: H(X, A; G)\to H(Y; G)\otimes M,$$
$$\Phi^*: H^*(Y; G)\otimes M^*\to H^*(X, A; G),$$

полагая $\Phi(z)=\sum\limits_i f_*\left(\theta\left(m_i^*\right)\frown z\right)\otimes m_i$, где $\{m_i\}$ — базис модуля M, а $\{m_i^*\}$ — дуальный базис[1]) модуля M^* (Φ определяется однозначно этой формулой[2])) и $\Phi^*(u\otimes m^*)=f^*u\smile\theta(m^*)$.

1. Лемма. *Если в этих обозначениях Φ является изоморфизмом для $G=R$, то Φ и Φ^* являются изоморфизмами для всех R-модулей G.*

Доказательство. Пусть для каждого i элемент c_i^* является коциклом комплекса $\operatorname{Hom}(\Delta(X)/\Delta(A); R)$, представляющим класс $\theta\left(m_i^*\right)$; предположим, что m_i (и, следовательно, m_i^* и c_i^*) имеют степень q_i. Определим гомоморфизм $\tau: \Delta(X)/\Delta(A)\to\Delta(Y)\otimes M$ (степени 0) равенством

$$\tau(c)=\sum_i\Delta(f)\left(c_i^*\frown c\right)\otimes m_i.$$

Несложное вычисление показывает, что τ является цепным отображением и что индуцированные гомоморфизмы

$$\tau_*: H_*(X, A; G)\to H_*(\Delta(Y)\otimes M; G)\approx H_*(Y; G)\otimes M,$$
$$\tau^*: H^*(Y; G)\otimes M^*\approx H^*(\operatorname{Hom}(\Delta(Y)\otimes M, G))\to H^*(X, A; G)$$

совпадают соответственно с Φ и Φ^*. Поскольку мы предположили, что Φ является изоморфизмом для $G=R$, цепное отображение τ индуцирует изоморфизм гомологий. Из теорем об универсальных коэффициентах для гомологий и когомологий следует, что Φ и Φ^* — изоморфизмы для любых R-модулей G. ■

---

[1]) Базис $\{m_i\}$ называется дуальным к базису $\{m_i^*\}$, если $m_i^*(m_j)=\delta_i^j$. — *Прим. перев.*

[2]) То есть это отображение не зависит от произвола в выборе базиса $\{m_i\}$. — *Прим. перев.*

Парой расслоенных пространств с базой B называется *пара пространств расслоения* $(E, \dot{E})$, *пара слоев* $(F, \dot{F})$ и *проекция* $p\colon E \to B$, такие, что существуют открытое покрытие $\{V\}$ пространства B и для каждого множества $V \in \{V\}$ гомеоморфизм $\varphi_V\colon V \times (F, \dot{F}) \to \to (p^{-1}(V), p^{-1}(V) \cap \dot{E})$, для которого композиция

$$V \times F \xrightarrow{\varphi_V} p^{-1}(V) \xrightarrow{p} V$$

является проекцией на первый сомножитель. Пусть $A \subset B$. Положим $E_A = p^{-1}(A)$ и $\dot{E}_A = p^{-1}(A) \cap \dot{E}$. Если $b \in B$, то пара $(E_b, \dot{E}_b)$ называется *парой слоев над точкой* b.

Приведем несколько примеров.

2. Для пространства B и пары $(F, \dot{F})$ *парой произведений* называется пространство расслоения $B \times (F, \dot{F})$ и проекция на первый сомножитель.

3. Пусть E — цилиндр отображения расслоения $\dot{p}\colon \dot{E} \to B$ со слоем $\dot{F}$, а $p\colon E \to B$ — каноническая ретракция. Тогда $(E, \dot{E})$ — пара расслоенных пространств над B со слоем $(F, \dot{F})$, где F — конус над $\dot{F}$, и проекцией p.

4. Если ξ — некоторое расслоение на q-мерные сферы над B; то $(E_\xi, \dot{E}_\xi)$ — пара расслоенных пространств над B со слоем (E^{q+1}, S^q) и проекцией $p_\xi\colon E_\xi \to B$.

Для пары расслоенных пространств $(E, \dot{E})$ со слоем $(F, \dot{F})$ *когомологическим расширением слоя* называется гомоморфизм (степени 0) $\theta\colon H^*(F, \dot{F}; R) \to H^*(E, \dot{E}; R)$ градуированных модулей, такой, что для каждой точки $b \in B$ композиция

$$H^*(F, \dot{F}; R) \xrightarrow{\theta} H^*(E, \dot{E}; R) \to H^*(E_b, \dot{E}_b; R)$$

является изоморфизмом. Легко проверить следующие утверждения:

5. *Пусть* $\bar{p}\colon B \times (F, \dot{F}) \to (F, \dot{F})$ — *проекция на второй сомножитель. Тогда*

$$\theta = \bar{p}^*\colon H^*(F, \dot{F}; R) \to H^*(B \times (F, \dot{F}); R)$$

является когомологическим расширением слоя пары расслоенных пространств $(B \times F, B \times \dot{F})$. ■

6. *Пусть* $\theta\colon H^*(F, \dot{F}; R) \to H^*(E, \dot{E}; R)$ — *когомологическое расширение слоя пары расслоенных пространств над* B, *и пусть* $f\colon B' \to B$ — *некоторое отображение. Тогда над* B' *индуцируется пара расслоенных пространств* $(E', \dot{E}')$ *со слоем* $(F, \dot{F})$ *и ото-*

бражение $\overline{f}$: $(E', \dot{E}') \to (E, \dot{E})$, *коммутирующее с проекцией. Композиция*

$$H^*(F, \dot{F}; R) \xrightarrow{\theta} H^*(E, \dot{E}; R) \xrightarrow{\overline{f}^*} H^*(E', \dot{E}'; R)$$

является при этом когомологическим расширением слоя индуцированной пары расслоенных пространств. ■

7. *Пусть задана пара расслоенных пространств* $(E, \dot{E})$ *над пространством* B, *пусть* $\{B_j\}$ — *множество компонент линейной связности пространства* B, *и пусть* $(E_j, \dot{E}_j)$ — *индуцированная пара расслоенных пространств над* B_j. *Когомологическое расширение* θ *слоя пары расслоенных пространств над* B *соответствует семейству когомологических расширений* $\{\theta_j\}$ *индуцированных пар расслоенных пространств над* B_j. ■

Докажем теперь локальную форму той теоремы, к которой мы стремимся. Она показывает, что всякое когомологическое расширение слоя пары произведений обладает столь же «приятными» гомологическими свойствами, как и то расширение, которое рассматривалось в утверждении 5 выше.

8. Лемма. *Пусть пара* $(F, \dot{F})$ *такова, что модуль* $H_*(F, \dot{F}; R)$ *свободен и конечно порожден над* R, *и пусть*

$$\theta\colon H^*(F, \dot{F}; R) \to H^*(B \times (F, \dot{F}); R)$$

— *когомологическое расширение слоя пары произведений. Тогда гомоморфизмы*

$$\Phi\colon H_*(B \times (F, \dot{F}); G) \to H_*(B; G) \otimes H_*(F, \dot{F}; R),$$

$$\Phi^*\colon H^*(B; G) \otimes H^*(F, \dot{F}; R) \to H^*(B \times (F, \dot{F}); G)$$

являются изоморфизмами для всех R-*модулей* G.

Доказательство. По лемме 1 достаточно показать, что Φ является изоморфизмом для $G = R$. Если $\{B_j\}$ — множество компонент линейной связности пространства B, то

$$H_*(B \times (F, \dot{F}); R) \approx \bigoplus_j H_*(B_j \times (F, \dot{F}); R),$$

$$H_*(B; R) \otimes H_*(F, \dot{F}; R) \approx \bigoplus_j H_*(B_j; R) \otimes H_*(F, \dot{F}; R).$$

Следовательно, достаточно доказать утверждение для линейно связного пространства B. Для такого B имеет место изоморфизм $R \approx H^0(B; R)$.

По формуле Кюннета $H_*(B \times (F, \dot{F}); R) \approx H_*(B; R) \otimes H_*(F, \dot{F}; R)$. Определим градуированные подмодули N_s модуля $H_*(B, R) \otimes \otimes H_*(F, \dot{F}; R)$, полагая

$$(N_s)_q = \bigoplus_{i+j=q,\ j \geqslant s} H_i(B; R) \otimes H_j(F, \dot{F}; R).$$

Тогда

$$H_*(B; R) \otimes H_*(F, \dot{F}; R) = N_0 \supset N_1 \supset \ldots \supset N_s \supset N_{s+1} \supset \ldots$$

и $N_s = 0$ для достаточно большого s. Если $u \in H^s(F, \dot{F}; R)$, то $\theta(u) = 1 \times \lambda(u) + \bar{u}$, где $\bar{u} \in \bigoplus_{i+j=s,\ j<s} H^i(B; R) \otimes H^j(F, \dot{F}; R)$, и $\theta(u) \mid [b \times (F, \dot{F})] = 1 \times \lambda(u)$. Поскольку θ является когомологическим расширением слоя, λ есть автоморфизм модуля $H^*(F, \dot{F}; R)$. Пусть $z' \in H_s(F, \dot{F}; R)$. Рассмотрим элемент $z \times z' \in N_s$. Тогда

$$\Phi(z \times z') = \sum_i p_*(\theta(m_i^*) \frown (z \times z')) \otimes m_i,$$

и если $\deg m_i < s$, то $\theta(m_i^*) \frown (z \times z') \in N_1$. Но $p_*(N_1) = 0$, значит, $\Phi(z \times z') \in N_s$, и потому отображение Φ переводит N_s в себя для всех s. Рассматривая короткие точные последовательности

$$0 \to N_{s+1} \to N_s \to N_s/N_{s+1} \to 0$$

и имея в виду лемму о пяти гомоморфизмах, индукцией по убывающим значениям s можно установить, что Φ тогда и только тогда является изоморфизмом, когда оно индуцирует изоморфизм модулей N_s/N_{s+1} на себя для всех s. Если $z' \in H_s(F, \dot{F}; R)$, то, вычисляя образ элемента $\Phi(z \times z')$ в модуле N_s/N_{s+1}, получаем [1])

$$\Phi(z \times z') = \sum_{\deg m_i \geqslant s} p_*[(1 \times \lambda(m_i^*) + \bar{m}_i^*) \frown (z \times z')] \otimes m_i =$$
$$= \sum_{\deg m_i = s} p_*[1 \times \lambda(m_i^*) \frown (z \times z')] \otimes m_i,$$

поскольку $\bar{m}_i^* \frown (z \times z') \in N_1$, а $p_*(N_1) = 0$. Далее, учитывая свойства 5.6.21, 5.6.19 и 5.6.17, получаем

$$\sum_{\deg m_i = s} p_*[1 \times \lambda(m_i^*) \frown (z \times z')] \otimes m_i =$$
$$= \sum_{\deg m_i = s} z \otimes \langle \lambda(m_i^*), z' \rangle m_i = z \otimes \lambda_*(z'),$$

где автоморфизм $\lambda_*\colon H_*(F, \dot{F}; R) \to H_*(F, \dot{F}; R)$ двойствен автоморфизму λ. Следовательно, в модуле N_s/N_{s+1} имеет место равенство

[1]) Написанные ниже равенства следует понимать как равенства с точностью до элементов из N_{s+1}. — *Прим. ред.*

$\Phi(z \times z') = z \times \lambda_*(z')$, показывающее, что Φ индуцирует изоморфизм модуля N_s/N_{s+1} на себя для всех s. ■

Следующая *теорема Лере — Хирша* показывает, что модули гомологий и когомологий пары расслоенных пространств, обладающей когомологическим расширением слоя, изоморфны соответствующим модулям произведения пары слоев на базу.

9. Теорема. *Пусть $(E, \dot{E})$ — пара расслоенных пространств с базой B и парой слоев $(F, \dot{F})$. Предположим, что модуль $H_*(F, \dot{F}; R)$ свободен и конечно порожден над R и что θ — некоторое когомологическое расширение слоя. Тогда гомоморфизмы*

$$\Phi\colon H_*(E, \dot{E}; G) \to H_*(B; G) \otimes H_*(F, \dot{F}; G),$$

$$\Phi(z) = \sum_i p_*(\theta(m_i^*) \frown z) \otimes m_i,$$

$$\Phi^*\colon H^*(B; G) \otimes H^*(F, \dot{F}; G) \to H^*(E, \dot{E}; G), \quad \Phi^*(u \otimes v) = p^*(u) \smile \theta(v)$$

являются изоморфизмами (градуированных модулей) для всех R-модулей G.

Доказательство. В силу леммы 1 достаточно доказать наше утверждение для Φ в случае, когда $G = R$. Пусть для всякого подмножества $A \subset B$ отображение θ_A является композицией

$$H^*(F, \dot{F}; R) \xrightarrow{\theta} H^*(E, \dot{E}; R) \to H^*(E_A, \dot{E}_A; R).$$

Тогда θ_A — когомологическое расширение слоя в индуцированном над A расслоенном пространстве. Из леммы 8 следует, что если индуцированное расслоенное пространство над A изоморфно паре произведений $A \times (F, \dot{F})$, то

$$\Phi_A\colon H_*(E_A, \dot{E}_A; R) \approx H_*(A; R) \otimes H_*(F, \dot{F}; R).$$

Следовательно, Φ_V — изоморфизм для каждого достаточно малого открытого подмножества V.

Если V и V' — открытые подмножества пространства B, то пара пар $\{(E_V, \dot{E}_V), (E_{V'}, \dot{E}_{V'})\}$ удовлетворяет аксиоме вырезания в E и из свойства 5.6.20 следует, что отображения Φ_V, $\Phi_{V'}$, $\Phi_{V \cap V'}$ и $\Phi_{V \cup V'}$ переводят точную последовательность Майера — Виеториса пар $(E_V, \dot{E}_V)$, $(E_{V'}, \dot{E}_{V'})$ в тензорное произведение точной последовательности Майера — Виеториса для V и V' на модуль $H_*(F, \dot{F}; R)$. Поскольку модуль $H_*(F, \dot{F}; R)$ свободен над R, его тензорное произведение на любую точную последовательность является снова точной последовательностью. Следовательно, если Φ_V, $\Phi_{V'}$ и $\Phi_{V \cap V'}$ — изоморфизмы, то из леммы о пяти гомоморфизмах следует, что $\Phi_{V \cup V'}$ — тоже изоморфизм. Повторяя это рассуждение, видим, что Φ_U — изоморфизм для всякого открытого множества U, являющегося объединением конечного числа достаточно малых открытых множеств. Пусть $\mathcal{U}$ — семейство таких множеств. Поскольку всякое компактное подмножество из B принадлежит некоторому элементу из $\mathcal{U}$, то $H_*(B; R) \approx \varinjlim \{H_*(U; R)\}_{U \in \mathcal{U}}$. Аналогично, всякое компактное подмножество из E принадлежит E_U для некоторого $U \in \mathcal{U}$, и, следовательно, $H_*(E, \dot{E}; R) \approx \approx \varinjlim \{H_*(E_U, \dot{E}_U; R)\}$. Поскольку тензорное произведение коммутирует с пределами прямых спектров, а Φ при указанных изоморфизмах соответствует элементу $\varinjlim \{\Phi_U\}_{U \in \mathcal{U}}$, то Φ также является изоморфизмом. ■

Только что приведенные рассуждения дают прямое доказательство того, что Φ является изоморфизмом для любого модуля коэффициентов G. Аналогичные соображения нельзя применить к Φ^*, так как неверно, что модуль $H^*(B; R)$ изоморфен пределу обратного спектра $\varprojlim \{H^*(U; R)\}_{U \in \mathcal{U}}$. Следует также заметить, что в теореме 9 мы ничего не сказали о перестановочности отображения Φ^* с $\smile$-произведением, поскольку Φ^*, вообще говоря, не сохраняет $\smile$-произведение.

Обратимся теперь к частному случаю расслоения на сферы. Так как

$$H^r(E^{q+1}, S^q; R) \approx \begin{cases} 0, & r \neq q+1, \\ R, & r = q+1, \end{cases}$$

то в том случае, когда ξ — расслоение на q-мерные сферы, когомологическое расширение слоя в соответствующей ему паре расслоенных пространств [1]) есть такой элемент $U \in H^{q+1}(E_\xi, \dot{E}_\xi; R)$, что для любой точки $b \in B$ ограничение U на $(p^{-1}(b), p^{-1}(b) \cap \dot{E})$ является образующей модуля $H^{q+1}(p^{-1}(b), p^{-1}(b) \cap \dot{E}; R)$. Такой класс когомологий называется *классом ориентации* (*над кольцом* R) расслоения ξ. Если расслоенное пространство допускает ориентацию, оно называется *ориентируемым*. *Ориентированным расслоением на сферы* называется пара (ξ, U_ξ), состоящая из расслоения на сферы ξ и класса ориентации U_ξ этого расслоения.

Если U — класс ориентации расслоения ξ над $\mathbf{Z}$ и 1 — единица кольца R, то $\mu(U \otimes 1)$ — класс ориентации расслоения ξ над кольцом R. Следовательно, расслоение на сферы, ориентируемое над кольцом $\mathbf{Z}$, ориентируемо и над любым кольцом R.

---

[1]) См. пример 4. — *Прим. ред.*

Если (ξ, U_ξ) — ориентированное расслоение на сферы над базой B и $f\colon B' \to B$ — непрерывное отображение, то $(f^*\xi, \bar{f}^*U_\xi)$ является ориентированным расслоением на сферы над пространством B' (где отображение $\bar{f}\colon (E_{f^*\xi}, \dot{E}_{f^*\xi}) \to (E_\xi, \dot{E}_\xi)$ порождается отображением f).

Из теоремы 9 мы получаем следующую *теорему Тома об изоморфизме*:

10. Теорема. *Пусть (ξ, U_ξ) — ориентированное расслоение на q-мерные сферы над B. Для любого R-модуля G имеют место естественные изоморфизмы*

$$\Phi_\xi\colon H_n(E_\xi, \dot{E}_\xi; G) \underset{\approx}{\to} H_{n-q-1}(B; G), \qquad \Phi_\xi(z) = p_*(U_\xi \frown z);$$

$$\Phi^*_\xi\colon H^r(B; G) \underset{\approx}{\to} H^{r+q+1}(E_\xi, \dot{E}_\xi; G), \qquad \Phi^*_\xi(v) = p^*(v) \smile U_\xi.$$

Доказательство. Пусть m и m^* — двойственные образующие модулей $H_{q+1}(E^{q+1}, S^q; R)$ и $H^{q+1}(E^{q+1}, S^q; R)$ соответственно. Определим когомологическое расширение слоя θ, полагая $\theta(m^*) = U_\xi$. Тогда Φ_ξ есть композиция

$$H_n(E_\xi, \dot{E}_\xi; G) \xrightarrow{\Phi} H_{n-q-1}(B; G) \otimes H_{q+1}(E^{q+1}, S^q; R) \approx H_{n-q-1}(B; G),$$

где второе отображение переводит $z \otimes m$ в z. Согласно теореме 9, Φ является изоморфизмом, и, значит, Φ_ξ — тоже изоморфизм. Аналогичные рассуждения показывают, что и Φ^*_ξ — изоморфизм. Эти изоморфизмы естественны для индуцированных расслоений ввиду свойств естественности $\smile$- и $\frown$-произведений. ■

Из этого результата вытекает точность следующей *последовательности Тома — Гизина* расслоения на сферы.

11. Теорема. *Пусть (ξ, U_ξ) — ориентированное расслоение на q-мерные сферы с базой B и проекцией $\dot{p} = p\,|\,\dot{E}\colon \dot{E} \to B$. Для любого R-модуля G имеют место естественные точные последовательности*

$$\ldots \to H_n(\dot{E}_\xi; G) \xrightarrow{\dot{p}_*} H_n(B; G) \xrightarrow{\Psi_\xi}$$
$$\to H_{n-q-1}(B; G) \xrightarrow{\rho} H_{n-1}(\dot{E}_\xi; G) \to \ldots,$$

$$\ldots \to H^r(B; G) \xrightarrow{\dot{p}^*} H^r(\dot{E}_\xi; G) \xrightarrow{\rho^*} H^{r-q}(B; G) \xrightarrow{\Psi^*_\xi} H^{r+1}(B; G) \to \ldots,$$

в которых Ψ_ξ и Ψ^*_ξ обладают следующими свойствами:

$$\Psi_\xi(v \frown z) = (-1)^{(q+1)\deg v}\, \Psi^*_\xi(v) \frown z,$$
$$\Psi^*_\xi(v_1 \smile v_2) = v_1 \smile \Psi^*_\xi(v_2).$$

Доказательство. Имеет место коммутативная диаграмма (для любого модуля коэффициентов)

$$\begin{tikzcd} \ldots \arrow[r] & H_n(\dot{E}) \arrow[r, "i_*"] \arrow[dr, "\dot{p}_*"'] & H_n(E) \arrow[r, "j_*"] \arrow[d, "\approx"', "p_*"] & H_n(E, \dot{E}) \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "\approx"', "\Phi_\xi"] & H_{n-1}(\dot{E}) \arrow[r] & \ldots \\ & & H_n(B) & H_{n-q-1}(B) & & \end{tikzcd}$$

верхняя строка которой точна. Поскольку p — деформационная ретракция E на B, то p_* является изоморфизмом. Согласно теореме 10, отображение Φ_ξ есть изоморфизм. Мы получим искомую точную последовательность, полагая $\Psi_\xi = \Phi_\xi j_* p_*^{-1}$ и $\rho = \partial\Phi_\xi^{-1}$. Аналогично когомологическая последовательность определяется с помощью гомоморфизмов $\Psi_\xi^* = p^{*-1} j^* \Phi_\xi^*$ и $\rho^* = \Phi_\xi^{*-1}\delta$. Проверим теперь нужную нам формулу, например, для Ψ_ξ:

$$\begin{aligned} \Psi_\xi(v \frown z) &= \Phi_\xi j_* p_*^{-1}(v \frown z) = \Phi_\xi j_*\left(p^*(v) \frown p_*^{-1}(z)\right) = \\ &= \Phi_\xi\left(p^*(v) \frown j_* p_*^{-1}(z)\right) = p_*\left(U \frown \left[p^*(v) \frown j_* p_*^{-1}(z)\right]\right) = \\ &= p_*\left(j^*[U \smile p^*(v)] \frown p_*^{-1}(z)\right) = \\ &= (-1)^{(q+1)\deg v}\, p_*\left[j^*\Phi_\xi^*(v) \frown p_*^{-1}(z)\right] = \\ &= (-1)^{(q+1)\deg v}\Psi_\xi^*(v) \frown z. \ \blacksquare \end{aligned}$$

Заметим, что изоморфизмы Φ и Φ^*, участвующие в теореме Тома об изоморфизме, зависят от класса ориентации U данного расслоения. Следовательно, гомоморфизмы ρ, Ψ, ρ^* и Ψ^* последовательности Тома — Гизина тоже зависят от класса ориентации. Пусть пространство B линейно связно, а U и U' — классы ориентации расслоений на сферы над пространством B. По теореме 10 существует такой элемент $r \in R$, что

$$U' = p^*(r \times 1) \smile U = r\,[p^*(1) \smile U].$$

Если $b_0 \in B$, то

$$U' \mid (p^{-1}(b_0),\ p^{-1}(b_0) \cap \dot{E}) = r\,[U \mid (p^{-1}(b_0),\ p^{-1}(b_0) \cap \dot{E})].$$

Итак, мы получили следующий результат:

12. Лемма. *Два класса ориентации U и U' расслоения на сферы над линейно связной базой B совпадают в том и только в том случае, когда для некоторой точки $b_0 \in B$ имеет место равенство*

$$U \mid (p^{-1}(b_0),\ p^{-1}(b_0) \cap \dot{E}) = U' \mid (p^{-1}(b_0),\ p^{-1}(b_0) \cap \dot{E}). \ \blacksquare$$

Если пространство B не является линейно связным, то пусть $\{B_j\}$ — множество его компонент линейной связности, и пусть $(E_j, \dot{E}_j)$ — ограничение пары $(E, \dot{E})$ над B_j. Тогда

$$H^*(E, \dot{E}; R) \approx \prod_j H^*(E_j, \dot{E}_j; R),$$

и мы приходим к следующему результату:

13. Лемма. *Два класса ориентации U и U' расслоения на сферы над базой B совпадают в том и только в том случае, когда для всех точек $b \in B$ имеет место равенство*

$$U \mid (p^{-1}(b), p^{-1}(b) \cap \dot{E}) = U' \mid (p^{-1}(b), p^{-1}(b) \cap \dot{E}). \ \blacksquare$$

Если $R \approx \mathbf{Z}_2$, то $H^{q+1}\left(p^{-1}(b), p^{-1}(b) \cap \dot{E}; \mathbf{Z}_2\right) \approx \mathbf{Z}_2$ для всех $b \in B$. Следовательно, этот модуль обладает единственным ненулевым элементом, и мы получаем такое

14. Следствие. *Всякие два класса ориентации над полем $\mathbf{Z}_2$ расслоения на сферы совпадают.* $\blacksquare$

Таким образом, для $R = \mathbf{Z}_2$ все гомоморфизмы Φ, ρ, Ψ, Φ^*, ρ^* и Ψ^* единственны.

Характеристическим классом Ω_ξ ориентированного расслоения на q-мерные сферы (ξ, U_ξ) называется элемент

$$\Omega_\xi = \Psi_\xi^*(1) \in H^{q+1}(B; R).$$

Этот класс функториален (т. е. $\Omega_{f^*\xi} = f^*\Omega_\xi$). Из свойств мультипликативности отображений Ψ_ξ и Ψ_ξ^*, доказанных в теореме 11, следуют такие соотношения:

15. *Если $z \in H_n(B; G)$, то*

$$\Psi_\xi(z) = \Omega_\xi \frown z,$$

а если $v \in H^r(B; G)$, то

$$\Psi_\xi^*(v) = v \smile \Omega_\xi. \ \blacksquare$$

Исследуем теперь вопрос о существовании классов ориентации в расслоенных на сферы пространствах. Пусть (X, X') — некоторая пара, и пусть $\{A_j\}_{j \in J}$ — семейство подмножеств $A_j \subset X$. Семейство

$$\{u_j \in H^n(A_j, A_j \cap X'; G)\}_{j \in J}$$

называется *согласованным*, если для любой пары индексов $j, j' \in J$ имеет место равенство

$$u_j \mid (A_j \cap A_{j'}, A_j \cap A_{j'} \cap X') = u_{j'} \mid (A_j \cap A_{j'}, A_j \cap A_{j'} \cap X').$$

Согласованные семейства $\{u_j\}$ образуют R-модуль, обозначаемый через $H^n(\{A_j\}, X'; G)$. Ясно, что отображения ограничения

$$H^n(X, X'; G) \to H^n(A_j, A_j \cap X'; G)$$

определяют естественный гомоморфизм

$$H^n(X, X'; G) \to H^n(\{A_j\}, X'; G).$$

16. Лемма. *Пусть $(E, \dot{E})$ — пара расслоенных пространств с базой B, проекцией $p: E \to B$ и парой слоев $(F, \dot{F})$. Предположим, что для некоторого $n > 0$ при $i < n$ выполняется равенство $H_i(F, \dot{F}; R) = 0$. Тогда*

(a) *для всех $A \subset B$ и всех R-модулей G при $i < n$ имеет место равенство*

$$H_i(p^{-1}(A), p^{-1}(A) \cap \dot{E}; G) = 0 = H^i(p^{-1}(A), p^{-1}(A) \cap \dot{E}; G);$$

(b) *если $\{V\}$ — открытое покрытие пространства B, то для указанного n естественный гомоморфизм является изоморфизмом*

$$H^n(E, \dot{E}; G) \approx H^n(\{p^{-1}(V)\}, \dot{E}; G).$$

Доказательство. Благодаря формуле универсальных коэффициентов утверждение (a) достаточно доказать в случае $G = R$. Если подмножество $A \subset B$ таково, что $(p^{-1}(A), p^{-1}(A) \cap \dot{E})$ гомеоморфно $A \times (F, \dot{F})$, то по формуле Кюннета

$$H_i(p^{-1}(A), p^{-1}(A) \cap \dot{E}; R) \approx H_i(A \times (F, \dot{F}); R) = 0, \qquad i < n.$$

Отсюда, как и при доказательстве теоремы 9, индукцией по числу координатных окрестностей расслоения, необходимых для того, чтобы покрыть A (а также использованием последовательности Майера — Вьеториса и леммы о пяти гомоморфизмах), получаем, что утверждение (a) справедливо для всех компактных множеств $A \subset B$. Переходя далее к пределам прямых спектров, заключаем, что утверждение (a) справедливо для произвольных A.

Докажем утверждение (b). Пусть $\{W\}$ — совокупность конечных объединений элементов из $\{V\}$. Согласно (a) и формуле универсальных коэффициентов для когомологий, получаем коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} H^n(E, \dot{E}; G) & \approx & \operatorname{Hom}(H_n(E, \dot{E}; R), G) \\ \downarrow & & \downarrow \approx \\ \varprojlim \{H^n(p^{-1}(W), p^{-1}(W) \cap \dot{E}; G)\} & \approx & \varprojlim \{\operatorname{Hom}(H_n(p^{-1}(W), p^{-1}(W) \cap \dot{E}; R), G)\}. \end{array}$$

Следовательно, достаточно доказать, что согласованное семейство $\{u_V\}_{V \in \{V\}}$ продолжается до единственного согласованного семейства $\{u_W\}_{W \in \{W\}}$. Но это вытекает из последовательности

Майера—Виеториса и того факта, что $H^i(p^{-1}(W), p^{-1}(W)\cap \dot{E}; G)=0$ при $i<n$. ■

Для расслоений на сферы немедленно получается такое

17. Следствие. *Расслоение на сферы ξ с базой B в том и только в том случае является ориентируемым, когда существуют такое покрытие $\{V\}$ пространства B и такое согласованное семейство $\{u_V\}$, что u_V является классом ориентации расслоения $\xi|V$ для каждого $V\in\{V\}$.* ■

Поскольку тривиальное расслоение на сферы всегда ориентируемо, из следствий 14 и 17 вытекает такое

18. Следствие. *Всякое расслоение на сферы обладает единственным классом ориентации над полем $\mathbf{Z}_2$.* ■

Согласно теореме 2.8.12, существует контравариантный функтор из фундаментального группоида базы B расслоения на сферы ξ в категорию гомотопических типов, сопоставляющий точке $b\in B$ пару слоев $(E_b, \dot{E}_b)$ над b, а классу путей $[\omega]$ в B гомотопический класс $h_{[\omega]}\in[E_{\omega(0)}, \dot{E}_{\omega(0)}; E_{\omega(1)}, \dot{E}_{\omega(1)}]$. Тогда для фиксированного кольца R существует ковариантный функтор из фундаментального группоида пространства B в категорию R-модулей, сопоставляющий точке $b\in B$ модуль $H^{q+1}(E_b, \dot{E}_b; R)$, а классу путей $[\omega]$ гомоморфизм

$$\overset{*}{h}_{[\omega]}\colon H^{q+1}(E_{\omega(1)}, \dot{E}_{\omega(1)}; R)\to H^{q+1}(E_{\omega(0)}, \dot{E}_{\omega(0)}; R).$$

19. Теорема. *Расслоение на сферы ξ тогда и только тогда ориентируемо над R, когда для каждого замкнутого пути ω в B выполняется равенство $\overset{*}{h}_{[\omega]}=1$.*

Доказательство. Если расслоение ξ ориентируемо и его класс ориентации равен $U\in H^{q+1}(E, \dot{E}; R)$, то для любого достаточно малого пути ω в B (и, следовательно, для произвольного пути)

$$\overset{*}{h}_{[\omega]}(U\,|\,(E_{\omega(1)}, \dot{E}_{\omega(1)}))=U\,|\,(E_{\omega(0)}, \dot{E}_{\omega(0)}).$$

Поскольку $U\,|\,(E_b, \dot{E}_b)$ — образующая модуля $H^{q+1}(E_b, \dot{E}_b; R)$, отсюда следует, что $\overset{*}{h}_{[\omega]}=1$ для всякого замкнутого пути ω.

Обратно, если $\overset{*}{h}_{[\omega]}=1$ для всякого замкнутого пути ω в B, то существуют образующие $U_b\in H^{q+1}(E_b, \dot{E}_b; R)$, такие, что для любого класса путей $[\omega]$ в B имеет место равенство $\overset{*}{h}_{[\omega]}(U_{\omega(1)})= = U_{\omega(0)}$. Если V — произвольное подмножество пространства B, для которого расслоение $\xi|V$ тривиально, то, как легко видеть, существует класс ориентации U_V расслоения $\xi|V$, такой, что $U_V|(E_b, \dot{E}_b) = U_b$ для всех $b \in V$. Если $\{V\}$ — открытое покрытие пространства B такими множествами, что $\xi|V$ тривиально для любого V, то $\{U_V\}$ является согласованным семейством ориентаций и в силу следствия 17 расслоение ξ ориентируемо. ■

20. Следствие. *Расслоение на сферы над односвязной базой является ориентируемым для любого кольца R.* ■

§ 8. Алгебра когомологий

Когомологическое $\smile$-произведение превращает когомологии (над кольцом R) пары топологических пространств в градуированную алгебру над R. В первой части этого параграфа мы определяем относящиеся сюда алгебраические понятия и вычисляем алгебру когомологий над полем $\mathbf{Z}_2$ действительного проективного пространства и алгебру когомологий над произвольным кольцом R комплексных и кватернионных проективных пространств. Затем результаты этих вычислений применяются для доказательства теоремы Борсука — Улама.

Для H-пространств существует еще одна алгебраическая структура, которой можно наделить алгебру когомологий. Когомологии H-пространства представляют собой алгебру Хопфа. Вторая часть этого параграфа посвящена определению такой алгебры и установлению некоторых результатов о ее структуре. В заключение доказывается теорема Хопфа об алгебре когомологий компактного связного H-пространства.

Градуированной R-алгеброй называется градуированный R-модуль $A = \{A^q\}$, наделенный гомоморфизмом степени 0

$$\mu\colon A \otimes A \to A,$$

который называется *умножением* в этой алгебре (таким образом, μ переводит $A^p \otimes A^q$ в A^{p+q} для любых p и q). Для элементов a, $a' \in A$ мы пишем $aa' = \mu(a \otimes a')$. Умножение называется *ассоциативным*, если $(aa')a'' = a(a'a'')$ для любых a, a', $a'' \in A$, и *коммутативным*, если $aa' = (-1)^{\deg a \deg a'} a'a$ для любых a, $a' \in A$.

1. Пример. Если (X, A) — пара топологических пространств, то $H^*(X, A; R)$ — градуированная R-алгебра, умножение в которой определяется $\smile$-произведением (относительно мультипликативного спаривания кольца R с R в себя). Из свойства 5.6.10 следует, что это умножение ассоциативно, а из свойства 5.6.11 — что оно коммутативно. Если $A = \varnothing$, то из свойства 5.6.9 следует, что 1 является единичным элементом алгебры $H^*(X; R)$. Алгебра $H^*(X, A; R)$ называется *алгеброй когомологий пары* (X, A) над кольцом R.

2. Пример. *Алгебра полиномов* над кольцом R, порожденная элементом x степени $n>0$ (обозначается $S_n(x)$), определяется как

$$[S_n(x)]^q = \begin{cases} 0, & \text{если } q \not\equiv 0 \bmod n \text{ или } q<0, \\ \text{свободный модуль, порожденный элементом } x_p, & \text{если } q = pn,\ p \geqslant 0, \end{cases}$$

с произведением $(\alpha x_p)(\beta x_q) = (\alpha\beta) x_{p+q}$ для $\alpha, \beta \in R$. Ясно, что x_0 является единичным элементом и что $x_p = (x_1)^p$. Обозначая x_1 через x, получаем $x_p = x^p$. Значит, если не учитывать градуировку, то алгебра $S_n(x)$ является просто алгеброй полиномов над кольцом R от одной переменной x. *Срезанной алгеброй полиномов над R, порожденной элементом x степени n и веса h* (обозначается $T_{n,h}(x)$), называется факторалгебра алгебры $S_n(x)$ по градуированному идеалу, порожденному элементом x^h. Если $h=2$, то эта алгебра называется *внешней алгеброй, порожденной элементом x степени n*, и обозначается $E_n(x)$.

Пусть A и B — градуированные R-алгебры. Их тензорное произведение $A \otimes B$ также является градуированной R-алгеброй с умножением

$$(a \otimes b)(a' \otimes b') = (-1)^{\deg b \deg a'} aa' \otimes bb'.$$

Если умножения в алгебрах A и B ассоциативны или коммутативны, то этими свойствами обладает умножение и в алгебре $A \otimes B$.

3. Пример. Пусть R — поле, а пары топологических пространств (X, A) и (Y, B) таковы, что либо $H_*(X, A; R)$, либо $H_*(Y, B; R)$ конечного типа. Тогда из теоремы 5.5.11 следует, что

$$H^*(X, A; R) \otimes H^*(Y, B; R) \approx H^*((X, A) \times (Y, B); R).$$

Мы вычислим градуированную $\mathbf{Z}_2$-алгебру $H^*(\mathbf{R}P^n; \mathbf{Z}_2)$ действительного проективного пространства $\mathbf{R}P^n$. Заметим, что двойное накрытие $p\colon S^n \to \mathbf{R}P^n$ является расслоением на нульмерные сферы. Пусть $w_n \in H^1(\mathbf{R}P^n; \mathbf{Z}_2)$ — характеристический класс (над $\mathbf{Z}_2$) этого расслоения.

4. Теорема. *Если $n \geqslant 1$, то $H^*(\mathbf{R}P^n; \mathbf{Z}_2)$ является срезанной алгеброй полиномов над $\mathbf{Z}_2$, порожденной элементом w_n степени 1 и веса $n+1$.*

Доказательство. В этом доказательстве все кольца коэффициентов равны $\mathbf{Z}_2$ и поэтому опущены. Согласно следствию 5.7.18 и теореме 5.7.11, имеет место точная последовательность Тома — Гизина

$$\ldots \to H^q(S^n) \xrightarrow{\rho^*} H^q(\mathbf{R}P^n) \xrightarrow{\Psi^*} H^{q+1}(\mathbf{R}P^n) \xrightarrow{p^*} H^{q+1}(S^n) \to \ldots,$$

начинающаяся слева с $0 \to H^0(\mathbf{R}P^n) \xrightarrow{p^*} H^0(S^n)$ и заканчивающаяся справа членами $H^n(S^n) \xrightarrow{\rho^*} H^n(\mathbf{R}P^n) \to 0$ (заметим, что $H^q(\mathbf{R}P^n) = 0$ при $q > n$, так как $\mathbf{R}P^n$ — полиэдр размерности n). Поскольку $H^q(S^n) = 0$, если $0 < q < n$, отсюда следует, что

$$\Psi^*\colon H^q(\mathbf{R}P^n) \to H^{q+1}(\mathbf{R}P^n)$$

есть эпиморфизм при $0 \leqslant q < n-1$ и мономорфизм при $0 < q \leqslant \leqslant n-1$. Так как пространства $\mathbf{R}P^n$ и S^n связны при $n \geqslant 1$, то $p^*H^0(\mathbf{R}P^n) = H^0(S^n)$, откуда вытекает, что $\Psi^*\colon H^0(\mathbf{R}P^n) \to H^1(\mathbf{R}P^n)$ также является мономорфизмом. Следовательно, $H^q(\mathbf{R}P^n) \neq 0$ при $0 \leqslant q \leqslant n$, а поскольку $\rho^*H^n(S^n) = H^n(\mathbf{R}P^n)$ и $H^n(S^n) \approx \mathbf{Z}_2$, отсюда вытекает, что ρ^* — мономорфизм и что $\Psi^*\colon H^{n-1}(\mathbf{R}P^n) \to \to H^n(\mathbf{R}P^n)$ — тоже эпиморфизм.

Итак, показано, что при $0 \leqslant q \leqslant n-1$

$$\Psi^*\colon H^q(\mathbf{R}P^n) \xrightarrow{\approx} H^{q+1}(\mathbf{R}P^n).$$

Тогда $w_n = \Psi^*(1)$ — ненулевой элемент группы $H^1(\mathbf{R}P^n)$, а из соотношения 5.7.15 следует, что $\Psi^*(w_n^q) = w_n^{q+1}$. Поэтому при $1 \leqslant q \leqslant n$ элемент w_n^q не равен нулю в $H^q(\mathbf{R}P^n)$. ■

Согласно следствию 3.8.9, пространства $\mathbf{C}P^n$ и $\mathbf{Q}P^n$ односвязны. Из следствия 5.7.20 вытекает, что расслоения Хопфа $S^{2n+1} \to \mathbf{C}P^n$ со слоем S^1 и $S^{4n+3} \to \mathbf{Q}P^n$ со слоем S^3 ориентируемы над любым кольцом R. Пусть $x_n \in H^2(\mathbf{C}P^n; R)$ и $y_n \in H^4(\mathbf{Q}P^n; R)$ — характеристические классы этих расслоений Хопфа (определенные с помощью некоторого класса ориентации каждого расслоения). Рассуждение, использующее последовательность Тома — Гизина этих расслоений и аналогичное проведенному в теореме 4, дает нам следующий результат:

5. Теорема. *При $n \geqslant 1$ алгебра $H^*(\mathbf{C}P^n; R)$ является срезанной алгеброй полиномов над кольцом R, порожденной элементом x_n степени 2 и веса $n+1$, а $H^*(\mathbf{Q}P^n; R)$ является срезанной алгеброй полиномов над кольцом R, порожденной элементом y_n степени 4 и веса $n+1$.* ■

6. Следствие. *Пусть $n > m \geqslant 1$, и пусть $i\colon \mathbf{R}P^m \subset \mathbf{R}P^n$ — линейное вложение. Тогда для $q \leqslant m$ имеет место изоморфизм*

$$i^*\colon H^q(\mathbf{R}P^n; \mathbf{Z}_2) \approx H^q(\mathbf{R}P^m; \mathbf{Z}_2).$$

Доказательство. Из предположения, что i — линейное вложение, вытекает, что расслоение на нульмерные сферы над подпространством $\mathbf{R}P^m$, индуцированное вложением i и двойным накрытием $S^n \to \mathbf{R}P^n$, само является двойным накрытием $S^m \to \mathbf{R}P^m$. В силу естественности характеристических классов имеем $i^*w_n = w_m$.

Требуемый результат следует теперь из теоремы 4 и из того факта, что $i^*(w_n^q) = (i^* w_n)^q$. ■

7. Следствие. *Пусть $n > m \geqslant 1$, и пусть f: $\mathbf{R}P^n \to \mathbf{R}P^m$ — некоторое отображение. Тогда существует такое отображение f': $\mathbf{R}P^n \to S^m$, что $p \circ f' = f$, где p: $S^m \to \mathbf{R}P^m$ — двойное накрытие.*

Доказательство. В силу теоремы о поднятии 2.4.5 достаточно показать, что $f_{\#}(\pi(\mathbf{R}P^n)) = 0$. При $m = 1$ это следует из того факта, что $\pi(\mathbf{R}P^n) = \mathbf{Z}_2$ и $\pi(\mathbf{R}P^1) = \mathbf{Z}$.

Предположим, что $m > 1$, и заметим, что поскольку $H^1(\mathbf{R}P^n)$ состоит ровно из двух элементов 0 и w_n, то либо $f^*(w_m) = 0$, либо $f^*(w_m) = w_n$. Поскольку f^* — гомоморфизм алгебр, последний случай невозможен (так как $0 \neq w_n^{m+1}$, а $f^*(w_m^{m+1}) = 0$). Следовательно, $f^*(w_m) = 0$.

Мы знаем, что $\pi(\mathbf{R}P^n) = \mathbf{Z}_2$ и что образующей этой группы является гомотопический класс линейного вложения i: $\mathbf{R}P^1 \subset \mathbf{R}P^n$. Так как $f^*(w_m) = 0$, отсюда вытекает, что $i^* f^*(w_m) = 0$. Если j: $\mathbf{R}P^1 \subset \mathbf{R}P^m$ — линейное вложение, то, согласно следствию 6, $j^*(w_m) \neq 0$. Поскольку $(f \circ i)^*(w_m) \neq j^*(w_m)$, отображение $f \circ i$ не гомотопно отображению j. Поскольку $\pi(\mathbf{R}P^m) = \mathbf{Z}_2$, отображение $f \circ i$ гомотопно нулю. Следовательно, $f_{\#}[i] = [f \circ i] = 0$, и, значит, в этом случае также $f_{\#}(\pi(\mathbf{R}P^n)) = 0$. ■

8. Следствие. *Если $n > m \geqslant 1$, то не существует непрерывного отображения g: $S^n \to S^m$, такого, что $g(-x) = -g(x)$ для всех $x \in S^n$.*

Доказательство. Если бы существовало такое отображение, можно было бы определить отображение f: $\mathbf{R}P^n \to \mathbf{R}P^m$, такое, что следующая диаграмма (p и p' — двойные накрытия):

$$\begin{array}{ccc} S^n & \xrightarrow{g} & S^m \\ {\scriptstyle p'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ \mathbf{R}P^n & \xrightarrow{f} & \mathbf{R}P^m \end{array}$$

была бы коммутативна. Согласно следствию 7, отображение f можно поднять до отображения f': $\mathbf{R}P^n \to S^m$. Тогда

$$pf'p' = fp' = pg.$$

Следовательно, $f'p'$ и g — поднятия одного и того же отображения. Для всякой точки $x \in S^n$ либо $g(x) = f'p'(x)$, либо $g(-x) = f'p'(x) = f'p'(-x)$. В любом случае $f'p'$ и g должны совпасть в некоторой точке сферы S^n. В силу единственности накрывающего отображения (см. 2.2.2) имеет место равенство $f'p' = g$. Мы пришли к противоречию, поскольку для каждой точки $x \in S^n$

отображение p' переводит x и $-x$ в одну и ту же точку, в то время как g переводит их в разные точки. ■

Полученный результат эквивалентен *теореме Борсука — Улама*, которая состоит в следующем:

9. Теорема. *Для всякого непрерывного отображения* $f\colon S^n \to \mathbf{R}^n$ $(n \geqslant 1)$ *найдется такая точка* $x \in S^n$, *что* $f(x) = f(-x)$.

Доказательство. Предположим, что такой точки не существует, и определим отображение $g\colon S^n \to S^{n-1}$, полагая

$$g(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{\| f(x) - f(-x) \|}.$$

Тогда $g(-x) = -g(x)$, что находится в противоречии со следствием 8. ■

Двойственным понятию градуированной R-алгебры является понятие градуированной R-коалгебры, определяемой посредством дуализации понятия произведения. *Градуированной R-коалгеброй* называется градуированный R-модуль $A = \{A^q\}$, снабженный гомоморфизмом степени 0

$$d\colon A \to A \otimes A,$$

который называется *коумножением* в этой коалгебре (таким образом, d переводит A^q в $\bigoplus_{i+j=q} A^i \otimes A^j$ для всех q). Коумножение называется *ассоциативным*, если

$$(d \otimes 1)\, d = (1 \otimes d)\, d\colon A \to A \otimes A \otimes A,$$

и *коммутативным*, если $Td = d$, где $T\colon A \otimes A \to A \otimes A$ — гомоморфизм, определяемый равенством $T(a \otimes a') = (-1)^{\deg a \deg a'} a' \otimes a$. *Коединицей* коалгебры называется такой гомоморфизм $\varepsilon\colon A \to R$ (кольцо R рассматривается как градуированный R-модуль, состоящий из нульмерного модуля R), что любая из композиций

$$\begin{tikzcd}
 & & R \otimes A \arrow[dr, "\approx"] & \\
A \arrow[r, "d"] & A \otimes A \arrow[ur, "\varepsilon \otimes 1"] \arrow[dr, "1 \otimes \varepsilon"'] & & A \\
 & & A \otimes R \arrow[ur, "\approx"'] &
\end{tikzcd}$$

является тождественным отображением.

Алгеброй Хопфа над кольцом R называется градуированная R-алгебра B, являющаяся также и коалгеброй, коумножение в которой

$$d\colon B \to B \otimes B$$

есть гомоморфизм градуированных R-алгебр. Алгебра Хопфа B называется *связной*, если B^0 есть свободный R-модуль, порожденный единицей $1 \in B$ (здесь B рассматривается как алгебра), и если гомоморфизм ε: $B \to R$, определенный соотношением $\varepsilon(\alpha 1) = \alpha$ ($\alpha \in R$), является коединицей коалгебры B.

10. Пример. Пусть X есть связное H-пространство, гомологии которого над полем R имеют конечный тип. Умножение μ: $X \otimes X \to X$ определяет коумножение

$$d = \mu^*\colon H^*(X;\ R) \to H^*(X;\ R) \otimes H^*(X;\ R).$$

Относительно этого коумножения алгебра $H^*(X;\ R)$ является связной алгеброй Хопфа конечного типа с ассоциативным и коммутативным коумножением (из того, что пространство X обладает гомотопической единицей x_0,, вытекает, что гомоморфизм $H^*(X;\ R) \to$ $\to H^*(x_0;\ R) \approx R$ является коединицей).

Мы будем изучать связные алгебры Хопфа, произведение в которых ассоциативно и коммутативно, и опишем их структуру в случае, когда они имеют конечный тип над полем характеристики нуль. Следующее утверждение является индуктивным шагом структурной теоремы, к доказательству которой мы стремимся.

11. Лемма. *Пусть B — связная алгебра Хопфа с ассоциативным и коммутативным умножением над полем R характеристики нуль. Пусть B' — связная подалгебра Хопфа алгебры B, такая, что B порождается как алгебра подалгеброй B' и некоторым элементом $x \in B - B'$. Если степень n элемента x нечетна, то имеет место изоморфизм градуированных алгебр $B \approx B' \otimes E_n(x)$, а если четна, то имеет место изоморфизм градуированных алгэбр $B \approx B' \otimes S_n(x)$.*

Доказательство. Поскольку B' — подалгебра Хопфа алгебры B, единичный элемент алгебры B принадлежит B'. Элемент x имеет положительную степень n, так как $x \in B - B'$. Пусть A — идеал алгебры B, порожденный элементами положительных степеней подалгебры B', и пусть η: $B \to B/A$ — проекция. Положим

$$d' = (1 \otimes \eta)\, d\colon B \to B \otimes B \to B \otimes (B/A).$$

Тогда d' — гомоморфизм алгебр, $d'(\beta) = \beta \otimes 1$, если $\beta \in B'$, и $d'(x) = x \otimes 1 + 1 \otimes \eta(x)$ [1]). Заметим, что $x \notin A$, так как A состоит из конечных сумм $\sum\limits_{i \geqslant 0} \beta_i x^i$, где степени элементов $\beta_i \in B'$ положительны, и, значит, степени элементов $\beta_i x^i$ превосходят n, за

[1]) Легко показать, используя определение коумножения и коединицы градуированной коалгебры A, что $d(a) = a \otimes 1 + 1 \otimes a + \sum a_i \otimes b_i$, где $\deg a_i$, $\deg b_i > 0$. Теперь очевидно, что $d'(\beta) = \beta \otimes 1$ для $\beta \in B'$ и $d'(x) = x \otimes 1 + 1 \otimes \eta(x)$ для $x \in B - B'$. — *Прим. перев.*

исключением случая $i=0$. Следовательно, в алгебре B/A выполняется соотношение $\eta(x)\neq 0$.

Предположим, что степень элемента x нечетна. Поскольку умножение в алгебре B коммутативно, а характеристика поля R отлична от 2, мы имеем $x^2=0$. Мы покажем, что не существует соотношений вида $\beta_0+\beta_1 x=0$, где β_0, $\beta_1\in B'$ и $\beta_1\neq 0$. Если бы такое соотношение имелось, то

$$0=d'(\beta_0+\beta_1 x)=\beta_0\otimes 1+(\beta_1\otimes 1)[x\otimes 1+1\otimes\eta(x)]=\beta_1\otimes\eta(x).$$

Так как $\eta(x)\neq 0$, то $\beta_1=0$, что приводит к противоречию. Следовательно, гомоморфизм $B'\otimes E_n(x)\to B$, переводящий $\beta\otimes 1$ в β, а $\beta\otimes x$ в βx, является изоморфизмом градуированных алгебр.

Предположим теперь, что степень элемента x четна. Мы покажем, что не существует соотношений вида $\sum\limits_{0\leqslant i\leqslant r}\beta_i x^i=0$, где $\beta_i\in B'$, $r\geqslant 1$ и $\beta_r\neq 0$. Если бы существовали такие соотношения, то среди них было бы одно наименьшей степени относительно x, которое мы и рассмотрим. Тогда

$$0=d'\left(\sum\beta_i x^i\right)=\sum(\beta_i\otimes 1)[x\otimes 1+1\otimes\eta(x)]^i=$$
$$=\left(\sum i\beta_i x^{i-1}\right)\otimes\eta(x)+\ldots+\beta_r\otimes(\eta(x))^r.$$

Единственным членом правой части этого равенства, принадлежащим подмодулю $B\otimes(B/A)^n$, является $\left(\sum i\beta_i x^{i-1}\right)\otimes\eta(x)$. Он должен равняться нулю, и так как $\eta(x)\neq 0$, то $\sum i\beta_i x^{i-1}=0$. Если $r>1$, то степень этого соотношения по x меньше, чем исходного (заметим, что $r\beta_r\neq 0$, поскольку характеристика поля R равна нулю), что приводит к противоречию. Если $r=1$, то $\beta_1=0$, что снова приводит к противоречию. Следовательно, не существует соотношений подобного рода, и, значит, гомоморфизм $B'\otimes S_n(x)\to B$, переводящий $\beta\otimes x^q$ в βx^q при $\beta\in B'$ и $q\geqslant 0$, является изоморфизмом градуированных алгебр. ∎

Мы используем этот результат при доказательстве следующей *структурной теоремы Лере* для алгебр Хопфа над полем характеристики нуль [1]):

12. Теорема. *Пусть B — связная алгебра Хопфа с ассоциативным и коммутативным умножением, имеющая конечный тип над полем R характеристики нуль. Тогда либо имеет место изоморфизм градуированных R-алгебр $B\approx R$, либо алгебра B как градуированная алгебра является тензорным произведением не более чем счет-*

[1]) Структурную теорему, справедливую для совершенного поля произвольной характеристики, можно найти в работе: Борель А., О когомологиях главных расслоенных пространств и однородных пространств компактных групп Ли, в сб. «Расслоенные пространства и их приложения», ИЛ, М., 1958, стр. 163—246.

ного числа внешних алгебр с образующими нечетных степеней и не более чем счетного числа алгебр полиномов с образующими четных степеней.

Доказательство. Так как алгебра B имеет конечный тип, существует счетная последовательность $1 = x_0, x_1, x_2, \ldots$ ее элементов, такая, что $\deg x_i \leqslant \deg x_j$ при $i < j$ и B как алгебра порождается множеством $\{x_j\}_{j \geqslant 0}$. Пусть $n \geqslant 0$, и пусть B_n — подалгебра алгебры B, порожденная элементами $x_0, x_1, \ldots, x_n$. Мы можем также предположить, что элемент x_{n+1} не принадлежит B_n. Поскольку известно, что степень $\deg x_j$ является неубывающей функцией аргумента j, всякая алгебра B_n является связной подалгеброй Хопфа алгебры B (т. е. d переводит B_n в $B_n \otimes B_n$). Так как B_{n+1} порождается как алгебра подалгеброй B_n и элементом x_{n+1}, можно применить лемму 11. Поскольку $B_0 \approx R$, имеем $B_1 \approx R \otimes E(x_1)$ или $B_1 \approx R \otimes S(x_1)$. Следовательно, либо $B = B_0 \approx R$, либо B_1 является или внешней алгеброй с образующей нечетной степени, или алгеброй полиномов с образующей четной степени. Индукцией по n, используя каждый раз лемму 11, получаем, что каждая подалгебра B_{n+1} является тензорным произведением алгебр нужного вида. Поскольку B — алгебра конечного типа, $B \approx \varinjlim B_n$, и, значит, сама алгебра B имеет требуемый вид. ∎

Если гомологии связного H-пространства конечно порождены над полем R, то в структурной теореме не может встретиться сомножитель, являющийся алгеброй полиномов. Таким образом, мы приходим к следующей *теореме Хопфа об H-пространствах*:

13. Следствие. *Пусть X — связное H-пространство, гомологии которого конечно порождены над полем R характеристики нуль. Тогда алгебра когомологий пространства X над полем R изоморфна алгебре когомологий над R произведения конечного числа нечетномерных сфер.* ∎

Отсюда, в частности, вытекает следующий результат относительно сфер:

14. Следствие. *Никакая четномерная сфера положительной размерности не может быть H-пространством.* ∎

§ 9. Квадраты Стинрода

В предыдущем параграфе $\smile$-произведение в когомологиях было использовано для доказательства геометрического результата — теоремы Борсука — Улама. Всякую другую алгебраическую структуру, которой можно наделить когомологии (или гомологии) и которая функториальна, можно использовать аналогичным образом.

Примером дополнительной алгебраической структуры такого рода является естественное преобразование одного когомологического функтора в другой. Эти естественные преобразования называются когомологическими операциями. В этом параграфе мы вводим понятие когомологической операции и определяем некоторое множество когомологических операций, называемых квадратами Стинрода.

Пусть фиксированы целые числа p и q и R-модули G и G'. *Когомологической операцией* θ *типа* $(p, q; G, G')$ называется естественное преобразование функтора $H^p(\ ;G)$ в функтор $H^q(\ ;G')$ (оба функтора являются контравариантными когомологическими сингулярными функторами, определенными на категории пар топологических пространств). Таким образом, θ сопоставляет паре топологических пространств (X, A) функцию (которая не обязательно должна быть гомоморфизмом)

$$\theta_{(X,\,A)}\colon H^p(X, A; G) \to H^q(X, A; G'),$$

такую, что для произвольного непрерывного отображения $f\colon (X, A) \to (Y, B)$ имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} H^p(Y, B; G) & \xrightarrow{\theta_{(Y,\,B)}} & H^q(Y, B; G') \\ \downarrow f^* & & \downarrow f^* \\ H^p(X, A; G) & \xrightarrow{\theta_{(X,\,A)}} & H^q(X, A; G'). \end{array}$$

Гомологические операции определяются аналогично, но мы не будем их изучать.

Приведем несколько примеров.

1. Если $\varphi\colon G \to G'$ — гомоморфизм, то φ_* — когомологическая операция типа $(q, q; G, G')$ для любого q. Гомоморфизм

$$\varphi_*\colon H^q(X, A; G) \to H^q(X, A; G')$$

определен в § 5.4. Он называется *операцией, индуцированной гомоморфизмом* φ *коэффициентов*.

2. Короткая точная последовательность R-модулей $0 \to G' \to G \to G'' \to 0$ порождает *когомологическую операцию Бокштейна* β^* типа $(q, q+1; G'', G')$ для всех чисел q, которая определяется как гомоморфизм Бокштейна

$$\beta^*\colon H^q(X, A; G'') \to H^{q+1}(X, A; G'),$$

соответствующий последовательности коэффициентов $0 \to G' \to G \to G'' \to 0$ (см. теорему 5.4.11).

3. Для любых p и q существует операция θ_p типа $(q, pq; R, R)$, называемая *возведением в p-ю степень* и определяемая равенством

$$\theta_p(u) = u^p, \qquad u \in H^q(X, A; R).$$

Операция θ называется *аддитивной*, если $\theta_{(X,A)}$ — гомоморфизм для каждой пары (X, A). Операции примеров 1 и 2 аддитивны, а операция из примера 3, вообще говоря, не является аддитивной.

Каждой когомологической операции соответствует необходимое условие того, чтобы гомоморфизм модулей когомологий пар топологических пространств был индуцирован некоторым непрерывным отображением этих пар. Например, если θ — операция типа $(p, q; G, G)$, то необходимое условие того, что гомоморфизм

$$\psi\colon H^*(Y, B; G) \to H^*(X, A; G)$$

индуцируется некоторым отображением $f\colon (X, A) \to (Y, B)$, состоит в том, что

$$\psi\theta_{(Y, B)} = \theta_{(X, A)}\psi\colon H^p(Y, B; G) \to H^q(X, A; G).$$

В этих терминах можно следующим образом сформулировать основную алгебраическую идею, на которой построено доказательство следствий 5.8.7 и 5.8.8: если $n > m \geqslant 1$, то не существует гомоморфизма

$$\psi\colon H^*(\mathbf{R}P^m; \mathbf{Z}_2) \to H^*(\mathbf{R}P^n; \mathbf{Z}_2),$$

переводящего ненулевой элемент группы $H^1(\mathbf{R}P^m; \mathbf{Z}_2)$ в ненулевой элемент группы $H^1(\mathbf{R}P^n; \mathbf{Z}_2)$ и коммутирующего с операцией возведения в $(m+1)$-ю степень θ_{m+1} типа $(1, m+1; \mathbf{Z}_2, \mathbf{Z}_2)$.

Теперь мы определим последовательность операций Sq^i, называемых квадратами Стинрода. Каждая операция Sq^i является когомологической операцией типа $(q, q+i; \mathbf{Z}_2, \mathbf{Z}_2)$ для всех q. К их числу принадлежит операция возведения в квадрат θ_2; эти операции связаны с ней при помощи некоторого специального «приведения» значения $\theta_2(u)$. Поэтому операции Sq^i называются также приведенными квадратами.

На протяжении оставшейся части этого параграфа мы будем считать, что все модули определены над полем $\mathbf{Z}_2$ и что все модули гомологий и когомологий берутся с коэффициентами в $\mathbf{Z}_2$. *Квадратами Стинрода, или приведенными квадратами,* $\{Sq^i\}_{i \geqslant 0}$ называются аддитивные когомологические операции

$$Sq^i\colon H^q(X, A) \to H^{q+i}(X, A),$$

определенные для всех q и обладающие следующими свойствами:

(a) $Sq^0 = 1$;

(b) если $\deg u = q$, то $Sq^q u = u \smile u$;

(c) если $q > \deg u$, то $Sq^q u = 0$;

(d) если $u \in H^*(X, B)$ и $v \in H^*(Y, B)$, а пара $\{X \times B, A \times Y\}$ удовлетворяет аксиоме вырезания в $X \times Y$, то справедлива следующая *формула Картана*:

$$Sq^k(u \times v) = \sum_{i+j=k} Sq^i u \times Sq^j v.$$

Сформулированные свойства полностью характеризуют когомологические операции Sq^i. Мы построим их, но не будем доказывать единственность[1]). Прежде всего мы докажем формулу, равносильную формуле Картана.

4. Лемма. *Если* $u, v \in H^*(X, A)$, *то*

$$Sq^k(u \smile v) = \sum_{i+j=k} Sq^i u \smile Sq^j v.$$

Доказательство. Поскольку $u \smile v = d^*(u \times v)$, где d: $(X, A) \to (X, A) \times (X, A)$ — диагональное отображение, требуемая формула следует из формулы Картана и свойств функториальности операций Sq^i. ■

Для любого цепного комплекса C пусть цепное отображение T: $C \otimes C \to C \otimes C$ есть перестановка сомножителей (отображение $T(c_1 \otimes c_2) = c_2 \otimes c_1$ является цепным над $\mathbf{Z}_2$).

5. Лемма. *Существует последовательность* $\{D_j\}_{j \geqslant 0}$ *функториальных гомоморфизмов* D_j: $\Delta(X) \to \Delta(X) \otimes \Delta(X)$ *степени* j, *для которых*

(a) D_0 — *цепное отображение, коммутирующее с аугментацией;*
(b) *если* $j > 0$, *то* $\partial D_j + D_j \partial + D_{j-1} + TD_{j-1} = 0$.

Если $\{D_j\}$ *и* $\{D'_j\}$ — *две такие последовательности, то существует последовательность* $\{E_j\}_{j \geqslant 0}$ *функториальных гомоморфизмов* E_j: $\Delta(X) \to \Delta(X) \otimes \Delta(X)$ *степени* j, *такая, что*

(c) $E_0 = 0$;
(d) *если* $j \geqslant 0$, *то* $\partial E_{j+1} + E_{j+1}\partial + E_j + TE_j + D_j + D'_j = 0$.

Доказательство. Воспользуемся методом ацикличных моделей. Пусть R — групповое кольцо группы $\mathbf{Z}_2$ над полем $\mathbf{Z}_2$. Мы будем рассматривать R как факторкольцо кольца полиномов $\mathbf{Z}_2[t]$ по идеалу, порожденному полиномом $t^2 + 1$. Таким образом, элементы кольца R имеют вид $a + bt$, где $a, b \in \mathbf{Z}_2$.

Рассмотрим $\mathbf{Z}_2$ как тривиальный R-модуль (т. е. каждый элемент кольца R индуцирует тождественное отображение группы $\mathbf{Z}_2$), и пусть C — свободная резольвента модуля $\mathbf{Z}_2$ над R, в которой каждая составляющая C_q свободна и имеет одну образующую d_q ($q \geqslant 0$), а граничный оператор и аугментация действуют по формулам $\partial(d_q) = (1 + t)\, d_{q-1}$ ($q > 0$) и $\varepsilon(d_0) = 1$. Функтор, сопоставляющий пространству X цепной комплекс $\Delta(X) \underset{\mathbf{Z}_2}{\otimes} C$, обла-

[1]) Доказательство можно найти в книге: Steenrod N., Epstein D., Cohomology operations, Ann. of Math. Studies, № 50, Princeton University Press, Princeton, 1962. [См. также Милнор Дж., Лекции о характеристических классах, *Математика*, 3:4 (1956). — *Прим. перев.*]

дает аугментацией и свободен над R относительно моделей $\{\Delta_q\}_{q\geqslant 0}$ и базиса $\{\xi_q \otimes d_j\}$[1]). Мы рассматриваем $\Delta(X) \underset{\mathbf{Z}_2}{\otimes} \Delta(X)$ как цепной комплекс над R, на котором t действует точно так же, как и T. Тогда комплекс $\Delta(X) \otimes \Delta(X)$ обладает аугментацией и ацикличен относительно моделей $\{\Delta_q\}_{q\geqslant 0}$. Из теоремы 4.3.3 (которая справедлива и для цепных комплексов над R) следует, что существуют естественные цепные отображения

$$\tau\colon \Delta(X) \otimes C \to \Delta(X) \otimes \Delta(X),$$

сохраняющие аугментацию, и любые два из них естественно цепно гомотопны.

Всякое отображение $\tau\colon \Delta(X) \otimes C \to \Delta(X) \otimes \Delta(X)$ степени 0 однозначно определяет такую последовательность отображений

$$D_j\colon \Delta(X) \to \Delta(X) \otimes \Delta(X), \qquad j \geqslant 0,$$

степени j, что $D_j(c) = \tau(c \otimes d_j)$, и обратно. Отображение τ тогда и только тогда является цепным отображением, сохраняющим аугментацию, когда последовательность $\{D_j\}$ удовлетворяет условиям (a) и (b). Таким образом, существуют семейства $\{D_j\}$, удовлетворяющие этим условиям, и каждое такое семейство соответствует некоторому отображению τ.

Аналогично, имеет место биективное соответствие между отображениями $H\colon \Delta(X) \otimes C \to \Delta(X) \otimes \Delta(X)$ степени 1 и такими последовательностями отображений

$$E_j\colon \Delta(X) \to \Delta(X) \otimes \Delta(X), \quad j \geqslant 0,$$

степени j, что $E_0 = 0$ и $E_j(c) = H(c \otimes d_{j-1})$, если $j \geqslant 1$. Отображение H является цепной гомотопией между τ и τ' в том и только в том случае, когда последовательность $\{E_j\}$ удовлетворяет условиям (c) и (d) применительно к последовательностям $\{D_j\}$ и $\{D'_j\}$, отвечающим отображениям τ и τ' соответственно. Таким образом, если $\{D_j\}$ и $\{D'_j\}$ — две последовательности, удовлетворяющие условиям (a) и (b), то существует последовательность $\{E_j\}$, удовлетворяющая условиям (c) и (d). ■

Для последовательности $\{D_j\}_{j\geqslant 0}$, фигурирующей в лемме 5, определим гомоморфизмы

$$D_j^*\colon \operatorname{Hom}(\Delta(X) \otimes \Delta(X), \mathbf{Z}_2) \to \operatorname{Hom}(\Delta(X), \mathbf{Z}_2)$$

степени $(-j)$, полагая $(D_j^* f)(\sigma) = f(D_j\sigma)$ для

$$\sigma \in \Delta_q(X), \qquad f \in \operatorname{Hom}(\Delta(X) \otimes \Delta(X), \mathbf{Z}_2).$$

---

[1]) Напомним, что $\xi_q\colon \Delta_q \subset \Delta_q$. — *Прим. перев.*

Пусть $c^* \in \mathrm{Hom}(\Delta_q(X), \mathbf{Z}_2)$ есть q-мерная коцепь комплекса $\Delta(X)$. Тогда

$$c^* \otimes c^* \in \mathrm{Hom}(\Delta(X) \otimes \Delta(X), \mathbf{Z}_2),$$

и мы определим $(q+i)$-мерную коцепь $Sq^i c^* \in \mathrm{Hom}(\Delta(X), \mathbf{Z}_2)$, полагая

$$Sq^i c^* = \begin{cases} 0, & i > q, \\ D^*_{q-i}(c^* \otimes c^*), & i \leqslant q. \end{cases}$$

Установим теперь некоторые свойства этих коцепных отображений. Удобно считать, что $D_j = 0$ для $j < 0$. В таком случае лемма 5b верна для всех j.

6. *Если коцепь c^* обращается в нуль на $\Delta(A)$ для некоторого подмножества $A \subset X$, то и коцепь $Sq^i c^*$ равна нулю на $\Delta(A)$.*

Доказательство. Это следует из естественности отображений $\{D_j\}$ и вытекающей из нее естественности отображений $\{Sq^i\}$. ■

7. *Если $\delta c^* = 0$, то $\delta(Sq^i c^*) = 0$.*

Доказательство. Утверждение тривиально, если $i > q$. Если же $i \leqslant q$, то мы имеем

$$\begin{aligned}\delta(Sq^i c^*)(\sigma) &= D^*_{q-i}(c^* \otimes c^*)(\partial\sigma) = (c^* \otimes c^*)(D_{q-i}\,\partial\sigma) = \\ &= (c^* \otimes c^*)(\partial D_{q-i}\sigma) + (c^* \otimes c^*)(D_{q-i-1}\sigma + TD_{q-i-1}\sigma) = \\ &= (c^* \otimes c^*)(\partial D_{q-i}\sigma),\end{aligned}$$

где последнее равенство имеет место в силу того, что $(c^* \otimes c^*)(Tc) = (c^* \otimes c^*)(c)$ для всякого элемента $c \in \Delta(X) \otimes \Delta(X)$. Далее,

$$(c^* \otimes c^*)(\partial D_{q-i}\sigma) = \delta(c^* \otimes c^*)(D_{q-i}\sigma) = 0,$$

поскольку $\delta c^* = 0$. ■

8. *Если $c^* = \delta\bar{c}^*$, то $Sq^i c^* = \delta\left[D^*_{q-i}(\bar{c}^* \otimes c^*) + D^*_{q-i-1}(\bar{c}^* \otimes \bar{c}^*)\right]$.*

Доказательство. Если $i > q$, то обе части равенства обращаются в нуль. Если же $i \leqslant q$, то

$$\begin{aligned}(Sq^i c^*)(\sigma) &= D^*_{q-i}(\delta\bar{c}^* \otimes \delta\bar{c}^*)(\sigma) = \delta(\bar{c}^* \otimes \delta\bar{c}^*)\left(D_{q-i}(\sigma)\right) = \\ &= (\bar{c}^* \otimes \delta\bar{c}^*)(D_{q-i}\partial\sigma + D_{q-i-1}\sigma + TD_{q-i-1}\sigma) = \\ &= D^*_{q-i}(\bar{c}^* \otimes c^*)(\partial\sigma) + \delta(\bar{c}^* \otimes \bar{c}^*)\left(D_{q-i-1}\sigma\right),\end{aligned}$$

причем последнее равенство следует из того, что

$$(\bar{c}^* \otimes \delta\bar{c}^*)(D_{q-i-1}\sigma + TD_{q-i-1}\sigma) = (\bar{c}^* \otimes \delta\bar{c}^* + \delta\bar{c}^* \otimes \bar{c}^*)(D_{q-i-1}\sigma).$$

Далее, имеем

$$\delta(\bar{c}^* \otimes \bar{c}^*)(D_{q-i-1}\sigma) = (\bar{c} \otimes \bar{c}^*)(D_{q-i-1}\,\partial\sigma + D_{q-i-2}\sigma + TD_{q-i-2}\sigma) = \\ = D^*_{q-i-1}(\bar{c}^* \otimes \bar{c}^*)(\partial\sigma).$$

Нужный нам результат получается теперь подстановкой этого равенства в правую часть предыдущего равенства. ■

9. *Если* c_1^* *и* c_2^* — *коциклы, то*

$$Sq^i(c_1^* + c_2^*) = Sq^i c_1^* + Sq^i c_2^* + \delta D^*_{q-i+1}(c_1^* \otimes c_2^*).$$

Доказательство. Если $i > q$, то обе части равны нулю. При $i \leqslant q$ имеем

$$Sq^i(c_1^* + c_2^*)(\sigma) = [(c_1^* + c_2^*) \otimes (c_1^* + c_2^*)](D_{q-i}\sigma) = \\ = [(c_1^* \otimes c_1^*) + (c_2^* \otimes c_2^*)](D_{q-i}\sigma) + (c_1^* \otimes c_2^*)(D_{q-i}\sigma + TD_{q-i}\sigma) = \\ = (Sq^i c_1^* + Sq^i c_2^*)(\sigma) + (c_1^* \otimes c_2^*)(D_{q-i+1}\,\partial\sigma + \partial D_{q-i+1}\sigma) = \\ = [Sq^i c_1^* + Sq^i c_2^* + \delta D^*_{q-i+1}(c_1^* \otimes c_2^*)](\sigma),$$

где последнее равенство следует из того, что $\delta(c_1^* \otimes c_2^*) = 0$. ■

Итак, существует корректно определенный функториальный гомоморфизм

$$Sq^i\colon H^q(X, A) \to H^{q+i}(X, A),$$

определяемый равенством $Sq^i\{c^*\} = \{Sq^i c^*\}$. Пусть $\{D_j'\}$ — другая система, удовлетворяющая условиям 5a и 5b, и пусть операция Sq'^i определена при помощи этой системы. Предположим также, что система $\{E_j\}$ удовлетворяет условиям 5c и 5d. Если c^* — некоторый q-мерный коцикл комплекса $\Delta(X)/\Delta(A)$, то

$$(c^* \otimes c^*)(D_{q-i}\sigma + D'_{q-i}\sigma + E_{q-i+1}\,\partial\sigma) = 0.$$

Следовательно,

$$Sq^i c^* + Sq'^i c^* + \delta E^*_{q-i+1}(c^* \otimes c^*) = 0,$$

откуда $Sq^i\{c^*\} = Sq'^i\{c^*\}$. Следовательно, операция Sq^i определяется единственным образом и не зависит от произвола в выборе системы $\{D_j\}$. Теперь мы займемся проверкой того, что эти когомологические операции $\{Sq^i\}$ удовлетворяют аксиомам, характеризующим квадраты Стинрода.

10. Теорема. *Аддитивные когомологические операции* $\{Sq^i\}$, *определенные выше, удовлетворяют условиям* 5a — d.

Доказательство. Пусть $C(\Delta^q)$ — ориентированный цепной комплекс симплекса Δ^q. Для всякого симплекса существует только одна его ориентация над $\mathbf{Z}_2$, так что комплекс $C(\Delta^q)$ изоморфен подкомплексу комплекса $\Delta(\Delta^q)$, порожденному сингулярными симплексами — гранями симплекса Δ^q; поэтому мы будем считать $C(\Delta^q)$ подкомплексом комплекса $\Delta(\Delta^q)$. Комплекс $\tilde{C}(\Delta^q)$ ацикличен, и если $\lambda: \Delta^p \to \Delta^q$ есть p-мерная грань симплекса Δ^q, то $\Delta(\lambda)(C(\Delta^p)) \subset C(\Delta^q)$. Поэтому можно найти такую последовательность $\{D_j\}$, удовлетворяющую условиям (a) и (b) леммы 5, что $D_j(\xi_q) \in C(\Delta^q) \otimes C(\Delta^q)$ для всех q и j. Для такой последовательности выполняется равенство $D_j(\xi_q) = 0$ при $j > q$ (поскольку $[C(\Delta^q) \otimes C(\Delta^q)]_s = 0$ при $s > 2q$). Значит, $D_j(\sigma) = 0$ для всех симплексов $\sigma \in \Delta_q(x)$ при $q < j$.

Теперь мы докажем равенство $D_q(\xi_q) = \xi_q \otimes \xi_q$ для всех q индукцией по q. Если $q = 0$, то, согласно 5a, элемент $D_0(\xi_0)$ должен переходить в ненулевой элемент при аугментации. Единственным элементом группы $C(\Delta^0) \otimes C(\Delta^0)$, удовлетворяющим этому условию, является $\xi_0 \otimes \xi_0$. Следовательно, $D_0(\xi_0) = \xi_0 \otimes \xi_0$. Предположим, что $q > 0$, и пусть $D_{q-1}(\xi_{q-1}) = \xi_{q-1} \otimes \xi_{q-1}$. Тогда либо $D_q(\xi_q) = \xi_q \otimes \xi_q$, либо $D_q(\xi_q) = 0$. В последнем случае в силу 5b имеем (так как $D_q(\partial\xi_q) = 0$)

$$D_{q-1}(\xi_q) + TD_{q-1}(\xi_q) = 0.$$

Отсюда следует, что $D_{q-1}(\xi_q) = \sum a_i \left(\xi_q \otimes \xi_q^{(i)} + \xi_q^{(i)} \otimes \xi_q\right)$, где $a_i = 0$ или 1. Но это противоречие, поскольку

$$D_{q-2}(\xi_q) + TD_{q-2}(\xi_q) = \partial D_{q-1}(\xi_q) + D_{q-1}(\partial\xi_q),$$

и при элементе $\xi_q^{(i)} \otimes \xi_q^{(i)}$ справа стоит коэффициент $2a_i + 1 = 1$, а слева — коэффициент 0.

Следовательно, при таком выборе последовательности $\{D_j\}$ мы имеем $D_q(\sigma) = \sigma \otimes \sigma$, если σ имеет степень q. Тогда

$$(Sq^0 c^*)(\sigma) = (c^* \otimes c^*)(D_q(\sigma)) = [c^*(\sigma)]^2.$$

Поскольку $a^2 = a$, если $a \in \mathbf{Z}_2$, то $Sq^0 c^* = c^*$, т. е. $Sq^0 = 1$. Значит, условие (a) выполняется.

По определению D_0 является цепной аппроксимацией диагонального отображения. Следовательно, для любого коцикла c^* имеет место равенство $\{D_0^*(c^* \otimes c^*)\} = \{c^*\} \smile \{c^*\}$. Таким образом, $Sq^q u = u \smile u$, если $\deg u = q$. Значит, условие (b) выполняется. Из определения операций Sq^i немедленно получается условие (c).

Теперь осталось лишь проверить формулу Картана. Пусть последовательность $\{D_j\}$ удовлетворяет условиям (a) и (b) леммы 5, и пусть $\{D_j^X\}$ — соответствующая ей последовательность гомоморфизмов для комплекса $\Delta(X)$. На категории пар топологических пространств X и Y последовательности $\{D_k^{X+Y}\}$ и $\left\{T \sum\limits_{i+j=k} T^k D_i^X \otimes D_j^Y\right\}$, где

$\overline{T}$: $[\Delta(X)\otimes\Delta(X)]\otimes[\Delta(Y)\otimes\Delta(Y)]\to[\Delta(X)\otimes\Delta(Y)]\otimes[\Delta(X)\otimes\Delta(Y)]$

является перестановкой второго и третьего сомножителей, обе удовлетворяют условиям (a) и (b) леммы 5. Методом ацикличных моделей можно построить систему $\{E_k^{X\times Y}\}$, удовлетворяющую условиям 5c и 5d применительно к этим последовательностям. Следовательно, систему

$$\left\{\overline{T}\sum_{i+j=k}T^kD_i^X\otimes D_j^Y\right\}$$

можно использовать для определения элементов $Sq^k(u\times v)$, где $u\in H^*(X, A)$ и $v\in H^*(Y, B)$. Пусть c_1^* — какая-нибудь p-мерная коцепь пространства X, а c_2^* — какая-нибудь q-мерная коцепь пространства Y, σ_1 — сингулярный p'-мерный симплекс пространства X, где $p\leqslant p'\leqslant 2p$, а σ_2 — сингулярный q'-мерный симплекс пространства Y, где $q\leqslant q'\leqslant 2q$, причем $p'+q'=p+q+k$. Тогда

$$\begin{aligned}Sq^k(c_1^*\otimes c_2^*)(\sigma_1\otimes\sigma_2)&=[(c_1^*\otimes c_2^*)\otimes(c_1^*\otimes c_2^*)](D_{p+q-k}^{X\times Y}(\sigma_1\otimes\sigma_2))=\\&=[(c_1^*\otimes c_1^*)\otimes(c_2^*\otimes c_2^*)]\Big(\sum_{i+j=p+q-k}T^{p+q-k}D_i^X\sigma_1\otimes D_j^Y\sigma_2\Big)=\\&=[(c_1^*\otimes c_1^*)(D_{2p-p'}\sigma_1)][(c_2^*\otimes c_2^*)(D_{2q-q'}\sigma_2)]=\\&=(Sq^{p'-p}c_1^*\otimes Sq^{q'-q}c_2^*)(\sigma_1\otimes\sigma_2).\end{aligned}$$

Считая симплексы σ_1 и σ_2 переменными, получаем $Sq^k(c_1^*\otimes c_2^*)=$ $=\sum_{i+j=k}Sq^ic_1^*\otimes Sq^jc_2^*$. Переходя к когомологиям и используя естественное преобразование

$$H^*(X, A)\otimes H^*(Y, B)\to H^*([\Delta(X)/\Delta(A)]\otimes[\Delta(Y)/\Delta(B)])\approx$$
$$\approx H^*((X, A)\times(Y, B)),$$

переводящее тензорное произведение в прямое произведение, мы получаем

$$Sq^k(u\times v)=\sum_{i+j=k}Sq^iu\times Sq^jv.$$

Значит, условие (d) выполняется. ■

11. Пример. Заметим, что по условию 5b и теореме 5.8.5 гомоморфизм

$$Sq^2\colon H^2(\mathbf{C}P^2)\to H^4(\mathbf{C}P^2)$$

нетривиален. Если элемент $u\in H^2(\mathbf{C}P^2)$ таков, что $Sq^2u\neq 0$, и если элемент $v\in H^1(I, \dot{I})$ нетривиален, то из условия (d) следует, что

$$Sq^2(u\times v)=Sq^2u\times v$$

и что гомоморфизм Sq^2: $H^3(\mathbf{C}P^2 \times (I, \dot{I})) \to H^5(\mathbf{C}P^2 \times (I, \dot{I}))$ нетривиален. Пусть X — неприведенная надстройка пространства $\mathbf{C}P^2$, полученная из $\mathbf{C}P^2 \times I$ отождествлением всех точек $\mathbf{C}P^2 \times 0$ в одну точку x_0 и всех точек $\mathbf{C}P^2 \times 1$ в другую точку x_1. Тогда существует непрерывное отображение

$$f\colon \mathbf{C}P^2 \times (I, \dot{I}) \to (X, x_0 \cup x_1),$$

индуцирующее для всех q изоморфизм

$$f^*\colon H^q(X, x_0 \cup x_1) \approx H^q(\mathbf{C}P^2 \times (I, \dot{I})).$$

Следовательно, гомоморфизм Sq^2: $H^3(X) \to H^5(X)$ нетривиален. Пусть Y — букет сфер S^3 и S^5. Несложное вычисление показывает, что пространства X и Y обладают изоморфными модулями гомологий и когомологий и даже изоморфными $\smile$- и $\frown$-произведениями. Однако, поскольку гомоморфизм Sq^2: $H^3(X) \to H^5(X)$ нетривиален, а гомоморфизм Sq^2: $H^3(Y) \to H^5(Y)$ тривиален [1]), пространства X и Y не могут принадлежать к одному и тому же гомотопическому типу.

Дальнейшие применения квадратов Стинрода даются в следующей главе, а также в гл. 8.

Очевидно, что когомологические операции одного и того же типа можно складывать и снова получать когомологические операции того же типа. Для когомологической операции θ типа $(p, q; G, G')$ и операции θ' типа $(q, r; G', G'')$ их композиция $\theta'\theta$ (т. е. композиция естественных преобразований) является когомологической операцией типа $(p, r; G, G'')$. Таким образом, квадраты Стинрода можно складывать и умножать. Они образуют алгебру когомологических операций, называемую *алгеброй Стинрода по модулю* 2.

В этой алгебре имеют место следующие *соотношения Адема* [2]):

$$Sq^i Sq^j = \sum_{0 \leqslant k \leqslant [i/2]} \binom{j-k-1}{i-2k} Sq^{i+j-k} Sq^k, \quad 0 < i < 2j,$$

где $[i/2]$ означает, как обычно, наибольшее целое число $\leqslant i/2$, а биномиальные коэффициенты $\binom{j-k-1}{i-2k}$ приведены по $\operatorname{mod} 2$.

---

[1]) Чтобы убедиться в этом, достаточно рассмотреть отображение $S^3 \vee S^5 \to S^3$ (где $S^3 \vee S^5$ — букет сфер), стягивающее S^5 в одну точку, и воспользоваться функториальностью операции Sq^2. — *Прим. ред.*

[2]) См. Adem J., The iteration of the Steenrod squares in algebraic topology, *Proc. Nat. Acad. Sci., USA*, **38** (1952), 720—726, или Cartan A., Sur l'iteration des operations de Steenrod, *Comm. Math. Helv.*, **29** (1955), 40—58. [См. также цикл статей по когомологическим операциям, переводы которых помещены в сб. *Математика*, **5** : 2 (1961). — *Прим. перев.*]

Используя эти соотношения, легко показать, что алгебра когомологических операций, порожденная элементами Sq^i, где показатель i пробегает все степени двойки, содержит все без исключения квадраты Стинрода. Отсюда вытекает, что если сфера является H-пространством, то ее размерность должна быть равна 2^n-1 для некоторого n. Используя более тонкие свойства алгебры когомологических операций, Адамс [1]) доказал, что H-пространствами могут быть только сферы S^0, S^1, S^3 и S^7. Каждая из них действительно является H-пространством. При этом умножение на них определяется умножением равных единице по модулю действительных или комплексных чисел, кватернионов или чисел Кэли соответственно.

УПРАЖНЕНИЯ

А. Разбиения

Пусть C — градуированный модуль над кольцом R. *Возрастающей фильтрацией* модуля C называется последовательность $\{F_sC\}$ градуированных подмодулей модуля C, такая, что $F_sC\subset F_{s+1}C$ для всех s. Фильтрация называется *ограниченной снизу*, если для всякого t существует такое число $s(t)$, что $F_{s(t)}C_t=0$, и называется *сходящейся сверху*, если $\bigcup F_sC=C$.

1. Если $\{F_sC\}$ — фильтрация подкомплексами цепного комплекса C, то существует возрастающая фильтрация модуля гомологий $H_*(C)$, определяемая равенством $F_sH_*(C)=\operatorname{im}[H_*(F_sC)\to H_*(C)]$. Докажите, что если первоначальная фильтрация ограничена снизу или сходится сверху, то то же самое верно и для индуцированной фильтрации модуля $H_*(C)$.

Возрастающая фильтрация $\{F_sC\}$ подкомплексами цепного комплекса C называется *разбиением*, если она ограничена снизу, сходится сверху и

$$H_q(F_{s+1}C,\ F_sC)=0,\quad q\neq s+1.$$

Для данного разбиения $\{F_sC\}$ цепного комплекса C последовательность

$$\ldots\to H_{q+1}(F_{q+1}C,\ F_qC)\xrightarrow{\partial} H_q(F_qC,\ F_{q-1}C)\xrightarrow{\partial} H_{q-1}(F_{q-1}C,\ F_{q-2}C)\to\ldots$$

является цепным комплексом (обозначается $\overline{C}$) и называется *цепным комплексом, ассоциированным с данным разбиением*.

2. Докажите, что если $\overline{C}$ — цепной комплекс, ассоциированный с некоторым разбиением комплекса C, то $H_*(\overline{C})\approx H_*(C)$.

3. Пусть разбиение свободными подкомплексами $\{F_sC\}$ свободного цепного комплекса C таково, что комплексы $F_{s+1}C/F_sC$ свободны для всех s. Докажите, что если $\overline{C}$ — цепной комплекс, ассоциированный с данным разбиением, то модули гомологий и когомологий комплексов $\overline{C}$ и C изоморфны для любых модулей коэффициентов. (*Указание*. Из предположения о том, что все комплексы свободны, следует, что теорема об универсальных коэффициентах верна как для гомологий, так и для когомологий. Тогда набор $\{F_sC\otimes G\}$ является разбиением комплекса $C\otimes G$, ассоциированный с которым комплекс изоморфен $\overline{C}\otimes G$. Двойственные рассуждения применимы к комплексам $\{\operatorname{Hom}(F_sC,\ G)\}$ и $\operatorname{Hom}(C,\ G)$.)

---

[1]) См. Adams J. F., On the non-existence of elements of Hopf invariant one, *Ann. Math.*, **72** (1960), 20—104. [Перевод в сб. *Математика*, **5**:4 (1961).]

Разбиением на блоки цепного комплекса C называется такая совокупность его подкомплексов $\{E_j^q\}$, называемых *блоками*, где q пробегает множество целых чисел, а j при каждом q изменяется в некотором множестве J_q, что если F_sC — подкомплекс комплекса C, порожденный подкомплексами $\{E_j^q\}_{q\leqslant s}$, и если $\dot{E}_j^q = E_j^q \cap F_{s-1}C$, то

$$\begin{array}{ll} E_j^q \cap E_k^q \subset F_{q-1}C, & j \neq k, \\ E_j^q = 0, & q \text{ достаточно мало}, \\ \bigcup F_sC = C, & \\ H_i(E_j^q, \dot{E}_j^q) \approx \begin{cases} 0, & i \neq q, \\ R, & i = q. \end{cases} \end{array}$$

4. Докажите, что если $\{E_j^q\}$ — разбиение на блоки цепного комплекса C, то $\{F_sC\}$ — разбиение комплекса C, ассоциированный с которым цепной комплекс $\overline{C}$ свободен, а образующие модуля $\overline{C}_q$ находятся во взаимно однозначном соответствии с элементами множества J_q.

Разбиением на блоки симплициального комплекса K называется совокупность его подкомплексов $\{K_j^q\}$, где q пробегает все целые числа, а для каждого q индекс j изменяется в некотором множестве J_q, такая, что если $F_sK = \bigcup_{j\leqslant s} K_j^q$ и $\dot{K}_j^q = F_{s-1}K \cap K_j^q$, то

$$\begin{array}{ll} K_j^q \cap K_k^q \subset F_{q-1}K, & j \neq k, \\ K_j^q = 0, & q \text{ достаточно мало} \\ \bigcup F_sK = K, \qquad H_i(K_j^q, \dot{K}_j^q) \approx \begin{cases} 0, \\ \mathbf{Z}, \end{cases} & \begin{array}{l} i \neq q, \\ i = q. \end{array} \end{array}$$

5. Докажите, что если $\{K_j^q\}$ — разбиение на блоки симплициального комплекса K, то $\{C(K_j^q)\}$ — разбиение на блоки свободными подкомплексами цепного комплекса $C(K)$. Докажите, что если $\overline{C}$ — цепной комплекс, ассоциированный с этим разбиением, то гомологии и когомологии комплексов $\overline{C}$ и $C(K)$ изоморфны для любых групп коэффициентов.

В. Гомологические многообразия

Гомологическим n-мерным многообразием называется локально компактное хаусдорфово пространство X, такое, что для всех точек $x \in X$ имеет место равенство $H_q(X, X-x) = 0$ при $q \neq n$ и либо $H_n(X, X-x) = 0$, либо $H_n(X, X-x) \approx \mathbf{Z}$. Далее, определим *край* $\dot{X}$ многообразия X как подмножество

$$\dot{X} = \{x \in X \mid H_n(X, X-x) = 0\}.$$

Мы будем предполагать, что $X - \dot{X}$ — непустое связное множество. Если $\dot{X} = \varnothing$, то говорят, что X — многообразие *без края*.

1. Если X — гомологическое n-мерное многообразие, а Y — гомологическое m-мерное многообразие, то $X \times Y$ — гомологическое $(m+n)$-мерное многообразие с краем $\dot{X} \times Y \cup X \times \dot{Y}$. Докажите это.

2. Докажите, что если полиэдр представляет собой гомологическое n-мерное многообразие, то его край является подполиэдром.

3. Докажите, что если K — симплициальный комплекс, триангулирующий n-мерное гомологическое многообразие X, то K представляет собой n-мерное псевдомногообразие, а $\dot{K}$ есть триангуляция пространства $\dot{X}$.

(Гомологическое полиэдральное n-мерное многообразие называется *ориентируемым* или *неориентируемым* в зависимости от того, является оно ориентируемым или нет как псевдомногообразие.)

4. Пусть $(K, \dot{K})$ — симплициальная пара, триангулирующая полиэдральное гомологическое n-мерное многообразие $(X, \dot{X})$, и пусть L — подкомплекс барицентрического подразделения K' комплекса K, состоящий из всех симплексов, которые не пересекаются с $\dot{K}'$. Пусть s^q — некоторый q-мерный симплекс, принадлежащий $K - \dot{K}$, и пусть $E^{n-q}(s^q)$ — подкомплекс комплекса L, порожденный звездой центра $b(s^q)$ [1]). Докажите, что $\{E^{n-q}(s^q)\}_{s^q \in K - \dot{K}}$ — разбиение на блоки комплекса L, и если $\overline{C}$ — цепной комплекс, ассоциированный с этим разбиением, то гомологии и когомологии комплекса $\overline{C}$ и пространства $X - \dot{X}$ совпадают. (*Указание.* Пусть $\operatorname{st} s^q = s^q * B(s^q)$, где $B(s^q)$ — некоторый подкомплекс комплекса K. Тогда $E^{n-q}(s^q) = b(s^q) * [B(s^q)]'$ и $\dot{E}^{n-q}(s^q) = [B(s^q)]'$. Заметим также, что полиэдр $|L|$ является сильным деформационным ретрактом пространства $|K| - |\dot{K}|$.)

5. *Теорема двойственности Лефшеца.* Пусть $(K, \dot{K})$ — симплициальная пара, триангулирующая компактное гомологическое n-мерное многообразие $(X, \dot{X})$, и пусть $z \in H_n(K, \dot{K})$ — класс ориентации комплекса K. Для каждого q-мерного симплекса s^q, лежащего в $K - \dot{K}$, пусть $z(s^q) \in H_n(K, K - \operatorname{st} s^q)$ — образ элемента z; предположим, что ориентация σ^q симплекса s^q выбрана раз и навсегда. Тогда $z(s^q) = \sigma^q * \bar{z}(\sigma^q)$ [2]), где $\bar{z}(\sigma^q) \in H_{n-q-1}(B(s^q))$. Определим элемент $z'(\sigma^q) \in H_{n-q}(E^{n-q}(s^q), \dot{E}^{n-q}(s^q))$ как образ элемента $\bar{z}(\sigma^q)$ при изоморфизмах

$$H_{n-q-1}(B(s^q)) \approx H_{n-q-1}(\dot{E}^{n-q}(s^q)) \approx H_{n-q}(E^{n-q}(s^q), \dot{E}^{n-q}(s^q)).$$

Пусть гомоморфизм φ: $\operatorname{Hom}(C_q(K, \dot{K}), G) \to \overline{C}_{n-q} \otimes G$ определен равенством

$$\varphi(u) = \sum_{\sigma^q} z'(\sigma^q) \otimes u(\sigma^q), \qquad u \in \operatorname{Hom}(C_q(K, \dot{K}), G).$$

Докажите, что φ — изоморфизм, коммутирующий с точностью до знака с соответствующими граничным и кограничным операторами [3]). Получите отсюда изоморфизмы

$$H^q(X, \dot{X}; G) \approx H_{n-q}(X - \dot{X}; G), \qquad H_q(X, \dot{X}; G) \approx H^{n-q}(X - \dot{X}; G).$$

---

[1]) Уточним определение комплекса $E^{n-q}(s^q)$. Пусть $\{s_i^{q_i}\}$ — набор симплексов комплекса K, содержащих симплекс s^q в качестве грани, а $K'(s^q)$ — полный подкомплекс комплекса K' с вершинами $\{b(s_i^{q_i})\}$ и $b(s^q)$. Тогда $E^{n-q}(s^q) = K'(s^q) \cap L$. — *Прим. ред.*

[2]) Пусть $M = K_1 * K_2$, $\sigma_1 = (x_0, \ldots, x_p)$ — ориентированный симплекс комплекса K_1, а $\sigma_2 = (y_0, \ldots, y_q)$ — ориентированный симплекс комплекса K_2. Тогда $(x_0, \ldots, x_p, y_0, \ldots, y_q)$ — ориентированный симплекс комплекса M. Соответствие $(\sigma_1, \sigma_2) \to \sigma_1 * \sigma_2$ порождает цепное отображение φ: $C_*(K_1) \otimes C_*(K_2) \to C_*(M)$ степени 1. Если $h_1 \in H_*(K_1)$ и $h_2 \in H_*(K_2)$, то элемент $[\nu(c_1 \otimes c_2)] \in H_*(M)$ обозначается через $h_1 * h_2$, где $[c_1] = h_1$, $[c_2] = h_2$. — *Прим. ред.*

[3]) То есть $\varphi\delta = \pm d\varphi$. — *Прим. ред.*

C. Свойства периодического произведения и функтора Ext

В этой группе упражнений все модули рассматриваются над областью главных идеалов R.

1. Докажите, что периодическое произведение ассоциативно.

2. Докажите, что если A, B и C — произвольные модули, то функтор

$$A \otimes (B * C) \oplus A * (B \otimes C)$$

симметричен относительно A, B и C.

3. Докажите, что для заданных модуля A и короткой точной последовательности модулей

$$0 \to B' \to B \to B'' \to 0$$

имеет место точная последовательность

$$0 \to \operatorname{Hom}(A, B') \to \operatorname{Hom}(A, B) \to \operatorname{Hom}(A, B'') \to$$
$$\to \operatorname{Ext}(A, B') \to \operatorname{Ext}(A, B) \to \operatorname{Ext}(A, B'') \to 0.$$

4. Докажите, что для заданных модуля B и короткой точной последовательности модулей

$$0 \to A' \to A \to A'' \to 0$$

имеет место точная последовательность

$$0 \to \operatorname{Hom}(A'', B) \to \operatorname{Hom}(A, B) \to \operatorname{Hom}(A', B) \to$$
$$\to \operatorname{Ext}(A'', B) \to \operatorname{Ext}(A, B) \to \operatorname{Ext}(A', B) \to 0.$$

Если $C = \{C_i\}$ и $C^* = \{C^j\}$ — градуированные модули, то можно определить градуированный модуль $\operatorname{Hom}(C, C^*) = \{\operatorname{Hom}^q(C, C^*)\}$, полагая $\operatorname{Hom}^q(C, C^*) = \prod_{i+j=q} \operatorname{Hom}(C_i, C^j)$ (таким образом, элементом группы $\operatorname{Hom}^q(C, C^*)$ является семейство гомоморфизмов $\{\varphi_i: C_i \to C^{q-i}\}_i$). Аналогично можно определить градуированный модуль $\operatorname{Ext}(C, C^*) = \{\operatorname{Ext}^q(C, C^*)\}$, полагая $\operatorname{Ext}^q(C, C^*) = \prod_{i+j=q} \operatorname{Ext}(C_i, C^j)$.

5. Докажите, что если C — цепной комплекс, а C^* — коцепной комплекс, то $\operatorname{Hom}(C, C^*)$ является коцепным комплексом с кограничным дифференциалом

$$(\delta\varphi)_{i,j} = \varphi_{i-1,j} \circ \partial_i + (-1)^i \delta^{j-1} \circ \varphi_{i,j-1}, \quad \varphi = \{\varphi_{i,j}\} \in \operatorname{Hom}^q(C, C^*),$$

а $\operatorname{Ext}(C, C^*)$ является коцепным комплексом с кограничным дифференциалом

$$(\delta\psi)_{i,j} = \operatorname{Ext}(\partial_i, 1)(\psi_{i-1,j}) + (-1)^i \operatorname{Ext}(1, \delta^{j-1})(\psi_{i,j-1}),$$
$$\psi = \{\psi_{i,j}\} \in \operatorname{Ext}^q(C, C^*).$$

6. Докажите, что если цепной комплекс C и коцепной комплекс C^* таковы, что комплекс $\operatorname{Ext}(C, C^*)$ ацикличен, то имеет место расщепляющаяся короткая точная последовательность

$$0 \to \operatorname{Ext}^{q-1}(H_*(C), H^*(C^*)) \to H^q(\operatorname{Hom}(C, C^*)) \to \operatorname{Hom}^q(H_*(C), H^*(C^*)) \to 0.$$

7. Пусть C и C' — цепные комплексы, а C^* — коцепной комплекс. Покажите, что экспоненциальное соответствие

$$\operatorname{Hom}(C, \operatorname{Hom}(C', C^*)) \approx \operatorname{Hom}(C \otimes C', C^*)$$

является изоморфизмом.

8. Пусть пары топологических пространств (X, A) и (Y, B) таковы, что пара $\{X \times B, A \times Y\}$ удовлетворяет аксиоме вырезания в $X \times Y$. Докажите, что для любого модуля коэффициентов G имеет место расщепляющаяся короткая точная последовательность

$$0 \to \operatorname{Ext}^{q-1}(H_*, H^*) \to H^q((X, A) \times (Y, B); G) \to \operatorname{Hom}^q(H_*, H^*) \to 0,$$

где $H_* = H_*(X, A; R)$ и $H^* = H^*(Y, B; G)$.

D. Категория

Говорят, что *категория* топологического пространства X не превосходит n (обозначается $\operatorname{cat} X \leqslant n$), если X является объединением n замкнутых множеств, каждое из которых деформируемо в точку внутри X.

1. Докажите, что если X — связный полиэдр размерности n, то $\operatorname{cat} X \leqslant n+1$.

2. Докажите, что если X — произвольное пространство, то $\operatorname{cat}(SX) \leqslant 2$.

3. Докажите, что если $\operatorname{cat} X \leqslant n$, то n-кратное $\smile$-произведение классов когомологий положительной размерности пространства X обращается в нуль.

4. Докажите, что $\operatorname{cat} \mathbf{R}P^n = n+1$ и $\operatorname{cat}(\mathbf{R}P^{n_1} \times \ldots \times \mathbf{R}P^{n_k}) = n_1 + \ldots + n_k + 1$.

E. Гомологии расслоеиных пространств

1. Пусть $p\colon E \to B$ — пара расслоеиных пространств с парой пространств расслоения $(E, \dot{E})$ и парой слоев $(F, \dot{F})$, причем $H_*(F, \dot{F}) = 0$. Докажите, что $H_*(E, \dot{E}) = 0$.

2. Пусть $p\colon E \to B$ — пара расслоенных пространств над линейно связной базой B. Покажите, что гомоморфизм $\theta\colon H^*(F, \dot{F}; R) \to H^*(E, \dot{E}; R)$ тогда и только тогда является когомологическим расширением слоя, когда для некоторой точки $b \in B$ является изоморфизмом композиция

$$H^*(F, \dot{F}; R) \xrightarrow{\theta} H^*(E, \dot{E}; R) \to H^*(E_b, \dot{E}_b; R).$$

3. Пусть $p\colon E \to B$ — пара расслоенных простраиств над линейно связной базой. Докажите, что если для некоторой точки $b \in B$ пара $(E_b, \dot{E}_b)$ является слабым ретрактом пары $(E, \dot{E})$, то существует когомологическое расширение слоя.

4. Докажите, что расслоение на q-мерные сферы ξ над базой B тогда и только тогда ориентируемо иад R, когда для каждого отображения $\alpha\colon S^1 \to B$ индуцированное расслоение $\alpha^*(\xi)$ ориентируемо над R.

5. Докажите, что расслоение ξ на q-мерные сферы тогда и только тогда ориентируемо над $\mathbf{Z}$, когда существует элемент $U \in H^{q+1}(E_\xi, \dot{E}_\xi; \mathbf{Z}_4)$, образ которого в группе $H^{q+1}(E_\xi, \dot{E}_\xi; \mathbf{Z}_2)$ есть единственный класс ориентации расслоения ξ над $\mathbf{Z}_2$. (*Указание*. Покажите, что существование такого элемента равиосильно тому, что для каждого замкнутого пути ω в базе гомоморфизм $h^*_{[\omega]}$ является тождественым отображением группы $H^{q+1}(E_{\omega(1)}, \dot{E}_{\omega(1)}; \mathbf{Z}_4)$, а это в свою очередь эквивалентно тому, что $h^*_{[\omega]}$ является тождественным отображением группы $H^{q+1}(E_{\omega(1)}, \dot{E}_{\omega(1)}; \mathbf{Z})$.)

6. Пусть $U_\xi \in H^{q+1}(E_\xi, \dot{E}_\xi; R)$ — класс ориентации расслоения ξ на q-мерные сферы над базой B, и пусть $\Omega_\xi \in H^{q+1}(B; R)$ — соответствующий характеристический класс. Докажите, что $\Phi^*_\xi(\Omega_\xi) = U_\xi \smile U_\xi$.

7. Докажите, что характеристический класс Ω_ξ ориентированного над $\mathbf{Z}$ расслоения ξ на четиомерные сферы имеет порядок 2.

8. Пусть ξ — ориентированное над R расслоение иа сферы с базой B. Если расслоеиие ξ допускает сечение в $\dot{E}_\xi$ (т. е. если отображение $\dot{p}_\xi$: $\dot{E}_\xi \to B$ имеет левое обратное), то его характеристический класс обращается в нуль, т. е. $\Omega_\xi = 0$. (*Указание.* Любые два сечения $B \to E_\xi$ гомотопны в E_ξ. Поскольку E_ξ является цилиндром отображения $\dot{p}_\xi$: $\dot{E}_\xi \to B$, существует вложение k: $B \subset E_\xi$, являющееся сечением. Существование сечения в $\dot{E}_\xi$ равносильно тому, что k гомотопно некоторому отображеиию $B \to \dot{E}_\xi$, и в этом случае композиция

$$H^{q+1}(E_\xi, \dot{E}_\xi;\ R) \xrightarrow{i^*} H^{q+1}(E_\xi;\ R) \xrightarrow{p^{*-1}} H^{q+1}(B;\ R)$$

тривиальна, поскольку $p^{*-1} = k^*$.)

F. Алгебры Хопфа

1. Докажите, что тензорное произведение связных алгебр Хопфа является связной алгеброй Хопфа.

2. Докажите, что если B — связная алгебра Хопфа конечного типа над полем R, то $B^* = \operatorname{Hom}(B, R)$ является связной алгеброй Хопфа над R, умножение и коумножение в которой двойственны коумножению и умножению в B соответственно.

3. Пусть B — связная алгебра Хопфа иад полем характеристики $p \neq 0$. Предположим, что умножеиие в B ассоциативно и коммутативно и что B порождается как алгебра единственным элементом x положительной степени. Докажите, что если $\deg x$ нечетна и $p \neq 2$, то $B = E(x)$, а если $\deg x$ четна или $p = 2$, то либо $B = S_{\deg x}(x)$, либо $B = T_{\deg x,\, h}(x)$, где $h = p^k$ для некоторого $k \geqslant 1$.

4. Пусть B — связная алгебра Хопфа конечиого типа над полем конечной характеристики $p \neq 0$; предположим, что умножение в B ассоциативно и коммутативно. Докажите, что если p-я степень произвольного элемента положительной степени алгебры B равна нулю, то B является тензорным произведением внешних алгебр (с образующими нечетной степени, если $p \neq 2$) и срезанных алгебр полииомов веса p (с образующими четной степени, если $p \neq 2$).

G. Гомоморфизм Бокштейна

1. Покажите, что гомологический (или когомологический) гомоморфизм Бокштейна антикоммутирует с граничным (или кограничным) гомоморфизмом пары.

Для любого простого числа p обозначим через β_p гомологический или когомологический гомоморфизм Бокштейна, соответствующий короткой точной последовательности абелевых групп

$$0 \to \mathbf{Z}_p \to \mathbf{Z}_{p^2} \to \mathbf{Z}_p \to 0.$$

Пусть $\tilde{\beta}_p$ — гомоморфизм Бокштейна, соответствующий короткой точной последовательиости

$$0 \to \mathbf{Z} \xrightarrow{\lambda_p} \mathbf{Z} \xrightarrow{\mu_p} \mathbf{Z}_p \to 0,$$

где $\lambda_p(n) = pn$, а μ_p — приведение по $\operatorname{mod} p$.

2. Докажите, что $\beta_p = (\mu_p)_* \circ \tilde{\beta}_p$.

3. Докажите, что $\beta_p \circ \beta_p = 0$.

4. Докажите, что $\beta_p(u \smile v) = \beta_p(u) \smile v + (-1)^{\deg u} u \smile \beta_p(v)$.

5. Докажите, что $Sq^{2i+1} = \beta_2 \circ Sq^{2i}$ для $i \geqslant 0$. (*Указание.* Покажите, что существуют функториальные гомоморфизмы $\{D_j\}_{j \geqslant 0}$ (где каждый гомоморфизм D_j имеет степень j) целочисленного сингулярного цепного комплекса $\Delta(X)$ в комплекс $\Delta(X) \otimes \Delta(X)$, такие, что D_0 — цепное отображение, коммутирующее с аугментацией, и

$$\partial D_{2j-1} + D_{2j-1}\partial = D_{2j} - TD_{2j}, \quad j \geqslant 0,$$
$$\partial D_{2j} - D_{2j}\partial = D_{2j-1} + TD_{2j-1}, \quad j > 0,$$

где $T(\sigma_1 \otimes \sigma_2) = (-1)^{\deg \sigma_1 \deg \sigma_2} \sigma_2 \otimes \sigma_1$.)

6. Пусть ξ — какое-нибудь расслоение на q-мерные сферы, и пусть $U_\xi \in H^{q+1}(E_\xi, \dot{E}_\xi; \mathbf{Z}_2)$ — его единственная ориентация над $\mathbf{Z}_2$. Докажите, что расслоение ξ тогда и только тогда ориентируемо над $\mathbf{Z}$, когда $\beta_2(U_\xi) = 0$.

H. Характеристические классы Штифеля — Уитни

Пусть ξ — расслоение на q-мерные сферы над базой B, и пусть $U_\xi \in H^{q+1}(E_\xi, \dot{E}_\xi; \mathbf{Z}_2)$ — его класс ориентации над $\mathbf{Z}_2$; *i-м характеристическим классом Штифеля — Уитни* называется элемент $w_i(\xi) \in H^i(B; \mathbf{Z}_2)$ $(i \geqslant 0)$, определяемый соотношением

$$\Phi_\xi^*(w_i(\xi)) = Sq^i(U_\xi).$$

1. Пусть отображение $f\colon B' \to B$ непрерывно. Докажите, что $f^*(w_i(\xi)) = w_i(f^*\xi)$.

2. Покажите, что если расслоение ξ является прямым произведением базы на слой, то $w_i(\xi) = 0$ для всех $i > 0$.

3. Докажите следующие утверждения:
(a) $w_0(\xi)$ является единицей группы $H^0(B; \mathbf{Z}_2)$;
(b) $\beta_2(w_{2i}(\xi)) = w_{2i+1}(\xi) + w_1(\xi) \smile w_{2i}(\xi)$ для $i \geqslant 0$;
(c) если ξ — некоторое расслоение на q-мерные сферы, то $w_i(\xi) = 0$ для $i > q+1$, а $w_{q+1}(\xi)$ — характеристический класс расслоения ξ над $\mathbf{Z}_2$;
(d) расслоение ξ тогда и только тогда ориентируемо над $\mathbf{Z}$, когда $w_1(\xi) = 0$.

Пусть ξ — некоторое расслоение на q-мерные сферы над пространством B, а ξ' — некоторое расслоение на q'-мерные сферы над пространством B'. Их *прямым произведением* $\xi \times \xi'$ называется расслоение на $(q+q'+1)$-мерные сферы, для которого $E_{\xi\times\xi'} = E_\xi \times E_{\xi'}$, $\dot{E}_{\xi\times\xi'} = E_\xi \times \dot{E}_{\xi'} \cup \dot{E}_\xi \times E_{\xi'}$ и $p_{\xi\times\xi'} = p_\xi \times p_{\xi'}$.

4. Покажите, что если $U_\xi \in H^{q+1}(E_\xi, \dot{E}_\xi; \mathbf{Z}_2)$ и $U_{\xi'} \in H^{q'+1}(E_{\xi'}, \dot{E}_{\xi'}; \mathbf{Z}_2)$ — соответствующие классы ориентаций, то

$$U_\xi \times U_{\xi'} \in H^{q+q'+2}\left(E_{\xi\times\xi'}, \dot{E}_{\xi\times\xi'}; \mathbf{Z}_2\right)$$

есть класс ориентации расслоения $\xi \times \xi'$.

5. Докажите, что $w_k(\xi \times \xi') = \sum\limits_{i+j=k} w_i(\xi) \times w_j(\xi')$.

Если ξ и ξ' — расслоения на сферы над одной и той же базой, то их *суммой Уитни* $\xi \oplus \xi'$ называется расслоение на сферы, индуцированное из расслоения $\xi \times \xi'$ диагональным отображением $B \to B \times B$.

6. *Теорема двойственности Уитни.* Докажите, что

$$w_k(\xi \oplus \xi') = \sum_{i+j=k} w_i(\xi) \smile w_j(\xi').$$

I. Гомологии с локальными коэффициентами

Пусть $\sigma\colon \Delta^q \to X$ — сингулярный q-мерный симплекс пространства X, $q \geqslant 1$, и пусть ω_σ — путь в X, полученный композицией отображения σ с линейным путем в симплексе Δ^q от v_0 до v_1. Для заданной локальной системы Γ R-модулей на X определим $\Delta_q(X;\ \Gamma)$ как R-модуль, состоящий из формальных сумм $\sum \alpha_\sigma \sigma$, в которых σ пробегает множество сингулярных q-мерных симплексов пространства X, а элементы $\alpha_\sigma \in \Gamma(\sigma(v_0))$ отличны от нуля лишь для конечного числа симплексов σ. Для $q > 0$ определим гомоморфизм $\partial\colon \Delta_q(X;\ \Gamma) \to \Delta_{q-1}(X;\ \Gamma)$, полагая

$$\partial(\alpha\sigma) = \sum_{0<i\leqslant q} (-1)^i \alpha\sigma^{(i)} + \Gamma(\omega_\sigma)(\alpha)\,\sigma^{(0)}.$$

1. Покажите, что $\Delta(X;\ \Gamma) = \{\Delta_q(X;\ \Gamma),\ \partial\}$ — цепной комплекс и что этот комплекс свободен (не имеет кручения), если Γ представляет собой локальную систему свободных (не имеющих кручения) R-модулей. Покажите, что если $A \subset X$, то $\Delta(A;\ \Gamma\,|\,A)$ — подкомплекс комплекса $\Delta(X;\ \Gamma)$.

Модулем гомологий пары $(X,\ A)$ *с локальными коэффициентами* Γ (обозначается $H_*(X,\ A;\ \Gamma)$) называется градуированный модуль гомологий комплекса $\Delta(X,\ A;\ \Gamma) = \Delta(X;\ \Gamma)/\Delta(A;\ \Gamma\,|\,A)$.

2. Зафиксируем кольцо R. Пусть $\mathscr{C}$ — категория, объектами которой являются пары топологических пространств $(X,\ A)$, наделенные локальными системами Γ R-модулей на X, а морфизмами объекта $\{(X,\ A),\ \Gamma\}$ в объект $\{(Y,\ B),\ \Gamma'\}$ — непрерывные отображения $f\colon (X,\ A) \to (Y,\ B)$ вместе с системой гомоморфизмов $\{f_x\colon \Gamma(x) \to \Gamma'(f(x))\}_{x \in X}$[1]. Докажите, что $H_*(X,\ A;\ \Gamma)$ — ковариантный функтор из категории $\mathscr{C}$ в категорию градуированных R-модулей.

3. *Точность.* Докажите, что для заданных подмножеств $A \subset B \subset X$ и локальной системы Γ R-модулей на X имеет место точная последовательность

$$\ldots \to H_q(B,\ A;\ \Gamma\,|\,B) \to H_q(X,\ A;\ \Gamma) \to H_q(X,\ B;\ \Gamma) \to H_{q-1}(B,\ A;\ \Gamma\,|\,B) \to \ldots.$$

4. *Вырезание.* Пусть подмножества X_1 и X_2 пространства X таковы, что $X_1 \cup X_2 = \operatorname{int} X_1 \cup \operatorname{int} X_2$. Докажите, что для всякой локальной системы Γ R-модулей на X отображение вырезания j_1 объекта $\{(X_1,\ X_1 \cap X_2),\ \Gamma\,|\,X_1\}$ в объект $\{(X_1 \cup X_2,\ X_2),\ \Gamma\,|\,(X_1 \cup X_2)\}$ индуцирует изоморфизм

$$j_{1*}\colon H_*(X_1,\ X_1 \cap X_2;\ \Gamma\,|\,X_1) \approx H_*(X_1 \cup X_2,\ X_2;\ \Gamma\,|\,(X_1 \cup X_2)).$$

5. Два морфизма f и g в категории $\mathscr{C}$ объекта $\{(X,\ A),\ \Gamma\}$ в объект $\{(Y,\ B),\ \Gamma'\}$ называются *гомотопными* в $\mathscr{C}$, если существуют гомотопия $F\colon (X,\ A) \times I \to (Y,\ B)$ между f и g и семейство гомоморфизмов $\{F_{(x,\,t)}\colon \Gamma(x) \to \Gamma'(F(x,\ t))\}_{(x,\,t) \in X \times I}$, такие, что $F_{(x,\,0)} = f_x$ и $F_{(x,\,1)} = g_x$[2]. Докажите, что гомотопия определяет

---

[1]) Необходимо еще потребовать, чтобы $\Gamma'(f_*\omega)\,f_{\omega(0)} = f_{\omega(1)}\Gamma(\omega)$, где ω — путь в X. — *Прим. ред.*

[2]) Точнее, морфизмы между f и g гомотопны, если для локального семейства $\bar{\Gamma}$ на произведении $X \times I$, индуцированного из Γ проекцией $X \times I \to X$, существует такой морфизм $h\colon \{X \times I,\ \bar{\Gamma}\} \to \{Y,\ \Gamma'\}$, что $f = h\mu_0$, $g = h\mu_1$, где μ_i — вложения $\{X,\ \Gamma\} \to \{X \times I,\ \bar{\Gamma}\}$ $(i = 1,\ 2)$. — *Прим. ред.*

отношение эквивалентности на множестве морфизмов объекта $\{(X, A), \Gamma\}$ в объект $\{(Y, B), \Gamma'\}$ и композиции гомотопных морфизмов гомотопны (и, значит, можно определить категорию гомотопических типов объектов категории $\mathscr{C}$).

6. *Гомотопия.* Докажите, что если f и g — гомотопные морфизмы объекта $\{(X, A), \Gamma\}$ в объект $\{(Y, B), \Gamma'\}$, то $f_* = g_*$: $H_*(X, A; \Gamma) \to H_*(Y, B; \Gamma')$.

7. Если Γ и Γ' — две локальные системы R-модулей на пространстве X, то можно определить локальную систему $\Gamma \otimes \Gamma'$ на X, полагая

$$(\Gamma \otimes \Gamma')(x) = \Gamma(x) \otimes \Gamma'(x) \quad \text{и} \quad (\Gamma \otimes \Gamma')(\omega) = \Gamma(\omega) \otimes \Gamma'(\omega).$$

Докажите, что в случае, когда система Γ' постоянна и совпадает с G, имеет место изоморфизм

$$\Delta(X, A; \Gamma \otimes G) \approx \Delta(X, A; \Gamma) \otimes G.$$

Выведите формулу универсальных коэффициентов для гомологий с локальными коэффициентами.

8. Пусть Γ и Γ' — локальные системы R-модулей на пространствах X и Y соответственно, и пусть $\Gamma \times \Gamma' = p^*(\Gamma) \otimes p'^*(\Gamma')$ — локальная система на произведении $X \times Y$, где системы $p^*(\Gamma)$ и $p'^*(\Gamma')$ индуцированы системами Γ и Γ' соответственно и проекциями p: $X \times Y \to X$ и p': $X \times Y \to Y$. Докажите, что имеет место естественная эквивалентность цепных комплексов $\Delta(X; \Gamma) \otimes \Delta(Y; \Gamma')$ и $\Delta(X \times Y; \Gamma \times \Gamma')$. Выведите формулу Кюннета для гомологий с локальными коэффициентами.

J. Когомологии с локальными коэффициентами

Пусть Γ — локальная система R-модулей на пространстве X. Определим $\Delta^q(X; \Gamma)$ как модуль, состоящий из функций φ, сопоставляющих каждому q-мерному сингулярному симплексу σ из X элемент $\varphi(\sigma) \in \Gamma(\sigma(v_0))$, и определим гомоморфизм δ: $\Delta^q(X; \Gamma) \to \Delta^{q+1}(X; \Gamma)$, полагая

$$(\delta\varphi)(\sigma) = \sum_{0 < i \leqslant q+1} (-1)^i \varphi(\sigma^{(i)}) + \Gamma(\omega_\sigma^{-1})(\varphi(\sigma^{(0)})).$$

1. Покажите, что $\Delta^*(X; \Gamma) = \{\Delta^q(X; \Gamma), \delta\}$ — коцепной комплекс, и если $A \subset X$, то отображение ограничения $\Delta^*(X; \Gamma) \to \Delta^*(A; \Gamma \mid A)$ является эпиморфизмом.

Модулем когомологий пары (X, A) *с локальными коэффициентами* Γ (обозначается $H^*(X, A; \Gamma)$) называется модуль когомологий комплекса

$$\Delta^*(X, A; \Gamma) = \ker[\Delta^*(X; \Gamma) \to \Delta^*(A; \Gamma \mid A)].$$

2. Зафиксируем кольцо R. Пусть $\mathscr{C}'$ — категория, объектами которой являются пары топологических пространств (X, A), наделенные локальными системами Γ R-модулей на X, а морфизмами объекта $\{(X, A), \Gamma\}$ в объект $\{(Y, B), \Gamma'\}$ — непрерывные отображения f: $(X, A) \to (Y, B)$ вместе с семействами гомоморфизмов $\{f^x: \Gamma'(f(x)) \to \Gamma(x)\}_{x \in X}$. Докажите, что $H^*(X, A; \Gamma)$ — контравариантный функтор из категории $\mathscr{C}'$ в категорию градуированных R-модулей.

3. Докажите, что когомологии с локальными коэффициентами обладают свойствами точности, вырезания и гомотопии, аналогичными соответствующим свойствам гомологий с локальными коэффициентами.

4. Пусть Γ — локальная система R-модулей на X, а G — некоторый R-модуль. Тогда существует локальная система $\operatorname{Hom}(\Gamma, G)$ R-модулей на X, сопоставляющая точке $x \in X$ модуль $\operatorname{Hom}(\Gamma(x), G)$. Докажите, что

$$\Delta^*(X, A; \operatorname{Hom}(\Gamma, G)) \approx \operatorname{Hom}(\Delta(X, A; \Gamma), G).$$

Выведите формулу универсальных коэффициентов для когомологий с локальными коэффициентами.

Пусть ξ — расслоение на q-мерные сферы над базой B, и пусть локальная система Γ_ξ на B такова, что $\Gamma_\xi(b) = H_{q+1}(E_b, \dot{E}_b)$. Пусть локальная система $p_\xi^*(\Gamma_\xi)$ на E_ξ индуцирована системой Γ_ξ и проекцией $p_\xi \colon E_\xi \to B$. *Классом Тома* расслоения ξ называется элемент $U_\xi \in H^{q+1}(E_\xi, \dot{E}_\xi; p_\xi^*(\Gamma_\xi))$, такой, что для всякой точки $b \in B$ элемент

$$U_\xi \mid (E_b, \dot{E}_b) \in H^{q+1}(E_b, \dot{E}_b; p_\xi^*(\Gamma_\xi) \mid E_b) = H^{q+1}(E_b, \dot{E}_b; H_{q+1}(E_b, \dot{E}_b))$$

соответствует тождественному отображению модуля $H_{q+1}(E_b, \dot{E}_b)$ при изоморфизме универсальных коэффициентов

$$H^{q+1}(E_b, \dot{E}_b; H_{q+1}(E_b, \dot{E}_b)) \approx \operatorname{Hom}(H_{q+1}(E_b, \dot{E}_b), H_{q+1}(E_b, \dot{E}_b)).$$

5. Докажите, что для любого расслоения на q-мерные сферы существует единственный класс Тома. (*Указание.* Докажите сначала этот результат для прямого произведения, а затем, используя последовательность Майера — Вьеториса, распространите его на произвольные расслоения.)

6. Пусть ξ — расслоение на q-мерные сферы над базой B, и пусть U_ξ — его класс Тома. Докажите, что для любой локальной системы абелевых групп Γ на B гомоморфизм

$$\Phi_\xi \colon H_n(E_\xi, \dot{E}_\xi; p^*(\Gamma)) \to H_{n-q-1}(B; \Gamma_\xi \otimes \Gamma),$$

такой, что $\Phi_\xi(z) = p_*(U_\xi \frown z)$, где элемент $U_\xi \frown z$ принадлежит модулю $H_{n-q-1}(E; p^*(\Gamma_\xi \otimes \Gamma))$, является изоморфизмом. Докажите, что если пространство B компактно, то гомоморфизм

$$\Phi_\xi^* \colon H^r(B; \Gamma) \to H^{r+q+1}(E_\xi, \dot{E}_\xi; p^*(\Gamma \otimes \Gamma_\xi)),$$

определенный равенством $\Phi_\xi^*(v) = p^*(v) \smile U_\xi$, является изоморфизмом.

Глава 6

ОБЩАЯ ТЕОРИЯ КОГОМОЛОГИЙ И ДВОЙСТВЕННОСТЬ

В этой главе мы продолжаем изучение гомологических и когомологических функторов, уделяя особое внимание гомологическим свойствам топологических многообразий. Для этого важного класса пространств мы доказываем теорему двойственности, устанавливающую изоморфизм между группами когомологий компактной пары в ориентируемом многообразии и группами гомологий дополнительной размерности дополняющей пары.

Когомологии, фигурирующие в теореме двойственности, являются пределами прямых спектров сингулярных когомологий окрестностей рассматриваемой пары, упорядоченных по включению. Для замкнутой пары в многообразии такой предел зависит только от самой пары. Более того, предел этот изоморфен когомологиям Александера рассматриваемой пары. Когомологии Александера — это другая теория когомологий, отличающаяся от сингулярных когомологий.

Таким образом мы приходим к рассмотрению когомологий Александера. Мы определяем их и доказываем, что они образуют теорию когомологий в том смысле, что они удовлетворяют аксиомам теории когомологий. Мы также устанавливаем специальные свойства жесткости и непрерывности для этой теории, которые, вообще говоря, не выполняются для сингулярных когомологий. Для изучения более глубоких свойств когомологий Александера мы вводим когомологии с коэффициентами в предпучке. Определение этих когомологий включает конструкцию Чеха, использующую нервы открытых покрытий. Мы используем общие свойства этих когомологий при доказательстве того, что для паракомпактных пространств когомологии Александера и Чеха изоморфны, а с помощью полученного результата мы в свою очередь доказываем формулы универсальных коэффициентов для когомологий Александера компактных пар и когомологий Александера с компактными носителями локально компактных пар.

Когомологии с коэффициентами в предпучке используются также для сравнения теории сингулярных когомологий с теорией когомологий Александера. Мы доказываем, что для многообразий эти две теории совпадают. Другое применение когомологии с коэффициентами в предпучке находят при доказательстве теоремы

Виеториса — Бегля об отображении. В самом конце мы обсуждаем гомологические свойства многообразия, вложенного в другое многообразие.

В § 6.1 мы определяем /-произведение как спаривание когомологий произведения пространств и гомологий одного из сомножителей в когомологии другого сомножителя. Так мы получаем отображение, дающее тот самый изоморфизм, который фигурирует в теореме двойственности для многообразий. Сама же теорема двойственности доказывается в § 6.2. В § 6.3 рассматриваются различные определения ориентируемости многообразия.

Теория когомологий Александера определяется в § 6.4 и 6.5, где проверяются для нее аксиомы теории когомологий. В § 6.6 содержится доказательство свойства жесткости теории Александера: когомологии Александера замкнутой пары в паракомпактном пространстве изоморфны пределу прямого спектра когомологий Александера ее окрестностей. Кроме того, мы устанавливаем свойство непрерывности когомологий Александера и показываем, что это свойство однозначно характеризует когомологии Александера компактных пар. Мы определяем также когомологии Александера с компактными носителями.

В § 6.7, 6.8 и 6.9 излагается теория когомологий пространств с коэффициентами в предпучке и иллюстрируется ее применение к теории Александера. Мы доказываем совпадение теории когомологий Александера и теории сингулярных когомологий для паракомпактных пространств, являющихся гомологически локально связными во всех размерностях.

Параграф 6.10 содержит определение характеристических классов многообразия и нормальных характеристических классов многообразия, вложенного в другое многообразие. Характеристические классы связаны с теоремой двойственности Уитни, которая весьма полезна для получения разных результатов о невозможности вложения одного многообразия в другое.

§ 1. /-произведение

Мы уже подготовлены к определению нового произведения, являющегося спариванием когомологий произведения пространств и гомологий одного из сомножителей в когомологии другого сомножителя. Это произведение будет использовано в следующем параграфе при доказательстве теоремы двойственности для топологических многообразий. В этом параграфе мы установим некоторые его свойства. Мы также введем новые модули когомологий пары (A, B), лежащей в пространстве X, которые зависят от вложения $(A, B) \subset X$. Они будут использованы при доказательстве теоремы двойственности в следующем параграфе. В дальнейшем в этой же главе мы введем модули когомологий Александера и докажем, что во всех подходящих случаях они изоморфны только что упомянутым модулям.

Пусть C и C' — цепные комплексы над кольцом R; */-произведением* $c^*/c' \in \operatorname{Hom}(C'_{n-q}, G \otimes G')$ коцепи

$$c^* \in \operatorname{Hom}((C \otimes C')_n, G)$$

и цепи $c' \in C'_q \otimes G'$ называется $(n-q)$-мерная коцепь, такая, что если $c' = \sum_i c'_i \otimes g'_i$, где $c'_i \in C'_q$ и $g'_i \in G'$, то

$$\langle c^*/c', c\rangle = \sum_i \langle c^*, c \otimes c'_i\rangle \otimes g'_i, \qquad c \in C_{n-q}.$$

Легко проверить, что

$$\delta(c^*/c') = [\delta c^*/c'] - (-1)^{n-q} c^*/\partial c'.$$

Следовательно, /-произведение коцикла и цикла является коциклом, причем если коцикл является кограницей или цикл является границей, то и /-произведение представляет собой кограницу. Таким образом, /-произведение есть спаривание модулей $H^n(C \otimes C'; G)$ и $H_q(C'; G')$ в модуль $H^{n-q}(C; G \otimes G')$, причем такое, что $\{c^*\}/\{c'\} = \{c^*/c'\}$, где $\{c^*\} \in H^n(C \otimes C'; G)$, $\{c'\} \in H_q(C'; G')$.

Пусть для пар топологических пространств (X, A) и (Y, B)

$$\tau\colon [\Delta(X)/\Delta(A)] \otimes [\Delta(Y)/\Delta(B)] \to \Delta(X \times Y)/\Delta(X \times B \cup A \times Y)$$

есть функториальное цепное отображение, существование которого устанавливается теоремой Эйленберга — Зильбера. Для элементов $u \in H^n((X, A) \times (Y, B); G)$ и $z \in H_q(Y, B; G')$ их */-произведение*

$$u/z \in H^{n-q}(X, A; G \otimes G')$$

определяется как /-произведение $(\tau^* u)/z$. Следующие свойства /-произведения вытекают непосредственно из определения.

1. *Для отображений* $f\colon (X, A) \to (X', A')$ *и* $g\colon (Y, B) \to (Y', B')$ *и элементов* $u \in H^n((X', A') \times (Y', B'); G)$ *и* $z \in H_q(Y, B; G')$ *в* $H^{n-q}(X, A; G \otimes G')$ *имеет место равенство*

$$((f \times g)^* u)/z = f^*(u/g_* z). \ \blacksquare$$

2. *Для элементов* $u \in H^p(X, A; G)$, $v \in H^q(Y, B; G')$ *и* $z \in H_q(Y, B; G'')$ *в* $H^p(X, A; G \otimes G' \otimes G'')$ *имеет место равенство*

$$(u \times v)/z = \mu(u \otimes \langle v, z\rangle). \ \blacksquare$$

3. *Пусть пары пар* $\{(X_1, A_1), (X_2, A_2)\}$ *и* $\{(Y_1, B_1), (Y_2, B_2)\}$ *удовлетворяют аксиоме вырезания в пространствах* X *и* Y *соответственно. Для элементов*

$$u \in H^n([(X_1 \cap X_2, A_1 \cap A_2) \times (Y_1 \cup Y_2, B_1 \cup B_2)] \cup$$
$$\cup [(X_1 \cup X_2, A_1 \cup A_2) \times (Y_1 \cap Y_2, B_1 \cap B_2)]; G),$$
$$z \in H_q(Y_1 \cup Y_2, B_1 \cup B_2; G')$$

в модуле $H^{n-q-1}(X_1 \cup X_2, A_1 \cup A_2; G \otimes G')$ *имеет место равенство*

$$[u \mid (X_1 \cup X_2, A_1 \cup A_2) \times (Y_1 \cap Y_2, B_1 \cap B_2)]/\partial_* z =$$
$$= (-1)^{n-q-1} \delta^* (u \mid [(X_1 \cap X_2, A_1 \cap A_2) \times (Y_1 \cup Y_2, B_1 \cup B_2)])/z. \blacksquare$$

Следующие формулы выражают соотношения между /-произведением и $\frown$- и $\smile$-произведениями. Мы дадим наброски доказательств, в которых для комплекса $\Delta(X)$ используется диагональная аппроксимация Александера — Уитни $\sigma \to \sum_{i+j=\deg \sigma} {}_i\sigma \otimes \sigma_j$, а для комплекса $\Delta(X) \otimes \Delta(Y)$ — ее тензорное произведение на себя

$$\sigma \otimes \sigma' \to \sum_{i,j} (-1)^{j(p-i)} ({}_i\sigma \otimes {}_j\sigma') \otimes (\sigma_{p-i} \otimes \sigma'_{q-j}); \ \deg \sigma = p, \ \deg \sigma' = q.$$

4. *Для элементов* $v \in H^p(X, A; G)$, $u \in H^n((X, A') \times (Y, B); G')$ *и* $z \in H_q(Y, B; G'')$ *в модуле* $H^{p+n-q}(X, A \cup A'; G \otimes G' \otimes G'')$ *имеет место равенство*

$$v \smile (u/z) = [(v \times 1) \smile u]/z.$$

Доказательство. Пусть c_1^* — некоторая p-мерная коцепь комплекса $\Delta(X)$, c_2^* — некоторая n-мерная коцепь комплекса $\Delta(X) \otimes \Delta(Y)$ и $\sigma' \in \Delta_q(Y)$. Достаточно показать, что

$$c_1^* \smile (c_2^*/\sigma') = [(c_1^* \otimes 1) \smile c_2^*]/\sigma'.$$

Если $\sigma \in \Delta_{p+n-q}(X)$, то

$$\langle c_1^* \smile (c_2^*/\sigma'), \sigma \rangle = \langle c_1^*, {}_p\sigma \rangle \otimes \langle c_2^*/\sigma', \sigma_{n-q} \rangle =$$
$$= \langle c_1^*, {}_p\sigma \rangle \otimes \langle c_2^*, \sigma_{n-q} \otimes \sigma' \rangle =$$
$$= \langle c_1^* \otimes 1, {}_p\sigma \otimes {}_0\sigma' \rangle \otimes \langle c_2^*, \sigma_{n-q} \otimes \sigma' \rangle =$$
$$= \langle (c_1^* \otimes 1) \smile c_2^*, \sigma \otimes \sigma' \rangle = \langle [(c_1^* \otimes 1) \smile c_2^*]/\sigma', \sigma \rangle. \blacksquare$$

5. *Для элементов* $u \in H^n((X, A) \times (Y, B); G)$, $v \in H^p(Y, B'; G')$ *и* $z \in H_q(Y, B \cup B'; G'')$ *в модуле* $H^{n-(q-p)}(X, A; G \otimes G' \otimes G'')$ *имеет место равенство*

$$u/(v \frown z) = [u \smile (1 \times v)]/z.$$

Доказательство. Пусть c_1^* — некоторая n-мерная коцепь комплекса $\Delta(X)\otimes\Delta(Y)$, c_2^* — некоторая p-мерная коцепь комплекса $\Delta(Y)$ и $\sigma'\in\Delta_q(Y)$. Достаточно доказать, что

$$c_1^*/(c_2^*\frown\sigma')=[c_1^*\smile(1\otimes c_2^*)]/\sigma'.$$

Если $\sigma\in\Delta_{n-(q-p)}(X)$, то

$$\begin{aligned}\langle c_1^*/(c_2^*\frown\sigma'),\ \sigma\rangle&=\langle c_1^*,\ \sigma\otimes(c_2^*\frown\sigma')\rangle=\\&=\langle c_1^*,\ (1\otimes c_2^*)\frown(\sigma\otimes\sigma')\rangle=\\&=\langle c_1^*\smile(1\otimes c_2^*),\ \sigma\otimes\sigma'\rangle=\\&=\langle[c_1^*\smile(1\otimes c_2^*)]/\sigma',\ \sigma\rangle.\ \blacksquare\end{aligned}$$

6. *Пусть заданы элементы* $u\in H^n((X,\ A)\times(Y,\ B);\ G)$, $w\in H_r(X,\ A;\ G')$, $z\in H_q(Y,\ B;\ G'')$ *и проекция* p: $X\times Y\to X$ *на первый сомножитель, и пусть отображение*

$$T\colon\ G\otimes G''\otimes G'\to G\otimes G'\otimes G''$$

является перестановкой двух последних сомножителей. Тогда в модуле $H_{r-(n-q)}(X;\ G\otimes G'\otimes G'')$ *имеет место равенство*

$$p_*(u\frown(w\times z))=T_*[(u/z)\frown w].$$

Доказательство. Пусть c^* — некоторая n-мерная коцепь комплекса $\Delta(X)\otimes\Delta(Y)$, $\sigma\in\Delta_r(X)$ и $\sigma'\in\Delta_q(Y)$. Тогда

$$\begin{aligned}\Delta(p)(c^*\frown(\sigma\otimes\sigma'))&=\Delta(p)\Big[\sum_{i+j=n}(-1)^{i(q-j)}({}_{r-i}\sigma\otimes{}_{q-j}\sigma')\otimes\langle c^*,\ \sigma_i\otimes\sigma'_j\rangle\Big]=\\&={}_{r-(n-q)}\sigma\otimes\langle c^*,\ \sigma_{n-q}\otimes\sigma'\rangle=\\&={}_{r-(n-q)}\sigma\otimes\langle c^*/\sigma',\ \sigma_{n-q}\rangle=\\&=(c^*/\sigma')\frown\sigma.\ \blacksquare\end{aligned}$$

Диагональ $\delta(X)$ топологического пространства X — это множество $\delta(X)=\{(x,\ x')\in X\times X\mid x=x'\}$. Для всякого элемента $u\in H^n(X\times X,\ X\times X-\delta(X);\ R)$ и пары $(A,\ B)$, лежащей в X, определим гомоморфизм

$$\gamma_u\colon\ H_q(X-B,\ X-A;\ G)\to H^{n-q}(A,\ B;\ G),$$

полагая $\gamma_u(z)=[u\mid(A,\ B)\times(X-B,\ X-A)]/z$ (здесь $R\otimes G$ отождествляется с G). Как вытекает из свойства 1, для вложений i: $(A,\ B)\subset(A',\ B')$ и j: $(X-B',\ X-A')\subset(X-B,\ X-A)$ имеет место следующая коммутативная диаграмма (для любых модулей коэффициентов G):

$$\begin{array}{ccc}H_q(X-B',\ X-A') & \xrightarrow{\gamma_u} & H^{n-q}(A',\ B')\\ \Big\downarrow{\scriptstyle j_*} & & \Big\downarrow{\scriptstyle i^*}\\ H_q(X-B,\ X-A) & \xrightarrow{\gamma_u} & H^{n-q}(A,\ B)\end{array}$$

Таким образом, γ_u является естественным преобразованием модуля $H_q(X-B, X-A)$ в модуль $H^{n-q}(A, B)$ на категории пар подпространств и их вложений в пространство X. Из свойства 3 следует, что гомоморфизм γ_u коммутирует с точностью до знака со связывающими гомоморфизмами относительных последовательностей Майера — Виеториса.

Для пары (A, B) в топологическом пространстве X определим ее *окрестность* (U, V) как такую пару в X, в которой U — окрестность множества A, а V — окрестность множества B. Семейство всех окрестностей пары $(A, B)\subset X$ направлено по включению. Следовательно,

$$\{H^q(U, V; G)\,|\,(U, V) \text{ — окрестность пары } (A, B)\}$$

представляет собой прямой спектр; положим

$$\bar{H}^q(A, B; G)=\varinjlim\{H^q(U, V; G)\},$$

где (U, V) пробегает все окрестности пары (A, B) (или конфинальное семейство открытых окрестностей пары (A, B)). Отображения ограничения $H^q(U, V; G)\to H^q(A, B; G)$ определяют естественный гомоморфизм

$$i\colon \bar{H}^q(A, B; G)\to H^q(A, B; G).$$

Пара (A, B) называется *жестко вложенной* в пространство X (по отношению к сингулярным когомологиям), если i является изоморфизмом для всех q и всех G. Определение жесткости можно дать для любой теории когомологий (или для любого контравариантного функтора). В дальнейшем мы на примерах покажем, что существуют пары, являющиеся жестко вложенными по отношению к одной теории когомологий и не являющиеся таковыми для другой.

Приведем несколько примеров.

7. Если (A, B) — пара открытых подмножеств или, более общим образом, если эта пара имеет сколь угодно малые гомотопически эквивалентные ей окрестности, то (A, B) — жестко вложенная пара в X.

8. Пусть

$$A'=\{(x, y)\in\mathbf{R}^2\,|\,x>0,\ y=\sin(1/x)\},$$
$$A''=\{(x, y)\in\mathbf{R}^2\,|\,x=0,\ |y|\leqslant 1\},$$

и пусть $A=A'\cup A''\subset\mathbf{R}^2$. Тогда A' и A'' являются компонентами линейной связности множества A и, значит, $H^0(A; \mathbf{Z})\approx\mathbf{Z}\oplus\mathbf{Z}$. Поскольку A связно, для всякой открытой окрестности U множества A в $\mathbf{R}^2$ его подмножества A' и A'' должны принадлежать одной и той же компоненте линейной связности в U (компоненты связности множества U совпадают с его компонентами линейной связности, поскольку оно локально линейно связно). Отсюда вытекает, что $\bar{H}^0(A; \mathbf{Z}) = \varinjlim \{H^0(U; \mathbf{Z})\}$, где U пробегает связные открытые окрестности множества A в $\mathbf{R}^2$. Следовательно, $\bar{H}^0(A; \mathbf{Z}) \approx \mathbf{Z}$ и отображение i: $\bar{H}^0(A; \mathbf{Z}) \to H^0(A; \mathbf{Z})$ не является эпиморфизмом. Таким образом, подмножество A не является жестко вложенным подпространством плоскости $\mathbf{R}^2$ по отношению к сингулярной теории когомологий.

9. Лемма. *Пусть (A, B) — некоторая пара в X. Тогда если какие-нибудь две из трех пар $(B, \varnothing)$, $(A, \varnothing)$ и (A, B) жестко вложены в X, то такова же и третья.*

Доказательство. Это следует из точности когомологической последовательности триады, из того, что предел прямого спектра точных последовательностей является точной последовательностью, и из леммы о пяти гомоморфизмах. ■

Напомним (см. упражнения C к гл. 1), что нормальное пространство X называется абсолютным окрестностным ретрактом, если оно, будучи вложенным в любое другое нормальное пространство как замкнутое подпространство, является там ретрактом некоторой своей окрестности. Напомним также, что пространство X называется бинормальным, если $X \times I$ (а следовательно, и само X) является нормальным.

10. Теорема. *Всякое вложение абсолютного окрестностного ретракта в качестве замкнутого подпространства в бинормальный абсолютный окрестностный ретракт является жестким.*

Доказательство. Предположим, что $A \subset X$, причем оба пространства A и X являются абсолютными окрестностными ретрактами и A замкнуто в бинормальном пространстве X. Существует окрестность U подпространства A в X, такая, что A — ретракт этой окрестности. Тогда отображение $H^*(U) \to H^*(A)$ — эпиморфизм, откуда следует, что и отображение

$$i\colon \bar{H}^*(A) \to H^*(A)$$

является эпиморфизмом.

Покажем, что i — мономорфизм. Пусть U — некоторая открытая окрестность множества A в пространстве X. Существует замкнутая окрестность U' подпространства A в U, ретрактом которой является A. Пусть r: $U' \to A$ — ретракция. Определим отображение

$$F\colon (U' \times 0) \cup (A \times I) \cup (U' \times 1) \to U,$$

полагая $F(x, 0) = x$, $F(x, 1) = r(x)$, если $x \in U'$, и $F(x, t) = x$, если $x \in A$, $t \in I$. Поскольку A замкнуто в X, множество $(U' \times 0) \cup (A \times I) \cup (U' \times 1)$ замкнуто в подпространстве $U' \times I$, которое, будучи замкнутым подмножеством нормального пространства $X \times I$, является нормальным пространством. Поскольку U — открытое подмножество абсолютного окрестностного ретракта X, отсюда вытекает (см. упражнение 1.C.4), что U — абсолютный окрестностный ретракт и что отображение F можно продолжить до отображения $F'\colon N \to U$, где N — некоторая окрестность множества $(U' \times 0) \cup (A \times I) \cup (U' \times 1)$ в $U' \times I$. Множество N содержит множество вида $V \times I$, где V — некоторая окрестность подмножества A в U', а $F' \mid V \times I$ — гомотопия между вложением $j\colon V \subset U$ и отображением kr', где $r' = r \mid V\colon V \to A$ и $k\colon A \subset U$. Следовательно, имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd} H^*(U) \arrow[rr, "k^*"] \arrow[dr, "j^*"'] & & H^*(A) \arrow[dl, "r'^*"] \\ & H^*(V) & \end{tikzcd}$$

из которой видно, что $\ker k^* \subset \ker j^*$. Таким образом, если элемент модуля $H^*(U)$ обладает тривиальным ограничением на $H^*(A)$, то он обладает тривиальным ограничением и на $H^*(V)$ для некоторой меньшей окрестности V, и, следовательно, он представляет 0 в модуле $\varinjlim \{H^*(U)\} = \bar{H}^*(A)$. Следовательно, $i\colon \bar{H}^*(A) \to H^*(A)$ — мономорфизм и подпространство A жестко вложено в X. ■

11. Следствие. *Если A, B и X — компактные полиэдры, то всякое вложение пары (A, B) в пространство X является жестким.*

Доказательство. Это следует из того факта (см. упражнение 3.A.1), что компактный полиэдр является абсолютным окрестностным ретрактом, из теоремы 10 и леммы 9. ■

Одной из причин введения модулей $\bar{H}^q(A, B; G)$ служит следующая теорема, которая утверждает, что всякая пара (A, B), лежащая в X, является жестко вложенной по отношению к функтору $\bar{H}^q$.

12. Теорема. *Если U пробегает все окрестности множества A, то имеет место изоморфизм*

$$\varinjlim \{\bar{H}^q(U; G)\} \approx \bar{H}^q(A; G).$$

Доказательство. Ограничивая область изменения U конфинальным семейством открытых окрестностей, мы замечаем, что $\bar{H}^q(U; G) = H^q(U; G)$, и предел слева совпадает по определению с модулем справа. ■

Пусть (A, B) и (A', B') — пары в X, а (U, V) и (U', V') — их открытые окрестности. Для пары пар $\{(U, V), (U', V')\}$ имеет место относительная последовательность Майера — Виеториса. Если (U, V) и (U', V') пробегают открытые окрестности соответственно пар (A, B) и (A', B'), то пара $(U \cup U', V \cup V')$ пробегает конфинальное семейство окрестностей пары $(A \cup A', B \cup B')$. Если (A, B) и (A', B') — пары замкнутых множеств в X, то пара $(U \cap U', V \cap V')$ пробегает конфинальное семейство окрестностей пары $(A \cap A', B \cap B')$. Поскольку предел прямого спектра точных последовательностей является точной последовательностью, мы получаем следующий результат, указывающий на другую причину нашего интереса к модулям $\bar{H}^*(A, B)$:

13. Теорема. *Пусть (A, B) и (A', B') — пары замкнутых множеств в пространстве X. Тогда имеет место точная относительная последовательность Майера — Виеториса (для любого модуля коэффициентов G)*

$$\ldots \to \bar{H}^q(A \cup A', B \cup B') \to \bar{H}^q(A, B) \oplus \bar{H}^q(A', B') \to$$
$$\to \bar{H}^q(A \cap A', B \cap B') \to \ldots . \blacksquare$$

Пусть задан элемент $u \in H^n(X \times X, X \times X - \delta(X); R)$. Если (U, V) пробегает семейство окрестностей пары (A, B), то гомоморфизмы

$$\gamma_u\colon H_q(X - V, X - U; G) \to H^{n-q}(U, V; G)$$

определяют гомоморфизм

$$\varinjlim \{H_q(X - V, X - U; G)\} \to \varinjlim \{H^{n-q}(U, V; G)\}.$$

Поскольку сингулярные гомологии образуют теорию гомологий с компактными носителями, они коммутируют с пределами прямых спектров. Значит, предел слева изоморфен модулю $H_q(X - B, X - A; G)$. Следовательно, мы получаем естественный гомоморфизм

$$\bar{\gamma}_u\colon H_q(X - B, X - A; G) \to \bar{H}^{n-q}(A, B; G),$$

такой, что если (U, V) — окрестность пары (A, B), то имеет место коммутативная диаграмма (для любых модулей коэффициентов G)

$$\begin{tikzcd}
H_q(X - V, X - U) \arrow[r] \arrow[d, "\gamma_u"] & H_q(X - B, X - A) \arrow[d, "\bar{\gamma}_u"'] \arrow[dr, "\gamma_u"] & \\
H^{n-q}(U, V) \arrow[r] & \bar{H}^{n-q}(A, B) \arrow[r, "i"] & H^{n-q}(A, B)
\end{tikzcd}$$

Когда (A, B) и (A', B') — замкнутые пары в X, гомоморфизмы $\bar{\gamma}_u$ отображают точную последовательность Майера — Виеториса пары открытых пар

$$\{(X - B, X - A), (X - B', X - A')\}$$

в точную последовательность Майера — Виеториса теоремы 13 таким образом, что каждый квадрат является коммутативным с точностью до знака.

§ 2. Двойственность в топологических многообразиях

Этот параграф посвящен изучению гомологических свойств топологических многообразий. Над связным многообразием (взятым в качестве базы) существует пара расслоенных пространств, называемая гомологическим касательным расслоением. Класс ориентации этого расслоения порождает отношение двойственности, состоящее в том, что когомологии компактной пары, вложенной в многообразие, изоморфны гомологиям дополнения этой пары. При доказательстве этой теоремы для определения естественного гомоморфизма гомологий в когомологии используются класс ориентации и /-произведение. Доказывается, что полученный таким образом гомоморфизм является изоморфизмом. Этот факт устанавливается сначала для евклидова пространства, а затем для произвольного многообразия при помощи техники «склеивания», основанной на применении последовательностей Майера — Виеториса.

Топологическим *n-мерным многообразием* (*без края*) называется паракомпактное хаусдорфово пространство, каждая точка которого обладает открытой окрестностью, гомеоморфной евклидову пространству $\mathbf{R}^n$ (называемой *координатной окрестностью*). Приведем несколько примеров n-мерных многообразий.

1. Евклидово пространство $\mathbf{R}^n$ и сфера S^n являются n-мерными многообразиями.

2. Всякое открытое подмножество n-мерного многообразия является n-мерным многообразием.

3. Произведение n-мерного многообразия и m-мерного многообразия является $(n+m)$-мерным многообразием.

4. Действительное проективное пространство $\mathbf{R}P^n$ есть n-мерное многообразие. Комплексное проективное многообразие $\mathbf{C}P^n$ есть $2n$-мерное многообразие. Наконец, кватернионное проективное пространство $\mathbf{Q}P^n$ есть $4n$-мерное многообразие. Действительно, если X — одно из этих пространств, наделенное однородными координатами $[t_0, t_1, \ldots, t_n]$, то для каждого i, $0 \leqslant i \leqslant n$, подмножество $A_i \subset X$, состоящее из всех тех точек, i-я координата которых равна нулю, является проективным пространством размерности $n-1$, и $X - A_i$ гомеоморфно $\mathbf{R}^n$, $\mathbf{R}^{2n}$ и $\mathbf{R}^{4n}$ соответственно. Следовательно, $X - A_i$ представляет собой координатную окрестность в X и X покрывается совокупностью $n+1$ таких окрестностей.

5. Лемма. *Каждая точка x n-мерного многообразия X обладает такой открытой окрестностью V, что существует гомеоморфизм между парой $(V \times X,\ V \times X - \delta(V))$ и парой $V \times (X,\ X - x)$, сохраняющий координаты первого сомножителя.*

Доказательство. Пусть U — координатная окрестность, содержащая точку x. Не теряя общности, можно предположить, что существует гомеоморфизм φ: $U \approx \mathbf{R}^n$, при котором $\varphi(x) = 0$. Пусть $D' = \{z \in \mathbf{R}^n \mid \|z\| \leqslant 2\}$ и $V' = \{z \in \mathbf{R}^n \mid \|z\| < 1\}$, и пусть $D = \varphi^{-1}(D')$ и $V = \varphi^{-1}(V')$. Тогда V — открытая окрестность точки x,

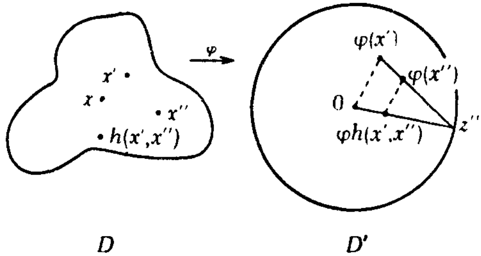


Рис. 12.

содержащаяся в компактном множестве D. Пусть $(x', x'') \in V \times D - \delta(V)$. Тогда существует единственная точка $z''' \in \mathbf{R}^n$, такая, что $\|z'''\| = 2$ и $\varphi(x'')$ принадлежит замкнутому отрезку с концами $\varphi(x')$ и z'''. Пусть $\varphi(x'') = t\varphi(x') + (1-t)z'''$, где $t \in I$, и пусть точка $h(x', x'') \in D - x$ такова, что $\varphi h(x', x'') = (1-t)z'''$ (рис. 12). Положим $h(x', x') = x$. Гомеоморфизм

$$\psi\colon (V \times X,\ V \times X - \delta(V)) \approx V \times (X,\ X - x),$$

обладающий нужными нам свойствами, определяется теперь равенством

$$\psi(x', x'') = \begin{cases} (x', x''), & x'' \notin D, \\ (x', h(x', x'')), & x'' \in D. \ \blacksquare \end{cases}$$

Из леммы 5 следует, что если $x' \in V$, то пара $(X,\ X - x')$ гомеоморфна паре $(X,\ X - x)$. Итак, мы получаем такое

6. Следствие. *Группа гомеоморфизмов связного n-мерного многообразия X действует транзитивно. В частности, топологический тип пары $(X,\ X - x)$ не зависит от выбора точки x. Более того, проекция на первый сомножитель p: $X \times X \to X$ является проекцией для пары расслоенных пространств $(X \times X,\ X \times X - \delta(X))$ с парой слоев $(X,\ X - x)$.* ■

Если V — некоторая координатная окрестность точки x n-мерного многообразия X, то пара $\{V, X-x\}$ удовлетворяет аксиоме вырезания, и, значит, имеет место изоморфизм

$$H_*(V, V-x; G) \approx H_*(X, X-x; G).$$

Поскольку $H_*(V, V-x; G) \approx H_*(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n - 0; G)$, отсюда следует, что

$$H_q(X, X-x; G) \approx \begin{cases} 0, & q \neq n, \\ G, & q = n, \end{cases}$$

и, таким образом, пара слоев $(X, X-x)$ пары расслоенных пространств из следствия 6 имеет те же самые гомологии, что и пара $(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n - 0)$. По этой причине пару расслоенных пространств, рассмотренную в следствии 6, мы будем называть *гомологическим касательным расслоением* многообразия X (настоящее касательное расслоение является расслоением на n-мерные векторные пространства, и его можно построить тогда, когда X — дифференцируемое многообразие; гомологические свойства касательного расслоения совпадают с соответствующими свойствами гомологического касательного расслоения).

Связное n-мерное многообразие X называется *ориентируемым* (над кольцом R), если его гомологическое касательное расслоение ориентируемо (т. е. если существует такой элемент $U \in H^n(X \times X, X \times X - \delta(X); R)$, что для каждой точки $x \in X$ его ограничение $U \mid x \times (X, X-x)$ является образующей модуля $H^n(x \times (X, X-x); R)$. Такой класс когомологий U называется *ориентацией* многообразия X. Произвольное n-мерное многообразие X называется *ориентируемым*, если каждая его компонента связности ориентируема; *ориентация* многообразия X определяется как класс когомологий $U \in H^n(X \times X, X \times X - \delta(X); R)$, ограничение которого на каждую компоненту связности является ориентацией этой компоненты.

7. Пример. Для евклидова пространства $\mathbf{R}^n$ пара расслоенных пространств $(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n - \delta(\mathbf{R}^n))$ тривиальна, поскольку отображение $f(z, z') = (z, z'-z)$ является гомеоморфизмом f: $(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n - \delta(\mathbf{R}^n)) \approx \mathbf{R}^n \times (\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n - 0)$, сохраняющим координаты первого сомножителя. Следовательно, $\mathbf{R}^n$ — ориентируемое n-мерное многообразие.

Результаты § 5.7, относящиеся к гомологическим свойствам расслоений на сферы, переносятся на гомологические касательные расслоения. Приведем некоторые из них:

8. *Две ориентации U и U' связного многообразия X совпадают тогда и только тогда, когда для некоторой точки $x_0 \in X$ имеет место равенство*

$$U \mid x_0 \times (X, X-x_0) = U' \mid x_0 \times (X, X-x_0). \ \blacksquare$$

9. *Всякое многообразие обладает единственной ориентацией над полем* $\mathbf{Z}_2$. ■

10. *Односвязное многообразие ориентируемо над любым кольцом* R. ■

11. *n-мерное многообразие X тогда и только тогда ориентируемо, когда существуют такое его открытое покрытие $\{V\}$ и такое согласованное семейство $\{U_V \in H^n(V \times X,\ V \times X - \delta(V);\ R)\}$, что U_V соответствует ориентации многообразия V при изоморфизме вырезания*

$$H^n(V \times X,\ V \times X - \delta(V);\ R) \approx H^n(V \times V,\ V \times V - \delta(V);\ R). \quad \blacksquare$$

По теореме двойственности если $U \in H^n(X \times X,\ X \times X - \delta(X);\ R)$ — класс ориентации многообразия X, то для любой компактной пары $(A,\ B)$ в X гомоморфизм $\bar{\gamma}_U$ является изоморфизмом модулей $H_q(X - B,\ X - A;\ G)$ и $\bar{H}^{n-q}(A,\ B;\ G)$. Докажем это сначала для пространства $\mathbf{R}^n$ с помощью нескольких лемм.

12. Лемма. *Пусть множество $A \subset \mathbf{R}^n$ гомеоморфно симплексу, и пусть $a_0 \in A$. Тогда $H_q(\mathbf{R}^n - a_0,\ \mathbf{R}^n - A;\ G) = 0$ для всех q и всех G.*

Доказательство. Рассматривая пространство $\mathbf{R}^n$ как открытое подмножество сферы S^n, мы имеем изоморфизм вырезания $H_q(\mathbf{R}^n - a_0,\ \mathbf{R}^n - A;\ G) \approx H_q(S^n - a_0,\ S^n - A;\ G)$. Поскольку пространство $S^n - a_0$ гомеоморфно $\mathbf{R}^n$, то $\tilde{H}_q(S^n - a_0;\ G) = 0$. Из леммы 4.7.13 и формулы универсальных коэффициентов следует, что $\tilde{H}_q(S^n - A;\ G) = 0$. Утверждение следует теперь из точности приведенной гомологической последовательности пары $(S^n - a_0,\ S^n - A)$. ■

13. Следствие. *Если подмножество $A \subset \mathbf{R}^n$ гомеоморфно симплексу, а U — некоторая ориентация многообразия $\mathbf{R}^n$ над R, то для всех чисел q и для R-модулей G имеет место изоморфизм*

$$\gamma_U\colon H_q(\mathbf{R}^n,\ \mathbf{R}^n - A;\ G) \approx H^{n-q}(A;\ G).$$

Доказательство. Пусть $a_0 \in A$. Рассмотрим диаграмму (для любого модуля коэффициентов G)

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
\cdots \arrow[r] & H_q(\mathbf{R}^n - a_0,\ \mathbf{R}^n - A) \arrow[r] \arrow[d, "\gamma_U"] & H_q(\mathbf{R}^n,\ \mathbf{R}^n - A) \arrow[r] \arrow[d, "\gamma_U"] & H_q(\mathbf{R}^n,\ \mathbf{R}^n - a_0) \arrow[r] \arrow[d, "\gamma_U"] & H_{q-1}(\mathbf{R}^n - a_0,\ \mathbf{R}^n - A) \arrow[r] \arrow[d, "\gamma_U"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & H^{n-q}(A,\ a_0) \arrow[r] & H^{n-q}(A) \arrow[r] & H^{n-q}(a_0) \arrow[r] & H^{n-q+1}(A,\ a_0) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Строки этой диаграммы точны, а каждый квадрат является либо коммутативным, либо антикоммутативным. Так как множество A

стягиваемо, то $H^*(A, a_0)=0$. Учитывая лемму 12, тривиальным образом имеем γ_U: $H_q(\mathbf{R}^n-a_0, \mathbf{R}^n-A)\approx H^{n-q}(A, a_0)$. В силу леммы о пяти гомоморфизмах для завершения доказательства достаточно проверить, что γ_U: $H_q(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n-a_0)\approx H^{n-q}(a_0)$. Поскольку U — класс ориентации, то $U\,|\,[a_0\times(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n-a_0)]=1\times u$, где элемент $u\in H^n(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n-a_0; R)$ является образующей. В силу свойства 6.1.2 имеем

$$\gamma_U(z)=\langle u, z\rangle 1.$$

Поскольку u — образующая модуля $H^n(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n-a_0; R)\approx\approx\operatorname{Hom}(H_n(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n-a_0; R), R)$, отсюда следует, что отображение $z\to\langle u, z\rangle$ модуля $H_n(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n-a_0; R)$ в кольцо R является изоморфизмом. Следовательно, изоморфизмом является и γ_U: $H_n(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n-a_0; R)\approx H^0(a_0; R)$. Если же $q\neq n$, то очевидно, что γ_U: $H_q(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n-a_0; R)\to H^{n-q}(a_0; R)$ — изоморфизм, поскольку оба модуля тривиальны. ■

14. Теорема. *Пусть U — некоторая ориентация многообразия $\mathbf{R}^n$ над кольцом R и (A, B) — компактная полиэдральная пара в $\mathbf{R}^n$. Тогда для любых чисел q и любых R-модулей G имеет место изоморфизм*

$$\gamma_U\colon H_q(\mathbf{R}^n-B, \mathbf{R}^n-A; G)\approx H^{n-q}(A, B; G).$$

Доказательство. Из свойств естественности гомоморфизма γ_U следует, что достаточно провести доказательство для случая, когда множество B пусто. Для одного множества A теорема получается из следствия 13 индукцией по числу симплексов триангуляции полиэдра A с использованием последовательностей Майера — Виеториса и леммы о пяти гомоморфизмах. ■

15. Следствие. *Пусть U — некоторая ориентация пространства $\mathbf{R}^n$ над R и (A, B) — компактная пара в $\mathbf{R}^n$. Тогда для всех чисел q и всех R-модулей G имеет место изоморфизм*

$$\bar\gamma_U\colon H_q(\mathbf{R}^n-B, \mathbf{R}^n-A; G)\approx\bar H^{n-q}(A, B; G).$$

Доказательство. Поскольку семейство компактных полиэдральных пар конфинально в семействе всех окрестностей компактной пары (A, B) в пространстве $\mathbf{R}^n$, это утверждение вытекает из теоремы 14 переходом к пределу прямого спектра. ■

Поскольку диаграмма

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & H_q(\mathbf{R}^n-B, \mathbf{R}^n-A; G) \arrow[dl, "\bar\gamma_U"'] \arrow[dr, "\gamma_U"] & \\ \bar H^{n-q}(A, B; G) \arrow[rr, "i"] & & H^{n-q}(A, B; G)\end{tikzcd}$$

коммутативна, из теоремы 14 и следствия 15 вытекает, что всякое вложение компактной полиэдральной пары в пространство $\mathbf{R}^n$ является жестким (это вытекает также и из следствия 6.1.11).

Следующая *теорема двойственности Александера* вытекает непосредственно из следствия 15.

16. Теорема. *Пусть A — компактное подмножество пространства $\mathbf{R}^n$. Тогда для всех чисел q и всех R-модулей G имеет место изоморфизм*

$$\tilde{H}_q(\mathbf{R}^n - A;\ G) \approx \bar{H}^{n-q-1}(A;\ G).$$

Доказательство. Так как $\tilde{H}_*(\mathbf{R}^n;\ G) = 0$, имеет место изоморфизм

$$\partial_*\colon H_{q+1}(\mathbf{R}^n,\ \mathbf{R}^n - A;\ G) \approx \tilde{H}_q(\mathbf{R}^n - A;\ G).$$

Требуемый изоморфизм получается, если взять композицию обратного к этому изоморфизму и изоморфизма следствия 15. ■

Для произвольных ориентируемых многообразий имеет место следующая *теорема двойственности*:

17. Теорема. *Пусть U — некоторая ориентация над R n-мерного многообразия X, и пусть $(A,\ B)$ — компактная пара в X. Тогда для всех чисел q и всех R-модулей G имеет место изоморфизм*

$$\bar{\gamma}_U\colon H_q(X - B,\ X - A;\ G) \approx \bar{H}^{n-q}(A,\ B;\ G).$$

Доказательство. Поскольку $\bar{\gamma}_U$ — естественное отображение, теорему двойственности достаточно доказать для случая, когда множество B пусто. Если A содержится в некоторой координатной окрестности V многообразия X, а $U' = U\,|(V \times V,\, V \times V - \delta(V))$ — индуцированная ориентация на V, то имеет место коммутативная диаграмма (для любых модулей коэффициентов G)

$$\begin{tikzcd} H_q(V,\ V - A) \arrow[rr, "\approx"] \arrow[dr, "\bar{\gamma}_{U'}"'] & & H_q(X,\ X - A) \arrow[dl, "\bar{\gamma}_U"] \\ & \bar{H}^{n-q}(A) & \end{tikzcd}$$

Согласно следствию 15, $\bar{\gamma}_{U'}$ — изоморфизм; следовательно, изоморфизмом является также и $\bar{\gamma}_U$. Требуемый результат для произвольного компактного множества A получается индукцией по (конечному) числу координатных окрестностей, покрывающих A, основанной на естественности гомоморфизма $\bar{\gamma}_U$ и использующей обычную технику последовательностей Майера — Виеториса и лемму о пяти гомоморфизмах. ■

В случае когда многообразие X компактно, применяя теорему 17 к паре $(X,\ \varnothing)$ и замечая, что $i\colon \bar{H}^q(X;\ G) \approx H^q(X,\ G)$, получаем следующую *теорему двойственности Пуанкаре*:

18. Теорема. *Если U — ориентация над кольцом R компактного n-мерного многообразия X, то для всех q и всех R-модулей G имеет место изоморфизм*

$$\gamma_U\colon H_q(X;\ G) \approx H^{n-q}(X;\ G). \ \blacksquare$$

Пара $(X,\ A)$ называется *относительным n-мерным многообразием*, если пространство X хаусдорфово, A замкнуто в X (A может быть пустым), а $X - A$ есть n-мерное многообразие. Для относительных многообразий имеет место следующая *теорема двойственности Лефшеца*:

19. Теорема. *Пусть $(X,\ A)$ — компактное относительное n-мерное многообразие, такое, что многообразие $X - A$ ориентируемо над кольцом R. Тогда для любых чисел q и любых R-модулей G имеет место изоморфизм*

$$H_q(X - A;\ G) \approx \bar{H}^{n-q}(X,\ A;\ G).$$

Доказательство. Пусть $\{N\}$ — семейство замкнутых окрестностей множества A, направленное по включению. Имеют место изоморфизмы

$$\varinjlim \{H_q(X - N;\ G)\} \approx H_q(X - A;\ G),$$
$$\varinjlim \{\bar{H}^{n-q}(X,\ N;\ G)\} \approx \bar{H}^{n-q}(X,\ A;\ G);$$

первый потому, что сингулярная теория гомологий является теорией гомологий с компактными носителями, а второй согласно теореме 6.1.12. Пусть V — открытая окрестность множества A, содержащаяся во внутренности множества N, и пусть U — ориентация многообразия $X - A$ над R. Согласно теореме 17 и стандартным свойствам вырезания, имеют место изоморфизмы (для любых модулей коэффициентов G)

$$\begin{array}{ccc} H_q(X - N) & \xrightarrow{\approx} & H_q((X - A) - (N - V),\ (X - A) - (X - V)) \\ & & \downarrow{\scriptstyle \approx}\ {\scriptstyle \gamma_U} \\ \bar{H}^{n-q}(X,\ N) & \xrightarrow{\approx} & \bar{H}^{n-q}(X - V,\ N - V) \end{array}$$

из которых нужный нам результат получается переходом к пределу. ■

Многообразием (n-мерным) *X с краем $\dot{X}$* называется паракомпактное хаусдорфово пространство X, такое, что пара $(X,\ \dot{X})$ является относительным n-мерным многообразием и всякая точка $x \in \dot{X}$ обладает такой окрестностью V, что пара $(V,\ V \cap \dot{X})$ гомеоморфна $\mathbf{R}^{n-1} \times (I,\ 0)$. Поскольку множество $\dot{X}$ может быть пустым, понятие многообразия с краем включает в себя понятие многообразия без края.

Пусть X — некоторое n-мерное многообразие с краем $\dot{X}$. Край $\dot{X}$ обладает окрестностью N, такой, что пара $(N, \dot{X})$ гомеоморфна $\dot{X} \times (I, 0)$ [1]. Такая окрестность N называется *кромкой* края $\dot{X}$, а ее внутренность — *открытой кромкой* края $\dot{X}$. (В случае когда край $\dot{X}$ компактен, всякая его окрестность содержит некоторую кромку.) Поскольку такие кромки существуют, $X - \dot{X}$ является слабым деформационным ретрактом пространства X, а пара $((X - \dot{X}) \times (X - \dot{X}),\ (X - \dot{X}) \times (X - \dot{X}) - \delta(X - \dot{X}))$ — слабым деформационным ретрактом пары $(X \times X,\ X \times X - \delta(X))$.

Многообразие (n-мерное) X с краем $\dot{X}$ называется *ориентируемым* над кольцом R, если многообразие $X - \dot{X}$ ориентируемо над R. *Ориентацией* над R многообразия X называется класс $U \in H^n(X \times X,\ X \times X - \delta(X);\ R)$, ограничение которого на $((X - \dot{X}) \times (X - \dot{X}),\ (X - \dot{X}) \times (X - \dot{X}) - \delta(X - \dot{X}))$ является ориентацией многообразия $X - \dot{X}$ над R. Для многообразий с краем *теорема двойственности Лефшеца* принимает следующий вид:

20. Теорема. *Пусть X — компактное n-мерное многообразие с краем $\dot{X}$ и ориентацией U над кольцом R. Для всех чисел q и всех R-модулей G имеют место изоморфизмы* (*где* j: $X - \dot{X} \subset X$)

$$H_q(X;\ G) \xleftarrow[\approx]{j_*} H_q(X - \dot{X};\ G) \xrightarrow[\approx]{\gamma_U} H^{n-q}(X,\ \dot{X};\ G),$$

$$H_q(X,\ \dot{X};\ G) \xrightarrow[\approx]{\gamma_U} H^{n-q}(X - \dot{X};\ G) \xleftarrow[\approx]{j^*} H^{n-q}(X;\ G).$$

Доказательство. Поскольку вложение j является гомотопической эквивалентностью, j_* и j^* — изоморфизмы. Пусть N — некоторая кромка края $\dot{X}$ с внутренностью $\mathring{N}$. Пусть U' — ориентация многообразия $X - \dot{X}$, полученная ограничением класса U. В следующей коммутативной диаграмме каждое горизонтальное отображение индуцировано вложением и является изоморфизмом, поскольку это вложение представляет собой вырезание (обозначено буквой e) или гомотопическую эквивалентность (обозначено буквой h):

$$\begin{array}{ccccc}
H_q(X-\dot{X}) & \xleftarrow[\approx]{h} & H_q(X-N) & \xrightarrow[\approx]{e} & H_q((X-\dot{X})-(N-\mathring{N}),\ (X-\dot{X})-(X-\mathring{N})) \\
\downarrow{\scriptstyle \gamma_U} & & \downarrow{\scriptstyle \gamma_U} & & \downarrow{\scriptstyle \gamma_{U'}} \\
H^{n-q}(X,\ \dot{X}) & \xleftarrow[\approx]{h} & H^{n-q}(X, N) & \xrightarrow[\approx]{e} & H^{n-q}(X-\mathring{N},\ N-\mathring{N})
\end{array}$$

[1] См. Brown M., Locally flat imbeddings of topological manifolds, *Ann. Math.*, 75 (1962), 331–341.

(для любых модулей коэффициентов G). Поскольку пара $(X-\overset{\circ}{N}, N-\overset{\circ}{N})$ обладает произвольно малыми окрестностями, для которых она является деформационным ретрактом, i: $\bar{H}^{n-q}(X-\overset{\circ}{N}, N-\overset{\circ}{N}) \approx \approx H^{n-q}(X-\overset{\circ}{N}, N-\overset{\circ}{N})$. Из теоремы 17 вытекает, что вертикальное отображение справа является изоморфизмом (так как оно соответствует изоморфизму $\bar{\gamma}_{U'}$). Следовательно, вертикальное отображение слева также является изоморфизмом, что доказывает первую часть теоремы.

Аналогично, имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd}
H_q(X, \dot{X}) \arrow[r, "h", "\approx"'] \arrow[d, "\gamma_U"'] & H_q(X, \overset{\circ}{N}) \arrow[d, "\gamma_U"] & H_q(X-\dot{X}, (X-\dot{X})-(X-\overset{\circ}{N})) \arrow[l, "e"', "\approx"] \arrow[d, "\gamma_{U'}"] \\
H^{n-q}(X-\dot{X}) \arrow[r, "h", "\approx"'] & H^{n-q}(X-\overset{\circ}{N}) & H^{n-q}(X-\overset{\circ}{N}) \arrow[l, "e"', "\approx"]
\end{tikzcd}$$

Так как множество $X-\overset{\circ}{N}$ обладает произвольно малыми окрестностями, для которых оно является деформационным ретрактом, то из теоремы 17 вытекает, что правое вертикальное отображение — изоморфизм. Следовательно, вертикальное отображение слева также является изоморфизмом, что доказывает вторую часть теоремы. ■

Из изоморфизмов теоремы 20 и теоремы об универсальных коэффициентах мы получаем короткую точную последовательность

$$0 \to H^q(X;\ R) \otimes G \xrightarrow{\mu} H^q(X;\ G) \to H^{q+1}(X;\ R) * G \to 0$$

и аналогичную короткую точную последовательность для модуля $H^q(X, \dot{X};\ G)$. Поскольку это верно для любого R-модуля G, из теоремы 5.5.13 вытекает такое

21. Следствие. *Если компактное n-мерное многообразие X с краем $\dot{X}$ ориентируемо над кольцом R, то модули $H_*(X;\ R)$ и $H_*(X, \dot{X};\ R)$ конечно порождены.* ■

Позднее в этой главе (см. теорему 6.9.11) мы докажем, что следствие 21 имеет место и для неориентируемых многообразий.

§ 3. Фундаментальный класс многообразия

Учитывая важность понятия ориентируемости многообразия, мы сейчас исследуем некоторые эквивалентные формулировки. Мы докажем, что компактное связное n-мерное многообразие тогда и только тогда ориентируемо, когда его n-мерный модуль гомологий нетривиален. Действительно, будет показано, что каждый класс ориентации такого многообразия соответствует образующей его n-мерного модуля гомологий. Более того, если z — элемент группы H_n, соответствующий данной ориентации, то $\frown$-произведение элемента z и класса когомологий определяет гомоморфизм, который с точностью до знака совпадает с изоморфизмом, обратным к изоморфизму двойственности. Методы, используемые в этом параграфе, опираются на технику склеивания классов гомологий[1]), аналогичную склеиванию классов когомологий, примененному в лемме 5.7.16.

Пусть X — некоторое пространство, X' — его подпространство и $\mathfrak{A}=\{A\}$ — некоторая совокупность подмножеств его дополнения $X-X'$. *Согласованным $\mathfrak{A}$-семейством* называется семейство $\{z_A \in H_q(X,\ X-A;\ G)\}$ (для фиксированных q и G), такое, что если $A,\ A' \in \mathfrak{A}$ и $A' \subset A$, то класс z_A отображается в класс $z_{A'}$ при гомоморфизме

$$H_q(X,\ X-A;\ G) \to H_q(X,\ X-A';\ G).$$

Согласованные $\mathfrak{A}$-семейства образуют модуль по отношению к покомпонентным операциям, который мы будем обозначать $H_q^{\mathfrak{A}}(X,\ X';\ G)$. Для совокупности $\mathfrak{A}$ всех компактных подмножеств подпространства $X-X'$ соответствующий модуль будет обозначаться через $H_q^c(X,\ X';\ G)$.

Нас будет интересовать модуль $H_n^c(X,\ \dot{X};\ G)$ в случае, когда X есть n-мерное многообразие с краем $\dot{X}$. В связи с этим важна следующая лемма:

1. Лемма. *Пусть X — некоторое n-мерное многообразие с краем $\dot{X}$, и пусть A — компактное подмножество в $X-\dot{X}$. Тогда для всех R-модулей G имеет место равенство*

$$H_q(X,\ X-A;\ G)=0, \quad q>n.$$

Доказательство. Предположим сначала, что множество A содержится в некоторой координатной окрестности V многообразия $X-\dot{X}$. Согласно свойству вырезания, получаем $H_q(V,\ V-A) \approx H_q(X,\ X-A)$. Поскольку V гомеоморфно $\mathbf{R}^n$, можно применить следствие 6.2.15 и получить изоморфизм

$$H_q(V,\ V-A) \approx \overline{H}^{n-q}(A)=0, \quad q>n.$$

Для произвольного компактного множества A требуемый результат получается из уже доказанного индукцией по числу координатных окрестностей, необходимых для покрытия множества A, с использованием последовательностей Майера — Виеториса. ■

---

[1]) См. об этом в статье: Cartan H., Méthodes modernes en topologie algébrique, *Comm. Math. Helv.*, **18** (1945), 1—15.

Ячейкой в n-мерном многообразии X с краем $\dot{X}$ назовем компактное множество A, обладающее такой открытой окрестностью $V \subset X - \dot{X}$, что пара (V, A) гомеоморфна паре $(\mathbf{R}^n, E^n)$. Каждая точка подмножества $X - \dot{X}$ обладает произвольно малыми окрестностями, являющимися ячейками. Для таких A и V имеет место изоморфизм вырезания

$$H_q(X, X-A; G) \approx H_q(V, V-A; G) \approx \begin{cases} 0, & q \neq n, \\ G, & q = n. \end{cases}$$

Если $x_0 \in A$, то отображение вложения индуцирует изоморфизм

$$H_q(X, X-A; G) \approx H_q(X, X-x_0; G).$$

Через $H_q^{sc}(X, \dot{X}; G)$ мы обозначим модуль согласованных $\mathfrak{A}$-семейств, где $\mathfrak{A}$ — совокупность ячеек в $X - \dot{X}$. Так как совокупность ячеек подпространства $X - \dot{X}$ содержится в совокупности его компактных подмножеств, то имеет место естественный гомоморфизм

$$H_q^c(X, \dot{X}; G) \to H_q^{sc}(X, \dot{X}; G),$$

сопоставляющий согласованному семейству $\{z_A\}$, занумерованному всеми компактными множествами A, согласованное семейство элементов, занумерованных ячейками.

2. Лемма. *Если X — некоторое n-мерное многообразие с краем $\dot{X}$, то для любого модуля G имеет место изоморфизм*

$$H_n^c(X, \dot{X}; G) \approx H_n^{sc}(X, \dot{X}; G).$$

Доказательство. Для каждого натурального i пусть $\mathfrak{A}_i$ — семейство компактных подмножеств в $X - \dot{X}$, содержащихся в объединении i ячеек. Тогда $\mathfrak{A}_i \subset \mathfrak{A}_{i+1}$ и $\bigcup \mathfrak{A}_i$ совпадает с совокупностью всех компактных подмножеств в $X - \dot{X}$. Имеют место гомоморфизмы

$$\ldots \to H_n^{\mathfrak{A}_{i+1}} \to H_n^{\mathfrak{A}_i} \to \ldots \to H_n^{\mathfrak{A}_1} \to H_n^{sc}$$

и изоморфизм $H_n^c \approx \varprojlim \{H_n^{\mathfrak{A}_i}\}$.

Поскольку каждый элемент семейства $\mathfrak{A}_1$ содержится в некоторой ячейке, то очевидным образом $H_n^{\mathfrak{A}_1} \approx H_n^{sc}$. С помощью обычной техники последовательностей Майера — Виеториса и леммы 1 получаем, что для $i \geqslant 1$ имеют место изоморфизмы $H_n^{\mathfrak{A}_{i+1}} \approx H_n^{\mathfrak{A}_i}$. Комбинируя эти изоморфизмы, получаем утверждение леммы. ■

Докажем теперь следующий важный результат:

3. Теорема. *Пусть X — некоторое n-мерное многообразие с краем $\dot{X}$, и пусть*

$$\{z_A\} \in H_n^c(X, \dot{X}; G).$$

(a) *Равенство $\{z_A\} = 0$ имеет место тогда и только тогда, когда $z_x = 0$ для всех $x \in X - \dot{X}$.*

(b) *Если многообразие X связно, то $\{z_A\} = 0$ тогда и только тогда, когда $z_x = 0$ для некоторой точки $x \in X$.*

Доказательство. Свойство (a) следует из леммы 2 и из того, что если A — ячейка и $x \in A$, то

$$H_n(X, X - A; G) \approx H_n(X, X - x; G).$$

Значит, $z_A = 0$ тогда и только тогда, когда $z_x = 0$.

Для доказательства свойства (b) предположим, что $z_{x_0} = 0$ для некоторой точки $x_0 \in X - \dot{X}$. Поскольку пространство X связно, связен и его слабый деформационный ретракт $X - \dot{X}$. Отсюда следует, что если $x \in X - \dot{X}$, то существует такая конечная последовательность ячеек $A_1, \ldots, A_m$ в $X - \dot{X}$, что $x_0 \in A_1$, $x \in A_m$ и A_i пересекается с A_{i+1} при $1 \leqslant i < m$. Выберем по точке $x_i \in A_i \cap A_{i+1}$ для всех $1 \leqslant i < m$. Имеют место изоморфизмы

$$H_n(X, X - x_0) \xleftarrow{\approx} H_n(X, X - A_1) \xrightarrow{\approx} H_n(X, X - x_1) \xleftarrow{\approx} \ldots$$
$$\ldots \xleftarrow{\approx} H_n(X, X - A_m) \xrightarrow{\approx} H_n(X, X - x),$$

которые показывают, что если $z_{x_0} = 0$, то и $z_x = 0$. Поскольку это верно для всех $x \in X - \dot{X}$, требуемое утверждение вытекает из свойства (a). ■

Пусть X — некоторое n-мерное многообразие с краем $\dot{X}$; *фундаментальным семейством многообразия* X над кольцом R называется такой элемент $\{z_A\} \in H_n^c(X, \dot{X}; R)$, что z_x для всех точек $x \in X - \dot{X}$ служит образующей модуля $H_n(X, X - x; R)$. В следующей теореме выясняется соотношение между фундаментальными семействами и ориентациями.

4. Теорема. *Пусть X — некоторое n-мерное многообразие с краем $\dot{X}$. Существует биективное соответствие между ориентациями U (над R) многообразия X и фундаментальными семействами $\{z_A\}$ (над R), такое, что класс U и семейство $\{z_A\}$ соответствуют друг другу тогда и только тогда, когда $\gamma_U(z_A) = 1 \in H^0(A; R)$ для всех компактных подмножеств $A \subset X - \dot{X}$.*

Доказательство. Пусть U — некоторая ориентация многообразия X, и пусть U' — индуцированная ориентация многообразия $X-\dot{X}$. Для любого компактного $A \subset X-\dot{X}$ имеет место коммутативная диаграмма (для любых модулей коэффициентов R)

$$\begin{tikzcd} H_n(X, X-A) \arrow[d, "\gamma_U"'] & H_n(X-\dot{X}, (X-\dot{X})-A) \arrow[l, "j_*", "\approx"'] \arrow[dl, "\gamma_{U'}"'] \arrow[d, "\bar{\gamma}_{U'}"] \\ H^0(A) & \bar{H}^0(A) \arrow[l, "i"] \end{tikzcd}$$

Согласно теореме 6.2.17, правое вертикальное отображение является изоморфизмом, поэтому существует единственный элемент $z_A \in H_n(X, X-A)$, такой, что $\bar{\gamma}_{U'} j_*^{-1}(z_A) = 1 \in \bar{H}^0(A)$. Из единственности элемента z_A и естественности гомоморфизмов γ_U и $\bar{\gamma}_{U'}$ следует, что семейство $\{z_A\}$ является согласованным. В силу коммутативности написанной выше диаграммы $\gamma_U(z_A) = 1 \in H^0(A)$ для всех компактных подмножеств A многообразия $X-\dot{X}$. Следовательно, необходимо лишь проверить, что семейство $\{z_A\}$ является фундаментальным. В случае $A = x$ это следует из коммутативности написанной выше диаграммы и из того, что i: $\bar{H}^0(x) \approx \approx H^0(x)$ и γ_U: $H_n(X, X-x) \approx H^0(x)$. Следовательно, элемент $z_x = \gamma_U^{-1}(1)$ является образующей модуля $H_n(X, X-x)$. Значит, $\{z_A\}$ — фундаментальное семейство с нужными нам свойствами, и семейство $\{z_x\}_{x \in X-\dot{X}}$ (а следовательно, в силу теоремы 3а и семейство $\{z_A\}$) полностью характеризуется тем свойством, что $\gamma_U(z_x) = 1 \in H^0(x)$.

Обратно, пусть задано фундаментальное семейство $\{z_A\}$, и пусть V — какое-нибудь открытое подмножество многообразия $X-\dot{X}$, гомеоморфное $\mathbf{R}^n$. Если $x_0 \in V$, то $H^*(V; R) \approx H^*(x_0; R)$, откуда следует, что

$$H^*(V \times X, V \times X - \delta(V); R) \approx H^*(x_0 \times (X, X-x_0); R).$$

Если $u \in H^n(V \times X, V \times X - \delta(V); R)$, то из формулы Кюннета для когомологий (теорема 5.6.1) вытекает, что равенство $u \mid x_0 \times (X, X-x_0) = 1 \times u'$ выполняется для единственного элемента $u' \in H^n(X, X-x_0; R) \approx \operatorname{Hom}(H_n(X, X-x_0; R), R)$. Согласно 6.1.2,

$$[u \mid x_0 \times (X, X-x_0)]/z_{x_0} = \langle u', z_{x_0}\rangle 1.$$

Поскольку z_{x_0} — образующая модуля $H_n(X, X-x_0; R)$, элементы $\langle u', z_{x_0}\rangle$ полностью определяют u'. Следовательно, существует единственный элемент $U \in H^n(V \times X, V \times X - \delta(V); R)$, такой, что $[U \mid x_0 \times (X, X-x_0)]/z_{x_0} = 1 \in H^0(x_0; R)$.

Покажем теперь, что для всякой точки $x \in V$ имеет место равенство $[U \mid x \times (X, X-x)]/z_x = 1 \in H^0(x; R)$. Если x и x' принадлежат ячейке $A \subset V$, то класс z_A отображается и в z_x, и в $z_{x'}$. Следовательно, элемент $[U \mid A \times (X, X-A)]/z_A \in H^0(A; R)$ отображается в элементы $[U \mid x \times (X, X-x)]/z_x$ и $[U \mid x' \times (X, X-x')]/z_{x'}$ в силу естественности гомоморфизма γ_U. Поскольку $H^0(A; R) \approx \approx H^0(x; R)$ и $H^0(A; R) \approx H^0(x'; R)$, то либо выполняются оба равенства $[U \mid x \times (X, X-x)]/z_x = 1 \in H^0(x; R)$ и $[U \mid x' \times (X, X-x')]/z_{x'} = = 1 \in H^0(x'; R)$, либо не выполняется ни одно из них.

Следовательно, множество точек $x \in V$, для которых $[U \mid x \times (X, X-x)]/z_x = 1 \in H^0(x; R)$, открыто и его дополнение в V тоже открыто. Поскольку V связно и $[U \mid x_0 \times (X, X-x_0)]/z_{x_0} = 1$, отсюда следует, что равенство $[U \mid x \times (X, X-x)]/z_x = 1$ имеет место для всех $x \in V$.

Это означает, что U — ориентация многообразия V, а если U' — аналогично определенная ориентация для другой координатной окрестности V' в $X - \dot{X}$, то для всякой точки $x \in V \cap V'$ имеем $U \mid x \times (X, X-x) = U' \mid x \times (X, X-x)$. Отсюда следует, что U и U' индуцируют одну и ту же ориентацию множества $V \cap V'$. Следовательно, семейство $\{U_V\}$, построенное для совокупности координатных окрестностей V многообразия $X - \dot{X}$, согласовано. Поэтому существует такая ориентация U многообразия X, что $U \mid (V \times X, V \times X - \delta(V)) = U_V$. Из построения U_V видно, что $\gamma_U(z_x) = 1 \in H^0(x; R)$ для всех $x \in X - \dot{X}$. Из первой половины доказательства вытекает, что существует фундаментальное семейство $\{z'_A\}$, для которого $\gamma_U(z'_A) = 1 \in H^0(A; R)$. Тогда $z'_x = z_x$ для всех $x \in X - \dot{X}$ и, согласно теореме 3а, $z'_A = z_A$ для всех компактных $A \subset X - \dot{X}$. Следовательно, $\gamma_U(z_A) = 1 \in H^0(A; R)$ для всех A. Это доказывает, что всякое фундаментальное семейство соответствует некоторой ориентации.

Ориентация U единственным образом определяется по фундаментальному семейству $\{z_A\}$. Действительно, если U и U' — две ориентации многообразия X, такие, что $\gamma_U(z_x) = \gamma_{U'}(z_x)$ для всех $x \in X - \dot{X}$, то $U \mid x \times (X, X-x) = U' \mid x \times (X, X-x)$ для всех точек $x \in X - \dot{X}$. Следовательно, согласно лемме 5.7.13, $U = U'$. ■

Последний результат дает следующую полезную характеристику ориентируемости связных многообразий:

5. Теорема. *Пусть X — связное n-мерное многообразие с краем $\dot{X}$. Если $H_n^c(X, \dot{X}; R) \neq 0$, то $H_n^c(X, \dot{X}; R) \approx R$ и каждая образующая есть фундаментальное семейство многообразия X.*

Доказательство. Из теоремы 3b следует, что для всякой точки $x_0 \in X - \dot{X}$ гомоморфизм

$$H_n^c(X, \dot{X}; R) \to H_n(X, X - x_0; R),$$

переводящий $\{z_A\}$ в z_{x_0}, является мономорфизмом. Поскольку $H_n(X, X - x_0; R) \approx R$, то либо $H_n^c(X, \dot{X}; R) = 0$, либо $H_n^c(X, \dot{X}; R) \approx R$[1]). Предположим, что $H_n^c(X, \dot{X}; R) \approx R$; пусть $\{z_A\}$ — образующая модуля $H_n^c(X, \dot{X}; R)$. Предположим, что для некоторой точки $x \in X - \dot{X}$ элемент z_x не является образующей модуля $H_n(X, X - x; R)$. Тогда существует необратимый элемент $r \in R$, такой, что $z_x = rz'_x$ для некоторого $z'_x \in H_n(X, X - x; R)$. Отсюда следует, что для всякой ячейки A, содержащей x, $z_A = rz'_A$ для некоторого $z'_A \in H_n(X, X - A; R)$. Так как пространство X связно, то, как и при доказательстве теоремы 3b, получаем, что для всякой ячейки A в $X - \dot{X}$ имеет место равенство $z_A = rz'_A$ для некоторого $z'_A \in H_n(X, X - A; R)$. Если A' — ячейка в A, то элемент rz'_A отображается в элемент $rz'_{A'}$ модуля $H_n(X, X - A'; R)$. Модуль $H_n(X, X - A'; R)$ не имеет кручения, поэтому, согласно лемме 1, элемент z'_A отображается в $z'_{A'}$. Следовательно, $\{z'_A\} \in H_n^{sc}(X, \dot{X}; R)$. По лемме 2 исходный элемент $\{z_A\} \in H_n^c(X, \dot{X}; R)$ делится на $r \in R$. Так как элемент r необратим, это противоречит предположению, что $\{z_A\}$ — образующая модуля $H_n^c(X, \dot{X}; R)$. ■

6. Следствие. *Если X — связное n-мерное многообразие с краем $\dot{X}$, то X ориентируемо над кольцом R тогда и только тогда, когда $H_n^c(X, \dot{X}; R) \neq 0$.*

Доказательство. Это вытекает непосредственно из теорем 4 и 5. ■

Рассмотрим теперь случай компактного многообразия.

7. Лемма. *Для компактного n-мерного многообразия X с краем $\dot{X}$ имеет место изоморфизм*

$$H_n(X, \dot{X}; G) \approx H_n^c(X, \dot{X}; G),$$

переводящий $z \in H_n(X, \dot{X}; G)$ в $\{z_A$ = образ элемента z в модуле $H_n(X, X - A; G)\}$.

Доказательство. Пусть V — открытая кромка края $\dot{X}$, и пусть $B = X - V$. Тогда множество B компактно и существует гомоморфизм

$$H_n^c(X, \dot{X}; G) \to H_n(X, X - B; G),$$

---

[1]) Напомним, что R — область главных идеалов. — *Прим. ред.*

переводящий элемент $\{z_A\}$ в класс z_B. Поскольку $X-B=V$, а вложение $(X, \dot{X}) \subset (X, V)$ является гомотопической эквивалентностью, композиция

$$H_n(X, \dot{X}; G) \to H_n^c(X, \dot{X}; G) \to H_n(X, X-B; G)$$

есть изоморфизм. Для завершения доказательства осталось лишь показать, что правое отображение есть мономорфизм. Пусть $\{z_A\}$ — согласованное семейство, такое, что $z_B=0$, и пусть A — какое-нибудь компактное подмножество многообразия $X-\dot{X}$. Тогда существует такая открытая кромка V' края $\dot{X}$, что $V' \subset V$ и V' не пересекается с A. Пусть $B'=X-V'$. Тогда A, $B \subset B'$ и мы получаем гомоморфизмы (для любых модулей коэффициентов G)

$$H_n(X, X-A) \leftarrow H_n(X, X-B') \xrightarrow[\approx]{} H_n(X, X-B),$$

где второе отображение есть изоморфизм, поскольку вложение $(X, V') \subset (X, V)$ является гомотопической эквивалентностью. Поскольку $z_B=0$, то $z_{B'}=0$ и $z_A=0$. Следовательно, в модуле $H_n^c(X, \dot{X}; G)$ имеет место равенство $\{z_A\}=0$. ■

8. Следствие. *Компактное n-мерное многообразие X с краем $\dot{X}$ тогда и только тогда ориентируемо над R, когда $H_n(X, \dot{X}; R) \neq 0$.*

Доказательство. Это вытекает из следствия 6 и леммы 7. ■

Пусть X — компактное n-мерное многообразие с краем $\dot{X}$; его *фундаментальным классом* над кольцом R называется элемент $z \in H_n(X, \dot{X}; R)$, образ которого в модуле $H_n^c(X, \dot{X}; R)$ при изоморфизме леммы 7 совпадает с некоторым фундаментальным семейством (т. е. для каждой точки $x \in X-\dot{X}$ образ элемента z в модуле $H_n(X, X-x; R)$ является образующей этого модуля).

9. Теорема. *Пусть X — компактное n-мерное многообразие с краем $\dot{X}$. Тогда имеет место биективное соответствие между его ориентациями над кольцом R и фундаментальными классами z над R, при котором классу U соответствует элемент z тогда и только тогда, когда $\gamma_U(z)=1 \in H^0(X; R)$.*

Доказательство. Это вытекает из теоремы 4 и леммы 7, если заметить, что элемент $v \in H^0(X; R)$ равен 1 тогда и только тогда, когда $v \mid x=1 \in H^0(x; R)$ для всех $x \in X-\dot{X}$. ■

10. Следствие. *Пусть X — компактное n-мерное многообразие с краем $\dot{X}$. Если X ориентируемо, то и $\dot{X}$ ориентируемо, и фунда-*

ментальный класс многообразия X переходит в фундаментальный класс многообразия $\dot{X}$ при связывающем гомоморфизме

$$\partial_*\colon H_n(X, \dot{X};\ R) \to H_{n-1}(\dot{X};\ R).$$

Доказательство. Пусть N — кромка края $\dot{X}$, и $\mathring{N}$ — ее внутренность. Тогда N есть n-мерное многообразие с краем $\dot{X} \cup (N - \mathring{N})$ и имеет место следующая коммутативная диаграмма (для любых модулей коэффициентов G):

$$\begin{tikzcd}
H_n(X, \dot{X}) \arrow[rr, "i_*"] \arrow[d, "\partial_*"'] & & H_n(X, \dot{X} \cup (X - \mathring{N})) \\
H_{n-1}(\dot{X}) \arrow[r, "k_*", "\approx"'] & H_{n-1}(\dot{X} \cup (N - \mathring{N}),\ N - \mathring{N}) & H_n(N, \dot{X} \cup (N - \mathring{N})) \arrow[l, "\partial_*"'] \arrow[u, "j_*", "\approx"']
\end{tikzcd}$$

Из определения фундаментального класса ясно, что если $z \in H_n(X, \dot{X})$ — фундаментальный класс многообразия X, то $j_*^{-1} i_* z = z'$ — фундаментальный класс многообразия N. Поскольку кромка N гомеоморфна произведению $\dot{X} \times I$, причем края $\dot{X}$ и $N - \mathring{N}$ переходят при этом гомеоморфизме соответственно в $\dot{X} \times 0$ и $\dot{X} \times 1$, из формулы Кюннета вытекает, что

$$H_n(N, \dot{X} \cup (N - \mathring{N})) \approx H_{n-1}(\dot{X}) \otimes H_1(I, \dot{I}).$$

Пусть $w \in H_1(I, \dot{I})$ — некоторая образующая, и пусть $\{\dot{X}_j\}$ — множество компонент связности края $\dot{X}$. Тогда элементу z' при указанном выше изоморфизме соответствует элемент $\sum z'_j \times w$, где $z'_j \in H_{n-1}(\dot{X}_j)$ и $k_*^{-1} \partial_* z' = \pm \sum z'_j$. Следовательно, $\partial_* z = \pm \sum z'_j$. Но так как z — фундаментальный класс многообразия X, то $z'_j \times w$ соответствует фундаментальному классу многообразия $\dot{X}_j \times I$. Значит, элемент z'_j не равен нулю и является образующей модуля $H_{n-1}(\dot{X}_j)$, т. е. z'_j представляет собой фундаментальный класс пространства $\dot{X}_j$. Отсюда следует, что $\pm \sum z'_j = \partial_* z$ — фундаментальный класс многообразия $\dot{X}$. ■

Теперь мы хотим доказать, что для компактных многообразий $\frown$-произведение на фундаментальный класс определяет изоморфизм, который с точностью до знака совпадает с обратным к изоморфизму двойственности. Для этого нам потребуется следующая

11. Лемма. *Пусть X — компактное ориентируемое n-мерное многообразие с краем $\dot{X}$, и пусть p_1, p_2: $X \times X \to X$ — проекции. Для элементов*

$$u \in H^q(X \times X, X \times X - \delta(X);\ R), \quad z \in H_m(X \times X, X \times X - \delta(X);\ G)$$

и $v \in H^r(X;\ G)$ *имеют место равенства*

$$p_{1*}(u \frown z) = p_{2*}(u \frown z) \text{ в модуле } H_{m-q}(X;\ G),$$
$$u \smile p_1^* v = u \smile p_2^* v \text{ в модуле } H^{q+r}(X \times X,\ X \times X - \delta(X);\ G).$$

Доказательство. Пусть $T\colon (X \times X,\ X \times X - \delta(X)) \to (X \times X,\ X \times X - \delta(X))$ — перестановка сомножителей. Если элемент $w \in H_n(X, \dot{X};\ R)$ есть фундаментальный класс многообразия X, то $w \times w \in H_{2n}((X, \dot{X}) \times (X, \dot{X});\ R)$ — фундаментальный класс многообразия $X \times X$ (откуда следует, что $X \times X$ ориентируемо) и $T_*(w \times w) = (-1)^n w \times w$. По теореме 9 гомоморфизм, индуцированный отображением T, переводит ориентацию пространства $X \times X$, соответствующую элементу $w \times w$, в себя, лишь умножая ее на $(-1)^n$. Пусть

$$\gamma\colon H_m(X \times X,\ X \times X - \delta(X);\ G) \approx \bar{H}^{2n-m}(\delta(X);\ G)$$

есть отображение двойственности, ассоциированное с этой ориентацией. Тогда мы имеем коммутативную диаграмму (для любых модулей коэффициентов G)

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
H_m(X \times X,\ X \times X - \delta(X);\ G) \arrow[rr, "T_*"] \arrow[dr, "\gamma", "\approx"'] & & H_m(X \times X,\ X \times X - \delta(X);\ G) \arrow[dl, "(-1)^n \gamma", "\approx"'] \\
& \bar{H}^{2n-m}(\delta(X);\ G) &
\end{tikzcd}$$

Следовательно, $T_*(z) = (-1)^n z$ для всякого элемента $z \in H_*(X \times X,\ X \times X - \delta(X);\ G)$ (откуда вытекает, что $T^*(u) = (-1)^n u$ для всякого $u \in H^*(X \times X,\ X \times X - \delta(X);\ G)$. Имеем

$$p_{2*}(u \frown z) = p_{1*} T_*(u \frown z) = p_{1*}(T^* u \frown T_* z) = p_{1*}(u \frown z)$$

и

$$u \smile p_2^* v = (-1)^n T^*(u \smile p_2^* v) = u \smile T^* p_2^* v = u \smile p_1^* v. \ \blacksquare$$

12. Теорема. *Пусть z — фундаментальный класс над кольцом R компактного n-мерного многообразия X с краем $\dot{X}$. Для всех целых q и всех R-модулей G гомоморфизм $\varkappa_z(v) = v \frown z$ определяет изоморфизмы*

$$\varkappa_z\colon H^q(X;\ G) \approx H_{n-q}(X, \dot{X};\ G),$$
$$\varkappa_z\colon H^q(X, \dot{X};\ G) \approx H_{n-q}(X;\ G),$$

которые с точностью до знака совпадают с изоморфизмами, обратными изоморфизмам теоремы двойственности 6.2.20, *определенным ориентацией, соответствующей элементу z.*

Доказательство. Пусть U — ориентация многообразия X, соответствующая элементу z, как в теореме 9, и пусть j: $X-\dot{X}\subset X$. Докажем коммутативность с точностью до знака следующей диаграммы (для любых модулей коэффициентов G):

$$\begin{tikzcd} H_q(X-\dot{X}) \arrow[rr, "\gamma_U"] \arrow[dr, "j_*"'] & & H^{n-q}(X, \dot{X}) \arrow[dl, "\varkappa_z"] \\ & H_q(X) & \end{tikzcd}$$

Пусть $w\in H_q(X-\dot{X})$. Согласно 6.1.6, имеем

$$\begin{aligned}\varkappa_z\gamma_U(w) &= \{[U\mid(X,\dot{X})\times(X-\dot{X})]/w\}\frown z=\\ &= p_{1*}\{[U\mid(X,\dot{X})\times(X-\dot{X})]\frown(z\times w)\}.\end{aligned}$$

По лемме 11 это выражение равно

$$\begin{aligned}&p_{2*}\{[U\mid(X,\dot{X})\times(X-\dot{X})]\frown(z\times w)\}=\\ &\quad=p_{1*}T_*\{[U\mid(X,\dot{X})\times(X-\dot{X})]\frown(z\times w)\}=\\ &\quad=\pm j_*\bar{p}_{1*}\{[U\mid(X-\dot{X})\times(X,\dot{X})]\frown(w\times z)\},\end{aligned}$$

где $\bar{p}_1$: $(X-\dot{X})\times X\to X-\dot{X}$ — проекция на первый сомножитель. Используя снова 6.1.6, получаем

$$\bar{p}_{1*}\{[U\mid(X-\dot{X})\times(X,\dot{X})]\frown(w\times z)\}=\gamma_U(z)\frown w=w.$$

Следовательно,

$$\varkappa_z\gamma_U(w)=\pm j_*(w).$$

Аналогично доказывается коммутативность с точностью до знака диаграммы

$$\begin{tikzcd} H^q(X) \arrow[rr, "\varkappa_z"] \arrow[dr, "j^*"'] & & H_{n-q}(X, \dot{X}) \arrow[dl, "\gamma_U"] \\ & H^q(X-\dot{X}) & \end{tikzcd}$$

Если $v\in H^q(X)$, то по свойству 6.1.5 имеем

$$\begin{aligned}\gamma_U\varkappa_z(v) &= [U\mid(X-\dot{X})\times(X,\dot{X})]/(v\frown z)=\\ &= \{[U\smile p_2^*(v)]\mid(X-\dot{X})\times(X,\dot{X})\}/z.\end{aligned}$$

Согласно лемме 11 и свойству 6.1.4, это выражение совпадает с выражением

$$\pm\{[\bar{p}_1^*j^*(v)\smile U]\mid(X-\dot{X})\times(X,\dot{X})\}/z=\pm j^*(v)\smile\gamma_U(z)=\pm j^*(v).$$

Следовательно,

$$\gamma_U\varkappa_z(v)=\pm j^*(v). \blacksquare$$

§ 4. Теория когомологий Александера

В этом параграфе мы определяем теорию когомологий, которая специально приспособлена к исследованию отображений топологических пространств в полиэдры (теория сингулярных когомологий больше подходит для исследования отображений полиэдров в топологические пространства). Один подход к этой теории, так называемая конструкция Чеха, основан на аппроксимации пространства нервами открытых покрытий; в основе другого подхода, называемого конструкцией Александера — Колмогорова, лежит рассмотрение комплексов, симплексами которых являются конечные совокупности «близких» точек. Мы начнем с конструкции Александера. В дальнейшем в этой главе мы покажем (см. 6.9.9 и следующий параграф), что если (A, B) — замкнутая пара в многообразии X, то определенный в § 6.1 модуль $\bar{H}^q(A, B; G)$ совпадает с когомологиями Александера пары (A, B) с коэффициентами в G.

Пусть G — некоторый R-модуль, и пусть X — топологическое пространство. Для целого $q \geqslant 0$ обозначим через $C^q(X; G)$ модуль всех функций φ на пространстве X^{q+1} со значениями в G, в котором сложение и умножение на скаляры определяется поточечно. Таким образом, если $x_0, x_1, \ldots, x_q \in X$, то $\varphi(x_0, x_1, \ldots, x_q) \in G$, и если $\varphi_1, \varphi_2 \in C^q(X; G)$ и $r \in R$, то

$$r\varphi_1(x_0, x_1, \ldots, x_q) = r(\varphi_1(x_0, x_1, \ldots, x_q)),$$
$$(\varphi_1 + \varphi_2)(x_0, x_1, \ldots, x_q) = \varphi_1(x_0, x_1, \ldots, x_q) + \varphi_2(x_0, x_1, \ldots, x_q).$$

Мы будем опускать символ G в выражении $C^q(X; G)$, если его отсутствие не может привести к недоразумению.

Кограничный гомоморфизм $\delta\colon C^q(X) \to C^{q+1}(X)$ определяется формулой

$$(\delta\varphi)(x_0, \ldots, x_{q+1}) = \sum_{0 \leqslant i \leqslant q+1} (-1)^i \varphi(x_0, \ldots, \hat{x}_i, \ldots, x_{q+1}).$$

Тогда $\delta\delta = 0$ и $C^*(X) = \{C^q(X), \delta\}$ — коцепной комплекс над R. Если X непусто, то этот комплекс обладает аугментацией $\eta\colon G \to C^0(X)$ над G, которая определяется равенством $(\eta(g))(x) = g$ при $g \in G$ для всех $x \in X$. До сих пор топология пространства X не играла никакой роли, и, как показывает следующий результат, комплекс $C^*(X)$ обладает неинтересными когомологиями.

1. Лемма. *Пусть X — непустое пространство. Тогда*

$$\eta^*\colon G \approx H^*(C^*(X; G)).$$

Доказательство. Пусть $\bar{x}$ — фиксированная точка пространства X. Определим коцепную гомотопию $D\colon C^*(X) \to C^*(X)$, полагая

$$(D\varphi)(x_0, \ldots, x_q) = \varphi(\bar{x}, x_0, \ldots, x_q), \qquad q > 0.$$

Тогда

$$\delta D\varphi + D\,\delta\varphi = \begin{cases} \varphi, & \deg\varphi > 0, \\ \varphi - \eta(\varphi(\bar{x})), & \deg\varphi = 0. \end{cases}$$

Следовательно, если $\tau\colon C(X;\ G) \to G$ — коцепное отображение, определенное равенством

$$\tau(\varphi) = \begin{cases} 0, & \deg\varphi > 0, \\ \varphi(\bar{x}), & \deg\varphi = 0, \end{cases}$$

то $\tau\eta = 1_G$ и D — коцепная гомотопия между $1_{C^*(X)}$ и $\eta\tau$. Следовательно, η — цепная эквивалентность, что и доказывает утверждение леммы. ■

Теперь мы используем топологию пространства X для получения более интересного факторкомплекса. Элемент $\varphi \in C^q(X)$ называется *локально нулевым*, если существует такое покрытие $\mathcal{U}$ пространства X открытыми множествами, что φ обращается в нуль на всяком наборе из $(q+1)$ точек, принадлежащих некоторому элементу покрытия $\mathcal{U}$. Таким образом, локально нулевой элемент φ обращается в нуль на $\mathcal{U}^{q+1}$, где $\mathcal{U}^{q+1} = \{U^{q+1} \subset X^{q+1} \mid U \in \mathcal{U}\}$. Подмножество комплекса $C^q(X)$, состоящее из всех локально нулевых функций, образует подмодуль (обозначаемый $C_0^q(X)$), и если его элемент φ обращается в нуль на $\mathcal{U}^{q+1}$, то $\delta\varphi$ обращается в нуль на $\mathcal{U}^{q+2}$. Отсюда следует, что $C_0^*(X) = \{C_0^q(X),\ \delta\}$ — коцепной подкомплекс комплекса $C^*(X)$. Определим $\bar{C}^*(X)$ как факторкомплекс комплекса $C^*(X)$ по подкомплексу $C_0^*(X)$. Если пространство X непусто, то композиция

$$G \xrightarrow{\eta} C^*(X) \to \bar{C}^*(X)$$

является аугментацией комплекса $\bar{C}^*(X)$ и также обозначается через η. Модуль когомологий степени q комплекса $\bar{C}^*(X)$ обозначается $\bar{H}^q(X;\ G)$.

Для данного отображения $f\colon X \to Y$ (не обязательно непрерывного) индуцированное коцепное отображение

$$f^{\#}\colon C^*(Y;\ G) \to C^*(X;\ G)$$

можно определить с помощью формулы

$$(f^{\#}\varphi)(x_0, \ldots, x_q) = \varphi(f(x_0), \ldots, f(x_q)); \quad \varphi \in C^q(Y),\ x_0, \ldots, x_q \in X$$

Если элемент φ обращается в нуль на $\mathcal{V}^{q+1}$, где $\mathcal{V}$ — некоторое открытое покрытие пространства Y, и если существует такое покрытие $\mathcal{U}$ пространства X, что отображение f переводит каждый его элемент в некоторый элемент покрытия $\mathcal{V}$, то $f^{\#}\varphi$ обращается в нуль на $\mathcal{U}^{q+1}$. В частности, если f непрерывно, то $f^{-1}\mathcal{V}$ — открытое покрытие пространства X, которое можно взять в качестве такого $\mathcal{U}$, и, следовательно, $f^{\#}$ переводит $C_0^*(Y)$ в $C_0^*(X)$. Отсюда видно, что если отображение f непрерывно, то можно определить индуцированное коцепное отображение

$$f^{\#}\colon \bar{C}^*(Y;\ G) \to \bar{C}^*(X;\ G).$$

Пусть A — подпространство пространства X, и пусть $i\colon A \subset X$. Тогда $i^{\#}\colon \bar{C}^*(X;\ G) \to \bar{C}^*(A;\ G)$ — эпиморфизм. Следовательно, ядро отображения $i^{\#}$ является коцепным подкомплексом комплекса $\bar{C}^*(X;\ G)$; мы будем обозначать его $\bar{C}^*(X,\ A;\ G)$. Относительный модуль $\bar{H}^q(X,\ A;\ G)$ определяется как модуль когомологий степени q комплекса $\bar{C}^*(X,\ A;\ G)$.

Поскольку имеет место короткая точная последовательность коцепных комплексов

$$0 \to \bar{C}^*(X,\ A;\ G) \xrightarrow{j^{\#}} \bar{C}^*(X;\ G) \xrightarrow{i^{\#}} \bar{C}^*(A;\ G) \to 0,$$

имеет место и точная последовательность

$$\textbf{2.}\quad \ldots \to \bar{H}^q(X,\ A;\ G) \xrightarrow{j^*} \bar{H}^q(X;\ G) \xrightarrow{i^*} \bar{H}^q(A;\ G) \xrightarrow{\delta^*} \to \bar{H}^{q+1}(X,\ A;\ G) \to \ldots .$$

Градуированный модуль $\bar{H}^*(X,\ A) = \{\bar{H}^q(X,\ A;\ G)\}$ является последовательностью модулей теории когомологий, которую мы конструируем, а гомоморфизм $\delta^*\colon \bar{H}^q(A;\ G) \to \bar{H}^{q+1}(X,\ A;\ G)$ — связывающим гомоморфизмом этой теории. Непрерывное отображение $f\colon (X,\ A) \to (Y,\ B)$ индуцирует коммутативную диаграмму коцепных отображений

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 \to & \bar{C}^*(Y,\ B;\ G) & \to & \bar{C}^*(Y;\ G) & \to & \bar{C}^*(B;\ G) & \to 0 \\
& \downarrow{\scriptstyle f^{\#}} & & \downarrow{\scriptstyle (f\,|\,X)^{\#}} & & \downarrow{\scriptstyle (f\,|\,A)^{\#}} & \\
0 \to & \bar{C}^*(X,\ A;\ G) & \to & \bar{C}^*(X;\ G) & \to & \bar{C}^*(A;\ G) & \to 0
\end{array}$$

Гомоморфизм $f^*\colon \bar{H}^*(Y,\ B;\ G) \to \bar{H}^*(X,\ A;\ G)$ определяется как гомоморфизм, индуцированный коцепным отображением $f^{\#}$ этой диаграммы. Ясно, что для фиксированного модуля G система модулей $\bar{H}^*(X,\ A;\ G)$ и гомоморфизмов f^* образует контравариантный функтор из категории пар топологических пространств в категорию градуированных R-модулей. Более того, связывающий гомоморфизм δ^* является естественным преобразованием степени $+1$ из $\bar{H}^*(A;\ G)$ в $\bar{H}^*(X,\ A;\ G)$. Следовательно, у нас имеются все необходимые составные части теории когомологий и нам остается проверить, что выполняются все аксиомы. Полученная теория когомологий называется *теорией когомологий Александера* (или

Александера — Спеньера [1])), а модуль $\bar{H}^q(X, A; G)$ называется q-м *модулем когомологий Александера пары* (X, A) *с коэффициентами в* G.

Аксиома точности вытекает из точности последовательности 2. Аксиома размерности вытекает из следующего результата:

3. Лемма. *Если X — одноточечное пространство, то* $\eta^*\colon G \approx \bar{H}^*(X; G)$.

Доказательство. Для одноточечного пространства X локально нулевые функции на X являются нулевыми. Следовательно, $\bar{C}^*(X; G) = C^*(X; G)$ и нужное нам утверждение вытекает из леммы 1. ∎

Прежде чем доказывать аксиомы вырезания, полезно ввести другой коцепной комплекс для относительной теории. Пусть $A \subset X$, и пусть $C^*(X, A)$ — подкомплекс комплекса $C^*(X)$, состоящий из локально нулевых на A функций. Таким образом, имеет место короткая точная последовательность

$$0 \to C^*(X, A) \to C^*(X) \to \bar{C}^*(A) \to 0$$

и $C_0^*(X) \subset C^*(X, A)$. Отсюда следует, что $\bar{C}^*(X, A) = C^*(X, A)/C_0^*(X)$. Аксиома вырезания вытекает из следующего результата:

4. Лемма. *Пусть подмножество U подпространства $A \subset X$ обладает такой открытой окрестностью W, что $\bar{W} \subset \operatorname{int} A$. Тогда вложение $j\colon (X - U, A - U) \subset (X, A)$ индуцирует изоморфизм*

$$j^{\#}\colon \bar{C}^*(X, A) \approx \bar{C}^*(X - U, A - U).$$

Доказательство. Имеет место коммутативная диаграмма с точными строками

$$\begin{array}{ccccccc}
0 \to C_0^*(X) & \longrightarrow & C^*(X, A) & \longrightarrow & \bar{C}^*(X, A) \to 0 \\
\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle k^{\#}} & & \downarrow{\scriptstyle j^{\#}} \\
0 \to C_0^*(X - U) & \longrightarrow & C^*(X - U, A - U) & \xrightarrow{\lambda} & \bar{C}^*(X - U, A - U) \to 0.
\end{array}$$

Достаточно доказать, что $\lambda k^{\#}$ — эпиморфизм и что $(k^{\#})^{-1}(C_0^*(X - U)) = C_0^*(X)$. Пусть $\varphi \in C^q(X - U, A - U)$. Определим функцию $\bar{\varphi} \in C^q(X)$, полагая

$$\bar{\varphi}(x_0, \ldots, x_q) = \begin{cases} 0, & x_i \in W \text{ для некоторого } 0 \leqslant i \leqslant q, \\ \varphi(x_0, \ldots, x_q), & x_0, \ldots, x_q \in X - W. \end{cases}$$

---

[1]) См. Spanier E., Cohomology theory for general spaces, *Ann. Math.*, **49** (1948), 407—427.

Если $\mathscr{V}$ — открытое покрытие множества $A-U$, такое, что элемент φ обращается в нуль на $\mathscr{V}^{q+1}$, то $\mathscr{U}=\{V\cup W \mid V\in\mathscr{V}\}$ является таким открытым покрытием множества A, что элемент $\bar\varphi$ обращается в нуль на $\mathscr{U}^{q+1}$. Следовательно, $\bar\varphi\in C^q(X, A)$ и из определения $\bar\varphi$ следует, что $k^{\#}\bar\varphi-\varphi$ обращается в нуль на $\mathscr{W}^{q+1}$, где $\mathscr{W}=\{V\cap\operatorname{int}A \mid V\in\mathscr{V}\}\cup\{X-\overline{W}\}$ — открытое покрытие множества $X-U$. Следовательно, $\lambda k^{\#}\bar\varphi=\lambda\varphi$, и так как λ — эпиморфизм, то и $\lambda k^{\#}$ — эпиморфизм.

Пусть функция $\varphi\in C^q(X, A)$ такова, что $k^{\#}\varphi\in C_0^q(X-U)$. Поскольку φ есть локально нулевая функция на A, существует открытое покрытие $\mathscr{U}_1$ множества A, такое, что φ обращается в нуль на $\mathscr{U}_1^{q+1}$. Так как $k^{\#}\varphi\in C_0^q(X-U)$, то существует такое открытое покрытие $\mathscr{U}_2$ множества $X-U$, что φ обращается в нуль на $\mathscr{U}_2^{q+1}$. Пусть

$$\mathscr{V}_1=\{U_1\cap\operatorname{int}A \mid U_1\in\mathscr{U}_1\},\quad \mathscr{V}_2=\{U_2\cap(X-\overline{U}) \mid U_2\in\mathscr{U}_2\}.$$

Тогда $\mathscr{V}=\mathscr{V}_1\cup\mathscr{V}_2$ есть открытое покрытие пространства X, такое, что φ обращается в нуль на $\mathscr{V}^{q+1}$. Следовательно, $\varphi\in C_0^q(X)$, и, значит,

$$(k^{\#})^{-1}(C_0^*(X-U))=C_0^*(X). \ \blacksquare$$

Аксиома гомотопии будет доказана в следующем параграфе. Мы закончим этот параграф изучением модуля $\overline{H}^0$. Функция φ, отображающая топологическое пространство X в некоторое множество, называется *локально постоянной*, если существует открытое покрытие $\mathscr{U}$ пространства X, такое, что φ постоянна на каждом элементе покрытия $\mathscr{U}$.

5. Теорема. *Если $A\subset X$, то модуль $\overline{H}^0(X, A; G)$ изоморфен модулю локально постоянных функций на X со значениями в G, равных нулю на A.*

Доказательство. Локально нулевые функции на X со значениями в G являются нулевыми. Следовательно, $C_0^0(X)=0$ и поэтому

$$\overline{C}^0(X, A)=C^0(X, A)/C_0^0(X)=C^0(X, A).$$

Значит, $\overline{H}^0(X, A; G)$ совпадает с ядром композиции

$$C^0(X, A)\xrightarrow{\delta}C^1(X, A)\to\overline{C}^1(X, A).$$

Модуль $C^0(X, A)$ является модулем функций на X со значениями в G, равных нулю на A. Если $\varphi\in C^0(X, A)$, то φ тогда и только тогда принадлежит ядру этой композиции, когда существует такое открытое покрытие $\mathscr{U}$ пространства X, что $\delta\varphi$ обращается в нуль на $\mathcal{U}^2$. Поскольку $(\delta\varphi)(x, y) = \varphi(y) - \varphi(x)$, это условие эквивалентно существованию такого открытого покрытия $\mathcal{U}$, на каждом элементе которого функция φ постоянна. Следовательно, ядро написанной выше композиции совпадает с модулем, состоящим из функций, равных нулю на A и локально постоянных на X. ∎

6. Следствие. *Пусть X — топологическое пространство, каждая квазикомпонента которого открыта, и пусть $A \subset X$. Тогда модуль $\bar{H}^0(X, A; G)$ изоморфен модулю, состоящему из функций, определенных на множестве тех квазикомпонент пространства X, которые не пересекаются с A.*

Доказательство. Это следует из теоремы 5 и из того, что всякая локально постоянная на X функция постоянна на каждой квазикомпоненте пространства X. ∎

7. Следствие. *Непустое пространство X тогда и только тогда связно, когда*

$$\eta^*\colon\ G \approx \bar{H}^0(X; G).$$

Доказательство. Это следует из теоремы 5 и из того тривиального соображения, что локально постоянная на X функция тогда и только тогда постоянна, когда пространство X связно. ∎

Из сказанного следует, что существуют пространства, для которых когомологии Александера отличны от сингулярных когомологий. Действительно, следствие 7 и теорема 5.4.10 показывают, что для любого связного, но не линейно связного пространства различны нульмерные когомологии.

Докажем теперь один вариант теоремы 5.4.10, верный для теории Александера.

8. Теорема. *Пусть $\{U_j\}$ — открытое покрытие пространства X попарно непересекающимися множествами. Тогда имеет место канонический изоморфизм*

$$\bar{H}^q(X; G) \approx \prod \bar{H}^q(U_j; G).$$

Доказательство. Поскольку $\{U_j\}$ состоит из попарно непересекающихся множеств, отображение, индуцированное ограничением

$$i^{\#}\colon C^*(X) \to \prod C^*(U_j),$$

является эпиморфизмом. Поскольку $\{U_j\}$ — открытое покрытие пространства X, отсюда следует, что

$$(i^{\#})^{-1}\left(\prod C_0^*(U_j)\right) = C_0^*(X).$$

Следовательно, $i^{\#}$ индуцирует изоморфизм $\bar{C}^*(X) \approx \prod \bar{C}^*(U_j)$. ∎

9. Следствие. *Пусть $\{C_i\}$ — совокупность компонент связности локально связного пространства X. Тогда имеет место канонический изоморфизм*

$$\bar{H}^q(X;\ G) \approx \prod \bar{H}^q(C_i;\ G).$$

Доказательство. Поскольку пространство X локально связно, его компоненты связности являются открытыми множествами и наше утверждение следует из теоремы 8. ■

§ 5. Аксиома гомотопии для теории Александера

В этом параграфе мы докажем, что для теории когомологий Александера выполняется аксиома гомотопии. Доказательство будет основано на описании коцепного комплекса Александера как предела коцепных комплексов абстрактных симплициальных комплексов. Это описание мы используем также для построения гомоморфизма теории когомологий Александера в сингулярную теорию когомологий. Поскольку теория когомологий Александера удовлетворяет всем аксиомам теории когомологий, этот гомоморфизм является изоморфизмом теории когомологий Александера и сингулярной теории когомологий на категории компактных полиэдральных пар. В качестве модуля коэффициентов для теории когомологий мы будем рассматривать фиксированный R-модуль G, не упоминая этот модуль явно. Пусть $\mathcal{U}$ — некоторая система подмножеств, покрывающая пространство X. Пусть $X(\mathcal{U})$ — абстрактный симплициальный комплекс, вершинами которого являются точки пространства X, а симплексами — конечные подмножества F пространства X, для которых существует содержащее их множество $U \in \mathcal{U}$. Пусть $C(\mathcal{U})$ — упорядоченный цепной комплекс комплекса $X(\mathcal{U})$ над кольцом R. Для данного подмножества $A \subset X$ и данного подсемейства $\mathcal{U}' \subset \mathcal{U}$, покрывающего A, обозначим через $A(\mathcal{U}')$ подкомплекс комплекса $X(\mathcal{U})$, вершинами которого являются точки из A, а симплексами — всевозможные конечные подмножества подпространства A, содержащиеся в некотором элементе совокупности $\mathcal{U}'$. Наконец, через $C'(\mathcal{U}')$ обозначим цепной подкомплекс комплекса $C(\mathcal{U})$, соответствующий $A(\mathcal{U}')$.

Пусть $(\mathcal{V}, \mathcal{V}')$ — другая пара, состоящая из покрытия $\mathcal{V}$ пространства X и подмножества $\mathcal{V}' \subset \mathcal{V}$, покрывающего подпространство A. Предположим, что $(\mathcal{V}, \mathcal{V}')$ является измельчением пары $(\mathcal{U}, \mathcal{U}')$ в том смысле, что каждый элемент покрытия $\mathcal{V}$ содержится в некотором элементе покрытия $\mathcal{U}$, а каждый элемент покрытия $\mathcal{V}'$ содержится в некотором элементе покрытия $\mathcal{U}'$. Тогда пара $(C(\mathcal{V}), C'(\mathcal{V}'))$ вкладывается в пару $(C(\mathcal{U}), C'(\mathcal{U}'))$ при помощи тождественного отображения пары (X, A) на себя.

Пусть X — топологическое пространство и A — его подпространство. Рассмотрим пары $(\mathcal{U}, \mathcal{U}')$, где $\mathcal{U}$ — открытое покрытие пространства X, а $\mathcal{U}'$ — подмножество множества $\mathcal{U}$, покрывающее A. Такая пара называется *открытым покрытием* пары (X, A). Пусть $C^*(\mathcal{U}, \mathcal{U}')$ — коцепной комплекс пары $(C(\mathcal{U}), C'(\mathcal{U}'))$ (с коэффициентами в G). Элемент $u \in C^q(\mathcal{U}, \mathcal{U}')$ есть функция, определенная на наборах из $q+1$ точек пространства X, принадлежащих некоторому элементу из $\mathcal{U}$. Эта функция принимает значения в G и обращается в нуль на наборах из $q+1$ точек подпространства A, принадлежащих некоторому элементу покрытия $\mathcal{U}'$. Пусть $(\mathcal{V}, \mathcal{V}')$ — измельчение покрытия $(\mathcal{U}, \mathcal{U}')$. Отображение ограничения индуцирует тогда коцепное отображение

$$C^*(\mathcal{U}, \mathcal{U}') \to C^*(\mathcal{V}, \mathcal{V}').$$

Пусть $(\mathcal{U}, \mathcal{U}')$ и $(\mathcal{V}, \mathcal{V}')$ — два открытых покрытия пары (X, A), и пусть $\mathcal{W} = \{U \cap V \mid U \in \mathcal{U},\ V \in \mathcal{V}\}$ и $\mathcal{W}' = \{U' \cap V' \mid U' \in \mathcal{U}',\ V' \in \mathcal{V}'\}$. Тогда $(\mathcal{W}, \mathcal{W}')$ — еще одно открытое покрытие пары (X, A), являющееся измельчением как пары $(\mathcal{U}, \mathcal{U}')$, так и пары $(\mathcal{V}, \mathcal{V}')$. Следовательно, коцепные комплексы $\{C^*(\mathcal{U}, \mathcal{U}')\}$ образуют прямой спектр и в пределе получается коцепной комплекс

$$\varinjlim \{C^*(\mathcal{U}, \mathcal{U}')\}.$$

Мы покажем, что этот предельный коцепной комплекс канонически изоморфен комплексу $\bar{C}^*(X, A)$. Пусть $\varphi \in C^q(X, A)$, и пусть $\mathcal{U}'$ — совокупность открытых подмножеств пространства X, покрывающая A, такая, что φ обращается в нуль на $(\mathcal{U}')^{q+1} \cap A^{q+1}$ (такая совокупность $\mathcal{U}'$ существует, поскольку φ — локально нулевая функция на A). Пусть далее $\mathcal{U} = \mathcal{U}' \cup \{X\}$. Тогда $(\mathcal{U}, \mathcal{U}')$ — открытое покрытие пары (X, A), и функция φ посредством ограничения определяет элемент $\varphi \mid (\mathcal{U}, \mathcal{U}') \in C^q(\mathcal{U}, \mathcal{U}')$. Переходя к пределу, получаем гомоморфизм

$$\lambda\colon C^*(X, A) \to \varinjlim \{C^*(\mathcal{U}, \mathcal{U}')\},$$

представляющий собой каноническое цепное отображение. Следующий результат объясняет, почему нас интересуют коцепные комплексы $C^*(\mathcal{U}, \mathcal{U}')$.

1. Теорема. *Каноническое коцепное отображение*

$$\lambda\colon C^*(X, A) \to \varinjlim \{C^*(\mathcal{U}, \mathcal{U}')\}$$

является эпиморфизмом, и его ядро совпадает с $C_0^*(X)$.

Доказательство. Возьмем некоторый элемент $u \in C^q(\mathcal{U}, \mathcal{U}')$ и определим функцию $\varphi_u \in C^q(X)$, полагая

$$\varphi_u(x_0, \ldots, x_q) = \begin{cases} u(x_0, \ldots, x_q), & \text{если } x_0, \ldots, x_q \in U, \text{ где } U \in \mathcal{U}, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Тогда φ_u обращается в нуль на $(\mathcal{U}')^{q+1} \cap A^{q+1}$, и, следовательно, $\varphi_u \in C^q(X, A)$. Но согласно определению, $\varphi_u \mid (\mathcal{U}, \mathcal{U}') = u$. Значит, λ — эпиморфизм.

Элемент $\varphi \in C^q(X, A)$ тогда и только тогда принадлежит ядру отображения λ, когда существует такое открытое покрытие $(\mathcal{U}, \mathcal{U}')$, что $\varphi \mid (\mathcal{U}, \mathcal{U}') = 0$. Таким образом, $\lambda(\varphi) = 0$ в том и только в том случае, когда существует такое открытое покрытие $\mathcal{U}$, что φ обращается в нуль на $\mathcal{U}^{q+1}$. Согласно определению комплекса $C_0^*(X)$, $\lambda(\varphi) = 0$ тогда и только тогда, когда $\varphi \in C_0^*(X)$. ■

Из теоремы 1 и аналога теоремы 4.1.7 для коцепных комплексов вытекает такое

2. Следствие. *Для теории когомологий Александера имеет место канонический изоморфизм*

$$\bar{H}^q(X, A; G) \approx \varinjlim \{H^q(C^*(\mathcal{U}, \mathcal{U}'; G))\}. \ ■$$

Теперь мы уже готовы к доказательству аксиомы гомотопии для теории когомологий Александера. Ввиду наличия других аксиом ее достаточно доказать для случая двух отображений

$$h_0, h_1 \colon (X, A) \to (X \times I, A \times I),$$

где $h_0(x) = (x, 0)$ и $h_1(x) = (x, 1)$. С этой целью мы покажем, что для всякого открытого покрытия $(\mathcal{U}, \mathcal{U}')$ пары $(X \times I, A \times I)$ существует такое открытое покрытие $(\mathcal{V}, \mathcal{V}')$ пары (X, A), что отображения h_0 и h_1 индуцируют цепно гомотопные цепные отображения комплекса $(C(\mathcal{V}), C'(\mathcal{V}'))$ в комплекс $(C(\mathcal{U}), C'(\mathcal{U}'))$. Это утверждение касается свободных цепных комплексов, так что для получения нужной гомотопии пригодна техника ацикличных моделей.

Пусть Y — произвольное множество, а n — неотрицательное целое число. Пусть $C(Y, n)$ — цепной комплекс над кольцом R абстрактного симплициального комплекса $(Y \times I)(\mathcal{U}(Y, n))$, где $\mathcal{U}(Y, n)$ — покрытие пространства $Y \times I$, определенное так:

$$\mathcal{U}(Y, n) = \left\{ Y \times \left[\frac{m}{2^n}, \frac{m+1}{2^n}\right] \,\middle|\, 0 \leqslant m < 2^n \right\}.$$

3. Лемма. *Если множество Y непусто, то цепной комплекс $\tilde{C}(Y, n)$ ацикличен.*

Доказательство. Пусть $0 \leqslant m < 2^n$, и пусть K_m — подкомплекс комплекса $(Y \times I)(\mathcal{U}(Y, n))$, состоящий из всех конечных подмножеств множества $Y \times [m/2^n, (m+1)/2^n]$. Пусть далее L_m — подкомплекс комплекса $(Y \times I)(\mathcal{U}(Y, n))$, состоящий из всех конечных подмножеств множества $Y \times (m/2^n)$ $(0 \leqslant m \leqslant 2^n)$. Тогда $(Y \times I)(\mathcal{U}(Y, n)) = \bigcup\limits_m K_m$, $K_i \cap K_j = 0$, если $|i-j| > 1$, $K_i \cap K_{i+1} = L_{i+1}$. Поскольку множество Y непусто, каждый подкомплекс K_m (и L_m) непуст и является соединением комплекса K_m (или L_m) и любой его вершины. Следовательно, согласно теореме 4.3.6, комплексы $\tilde{C}(K_m)$ и $\tilde{C}(L_m)$ ацикличны. Пусть $N_q = \bigcup\limits_{m \leqslant q} K_m$. Тогда $N_{q+1} = N_q \cup K_{q+1}$ и $N_q \cap K_{q+1} = L_{q+1}$. Индукцией по q, используя точность приведенной последовательности Майера — Виеториса, находим, что комплекс $\tilde{C}(N_q)$ ацикличен для любого q. Следовательно, комплекс $\tilde{C}(Y, n) = \tilde{C}(N_{2^n-1})$ ацикличен. ∎

Из доказанного утверждения мы выведем наш следующий результат, который снабдит нас ацикличными моделями для доказательства аксиомы гомотопии.

4. Лемма. *Пусть $Y_1, \ldots, Y_q$ — подмножества некоторого непустого множества Y, причем $Y = Y_1$, и для каждого целого i пусть n_i — неотрицательное целое число. Пусть K — симплициальный комплекс*

$$K = \bigcup_i (Y_i \times I)(\mathcal{U}(Y_i, n_i)).$$

Тогда комплекс $\tilde{C}(K)$ ацикличен.

Доказательство. Мы докажем эту лемму индукцией по q. В случае когда $q = 1$, утверждение совпадает с леммой 3. Предположим, что $q > 1$ и что результат верен для меньшего, чем q, числа множеств Y_i. Пусть $\bar{K} = \bigcup\limits_{i \leqslant q-1} (Y_i \times I)(\mathcal{U}(Y_i, n_i))$. Тогда $\bar{K} \cup (Y_q \times I)(\mathcal{U}(Y_q, n_q)) = K$. Если множество Y_q пусто, то комплекс $\tilde{C}(K) = \tilde{C}(\bar{K})$ ацикличен по предположению индукции. Если множество Y_q непусто, то комплекс $\tilde{C}(Y_q, n_q)$ ацикличен в силу леммы 3, а комплекс $\tilde{C}(\bar{K})$ ацикличен по предположению индукции. Как вытекает из точности приведенной последовательности Майера — Виеториса, для доказательства ацикличности комплекса $\tilde{C}(K)$ достаточно показать, что комплекс $\tilde{C}(\bar{K} \cap (Y_q \times I)(\mathcal{U}(Y_q, n_q)))$ ацикличен. Но $\bar{K} \cap (Y_q \times I)(\mathcal{U}(Y_q, n_q)) = \bigcup\limits_{1 \leqslant i < q} (Y_i' \times I)(\mathcal{U}(Y_i', n_i'))$, где $Y_i' = Y_i \cap Y_q$ — подмножества множества Y_q (и $Y_1' = Y_q$) и

$n_i' = \max(n_i, n_q)$. Следовательно, согласно предположению индукции, комплекс $\tilde{C}(\bar{K} \cap (Y_q \times I)(\mathcal{U}(Y_q, n_q)))$ ацикличен. ■

Перейдем теперь к главному этапу доказательства аксиомы гомотопии.

5. Лемма. *Пусть* $(\mathcal{U}, \mathcal{U}')$ — *некоторое открытое покрытие пары* $(X \times I, A \times I)$. *Существует такое открытое покрытие* $(\mathcal{V}, \mathcal{V}')$ *пары* (X, A), *что отображения* h_0 *и* h_1 *индуцируют цепно гомотопные цепные отображения комплекса* $(C(\mathcal{V}), C'(\mathcal{V}'))$ *в комплекс* $(C(\mathcal{U}), C'(\mathcal{U}'))$.

Доказательство. Для каждой точки $x \in X$ из компактности произведения $x \times I$ следует существование такого открытого множества V_x, содержащего x, и такого целого $n \geqslant 0$, что для всякого $0 \leqslant m < 2^n$ множество $V_x \times [m/2^n, (m+1)/2^n]$ содержится в некотором элементе покрытия $\mathcal{U}$. Более того, если $x \in A$, то мы можем выбрать окрестность V_x и число n таким образом, чтобы множество $V_x \times [m/2^n, (m+1)/2^n]$ содержалось в некотором элементе покрытия $\mathcal{U}'$. Пусть $\mathcal{V}$ — семейство $\{V_x\}_{x \in X}$, а $\mathcal{V}'$ — его подсемейство $\{V_x\}_{x \in A}$. Покажем, что покрытие $(\mathcal{V}, \mathcal{V}')$ обладает нужными нам свойствами. Пусть $\mathcal{C}$ — категория подкомплексов комплекса $X(\mathcal{V})$, частично упорядоченных по включению. Для каждого подкомплекса K комплекса $X(\mathcal{V})$ пусть $G(K)$ — упорядоченный цепной комплекс комплекса K. Для каждого симплекса s комплекса $X(\mathcal{V})$ (или $A(\mathcal{V}')$) обозначим через $n(s)$ наименьшее неотрицательное целое число, такое, что для всякого $0 \leqslant m < n(s)$ множество $s \times [m/2^n, (m+1)/2^n]$ содержится в некотором элементе покрытия $\mathcal{U}$ (или $\mathcal{U}'$). Такое целое число существует согласно построению покрытия $(\mathcal{V}, \mathcal{V}')$. Для всякого подкомплекса K комплекса $X(\mathcal{V})$ обозначим через $\hat{K}$ следующий подкомплекс комплекса $(X \times I)(\mathcal{U})$:

$$\hat{K} = \bigcup \{(s \times I)(\mathcal{U}(s, n(s))) \mid s \in K\}.$$

Пусть $G'(K)$ — упорядоченный цепной комплекс комплекса $\hat{K}$. Тогда G и G' — ковариантные функторы из категории $\mathcal{C}$ в категорию цепных комплексов с аугментацией.

Пусть $\mathfrak{M}$ — множество подкомплексов $\{\hat{s} \in X(\mathcal{V}) \mid s \in X(\mathcal{V})\}$. Тогда функтор G на категории $\mathcal{C}$ свободен относительно моделей $\mathfrak{M}$. Согласно лемме 4, G' является ацикличным функтором на категории $\mathcal{C}$ относительно моделей $\mathfrak{M}$. Если $\sigma = (x_0, x_1, \ldots, x_q)$ — некоторый упорядоченный q-мерный симплекс комплекса $X(\mathcal{V})$, то

$$h_0(\sigma) = ((x_0, 0), \ldots, (x_q, 0)) \quad \text{и} \quad h_1(\sigma) = ((x_0, 1), \ldots, (x_q, 1))$$

являются естественными цепными преобразованиями функтора G в функтор G', сохраняющими аугментацию. Из теоремы 4.3.3

следует, что существует естественная цепная гомотопия от h_0 до h_1. ■

Если $u \in H^q(C^*(\mathcal{U}, \mathcal{U}'))$, где $(\mathcal{U}, \mathcal{U}')$ — некоторое открытое покрытие пары $(X \times I, A \times I)$, то из леммы 5 следует существование открытого покрытия $(\mathcal{V}, \mathcal{V}')$ пары (X, A), такого, что $h_0(\mathcal{V}, \mathcal{V}') \subset (\mathcal{U}, \mathcal{U}')$, $h_1(\mathcal{V}, \mathcal{V}') \subset (\mathcal{U}, \mathcal{U}')$ и $h_0^* u = h_1^* u$ в $H^q(C^*(\mathcal{V}, \mathcal{V}'))$. Переходя к пределу и используя следствие 2, получаем окончательный результат.

6. Теорема. *Теория когомологий Александера удовлетворяет аксиоме гомотопии.* ■

Итак, мы уже проверили все аксиомы теории когомологий для теории когомологий Александера. Сейчас мы построим гомоморфизм μ из теории когомологий Александера в сингулярную теорию когомологий. Пусть $(\mathcal{U}, \mathcal{U}')$ — некоторое открытое покрытие пары (X, A). Пусть каноническое цепное преобразование

$$(\Delta(\mathcal{U}), \Delta(\mathcal{U}' \cap A)) \to (C(\mathcal{U}), C'(\mathcal{U}'))$$

сопоставляет q-мерному сингулярному симплексу $\sigma: \Delta^q \to X$ упорядоченный симплекс $(\sigma(v_0), \sigma(v_1), \ldots, \sigma(v_q))$ комплекса $C(\mathcal{U})$. Тем самым индуцируется гомоморфизм

$$C^*(\mathcal{U}, \mathcal{U}'; G) \to C^*(\Delta(\mathcal{U}), \Delta(\mathcal{U}' \cap A); G).$$

Переходя к пределу и используя следствие 2, получаем канонический гомоморфизм

$$\mu': \bar{H}^q(X, A; G) \to \varinjlim \{H^q(\Delta(\mathcal{U}), \Delta(\mathcal{U}' \cap A); G)\}.$$

По теореме 4.4.14 существует канонический изоморфизм

$$\mu'': H^q(\Delta(X), \Delta(A); G) \approx \varinjlim \{H^q(\Delta(\mathcal{U}), \Delta(\mathcal{U}' \cap A); G)\},$$

и гомоморфизм

$$\mu: \bar{H}^q(X, A; G) \to H^q(\Delta(X), \Delta(A); G)$$

определяется как композиция $\mu''^{-1}\mu'$. Легко проверить, что этот гомоморфизм обладает необходимыми свойствами коммутативности, чтобы служить естественным преобразованием теории когомологий.

Теперь мы введем $\smile$-произведение в теории Александера, обладающее обычными свойствами $\smile$-произведения (см. § 5.6) и согласованное с $\smile$-произведением в сингулярной теории при гомоморфизме μ.

Пусть R-модули G и G' спарены в R-модуль G''. Для заданных элементов $\varphi_1 \in C^p(X; G)$ и $\varphi_2 \in C^q(X; G')$ определим элемент $\varphi_1 \smile \varphi_2 \in C^{p+q}(X; G'')$, полагая

$$(\varphi_1 \smile \varphi_2)(x_0, \ldots, x_{p+q}) = \varphi_1(x_0, \ldots, x_p)\varphi_2(x_p, \ldots, x_{p+q}).$$

Если φ_1 — локально нулевой элемент на A_1, то таков же и элемент $\varphi_1 \smile \varphi_2$, и если φ_2 — локально нулевой элемент на A_2, то таков же и элемент $\varphi_1 \smile \varphi_2$. Следовательно, функция $\varphi_1 \smile \varphi_2$ порождает $\smile$-произведение элементов модуля $\bar{C}^p(X;\ G)$ и элементов модуля $\bar{C}^q(X;\ G')$ со значениями в модуле $\bar{C}^{p+q}(X;\ G'')$. Несложная проверка показывает, что

$$\delta(\varphi_1 \smile \varphi_2) = \delta\varphi_1 \smile \varphi_2 + (-1)^p \varphi_1 \smile \delta\varphi_2.$$

Следовательно, это $\smile$-произведение индуцирует $\smile$-произведение на классах когомологий. Ясно также, что это $\smile$-произведение переходит при гомоморфизме μ в $\smile$-произведение в сингулярной теории когомологий [1]).

Для построения $\smile$-произведения элементов модуля $C^p(X,\ A_1;\ G)$ и элементов модуля $C^q(X,\ A_2;\ G')$ со значением в $C^{p+q}(X,\ A_1 \cup A_2;\ G'')$ необходимо установить, что элемент модуля $C^{p+q}(X;\ G'')$, локально нулевой на A_1 и на A_2, будет локально нулевым и на $A_1 \cup A_2$. Если $A_1 \cup A_2 = \mathrm{int}_{A_1 \cup A_2} A_1 \cup \mathrm{int}_{A_1 \cup A_2} A_2$, то это так. С учетом этого изменения все свойства 5.6.8 — 5.6.12 остаются верными для построенного нами когомологического произведения.

§ 6. Жесткость и непрерывность

В этом параграфе мы рассматриваем свойство жесткости теории Александера и устанавливаем сильный результат, состоящий в том, что всякое паракомпактное пространство, вложенное как замкнутое подмножество в паракомпактное пространство, является жестко вложенным. Отсюда вытекает сильное свойство вырезания для паракомпактных пар $(X,\ A)$, когда A замкнуто в X. Кроме того, отсюда вытекает свойство непрерывности (теория когомологий Александера коммутирует с пределами прямых спектров компактных хаусдорфовых пространств, направленных по включению). Это свойство непрерывности вместе с другими аксиомами теории когомологий характеризует теорию Александера на категории компактных хаусдорфовых пар (т. е. таких пар $(X,\ A)$, что пространство X компактно и хаусдорфово, а A замкнуто в X). Параграф заканчивается кратким обсуждением теории когомологий Александера с компактными носителями. Наше доказательство специальных свойств жесткости теории когомологий Александера опирается на технику Уоллеса [2]).

---

[1]) Чтобы убедиться в этом, нужно воспользоваться диагональной аппроксимацией Александера — Уитни при построении $\smile$-произведения в сингулярной теории. — *Прим. ред.*

[2]) См. Wallace A. D., The map excision theorem, *Duke Math. J.*, **19** (1952), 177—182.

Пусть $\mathcal{U}$ — некоторая совокупность подмножеств пространства X, и пусть $\mathcal{U}^* = \{U^*\}_{U \in \mathcal{U}}$, где

$$U^* = \bigcup \{U' \in \mathcal{U} \mid U' \cap U \neq \varnothing\}.$$

Совокупность $\mathscr{V}$ называется *звездным измельчением* совокупности $\mathcal{U}$, если $\mathscr{V}^*$ — измельчение совокупности $\mathcal{U}^*$. Топологическое пространство X называется *вполне нормальным*, если всякое его открытое покрытие допускает открытое звездное измельчение. Известно, что для хаусдорфовых пространств паракомпактность эквивалентна вполне нормальности.

1. Лемма. *Пусть A — подмножество топологического пространства X, и пусть $\mathscr{V}$ — открытое покрытие пространства X. Существуют окрестность N множества A и отображение $f\colon N \to A$ (не обязательно непрерывное), такое, что*

(a) $f(x) = x$, *если* $x \in A$;
(b) *если* $V \in \mathscr{V}$, *то* $f(V \cap N) \subset V^*$.

Доказательство. Если A пусто, то пусть $N = A$ и f — тождественное отображение. Если же A непусто, то положим $N = \bigcup \{V \in \mathscr{V} \mid V \cap A \neq \varnothing\}$ и определим отображение $f\colon N \to A$, полагая $f(x) = x$ при $x \in A$, а при $x \notin A$ выбирая точку $f(x) \in A$ так, чтобы $x, f(x) \in V$ для некоторого множества $V \in \mathscr{V}$. Такой выбор всегда возможен ввиду способа построения множества N. Ясно, что если $x \in V \cap N$, то существует множество $V' \in \mathscr{V}$, для которого $x, f(x) \in V'$. Следовательно, $x \in V \cap V'$ и $V' \subset V^*$. Значит, $f(V \cap N) \subset V^*$ и свойства (a) и (b) выполняются. ■

Доказанный результат можно интерпретировать как утверждение, что пространство A является разрывным окрестностным ретрактом пространства X, причем ретракция не слишком разрывна. Если A — замкнутое подмножество паракомпактного пространства, то оно в достаточной мере сходно с абсолютным окрестностным ретрактом, так что для теории Александера мы имеем следующее обобщение теоремы 6.1.10:

2. Теорема. *Замкнутое подпространство паракомпактного хаусдорфова пространства является жестко вложенным относительно теории когомологий Александера.*

Доказательство. Пусть A — замкнутое подпространство паракомпактного пространства X, и пусть $\varphi \in C^q(A)$ — такая коцепь, что $\delta\varphi$ обращается в нуль на $\mathscr{W}^{q+1}$, где $\mathscr{W}$ — некоторое открытое покрытие подпространства A. Пусть $\mathcal{U} = \{W \cup (X - A) \mid W \in \mathscr{W}\}$. Заметим, что $\mathcal{U}$ является открытым покрытием пространства X, поскольку A замкнуто в X. Пусть $\mathscr{V}$ — открытое звездное измельчение покрытия $\mathcal{U}$, и пусть N — окрестность подпространства A, а $f\colon N \to A$ — отображение (не обязательно непрерывное), удовлетворяющее утверждению леммы 1 относительно покрытия $\mathscr{V}$. Тогда $f^{\#}\varphi \in C^q(N)$. Покажем, что элемент $\delta f^{\#}\varphi = f^{\#}\delta\varphi$ обращается в нуль на $\mathscr{V}^{q+1} \cap N^{q+1}$. В силу леммы 1b для любого $V \in \mathscr{V}$ существует такое $U \in \mathscr{U}$, что $f(V \cap N) \subset U$. Тогда $f(V \cap N) \subset U \cap \cap A \subset W$ для некоторого $W \in \mathscr{W}$. Следовательно, $\delta f^{\#}\varphi$ обращается в нуль на $(V \cap N)^{q+1}$. Это означает, что $f^{\#}\varphi$ есть коцикл комплекса $\bar{C}^q(N)$ г, согласно лемме 1а, $(f^{\#}\varphi) \mid A = \varphi$. Следовательно, класс когомологий $\{\varphi\} \in \bar{H}^q(A)$ является образом при ограничении класса когомологий $\{f^{\#}\varphi\} \in \bar{H}^q(N)$. Отсюда видно, что отображение $\varinjlim\{\bar{H}^q(N)\} \to \bar{H}^q(A)$ является эпиморфизмом.

Для доказательства мономорфности этого отображения рассмотрим какую-нибудь паракомпактную окрестность N' множества A и предположим, что элемент $\varphi \in C^q(N')$ таков, что $\delta\varphi$ обращается в нуль на $\mathscr{W}^{q+1}$ и $\varphi \mid A = \delta\varphi'$ на $(\mathscr{W}')^{q+1}$, где $\mathscr{W}$ и $\mathscr{W}'$ — некоторые открытые покрытия множеств N' и A соответственно. Пусть $\mathscr{U} = \{W' \cup (N' - A) \mid W' \in \mathscr{W}'\}$. Заметим, что $\mathscr{U}$ является открытым покрытием множества N' (поскольку A замкнуто). Пусть $\mathscr{V}$ — открытое звездное измельчение обоих покрытий $\mathscr{W}$ и $\mathscr{U}$ ($\mathscr{V}$ — покрытие множества N'), и пусть N — окрестность A в N', а $f\colon N \to A$ — отображение (не обязательно непрерывное), удовлетворяющие лемме 1 относительно покрытия $\mathscr{V}$. Если $V \in \mathscr{V}$, то $f(V \cap N) \subset W'$ для некоторого $W' \in \mathscr{W}'$. Следовательно, $f^{\#}(\varphi \mid A) = \delta f^{\#}\varphi'$ на $V^{q+1} \cap N^{q+1}$.

Покажем, что элемент $f^{\#}(\varphi \mid A)$ когомологичен элементу $\varphi \mid N$ в комплексе $\bar{C}^q(N)$. Пусть $\psi \in C^p(N)$. Определим $D\psi \in C^{p-1}(N)$, полагая

$$D\psi)(x_0, \ldots, x_{p-1}) = \sum_{0 \leqslant j \leqslant p-1} (-1)^j \psi(x_0, \ldots, x_j, f(x_j), \ldots, f(x_{p-1})).$$

Несложное вычисление показывает, что

$$\delta D\psi + D\delta\psi = f^{\#}(\psi \mid A) - \psi.$$

Для каждого $V \in \mathscr{V}$ имеет место включение $(V \cap N) \cup f(V \cap N) \subset W$ при некотором $W \in \mathscr{W}$ (лемма 1b). Поскольку коцепь $\delta\varphi$ обращается в нуль на $\mathscr{W}^{q+1}$, то $\delta D(\varphi \mid N) = f^{\#}(\varphi \mid A) - \varphi \mid N$ на $\mathscr{V}^{q+1} \cap N^{q+1}$. Следовательно, класс когомологий $\{\varphi\} \in \bar{H}^q(N')$ переходит в нулевой элемент модуля $\bar{H}^q(N)$. Этого достаточно, чтобы гомоморфизм $\varinjlim\{\bar{H}^q(N)\} \to \bar{H}^q(A)$ был мономорфизмом. Значит, A — жестко вложенное подпространство пространства X. ■

3. Следствие. *Пусть $X \supset A \supset B$, где пространство X паракомпактно и хаусдорфово, а A и B — его замкнутые подпространства.*

Тогда пара (A, B) является жестко вложенной в X относительно теории когомологий Александера.

Доказательство. Это немедленно следует из теоремы 2 и леммы 6.1.9. ■

4. Пример. Пусть X — подпространство пространства $\mathbf{R}^2 \subset S^2$, определенное в примере 2.4.8. Пространство $\tilde{X}$ получим, изменяя топологию пространства X и рассматривая топологию, порожденную компонентами линейной связности открытых множеств в X. Тогда $\tilde{X}$ — полуоткрытый интервал. Поскольку сингулярные гомологии пространства X совпадают с сингулярными гомологиями пространства $\tilde{X}$, то $H^1(X; \mathbf{Z}) = 0$. Пространство $S^2 - X$ имеет две компоненты связности, поэтому из теоремы двойственности Александера следует, что $\varinjlim \{H_1(U; \mathbf{Z})\} \approx \mathbf{Z}$, где U пробегает окрестности пространства X. Следовательно, гомоморфизм $\varinjlim \{H^1(U; \mathbf{Z})\} \to H^1(X; \mathbf{Z})$ не является мономорфизмом и, значит, подпространство X не может быть жестко вложенным в $\mathbf{R}^2$ относительно сингулярных когомологий. Поскольку, однако, X замкнуто в $\mathbf{R}^2$, оно является жестко вложенным подпространством относительно когомологий Александера.

Заметим, что в приведенном примере гомоморфизм

$$\varinjlim \{H^1(U; \mathbf{Z})\} \to H^1(X; \mathbf{Z})$$

не является мономорфизмом, тогда как в примере 6.1.8 подпространство $A \subset \mathbf{R}^2$ таково, что гомоморфизм $\varinjlim \{H^0(U; \mathbf{Z})\} \to H^0(A; \mathbf{Z})$ не является эпиморфизмом.

Свойство жесткости показывает, что теория когомологий Александера удовлетворяет следующему *сильному свойству вырезания:*

5. Теорема. *Пусть (X, A) и (Y, B) — некоторые пары, причем X и Y — паракомпактные хаусдорфовы пространства, а A и B — их замкнутые подпространства. Пусть $f\colon (X, A) \to (Y, B)$ — замкнутое непрерывное отображение, индуцирующее взаимно однозначное отображение пространства $X - A$ на $Y - B$. Тогда для всех целых q и всех модулей G имеет место изоморфизм*

$$f^*\colon \bar{H}^q(Y, B; G) \approx \bar{H}^q(X, A; G).$$

Доказательство. Поскольку отображение f замкнуто, непрерывно и взаимно однозначно отображает $X - A$ на $Y - B$, оно является гомеоморфизмом подпространства $X - A$ на $Y - B$. Пусть $\{U_\alpha\}$ — семейство открытых окрестностей множества B в Y, и пусть $V_\alpha = f^{-1}(U_\alpha)$. Тогда V_α — открытая окрестность множества A в пространстве X, и так как отображение f замкнуто, совокупность окрестностей $\{V_\alpha\}$ конфинальна в семействе всех окрестностей множества A в X. Имеем коммутативную диаграмму

$$
\begin{array}{ccccc}
\bar{H}^q(Y, B) & \leftarrow & \varinjlim \{\bar{H}^q(Y, U_\alpha)\} & \rightarrow & \varinjlim \{\bar{H}^q(Y-B, U_\alpha - B)\} \\
\downarrow{\scriptstyle f^*} & & \downarrow{\scriptstyle f_1^*} & & \downarrow{\scriptstyle f_2^*} \\
\bar{H}^q(X, A) & \leftarrow & \varinjlim \{\bar{H}^q(X, V_\alpha)\} & \rightarrow & \varinjlim \{\bar{H}^q(X-A, V_\alpha - A)\}
\end{array}
$$

в которой вертикальные отображения индуцированы отображением f, а горизонтальные — вложениями. Согласно следствию 3 и лемме 6.4.4, горизонтальные отображения являются изоморфизмами. Поскольку $f \mid X - A$ — гомеоморфизм подпространства $X - A$ на $Y - B$, отсюда следует, что для каждого индекса α отображение $f \mid (X - A, V_\alpha - A)$ является гомеоморфизмом пары $(X - A, V_\alpha - A)$ на $(Y - B, U_\alpha - B)$. Следовательно, f_2^* — изоморфизм и в силу коммутативности диаграммы f^* — тоже изоморфизм. ■

Следующее *свойство слабой непрерывности* теории когомологий Александера также вытекает из свойства жесткости.

6. Теорема. *Пусть $\{(X_\alpha, A_\alpha)\}_\alpha$ — семейство компактных хаусдорфовых пар в некотором пространстве, направленное по включению, и пусть $(X, A) = (\bigcap X_\alpha, \bigcap A_\alpha)$. Тогда вложения i_α: $(X, A) \subset (X_\alpha, A_\alpha)$ индуцируют изоморфизм*

$$\{i_\alpha^*\}\colon \varinjlim \bar{H}^q(X_\alpha, A_\alpha; G) \approx \bar{H}^q(X, A; G).$$

Доказательство. Пусть F — замкнутое подмножество в X_β при некотором β. Тогда совокупность $\{X_\alpha \cap F\}_\alpha$ состоит из компактных множеств и направлена по включению, а $X \cap F = \bigcap (X_\alpha \cap F)$. Отсюда следует, что если $X \cap F = \varnothing$, то существует такой индекс α, что $X_\alpha \cap F = \varnothing$. Следовательно, если U — произвольная окрестность подпространства X в X_β, то существует такой индекс α, что $X_\alpha \subset U$. Аналогично, если (U, V) — произвольная окрестность пары (X, A) в пространстве X_β, то существует такой индекс α, что $(X_\alpha, A_\alpha) \subset (U, V)$.

Покажем, что $\{i_\alpha^*\}$ — эпиморфизм. Возьмем произвольный элемент $u \in \bar{H}^q(X, A)$. Согласно следствию 3, (X, A) — жестко вложенная пара в X_β для всякого β. Значит, существуют окрестность (U, V) пары (X, A) в пространстве X_β и элемент $v \in \bar{H}^q(U, V)$, такие, что $v \mid (X, A) = u$. Пусть индекс α таков, что $(X_\alpha, A_\alpha) \subset (U, V)$ и $v_\alpha = v \mid (X_\alpha, A_\alpha)$. Тогда $v_\alpha \in \bar{H}^q(X_\alpha, A_\alpha)$ и $i_\alpha^* v_\alpha = u$, откуда и следует, что $\{i_\alpha^*\}$ — эпиморфизм.

Докажем, что $\{i_\alpha^*\}$ — мономорфизм. Пусть элемент $u \in \bar{H}^q(X_\beta, A_\beta)$ таков, что $i_\beta^* u = 0$. Согласно следствию 3, пара (X, A) есть жестко вложенная пара пространства X_β. Следовательно, существует ее окрестность (U, V) в X_β, такая, что $u \mid (U, V \cap A_\beta) = 0$. Выберем индекс α так, чтобы $(X_\alpha, A_\alpha) \subset (U, V \cap A_\beta)$. Тогда $u \mid (X_\alpha, A_\alpha) = 0$ и $\{i_\alpha^*\}$ — изоморфизм. ∎

Говорят, что обратный спектр $\{(X_\alpha, A_\alpha)\}$ компактных хаусдорфовых пар удовлетворяет *свойству непрерывности*, если для него выполняется соответствующий аналог теоремы 6, где $(X, A) = \varprojlim \{(X_\alpha, A_\alpha)\}$. Нетрудно доказать, что свойство непрерывности эквивалентно свойству слабой непрерывности[1]). Теория когомологий, обладающая свойством слабой непрерывности, называется *слабо непрерывной*. Такие теории полностью характеризуются этим свойством на категории компактных хаусдорфовых пространств, как показывает следующая

7. Лемма. *Всякую компактную хаусдорфову пару можно вложить в некоторое пространство, где она будет пересечением семейства пар, направленного вниз по включению. При этом каждая пара этого семейства является компактным хаусдорфовым пространством, имеющим гомотопический тип компактной полиэдральной пары.*

Доказательство. Хорошо известно, что всякое компактное хаусдорфово пространство можно вложить в куб I^J, поэтому будем считать, что пара (X, A) вложена в I^J. Для каждого конечного подмножества $\alpha \subset J$ обозначим через $p_\alpha\colon I^J \to I^\alpha$ проекцию, и пусть (U, V) — компактная полиэдральная окрестность пары $(p_\alpha(X), p_\alpha(A))$ в I^α. Можно проверить, что совокупность пар $\{(p_\alpha^{-1}(U), p_\alpha^{-1}(V))\}$, соответствующих всем конечным подмножествам $\alpha \subset J$ и компактным полиэдральным окрестностям пары $(p_\alpha(X), p_\alpha(A))$ в кубе I^α, направленная вниз по включению, имеет своим пересечением пару (X, A). Более того, $(p_\alpha^{-1}(U), p_\alpha^{-1}(V))$ — компактная пара в кубе I^J, гомеоморфная $(U, V) \times I^{J-\alpha}$, а проекция

$$p_\alpha\colon (p_\alpha^{-1}(U), p_\alpha^{-1}(V)) \to (U, V)$$

есть гомотопическая эквивалентность. Следовательно, семейство $\{(p_\alpha^{-1}(U), p_\alpha^{-1}(V))\}$ обладает всеми нужными нам свойствами. ∎

Итак, на слабо непрерывные теории когомологий распространяется теорема единственности.

---

[1]) См. Стинрод Н., Эйленберг С., Основания алгебраической топологии, ИЛ, М., 1958, или упражнение 6.G.2 в конце этой главы.

8. Теорема. *Если заданы две слабо непрерывные теории когомологий, то всякий гомоморфизм одной из них в другую, являющийся изоморфизмом для некоторого одноточечного пространства, будет изоморфизмом для всех компактных хаусдорфовых пар.* ■

Теперь мы опишем когомологии Александера с компактными носителями. Они образуют теорию когомологий на соответствующей категории пар топологических пространств, и мы сначала опишем эту категорию.

Подмножество A топологического пространства X называется *ограниченным*, если его замыкание $\bar{A}$ компактно. Подмножество $B \subset X$ называется *коограниченным*, если его дополнение $X - B$ ограничено. Отображение f пространства X в пространство Y называется *собственным*, если оно непрерывно и если для каждого ограниченного множества A пространства Y множество $f^{-1}(A)$ является ограниченным в пространстве X (или, что эквивалентно, для каждого коограниченного множества B в Y множество $f^{-1}(B)$ коограничено в X). Ясно, что композиция собственных отображений является собственным отображением, и, значит, топологические пространства и собственные отображения образуют категорию. Можно также определить категорию пар топологических пространств и собственных отображений, где собственным отображением пары (X, A) в пару (Y, B) называется собственное отображение X в Y, при котором A переходит в B. Это и есть та категория, на которой определяется теория когомологий Александера с компактными носителями.

Пусть (X, A) — некоторая пара топологических пространств. Обозначим через $C_c^q(X, A; G)$ подмодуль модуля $C^q(X, A; G)$, образованный всеми функциями $\varphi \in C^q(X, A; G)$, локально нулевыми на некотором коограниченном множестве в X. Если φ — локально нулевая функция на B, то такова же и функция $\delta\varphi$, и, значит, определен коцепной комплекс $C_c^*(X, A; G) = \{C_c^q(X, A; G), \delta\}$, являющийся подкомплексом комплекса $C^*(X, A; G)$. Ясно, что $C_0^*(X; G) \subset C_c^*(X, A; G)$, и мы полагаем

$$\bar{C}_c^*(X, A; G) = C_c^*(X, A; G)/C_0^*(X; G).$$

Когомологиями Александера с компактными носителями пары (X, A) (обозначается $\bar{H}_c^*(X, A; G)$) называется модуль когомологий комплекса $\bar{C}_c^*(X, A; G)$. Пусть $f\colon (X, A) \to (Y, B)$ — собственное отображение. Тогда $f^\#$ отображает модуль $C_c^*(Y, B; G)$ в модуль $C_c^*(X, A; G)$ и индуцирует гомоморфизм

$$f^*\colon \bar{H}_c^*(Y, B; G) \to \bar{H}_c^*(X, A; G).$$

Когомологии Александера с компактными носителями удовлетворяют всем (соответствующим образом модифицированным) аксиомам теории когомологий.

Аксиома гомотопии выполняется для собственных гомотопий, где собственной гомотопией называется собственное отображение $(X, A) \times I \to (Y, B)$. Вообще говоря, вложение $(X', A') \subset (X, A)$ не является собственным отображением. Однако оно является таковым, если X' замкнуто в X. По этой причине кограничный гомоморфизм

$$\delta^*\colon \bar{H}_c^q(A; G) \to \bar{H}_c^{q+1}(X, A; G)$$

определен только в том случае, когда множество A замкнуто в X. Если A — замкнутое подмножество пространства X, то вложения $i\colon A \subset X$ и $j\colon X \subset (X, A)$ являются собственными и, значит, имеет место короткая точная последовательность коцепных комплексов (для любого модуля коэффициентов G)

$$0 \to \bar{C}_c^*(X, A) \xrightarrow{j^\#} \bar{C}_c^*(X) \xrightarrow{i^\#} \bar{C}_c^*(A) \to 0.$$

Связывающий гомоморфизм этой короткой точной последовательности является естественным преобразованием степени $+1$, отображающим $\bar{H}_c^*(A)$ в $\bar{H}_c^*(X, A)$, на категории пар (X, A), таких, что A замкнуто в X, и собственных отображений таких пар. Поэтому для всех подобных пар (X, A) выполняется аксиома точности.

Аксиома вырезания выполняется для собственных вырезаний; при этом собственным вырезанием называется собственное вложение $j\colon (X - U,\ A - U) \subset (X, A)$, где открытое подмножество U пространства X таково, что $\bar{U} \subset \operatorname{int} A$. В этом случае можно показать (аналогично тому, как доказывалась лемма 6.4.4), что

$$j^\#\colon \bar{C}_c^*(X, A) \approx \bar{C}_c^*(X - U,\ A - U).$$

Аксиома размерности выполняется очевидным образом.

Теперь рассмотрим соотношения между теорией когомологий Александера с компактными носителями и определенной ранее теорией когомологий Александера. Они совпадают, например, в следующем случае:

9. Лемма. *Если A — коограниченное множество в X, то*

$$\bar{H}_c^*(X, A; G) \approx \bar{H}^*(X, A; G).$$

Доказательство. Поскольку A коограничено в X, то

$$C_c^*(X, A) = C^*(X, A),$$

и, значит, $\bar{C}_c^*(X, A) = \bar{C}^*(X, A)$. ■

10. Лемма. *Пусть B — замкнутое подмножество хаусдорфова пространства A. В этом случае подмножество $U \subset A - B$ коограничено в $A - B$ тогда и только тогда, когда $U \cup B$ является окрестностью множества B, коограниченной в A.*

Доказательство. Пусть U' — окрестность множества B в пространстве A. Тогда замыкание множества $A - U'$ в A совпадает с замыканием множества $(A - B) - (U' - B)$ в $A - B$. Следовательно, первое из этих множеств компактно тогда и только тогда, когда компактно второе. Значит, мы получим требуемый результат, как только докажем, что $U \cup B$ — окрестность множества B в A, если U — коограниченное множество в $A - B$. Но если C — компактное множество, являющееся замыканием множества $(A - B) - U$ в $A - B$, то C замкнуто в A (поскольку A хаусдорфово). Следовательно, $A - C$ — открытое подмножество пространства A, содержащее B. Поскольку $(A - B) - C \subset U$, то $(A - C) \subset \subset U \cup B$ и $U \cup B$ — окрестность множества B в A. ■

Пусть B — замкнутое подмножество нормального пространства A. Если U — некоторая окрестность в A коограниченного в A множества B, то $\bar{C}^*(A, U) \subset \bar{C}_c^*(A, B)$. Следовательно, комплекс $\varinjlim\{\bar{C}^*(A, U)\} = \bigcup \bar{C}^*(A, U)$ вкладывается в $\bar{C}_c^*(A, B)$ в качестве подкомплекса. В силу свойства вырезания 6.4.4 имеем

$$\bigcup \bar{C}^*(A, U) \approx \bigcup \bar{C}^*(A - B, U - B).$$

Если U пробегает коограниченные окрестности множества B в пространстве A, то из леммы 10 следует, что $U - B$ пробегает коограниченные подмножества в $A - B$. Следовательно,

$$\bigcup \bar{C}^*(A - B, U - B) = \bar{C}_c^*(A - B),$$

и мы определили функториальное вложение

$$j\colon \bar{C}_c^*(A - B) \subset \bar{C}_c^*(A, B),$$

такое, что $j(\bar{C}_c^*(A - B)) = \varinjlim\{\bar{C}^*(A, U)\}$, где U пробегает коограниченные окрестности множества B в A. Значит, отображение j тогда и только тогда индуцирует изоморфизм когомологий, когда

$$\varinjlim\{\bar{H}^*(A, U)\} \approx \bar{H}^*(A, B).$$

Теперь мы рассмотрим случаи, когда гомоморфизм j индуцирует изоморфизм когомологий.

11. Лемма. *Пусть A — компактное хаусдорфово пространство, а B — замкнутое подмножество в A. Тогда для всех целых q и всех модулей G имеет место изоморфизм*

$$\bar{H}_c^q(A - B; G) \approx \tilde{H}^q(A, B; G).$$

Доказательство. В силу леммы 9 и сделанных выше замечаний достаточно доказать, что в случае, когда U пробегает окрестности множества B в A (всякая такая окрестность является коограниченной, если A компактно), имеет место изоморфизм

$$\varinjlim \{\overline{H}^q(A,\ U;\ G)\} \approx \overline{H}^q(A,\ B;\ G).$$

Поскольку пространство A паракомпактно, это следует из свойства жесткости когомологий Александера. ■

Этот результат приводит к следующей интерпретации когомологий с компактными носителями локально компактного пространства:

12. Следствие. *Пусть X — локально компактное хаусдорфово пространство, а X^+ — его одноточечная компактификация. Тогда имеет место изоморфизм*

$$\overline{H}_c^q(X;\ G) \approx \tilde{\overline{H}}^q(X^+;\ G).$$

Доказательство. Из леммы 11 следует, что $\overline{H}_c^q(X;\ G) \approx$ $\approx \overline{H}^q(X^+,\ X^+ - X;\ G)$. Но, так как $\tilde{\overline{H}}^*(X^+ - X;\ G) = 0$, имеет место изоморфизм

$$\overline{H}^q(X^+,\ X^+ - X;\ G) \approx \tilde{\overline{H}}^q(X^+;\ G). \ ■$$

13. Пример. Из следствия 12 вытекает, что

$$\overline{H}_c^q(\mathbf{R}^n;\ G) \approx \begin{cases} 0, & q \neq n, \\ G, & q = n, \end{cases}$$

поскольку пространство $(\mathbf{R}^n)^+$ гомеоморфно сфере S^n. Следовательно, если $n \neq m$, то пространства $\mathbf{R}^n$ и $\mathbf{R}^m$ не могут быть собственно гомотопически эквивалентными.

14. Пример. Рассматривая прямую $\mathbf{R}^1$ как линейное подпространство плоскости $\mathbf{R}^2$, получаем

$$\overline{H}^q(\mathbf{R}^2,\ \mathbf{R}^1;\ G) \approx \begin{cases} 0, & q \neq 2, \\ G \oplus G, & q = 2. \end{cases}$$

15. Теорема. *Пусть B — замкнутое подмножество локально компактного хаусдорфова пространства A. Тогда для всех целых q и всех модулей G имеет место изоморфизм*

$$\varinjlim \{\overline{H}^q(A,\ U;\ G)\} \approx \overline{H}_c^q(A,\ B;\ G),$$

где U пробегает коограниченные окрестности множества B в A.

Доказательство. Если пространство A компактно, то это следует из лемм 9 и 11. Если же пространство A не является компактным, то пусть A^+ — его одноточечная компактификация. Положим $p^+ = A^+ - A$ и $B^+ = B \cup p^+ \subset A^+$. Тогда B^+ — замкнутое подмножество компактного пространства A^+ и имеет место коммутативная диаграмма цепных отображений

$$\begin{array}{ccccccccc} & & \bar{C}_c^*(A-B) & \to & \bar{C}_c^*(A) & \to & \bar{C}_c^*(B) & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \to & \bar{C}^*(A^+,\ B^+) & \to & \bar{C}^*(A^+,\ p^+) & \to & \bar{C}^*(B^+,\ p^+) & \to & 0 \end{array}$$

где, согласно следствию 12 и лемме 11, каждое вертикальное отображение индуцирует изоморфизм когомологий. Поскольку нижняя строка точна и $\bar{C}_c^*(A-B) \subset \bar{C}_c^*(A)$, отображение $\bar{C}_c^*(A)/\bar{C}_c^*(A-B) \to \bar{C}_c^*(B)$ индуцирует изоморфизм когомологий. Так как имеет место точная последовательность коцепных комплексов

$$0 \to \bar{C}_c^*(A,\ B)/\bar{C}_c^*(A-B) \to \bar{C}_c^*(A)/\bar{C}_c^*(A-B) \to \bar{C}_c^*(B) \to 0,$$

то когомологии комплекса $\bar{C}_c^*(A,\ B)/\bar{C}_c^*(A-B)$ тривиальны. Следовательно, $\bar{H}_c^*(A-B) \approx \bar{H}_c^*(A,\ B)$, что эквивалентно утверждению теоремы. ■

Последний результат является одной из форм свойства жесткости для теории когомологий Александера с компактными носителями. Из него и из леммы о пяти гомоморфизмах вытекает следующая

16. Теорема. *Пусть $(A,\ B)$ — пара замкнутых подмножеств локально компактного хаусдорфова пространства X. Тогда для всех целых q и всех модулей G имеет место изоморфизм*

$$\varinjlim \{H^q(U,\ V;\ G)\} \approx \bar{H}_c^q(A,\ B;\ G),$$

где пара $(U,\ V)$ пробегает окрестности пары $(A,\ B)$ в X, причем оба множества U и V коограничены в X. ■

Аналогичным образом можно рассмотреть сингулярные когомологии с компактными носителями. Говорят, что сингулярная коцепь $c^* \in \mathrm{Hom}\,(\Delta_q(X)/\Delta_q(A),\ G)$ имеет *компактный носитель*, если существует коограниченное множество $U \subset X$, такое, что $c^*(\sigma) = 0$ для каждого сингулярного q-мерного симплекса σ в U. Сингулярные коцепи с компактными носителями образуют подкомплекс сингулярного коцепного комплекса; его модуль когомологий обозначается $H_c^*(X,\ A;\ G)$.

§ 7. Предпучки

В этом параграфе излагается конструкция Чеха. Имея в виду дальнейшие применения, мы определяем когомологии Чеха топологического пространства не просто с коэффициентами в некотором модуле, а более общим образом, для модулей коэффициентов, которые могут изменяться при переходе от одной точки к другой. Это приводит к понятиям предпучка и пучка. Мы вводим эти понятия и даем определение когомологий Чеха топологического пространства с коэффициентами в предпучке. Приложения будут даны в следующих двух параграфах.

Предпучком Γ R-модулей над топологическим пространством X называется контравариантный функтор из категории открытых подмножеств U пространства X и вложений $U \subset V$ в категорию R-модулей, такой, что $\Gamma(\varnothing) = 0$. Таким образом, функтор Γ сопоставляет каждому открытому подмножеству $U \subset X$ некоторый R-модуль $\Gamma(U)$, а каждому вложению $U \subset V$ — гомоморфизм $\rho_{UV}\colon \Gamma(V) \to \Gamma(U)$, называемый *гомоморфизмом ограничения*, такой, что

$$\rho_{UU} = 1_{\Gamma(U)},$$
$$\rho_{UW} = \rho_{UV} \circ \rho_{VW}\colon \Gamma(W) \to \Gamma(U), \quad U \subset V \subset W.$$

Если $\gamma \in \Gamma(V)$ и $U \subset V$, то через $\gamma|U$ мы обозначаем элемент $\rho_{UV}(\gamma) \in \Gamma(U)$.

Аналогичным образом можно определить предпучки над пространством X со значениями в произвольной категории. Нас в первую очередь интересуют предпучки модулей или коцепных комплексов. Приведем несколько примеров:

1. Для данного R-модуля G *постоянный предпучок* G над X сопоставляет каждому непустому открытому множеству $U \subset X$ модуль G (а пустому множеству $\varnothing$ — тривиальный модуль).

2. Если дано подмножество $A \subset X$, то *относительным предпучком Александера пары* (X, A) *с коэффициентами в* G (обозначается $\bar{C}^*(\cdot, \cdot \cap A; G)$) называется предпучок, сопоставляющий открытому множеству $U \subset X$ коцепной комплекс $\bar{C}^*(U, U \cap A; G)$.

3. *Относительным сингулярным предпучком пары* (X, A) *с коэффициентами в* G (обозначается $\Delta^*(\cdot, \cdot \cap A; G)$) называется предпучок, сопоставляющий открытому множеству $U \subset X$ коцепной комплекс

$$\Delta^*(U, U \cap A; G) = \operatorname{Hom}(\Delta_*(U)/\Delta_*(U \cap A), G).$$

Если над пространством X заданы два предпучка Γ и Γ', принимающие значения в одной и той же категории, то *гомоморфизмом предпучков* $\alpha\colon \Gamma \to \Gamma'$ называется естественное преобразование функтора Γ в функтор Γ′. Теперь ясно, что можно определить категорию предпучков над X (со значениями в любой фиксированной категории) и гомоморфизмов предпучков. В частности, можно определить категорию предпучков модулей и категорию предпучков коцепных комплексов. Если $\alpha\colon \Gamma \to \Gamma'$ — некоторый гомоморфизм предпучков модулей (или коцепных комплексов), то ясно, каким образом нужно определять $\ker\alpha$, $\operatorname{im}\alpha$ и $\operatorname{coker}\alpha$[1]), чтобы они были предпучками модулей (или коцепных комплексов) над X. Следовательно, имеет смысл рассматривать точные последовательности предпучков модулей (или коцепных комплексов) над X.

Пусть Γ и Γ′ — предпучки модулей (или коцепных комплексов) над пространством X. Их *тензорным произведением* $\Gamma\otimes\Gamma'$ называется предпучок модулей (или коцепных комплексов) над X, сопоставляющий открытому множеству $U \subset X$ модуль (или коцепной комплекс)

$$(\Gamma\otimes\Gamma')(U) = \Gamma(U)\otimes\Gamma'(U).$$

Рассмотрим два примера.

4. Имеет место гомоморфизм

$$\tau\colon C^*(\cdot,\ \cdot\cap A;\ G)\to\Delta^*(\cdot,\ \cdot\cap A;\ G),$$

такой, что $\tau(\varphi)(\sigma)=\varphi(\sigma(p_0),\ \ldots,\ \sigma(p_q))$, где $\varphi\in C^q(U,\ U\cap A;\ G)$, $\sigma\colon \Delta^q\to U$, а $p_0, \ldots, p_q$ — вершины симплекса Δ^q.

5. Имеет место гомоморфизм

$$\tau\colon C^*(\cdot,\ \cdot\cap A;\ R)\otimes G\to C^*(\cdot,\ \cdot\cap A;\ G),$$

такой, что

$$\tau(\varphi\otimes g)(x_0,\ \ldots,\ x_q)=\varphi(x_0,\ \ldots,\ x_q)\,g,\qquad x_i\in U,$$

где $\varphi\in C^q(U,\ U\cap A;\ R)$ и $g\in G$.

Наряду с понятием предпучка над X со значениями в некоторой категории введем понятие пучка над X со значениями в категории. Так как нас будут интересовать только пучки модулей, дадим такое определение:

Пусть Γ — предпучок модулей над X. Пусть $\mathcal{U}=\{U\}$ — некоторая совокупность открытых подмножеств пространства X. *Согласованным* $\mathcal{U}$*-семейством* предпучка Γ называется такое семейство элементов $\{\gamma_U\in\Gamma(U)\}_{U\in\mathcal{U}}$, что

$$\gamma_U\,|\,U\cap U'=\gamma_{U'}\,|\,U\cap U';\qquad U,\ U'\in\mathcal{U}.$$

Предпучок Γ называется *пучком*, если выполняются следующие два условия:

---

[1]) Например, $(\ker\alpha)(U)=\ker\alpha(U)$, где $\alpha(U)\colon \Gamma(U)\to\Gamma'(U)$. — *Прим. ред.*

(a) пусть задано семейство $\mathcal{U}$ открытых подмножеств пространства X и $V = \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U$; если элемент $\gamma \in \Gamma(V)$ таков, что $\gamma | U = 0$ для всех $U \in \mathcal{U}$, то $\gamma = 0$;

(b) для всякого семейства $\mathcal{U}$ открытых подмножеств пространства X и всякого согласованного $\mathcal{U}$-семейства $\{\gamma_U\}_{U \in \mathcal{U}}$ найдется элемент $\gamma \in \Gamma(V)$, такой, что $\gamma | U = \gamma_U$ для всех $U \in \mathcal{U}$ (здесь $V = \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U$).

Из условия (a) следует, что элемент γ в условии (b) определяется однозначно.

Теперь мы сопоставим каждому предпучку модулей Γ другой предпучок $\hat{\Gamma}$, называемый его пополнением, элементами которого являются согласованные семейства элементов предпучка Γ. Пусть задана совокупность $\mathcal{U} = \{U\}$ открытых множеств, и пусть $\Gamma(\mathcal{U})$ — модуль согласованных $\mathcal{U}$-семейств предпучка Γ. Пусть $\mathcal{V}$ — другое семейство открытых множеств, являющееся измельчением семейства $\mathcal{U}$. Тогда существует гомоморфизм $\Gamma(\mathcal{U}) \to \Gamma(\mathcal{V})$, сопоставляющий согласованному $\mathcal{U}$-семейству $\{\gamma_U\}$ согласованное $\mathcal{V}$-семейство $\{\gamma'_V\}$, такое, что если множество $V \in \mathcal{V}$ содержится в $U \in \mathcal{U}$, то $\gamma'_V = \gamma_U | V$ (элемент γ'_V определяется однозначно этим условием в силу согласованности семейства $\{\gamma_U\}$). Пусть $\mathcal{U}$ пробегает семейство открытых покрытий фиксированного открытого множества $W \subset X$. Тогда $\{\Gamma(\mathcal{U})\}$ есть прямой спектр, и мы полагаем

$$\hat{\Gamma}(W) = \varinjlim \{\Gamma(\mathcal{U})\}.$$

Если $W' \subset W$ и $\mathcal{U}$ — некоторое открытое покрытие множества W, то $\mathcal{U}' = \{U \cap W' | U \in \mathcal{U}\}$ — открытое покрытие множества W', являющееся измельчением покрытия $\mathcal{U}$. Следовательно, существует гомоморфизм $\Gamma(\mathcal{U}) \to \Gamma(\mathcal{U}')$, который определяет (переходом к пределу) гомоморфизм $\hat{\Gamma}(W) \to \hat{\Gamma}(W')$. Тривиальная проверка показывает, что $\hat{\Gamma}$ является предпучком (если $\mathcal{U} = \{\varnothing\}$, то, очевидно, $\Gamma(\mathcal{U}) = 0$ и, таким образом, $\hat{\Gamma}(\varnothing) = 0$). Существует естественное преобразование $\alpha\colon \Gamma \to \hat{\Gamma}$, сопоставляющее элементу $\gamma \in \Gamma(V)$ элемент модуля $\hat{\Gamma}(V)$, представленный согласованным $\mathcal{V}$-семейством $\{\gamma\}$, где семейство $\mathcal{V}$ состоит из единственного множества V. Предпучок $\hat{\Gamma}$ называется *пополнением* предпучка Γ. Он зависит только от значений $\Gamma(U)$ на малых открытых множествах $U \subset X$.

6. Лемма. *Предпучок* Γ *тогда и только тогда является пучком, когда*

$$\alpha\colon \Gamma \approx \hat{\Gamma}.$$

Доказательство. Действительно, условие (a) выполняется тогда и только тогда, когда α — мономорфизм. Если условие (b) выполнено, то α — эпиморфизм. Обратно, если α — изоморфизм, то условие (b) выполнено. ■

7. Пример. Постоянный предпучок G, определяемый модулем G, вообще говоря, не является пучком (если U — несвязное множество, то $G(U) \not\approx \hat{G}(U)$).

8. Пример. Если C^* — относительный предпучок Александера пары (X, A) (с коэффициентами в некотором модуле G), то ядро гомоморфизма α: $C^* \to \hat{C}^*$ совпадает с множеством C_0^* (локально нулевых функций). Покажем, что α — эпиморфизм (и, следовательно, индуцирует изоморфизм $\bar{C}^* \approx \hat{C}^*$). Пусть $\varphi' \in \hat{C}^q(V, V \cap A)$, и предположим, что элемент φ' представлен согласованным $\mathcal{U}$-семейством $\{\varphi_U\}_{U \in \mathcal{U}}$, где $\mathcal{U}$ — открытое покрытие множества V. Тогда φ_U: $U^{q+1} \to G$ (при $U \in \mathcal{U}$) есть локально нулевая функция на $U \cap A$ и

$$\varphi_U \,|\, (U \cap U')^{q+1} = \varphi_{U'} \,|\, (U \cap U')^{q+1}; \quad U, \ U' \in \mathcal{U}.$$

Следовательно, существует функция φ: $V^{q+1} \to G$, такая, что $\varphi \,|\, U^{q+1} = \varphi_U$, если $U \in \mathcal{U}$, и $\varphi(x_0, \ldots, x_q) = 0$, если точки $x_0, \ldots, x_q$ не принадлежат все никакому элементу покрытия $\mathcal{U}$. Эта функция φ локально нулевая на A. Поэтому $\varphi \in C^q(V, V \cap A)$ и $\alpha(\varphi) = \varphi'$.

Эти примеры показывают, что, вообще говоря, $H^*(C^*) \neq H^*(\hat{C}^*)$, т. е. когомологии предпучка коцепных комплексов и когомологии его пополнения, вообще говоря, не изоморфны.

9. Пример. Если Δ^* — относительный сингулярный предпучок пары (X, A) (с коэффициентами в некотором модуле G), то ядро гомоморфизма α: $\Delta^* \to \hat{\Delta}^*$ является подкомплексом локально нулевых коцепей (т. е. коцепь $c^* \in \operatorname{Hom}(\Delta_q(V), G)$ принадлежит ядру гомоморфизма α тогда и только тогда, когда существует такое открытое покрытие $\mathcal{U}$ множества V, что c^* равняется нулю на подкомплексе $\Delta_q(\mathcal{U}) \subset \Delta_q(V)$). Кроме того, α — эпиморфизм (это доказывается так же, как аналогичное утверждение примера 8). Пусть $\mathcal{U}$ — некоторое открытое покрытие пространства X. Ясно, что $\Delta^*(\mathcal{U}) = \operatorname{Hom}(\Delta_*(\mathcal{U})/[\Delta_*(\mathcal{U}) \cap \Delta_*(A)], G)$. Пусть $\mathcal{U}$ пробегает открытые покрытия пространства X. Тогда цепные комплексы

$$\{\Delta_*(\mathcal{U})/[\Delta_*(\mathcal{U}) \cap \Delta_*(A)]\}$$

образуют обратный спектр, а коцепные комплексы

$$\{\operatorname{Hom}(\Delta_*(\mathcal{U})/[\Delta_*(\mathcal{U}) \cap \Delta_*(A)], \ G)\}$$

— прямой спектр. Следовательно, имеет место изоморфизм

$$\varinjlim \{\operatorname{Hom}(\Delta_*(\mathcal{U})/[\Delta_*(\mathcal{U}) \cap \Delta_*(A)],\ G)\} \approx \hat{\Delta}^*(\cdot\,,\ \cdot \cap A;\ G)(X).$$

Из теоремы 4.4.14 вытекает, что гомоморфизм

$$\operatorname{Hom}(\Delta_*(X)/\Delta_*(A),\ G) \to \operatorname{Hom}(\Delta_*(\mathcal{U})/[\Delta_*(\mathcal{U}) \cap \Delta_*(A)],\ G)$$

индуцирует изоморфизм модулей когомологий. Следовательно, гомоморфизм α индуцирует изоморфизм

$$H^*(\Delta^*(\cdot\,,\ \cdot \cap A;\ G)(X)) \approx H^*(\hat{\Delta}^*(\cdot\,,\ \cdot \cap A;\ G)(X)).$$

10. Пример. Пусть ξ — расслоение на n-мерные сферы над базой B, и пусть кольцо R фиксировано. Определим предпучок Γ над B, полагая $\Gamma(V) = H^{n+1}(p_\xi^{-1}(V),\ p_\xi^{-1}(V) \cap \dot{E}_\xi;\ R)$ для всякого открытого множества $V \subset B$. Предпучок Γ называется *предпучком ориентации расслоения ξ над кольцом R*. Можно проверить, что если база B связна, то расслоение ξ ориентируемо над кольцом R тогда и только тогда, когда $\hat{\Gamma}(B) \neq 0$.

11. Пример. Пусть X — некоторое n-мерное многообразие с краем $\dot{X}$, и пусть кольцо R фиксировано. Определим предпучок Γ над $X - \dot{X}$, полагая $\Gamma(V) = H_n(X,\ X - V;\ R)$ для всякого открытого множества $V \subset X - \dot{X}$. Предпучок Γ называется *фундаментальным предпучком многообразия X над кольцом R*. Можно проверить (используя лемму 6.3.2), что $\hat{\Gamma}(X) \approx H_n^c(X,\ \dot{X};\ R)$. В силу теоремы 6.3.5 отсюда следует, что если многообразие X связно, то оно тогда и только тогда ориентируемо над кольцом R, когда $\hat{\Gamma}(X) \neq 0$.

Существуют теории когомологий с коэффициентами в пучках [1]) и теории когомологий с коэффициентами в предпучках. Для паракомпактных пространств эти теории совпадают. Сейчас мы определим когомологии Чеха с коэффициентами в предпучке модулей.

Пусть Γ — предпучок модулей над пространством X, и пусть $\mathcal{U}$ — какое-нибудь открытое покрытие пространства X. Для всякого целого $q \geqslant 0$ определим $C^q(\mathcal{U};\ \Gamma)$ как модуль функций ψ, сопоставляющих упорядоченному набору $q+1$ элементов $U_0, U_1, \ldots, U_q$ покрытия $\mathcal{U}$ элемент $\psi(U_0, \ldots, U_q) \in \Gamma(U_0 \cap \ldots \cap U_q)$. Кограничный оператор

$$\delta\colon C^q(\mathcal{U};\ \Gamma) \to C^{q+1}(\mathcal{U};\ \Gamma)$$

[1]) См. Годеман Р., Алгебраическая топология и теория пучков, М., 1961.

определяется равенством

$$(\delta\psi)(U_0, \ldots, U_{q+1}) = \\ = \sum_{0 \leqslant i \leqslant q+1} (-1)^i \psi(U_0, \ldots, \hat{U}_i, \ldots, U_{q+1}) \mid (U_0 \cap \ldots \cap U_{q+1}).$$

Тогда $\delta \circ \delta = 0$, и модуль $C^*(\mathcal{U}; \Gamma) = \{C^q(\mathcal{U}; \Gamma), \delta\}$ представляет собой коцепной комплекс. Его модуль когомологий обозначается через $H^*(\mathcal{U}; \Gamma)$.

12. Пример. Непосредственно из определения следует, что $H^0(\mathcal{U}; \Gamma) \approx \Gamma(\mathcal{U})$ (модуль согласованных $\mathcal{U}$-семейств).

Пусть $\mathcal{V}$ — измельчение покрытия $\mathcal{U}$, и пусть функция λ: $\mathcal{V} \to \mathcal{U}$ такова, что $V \subset \lambda(V)$ для всех $V \in \mathcal{V}$. Определим коцепное отображение λ^*: $C^*(\mathcal{U}; \Gamma) \to C^*(\mathcal{V}; \Gamma)$, полагая

$$(\lambda^*\psi)(V_0, \ldots, V_q) = \psi(\lambda(V_0), \ldots, \lambda(V_q)) \mid (V_0 \cap \ldots \cap V_q).$$

Если μ: $\mathcal{V} \to \mathcal{U}$ — другая функция, такая, что $V \subset \mu(V)$ для всех $V \in \mathcal{V}$, то коцепная гомотопия D: $C^q(\mathcal{U}; \Gamma) \to C^{q-1}(\mathcal{V}; \Gamma)$ между λ^* и μ^* определяется равенством

$$(D\psi)(V_0, \ldots, V_{q-1}) = \\ = \sum_{0 \leqslant j \leqslant q-1} (-1)^j \times \\ \times \psi(\lambda(V_0), \ldots, \lambda(V_j), \mu(V_j), \ldots, \mu(V_{q-1})) \mid (V_0 \cap \ldots \cap V_{q-1}).$$

Отсюда следует, что корректно определен гомоморфизм

$$\lambda^*: H^*(\mathcal{U}; \Gamma) \to H^*(\mathcal{V}; \Gamma),$$

причем элемент $\lambda^*\{\varphi\} = \{\lambda^*\varphi\}$ не зависит от частного выбора функции λ. Совокупность модулей $\{H^*(\mathcal{U}; \Gamma)\}$, где $\mathcal{U}$ пробегает открытые покрытия пространства X, представляет собой прямой спектр, и *когомологии Чеха пространства X с коэффициентами в предпучке* Γ определяются равенством

$$\check{H}^*(X; \Gamma) = \varinjlim \{H^*(\mathcal{U}; \Gamma)\}.$$

13. Пример. Для всякого предпучка Γ имеем $\check{H}^0(X; \Gamma) = \hat{\Gamma}(X)$.

14. Пример. *Когомологиями Чеха пространства X с коэффициентами в модуле G* (обозначается $\check{H}^*(X; G)$) называются когомологии пространства X с коэффициентами в постоянном предпучке G.

Теперь мы установим некоторые основные свойства когомологий с коэффициентами в предпучке.

15. Теорема. *Существует ковариантный функтор из категории коротких точных последовательностей предпучков над простран-*

ством X в категорию точных последовательностей, сопоставляющий короткой точной последовательности $0 \to \Gamma' \to \Gamma \to \Gamma'' \to 0$ предпучков над X точную последовательность

$$\ldots \to \check{H}^q(X;\, \Gamma') \to \check{H}^q(X;\, \Gamma) \to \check{H}^q(X;\, \Gamma'') \to \check{H}^{q+1}(X;\, \Gamma') \to \ldots.$$

Доказательство. Для всякого открытого покрытия $\mathcal{U}$ имеет место короткая точная последовательность коцепных комплексов

$$0 \to C^*(\mathcal{U};\, \Gamma') \to C^*(\mathcal{U};\, \Gamma) \to C^*(\mathcal{U};\, \Gamma'') \to 0.$$

Это дает точную когомологическую последовательность, и окончательный результат получается переходом к пределу прямого спектра. ■

Если задана короткая точная последовательность модулей

$$0 \to G' \to G \to G'' \to 0,$$

то соответствующие постоянные предпучки над X образуют короткую точную последовательность предпучков. Соответствующая точная когомологическая последовательность модулей когомологий Чеха, существование которой устанавливается теоремой 15, является аналогом для теории Чеха точной последовательности теоремы 5.4.11.

Заданный предпучок Γ над пространством X и заданное подпространство $A \subset X$ определяют предпучок Γ_A над X, а именно

$$\Gamma_A(U) = \begin{cases} \Gamma(U), & U \cap A \neq \varnothing, \\ 0, & U \cap A = \varnothing. \end{cases}$$

Определим также предпучок Γ^A над пространством X, полагая

$$\Gamma^A(U) = \begin{cases} \Gamma(U), & U \cap A = \varnothing, \\ 0, & U \cap A \neq \varnothing. \end{cases}$$

Тогда Γ^A — подпредпучок предпучка Γ, и имеет место короткая точная последовательность предпучков

$$0 \to \Gamma^{X-A} \to \Gamma \to \Gamma_A \to 0.$$

Соответствующая когомологическая точная последовательность, доставляемая теоремой 15, является точной последовательностью когомологий Чеха пары (X, A) с коэффициентами в предпучке Γ; при этом мы считаем, что

$$\check{H}^q(A;\, \Gamma) = \check{H}^q(X;\, \Gamma_A) \quad \text{и} \quad \check{H}^q(X, A;\, \Gamma) = \check{H}^q(X;\, \Gamma^{X-A}).$$

Таким образом, точная последовательность теоремы 15 позволяет строить точные последовательности, соответствующие изменению коэффициентов или изменению основного пространства.

Предпучок Γ модулей над пространством X называется *локально нулевым*, если для всякого элемента $\gamma \in \Gamma(V)$ существует такое открытое покрытие $\mathcal{U}$ множества V, что $\gamma \mid U = 0$ для всех $U \in \mathcal{U}$. Это имеет место тогда и только тогда, когда пополнение $\hat{\Gamma}$ предпучка Γ является нулевым предпучком, и эквивалентно тому, что для всех точек $x \in X$ мы имеем $\varinjlim \{\Gamma(U)\} = 0$, где U пробегает все открытые окрестности множества $\{x\}$.

16. Теорема. *Если X — паракомпактное хаусдорфово пространство, а Γ — локально нулевой предпучок над X, то $\check{H}^*(X;\ \Gamma) = 0$.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{U}$ — локально конечное открытое покрытие пространства X и $\varphi \in C^q(\mathcal{U};\ \Gamma)$. Пусть W_x — открытая окрестность точки $x \in X$, пересекающаяся лишь с конечным числом элементов покрытия $\mathcal{U}$. Поскольку предпучок Γ локально нулевой, существует такая открытая окрестность V_x точки x, содержащаяся в W_x, что для всех множеств $U_0, \ldots, U_q \in \mathcal{U}$ мы имеем $\varphi(U_0, \ldots, U_q) \mid V_x = 0$ (при этом лишь конечное число условий нетривиально, поскольку множество W_x пересекается лишь с конечным числом элементов покрытия $\mathcal{U}$). Пусть $\mathcal{V}$ — открытое покрытие пространства X, являющееся измельчением покрытия $\mathcal{U}$ и покрытия $\{V_x\}_{x \in X}$. Если функция $\lambda\colon \mathcal{V} \to \mathcal{U}$ такова, что $V \subset \lambda(V)$ для всех $V \in \mathcal{V}$, то $0 = \lambda^* \varphi \in C^*(\mathcal{V};\ \Gamma)$. Следовательно, $\check{H}^q(X;\ \Gamma) = 0$ для всех q. ■

Гомоморфизм $\alpha\colon \Gamma \to \Gamma'$ предпучков над пространством X называется *локальным изоморфизмом*, если предпучки $\ker \alpha$ и $\operatorname{coker} \alpha$ оба локально нулевые. Это эквивалентно условию, что для всех $x \in X$ гомоморфизм α индуцирует изоморфизм

$$\varinjlim \{\Gamma(U)\} \approx \varinjlim \{\Gamma'(U)\}$$

(U пробегает открытые окрестности точки x). Имеют место короткие точные последовательности предпучков

$$0 \to \ker \alpha \to \Gamma \xrightarrow{\alpha'} \operatorname{im} \alpha \to 0,$$

$$0 \to \operatorname{im} \alpha \xrightarrow{\alpha''} \Gamma' \to \operatorname{coker} \alpha \to 0,$$

где $\alpha = \alpha''\alpha'$. Объединяя теоремы 15 и 16, мы получаем следующий результат:

17. Следствие. *Если $\alpha\colon \Gamma \to \Gamma'$ — локальный изоморфизм предпучков над паракомпактным хаусдорфовым пространством X, то*

$$\alpha_*\colon \check{H}^*(X;\ \Gamma) \approx \check{H}^*(X;\ \Gamma'). \ \blacksquare$$

18. Следствие. *Если X — паракомпактное хаусдорфово пространство, то естественный гомоморфизм α: $\Gamma \to \hat{\Gamma}$ индуцирует изоморфизмы*

$$\alpha_*: \check{H}^*(X; \Gamma) \approx \check{H}^*(X; \hat{\Gamma}).$$

Доказательство. Достаточно показать, что α: $\Gamma \to \hat{\Gamma}$ — локальный изоморфизм. Пусть $\gamma \in (\ker \alpha)(V)$. Тогда $\gamma \in \Gamma(V)$, и существует такое открытое покрытие $\mathcal{U}$ множества V, что $\gamma \mid U = 0$ для всех $U \in \mathcal{U}$. Следовательно, $\ker \alpha$ — локально нулевой предпучок.

Пусть $\gamma' \in (\operatorname{coker} \alpha)(V)$. Существуют открытое покрытие $\mathcal{U}$ множества V и согласованное $\mathcal{U}$-семейство $\{\gamma_U\}$, представляющее элемент γ'. Для каждого множества $U \in \mathcal{U}$ ограничение $\gamma' \mid U$ представляется элементом $\gamma_U \in \alpha(\Gamma(U))$. Следовательно, $\gamma' \mid U = 0$ и $\operatorname{coker} \alpha$ — локально нулевой предпучок. ■

§ 8. Тонкие предпучки

В этом параграфе будет введено понятие тонкого предпучка и показано, что когомологии положительных размерностей паракомпактного пространства с коэффициентами в тонком предпучке равны нулю. Это приведет нас к теоремам единственности для когомологий коцепных комплексов тонких предпучков над паракомпактным пространством, которые будут использованы для сравнения когомологий Александера и Чеха. Дальнейшие применения будут указаны в следующем параграфе.

Предпучок Γ над пространством X называется *тонким*, если для всякого локально конечного открытого покрытия $\mathcal{U}$ пространства X существует семейство $\{e_U\}_{U \in \mathcal{U}}$ эндоморфизмов предпучка Γ, такое, что

(a) если $\gamma \in \Gamma(V)$, то $e_U(\gamma) \mid (V - \bar{U}) = 0$;

(b) если открытое множество V пересекается лишь с конечным числом элементов семейства $\{\bar{U}\}$, то для элемента $\gamma \in \Gamma(V)$ имеет место равенство $\gamma = \sum\limits_{U \in \mathcal{U}} e_U(\gamma)$.

Заметим, что в условии (b) сумма является конечной, поскольку из условия (a) вытекает, что $e_U(\gamma) = 0$, если $\bar{U} \cap V = \varnothing$.

1. Пример. Относительный предпучок Александера степени q пары (X, A) с коэффициентами в модуле G является тонким. Действительно, пусть $\mathcal{U}$ — локально конечное открытое покрытие пространства X. Выберем для каждой точки $x \in X$ элемент $U_x \in \mathcal{U}$, содержащий эту точку x. Пусть $\varphi \in C^q(V, V \cap A; G)$. Определим элемент $e_U \varphi \in C^q(V, V \cap A; G)$, полагая

$$(e_U\varphi)(x_0, \ldots, x_q) = \begin{cases} \varphi(x_0, \ldots, x_q), & U = U_{x_0}, \\ 0, & U \neq U_{x_0}. \end{cases}$$

Если $V' \subset V$, то имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} C^q(V, V \cap A; G) & \xrightarrow{e_U} & C^q(V, V \cap A; G) \\ \downarrow & & \downarrow \\ C^q(V', V' \cap A; G) & \xrightarrow{e_U} & C^q(V', V' \cap A; G) \end{array}$$

показывающая, что e_U — эндоморфизм предпучка C^q. Если

$$x_0, \ldots, x_q \in (V^{q+1} - \overline{U}^{q+1}) \subset (V^{q+1} - U^{q+1}),$$

то $U_{x_0} \neq U$ и $(e_U\varphi)(x_0, \ldots, x_q) = 0$. Следовательно, $e_U\varphi \mid V - \overline{U} = 0$ и условие (a) выполняется. Покажем, что условие (b) также выполняется. Заметим, что для данных точек $x_0, \ldots, x_q$ существует единственное множество U (а именно U_{x_0}), такое, что $(e_U\varphi)(x_0, \ldots, x_q) \neq 0$. Тогда

$$\left(\sum e_U\varphi\right)(x_0, \ldots, x_q) = \left(e_{U_{x_0}}\varphi\right)(x_0, \ldots, x_q) = \varphi(x_0, \ldots, x_q).$$

Следует заметить, что эндоморфизмы e_U не коммутируют с кограничным оператором модуля $C^*(V, V \cap A; G)$. Поэтому e_U не являются эндоморфизмами предпучка Александера $C^*(\cdot, \cdot \cap A; G)$ коцепных комплексов.

2. Пример. Относительный сингулярный предпучок степени q пары (X, A) с коэффициентами в G также является тонким. Пусть $\mathcal{U}$ — локально конечное открытое покрытие пространства X, и пусть множество U_x выбрано так, что $x \in U_x \in \mathcal{U}$. Эндоморфизм

$$e_U\colon \operatorname{Hom}(\Delta_q(V)/\Delta_q(V \cap A), G) \to \operatorname{Hom}(\Delta_q(V)/\Delta_q(V \cap A), G)$$

определим равенством

$$(e_Uc^*)(\sigma) = \begin{cases} c^*(\sigma), & U = U_{\sigma(p_0)}, \\ 0, & U \neq U_{\sigma(p_0)}. \end{cases}$$

Тогда семейство $\{e_U\}_{U \in \mathcal{U}}$ удовлетворяет условиям (a) и (b) определения тонкости (но e_U не является эндоморфизмом комплекса $\Delta^*(\cdot, \cdot \cap A; G)$ и, значит, $\Delta^*(\cdot, \cdot \cap A; G)$ не является тонким предпучком коцепных комплексов).

Заданные предпучок Γ над X и непрерывное отображение $f\colon X \to Y$ определяют предпучок $f_*\Gamma$ над пространством Y, а именно $(f_*\Gamma)(V) = \Gamma(f^{-1}V)$ для всякого открытого множества $V \subset Y$. Ясно, что отображение f определяет ковариантный функтор из категории предпучков того или иного типа над X в категорию предпучков того же типа над Y. Некоторые полезные свойства тонких предпучков сформулированы в следующей теореме:

3. Теорема. *Пусть Γ — тонкий предпучок модулей над пространством X. Тогда*

(a) *для всякого предпучка модулей* Γ' *над* X *предпучок* $\Gamma \otimes \Gamma'$ *является тонким*;

(b) *если отображение* $f\colon X \to Y$ *непрерывно, то* $f_*\Gamma$ — *тонкий предпучок над* Y;

(c) $\hat{\Gamma}$ — *тонкий предпучок над* X.

Доказательство. (a). Заметим, что если $\mathcal{U}$ — локально конечное открытое покрытие пространства X, а $\{e_U\}_{U \in \mathcal{U}}$ — соответствующие эндоморфизмы предпучка Γ, то $\{e_U \otimes 1\}_{U \in \mathcal{U}}$ — семейство эндоморфизмов предпучка $\Gamma \otimes \Gamma'$. Отсюда следует, что $\Gamma \otimes \Gamma'$ — тонкий предпучок.

(b). Заметим, что если $\mathcal{U}$ — локально конечное открытое покрытие пространства Y, то $f^{-1}\mathcal{U} = \{f^{-1}U \mid U \in \mathcal{U}\}$ — локально конечное открытое покрытие пространства X. Если $\{e_U\}_{U \in \mathcal{U}}$ — семейство эндоморфизмов предпучка Γ, соответствующее покрытию $f^{-1}\mathcal{U}$, то оно индуцирует семейство эндоморфизмов предпучка $f_*\Gamma$, откуда видно, что $f_*\Gamma$ — тонкий предпучок.

(c). Это свойство следует непосредственно из того, что всякий эндоморфизм предпучка Γ индуцирует эндоморфизм предпучка $\hat{\Gamma}$. ■

Пусть задано открытое покрытие $\mathcal{U}$ пространства X. *Усечением* покрытия $\mathcal{U}$ называется открытое покрытие $\mathcal{V}$ пространства X, элементы которого находятся во взаимно однозначном соответствии с элементами покрытия $\mathcal{U}$, причем если элементу $U \in \mathcal{U}$ соответствует элемент $V_U \in \mathcal{V}$, то $\overline{V}_U \subset U$. Любое локально конечное открытое покрытие нормального хаусдорфова пространства обладает усечением. Ясно, что всякое усечение локально конечного открытого покрытия является локально конечным.

Следующая теорема представляет собой главный результат о тонких предпучках.

4. Теорема. *Если* Γ — *тонкий предпучок над паракомпактным хаусдорфовым пространством* X, *то* $\check{H}^q(X; \Gamma) = 0$ *для всех* $q > 0$.

Доказательство. Пусть $\mathcal{U} = \{U\}$ — локально конечное открытое покрытие пространства X, и пусть $\mathcal{U}' = \{U'\}$ — усечение покрытия $\mathcal{U}$. Пусть $\{e_U\}_{U \in \mathcal{U}}$ — эндоморфизмы предпучка Γ, входящие в определение тонкости и соответствующие покрытию $\mathcal{U}'$ (но занумерованные элементами покрытия $\mathcal{U}$). Пусть $\mathcal{V} = \{V\}$ — открытое измельчение покрытия $\mathcal{U}$, покрывающее все пространство X и такое, что всякий элемент $V \in \mathcal{V}$ пересекается лишь с конечным числом элементов покрытия $\mathcal{U}$ и для каждого множества $U \in \mathcal{U}$ либо $\overline{V} \subset U$, либо $V \subset X - \overline{U}'$. Пусть функция $\lambda\colon \mathcal{V} \to \mathcal{U}$ такова, что $V \subset \lambda(V)$ для всех $V \in \mathcal{V}$.

Поскольку каждый эндоморфизм e_U является эндоморфизмом предпучка Γ, он индуцирует коцепное отображение, обозначаемое также через e_U: $C^*(\mathcal{U}; \Gamma) \to C^*(\mathcal{U}; \Gamma)$, такое, что если $\psi \in C^q(\mathcal{U}; \Gamma)$ и $U_0, \ldots, U_q \in \mathcal{U}$, то

$$(e_U\psi)(U_0, \ldots, U_q) = e_U(\psi(U_0, \ldots, U_q)).$$

Эндоморфизм e_U действует аналогично, как коцепное отображение, и на комплексе $C^*(\mathcal{V}; \Gamma)$ и коммутирует с коцепным отображением λ^*: $C^*(\mathcal{U}; \Gamma) \to C^*(\mathcal{V}; \Gamma)$.

Пусть $q > 0$, и пусть $\psi \in C^q(\mathcal{U}; \Gamma)$ — некоторый коцикл. Определим элемент $\psi_U \in C^q(\mathcal{V}; \Gamma)$, полагая $\psi_U = e_U(\lambda^*\psi)$. Тогда ψ_U — коцикл для любого $U \in \mathcal{U}$, и если $V_0, \ldots, V_q \in \mathcal{V}$, то равенство $\psi_U(V_0, \ldots, V_q) = 0$ выполнено для всех множеств $U \in \mathcal{U}$, кроме конечного их числа. Следовательно, сумма $\sum \psi_U$ существует и $\sum \psi_U = \lambda^*\psi$.

Определим элемент $\psi'_U \in C^{q-1}(\mathcal{V}; \Gamma)$, полагая

$$\psi'_U(V_0, \ldots, V_{q-1}) = \begin{cases} e_U(\psi(U, \lambda(V_0), \ldots, \lambda(V_{q-1})) \mid (V_0 \cap \ldots \cap V_{q-1}), & V_0 \cap \ldots \cap V_{q-1} \subset U, \\ 0, & V_0 \cap \ldots \cap V_{q-1} \subset X - \bar{U}'. \end{cases}$$

Тогда $\delta\psi'_U = \psi_U$ для всех множеств U и, поскольку сумма $\sum \psi'_U$ определена (для заданных множеств $V_0, \ldots, V_{q-1}$ равенство $\psi'_U(V_0, \ldots, V_{q-1}) = 0$ имеет место для всех множеств $U \in \mathcal{U}$, за исключением конечного их числа), мы видим, что

$$\lambda^*\psi = \sum \psi_U = \delta\left(\sum \psi'_U\right).$$

Следовательно, элемент $\lambda^*\psi$ является кограницей и $\check{H}^q(X; \Gamma) = 0$. ∎

Приведем теперь несколько вспомогательных результатов технического характера о коцепных комплексах предпучков. Пусть Γ^* — коцепной комплекс предпучков модулей над пространством X. Через Z^q и B^{q+1} мы обозначаем соответственно ядро и образ гомоморфизма δ: $\Gamma^q \to \Gamma^{q+1}$, а через H^q — предпучок Z^q/B^q; все эти объекты являются предпучками модулей над X. (Заметим, что тонкий предпучок коцепных комплексов представляет собой коцепной комплекс тонких предпучков, но обратное, вообще говоря, неверно.)

5. Лемма. *Пусть Γ^* — коцепной комплекс предпучков модулей над пространством X. Для всякого целого q имеет место функториальная относительно Γ^* точная последовательность*

$$0 \to \ker(\check{H}^0(X; B^q) \to \check{H}^1(X; Z^{q-1})) \to \check{H}^0(X; Z^q) \to H^q(\hat{\Gamma}^*(X)) \to 0.$$

Доказательство. Как указано в примере 6.7.13, $\hat{\Gamma}^q(X) = \check{H}^0(X; \Gamma^q)$. Короткая точная последовательность предпучков

$$0 \to Z^q \to \Gamma^q \to B^{q+1} \to 0,$$

согласно теореме 6.7.15, порождает точную последовательность

$$0 \to \check{H}^0(X; Z^q) \to \check{H}^0(X; \Gamma^q) \to \check{H}^0(X; B^{q+1}) \to \check{H}^1(X; Z^q).$$

Поскольку $B^{q+1} \subset \Gamma^{q+1}$, из аналогичного свойства точности следует, что $\check{H}^0(X; B^{q+1}) \subset \check{H}^0(X; \Gamma^{q+1})$. Объединяя эти результаты, мы получаем изоморфизмы

$$\check{H}^0(X; Z^q) \approx \ker(\check{H}^0(X; \Gamma^q) \to \check{H}^0(X; B^{q+1})) \approx$$
$$\approx \ker(\check{H}^0(X; \Gamma^q) \to \check{H}^0(X; \Gamma^{q+1})),$$

а также

$$\operatorname{im}(\check{H}^0(X; \Gamma^q) \to \check{H}^0(X; \Gamma^{q+1})) \approx \ker(\check{H}^0(X; B^{q+1}) \to \check{H}^1(X; Z^q)).$$

Теперь нужный нам результат следует из равенства

$$H^q(\hat{\Gamma}^*(X)) =$$
$$= \ker(\check{H}^0(X; \Gamma^q) \to \check{H}^0(X; \Gamma^{q+1}))/\operatorname{im}(\check{H}^0(X; \Gamma^{q-1}) \to \check{H}^0(X; \Gamma^q)). \blacksquare$$

6. Следствие. *Пусть Γ^* — коцепной комплекс предпучков модулей над паракомпактным хаусдорфовым пространством X. Для всех целых q имеет место функториальная по Γ^* короткая точная последовательность*

$$0 \to \operatorname{im}(\check{H}^0(X; B^q) \to \check{H}^1(X; Z^{q-1})) \to H^q(\hat{\Gamma}^*(X)) \to$$
$$\to \ker(\check{H}^0(X; H^q) \to \check{H}^1(X; B^q)) \to 0.$$

В случае когда Γ^{q-1} — тонкий предпучок, эта последовательность принимает вид

$$0 \to \check{H}^1(X; Z^{q-1}) \to H^q(\hat{\Gamma}^*(X)) \to \ker(\check{H}^0(X; H^q) \to \check{H}^1(X; B^q)) \to 0.$$

Доказательство. Как показывает теорема 6.7.15, примененная к короткой точной последовательности предпучков

$$0 \to B^q \to Z^q \to H^q \to 0,$$

имеет место изоморфизм

$$\check{H}^0(X; Z^q)/\check{H}^0(X; B^q) \approx \ker(\check{H}^0(X; H^q) \to \check{H}^1(X; B^q)).$$

Согласно лемме 5, имеем изоморфизм

$$\check{H}^0(X; Z^q)/\ker[\check{H}^0(X; B^q) \to \check{H}^1(X; Z^{q-1})] \approx H^q(\hat{\Gamma}^*(X)).$$

Отсюда следует, что модуль $H^q(\hat{\Gamma}^*(X))$ отображается эпиморфно на $\ker(\check{H}^0(X;\,H^q)\to\check{H}^1(X;\,B^q))$ и ядро этого эпиморфизма изоморфно

$$\check{H}^0(X;\,B^q)/\ker[\check{H}^0(X;\,B^q)\to\check{H}^1(X;\,Z^{q-1})]\approx$$
$$\approx\operatorname{im}(\check{H}^0(X;\,B^q)\to\check{H}^1(X;\,Z^{q-1})).$$

Это дает нам первую короткую точную последовательность. Чтобы получить вторую, рассмотрим короткую точную последовательность предпучков

$$0\to Z^{q-1}\to\Gamma^{q-1}\to B^q\to 0.$$

Если предпучок Γ^{q-1} тонкий, то из теорем 6.7.15 и 4 получаем

$$\operatorname{im}(\check{H}^0(X;\,B^q)\to\check{H}^1(X;\,Z^{q-1}))=\check{H}^1(X;\,Z^{q-1}).\ \blacksquare$$

7. Теорема. *Пусть Γ^* — неотрицательный коцепной комплекс тонких предпучков модулей над паракомпактным хаусдорфовым пространством X. Предположим, что для некоторых целых $0\leqslant m<n$ предпучки $H^q(\Gamma^*)$ локально нулевые при $q<m$ и $m<q<n$. Тогда имеют место функториальные изоморфизмы*

$$\check{H}^{q-m}(X;\,H^m(\Gamma^*))\approx H^q(\hat{\Gamma}^*(X)),\quad q<n,$$

и функториальный мономорфизм

$$\check{H}^{n-m}(X;\,H^m(\Gamma^*))\to H^n(\hat{\Gamma}^*(X)).$$

Доказательство. Для каждого целого q имеет место короткая точная последовательность предпучков

$$0\to Z^q\to\Gamma^q\to B^{q+1}\to 0.$$

Поскольку предпучок Γ^q тонкий, из теорем 6.7.15 и 4 следует, что

$$\text{(a)}\qquad \check{H}^p(X;\,B^{q+1})\approx\check{H}^{p+1}(X;\,Z^q),\quad p\geqslant 1.$$

Для каждого целого q имеет место также короткая точная последовательность предпучков

$$0\to B^q\to Z^q\to H^q\to 0.$$

Поскольку предпучки H^q локально нулевые при $q<m$ и $m<q<n$, из теорем 6.7.15 и 6.7.16 следует, что

$$\text{(b)}\quad \check{H}^p(X;\,B^q)\approx\check{H}^p(X;\,Z^q)\quad\text{при}\quad q<m\quad\text{или}\quad m<q<n\ \text{и всех}\ p.$$

Поскольку B^0 — нулевой предпучок, из равенств (a) и (b) индукцией по q можно вывести равенства ($q<m$)

$$\text{(c)}\qquad \check{H}^p(X;\,Z^q)=0=\check{H}^p(X;\,B^{q+1}),\quad p\geqslant 1.$$

Отсюда и из следствия 6 теперь вытекает, что $H^i(\hat{\Gamma}^*(X))=0$ при $i<m$. Следовательно, теорема верна для $q<m$ (оба модуля тривиальны). Если $q=m$, то (согласно следствию 6 и равенству (c))

$$H^m(\hat{\Gamma}^*(X)) \approx \check{H}^0(X;\ H^m),$$

и наша теорема в этом случае тоже справедлива.

Чтобы доказать ее при $m<q\leqslant n$, заметим, что, согласно равенству (c), $\check{H}^p(X;\ B^m)=0$ при $p\geqslant 1$. Из короткой точной последовательности предпучков

$$0 \to B^m \to Z^m \to H^m \to 0$$

следует, что

$$\check{H}^p(X;\ Z^m) \approx \check{H}^p(X;\ H^m), \quad p\geqslant 1.$$

Если $m<i<n$, то следствие 6 показывает, что

$$\check{H}^1(X;\ Z^{i-1}) \approx H^i(\hat{\Gamma}^*(X)).$$

Когда же $i=n$, имеет место мономорфизм

$$\check{H}^1(X;\ Z^{n-1}) \to H^n(\hat{\Gamma}^*(X)).$$

Используя равенства (b) и (a), получаем при $m<i\leqslant n$

$$\check{H}^1(X;\ Z^{i-1}) \approx \check{H}^1(X;\ B^{i-1}) \approx \check{H}^2(X;\ Z^{i-2}) \approx \ldots$$
$$\ldots \approx \check{H}^{i-m}(X;\ Z^m) \approx \check{H}^{i-m}(X;\ H^m),$$

что и дает нужный нам результат при $m<q\leqslant n$. ■

Непосредственно из доказанной теоремы получается изоморфизм между теориями когомологий Чеха и Александера с коэффициентами в модуле G.

8. Следствие. *Для всякого паракомпактного хаусдорфова пространства X и всякого модуля G имеет место функториальный изоморфизм*

$$\check{H}^*(X;\ G) \approx \bar{H}^*(X;\ G)$$

модулей когомологий Чеха и Александера.

Доказательство. Пусть C^* — предпучок Александера пространства X с коэффициентами в G. Поскольку C^q — тонкий предпучок для всех q (см. пример 1), C^* — неотрицательный коцепной комплекс тонких предпучков. Более того, для всякого непустого множества U, согласно лемме 6.4.1,

$$H^q(C^*(U;\ G)) \approx \begin{cases} 0, & q\neq 0,\\ G, & q=0.\end{cases}$$

Следовательно, предпучок $H^q(C^*)$ локально нулевой, если $q>0$, а предпучок $H^0(C^*)$ изоморфен постоянному предпучку G. Предположения теоремы 7 выполняются для $m=0$ и для произвольного $n>0$, и функториальный изоморфизм

$$\check{H}^q(X;\ G) \approx H^q(\hat{C}^*)$$

имеет место для всех q. Как было замечено выше, в примере 6.7.8, имеет место канонический изоморфизм $\bar{C}^* \approx \hat{C}^*$, и, значит, $\bar{H}^q(X;\ G) \approx$ $\approx H^q(\hat{C}^*)$. Эти изоморфизмы вместе и составляют утверждение следствия. ■

Последний результат остается верным и без предположения о паракомпактности (см. упражнение 6.D.3). Следующий результат представляет собой главную теорему единственности для когомологий предпучков.

9. Теорема. *Пусть X — паракомпактное хаусдорфово пространство, и пусть τ: $\Gamma^* \to \Gamma'^*$ — коцепное отображение одного неотрицательного коцепного комплекса тонких предпучков модулей над X в другой. Пусть для некоторого числа $n \geqslant 0$ отображение τ_*: $H^q(\Gamma^*) \to H^q(\Gamma'^*)$ является локальным изоморфизмом при $q<n$ и локальным мономорфизмом при $q=n$. Тогда индуцированное отображение*

$$\hat{\tau}_*\colon H^q(\hat{\Gamma}^*(X)) \to H^q(\hat{\Gamma}'^*(X))$$

является изоморфизмом, если $q<n$, и мономорфизмом, если $q=n$.

Доказательство. Пусть Γ_τ^* — конус отображения τ (который определяется для коцепных комплексов аналогично тому, как в § 4.2 он был определен для цепных комплексов). Тогда $\Gamma_\tau^q = \Gamma^{q+1} \oplus \Gamma'^q$, и если $\gamma \in \Gamma^{q+1}(U)$ и $\gamma' \in \Gamma'^q(U)$, то $\delta(\gamma, \gamma') = (-\delta(\gamma), \tau(\gamma)+\delta(\gamma'))$. Конус Γ_τ^* представляет собой неотрицательный коцепной комплекс тонких предпучков над X, и для любого открытого множества $U \subset X$ имеет место точная последовательность

$$\ldots \to H^q(\Gamma'^*(U)) \to H^q(\Gamma_\tau^*(U)) \to H^{q+1}(\Gamma^*(U)) \xrightarrow{\tau_*} H^{q+1}(\Gamma'^*(U)) \to \ldots$$

Переходя к пределу прямого спектра, когда U пробегает все открытые окрестности точки $x \in X$, мы видим, что отображение τ_*: $H^q(\Gamma^*) \to H^q(\Gamma'^*)$ тогда и только тогда является локальным изоморфизмом для $q<n$ и локальным мономорфизмом для $q=n$, когда предпучок $H^q(\Gamma_\tau^*)$ локально нулевой для $q<n$. Согласно теореме 7, в этом случае $H^q(\hat{\Gamma}_\tau^*(X))=0$ для $q<n$ (если $n=0$, это тривиально, а если $n>0$, то это следует из теоремы 7 при $m=0$).

Очевидно, предпучок $\hat{\Gamma}_\tau^*$ является конусом $\Gamma_{\hat{\tau}}^*$ индуцированного отображения пополнений $\hat{\tau}$: $\hat{\Gamma}^* \to \hat{\Gamma}'^*$. Следовательно, имеет место точная последовательность

$$\ldots \to H^q(\hat{\Gamma}'^*(X)) \to H^q(\hat{\Gamma}^*_\tau(X)) \to H^{q+1}(\hat{\Gamma}^*(X)) \xrightarrow{t_*} H^{q+1}(\hat{\Gamma}_l'^*(X)) \to \ldots .$$

Поскольку, как было показано выше, предпучки $H^q(\hat{\Gamma}^*_\tau(X))$ равны нулю при $q<n$, требуемый результат вытекает из точности этой последовательности. ■

Для компактных пространств имеет место следующая *формула универсальных коэффициентов для когомологий Чеха:*

10. Теорема. *Пусть X — компактное хаусдорфово пространство. На произведении категории предпучков Γ над X, состоящих из R-модулей без кручения, и категории R-модулей G имеет место функториальная короткая точная последовательность*

$$0 \to \check{H}^q(X; \Gamma) \otimes G \to \check{H}^q(X; \Gamma \otimes G) \to \check{H}^{q+1}(X; \Gamma) * G \to 0.$$

Доказательство. Пусть $\mathcal{U}$ — конечное открытое покрытие пространства X. Коцепное отображение

$$\tau\colon C^*(\mathcal{U}; \Gamma) \otimes G \to C^*(\mathcal{U}; \Gamma \otimes G),$$

определенное соотношением $\tau(\psi \otimes g)(U_0, \ldots, U_q) = \psi(U_0, \ldots, U_q) \otimes g$, является изоморфизмом (это утверждение аналогично лемме 5.5.6 и является следствием конечности покрытия $\mathcal{U}$). Из формулы универсальных коэффициентов для коцепных комплексов (теорема 5.4.1) получаем функториальную короткую точную последовательность

$$0 \to H^q(\mathcal{U}; \Gamma) \otimes G \to H^q(\mathcal{U}; \Gamma \otimes G) \to H^{q+1}(\mathcal{U}; \Gamma) * G \to 0.$$

Отсюда наше утверждение получается переходом к пределу прямого спектра по конфинальному семейству конечных открытых покрытий пространства X (поскольку как тензорное произведение, так и периодическое произведение коммутируют с пределами прямых спектров). ■

Следствие 8 дает нам формулу универсальных коэффициентов для когомологий Александера компактных пространств. Следующая теорема обобщает этот результат на компактные пары и содержит утверждение о том, что получающаяся таким образом короткая точная последовательность расщепляется.

11. Теорема. *На произведении категории пар (X, A), где A — замкнутое подмножество компактного хаусдорфова пространства X, и категории R-модулей G имеет место функториальная короткая точная последовательность*

$$0 \to \bar{H}^q(X, A; R) \otimes G \to \bar{H}^q(X, A; G) \to \bar{H}^{q+1}(X, A; R) * G \to 0,$$

и эта последовательность расщепляется.

Доказательство. Пусть $\tau\colon C^*(\cdot, \cdot\cap A; R)\otimes G\to C^*(\cdot, \cdot\cap A; G)$ — гомоморфизм предпучков, определенный так же, как в примере 6.7.5 (т. е. $\tau(\varphi\otimes g)(x_0, \ldots, x_q)=\varphi(x_0, \ldots, x_q)g$). Оба комплекса $C^*(\cdot, \cdot\cap A; R)\otimes G$ и $C^*(\cdot, \cdot\cap A; G)$ являются неотрицательными комплексами тонких предпучков. Сначала мы докажем, что

$$\tau_*\colon H^*(C^*(\cdot, \cdot\cap A; R)\otimes G)\to H^*(C^*(\cdot, \cdot\cap A; G))$$

— локальный изоморфизм. Если $U\subset X-A$, то $C^*(U, U\cap A; R)=C^*(U; R)$ и $C^*(U, U\cap A; G)=C^*(U; G)$, и из леммы 6.4.1 и теоремы 5.4.1 следует, что

$$\tau_*\colon H^*(C^*(U, U\cap A; R)\otimes G)\approx H^*(C^*(U, U\cap A; G)).$$

Поскольку подпространство A замкнуто в X, для всякой точки $x\in X-A$ отображение τ_* определяет изоморфизм модуля $\varinjlim\{H^*(C^*(U, U\cap A; R)\otimes G)\}$ на модуль $\varinjlim\{H^*(C^*(U, U\cap A; G))\}$ (где U в обоих случаях пробегает все открытые окрестности точки x).

Для всякого множества U, пересекающегося с A, имеет место коммутативная диаграмма с точными строками

$$\begin{array}{ccccccccc}
0\to & C^*(U, U\cap A; R)\otimes G & \to & C^*(U; R)\otimes G & \to & \bar{C}^*(U\cap A; R)\otimes G & \to 0\\
& \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
0\to & C^*(U, U\cap A; G) & \to & C^*(U; G) & \to & \bar{C}^*(U\cap A; G) & \to 0
\end{array}$$

По лемме 6.4.1 приведенные модули средних коцепных комплексов тривиальны. Следовательно, имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc}
\tilde{H}^q(\bar{C}^*(U\cap A; R)\otimes G) & \underset{\approx}{\to} & H^{q+1}(C^*(U, U\cap A; R)\otimes G)\\
\downarrow & & \downarrow\\
\tilde{H}^q(\bar{C}^*(U\cap A; G)) & \underset{\approx}{\to} & H^{q+1}(C^*(U, U\cap A; G))
\end{array}$$

Итак, чтобы завершить доказательство того, что τ_* — локальный изоморфизм, нам осталось лишь показать, что для любой точки $x\in A$ имеет место изоморфизм

$$\varinjlim\{\tilde{H}^q(\bar{C}^*(U\cap A; R)\otimes G)\}\approx\varinjlim\{\tilde{H}^q(\bar{C}^*(U\cap A; G))\}$$

(U пробегает все окрестности точки x в пространстве X). Это равносильно тому, что

$$\tilde{H}^q\left(\varinjlim\{\bar{C}^*(U\cap A; R)\}\right)\otimes G\approx\tilde{H}^q\left(\varinjlim\{\bar{C}^*(U\cap A; G)\}\right),$$

где $U\cap A$ пробегает все окрестности точки x в подпространстве A. Но последнее тривиальным образом верно, так как обе части равны нулю для всех q (это следует из того, что точка x жестко вложена в паракомпактное пространство A; однако это можно доказать и без предположения паракомпактности пространства A, поскольку одноточечное подпространство является жестко вложенным в любом пространстве относительно когомологий Александера).

Мы проверили, что отображение τ удовлетворяет условиям теоремы 9 для всех n. Следовательно, τ индуцирует изоморфизм

$$\hat{\tau}_*: H^*([\hat{C}^*(\cdot, \cdot \cap A; R) \otimes G](X)) \approx H^*(\hat{C}^*(\cdot, \cdot \cap A; G)(X)).$$

Как указано в примере 6.7.8, правая часть изоморфна модулю $H^*(\bar{C}^*(X, A; G))$. Из примера 6.7.13 видно, что левая часть совпадает с модулем когомологий комплекса $\check{H}^0(X; C^*(\cdot, \cdot \cap A; R) \otimes G)$. Согласно теореме 10 и тонкости предпучка $C^*(\cdot, \cdot \cap A; R) \otimes G$, этот последний модуль изоморфен

$$\check{H}^0(X; C^*(\cdot, \cdot \cap A; R)) \otimes G \approx (H^*(\hat{C}^*(\cdot, \cdot \cap A; R)(X)) \otimes G \approx$$
$$\approx \bar{H}^*(X, A; R) \otimes G.$$

Отсюда следует, что отображение

$$\bar{\tau}: \bar{C}^*(X, A; R) \otimes G \to \bar{C}^*(X, A; G),$$

индуцированное отображением τ, индуцирует изоморфизм когомологий. Теперь утверждение теоремы следует из формулы универсальных коэффициентов для коцепных комплексов (теорема 5.4.1). ■

Из доказанной теоремы вытекает следующая *формула универсальных коэффициентов для когомологий Александера с компактными носителями*:

12. Следствие. *На произведении категории пар (X, A), где A — замкнутое подпространство локально компактного хаусдорфова пространства X, и категории R-модулей G имеет место функториальная короткая точная последовательность*

$$0 \to \bar{H}^q_c(X, A; R) \otimes G \to \bar{H}^q_c(X, A; G) \to \bar{H}^{q+1}_c(X, A; R) * G \to 0,$$

и эта последовательность расщепляется.

Доказательство. Пусть N — замкнутая коограниченная окрестность множества A в пространстве X. Имеет место коммутативная диаграмма коцепных отображений

$$\begin{array}{ccc}
\bar{C}^*(X, N; R) \otimes G & \longrightarrow & \bar{C}^*(X, N; G) \\
\downarrow & & \downarrow \\
\bar{C}^*(\overline{X-N}, \overline{X-N} \cap N; R) \otimes G & \to & \bar{C}^*(\overline{X-N}, \overline{X-N} \cap N; G)
\end{array}$$

в которой каждое вертикальное отображение индуцирует изоморфизм когомологий (теорема 6.6.5). По теореме 11 верхнее горизонтальное отображение индуцирует изоморфизм когомологий. Следовательно, нижнее отображение также индуцирует изоморфизм когомологий.

Кроме того, имеет место коммутативная диаграмма (в которой предел берется по всем замкнутым коограниченным окрестностям N множества A в пространстве X)

$$\begin{array}{ccc} \varinjlim\{\bar{C}^*(\overline{X-N},\ \overline{X-N}\cap N;\ R)\}\otimes G & \to & \varinjlim\{\bar{C}^*(\overline{X-N},\ \overline{X-N}\cap N;\ G)\} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \bar{C}^*_c(X,\ A;\ R)\otimes G & \longrightarrow & \bar{C}^*_c(X,\ A;\ G) \end{array}$$

Из сказанного выше следует, что верхнее горизонтальное отображение индуцирует изоморфизм когомологий. Поскольку замкнутые коограниченные окрестности множества A в X образуют конфинальное семейство в семействе всех коограниченных окрестностей множества A в X, из теоремы 6.6.15 следует, что каждое вертикальное отображение индуцирует изоморфизм когомологий. Следовательно, нижнее отображение тоже индуцирует изоморфизм когомологий. Отсюда и из теоремы 5.4.1 получается требуемый результат. ■

§ 9. Применения когомологий предпучков

Этот параграф посвящен двум основным применениям теории, развитой в двух последних параграфах. Одно из них — это изучение связи между когомологиями Александера и сингулярными когомологиями. Мы докажем, что для гомологически локально связных пространств (например, для многообразий) эти теории когомологий изоморфны. Другое применение касается изучения связи между когомологиями Александера двух пространств, одно из которых непрерывно отображается в другое. В заключение параграфа будет доказана теорема Виеториса — Бегля об отображении.

Пусть (X, A) — пара топологических пространств, и пусть G — некоторый R-модуль. Рассмотрим гомоморфизм

$$\tau\colon C^*(\cdot,\ \cdot\cap A;\ G)\to\Delta^*(\cdot,\ \cdot\cap A;\ G),$$

определенный в примере 6.7.4. Он индуцирует гомоморфизм

$$\hat{\tau}\colon \hat{C}^*(\cdot,\ \cdot\cap A;\ G)\to\hat{\Delta}^*(\cdot,\ \cdot\cap A;\ G),$$

такой, что коммутативна следующая диаграмма:

$$\begin{array}{ccc} C^*(\cdot,\ \cdot\cap A;\ G) & \xrightarrow{\tau} & \Delta^*(\cdot,\ \cdot\cap A;\ G) \\ \downarrow{\scriptstyle\alpha} & & \downarrow{\scriptstyle\alpha} \\ \hat{C}^*(\cdot,\ \cdot\cap A;\ G) & \xrightarrow{\hat{\tau}} & \hat{\Delta}^*(\cdot,\ \cdot\cap A;\ G) \end{array}$$

Как показано в примерах 6.7.8 и 6.7.9, имеют место изоморфизмы

$$\bar{C}^*(\cdot, \ \cdot \cap A; \ G) \approx \hat{C}^*(\cdot, \ \cdot \cap A; \ G),$$
$$\alpha_*\colon H^*(\Delta^*(\cdot, \ \cdot \cap A; \ G)) \approx H^*(\hat{\Delta}^*(\cdot, \ \cdot \cap A; \ G)).$$

В § 6.5 был определен естественный гомоморфизм

$$\mu\colon \bar{H}^*(X, \ A; \ G) \to H^*(X, \ A; \ G).$$

Легко проверить, что коммутативна следующая диаграмма:

$$\begin{tikzcd}
H^*(\bar{C}^*(X, \ A; \ G)) \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "\approx"'] & H^*(\Delta^*(X, \ A; \ G)) \arrow[d, "\approx"', "\alpha_*"] \\
H^*(\hat{C}^*(\cdot, \ \cdot \cap A, \ G)(X)) \arrow[r, "\hat{\tau}_*"] & H^*(\hat{\Delta}^*(\cdot, \ \cdot \cap A; G)(X))
\end{tikzcd}$$

Следовательно, гомоморфизм μ тогда и только тогда является изоморфизмом, когда $\hat{\tau}_*$ — изоморфизм.

1. Теорема. *Пусть X — паракомпактное хаусдорфово пространство, и пусть существует такое целое $n \geqslant 0$, что каждая точка $x \in X$ жестко вложена в X в размерностях $< n$ по отношению к сингулярным когомологиям с коэффициентами в G. Тогда гомоморфизм*

$$\mu\colon \bar{H}^q(X; \ G) \to H^q(X; \ G)$$

является изоморфизмом для всех $q < n$ и мономорфизмом для $q = n$.

Доказательство. Оба комплекса $C^*(\cdot; \ G)$ и $\Delta^*(\cdot; \ G)$ являются неотрицательными коцепными комплексами тонких предпучков. Из предположения о жесткости всех точек x относительно сингулярной теории когомологий вытекает, что гомоморфизм $\tau_*\colon H^q(C^*(\cdot; \ G)) \to H^q(\Delta^*(\cdot; \ G))$ представляет собой локальный изоморфизм, если $q < n$, и локальный мономорфизм, если $q = n$ (на самом деле это отображение является локальным мономорфизмом при всех q). Согласно теореме 6.8.9, отображение

$$\hat{\tau}_*\colon H^q(\hat{C}^*(X; \ G)) \to H^q(\hat{\Delta}^*(X; \ G))$$

является изоморфизмом, если $q < n$, и мономорфизмом при $q = n$. ■

Существует частичное обращение этого результата, которое утверждает, что если отображение $\mu\colon \bar{H}^q(U; \ G) \to H^q(U; \ G)$ является изоморфизмом для всех $q < n$ и для всех открытых множеств $U \subset X$, то каждая точка $x \in X$ является жестко вложенной в размерностях $< n$ по отношению к сингулярным когомологиям с коэффициентами в G. Это вытекает из коммутативности следующей диаграммы (где U пробегает все открытые окрестности точки $x \in X$):

$$\begin{array}{ccc}\varinjlim\{\bar{H}^q(U;\ G)\} & \xrightarrow{\approx} & \bar{H}^q(x;\ G) \\ \mu\downarrow & & \approx\downarrow\mu \\ \varinjlim\{H^q(U;\ G)\} & \longrightarrow & H^q(x;\ G)\end{array}$$

Если X — хаусдорфово пространство, в котором каждое открытое подмножество паракомпактно (например, X метризуемо), каждая точка $x \in X$ тогда и только тогда является жестко вложенной относительно сингулярных когомологий в размерностях $< n$, когда отображение μ: $\bar{H}^q(U;\ G) \to H^q(U;\ G)$ является изоморфизмом для всех $q < n$ и всех открытых множеств $U \subset X$.

Пространство X называется *гомологически локально связным в размерности* n, если для каждой точки $x \in X$ и для каждой ее окрестности U существует окрестность V точки x в U, такая, что гомоморфизм $\tilde{H}_q(V) \to \tilde{H}_q(U)$ тривиален при $q \leqslant n$. Пространство называется *гомологически локально связным*, если оно гомологически локально связно в размерности n для любого n.

2. Пример. Всякое локально стягиваемое пространство, в частности любой полиэдр и любое многообразие, гомологически локально связно.

3. Пример. Пусть $X_q = S^q\ (q \geqslant 1)$, а x_q — отмеченная точка этого пространства. Подпространство произведения $\prod X_q$, состоящее из всех наборов, в которых лишь одна компонента может отличаться от соответствующей отмеченной точки, является гомологически локально связным в размерности n для любого n, но не является локально стягиваемым.

4. Лемма. *Если пространство X гомологически локально связно в размерности n, то предпучки $\tilde{H}^{*q}(\Delta^*(\cdot\,;\ G))$ являются локально нулевыми для всех чисел $q \leqslant n$ и всех модулей G.*

Доказательство. Пусть $c^* \in \operatorname{Hom}(\tilde{\Delta}_q(U),\ G)$ — некоторый коцикл $(0 < q \leqslant n)$, и пусть $x \in U$. Для $q = 0$ рассмотрим окрестность V точки x в подпространстве U, такую, что гомоморфизм $\tilde{H}_0(V) \to \tilde{H}_0(U)$ тривиален. Если $c \in \tilde{\Delta}_0(V)$, то существует такая цепь $c' \in \Delta_1(U)$, что $c = \partial c'$. Тогда $c^*(c) = c^*(\partial c') = (\delta c^*)(c') = 0$. Следовательно, $c^* | \tilde{\Delta}_0(V) = 0$, что доказывает локальную тривиальность предпучка $\tilde{H}^0(\Delta^*(\cdot\,;\ G))$.

Пусть $q > 0$, и пусть V и V' — такие окрестности точки x в подпространстве U, что $V \subset V'$ и оба отображения $\tilde{H}_{q-1}(V) \to$

$\to \tilde{H}_{q-1}(V')$ и $H_q(V') \to H_q(U)$ тривиальны. Пусть c — приведенный сингулярный $(q-1)$-мерный цикл подпространства V, и пусть c' — такая q-мерная цепь множества V', что $\partial c' = c$. Тогда элемент $c^*(c') \in G$ не зависит от выбора элемента c'; если c'' — другая q-мерная цепь множества V', такая, что $\partial c'' = c$, то $c' - c'' = \partial d$ для некоторой $(q+1)$-мерной цепи d множества U, и, значит,

$$c^*(c' - c'') = c^*(\partial d) = (\delta c^*)(d) = 0.$$

Следовательно, существует гомоморфизм $\bar{c}^*$: $\tilde{Z}_{q-1}(V) \to G$, такой, что $\bar{c}^*(c) = c^*(c')$, если $\partial c' = c$. Поскольку $\Delta_{q-1}(V)/\tilde{Z}_{q-1}(V)$ — свободная группа (она изоморфна подгруппе группы $\Delta_{q-2}(V)$ при $q > 1$ и группе $\mathbf{Z}$ при $q = 1$), существует гомоморфизм d^*: $\Delta_{q-1}(V) \to G$, являющийся продолжением гомоморфизма $\bar{c}^*$. Тогда $c^* | \Delta_q(V) = \delta d^*$, что доказывает локальную тривиальность предпучка $\tilde{H}^q(\Delta^*(\cdot\,;G))$. ■

5. Следствие. *Пусть X — паракомпактное хаусдорфово пространство, гомологически локально связное в размерности n. Тогда отображение μ: $\bar{H}^q(X;\ G) \to H^q(X;\ G)$ является изоморфизмом при $q \leqslant n$ и мономорфизмом при $q = n+1$.* ■

6. Следствие. *Пусть A — замкнутое гомологически локально связное в размерности n подмножество хаусдорфова гомологически локально связного в размерности n пространства X. Если X обладает тем свойством, что каждое его открытое подмножество паракомпактно, то отображение μ: $\bar{H}^q_c(X, A;\ G) \to H^q_c(X, A;\ G)$ является изоморфизмом для $q \leqslant n$ и мономорфизмом для $q = n+1$.*

Доказательство. Из определений вытекает коммутативность следующей диаграммы (где U пробегает открытые коограниченные множества пространства X):

$$\begin{array}{ccc}
\varinjlim \{\bar{H}^q(X,\ U;\ G)\} & \xrightarrow{\approx} & \bar{H}^q_c(X;\ G) \\
\downarrow{\scriptstyle\mu} & & \downarrow{\scriptstyle\mu} \\
\varinjlim \{H^q(X,\ U;\ G)\} & \xrightarrow{\approx} & H^q_c(X;\ G)
\end{array}$$

Поскольку открытое подмножество пространства, гомологически локально связного в размерности n, также является гомологически локально связным в размерности n, к пространству X и ко всякому его открытому подмножеству $U \subset X$ применимо следствие 5. По лемме о пяти гомоморфизмах отображение

$$\mu\colon \bar{H}^q(X,\ U;\ G) \to H^q(X,\ U;\ G)$$

является изоморфизмом, если $q \leqslant n$, и мономорфизмом, если $q = n+1$. Переходя к пределу, получаем, что гомоморфизм

μ: $\overline{H}_c^q(X;\ G)\to H_c^q(X;\ G)$ является изоморфизмом, если $q\leqslant n$, и мономорфизмом, если $q=n+1$. Поскольку подпространство A обладает теми же свойствами, что и пространство X, отображение

$$\mu\colon\ \overline{H}_c^q(A;\ G)\to H_c^q(A;\ G)$$

есть изоморфизм, если $q\leqslant n$, и мономорфизм, если $q=n+1$. Искомый результат теперь следует из леммы о пяти гомоморфизмах. ■

Многообразие является гомологически локально связным в размерности n для любого n, а всякое его открытое множество паракомпактно; поэтому имеем

7. Следствие. *Если X — многообразие, то μ: $\overline{H}^*(X;\ G)\to$ $\to H^*(X;\ G)$ есть изоморфизм. Если A — замкнутое гомологически локально связное подмножество многообразия X, то*

$$\mu\colon\ \overline{H}_c^*(X,\ A;\ G)\approx H_c^*(X,\ A;\ G). \ ■$$

8. Следствие. *Пусть X — гомологически локально связное пространство, вложенное в качестве замкнутого подмножества в многообразие Y. Тогда X жестко вложено в Y относительно теории сингулярных когомологий.*

Доказательство. Согласно следствию 5, $\overline{H}^*(X;\ G)\approx$ $\approx H^*(X;\ G)$, а в силу следствия 7 для каждого открытого множества U в Y имеет место изоморфизм $\overline{H}^*(U;\ G)\approx H^*(U;\ G)$. Поскольку X жестко вложено в Y относительно когомологий Александера, эти изоморфизмы как раз и выражают тот факт, что X жестко вложено в Y относительно сингулярных когомологий. ■

9. Следствие. *Пусть A — любое замкнутое подмножество многообразия X, и пусть U пробегает открытые окрестности подмножества A в X; тогда*

$$\varinjlim\{H^*(U;\ G)\}\approx \overline{H}^*(A;\ G),$$

где справа стоят когомологии Александера.

Доказательство. Согласно следствию 7, $\varinjlim\{\overline{H}^*(U;\ G)\}\approx$ $\approx \varinjlim\{H^*(U;\ G)\}$, поэтому наше утверждение следует из жесткости подмножества A относительно теории когомологий Александера. ■

Приведенное рассуждение показывает, что модули $\overline{H}^*(A;\ G)$ и $\overline{H}^*(A,\ B;\ G)$, введенные в § 6.1, совпадают с модулями когомологий Александера, если A (или пара $(A,\ B)$) является замкнутым подмножеством (или замкнутой парой) некоторого многообразия. Следующий результат обобщает теорему двойственности 6.2.17 на произвольные замкнутые пары.

10. Теорема. *Пусть X — ориентируемое над кольцом R n-мерное многообразие. Для всякой замкнутой пары (A, B) в X и всякого R-модуля G имеет место изоморфизм*

$$H_q(X-B,\ X-A;\ G)\approx \bar{H}_c^{n-q}(A,\ B;\ G).$$

Доказательство. Пусть N — некоторая замкнутая коограниченная окрестность множества B в A. Согласно теореме 6.6.5, имеет место изоморфизм

$$\bar{H}^{n-q}(A,\ N;\ G)\approx \bar{H}^{n-q}(\overline{A-N},\ \overline{A-N}\cap N;\ G).$$

Поскольку $(\overline{A-N},\ \overline{A-N}\cap N)$ — компактная пара в X, то по теореме 6.2.17

$$H_q(X-(\overline{A-N}\cap N),\ X-(\overline{A-N});\ G)\approx \bar{H}^{n-q}(\overline{A-N},\ \overline{A-N}\cap N;\ G).$$

Так как множества $X-(\overline{A-N})$ и $X-N$ открыты, имеет место изоморфизм вырезания

$$H_q(X-N,\ X-A;\ G)\approx H_q(X-(\overline{A-N}\cap N),\ X-(\overline{A-N});\ G).$$

Комбинация полученных изоморфизмов дает изоморфизм

$$H_q(X-N,\ X-A;\ G)\approx \bar{H}^{n-q}(A,\ N;\ G).$$

Если N пробегает замкнутые коограниченные окрестности множества B в A, то предел модулей, стоящих в левой части, совпадает с $H_q(X-B,\ X-A;\ G)$, а модулей, стоящих справа, — с $\bar{H}_c^{n-q}(A,\ B;\ G)$, откуда и получается нужное утверждение. ■

11. Теорема. *Пусть X — компактное хаусдорфово пространство, гомологически локально связное в размерности n. Тогда модули $H_q(X)$ конечно порождены при $q\leqslant n$.*

Доказательство. Это вытекает из следствия 5, теоремы 6.8.11 и теоремы 5.5.13. ■

Последний результат позволяет распространить утверждение следствия 6.2.21 на произвольные компактные многообразия (ориентируемые или нет). Начнем теперь подготовку к доказательству теоремы Виеториса — Бегля.

12. Лемма. *Пусть (X, A) — некоторая пара, и пусть Γ — предпучок над X, определяемый равенством $\Gamma(V)=\bar{C}^q(V,\ V\cap A;\ G)$ на открытом множестве $V\subset X$ (число q и модуль G фиксированы). Тогда*

(а) *для всякого открытого покрытия $\mathcal{U}$ пространства X отображение $\Gamma(X)\to\Gamma(\mathcal{U})$, переводящее элемент $\gamma\in\Gamma(X)$ в согласованное $\mathcal{U}$-семейство $\{\gamma|U\}_{U\in\mathcal{U}}$, является мономорфизмом;*

(b) *если* $\mathcal{U}$ — *локально конечное открытое покрытие пространства* X, *а* $\mathcal{V}$ — *усечение покрытия* $\mathcal{U}$, *то образ отображения* $\Gamma(\mathcal{U}) \to \Gamma(\mathcal{V})$ *совпадает с образом композиции*

$$\Gamma(X) \to \Gamma(\mathcal{U}) \to \Gamma(\mathcal{V}).$$

Доказательство. (a). Предположим, что элемент $\gamma \in \in \overline{C}^q(X, A; G)$ принадлежит ядру отображения $\Gamma(X) \to \Gamma(\mathcal{U})$ (т. е. $\gamma | U = 0$ для всех $U \in \mathcal{U}$). Пусть $\varphi \in C^q(X, A; G)$ — представитель элемента γ. Тогда из равенства $\gamma | U = 0$ вытекает, что $\varphi | U$ — локально нулевая функция на U. Поскольку это выполняется для всех множеств $U \in \mathcal{U}$, φ — локально нулевая функция на X и $\gamma = 0$, что доказывает утверждение (a).

(b). Пусть $\{\gamma_U\}_{U \in \mathcal{U}}$ — согласованное $\mathcal{U}$-семейство, и пусть $\varphi_U \in C^q(U, U \cap A; G)$ — представитель элемента γ_U, где $U \in \mathcal{U}$. Тогда если $U, U' \in \mathcal{U}$, то $\varphi_U | U \cap U' - \varphi_{U'} | U \cap U'$ — локально нулевая функция на $U \cap U'$. Пусть $x \in X$. Некоторая окрестность точки x пересекается лишь с конечным числом элементов из $\mathcal{U}$, и, значит, существует меньшая окрестность W_x точки x, такая, что

(i) W_x пересекается с $\overline{V}_U \Leftrightarrow x \in \overline{V}_U$;
(ii) $x \in U \Rightarrow W_x \subset U$;
(iii) $x \in V_U \Rightarrow W_x \subset V_U$;
(iv) $x \in \overline{V}_U \cap \overline{V}_{U'} \Rightarrow \varphi_U | W_x = \varphi_{U'} | W_x$.

Ясно, что первые три условия будут выполнены, если мы возьмем достаточно малую окрестность W_x (поскольку необходимо удовлетворить лишь конечному числу условий). Условию (iv) также можно удовлетворить, потому что если $x \in \overline{V}_U \cap \overline{V}_{U'}$, то $\varphi_U | U \cap U' - \varphi_{U'} | U \cap U'$ — локально нулевая функция.

Пусть $x \in X$. Выберем множество U таким образом, чтобы $x \in \overline{V}_U$, и положим $\varphi_x = \varphi_U | W_x \in C^q(W_x, W_x \cap A; G)$. В силу условия (iv) эта функция не зависит от выбора множества U. Если $x'' \in W_x \cap W_{x'}$, то $x'' \in \overline{V}_U$ для некоторого множества $U \in \mathcal{U}$. Тогда окрестности W_x и $W_{x'}$ пересекают множество $\overline{V}_U$ и, согласно свойству (i), $x, x' \in \overline{V}_U$. Следовательно, $\varphi_x = \varphi_U | W_x$ и $\varphi_{x'} = \varphi_U | W_{x'}$, откуда $\varphi_x | W_x \cap W_{x'} = \varphi_{x'} | W_x \cap W_{x'}$. Значит, совокупность $\{\varphi_x \in \in C^q(W_x, W_x \cap A; G)\}$ является согласованным $\{W_x\}$-семейством (модуля $C^q(\cdot, \cdot \cap A; G)$). Как показано в примере 6.7.8, существует такой элемент $\varphi \in C^q(X, A; G)$, что $\varphi | W_x = \varphi_x$ для всех $x \in X$. Чтобы завершить доказательство свойства (b), достаточно показать, что для каждого множества $U \in \mathcal{U}$ функция $\varphi | V_U - \varphi_U | V_U$ локально нулевая на V_U. Но если $x \in V_U$, то, согласно свойству (iii),

$W_x \subset V_U$ и $\varphi | W_x = \varphi_x = \varphi_U | W_x$. Следовательно, $\{W_x\}_{x \in V_U}$ есть открытое покрытие множества V_U, на котором $\varphi | V_U$ и $\varphi_U | V_U$ совпадают. ■

13. Теорема. *Пусть $f: X' \to X$ — замкнутое непрерывное отображение одного паракомпактного хаусдорфова пространства в другое. Пусть A' — замкнутое подмножество пространства X', и пусть существуют такие целые числа $0 \leqslant m < n$, что $\bar{H}^q(f^{-1}(x), f^{-1}(x) \cap A'; G) = 0$ для всех $x \in X$ и всех $q < m$ или $m < q < n$. Пусть Γ — предпучок над пространством X, определяемый равенством $\Gamma(U) = \bar{H}^m(f^{-1}(U), f^{-1}(U) \cap A'; G)$. Тогда имеют место изоморфизмы*

$$\check{H}^{q-m}(X; \Gamma) \approx \bar{H}^q(X', A'; G), \quad q < n,$$

и мономорфизм

$$\check{H}^{n-m}(X; \Gamma) \to \bar{H}^n(X', A'; G).$$

Доказательство. Пусть Γ^* — неотрицательный коцепной комплекс предпучков над пространством X, определяемый равенством $\Gamma^*(U) = \bar{C}^*(f^{-1}(U), f^{-1}(U) \cap A'; G)$. Предпучок Γ^q является образом при отображении f_* тонкого предпучка над X', сопоставляющего модуль $\bar{C}^q(U', U' \cap A'; G)$ открытому множеству $U' \subset X'$. Согласно теореме 6.8.3с, последний предпучок является тонким над X' (как пополнение тонкого предпучка $C^q(\cdot, \cdot \cap A'; G)$; см. пример 6.8.1), а в силу теоремы 6.8.3b предпучок Γ^q является тонким над X. Когда U пробегает все окрестности точки x в пространстве X, пара $(f^{-1}(U), f^{-1}(U) \cap A')$ пробегает конфинальное семейство окрестностей пары $(f^{-1}(x), f^{-1}(x) \cap A')$ в (X', A') (по причине замкнутости и непрерывности отображения f). Из обычных свойств жесткости и сделанных предположений о модулях $\bar{H}^*(f^{-1}(x), f^{-1}(x) \cap A'; G)$ следует, что $H^q(\Gamma^*)$ — локально нулевые предпучки, если $q < m$ и $m < q < n$. По теореме 6.8.7 имеют место функториальные изоморфизмы

$$\check{H}^{q-m}(X; H^m(\Gamma^*)) \approx H^q(\hat{\Gamma}^*(X)), \quad q < n,$$

и мономорфизм

$$\check{H}^{n-m}(X; H^m(\Gamma^*)) \to H^n(\hat{\Gamma}^*(X)).$$

Поскольку $\Gamma = H^m(\Gamma^*)$, осталось лишь проверить, что

$$H^p(\hat{\Gamma}^*(X)) \approx \bar{H}^p(X', A'; G) \quad \text{для всех } p.$$

Пусть $\mathcal{U}$ пробегает конфинальное семейство локально конечных открытых покрытий пространства X. Из леммы 12 следует, что

$$\hat{\Gamma}^*(X)=\varinjlim\{\Gamma^*(\mathcal{U})\}=\varinjlim\{\bar{C}^*(\cdot\ ,\ \cdot\cap A';\ G)(f^{-1}\mathcal{U})\}\approx\bar{C}^*(X',\ A';\ G),$$

что завершает доказательство. ■

Если ξ — расслоение на m-мерные сферы над паракомпактной хаусдорфовой базой B, то $\bar{H}^q(p_\xi^{-1}(x),\ p_\xi^{-1}(x)\cap\dot{E})=0$ при $q\neq m+1$. Следовательно, предположения теоремы 13 выполняются для всех n. Поскольку предпучок Γ, встречающийся в теореме 13, является тензорным произведением предпучка ориентации расслоения ξ и предпучка G, мы можем распространить теорему Тома об изоморфизме на неориентируемые расслоения на сферы.

14. Теорема. *Пусть ξ — расслоение на m-мерные сферы над паракомпактной хаусдорфовой базой B, и пусть Γ — предпучок ориентации расслоения ξ над кольцом R. Для всех R-модулей G и всех чисел q имеет место изоморфизм*

$$\check{H}^q(B;\ \Gamma\otimes G)\approx\bar{H}^{q+m+1}(E_\xi,\ \dot{E}_\xi;\ G).\ ■$$

Другим интересным следствием теоремы 13 является *теорема Вьеториса — Бегля об отображении.*

15. Теорема. *Пусть $f\colon X'\to X$ — замкнутое непрерывное сюръективное отображение одного паракомпактного хаусдорфова пространства на другое, и пусть существует такое $n\geqslant 0$, что $\tilde{\bar{H}}^q(f^{-1}(x);\ G)=0$ для всех $x\in X$ и всех $q<n$. Тогда гомоморфизм*

$$f^*\colon\ \bar{H}^q(X;\ G)\to\bar{H}^q(X';\ G)$$

является изоморфизмом при $q<n$ и мономорфизмом при $q=n$.

Доказательство. Пусть Z — цилиндр отображения f. Будем считать пространство X' вложенным в Z. Тогда Z — паракомпактное хаусдорфово пространство, X' замкнуто в Z, а ретракция $r\colon Z\to X$ является замкнутым непрерывным отображением. Если $x\in X$, то множество $r^{-1}(x)$ стягиваемо (поскольку оно гомеоморфно соединению точки x и множества $f^{-1}(x)$), и, таким образом, $\tilde{\bar{H}}^*(r^{-1}(x))=0$. Поскольку множество $r^{-1}(x)\cap X'=f^{-1}(x)$ непусто, мы имеем

$$\bar{H}^{q+1}(r^{-1}(x),\ r^{-1}(x)\cap X';\ G)\approx\tilde{\bar{H}}^q(f^{-1}(x);\ G)=0,\qquad q<n.$$

Из теоремы 13 следует, что $\bar{H}^q(Z,\ X';\ G)=0$ при $q\leqslant n$. Из коммутативной диаграммы с точной строкой

$$\begin{array}{ccccccccc}\ldots\to & \bar{H}^q(Z,\ X') & \to & \bar{H}^q(Z) & \to & \bar{H}^q(X') & \to & \bar{H}^{q+1}(Z,\ X') & \to\ldots\\ & & & {\scriptstyle r^*}\uparrow{\scriptstyle\approx} & \nearrow{\scriptstyle f^*} & & & & \\ & & & \bar{H}^q(X) & & & & & \end{array}$$

вытекает нужный нам результат. ■

Имеет место частичное обращение теоремы 15, утверждающее что если $f\colon X' \to X$ — замкнутое непрерывное сюръективное отображение одного паракомпактного хаусдорфова пространства на другое и если существует такое $n \geqslant 0$, что для всякого открытого множества $U \subset X$ гомоморфизм $f^*\colon \bar{H}^q(U;\ G) \to \bar{H}^q(f^{-1}(U);\ G)$ является изоморфизмом при $q < n$, то $\bar{\bar{H}}^q(f^{-1}(x);\ G) = 0$ для всех $x \in X$ и всех $q < n$. Это вытекает из коммутативности следующей диаграммы (где U пробегает все открытые окрестности точки $x \in X$):

$$\begin{array}{ccc}
\varinjlim \{\bar{\bar{H}}^q(U;\ G)\} & \xrightarrow[\approx]{} & \bar{\bar{H}}^q(x;\ G) \\
\downarrow{\scriptstyle f^*} & & \downarrow{\scriptstyle f^*} \\
\varinjlim \{\bar{\bar{H}}^q(f^{-1}(U);\ G)\} & \xrightarrow[\approx]{} & \bar{\bar{H}}^q(f^{-1}(x);\ G)
\end{array}$$

В частности, если пространства X и X' метризуемы (или оба обладают тем свойством, что каждое их открытое подмножество паракомпактно), то при $n \geqslant 0$ гомоморфизм $f^*\colon \bar{H}^q(U;\ G) \to \bar{H}^q(f^{-1}(U);\ G)$ является изоморфизмом для любого открытого $U \subset X$ и любого $q < n$ тогда и только тогда, когда $\bar{\bar{H}}(f^{-1}(x);\ G) = 0$ для всех $x \in X$ и всех $q < n$.

Приведем один пример, показывающий, что условие замкнутости отображения f является в теореме 15 необходимым.

16. Пример. Пусть $X' = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1$ или $x^2 + y^2 < 1,$ $x > 0\}$, и пусть $X = [0, 1]$. Определим отображение $f\colon X' \to X$, полагая

$$f(x, y) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0, \\ x, & x \geqslant 0. \end{cases}$$

Тогда f — непрерывное, но не замкнутое сюръективное отображение. При этом

$$f^{-1}(t) = \begin{cases} \text{замкнутая полуокружность}, & t = 0, \\ \text{замкнутый интервал}, & 0 < t < 1, \\ \text{одна точка}, & t = 1. \end{cases}$$

Поскольку единичная окружность S^1 является сильным деформационным ретрактом пространства X', имеем

$$\bar{H}^1(X';\ G) \approx \bar{H}^1(S^1;\ G) \approx G.$$

Так как $\bar{H}^1(X;\ G) = 0$, то гомоморфизм $f^*\colon \bar{H}^1(X;\ G) \to \bar{H}^1(X';\ G)$ не является изоморфизмом.

17. Пример. Пусть $X \subset \mathbf{R}^2$ — пространство из примера 2.4.8, изображенное на рис. 13.

Существует замкнутое непрерывное сюръективное отображение f пространства X на пространство Y, представляющее собой границу прямоугольника (рис. 14), такое, что

$$f^{-1}(y)=\begin{cases} \text{одна точка}, & y \neq (0,0), \\ \text{замкнутый интервал}, & y=(0,0). \end{cases}$$

Из теоремы 15 следует, что $f^*\colon \bar{H}^*(Y; G) \approx \bar{H}^*(X; G)$ для любого G и, следовательно, отображение f не гомотопно нулю.

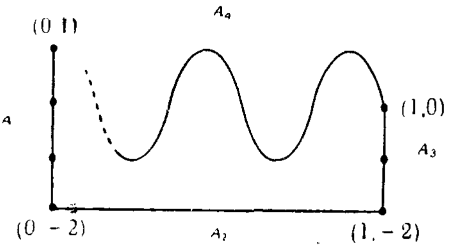


Рис. 13.

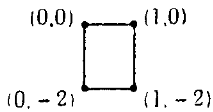


Рис. 14.

18. Теорема. *Пусть $f\colon X' \to X$ — собственное сюръективное отображение одного локально компактного хаусдорфова пространства на другое; предположим, что для некоторого $n>0$ равенства $\bar{\bar{H}}^q(f^{-1}(x); G)=0$ имеют место для всех $x \in X$ и всех $q<n$. Тогда гомоморфизм*

$$f^*\colon \bar{H}^q_c(X; G) \to \bar{H}^q_c(X'; G)$$

является изоморфизмом при $q<n$ и мономорфизмом при $q=n$.

Доказательство. В случае когда одно из пространств X или X' компактно, компактно и другое, и требуемый результат следует из леммы 6.6.9 и теоремы 15. Если ни одно из пространств X и X' не компактно, пусть X^+ и X'^+ — их одноточечные компактификации. Продолжим отображение f до отображения $f^+\colon X'^+ \to X^+$, переводящего бесконечно удаленную точку пространства X'^+ в бесконечно удаленную точку пространства X^+. Тогда f^+ удовлетворяет условиям теоремы 15, и нужный нам результат вытекает из следствия 6.6.12 и теоремы 15. ■

§ 10. Характеристические классы

Этот параграф — кульминационный пункт нашего общего исследования теории гомологий. Здесь мы используем $\smile$-произведение и квадраты Стинрода для определения характеристических классов многообразия и многообразия, вложенного в другое. Эти характеристические классы представляют собой важные инварианты многообразия и имеют интересные приложения к задачам о существовании вложений.

Пусть X — некоторое n-мерное многообразие с краем $\dot{X}$, и пусть $U \in H^n(X \times X, X \times X - \delta(X))$ — класс ориентации (над кольцом R) многообразия X. Пусть $j: X - \dot{X} \subset X$ — вложение. Тогда отображения

$$j \times 1: (X - \dot{X}) \times (X, \dot{X}) \subset X \times (X, \dot{X}),$$
$$1 \times j: (X, \dot{X}) \times (X - \dot{X}) \subset (X, \dot{X}) \times X$$

являются гомотопическими эквивалентностями. Следовательно, существуют элементы

$$U_1 \in H^n(X \times (X, \dot{X})), \quad U_2 \in H^n((X, \dot{X}) \times X),$$

такие, что

$$(j \times 1)^* U_1 = U \mid (X - \dot{X}) \times (X, \dot{X}); \quad (1 \times j)^* U_2 = U \mid (X, \dot{X}) \times (X - \dot{X}).$$

Пусть многообразие X компактно, и пусть $z \in H_n(X, \dot{X})$ — фундаментальный класс многообразия X, соответствующий элементу U (теорема 6.3.9). *Класс Эйлера* компактного ориентированного многообразия X (обозначается $\chi \in H^n(X, \dot{X})$) определяется равенством

$$\chi = (U_1 \cup U_2)/z.$$

Почему он так называется, мы увидим из теоремы 2 ниже.

Предположим, что R — некоторое поле, а X — компактное n-мерное многообразие с краем $\dot{X}$. По теореме 6.9.11 оба модуля $H_*(X)$ и $H_*(X, \dot{X})$ конечно порождены. Пусть $\{u_i\}$ — базис модуля $H^*(X)$, а $\{v_j\}$ — базис модуля $H^*(X, \dot{X})$. Тогда, согласно формуле Кюннета для когомологий, система элементов $\{u_i \times v_j\}$ образует базис модуля $H^*(X \times (X, \dot{X}))$. Следовательно,

$$U_1 = \sum_{i, j} a_{ij} u_i \times v_j,$$

где a_{ij} — некоторые элементы поля коэффициентов. Пусть $b_{jk} = \langle v_j \cup u_k, z \rangle$, где z — фундаментальный класс, соответствующий классу U. Таким образом, мы получили две матрицы $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$. Следующее утверждение описывает связь между этими матрицами:

1. Лемма. *В принятых выше обозначениях имеет место равенство*

$$(AB)_{ik} = (-1)^{n \deg u_k} \delta_{ik}.$$

Доказательство. Доказательство по существу такое же, как доказательство теоремы 6.3.12. Поскольку z — фундаментальный класс, соответствующий ориентации U, справедливо равенство

$$U_1/z = 1 \in H^0(X).$$

Согласно свойству 6.1.4, для любого k имеем

$$u_k = u_k \smile 1 = u_k \smile (U_1/z) = [(u_k \times 1) \smile U_1]/z.$$

Из леммы 6.3.11 непосредственно вытекает, что

$$(u_k \times 1) \smile U_1 = (1 \times u_k) \smile U_1 = (-1)^{n \deg u_k} U_1 \smile (1 \times u_k) =$$
$$= \sum_{i,\, j} (-1)^{n \deg u_k} a_{ij} u_i \times (v_j \smile u_k).$$

Следовательно, в силу свойства 6.1.2

$$u_k = \sum_{i,\, j} (-1)^{n \deg u_k} a_{ij} b_{jk} u_i.$$

Поскольку $\{u_i\}$ — базис, наше утверждение доказано. ■

2. Теорема. *Пусть χ — класс Эйлера компактного n-мерного многообразия X, ориентированного над некоторым полем. Тогда число $\langle \chi, z \rangle$ равно эйлеровой характеристике многообразия X.*

Доказательство. Сначала мы вычислим класс U_2. Пусть отображение $T\colon X \times X \to X \times X$ является перестановкой сомножителей. Имеет место коммутативная диаграмма, в которой все вертикальные отображения индуцированы отображением T, а горизонтальные — вложениями:

$$\begin{tikzcd}
H^n(X\times X,\ X\times X - \delta(X)) \arrow[r] \arrow[d, "T_1^*"'] & H^n((X-\dot X)\times(X,\ \dot X)) \arrow[d, "T_2^*"] & H^n(X\times(X,\ \dot X)) \arrow[l, "(j\times 1)^*"', "\approx"] \arrow[d, "T_3^*"] \\
H^n(X\times X,\ X\times X - \delta(X)) \arrow[r] & H^n((X,\ \dot X)\times(X-\dot X)) & H^n((X,\ \dot X)\times X) \arrow[l, "(1\times j)^*"', "\approx"]
\end{tikzcd}$$

В лемме 6.3.11 было показано, что $T_1^* U = (-1)^n U$. Следовательно, $T_3^* U_1 = (-1)^n U_2$, и, значит,

$$U_2 = (-1)^n T_3^* \Big(\sum_{k,\, l} a_{kl} u_k \times v_l \Big) =$$
$$= (-1)^n \sum_{k,\, l} (-1)^{\deg u_k \deg v_l} a_{kl} v_l \times u_k.$$

Отсюда

$$U_1 \smile U_2 = (-1)^n \sum (-1)^{\deg v_l \deg v_j + \deg u_k \deg v_l} a_{ij} a_{kl} (u_i \smile v_l) \times (v_j \smile u_k) =$$
$$= (-1)^n \sum (-1)^{\deg v_l \deg v_j + \deg u_k \deg v_l + \deg u_i \deg v_l} a_{ij} a_{kl} (v_l \smile u_i) \times (v_j \smile u_k),$$

где сумма распространена на все такие индексы i, j, k и l, для которых

$$\deg u_i + \deg v_j = n = \deg u_k + \deg v_l.$$

Отсюда следует, что

$$U_1 \smile U_2 = \sum (-1)^{\deg u_k} a_{ij} a_{kl} (v_l \smile u_i) \times (v_j \smile u_k).$$

Используя лемму 1 и это равенство, получаем

$$\begin{aligned}\langle \chi, z\rangle &= \langle U_1 \smile U_2, z \times z\rangle = \\ &= \sum_{i,j,k,l} (-1)^{\deg u_k} a_{ij} b_{jk} a_{kl} b_{li} = \\ &= \sum_{i,k} (-1)^{\deg u_k} (AB)_{ik} (AB)_{ki} = \\ &= \sum_k (-1)^{\deg u_k}.\end{aligned}$$

Но последняя сумма есть не что иное, как эйлерова характеристика многообразия X. ■

Классический класс Эйлера — это класс Эйлера (в нашем смысле) над $\mathbf{Z}$. Для любой пары (Y, B) с гомологиями конечного типа из формулы универсальных коэффициентов для когомологий (теорема 5.5.10) следует, что

$$H^q(Y, B; \mathbf{R}) \approx H^q(Y, B; \mathbf{Z}) \otimes \mathbf{R}.$$

Следовательно, мономорфизм $\mathbf{Z} \to \mathbf{R}$ индуцирует мономорфизм

$$H^q(Y, B; \mathbf{Z}) \to H^q(Y, B; \mathbf{R}).$$

В частности, мономорфизм $H^n(X, \dot{X}; \mathbf{Z}) \to H^n(X, \dot{X}; \mathbf{R})$ переводит класс Эйлера в класс Эйлера, и, следовательно, теорема 2 остается справедливой и для целочисленного класса Эйлера многообразия X.

Теперь мы обратимся к полю коэффициентов $\mathbf{Z}_2$. В этом случае классы U, а следовательно, и классы U_1 и (если X компактно) z определяются однозначно. Имеет место изоморфизм Тома

$$\begin{aligned}\Phi^*\colon H^q(X - \dot{X}) &\approx \\ &\approx H^{q+n}((X - \dot{X}) \times (X - \dot{X}),\ (X - \dot{X}) \times (X - \dot{X}) - \delta(X - \dot{X})),\end{aligned}$$

определяемый равенством $\Phi^*(v) = (v \times 1) \smile U'$, где

$$U' = U \mid ((X - \dot{X}) \times (X - \dot{X}), (X - \dot{X}) \times (X - \dot{X}) - \delta(X - \dot{X})).$$

Отображение Φ^* можно продолжить до отображения

$$\Phi^*\colon H^q(X) \to H^{q+n}(X \times X, X \times X - \delta(X)),$$

полагая $\Phi^*(v) = (v \times 1) \smile U$. Имеет место коммутативная диаграмма, в которой вертикальные отображения являются изоморфизмами:

$$\begin{tikzcd} H^q(X) \arrow[r, "\Phi^*"] \arrow[d, "\approx"'] & H^{q+n}(X \times X, X \times X - \delta(X)) \arrow[d, "\approx"] \\ H^q(X - \dot{X}) \arrow[r, "\Phi^*"] & H^{q+n}((X - \dot{X}) \times (X - \dot{X}), (X - \dot{X}) \times (X - \dot{X}) - \delta(X - \dot{X})) \end{tikzcd}$$

Из нее следует, что продолженное отображение Φ^* также является изоморфизмом на $H^q(X)$. При $i \geqslant 0$ *i-м классом Штифеля — Уитни многообразия* X называется класс $w_i \in H^i(X; \mathbf{Z}_2)$, удовлетворяющий равенству

$$\Phi^*(w_i) = Sq^i U$$

(т. е. $Sq^i U = (w_i \times 1) \smile U$). Разберем несколько примеров.

3. В силу условия (а) на стр. 349 имеем $w_0 = 1$.

4. Условие (b) на стр. 349 показывает, что если X — компактное n-мерное многообразие без края, то w_n — класс Эйлера многообразия X над полем $\mathbf{Z}_2$.

5. Условие (с) на стр. 349 показывает, что $w_i = 0$, если $i > \dim X$.

6. Многообразие X тогда и только тогда ориентируемо над $\mathbf{Z}$, когда $w_1 = 0$ (см. упражнение 5.H.3d).

Если многообразие X компактно, а $z \in H_n(X, \dot{X})$ — его фундаментальный класс над полем $\mathbf{Z}_2$, то, согласно свойству 6.1.4,

$$w_i = [(w_i \times 1) \smile U_1]/z = Sq^i U_1/z,$$

где класс $U_1 \in H^n(X \times (X, \dot{X}))$ соответствует ориентации U. Это соотношение мы используем для описания классов Штифеля — Уитни компактного многообразия X в терминах когомологических операций. Пусть $i \geqslant 0$. Гомоморфизм $Sq^i\colon H^{n-i}(X, \dot{X}) \to H^n(X, \dot{X})$ порождает сопряженный гомоморфизм $\overline{Sq^i}\colon H_n(X, \dot{X}) \to H_{n-i}(X, \dot{X})$, определяемый равенством

$$\langle Sq^i u, z\rangle = \langle u, \overline{Sq^i} z\rangle, \quad u \in H^{n-i}(X, \dot{X}),$$

где z — фундаментальный класс многообразия X. Рассмотрим изоморфизм, описываемый теоремой 6.3.12:

$$\varkappa_z\colon H^i(X) \approx H_{n-i}(X, \dot{X}).$$

Существует единственный элемент $V_i \in H^i(X)$, такой, что $\varkappa_z(V_i) = \overline{Sq^i} z$. Поэтому если $u \in H^{n-i}(X, \dot{X}; \mathbf{Z}_2)$, то

$$\langle Sq^i u, z\rangle = \langle u, \overline{Sq^i} z\rangle = \langle u, \varkappa_z(V_i)\rangle =$$
$$= \langle u, V_i \frown z\rangle = \langle u \smile V_i, z\rangle.$$

Это соотношение выполняется тривиальным образом, если $\deg u \neq n - i$. Следующая *формула Ву* показывает, что классы V_i и классы Штифеля — Уитни w_i взаимно определяют один другой.

7. Теорема. *Для всякого компактного n-мерного многообразия и всякого целого $q \geqslant 0$ имеет место равенство*

$$w_q = \sum_{0 \leqslant i \leqslant q} Sq^{q-i} V_i.$$

Доказательство. Пусть $U_1 = \sum a_{ij} u_i \times v_j$, где $\{u_i\}$ — базис модуля $H^*(X; \mathbf{Z}_2)$, а $\{v_j\}$ — базис модуля $H^*(X, \dot{X}; \mathbf{Z}_2)$. Согласно формуле Картана из условия (d) на стр. 349, имеем

$$Sq^q U_1 = \sum_{k+l=q} a_{ij} Sq^k u_i \times Sq^l v_j.$$

Пусть $V_l = \sum c_{lm} u_m$. Тогда

$$\begin{aligned} w_q &= (Sq^q U_1)/z = \sum_{k+l=q} a_{ij} \langle Sq^l v_j, z \rangle Sq^k u_i = \\ &= \sum_{k+l=q} a_{ij} \langle v_j \smile V_l, z \rangle Sq^k u_i = \\ &= \sum_{k+l=q} a_{ij} c_{lm} \langle v_j \smile u_m, z \rangle Sq^k u_i = \\ &= \sum_{k+l=q} a_{ij} b_{jm} c_{lm} Sq^k u_i. \end{aligned}$$

Используя лемму 1, находим, что

$$w_q = \sum_{k+l=q} c_{li} Sq^k u_i = \sum_{k+l=q} Sq^k V_l. \blacksquare$$

Пусть $\mathbf{R}P^n$ — действительное n-мерное проективное пространство, и пусть w — образующая группы $H^1(\mathbf{R}P^n)$, $n \geqslant 1$. Используем лемму 5.9.4 для вычисления элементов $Sq^i(w^j)$ в следующих ниже примерах.

8. Для действительной проективной плоскости $\mathbf{R}P^2$ имеем $Sq^1 w = w^2$; следовательно, $V_1(\mathbf{R}P^2) = w$, $w_1(\mathbf{R}P^2) = w$ и $w_2(\mathbf{R}P^2) = w^2$.

9. В пространстве $\mathbf{R}P^3$ справедливы равенства $Sq^2 w = 0$ и $Sq^1 w^2 = 0$, так что $V_i(\mathbf{R}P^3) = 0$, если $i > 0$, и $w_i(\mathbf{R}P^3) = 0$, если $i > 0$.

10. В $\mathbf{R}P^4$ имеем $Sq^2 w^2 = w^4$ и $Sq^1 w^3 = w^4$, значит, $V_1(\mathbf{R}P^4) = w$, $V_2(\mathbf{R}P^4) = w^2$, $w_1(\mathbf{R}P^4) = w$, $w_2(\mathbf{R}P^4) = 0$, $w_3(\mathbf{R}P^4) = 0$ и $w_4(\mathbf{R}P^4) = w^4$.

11. Для $\mathbf{R}P^5$ имеем $Sq^2 w^3 = w^5$ и $Sq^1 w^4 = 0$, так что класс $V_2(\mathbf{R}P^5) = w^2$ является единственным нетривиальным классом среди $V_i(\mathbf{R}P^5)$, $i > 0$. Следовательно, $w_1(\mathbf{R}P^5) = 0$, $w_2(\mathbf{R}P^5) = w^2$, $w_3(\mathbf{R}P^5) = 0$, $w_4(\mathbf{R}P^5) = w^4$ и $w_5(\mathbf{R}P^5) = 0$.

Класс Эйлера и классы Штифеля — Уитни являются топологическими инвариантами[1]) многообразия X. Теперь мы определим

---

[1]) То есть $f^* w_i(X') = w_i(X)$, $f^* \chi(X') = \chi(X)$, если $f: X \to X'$ — гомеоморфизм. На самом деле эти равенства имеют место и тогда, когда f — гомотопическая эквивалентность, что нетрудно вывести из теоремы 7. — *Прим. ред.*

характеристические классы многообразия X, вложенного в многообразие Y. Эти классы являются топологическими инвариантами вложения. Однако предварительно необходимо сделать одно алгебраическое отступление.

Существует два вида /-произведения. В наших предыдущих рассмотрениях мы ограничились одним из них, но сейчас введем другой. Пусть заданы цепные комплексы C и C', коцепь $c^* \in \operatorname{Hom}((C \otimes C')_n, G)$ и цепь $c \in C_q \otimes G'$. Их \-произведением $c \backslash c^* \in \operatorname{Hom}(C'_{n-q}, G \otimes G')$ назовем такую коцепь, что если $c = \sum c_i \otimes g'_i$, где $c_i \in C_q$ и $g'_i \in G'$, то

$$\langle c \backslash c^*, c' \rangle = \sum \langle c^*, c_i \otimes c' \rangle \otimes g'_i; \quad c' \in C'_{n-q}.$$

Тогда

$$\delta(c \backslash c^*) = (-1)^q (c \backslash \delta c^* - \partial c \backslash c^*),$$

откуда следует, что существует индуцированное \-произведение элементов модулей $H^n(C \otimes C'; G)$ и $H_q(C; G')$ со значениями в модуле $H^{n-q}(C'; G \otimes G')$. Это в свою очередь приводит к топологическому \-произведению элементов модулей $H^n((X, A) \times (Y, B); G)$ и $H_q(X, A; G')$ со значениями в модуле $H^{n-q}(Y, B; G \otimes G')$, обладающему свойствами, аналогичными свойствам 6.1.1—6.1.6. Сформулируем без доказательства два из них, на которые мы будем в дальнейшем ссылаться.

12. *Пусть заданы элементы* $u \in H^n((X, A) \times (Y, B); G)$, $z \in H_q(X, A; G'')$ *и* $v \in H^p(Y, B; G')$, *и пусть отображение* $T\colon G \otimes G'' \otimes G' \to G \otimes G' \otimes G''$ *есть перестановка двух последних сомножителей. Тогда в модуле* $H^{n-q+p}(Y, B; G \otimes G' \otimes G'')$ *имеет место равенство*

$$T_*((z \backslash u) \smile v) = z \backslash [u \smile (1 \times v)]. \ \blacksquare$$

13. *Для произвольных элементов* $u \in H^n((X, A) \times (Y, B); G)$, $v \in H^p(X, A; G')$ *и* $z \in H_q(X, A; G'')$ *в* $H^{n-q+p}(Y, B; G \otimes G' \otimes G'')$ *имеет место равенство*

$$(v \frown z) \backslash u = z \backslash [u \smile (v \times 1)]. \ \blacksquare$$

Пусть Y — некоторое m-мерное многообразие без края, а

$$U \in H^m(Y \times Y, Y \times Y - \delta(Y); R)$$

— его класс ориентации над кольцом R. Для всякой пары (A, B) в Y определим гомоморфизм

$$\gamma'_U\colon H_q(A, B; G) \to H^{m-q}(Y - B, Y - A; G),$$

полагая

$$\gamma'_U(z) = z\backslash[U \mid (A, B) \times (Y - B, Y - A)], \quad z \in H_q(A, B; G).$$

Тогда мы имеем следующее дополнение к теореме двойственности:

14. Лемма. *Пусть X — компактное гомологически локально связное пространство, вложенное в m-мерное многообразие Y, имеющее класс ориентации U. Тогда для всех целых q и всех R-модулей G имеет место изоморфизм*

$$\gamma'_U\colon H_q(X; G) \approx H^{m-q}(Y, Y - X; G).$$

Доказательство. Поскольку пространство X компактно и гомологически локально связно, из теоремы 6.9.11 следует, что $H(\Delta(X))$ — модуль конечного типа. Согласно лемме 5.5.9, существует свободный цепной комплекс C конечного типа, цепно эквивалентный комплексу $\Delta(X)$. Пусть $\lambda\colon C \to \Delta(X)$ — некоторая цепная эквивалентность, и пусть Δ' и C' — цепные комплексы, полученные изменением индексов коцепных комплексов $\mathrm{Hom}(\Delta(X), R)$ и $\mathrm{Hom}(C, R)$ таким образом, что $\Delta'_q = \mathrm{Hom}(\Delta_{m-q}(X), R)$ и $C'_q = \mathrm{Hom}(C_{m-q}, R)$. Цепная эквивалентность λ определяет цепную эквивалентность $\lambda'\colon \Delta' \to C'$. Поскольку C — свободный комплекс конечного типа, таков же и комплекс C' (комплекс Δ', вообще говоря, не будет свободным, так как комплекс $\Delta(X)$ не обязательно конечного типа).

Пусть $c^* \in \mathrm{Hom}([\Delta(X) \otimes (\Delta(Y)/\Delta(Y - X))]_m, R)$ — некоторый m-мерный коцикл, соответствующий классу $U \mid X \times (Y, Y - X)$ при изоморфизме Эйленберга — Зильбера. Определим отображение

$$\tau\colon \Delta(Y)/\Delta(Y - X) \to \Delta',$$

полагая $\tau(c) = c^*/c$, $c \in \Delta(X)$. Если $\deg c = q$, то

$$\partial(\tau(c)) = \delta(c^*/c) = (-1)^{m-q+1} c^*/\partial c = (-1)^{m-q+1} \tau(\partial c),$$

и, значит, в зависимости от степени отображение τ либо коммутирует, либо антикоммутирует с дифференциалом ∂. Следовательно, отображение τ индуцирует гомоморфизм τ_* для гомологий и гомоморфизм τ^* для когомологий при любом модуле коэффициентов. Ясно, что

$$\tau_* = \gamma_U\colon H_q(Y, Y - X; R) \to H^{m-q}(X; R).$$

Так как пространство X гомологически локально связно, то, согласно следствию 6.9.8, оно жестко вложено в пространство Y, и в силу теоремы двойственности гомоморфизм γ_U, а следовательно, и τ_* являются изоморфизмами. Значит, композиция $\lambda' \circ \tau$ индуцирует изоморфизм $\lambda'_* \circ \tau_*$ модулей $H_q(Y, Y - X; R)$ и $H_q(C') = H^{m-q}(C; R)$. Поскольку оба комплекса $\Delta(Y)/\Delta(Y - X)$ и C' свободны, из формулы универсальных коэффициентов для когомологий (теорема 5.5.3) вытекает, что для любого модуля G

$$(\lambda' \circ \tau)^* = \tau^* \circ \lambda'^*\colon\ H^*(\mathrm{Hom}(C', G)) \approx H^*(\mathrm{Hom}(\Delta(Y)/\Delta(Y-X), G)).$$

Следовательно, имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd}
H_q(\Delta(X) \otimes G) \arrow[r, "(\lambda \otimes 1)_*", "\approx"'] \arrow[d] & H_q(C \otimes G) \arrow[d, "\approx"] \\
H^{m-q}(\mathrm{Hom}(\Delta', G)) \arrow[r, "\lambda'^*", "\approx"'] & H^{m-q}(\mathrm{Hom}(C', G))
\end{tikzcd}$$

где вертикальные отображения индуцированы каноническим отображением

$$A \otimes G \to \mathrm{Hom}(\mathrm{Hom}(A; R), G)$$

(правое вертикальное отображение является изоморфизмом, так как C — комплекс конечного типа). Итак, имеют место изоморфизмы

$$H_q(X; G) \xrightarrow[\approx]{} H^{m-q}(\mathrm{Hom}(\Delta', G)) \xrightarrow[\approx]{\tau^*} H^{m-q}(Y, Y-X; G).$$

Осталось лишь проверить, что их композиция совпадает с гомоморфизмом γ'_U. Пусть $\sigma \in \Delta_q(X)$ и $g \in G$. Композиция

$$\Delta_q(X) \otimes G \to \mathrm{Hom}(\Delta'_{m-q}, G) \xrightarrow{\mathrm{Hom}(\tau, 1)} \mathrm{Hom}(\Delta_{m-q}(Y)/\Delta_{m-q}(Y-X), G)$$

переводит элемент $\sigma \otimes g$ в такой гомоморфизм h, что если $\sigma' \in \Delta_{m-q}(Y)$, то

$$\begin{aligned} h(\sigma') &= \tau(\sigma')(\sigma \otimes g) = (c^*/\sigma')(\sigma \otimes g) = \\ &= \langle c^*, \sigma \otimes \sigma' \rangle g = [(\sigma \otimes g)\backslash c^*](\sigma'). \end{aligned}$$

Следовательно, $h = (\sigma \otimes g)\backslash c^*$, и, переходя к когомологиям, мы получаем нужный результат. ■

Пусть X — замкнутое подпространство пространства Y, жестко вложенное относительно сингулярных когомологий, и пусть $A \subset X$. Считая подпространство $X - A$ жестко вложенным в $Y - A$, определим гомоморфизм

$$H^p(Y, Y-X; G) \smile H^q(X, X-A; G') \to H^{p+q}(Y, Y-A; G'')$$

(модули G и G' спарены в модуль G''). Пусть V — произвольная окрестность подпространства X в пространстве Y, а V' — некоторая окрестность множества $X - A$ в $V - A$. Тогда определено $\smile$-произведение

$$H^p(V, V-X; G) \smile H^q(V, V'; G') \to H^{p+q}(V, (V-X) \cup V'; G'').$$

Для любых модулей коэффициентов имеют место изоморфизмы вырезания

$$H^p(Y,\ Y-X)\approx H^p(V,\ V-X),$$

$$H^{p+q}(Y,\ Y-A)\approx H^{p+q}(V,\ V-A).$$

Поскольку $V-A=(V-X)\cup V'$, определено $\smile$-произведение

$$H^p(Y,\ Y-X;\ G)\smile H^q(V,\ V';\ G')\to H^{p+q}(Y,\ Y-A;\ G'').$$

Пусть V пробегает всевозможные окрестности подпространства X в пространстве Y, а V' — всевозможные окрестности множества $X-A$ в подпространстве $V-A$. Из наших предположений о жесткости и из леммы о пяти гомоморфизмах следует, что $\varinjlim\{H^*(V,\ A;\ G')\}\approx H^*(X,\ A;\ G')$. Нужное нам $\smile$-произведение получается из построенного выше $\smile$-произведения переходом к пределу прямого спектра.

Пусть компактное n-мерное многообразие X вложено в m-мерное многообразие Y без края. Предположим, что U и U' — классы ориентации многообразий X и Y соответственно над кольцом R. В этих предположениях имеет место изоморфизм (для любог R-модуля G)

$$\theta:\ H^q(X;\ G)\approx H^{m-n+q}(Y,\ Y-X;\ G),$$

определенный так, что коммутативна следующая диаграмма (заметим, что пространство X гомологически локально связно и, значит, лемма 14 применима к вложению $X\subset Y$):

$$\begin{tikzcd} & H_{n-q}(X;\ G) \arrow[dl, "\gamma_U"'] \arrow[dr, "\gamma'_{U'}"] & \\ H^q(X;\ G) \arrow[rr, "\theta"] & & H^{m-n+q}(Y,\ Y-X;\ G) \end{tikzcd}$$

Отображение θ аналогично изоморфизму Тома и обладает следующим свойством мультипликативности:

15. Лемма. *Изоморфизм* $\theta:\ H^q(X;\ G)\approx H^{m-n+q}(Y,\ Y-X;\ G)$ *обладает тем свойством, что для любого элемента* $v\in H^q(X;\ G)$ *имеет место равенство*

$$\theta(v)=\pm\,\theta(1)\smile v,$$

где $\theta(1)\in H^{m-n}(Y,\ Y-X;\ R)$.

Доказательство. Пусть $z\in H_n(X;\ R)$ — фундаментальный класс, соответствующий классу U, многообразия X. Предположим, что $v=i^*v'$, где $v'\in H^q(V;\ G)$, $i:\ X\subset V$ — вложение, а V — некоторая окрестность многообразия X в многообразии Y. Согласно теореме 6.3.12, $\gamma_U^{-1}(v) = \pm v \frown z = \pm i^* v' \frown z$. Далее, используя свойства 12 и 13, получаем (все равенства выполняются с точностью до знака)

$$\begin{aligned}\theta(v)|(V,\ V-X) &= \pm(i^*v' \frown z)\backslash[U'|X \times (V,\ V-X)] = \\ &= \pm i_*(i^*v' \frown z)\backslash[U'|V \times (V,\ V-X)] = \\ &= \pm(v' \frown i_*z)\backslash[U'|V \times (V,\ V-X)] = \\ &= \pm i_*z\backslash\{[U'|V \times (V,\ V-X)] \smile (v' \times 1_V)\} = \\ &= \pm i_*z\backslash\{[U'|V \times (V,\ V-X)] \smile (1_V \times v')\} = \\ &= \pm z\backslash\{[U'|X \times (V,\ V-X)] \smile (1_X \times v')\} = \\ &= \pm[\theta(1)|(V,\ V-X)] \smile v' = \\ &= \pm[\theta(1) \smile v]|(V,\ V-X).\end{aligned}$$

Так как $H^*(Y,\ Y-X) \approx H^*(V,\ V-X)$, утверждение доказано. ■

Наш следующий результат, следствие леммы 15, вытекает непосредственно из определения $\smile$-произведения

$$H^p(Y,\ Y-X) \smile H^q(X) \to H^{p+q}(Y,\ Y-X).$$

16. Следствие. *Пусть компактное ориентированное n-мерное многообразие X без края вложено в ориентированное m-мерное многообразие Y без края. Тогда для любого элемента $v \in H^q(Y;\ G)$*

$$\theta(v|X) = \pm\,\theta(1) \smile v. \ ■$$

Нормальным классом Эйлера многообразия X, вложенного в многообразие Y (обозначается $\chi_{X,Y} \in H^{m-n}(X;\ R)$), называется класс, определенный соотношением

$$\theta(\chi_{X,Y}) = \theta(1) \smile \theta(1) \in H^{2(m-n)}(Y,\ Y-X;\ R).$$

Поскольку $\theta(1) \smile \theta(1) = \theta(1) \smile [\theta(1)|X]$, следствие 16 позволяет получить следующую характеризацию нормального класса Эйлера:

17. Теорема. *Если компактное n-мерное многообразие X вложено в m-мерное многообразие Y (оба многообразия не имеют края и ориентированы над кольцом R), то*

$$\chi_{X,Y} = \theta(1)|X. \ ■$$

В частности, если гомоморфизм $H^{m-n}(Y;\ R) \to H^{m-n}(X;\ R)$ тривиален, то нормальный класс Эйлера равен нулю. Таким образом, если Y — евклидово пространство, то нормальный класс любого компактного многообразия X, вложенного в Y, равен нулю.

Для $i \geqslant 0$ *i-й нормальный класс Штифеля—Уитни многообразия X, вложенного в многообразие Y* (обозначается $\bar{w}_i \in H^i(X;\ \mathbf{Z}_2)$), определяется соотношением

$$\theta(\bar{w}_i) = Sq^i\theta(1),$$

Приведем несколько примеров:

18. Согласно условию (а) на стр. 349, $\bar{w}_0 = 1$.

19. Пусть X — компактное n-мерное многообразие. Согласно условию (b) на стр. 349, $\bar{w}_{m-n}$ есть нормальный класс Эйлера над полем $\mathbf{Z}_2$ многообразия X, вложенного в Y ($m = \dim Y$).

20. Согласно условию (с) на стр. 349, $\bar{w}_i = 0$, если $i > \dim Y - \dim X$.

Существует важное соотношение между классами Штифеля — Уитни многообразий X и Y и нормальными классами многообразия X, вложенного в Y, установлением которого мы сейчас и займемся.

21. Лемма. *Пусть X — компактное n-мерное многообразие без края, вложенное в m-мерное многообразие Y без края. Пусть U и U' — классы ориентации над полем $\mathbf{Z}_2$ многообразий X и Y соответственно, и пусть $\theta(1) \in H^{m-n}(Y, Y - X; \mathbf{Z}_2)$. Тогда*

$$U' | (X \times Y, X \times Y - \delta(X)) = [1 \times \theta(1)] \smile U.$$

Доказательство. Достаточно доказать, что

$$U' | (X' \times Y, X' \times Y - \delta(X')) = ([1 \times \theta(1)] \smile U) | (X' \times Y, X' \times Y - \delta(X')$$

для всякой компоненты связности X' многообразия X. Значит, можно считать, что X связно. В этом случае $(X \times Y, X \times Y - \delta(X))$ есть пара расслоенных пространств над базой X с парой слоев $(Y, Y - x_0)$, $x_0 \in X$. Поскольку $U' | (X \times Y, X \times Y - \delta(X))$ — ориентация этой пары над полем $\mathbf{Z}_2$, а ориентация над полем $\mathbf{Z}_2$ единственна, то достаточно показать, что элемент $[1 \times \theta(1)] \smile U$ также является ориентацией над $\mathbf{Z}_2$ этой пары.

Другими словами, необходимо лишь показать, что для каждой точки $x \in X$ элемент $([1 \times \theta(1)] \smile U) | x \times (Y, Y - x)$ не обращается в нуль. Это будет так, если образ этого элемента в подпространстве $x \times (Y, Y - X)$, т. е. элемент $([1 \times \theta(1)] \smile U) | x \times (Y, Y - X)$, не равен нулю. Так как $U \in H^n(X \times X, X \times X - \delta(X))$ — класс ориентации, то $U | x \times (X, X - x) = 1_x \times u$, где элемент $u \in H^n(X, X - x)$ не равен нулю. Поскольку отображение $H^n(X, X - x) \to H^n(X)$ есть мономорфизм (оно двойственно мономорфизму $H_0(x) \to H_0(X)$), элемент $u | X$ не равен нулю. Итак,

$$([1 \times \theta(1)] \smile U) | x \times (Y, Y - X) = [1_x \times \theta(1)] \smile (1_x \times u | X) =$$
$$= 1_x \times [\theta(1) \smile u | X] = 1_x \times \theta(u | X).$$

Поскольку θ — изоморфизм, элемент $([1 \times \theta(1)] \smile U) | x \times (Y, Y - X)$ не равен нулю. ■

Из доказанного вытекает следующая *теорема двойственности Уитни:*

22. Теорема. *Пусть X — компактное n-мерное многообразие* *без края, вложенное в m-мерное многообразие Y без края. Тогда для всех $k \geqslant 0$ имеем*

$$w_k(Y)|X = \sum_{i+j=k} \bar{w}_i \smile w_j(X),$$

где $w_k(Y)$, $w_j(X)$ и $\bar{w}_i$ — соответствующие классы Штифеля — Уитни.

Доказательство. Утверждение теоремы является непосредственным следствием леммы 21 и формулы Картана (или, скорее, эквивалентной ей формулы из леммы 5.9.4):

$$\begin{aligned}
&([w_k(Y)|X] \times 1_Y) \smile U'|(X \times Y,\ X \times Y - \delta(X)) = \\
&= ([w_k(Y) \times 1_Y] \smile U')|(X \times Y,\ X \times Y - \delta(X)) = \\
&= Sq^k U'|(X \times Y,\ X \times Y - \delta(X)) = Sq^k (U'|(X \times Y, X \times Y - \delta(X))) = \\
&= Sq^k ([1_X \times \theta(1)] \smile U) = \sum_{i+j=k} [1_X \times Sq^i \theta(1)] \smile Sq^j U = \\
&= \sum_{i+j=k} (1_X \times [\theta(1) \smile \bar{w}_i]) \smile [w_j(X) \times 1_X] \smile U = \\
&= \sum_{i+j=k} (\bar{w}_i \times 1_X) \smile [w_j(X) \times 1_X] \smile [1_X \times \theta(1)] \smile U = \\
&= (([\sum_{i+j=k} \bar{w}_i \smile w_j(X)] \times 1_Y) \smile U')|(X \times Y,\ X \times Y - \delta(X)).
\end{aligned}$$

Нужное нам утверждение получается отсюда с помощью теоремы об изоморфизме Тома. ■

Если Y — евклидово пространство, то $w_k(Y) = 0$ при $k > 0$. Теорема 22 показывает, что классы $\bar{w}_i$ и $w_j(X)$ определяют друг друга с помощью рекуррентных соотношений. В частности, классы $\bar{w}_i$ не зависят от вложения многообразия X в евклидово пространство. Пусть X — компактное n-мерное многообразие, вложенное в евклидово пространство $\mathbf{R}^{n+d}$. Примеры 19 и 20 и тот факт, что класс Эйлера многообразия X, вложенного в $\mathbf{R}^{n+d}$, равен нулю, показывают, что $\bar{w}_i = 0$ при $i \geqslant d$. Это приводит к следующему необходимому условию вложимости многообразия X в $\mathbf{R}^{n+d}$:

23. Следствие. *Пусть X — компактное n-мерное многообразие, вложенное в $\mathbf{R}^{n+d}$, и пусть элементы $\bar{w}_i \in H^i(X;\ \mathbf{Z}_2)$ определены так, что*

$$\sum_{i+j=k} \bar{w}_i \smile w_j(X) = \begin{cases} 1, & k = 0, \\ 0, & k > 0. \end{cases}$$

Тогда $\bar{w}_i = 0$ при $i \geqslant d$. ■

Приведем несколько примеров:

24. Для проективной плоскости $\mathbf{R}P^2$ имеем $\bar{w}_1(\mathbf{R}P^2) = w$ и $\bar{w}_2(\mathbf{R}P^2) = 0$. Значит, $\mathbf{R}P^2$ нельзя вложить в $\mathbf{R}^3$.

25. $\bar{w}_i(\mathbf{R}P^3)=0$ при $i>0$.

26. Для многообразия $\mathbf{R}P^4$ имеем $\bar{w}_1(\mathbf{R}P^4)=w$, $\bar{w}_2(\mathbf{R}P^4)=w^2$, $\bar{w}_3(\mathbf{R}P^4)=w^3$ и $\bar{w}_4(\mathbf{R}P^4)=0$. Следовательно, $\mathbf{R}P^4$ нельзя вложить в $\mathbf{R}^7$.

27. Для многообразия $\mathbf{R}P^5$ имеем $\bar{w}_1(\mathbf{R}P^5)=0$, $\bar{w}_2(\mathbf{R}P^5)=w^2$, $\bar{w}_3(\mathbf{R}P^5)=0$, $\bar{w}_4(\mathbf{R}P^5)=0$ и $\bar{w}_5(\mathbf{R}P^5)=0$. Следовательно, $\mathbf{R}P^5$ нельзя вложить в $\mathbf{R}^7$ (что является также следствием примера 26).

Последние примеры свидетельствуют о важности вычисления классов $w_i(\mathbf{R}P^n)$, чем мы сейчас и займемся.

28. Теорема. *Пусть* $\binom{n}{i}_2$ — *биномиальный коэффициент* $\binom{n}{i}=n!/i!(n-i)!$, *приведенный по модулю* 2. *Тогда*

$$w_i(\mathbf{R}P^n)=\binom{n+1}{i}_2 w^i.$$

Доказательство. Поскольку $\binom{n+1}{n}_2\equiv n+1=\chi(\mathbf{R}P^n)$, это утверждение верно при $i=n$. Если $i<n$, где $n>1$, то можно считать многообразие $\mathbf{R}P^{n-1}$ линейно вложенным в $\mathbf{R}P^n$. Тогда $\mathbf{R}P^n-\mathbf{R}P^{n-1}$ — аффинное пространство; следовательно,

$$\tilde{H}^*(\mathbf{R}P^n-\mathbf{R}P^{n-1})=0 \quad \text{и} \quad H^q(\mathbf{R}P^n,\ \mathbf{R}P^n-\mathbf{R}P^{n-1})\approx H^q(\mathbf{R}P^n).$$

Нормальный класс Тома $\theta(1)\in H^1(\mathbf{R}P^n,\ \mathbf{R}P^n-\mathbf{R}P^{n-1})$ переходит в элемент $w\in H^1(\mathbf{R}P^n)$ при этом изоморфизме, значит, $w_1=w$. Согласно теореме 22, $w_i(\mathbf{R}P^n)\,|\,\mathbf{R}P^{n-1}=w_i(\mathbf{R}P^{n-1})+w\smile w_{i-1}(\mathbf{R}P^{n-1})$. Так как $H^q(\mathbf{R}P^n)\approx H^q(\mathbf{R}P^{n-1})$ при $q<n$, то, применяя индукцию по n, получаем

$$w_i(\mathbf{R}P^n)=\left[\binom{n}{i-1}_2+\binom{n}{i}_2\right]w^i=\binom{n+1}{i}_2 w^i. \ \blacksquare$$

УПРАЖНЕНИЯ

A. Многообразия

1. Докажите, что если X есть n-мерное многообразие с краем $\dot{X}$, то X — гомологическое n-мерное многообразие, край которого, как край гомологического многообразия, совпадает с $\dot{X}$.

В остальных упражнениях этой группы мы будем предполагать, что X является n-мерным многообразием без края, а R — фиксированная область главных идеалов.

2. Пусть Γ — локальная система R-модулей над X. Покажите, что для любого подмножества $A\subset X$ имеет место равенство

$$H_q(A\times X,\ A\times X-\delta(X);\ R\otimes\Gamma)=0,\qquad q<n.$$

(*Указание.* Докажите это утверждение сначала в том случае, когда замыкание $\bar{A}$ содержится в некоторой координатной окрестности многообразия X. Затем, используя технику последовательностей Майера — Виеториса, докажите это для произвольных компактных множеств $\bar{A}$. Доказательство для любых множеств A получите переходом к пределу прямого спектра по семейству компактных подмножеств множества A.)

3. Докажите, что существует локальная система Γ_X R-модулей над X, такая, что $\Gamma_X(x) = H^n(X, X-x; R)$, $x \in X$.

Пусть $z_x \in H_n(X, X-x; \Gamma_X)$ — образующая, соответствующая при изоморфизме

$$H_n(X, X-x; \Gamma_X) \approx \mathrm{Hom}(H^n(X, X-x; R), H^n(X, X-x; R))$$

тождественному автоморфизму модуля $H^n(X, X-x; R)$. *Классом Тома* многообразия X называется такой элемент

$$U \in H^n(X \times X, X \times X - \delta(X); R \times \mathrm{Hom}(\Gamma_X, R)),$$

что $(U \mid [x \times (X, X-x)])/z_x = 1 \in H^0(x; R)$ для всех $x \in X$.

4. Докажите, что если V — некоторое открытое подмножество многообразия X, а U — его класс Тома, то $U \mid (V \times V, V \times V - \delta(V))$ — класс Тома многообразия V.

5. Докажите, что евклидово пространство $\mathbf{R}^n$ обладает единственным классом Тома.

6. Докажите, что любое многообразие X обладает единственным классом Тома. (*Указание.* Используя упражнение 2, покажите, что

$$H^n(X \times X, X \times X - \delta(X); R \otimes \mathrm{Hom}(\Gamma_X, R)) \approx$$
$$\approx \varprojlim \{H^n(V \times X, V \times X - \delta(V); R \otimes \mathrm{Hom}(\Gamma_X, R))\},$$

где V пробегает объединения конечного числа координатных окрестностей. Окончательный результат выведите из упражнений 4 и 5, применяя технику последовательностей Майера — Виеториса.)

Пусть (A, B) — пара в X, а G — некоторый R-модуль. Определим гомоморфизм

$$\gamma\colon H_q(X-B, X-A; \Gamma_X \otimes G) \to H^{n-q}(A, B; G),$$

полагая $\gamma(z) = [U \mid (A, B) \times (X-B, X-A)]/z$, где U — класс Тома многообразия X. Если пара (V, W) пробегает всевозможные окрестности замкнутой пары (A, B) в X, то

$$\varinjlim \{H_q(X-W, X-V; \Gamma_X \otimes G)\} \approx H_q(X-B, X-A; \Gamma_X \otimes G),$$
$$\varinjlim \{H^{n-q}(V, W; G)\} \approx \bar{H}^{n-q}(A, B; G).$$

Определим гомоморфизм

$$\bar{\gamma}\colon H_q(X-B, X-A; \Gamma_X \otimes G) \to \bar{H}^{n-q}(A, B; G)$$

переходом к пределу с помощью гомоморфизма γ.

7. *Теорема двойственности.* Докажите, что для компактной пары (A, B) в X отображение $\bar{\gamma}$ является изоморфизмом.

В. Индекс многообразия

1. Пусть X — ориентированное над полем R компактное n-мерное многообразие с краем $\dot{X}$, и пусть $[X] \in H_n(X, \dot{X}; R)$ — соответствующий фундаментальный класс. Докажите, что если $u \in H^q(X, \dot{X}; R)$ и $v \in H^{n-q}(X; R)$, то билинейная форма $\varphi_X(u, v) = \langle u \smile v, [X] \rangle \in R$ невырожденна на $H^q(X, \dot{X}) \times H^{n-q}(X)$ (т. е. $u = 0$ тогда и только тогда, когда $\varphi_X(u, v) = 0$ для всех v).

2. При тех же предположениях пусть $[\dot{X}] = \partial [X] \in H_{n-1}(\dot{X}; R)$, и пусть $\varphi_{\dot{X}}$ — соответствующая билинейная форма, определенная на $H^{q-1}(\dot{X}; R) \times H^{n-q}(\dot{X}; R)$. Пусть $j: \dot{X} \subset X$ — вложение. Докажите, что для элементов $u \in H^{q-1}(\dot{X}; R)$ и $v \in H^{n-q}(X; R)$ имеет место равенство

$$\varphi_{\dot{X}}(u, j^*(v)) = \varphi_X(\delta(u), v).$$

3. Докажите, что эйлерова характеристика любого нечетномерного компактного многообразия равна нулю, а эйлерова характеристика четномерного компактного многообразия, являющегося краем, четна. (*Указание.* Пусть $\dot{X}$ — край $(2n+1)$-мерного многообразия X. Тогда для когомологий с коэффициентами в поле $\mathbf{Z}_2$ справедливо равенство

$$\dim \operatorname{im} [j^*: H^n(X) \to H^n(\dot{X})] = \dim \operatorname{im} [\delta: H^n(\dot{X}) \to H^{n+1}(X, \dot{X})],$$

причем сумма этих чисел равна $\dim H^n(\dot{X})$.)

Пусть Y — компактное $4m$-мерное многообразие без края, ориентированное над $\mathbf{R}$. Определим *индекс многообразия* Y как индекс невырожденной билинейной формы φ_Y на $H^{2m}(Y; \mathbf{R}) \times H^{2m}(Y; \mathbf{R})$ со значениями в $\mathbf{R}$ (если форма φ_Y представлена как сумма k положительных квадратов и j отрицательных, то ее индекс равен $k - j$).

4. Докажите, что при изменении ориентации многообразия Y на противоположную его индекс меняет знак. Докажите, что индекс произведения ориентированных многообразий равен произведению индексов сомножителей.

5. Докажите, что если X — компактное $(4m+1)$-мерное ориентированное над $\mathbf{R}$ многообразие с краем $\dot{X}$, то индекс края $\dot{X}$ равен нулю. (*Указание.* Покажите, что размерность подмодуля $j^*(H^{2m}(X; \mathbf{R})) \subset H^{2m}(\dot{X}; \mathbf{R})$ равна половине размерности модуля $H^{2m}(\dot{X}; \mathbf{R})$ и что на нем форма $\varphi_{\dot{X}}$ тождественно равна нулю. Это влечет за собой требуемый результат.)

С. Непрерывность

1. Пусть $\{(X_j, A_j), \pi_j^k\}_{j \in J}$ — обратный спектр компактных хаусдорфовых пар, и пусть $(X, A) = \varprojlim \{(X_j, A_j)\}$. Покажите, что пару (X, A) можно вложить в некоторое пространство, в котором эта пара является пересечением направленного множества компактных хаусдорфовых пар $\{(X'_j, A'_j)\}_{j \in J}$, где пара (X'_j, A'_j) имеет тот же гомотопический тип, что и пара (X_j, A_j). (*Указание.* Для каждого $j \in J$ вложите пространство X_j в стягиваемое компактное хаусдорфово пространство Y_j, например в куб, а пару $(X'_k, A'_k) \subset \prod_{j \in J} Y_j$ определите как пару, образованную всеми такими точками (y_j), что y_k принадлежит соответственно X_k или A_k, $y_j = \pi_j^k(y_k)$, если $j \leqslant k$, и y_j произвольно, если $j > k$.)

2. Докажите, что теория когомологий тогда и только тогда обладает свойством непрерывности, когда она обладает свойством слабой непрерывности.

3. Определим *p-адический соленоид* как предел обратного спектра последовательности

$$S^1 \xleftarrow{f} S^1 \xleftarrow{f} \dots \longleftarrow S^1 \xleftarrow{f} S^1 \longleftarrow \dots,$$

где $f(z) = z^p$. Вычислите группы когомологий Александера p-адического соленоида с коэффициентами в кольцах $\mathbf{Z}$, $\mathbf{Z}_p$ и $\mathbf{R}$.

4. Обобщите предшествующий пример на случай, когда задана последовательность целых чисел $n_1, n_2, \dots$, а m-е отображение S^1 в S^1 переводит z в z^{n_m}. Вычислите целочисленные когомологии Александера полученного таким образом пространства.

5. Найдите компактное хаусдорфово пространство X, для которого $\bar{\bar{H}}^q(X; \mathbf{Z}) = 0$, если $q \neq 1$, и $\bar{H}^1(X; \mathbf{Z}) \approx \mathbf{R}$.

D. Теория когомологий Чеха

1. Пусть $(\mathcal{U}, \mathcal{U}')$ — открытое покрытие пары (X, A) (т. е. $\mathcal{U}$ — открытое покрытие пространства X, причем подсистема $\mathcal{U}' \subset \mathcal{U}$ покрывает подпространство A), и пусть $K(\mathcal{U})$ — нерв покрытия $\mathcal{U}$, а $K'(\mathcal{U}')$ — подкомплекс комплекса $K(\mathcal{U})$, являющийся нервом покрытия $\mathcal{U}' \cap A = \{U' \cap A \mid U' \in \mathcal{U}'\}$. Докажите, что цепные комплексы $(C(K(\mathcal{U})), C(K'(\mathcal{U}')))$ и $(C(X(\mathcal{U})), C(A(\mathcal{U}')))$ канонически цепно эквивалентны. (*Указание.* Пусть $s = \{U_0, \dots, U_q\}$ — симплекс комплекса $K(\mathcal{U})$ (или комплекса $K'(\mathcal{U}')$), и пусть $\lambda(s)$ — подкомплекс комплекса $X(\mathcal{U})$ (или $A(\mathcal{U}')$), образованный всеми его симплексами, содержащимися в $\bigcap U_i$. Пусть $s' = \{x_0, \dots, x_q\}$ — симплекс комплекса $X(\mathcal{U})$ (или $A(\mathcal{U}')$), и пусть $\mu(s')$ — подкомплекс комплекса $K(\mathcal{U})$ (или $K'(\mathcal{U}')$), порожденный всеми такими симплексами $\{U_0, \dots, U_r\}$ комплекса $K(\mathcal{U})$ (или $K'(\mathcal{U}')$), что U_i содержит s', $0 \leqslant i \leqslant r$. Тогда комплексы $C(\lambda(s))$ и $C(\mu(s'))$ ацикличны и можно применить метод ацикличных моделей для доказательства существования таких цепных отображений:

$$\tau\colon (C(K(\mathcal{U})), C(K'(\mathcal{U}'))) \to (C(X(\mathcal{U})), C(A(\mathcal{U}'))),$$
$$\tau'\colon (C(X(\mathcal{U})), C(A(\mathcal{U}'))) \to (C(K(\mathcal{U})), C(K'(\mathcal{U}'))),$$

что $\tau(C(s)) \subset C(\lambda(s))$ и $\tau'(C(s')) \subset C(\mu(s'))$. Аналогично метод ацикличных моделей позволяет установить, что отображения τ и τ' являются цепно гомотопически обратными одно другому [1].)

2. Пусть $(\mathcal{V}, \mathcal{V}')$ — измельчение покрытия $(\mathcal{U}, \mathcal{U}')$, $\pi\colon (K(\mathcal{V}), K'(\mathcal{V}')) \to (K(\mathcal{U}), K'(\mathcal{U}'))$ — соответствующая проекция и $j\colon (X(\mathcal{V}), A(\mathcal{V}')) \subset (X(\mathcal{U}), A(\mathcal{U}'))$ — вложение. Докажите, что для любой абелевой группы G имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc}
H^*(K(\mathcal{U}), K'(\mathcal{U}'); G) & \approx & H^*(X(\mathcal{U}), A(\mathcal{U}'); G) \\
\downarrow{\scriptstyle \pi^*} & & \downarrow{\scriptstyle j^*} \\
H^*(K(\mathcal{V}), K'(\mathcal{V}'); G) & \approx & H^*(X(\mathcal{V}), A(\mathcal{V}'); G)
\end{array}$$

[1] Подробнее см. Dowker C. H., Homology groups of relations, *Ann. Math.*, 56 (1956), 84–95.

в которой горизонтальные отображения индуцированы каноническими цепными эквивалентностями упражнения 1.

3. *Группа когомологий Чеха* пары (X, A) с коэффициентами в G — это группа $\check{H}^*(X, A; G) = \varinjlim \{H^*(K(\mathcal{U}), K'(\mathcal{U}'); G)\}$. Докажите, что имеет место естественный изоморфизм

$$\check{H}^*(X, A; G) \approx \bar{H}^*(X, A; G).$$

4. Докажите, что если $\dim(X - A) \leqslant n$, то $\bar{H}^q(X, A; G) = 0$ для всех $q > n$ и всех групп G.

E. Формула Кюннета для когомологий Чеха

Пусть K_1 и K_2 — симплициальные комплексы. Их *симплициальным произведением* $K_1 \Delta K_2$ называется симплициальный комплекс, множеством вершин которого является прямое произведение множеств вершин комплексов K_1 и K_2, а симплексами — множества $\{(v_0, w_0), \ldots, (v_q, w_q)\}$, где $v_0, \ldots, v_q$ — вершины некоторого симплекса комплекса K_1, а $w_0, \ldots, w_q$ — вершины некоторого симплекса комплекса K_2.

1. Докажите, что $K_1 \Delta K_2$ — симплициальный комплекс, причем если $L_1 \subset K_1$ и $L_2 \subset K_2$, то $L_1 \Delta L_2 \subset K_1 \Delta K_2$.

2. Пусть (K_1, L_1) и (K_2, L_2) — симплициальные пары. Положим

$$(K_1, L_1) \Delta (K_2, L_2) = (K_1 \Delta K_2,\ K_1 \Delta L_2 \cup L_1 \Delta K_2).$$

Докажите, что комплекс $C((K_1, L_1) \Delta (K_2, L_2))$ естественно цепно эквивалентен комплексу $C(K_1, L_1) \otimes C(K_2, L_2)$. (*Указание*. Используйте метод ацикличных моделей.)

3. Пусть $(\mathcal{U}, \mathcal{U}')$ — открытое покрытие пары (X, A), $(\mathcal{V}, \mathcal{V}')$ — открытое покрытие пары (Y, B), и пусть $(\mathcal{U}, \mathcal{U}') \times (\mathcal{V}, \mathcal{V}') = (\mathcal{W}, \mathcal{W}')$ — открытое покрытие пары $(X, A) \times (Y, B)$, где

$$\mathcal{W} = \{U \times V \mid U \in \mathcal{U},\ V \in \mathcal{V}\}$$

и $\mathcal{W}' = \{U \times V \mid U \in \mathcal{U}',\ V \in \mathcal{V}'\}$. Докажите, что

$$(K(\mathcal{W}), K'(\mathcal{W}')) = (K(\mathcal{U}), K'(\mathcal{U}')) \Delta (K(\mathcal{V}), K'(\mathcal{V}')).$$

4. Докажите, что если (X, A) и (Y, B) — компактные хаусдорфовы пары, то семейство покрытий пары $(X, A) \times (Y, B)$ вида $(\mathcal{U}, \mathcal{U}') \times (\mathcal{V}, \mathcal{V}')$ является конфинальным в семействе всех открытых покрытий пары $(X, A) \times (Y, B)$.

5. Докажите, что если (X, A) и (Y, B) — компактные хаусдорфовы пары, а модули G и G' таковы, что $G * G' = 0$, то имеет место короткая точная последовательность

$$0 \to (\check{H}_1^* \otimes \check{H}_2^*)^q \to \check{H}^q((X, A) \times (Y, B); G \otimes G') \to (\check{H}_1^* * \check{H}_2^*)^{q+1} \to 0,$$

где $\check{H}_1^* = \check{H}^*(X, A; G)$ и $\check{H}_2^* = \check{H}^*(Y, B; G')$.

6. Пусть (X, A) и (Y, B) — локально компактные хаусдорфовы пары, причем подпространства A и B замкнуты соответственно в X и Y. Докажите, что если модули G и G' таковы, что $G * G' = 0$, то имеет место короткая точная последовательность

$$0 \to (\bar{H}_{c,1}^* \otimes \bar{H}_{c,2}^*)^q \to \bar{H}_c^q((X, A) \times (Y, B); G \otimes G') \to (\bar{H}_{c,1}^* * \bar{H}_{c,2}^*)^{q+1} \to 0,$$

где $\bar{H}_{c,1}^* = \bar{H}_c^*(X, A; G)$ и $\bar{H}_{c,2}^* = \bar{H}_c^*(Y, B; G')$.

F. Локальные системы и пучки

В этой группе упражнений предполагается, что X — паракомпактное хаусдорфово пространство.

1. Пусть Γ — локальная система над пространством X, и пусть $\overline{\Gamma}$ — такой предпучок над X, что для всякого открытого множества $V \subset X$ группа $\overline{\Gamma}(V)$ есть множество всех функций f, сопоставляющих каждой точке $x \in X$ элемент $f(x) \in \Gamma(x)$ и обладающих тем свойством, что для любого пути ω в V имеет место равенство $f(\omega(1)) = \Gamma(\omega)(f(\omega(0)))$. Докажите, что $\overline{\Gamma}$ — пучок над X и что сопоставление пучка $\overline{\Gamma}$ локальной системе Γ представляет собой естественное преобразование из категории локальных систем в категорию пучков над X.

2. Предпучок Γ над X называется *локально постоянным*, если существует такое открытое покрытие $\mathcal{U} = \{U\}$ пространства X, что для всякого элемента $U \in \mathcal{U}$ и всякой точки $x \in U$ имеем $\Gamma(U) \approx \varinjlim \{\Gamma(V)\}$, где V пробегает открытые окрестности точки x. Докажите, что если $U \in \mathcal{U}$, а U' — связное открытое подмножество множества U, то композиция

$$\Gamma(U) \to \Gamma(U') \to \hat{\Gamma}(U')$$

представляет собой изоморфизм. Выведите отсюда, что если Γ — локально постоянный пучок, а U' — связное открытое подмножество множества $U \in \mathcal{U}$, то $\Gamma(U) \approx \Gamma(U')$.

3. Докажите, что если X — локально линейно связное пространство, а Γ' — локально постоянный пучок над ним, то существует такая локальная система Γ над X, что $\overline{\Gamma} \approx \Gamma'$.

4. Пусть пространство X локально линейно связно и полулокально односвязно. Покажите, что имеет место биективное соответствие между классами эквивалентности локальных систем над X и классами эквивалентности локально постоянных пучков над X.

5. Пусть Γ — локальная система R-модулей над пространством X, а $\Delta^q(\cdot\,;\Gamma)$ — предпучок над X, такой, что $\Delta^q(\cdot\,;\Gamma)(V) = \Delta^q(V;\Gamma\,|\,V)$ для всякого открытого подмножества $V \subset X$. Докажите, что $\Delta^q(\cdot\,;\Gamma)$ — тонкий предпучок.

6. Пусть Γ — локальная система R-модулей над пространством X, $\Delta^*(\cdot\,;\Gamma)$ — коцепной комплекс предпучков $\Delta^q(\cdot\,;\Gamma)$ над X и $\hat{\Delta}^*(\cdot\,;\Gamma)$ — коцепной комплекс пополнений $\hat{\Delta}^q(\cdot\,;\Gamma)$ предпучков. Докажите, что существует изоморфизм

$$H^*(\Delta^*(\cdot\,;\Gamma)(X)) \approx H^*(\hat{\Delta}^*(\cdot\,;\Gamma)(X)).$$

7. Пусть Γ — локальная система R-модулей над пространством X, и пусть предпучки $H^q(\Delta^*(\cdot\,;\Gamma))$ локально нулевые на X для всех $q > 0$. Докажите, что тогда имеет место изоморфизм

$$\check{H}^*(X;\overline{\Gamma}) \approx H^*(X;\Gamma).$$

(*Указание.* Заметьте, что $\overline{\Gamma} = H^0(\Delta^*(\cdot\,;\Gamma))$, а затем воспользуйтесь теоремой 6.8.7.)

G. Некоторые свойства евклидова пространства

1. Найдите компактное подмножество X плоскости $\mathbf{R}^2$, являющееся n-связным для каждого n и таким, что $\bar{H}^1(X;\mathbf{Z}) \approx \mathbf{Z}$.

2. Докажите, что если X — компактное подмножество пространства $\mathbf{R}^n$ и $\dim X < n-1$, то множество $\mathbf{R}^n - X$ связно.

Пусть A_1 и A_2 — непересекающиеся замкнутые подмножества пространства $\mathbf{R}^n$, и пусть $z_1 \in H_p(A_1; R)$ и $z_2 \in H_q(A_2; R)$, где $p+q=n-1$. Пусть $z_1 \in \widetilde{H}_p(A_1; R)$, а $z_1' \in H_{p+1}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n - A_2; R)$ — образ элемента z_1 при композиции

$$\widetilde{H}_p(A_1) \to \widetilde{H}_p(\mathbf{R}^n - A_2) \xrightarrow[\approx]{\partial^{-1}} H_{p+1}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n - A_2).$$

Коэффициент зацепления $\mathrm{Lk}(z_1, z_2) \in R$ определим равенством

$$\mathrm{Lk}(z_1, z_2) = \langle \gamma_U(z_1'), z_2 \rangle,$$

где U — фиксированный класс ориентации пространства $\mathbf{R}^n$ над кольцом R.

3. Докажите, что $\mathrm{Lk}(z_1, z_2) = \langle U, i_*(z_2 \times z_1') \rangle$, где

$$i\colon A_2 \times (\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n - A_2) \subset (\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n - \delta(\mathbf{R}^n)).$$

4. Предположим, что число $\mathrm{Lk}(z_2, z_1)$ тоже определено (т. е. $z_2 \in \widetilde{H}_q(A_2)$). Докажите, что $\mathrm{Lk}(z_1, z_2) = (-1)^{pq+1}\mathrm{Lk}(z_2, z_1)$.

5. Пусть A_1 есть p-мерная сфера, A_2 есть q-мерная сфера, и пусть обе сферы вложены в виде непересекающихся подмножеств в пространство $\mathbf{R}^n$, где $p+q=n-1$. Докажите, что гомоморфизм $H_p(A_1) \to H_p(\mathbf{R}^n - A_2)$ тривиален тогда и только тогда, когда тривиален гомоморфизм $H_q(A_2) \to H_q(\mathbf{R}^n - A_1)$

Н. Вложения многообразий в евклидовы пространства

1. Докажите, что компактное n-мерное многообразие, неориентируемое над кольцом $\mathbf{Z}$, нельзя вложить в пространство $\mathbf{R}^{n+1}$.

2. Пусть X — компактное связное n-мерное многообразие, вложенное в пространство $\mathbf{R}^{n+1}$, и пусть U и V — компоненты связности множества $\mathbf{R}^{n+1} - X$. Пусть $i\colon X \subset \mathbf{R}^{n+1} - U$ и $j\colon X \subset \mathbf{R}^{n+1} - V$. Докажите, что для любого кольца R подмодули $i^*(\overline{H}^*(\mathbf{R}^{n+1} - U))$ и $j^*(\overline{H}^*(\mathbf{R}^{n+1} - V))$ являются подалгебрами алгебры $\overline{H}_*(X)$ и имеет место разложение в прямую сумму

$$\{i^*, j^*\}\colon \overline{H}^q(\mathbf{R}^{n+1} - U) \oplus \overline{H}^q(\mathbf{R}^{n+1} - V) \approx \overline{H}^q(X), \ 0 < q < n.$$

3. Докажите, что n-мерное действительное проективное пространство $\mathbf{R}P^n$ $(n \geqslant 2)$ нельзя вложить в пространство $\mathbf{R}^{n+1}$.

Глава 7
ТЕОРИЯ ГОМОТОПИЙ

В этой главе мы возвращаемся к изучению общей теории гомотопий. Теперь, когда мы обладаем таким орудием исследования, как теория гомологий, мы в состоянии получить гораздо более глубокие результаты, чем раньше. Мы рассмотрим довольно подробно высшие гомотопические группы и покажем, что они удовлетворяют аналогам всех аксиом теории гомологий, за исключением аксиомы вырезания. Будет определен гомоморфизм Гуревича, представляющий собой естественное отображение гомотопических групп в целочисленные сингулярные группы гомологий. Это приведет нас, далее, к теореме Гуревича об изоморфизме, которая утверждает, грубо говоря, что первая нетривиальная гомотопическая группа изоморфна соответствующей целочисленной группе гомологий.

Затем мы обсудим понятие CW-комплекса. Класс CW-комплексов специально приспособлен для теории гомотопий, поскольку это наименьший класс пространств, содержащий пустое множество и замкнутый, с точностью до гомотопической эквивалентности, относительно операции приклеивания клеток (даже в бесконечном числе).

Последний важный результат этой главы — теорема Брауна о представимости. Она в простых терминах характеризует те контравариантные функторы из категории гомотопических типов линейно связных CW-комплексов с отмеченной точкой в категорию множеств с отмеченным элементом, которые естественно эквивалентны функтору, сопоставляющему CW-комплексу множество гомотопических классов отображений этого комплекса в некоторое фиксированное пространство с отмеченной точкой.

В § 7.1 устанавливается общее свойство точности для множеств гомотопических классов. Параграф 7.2 содержит определение абсолютных и относительных гомотопических групп, а также доказательства точности гомотопических последовательностей пары, триады и расслоения. В § 7.3 выясняется, в какой мере гомотопические группы зависят от выбора отмеченной точки, использованной в их определении. Оказывается, что для высших гомотопических групп имеют место аналоги результатов, доказанных в гл. 1 для фундаментальной группы.

Гомоморфизм Гуревича определяется в § 7.4, а теорема Гуревича об изоморфизме доказывается в § 7.5. Абсолютная и относительная теоремы Гуревича, так же как и аддиционная гомотопическая теорема, доказываются одновременной индукцией. Из теоремы Гуревича вытекает теорема Уайтхеда, в которой утверждается, что непрерывное отображение одного односвязного пространства в другое индуцирует изоморфизм всех гомотопических групп тогда и только тогда, когда оно индуцирует изоморфизм всех целочисленных групп сингулярных гомологий.

В § 7.6 вводится понятие CW-комплекса. Среди элементарных свойств CW-комплексов выделяется теорема о клеточной аппроксимации, которая является аналогом для CW-комплексов теоремы о симплициальной аппроксимации. Параграф 7.7 посвящен контравариантным функторам, определенным на категории гомотопических типов линейно связных пространств с отмеченной точкой. В нем доказывается теорема представимости, упомянутая выше. В § 7.8 эта теорема применяется для получения CW-аппроксимаций пространств или пар пространств. Здесь же обсуждается связанное с этим понятие слабого гомотопического типа. Теорема о представимости будет в дальнейшем использована в гл. 8.

§ 1. Точные последовательности множеств гомотопических классов

Одним из наиболее важных свойств гомологического функтора является свойство точности, связывающее гомологии пары и каждого из входящих в нее пространств. Аналогичным свойством обладают и функторы, определенные с помощью гомотопических классов. В этом параграфе собраны предварительные сведения о гомотопических классах и доказано упомянутое свойство точности. Здесь мы будем работать с объектами категории пространств с отмеченной точкой и, если не оговорено противное, под парой (X, A) будем понимать такую пару пространств с отмеченной точкой (т. е. отмеченная точка пространства X совпадает с отмеченной точкой пространства A), что подпространство A замкнуто в X. Под гомотопией в этой категории понимается гомотопия, сохраняющая отмеченную точку. Если $A \subset X$, то через X/A мы обозначаем пространство, полученное из X стягиванием подпространства A в одну точку (которая служит отмеченной точкой пространства X/A). Если X' и A — замкнутые подпространства пространства X, то $A/(A \cap X')$ — замкнутое подпространство в X/X'. Следовательно, если (X, A) — некоторая пара и подпространство X' замкнуто в X, то определена пара $(X/X', A/(A \cap X'))$, которая обозначается также через $(X, A)/X'$.

Будем рассматривать единичный интервал I как пространство с отмеченной точкой, считая отмеченной точкой его начало 0.

Приведенным конусом CX над пространством X называется пространство, полученное из произведения $X \times I$ стягиванием подпространства $X \times 0 \cup x_0 \times I$ в одну точку (значит, $CX = X \times I/(X \times 0 \cup \cup x_0 \times I)$). Символ $[x, t]$ мы будем использовать для обозначения точек конуса CX, соответствующих точкам $(x, t) \in X \times I$ при естественной проекции $X \times I \to CX$. Пространство X при помощи отображения $x \to [x, 1]$ вкладывается как замкнутое подмножество в конус CX. Если (X, A) — некоторая пара, то конус CA является подпространством конуса CX, и $C(X, A)$ определяется как пара (CX, CA).

1. Лемма. *Отображение f: $(X, A) \to (Y, B)$ тогда и только тогда гомотопно постоянному, когда существует такое отображение F: $C(X, A) \to (Y, B)$, что $F[x, 1] = f(x)$ для всех $x \in X$.*

Доказательство. Существует взаимно однозначное соответствие между гомотопиями H: $(X, A) \times I \to (Y, B)$ отображения f в постоянное отображение и отображениями F: $C(X, A) \to (Y, B)$, такими, что $F[x, 1] = f(x)$, которое выражается формулой

$$F[x, t] = H(x, 1-t). \blacksquare$$

Следующее свойство продолжения относительной гомотопии может быть выведено из относительной формы теоремы 1.4.12.

2. Лемма. *Пусть заданы отображение f: $C(X, A) \to (Y, B)$ и гомотопия G: $(X, A) \times I \to (Y, B)$ его ограничения $f \mid (X, A)$. Тогда существует гомотопия F: $C(X, A) \times I \to (Y, B)$ отображения f, такая, что $F \mid (X, A) \times I = G$.*

Доказательство. Гомотопия F определяется формулой

$$F([x, t], t') = \begin{cases} f[x, t(1+t')], & t(t'+1) \leqslant 1, \\ G(x, t(1+t')-1), & t(1+t') \geqslant 1. \end{cases} \blacksquare$$

Гомотопический класс единственного постоянного отображения $(X, A) \to (Y, B)$ обозначается через $0 \in [X, A; Y, B]$ (он образован отображениями $(X, A) \to (Y, B)$, гомотопными постоянному). Поскольку композиция справа или слева произвольного отображения с отображением, гомотопным постоянному, является отображением, гомотопным постоянному, то, выделяя элемент 0, можно превратить класс множеств $[X, A; Y, B]$ в категорию множеств с отмеченным элементом. Для заданного отображения f: $(X', A') \to \to (X, A)$ *ядро* индуцированного отображения

$$f^{\#}: [X, A; Y, B] \to [X', A'; Y, B]$$

определяется как множество $f^{\#-1}(0)$ с отмеченной точкой и обозначается $\ker f^{\#}$.

Теперь мы покажем, как отобразить некоторое другое множество гомотопических классов в множество $[X, A; Y, B]$ таким способом, чтобы его образ совпадал с $\ker f^{\#}$. Это послужит основой для установления свойства точности, к чему мы и стремимся. *Конусом* C_f *отображения* $f\colon X' \to X$ называется фактор-пространство пространства $CX' \vee X$, полученное отождествлением $[x', 1]$ с $f(x')$ для всех $x' \in X'$. Пусть $f'\colon X' \to X$ и $f''\colon A' \to A$ — ограничения отображения $f\colon (X', A') \to (X, A)$. Тогда $C_{f''}$ — замкнутое подпространство конуса $C_{f'}$, так что определена пара $(C_{f'}, C_{f''})$. Очевидным образом определяется функториальное вложение i пары (X, A) в качестве замкнутой подпары пары $(C_{f'}, C_{f''})$.

Трехчленная последовательность пар и отображений

$$(X', A') \xrightarrow{f} (X, A) \xrightarrow{g} (X'', A'')$$

называется *точной*, если для любой пары (Y, B) (где подпространство B не обязательно замкнуто в Y) ассоциированная последовательность множеств с отмеченной точкой

$$[Y, B; X', A'] \xrightarrow{f_{\#}} [Y, B; X, A] \xrightarrow{g_{\#}} [Y, B; X'', A'']$$

точна (т. е. $\ker g_{\#} = \operatorname{im} f_{\#}$). Аналогично, эта последовательность называется *коточной*, если точна последовательность множеств с отмеченной точкой

$$[X'', A''; Y, B] \xrightarrow{g^{\#}} [X, A; Y, B] \xrightarrow{f^{\#}} [X', A'; Y, B]$$

(т. е. $\ker f^{\#} = \operatorname{im} g^{\#}$). Последовательность (быть может, конечная с одного или двух концов) пар и отображений

$$\ldots \to (X_{n+1}, A_{n+1}) \xrightarrow{f_n} (X_n, A_n) \xrightarrow{f_{n-1}} (X_{n-1}, A_{n-1}) \to \ldots$$

называется *точной последовательностью* (или *коточной последовательностью*), если любая ее часть, образованная тремя последовательными парами, точна (или коточна).

3. Теорема. *Для всякого отображения* $f\colon (X', A') \to (X, A)$ *последовательность*

$$(X', A') \xrightarrow{f} (X, A) \xrightarrow{i} (C_{f'}, C_{f''})$$

является коточной.

Доказательство. Пусть (Y, B) — произвольная пара (подпространство B не обязательно замкнуто в Y). Рассмотрим последовательность

$$[C_{f'}, C_{f''}; Y, B] \xrightarrow{i^{\#}} [X, A; Y, B] \xrightarrow{f^{\#}} [X', A'; Y, B].$$

Покажем, что $\operatorname{im} i^{\#} \subset \ker f^{\#}$. Композиция $i \circ f$: $(X', A') \to (C_{f'}, C_{f''})$ совпадает с композицией

$$(X', A') \subset C(X', A') \subset C(X', A') \vee (X, A) \xrightarrow{k} (C_{f'}, C_{f''}),$$

где k — каноническое отображение на факторпространство. Однако отображение вложения $(X', A') \subset C(X', A')$ гомотопно нулю (согласно лемме 1, поскольку это вложение можно продолжить до тождественного отображения пространства $C(X', A')$). Следовательно, отображение $i \circ f$ гомотопно нулю, поэтому $\operatorname{im}(f^{\#} \circ i^{\#}) = 0$. Отсюда $\operatorname{im} i^{\#} \subset \ker f^{\#}$.

Пусть отображение g: $(X, A) \to (Y, B)$ таково, что $f^{\#}[g] = 0$ (т. е. $g \circ f$ гомотопно нулю). Согласно лемме 1, существует отображение G: $C(X', A') \to (Y, B)$, продолжающее отображение $g \circ f$. Тогда G и g определяют такое отображение G': $C(X', A') \vee \vee (X, A) \to (Y, B)$, что $G' \mid C(X', A') = G$ и $G' \mid (X, A) = g$. Поскольку

$$G'[x', 1] = (g \circ f)[x', 1] = g(f(x')) = G'(f(x')), \qquad x' \in X',$$

существует отображение h: $(C_{f'}, C_{f''}) \to (Y, B)$, такое, что $G' = h \circ k$. Тогда $h \mid (X, A) = g$, откуда $h \circ i = g$ или $[g] = i^{\#}[h]$. Следовательно, $\ker f^{\#} \subset \operatorname{im} i^{\#}$. ■

Для всякого отображения f: $(X', A') \to (X, A)$ имеем последовательность

4. $(X', A') \xrightarrow{f} (X, A) \xrightarrow{i} (C_{f'}, C_{f''}) \xrightarrow{j} (C_{i'}, C_{i''}) \xrightarrow{l} (C_{j'}, C_{j''})$.

Из теоремы 3 вытекает, что эта последовательность коточна.

Таким образом, нам удалось вложить отображение

$$f^{\#}: [X, A; Y, B] \to [X', A'; Y, B]$$

в точную последовательность. Мы покажем теперь, что пары $(C_{i'}, C_{i''})$ и $(C_{j'}, C_{j''})$ последовательности 4 можно заменить другими парами, выраженными явно в терминах пар (X', A'), (X, A) и отображения f.

5. Лемма. *Пусть (Y, B) — некоторая пара, и пусть Y' — замкнутое подпространство в Y. Пусть существует такая гомотопия H: $(Y, B) \times I \to (Y, B)$, что*

(a) $H(y, 0) = y$, $y \in Y$;
(b) $H(Y' \times I) \subset Y'$;
(c) $H(Y' \times 1) = y_0$.

Тогда естественная проекция k: $(Y, B) \to (Y, B)/Y'$ является гомотопической эквивалентностью.

Доказательство. Определим отображение f: $(Y, B)/Y' \to (Y, B)$ по формуле

$$f(k(y)) = H(y, 1), \quad y \in Y$$

(это определение корректно, поскольку $H(Y' \times 1) = y_0$). Покажем, что f гомотопически обратно отображению k. Из определения отображения f следует, что H — гомотопия между тождественным отображением $1_{(Y, B)}$ и отображением $f \circ k$. С другой стороны, поскольку $H(Y' \times I) \subset Y'$, можно определить гомотопию

$$H': (Y, B)/Y' \to (Y, B)/Y',$$

положив $H'(k(y), t) = k(H(y, t))$, $y \in Y$ и $t \in I$. Тогда

$$k(f(k(y))) = k(H(y, 1)) = H'(k(y), 1), \quad y \in Y.$$

Следовательно, H' — гомотопия между тождественным отображением пространства $(Y, B)/Y'$ и отображением $k \circ f$. Значит, отображение f гомотопически обратно отображению k. ■

6. Следствие. *Пусть f: $(X', A') \to (X, A)$ — некоторое отображение, и пусть i: $(X, A) \subset (C_{f'}, C_{f''})$. Тогда $CX \subset C_{i'}$, $(C_{i'}, C_{i''})/CX = (C_{f'}, C_{f''})/X$ и естественная проекция*

$$k: (C_{i'}, C_{i''}) \to (C_{i'}, C_{i''})/CX$$

является гомотопической эквивалентностью.

Доказательство. Пространство $C_{i'}$ получается из $CX' \vee CX$ путем отождествления точек $[x', 1]$ и $[f(x'), 1]$ для всех $x' \in X'$. Следовательно, $CX \subset C_{i'}$. Поскольку конус $C_{i'}$ является объединением своих замкнутых подпространств CX и $C_{f'}$, отсюда вытекает, что

$$C_{i'}/CX = C_{f'}/(C_{f'} \cap CX) = C_{f'}/X.$$

Аналогично, $C_{i''}/CA = C_{f''}/A$, и, поскольку $C_{i''} \cap CX = CA$,

$$(C_{i'}, C_{i''})/CX = (C_{f'}, C_{f''})/X.$$

Это доказывает два первых утверждения.

Пусть стягивание F: $C(X, A) \times I \to C(X, A)$ определено формулой $F([x, t], t') = [x, (1-t')t]$, и пусть отображение g: $C(X', A') \to (C_{i'}, C_{i''})$ совпадает с композицией отображений

$$C(X', A') \subset C(X', A') \vee C(X, A) \to (C_{i'}, C_{i''}),$$

из которых второе — каноническая проекция. Композиция

$$(X', A') \times I \xrightarrow{f \times 1} (X, A) \times I \subset C(X, A) \times I \xrightarrow{F} C(X, A) \subset (C_{i'}, C_{i''})$$

представляет собой гомотопию G: $(X', A') \times I \to (C_{i'}, C_{i''})$, такую, что $G(x', 0) = [f(x'), 1] = g[x', 1]$. Согласно лемме 2, существует гомотопия $F'\colon C(X', A')\times I\to(C_{i'}, C_{i''})$, такая, что $F'\,|\,(X', A')\times I=G$ и $F'([x', t], 0)=g([x', t])$. Определим гомотопию

$$H\colon (C_{i'}, C_{i''})\times I\to(C_{i'}, C_{i''})$$

соотношениями

$$H([x', t], t')=F'([x', t], t'),\quad x'\in X';\ t, t'\in I;$$
$$H([x, t], t')=F([x, t], t'),\quad x\in X;\quad t, t'\in I$$

(это определение корректно, поскольку $F'([x', 1], t')=G(x', t')=F([f(x'), 1], t'))$. Эта гомотопия H удовлетворяет условиям (a), (b) и (c) леммы 5, где $(Y, B)=(C_{i'}, C_{i''})$ и $Y'=CX$. Следовательно, $k\colon (C_{i'}, C_{i''})\to(C_{i'}, C_{i''})/CX$ — гомотопическая эквивалентность. ■

Напомним (см. § 1.6) определение надстройки $SX=(X\times I)/(X\times 0\cup x_0\times I\cup X\times 1)$ (и, значит, $SX=CX/X$). Для пары (X, A) положим $S(X, A)=(SX, SA)$. Тогда для любого отображения $f\colon (X', A')\to(X, A)$ имеем $(C_{f'}, C_{f''})/X=S(X', A')$. Пусть $k\colon (C_{f'}, C_{f''})\to S(X', A')$ — естественная проекция.

7. Лемма. *Для всякого отображения $f\colon (X', A')\to(X, A)$ последовательность*

$$(X', A')\xrightarrow{f}(X, A)\xrightarrow{i}(C_{f'}, C_{f''})\xrightarrow{k}S(X', A')\xrightarrow{Sf}S(X, A)$$

является коточной.

Доказательство. Воспользуемся коточностью последовательности 4:

$$(X', A')\xrightarrow{f}(X, A)\xrightarrow{i}(C_{f'}, C_{f''})\xrightarrow{l}(C_{i'}, C_{i''})\xrightarrow{l}(C_{l'}, C_{l''}).$$

Согласно следствию 6, имеет место гомотопическая эквивалентность

$$(C_{i'}, C_{i''})\xrightarrow{k'}(C_{f'}, C_{f''})/X=S(X', A'),$$

и композиция $(C_{f'}, C_{f''})\xrightarrow{l}(C_{i'}, C_{i''})\xrightarrow{k'}S(X', A')$ очевидным образом совпадает с естественной проекцией $k\colon (C_{f'}, C_{f''})\to S(X', A')$. Из следствия 6 вытекает также, что имеет место гомотопическая эквивалентность

$$(C_{l'}, C_{l''})\xrightarrow{k''}(C_{l'}, C_{l''})/CC_{i'}=(C_{i'}, C_{i''})/C_{f'}=S(X, A)$$

и композиция $(C_{i'}, C_{i''})\xrightarrow{l}(C_{l'}, C_{l''})\xrightarrow{k''}S(X, A)$ совпадает с естественной проекцией $k\colon (C_{i'}, C_{i''})\to(C_{i'}, C_{i''})/C_{f'}=S(X, A)$. Пусть отображение $g\colon S(X', A')\to S(X, A)$ определено формулой $g([x', t])=[f(x'), 1-t]$. Треугольник

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & (C_{i'}, C_{i''}) \arrow[dl, "k'"'] \arrow[dr, "k"] & \\ S(X', A') \arrow[rr, "g"] & & S(X, A) \end{tikzcd}$$

является гомотопически коммутативным, поскольку гомотопию

$$H\colon (C_{i'}, C_{i''}) \times I \to S(X, A)$$

между отображениями $\bar{k}$ и $g \circ k'$ можно определить, полагая

$$H([x', t], t') = [f(x'), 1 - tt'], \quad x' \in X'; \quad t, t' \in I;$$
$$H([x, t], t') = [x, (1 - t')t], \quad x \in X, \quad t, t' \in I$$

(она корректно определена, так как $H([x', 1], t') = [f(x'), 1 - t'] = H([f(x'), 1], t')$). Следовательно, имеет место гомотопически коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd}
(C_{f'}, C_{f''}) \arrow[r, "l"] \arrow[dr, "k"'] & (C_{i'}, C_{i''}) \arrow[r, "l"] \arrow[d, "k'"] & (C_{j'}, C_{j''}) \arrow[d, "k''"] \\
& S(X', A') \arrow[r, "g"] & S(X, A)
\end{tikzcd}$$

в которой проекции k' и k'' представляют собой гомотопические эквивалентности. Из коточности последовательности 4 следует коточность последовательности

$$(X', A') \xrightarrow{f} (X, A) \xrightarrow{l} (C_{f'}, C_{f''}) \xrightarrow{k} S(X', A') \xrightarrow{g} S(X, A).$$

Пусть гомеоморфизм $h\colon S(X, A) \to S(X, A)$ определен равенством $h([x, t]) = [x, 1 - t]$. Коточность выписанной выше последовательности влечет за собой коточность последовательности

$$(X', A') \xrightarrow{f} (X, A) \xrightarrow{l} (C_{f'}, C_{f''}) \xrightarrow{k} S(X', A') \xrightarrow{h \circ g} S(X, A).$$

Поскольку $h \circ g = Sf$, лемма доказана. ■

8. Лемма. *Если последовательность*

$$(X', A') \xrightarrow{f} (X, A) \xrightarrow{g} (X'', A'')$$

коточна, то ее надстройка

$$S(X', A') \xrightarrow{Sf} S(X, A) \xrightarrow{Sg} S(X'', A'')$$

также коточна.

Доказательство. Пусть $\Omega(Y, B) = (\Omega Y, \Omega B)$ для всякой пары (Y, B). Согласно теореме 2.8 введения, имеет место коммутативная диаграмма (в которой вертикальные отображения являются эквивалентностями множеств с отмеченным элементом)

$$\begin{tikzcd}
{[S(X'', A''); Y, B]} \arrow[r, "(Sg)^{\#}"] \arrow[d, leftrightarrow] & {[S(X, A); Y, B]} \arrow[r, "(Sf)^{\#}"] \arrow[d, leftrightarrow] & {[S(X', A'); Y, B]} \arrow[d, leftrightarrow] \\
{[X'', A''; \Omega(Y, B)]} \arrow[r, "g^{\#}"] & {[X, A; \Omega(Y, B)]} \arrow[r, "f^{\#}"] & {[X', A'; \Omega(Y, B)]}
\end{tikzcd}$$

Следовательно, равенство $\operatorname{im}(Sg)^{\#}=\ker(Sf)^{\#}$ в верхней последовательности эквивалентно равенству $\operatorname{im} g^{\#}=\ker f^{\#}$ в нижней последовательности. ■

Определим индуктивно пространства $S^n(X, A)$, полагая

$$S^0(X, A)=(X, A),$$
$$S^n(X, A)=S(S^{n-1}(X, A)), \quad n\geqslant 1.$$

9. Теорема. *Для любого отображения* $f\colon (X', A')\to(X, A)$ *последовательность*

$$(X', A')\xrightarrow{f}(X, A)\xrightarrow{i}\ldots\xrightarrow{S^n f}S^n(X, A)\xrightarrow{S^n i}$$
$$\to S^n(C_{f'}, C_{f''})\xrightarrow{S^n k}S^{n+1}(X', A')\xrightarrow{S^{n+1}f}\ldots$$

является коточной.

Доказательство. Из лемм 7 и 8 следует, что при $n\geqslant 0$ коточна последовательность

$$S^n(X', A')\xrightarrow{S^n f}S^n(X, A)\xrightarrow{S^n i}S^n(C_{f'}, C_{f''})\xrightarrow{S^n k}$$
$$\to S^{n+1}(X', A')\xrightarrow{S^{n+1}f}S^{n+1}(X, A).$$

Поскольку всякая трехчленная подпоследовательность первоначальной последовательности содержится в одной из таких пятичленных коточных последовательностей, теорема доказана. ■

В коточной последовательности теоремы 9 все пары, за исключением первых трех, являются парами H-когрупп, которые, в свою очередь за исключением первых трех, являются абелевыми. Более того, все отображения пар H-когрупп являются гомоморфизмами. Таким образом, для произвольной пары (Y, B) точная последовательность гомотопических классов отображений последовательности теоремы 9 в пару (Y, B) (где B не обязательно замкнуто в Y) состоит из групп и гомоморфизмов, за исключением последних трех множеств с отмеченной точкой, и все эти группы, опять за исключением трех, являются абелевыми.

Покажем теперь, каким образом последняя группа последовательности, а именно $[S(X', A'); Y, B]$, действует в качестве группы левых операторов на следующем за этой группой множестве, а именно на $[C_{f'}, C_{f''}; Y, B]$. При этом множество орбит с помощью отображения $i^{\#}$ вкладывается в множество $[X, A; Y, B]$. Зададимся отображениями $\alpha\colon S(X', A')\to(Y, B)$ и $\beta\colon (C_{f'}, C_{f''})\to(Y, B)$ и определим отображение

$$\alpha\top\beta\colon (C_{f'}, C_{f''})\to(Y, B),$$

полагая

$$(\alpha \top \beta)[x', t] = \begin{cases} \alpha[x', 2t], & 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2}, \quad x' \in X', \quad t \in I, \\ \beta[x', 2t-1], & \frac{1}{2} \leqslant t \leqslant 1, \quad x' \in X', \quad t \in I, \end{cases}$$

$$(\alpha \top \beta)(x) = \beta(x), \quad x \in X.$$

Очевидно, что $(\alpha \top \beta) | (X, A) = \beta | (X, A)$. Легко проверить следующие утверждения:

10. *Если* $\alpha \simeq \alpha'$ *и* $\beta \simeq \beta'$ (*или* $\beta \simeq \beta' \operatorname{rel} X$), *то* $\alpha \top \beta \simeq \alpha' \top \beta'$ (*или* $\alpha \top \beta \simeq \alpha' \top \beta' \operatorname{rel} X$). ■

11. *Если* α_0 — *постоянное отображение, то* $\alpha_0 \top \beta \simeq \beta \operatorname{rel} X$. ■

12. $(\alpha_1 * \alpha_2) \top \beta \simeq \alpha_1 \top (\alpha_2 \top \beta) \operatorname{rel} X$. ■

13. $\alpha_1 \top (\alpha_2 \circ k) \simeq (\alpha_1 * \alpha_2) \circ k \operatorname{rel} X$. ■

Для заданных отображений β_1, β_2: $(C_{f'}, C_{f''}) \to (Y, B)$, таких, что $\beta_1 | (X, A) = \beta_2 | (X, A)$, определим отображение $d(\beta_1, \beta_2)$: $S(X', A') \to (Y, B)$, полагая

$$d(\beta_1, \beta_2)[x', t] = \begin{cases} \beta_1[x', 2t], & 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2}, \quad x' \in X', \quad t \in I, \\ \beta_2[x', 2-2t], & \frac{1}{2} \leqslant t \leqslant 1, \quad x' \in X', \quad t \in I. \end{cases}$$

Легко проверить следующие утверждения:

14. *Если* $\beta_1 \simeq \beta_1' \operatorname{rel} X$ *и* $\beta_2 \simeq \beta_2' \operatorname{rel} X$, *то* $d(\beta_1, \beta_2) \simeq d(\beta_1', \beta_2')$. ■

15. $d(\beta_1, \beta_3) \simeq d(\beta_1, \beta_2) * d(\beta_2, \beta_3)$. ■

16. $d(\alpha \top \beta, \beta) \simeq \alpha$. ■

17. $\beta_1 \simeq d(\beta_1, \beta_2) \top \beta_2 \operatorname{rel} X$. ■

Из утверждений 17, 10 и 11 следует, что если отображение $d(\beta_1, \beta_2)$ гомотопно нулю, то $\beta_1 \simeq \beta_2 \operatorname{rel} X$. Обратно, если $\beta_1 \simeq \beta_2 \operatorname{rel} X$, то из утверждений 11, 14 и 16 следует, что

$$d(\beta_1, \beta_2) \simeq d(\alpha_0 \top \beta_1, \beta_1) \simeq \alpha_0.$$

Следовательно, $\beta_1 \simeq \beta_2 \operatorname{rel} X$ тогда и только тогда, когда отображение $d(\beta_1, \beta_2)$ гомотопно нулю.

Из утверждений 10, 11 и 12 следует, что действие слева группы $[S(X', A'); Y, B]$ на множестве $[C_{f'}, C_{f''}; Y, B]$ корректно определено формулой $[\alpha] \top [\beta] = [\alpha \top \beta]$.

18. Теорема. *Пусть заданы элементы* $[\beta_1]$, $[\beta_2] \in [C_{f'}, C_{f''}; Y, B]$. *Равенство* $i^{\#}[\beta_1] = i^{\#}[\beta_2]$ *имеет место тогда и только тогда, когда существует такой элемент* $[\alpha] \in [S(X', A'); Y, B]$, *что* $[\beta_1] = [\alpha] \top [\beta_2]$.

Доказательство. Из определения отображения $\alpha \top \beta_2$ получаем

$$i^{\#}[\alpha \top \beta_2] = [(\alpha \top \beta_2) \mid (X, A)] = [\beta_2 \mid (X, A)] = i^{\#}[\beta_2],$$

откуда $i^{\#}([\alpha] \top [\beta_2]) = i^{\#}[\beta_2]$. Обратно, если $i^{\#}[\beta_1] = i^{\#}[\beta_2]$, то элементы β_1 и β_2 мы можем выбрать таким образом, чтобы $\beta_1 \mid (X, A) = \beta_2 \mid (X, A)$ (поскольку вложение $i\colon (X, A) \subset (C_{f'}, C_{f''})$ является корасслоением). Тогда из утверждения 17 следует, что

$$[\beta_1] = [d(\beta_1, \beta_2) \top \beta_2] = [d(\beta_1, \beta_2)] \top [\beta_2]. \ \blacksquare$$

19. Теорема. *Для заданных элементов* $[\alpha_1]$, $[\alpha_2] \in [S(X', A'); Y, B]$ *равенство* $k^{\#}[\alpha_1] = k^{\#}[\alpha_2]$ *имеет место тогда и только тогда, когда существует такой элемент* $[\gamma] \in [S(X, A); Y, B]$, *что* $[\alpha_2] = [\alpha_1] + (Sf)^{\#}[\gamma]$.

Доказательство. Из утверждения 13 следует, что если $\beta_0\colon (C_{f'}, C_{f''}) \to (Y, B)$ — постоянное отображение, то

$$\begin{aligned} k^{\#}[\alpha_1 * (\gamma \circ Sf)] &= [\alpha_1] \top (k^{\#} Sf^{\#}[\gamma]) = [\alpha_1] \top [\beta_0] = \\ &= [\alpha_1] \top k^{\#}[\alpha_0] = k^{\#}[\alpha_1 * \alpha_0]. \end{aligned}$$

Следовательно, $k^{\#}([\alpha_1] + (Sf)^{\#}[\gamma]) = k^{\#}[\alpha_1]$. Обратно, если $k^{\#}[\alpha_1] = k^{\#}[\alpha_2]$, то из утверждений 10 и 13 вытекает, что

$$0 = k^{\#}[\alpha_1^{-1} * \alpha_1] = [\alpha_1^{-1}] \top k^{\#}[\alpha_1] = [\alpha_1^{-1}] \top k^{\#}[\alpha_2] = k^{\#}[\alpha_1^{-1} * \alpha_2].$$

Следовательно, существует элемент $[\gamma] \in [S(X, A); Y, B]$, такой, что $[\alpha_1^{-1} * \alpha_2] = (Sf)^{\#}[\gamma]$ и, значит,

$$[\alpha_2] = [\alpha_1] + [\alpha_1^{-1} * \alpha_2] = [\alpha_1] + (Sf)^{\#}[\gamma]. \ \blacksquare$$

§ 2. Высшие гомотопические группы

Высшие гомотопические группы топологического пространства или пары пространств являются ковариантными функторами и определяются как множество гомотопических классов отображений некоторых фиксированных пространств или пар в рассматриваемое пространство. Для абсолютного случая все эти функторы уже определены в § 1.6. Свойство точности, установленное в предыдущем параграфе, влечет за собой важное свойство точности, связывающее относительные и абсолютные гомотопические группы. Этот параграф содержит определение гомотопических групп, некоторые их элементарные свойства и доказательство точности гомотопической последовательности расслоения.

Мы будем считать 0 отмеченной точкой отрезка I и его края $\dot{I} \subset I$. Пусть X — пространство с отмеченной точкой x_0. Гомотопической группой $\pi_n(X)$, $n \geqslant 1$ (или $\pi_n(X, x_0)$, если необходимо указать отмеченную точку) называется группа $[S^n(\dot{I}); X]$ (это определение эквивалентно приведенному в § 1.6, поскольку сфера S^n гомеоморфна $S^n(S^0) \approx S^n(\dot{I})$). Для $n=0$ гомотопическое множество $\pi_0(X)$ определяется как множество $[\dot{I}; X]$ с отмеченной точкой (иными словами, это множество компонент линейной связности пространства X, где отмеченной компонентой считается та, которая содержит отмеченную точку x_0). Тогда π_n представляет собой ковариантный функтор из категории пространств с отмеченной точкой в категорию абелевых групп, если $n \geqslant 2$, в категорию групп, если $n=1$, и, наконец, в категорию множеств с отмеченным элементом, если $n=0$.

Пусть (X, A) — некоторая пара с отмеченной точкой $x_0 \in A$; *n-я относительная гомотопическая группа*, $n > 1$ (или *гомотопическое множество*, если $n=1$), определяется как группа $[S^{n-1}(I, \dot{I}); X, A]$ и обозначается $\pi_n(X, A)$ (или $\pi_n(X, A, x_0)$). Тогда π_n — ковариантный функтор из категории пар пространств с отмеченной точкой в категорию абелевых групп, если $n \geqslant 3$, в категорию групп, если $n=2$, и, наконец, в категорию множеств с отмеченным элементом, если $n=1$.

Существует гомеоморфизм пространств $S(\dot{I})$ и $I/\dot{I}$, переводящий точку $[0, t] \in S(\dot{I})$ в отмеченную точку пространства $I/\dot{I}$, а $[1, t] \in S(\dot{I})$ в ту точку из $I/\dot{I}$, которая определяется числом $t \in I$. Следовательно, при $n \geqslant 1$ пространства $S^n(\dot{I})$ и $S^{n-1}(I/\dot{I}) = S^{n-1}(I)/S^{n-1}(\dot{I})$ гомеоморфны. Этот гомеоморфизм индуцирует естественное взаимно однозначное соответствие между множествами $[S^{n-1}(I/\dot{I}); X, \{x_0\}]$ и $[S^n(\dot{I}); X]$. С помощью этого соответствия мы отождествляем относительную гомотопическую группу $\pi_n(X, \{x_0\})$ с абсолютной гомотопической группой $\pi_n(X)$, $n \geqslant 1$, так что вложение j: $(X, \{x_0\}) \subset (X, A)$ индуцирует гомоморфизм

$$j_{\#}\colon \pi_n(X) \to \pi_n(X, A), \quad n \geqslant 1.$$

Поскольку пространство $S^n(\dot{I})$ линейно связно при $n \geqslant 1$, вложение $X' \subset X$, где X' — компонента линейной связности пространства X, содержащая точку x_0, индуцирует изоморфизмы $\pi_n(X') \approx \pi_n(X)$ $(n \geqslant 1)$. Аналогично, если A' — компонента линейной связности пространства A, содержащая точку x_0, то вложение $(X', A') \subset (X, A)$ индуцирует изоморфизмы $\pi_n(X', A') \approx \pi_n(X, A)$ $(n \geqslant 1)$.

Дадим теперь другое описание относительных гомотопических групп. Пусть $n \geqslant 1$. Существует гомеоморфизм пространства $S^{n-1}(I/\dot{I})$ на $(I \times I^{n-1}, \dot{I} \times I^{n-1})/(I \times \dot{I}^{n-1} \cup 0 \times I^{n-1})$, переводящий точку $[\ldots[t, t_1], \ldots, t_{n-1}]$ в точку $[t, t_1, \ldots, t_{n-1}]$ (куб I^0 состоит из одной точки, а его край $\dot{I}^0$ — пустое множество). Следовательно, при $n \geqslant 1$ множество $\pi_n(X, A, x_0)$ находится во взаимно однозначном соответствии с множеством гомотопических классов отображений

$$(I^n, \dot{I}^n, I \times \dot{I}^{n-1} \cup 0 \times I^{n-1}) \to (X, A, x_0).$$

Поскольку пространство $I \times \dot{I}^{n-1} \cup 0 \times I^{n-1}$ стягиваемо, вложение

$$(I^n, \dot{I}^n, z_0) \subset (I^n, \dot{I}^n, I \times \dot{I}^{n-1} \cup 0 \times I^{n-1}),$$

где $z_0 = (0, 0, \ldots, 0)$, является гомотопической эквивалентностью. Следовательно, при $n \geqslant 1$ множество $\pi_n(X, A, x_0)$ находится во взаимно однозначном соответствии с множеством гомотопических классов отображений

$$(I^n, \dot{I}^n, z_0) \to (X, A, x_0).$$

Поскольку пара $(I^n, \dot{I}^n, z_0)$ гомеоморфна паре (E^n, S^{n-1}, p_0), множество $\pi_n(X, A, x_0)$ при $n \geqslant 1$ находится во взаимно однозначном соответствии с множеством гомотопических классов отображений

$$(E^n, S^{n-1}, p_0) \to (X, A, x_0).$$

В следующей теореме, являющейся относительным вариантом теоремы 1.6.7, сформулировано условие, при котором отображение $(E^n, S^{n-1}, p_0) \to (X, A, x_0)$ представляет тривиальный элемент группы $\pi_n(X, A, x_0)$.

1. Теорема. *Для заданного отображения* $\alpha\colon (E^n, S^{n-1}, p_0) \to (X, A, x_0)$ *равенство* $[\alpha] = 0$ *в группе* $\pi_n(X, A, x_0)$ *имеет место тогда и только тогда, когда отображение* α *гомотопно относительно* S^{n-1} *некоторому отображению* E^n *в* A.

Доказательство. Предположим, что в группе $\pi_n(X, A, x_0)$ имеет место равенство $[\alpha] = 0$. Тогда существует гомотопия

$$H\colon (E^n, S^{n-1}, p_0) \times I \to (X, A, x_0),$$

стягивающая отображение α в постоянное отображение $E^n \to x_0$. Гомотопия H' относительно S^{n-1} отображения α в некоторое отображение $E^n \to A$ определяется тогда формулой

$$H'(z, t) = \begin{cases} H\left(\dfrac{z}{1 - t/2}, t\right), & 0 \leqslant \|z\| \leqslant 1 - \dfrac{t}{2}, \\ H\left(\dfrac{z}{\|z\|}, 2 - 2\|z\|\right), & 1 - \dfrac{t}{2} \leqslant \|z\| \leqslant 1. \end{cases}$$

Обратно, если отображение α гомотопно относительно S^{n-1} некоторому отображению α', для которого $\alpha'(E^n) \subset A$, то в группе $\pi_n(X, A, x_0)$ имеет место равенство $[\alpha] = [\alpha']$ и достаточно показать, что $[\alpha'] = 0$ в $\pi_n(X, A, x_0)$. Гомотопия H: $(E^n, S^{n-1}, p_0) \times I \to \to (X, A, x_0)$ отображения α' в постоянное отображение $E^n \to x_0$ определяется формулой

$$H(z, t) = \alpha'((1-t)z + tp_0). \blacksquare$$

Пара (X, A) называется *n-связной* ($n \geqslant 0$), если при $0 \leqslant k \leqslant n$ всякое отображение α: $(E^k, S^{k-1}) \to (X, A)$ гомотопно относительно S^{k-1} некоторому отображению $E^k \to A$. Для $k = 0$ пара (E^0, S^{-1}) состоит из одной точки и пустого множества. Поэтому требование, чтобы каждое отображение α: $(E^0, S^{-1}) \to (X, A)$ было гомотопно некоторому отображению $E^0 \to A$, эквивалентно условию, что каждую точку пространства X можно соединить путем с некоторой точкой подпространства A. Теорема 1 позволяет установить следующее соотношение между n-связностью пары (X, A) и обращением в нуль ее относительных гомотопических групп:

2. Следствие. *Пара (X, A) тогда и только тогда является n-связной ($n \geqslant 0$), когда каждая компонента линейной связности пространства X пересекается с подпространством A и для каждой точки $a \in A$ и каждого числа $1 \leqslant k \leqslant n$ имеет место равенство $\pi_k(X, A, a) = 0$.* $\blacksquare$

При $n \geqslant 1$ можно определить отображение ограничения

$$\partial: \pi_n(X, A, x_0) \to \pi_{n-1}(A, x_0),$$

являющееся гомоморфизмом при $n \geqslant 2$, т. е.

$$\partial[\alpha] = [\alpha \mid S^{n-1}(\dot{I})]$$

для всякого отображения α: $S^{n-1}(I, \dot{I}) \to (X, A)$. Легко видеть, что для всякого непрерывного отображения f: $(X', A', x_0') \to (X, A, x_0)$ имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \pi_n(X', A', x_0') & \xrightarrow{\partial} & \pi_{n-1}(A', x_0') \\ {\scriptstyle f_\#}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle (f \mid A')_\#} \\ \pi_n(X, A, x_0) & \xrightarrow{\partial} & \pi_{n-1}(A, x_0) \end{array}$$

Иными словами, ∂ является естественным преобразованием ковариантного функтора $\pi_n(X, A)$ в ковариантный функтор $\pi_{n-1}(A)$ (оба функтора определены на категории пар (X, A) пространств с отмеченной точкой). Таким образом, функторы гомотопических групп и естественное преобразование ∂ представляют собой некий аналог того, из чего строятся теории гомологий. Мы покажем, что они удовлетворяют также многим аксиомам теории гомологий. Очевидно, что для функторов гомотопических групп выполняются аксиомы гомотопии и размерности.

Исследуем теперь свойство точности. Для заданной пары (X, A) пространств с отмеченной точкой пусть $i\colon A \subset X$ и $j\colon (X, \{x_0\}) \subset (X, A)$. *Гомотопической последовательностью пары* (X, A) (или (X, A, x_0)) называется последовательность множеств с отмеченным элементом из которых все, за исключением трех последних, являются группами)

$$\ldots \to \pi_{n+1}(X, A) \xrightarrow{\partial} \pi_n(A) \xrightarrow{i_\#} \pi_n(X) \xrightarrow{j_\#} \pi_n(X, A) \xrightarrow{\partial} \ldots \xrightarrow{i_\#} \pi_0(X).$$

3. Теорема. *Гомотопическая последовательность пары точна.*

Доказательство. Пусть $f\colon (\dot I, \{0\}) \subset (I, \dot I)$, $f'\colon \dot I \subset I$ и $f''\colon \{0\} \subset \dot I$. По теореме 7.1.9 имеет место коточная последовательность

$$(\dot I, \{0\}) \xrightarrow{f} (I, \dot I) \xrightarrow{i} (C_{f'}, C_{f''}) \xrightarrow{k} S(\dot I, \{0\}) \xrightarrow{Sf} S(I, \dot I) \to \ldots .$$

Пусть $g\colon (C_{f'}, C_{f''}) \to (I, \dot I)$ — гомеоморфизм, определенный равенствами $g([0, t]) = 0$, $g([1, t]) = t$. Тогда композиция $g \circ i$ является вложением $i'\colon (I, \dot I) \subset (I, \dot I)$, а композиция $k \circ g^{-1}$ совпадает с композицией

$$(I, \dot I) \xrightarrow{k'} (I/\dot I, \{0\}) \xrightarrow{h} (S(\dot I), \{0\}),$$

где k' — естественная проекция, а h — гомеоморфизм, использованный нами ранее при отождествлении групп $\pi_n(X, \{x_0\})$ и $\pi_n(X)$. Следовательно, имеет место коточная последовательность

$$(\dot I, \{0\}) \xrightarrow{f} (I, \dot I) \xrightarrow{i'} (I, \dot I) \xrightarrow{h \circ k'} S(\dot I, \{0\}) \xrightarrow{Sf} \ldots .$$

С ее помощью мы получаем точную последовательность

$$\ldots \to \pi_{n+1}(X, A) \xrightarrow{(S^n i')^\#} \pi_n(A) \xrightarrow{(S^n f)^\#} \pi_n(X) \xrightarrow{(S^{n-1}(h \circ k'))^\#}$$
$$\to \pi_n(X, A) \to \ldots \to \pi_0(X).$$

Доказательство заканчивается тривиальной проверкой того, что

$$(S^n i')^\# = \partial, \quad (S^n f)^\# = i_\# \quad \text{и} \quad (S^{n-1}(h \circ k'))^\# = j_\#. \ \blacksquare$$

4. Следствие. *Пара* (E^{n+1}, S^n) *n-связна*, $n \geqslant 0$.

Доказательство. При $n \geqslant 0$ шар E^{n+1} линейно связен, а пространство S^n непусто. Следовательно, каждая компонента линейной связности пространства E^{n+1} пересекается с S^n. Если $x \in S^n$, то $\pi_k(E^{n+1}, x) = 0$ для $k \geqslant 0$, поскольку шар E^{n+1} стягиваем. Из теоремы 3.4.11 следует, что $\pi_k(S^n, x) = 0$ для всех $0 \leqslant k < n$, а из теоремы 3 вытекает, что $\pi_n(E^{n+1}, S^n, x) = 0$ для $1 \leqslant k \leqslant n$. Требуемый результат теперь получается из следствия 2. ■

Мы увидим, что аксиома вырезания, вообще говоря, не выполняется для функторов гомотопических групп. Эти функторы, однако, обладают следующим свойством, которое не имеет места для функторов групп гомологий: абсолютные гомотопические группы базы расслоения изоморфны соответствующим относительным гомотопическим группам пространства расслоения по модулю слоя. Это верно для более широкого класса отображений, которые мы сейчас определим.

Отображение $p\colon E \to B$ называется *слабым расслоением* (или *расслоением в смысле Серра*), если оно обладает свойством накрывающей гомотопии по отношению к совокупности кубов $\{I^n\}_{n \geqslant 0}$. Пространство E называется *пространством расслоения*, а B — *базой* этого слабого расслоения. Прообраз $p^{-1}(b)$ точки $b \in B$ называется *слоем над точкой* b.

Если s — симплекс, то пространство $|s|$ гомеоморфно кубу, и, значит, отображение $p\colon E \to B$ тогда и только тогда является слабым расслоением, когда оно обладает свойством накрывающей гомотопии по отношению к пространству любого симплекса. Мы покажем, что на самом деле слабое расслоение обладает свойством накрывающей гомотопии по отношению к любому полиэдру.

Ясно, что всякое расслоение является слабым расслоением. Пусть $p\colon E \to B$ — слабое расслоение, $f\colon B' \to B$ — некоторое отображение и E' — расслоенное произведение пространств B' и E. Тогда определено слабое расслоение $p'\colon E' \to B'$, которое называется *слабым расслоением, индуцированным из расслоения p отображением f.*

5. Лемма. *Пусть $p\colon E \to B$ — слабое расслоение, а $g\colon I^n \times 0 \cup \dot{I}^n \times I \to E$ и $H\colon I^n \times I \to B$ (где $n \geqslant 0$) — такие отображения, что H — продолжение отображения $p \circ g$. Тогда существует отображение $G\colon I^n \times I \to E$, продолжающее отображение g и такое, что $p \circ G = H$.*

Доказательство. В лемме утверждается, что существует отображение, обозначенное пунктирной стрелкой в следующей диаграмме:

$$\begin{tikzcd}
I^n \times 0 \cup \dot{I}^n \times I \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\cap"'] & E \arrow[d, "p"] \\
I^n \times I \arrow[r, "H"] \arrow[ur, dashed] & B
\end{tikzcd}$$

которое делает эту диаграмму коммутативной. Но это вытекает из того, что отображение p обладает свойством накрывающей гомотопии для кубов, и из того, что пара $(I^n \times I, I^n \times 0 \cup \dot{I}^n \times I)$ гомеоморфна паре $(I^n \times I, I^n \times 0)$. ■

6. Теорема. *Пусть (X, A) — полиэдральная пара и $p: E \to B$ — слабое расслоение. Пусть заданы отображения $g: X \times 0 \cup A \times I \to E$ и $H: X \times I \to B$, такие, что H — продолжение отображения $p \circ g$. Тогда существует такое отображение $G: X \times I \to E$, продолжающее отображение g, что $p \circ G = H$.*

Доказательство. Метод построения такого отображения G состоит в продолжении первоначального отображения над последовательными остовами триангуляции полиэдра X. Пусть (K, L) — некоторая триангуляция пары (X, A). Мы будем отождествлять пары (X, A) и $(|K|, |L|)$. Для $q \geqslant -1$ положим $X_q = |K| \times 0 \cup \cup (|K^q \cup L| \times I)$, откуда $X_{-1} = X \times 0 \cup A \times I$ и $X_{q-1} \subset X_q$, $q \geqslant 0$. Индукцией по числу q определим последовательность отображений $G_q: X_q \to E$, такую, что

(a) $G_{-1} = g$;
(b) $G_q | X_{q-1} = G_{q-1}$, $q \geqslant 0$;
(c) $p \circ G_q = H | X_q$, $q \geqslant -1$.

Коль скоро такая последовательность $\{G_q\}$ построена, нужное нам отображение $G: X \times I \to E$ определяется равенством $G | X_q = G_q$, $q \geqslant -1$. Таким образом, задача свелась к построению последовательности $\{G_q\}$.

Условие (a) определяет отображение G_{-1}. Предположим, что отображение G_q уже построено для чисел $q < n$, $n \geqslant 0$. Чтобы построить отображение G_n, удовлетворяющее условиям (b) и (c), рассмотрим для всякого n-мерного симплекса $s \in K - L$ отображения $g_s: |s| \times 0 \cup |\dot{s}| \times I \to E$ и $H_s: |s| \times I \to B$, определяемые равенствами $g_s = G_{n-1} | (|s| \times 0 \cup |\dot{s}| \times I)$ и $H_s = H | (|s| \times I)$. Поскольку пара $(|s|, |\dot{s}|)$ гомеоморфна паре $(I^n, \dot{I}^n)$, из леммы 5 вытекает, что существует отображение $G_s: |s| \times I \to E$, для которого $G_s | (|s| \times 0 \cup |\dot{s}| \times I) = g_s$ и $p \circ G_s = H_s$. Теперь отображение $G_n: X_n \to E$, удовлетворяющее условиям (b) и (c), можно задать равенствами $G_n | X_{n-1} = G_{n-1}$ и $G_n | (|s| \times I) = G_s$ для всякого n-мерного симплекса $s \subset K - L$. ■

Считая A пустым множеством, мы видим, что слабое расслоение удовлетворяет свойству накрывающей гомотопии по отношению к любому полиэдру.

7. Следствие. *Пусть (X', A') — полиэдральная пара, такая, что A' — сильный деформационный ретракт пространства X', и пусть*

p: $E \to B$ — слабое расслоение. Если отображения g': $A' \to E$ и H': $X' \to B$ таковы, что $H' | A' = p \circ g'$, то существует такое отображение G': $X' \to E$, что $p \circ G' = H'$ и $G' | A' = g'$.

Доказательство. Пусть D: $X' \times I \to X'$ — сильная деформационная ретракция пространства X' на подпространство A'. Тогда $D(X' \times 1 \cup A' \times I) \subset A'$. Определим отображение g: $X' \times 1 \cup A' \times I \to E$ как композицию

$$X' \times 1 \cup A' \times I \xrightarrow{D} A' \xrightarrow{g'} E.$$

Пусть H: $X' \times I \to B$ — композиция отображений

$$X' \times I \xrightarrow{D} X' \xrightarrow{H'} B.$$

Тогда H есть продолжение отображения $p \circ g$, и из теоремы 6 следует, что существует такое отображение G: $X' \times I \to E$, продолжающее отображение g, что $p \circ G = H$. Если отображение G': $X' \to E$ определить равенством $G'(x') = G(x', 0)$, то оно будет обладать всеми нужными нам свойствами. ∎

Следующая теорема является основным результатом, связывающим гомотопические группы базы и пространства слабого расслоения.

8. Теорема. *Пусть p: $E \to B$ — слабое расслоение, $b_0 \in B' \subset B$, $E' = p^{-1}(B')$ и $e_0 \in p^{-1}(b_0)$. Тогда проекция p индуцирует биективное отображение*

$$p_{\#}: \pi_n(E, E', e_0) \approx \pi_n(B, B', b_0), \quad n \geqslant 1.$$

Доказательство. Покажем, что отображение $p_{\#}$ сюръективно. Пусть отображение α: $(I^n, \dot{I}^n, z_0) \to (B, B', b_0)$ представляет некоторый элемент множества $\pi_n(B, B', b_0)$. Поскольку точка z_0 является сильным деформационным ретрактом куба I^n, можно применить следствие 7 к паре $(I^n, \{z_0\})$ и отображениям g': $\{z_0\} \to E$ и H': $I^n \to B$, где $g'(z_0) = e_0$ и $H' = \alpha | I^n$. В результате получаем такое отображение G': $I^n \to E$, что $p \circ G' = H'$ и $G'(z_0) = e_0$. Значит,

$$G'(\dot{I}^n) \subset p^{-1}(H'(\dot{I}^n)) \subset p^{-1}(B') = E'.$$

Следовательно, G' порождает отображение α': $(I^n, \dot{I}^n, z_0) \to (E, E', e_0)$, для которого $p \circ \alpha' = \alpha$. Отображение α' представляет элемент $[\alpha'] \in \pi_n(E, E', e_0)$, такой, что $p_{\#}[\alpha'] = [\alpha]$.

Покажем, что отображение $p_{\#}$ инъективно. Пусть отображения α_0, α_1: $(I^n, \dot{I}^n, z_0) \to (E, E', e_0)$ таковы, что $p \circ \alpha_0 \simeq p \circ \alpha_1$. Пусть $X' = I^n \times I$ и $A' = (I^n \times 0) \cup (z_0 \times I) \cup (I^n \times 1)$. Тогда (X', A') — полиэдральная пара, а поскольку оба пространства X' и A' стягиваемы, подпространство A' есть сильный деформационный ретракт пространства X'. Определим отображение $g'\colon A' \to E$, полагая $g'(z, 0) = \alpha_0(z)$, $g'(z, 1) = \alpha_1(z)$ и $g'(z_0, t) = e_0$, и пусть $H'\colon X' \to B$ — отображение, являющееся гомотопией между $p \circ \alpha_0$ и $p \circ \alpha_1$. Согласно следствию 7, существует такое отображение $G'\colon X' \to E$, что $p \circ G' = H'$ и $G' \mid A' = g'$. Поскольку

$$G'(\dot{I}^n \times I) \subset p^{-1}(H'(\dot{I}^n \times I)) \subset p^{-1}(B') = E',$$

отображение G' является гомотопией между отображениями α_0 и α_1 в (E, E', e_0). Следовательно, $[\alpha_0] = [\alpha_1]$ в $\pi_n(E, E', e_0)$. ■

9. Следствие. *Пусть $p\colon E \to B$ — слабое расслоение, $b_0 \in B$ и $e_0 \in F = p^{-1}(b_0)$. Тогда проекция p индуцирует биективное отображение*

$$p_{\#}\colon \pi_n(E, F, e_0) \approx \pi_n(B, b_0), \quad n \geqslant 1.$$

Доказательство. Это вытекает из теоремы 8, если положить $B' = \{b_0\}$ и использовать каноническое отождествление множеств $\pi_n(B, \{b_0\}, b_0)$ и $\pi_n(B, b_0)$. ■

Пусть $p\colon E \to B$ — слабое расслоение, $F = p^{-1}(b_0)$ и $e_0 \in F$. Определим отображение

$$\bar{\partial}\colon \pi_n(B, b_0) \to \pi_{n-1}(F, e_0), \quad n \geqslant 1,$$

как композицию

$$\pi_n(B, b_0) \xrightarrow{p_{\#}^{-1}} \pi_n(E, F, e_0) \xrightarrow{\partial} \pi_{n-1}(F, e_0).$$

Гомотопической последовательностью слабого расслоения называется последовательность $(i\colon (F, e_0) \subset (E, e_0))$

$$\ldots \to \pi_n(F, e_0) \xrightarrow{i_{\#}} \pi_n(E, e_0) \xrightarrow{p_{\#}} \pi_n(B, b_0) \xrightarrow{\bar{\partial}}$$
$$\to \pi_{n-1}(F, e_0) \to \ldots \xrightarrow{p_{\#}} \pi_0(B, b_0).$$

10. Теорема. *Гомотопическая последовательность слабого расслоения точна.*

Доказательство. Точность в члене $\pi_0(E, e_0)$ является непосредственным следствием свойства накрывающей гомотопии. Точность в любом члене левее $\pi_0(E, e_0)$ вытекает из точности гомотопической последовательности пары (E, F). ■

11. Следствие. *Пусть $p\colon E \to B$ — слабое расслоение, обладающее свойством единственности поднятия. Тогда p индуцирует изоморфизм*

$$p_{\#}\colon \pi_q(E, e_0) \approx \pi_q(B, p(e_0)), \quad q \geqslant 2.$$

Доказательство. Поскольку в слое $F = p^{-1}(p(e_0))$ не существует нетривиальных путей (теорема 2.2.5), $\pi_q(F, e_0) = 0$ для $q \geqslant 1$. Требуемое утверждение теперь следует из теоремы 10. ■

12. Следствие. *Если* $q \geqslant 2$, *то* $\pi_q(S^1) = 0$.

Доказательство. Применим следствие 11 к накрывающему отображению $p: \mathbf{R} \to S^1$ и учтем, что $\pi_q(\mathbf{R}) = 0$ для всех $q \geqslant 0$ (в силу стягиваемости прямой $\mathbf{R}$). ■

13. Следствие. *Пусть* $p: S^{2n+1} \to \mathbf{C}P^n$ — *расслоение Хопфа. Тогда проекция* p *индуцирует изоморфизм*

$$p_{\#}: \pi_q(S^{2n+1}) \approx \pi_q(\mathbf{C}P^n), \quad q \geqslant 3.$$

Доказательство. Поскольку слоем расслоения Хопфа является $F = S^1$, наше утверждение вытекает из следствия 12 и теоремы 10. ■

14. Следствие. $\pi_3(S^2) \neq 0$.

Доказательство. Поскольку тождественное отображение $(S^3, p_0) \subset (S^3, p_0)$ индуцирует нетривиальный эндоморфизм группы $H_3(S^3, p_0)$, оно не гомотопно постоянному отображению. Следовательно, $\pi_3(S^3) \neq 0$, и наше утверждение вытекает из следствия 13 при $n = 1$ (поскольку $\mathbf{C}P^1 \approx S^2$). ■

Последний результат показывает, что в отличие от групп гомологий n-е гомотопические группы полиэдра не обязательно обращаются в нуль при n, бо́льших размерности полиэдра.

Пусть H — замкнутая полусфера сферы S^2 и a — ее полюс. Пара $(S^2 - a, H - a)$ имеет тот же гомотопический тип, что и пара (E^2, S^1). Следовательно,

$$\pi_3(S^2 - a, H - a) \approx \pi_3(E^2, S^1) \overset{\partial}{\approx} \pi_2(S^1) = 0.$$

С другой стороны, пары (S^2, H) и $(S^2, \{a\})$ имеют один и тот же гомотопический тип, и, значит,

$$\pi_3(S^2, H) \approx \pi_3(S^2, \{a\}) = \pi_3(S^2) \neq 0.$$

Отсюда видно, что отображение вырезания $j: (S^2 - a, H - a) \subset \subset (S^2, H)$ не индуцирует изоморфизм групп $\pi_3(S^2 - a, H - a)$ и $\pi_3(S^2, H)$. Следовательно, аксиома вырезания для гомотопических групп, вообще говоря, не выполняется.

Выше (см. следствие 2.8.8) было построено расслоение пространства путей $p: P(X, x_0) \to X$ со слоем $p^{-1}(x_0) = \Omega X$. Поскольку пространство $P(X, x_0)$ стягиваемо (лемма 2.4.3), $\pi_n(P(X, x_0)) = 0$ для всех $n \geqslant 0$, и в силу теоремы 10 имеет место изоморфизм

$$\bar{\partial}: \pi_n(X) \approx \pi_{n-1}(\Omega X), \quad n \geqslant 1.$$

Этот результат можно также получить из канонического биективного соответствия $[S^n(\dot{I}); X] \approx [S^{n-1}(\dot{I}); \Omega X]$, определяемого экспоненциальным законом. Мы используем пространство путей для доказательства точности гомотопической последовательности триады.

Пусть (X, A, B) — триада с отмеченной точкой $x_0 \in B$, а $i: (A, B) \subset (X, B)$, $j: (X, B) \subset (X, A)$ и $j': (A, \{x_0\}) \subset (A, B)$ — вложения. Определим гомоморфизм

$$\partial': \pi_n(X, A, x_0) \to \pi_{n-1}(A, B, x_0), \qquad n \geqslant 2,$$

как композицию

$$\pi_n(X, A, x_0) \xrightarrow{\partial} \pi_{n-1}(A, x_0) \xrightarrow{j'_\#} \pi_{n-1}(A, B, x_0).$$

Гомотопической последовательностью триады (X, A, B) называется последовательность

$$\ldots \to \pi_{n+1}(X, A) \xrightarrow{\partial'} \pi_n(A, B) \xrightarrow{i_\#} \pi_n(X, B) \xrightarrow{j_\#} \pi_n(X, A) \to \ldots$$
$$\ldots \to \pi_1(X, A).$$

15. Теорема. *Гомотопическая последовательность триады точна.*

Доказательство. Пусть $p: P(X, x_0) \to X$ — расслоение пространства путей, $X' = P(X, x_0)$, $A' = p^{-1}(A)$ и $B' = p^{-1}(B)$. Из теоремы 8 следует, что $p_\#$ биективно отображает гомотопическую последовательность триады (X', A', B') на гомотопическую последовательность триады (X, A, B). Следовательно, достаточно доказать, что гомотопическая последовательность триады (X', A', B') точна.

Пусть $i: (A', B') \subset (X', B')$, $j: (X', B') \subset (X', A')$, $i': B' \subset A'$ и $j': A' \subset (A', B')$ — вложения. Имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccccccccc}
\ldots \to \pi_{n+1}(X', A') & \xrightarrow{\partial'} & \pi_n(A', B') & \xrightarrow{i_\#} & \pi_n(X', B') & \xrightarrow{j_\#} & \pi_n(X', A') \to \ldots \\
\downarrow{\scriptstyle \partial} & & \downarrow{\scriptstyle =} & & \downarrow{\scriptstyle \partial} & & \downarrow{\scriptstyle \partial} \\
\ldots \longrightarrow \pi_n(A') & \xrightarrow{j'_\#} & \pi_n(A', B') & \xrightarrow{\partial} & \pi_{n-1}(B') & \xrightarrow{i'_\#} & \pi_{n-1}(A') \to \ldots
\end{array}$$

в которой каждое вертикальное отображение биективно (поскольку пространство X' стягиваемо). Следовательно, точность гомотопической последовательности триады (X', A', B') вытекает из точности гомотопической последовательности пары (A', B'). ■

Этот результат можно также получить из точности гомотопической последовательности пары и функториальных свойств гомотопических групп (т. е. точно так же, как и соответствующее свойство групп гомологий, см. теорему 4.8.5).

§ 3. Изменение отмеченной точки

Абсолютные и относительные гомотопические группы определены для пространств с отмеченной точкой и для пар таких пространств. Этот параграф посвящен изучению того, в какой мере эти группы зависят от выбора отмеченной точки. Обобщая методы, развитые в § 1.8, мы увидим, что гомотопические группы, соответствующие различным отмеченным точкам, лежащим в одной компоненте линейной связности, изоморфны, однако этот изоморфизм определен не однозначно. Многие наши рассмотрения применимы и к более общим гомотопическим множествам. С них мы и начнем.

Пусть (X, A) — пара с отмеченной точкой $x_0 \in A$, и пусть (Y, B) — другая пара. Два отображения $\alpha_0, \alpha_1: (X, A) \to (Y, B)$ называются *свободно гомотопными*, если они гомотопны как отображения пар (т. е. если на поведение отмеченных точек в процессе гомотопии не накладывается никаких ограничений). Пусть ω — некоторый путь в пространстве B между точками $\alpha_0(x_0)$ и $\alpha_1(x_1)$; *ω-гомотопией между отображениями* α_0 и α_1 называется такая гомотопия

$$H: (X, A) \times I \to (Y, B),$$

что $H(x, 0) = \alpha_0(x)$, $H(x, 1) = \alpha_1(x)$ и $H(x_0, t) = \omega(t)$. Если такая гомотопия существует, то мы называем отображение α_0 *ω-гомотопным* отображению α_1. Ясно, что отображения α_0 и α_1 тогда и только тогда свободно гомотопны, когда существует некоторый путь ω в пространстве B, относительно которого они ω-гомотопны. В частности, два отображения $\alpha_0, \alpha_1: (X, A, x_0) \to (Y, B, y_0)$ свободно гомотопны тогда и только тогда, когда существует замкнутый путь ω в пространстве B, начинающийся в точке y_0, относительно которого они ω-гомотопны.

Хотя свободная гомотопия определяет отношение эквивалентности на множестве отображений пары (X, A) в пару (Y, B), для фиксированного пути ω отношение ω-гомотопности не является, вообще говоря, отношением эквивалентности. Например, если путь ω не замкнут, то никакое отображение α_0 не является ω-гомотопным самому себе.

1. Лемма. (а) *Пусть заданы отображения* $f: (X', A', x_0') \to (X, A, x_0)$, $\alpha_0, \alpha_1: (X, A) \to (Y, B)$ *и путь* ω *в пространстве* B, *такие, что отображение* α_0 *ω-гомотопно* α_1. *Тогда отображение* $\alpha_0 \circ f$ *ω-гомотопно* $\alpha_1 \circ f$.

(b) *Пусть заданы отображения* $g: (Y, B) \to (Y', B')$, $\alpha_0, \alpha_1: (X, A) \to (Y, B)$ *и путь* ω *в пространстве* B, *такие, что отображение* α_0 *ω-гомотопно* α_1. *Тогда отображение* $g \circ \alpha_0$ *$(g \circ \omega)$-гомотопно отображению* $g \circ \alpha_1$.

(c) *Пусть заданы отображения* α_0, α_0': $(SX, SA, x_0) \to (Y, B, \omega(0))$ *и* α_1, α_1': $(SX, SA, x_0) \to (Y, B, \omega(1))$, *такие, что* α_0 *ω-гомотопно* α_1, *а* α_0' *ω-гомотопно* α_1'. *Тогда отображение* $\alpha_0 * \alpha_0'$ *ω-гомотопно отображению* $\alpha_1 * \alpha_1'$.

Доказательство. Если $H: (X, A) \times I \to (Y, B)$ — некоторая ω-гомотопия между α_0 и α_1, то в случае (a) композиция

$$(X', A') \times I \xrightarrow{f \times 1} (X, A) \times I \xrightarrow{H} (Y, B)$$

представляет собой ω-гомотопию между $\alpha_0 \circ f$ и $\alpha_1 \circ f$. В случае (b) композиция

$$(X, A) \times I \xrightarrow{H} (Y, B) \xrightarrow{g} (Y', B')$$

является $(g \circ \omega)$-гомотопией между $g \circ \alpha_0$ и $g \circ \alpha_1$.

Докажем утверждение (c). Если H, H': $(SX, SA) \times I \to (Y, B)$ — некоторые ω-гомотопии между отображениями α_0 и α_1, α_0' и α_1' соответственно, то отображение

$$H * H': (SX, SA) \times I \to (Y, B),$$

определенное равенствами

$$(H * H')([x, t], t') = \begin{cases} H([x, 2t], t'), & 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2}, \\ H'([x, 2t-1], t'), & \frac{1}{2} \leqslant t \leqslant 1, \end{cases}$$

является ω-гомотопией между отображениями $\alpha_0 * \alpha_0'$ и $\alpha_1 * \alpha_1'$. ■

Отмеченная точка x_0 пары (X, A) называется *невырожденной*, если вложение $(x_0, x_0) \subset (X, A)$ является корасслоением (т. е. если для всякого отображения α_0: $(X, A) \to (Y, B)$ и гомотопии ω: $x_0 \times I \to B$ существует гомотопия H: $(X, A) \times I \to (Y, B)$, такая, что $H(x, 0) = \alpha_0(x)$ и $H(x_0, t) = \omega(t)$). Из леммы 3.8.1 и следствия 3.2.4 вытекает, что любая точка полиэдральной пары является невырожденной отмеченной точкой.

2. Лемма. *Пусть* (X, A) — *пара с невырожденной отмеченной точкой, а* (Y, B) — *произвольная пара. Тогда*

(a) *для всякого пути* ω *в пространстве* B *и всякого отображения* α_1: $(X, A, x_0) \to (Y, B, \omega(1))$ *существует отображение* α_0: $(X, A, x_0) \to (Y, B, \omega(0))$, *ω-гомотопное* α_1;

(b) *если отображения* α_0, α_0': $(X, A, x_0) \to (Y, B, \omega(0))$ *ω-гомотопны некоторому отображению* α_1, *то* $[\alpha_0] = [\alpha_0']$ *в* $[X, A, x_0; Y, B, \omega(0)]$;

(c) *если отображение* α_0 *ω-гомотопно* α_1, $\alpha_0 \simeq \alpha_0'$ (*как отображения* $(X, A, x_0) \to (Y, B, \omega(0))$), $\alpha_1 \simeq \alpha_1'$ (*как отображения* $(X, A, x_0) \to (Y, B, \omega(1))$) *и* $\omega \simeq \omega'$ (*как пути в* B), *то* α_0' *ω'-гомотопно* α_1', Доказательство. (a). Из определения невырожденной отмеченной точки следует существование отображения $H'\colon (X, A)\times I\to (Y, B)$, такого, что $H'(x, 0)=\alpha_1(x)$ и $H'(x_0, t)=\omega(1-t)$. Определим отображение $\alpha_0\colon (X, A, x_0)\to(Y, B, \omega(0))$, полагая $\alpha_0(x)=H'(x, 1)$. Тогда $H\colon (X, A)\times I\to(Y, B)$, где $H(x, t)=H'(x, 1-t)$, есть ω-гомотопия между α_0 и α_1.

(b). Поскольку x_0 — невырожденная отмеченная точка, существует ретракция $r\colon (X, A)\times I\to(x_0\times I\cup X\times 1, x_0\times I\cup A\times 1)$ (теорема 2.8.1), и мы определим отображение $r_t\colon (X, A)\to(x_0\times I\cup X\times 1, x_0\times I\cup A\times 1)$, полагая $r_t(x)=r(x, t)$. Пусть $G\colon (x_0\times I\cup X\times 1, x_0\times I\cup A\times 1)\times I\to(X, A)\times I$ — гомотопия относительно $(x_0, 0)$, определенная равенством $G(x, t, t')=(x, tt')$. Определим отображение

$$G_{t'}\colon (x_0\times I\cup X\times 1,\ x_0\times I\cup A\times 1)\to(X, A)\times I,$$

положив $G_{t'}(x, t)=G(x, t, t')$. Тогда $G_0\circ r_0\simeq G_1\circ r_0 \operatorname{rel} x_0$. Поскольку $G_0(x_0\times I)=(x_0, 0)$, имеем $G_0\circ r_0\simeq G_0\circ r_1 \operatorname{rel} x_0$. Пусть $H\colon (X, A)\times I\to(Y, B)$ — некоторая ω-гомотопия между α_0 и α_1. Тогда $H\circ G_1\circ r_0\simeq H\circ G_0\circ r_1 \operatorname{rel} x_0$. Ясно, что $H\circ G_0\circ r_1=\alpha_0$, и, значит, $\alpha_0\simeq H\circ G_1\circ r_0 \operatorname{rel} x_0$. Аналогично, если $H'\colon (X, A)\times I\to(Y, B)$ — какая-нибудь ω-гомотопия между отображениями α_0' и α_1, то $\alpha_0'\simeq H'\circ G_1\circ r_0 \operatorname{rel} x_0$. Поскольку

$$H\,|\,(x_0\times I\cup X\times 1)=H'\,|\,(x_0\times I\cup X\times 1),$$

то $H\circ G_1\circ r_0=H'\circ G_1\circ r_0$, и, значит, $\alpha_0\simeq\alpha_0' \operatorname{rel} x_0$.

(c). Заметим прежде всего, что вложение

$$(X\times\dot I\cup x_0\times I,\ A\times\dot I\cup x_0\times I)\subset(X, A)\times I$$

является корасслоением. Действительно, пусть $h\colon (I\times I, I\times 0\cup\dot I\times I)\approx(I\times I, 0\times I)$ — некоторый гомеоморфизм. Тогда можно определить гомеоморфизм

$$1\times h\colon (X\times I\times I,\ A\times I\times I)\approx(X\times I\times I,\ A\times I\times I),$$

который отображает подпространство $X\times I\times 0\cup X\times\dot I\times I\cup x_0\times I\times I$ в подпространство $X\times 0\times I\cup x_0\times I\times I$, а подпространство

$$A\times I\times 0\cup A\times\dot I\times I\cup x_0\times I\times I \quad\text{в}\quad A\times 0\times I\cup x_0\times I\times I.$$

Таким образом, необходимо лишь доказать, что подпространство $(X\times 0\cup x_0\times I, A\times 0\cup x_0\times I)\times I$ является ретрактом пары $(X\times I, A\times I)\times I$. Но это следует из того, что подпространство $(X\times 0\cup x_0\times I, A\times 0\cup x_0\times I)$ — ретракт пары $(X\times I, A\times I)$.

Определим теперь отображения F, F': $(X \times \dot{I} \cup x_0 \times I,\ A \times \dot{I} \cup \cup x_0 \times I) \to (Y,\ B)$, полагая

$$F(x,\ 0) = \alpha_0(x), \quad F(x,\ 1) = \alpha_1(x), \quad F(x_0,\ t) = \omega(t),$$
$$F'(x,\ 0) = \alpha'_0(x), \quad F'(x,\ 1) = \alpha'_1(x), \quad F'(x_0,\ t) = \omega'(t).$$

Поскольку $\alpha_0 \simeq \alpha'_0$, $\alpha_1 \simeq \alpha'_1$ и $\omega \simeq \omega'$, то $F \simeq F'$. Отображение α_0 ω-гомотопно α_1, поэтому F можно продолжить до отображения H: $(X,\ A) \times I \to (Y,\ B)$. Так как рассмотренное выше вложение есть корасслоение, гомотопию $F \simeq F'$ можно продолжить до отображения H': $(X,\ A) \times I \to (Y,\ B)$. Следовательно, H' является ω'-гомотопией между α'_0 и α'_1. ∎

Из лемм 2а и 2b следует, что если заданы путь ω и отображение α_1: $(X,\ A,\ x_0) \to (Y,\ B,\ \omega(1))$, то множество всех отображений α_0: $(X,\ A,\ x_0) \to (Y,\ B,\ \omega(0))$, ω-гомотопных отображению α_1, принадлежит единственному гомотопическому классу отображений $(X,\ A,\ x_0) \to (Y,\ B,\ \omega(0))$. Из леммы 2с следует, что этот гомотопический класс отображений $(X,\ A,\ x_0) \to (Y,\ B,\ \omega(0))$ зависит лишь от гомотопического класса $[\alpha_1] \in [X,\ A,\ x_0;\ Y,\ B,\ \omega(1)]$ и от класса пути $[\omega]$. Следовательно, если пара $(X,\ A)$ обладает невырожденной отмеченной точкой, то существует отображение

$$h_{[\omega]}\colon [X,\ A,\ x_0;\ Y,\ B,\ \omega(1)] \to [X,\ A,\ x_0;\ Y,\ B,\ \omega(0)],$$

которое однозначно характеризуется тем свойством, что равенство $h_{[\omega]}[\alpha_1] = [\alpha_0]$ имеет место тогда и только тогда, когда отображение α_0 ω-гомотопно отображению α_1. Из лемм 1а и 1b следует, что это отображение функториально как относительно $(X,\ A)$, так и относительно $(Y,\ B)$, а по лемме 1с в случае, когда пара $(X,\ A)$ является надстройкой, полученное отображение есть гомоморфизм.

3. Теорема. *Пусть $(X,\ A)$ — пара с невырожденной отмеченной точкой x_0. Для всякой пары $(Y,\ B)$ существует ковариантный функтор из фундаментального группоида пространства B в категорию множеств с отмеченным элементом, сопоставляющий точке $y_0 \in B$ множество $[X,\ A,\ x_0;\ Y,\ B,\ y_0]$, а классу пути $[\omega]$ в пространстве B отображение $h_{[\omega]}$. Если пара $(X,\ A)$ является надстройкой, то этот функтор принимает значения в категории групп и гомоморфизмов.*

Доказательство. Необходимо лишь проверить два функториальных свойства. Если отображение α: $(X,\ A,\ x_0) \to (Y,\ B,\ y_0)$ произвольно, а ε — постоянный путь в точке y_0, то постоянная гомотопия является ε-гомотопией отображения α в α, откуда $h_{[\varepsilon]} = 1$.

Пусть заданы пути ω и ω' в пространстве B, такие, что $\omega(1) = \omega'(0)$, ω-гомотопия H между отображениями α_0 и α_1 и ω'-гомотопия H' между отображениями α_1 и α_2 (где α_0, α_1, α_2 —

отображения $(X, A)\to(Y, B)$). Тогда $(\omega*\omega')$-гомотопия $H*H'$ между отображениями α_0 и α_2 определяется формулами

$$(H*H')(x, t)=\begin{cases} H(x, 2t), & 0\leqslant t\leqslant\frac{1}{2},\\ H'(x, 2t-1), & \frac{1}{2}\leqslant t\leqslant 1.\end{cases}$$

Это показывает, что $h_{[\omega*\omega']}=h_{[\omega]}\circ h_{[\omega']}$. ■

4. Следствие. *Если подпространство $B\subset Y$ линейно связно, а пара (X, A) обладает невырожденной отмеченной точкой x_0, то для любых двух точек y_0, $y_1\in B$ множества $[X, A, x_0; Y, B, y_0]$ и $[X, A, x_0; Y, B, y_1]$ находятся во взаимно однозначном соответствии. Более того, группа $\pi_1(B, y_0)$ действует как группа левых операторов на множестве $[X, A, x_0; Y, B, y_0]$, и указанное взаимно однозначное соответствие согласовано с этим действием.*

Доказательство. Пусть $[\omega]$ — класс некоторого пути в пространстве B. Отображение $h_{[\omega]}$ является взаимно однозначным соответствием. Если $[\omega]\in\pi_1(B, y_0)$, то $h_{[\omega]}$ — перестановка множества $[X, A, x_0; Y, B, y_0]$ и, следовательно, группа $\pi_1(B, y_0)$ действует как группа операторов. Если y_0 и y_1 — некоторые точки пространства B, то совокупность взаимно однозначных соответствий $h_{[\omega]}$, определенных классами путей $[\omega]$ пространства Y, соединяющих y_0 и y_1, совпадает с совокупностью отображений $h_{[\omega_0]}\circ h_{[\omega']}$, где ω_0 — фиксированный путь между точками y_0 и y_1, а $[\omega']\in\pi_1(B, y_0)$. ■

Если в доказанных выше утверждениях положить $B=Y$, то получатся соответствующие результаты для абсолютного случая. Так, если X — пространство с невырожденной отмеченной точкой x_0, а $y_0\in Y$, то группа $\pi_1(Y, y_0)$ действует как группа операторов на множестве $[X, x_0; Y, y_0]$. Если пространство Y линейно связно и y_0, $y_1\in Y$, то множества $[X, x_0; Y, y_0]$ и $[X, x_0; Y, y_1]$ находятся во взаимно однозначном соответствии, которое определено с точностью до действия группы $\pi_1(Y, y_0)$.

В случае когда Y есть H-пространство и его подпространство $B\subset Y$ также является H-пространством, мы получаем следующий результат, который можно считать обобщением теоремы 1.8.4:

5. Теорема. *Пусть пара (X, A) обладает невырожденной отмеченной точкой x_0, и пусть (Y, B) — пара H-пространств. Тогда группа $\pi_1(B, y_0)$, где $y_0\in B$ — отмеченная точка, тривиально действует на множестве $[X, A, x_0; Y, B, y_0]$.*

Доказательство. Пусть μ: $(Y\times Y, B\times B)\to(Y, B)$ — умножение. Для заданных отображения α: $(X, A, x_0)\to(Y, B, y_0)$ и замкнутого пути $\omega\colon (I, \dot{I}) \to (B, y_0)$ определим ω-гомотопию $H\colon (X, A) \times I \to (Y, B)$ между отображениями α и $h_{[\omega]}\alpha$, положив

$$H(x, t) = \mu(\alpha(x), \omega(t)).$$

Следовательно, $h_{[\omega]}[\alpha] = [\alpha]$ для всех $[\alpha] \in [X, A, x_0; Y, B, y_0]$ и всех $[\omega] \in \pi_1(B, y_0)$. ■

Существует интересная связь между действием группы $\pi_1(B, y_0)$ на множестве $[X, A, x_0; Y, B, y_0]$ и ее действием как группы накрывающих преобразований на универсальном накрывающем пространстве пространства B. Предположим, что пространства B и Y линейно связны и локально линейно связны, что $\pi_1(B, y_0) \approx \approx \pi_1(Y, y_0)$, а $\tilde{Y}$ — односвязное накрывающее пространство пространства Y с проекцией $p\colon \tilde{Y} \to Y$. Тогда $\tilde{B} = p^{-1}(B)$ является односвязным накрывающим пространством пространства B (поскольку $\pi_1(B, y_0) \approx \pi_1(Y, y_0)$). Пусть $\tilde{y}_0 \in p^{-1}(y_0)$. Существует каноническое отображение

$$\theta\colon [X, A, x_0; \tilde{Y}, \tilde{B}, \tilde{y}_0] \to [X, A; \tilde{Y}, \tilde{B}]$$

множества гомотопических классов, сохраняющих отмеченную точку, в множество свободных гомотопических классов. Поскольку пространство $\tilde{B}$ односвязно, это отображение биективно (напомним, что два отображения $\alpha_0, \alpha_1\colon (X, A) \to (Y, B)$ называются свободно гомотопными, если существует путь ω в пространстве B между $\alpha_0(x_0)$ и $\alpha_1(x_0)$, такой, что α_0 ω-гомотопно α_1).

6. Лемма. *Пусть в тех же обозначениях, что и выше, $g\colon (\tilde{Y}, \tilde{B}, \tilde{y}_0) \to (\tilde{Y}, \tilde{B}, \tilde{y}_1)$ — накрывающее преобразование, и пусть $\tilde{\omega}$ — путь в пространстве $\tilde{B}$ от точки $\tilde{y}_0$ до $\tilde{y}_1$. Тогда имеет место коммутативная диаграмма*

$$\begin{tikzcd}
{[X, A, x_0; Y, B, y_0]} \arrow[d, "h_{p_\#[\tilde{\omega}]}"', "\approx"] & {[X, A, x_0; \tilde{Y}, \tilde{B}, \tilde{y}_0]} \arrow[l, "p_\#"'] \arrow[r, "\theta", "\approx"'] \arrow[d, "\approx"', "h_{[\tilde{\omega}]} \circ g_\#"] & {[X, A; \tilde{Y}, \tilde{B}]} \arrow[d, "\approx"', "g_\#"] \\
{[X, A, x_0; Y, B, y_0]} & {[X, A, x_0; \tilde{Y}, \tilde{B}, \tilde{y}_0]} \arrow[l, "p_\#"'] \arrow[r, "\theta", "\approx"'] & {[X, A; \tilde{Y}, \tilde{B}]}
\end{tikzcd}$$

Доказательство. Поскольку g — накрывающее преобразование, $p = p \circ g$ и $p_\# = p_\# \circ g_\#$. Коммутативность левого квадрата вытекает отсюда и из леммы 1b. Поскольку $\theta \circ h_{[\tilde{\omega}]} = \theta$, коммутативность правого квадрата вытекает из того очевидного факта, что $\theta \circ g_\# = g_\# \circ \theta$. ■

В следствии 2.6.4 был указан изоморфизм $\psi\colon G(\tilde{B} \mid B) \approx \approx \pi_1(B, y_0)$, сопоставляющий отображению g элемент $[p \circ \tilde{\omega}] \in$

$\in \pi_1(B, y_0)$. Следовательно, лемма 6 описывает связь между действием группы $G(\tilde{B} \mid B) \approx G(\tilde{Y} \mid Y)$ на множестве свободных гомотопических классов $[X, A; \tilde{Y}, \tilde{B}]$ и действием группы $\pi_1(B, y_0)$ на множестве $[X, A, x_0; Y, B, y_0]$.

7. Следствие. *Пусть X — односвязное пространство с невырожденной отмеченной точкой, и пусть $\tilde{Y}$ — односвязное накрывающее пространство локально линейно связного пространства Y. Существует биективное соответствие между множеством свободных гомотопических классов $[X; \tilde{Y}]$ и множеством гомотопических классов $[X, x_0; Y, y_0]$ с отмеченной точкой, согласованное с действиями групп $G(\tilde{Y} \mid Y)$ на первом множестве и $\pi_1(Y, y_0)$ на втором посредством изоморфизма ψ: $G(\tilde{Y} \mid Y) \approx \pi_1(Y, y_0)$.*

Доказательство. Это утверждение вытекает из леммы 6, где следует положить $B = Y$ и $A = X$, и из следующего замечания. Поскольку пространство X односвязно, из теоремы о поднятии 2.4.5, свойства накрывающей гомотопии для отображения p: $\tilde{Y} \to Y$ (теорема 2.2.3) и свойства единственности поднятия (теорема 2.2.2) следует, что отображение $p_{\#}$: $[X, x_0; \tilde{Y}, \tilde{y}_0] \to$ $\to [X, x_0; Y, y_0]$ биективно. ■

Обратимся теперь к гомотопическим группам. Так как

$$\pi_n(X, x_0) = [S^n(\dot{I}), 0; X, x_0] = [S^n(I), S^n(\dot{I}), 0; X, X, x_0],$$

мы получаем следующий результат:

8. Теорема. *Для всякого пространства X и любого целого $n \geqslant 1$ существует ковариантный функтор из фундаментального группоида пространства X в категорию групп и гомоморфизмов, сопоставляющий точке $x \in X$ группу $\pi_n(X, x)$, а классу путей $[\omega]$ отображение $h_{[\omega]}$: $\pi_n(X, \omega(1)) \to \pi_n(X, \omega(0))$. Значит, группа $\pi_1(X, x_0)$ действует как группа левых операторов на группе $\pi_n(X, x_0)$. В случае $n = 1$ это действие является сопряжением. Если пространство X линейно связно и $x_0, x_1 \in X$, то группы $\pi_n(X, x_0)$ и $\pi_n(X, x_1)$ изоморфны, причем этот изоморфизм определяется однозначно с точностью до действия группы $\pi_1(X, x_0)$.*

Доказательство. Все эти утверждения вытекают из теоремы 3 и следствия 4, за исключением того, что группа $\pi_1(X, x_0)$ действует на себе посредством сопряжения. Пусть H: $S(\dot{I}) \times I \to X$ — некоторая ω-гомотопия между α_0 и α_1, где ω, α_0 и α_1 — замкнутые пути, начинающиеся в точке x_0. Определим отображение H': $I \times I \to X$, полагая

$$H'(t, t') = H([1, t], t').$$

Тогда $H'|0\times I = H'|1\times I = \omega$, $H'|I\times 0 = \alpha_0$ и $H'|I\times 1 = \alpha_1$. Из леммы 1.8.6 следует, что путь $(\omega * \alpha_1) * (\omega^{-1} * \alpha_0^{-1})$ гомотопен нулю. Следовательно, $[\alpha_0] = [\omega][\alpha_1][\omega]^{-1}$, и, значит, $h_{[\omega]}[\alpha_1] = [\omega][\alpha_1][\omega]^{-1}$. ∎

Теорема 8 показывает, что действие группы $\pi_1(X, x_0)$ на себе посредством сопряжения (как и в теореме 1.8.3) продолжается до действия на всех группах $\pi_n(X, x_0)$, $n \geqslant 1$.

Линейно связное пространство X называется *n-простым* ($n \geqslant 1$), если для некоторой точки $x_0 \in X$ (и, следовательно, для всех других отмеченных точек $x \in X$) группа $\pi_1(X, x_0)$ действует на группе $\pi_n(X, x_0)$ тривиальным образом. Так, односвязное пространство является n-простым для всех $n \geqslant 1$; пространство X тогда и только тогда является 1-простым, когда группа $\pi_1(X, x_0)$ абелева. Для n-простых пространств существует единственный канонический изоморфизм $\pi_n(X, x_0) \approx \pi_n(X, x_1)$, и всякое отображение $\alpha\colon S^n \to X$ определяет единственный элемент группы $\pi_n(X, x_0)$ (независимо от того, переводит или нет это отображение отмеченную точку $p_0 \in S^n$ в x_0): множество $\pi_n(X, x_0)$ находится во взаимно однозначном соответствии с множеством свободных гомотопических классов отображений $S^n \to X$. Это свойство весьма полезно. Для n-простых пространств мы будем обычно писать $\pi_n(X)$, не указывая отмеченную точку. Из теоремы 5 вытекает следующее обобщение теоремы 1.8.4:

9. Теорема. *Линейно связное H-пространство является n-простым для всех* $n \geqslant 1$. ∎

Аналогичные соображения применимы и к относительным гомотопическим группам.

10. Теорема. *Для всякой пары* (X, A) *и каждого* $n \geqslant 1$ *существует ковариантный функтор из фундаментального группоида пространства A в категорию множеств с отмеченным элементом, если* $n = 1$, *и в категорию групп, если* $n \geqslant 2$, *сопоставляющий точке* $x \in A$ *группу* $\pi_n(X, A, x)$, *а классу путей* $[\omega]$ *в подпространстве A отображение*

$$h_{[\omega]}\colon \pi_n(X, A, \omega(1)) \to \pi_n(X, A, \omega(0)).$$

Значит, группа $\pi_1(A, x_0)$ *действует как группа левых операторов на множестве* $\pi_n(X, A, x_0)$, *и если A линейно связно и* $x_0, x_1 \in A$, *то группы* $\pi_n(X, A, x_0)$ *и* $\pi_n(X, A, x_1)$ *изоморфны, и этот изоморфизм определен с точностью до действия группы* $\pi_1(A, x_0)$. ∎

Пусть ω — некоторый путь в подпространстве A. Из леммы 1а следует, что для $n > 1$ имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd}
\pi_n(X, A, \omega(1)) \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "h_{[\omega]}"'] & \pi_{n-1}(A, \omega(1)) \arrow[d, "h_{[\omega]}"] \\
\pi_n(X, A, \omega(0)) \arrow[r, "\partial"] & \pi_{n-1}(A, \omega(0))
\end{tikzcd}$$

Значит, существует ковариантный функтор из фундаментального группоида пространства A в категорию точных последовательностей, сопоставляющий точке $x_0 \in A$ гомотопическую последовательность триады (X, A, x_0).

Пара (X, A), у которой пространство A линейно связно, называется *n-простой* ($n \geqslant 1$), если группа $\pi_1(A, x_0)$ тривиально действует на $\pi_n(X, A, x_0)$ для некоторой (и, следовательно, для всех) отмеченной точки $x_0 \in A$. Если пространство A односвязно, то пара (X, A) является n-простой для всех $n \geqslant 1$.

11. Теорема. *Пусть (X, A) — пара H-пространств, причем подпространство A линейно связно. Тогда пара (X, A) является n-простой для всех $n \geqslant 1$.*

Доказательство. Это утверждение является непосредственным следствием теоремы 5. ■

Если пара (X, A) является n-простой и $x_0, x_1 \in A$, то группы $\pi_n(X, A, x_0)$ и $\pi_n(X, A, x_1)$ канонически изоморфны. Следовательно, каждое отображение α: $(E^n, S^{n-1}) \to (X, A)$ определяет единственный элемент группы $\pi_n(X, A, x_0)$ (независимо от того, переводит или нет отображение α отмеченную точку $p_0 \in S^{n-1}$ в x_0), и множество элементов группы $\pi_n(X, A, x_0)$ находится во взаимно однозначном соответствии с множеством свободных гомотопических классов $[E^n, S^{n-1}; X, A]$. В случае когда пара (X, A) является n-простой, мы будем часто опускать отмеченную точку и писать просто $\pi_n(X, A)$.

Действие группы $\pi_1(A, x_0)$ на множестве $\pi_2(X, A, x_0)$ тесно связано с сопряжением, как показывает следующая

12. Теорема. *Пусть $a, b \in \pi_2(X, A, x_0)$. Тогда*

$$aba^{-1} = h_{\partial a}(b).$$

Доказательство. Пусть $X' = P(X, x_0)$, p: $X' \to X$ — естественная проекция и $A' = p^{-1}(A)$. Предположим, что $x'_0 \in A'$ — постоянный путь в точке x_0. Согласно теореме 7.2.8, имеет место изоморфизм

$$p_{\#}: \pi_2(X', A', x'_0) \approx \pi_2(X, A, x_0).$$

Пусть $a' = p_{\#}^{-1}(a)$ и $b' = p_{\#}^{-1}(b)$. Заметим, что по лемме 1b

$$h_{\partial a}(b) = p_{\#}(h_{\partial a'}(b')).$$

Значит, достаточно показать, что $a'b'a'^{-1} = h_{\partial a'}(b')$. Поскольку пространство X' стягиваемо, из точности гомотопической последовательности триады (X', A', x'_0) находим

$$\partial: \pi_2(X', A', x'_0) \approx \pi_1(A', x'_0).$$

Для завершения доказательства необходимо лишь показать, что

$$\partial\left(a'b'a'^{-1}\right) = \partial\left(h_{\partial a'}(b')\right).$$

Левая часть равна $(\partial a')(\partial b')(\partial a')^{-1}$, а поскольку отображение ∂ коммутирует с $h_{\partial a'}$, правая часть равна $h_{\partial a'}(\partial b')$. Теорема вытекает теперь из того факта, что действие группы $\pi_1(A', x_0')$ на себе, определяемое посредством h, совпадает с сопряжением. ■

Отсюда мы снова получаем, что группа $\pi_2(X, x_0) \approx \pi_2(X, \{x_0\}, x_0)$ абелева. Вместе с точностью гомотопической последовательности это дает нам такое

13. Следствие. *Вложение j: $(X, x_0) \subset (X, A)$ индуцирует гомоморфизм*

$$j_{\#}\colon \pi_2(X, x_0) \to \pi_2(X, A, x_0),$$

образ которого содержится в центре группы $\pi_2(X, A, x_0)$. ■

Следующий результат является обобщением теоремы 1.8.7 на высшие относительные гомотопические группы.

14. Теорема. *Пусть отображения f: $(X, A, x_0) \to (Y, B, y_0)$ и g: $(X, A, x_0) \to (Y, B, y_1)$ свободно гомотопны. Тогда существует путь ω в пространстве B от точки y_0 до точки y_1, такой, что*

$$f_{\#} = h_{[\omega]} \circ g_{\#}\colon \pi_n(X, A, x_0) \to \pi_n(Y, B, y_0); \qquad n \geqslant 2.$$

Доказательство. Пусть F: $(X, A) \times I \to (Y, B)$ — гомотопия между отображениями $f \mid (X, A)$ и $g \mid (X, A)$, и пусть $\omega(t) = F(x_0, 1-t)$. Тогда ω есть путь в пространстве B от y_0 до y_1. Если отображение α: $(I^n, \dot{I}^n, p_0) \to (X, A, x_0)$ представляет элемент множества $\pi_n(X, A, x_0)$, то композиция

$$(I^n, \dot{I}^n) \times I \xrightarrow{\alpha \times 1} (X, A) \times I \xrightarrow{F} (Y, B)$$

является ω-гомотопией между отображениями $f \circ \alpha$ и $g \circ \alpha$. Следовательно,

$$f_{\#}[\alpha] = [f \circ \alpha] = h_{[\omega]}([g \circ \alpha]) = \left(h_{[\omega]} \circ g_{\#}\right)[\alpha]. \ ■$$

Это приводит нас к следующему аналогу теоремы 1.8.8:

15. Следствие. *Пусть f: $(X, A) \to (Y, B)$ — гомотопическая эквивалентность. Тогда для каждой точки $x \in A$ отображение f индуцирует изоморфизм*

$$f_{\#}\colon \pi_n(X, A, x) \approx \pi_n(Y, B, f(x)).$$

Доказательство. Пусть отображение g: $(Y, B) \to (X, A)$ гомотопически обратно f. В силу теоремы 14 существуют путь ω в A от $gf(x)$ до x и путь ω' в B от $fgf(x)$ до $f(x)$, для которых коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd}
\pi_n(X, A, x) \arrow[r, "h_{[\omega]}"] \arrow[d, "f_\#"'] & \pi_n(X, A, gf(x)) \arrow[d, "f_\#"] \\
\pi_n(Y, B, f(x)) \arrow[r, "h_{[\omega']}"] \arrow[ur, "g^\#"] & \pi_n(Y, B, fgf(x))
\end{tikzcd}$$

Поскольку отображения $h_{[\omega]}$ и $h_{[\omega']}$ являются изоморфизмами, все отображения в этой диаграмме — также изоморфизмы. ■

§ 4. Гомоморфизм Гуревича

Не известно алгоритма вычисления абсолютных или относительных гомотопических групп топологического пространства (даже если известна триангуляция этого пространства)[1]). Одним из немногих методов, пригодных для общего изучения гомотопических групп, является сравнение их с соответствующими целочисленными сингулярными группами гомологий. Такое сравнение осуществляется с помощью канонического гомоморфизма гомотопических групп в группы гомологий. В этом параграфе дается определение и рассматриваются функториальные свойства этого гомоморфизма. В следующем параграфе будет доказана теорема о том, что этот гомоморфизм является изоморфизмом для первой нетривиальной гомотопической группы.

На протяжении всего этого параграфа будет использоваться целочисленная сингулярная теория гомологий. Пусть $n \geqslant 1$. Напомним, что $H_q(I^n, \dot{I}^n) = 0$ для $q \neq n$, а группа $H_n(I^n, \dot{I}^n)$ — бесконечная циклическая. Для изучения соотношений между группами гомологий некоторых пар в I^n $(n \geqslant 1)$ определим следующие пространства:

$$I_1^n = \{(t_1, \ldots, t_n) \in I^n \mid t_n \leqslant 1/2\};$$
$$\dot{I}_1^n = (I_1^n \cap \dot{I}^n) \cup \{(t_1, \ldots, t_n) \in I^n \mid t_n = 1/2\};$$
$$I_2^n = \{(t_1, \ldots, t_n) \in I^n \mid t_n \geqslant 1/2\};$$
$$\dot{I}_2^n = (I_2^n \cap \dot{I}^n) \cup \{(t_1, \ldots, t_n) \in I^n \mid t_n = 1/2\}.$$

Тогда $I_1^n \cup I_2^n = I^n$ и $(I_1^n \cup \dot{I}_2^n) \cap (\dot{I}_1^n \cup I_2^n) = \dot{I}_1^n \cup \dot{I}_2^n$. Из точности последовательности Майера — Виеториса для пары $\{I_1^n \cup \dot{I}_2^n, \dot{I}_1^n \cup I_2^n\}$, удовлетворяющей аксиоме вырезания, получаем

$$H_q(I_1^n \cup \dot{I}_2^n, \dot{I}_1^n \cup \dot{I}_2^n) \oplus H_q(\dot{I}_1^n \cup I_2^n, \dot{I}_1^n \cup \dot{I}_2^n) \approx H_q(I^n, \dot{I}_1^n \cup \dot{I}_2^n).$$

---

[1]) Алгоритм нахождения гомотопических групп односвязного комплекса предложен Брауном. Для неодносвязных комплексов такой алгоритм невозможен. — *Прим. ред.*

Из свойства вырезания мы также получаем изоморфизмы

$$H_q(I_1^n, \dot{I}_1^n) \approx H_q(I_1^n \cup \dot{I}_2^n, \dot{I}_1^n \cup \dot{I}_2^n),$$

$$H_q(I_2^n, \dot{I}_2^n) \approx H_q(\dot{I}_1^n \cup I_2^n, \dot{I}_1^n \cup \dot{I}_2^n).$$

Комбинируя эти свойства, легко видеть, что (i_1: $(I_1^n, \dot{I}_1^n) \subset (I^n, \dot{I}_1^n \cup \dot{I}_2^n)$ и i_2: $(I_2^n, \dot{I}_2^n) \subset (I^n, \dot{I}_1^n \cup \dot{I}_2^n)$ — вложения) справедлива следующая

1. Лемма. *Вложения i_1 и i_2 определяют представление группы $H_q(I^n, \dot{I}_1^n \cup \dot{I}_2^n)$ в виде прямой суммы:*

$$i_{1*} \oplus i_{2*}\colon H_q(I_1^n, \dot{I}_1^n) \oplus H_q(I_2^n, \dot{I}_2^n) \approx H_q(I^n, \dot{I}_1^n \cup \dot{I}_2^n). \ \blacksquare$$

Пусть отображение ν_1: $(I^n, \dot{I}^n) \to (I_1^n, \dot{I}_1^n)$ определено равенством $\nu_1(t_1, \ldots, t_n) = (t_1, \ldots, t_{n-1}, t_n/2)$. Определим отображение ν_2: $(I^n, \dot{I}^n) \to (I_2^n, \dot{I}_2^n)$, полагая $\nu_2(t_1, \ldots, t_n) = (t_1, \ldots, t_{n-1}, (t_n + 1)/2)$. Пусть i: $(I^n, \dot{I}^n) \subset (I^n, \dot{I}_1^n \cup \dot{I}_2^n)$ — вложение.

2. Следствие. *Для любого элемента $z \in H_n(I^n, \dot{I}^n)$ имеет место равенство*

$$i_* z = i_{1*}\nu_{1*} z + i_{2*}\nu_{2*} z.$$

Доказательство. Пусть j_1: $(I^n, \dot{I}_1^n \cup \dot{I}_2^n) \subset (I^n, I_1^n \cup \dot{I}_2^n)$ и j_2: $(I^n, \dot{I}_1^n \cup \dot{I}_2^n) \subset (I^n, \dot{I}_1^n \cup I_2^n)$ — вложения. Тогда $j_{1*}i_{1*} = 0$, а $j_{1*}i_{2*}$ — изоморфизм группы $H_q(I_2^n, \dot{I}_2^n)$ на группу $H_q(I^n, I_1^n \cup \dot{I}_2^n)$ (индуцированный вложением $j_1 i_2$, которое является вырезанием). Аналогично $j_{2*}i_{2*} = 0$ и $j_{2*}i_{1*}$ — изоморфизм $H_q(I_1^n, \dot{I}_1^n) \to H_q(I^n, \dot{I}_1^n \cup I_2^n)$. Из леммы 1 следует, что

$$\ker j_{1*} \cap \ker j_{2*} = 0.$$

Значит, для завершения доказательства достаточно показать, что элемент

$$i_* z - i_{1*}\nu_{1*} z - i_{2*}\nu_{2*} z$$

принадлежит ядрам гомоморфизмов j_{1*} и j_{2*}.

Докажем прежде всего, что $j_{1*}(i_* z - i_{1*}\nu_{1*} z - i_{2*}\nu_{2*} z) = 0$. Поскольку $j_{1*}i_{1*} = 0$, мы должны показать, что $j_{1*}i_* z = j_{1*}i_{2*}\nu_{2*} z$. Ясно, что отображение $j_1 \circ i$ совпадает с вложением $(I^n, \dot{I}^n) \subset (I^n, I_1^n \cup \dot{I}_2^n)$, а отображение $j_1 i_2 \nu_2$ совпадает с отображением f: $(I^n, \dot{I}^n) \to (I^n, I_1^n \cup \dot{I}_2^n)$, определенным равенством $f(t_1, \ldots, t_n) = (t_1, \ldots, t_{n-1}, (t_n + 1)/2)$. Гомотопию H между отображениями $j_1 i$ и f можно определить, например, полагая

$$H((t_1, \ldots, t_n), t) = (t_1, \ldots, t_{n-1}, (t_n + t)/(t + 1)).$$

Следовательно, $j_{1*}i_* = f_* = j_{1*}i_{2*}v_{2*}$. Аналогично доказывается, что $j_{2*}(i_*z - i_{1*}v_{1*}z - i_{2*}v_{2*}z) = 0$. ■

Если $n \geqslant 1$, то подмножество $I \times \dot{I}^{n-1} \cup 0 \times I^{n-1} \subset \dot{I}^n$ стягиваемо. Следовательно, $H_q(I^n, I \times \dot{I}^{n-1} \cup 0 \times I^{n-1}) = 0$ для всех q. Из точности гомологической последовательности триады $(I^n, \dot{I}^n, I \times \dot{I}^{n-1} \cup 0 \times I^{n-1})$ следует, что отображение

$$\partial\colon H_q(I^n, \dot{I}^n) \to H_{q-1}(\dot{I}^n, I \times \dot{I}^{n-1} \cup 0 \times I^{n-1})$$

является изоморфизмом для всех q. Определим отображение

$$j\colon (I^{n-1}, \dot{I}^{n-1}) \to (\dot{I}^n, I \times \dot{I}^{n-1} \cup 0 \times I^{n-1}), \qquad n \geqslant 2,$$

по формуле $j(t_1, \ldots, t_{n-1}) = (1, t_1, \ldots, t_{n-1})$. Это отображение совпадает с композицией гомеоморфизма $(I^{n-1}, \dot{I}^{n-1}) \to (1 \times I^{n-1}, 1 \times \dot{I}^{n-1})$ и отображения вырезания

$$(1 \times I^{n-1}, 1 \times \dot{I}^{n-1}) \subset (\dot{I}^n, I \times \dot{I}^{n-1} \cup 0 \times I^{n-1}).$$

Следовательно, гомоморфизм

$$j_*\colon H_q(I^{n-1}, \dot{I}^{n-1}) \to H_q(\dot{I}^n, I \times \dot{I}^{n-1} \cup 0 \times I^{n-1})$$

является изоморфизмом для всех q.

Определим канонические образующие $Z_n \in H_n(I^n, \dot{I}^n)$ $(n \geqslant 1)$ индукцией по n следующим образом:

(a) $Z_1 \in H_1(I, \dot{I})$ — единственный элемент, для которого $\partial Z_1 = \{(1) - (0)\} \in H_0(\dot{I})$;

(b) если $n \geqslant 2$, то $Z_n \in H_n(I^n, \dot{I}^n)$ — единственный элемент, для которого $\partial Z_n = j_* Z_{n-1} \in H_{n-1}(\dot{I}^n, I \times \dot{I}^{n-1} \cup 0 \times I^{n-1})$.

Если задано отображение $\alpha\colon (I^n, \dot{I}^n) \to (X, A)$, то $\alpha_* Z_n \in H_n(X, A)$. Если $\alpha \simeq \beta$, то $\alpha_* Z_n = \beta_* Z_n$. Следовательно, при $n \geqslant 1$ существует корректно определенное отображение

$$\varphi\colon \pi_n(X, A, x_0) \to H_n(X, A),$$

такое, что $\varphi[\alpha] = \alpha_* Z_n$, где отображение $\alpha\colon (I^n, \dot{I}^n) \to (X, A)$ переводит p_0 в x_0 и представляет некоторый элемент группы $\pi_n(X, A, x_0)$. Отождествляя группы $\pi_n(X, x_0)$ и $\pi_n(X, \{x_0\}, x_0)$, получаем также отображение $\varphi\colon \pi_n(X, x_0) \to H_n(X, x_0)$. В следующей теореме собраны некоторые важные свойства отображения φ.

3. Теорема. *Если $n \geqslant 2$ или если $n = 1$ и $A = \{x_0\}$, то отображение φ является гомоморфизмом. Он обладает следующими функториальными свойствами:*

(a) *при $n \geqslant 2$ коммутативна следующая диаграмма:*

$$\begin{array}{ccc} \pi_n(X, A, x_0) & \xrightarrow{\partial} & \pi_{n-1}(A, x_0) \\ \varphi \downarrow & & \downarrow \varphi \\ H_n(X, A) & \xrightarrow{\partial} & H_{n-1}(A, x_0) \end{array}$$

(b) *для всякого отображения $f\colon (X, A, x_0) \to (Y, B, y_0)$ коммутативна следующая диаграмма:*

$$\begin{array}{ccc} \pi_n(X, A, x_0) & \xrightarrow{f_\#} & \pi_n(Y, B, y_0) \\ \varphi \downarrow & & \downarrow \varphi \\ H_n(X, A) & \xrightarrow{f_*} & H_n(Y, B) \end{array}$$

Доказательство. Пусть отображения $\alpha_1, \alpha_2\colon (I^n, \dot{I}^n) \to (X, A)$ таковы, что

$$\alpha_1(t_1, \ldots, t_{n-1}, 1) = \alpha_2(t_1, \ldots, t_{n-1}, 0)$$

(всякие два отображения $(I^n, \dot{I}^n)$ в (X, A) гомотопны таким отображениям, если $n \geqslant 2$ или если $n = 1$ и $A = \{x_0\}$). Тогда $\alpha_1 * \alpha_2 = \beta \circ i$, где $i\colon (I^n, \dot{I}^n) \subset (I^n, \dot{I}^n_1 \cup \dot{I}^n_2)$, а отображение $\beta\colon (I^n, \dot{I}^n_1 \cup \dot{I}^n_2) \to (X, A)$ определяется равенством

$$\beta(t_1, \ldots, t_n) = \begin{cases} \alpha_1(t_1, \ldots, t_{n-1}, 2t_n), & t_n \leqslant \frac{1}{2}, \\ \alpha_2(t_1, \ldots, t_{n-1}, 2t_n - 1), & t_n \geqslant \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Тогда $\varphi[\alpha_1 * \alpha_2] = \beta_* i_* Z_n = \beta_*(i_{1*}\nu_{1*}Z_n + i_{2*}\nu_{2*}Z_n)$, где последнее равенство имеет место в силу следствия 2. Поскольку $\beta i_1 \nu_1 = \alpha_1$ и $\beta i_2 \nu_2 = \alpha_2$, мы видим, что

$$\varphi[\alpha_1 * \alpha_2] = \alpha_{1*}Z_n + \alpha_{2*}Z_n = \varphi[\alpha_1] + \varphi[\alpha_2].$$

Значит, φ — гомоморфизм, если только множество $\pi_n(X, A, x_0)$ является группой.

Докажем утверждение (a). Пусть отображение $\alpha\colon (I^n, \dot{I}^n) \to (X, A)$ представляет некоторый элемент группы $\pi_n(X, A)$ $(n \geqslant 2)$. Предположим, что $\alpha(I \times \dot{I}^{n-1} \cup 0 \times I^{n-1}) = x_0$. Тогда $\partial[\alpha] = [\alpha']$, где отображение $\alpha'\colon (I^{n-1}, \dot{I}^{n-1}) \to (A, x_0)$ определяется равенством $\alpha' = (\alpha | (\dot{I}^n, I \times \dot{I}^{n-1} \cup 0 \times I^{n-1})) \circ j$. Имеем

$$\begin{aligned} \varphi\partial[\alpha] &= \alpha'_* Z_{n-1} = (\alpha | (\dot{I}^n, I \times \dot{I}^{n-1} \cup 0 \times I^{n-1}))_* j_* Z_{n-1} = \\ &= (\alpha | (\dot{I}^n, I \times \dot{I}^{n-1} \cup 0 \times I^{n-1}))_* \partial Z_n = \\ &= \partial \alpha_* Z_n = \partial\varphi[\alpha]. \end{aligned}$$

Наконец, утверждение (b) следует из того, что $(f\alpha)_* = f_*\alpha_*$. ■

Отображение φ называется *гомоморфизмом Гуревича*. Следующий результат вытекает из теоремы 3.

4. Следствие. *Гомоморфизм Гуревича отображает гомотопическую последовательность триады* (X, A, x_0) *в гомологическую последовательность триады* (X, A, x_0). ■

Наша следующая цель — показать, что гомоморфизм Гуревича коммутирует с действием фундаментальной группы на соответствующем гомотопическом множестве. Рассмотрим сначала относительный случай.

5. Лемма. *Пусть* $[\alpha] \in \pi_n(X, A, x_0)$, $n \geqslant 2$, *и пусть* $[\omega] \in \pi_1(A, x_0)$. *Тогда*

$$\varphi(h_{[\omega]}[\alpha]) = \varphi[\alpha].$$

Доказательство. Пусть класс $[\alpha]$ представлен отображением α: $(I^n, \dot{I}^n) \to (X, A)$, а класс $h_{[\omega]}[\alpha]$ — отображением α': $(I^n, \dot{I}^n) \to (X, A)$. Тогда отображения α и α' свободно гомотопны (т. е. α и α' гомотопны как отображения пары $(I^n, \dot{I}^n)$ в пару (X, A)). Следовательно,

$$\varphi[\alpha] = \alpha_* Z_n = \alpha'_* Z_n = \varphi[\alpha'] = \varphi(h_{[\omega]}[\alpha]). \ ■$$

Докажем теперь соответствующий результат для абсолютного случая.

6. Лемма. *Пусть* $[\alpha] \in \pi_n(X, x_0)$ *и* $[\omega] \in \pi_1(X, x_0)$. *Тогда*

$$\varphi(h_{[\omega]}[\alpha]) = \varphi[\alpha].$$

Доказательство. Пусть пространство Y получено из куба I^n стягиванием его края $\dot{I}^n$ в одну точку, которую мы примем за отмеченную точку пространства Y и обозначим через y_0. Естественная проекция g: $(I^n, \dot{I}^n) \to (Y, y_0)$ индуцирует взаимно однозначное соответствие между множествами $[Y, y_0; X, x_0]$ и $[I^n, \dot{I}^n; X, x_0]$. Следовательно, множество $\pi_n(X, x_0)$ можно отождествить с множеством $[Y, y_0; X, x_0]$. Более того, g_*: $H_n(I^n, \dot{I}^n) \approx H_n(Y, y_0)$, и мы положим $g_* Z_n = Z'_n \in H_n(Y, y_0)$. Используя эти обозначения, можно сказать, что если элемент из $\pi_n(X, x_0)$ представлен отображением α: $(Y, y_0) \to (X, x_0)$, то $\varphi[\alpha] = \alpha_* Z'_n$. Пусть элемент $h_{[\omega]}[\alpha]$ представлен отображением α': $(Y, y_0) \to (X, x_0)$. Тогда α и α' гомотопны как отображения пространства Y в X. Следовательно, если $Z''_n \in H_n(Y)$ — единственный элемент, для которого $i'_* Z''_n = Z'_n$ (где i': $Y \subset (Y, y_0)$), то

$$(\alpha \mid Y)_* Z''_n = (\alpha' \mid Y)_* Z''_n.$$

Пусть $j'\colon X \subset (X, x_0)$. Тогда

$$\varphi[\alpha] = \alpha_* Z'_n = \alpha_* i'_* Z''_n = j'_*(\alpha \mid Y)_* Z''_n.$$

Аналогично $\varphi[\alpha'] = j'_*(\alpha' \mid Y)_* Z''_n$ и

$$\varphi[\alpha] = \varphi[\alpha'] = \varphi(h_{[\omega]}[\alpha]). \blacksquare$$

Определим группу $\pi'_n(X, A, x_0)$ $(n \geqslant 2)$ как факторгруппу группы $\pi_n(X, A, x_0)$ по нормальному делителю G, порожденному множеством

$$\{(h_{[\omega]}[\alpha])[\alpha]^{-1} \mid [\alpha] \in \pi_n(X, A, x_0),\ [\omega] \in \pi_1(A, x_0)\}.$$

Согласно лемме 5, φ переводит подгруппу G в 0 и, значит, определяет гомоморфизм

$$\varphi'\colon \pi'_n(X, A, x_0) \to H_n(X, A),$$

композиция которого с каноническим эпиморфизмом $\eta\colon \pi_n(X, A, x_0) \to \pi'_n(X, A, x_0)$ совпадает с φ. Заметим, что в силу теоремы 7.3.12 группы $\pi'_n(X, A, x_0)$ абелевы при всех $n \geqslant 2$.

Аналогично определим группу $\pi'_n(X, x_0)$ для $n \geqslant 1$ как факторгруппу группы $\pi_n(X, x_0)$ по нормальному делителю H, порожденному множеством

$$\{(h_{[\omega]}[\alpha])[\alpha]^{-1} \mid [\alpha] \in \pi_n(X, x_0),\ [\omega] \in \pi_1(X, x_0)\}.$$

Согласно лемме 6, отображение φ переводит подгруппу H в 0, и, значит, определен гомоморфизм

$$\varphi'\colon \pi'_n(X, x_0) \to H_n(X, x_0),$$

композиция которого с каноническим эпиморфизмом $\eta\colon \pi_n(X, x_0) \to \pi'_n(X, x_0)$ совпадает с гомоморфизмом φ. Заметим, что $\pi'_1(X, x_0)$ — факторгруппа группы $\pi_1(X, x_0)$ по ее коммутанту. Значит, группы $\pi'_n(X, x_0)$ абелевы при всех $n \geqslant 1$.

Поскольку группы $\pi'_n(X, A, x_0)$ и $\pi'_n(X, x_0)$ абелевы, нам будет легче сравнивать их с гомологическими группами (которые всегда абелевы), чем сами гомотопические группы. Для этого удобно заменить триаду $(I^n, \dot I^n, p_0)$, которую мы использовали раньше для определения группы $\pi_n(X, A, x_0)$, на гомеоморфную ей триаду $(\Delta^n, \dot\Delta^n, v_0)$, где Δ^n — стандартный n-мерный симплекс, использованный в § 4.1 для определения сингулярного комплекса (вершины симплекса Δ^n будут обозначаться через $v_0, v_1, \ldots, v_n$). Чтобы произвести эту замену, необходимо лишь выбрать некоторый гомеоморфизм $(\Delta^n, \dot\Delta^n, v_0) \to (I^n, \dot I^n, p_0)$. Всякий гомеоморфизм $h\colon (\Delta^n, \dot\Delta^n) \to (I^n, \dot I^n)$ индуцирует изоморфизм

$$h_*\colon H_n(\Delta^n, \dot\Delta^n) \approx H_n(I^n, \dot I^n).$$

Тождественное отображение ξ_n: $\Delta^n \subset \Delta^n$ является сингулярным симплексом, который представляет собой относительный цикл по модулю $\dot{\Delta}^n$ и класс гомологий $\{\xi_n\}$ которого является образующей бесконечной циклической группы $H_n(\Delta^n, \dot{\Delta}^n)$. Поскольку Z_n — образующая группы $H_n(I^n, \dot{I}^n)$ и h_* — изоморфизм, то либо $h_*\{\xi_n\} = Z_n$, либо $h_*\{\xi_n\} = -Z_n$. Мы хотим выбрать h таким образом, чтобы выполнялось первое равенство. Если $n = 1$, то, согласно определению элемента Z_1, симплициальный гомеоморфизм h: $\Delta^1 \to I$, где $h(v_0) = 0$ и $h(v_1) = 1$, обладает нужным нам свойством (т. е. $h_*\{\xi_1\} = Z_1$). В случае когда $n > 1$, мы выберем произвольный гомеоморфизм h: $(\Delta^n, \dot{\Delta}^n) \to (I^n, \dot{I}^n)$ так, чтобы $h(v_0) = p_0$. Если при этом $h_*\{\xi_n\} = -Z_n$, то заменим h на $h\lambda$, где λ — симплициальный гомеоморфизм Δ^n на себя, такой, что $\lambda(v_0) = v_0$ и $\lambda_*\{\xi_n\} = -\{\xi_n\}$ (например, в качестве λ можно взять симплициальное отображение, переставляющее вершины v_1 и v_2 и оставляющее все остальные вершины на своих местах). Следовательно, в любом случае можно найти такой гомеоморфизм h: $(\Delta^n, \dot{\Delta}^n, v_0) \to (I^n, \dot{I}^n, p_0)$, что $h_*\{\xi_n\} = Z_n$. Используя этот гомеоморфизм для представления элементов группы $\pi_n(X, A, x_0)$ отображениями α: $(\Delta^n, \dot{\Delta}^n) \to (X, A)$, где $\alpha(v_0) = x_0$, получаем $\varphi[\alpha] = \alpha_*\{\xi_n\} = \{\alpha\}$, причем в правой части этого равенства стоит класс гомологий пары (X, A), определяемый сингулярным симплексом α.

Пусть для произвольной пары (X, A) с отмеченной точкой $x_0 \in A$ и любого $n \geqslant 0$ комплекс $\Delta(X, A, x_0)^n$ представляет собой подкомплекс комплекса $\Delta(X)$, порожденный теми сингулярными симплексами σ: $\Delta^q \to X$, которые отображают каждую вершину симплекса Δ^q в точку x_0, а n-мерный остов $(\Delta^q)^n$ этого симплекса в A. Тогда $\Delta(X, A, x_0)^{n+1} \subset \Delta(X, A, x_0)^n$, и эти цепные комплексы совпадают в размерностях $\leqslant n$. Таким образом, мы получаем убывающую последовательность подкомплексов $\Delta(X, A, x_0)^n$ $(n \geqslant 0)$ комплекса $\Delta(X)$, пересечение которых содержится в $\Delta(A)$. Мы увидим, что если пространство X линейно связно, а пара (X, A) n-связна, то вложение $\Delta(X, A, x_0)^n \subset \Delta(X)$ является цепной эквивалентностью. Для этой цели будет использована следующая

7. Лемма. *Пусть C — подкомплекс свободного цепного комплекса $\Delta(X)$ (т. е. C порождается некоторыми сингулярными симплексами пространства X). Предположим, что каждому сингулярному симплексу σ: $\Delta^q \to X$ сопоставлено такое отображение $P(\sigma)$: $\Delta^q \times I \to X$, что*

(a) $P(\sigma)(z, 0) = \sigma(z)$, $z \in \Delta^q$;

(b) *если отображение $\bar{\sigma}$: $\Delta^q \to X$ определено формулой $\bar{\sigma}(z) = P(\sigma)(z, 1)$, то $\bar{\sigma}$ — сингулярный симплекс подкомплекса C, и если σ принадлежит C, то $\bar{\sigma} = \sigma$;*

(c) *если* e_q^i: $\Delta^{q-1} \to \Delta^q$ — *отображение i-й грани, то* $P(\sigma) \circ (e_q^i \times 1) = P(\sigma^{(i)})$.

Тогда вложение $C \subset \Delta(X)$ *является цепной эквивалентностью.*

Доказательство. Пусть j: $C \subset \Delta(X)$ — цепное вложение, и пусть цепное отображение τ: $\Delta(X) \to C$ определено равенством $\tau(\sigma) = \bar{\sigma}$ (из условия (c) вытекает, что τ — цепное отображение). Из условия (b) следует, что $\tau \circ j = 1_C$, и, значит, нам осталось лишь проверить, что $j \circ \tau \simeq 1_{\Delta(X)}$.

Определим для любого пространства Y отображения h_0, h_1: $Y \to Y \times I$, полагая $h_0(y) = (y, 0)$ и $h_1(y) = (y, 1)$. При доказательстве теоремы 4.4.3 с помощью метода ацикличных моделей было показано, что существует естественная цепная гомотопия D: $\Delta(Y) \to \Delta(Y \times I)$ между отображениями $\Delta(h_0)$ и $\Delta(h_1)$. Определим цепную гомотопию

$$D': \Delta(X) \to \Delta(X),$$

полагая $D'(\sigma) = \Delta(P(\sigma))(D(\xi_q))$, где σ: $\Delta^q \to X$ и ξ_q: $\Delta^q \subset \Delta^q$. Из условия (c) следует, что D' — цепная гомотопия, а из условия (a) и определения отображения $\bar{\sigma}$, — что D' — цепная гомотопия между отображениями $1_{\Delta(X)}$ и $j \circ \tau$. ■

8. **Теорема.** *Пусть* $x_0 \in A \subset X$; *предположим, что пространство* X *линейно связно, а пара* (X, A) *n-связна для некоторого* $n \geqslant 0$. *Тогда вложение* $\Delta(X, A, x_0)^n \subset \Delta(X)$ *является цепной эквивалентностью.*

Доказательство. Индукцией по q для всякого сингулярного симплекса σ: $\Delta^q \to X$ определим отображение $P(\sigma)$ таким образом, чтобы выполнялись свойства, сформулированные в лемме 7, и следующее дополнительное свойство: если σ принадлежит $\Delta(X, A, x_0)^n$, то $P(\sigma)$ совпадает с композицией

$$\Delta^q \times I \xrightarrow{p} \Delta^q \xrightarrow{\sigma} X,$$

где p — проекция на первый сомножитель.

Если $q = 0$, то σ: $\Delta^0 \to X$ — некоторая точка пространства X. Поскольку оно линейно связно, существует отображение $P(\sigma)$: $\Delta^0 \times I \to X$, такое, что $P(\sigma)(\Delta^0 \times 0) = \sigma(\Delta^0)$ и $P(\sigma)(\Delta^0 \times 1) = x_0$ (если $\sigma(\Delta^0) = x_0$, то в качестве $P(\sigma)$ мы возьмем постоянное отображение в точку x_0). Сказанное определяет обладающее всеми нужными нам свойствами отображение $P(\sigma)$ для произвольного симплекса σ размерности 0.

Пусть теперь $0 < q \leqslant n$. Предположим, что $P(\sigma)$ уже определено для всех симплексов σ размерности $< q$, причем нужные нам свойства выполняются. Пусть задан сингулярный симплекс σ: $\Delta^q \to X$. Если он принадлежит подкомплексу $\Delta(X, A, x_0)^n$, то положим $P(\sigma)=\sigma\circ p$. Пусть он не принадлежит подкомплексу $\Delta(X, A, x_0)^n$. Пункты (a) и (c) леммы 7 определяют отображение $P(\sigma)$ на подпространстве $\Delta^q\times 0\cup\dot\Delta^q\times I$; обозначим это отображение через $f\colon \Delta^q\times 0\cup\dot\Delta^q\times I\to X$. Можно определить гомеоморфизм $h\colon E^q\times I\approx\Delta^q\times I$, такой, что

$$h(E^q\times 0)=\Delta^q\times 0\cup\dot\Delta^q\times I,\qquad h(S^{q-1}\times 0)=\dot\Delta^q\times 1,$$
$$h(S^{q-1}\times I\cup E^q\times 1)=\Delta^q\times 1.$$

Пусть отображение $f'\colon (E^q, S^{q-1})\to(X, A)$ определено равенством $f'(z)=f(h(z, 0))$. Поскольку $q\leqslant n$ и пара (X, A) n-связна, существует гомотопия $H\colon (E^q, S^{q-1})\times I\to(X, A)$ отображения f' в некоторое отображение $E^q\to A$ (действительно, согласно определению n-связности, существует такая гомотопия даже относительно S^{q-1}). Тогда в качестве отображения $P(\sigma)$ можно взять композицию

$$\Delta^q\times I\xrightarrow{h^{-1}}E^q\times I\xrightarrow{H}X.$$

Таким образом, $P(\sigma)$ определяется для всех $q\leqslant n$. Заметим, что сингулярный симплекс размерности $>n$ тогда и только тогда принадлежит подкомплексу $\Delta(X, A, x_0)^n$, когда каждая его собственная грань принадлежит $\Delta(X, A, x_0)^n$. Следовательно, если отображение $P(\sigma)$ уже определено для всех размерностей $<q$, где $q>n$, и если $\sigma\colon \Delta^q\to X$ — некоторый сингулярный симплекс, то мы можем положить $P(\sigma)=\sigma\circ p$, если σ принадлежит подкомплексу $\Delta(X, A, x_0)^n$, и равным произвольному отображению $\Delta^q\times I\to X$, удовлетворяющему условиям (a) и (c) леммы 7 (такое отображение существует согласно свойству продолжения гомотопии), если σ не принадлежит подкомплексу $\Delta(X, A, x_0)^n$. Так построенное отображение $P(\sigma)$ непременно будет удовлетворять условию (b) леммы 7. Итак, отображения $P(\sigma)$ можно определить для каждого симплекса σ, чтобы выполнялись условия леммы 7. ■

Для $n\geqslant 0$ положим

$$H_q^{(n)}(X, A, x_0)=H_q(\Delta(X, A, x_0)^n,\quad \Delta(X, A, x_0)^n\cap\Delta(A)).$$

Имеют место канонические гомоморфизмы

$$\ldots\to H_q^{(n)}(X, A, x_0)\to H_q^{(n-1)}(X, A, x_0)\to\ldots\to H_q^{(0)}(X, A, x_0)\to$$
$$\to H_q(X, A).$$

9. Следствие. *Предположим, что пространство A линейно связно и для некоторого $n\geqslant 0$ пара (X, A) n-связна. Тогда каноническое отображение является изоморфизмом для всех q:*

$$H_q^{(n)}(X, A, x_0)\approx H_q(X, A).$$

Доказательство. Для любого $n\geqslant 0$ подкомплекс $\Delta(X, A, x_0)^n\cap\Delta(A)$ порожден множеством тех сингулярных симплексов в A, все вершины которых совпадают с x_0. Это условие не зависит от n. Поскольку пространство A линейно связно, пара $(A, \{x_0\})$ является 0-связной. Из теоремы 8 следует, что вложение $\Delta(X, A, x_0)^n \cap \Delta(A) \subset \Delta(A)$ представляет собой цепную эквивалентность при всех $n \geqslant 0$.

Поскольку пара (X, A) n-связна, $n \geqslant 0$, а подпространство A линейно связно, пространство X тоже линейно связно и, согласно теореме 8, вложение $\Delta(X, A, x_0)^n \subset \Delta(X)$ является цепной эквивалентностью. Нужное нам утверждение получается теперь как следствие этих фактов, если воспользоваться соответствующими точными последовательностями и леммой о пяти гомоморфизмах.

§ 5. Теорема Гуревича об изоморфизме

Основным результатом этого параграфа является теорема о том, что если пространства X и A линейно связны и для некоторого $n \geqslant 1$ пара (X, A) n-связна, то гомоморфизм Гуревича φ индуцирует изоморфизм φ' группы $\pi'_{n+1}(X, A, x_0)$ на группу $H_{n+1}(X, A)$. Эта теорема эквивалентна гомотопической аддиционной теореме, утверждающей, что объединение $(n+1)$-мерных граней $(n+2)$-мерного симплекса представляет собой гомотопическую границу тождественного отображения этого симплекса. Мы будем доказывать обе эти теоремы одновременно индукцией по n.

В процессе доказательства мы будем существенно использовать комплексы $\Delta(X, A, x_0)^n$ и следствие 7.4.9. Пусть отображение α: $(\Delta^n, \dot{\Delta}^n, (\Delta^n)^0) \to (X, A, x_0)$ представляет некоторый элемент группы $\pi_n(X, A, x_0)$. Тогда α является сингулярным симплексом комплекса $\Delta(X, A, x_0)^{n-1}$ и представляет класс гомологий $\{\alpha\} \in H_n^{(n-1)}(X, A, x_0)$. Поскольку каждый элемент группы $\pi_n(X, A, x_0)$ может быть представлен таким отображением α, гомоморфизм Гуревича φ': $\pi'_n(X, A, x_0) \to H_n(X, A)$ разлагается в композицию гомоморфизмов

$$\pi'_n(X, A, x_0) \xrightarrow{\varphi''} H_n^{(n-1)}(X, A, x_0) \to H_n(X, A)$$

и, следовательно, имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd}
\pi_n(X, A, x_0) \arrow[r, "\eta"] \arrow[d, "\varphi"'] & \pi'_n(X, A, x_0) \arrow[dl, "\varphi'"'] \arrow[d, "\varphi''"] \\
H_n(X, A) & H_n^{(n-1)}(X, A, x_0) \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

Теперь мы сформулируем предложения, соответствующие относительной и абсолютной теоремам Гуревича.

1. Предложение Φ_n $(n \geqslant 2)$. *Пусть пространство A линейно связно, а пара (X, A) $(n-1)$-связна. Тогда φ' — изоморфизм*

$$\varphi'\colon \pi'_n(X, A, x_0) \approx H_n(X, A).$$

2. Предложение $\overline{\Phi}_n$ $(n \geqslant 1)$. *Пусть пространство X $(n-1)$-связно. Тогда φ' — изоморфизм*

$$\varphi'\colon \pi'_n(X, x_0) \approx H_n(X, x_0).$$

Мы будем доказывать оба эти предложения одновременно индукцией по n вместе с третьим предложением, которое мы сейчас сформулируем. Если $n \geqslant 2$, то каждое отображение грани e^i_{n+1} является отображением триад

$$e^0_{n+1}\colon (\Delta^n, \dot{\Delta}^n, v_0) \to (\dot{\Delta}^{n+1}, (\Delta^{n+1})^{n-1}, v_1),$$
$$e^i_{n+1}\colon (\Delta^n, \dot{\Delta}^n, v_0) \to (\dot{\Delta}^{n+1}, (\Delta^{n+1})^{n-1}, v_0), \qquad 0 < i \leqslant n+1.$$

Для вершин v и v' симплекса Δ^{n+1} через $[vv']$ мы обозначаем класс линейного пути в Δ^{n+1} между v и v'. Определим элемент $b_1 \in \pi_1(\dot{\Delta}^2, v_0)$ и элемент $b_n \in \pi_n(\dot{\Delta}^{n+1}, (\Delta^{n+1})^{n-1}, v_0)$ (если $n \geqslant 2$) следующим образом:

$$b_1 = [v_0v_1] \circ [v_1v_2] \circ [v_2v_0],$$
$$b_2 = \left(h_{[v_0v_1]}\left[e^0_3\right]\right)\left[e^2_3\right]\left[e^1_3\right]^{-1}\left[e^3_3\right]^{-1},$$
$$b_n = h_{[v_0v_1]}\left[e^0_{n+1}\right] + \sum_{0 < i \leqslant n+1} (-1)^i \left[e^i_{n+1}\right], \quad n \geqslant 3.$$

Пусть $j\colon (\dot{\Delta}^2, v_0) \subset (\Delta^2, v_0)$ $(n=1)$ и $j\colon (\dot{\Delta}^{n+1}, (\Delta^{n+1})^{n-1}, v_0) \subset (\Delta^{n+1}, (\Delta^{n+1})^{n-1}, v_0)$ $(n \geqslant 2)$ — вложения. Следующее предложение есть гомотопическая аддиционная теорема:

3. Предложение B_n $(n \geqslant 1)$. $j_{\#}b_n = 0$.

Одновременное доказательство предложений 1, 2 и 3 будет состоять из следующих пяти частей:

(a) Доказательство предложения B_1.

(b) Доказательство того, что $B_1 \Rightarrow \overline{\Phi}_1$.

(c) Доказательство того, что $\overline{\Phi}_1, \overline{\Phi}_2, \ldots, \overline{\Phi}_{n-1} \Rightarrow B_n$ при $n \geqslant 2$.

(d) Доказательство того, что $B_n \Rightarrow \Phi_n$ при $n \geqslant 2$.

(e) Доказательство того, что $\Phi_n \Rightarrow \overline{\Phi}_n$ при $n \geqslant 2$.

(a). Мы должны доказать, что $j_{\#}b_1 = 0$. Но $j_{\#}b_1 \in \pi_1(\Delta^2, v_0)$, а $\pi_1(\Delta^2, v_0) = 0$, поскольку симплекс Δ^2 стягиваем. ■

(b). $B_1 \Rightarrow \overline{\Phi}_1$. Пусть пространство X линейно связно. Мы должны доказать, что $\varphi'\colon \pi_1'(X, x_0) \approx H_1(X, x_0)$. Поскольку пространство X линейно связно, вложение $\Delta(X, \{x_0\}, x_0)^0 \subset \Delta(X)$ является цепной эквивалентностью, и нам осталось лишь показать, что

$$\varphi''\colon \pi_1'(X, x_0) \approx H_1^{(0)}(X, \{x_0\}, x_0).$$

Если отображение $\alpha\colon (\Delta^1, \dot{\Delta}^1) \to (X, x_0)$ представляет элемент $[\alpha]' \in \pi_1'(X, x_0)$, то $\varphi''[\alpha]' = \{\alpha\}$, где $\{\alpha\}$ — класс гомологий сингулярного цикла α в группе $H_1^{(0)}(X, \{x_0\}, x_0)$. Всякий сингулярный одномерный симплекс $\sigma\colon (\Delta^1, \dot{\Delta}^1) \to (X, x_0)$ комплекса $\Delta(X, \{x_0\}, x_0)^0$ определяет элемент $[\sigma] \in \pi_1(X, x_0)$ и, следовательно, элемент $[\sigma]' \in \pi_1'(X, x_0)$. Если σ — постоянный сингулярный одномерный симплекс в точке x_0, то ясно, что $[\sigma]' = 0$. Поскольку группа $\pi_1'(X, x_0)$ абелева, а $\Delta_1(X, \{x_0\}, x_0)^0$ — свободная абелева группа, порожденная сингулярными симплексами, принадлежащими группе $\Delta_1(X, \{x_0\}, x_0)$, можно определить такой гомоморфизм

$$\psi\colon \Delta_1(X, \{x_0\}, x_0)^0/\Delta_1(x_0) \to \pi_1'(X, x_0),$$

что $\psi(\sigma) = [\sigma]'$. Мы покажем, используя утверждение B_1, что композиция

$$\Delta_2(X, \{x_0\}, x_0)^0/\Delta_2(x_0) \xrightarrow{\partial} \Delta_1(X, \{x_0\}, x_0)^0/\Delta_1(x_0) \xrightarrow{\psi} \pi_1'(X, x_0)$$

тривиальна. Пусть $\sigma\colon (\Delta^2, (\Delta^2)^0) \to (X, x_0)$ — некоторый сингулярный симплекс, а $\sigma^{(0)}, \sigma^{(1)}, \sigma^{(2)}$, как обычно, его грани. Тогда

$$\psi\,\partial[\sigma] = [\sigma^{(2)}]' + [\sigma^{(0)}]' - [\sigma^{(1)}]' = \left[(\sigma^{(2)} * \sigma^{(0)}) * (\sigma^{(1)})^{-1}\right]' =$$
$$= \eta(\sigma|\dot{\Delta}^2)_{\#}([v_0v_1] \circ [v_1v_2] \circ [v_2v_0]) = \eta\sigma_{\#}j_{\#}b_1 = 0.$$

Следовательно, отображение ψ определяет гомоморфизм

$$\psi'\colon H_1^{(0)}(X, \{x_0\}, x_0) \to \pi_1'(X, x_0),$$

который, как легко видеть, является обратным гомоморфизму φ''. ■

(c). $\overline{\Phi}_1, \overline{\Phi}_2, \ldots, \overline{\Phi}_{n-1} \Rightarrow B_n$ при $n \geqslant 2$. Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
\pi_{n+1}(\Delta^{n+1}, \dot{\Delta}^{n+1}, v_0) \arrow[dr, "\partial'"] \arrow[dd, "\partial"'] & & \pi_n(\Delta^{n+1}, (\Delta^{n+1})^{n-1}, v_0) \\
& \pi_n(\dot{\Delta}^{n+1}, (\Delta^{n+1})^{n-1}, v_0) \arrow[ur, "j_\#"] \arrow[dr, "\partial''"'] & \\
\pi_n(\dot{\Delta}^{n+1}, v_0) \arrow[ur, "i_\#"] & & \pi_{n-1}((\Delta^{n+1})^{n-1}, v_0)
\end{tikzcd}$$

Верхняя строка, будучи частью точной гомотопической последовательности триады $(\Delta^{n+1}, \dot{\Delta}^{n+1}, (\Delta^{n+1})^{n-1})$, точна. Нижняя строка как часть точной гомотопической последовательности пары $(\dot{\Delta}^{n+1}, (\Delta^{n+1})^{n-1})$ также точна. Из точности гомотопической последовательности пары $(\Delta^{n+1}, \dot{\Delta}^{n+1})$ и из того факта, что симплекс Δ^{n+1} стягиваем, вытекает, что ∂ — изоморфизм. Следовательно,

$$\ker j_{\#} = \operatorname{im} \partial' = \operatorname{im}(i_{\#} \circ \partial) = \operatorname{im} i_{\#} = \ker \partial''.$$

Таким образом, предложение B_n эквивалентно равенству $\partial''(b_n) = 0$. Его мы и будем доказывать отдельно для $n = 2$ и для $n > 2$. Если $n = 2$, то

$$\partial''(b_2) = \left(h_{[v_0v_1]}\partial''[e_3^0]\right)\partial''[e_3^2]\,\partial''[e_3^1]^{-1}\,\partial''[e_3^3]^{-1}.$$

Вычислим элемент $\partial''[e_3^i]$. Пусть $\xi\colon (\Delta^2, \dot{\Delta}^2, v_0) \subset (\Delta^2, \dot{\Delta}^2, v_0)$ — тождественное отображение. Тогда $[\xi] \in \pi_2(\Delta^2, \dot{\Delta}^2, v_0)$. Поскольку группа $\pi_1(\dot{\Delta}^2, v_0)$ — бесконечная циклическая (так как полиэдр $|\dot{\Delta}^2|$ гомеоморфен окружности S^1), из предложения Φ_1 вытекает, что $\varphi\colon \pi_1(\dot{\Delta}^2, v_0) \approx H_1(\dot{\Delta}^2, v_0)$. Следовательно, имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \pi_2(\Delta^2, \dot{\Delta}^2, v_0) & \xrightarrow{\partial} & \pi_1(\dot{\Delta}^2, v_0) \\ {\scriptstyle\varphi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\approx\,\varphi} \\ H_2(\Delta^2, \dot{\Delta}^2) & \xrightarrow{\partial} & H_1(\dot{\Delta}^2, v_0) \end{array}$$

и

$$\partial\varphi[\xi] = \partial\{\xi\} = \{\xi^{(2)} + \xi^{(0)} - \xi^{(1)}\} = \{\omega\} = \varphi[\omega],$$

где $\omega\colon (\Delta^1, \dot{\Delta}^1) \to (\dot{\Delta}^2, v_0)$ — путь $\omega = (\xi^{(2)} * \xi^{(0)}) * (\xi^{(1)})^{-1}$. (Двумерная цепь $\xi^{(2)} + \xi^{(0)} - \xi^{(1)}$ гомологична ω, поскольку нетрудно найти такие двумерные сингулярные симплексы σ_1 и σ_2 в $\dot{\Delta}^2$, что

$$\sigma_1^{(0)} = \xi^{(0)}, \qquad \sigma_1^{(1)} = \xi^{(2)} * \xi^{(0)}, \qquad \sigma_1^{(2)} = \xi^{(2)},$$
$$\sigma_2^{(0)} = \xi^{(1)}, \qquad \sigma_2^{(1)} = \xi^{(2)} * \xi^{(0)}, \qquad \sigma_2^{(2)} = (\xi^{(2)} * \xi^{(0)}) * (\xi^{(1)})^{-1}.$$

Тогда $\partial(\sigma_1 - \sigma_2) = \xi^{(2)} + \xi^{(0)} - \xi^{(1)} - \omega$.) Поскольку φ — изоморфизм, имеем

$$\partial[\xi] = [\omega] = [v_0v_1] \circ [v_1v_2] \circ [v_2v_0].$$

Возвращаясь к вычислению элемента $\partial''[e_3^i]$, получаем

$$\partial''[e_3^i] = \partial''(e_3^i)_{\#}[\xi] = (e_3^i \,|\, \dot{\Delta}^2)_{\#}\,\partial[\xi] =$$
$$= [e_3^i(v_0)\,e_3^i(v_1)] \circ [e_3^i(v_1)\,e_3^i(v_2)] \circ [e_3^i(v_2)\,e_3^i(v_0)].$$

Подставляя этот результат в правую часть равенства для $\partial''(b_2)$, полученного выше, находим, что $\partial''(b_2) = 0$.

Заметим, что при $n>2$ комплекс $(\Delta^{n+1})^{n-1}$ содержит двумерный остов симплекса Δ^{n+1}. Следовательно, пространство $(\Delta^{n+1})^{n-1}$ односвязно (поскольку симплекс Δ^{n+1} односвязен). Аналогично, если $q\leqslant n-2$, то $H_q((\Delta^{n+1})^{n-1}, v_0)\approx H_q(\Delta^{n+1}, v_0)=0$. Из предложений $\overline{\Phi}_1, \ldots, \overline{\Phi}_{n-2}$ следует, что пространство $(\Delta^{n+1})^{n-1}$ является $(n-2)$-связным, а предложение $\overline{\Phi}_{n-1}$ дает нам изоморфизм

$$\varphi\colon \pi_{n-1}\left((\Delta^{n+1})^{n-1}, v_0\right)\approx H_{n-1}\left((\Delta^{n+1})^{n-1}, v_0\right).$$

Следовательно, для завершения доказательства достаточно показать, что $\varphi\partial''(b_n)=0$. Это вытекает из равенств

$$\varphi\partial''(b_n)=\partial''\varphi(b_n)=\partial''\left\{\sum(-1)^i e^i_{n+1}\right\}=$$
$$=\partial''\partial'\{\xi_{n+1}\}=\partial'' i_*\partial\{\xi_{n+1}\}=0. \blacksquare$$

(d). $\mathrm{B}_n\Rightarrow\Phi_n$ при $n\geqslant 2$. Доказательство аналогично доказательству предложения (b). Отображение φ' разлагается в композицию

$$\pi'_n(X, A, x_0)\xrightarrow{\varphi''} H^{(n-1)}_n(X, A, x_0)\xrightarrow[\approx]{} H_n(X, A).$$

Если отображение $\alpha\colon (\Delta^n, \dot\Delta^n, v_0)\to(X, A, x_0)$ переводит все вершины симплекса Δ^n в точку x_0, то $\varphi''[\alpha]'=\{\alpha\}\in H^{(n-1)}_n(X, A, x_0)$. Определим отображение, обратное к φ''. Если $\sigma\colon (\Delta^n, \dot\Delta^n, (\Delta^n)^0)\to$ $\to(X, A, x_0)$ — некоторый сингулярный симплекс подкомплекса $\Delta_n(X, A, x_0)^{n-1}$, то $[\sigma]\in\pi_n(X, A, x_0)$ и $\eta[\sigma]=[\sigma]'\in\pi'_n(X, A, x_0)$. Если $\sigma(\Delta^n)\subset A$, то $[\sigma]'=0$. Поскольку группа $\pi'_n(X, A, x_0)$ абелева, можно определить гомоморфизм

$$\psi\colon \Delta_n(X, A, x_0)^{n-1}/(\Delta_n(X, A, x_0)^{n-1}\cap\Delta_n(A))\to\pi'_n(X, A, x_0),$$

для которого $\psi(\sigma)=[\sigma]'$. Покажем, что композиция

$$\psi\circ\partial\colon \Delta_{n+1}(X, A, x_0)^{n-1}/(\Delta_{n+1}(X, A, x_0)^{n-1}\cap\Delta_{n+1}(A))\to$$
$$\to\pi'_n(X, A, x_0)$$

тривиальна. Это следует из предложения B_n, поскольку для сингулярного симплекса

$$\sigma\colon (\Delta^{n+1}, (\Delta^{n+1})^{n-1}, (\Delta^{n+1})^0)\to(X, A, x_0)$$

имеет место равенство

$$\psi\partial(\sigma)=\sum(-1)^i[\sigma^{(i)}]'=\eta\left(\sigma\,|\,(\dot\Delta^{n+1}, (\Delta^{n+1})^{n-1})_\#(b_n)\right)=\eta\sigma_\# j_\#(b_n)=0.$$

Следовательно, гомоморфизм ψ определяет такой гомоморфизм

$$\psi'\colon H_n^{(n-1)}(X, A, x_0) \to \pi_n'(X, A, x_0),$$

что $\psi'\{\sigma\} = [\sigma]'$. Легко видеть, что отображение ψ' обратно к отображению φ''. ■

(e). $\Phi_n \Rightarrow \bar{\Phi}_n$ при $n \geqslant 2$. Если при $n \geqslant 2$ пространство X является $(n-1)$-связным, то пара $(X, \{x_0\})$ $(n-1)$-связна и группа $\pi_n'(X, \{x_0\}, x_0)$ канонически изоморфна $\pi_n'(X, x_0) = \pi_n(X, x_0)$. Тогда $\bar{\Phi}_n$ вытекает из утверждения Φ_n, примененного к паре $(X, \{x_0\})$. ■

Этим доказательство предложений 1, 2 и 3 завершено. Из предложения 1 мы получаем следующую *относительную теорему Гуревича об изоморфизме*:

4. Теорема. *Пусть $x_0 \in A \subset X$, и пусть пространства A и X линейно связны. Если существует такое $n \geqslant 2$, что $\pi_q(X, A, x_0) = 0$ для $q < n$, то $H_q(X, A) = 0$ для $q < n$ и гомоморфизм φ' является изоморфизмом*

$$\varphi'\colon \pi_n'(X, A, x_0) \approx H_n(X, A).$$

Обратно, если пространства A и X односвязны и существует такое $n \geqslant 2$, что $H_q(X, A) = 0$ для $q < n$, то $\pi_q(X, A, x_0) = 0$ для $q < n$ и гомоморфизм φ' является изоморфизмом

$$\varphi'\colon \pi_n'(X, A, x_0) \approx H_n(X, A). \ ■$$

Аналогично из предложения 2 мы получаем следующую *абсолютную теорему Гуревича об изоморфизме*:

5. Теорема. *Пусть $x_0 \in X$; предположим, что существует такое $n \geqslant 1$, что $\pi_q(X, x_0) = 0$ для $q < n$. Тогда $H_q(X, x_0) = 0$ для $q < n$ и гомоморфизм φ' является изоморфизмом*

$$\varphi'\colon \pi_n'(X, x_0) \approx H_n(X, x_0).$$

Обратно, если пространство X односвязно и существует такое $n \geqslant 2$, что $H_q(X, x_0) = 0$ для $q < n$, то $\pi_q(X, x_0) = 0$ для $q < n$ и гомоморфизм φ является изоморфизмом

$$\varphi\colon \pi_n(X, x_0) \approx H_n(X, x_0). \ ■$$

В абсолютном случае, когда пространство X односвязно, и в относительном случае, когда оба пространства X и A односвязны, каждая из этих теорем утверждает, что первая не обращающаяся в нуль гомотопическая группа изоморфна первой не обращающейся в нуль группе гомологий.

6. Следствие. *Для $n \geqslant 1$ имеет место коммутативная диаграмма*

$$\begin{array}{ccc} \pi_{n+1}(E^{n+1}, S^n, p_0) & \xrightarrow{\partial} & \pi_n(S^n, p_0) \\ \downarrow{\scriptstyle\varphi} & & \downarrow{\scriptstyle\varphi} \\ H_{n+1}(E^{n+1}, S^n) & \xrightarrow{\partial} & H_n(S^n, p_0) \end{array}$$

в которой все отображения являются изоморфизмами.

Доказательство. Согласно теореме 7.4.3а, эта диаграмма коммутативна. Оба горизонтальных гомоморфизма являются изоморфизмами, поскольку шар E^{n+1} стягиваем (и поскольку гомотопическая и гомологическая последовательности пары (E^{n+1}, S^n, p_0) точны). Из предложения 2 и из того факта, что группа $\pi_1(S^1, p_0)$ абелева, следует, что правое вертикальное отображение является изоморфизмом. ■

Следующий полезный результат вытекает из следствия 6 и называется *теоремой Брауэра о степени.*

7. Следствие. *Пусть $n \geqslant 1$. Два отображения $f, g\colon S^n \to S^n$ гомотопны тогда и только тогда, когда $f_* = g_*\colon H_n(S^n) \to H_n(S^n)$. Аналогично, два отображения $f, g\colon (E^{n+1}, S^n) \to (E^{n+1}, S^n)$ гомотопны тогда и только тогда, когда $f_* = g_*\colon H_{n+1}(E^{n+1}, S^n) \to H_{n+1}(E^{n+1}, S^n)$.*

Доказательство. Сначала рассмотрим абсолютный случай. Для заданных отображений $f, g\colon S^n \to S^n$ существуют соответственно гомотопные им отображения f' и g', такие, что $f'(p_0) = g'(p_0) = p_0$ (поскольку сфера S^n линейно связна). Так как пространство S^n является n-простым, то f' и g' тогда и только тогда свободно гомотопны, когда они гомотопны как отображения пар $(S^n, p_0) \to (S^n, p_0)$. Следовательно, $f \simeq g$ тогда и только тогда, когда $[f'] = [g']$ в группе $\pi_n(S^n, p_0)$. Согласно следствию 6, $[f'] = [g']$ тогда и только тогда, когда $\varphi[f'] = \varphi[g']$, а из определения гомоморфизма φ вытекает, что $\varphi[f'] = \varphi[g']$ тогда и только тогда, когда

$$f'_* = g'_*\colon H_n(S^n, p_0) \to H_n(S^n, p_0).$$

Поскольку имеют место коммутативные диаграммы

$$\begin{array}{ccc} H_n(S^n) & \xrightarrow[\approx]{} & H_n(S^n, p_0) \\ \downarrow{\scriptstyle f_*} & & \downarrow{\scriptstyle f'_*} \\ H_n(S^n) & \xrightarrow[\approx]{} & H_n(S^n, p_0) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} H_n(S^n) & \xrightarrow[\approx]{} & H_n(S^n, p_0) \\ \downarrow{\scriptstyle g_*} & & \downarrow{\scriptstyle g'_*} \\ H_n(S^n) & \xrightarrow[\approx]{} & H_n(S^n, p_0) \end{array}$$

для абсолютного случая доказательство закончено.

В относительном случае заметим, что из стягиваемости шара E^{n+1} и из свойства продолжения гомотопии для пары (E^{n+1}, S^n)

следует, что два отображения f, g: $(E^{n+1}, S^n) \to (E^{n+1}, S^n)$ гомотопны тогда и только тогда, когда отображения $f \mid S^n$, $g \mid S^n$: $S^n \to S^n$ гомотопны. Поскольку имеют место коммутативные диаграммы

$$\begin{array}{ccc} H_{n+1}(E^{n+1}, S^n) & \xrightarrow[\approx]{\partial} & H_n(S^n) \\ {\scriptstyle f_*}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle (f \mid S^n)_*} \\ H_{n+1}(E^{n+1}, S^n) & \xrightarrow[\approx]{\partial} & H_n(S^n) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} H_{n+1}(E^{n+1}, S^n) & \xrightarrow[\approx]{\partial} & H_n(S^n) \\ {\scriptstyle g_*}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle (g \mid S^n)_*} \\ H_{n+1}(E^{n+1}, S^n) & \xrightarrow[\approx]{\partial} & H_n(S^n) \end{array}$$

то относительный случай вытекает из абсолютного. ■

8. Следствие. *Пусть* $x_0 \in X$. *Отображение*

$$\psi\colon [S^n, p_0; X, x_0] \to \operatorname{Hom}(\pi_n(S^n, p_0), \pi_n(X, x_0)),$$

переводящее элемент $[\alpha]$ *в гомоморфизм* $\alpha_{\#}$, *является изоморфизмом.*

Доказательство. Это вытекает из следствия 6. В самом деле, группа $\pi_n(S^n, p_0)$ — бесконечная циклическая, поэтому имеет место изоморфизм

$$\beta\colon \operatorname{Hom}(\pi_n(S^n, p_0), \pi_n(X, x_0)) \approx \pi_n(X, x_0),$$

переводящий гомоморфизм λ в элемент $\lambda(a)$, где $a \in \pi_n(S^n, p_0)$ — гомотопический класс тождественного отображения. Тогда $(\beta \circ \psi)[\alpha] = \alpha_{\#}(a) = [\alpha]$, и, значит, ψ — изоморфизм. ■

Следующее полезное предложение вытекает из относительной теоремы Гуревича и называется *теоремой Уайтхеда.*

9. Теорема. *Пусть* X *и* Y — *линейно связные пространства с отмеченной точкой, и пусть* f: $(X, x_0) \to (Y, y_0)$ — *некоторое отображение. Если существует такое* $n \geqslant 1$, *что гомоморфизм*

$$f_{\#}\colon \pi_q(X, x_0) \to \pi_q(Y, y_0)$$

является изоморфизмом для $q < n$ *и эпиморфизмом для* $q = n$, *то гомоморфизм*

$$f_*\colon H_q(X, x_0) \to H_q(Y, y_0)$$

является изоморфизмом для $q < n$ *и эпиморфизмом для* $q = n$. *Обратно, если пространства* X *и* Y *односвязны, а* f_* — *изоморфизм для* $q < n$ *и эпиморфизм для* $q = n$, *то* $f_{\#}$ — *изоморфизм для* $q < n$ *и эпиморфизм для* $q = n$.

Доказательство. Пусть Z — цилиндр отображения f. Тогда определены вложения i: $X \subset Z$ и j: $Y \subset Z$ и деформационная ретракция r: $Z \to Y$, такая, что $f = r \circ i$. Отображение r: $(Z, y_0) \to (Y, y_0)$ индуцирует изоморфизмы $r_{\#}$: $\pi_q(Z, y_0) \approx \pi_q(Y, y_0)$ и

$r_*\colon H_q(Z, y_0) \approx H_q(Y, y_0)$ для всех q. Следовательно, отображение $r\colon (Z, x_0) \to (Y, y_0)$ индуцирует также изоморфизмы

$$r_{\#}\colon \pi_q(Z, x_0) \approx \pi_q(Y, y_0) \quad \text{и} \quad r_*\colon H_q(Z, x_0) \approx H_q(Y, y_0)$$

для всех q. Отсюда вытекает, что в формулировке теоремы мы можем заменить пару (Y, y_0) парой (Z, x_0), а условия на $f_{\#}$ и f_* соответствующими условиями на $i_{\#}$ и i_*. Из точности гомотопической последовательности триады (Z, X, x_0) следует, что $i_{\#}$ является изоморфизмом для $q<n$ и эпиморфизмом для $q=n$ в том и только в том случае, если $\pi_q(Z, X, x_0)=0$ для $q \leqslant n$. Аналогично из точности гомологической последовательности триады (Z, X, x_0) вытекает, что i_* является изоморфизмом для $q<n$ и эпиморфизмом для $q=n$ в том и только в том случае, если $H_q(Z, X)=0$ для $q \leqslant n$. Требуемый результат теперь вытекает из относительной теоремы Гуревича (теорема 4). ■

§ 6. CW-комплексы

По-видимому, наиболее подходящим классом топологических пространств для построения содержательной теории гомотопий является класс CW-комплексов (или класс пространств, каждое из которых имеет гомотопический тип CW-комплекса). CW-комплексы строятся последовательно, каждая стадия состоит в приклеивании клеток данной размерности к результату предшествующей стадии. Клеточная структура такого комплекса находится в прямой связи с его гомотопическими свойстами. Даже для таких «хороших» пространств, как полиэдры, полезно рассматривать их представление в виде CW-комплексов, потому что в таком представлении они обычно имеют меньше клеток, чем при симплициальной триангуляции.

В этом параграфе мы займемся изучением CW-комплексов и связанных с ними понятий. В § 7.8 будет показано, что любое топологическое пространство можно аппроксимировать некоторым CW-комплексом, единственным с точностью до гомотопии. Мы начнем с установления некоторых результатов о пространствах X, получаемых приклеиванием n-мерных клеток (определение см. в § 3.8).

1. Лемма. *Если пространство X получено приклеиванием n-мерных клеток к пространству A, то подпространство $X \times 0 \cup A \times I$ является сильным деформационным ретрактом пространства $X \times I$.*

Доказательство. Для каждой n-мерной клетки $e_j^n \subset X - A$ пусть

$$f_j\colon (E^n, S^{n-1}) \to (e_j^n, \dot{e}_j^n)$$

— характеристическое отображение. Пусть D: $(E^n \times I) \times I \to E^n \times I$ — сильная деформационная ретракция $E^n \times I \to E^n \times 0 \cup S^{n-1} \times I$ (существующая согласно следствию 3.2.4). Отображение D_j: $(e_j^n \times I) \times I \to e_j^n \times I$ определим равенством

$$D_j((f_j(z), t), t') = (f_j \times 1_I)(D(z, t, t')), \quad z \in E^n; \quad t, t' \in I$$

(легко проверить, что это определение корректно). Тогда существует отображение D': $(X \times I) \times I \to X \times I$, такое, что $D' | (e_j \times I) \times I = D_j$ и $D'(a, t, t') = (a, t)$ для $a \in A$ и $t, t' \in I$. Отображение D' и есть искомая сильная деформационная ретракция. ■

2. Следствие. *Если пространство X получено приклеиванием n-мерных клеток к пространству A, то отображение вложения $A \subset X$ является корасслоением.* ■

3. Лемма. *Пусть пространство X получено приклеиванием n-мерных клеток к пространству A, и пусть пара (Y, B) такова, что $\pi_n(Y, B, b) = 0$ для всех $b \in B$, если $n \geqslant 1$, и всякая точка пространства Y может быть соединена путем с подпространством B. Тогда каждое отображение пары (X, A) в пару (Y, B) гомотопно относительно A некоторому отображению $X \to B$.*

Доказательство. Это выводится из теоремы 7.2.1 при помощи рассуждений, аналогичных использованным в доказательстве леммы 1. ■

Относительным CW-комплексом называется пара (X, A), состоящая из топологического пространства X и его замкнутого подпространства A, а также последовательности замкнутых подпространств $(X, A)^k$, $k \geqslant 0$, такой, что

(a) пространство $(X, A)^0$ получено из A приклеиванием нульмерных клеток;

(b) при $k \geqslant 1$ пространство $(X, A)^k$ получается приклеиванием k-мерных клеток к пространству $(X, A)^{k-1}$;

(c) $X = \bigcup (X, A)^k$;

(d) топология пространства X согласована с семейством $\{(X, A)^k\}_k$.

Пространство $(X, A)^k$ называется *k-мерным остовом пространства X относительно A*. Если $X = (X, A)^n$ для некоторого n, то говорят, что *размерность дополнения $X - A$* не превосходит n. *Абсолютным CW-комплексом X* называется относительный CW-комплекс $(X, \varnothing)$, и его k-мерный остов обозначается через X^k.

Приведем несколько примеров:

4. Симплициальная пара (K, L) определяет относительный CW-комплекс $(|K|, |L|)$, где $(|K|, |L|)^k = |K^k \cup L|$.

5. Если (X, A) — относительный CW-комплекс, то для любого k пара $(X, (X, A)^k)$ представляет собой относительный CW-комплекс, где

$$(X, (X, A)^k)^q = \begin{cases} (X, A)^k, & q \leqslant k, \\ (X, A)^q, & q > k. \end{cases}$$

Аналогично, пара $((X, A)^k, A)$ представляет собой относительный CW-комплекс, где

$$((X, A)^k, A)^q = \begin{cases} (X, A)^q, & q \leqslant k, \\ (X, A)^k, & q > k. \end{cases}$$

6. Как и в примере 3.8.7, пусть F_i, $i = 1$, 2 или 4, — одно из полей $\mathbf{R}$, $\mathbf{C}$ или $\mathbf{Q}$ соответственно. Пусть F_iP^q — соответствующее проективное пространство размерности q над полем F_i. Тогда F_iP^q есть CW-комплекс, где

$$(F_iP^q)^k = \begin{cases} F_iP^{[k/i]}, & k \leqslant iq, \\ F_iP^q, & k > iq. \end{cases}$$

7. Шар E^n есть CW-комплекс: $(E^n)^k = p_0$, если $k < n-1$, $(E^n)^{n-1} = S^{n-1}$ и $(E^n)^k = E^n$, если $k \geqslant n$.

8. Отрезок I есть CW-комплекс: $(I)^0 = \dot{I}$, $(I)^k = I$ для $k \geqslant 1$.

9. Если (X, A) и (Y, B) — относительные CW-комплексы, причем одно из пространств X или Y локально компактно, то произведение $(X, A) \times (Y, B)$ — тоже CW-комплекс [1]:

$$((X, A) \times (Y, B))^k = \bigcup_{i+j=k} (X, A)^i \times (Y, B)^j.$$

10. Если (X, A) — относительный CW-комплекс, то $(X, A) \times I$ — тоже CW-комплекс:

$$(X \times I, A \times I)^k = (X, A)^k \times \dot{I} \cup (X, A)^{k-1} \times I.$$

11. Если (X, A) — относительный CW-комплекс, то X/A также есть CW-комплекс, где $(X/A)^k = (X, A)^k/A$.

Подкомплексом относительного CW-комплекса (X, A) называется относительный CW-комплекс (Y, B), такой, что Y — замкнутое подпространство пространства X, а $(Y, B)^k = Y \cap (X, A)^k$, $k \geqslant 0$. Если (Y, B) — подкомплекс комплекса (X, A), то $(X, A \cup Y)$ — относительный CW-комплекс, где $(X, A \cup Y)^k = (X, A)^k \cup Y$, $k \geqslant 0$. В частности, если X есть CW-комплекс, а A — его подкомплекс, то (X, A) — относительный CW-комплекс. *CW-парой* (X, A)

[1] Произведение двух CW-комплексов не всегда является CW-комплексом. Пример такого рода см. в работе: Dowker C. H., Topology of metric complexes, *Am. J. Math.*, **74** (1952), 555—577.

называется пара, состоящая из CW-комплекса X и его подкомплекса A (следовательно, CW-пара является относительным CW-комплексом).

Определение относительного CW-комплекса предполагает его индуктивное построение. Мы начинаем с пространства A. Приклеивая к нему нульмерные клетки, получаем пространство A_0. Затем к пространству A_0 приклеиваем одномерные клетки и получаем пространство A_1 и т. д. Таким образом строятся пространства A_k для всех $k \geqslant 0$. Если теперь определить пространство X как объединение $\bigcup A_k$, наделенное топологией, согласованной с семейством $\{A_k\}_{k \geqslant 0}$, то получится относительный CW-комплекс (X, A), причем $(X, A)^k = A_k$.

12. Теорема. *Если (X, A) — относительный CW-комплекс, то вложение $A \subset X$ является корасслоением.*

Доказательство. Это вытекает из следствия 2, если использовать индукцию и тот факт, что топология пространства $X \times I$ согласована с $\{(X, A)^k \times I\}_k$. ■

13. Теорема. *Пусть (X, A) — относительный CW-комплекс, причем $\dim(X - A) \leqslant n$, и пусть пара (Y, B) n-связна. Тогда любое отображение $(X, A) \to (Y, B)$ гомотопно относительно A некоторому отображению $X \to B$.*

Доказательство. Это выводится с применением индукции из следствия 7.2.2, леммы 3 и теоремы 12. ■

14. Следствие. *Пусть (X, A) — относительный CW-комплекс, и пусть пара (Y, B) n-связна для всех n. Тогда любое отображение $(X, A) \to (Y, B)$ гомотопно относительно A некоторому отображению $X \to B$.*

Доказательство. Пусть $f\colon (X, A) \to (Y, B)$ — некоторое отображение. Из теорем 12 и 13 следует, что существует последовательность гомотопий

$$H_k\colon (X, A) \times I \to (Y, B), \qquad k \geqslant 0$$

(она строится при помощи индукции по k), такая, что

(a) $H_0(x, 0) = f(x)$, $x \in X$;
(b) $H_k(x, 1) = H_{k+1}(x, 0)$ для $x \in X$;
(c) H_k — гомотопия относительно $(X, A)^{k-1}$;
(d) $H_k((X, A)^k \times 1) \subset B$.

Тогда гомотопия $H\colon (X, A) \times I \to (Y, B)$ с нужными нам свойствами определяется формулой

$$H(x, t) = H_{k-1}\left(x, \frac{t-(1-1/k)}{(1/k)-1/(k+1)}\right), \quad 1-\frac{1}{k} \leqslant t \leqslant 1-\frac{1}{k+1}. \ ■$$

15. Лемма. *Пусть пространство X получено приклеиванием n-мерных клеток к пространству A. Тогда пара (X, A) является $(n-1)$-связной $(n \geqslant 1)$.*

Доказательство. Пусть $f\colon (E^k, S^{k-1}) \to (X, A)$ — некоторое отображение, $k \leqslant n-1$. Поскольку образ $f(E^k)$ компактен, существует лишь конечное число n-мерных клеток в $X - A$, скажем $e_1, \ldots, e_m$, таких, что $f(E^k) \subset e_1 \cup \ldots \cup e_m \cup A$. Пусть x_i — произвольная точка клетки $e_i - \dot{e}_i$, $1 \leqslant i \leqslant m$. Каждое из множеств $Y = A \cup (e_1 - x_1) \cup \ldots \cup (e_m - x_m)$ и $e_i - \dot{e}_i$ (где $1 \leqslant i \leqslant m$) пересекает $f(E^k)$ по множеству, открытому в $f(E^k)$. Можно построить такую симплициальную триангуляцию K шара E^k (здесь $|K|$ отождествляется с E^k), что для каждого симплекса $s \in K$ либо $f(|s|) \subset Y$, либо $f(|s|) \subset e_i - \dot{e}_i$ для некоторого i, $1 \leqslant i \leqslant m$. Пусть $A' \subset E^k$ — подполиэдр, образованный пространствами всех тех симплексов $s \in K$, для которых $f(|s|) \subset Y$, а B_i — подполиэдр (здесь $1 \leqslant i \leqslant m$), образованный пространствами всех тех симплексов $s \in K$, для которых $f(|s|) \subset e_i - \dot{e}_i$. Тогда $S^{k-1} \subset A'$, $E^k = A' \cup B_1 \cup \ldots \cup B_m$, и если $i \neq j$, то $B_i - A'$ не пересекается с $B_j - A'$. Пусть $\dot{B}_i = B_i \cap A'$. Заметим, что $(B_i, \dot{B}_i)$ есть относительный CW-комплекс, причем $\dim(B_i - \dot{B}_i) \leqslant k \leqslant n-1$.

Пара $((e_i - \dot{e}_i), (e_i - \dot{e}_i) - x_i)$, $1 < i < m$, гомеоморфна паре $(E^n - S^{n-1}, (E^n - S^{n-1}) - 0)$ и имеет те же гомотопические группы, что и пара (E^n, S^{n-1}). Согласно следствию 7.2.4, пара (E^n, S^{n-1}) является $(n-1)$-связной. Из теоремы 13 вытекает, что отображение $f|(B_i, \dot{B}_i)$ гомотопно относительно $\dot{B}_i$ некоторому отображению $B_i \to (e_i - \dot{e}_i) - x_i$. Поскольку подкомплексы $B_i - \dot{B}_i$ и $B_j - \dot{B}_j$ не пересекаются, если $i \neq j$, соответствующие гомотопии вместе определяют гомотопию отображения f относительно A' в некоторое отображение f', такое, что $f'(E^k) \subset Y$. Ясно, что A — сильный деформационный ретракт пространства Y. Следовательно, отображение f' гомотопно относительно S^{k-1} такому отображению f'', что $f''(E^k) \subset A$. Тогда $f \simeq f' \simeq f''$, причем все эти гомотопии выполняются относительно S^{k-1}. Значит, (X, A) есть $(n-1)$-связная пара. ■

16. Следствие. *Если (X, A) — относительный CW-комплекс, то для всякого $n \geqslant 0$ пара $(X, (X, A)^n)$ n-связна.*

Доказательство. Мы докажем индукцией по m, что пара $((X, A)^m, (X, A)^n)$ n-связна, если $m > n$. Поскольку пространство $(X, A)^{n+1}$ получено из $(X, A)^n$ приклеиванием $(n+1)$-мерных клеток, из леммы 15 следует, что пара $((X, A)^{n+1}, (X, A)^n)$ n-связна. Предположим, что $m > n+1$ и что пара $((X, A)^{m-1}, (X, A)^n)$ n-связна.

Из леммы 15 следует, что $((X, A)^m, (X, A)^{m-1})$ есть $(m-1)$-связная пара, а поскольку $n < m-1$, эта пара также и n-связна. Тогда оба отображения $\pi_0((X, A)^n) \to \pi_0((X, A)^{m-1})$ и $\pi_0((X, A)^{m-1}) \to \to \pi_0((X, A)^m)$ сюръективны, откуда следует, что отображение $\pi_0((X, A)^n) \to \pi_0((X, A)^m)$ также сюръективно. Более того, если $x \in (X, A)^n$, то из точности гомотопической последовательности триады $((X, A)^m, (X, A)^{m-1}, (X, A)^n)$ с отмеченной точкой x следует, что $\pi_k((X, A)^m, (X, A)^n, x) = 0$, $1 \leqslant k \leqslant n$. Следствие 7.2.2 показывает, что $((X, A)^m, (X, A)^n)$ есть n-связная пара.

Покажем, что $(X, (X, A)^n)$ есть n-связная пара. Пусть $0 \leqslant k \leqslant n$, и пусть α: $(E^k, S^{k-1}) \to (X, (X, A)^n)$ – некоторое отображение. Поскольку образ $\alpha(E^k)$ компактен, а топология пространства X согласована с семейством подпространств $(X, A)^m$, существует такое $m > n$, что $\alpha(E^k) \subset (X, A)^m$. Следовательно, α можно рассматривать как отображение $(E^k, S^{k-1}) \to ((X, A)^m, (X, A)^n)$ для некоторого $m > n$. Поскольку $((X, A)^m, (X, A)^n)$ есть n-связная пара, отображение α гомотопно относительно S^{k-1} некоторому отображению E^k в $(X, A)^n$. ■

Отображение f: $(X, A) \to (X', A')$ одного относительного CW-комплекса (X, A) в другой (X', A') называется *клеточным*, если $f((X, A)^k) \subset (X', A')^k$ для всех k. Аналогично, гомотопия F: $(X, A) \times \times I \to (X', A')$ называется *клеточной*, если $F((X, A) \times I)^k \subset (X', A')^k$ для всех k. Следующая *теорема о клеточной аппроксимации* является аналогом теоремы о симплициальной аппроксимации.

17. Теорема. *Пусть задано отображение f: $(X, A) \to (X', A')$ одного относительного CW-комплекса в другой, ограничение которого на некоторый подкомплекс $(Y, B) \subset (X, A)$ является клеточным. Тогда существует клеточное отображение g: $(X, A) \to (X', A')$, гомотопное относительно Y отображению f.*

Доказательство. Из следствия 16, теоремы 13 и теоремы 12 вытекает существование последовательности гомотопий H_k: $(X, A) \times \times I \to (X', A')$ относительно Y (где $k \geqslant 0$), такой, что

(a) $H_0(x, 0) = f(x)$, $x \in X$;
(b) $H_k(x, 1) = H_{k+1}(x, 0)$, $x \in X$;
(c) H_k – гомотопия относительно $(X, A)^{k-1}$;
(d) $H_k((X, A)^k \times 1) \subset (X', A')^k$.

Тогда гомотопия H: $(X, A) \times I \to (X', A')$, обладающая нужными нам свойствами, определяется равенством

$$H(x, t) = H_{k-1}\left(x, \frac{t - \left(1 - \frac{1}{k}\right)}{\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}}\right), \quad 1 - \frac{1}{k} \leqslant t \leqslant 1 - \frac{1}{k+1}. \ ■$$

18. Следствие. *Всякое отображение относительных CW-комплексов гомотопно некоторому клеточному отображению. Если два клеточных отображения относительных CW-комплексов гомотопны, то существует клеточная гомотопия, соединяющая эти отображения.* ■

Непрерывное отображение $f\colon X\to Y$ называется *n-эквивалентностью* ($n\geqslant 1$), если оно индуцирует взаимно однозначное соответствие между множествами компонент линейной связности пространств X и Y и если для каждой точки $x\in X$ гомоморфизм $f_{\#}:\pi_q(X, x)\to\pi_q(Y, f(x))$ является изоморфизмом при $0<q<n$ и эпиморфизмом при $q=n$ (последнее требование иногда опускается). Отображение $f\colon X\to Y$ называется *слабой гомотопической эквивалентностью*, или *∞-эквивалентностью*, если оно является n-эквивалентностью для всех $n\geqslant 1$. Следующие утверждения вытекают непосредственно из определения и из следствия 7.3.15.

19. *Композиция n-эквивалентностей есть n-эквивалентность.* ■

20. *Любое отображение, гомотопное некоторой n-эквивалентности, является n-эквивалентностью.* ■

21. *Гомотопическая эквивалентность является слабой гомотопической эквивалентностью.* ■

Пусть $f\colon X\to Y$ — некоторое отображение, и пусть Z_f — цилиндр этого отображения. Тогда $f=r\circ i$, где $r\colon Z_f\to Y$ — гомотопическая эквивалентность. Следовательно, f тогда и только тогда является n-эквивалентностью, когда вложение $i\colon X\subset Z_f$ есть n-эквивалентность. Из точности гомотопической последовательности пары (Z_f, X) и из следствия 7.2.2 вытекает, что i тогда и только тогда является n-эквивалентностью, когда (Z_f, X) есть n-связная пара.

22. Теорема. *Пусть $f\colon X\to Y$ — некоторая n-эквивалентность (n конечно или бесконечно), и пусть (P, Q) — относительный CW-комплекс, причем $\dim(P-Q)\leqslant n$. Пусть отображения $g\colon Q\to X$ и $h\colon P\to Y$ таковы, что $h\,|\,Q=f\circ g$. Тогда существует такое отображение $g'\colon P\to X$, что $g'\,|\,Q=g$ и $f\circ g'\simeq h$ относительно Q.*

Доказательство. Пусть Z_f — цилиндр отображения f, $i\colon X\subset Z_f$ и $j\colon Y\subset Z_f$ — вложения. Ретракция $r\colon Z_f\to Y$ гомотопически обратна отображению j. Тогда в диаграмме

$$\begin{tikzcd} Q \arrow[r, phantom, "\subset"] \arrow[d, "g"'] & P \arrow[d, "j\circ h"] \\ X \arrow[r, "i"] & Z_f \end{tikzcd}$$

можно выбрать такую гомотопию $i \circ g \simeq j \circ h | Q$, что ее композиция с ретракцией r постоянна. Согласно теореме 12, существует отображение h': $P \to Z_f$, такое, что $h' | Q = i \circ g$ и $r \circ h' \simeq r \circ j \circ h$ относительно Q. Мы рассматриваем h' как отображение пар $(P, Q) \to (Z_f, X)$. Поскольку (Z_f, X) есть n-связная пара и $\dim(P - Q) \leqslant n$, из теоремы 13 следует, что отображение h' гомотопно относительно Q некоторому отображению g': $P \to X$. Тогда $g' | Q = g$ и

$$f \circ g' = r \circ i \circ g' \simeq r \circ h' \simeq r \circ j \circ h = h,$$

где все гомотопии являются гомотопиями относительно Q. Следовательно, отображение g' обладает всеми нужными нам свойствами. ■

23. Следствие. *Пусть f: $X \to Y$ — некоторая n-эквивалентность (где n конечно или бесконечно). Рассмотрим отображение*

$$f_{\#}\colon [P; X] \to [P; Y].$$

Если P есть CW-комплекс размерности $\leqslant n$, то это отображение сюръективно, а если $\dim P \leqslant n - 1$, то это отображение также и инъективно.

Доказательство. Первая часть вытекает из теоремы 22, примененной к относительному CW-комплексу $(P, \varnothing)$.

Для доказательства второй части применим теорему 22 к относительному CW-комплексу $(P \times I, P \times \dot{I})$. Если отображения g_0, g_1: $P \to X$ таковы, что $f \circ g_0 \simeq f \circ g_1$, то существуют отображение g: $P \times \dot{I} \to X$, для которого $g(z, 0) = g_0(z)$ и $g(z, 1) = g_1(z)$, и отображение $h: P \times I \to Y$, для которого $h | P \times \dot{I} = g$. Поскольку $\dim(P \times I) \leqslant n$, из теоремы 22 вытекает существование такого отображения $g': P \times I \to X$, что $g' | P \times \dot{I} = g$. Тогда g' — гомотопия между отображениями g_0 и g_1, откуда видно, что $[g_0] = [g_1]$. ■

24. Следствие. *Отображение CW-комплексов тогда и только тогда является слабой гомотопической эквивалентностью, когда оно является гомотопической эквивалентностью.*

Доказательство. Согласно утверждению 21, гомотопическая эквивалентность всегда является слабой гомотопической эквивалентностью. Обратно, если f: $X \to Y$ — слабая гомотопическая эквивалентность CW-комплексов, то из следствия 23 вытекает, что f индуцирует биективные отображения

$$f_{\#}\colon [Y; X] \to [Y; Y] \text{ и } f_{\#}\colon [X; X] \to [X; Y].$$

Если некоторое отображение $g\colon Y \to X$ обладает тем свойством, что $f_{\#}[g]=[1_Y]$, то $f\circ g \simeq 1_Y$, а также $f_{\#}[g\circ f]=[f\circ g\circ f]=[1_Y\circ f]=[f\circ 1_X]=f_{\#}[1_X]$. Следовательно, $[g\circ f]=[1_X]$, т. е. $g\circ f\simeq 1_X$, и, значит, f — гомотопическая эквивалентность. ■

Таким образом, для CW-комплексов понятия слабой гомотопической эквивалентности и гомотопической эквивалентности совпадают. Следующая теорема является непосредственным следствием теоремы Уайтхеда (теорема 7.5.9).

25. Теорема. *Слабая гомотопическая эквивалентность индуцирует изоморфизмы соответствующих целочисленных групп сингулярных гомологий. Обратно, отображение односвязных пространств, индуцирующее изоморфизмы соответствующих целочисленных групп сингулярных гомологий, является слабой гомотопической эквивалентностью.* ■

§ 7. Гомотопические функторы

В этом параграфе мы изучим один общий класс функторов, определенных на категории гомотопических типов линейно связных пространств с отмеченной точкой. Основная теорема этого параграфа описывает в простых терминах те функторы на подкатегории CW-комплексов, которые имеют вид π^Y для некоторого Y. В следующем параграфе мы применим этот результат к доказательству существования аппроксимации произвольного пространства CW-комплексом [1]).

Пусть в некоторой категории $\mathscr{C}$ заданы объекты A и X и морфизмы $f_0\colon A\to X$ и $f_1\colon A\to X$. *Уравнителем* морфизмов f_0 и f_1 называется такой морфизм $j\colon X\to Z$, что

(a) $j\circ f_0=j\circ f_1$;

(b) если морфизм $j'\colon X\to Z'$ в $\mathscr{C}$ таков, что $j'\circ f_0=j'\circ f_1$, то существует такой морфизм $g\colon Z\to Z'$, что $j'=g\circ j$. Заметим, что в условии (b) не утверждается единственность морфизма g.

Пусть $\mathscr{C}_0$ — категория гомотопических типов линейно связных пространств с невырожденной отмеченной точкой.

1. Лемма. *В категории $\mathscr{C}_0$ имеются уравнители.*

Доказательство. Пусть A и X — произвольные объекты категории $\mathscr{C}_0$, и пусть $f_0\colon A\to X$ и $f_1\colon A\to X$ — некоторые отображения, сохраняющие отмеченную точку. Построим пространство Z, отождествляя в топологической сумме $X\vee(A\times I)$ точки $(a, 0)\in A\times I$ и $f_0(a)\in X$, $(a, 1)\in A\times I$ и $f_1(a)\in X$ для всех

[1]) Методы, использованные в этом параграфе, опираются на статью: Brown E., Cohomology theories, *Ann. Math.*, **75** (1962), 467—484.

$a \in A$ и точки $(a_0, t) \in A \times I$ и $(a_0, 0)$ (a_0 — отмеченная точка в пространстве A) для всех $t \in I$. Тогда Z — объект категории $\mathscr{C}_0$, и вложение j: $X \subset Z$ обладает тем свойством, что $j \circ f_0 \simeq j \circ f_1$ (действительно, композиция $A \times I \subset X \vee (A \times I) \to Z$ является гомотопией между отображениями $j \circ f_0$ и $j \circ f_1$). Далее, если отображение j': $X \to Z'$ таково, что $j' \circ f_0 \simeq j' \circ f_1$, то существует отображение G: $X \vee (A \times I) \to Z'$, такое, что $G \mid X = j'$ и $G \mid A \times I$ — гомотопия между $j' \circ f_0$ и $j' \circ f_1$. В таком случае G можно пропустить через проекцию k: $X \vee (A \times I) \to Z$, и, следовательно, существует такое отображение g: $Z \to Z'$, что $G = g \circ k$. Значит, $j' = g \circ j$. Следовательно, $[j]$: $X \to Z$ — уравнитель морфизмов $[f_0]$ и $[f_1]$ в категории $\mathscr{C}_0$. ■

2. Лемма. *Пусть $\{Y_n\}_{n \geqslant 0}$ — такие объекты категории $\mathscr{C}_0$, являющиеся подпространствами пространства Y, также принадлежащего $\mathscr{C}_0$, что вложения $Y_n \subset Y_{n+1}$ представляют собой корасслоения для всех $n \geqslant 0$, $Y = \bigcup_n Y_n$ и топология пространства Y согласована с семейством $\{Y_n\}$. Обозначим вложения через i_n: $Y_n \subset Y_{n+1}$, 1_n: $Y_n \subset Y_n$ и j_n: $Y_n \subset Y$. Тогда гомотопический класс $[\{j_n\}]$: $\bigvee Y_n \to Y$ является уравнителем в категории $\mathscr{C}_0$ гомотопических классов*

$$[\bigvee i_n]\colon \bigvee Y_n \to \bigvee Y_n \text{ и } [\bigvee 1_n]\colon \bigvee Y_n \to \bigvee Y_n.$$

Доказательство. Поскольку $j_{n+1} \circ i_n = j_n \circ 1_n$, то $\{j_n\} \circ \bigvee i_n = \{j_n\} \circ \bigvee 1_n$. Пусть задано такое отображение j': $\bigvee Y_n \to Z'$, что $j' \circ \bigvee i_n \simeq j' \circ \bigvee 1_n$. Определим отображение j'_n: $Y_n \to Z'$, полагая $j'_n = j' \mid Y_n$. Тогда $j'_{n+1} \circ i_n \simeq j'_n$. Используя индукцию по n и тот факт, что $Y_n \subset Y_{n+1}$ — корасслоение, можно построить такую последовательность отображений g_n: $Y_n \to Z'$, что $g_n \simeq j'_n$ и $g_{n+1} \circ i_n = g_n$. Пусть отображение g: $Y \to Z'$ таково, что $g \mid Y_n = g_n$. Тогда $g \circ j \simeq j'$, что и завершает доказательство. ■

Гомотопическим функтором называется контравариантный функтор H из категории $\mathscr{C}_0$ в категорию множеств с отмеченной точкой, для которого выполняются следующие два условия:

(a) если $[j]$: $X \to Z$ — уравнитель отображений $[f_0]$, $[f_1]$: $A \to X$ и если элемент $u \in H(X)$ таков, что $H([f_0])u = H([f_1])u$, то существует такой элемент $v \in H(Z)$, что $H([j])v = u$;

(b) если $\{X_\lambda\}_\lambda$ — некоторое семейство объектов категории $\mathscr{C}_0$ и i_λ: $X_\lambda \subset \bigvee X_\lambda$ — вложение, то имеет место эквивалентность

$$\{H[i_\lambda]\}_\lambda\colon H(\bigvee X_\lambda) \approx \prod H(X_\lambda).$$

Если отображение f: $X \to Y$ сохраняет отмеченную точку, а H — некоторый гомотопический функтор, то мы будем писать $H(f)$ вместо $H([f])$. Если $X \subset X'$ и $u \in H(X')$, то мы будем писать $u \mid X$ вместо $H(i)u$, где i: $X \subset X'$ — вложение.

Пусть X, X_1 и X_2 — одноточечные пространства. Тогда $X_1 \vee X_2$ гомеоморфно X и условие (b) дает

$$\{H(i_1),\ H(i_2)\}\colon\ H(X_1 \vee X_2) \approx H(X_1) \times H(X_2),$$

что соответствует диагональному отображению $H(X) \to H(X) \times \times H(X)$. Поскольку это биективное отображение, множество $H(X)$ состоит из одного элемента.

Приведем несколько примеров:

3. Пусть Y — пространство с отмеченной точкой. Тогда функтор π^Y на категории $\mathscr{C}_0$, определенный как в § 1.3 (т. е. $\pi^Y(X) = [X;\ Y]$, $X \in \mathscr{C}_0$), является гомотопическим функтором.

4. Зафиксируем целое число $n > 0$ и абелеву группу G. Тогда $H(X) = H^n(X,\ x_0;\ G)$ (когомологии берутся сингулярные) — гомотопический функтор. Он называется *n-м когомологическим функтором с коэффициентами в G.*

5. Пусть G — произвольная группа (не обязательно абелева). Определим гомотопический функтор H, считая $H(X)$ равным множеству всех гомоморфизмов $\pi_1(X,\ x_0) \to G$, где отмеченной точкой служит тривиальный гомоморфизм.

В этом параграфе доказывается важный результат, состоящий в том, что на подкатегории линейно связных CW-комплексов с отмеченной точкой всякий гомотопический функтор естественно эквивалентен функтору π^Y для некоторого подходящего пространства Y с отмеченной точкой.

6. Лемма. *Пусть $\nu\colon SX \to SX \vee SX$ — коумножение. Если $X \in \mathscr{C}_0$, а H — гомотопический функтор, то композиция*

$$H(SX) \times H(SX) \xrightarrow{\{H(i_1),\ H(i_2)\}^{-1}} H(SX \vee SX) \xrightarrow{H(\nu)} H(SX)$$

определяет групповое умножение в множестве $H(SX)$, причем получаемая таким образом группа абелева, если X — надстройка. Если H — гомотопический функтор, принимающий значения в категории групп, то эти две мультипликативные структуры на $H(SX)$ совпадают.

Доказательство. Каждое из групповых свойств для определенного нами умножения вытекает из соответствующего H-когруппового свойства коумножения ν. Последнее утверждение леммы следует из теоремы 1.6.8, поскольку оба рассматриваемых умножения в $H(SX)$ взаимно дистрибутивны. ■

В частности, для любого гомотопического функтора H множество $H(S^q)$ представляет собой группу при $q \geqslant 1$, абелеву при $q \geqslant 2$. Она называется *q-й группой коэффициентов функтора H.* Таким образом, q-я группа коэффициентов функтора π^Y примера 3 есть $\pi_q(Y)$. В примере 4 q-я группа коэффициентов n-го когомологического функтора с коэффициентами в G есть 0, если $q \neq n$, и изоморфна группе G, если $q = n$. Для функтора примера 5 q-я группа коэффициентов равна G, если $q = 1$, и равна 0, если $q > 1$.

Если Y — некоторый объект категории $\mathscr{C}_0$, а H — гомотопический функтор, то всякий элемент $u \in H(Y)$ определяет естественное преобразование

$$T_u\colon \pi^Y \to H,$$

а именно $T_u([f]) = H([f])(u)$, $[f] \in [X; Y]$. Для надстройки SX преобразование T_u есть гомоморфизм группы $\pi^Y(SX) = [SX; Y]$ в группу $H(SX)$, наделенную умножением, указанным в лемме 6 (поскольку оба групповых умножения индуцированы коумножением $\nu\colon SX \to SX \vee SX$). Элемент $u \in H(Y)$ называется *n-универсальным* для функтора H, $n \geqslant 1$, если гомоморфизм

$$T_u\colon \pi^Y(S^q) \to H(S^q)$$

является изоморфизмом при $1 \leqslant q < n$ и эпиморфизмом при $q = n$. Элемент $u \in H(Y)$ называется *универсальным* для функтора H, если он n-универсален при всех $n \geqslant 1$, и в этом случае Y называется *классифицирующим пространством функтора H*.

7. Теорема. *Предположим, что H — гомотопический функтор с универсальными элементами $u \in H(Y)$ и $u' \in H(Y')$, и пусть отображение $f\colon Y \to Y'$ таково, что $H(f)u' = u$. Тогда f является слабой гомотопической эквивалентностью.*

Доказательство. Поскольку оба пространства Y и Y' линейно связны, имеет место коммутативная диаграмма ($q \geqslant 1$)

$$\begin{tikzcd}[S^q; Y] \arrow[rr, "f_\#"] \arrow[dr, "T_u"', "\approx"] & & {[S^q; Y']} \arrow[dl, "T_{u'}", "\approx"'] \\ & H(S^q) & \end{tikzcd}$$ ■

Точно такие же рассуждения позволяют доказать следующий результат:

8. Лемма. *Пусть Y — некоторый объект категории $\mathscr{C}_0$, и пусть Y' — произвольное линейно связное пространство. Отображение $f\colon Y \to Y'$ тогда и только тогда является слабой гомотопической эквивалентностью, когда элемент $[f] \in [Y; Y'] = \pi^{Y'}(Y)$ универсален для функтора $\pi^{Y'}$.* ■

Мы хотим доказать существование универсальных элементов для произвольного гомотопического функтора. Для этого нам понадобятся следующие две леммы:

9. Лемма. *Пусть H — гомотопический функтор, Y — некоторый объект категории $\mathscr{C}_0$ и $u \in H(Y)$. Существуют объект Y' категории $\mathscr{C}_0$, полученный из Y приклеиванием одномерных клеток, и 1-универсальный элемент $u' \in H(Y')$, такие, что $u' \mid Y = u$.*

Доказательство. Поставим в соответствие каждому элементу $\lambda \in H(S^1)$ одномерную сферу S^1_λ. Пусть, далее, $Y' = Y \vee \bigvee_\lambda S^1_\lambda$. Тогда Y' — объект категории $\mathscr{C}_0$, полученный приклеиванием одномерных клеток к пространству Y. Пусть g_λ — композиция $S^1 \xrightarrow[\approx]{} S^1_\lambda \subset Y'$. Из условия (b) определения гомотопического функтора следует существование такого элемента $u' \in H(Y')$, что $u' \mid Y = u$ и $H(g_\lambda)u' = \lambda$, $\lambda \in H(S^1)$. Поскольку $T_{u'}([g_\lambda]) = \lambda$, имеем $T_{u'}([S^1; Y]) = H(S^1)$, т. е. элемент u' является 1-универсальным. ■

10. Лемма. *Пусть H — гомотопический функтор, а $u \in H(Y)$ — некоторый n-универсальный элемент $(n \geqslant 1)$. Существуют объект $Y' \in \mathscr{C}_0$, полученный из Y приклеиванием $(n+1)$-мерных клеток, и $(n+1)$-универсальный элемент $u' \in H(Y')$, такие, что $u' \mid Y = u$.*

Доказательство. Каждому элементу $\lambda \in H(S^{n+1})$ поставим в соответствие $(n+1)$-мерную сферу S^{n+1}_λ, и для каждого отображения α: $S^n \to Y$, такого, что $H(\alpha)u = 0$, приклеим к Y $(n+1)$-мерную клетку e^{n+1}_α посредством отображения α. Пусть пространство Y' получено из суммы $Y \vee \left(\bigvee_\lambda S^{n+1}_\lambda\right)$ приклеиванием всех $(n+1)$-мерных клеток $\{e^{n+1}_\alpha\}$. Тогда Y' — объект в $\mathscr{C}_0$, полученный из Y приклеиванием $(n+1)$-мерных клеток. Если отображение g_λ: $S^{n+1} \to Y \vee \left(\bigvee_\lambda S^{n+1}_\lambda\right)$ совпадает с композицией $S^{n+1} \xrightarrow[\approx]{} S^{n+1}_\lambda \subset Y \vee \left(\bigvee_\lambda S^{n+1}_\lambda\right)$, то из условия (b) на стр. 524 следует существование такого элемента $\bar{u} \in H\left(Y \vee \left(\bigvee_\lambda S^{n+1}_\lambda\right)\right)$, что $\bar{u} \mid Y = u$ и $H(g_\lambda)\bar{u} = \lambda$, $\lambda \in H(S^{n+1})$.

Пусть α: $S^n \to Y$ таково, что $H(\alpha)u = 0$. Каждому такому α сопоставим n-мерную сферу S^n_α. Пусть теперь f_0: $\bigvee_\alpha S^n_\alpha \to Y \vee \left(\bigvee_\lambda S^{n+1}_\lambda\right)$ — отображение в точку, а отображение f_1: $\bigvee_\alpha S^n_\alpha \to Y \vee \left(\bigvee_\lambda S^{n+1}_\lambda\right)$ таково, что его ограничение на S^n_α есть α. Тогда гомотопический класс $[j]$ вложения

$$j\colon Y \vee \left(\bigvee_\lambda S^{n+1}_\lambda\right) \subset Y'$$

является уравнителем морфизмов $[f_0]$ и $[f_1]$. Поскольку $H(f_0)\bar{u} = 0 = H(f_1)\bar{u}$, из условия (a) на стр. 524 вытекает существование такого элемента $u' \in H(Y')$, что $H(j)u' = \bar{u}$. Значит, $u' \mid Y = u$, и для завершения доказательства нам осталось лишь показать, что u' есть $(n+1)$-универсальный элемент.

Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd} \pi_{q+1}(Y', Y) \arrow[r, "\partial"] & \pi_q(Y) \arrow[r, "i_\#"] \arrow[dr, "T_u"'] & \pi_q(Y') \arrow[r] \arrow[d, "T_{u'}"] & \pi_q(Y', Y) \\ & & H(S^q) & \end{tikzcd}$$

верхняя строка которой точна. Поскольку пространство Y' получено из Y приклеиванием $(n+1)$-мерных клеток, из леммы 7.6.15 следует, что $\pi_q(Y', Y) = 0$ для $q \leqslant n$. Следовательно, $i_\#$ является изоморфизмом, если $q < n$, и эпиморфизмом, если $q = n$. Поскольку u есть n-универсальный элемент, T_u — изоморфизм, если $q < n$, и эпиморфизм, если $q = n$. Тогда $T_{u'}$ — тоже изоморфизм при $q < n$ и эпиморфизм при $q = n$. Более того, если элемент $a \in [S^n; Y]$ принадлежит ядру гомоморфизма T_u и представлен отображением α: $S^n \to Y$, то

$$a = [\alpha] \in \partial\left(\pi_{n+1}\left(e_\alpha^{n+1}, \dot{e}_\alpha^{n+1}\right)\right) \subset \partial\left(\pi_{n+1}(Y', Y)\right) = \ker i_\#.$$

Следовательно, если $q = n$, то $\ker T_u = \ker i_\#$, и, значит, $T_{u'}$ — изоморфизм групп $\pi_n(Y')$ и $H(S^n)$. Для любого элемента $\lambda \in H(S^{n+1})$ отображение $j \circ g_\lambda$: $S^{n+1} \to Y'$ обладает тем свойством, что

$$T_{u'}([j \circ g_\lambda]) = H(g_\lambda)\bar{u} = \lambda.$$

Значит, $T_{u'}$ — эпиморфизм, если $q = n+1$, поэтому u' есть $(n+1)$-универсальный элемент. ■

11. Теорема. *Пусть H — гомотопический функтор, Y — некоторый объект категории $\mathscr{C}_0$ и $u \in H(Y)$. Тогда существуют классифицирующее пространство Y' для функтора H, содержащее Y в качестве подпространства, и универсальный элемент $u' \in H(Y')$, такие, что (Y', Y) — относительный CW-комплекс и $u' \mid Y = u$.*

Доказательство. Используя леммы 9 и 10, можно построить индукцией по n последовательность объектов $\{Y_n\}_{n \geqslant 0}$ категории $\mathscr{C}_0$ и элементы $u_n \in H(Y_n)$, такие, что

(a) $Y_0 = Y$ и $u_0 = u$;

(b) Y_{n+1} получается из Y_n приклеиванием $(n+1)$-мерных клеток, $n \geqslant 0$;

(c) $u_{n+1} \mid Y_n = u_n$;

(d) u_n есть n-универсальный элемент, $n \geqslant 1$.

Из условия (b) следует, что если наделить $Y' = \bigcup Y_n$ топологией, согласованной с семейством $\{Y_n\}$, то получится линейно связное пространство с отмеченной точкой, содержащее Y в качестве подпространства, причем пара (Y', Y) является относительным CW-комплексом. Из леммы 2 вытекает, что гомотопический класс $[\{j_n\}]$: $\bigvee Y_n \to Y'$ представляет собой уравнитель гомотопических классов $[\bigvee i_n]$: $\bigvee Y_n \to \bigvee Y_n$ и $[\bigvee 1_n]$: $\bigvee Y_n \to \bigvee Y_n$. Согласно условию (b) на стр. 524, существует элемент $\bar{u} \in H(\bigvee Y_n)$, для которого $\bar{u} \mid Y_n = u_n$. Из условия (c) вытекает, что $H(\bigvee i_n)\bar{u} = H(\bigvee 1_n)\bar{u}$, а из условия (a) на стр. 524, — что существует элемент $u' \in H(Y')$, для которого $H(\{j_n\})u' = \bar{u}$ (т. е. $u' \mid Y_n = u_n$ при $n \geqslant 0$). Тогда $u' \mid Y = u$, и нам осталось лишь показать, что элемент u' универсален.

Из определения пространства Y' и элемента u' вытекает коммутативность следующей диаграммы (при $q \geqslant 1$):

$$
\begin{array}{ccc}
\varinjlim\{\pi_q(Y_n)\} & \xrightarrow[\approx]{} & \pi_q(Y') \\
& {\scriptstyle \{T_{u_n}\}} \searrow \quad \swarrow {\scriptstyle T_{u'}} & \\
& H(S^q) &
\end{array}
$$

Поскольку элемент u_n является n-универсальным, то T_{u_n} — изоморфизм при $n > q$, и, следовательно, отображение слева есть изоморфизм. Значит, $T_{u'}$ — тоже изоморфизм, откуда следует, что элемент u' универсален. ■

12. Следствие. *Для всякого гомотопического функтора существуют классифицирующие пространства, являющиеся CW-комплексами.*

Доказательство. Достаточно применить теорему 11 к одноточечному пространству Y и единственному элементу $u \in H(Y)$. ■

13. Следствие. *Пусть $u \in H(Y)$ — универсальный элемент для гомотопического функтора H. Пусть (X, A) — относительный CW-комплекс, где X и A — объекты категории $\mathscr{C}_0$. Для всякого отображения g: $A \to Y$ и элемента $v \in H(X)$, таких, что $v \mid A = H(g)u$, существует такое отображение g': $X \to Y$, что $g = g' \mid A$ и $v = H(g')u$.*

Доказательство. Пусть i: $X \subset X \vee Y$ и i': $Y \subset X \vee Y$ — вложения. Пусть отображение j: $X \vee Y \to Z$ таково, что $[j]$ — уравнитель морфизмов $[i \circ f]$ (где f: $A \subset X$) и $[i' \circ g]$. Согласно условию (b) на стр. 524, существует такой элемент $\bar{v} \in H(X \vee Y)$, что $\bar{v} \mid X = v$ и $\bar{v} \mid Y = u$. Поскольку $H(f)v = H(g)u$, то $H(i \circ f)\bar{v} = H(i' \circ g)\bar{v}$ и, согласно условию (a) на стр. 524, существует элемент $\bar{u} \in H(Z)$, такой, что $H(j)\bar{u} = \bar{v}$. Применим теперь теорему 11 к элементу $\bar{u}$ и получим пространство Y', содержащее Z в качестве подпространства, и универсальный элемент $u' \in H(Y')$, такой, что $\bar{u} = u'|Z$. Обозначим через $j'\colon Y \to Y'$ композицию отображений

$$Y \overset{i'}{\subset} X \vee Y \xrightarrow{j} Z \overset{h}{\subset} Y'.$$

Тогда $H(j')u' = u$. Из теоремы 7 следует, что j' — слабая гомотопическая эквивалентность. Поскольку композиция отображений

$$A \overset{f}{\subset} X \overset{i}{\subset} X \vee Y \xrightarrow{j} Z \overset{h}{\subset} Y'$$

гомотопна отображению $j' \circ g$, а f — корасслоение, существует такое отображение $\bar{g}\colon X \to Y'$, гомотопное $h \circ j \circ i$, что $\bar{g} \mid A = j' \circ g$. Поскольку j' — слабая гомотопическая эквивалентность, из теоремы 7.6.22 вытекает существование такого отображения $g'\colon X \to Y$, что $g'|A = g$ и $j' \circ g' \simeq \bar{g}$. Тогда

$$H(g')u = H(g')H(j')u' = H(i)H(j)H(h)u' = \bar{v} \mid X = v,$$

откуда видно, что отображение g' обладает требуемыми свойствами. ■

14. Теорема. *Пусть Y — классифицирующее пространство, а $u \in H(Y)$ — универсальный элемент для гомотопического функтора H. Тогда для любого CW-комплекса X преобразование T_u является естественной эквивалентностью функторов $\pi^Y(X)$ и $H(X)$.*

Доказательство. Пусть $v \in H(X)$. Применив следствие 13 к случаю, когда $A = x_0$, а g — отображение в одну точку, получим такое отображение $g'\colon X \to Y$, что $H(g')u = v$, т. е. $T_u[g'] = v$. Это показывает, что отображение T_u сюръективно.

Пусть отображения $g_0, g_1\colon X \to Y$ таковы, что $T_u[g_0] = T_u[g_1]$, и пусть X' есть CW-комплекс $(X \times I)/(x_0 \times I)$, где $(X')^q = [(X^q \times \dot{I}) \cup (X^{q-1} \times I)]/(x_0 \times I)$, $q \geqslant 0$. Рассмотрим элемент $v \in H(X')$, определенный равенством $v = H(h)H(g_0)u$, где $h\colon X' \to X$ — проекция $h([x, t]) = x$. Пусть $A = (X \times \dot{I})/(x_0 \times \dot{I})$, и пусть отображение $g\colon A \to Y$ таково, что $g([x, 0]) = g_0(x)$ и $g([x, 1]) = g_1(x)$. Тогда $H(g)u = v \mid A$. Согласно следствию 13, существует отображение $g'\colon X' \to Y$, такое, что $g'|A = g$. Композиция

$$X \times I \to (X \times I)/(x_0 \times I) \xrightarrow{g'} Y$$

является гомотопией относительно x_0 между отображениями g_0 и g_1, что доказывает инъективность отображения T_u. ■

15. Следствие. *Пусть Y и Y' — классифицирующие пространства, являющиеся CW-комплексами, а $u \in H(Y)$ и $u' \in H(Y')$ — соответствующие универсальные элементы для гомотопического функтора H. Существует единственная с точностью до гомотопии гомотопическая эквивалентность $h\colon Y \to Y'$, такая, что $H(h)u' = u$.*

Доказательство. Согласно теореме 14, существует единственный гомотопический класс $[g]$: $Y \to Y'$, такой, что $H(g)u' = u$. Согласно теореме 7, отображение g является слабой гомотопической эквивалентностью. Из следствия 7.6.24 вытекает, что g — гомотопическая эквивалентность. ∎

§ 8. Слабый гомотопический тип

В этом параграфе мы покажем, что любое пространство можно аппроксимировать CW-комплексами. Это приводит к новому отношению эквивалентности, основанному на слабой гомотопической эквивалентности. Это новое отношение слабее, чем отношение гомотопической эквивалентности. Мы рассмотрим также соответствующее отношение эквивалентности в категории отображений. Оно будет использовано при исследовании общей задачи относительного поднятия.

Относительной CW-аппроксимацией пары (X, A) называется относительный CW-комплекс (Y, A) и слабая гомотопическая эквивалентность f: $Y \to X$, такая, что $f(a) = a$ для всех $a \in A$. *CW-аппроксимацией* пространства X называется относительная CW-аппроксимация пары $(X, \varnothing)$.

1. Теорема. *Любая пара обладает относительной CW-аппроксимацией. Две относительные CW-аппроксимации одной и той же пары имеют один и тот же гомотопический тип.*

Доказательство. Рассмотрим прежде всего случай, когда пространство X линейно связно. Пусть $x_0 \in X$, и пусть $\{A_j\}_{j \in J}$ — множество компонент линейной связности пространства A. Выберем для каждого $j \in J$ точку $a_j \in A_j$ и определим относительный CW-комплекс (A', A), так чтобы $(A', A)^0 = A \cup e^0$, где e^0 — одна точка, и

$$A' = (A', A)^1 = (A', A)^0 \cup \bigcup_{j \in J} e_j^1,$$

где одномерная клетка e_j^1 такова, что $\dot{e}_j^1 = e^0 \cup a_j$. Пусть отображение g: $A' \to X$ таково, что $g(a) = a$, если $a \in A$, $g(e^0) = x_0$ и $g \mid e_j^1$ — некоторый путь в X, соединяющий точки x_0 и a_j, $j \in J$. Легко видеть, что A' — линейно связное пространство с невырожденной отмеченной точкой e^0 и $[g] \in \pi^X(A')$. Из теоремы 7.7.11 вытекает существование относительного CW-комплекса (Y, A') (который можно выбрать таким образом, что $(Y, A')^1 = A' \vee \bigvee_\alpha S_\alpha^1$) и универсального элемента $[g'] \in \pi^X(Y)$ для функтора π^X, таких, что $g' \mid A' \simeq g$. Поскольку $A' \subset Y$ — корасслоение, существует такое отображение f: $Y \to X$, что элемент $[f] \in \pi^X(Y)$ универсален для функтора π^X и $f | A' = g$. Из леммы 7.7.8 следует, что f — слабая гомотопическая эквивалентность. Поскольку (Y, A) — относительный CW-комплекс (где $(Y, A)^0 = (A', A)^0$ и $(Y, A)^q = (Y, A')^q$ для $q \geqslant 1$) и поскольку $f(a) = a$ для $a \in A$, то (Y, A) и f образуют относительную CW-аппроксимацию пары (X, A).

Рассмотрим теперь случай, когда пространство X не является линейно связным; пусть $\{X_\alpha\}$ — множество его компонент линейной связности. По доказанному выше для каждого α существует относительная CW-аппроксимация f_α: $(Y_\alpha, X_\alpha \cap A) \to (X_\alpha, X_\alpha \cap A)$. Пусть пространство Y получено из несвязного объединения $A \cup \bigcup_\alpha Y_\alpha$ отождествлением точки $x \in X_\alpha \cap A \subset Y_\alpha$ с точкой $x \in A$ для каждого α, и пусть k: $A \cup \bigcup_\alpha Y_\alpha \to Y$ — соответствующая проекция. Тогда $k|A$: $A \to Y$ является вложением, а (Y, A) — относительным CW-комплексом, причем $(Y, A)^q = k(A \cup \bigcup_\alpha (Y_\alpha, X_\alpha \cap A)^q)$. Определим отображение f: $Y \to X$, считая, что $fk(a) = a$, если $a \in A$, и полагая $f \circ (k|Y_\alpha) = f_\alpha$ для всех α. Поскольку $\{k(Y_\alpha)\}$ — множество компонент линейной связности пространства Y, а отображение f индуцирует слабую гомотопическую эквивалентность каждой из них с соответствующей компонентой линейной связности X_α пространства X, оно также является слабой гомотопической эквивалентностью $Y \to X$. Отождествляя A с $k(A)$, мы видим, что (Y, A) и f образуют CW-аппроксимацию пары (X, A).

Если заданы две относительные CW-аппроксимации, скажем f_1: $(Y_1, A) \to (X, A)$ и f_2: $(Y_2, A) \to (X, A)$, то из теоремы 7.6.22 следует существование отображений g_1: $(Y_1, A) \to (Y_2, A)$ и g_2: $(Y_2, A) \to (Y_1, A)$, таких, что $f_2 \circ g_1 \simeq f_1$ и $f_1 \circ g_2 \simeq f_2$ (обе гомотопии — это гомотопии относительно A). Тогда $f_2 \circ (g_1 \circ g_2) \simeq$ $\simeq f_2 \circ 1 \operatorname{rel} A$, и снова из теоремы 7.6.22 следует, что $g_1 \circ g_2 \simeq 1 \operatorname{rel} A$. Аналогично $g_2 \circ g_1 \simeq 1 \operatorname{rel} A$, и, значит, обе пары (Y_1, A) и (Y_2, A) имеют один и тот же гомотопический тип. ■

Говорят, что два пространства X_1 и X_2 имеют один и тот же *слабый гомотопический тип*, если существуют некоторое третье пространство Y и слабые гомотопические эквивалентности f_1: $Y \to X_1$ и f_2: $Y \to X_2$. Заменяя это пространство Y его CW-аппроксимацией, мы видим, что пространства X_1 и X_2 тогда и только тогда имеют один и тот же слабый гомотопический тип, когда они обладают CW-аппроксимацией посредством одного и того же CW-комплекса.

2. Лемма. *Отношение принадлежности к одному и тому же слабому гомотопическому типу есть отношение эквивалентности.*

Доказательство. Это отношение по определению симметрично и рефлексивно. Докажем его транзитивность. Пусть X_1, X_2 и X_3 — некоторые пространства, а Y_1 и Y_2 — такие CW-комплексы, что имеют место слабые гомотопические эквивалентности

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & Y_1 \arrow[dl, "f_1"'] \arrow[dr, "f_2"] & & Y_2 \arrow[dl, "g_2"'] \arrow[dr, "g_3"] & \\ X_1 & & X_2 & & X_3 \end{tikzcd}$$

Тогда оба отображения f_2: $Y_1 \to X_2$ и g_2: $Y_2 \to X_2$ являются CW-аппроксимациями пространства X_2, и по теореме 1 существует такая гомотопическая эквивалентность h: $Y_1 \to Y_2$, что $f_2 \simeq g_2 \circ h$. Тогда отображение $g_3 \circ h$: $Y_1 \to X_3$, будучи композицией слабых гомотопических эквивалентностей, само является слабой гомотопической эквивалентностью. Следовательно, пространства X_1 и X_3 имеют один и тот же слабый гомотопический тип. ■

Нас интересует применение этих идей к слабым расслоениям. Основной результат в этом направлении заключается в том, что любые два слоя слабого расслоения над линейно связной базой имеют один и тот же слабый гомотопический тип.

3. Лемма. *Пусть p: $E \to B$ — слабое расслоение над стягиваемой базой. Тогда для любой точки $b_0 \in B$ вложение i: $p^{-1}(b_0) \subset E$ является слабой гомотопической эквивалентностью.*

Доказательство. Пусть $F = p^{-1}(b_0)$. Поскольку пространство B стягиваемо, $\pi_q(B, b_0) = 0$, $q \geqslant 0$. Из точности гомотопической последовательности расслоения p следует, что для любой точки $e \in F$ вложение i индуцирует изоморфизм $i_\#$: $\pi_q(F, e) \approx \approx \pi_q(E, e)$, $q \geqslant 1$, и $i_\#(\pi_0(F, e)) = \pi_0(E, e)$.

Осталось только проверить, что отображение $i_\#$ задает инъективное отображение $\pi_0(F, e) \to \pi_0(E, e)$. Пусть точки e, $e' \in F$ таковы, что существует путь ω в пространстве E, соединяющий e и e'. Поскольку пространство B односвязно, а $p \circ \omega$ — замкнутый в нем путь, начинающийся в точке b_0, существует отображение H: $I \times I \to B$, такое, что $H(t, 0) = p\omega(t)$ и $H(0, t') = H(1, t') = H(t, 1) = b_0$. Пусть отображение g: $I \times 0 \cup \dot{I} \times I \to E$ определено равенствами $g(t, 0) = \omega(t)$, $g(0, t') = e$ и $g(1, t') = e'$. Согласно лемме 7.2.5, существует такое отображение G: $I \times I \to E$, что $p \circ G = H$ и $G \mid I \times 0 \cup \dot{I} \times I = g$. Определим путь ω': $I \to E$, полагая $\omega'(t) = G(1, t)$. Тогда ω' — путь в слое F, соединяющий e и e' (поскольку $p\omega'(t) = b_0$). Это показывает, что отображение $i_\#$: $\pi_0(F, e) \to \pi_0(E, e)$ инъективно. ■

4. Следствие. *Пусть p: $E \to B$ — слабое расслоение, и пусть ω — путь в B. Тогда слои $p^{-1}(\omega(0))$ и $p^{-1}(\omega(1))$ имеют один и тот же слабый гомотопический тип.*

Доказательство. Пусть слабое расслоение p': $E' \to I$ индуцировано из p при помощи отображения ω: $I \to B$. Тогда слои

$p^{-1}(\omega(0))$ и $p^{-1}(\omega(1))$ гомеоморфны слоям $p'^{-1}(0)$ и $p'^{-1}(1)$ соответственно. Согласно лемме 3, каждое из вложений $p'^{-1}(0) \subset E'$ и $p'^{-1}(1) \subset E'$ является слабой гомотопической эквивалентнсстью. Нужное нам утверждение получается теперь из леммы 2. ■

Из доказанного предложения вытекает следующий аналог следствия 2.8.13 для слабых расслоений:

5. Следствие. *Если p: $E \to B$ — слабое расслоение над линейно связной базой, то любые два его слоя имеют один и тот же слабый гомотопический тип.* ■

Рассмотрим теперь категорию, объектами которой являются непрерывные отображения α: $P'' \to P'$ топологических пространств, а морфизмами (которые называются также *парами отображений*) f: $\alpha \to \beta$ — коммутативные диаграммы

$$\begin{array}{ccc} P'' & \xrightarrow{f''} & Q'' \\ {\scriptstyle\alpha}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\beta} \\ P' & \xrightarrow{f'} & Q' \end{array}$$

Гомотопией (или *парой гомотопий*) H: $f_0 \simeq f_1$ (где f_0, f_1: $\alpha \to \beta$) в этой категории называется коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} P'' \times I & \xrightarrow{H''} & Q'' \\ {\scriptstyle\alpha\times 1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\beta} \\ P' \times I & \xrightarrow{H'} & Q' \end{array}$$

такая, что H'': $f''_0 \simeq f''_1$ и H': $f'_0 \simeq f'_1$ (заметим, что H — это пара отображений $\alpha \times 1_I \to \beta$). Если такая пара гомотопий существует, морфизм f_0 называется *гомотопным* морфизму f_1. Таким образом, мы получаем отношение эквивалентности на множестве пар отображений $\alpha \to \beta$. Соответствующие классы эквивалентности называются *гомотопическими классами*. Через $[\alpha; \beta]$ мы обозначаем множество гомотопических классов пар отображений $\alpha \to \beta$, и если f: $\alpha \to \beta$ — пара отображений, то ее гомотопический класс обозначается через $[f]$. Легко проверить, что композиции гомотопных пар гомотопны, и, следовательно, можно определить *гомотопическую категорию отображений*, объектами которой служат отображения α: $P'' \to P'$, а морфизмами $\alpha \to \beta$ — гомотопические классы $[f]$, где f: $\alpha \to \beta$ — некоторая пара отображений. Пара отображений f: $\alpha \to \beta$ называется *гомотопической эквивалентностью* объектов α и β, если $[f]$ есть эквивалентность в гомотопической категории отображений. Говорят, что два отображения α и β *имеют один* *и тот же гомотопический тип*, если они эквивалентны как объекты гомотопической категории отображений.

Для заданной пары отображений $g\colon \alpha' \to \alpha$ (или $h\colon \beta \to \beta'$) можно определить индуцированное отображение $g^{\#}\colon [\alpha;\ \beta] \to [\alpha';\ \beta]$ (или $h_{\#}\colon [\alpha;\ \beta] \to [\alpha;\ \beta']$), положив $g^{\#}[f] = [f \circ g]$ (или $h_{\#}[f] = [h \circ f]$). Поскольку $g^{\#} \circ h_{\#} = h_{\#} \circ g^{\#}$, функция, сопоставляющая объектам α и β множество $[\alpha;\ \beta]$, а классам $[g]$ и $[h]$ отображения $g^{\#}$ и $h_{\#}$ соответственно, является функтором двух переменных из произведения гомотопической категории на себя в категорию множеств. Этот функтор ковариантен относительно β и контравариантен относительно α.

Пусть заданы отображения $\alpha\colon P'' \to P'$, $\beta\colon Q'' \to Q'$ и $\bar{f}\colon P' \to Q''$. Определим пару отображений $\rho(\bar{f})\colon \alpha \to \beta$ с помощью коммутативной диаграммы

$$\begin{array}{ccc} P'' & \xrightarrow{\bar{f}\circ\alpha} & Q'' \\ {\scriptstyle\alpha}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\beta} \\ P' & \xrightarrow{\beta\circ\bar{f}} & Q' \end{array}$$

(т. е. $(\rho(\bar{f}))'' = \bar{f} \circ \alpha$ и $(\rho(\bar{f}))' = \beta \circ \bar{f}$). Если задана пара отображений $f\colon \alpha \to \beta$, *поднятием* пары f называется такое отображение $\bar{f}\colon P' \to Q''$, что $\rho(\bar{f}) = f$. Два поднятия $\bar{f}_0, \bar{f}_1\colon P' \to Q''$ пары $f\colon \alpha \to \beta$ называются *гомотопными относительно отображения* f, если существует такая гомотопия $\bar{H}\colon P' \times I \to Q''$ отображения $\bar{f}_0$ в отображение $\bar{f}_1$, что $\bar{H} \circ (\alpha \times 1_I)$ и $\beta \circ \bar{H}$ — постоянные гомотопии (т. е. $\rho(\bar{H})$ — постоянная гомотопия отображения f в себя). Такое отображение $\bar{H}$ называется *гомотопией относительно отображения* f (обозначается $\bar{H}\colon \bar{f}_0 \simeq \bar{f}_1 \operatorname{rel} f$). Отношение гомотопности относительно отображения f является отношением эквивалентности на множестве всех поднятий отображения f. Множество соответствующих классов эквивалентности обозначается $[P';\ Q'']_f$. *Задача относительного поднятия* состоит в изучении множества $[P';\ Q'']_f$ (например, существуют ли вообще поднятия пары f, а если существуют, то сколько их).

6. Пример. Если P'' — пустое множество, то пара отображений $f\colon \alpha \to \beta$ состоит из отображения $f'\colon P' \to Q'$, и поднятием $\bar{f}\colon P' \to Q''$ пары f является поднятие отображения f' в пространство Q'' (в смысле определения из § 2.2). Если в этом случае отображение β представляет собой расслоение, то два поднятия $\bar{f}_0, \bar{f}_1\colon P' \to Q''$ отображения f' тогда и только тогда гомотопны относительно f, когда они послойно гомотопны в смысле § 2.8. Таким образом, задача абсолютного поднятия является частным случаем задачи относительного поднятия.

7. Пример. Если α — вложение, а Q' — одноточечное пространство, то пары отображений f: $\alpha \to \beta$ находятся во взаимно однозначном соответствии с отображениями f'': $P'' \to Q''$, а поднятия $\bar{f}$: $P' \to Q''$ пары f — во взаимно однозначном соответствии с продолжениями f'' на все P'. В последнем случае два продолжения $\bar{f}_0$, $\bar{f}_1$: $P' \to Q''$ тогда и только тогда гомотопны относительно f (как поднятия), когда они гомотопны относительно P''. Таким образом, задача продолжения есть частный случай задачи относительного поднятия.

8. Пример. Пусть $\bar{f}_0$, $\bar{f}_1$: $P' \to Q''$ — два поднятия пары отображений f: $\alpha \to \beta$. Пусть $R' = P' \times I$, и пусть R'' — факторпространство несвязной суммы $P' \times \dot{I}$ и $P'' \times I$, полученное отождествлением точек $(z'', 0) \in P'' \times I$ с $(\alpha(z''), 0) \in P' \times \dot{I}$ и $(z'', 1) \in P'' \times I$ с $(\alpha(z''), 1)$. Определим отображение γ: $R'' \to R'$, полагая $\gamma(z'', t) = (\alpha(z''), t)$, если $(z'', t) \in P'' \times I$, и $\gamma(z', t) = (z', t)$, если $(z', t) \in P' \times \dot{I}$. Рассмотрим пару отображений g: $\gamma \to \beta$, состоящую из отображений g'': $R'' \to Q''$ и g': $R' \to Q'$, где $g''(z'', t) = f''(z'')$, если $(z'', t) \in P'' \times I$, $g''(z', 0) = \bar{f}_0(z')$, и $g''(z', 1) = \bar{f}_1(z')$, если $z' \in P'$, и $g'(z', t) = f'(z')$, если $(z', t) \in P' \times I$. Отображения $\bar{f}_0$ и $\bar{f}_1$ гомотопны относительно f тогда и только тогда, когда существует поднятие пары g.

Задача относительного поднятия будет особенно интересовать нас в том случае, когда α — вложение относительного CW-комплекса, а β — слабое расслоение. Если i: $A \subset X$ — вложение, а p: $E \to B$ — слабое расслоение, то пара отображений f: $i \to p$ состоит из отображения f': $X \to B$ и поднятия f'': $A \to E$ отображения $f' \mid A$. Поднятием $\bar{f}$ пары f называется поднятие отображения f' в E, являющееся продолжением отображения f''. Два поднятия пары f тогда и только тогда гомотопны относительно f, когда между ними существует послойная гомотопия относительно A. Основной причиной нашего внимания к этому случаю служит следующая теорема об относительном гомотопическом продолжении.

9. Теорема. *Пусть (X, A) — относительный CW-комплекс, i: $A \subset X$ — вложение, а p: $E \to B$ — некоторое слабое расслоение. Пусть заданы отображение $\bar{f}$: $X \to E$ и пара гомотопий H: $i \times 1_I \to p$, состоящая из гомотопии H': $X \times I \to B$, начинающейся с отображения $p \circ \bar{f}$, и гомотопии H'': $A \times I \to E$, начинающейся с отображения $\bar{f} \circ i$. Тогда существует такая гомотопия $\bar{H}$: $X \times I \to E$, начинающаяся с отображения $\bar{f}$, что $H' = p \circ \bar{H}$ и $H'' = \bar{H} \circ (i \times 1_I)$.*

Доказательство. Пусть отображение g: $X \times 0 \cup A \times I \to E$ определено равенствами $g(x, 0) = \bar{f}(x)$, если $x \in X$, и $g(a, t) = H''(a, t)$, если $a \in A$ и $t \in I$. Тогда H' является продолжением отображения $p \circ g$, и мы, следуя стандартной процедуре продолжения над последовательными остовами пары (X, A) (которая применялась в доказательстве теоремы 7.2.6 к полиэдральным парам и с равным успехом может быть применена к произвольному относительному CW-комплексу), получаем такое отображение $\bar{H}\colon X \times I \to E$, что $p \circ \bar{H} = H'$ и $\bar{H} \mid X \times 0 \cup A \times I = g$. Это отображение $\bar{H}$ обладает требуемыми свойствами. ■

Этот результат можно интерпретировать иначе. Парой отображений $f\colon i \to p$ называется коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f''} & E \\ {\scriptstyle i}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ X & \xrightarrow{f'} & B \end{array}$$

Следовательно, если мы через $B^X \times' E^A$ обозначим расслоенное произведение отображения $B^X \to B^A$, индуцированного ограничением, и отображения $E^A \to B^A$, индуцированного расслоением p, то пара (f', f'') будет точкой пространства $B^X \times' E^A$. Таким способом множество пар отображений $f\colon i \to p$ можно отождествить с расслоенным произведением $B^X \times' E^A$. Отображение ρ есть отображение $\rho\colon E^X \to B^X \times' E^A$, и $[X; E]_f$ — множество компонент линейной связности прообраза $\rho^{-1}(f)$.

10. Следствие. *Пусть (X, A) — относительный CW-комплекс, $i\colon A \subset X$ — вложение, а $p\colon E \to B$ — некоторое слабое расслоение. Тогда отображение $\rho\colon E^X \to B^X \times' E^A$ также является слабым расслоением.*

Доказательство. Пусть заданы отображение $g\colon I^n \to E^X$ и гомотопия $H\colon I^n \times I \to B^X \times' E^A$ [1]). Экспоненциальное отображение сопоставляет отображению g отображение $\bar{g}\colon X \times I^n \to E$, а гомотопии H — пару гомотопий $H_1\colon (i \times 1_{I^n}) \times 1_I \to p$, начинающуюся с отображения $\rho(\bar{g})$. Из теоремы 9 вытекает существование такой гомотопии $\bar{H}_1\colon X \times I^n \times I \to E$, начинающейся с отображения $\bar{g}$, что $\rho(\bar{H}_1) = H_1$. Значит, экспоненциальное отображение переводит гомотопию $\bar{H}_1$ в такую гомотопию $G\colon I^n \times I \to E^X$, начинающуюся с отображения g, что $\rho \circ G = H$. ■

Из следствий 10 и 4 вытекает, что если $f_0, f_1\colon i \to p$ — гомотопные пары отображений, то множества $[X; E]_{f_0}$ и $[X; E]_{f_1}$ находятся во взаимно однозначном соответствии. Следовательно, задача относительного поднятия отображения f_0 эквивалентна задаче относительного поднятия отображения f_1.

[1]) *Подразумевается, что $\rho(g) = H \mid I^n \times 0$. — Прим. ред.*

Пусть заданы слабые расслоения $p_1\colon E_1 \to B_1$ и $p_2\colon E_2 \to B_2$. Пара отображений $g\colon p_1 \to p_2$ называется *слабой гомотопической эквивалентностью*, если $g''\colon E_1 \to E_2$ и $g'\colon B_1 \to B_2$ — слабые гомотопические эквивалентности. Мы покажем, что слабая гомотопическая эквивалентность в категории отображений обладает в основном теми же свойствами, что и слабая гомотопическая эквивалентность в категории пространств. Следующий аналог теоремы 7.6.22 является отправным пунктом в этом направлении.

11. Лемма. *Пусть (X, A) — относительный CW-комплекс, $i\colon A \subset X$ — вложение и $g\colon p_1 \to p_2$ — слабая гомотопическая эквивалентность слабых расслоений. Предположим, что заданы пара отображений $f\colon i \to p_1$ и поднятие $\bar{h}\colon X \to E_2$ пары отображений $g \circ f$. Тогда существует поднятие $\bar{f}\colon X \to E_1$ пары f, такое, что поднятия $g'' \circ \bar{f}$ и $\bar{h}$ гомотопны относительно $g \circ f$.*

Доказательство. В доказательстве дважды используется теорема 7.6.22 и дважды — теорема 9. Мы не будем далее специально это отмечать. Имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f''"] \arrow[d, "i"] & E_1 \arrow[r, "g''"] \arrow[d, "p_1"] & E_2 \arrow[d, "p_2"] \\ X \arrow[r, "f'"] & B_1 \arrow[r, "g'"] & B_2 \end{tikzcd}$$

в которой g'' и g' — слабые гомотопические эквивалентности. Кроме того, у нас имеется отображение $\bar{h}\colon X \to E_2$, такое, что $\bar{h} \circ i = g'' \circ f''$ и $p_2 \circ \bar{h} = g' \circ f'$. Значит, существует отображение $\bar{\bar{f}}\colon X \to E_1$, такое, что $\bar{\bar{f}} \circ i = f''$, и гомотопия $G''\colon g'' \circ \bar{\bar{f}} \simeq \bar{h} \operatorname{rel} A$. Отображения $p_1 \circ \bar{\bar{f}}$ и f' совпадают на A и $p_2 \circ G''$ — гомотопия относительно A между отображениями $g' \circ p_1 \circ \bar{\bar{f}} = p_2 \circ g'' \circ \bar{\bar{f}}$ и $g' \circ f' = p_2 \circ \bar{h}$. Следовательно, существуют гомотопия $F'\colon p_1 \circ \bar{\bar{f}} \simeq$ $\simeq f' \operatorname{rel} A$ и гомотопия $H'\colon g' \circ F' \simeq p_2 \circ G'' \operatorname{rel} A \times I \cup X \times \dot{I}$.

Пусть $F''\colon X \times I \to E_1$ — такое поднятие отображения F', что $F''(x, 0) = \bar{\bar{f}}(x)$, если $x \in X$, и $F''(a, t) = f''(a)$, если $a \in A$ и $t \in I$. Определим отображение $\bar{f}\colon X \to E_1$, полагая $\bar{f}(x) = F''(x, 1)$. Покажем, что отображение $\bar{f}$ обладает нужными нам свойствами. Во всяком случае, ясно, что мы получили поднятие пары f.

Отображения $g'' \circ F''$ и G'' являются гомотопиями относительно A между $g'' \circ \bar{\bar{f}}$ и соответственно $g'' \circ \bar{f}$ и $\bar{h}$, а H' является гомотопией между $p_2 \circ g'' \circ F''$ и $p_2 \circ G'' \operatorname{rel} A \times I \cup X \times \dot{I}$. Поскольку существует гомеоморфизм пары $(X \times I \times I,\ A \times I \times I)$ на себя, переводящий $X \times (\dot{I} \times I \cup 0 \times I)$ в $X \times I \times 0$, то существует поднятие H'' гомотопии H', являющееся гомотопией между $g'' \circ F''$ и G'' относительно $X \times 0 \cup A \times I$. Тогда отображение $H\colon X \times I \to E_2$, определенное равенством $H(x, t) = H''(x, 1, t)$, является гомотопией отображения $g'' \circ \bar{f}$ в $\bar{h}$ относительно f. ■

Лемма 11 приводит нас к следующему важному результату:

12. Теорема. *Пусть (X, A) — относительный CW-комплекс, i: $A \subset X$ — вложение и g: $p_1 \to p_2$ — слабая гомотопическая эквивалентность слабых расслоений. Пусть, далее, f: $i \to p_1$ — некоторая пара отображений. Тогда отображение g индуцирует биективное отображение*

$$g''_{\#}\colon [X; E_1]_f \approx [X; E_2]_{g \circ f}.$$

Доказательство. Тот факт, что $g''_{\#}$ сюръективно, вытекает непосредственно из леммы 11. Инъективность отображения $g''_{\#}$ также является следствием леммы 11, примененной к относительному CW-комплексу $(X, A) \times (I, \dot{I})$. ■

УПРАЖНЕНИЯ

А. Точность гомотопических множеств

1. Предположим, что j: $(X', A') \subset (X, A)$ — корасслоение, причем A и X' — замкнутые подпространства пространства X и $A' = A \cap X'$. Докажите, что проекция

$$(C_{j'}, C_{j''}) \to (C_{j'}, C_{j''})/CX' = (X, A)/X' = (X/X', A/A')$$

является гомотопической эквивалентностью.

2. В предположениях упражнения 1 пусть g': $(X, A) \to C(X', A')$ — какое-нибудь отображение, обладающее тем свойством, что $g'(x') = x'$ при $x' \in X'$. Пусть отображение g: $(X/X', A/A') \to S(X', A')$ таково, что коммутативна следующая диаграмма (здесь k' и k'' — проекции):

$$\begin{array}{ccc} (X, A) & \xrightarrow{g'} & C(X', A') \\ {\scriptstyle k'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle k''} \\ (X/X', A/A') & \xrightarrow{g} & S(X', A') \end{array}$$

Докажите, что следующая последовательность коточна:

$$(X', A') \to \ldots \to S^n(X', A') \xrightarrow{S^n j} S^n(X, A) \xrightarrow{S^n k'} S^n(X/X', A/A') \xrightarrow{S^n g} \ldots .$$

3. Докажите, что если (X, A) — относительный CW-комплекс, то имеет место следующая коточная последовательность:

$$A \subset X \to X/A \to SA \subset SX \to \ldots \to S^n A \subset S^n X \to \ldots .$$

В. Гомотопические группы

1. Докажите, что если A — ретракт пространства X, то имеет место изоморфизм

$$\pi_n(X, x_0) \approx \pi_n(A, x_0) \oplus \pi_n(X, A, x_0), \quad n \geqslant 2.$$

2. Докажите, что если пространство X деформируемо в A относительно $x_0 \in A$, то имеет место изоморфизм

$$\pi_n(A, x_0) \approx \pi_n(X, x_0) \oplus \pi_{n+1}(X, A, x_0), \quad n \geqslant 2.$$

3. Докажите, что если слой $F = p^{-1}(b_0)$ слабого расслоения $p: E \to B$ стягивается в точку внутри пространства E относительно $e_0 \in F$, то имеет место изоморфизм

$$\pi_n(B, b_0) \approx \pi_n(E, e_0) \oplus \pi_{n-1}(F, e_0), \quad n \geqslant 2.$$

4. Докажите, что если слабое расслоение $p: E \to B$ допускает сечение, то для каждой точки $e_0 \in F = p^{-1}(b_0)$ имеет место изоморфизм

$$\pi_n(E, e_0) \approx \pi_n(B, b_0) \oplus \pi_n(F, e_0), \quad n \geqslant 2.$$

5. Пусть $\{X_j\}$ — некоторое семейство пространств с отмеченными точками $x_j \in X_j$. Докажите, что имеет место изоморфизм

$$\pi_n\left(\prod X_j, (x_j)\right) \approx \prod \pi_n(X_j, x_j), \quad n \geqslant 0.$$

6. Докажите, что если $X \vee Y = X \times y_0 \cup x_0 \times Y \subset X \times Y$, то имеет место изоморфизм

$$\pi_n(X \vee Y, (x_0, y_0)) \approx \pi_n(X, x_0) \oplus \pi_n(Y, y_0) \oplus \pi_{n+1}(X \times Y, X \vee Y, (x_0, y_0)).$$

C. Отмеченные точки [1]

1. Приведите пример вырожденной отмеченной точки.

2. Докажите, что если отмеченные точки пространств X и Y невырожденны, то отмеченные точки пространств $X \vee Y$, $X \times Y$ и $(X \times Y)/(X \vee Y)$ также невырожденны.

3. Докажите, что если пары (X, x_0) и (Y, y_0) имеют один и тот же гомотопический тип, то точка x_0 в X невырожденна тогда и только тогда, когда точка y_0 невырожденна в Y.

4. Докажите, что всякое пространство имеет тот же гомотопический тип, что и некоторое пространство с невырожденной отмеченной точкой.

5. Пусть X и Y — линейно связные пространства с невырожденными отмеченными точками x_0 и y_0 соответственно. Докажите, что X и Y тогда и только тогда имеют один и тот же гомотопический тип, когда пары (X, x_0) и (Y, y_0) имеют один и тот же гомотопический тип.

D. Произведение Уайтхеда

Пусть $p \geqslant 1$, $q \geqslant 1$, и пусть гомеоморфизм $h: (I^{p+q}, \dot{I}^{p+q}) \to (I^p, \dot{I}^p) \times (I^q, \dot{I}^q)$ определен равенством $h(t_1, \ldots, t_{p+q}) = ((t_1, \ldots, t_p), (t_{p+1}, \ldots, t_{p+q}))$. Тогда h определяет элемент $[h] \in \pi_{p+q}((I^p, \dot{I}^p) \times (I^q, \dot{I}^q), (0, 0))$ и элемент

$$\eta_{p,q} = \partial [h] \in \pi_{p+q-1}(I^p \times \dot{I}^q \cup \dot{I}^p \times I^q, (0, 0)).$$

Пусть заданы отображения $\alpha: (I^p, \dot{I}^p) \to (X, x_0)$ и $\beta: (I^q, \dot{I}^q) \to (X, x_0)$. Определим отображение $\gamma: (I^p \times \dot{I}^q \cup \dot{I}^p \times I^q, (0, 0)) \to (X, x_0)$, положив

$$\gamma(z, z') = \begin{cases} \alpha(z), & z' \in \dot{I}^q, \quad (z, z') \in I^p \times I^q, \\ \beta(z'), & z \in \dot{I}^p, \quad (z, z') \in I^p \times I^q. \end{cases}$$

[1] См. Puppe D., Homotopiemengen und ihre induzierten Abbildungen I, *Math. Z.*, **69** (1958), 299–344.

1. Докажите, что элемент $\gamma_{\#}(\eta_{p,q}) \in \pi_{p+q-1}(X, x_0)$ зависит лишь от классов $[\alpha]$ и $[\beta]$. Он называется *произведением Уайтхеда* элементов $[\alpha]$ и $[\beta]$ и обозначается $[[\alpha], [\beta]] \in \pi_{p+q-1}(X, x_0)$.

2. Докажите, что если $p=q=1$, то $[[\alpha], [\beta]] = [\alpha][\beta][\alpha]^{-1}[\beta]^{-1}$.

3. Докажите, что если $p>1$ и $q=1$, то $[[\alpha], [\beta]] = [\alpha]\cdot h_{[\beta]}([\alpha]^{-1})$.

4. Докажите, что если $p+q>2$, то $[[\alpha], [\beta]] = (-1)^{pq}[[\beta], [\alpha]]$.

5. Если $f\colon (X, x_0) \to (Y, y_0)$ — некоторое отображение, то $f_{\#}[[\alpha], [\beta]] = [f_{\#}[\alpha], f_{\#}[\beta]]$.

6. Докажите, что если ω — путь в пространстве X, то $h_{[\omega]}[[\alpha], [\beta]] = [h_{[\omega]}[\alpha], h_{[\omega]}[\beta]]$.

7. Докажите, что $[[\alpha], [\beta]] = 0$ тогда и только тогда, когда существует отображение $f\colon I^p \times I^q \to X$, такое, что

$$f(t_1, \ldots, t_p, 0, \ldots, 0) = \alpha(t_1, \ldots, t_p),$$
$$f(0, \ldots, 0, t_{p+1}, \ldots, t_{p+q}) = \beta(t_{p+1}, \ldots, t_{p+q}).$$

8. Докажите, что если X является H-пространством, то $[[\alpha], [\beta]] = 0$ для всех $[\alpha]$ и $[\beta]$.

9. Докажите, что сфера S^n тогда и только тогда является H-пространством, когда $[[\alpha], [\beta]] = 0$ для всех $[\alpha], [\beta] \in \pi_n(S^n)$.

E. *CW*-комплексы

1. Докажите, что если (X, A) — относительный CW-комплекс, то топология пространства X согласована с семейством $\{A, e \mid e$ — клетка из $X - A\}$.

2. Докажите, что если (X, A) — относительный CW-комплекс, то пространство X тогда и только тогда компактно порождено, когда компактно порождено пространство A.

3. Докажите, что если (X, A) — относительный CW-комплекс и пространство A паракомпактно, то и пространство X паракомпактно.

4. Докажите, что если (X, A) — относительный CW-комплекс, а пространство A имеет гомотопический тип CW-комплекса, то и пространство X имеет гомотопический тип CW-комплекса.

5. Докажите, что CW-комплекс локально стягиваем.

6. Докажите, что CW-комплекс имеет гомотопический тип полиэдра.

F. Действие фундаментальной группы

1. Докажите, что n-мерное действительное проективное пространство RP^n тогда и только тогда является простым, когда n нечетно.

2. Докажите, что если $1<n<m$, то $RP^{2n+1} \times S^{2m+1}$ и $RP^{2m+1} \times S^{2n+1}$ — простые компактные полиэдры, не принадлежащие к одному и тому же гомотопическому типу, хотя все их соответственные гомотопические группы изоморфны.

3. Пусть $(n-1)$-связная CW-пара $(Z, \dot{Z})$ такова, что подпространство $\dot{Z}$ односвязно $(n \geqslant 2)$. Пусть пара (X^*, X) получена приклеиванием пространства Z к CW-комплексу X посредством некоторого отображения $f\colon (\dot{Z}, z_0) \to (X, x_0)$, и пусть $g\colon (Z, \dot{Z}, z_0) \to (X^*, X, x_0)$ — каноническое отображение. Докажите, что (X^*, X) есть $(n-1)$-связная пара и что отображение

$$\bigoplus_{[\omega] \in \pi_1(X, x_0)} [\pi_n(Z, \dot{Z}, z_0)]_{[\omega]} \to \pi_n(X^*, X, x_0),$$

переводящее элемент $[\alpha]_{[\omega]}$ в элемент $h_{[\omega]}(g_{\#}[\alpha])$, $[\alpha]\in\pi_n(Z, \dot Z, z_0)$, является изоморфизмом. (*Указание.* Пусть $\widetilde{X}$ — универсальное накрывающее пространство пространства X, и пусть $\{f_{[\omega]}: \dot Z\to\widetilde{X}\}_{[\omega]\in\pi_1(X, x_0)}$ — множество поднятий отображения f. Покажите, что пространство $\widetilde{X}^*$, полученное приклеиванием одного экземпляра пространства Z к пространству $\widetilde{X}$ для каждого отображения $f_{[\omega]}$, является универсальным накрывающим пространством пространства X^*. Затем учтите тот факт, что $\pi_q(\widetilde{X}^*, \widetilde{X})\approx\pi_q(X^*, X)$, и вычислите группу $\pi_n(\widetilde{X}^*, \widetilde{X})$, используя теорему Гуревича.)

4. Пусть CW-комплекс X получен из букета $S^1\vee S^2$ приклеиванием трехмерной клетки посредством отображения, представляющего элемент $2[\alpha]-h_{[\omega]}[\alpha]$, где $[\alpha]$ — образующая группы $\pi_2(S^2)$, а $[\omega]$ — образующая группы $\pi_1(S^1)$. Докажите, что вложение $S^1\subset X$ индуцирует изоморфизм фундаментальных групп и всех групп гомологий, но не является изоморфизмом двумерных гомотопических групп.

G. CW-аппроксимация

1. Докажите, что для произвольной пары (X, A) существуют CW-пара (X', A') и отображение $f: (X', A')\to(X, A)$, такие, что оба отображения $f\mid X': X'\to X$ и $f\mid A': A'\to A$ являются слабыми гомотопическими эквивалентностями.

2. Докажите, что если $f_1: X_1\to Y_1$ и $f_2: X_2\to Y_2$ — слабые гомотопические эквивалентности, то и $f_1\times f_2: X_1\times X_2\to Y_1\times Y_2$ — слабая гомотопическая эквивалентность.

3. Приведите пример, иллюстрирующий тот факт, что если $f_1: X_1\to Y_1$ и $f_2: X_2\to Y_2$ — слабые гомотопические эквивалентности, то отображение $f_1\vee f_2: X_1\vee X_2\to Y_1\vee Y_2$ не обязательно является слабой гомотопической эквивалентностью.

4. Покажите на примере, что слабая гомотопическая эквивалентность не обязательно индуцирует изоморфизмы соответствующих групп когомологий Александера.

5. Докажите, что если пространство X односвязно, а группа $H_*(X)$ конечно порождена, то пространство X имеет слабый гомотопический тип конечного CW-комплекса.

6. Говорят, что пространство X *доминируется* пространством Y, если существуют такие отображения $f: X\to Y$ и $g: Y\to X$, что $g\circ f\simeq 1_X$. Докажите, что произвольное пространство тогда и только тогда доминируется CW-комплексом, когда оно имеет гомотопический тип CW-комплекса.

H. Группы гомотопических классов

В этой группе упражнений предполагается, что Y есть $(n-1)$-связное пространство, $n\geqslant 2$, с отмеченной точкой y_0, а X есть CW-комплекс размерности $\leqslant 2n-2$.

1. Докажите, что любое отображение $X\to Y$ гомотопно отображению, переводящему X^{n-1} в y_0. Если отображения $f, g: (X, X^{n-1})\to(Y, y_0)$ гомотопны как отображения пространств $X\to Y$, то они гомотопны относительно X^{n-2}.

2. Докажите, что диагональное отображение $d: X\to X\times X$ гомотопно такому отображению d', что $d'(X)\subset(X\times X^{n-2})\cup(X^{n-2}\times X)$. Докажите, что отображения $d', d'': X\to(X\times X^{n-2})\cup(X^{n-2}\times X)$, гомотопные в $X\times X$, гомотопны и в $(X \times X^{n-1}) \cup (X^{n-1} \times X)$. (*Указание*. Воспользуйтесь теоремой о клеточной аппроксимации.)

Пусть отображение d': $X \to (X \times X^{n-2}) \cup (X^{n-2} \times X)$ гомотопно в $X \times X$ диагональному отображению. Пусть отображения f', g': $(X, X^{n-1}) \to (Y, y_0)$ гомотопны некоторым отображениям f, g: $X \to Y$ соответственно. Тогда отображение $(f' \times g') \circ d'$: $X \to Y \times Y$ переводит пространство X в $Y \vee Y$. Определим отображение γ: $Y \vee Y \to Y$, полагая $\gamma(y, y_0) = y = \gamma(y_0, y)$.

3. Докажите, что элемент $[\gamma \circ (f' \times g') \circ d']$ зависит только от классов $[f]$ и $[g]$ и что операция $[f] + [g] = [\gamma \circ (f' \times g') \circ d']$ ассоциативна, коммутативна, обладает единичным элементом и превращает множество $[X; Y]$ в коммутативную полугруппу с единицей.

4. Докажите, что если задано отображение g: $Y \to Y'$, причем пространство Y', кроме того, $(n-1)$-связно (или если задано отображение h: $X' \to X$, где X' — некоторый CW-комплекс размерности $\leqslant 2n-2$), то отображение $g_{\#}$: $[X; Y] \to [X; Y']$ — гомоморфизм (или $h^{\#}$: $[X; Y] \to [X'; Y]$ — гомоморфизм).

5. Докажите, что полугруппа $[X; Y]$ является группой. (*Указание*. Используйте индукцию по размерности пространства X, тот факт, что $[X^{k+1}/X^k; Y]$ — группа для любых k и Y, поскольку пространство X^{k+1}/X^k, будучи букетом $(k+1)$-мерных сфер, является надстройкой, и точность последовательности гомоморфизмов

$$[X^{k+1}/X^k; Y] \to [X^{k+1}; Y] \to [X^k; Y] \to [X'; Y],$$

где X' — несвязное объединение k-мерных сфер, по одной для каждой $(k+1)$-мерной клетки пространства X.)

В случае когда $Y = S^n$ и $\dim X \leqslant 2n-2$, группа $[X; S^n]$ называется n-й *когомотопической группой*[1]) пространства X и обозначается $\pi^n(X)$.

I. Разные задачи

1. Рассмотрим гомоморфизм

$$\partial'\colon \pi_{n+1}(\Delta^{n+1}, \dot{\Delta}^{n+1}, v_0) \to \pi_n(\dot{\Delta}^{n+1}, (\Delta^{n+1})^{n-1}, v_0),$$

если $n \geqslant 2$, и гомоморфизм

$$\partial'\colon \pi_2(\Delta^2, \dot{\Delta}^2, v_0) \to \pi_1(\dot{\Delta}^2, v_0),$$

если $n = 1$. Докажите, что $\partial'[\xi_{n+1}] = b_n$ для $n \geqslant 1$ (определение элементов b_n см. на стр. 508).

2. Пусть H — гомотопический функтор, и пусть f: $X \to Y$ — сохраняющее отмеченную точку отображение линейно связных пространств с невырожденной отмеченной точкой. Докажите точность последовательности

$$H(C_f) \to H(Y) \to H(X).$$

3. Докажите, что если H — гомотопический функтор, а (X, A) — некоторая CW-пара, то имеет место точная последовательность

$$H(A) \leftarrow H(X) \leftarrow H(X/A) \leftarrow H(SA) \leftarrow \ldots \leftarrow H(S^nA) \leftarrow \ldots.$$

---

[1]) Подробнее см. Spanier E., Borsuk's cohomotopy groups, *Ann. Math.*, 50 (1949), 203—245.

Глава 8

ТЕОРИЯ ПРЕПЯТСТВИЙ

В этой главе мы строим теорию препятствий для общей задачи поднятия отображений. Здесь определяется последовательность препятствий, обращение которых в нуль является необходимым и достаточным условием существования поднятия. В этой последовательности k-е препятствие определено тогда и только тогда, когда все предыдущие определены и обращаются в нуль; в свою очередь обращение в нуль k-го препятствия является необходимым условием для определения $(k+1)$-го.

Мы начнем с применения общей теории гомотопических функторов к изучению множества гомотопических классов отображений CW-комплекса в пространство, лишь одна гомотопическая группа которого не обращается в нуль, и покажем, что соответствующий когомологический функтор классифицирует эти отображения с точностью до гомотопии. Используя этот результат, мы затем получим решение в когомологических терминах задачи поднятия для расслоений, слой которых обладает ровно одной нетривиальной гомотопической группой.

Имея в виду сказанное, мы далее рассматриваем задачу разложения произвольного расслоения на более простые, каждое из которых имеет в качестве слоя пространство ровно с одной нетривиальной гомотопической группой. Мы показываем, что подобные разложения существуют для широкого класса расслоений и что в том случае, когда они существуют, последовательность препятствий естественным образом связана с этими разложениями. Препятствия являются подмножествами групп когомологий. Мы применяем затем общую теорию к некоторым специальным случаям, когда в силу размерностных ограничений препятствия, которые могут встретиться, — это только одно первое или два первых. В случае когда имеется лишь одно препятствие, мы докажем теорему классификации Хопфа.

В конце главы мы доказываем теорему о надстройке, которая затем применяется к вычислению $(n+1)$-мерной гомотопической группы n-мерной сферы. Сочетая это с техникой теории препятствий, мы доказываем классификационную теорему Стинрода.

Параграф 8.1 посвящен пространствам точно с одной нетривиальной гомотопической группой. Мы доказываем, что соответствующий когомологический функтор решает одновременно как задачу классификации отображений CW-комплексов в такие пространства, так и задачу продолжения отображений относительных CW-комплексов в эти же пространства. Этот результат мы используем для получения теоремы Хопфа о продолжении и классификационных теорем об отображениях n-мерного CW-комплекса в сферу S^n. В § 8.2 изучаются расслоения, слои которых имеют точно одну нетривиальную гомотопическую группу. Мы показываем, как и раньше, что соответствующий когомологический функтор позволяет решить задачу поднятия и классификации поднятий заданного отображения.

В § 8.3 мы доказываем, что многие расслоения можно разложить в бесконечную последовательность расслоений, в каждом из которых слой обладает точно одной нетривиальной гомотопической группой. Соответствующую задачу поднятия тогда можно представить как бесконечную последовательность более простых задач поднятия. В § 8.4 мы показываем, как индуктивно определить препятствие для такой последовательности расслоений, и применяем полученную технику.

В § 8.5 изучается отображение надстройки и доказывается точность последовательности Вана для расслоения, базой которого служит сфера. Этот результат используется для доказательства теоремы о надстройке, которая в свою очередь применяется для вычисления группы $\pi_{n+1}(S^n)$ при любом n. Затем мы доказываем классификационную теорему Стинрода об отображениях $(n+1)$-мерного CW-комплекса в сферу S^n.

§ 1. Пространства Эйленберга — Маклейна

Этот параграф посвящен изучению пространств, имеющих ровно одну нетривиальную гомотопическую группу. Такие пространства являются классифицирующими для когомологических функторов, в связи с чем когомологии этих пространств тесно связаны с когомологическими операциями. В конце параграфа это обстоятельство используется для доказательства теорем Хопфа о классификации и продолжении отображений специального вида. В этой главе мы будем также изучать произвольные пространства, представляя их в виде итераций расслоений, слоями которых служат пространства, обладающие ровно одной нетривиальной гомотопической группой. Таким образом, эти гомотопически простые пространства служат теми кирпичами, из которых складываются более сложные пространства.

Пусть π — некоторая группа, а $n \geqslant 1$ — целое число. *Пространством типа* (π, n) называется линейно связное пространство Y с отмеченной точкой, для которого $\pi_q(Y, y_0) = 0$, если $q \neq n$, и $\pi_n(Y, y_0) \approx \pi$.

Пространством Эйленберга—Маклейна[1]) называется линейно связное пространство с отмеченной точкой, все гомотопические группы которого обращаются в нуль, за исключением, быть может, одной. Значит, пространство типа (π, n) есть пространство Эйленберга—Маклейна. Обратно, если Y — пространство Эйленберга—Маклейна и $\pi_q(Y, y_0)=0$ для $q \neq n$, то Y — пространство типа $(\pi_n(Y, y_0), n)$. Приведем несколько примеров.

1. Из следствия 7.2.12 вытекает, что окружность S^1 является пространством типа $(\mathbf{Z}, 1)$.

2. Пусть CW-комплекс $\mathbf{R}P^\infty$ представляет собой объединение последовательности $\mathbf{R}P^1 \subset \mathbf{R}P^2 \subset \ldots$, наделенное топологией, согласованной с семейством $\{\mathbf{R}P^j\}_{j\geqslant 1}$. Тогда $\pi_q(\mathbf{R}P^\infty) \approx \varinjlim\{\pi_q(\mathbf{R}P^j)\}$. Применение следствия 7.2.11 к накрытию $S^n \to \mathbf{R}P^n$ показывает, что $\mathbf{R}P^\infty$ — пространство типа $(\mathbf{Z}_2, 1)$.

3. Пусть CW-комплекс $\mathbf{C}P^\infty$ является объединением последовательности $\mathbf{C}P^1 \subset \mathbf{C}P^2 \subset \ldots$, и пусть топология этого объединения согласована с семейством $\{\mathbf{C}P^j\}_{j\geqslant 1}$. Тогда $\pi_q(\mathbf{C}P^\infty) \approx$ $\approx \varinjlim\{\pi_q(\mathbf{C}P^j)\}$, и из следствия 7.2.13 вытекает, что $\mathbf{C}P^\infty$ — пространство типа $(\mathbf{Z}, 2)$.

Пусть π — некоторая абелева группа, а Y — линейно связное пространство с отмеченной точкой. Элемент $v \in H^n(Y, y_0; \pi)$ называется *n-характеристическим* для Y, если композиция

$$\pi_n(Y, y_0) \xrightarrow{\varphi} H_n(Y, y_0) \xrightarrow{h(v)} \pi$$

является изоморфизмом (где φ — гомоморфизм Гуревича, а h — гомоморфизм, определенный в § 5.5). Если Y есть $(n-1)$-связное пространство, то из абсолютного варианта теоремы Гуревича об изоморфизме и из теоремы об универсальных коэффициентах для когомологий следует, что n-характеристический элемент $v \in H^n(Y, y_0; \pi)$ существует тогда и только тогда, когда $\pi \approx \pi_n(Y, y_0)$. Такой элемент единствен с точностью до автоморфизма группы π. В частности, пространство Y типа (π, n), где группа π абелева, всегда обладает n-характеристическим элементом $v \in H^n(Y, y_0; \pi)$.

4. Лемма. *Пусть $u \in H^n(Y, y_0; G)$ — универсальный элемент для n-го когомологического функтора с коэффициентами в группе G, $n \geqslant 1$. Тогда Y — пространство типа (G, n) и элемент u является n-характеристическим для Y.*

---

[1]) См. Eilenberg S. and MacLane S., On the groups $H(\pi, n)$, I, *Ann. Math.*, **58** (1953), 55—107.

Доказательство. Согласно теореме 7.7.14, имеют место изоморфизмы

$$T_u\colon \pi_q(Y,\ y_0) \approx H^n(S^q,\ p_0;\ G),\qquad q \geqslant 1.$$

Следовательно, $\pi_q(Y,\ y_0) = 0$, если $q \neq n$, и $T_u\colon \pi_n(Y,\ y_0) \approx \approx H^n(S^n,\ p_0;\ G)$. Если задано отображение $\alpha\colon (S^n,\ p_0) \to (Y,\ y_0)$, то $T_u([\alpha]) = \alpha^*(u)$ и имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd}
\pi_n(S^n,\ p_0) \arrow[r, "\varphi", "\approx"'] \arrow[d, "\alpha_{\#}"'] & H_n(S^n,\ p_0) \arrow[d, "\alpha_*"] \arrow[dr, "h(\alpha^*(u)) = h(T_u[\alpha])"] & \\
 & & G \\
\pi_n(Y,\ y_0) \arrow[r, "\varphi", "\approx"'] & H_n(Y,\ y_0) \arrow[ur, "h(u)"'] &
\end{tikzcd}$$

Пусть изоморфизм $\nu\colon H^n(S^n,\ p_0;\ G) \approx G$ определен равенством

$$\nu(v) = h(v)(\varphi[1_{S^n}]),\quad v \in H^n(S^n,\ p_0;\ G).$$

Из коммутативности написанной выше диаграммы следует, что

$$(h(u) \circ \varphi)[\alpha] = (h(u) \circ \varphi \circ \alpha_{\#})[1_{S^n}] = h(T_u[\alpha])(\varphi[1_{S^n}]) = (\nu \circ T_u)[\alpha].$$

Отсюда видно, что гомоморфизм $h(u) \circ \varphi$ совпадает с композицией

$$\pi_n(Y,\ y_0) \xrightarrow[\approx]{T_u} H^n(S^n,\ p_0;\ G) \xrightarrow[\approx]{\nu} G$$

и, значит, является изоморфизмом. Следовательно, Y — пространство типа $(G,\ n)$, и элемент u является n-характеристическим для Y. ■

5. Следствие. *Для всякого целого $n \geqslant 1$ и произвольной группы π (абелевой, если $n > 1$) существует пространство типа $(\pi,\ n)$.*

Доказательство. Если группа π абелева, то из леммы 4 следует, что всякое классифицирующее пространство n-го когомологического функтора с коэффициентами в группе π является пространством типа $(\pi,\ n)$. Пусть $n = 1$, а группа π произвольна. Тогда классифицирующее пространство гомотопического функтора примера 7.7.5, который сопоставляет линейно связному пространству X с отмеченной точкой x_0 множество гомоморфизмов $\pi_1(X\ \ x_0) \to \pi$, служит примером пространства типа $(\pi,\ 1)$. Поскольку всякий гомотопический функтор обладает классифицирующим пространством (следствие 7.7.12), нужное нам утверждение доказано. ■

6. Следствие. *Пусть $\{\pi_n\}_{n \geqslant 1}$ — произвольная последовательность групп, являющихся абелевыми, если $n \geqslant 2$. Тогда существует* *пространство X с отмеченной точкой x_0, такое, что $\pi_n(X, x_0) \approx \pi_n$ для $n \geqslant 1$.*

Доказательство. Согласно следствию 5, для каждого $n \geqslant 1$ существует пространство Y_n с отмеченной точкой y_n, такое, что $\pi_q(Y_n, y_n) = 0$ для $q \neq n$ и $\pi_n(Y_n, y_n) \approx \pi_n$. Тогда произведение $\prod Y_n$ с отмеченной точкой (y_n) обладает нужными нам свойствами. ■

Последний результат можно усилить следующим образом: если π_1 действует как группа операторов на группе π_n для каждого $n \geqslant 2$, то эту последовательность можно реализовать как последовательность гомотопических групп пространства X, причем так, что действие группы π_1 на π_n соответствует действию $\pi_1(X, x_0)$ на $\pi_n(X, x_0)$, определенному в теореме 7.3.8.

7. Лемма. *Пусть F: $H \to H'$ — естественное преобразование гомотопических функторов, индуцирующее изоморфизм их q-х групп коэффициентов для $q < n$ и эпиморфизм n-х групп коэффициентов (здесь $1 \leqslant n \leqslant \infty$). В таком случае для всякого линейно связного CW-комплекса W с отмеченной точкой отображение*

$$F(W)\colon H(W) \to H'(W)$$

является изоморфизмом, если $\dim W \leqslant n-1$, и эпиморфизмом, если $\dim W \leqslant n$.

Доказательство. Пусть $u \in H(Y)$ и $u' \in H'(Y')$ — универсальные элементы для функторов H и H' соответственно, и пусть отображение f: $Y \to Y'$ таково, что $H'(f)(u') = F(Y)(u)$. Для всякого CW-комплекса W имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd}
{[W; Y]} \arrow[r, "f_{\#}"] \arrow[d, "T_u"'] & {[W; Y']} \arrow[d, "T_{u'}"] \\
H(W) \arrow[r, "F(W)"] & H'(W)
\end{tikzcd}$$

в которой (согласно теореме 7.7.14) оба вертикальных отображения биективны. Поскольку $F(S^q)$: $H(S^q) \to H'(S^q)$ — изоморфизм, если $q < n$, и эпиморфизм, если $q = n$, то $f_{\#}$: $\pi_q(Y) \to \pi_q(Y')$ — изоморфизм для $q < n$ и эпиморфизм для $q = n$. Поскольку Y и Y' — линейно связные пространства с отмеченной точкой, отображение f является n-эквивалентностью. Требуемое утверждение теперь вытекает из следствия 7.6.23 и коммутативности написанной выше диаграммы. ■

Этот результат мы теперь используем для получения следующей классификационной теоремы, являющейся обращением леммы 4.

8. Теорема. *Пусть π — некоторая абелева группа, Y — пространство типа (π, n), а $\iota \in H^n(Y, y_0; \pi)$ — некоторый n-характеристический элемент для Y. Пусть естественное преобразование ψ: $\pi^Y \to H^n(\cdot; \pi)$ определено соотношением $\psi[f] = f^*\iota$, где $[f] \in [X; Y]$. Тогда ψ является естественной эквивалентностью на категории линейно связных CW-комплексов с отмеченной точкой.*

Доказательство. Согласно лемме 7, достаточно проверить, что ψ индуцирует изоморфизм всех групп коэффициентов функторов π^Y и $H^n(\cdot; \pi)$. Единственными ненулевыми группами коэффициентов здесь являются $\pi_n(Y, y_0)$ и $H^n(S^n, p_0; \pi)$. Значит, нужно лишь проверить, что отображение

$$\psi(S^n)\colon \pi_n(Y, y_0) \to H^n(S^n, p_0; \pi)$$

является изоморфизмом. Определив изоморфизм ν: $H^n(S^n, p_0; \pi) \approx \pi$ равенством $\nu(v) = h(v)(\varphi[1_{S^n}])$ (как и при доказательстве леммы 4), мы получим $\nu \circ \psi(S^n) = h(\iota) \circ \varphi$. Поскольку элемент ι является n-характеристическим для Y, то $\nu \circ \psi(S^n)$ — изоморфизм, откуда следует, что и $\psi(S^n)$ — изоморфизм. ■

9. Теорема. *Пусть Y — пространство типа $(\pi, 1)$, и пусть функтор H сопоставляет пространству X с отмеченной точкой множество гомоморфизмов группы $\pi_1(X, x_0)$ в группу $\pi_1(Y, y_0)$. Пусть естественное преобразование $\bar\psi$: $\pi^Y \to H$ определено равенством $\bar\psi[f] = f_{\#}$, где $[f] \in [X; Y]$. Тогда преобразование $\bar\psi$ является естественной эквивалентностью на категории линейно связных CW-комплексов с отмеченной точкой.*

Доказательство. Согласно лемме 7, достаточно проверить, что отображение

$$\bar\psi(S^1)\colon \pi_1(Y, y_0) \to H(S^1, p_0)$$

является изоморфизмом. Определим изоморфизм $\bar\nu$: $H(S^1, p_0) \approx$ $\approx \pi_1(Y, y_0)$ по формуле $\bar\nu(\gamma) = \gamma([1_{S^1}])$, где γ: $\pi_1(S^1, p_0) \to$ $\to \pi_1(Y, y_0)$; тогда изоморфизм $\bar\nu$ является обратным к $\bar\psi(S^1)$, откуда следует, что $\bar\psi(S^1)$ — изоморфизм. ■

Заметим, что если в теореме 9 группа $\pi_1(Y, y_0)$ абелева, то множество гомоморфизмов группы $\pi_1(X, x_0)$ в группу $\pi_1(Y, y_0)$ находится во взаимно однозначном соответствии с группой

$$\mathrm{Hom}(\pi_1(X, x_0), \pi_1(Y, y_0)) \approx \mathrm{Hom}(H_1(X, x_0), \pi_1(Y, y_0)) \approx$$
$$\approx H^1(X, x_0; \pi_1(Y, y_0)),$$

и, значит, теоремы 8 и 9 в этом случае совпадают.

Рассмотрим теперь свободные гомотопические классы отображений $X \to Y$. Поскольку всякая нульмерная клетка x_0 CW-комплекса X может служить невырожденной отмеченной точкой (так как по теореме 7.6.12 вложение $x_0 \subset X$ представляет собой корасслоение), из следствия 7.3.4 вытекает, что можно определить действие группы $\pi_1(Y, y_0)$ на множестве $[X, x_0; Y, y_0]$. Более того, если пространства X и Y линейно связны и это действие тривиально, то отображение множества сохраняющих отмеченную точку гомотопических классов в множество свободных гомотопических классов

$$[X, x_0; Y, y_0] \to [X; Y]$$

является изоморфизмом. Если Y — пространство типа (π, n), где $n > 1$, то $\pi_1(Y, y_0) = 0$, и, значит, имеет место изоморфизм

$$[X, x_0; Y, y_0] \approx [X; Y].$$

В случае когда Y — пространство типа $(\pi, 1)$, действие группы $\pi_1(Y, y_0)$ на множестве $[X, x_0; Y, y_0]$ соответствует при изоморфизме ψ теоремы 9 ее действию на множестве $H(X, x_0)$ посредством сопряжения. Таким образом, если группа π абелева, то имеет место изоморфизм

$$[X, x_0; Y, y_0] \approx [X; Y].$$

10. Теорема. *Если π — абелева группа, Y — пространство типа (π, n), а элемент $\iota \in H^n(Y, y_0; \pi)$ является n-характеристическим для Y, то для любого относительного CW-комплекса (X, A) имеет место изоморфизм*

$$\psi\colon [X, A; Y, y_0] \xrightarrow[\approx]{} H^n(X, A; \pi).$$

Доказательство. В случае когда подпространство A пусто, а X линейно связно, из теоремы 8 и сделанного выше замечания следует, что имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd}
{[X, x_0; Y, y_0]} \arrow[r, "\approx"'] \arrow[d, "\psi"', "\approx"] & {[X; Y]} \arrow[d, "\psi"] \\
H^n(X, x_0; \pi) \arrow[r, "\approx"'] & H^n(X; \pi)
\end{tikzcd}$$

и, значит, $\psi\colon [X; Y] \approx H^n(X; \pi)$. Если же A пусто, а пространство X не является линейно связным, то пусть $\{X_\lambda\}$ — множество его компонент линейной связности. Тогда результат получается из первого рассмотренного случая, если заметить, что $[X; Y] \approx \approx \prod [X_\lambda; Y]$ и $H^n(X; \pi) \approx \prod H^n(X_\lambda; \pi)$. Предположим теперь, что A непусто: пусть $k\colon (X, A) \to (X/A, x_0)$ — проекция. Тогда нужный нам результат получается с помощью уже доказанного изоморфизма ψ: $[X/A; Y] \approx H^n(X/A; \pi)$ и коммутативной диаграммы

$$\begin{array}{ccccc} [X, A; Y, y_0] & \xleftarrow[\approx]{k^\#} & [X/A, x_0; Y, y_0] & \xrightarrow[\approx]{} & [X/A; Y] \\ \downarrow{\scriptstyle\psi} & & \downarrow{\scriptstyle\psi} & & {\scriptstyle\approx}\downarrow{\scriptstyle\psi} \\ H^n(X, A; \pi) & \xleftarrow[\approx]{k^*} & H^n(X/A, x_0; \pi) & \xrightarrow[\approx]{} & H^n(X/A; \pi). \end{array} \blacksquare$$

11. Теорема. *Пусть Y — пространство типа $(\pi, 1)$. Для всякого линейно связного CW-комплекса X множество свободных гомотопических классов отображений $X \to Y$ находится во взаимно однозначном соответствии с множеством классов сопряженности гомоморфизмов $\pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0)$, и это соответствие имеет вид $[f] \to f_\#$.*

Доказательство. Это следует из теоремы 9 и сделанного выше замечания о действии группы $\pi_1(Y, y_0)$ на множестве $[X, x_0; Y, y_0]$. $\blacksquare$

12. Теорема. *Пусть Y — пространство типа (π, n), где $n \geqslant 1$, а группа π абелева, и пусть элемент $\iota \in H^n(Y, y_0; \pi)$ является n-характеристическим для Y. Для всякого относительного CW-комплекса (X, A) отображение f: $A \to Y$ тогда и только тогда можно продолжить на все пространство X, когда в группе $H^{n+1}(X, A; \pi)$ имеет место равенство $\delta f^*(\iota) = 0$.*

Доказательство. Предположим, что $f = g \circ i$, где i: $A \subset X$ и g: $X \to Y$. Тогда $\delta f^*(\iota) = \delta i^* g^*(\iota) = 0$, поскольку $\delta i^* = 0$. Следовательно, если отображение f можно продолжить на все X, то $\delta f^*(\iota) = 0$.

Докажем обратное утверждение. Предположим, что $\delta f^*(\iota) = 0$. Чтобы продолжить отображение f на все X, достаточно его продолжить на каждую компоненту линейной связности пространства X. Следовательно, без ограничения общности можно считать X линейно связным (а A непустым). Пусть пространство Y' получено из несвязного объединения $X \cup Y$ отождествлением точек $a \in A$ и $f(a)$ для всех $a \in A$. Тогда Y вкладывается в Y', пара (Y', Y) является относительным CW-комплексом и определено клеточное отображение j: $(X, A) \to (Y', Y)$, индуцирующее изоморфизм j^*: $H^*(Y', Y) \approx H^*(X, A)$, для которого имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} H^n(Y, y_0) & \xrightarrow{\delta} & H^{n+1}(Y', Y) \\ \downarrow{\scriptstyle f^*} & & {\scriptstyle\approx}\downarrow{\scriptstyle j^*} \\ H^n(A) & \xrightarrow{\delta} & H^{n+1}(X, A) \end{array}$$

Так как $\delta f^*(\iota)=0$, то $\delta(\iota)=0$, и, значит, существует такой элемент $v \in H^n(Y', y_0; \pi)$, что $v \mid (Y, y_0)=\iota$. Поскольку пространства X и Y линейно связны, а A непусто, пространство Y' также линейно связно.

Пусть $\bar{Y}=Y' \vee I$ (здесь отождествляются точки $y_0 \in Y'$ и $0 \in I$), и пусть $\bar{y}_0=1 \in \bar{Y}$. Тогда $\bar{Y}$ — линейно связное пространство с невырожденной отмеченной точкой $\bar{y}_0$. Пусть $r\colon (\bar{Y}, I) \to (Y', y_0)$ — ретракция, стягивающая отрезок I в точку y_0, и пусть $\bar{v}=r^*(v) \mid (\bar{Y}, \bar{y}_0) \in H^n(\bar{Y}, \bar{y}_0; \pi)$. Согласно теореме 7.7.11, существует вложение пространства $\bar{Y}$ в пространство Y'', являющееся классифицирующим пространством для n-го когомологического функтора с коэффициентами в группе π и обладающее универсальным элементом $\bar{u} \in H^n(Y'', \bar{y}_0; \pi)$, таким, что $\bar{u} \mid \bar{Y}=\bar{v}$. Тогда Y'' — пространство типа (π, n) и существует единственный n-характеристический элемент $u \in H^n(Y'', \bar{y}_0; \pi)$, такой, что $u \mid \bar{Y}=\bar{u} \mid \bar{Y}$. Тогда $u \mid (Y, y_0)=\iota$, и из теоремы 8 и коммутативности диаграммы

$$\begin{tikzcd}
{[S^q, p_0; Y, y_0]} \arrow[rr] \arrow[dr, "\psi_\iota"', "\approx"] & & {[S^q, p_0; Y'', y_0]} \arrow[dl, "\psi_u", "\approx"'] \\
& H^n(S^q, p_0; \pi) &
\end{tikzcd}$$

следует, что вложение $Y \subset Y''$ является слабой гомотопической эквивалентностью. Поскольку композиция $X \xrightarrow{i \mid X} Y' \subset Y''$ служит продолжением композиции $A \xrightarrow{f} Y \subset Y''$, из теоремы 7.6.22 следует, что f можно продолжить до отображения $X \to Y$. ■

Покажем теперь, что когомологические операции тесно связаны с когомологиями пространств Эйленберга — Маклейна. Пусть $\Theta(n, q; \pi, G)$ — группа всех когомологических операций типа $(n, q; \pi, G)$. Таким образом, π и G — абелевы группы, а $\theta \in \Theta(n, q; \pi, G)$ — естественное преобразование сингулярного когомологического функтора $H^n(\,\cdot\,; \pi)$ в сингулярный когомологический функтор $H^q(\,\cdot\,; G)$.

13. Теорема. *Пусть π — абелева группа, и пусть Y — пространство типа (π, n), имеющее n-характеристический элемент $\iota \in H^n(Y, y_0; \pi)$. Тогда имеет место изоморфизм*

$$\gamma\colon \Theta(n, q; \pi, G) \approx H^q(Y, y_0; G),$$

определенный соотношением $\gamma(\theta)=\theta(\iota)$, $\theta \in \Theta(n, q; \pi, G)$.

Доказательство. Поскольку, согласно теореме 7.8.1, всякая пара обладает относительной CW-аппроксимацией, когомологические операции для произвольных пространств биективно соответствуют когомологическим операциям в категории относительных CW-комплексов. Определим отображение, обратное отображению γ. Каждому элементу $u \in H^q(Y, y_0; G)$ сопоставим когомологическую операцию θ_u типа $(n, q; \pi, G)$ для произвольного относительного CW-комплекса (X, A), полагая

$$\theta_u(v) = f_v^*(u), \qquad v \in H^n(X, A),$$

где отображение f_v: $(X, A) \to (Y, y_0)$ таково, что $f_v^*(\iota) = v$ (такое отображение существует и единственно с точностью до гомотопии в силу теоремы 10). Тогда

$$\gamma(\theta_u) = \theta_u(\iota) = 1_Y^*(u) = u,$$

откуда видно, что отображение $u \to \theta_u$ является правым обратным для γ. Покажем, что оно является и левым обратным. Пусть (X, A) — относительный CW-комплекс, и пусть $v \in H^n(X, A; \pi)$. Мы должны показать, что $\theta_{\gamma(\theta)}(v) = \theta(v)$. Пусть отображение f_v: $(X, A) \to (Y, y_0)$ таково, что $f_v^*(\iota) = v$. Тогда

$$\theta(v) = \theta(f_v^*(\iota)) = f_v^*(\theta(\iota)) = f_v^*(\gamma(\theta)) = \theta_{\gamma(\theta)}(v). \ \blacksquare$$

Приведем одно применение этого результата.

14. Следствие. *Пусть θ — когомологическая операция типа $(n, q; \pi, G)$. Для всякого относительного CW-комплекса (X, A) отображение*

$$\theta\colon H^n((X, A) \times (I, \dot I); \pi) \to H^q((X, A) \times (I, \dot I); G)$$

является гомоморфизмом.

Доказательство. Проекция

$$k\colon (X \times I, A \times I \cup X \times \dot I) \to (X \times I)/(A \times I \cup X \times \dot I)$$

индуцирует изоморфизм когомологий. Легко видеть, что пространство $(X \times I)/(A \times I \cup X \times \dot I)$ гомеоморфно надстройке $S(X/A)$ (в случае, когда A пусто, под X/A понимается несвязное объединение пространства X и отмеченной точки). Таким образом, достаточно показать, что если X' — произвольный CW-комплекс с отмеченной точкой, то отображение

$$\theta\colon H^n(SX', x_0'; \pi) \to H^q(SX', x_0'; G)$$

является гомоморфизмом.

Пусть Y — некоторый CW-комплекс типа (π, n) с n-характеристическим элементом ι, и пусть Y' — пространство типа (G, q) с q-характеристическим элементом ι'. Допустим, что отображение

$f\colon Y \to Y'$ таково, что $f^*\iota' = \theta(\iota)$. Тогда имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} [SX', x_0'; Y, y_0] & \xrightarrow{f_\#} & [SX', x_0'; Y', y_0'] \\ \downarrow{\scriptstyle\psi}\,\approx & & \downarrow{\scriptstyle\psi}\,\approx \\ H^n(SX', x_0'; \pi) & \xrightarrow{\theta} & H^q(SX', x_0'; G) \end{array}$$

Легко видеть, что отображение $f_\#$ является гомоморфизмом, поскольку оба верхних множества наделены структурой группы за счет структуры H-когруппы на пространстве SX'. Из леммы 7.7.6 следует, что оба вертикальных отображения представляют собой гомоморфизм. Следовательно, нижнее отображение θ также есть гомоморфизм. ■

Пусть элемент $\bar{I} \in H^1(I, \dot{I}; \mathbf{Z})$ является образующей. Определим изоморфизм

$$\tau\colon H^r(X, A; G') \approx H^{r+1}((X, A) \times (I, \dot{I}); G'),$$

положив $\tau(u) = u \times \bar{I}$. Пусть задана когомологическая операция θ типа $(n, q; \pi, G)$. Ее *надстройкой* $S\theta$ называется когомологическая операция типа $(n-1, q-1; \pi, G)$, определенная равенством $(S\theta)(u) = \tau^{-1}\theta\tau(u)$ для $u \in H^{n-1}(X, A; \pi)$. Из следствия 14 вытекает, что надстройка произвольной когомологической операции является аддитивной когомологической операцией.

Распространим теперь теоремы 10 и 12 на другие пространства Y, ограничивая размерность относительного CW-комплекса (X, A). Пусть $n \geqslant 1$. Рассмотрим n-простое $(n-1)$-связное пространство Y с отмеченной точкой (если $n = 1$, то группа $\pi_1(Y, y_0)$ абелева). Если элемент $\iota \in H^n(Y, y_0; \pi)$ является n-характеристическим, то рассуждения, аналогичные приведенным в теореме 12, показывают, что пространство Y можно вложить в пространство Y' типа (π, n), обладающее n-характеристическим элементом $u \in H^n(Y', y_0; \pi)$, таким, что $u \mid Y = \iota$. Отсюда следует, что вложение $Y \subset Y'$ есть $(n+1)$-эквивалентность. Теперь из теорем 7.6.22 и 10 вытекает следующее обобщение теоремы 10:

15. Теорема. *Пусть элемент $\iota \in H^n(Y, y_0; \pi)$ является n-характеристическим для n-простого $(n-1)$-связного пространства Y с отмеченной точкой, и пусть (X, A) — некоторый относительный CW-комплекс. Отображение*

$$\psi_\iota\colon [X, A; Y, y_0] \to H^n(X, A; \pi),$$

определенное соотношением $\psi_\iota[f] = f^*(\iota)$, является изоморфизмом, если $\dim(X - A) \leqslant n$, *и эпиморфизмом, если* $\dim(X - A) \leqslant n + 1$. ■

Рассмотрим частный случай $Y = S^n$. Пусть $s^* \in H^n(S^n, p_0; \mathbf{Z})$ — образующая. Она является n-характеристическим элементом для сферы S^n, и мы получаем следующую *классификационную теорему Хопфа* [1]):

16. Следствие. *Пусть (X, A) — относительный CW-комплекс, причем $\dim(X - A) \leqslant n$ (где $n \geqslant 1$). Пусть $s^* \in H^n(S^n, p_0; \mathbf{Z})$ — некоторая образующая. Тогда имеет место изоморфизм*

$$\psi_{s^*}\colon [X, A; S^n, p_0] \approx H^n(X, A; \mathbf{Z}),$$

определенный равенством $\psi_{s^*}([f]) = f^*(s^*)$. ■

Аналогично получается следующее обобщение теоремы 12:

17. Теорема. *Пусть элемент $\iota \in H^n(Y, y_0; \pi)$ является n-характеристическим для n-простого $(n-1)$-связного пространства Y с отмеченной точкой, и пусть (X, A) — некоторый относительный CW-комплекс, причем $\dim(X - A) \leqslant n+1$. Отображение $f\colon A \to Y$ тогда и только тогда можно продолжить на все пространство X, когда в группе $H^{n+1}(X, A; \pi)$ имеет место равенство $\delta f^*(\iota) = 0$.* ■

В частности, отсюда получается следующая *теорема Хопфа о продолжении*:

18. Следствие. *Пусть (X, A) — относительный CW-комплекс, где $\dim(X - A) \leqslant n + 1$, и пусть $s^* \in H^n(S^n, p_0; \mathbf{Z})$ — образующая. Отображение $f\colon A \to S^n$ тогда и только тогда можно продолжить на все пространство X, когда в группе $H^{n+1}(X, A; \mathbf{Z})$ имеет место равенство $\delta f^*(s^*) = 0$.* ■

§ 2. Главные расслоения

Этот параграф посвящен расслоениям, слоем которых является пространство Эйленберга — Маклейна. Мы строим теорию препятствий для задачи поднятия отображений относительных CW-комплексов в такие расслоения. В следующем параграфе мы покажем, что многие отображения можно разложить с точностью до слабого гомотопического типа в бесконечную композицию таких расслоений [2]). Таким образом, теория препятствий для этих специальных расслоений приводит к теории препятствий для произвольных отображений.

---

[1]) См. Hopf H., Die Klassen der Abbildungen der n-dimensionalen Polyeder auf die n-dimensionale Sphäre, *Comm. Math. Helv.*, **5** (1933), 39—54, и Whitney H., The maps of an n-complex into an n-sphere, *Duke Math. J.*, **3** (1937), 51—55.

[2]) Напомним, что всякое непрерывное отображение имеет слабый гомотопический тип расслоения (см. § 2.8). — *Прим. перев.*

Для всякого пространства B' с отмеченной точкой определено расслоение пространства путей $PB' \to B'$ (PB' — пространство путей пространства B', начинающихся в отмеченной точке b_0'). С помощью экспоненциального соответствия можно получить взаимно однозначное соответствие между гомотопиями $H: X \times I \to B'$, такими, что $H(x, 0) = b_0'$, и отображениями $H': X \to PB'$. Это соответствие определяется формулой $H'(x)(t) = H(x, t)$. Из сказанного очевидным образом вытекает следующий результат (двойственный к лемме 7.1.1):

1. Лемма. *Отображение $X \to B'$ тогда и только тогда гомотопно нулю, когда его можно поднять в пространство расслоения $PB' \to B'$.* ■

Всякому отображению θ: $B \to B'$, сохраняющему отмеченную точку, соответствует расслоение p_θ: $E_\theta \to B$, индуцированное расслоением $PB' \to B'$.

Расслоение p_θ называется *главным расслоением, индуцированным отображением* θ, и имеет слой $p_\theta^{-1}(b_0) = b_0 \times \Omega B'$. Прямая проверка показывает, что таким образом определяется ковариантный функтор из категории сохраняющих отмеченную точку отображений пространств с отмеченной точкой в подкатегорию расслоений, сопоставляющий отображению θ индуцированное им главное расслоение.

Пусть (X, A) — некоторая пара, и пусть i: $A \subset X$ — вложение. Пусть главное расслоение p_θ: $E_\theta \to B$ индуцировано отображением θ: $B \to B'$. Напомним, что парой отображений (определение см. в § 7.8) называется коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f''} & E_\theta \\ {\scriptstyle i}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p_\theta} \\ X & \xrightarrow{f'} & B \end{array}$$

Множество гомотопических классов $[i; p_\theta]$ пар отображений $i \to p_\theta$ является областью значений функтора двух переменных, контравариантного относительно пар (X, A) и ковариантного относительно сохраняющих отмеченную точку отображений θ. Нас интересует более детальное изучение задачи относительного поднятия (т. е. отображения ρ: $[X; E_\theta] \to [i; p_\theta]$) в этой ситуации. Поскольку отображение p_θ является индуцированным расслоением, задача относительного поднятия эквивалентна задаче продолжения, что и показано ниже.

Пусть расслоение p_θ: $E_\theta \to B$ индуцировано отображением θ: $B \to B'$. Для всякого пространства W отображение f: $W \to E_\theta$ определяет два отображения f_1: $W \to B$ и f_2: $W \to PB'$, таких, что

$p' \circ f_2 = \theta \circ f_1$. Экспоненциальное соответствие переводит f_2 в гомотопию F: $W \times I \to B'$ между постоянным отображением и $\theta \circ f_1$. Если задано отображение f_1: $W \to B$, то имеет место взаимно однозначное соответствие между поднятиями f: $W \to E_\theta$ отображения f_1 и гомотопиями F: $W \times I \to B'$, связывающими постоянное отображение с отображением $\theta \circ f_1$.

Пусть (X, A) — некоторая пара, i: $A \subset X$ — вложение, и пусть f: $i \to p_\theta$ — пара отображений, состоящая из отображений f'': $A \to E_\theta$ и f': $X \to B$, таких, что $p_\theta \circ f'' = f' \circ i$. Определим отображение

$$\theta(f)\colon (A \times I \cup X \times \dot{I},\ X \times 0) \to (B',\ b_0')$$

условиями $\theta(f)(x, 0) = b_0'$, $\theta(f)(x, 1) = \theta f'(x)$, $x \in X$, а $\theta(f) \mid A \times I$ — гомотопия постоянного отображения $A \to b_0'$ в отображение $\theta \circ f' \circ i$, соответствующая поднятию f'' отображения $f' \circ i$. Тем самым устанавливается взаимно однозначное соответствие между поднятиями отображения f и продолжениями отображения $\theta(f)$ на все произведение $X \times I$.

Ограничимся теперь случаем, когда B' — пространство типа (π, n), $n \geqslant 1$, а группа π абелева. Пусть элемент $\iota \in H^n(B', b_0'; \pi)$ является n-характеристическим для B'. В этом случае для всякого отображения θ: $B \to B'$, сохраняющего отмеченную точку, индуцированное расслоение p_θ: $E_\theta \to B$ называется *главным расслоением типа* (π, n). Если (X, A) — относительный CW-комплекс, то $(X, A) \times (I, \dot{I})$ — также относительный CW-комплекс. Если задано отображение g: $A \times I \cup X \times \dot{I} \to B'$, то из теоремы 8.1.12 следует, что g тогда и только тогда можно продолжить до отображения на всем пространстве $X \times I$, когда в группе $H^{n+1}((X, A) \times (I, \dot{I}); \pi)$ имеет место равенство $\delta g^*(\iota) = 0$. В частности, если задана пара отображений f: $i \to p_\theta$, то поднятие отображения f существует тогда и только тогда, когда $\delta\theta(f)^*(\iota) = 0$. *Препятствие к поднятию отображения* f (обозначается $c(f) \in H^n(X, A; \pi)$) определяется равенством

$$\delta\theta(f)^*(\iota) = (-1)^n \tau(c(f)),$$

где τ: $H^n(X, A; \pi) \approx H^{n+1}((X, A) \times (I, \dot{I}); \pi)$ — отображение $\tau(u) = u \times \bar{I}$, определенное в § 8.1 ($\bar{I} \in H^1(I, \dot{I}; \mathbf{Z})$ — такая образующая, что если $\bar{0} \in H^0(\{0\}; \mathbf{Z})$ и $\bar{1} \in H^0(\{1\}; \mathbf{Z})$ — соответствующие единичные целочисленные классы когомологий, то при отождествлении $H^0(\dot{I}; \mathbf{Z}) \approx H^0(\{0\}; \mathbf{Z}) \oplus H^0(\{1\}; \mathbf{Z})$ мы имеем $\delta\bar{1} = \bar{I} = -\delta\bar{0}$).

2. Пример. В случае когда подпространство A пусто, пара отображений f: $i \to p_\theta$ совпадает с отображением f': $X \to B$. В этом случае отображение $\theta(f)$: $X \times \dot{I} \to B'$ таково, что $\theta(f)(x, 0) = b_0'$

и $\theta(f)(x, 1) = \theta f'(x)$. Тогда $\theta(f)^*(\iota) = f'^*(\iota) \times \bar{1}$ и, согласно утверждению 5.6.6,

$$\delta\theta(f)^*(\iota) = (-1)^n f'^*(\iota) \times \bar{I} = (-1)^n \tau f'^*(\iota).$$

Следовательно, в этом случае $c(f) = f'^*(\iota)$.

Из определения ясно, что препятствие к поднятию отображения f функториально как относительно i, так и относительно θ и что оно обращается в нуль тогда и только тогда, когда для отображения f существует поднятие. Аналогичный когомологический критерий мы получаем и для существования гомотопии относительно f двух поднятий отображения f.

Пусть $f\colon i \to p_\theta$ — пара отображений, где (X, A) — относительный CW-комплекс, $i\colon A \subset X$ — вложение, а p_θ — главное расслоение типа (π, n). Пусть заданы два поднятия $\bar{f}_0, \bar{f}_1\colon X \to E_\theta$ отображения f, и пусть пара отображений $g\colon i' \to p_\theta$ определяется коммутативной диаграммой

$$\begin{tikzcd}
A \times I \cup X \times \dot{I} \arrow[r, "g''"] \arrow[d, "i'"'] & E_\theta \arrow[d, "p_\theta"] \\
X \times I \arrow[r, "g'"] & B
\end{tikzcd}$$

где g' — композиция $X \times I \to X \xrightarrow{f'} B$, а отображение g'' таково, что $g''(x, 0) = \bar{f}_0(x)$, $g''(x, 1) = \bar{f}_1(x)$, если $x \in X$, и $g''(a, t) = f''(a)$, если $a \in A$ и $t \in I$. Отображения $\bar{f}_0$ и $\bar{f}_1$ тогда и только тогда гомотопны относительно f, когда отображение g можно поднять. Препятствием к поднятию отображения g является элемент $c(g) \in H^n((X, A) \times (I, \dot{I}); \pi)$. *Различающей отображений* $\bar{f}_0$ *и* $\bar{f}_1$ (обозначается $d(\bar{f}_0, \bar{f}_1) \in H^{n-1}(X, A; \pi)$) называется элемент, определенный соотношением

$$c(g) = (-1)^n \tau(d(\bar{f}_0, \bar{f}_1))$$

(отсюда $\delta\theta(g)^*(\iota) = \tau^2(d(\bar{f}_0, \bar{f}_1))$). Значит, $\bar{f}_0$ и $\bar{f}_1$ тогда и только тогда гомотопны относительно f, когда $d(\bar{f}_0, \bar{f}_1) = 0$. Различающая $d(\bar{f}_0, \bar{f}_1)$ функториальна и обладает следующими основными свойствами:

3. Лемма. *Если заданы пара отображений* $f\colon i \to p_\theta$ *и поднятия* $\bar{f}_0, \bar{f}_1, \bar{f}_2\colon X \to E_\theta$, *то*

$$d(\bar{f}_0, \bar{f}_2) = d(\bar{f}_0, \bar{f}_1) + d(\bar{f}_1, \bar{f}_2).$$

Доказательство. Пусть $I_1=[0, 1/2]$, $\dot{I}_1=\{0, 1/2\}$, $I_2=[1/2, 1]$ и $\dot{I}_2=\{1/2, 1\}$. Определим пару отображений $G: \bar{i} \to p_\theta$, образующих коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} A\times I \cup X\times(\dot{I}_1\cup\dot{I}_2) & \xrightarrow{G''} & E_\theta \\ \bar{i}\downarrow & & \downarrow p_\theta \\ X\times I & \xrightarrow{G'} & B \end{array}$$

формулами $G'(x, t)=f'(x)$, $G''(a, t)=f''(a)$, $G''(x, 0)=\bar{f}_0(x)$, $G''(x, 1/2)=\bar{f}_1(x)$ и $G''(x, 1)=\bar{f}_2(x)$. Тогда мы имеем $c(G)\in \in H^n((X, A)\times(I, \dot{I}_1\cup\dot{I}_2); \pi)$. В силу естественности препятствия $c(G)$ и согласно определению различающей d получаем

$$c(G)|(X, A)\times(I, \dot{I})=(-1)^n\tau(d(\bar{f}_0, \bar{f}_2)),$$
$$c(G)|(X, A)\times(I_1, \dot{I}_1)=(-1)^n\tau_1(d(\bar{f}_0, \bar{f}_1)),$$
$$c(G)|(X, A)\times(I_2, \dot{I}_2)=(-1)^n\tau_2(d(\bar{f}_1, \bar{f}_2)),$$

где изоморфизмы

$$\tau_1: H^{n-1}(X, A)\approx H^n((X, A)\times(I_1, \dot{I}_1)),$$
$$\tau_2: H^{n-1}(X, A)\approx H^n((X, A)\times(I_2, \dot{I}_2))$$

определяются аналогично изоморфизму τ. Эти свойства вместе с рассуждениями, аналогичными использованным при доказательстве того факта, что отображение Гуревича является гомоморфизмом (ср. с теоремой 7.4.3), показывают, что

$$\tau(d(\bar{f}_0, \bar{f}_2))=\tau(d(\bar{f}_0, \bar{f}_1))+\tau(d(\bar{f}_1, \bar{f}_2)).$$

Поскольку τ — изоморфизм, нужное нам утверждение доказано. ∎

4. Теорема. *Пусть заданы пара отображений $f: \dot{i}\to p_\theta$, поднятие $\bar{f}_0: X\to E_\theta$ отображения f и элемент $v\in H^{n-1}(X, A; \pi)$. Существует поднятие $\bar{f}_1: X\to E_\theta$ отображения f, для которого $d(\bar{f}_0, \bar{f}_1)=v$.*

Доказательство. Отображение $\theta(f): A\times I\cup X\times\dot{I}\to B'$, использованное при определении элемента $c(f)$, допускает продолжение $h_0: X\times I\to B'$, соответствующее поднятию $\bar{f}_0: X\to E_\theta$. Нам необходимо найти другое продолжение отображения $\theta(f)$, которое будет соответствовать требуемому поднятию $\bar{f}_1$ отображения f. Пусть отображение

$$F: (A\times I\times I\cup X\times(0\times I\cup I\times\dot{I}), X\times I\times 0)\to(B', b_0')$$

определено как ограничение на подпространство $A\times I\times I\cup X\times \times(0\times I\cup I\times\dot{I})$ отображения $\tilde{F}: X\times I\times I\to B'$, заданного формулой $\tilde{F}(x, t, t') = h_0(x, t')$. Поскольку подпространство $X \times I \times 0$ является сильным деформационным ретрактом пространства $A \times I \times I \cup X \times (0 \times I \cup I \times \dot{I})$, существует гомотопия относительно $X \times I \times 0$ отображения F в постоянное отображение F': $A \times I \times I \cup X \times (0 \times I \cup I \times \dot{I}) \to b_0'$.

Пусть отображение G: $(X \times 1 \times I, A \times 1 \times I \cup X \times 1 \times \dot{I}) \to (B', b_0')$ таково, что мы имеем $G^*(\iota) = (-1)^{n-1} v \times \overline{1} \times \overline{I} \in H^n((X, A) \times \{1\} \times (I, \dot{I}); \pi)$ (такое G существует согласно теореме 8.1.10, поскольку $(X, A) \times \{1\} \times (I, \dot{I})$ — относительный CW-комплекс). Существует корректно определенное отображение

$$H'\colon (A \times I^2 \cup X \times \dot{I}^2, A \times I \times I \cup X \times (0 \times I \cup I \times \dot{I})) \to (B', b_0'),$$

для которого $H' \mid X \times 1 \times I = G$. Тогда

$$H' \mid A \times I \times I \cup X \times (0 \times I \cup I \times \dot{I}) = F',$$

и, поскольку пара $(X, A) \times (I \times I, 0 \times I \cup I \times \dot{I})$ является относительным CW-комплексом, гомотопия $F' \simeq F \operatorname{rel} X \times I \times 0$ продолжается до гомотопии $H' \simeq H \operatorname{rel} X \times I \times 0$, где

$$H\colon (A \times I \times I \cup X \times \dot{I} \times I \cup X \times I \times \dot{I}, X \times I \times 0) \to (B', b_0')$$

есть продолжение отображения F. Пусть гомотопия h_1: $X \times I \to B'$ определена равенством $h_1(x, t) = H(x, 1, t)$. Поскольку H — продолжение отображения F, h_1 — продолжение $\theta(f)$, и, следовательно, h_1 соответствует некоторому поднятию $\bar{f}_1$ отображения f.

Покажем теперь, что поднятие $\bar{f}_1$ обладает нужными нам свойствами. Пара отображений g: $i' \to p_\theta$, использованная при определении различающей $d(\bar{f}_0, \bar{f}_1)$, обладает тем свойством, что $\theta(g) = H$. Следовательно,

$$\tau^2(d(\bar{f}_0, \bar{f}_1)) = \delta H^*(\iota) = \delta H'^*(\iota).$$

Но H' есть отображение $(A \times I^2 \cup X \times \dot{I}^2, A \times I^2 \cup X \times (0 \times I \cup I \times \dot{I}))$ в (B', b_0'), и его ограничение на $X \times 1 \times I$ совпадает с G. Из коммутативности следующей диаграммы (где отображение μ определяется равенством $\mu(w \times \overline{1} \times \overline{I}) = w \times \overline{I}$, $w \in H^*(X, A)$):

$$\begin{tikzcd}[column sep=tiny]
& H^n(A \times I^2 \cup X \times \dot{I}^2, A \times I^2 \cup X \times (0 \times I \cup I \times \dot{I})) \arrow[dl, "\approx"'] \arrow[dr, "\approx"] & \\
H^n(A \times I^2 \cup X \times \dot{I}^2, X \times I \times 0) \arrow[d, "\delta"] & & H^n(X \times 1 \times I, A \times 1 \times I \cup X \times 1 \times \dot{I}) \arrow[d, "\mu"', "\approx"] \\
H^{n+1}((X, A) \times (I^2, \dot{I}^2)) & & H^n((X, A) \times (I, \dot{I})) \arrow[ll, "(-1)^{n-1}\tau"']
\end{tikzcd}$$

вытекает, что

$$\delta H'^{*}(\iota)=(-1)^{n-1}\tau\mu G^{*}(\iota)=\tau(v\times \bar I)=\tau^{2}(v).$$

Поскольку τ^2 — изоморфизм, то $d(\bar f_0, \bar f_1)=v$. ■

5. Теорема. *Пусть (X, A) — относительный CW-комплекс, а (X', A) — его подкомплекс, и пусть i: $A\subset X$, i': $A\subset X'$ и i'': $X'\subset X$ — вложения. Пусть заданы пара отображений f: $i\to p_\theta$ (состоящая из отображений f'': $A\to E_\theta$ и f': $X\to B$) и два поднятия $\bar g_0$, $\bar g_1$: $X'\to E$ отображения $f|i'$: $i'\to p_\theta$, и пусть пары отображений g_0, g_1: $i''\to p_\theta$ определены соответственно следующими коммутативными диаграммами:*

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{\bar g_0} & E_\theta \\ {\scriptstyle i''}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p_\theta} \\ X & \xrightarrow{f'} & B \end{array}\qquad\qquad \begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{\bar g_1} & E_\theta \\ {\scriptstyle i''}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p_\theta} \\ X & \xrightarrow{f'} & B \end{array}$$

Тогда

$$\delta d(\bar g_0, \bar g_1)=c(g_0)-c(g_1),$$

где δ: $H^{n-1}(X', A; \pi)\to H^n(X, X'; \pi)$ — когpаничный гомоморфизм.

Доказательство. Пусть пара отображений h: $\bar i\to p_\theta$ определена коммутативной диаграммой

$$\begin{array}{ccc} A\times I\cup X'\times \dot I & \xrightarrow{h''} & E_\theta \\ {\scriptstyle \bar i}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p_\theta} \\ X'\times I\cup X\times \dot I & \xrightarrow{h'} & B \end{array}$$

где $h''(a, t)=f''(a)$, $a\in A$ и $t\in I$, $h''(x', 0)=\bar g_0(x')$, $h''(x', 1)=\bar g_1(x')$, $x'\in X'$, и $h'(x, t)=f'(x)$, $(x, t)\in X'\times I\cup X\times \dot I$. Тогда $c(h)\in$ $\in H^n(X'\times I\cup X\times \dot I,\ A\times I\cup X'\times I;\ \pi)$. Имеет место изоморфизм

$$H^n(X'\times I\cup X\times \dot I,\ A\times I\cup X'\times I; \pi)\approx$$
$$\approx H^n((X', A)\times(I, \dot I); \pi)\oplus H^n((X, X')\times \dot I; \pi),$$

индуцированный отображениями ограничения. В силу естественности препятствия элемент $c(h)$ соответствует сумме элементов $(-1)^n\tau d(\bar g_0, \bar g_1)=(-1)^n d(\bar g_0, \bar g_1)\times \bar I$ из первого слагаемого и $c(g_0)\times \bar 0+c(g_1)\times \bar 1$ из второго.

Пусть пара отображений $\bar h$: $\bar{\bar i}\to p_\theta$ определена коммутативной диаграммой

$$\begin{array}{ccc} A\times I\cup X'\times \dot I & \xrightarrow{h''} & E_\theta \\ {\scriptstyle \bar{\bar i}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p_\theta} \\ X\times I & \xrightarrow{\bar h'} & B \end{array}$$

где $\bar{h}'(x, t) = f'(x)$, $x \in X$ и $t \in I$. Тогда

$$c(\bar{h}) \in H^n(X \times I,\ A \times I \cup X' \times \dot{I};\ \pi),$$

и снова из естественности препятствия следует, что

$$c(\bar{h}) \mid (X' \times I \cup X \times \dot{I},\ A \times I \cup X' \times I) = c(h).$$

Из точности последовательности

$$H^n(X \times I,\ A \times I \cup X' \times \dot{I}) \to H^n(X' \times I \cup X \times \dot{I},\ A \times I \cup X' \times I) \to$$
$$\xrightarrow{\delta} H^{n+1}(X \times I,\ X' \times I \cup X \times \dot{I})$$

вытекает, что $\delta c(h) = 0$. Значит, в группе $H^{n+1}((X, A) \times (I, \dot{I});\ \pi)$ имеет место равенство (см. теорему 5.6.6)

$$0 = \delta[(-1)^n d(\bar{g}_0, \bar{g}_1) \times \bar{I} + c(g_0) \times \bar{0} + c(g_1) \times \bar{1}] =$$
$$= (-1)^n \delta d(\bar{g}_0, \bar{g}_1) \times \bar{I} - (-1)^n c(g_0) \times \bar{I} + (-1)^n c(g_1) \times \bar{I}.$$

Следовательно, $\tau(\delta d(\bar{g}_0, \bar{g}_1) - c(g_0) + c(g_1)) = 0$. Поскольку τ — изоморфизм, теорема доказана. ■

Вычислим в явном виде препятствие $c(f)$ для случая расслоения $p'\colon \Omega B' \to b_0'$, где B' — пространство типа (π, n), $n > 1$. Тогда $\Omega B'$ — пространство типа $(\pi, n-1)$, и если $\iota' \in H^{n-1}(\Omega B', \omega_0';\ \pi)$ является $(n-1)$-характеристическим элементом для $\Omega B'$, а $\iota \in H^n(B', b_0';\ \pi)$ является n-характеристическим для B', то оба элемента $\delta\iota'$ и $p^*\iota$ (где $\delta\colon H^{n-1}(\Omega B', \omega_0') \approx H^n(PB', \Omega B')$ и $p\colon (PB', \Omega B') \to (B', b_0')$) принадлежат группе $H^n(PB', \Omega B';\ \pi)$. Говорят, что характеристические элементы ι и ι' *связаны*, если $\delta\iota' = p^*\iota$. Если задан один из элементов ι или ι', то всегда можно (единственным образом) выбрать другой так, чтобы они оказались связанными.

6. Теорема. *Пусть $\iota \in H^n(B', b_0';\ \pi)$ и $\iota' \in H^{n-1}(\Omega B', \omega_0';\ \pi)$ — связанные характеристические элементы. Пусть (X, A) — относительный CW-комплекс, где $i\colon A \subset X$ — вложение. Если задана пара отображений $f\colon i \to p'$, где $p'\colon \Omega B' \to b_0'$, то $c(f) = -\delta f''^*(\iota')$, где $f''\colon A \to \Omega B'$ — часть пары отображений f.*

Доказательство. Пусть отображение $\bar{f}\colon (A \times I,\ A \times \dot{I}) \to$ $\to (PB', \Omega B')$ определено равенством $\bar{f}(a, t)(t') = f''(a)(tt')$. Тогда отображение

$$\theta(f)\colon (A \times I \cup X \times \dot{I},\ X \times 0) \to (B', b_0')$$

таково, что $\theta(f) \mid A \times I = p \circ \bar{f}$ и $\theta(f)(X \times \dot{I}) = b_0'$. Пусть отображение $\bar{\bar{f}}\colon (A \times I \cup X \times \dot{I},\ X \times \dot{I}) \to (B', b_0')$ определено отображением $\theta(f)$, а $\bar f'\colon (A\times \dot I,\ A\times 0)\to(\Omega B',\ \omega_0')$ — отображением $\bar f$. Имеет место коммутативная диаграмма (в которой j и j' — соответствующие вложения, а отображение $h_1\colon A\to(X\times\dot I,\ A\times 0)$ определяется формулой $h_1(a)=(a,\ 1)$)

$$\begin{tikzcd}
 & H^n(A\times I\cup X\times\dot I,\ X\times 0) \arrow[dr, "\delta"] & \\
H^n(B',\ b_0') \arrow[ur, "\theta(f)^*"] \arrow[r, "\bar f^*"] \arrow[d, "p^*"'] & H^n(A\times I\cup X\times\dot I,\ X\times\dot I) \arrow[u, "j^*"'] \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "j'^*"'] & H^{n+1}((X,\ A)\times(I,\ \dot I)) \\
H^n(PB',\ \Omega B') \arrow[r, "f'^*"] & H^n(A\times I,\ A\times\dot I) & H^n(X,\ A) \arrow[u, "\approx", "(-1)^{n-1}\tau"'] \\
H^{n-1}(\Omega B',\ \omega_0') \arrow[u, "\delta"] \arrow[r, "\bar f'^*"] & H^{n-1}(A\times\dot I,\ A\times 0) \arrow[u, "\delta"] \arrow[r, "h_1^*", "\approx"'] & H^{n-1}(A) \arrow[u, "\delta"'] \arrow[ul, "\approx", "(-1)^{n-1}\tau"']
\end{tikzcd}$$

Более того, $\delta\circ\tau^{-1}\circ j'^*=\tau^{-1}\circ\delta\colon H^n(A\times I\cup X\times\dot I,\ X\times\dot I)\to H^n(X,\ A)$. Поскольку $f''=\bar f'\circ h_1$, то $f''^*=h_1^*\circ\bar f'^*$, и мы получаем

$$(-1)^{n-1}\tau^{-1}\delta(\theta(f))^*(\iota)=\delta f''^*(\iota').$$

Согласно определению, левая часть равна $-c(f)$. ∎

§ 3. Разложение Мура — Постникова

Этот параграф посвящен методу разложения (с точностью до слабого гомотопического типа) широкого класса отображений в бесконечную композицию более простых отображений, а именно отображений, имеющих слабый гомотопический тип главных расслоений типа $(\pi,\ n)$ для некоторых π и n. Данное в предыдущем параграфе когомологическое описание задачи поднятия для таких расслоений приведет нас в дальнейшем к способу решать общую задачу поднятия последовательными шагами, соответствующими этому разложению.

Пусть задана последовательность расслоений $E_0\xleftarrow{p_1}E_1\xleftarrow{p_2}\ldots$, и пусть

$$E_\infty=\varprojlim\{E_q,\ p_q\}=\{(e_q)\in\prod E_q\mid p_q(e_q)=e_{q-1}\}.$$

Пусть, далее, $a_q\colon E_\infty\to E_q$ — проекция пространства E_∞ на q-ю координату. Каждое отображение a_q есть расслоение, и $a_q=p_{q+1}\circ a_{q+1}$ для $q\geqslant 0$. Для любого пространства X множество отображений $f\colon X\to E_\infty$ находится в биективном соответствии с множеством последовательностей отображений $\{f_q\colon X\to E_q\}_{q\geqslant 0}$, таких, что $f_q=p_{p+1}\circ f_{q+1}$, $q\geqslant 0$ (если задано отображение f, то последовательность $\{f_q\}$ определяется так: $f_q = a_q \circ f$). В частности, если заданы пара (X, A), вложение i: $A \subset X$ и пара отображений f: $i \to a_0$, определенная коммутативной диаграммой

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f''} & E_\infty \\ {\scriptstyle i}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle a_0} \\ X & \xrightarrow{f'} & E_0 \end{array}$$

то поднятия $\overline{f}$: $X \to E_\infty$ находятся в биективном соответствии с последовательностями отображений $\{\overline{f}_q$: $X \to E_q\}_{q \geqslant 0}$, такими, что

(a) $\overline{f}_0 = f'$: $X \to E_0$;

(b) если $q \geqslant 1$, то отображение $\overline{f}_q$: $X \to E_q$ является поднятием пары отображений $i \to p_q$, образующих следующую коммутативную диаграмму:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{a_q \circ f''} & E_q \\ {\scriptstyle i}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p_q} \\ X & \xrightarrow{\overline{f}_{q-1}} & E_{q-1} \end{array}$$

Таким образом, мы видим, что задача относительного поднятия пары отображений f: $i \to a_0$ соответствует некоторой последовательности задач относительного поднятия. Во многих случаях задача относительного поднятия для расслоений p_q гораздо проще, чем первоначальная задача относительного поднятия для расслоения a_0.

Последовательность расслоений $E_0 \xleftarrow{p_1} E_1 \xleftarrow{p_2} \ldots$ называется *сходящейся*, если для каждого $n < \infty$ существует такое N_n, что p_q есть n-эквивалентность для $q > N_n$.

Пусть f: $Y' \to Y$ — некоторое отображение. *Сходящимся разложением* отображения f называется последовательность $\{p_q, E_q, f_q\}_{q \geqslant 1}$, такая, что

(a) если $q > 1$, то p_q: $E_q \to E_{q-1}$ — расслоение, а если $q = 1$, то p_1: $E_1 \to Y$ — расслоение;

(b) если $q \geqslant 1$, то f_q: $Y' \to E_q$ — такое отображение, что $f_q = p_{q+1} \circ f_{q+1}$ для $q \geqslant 1$ и $f = p_1 \circ f_1$;

(c) для любого $n < \infty$ существует такое N_n, что f_q есть n-эквивалентность, если $q > N_n$.

Из условий (a) и (b) вытекает, что при $q \geqslant 1$ отображение f совпадает с композицией $p_1 \circ \ldots \circ p_q \circ f_q$. Условие сходимости (c) показывает, что в некотором смысле существует бесконечная композиция $p_1 \circ p_2 \circ \ldots$.

Если $\{p_q, E_q, f_q\}_{q \geqslant 1}$ — сходящееся разложение отображения f: $Y' \to Y$, то последовательность расслоений $Y \xleftarrow{p_1} E_1 \xleftarrow{p_2} \ldots$ сходится. Следующая теорема показывает, что всякая сходящаяся последовательность расслоений получается таким способом из сходящегося разложения некоторого отображения.

1. Теорема. *Если* $E_0 \xleftarrow{p_1} E_1 \xleftarrow{p_2} \ldots$ — *сходящаяся последовательность расслоений, то* $\{p_q, E_q, a_q\}_{q \geqslant 1}$ — *сходящееся разложение отображения* a_0: $E_\infty \to E_0$.

Доказательство. Ясно, что условия (a) и (b) для данного разложения удовлетворяются. Докажем, что условие сходимости (c) также выполняется. Пусть $1 \leqslant n < \infty$. Выберем число N так, чтобы отображение p_q было $(n+1)$-эквивалентностью, если $q \geqslant N$. Докажем, что a_q является n-эквивалентностью, если $q \geqslant N$. Поскольку $a_q = p_{q+1} \circ a_{q+1}$ и p_{q+1} есть n-эквивалентность, если $q \geqslant N$, достаточно доказать, что a_N есть n-эквивалентность.

Пусть (P, Q) — полиэдральная пара, $\dim P \leqslant n$, и пусть отображения α: $Q \to E_\infty$ и β'_N: $P \to E_N$ таковы, что $\beta'_N | Q = a_N \circ \alpha$. Докажем теперь, что существует продолжение β: $P \to E_\infty$ отображения α, такое, что $a_N \circ \beta = \beta_N$. Отображение α соответствует такой последовательности отображений $\alpha_q = a_q \circ \alpha$: $Q \to E_q$, что $\alpha_q = p_{q+1} \circ \alpha_{q+1}$. Чтобы определить отображение β: $P \to E_\infty$ с нужными нам свойствами, мы должны построить последовательность отображений β_q: $P \to E_q$, такую, что $\beta_q | Q = \alpha_q$, $\beta_q = p_{q+1} \circ \beta_{q+1}$ и $\beta_N = \beta'_N$. Эта последовательность отображений $\{\beta_q\}$ определяется равенством $\beta_q = p_{q+1} \circ \ldots \circ p_N \circ \beta'_N$, если $q \leqslant N$, а если $q \geqslant N$, то по индукции следующим образом. Предполагая, что отображение β_q уже определено для $q \geqslant N$, используем теорему 7.6.22 для нахождения отображения β'_{q+1}: $P \to E_{q+1}$, такого, что $\beta'_{q+1} | Q = \alpha_{q+1}$ и $\beta_q \simeq p_{q+1} \circ \beta'_{q+1} \operatorname{rel} Q$. Затем, используя тот факт, что p_{q+1} является расслоением (а также теорему 7.2.6), изменим отображение β'_{q+1} с помощью гомотопии относительно Q и построим отображение β_{q+1}: $P \to E_{q+1}$, такое, что $\beta_{q+1} | Q = \alpha_{q+1}$ и $\beta_q = p_{q+1} \circ \beta_{q+1}$. Итак, можно построить последовательность $\{\beta_q\}$, и, следовательно, отображение β: $P \to E_\infty$ с нужными нам свойствами существует.

Взяв в качестве пространства P одну точку и считая Q пустым, мы видим, что отображение a_N сюръективно и, значит, индуцирует сюръективное отображение $\pi_0(E_\infty) \to \pi_0(E_N)$. Полагая $(P, Q) = (I, \dot{I})$, мы видим, что отображение a_N вкладывает множество $\pi_0(E_\infty)$ в $\pi_0(E_N)$. Следовательно, оно индуцирует биективное соответствие между множествами компонент линейной связности пространств E_∞ и E_N.

Пусть точка $e_* = (e_q) \in E_\infty$ взята произвольно, и пусть $1 \leqslant k \leqslant n$. Полагая $(P, Q) = (S^k, z_0)$, мы находим, что $a_{N\#}$ эпиморфно отображает группу $\pi_k(E_\infty, e_*)$ на группу $\pi_k(E_N, e_N)$. Если же $1 \leqslant k < n$, то, полагая $(P, Q) = (E^{k+1}, S^k)$, видим, что $a_{N\#}$ является мономорфизмом группы $\pi_k(E_\infty, e_*)$ в группу $\pi_k(E_N, e_N)$. Следовательно, a_N есть n-эквивалентность. ■

2. Следствие. *Пусть* $\{p_q, E_q, f_q\}_{q \geqslant 1}$ — *сходящееся разложение отображения* $f\colon Y' \to Y$, *и пусть отображение* $f'\colon Y' \to E_\infty$ *таково, что* $a_q \circ f' = f_q$ *для* $q \geqslant 1$ *и* $a_0 \circ f' = f$. *Тогда* f' — *слабая гомотопическая эквивалентность.*

Доказательство. Для любого $1 \leqslant n < \infty$ существует такое q, что оба отображения a_q и f_q являются n-эквивалентностями (теорема 1). Тогда отображение f' также является n-эквивалентностью (поскольку $a_q \circ f' = f_q$). Так как указанное свойство выполняется для всех n, отображение f' является слабой гомотопической эквивалентностью. ■

В частности, если дано сходящееся разложение $\{p_q, E_q, f_q\}_{q \geqslant 1}$ слабого расслоения $p\colon E \to B$, то существует слабая гомотопическая эквивалентность $g\colon p \to a_0$, состоящая из коммутативной диаграммы

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "p"'] & E_\infty \arrow[d, "a_0"] \\ B \arrow[r, "1"] & B \end{tikzcd}$$

Если (X, A) — относительный CW-комплекс, а $i\colon A \subset X$ — соответствующее вложение, то из теоремы 7.8.12 следует, что задача относительного поднятия для пары отображений $h\colon i \to p$ эквивалентна задаче относительного поднятия для пары отображений $g \circ h\colon i \to a_0$. Введем теперь дополнительное ограничение на расслоения p_q, входящие в разложение расслоения a_0, с тем чтобы последовательность задач относительного поднятия, порождаемая этим разложением, решалась методами предыдущего параграфа.

Последовательностью Мура — Постникова расслоений $E_0 \xleftarrow{p_1} E_1 \xleftarrow{p_2} \ldots$ называется такая сходящаяся последовательность расслоений, что $p_q\colon E_q \to E_{q-1}$ — главное расслоение типа (G_q, n_q), $q \geqslant 1$. *Разложением Мура — Постникова* отображения $f\colon Y' \to Y$ называется сходящееся разложение $\{p_q, E_q, f_q\}_{q \geqslant 1}$ отображения f, такое, что последовательность расслоений $E_0 \xleftarrow{p_1} E_1 \xleftarrow{p_2} \ldots$ есть последовательность Мура — Постникова. *Разложением Постникова*[1]) пространства Y' называется разложение Мура — Постникова ото-

[1]) В советской математической литературе принят термин *система Постникова*. — *Прим. ред.*

бражения $f\colon Y' \to Y$, где Y — множество компонент линейной связности пространства Y', наделенное фактортопологией, а f — естественная проекция. Таким образом, если пространство Y' линейно связно, то его разложение Постникова совпадает с разложением Мура — Постникова постоянного отображения $Y' \to y_0$.

Разложение Мура — Постникова некоторого отображения является разложением этого отображения (с точностью до слабого гомотопического типа) в бесконечную композицию элементарных отображений. Поэтому задача относительного поднятия, связанная с этой последовательностью, разлагается в бесконечную последовательность простых задач относительного поднятия. Мы покажем, что разложение Мура — Постникова существует для широкого класса отображений линейно связных пространств.

Пусть $f\colon Y' \to Y$ — отображение линейно связных пространств с невырожденной отмеченной точкой. Пусть $n \geqslant 1$; *n-разложением отображения* f называется его разложение в композицию $Y' \xrightarrow{b'} E' \xrightarrow{p'} Y$, обладающую следующими свойствами:

(a) E' — линейно связное пространство с отмеченной точкой, p' — расслоение, а b' — поднятие отображения f (т. е. $f = p' \circ b'$);

(b) $b'_{\#}\colon \pi_q(Y') \to \pi_q(E')$ — изоморфизм, если $1 \leqslant q < n$, и эпиморфизм, если $q = n$ (т. е. b' есть n-эквивалентность);

(c) $p'_{\#}\colon \pi_q(E') \to \pi_q(Y)$ — изоморфизм, если $q > n$, и мономорфизм, если $q = n$.

Отображение $f\colon Y' \to Y$ линейно связных пространств с отмеченной точкой называется *простым*, если $f_{\#}(\pi_1(Y'))$ — такой нормальный делитель группы $\pi_1(Y)$, что факторгруппа по нему абелева, и если (Z_f, Y') есть n-простая пара для всех $n \geqslant 1$ (см. определение в § 7.3). Мы докажем, что простое отображение допускает разложение Мура — Постникова. Для этого нам понадобится еще одно вспомогательное понятие.

Класс когомологий $v \in H^n(X, A; \pi)$ пары (X, A) линейно связных пространств с отмеченной точкой называется *n-характеристическим* для (X, A), если выполняется одно из следующих условий:

(a) $n = 1$ и $i_{\#}(\pi_1(A))$ — нормальный делитель группы $\pi_1(X)$, факторгруппа по которому изоморфно отображается на π посредством композиции

$$\pi_1(X)/i_{\#}(\pi_1(A)) \xrightarrow{\varphi} H_1(X)/i_*(H_1(A)) \xrightarrow{j_*} H_1(X, A) \xrightarrow{h(v)} \pi;$$

(b) $n > 1$ и композиция

$$\pi_n(X, A) \xrightarrow{\varphi} H_n(X, A) \xrightarrow{h(v)} \pi$$

является изоморфизмом.

В случае когда $A = \{x_0\}$, понятие n-характеристического элемента пары $(X, \{x_0\})$ совпадает с понятием n-характеристического элемента пространства X, определенного в § 8.1.

3. Лемма. *Пусть i: $A \subset X$ — простое вложение линейно связных пространств с отмеченной точкой, и пусть (X, A) есть $(n-1)$-связная пара, где $n \geqslant 1$. Тогда существуют классы когомологий $v \in H^n(X, A; \pi)$, являющиеся n-характеристическими для (X, A), где $\pi = \pi_1(X)/i_{\#}(\pi_1(A))$, если $n = 1$, и $\pi = \pi_n(X, A)$, если $n > 1$.*

Доказательство. Пусть $n = 1$. Из абсолютной теоремы Гуревича об изоморфизме, примененной к пространствам A и X, следует, что имеют место изоморфизмы

$$\pi_1(X)/i_{\#}(\pi_1(A)) \overset{\varphi}{\approx} H_1(X)/i_*(H_1(A)) \overset{i_*}{\approx} H_1(X, A).$$

Согласно же формуле универсальных коэффициентов для когомологий, имеет место изоморфизм

$$h\colon H^1(X, A; \pi) \approx \operatorname{Hom}(H_1(X, A), \pi).$$

Следовательно, если $\pi = \pi_1(X)/i_{\#}(\pi_1(A))$, то существует 1-характеристический элемент $v \in H^1(X, A; \pi)$.

Если $n > 1$, то из относительной теоремы об изоморфизме Гуревича и из формулы универсальных коэффициентов для когомологий следует, что имеют место изоморфизмы φ: $\pi_n(X, A) \approx \approx H_n(X, A)$ и h: $H^n(X, A; \pi) \approx \operatorname{Hom}(H_n(X, A), \pi)$. Следовательно, если $\pi = \pi_n(X, A)$, то существуют n-характеристические элементы $v \in H^n(X, A; \pi)$. ■

4. Лемма. *Пусть (X, A) — пара линейно связных пространств с отмеченной точкой, являющаяся $(n-1)$-связной для некоторого $n \geqslant 1$, и пусть i: $A \subset X$ — простое вложение. Тогда существует n-разложение $A \xrightarrow{b'} E' \xrightarrow{p'} X$ отображения i, такое, что p' — главное расслоение типа (π, n), где $\pi = \pi_1(X)/i_{\#}(\pi_1(A))$, если $n = 1$, и $\pi = \pi_n(X, A)$, если $n > 1$.*

Доказательство. Согласно лемме 3, существует класс $v \in H^n(X, A; \pi)$, являющийся n-характеристическим для (X, A). Пусть CA — конус (неприведенный) над A. Заметим, что пара $\{X, CA\}$ удовлетворяет аксиоме вырезания в $X \cup CA$. Следовательно, существует элемент $v' \in H^n(X \cup CA; \pi)$, соответствующий элементу v при изоморфизмах

$$H^n(X \cup CA; \pi) \underset{\approx}{\longleftarrow} H^n(X \cup CA; CA, \pi) \underset{\approx}{\longrightarrow} H^n(X, A; \pi).$$

Пространство $X \cup CA$ можно вложить в пространство X' типа (π, n), обладающее таким n-характеристическим элементом ι', что $\iota' | X \cup CA = v'$. Пусть p': $E' \to X$ — главное расслоение, индуцированное вложением $X \subset X'$, и пусть p'_A: $E'_A \to A$ — ограничение этого расслоения на A. Определим сечение s: $A \to E'_A$, полагая $s(a) = (a, \omega_a)$ $(a \in A)$, где путь ω_a состоит из участка от точки x_0 до вершины конуса CA и из участка от вершины конуса CA до точки a (т. е. $\omega_a(t)=[x_0,\ 1-2t]$, если $0\leqslant t\leqslant {}^1/_2$, и $\omega_a(t)=[a,\ 2t-1]$, если ${}^1/_2\leqslant t\leqslant 1$). Определим отображение $b'\colon A\to E'$ как композицию $A\xrightarrow{s} E'_A\overset{i_A}{\subset} E'$ и докажем, что $A\xrightarrow{b'} E'\xrightarrow{p'} X$ является n-разложением отображения i.

Слоем расслоения p' (а следовательно, также и p'_A) является пространство $\Omega X'$; определим отображение $g\colon E'_A\to\Omega X'$ равенством $g(a,\ \omega)=\omega*(s(a))^{-1}$. Отображение $g\,|\,\Omega X'\colon \Omega X'\to\Omega X'$ гомотопно тождественному отображению. Пусть $i''\colon \Omega X'\subset E'_A$ — вложение. Из точной гомотопической последовательности расслоения $p'_A\colon E'_A\to A$ можно получить следующее разложение в прямую сумму:

$$\pi_q(E'_A)\approx i''_{\#}\pi_q(\Omega X')\oplus s_{\#}\pi_q(A),\qquad q\geqslant 1.$$

(И в случае $q=1$ мы пользуемся аддитивной записью.) Определим гомоморфизм $\lambda\colon \pi_q(X,\ A)\to\pi_{q-1}(\Omega X')$, $q\geqslant 1$, как композицию

$$\pi_q(X,\ A)\xrightarrow[\approx]{p'^{-1}_{\#}}\pi_q(E',\ E'_A)\xrightarrow{\partial}\pi_{q-1}(E'_A)\xrightarrow{g_{\#}}\pi_{q-1}(\Omega X').$$

Покажем, что следующая диаграмма коммутативна с точностью до знака:

$$\begin{array}{ccccccc}
\pi_q(A) & \xrightarrow{i_{\#}} & \pi_q(X) & \xrightarrow{j_{\#}} & \pi_q(X,\ A) & \xrightarrow{\partial} & \pi_{q-1}(A)\\
\downarrow{\scriptstyle b'_{\#}} & & \downarrow{\scriptstyle =} & & \downarrow{\scriptstyle \lambda} & & \downarrow{\scriptstyle b'_{\#}}\\
\pi_q(E') & \xrightarrow{p'_{\#}} & \pi_q(X) & \xrightarrow{\bar\partial} & \pi_{q-1}(\Omega X') & \xrightarrow{i'_{\#}} & \pi_{q-1}(E')
\end{array}$$

Действительно, легко видеть, что левый и средний квадраты диаграммы коммутативны. Покажем теперь, что $b'_{\#}\circ\partial=-i'_{\#}\circ\lambda$.

Для $q=1$ это верно, поскольку из $\pi_0(A)=0$ следует, что $b'_{\#}\circ\partial$ — тривиальное отображение, а из того, что $j_{\#}$ — эпиморфизм и $i'_{\#}\circ\lambda\circ j_{\#}=i'_{\#}\circ\bar\partial=0$, следует, что отображение $i_{\#}\lambda$ тоже тривиальное. Пусть $q>1$. Имеем

$$\alpha=i''_{\#}g_{\#}\alpha+s_{\#}p'_{A\#}\alpha,\qquad \alpha\in\pi_{q-1}(E'_A).$$

Поскольку композиция $\pi_q(E',\ E'_A)\xrightarrow{\partial}\pi_{q-1}(E'_A)\xrightarrow{i'_{A\#}}\pi_{q-1}(E')$ тривиальна, для всякого элемента $\beta\in\pi_q(E',\ E'_A)$ получаем

$$0=i'_{A\#}\partial\beta=i'_{A\#}i''_{\#}g_{\#}\partial\beta+i'_{A\#}s_{\#}p'_{A\#}\partial\beta=i'_{\#}g_{\#}\partial\beta+b'_{\#}\partial p_{\#}\beta.$$

Из определения гомоморфизма λ видно, что $\lambda p_{\#}\beta=g_{\#}\partial\beta$. Следовательно,

$$i'_{\#}\lambda p_{\#}\beta+b'_{\#}\partial p_{\#}\beta=0.$$

Поскольку $p_{\#}\colon \pi_q(E', E'_A) \approx \pi_q(X, A)$, это доказывает, что $b'_{\#} \circ \partial = -i'_{\#} \circ \lambda$.

Прямая проверка показывает, что гомоморфизм λ совпадает также с композицией

$$\pi_n(X, A) \to \pi_n(X \cup CA, CA) \xleftarrow[\approx]{} \pi_n(X \cup CA) \to \pi_n(X') \xrightarrow[\approx]{\partial} \pi_{n-1}(\Omega X').$$

Конструкция пространства X' и элемента $\iota' \in H^n(X'; \pi)$ показывает, что коммутативна следующая диаграмма:

$$\begin{tikzcd}
\pi_n(X, A) \arrow[r] \arrow[d, "\varphi"', "\approx"] & \pi_n(X \cup CA, CA) \arrow[d, "\varphi"'] & \pi_n(X \cup CA) \arrow[l, "\approx"'] \arrow[r] \arrow[d, "\varphi"'] & \pi_n(X') \arrow[d, "\approx"', "\varphi"] \\
H_n(X, A) \arrow[r, "\approx"'] \arrow[dr, "h(v)"', "\approx"] & H_n(X \cup CA, CA) \arrow[d] & H_n(X \cup CA) \arrow[l, "\approx"] \arrow[r] \arrow[dl, "h(v')"'] & H_n(X') \arrow[dll, "\approx"', "h(\iota')"] \\
& \pi & &
\end{tikzcd}$$

Следовательно, $\lambda\colon \pi_n(X, A) \approx \pi_{n-1}(\Omega X')$.

Если $n = 1$, то отображение $\partial\colon \pi_1(X) \to \pi_0(\Omega X')$ сюръективно (поскольку $\pi_0(A) = 0$), и, значит, пространство E' линейно связно. Если $n > 1$, то пространство E' линейно связно, поскольку $\pi_0(\Omega X') = 0$. Следовательно, E' — линейно связное пространство с отмеченной точкой. Поскольку $\pi_q(\Omega X') = 0$, если $q \geqslant n$, из точности гомотопической последовательности расслоения $p'\colon E' \to X$ следует, что $p'_{\#}\colon \pi_q(E') \to \pi_q(X)$ — изоморфизм, если $q > n$, и мономорфизм, если $q = n$.

Поскольку $\lambda\colon \pi_q(X, A) \to \pi_{q-1}(\Omega X')$ — изоморфизм, если $q \leqslant n$ (единственный нетривиальный случай здесь, когда $q = n$), из леммы о пяти гомоморфизмах и коммутативности с точностью до знака диаграммы на предыдущей странице следует, что $b'_{\#}\colon \pi_q(A) \to \pi_q(E')$ — изоморфизм, если $1 \leqslant q < n$, и эпиморфизм, если $q = n$. Следовательно, отображения b' и p' обладают свойствами, которые требуются от n-разложения отображения i. ■

5. Следствие. *Пусть $g\colon X' \to X$ — простое отображение линейно связных пространств с отмеченной точкой, такое, что для некоторого $n \geqslant 1$ отображение $g_{\#}\colon \pi_q(X') \to \pi_q(X)$ является изоморфизмом, если $1 \leqslant q < n - 1$, и эпиморфизмом, если $q = n - 1$. Тогда существует такое n-разложение $X' \xrightarrow{b'} E' \xrightarrow{p'} X$ отображения f, что p' — главное расслоение типа (π, n) для некоторой абелевой группы π.*

Доказательство. Пусть Z — приведенный цилиндр отображения g (т. е. цилиндр отображения g, в котором цилиндр ограничения $g\,|\,x_0'$: $x_0' \to x_0$ стянут в точку). Тогда пара (Z, X') линейно связных пространств с отмеченной точкой является $(n-1)$-связной, а вложение i: $X' \subset Z$ — простым. Согласно лемме 4, существует n-разложение $X' \xrightarrow{b''} E'' \xrightarrow{p''} Z$ отображения i, такое, что p'' — главное расслоение типа (π, n). Пусть p': $E' \to X$ — ограничение расслоения p'' над X. Вложение $E' \subset E''$ является гомотопической эквивалентностью, и, значит, существует такое отображение $\bar{b}''$: $X' \to E'$, что отображение b'' гомотопно композиции $X' \xrightarrow{\bar{b}''} E' \subset$ $\subset E''$. Легко видеть, что отображение $p' \circ \bar{b}''$ гомотопно g. Согласно свойству накрывающей гомотопии для отображения p', существует отображение b': $X' \to E'$, гомотопное $\bar{b}''$ и такое, что $p' \circ b' = g$. Нетрудно проверить, что композиция $X' \xrightarrow{b'} E' \xrightarrow{p'} X$ обладает нужными нам свойствами. ■

Теперь мы готовы к доказательству существования разложения Мура — Постникова простого отображения линейно связных пространств с отмеченной точкой.

6. Теорема. *Пусть f: $Y' \to Y$ — простое отображение линейно связных пространств с отмеченной точкой. Существует разложение Мура — Постникова $\{p_q, E_q, f_q\}_{q \geqslant 1}$ отображения f, такое, что для $n \geqslant 1$ последовательность*

$$Y' \xrightarrow{f_n} E_n \xrightarrow{p_1 \circ \cdots \circ p_n} Y$$

является n-разложением отображения f.

Доказательство. Индукцией по q мы докажем существование такой последовательности $\{p_q, E_q, f_q\}_{q \geqslant 1}$, что

(a) если $n = 1$, то последовательность $Y' \xrightarrow{f_1} E_1 \xrightarrow{p_1} Y$ является 1-разложением отображения f;

(b) если $n > 1$, то последовательность $Y' \xrightarrow{f_n} E_n \xrightarrow{p_n} E_{n-1}$ является n-разложением отображения f_{n-1};

(c) если $n \geqslant 1$, то p_n — главное расслоение типа (π_n, n) для некоторой группы π_n.

Коль скоро такая последовательность $\{p_q, E_q, f_q\}_{q \geqslant 1}$ построена, легко проверить, что существует разложение Мура — Постникова отображения f, обладающее нужными нам свойствами. Следовательно, можно ограничиться доказательством существования такой последовательности.

Если $n = 1$, то, согласно следствию 5, существует 1-разложение $Y' \xrightarrow{f_1} E_1 \xrightarrow{p_1} Y$ отображения f, где p_1 — главное расслоение типа $(\pi_1, 1)$ для некоторой группы π_1. Предположим, что последовательность $\{p_q, E_q, f_q\}$, удовлетворяющая условиям (a), (b) и (c), уже построена для $1 \leqslant q < n$, $n > 1$. Согласно следствию 5, существует n-разложение $Y' \xrightarrow{f_n} E_n \xrightarrow{p_n} E_{n-1}$ отображения f_{n-1}, такое, что p_n — главное расслоение типа (π_n, n) для некоторой группы π_n. Тогда p_n, E_n и f_n обладают всеми нужными нам свойствами. ■

7. Следствие. *Пусть Y' — простое линейно связное пространство с отмеченной точкой. Тогда Y' обладает разложением Постникова $\{p_q, E_q, f_q\}_{q \geqslant 1}$, для которого $\pi_q(E_n) = 0$ при $q \geqslant n$, а $f_n\colon Y' \to E_n$ является n-эквивалентностью.*

Доказательство. Если пространство Y' простое, то отображение в точку $Y' \to y_0$ является простым, и требуемое утверждение следует из теоремы 6. ■

В вышеприведенных рассуждениях пространство E_n аппроксимирует пространство Y' в низших размерностях. Теперь мы изложим другой метод аппроксимации пространства в высших размерностях посредством «убивания» гомотопических групп низших размерностей.

8. Следствие. *Пусть Y — простое линейно связное пространство с отмеченной точкой. Существует такая последовательность Мура — Постникова расслоений $Y \xleftarrow{p_1} E_1 \xleftarrow{p_2} E_2 \xleftarrow{p_3} \ldots$, что пространство E_n является n-связным и отображения $p_1 \circ \ldots \circ p_n\colon E_n \to Y$ индуцируют изоморфизмы $\pi_q(E_n) \approx \pi_q(Y)$ в размерностях $q > n$.*

Доказательство. Если Y — простое пространство, то вложение $y_0 \subset Y$ является простым отображением, и требуемый результат вытекает из теоремы 6. ■

В последнем предложении расслоение $p_1\colon E_1 \to Y$ обладает гомотопическими свойствами универсального накрывающего пространства над Y. Расслоение $p_1 \circ \ldots \circ p_n\colon E_n \to Y$ является своего рода «n-накрывающим пространством».

§ 4. Теория препятствий

В этом параграфе мы показываем, как можно использовать разложение Мура — Постникова для изучения задачи относительного поднятия. Последовательность препятствий к построению поднятия (или к построению гомотопии между двумя поднятиями) определяется шаг за шагом. Общая теория, построенная таким образом, применяется затем к случаю, когда существует одно первое или два первых препятствия.

Пусть $p\colon E \to B$ — расслоение, в котором пространство расслоения и база являются линейно связными пространствами с отмеченной точкой, и пусть p — простое отображение. Согласно теореме 8.3.6, существует разложение Мура — Постникова $\{p_q, E_q, f_q\}_{q\geqslant 1}$ расслоения p. Из следствия 8.3.2 вытекает, что отображение p': $E \to E_\infty$ является слабой гомотопической эквивалентностью. Нам известно, что $p = a_0 \circ p'$, где a_0: $E_\infty \to B$. Пусть (X, A) — относительный CW-комплекс, а i: $A \subset X$ — вложение. Из теоремы 7.8.12 следует, что задача относительного поднятия для пары отображений $i \to p$ эквивалентна задаче относительного поднятия для соответствующей пары отображений $i \to a_0$, которую мы теперь и рассмотрим.

Пусть $E_0 \xleftarrow{p_1} E_1 \xleftarrow{p_2} \ldots$ — последовательность расслоений, пределом которой является E_∞, и пусть a_q: $E_\infty \to E_q$ — естественные проекции. Предположим, что (X, A) — относительный CW-комплекс, а i: $A \subset X$ — вложение. Пара отображений f: $i \to a_0$ — это коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f''} & E_\infty \\ {\scriptstyle i}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle a_0} \\ X & \xrightarrow{f'} & E_0 \end{array}$$

где отображение f'' соответствует такому семейству отображений $\{f''_q\colon A \to E_q\}_{q\geqslant 0}$, что $p_{q+1} \circ f''_{q+1} = f''_q$ $(q \geqslant 0)$. Пусть $q \geqslant 1$ и f_q: $i \to$ $\to p_1 \circ \ldots \circ p_q$ — пара отображений, определенная коммутативной диаграммой

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f''_q} & E_q \\ {\scriptstyle i}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p_1 \circ \ldots \circ p_q} \\ X & \xrightarrow{f'} & E_0 \end{array}$$

Если $\bar{f}_q$: $X \to E_q$ — поднятие отображения f_q, то $p_q \circ \bar{f}_q$ — поднятие отображения f_{q-1} $(q > 1)$, а поднятие $\bar{f}$: $X \to E_\infty$ отображения f соответствует последовательности $\{\bar{f}_q\colon X \to E_q\}_{q\geqslant 1}$, для которой

(a) $\bar{f}_q$ — поднятие отображения f_q $(q \geqslant 1)$;

(b) $p_{q+1} \circ \bar{f}_{q+1} = \bar{f}_q$ $(q \geqslant 1)$.

Пусть задано поднятие $\bar{f}_q$: $X \to E_q$ отображения f_q $(q \geqslant 1)$, и пусть $g(\bar{f}_q)$: $i \to p_{q+1}$ — пара отображений, определенная коммутативной диаграммой

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f''_{q+1}} & E_{q+1} \\ {\scriptstyle i}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p_{q+1}} \\ X & \xrightarrow{\bar{f}_q} & E_q \end{array}$$

Отображение $\bar{f}_{q+1}\colon X \to E_{q+1}$ тогда и только тогда является поднятием отображения $g(\bar{f}_q)$, когда оно представляет собой такое поднятие отображения f_{q+1}, что $p_{q+1} \circ \bar{f}_{q+1} = \bar{f}_q$. Таким образом, последовательность отображений $\{\bar{f}_q\colon X \to E_q\}_{q \geqslant 1}$ тогда и только тогда удовлетворяет сформулированным выше условиям (a) и (b), когда она обладает следующими свойствами:

(c) $\bar{f}_1$ — поднятие отображения f_1;

(d) если $q \geqslant 1$, то $\bar{f}_{q+1}$ — поднятие отображения $g(\bar{f}_q)$.

Будем теперь считать, что $E_0 \xleftarrow{p_1} E_1 \xleftarrow{p_2} \ldots$ — последовательность Мура — Постникова. В этом случае расслоение p_q $(q \geqslant 1)$ является главным расслоением типа (π_q, n_q). Из изложенного в § 8.2 вытекает, что отображение f_1 тогда и только тогда можно поднять, когда элемент $c(f_1) \in H^{n_1}(X, A; \pi_1)$ равен нулю. Класс $c(f_1)$ называется *первым препятствием к поднятию отображения* f.

Предположим, что для некоторого $q > 1$ уже определены поднятия $\bar{f}_{q-1}\colon X \to E_{q-1}$ пары отображений $f_{q-1}\colon i \to p_1 \circ \ldots \circ p_{q-1}$. Тогда мы получаем пару отображений $g(\bar{f}_{q-1})\colon i \to p_q$ и соответствующие элементы $c(g(\bar{f}_{q-1})) \in H^{n_q}(X, A; \pi_q)$. Совокупность элементов $\{c(g(\bar{f}_{q-1}))\}$, соответствующая множеству всех поднятий $\bar{f}_{q-1}\colon X \to E_{q-1}$ отображения f_{q-1}, называется q-м *препятствием к поднятию отображения* f. Это подмножество группы $H^{n_q}(X, A; \pi_q)$; оно определено в том и только в том случае, когда отображение f_{q-1} можно поднять. Ясно, что отображение f_q можно поднять тогда и только тогда, когда q-е препятствие к поднятию отображения f определено и содержит нулевой элемент группы $H^{n_q}(X, A; \pi_q)$.

Последовательность Мура — Постникова приводит к соответствующей последовательности препятствий. Первое препятствие состоит из единственного класса когомологий, в то время как высшие препятствия образуют подмножества групп когомологий. В некоторых случаях эти препятствия можно эффективно вычислить в терминах заданной пары отображений $f\colon i \to a_0$, и это вычисление дает решение задачи поднятия для этих случаев. В общем случае, однако, определение последовательности препятствий включает итерационную процедуру возрастающей сложности и не может быть эффективно выполнено для произвольного случая.

Проиллюстрируем описанный метод, применив его к разложению Постникова (определенного в следствии 8.3.7) простого линейно связного пространства Y с отмеченной точкой. Мы построили такое разложение Постникова $\{p_q, E_q, f_q\}_{q \geqslant 1}$ пространства Y, что $\pi_q(E_m)=0$ для $q\geqslant m$ и f_m: $Y\to E_m$ есть m-эквивалентность. Это разложение называется *стандартным разложением Постникова* пространства Y. Согласно следствию 8.3.2, имеет место слабая гомотопическая эквивалентность f': $Y\to E_\infty$. Поэтому мы можем рассмотреть задачу поднятия отображения $i\to a_0$, где i: $A\subset X$ и a_0: $E_\infty\to y_0$. Поскольку y_0 — точка, это эквивалентно задаче продолжения отображения f'': $A\to E_\infty$.

Итак, мы ищем последовательность отображений $\bar{f}_q$: $X\to E_q$, такую, что $\bar{f}_1$: $X\to E_1$ — продолжение отображения $a_1\circ f''$, а $\bar{f}_{q+1}$: $X\to E_{q+1}$ $(q\geqslant 1)$ — поднятие пары отображений $g(\bar{f}_q)$: $i\to p_{q+1}$, определенной следующей коммутативной диаграммой:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{a_{q+1}\circ f''} & E_{q+1} \\ {\scriptstyle i}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p_{q+1}} \\ X & \xrightarrow{\bar{f}_q} & E_q \end{array}$$

Поскольку p_q — главное расслоение типа $(\pi_q(Y,\ y_0),\ q+1)$, препятствие к поднятию отображения $g(\bar{f}_q)$ является элементом группы $H^{q+1}(X,\ A;\ \pi_q(Y,\ y_0))$. Следовательно, можно определить последовательность препятствий к продолжению отображения f'': $A\to Y$, причем q-е препятствие является подмножеством группы $H^{q+1}(X,\ A;\ \pi_q(Y,\ y_0))$. Если Y есть $(n-1)$-связное пространство для некоторого $n\geqslant 1$, то первое нетривиальное препятствие принадлежит группе $H^{n+1}(X,\ A;\ \pi_n(Y,\ y_0))$. Если $\iota\in H^n(Y,\ y_0;\ \pi)$ является n-характеристическим элементом для такого пространства Y, то из теоремы 8.2.6 легко вывести, что это первое препятствие совпадает с $\pm\delta f''^*\iota$. Отсюда получаем следующее обобщение теоремы 8.1.17[1]):

1. Теорема. *Пусть $\iota\in H^n(Y,\ y_0;\ \pi)$ есть n-характеристический элемент $(n\geqslant 1)$ простого $(n-1)$-связного пространства Y с отмеченной точкой, и пусть относительный CW-комплекс $(X,\ A)$ таков, что $H^{q+1}(X,\ A;\ \pi_q(Y,\ y_0))=0$, если $q>n$. Отображение f: $A\to Y$ тогда и только тогда продолжается на все X, когда в группе $H^{n+1}(X,\ A;\ \pi)$ имеет место равенство $\delta f^*(\iota)=0$.*

Доказательство. Мы используем стандартное разложение Постникова пространства Y. Это приводит к последовательности препятствий к продолжению отображения f, являющихся подмножествами групп $H^{q+1}(X,\ A;\ \pi_q(Y,\ y_0))$. Поскольку все эти группы тривиальны, за исключением $H^{n+1}(X,\ A;\ \pi_n(Y,\ y_0))\approx H^{n+1}(X,\ A;\ \pi)$,

[1]) См. Eilenberg S., Cohomology and continuous mappings, *Ann. Math.*, 41 (1940), 231—251.

единственным препятствием к продолжению отображения f является некоторый элемент группы $H^{n+1}(X, A; \pi)$. Согласно сделанным выше замечаниям, это препятствие тогда и только тогда обращается в нуль, когда $\delta f^*(\iota)=0$. ■

Для отображений $f_0, f_1: X \to Y$ определим $g: X \times \dot{I} \to Y$ формулами $g(x, 0)=f_0(x)$ и $g(x, 1)=f_1(x)$. Для всякого элемента $u \in H^q(Y)$ в группе $H^{q+1}(X, A)$ имеет место равенство $\delta g^*(u) = (-1)^q \tau(f_1^* u - f_0^* u)$. Значит, $\delta g^*(u)=0$ тогда и только тогда, когда $f_0^*(u)=f_1^*(u)$, и мы получаем следующее частичное обобщение теоремы 8.1.15 (применяя теорему 1 к паре $(X \times I,\ X \times \dot{I})$):

2. Теорема. *Пусть $\iota \in H^n(Y, y_0; \pi)$ есть n-характеристический элемент для $(n-1)$-связного простого пространства Y $(n \geqslant 1)$, и пусть X — такой CW-комплекс, что $H^q(X; \pi_q(Y, y_0))=0$, если $q>n$. Отображения $f_0, f_1: X \to Y$ гомотопны тогда и только тогда, когда $f_0^*(\iota)=f_1^*(\iota)$.* ■

Последний результат дает условие того, чтобы отображение $\psi_\iota\ [X; Y] \to H^n(X; \pi)$ было инъективным. Условие сюръективности ψ_ι можно сформулировать таким образом: если $\{p_q, E_q, f_q\}_{q \geqslant 1}$ — стандартное разложение Постникова пространства Y, то всякое отображение $X \to E_{n+1}$ можно поднять. Препятствия к поднятию такого отображения лежат в группах $H^{q+1}(X; \pi_q(Y, y_0))$ $(q>n)$. Собирая вместе эти утверждения, получаем следующий результат:

3. Теорема. *Пусть элемент $\iota \in H^n(Y, y_0; \pi)$ является n-характеристическим для простого $(n-1)$-связного пространства Y $(n \geqslant 1)$, и пусть CW-комплекс X таков, что $H^q(X; \pi_q(Y))=0$ и $H^{q+1}(X; \pi_q(Y))=0$ для всех $q>n$. Тогда имеет место биективное соответствие*

$$\psi_\iota: [X; Y] \approx H^n(X; \pi). \ ■$$

Предыдущие утверждения были доказаны в предположении, что единственным нетривиальным препятствием является препятствие наименьшей размерности. В этом случае мы по существу изучали отображения в пространство типа (π, n). Случай, когда первые два препятствия являются единственными нетривиальными, по существу состоит в изучении отображений в расслоение $E \to B$ типа (G, q), база которого B есть пространство типа (π, n). Изучением таких отображений мы займемся немного позже, предварительно установив некоторые когомологические свойства пространства $X \times I$.

Рассмотрим следующие вложения:

$$A \times I \cup X \times 1 \overset{i_1}{\subset} A \times I \cup X \times \dot{I} \overset{j_1}{\subset} (A \times I \cup X \times \dot{I},\ A \times I \cup X \times 1).$$

Слабую ретракцию $r\colon A\times I\cup X\times \dot I\to A\times I\cup X\times 1$ определим равенством $r(x, t)=(x, 1)$, $(x, t)\in A\times I\cup X\times \dot I$ (т. е. $r\circ i_1$ гомотопно тождественному отображению пространства $A\times I\cup X\times 1$). Точная когомологическая последовательность пары $(A\times I\cup X\times \dot I,\ A\times I\cup X\times 1)$ показывает, что для произвольного элемента $u\in H^q(A\times I\cup X\times \dot I)$ существует единственный связанный с ним элемент $u'\in H^q(A\times I\cup X\times \dot I,\ A\times I\cup X\times 1)$, такой, что

$$u=j_1^*u'+r^*i_1^*u.$$

Пусть отображение $h\colon (X, A)\to(A\times I\cup X\times \dot I,\ A\times I\cup X\times 1)$ определено равенством $h(x)=(x, 0)$, $x\in X$. Оно индуцирует изоморфизм

$$h^*\colon H^q(A\times I\cup X\times \dot I,\ A\times I\cup X\times 1)\approx H^q(X, A).$$

Определим эпиморфизм

$$\Delta\colon H^q(A\times I\cup X\times \dot I)\to H^q(X, A),$$

положив $\Delta(u)=h^*u'$, где $u'\in H^q(A\times I\cup X\times \dot I,\ A\times I\cup X\times 1)$ — единственный элемент, связанный с u. Очевидно, Δ — естественное преобразование на категории пар (X, A).

4. Лемма. *Следующая диаграмма коммутативна:*

$$\begin{tikzcd}
H^q(A\times I\cup X\times \dot I) \arrow[rr, "\delta"] \arrow[dr, "\Delta"'] & & H^{q+1}((X, A)\times(I, \dot I)) \\
& H^q(X, A) \arrow[ur, "(-1)^{q+1}\tau"'] &
\end{tikzcd}$$

Доказательство. Пусть отображение $\bar r\colon X\times I\to A\times I\cup X\times 1$ определено равенством $\bar r(x, t)=(x, 1)$. Тогда $\bar r\,|(A\times I\cup X\times \dot I)=r$, и, значит,

$$r^*i_1^*u=(\bar r^*i_1^*u)\,|\,(A\times I\cup X\times \dot I),\quad u\in H^q(A\times I\cup X\times \dot I).$$

Для всякого элемента $v\in H^q(X\times I)$ имеем $\delta(v\,|(A\times I\cup X\times \dot I))=0$. Следовательно, $\delta r^*i_1^*u=0$, и для завершения доказательства достаточно показать, что если $u'\in H^q(A\times I\cup X\times \dot I,\ A\times I\cup X\times 1)$, то $\delta j_1^*(u')=(-1)^{q+1}\tau h^*(u')$. Но это следует из коммутативности диаграммы, аналогичной использованной при доказательстве теоремы 8.2.4. ■

5. Следствие. *Пусть (X, A) — относительный CW-комплекс, $i\colon A\subset X$ — вложение и $p'\colon \Omega B'\to b_0'$ — отображение в точку, причем B' — пространство типа $(\pi, n+1)$. Для заданной пары отображений $f\colon i\to p'$ и двух поднятий $f_0, f_1\colon X\to\Omega B'$ пары f*

определим отображение g'': $A \times I \cup X \times \dot{I} \to \Omega B'$, *полагая* $g''(x, 0) = f_0(x)$, $g''(x, 1) = f_1(x)$ *и* $g''(a, t) = f_0(a)$. *Если* $\iota' \in H^n(\Omega B', \omega_0'; \pi)$ *и* $\iota \in H^{n+1}(B', b_0'; \pi)$ — *связанные характеристические элементы, то* $d(f_0, f_1) = -\Delta g''^*(\iota')$.

Доказательство. Пусть пара отображений g: $i' \to p'$ определена следующей коммутативной диаграммой:

$$\begin{array}{ccc} A \times I \cup X \times \dot{I} & \xrightarrow{g''} & \Omega B' \\ {\scriptstyle i'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p'} \\ X \times I & \xrightarrow{g'} & b_0' \end{array}$$

Согласно определению различающей $d(f_0, f_1)$, имеем $d(f_0, f_1) = (-1)^{n+1} \tau^{-1}(c(g))$. Из теоремы 8.2.6 следует, что $c(g) = -\delta g''^*(\iota')$, и, значит, $d(f_0, f_1) = (-1)^n \tau^{-1} \delta g''^*(\iota')$. Нужное нам утверждение вытекает отсюда и из леммы 4. ■

6. Лемма. *Пусть отображения* h_0, h_1: $(X, A) \to (A \times I \cup X \times \dot{I}, A \times I)$ *определены равенствами* $h_0(x) = (x, 0)$ *и* $h_1(x) = (x, 1)$. *Для любого элемента* $u \in H^q(A \times I \cup X \times \dot{I}, A \times I)$ *имеет место равенство*

$$\Delta(u \mid (A \times I \cup X \times \dot{I})) = h_0^*(u) - h_1^*(u).$$

Доказательство. Рассмотрим вложения

$$(A \times I \cup X \times 1, A \times I) \overset{i_1'}{\subset} (A \times I \cup X \times \dot{I}, A \times I) \overset{j_1'}{\subset}$$
$$\subset (A \times I \cup X \times \dot{I}, A \times I \cup X \times 1)$$

и определим слабую ретракцию r': $(A \times I \cup X \times \dot{I}, A \times I) \to (A \times I \cup X \times 1, A \times I)$, $r'(x, t) = (x, 1)$. Для всякого элемента $v \in H^q(A \times I \cup X \times \dot{I}, A \times I)$ существует единственный связанный с ним элемент $v' \in H^q(A \times I \cup X \times \dot{I}, A \times I \cup X \times 1)$, такой, что

$$v = j_1'^* v' + r'^* i_1'^* v.$$

Пусть k: $A \times I \cup X \times \dot{I} \subset (A \times I \cup X \times \dot{I}, A \times I)$ — вложение. Имеем

$$k^* v = k^* j_1'^* v' + k^* r'^* i_1'^* v = j_1^* v' + r^* i_1^* k^* v.$$

Следовательно, $\Delta k^* v = h^* v'$. Поскольку $h = j_1' \circ h_0$ и $h_1 = i_1' \circ r' \circ h_0$, то

$$\Delta k^* v = h_0^* j_1'^* v' = h_0^*(v - r'^* i_1'^* v) = h_0^* v - h_1^* v. \ ■$$

7. Следствие. *Пусть задана пара отображений* g: $i' \to p$, *где* (X, A) — *относительный* CW-*комплекс*, i': $A \times I \subset A \times I \cup X \times \dot{I}$ — *вложение, а* p: $E \to B$ — *главное расслоение типа* (G, q), *индуцированное некоторым отображением* θ: $B \to B'$. *Пусть пары отобра-*

жений f_0, f_1: $i \to p$, *где* i: $A \subset X$, *индуцированы ограничениями отображения* g *на* $(X, A) \times 0$ *и* $(X, A) \times 1$ *соответственно. Тогда*

$$\Delta g'^* \theta^* (\iota) = c(f_0) - c(f_1),$$

где g': $A \times I \cup X \times \dot{I} \to B$ — *часть пары отображений* g.

Доказательство. Очевидно, препятствие $c(g) \in H^q(A \times I \cup X \times \dot{I},\ A \times I; \pi)$ обладает тем свойством, что $c(g) | (A \times I \cup X \times \dot{I})$ — препятствие к поднятию отображения g'. Следовательно,

$$c(g) | (A \times I \cup X \times \dot{I}) = g'^* \theta^* (\iota).$$

В силу естественности препятствия имеем $h_0^* c(g) = c(f_0)$ и $h_1^* c(g) = c(f_1)$. Наше утверждение теперь следует из леммы 6. ■

Пусть θ — когомологическая операция типа $(n, q; \pi, G)$. Для заданного класса когомологий $u \in H^n(X; \pi)$ определим отображение $\Delta(\theta, u)$: $H^n(X, A; \pi) \to H^q(X, A; G)$ формулой

$$\Delta(\theta, u)(v) = \Delta\theta\left(j_1^* h^{*-1}(v) + k^* u\right), \quad v \in H^n(X, A; \pi),$$

где отображение k: $A \times I \cup X \times \dot{I} \to X$ определено равенством $k(x, t) = x$. В случае когда θ — аддитивная когомологическая операция, имеем

$$\Delta(\theta, u)(v) = \Delta\left(j_1^* h^{*-1} \theta(v) + k^* \theta(u)\right) = \theta(v).$$

Следовательно, $\Delta(\theta, u) = \theta$, если операция θ аддитивна.

Для заданных когомологической операции θ типа $(n, q; \pi, G)$ и класса когомологий $u \in H^n(X; \pi)$ определим отображение $S\Delta(\theta, u)$: $H^{n-1}(X, A; \pi) \to H^{q-1}(X, A; G)$ при помощи уравнения $S\Delta(\theta, u) = \tau^{-1} \circ \Delta(\theta, u') \circ \tau$, где $u' \in H^n(X \times I; \pi)$ есть образ элемента u при изоморфизме, индуцированном проекцией $X \times I \to X$. Если θ — аддитивная операция, то $S\Delta(\theta, u) = S\theta$. В любом случае мы получаем такой аналог следствия 8.1.14.

8. Лемма. *Если* θ — *когомологическая операция типа* $(n, q; \pi, G)$, *а* $u \in H^n(X; \pi)$, *то отображение*

$$S\Delta(\theta, u): H^{n-1}(X, A; \pi) \to H^{q-1}(X, A; G)$$

является гомоморфизмом.

Доказательство. Пусть $I_1 = [0, 1/2]$, $\dot{I}_1 = \{0, 1/2\}$, $I_2 = [1/2, 1]$, $\dot{I}_2 = \{1/2, 1\}$, и пусть v_1, $v_2 \in H^{n-1}(X, A; \pi)$. Предположим, что $v_1' = \tau_1(v_1) \in H^n((X, A) \times (I_1, \dot{I}_1))$, $v_2' = \tau_2(v_2) \in H^n((X, A) \times (I_2, \dot{I}_2))$, а элемент $v \in H^n((X, A) \times (I, \dot{I}_1 \cup \dot{I}_2))$ таков, что $v | (X, A) \times (I_1, \dot{I}_1) = v_1'$ и $v | (X, A) \times (I_2, \dot{I}_2) = v_2'$. Тогда $v | (X, A) \times (I, \dot{I}) = \tau(v_1) + \tau(v_2)$.

Поскольку отображения θ и Δ естественны, имеем

$$\Delta(\theta, u')(v) \,|\, (X, A) \times (I, \dot{I}) = \tau S\Delta(\theta, u)(v_1 + v_2),$$
$$\Delta(\theta, u')(v) \,|\, (X, A) \times (I_1, \dot{I}_1) = \tau_1 S\Delta(\theta, u)(v_1),$$
$$\Delta(\theta, u')(v) \,|\, (X, A) \times (I_2, \dot{I}_2) = \tau_2 S\Delta(\theta, u)(v_2).$$

Следовательно, как и при доказательстве леммы 8.2.3, получаем

$$\tau S\Delta(\theta, u)(v_1 + v_2) = \tau S\Delta(\theta, u)(v_1) + \tau S\Delta(\theta, u)(v_2).$$

Поскольку τ — изоморфизм, требуемое утверждение доказано. ■

Пусть B — пространство типа (π, n), и пусть p: $E \to B$ — главное расслоение типа (G, q), индуцированное некоторым отображением $\bar{\theta}$: $B \to B'$. Элемент $\theta' = \bar{\theta}^*(\iota') \in H^q(B, b_0; G)$ порождает когомологическую операцию θ типа $(n, q; \pi, G)$ (т. е. $\theta(\iota) = \theta'$). Пусть X — некоторый CW-комплекс. Отображение f: $X \to B$ тогда и только тогда можно поднять в E, когда $\theta(f^*(\iota)) = 0$. Значит, для всякого элемента $u \in H^n(X; \pi)$, такого, что $\theta(u) = 0$, существуют такие поднятия f: $X \to E$, что $(p \circ f)^*(\iota) = u$. Выясним теперь, сколько имеется гомотопических классов таких поднятий.

9. Лемма. *Пусть отображения f_0, f_1: $X \to E$ таковы, что $p \circ f_0 = p \circ f_1$ (т. е. f_0 и f_1 — поднятия одного и того же отображения $X \to B$). Гомотопия $f_0 \simeq f_1$ существует тогда и только тогда, когда можно найти такой элемент $d \in H^{n-1}(X; \pi)$, что $d(f_0, f_1) = S\Delta(\theta, u)(d)$, где $u = (p \circ f_0)^*(\iota)$.*

Доказательство. Пусть пара отображений F_0: $i' \to p$ определена диаграммой

$$\begin{array}{ccc} X \times \dot{I} & \xrightarrow{F_0''} & E \\ {\scriptstyle i'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ X \times I & \xrightarrow{F_0'} & B \end{array}$$

где $F_0''(x, 0) = f_0(x)$, $F_0''(x, 1) = f_1(x)$ и $F_0'(x, t) = pf_0(x)$. Тогда $d(f_0, f_1) = (-1)^q \tau^{-1}(c(F_0))$. Ясно, что гомотопия $f_0 \simeq f_1$ существует тогда и только тогда, когда существует гомотопия F_1': $X \times I \to B$ между отображениями $p \circ f_0$ и $p \circ f_1$, такая, что для соответствующей пары отображений F_1: $i' \to p$ справедливо равенство $c(F_1) = 0$. Пусть отображение G': $(X \times \dot{I}) \times I \cup (X \times I) \times \dot{I} \to B$ определено равенствами $G'(x, 0, t) = G'(x, 1, t) = pf_0(x)$, $G'(x, t, 0) = F_0'(x, t)$ и $G'(x, t, 1) = F_1'(x, t)$. Согласно следствию 7, имеем

$$\Delta G'^*(\theta') = c(F_0) - c(F_1).$$

Таким образом, $f_0 \simeq f_1$ тогда и только тогда, когда существует такое отображение F_1': $X \times I \to B$, что для соответствующего отображения G' справедливо равенство

$$d(f_0, f_1) = (-1)^q \tau^{-1}(\Delta G'^*(\theta')).$$

Нетрудно видеть, что $G'^*(\iota) = j_1^* h^{*-1} \Delta G'^*(\iota) + k^* u'$, где $u' \in H^n(X \times I; \pi)$ — образ элемента $u = (p \circ f_0)^*(\iota)$ при проекции $X \times I \to X$. Из соответствующих определений следует, что

$$\Delta G'^*(\theta') = \Delta G'^* \theta(\iota) = \Delta \theta G'^*(\iota) = \Delta(\theta, u')(\Delta G'^*(\iota)).$$

Поскольку F_0', F_1': $X \times I \to B$ — два поднятия пары отображений

$$\begin{array}{ccc} X \times \dot{I} & \to & B \\ \downarrow & & \downarrow \\ X \times I & \to & b_0 \end{array}$$

из следствия 5 вытекает, что $d(F_0', F_1') = -\Delta G'^*(\iota)$. Теорема 8.2.4 показывает, что для всякого элемента $d \in H^{n-1}(X; \pi)$ существует гомотопия F_1': $X \times I \to B$ между отображениями $p \circ f_0$ и $p \circ f_1$, такая, что $\Delta G'^*(\iota) = (-1)^q \tau(d)$. Комбинируя полученные результаты, мы видим, что $f_0 \simeq f_1$ тогда и только тогда, когда существует такой элемент $d \in H^{n-1}(X; \pi)$, что

$$d(f_0, f_1) = \tau^{-1} \Delta(\theta, u') \tau(d) = S\Delta(\theta, u)(d). \blacksquare$$

Подведем итоги в следующей классификационной теореме:

10. Теорема. *Пусть p: $E \to B$ — главное расслоение типа (G, q) над пространством B типа (π, n), индуцированное таким отображением $\bar{\theta}$: $B \to B'$, что $\bar{\theta}^*(\iota') = \theta(\iota)$. Для всякого CW-комплекса X определим отображение ψ: $[X; E] \to H^n(X; \pi)$, полагая $\psi[f] = (p \circ f)^*(\iota)$. Тогда $\operatorname{im} \psi = \{u \in H^n(X; \pi) \mid \theta(u) = 0\}$, и для каждого элемента $u \in \operatorname{im} \psi$ множество $\psi^{-1}(u)$ находится во взаимно однозначном соответствии с множеством*

$$H^{q-1}(X; G)/S\Delta(\theta, u) H^{n-1}(X; \pi).$$

Доказательство. Мы уже видели, что множество $\operatorname{im} \psi$ является именно таким, как сказано в формулировке. Пусть $u \in \operatorname{im} \psi$ и отображение f_0: $X \to E$ таково, что $\psi[f_0] = u$. Для всякого отображения f_1: $X \to E$, такого, что $\psi[f_1] = u$, существует гомотопное ему отображение f_1': $X \to E$, такое, что $p \circ f_1' = p \circ f_0$ (согласно свойству накрывающей гомотопии). Такому отображению f_1' поставим в соответствие элемент $d(f_0, f_1') \in H^{q-1}(X; G)$. Таким способом множество отображений $X \to E$, являющихся поднятиями отображения $p \circ f_0$, отображается в группу $H^{q-1}(X; G)$. Согласно теореме 8.2.4, это отображение сюръективно, Два отображения $f_1, f_2: X \to E$, такие, что $p \circ f_1 = p \circ f_0 = p \circ f_2$, гомотопны тогда и только тогда, когда $d(f_1, f_2) \in S\Delta(\theta, u) H^{n-1}(X; \pi)$ (лемма 9). Согласно лемме 8.2.3, $d(f_0, f_2) = d(f_0, f_1) + d(f_1, f_2)$, и, значит, $f_1 \simeq f_2$ тогда и только тогда, когда элементы $d(f_0, f_1)$ и $d(f_0, f_2)$ принадлежат одному и тому же смежному классу группы $H^{q-1}(X; G)$ относительно $S\Delta(\theta, u) H^{n-1}(X; \pi)$. Следовательно, функция, сопоставляющая смежный класс $d(f_0, f_1) + S\Delta(\theta, u) H^{n-1}(X; \pi)$ отображению $f_1: X \to E$, где $p \circ f_1 \simeq p \circ f_0$, индуцирует биективное соответствие между множествами $\psi^{-1}(u)$ и

$$H^{q-1}(X; G)/S\Delta(\theta, u) H^{n-1}(X; \pi). \blacksquare$$

Применим доказанную нами теорему к комплексному проективному пространству $\mathbf{C}P^m$ для $m \geqslant 1$. Определено вложение $\mathbf{C}P^m \to \mathbf{C}P^\infty$ (напомним, что $\mathbf{C}P^\infty$ — пространство типа $(\mathbf{Z}, 2)$, см. пример 8.1.3). Если ι — характеристический элемент пространства $\mathbf{C}P^\infty$, а B' — пространство типа $(\mathbf{Z}, 2m+2)$, то существует такое отображение $\bar{\theta}: \mathbf{C}P^\infty \to B'$, что $\bar{\theta}^*(\iota') = (\iota)^{m+1}$. Для главного расслоения $p: E \to \mathbf{C}P^\infty$, индуцированного отображением $\bar{\theta}$, существует отображение $\mathbf{C}P^m \to E$, являющееся $(2m+2)$-эквивалентностью. В этом случае операция θ представляет собой возведение в $(m+1)$-ю степень, и, следовательно,

$$S\Delta(\theta, u)(v) = \tau^{-1}\Delta\left(j_1^* h^{*-1}(\tau(v)) + k^* u'\right)^{m+1} =$$
$$= \tau^{-1}\Delta\left[(m+1) k^*(u')^m \smile j_1^* h^{*-1}(\tau(v))\right] = (m+1) u^m \smile v,$$

поскольку $\tau(v) \smile \tau(v) = 0$. Сказанное позволяет получить следующее приложение теоремы 10:

11. Теорема. *Пусть элемент $\iota \in H^2(\mathbf{C}P^m; \mathbf{Z})$ является 2-характеристическим для пространства $\mathbf{C}P^m$, и пусть X — некоторый CW-комплекс. Определим отображение $\psi: [X; \mathbf{C}P^m] \to H^2(X; \mathbf{Z})$, полагая $\psi[f] = f^*(\iota)$. Если $\dim X \leqslant 2m+2$, то $\operatorname{im}\psi = \{u \in H^2(X; \mathbf{Z}) \mid u^{m+1} = 0\}$. Если $\dim X \leqslant 2m+1$, то отображение ψ сюръективно, и для всякого элемента $u \in H^2(X; \mathbf{Z})$ множество $\psi^{-1}(u)$ находится во взаимно однозначном соответствии с множеством*

$$H^{2m+1}(X; \mathbf{Z})/[(m+1) u^m \smile H^1(X; \mathbf{Z})].$$

§ 5. Отображение надстройки

Одним из наиболее полезных инструментов изучения гомотопических групп пространств является гомоморфизм надстройки $\pi_q(X) \to \pi_{q+1}(SX)$. Итерация этого гомоморфизма приводит к последовательности групп и гомоморфизмов

$$\pi_q(X) \to \pi_{q+1}(SX) \to \pi_{q+2}(S^2X) \to \ldots,$$

Эта последовательность стабилизируется, т. е. гомоморфизмы, начиная с некоторого, становятся изоморфизмами. Таким образом, если пространство X и число q фиксированы, то лишь конечное число групп в этой последовательности различны.

В этом параграфе мы изучим более подробно гомоморфизм надстройки и докажем свойство стабилизации. Это даст нам возможность вычислить группу $\pi_{n+1}(S^n)$ для любого n. Зная эти группы, мы с помощью теории препятствий докажем теорему Стинрода о классификации, которой и заканчивается этот параграф[1]).

Мы рассматриваем категорию пространств с отмеченной точкой и отображений этих пространств. Функториальное отображение надстройки S: $[X;\ Y] \to [SX;\ SY]$ определяется формулой $S[f] = [Sf]$. Экспоненциальное соответствие определяет естественный изоморфизм

$$[SX;\ SY] \approx [X;\ \Omega SY],$$

и отображение $\bar{S}$: $[X;\ Y] \to [X;\ \Omega SY]$ мы будем считать композицией отображения S и этого изоморфизма. Следующий результат показывает, что отображение $\bar{S}$ индуцировано некоторым отображением $Y \to \Omega SY$.

1. Лемма. *Пусть отображение* ρ: $Y \to \Omega SY$ *определено равенством* $\rho(y)(t) = [y,\ t]$, $y \in Y$ *и* $t \in I$. *Тогда для любого пространства* X *имеет место равенство*

$$\bar{S} = \rho_{\#}\colon\ [X;\ Y] \to [X;\ \Omega SY].$$

Доказательство. Экспоненциальное соответствие переводит тождественное отображение $SY \subset SY$ в отображение ρ: $Y \to \Omega SY$. Поскольку экспоненциальное соответствие функториально, оно переводит композицию

$$SX \xrightarrow{Sf} SY \subset SY$$

в композицию

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{\rho} \Omega SY. \ \blacksquare$$

Таким образом, для изучения отображения надстройки необходимо изучить отображение ρ. Для этого мы используем расслоение $PSY \to SY$ со слоем ΩSY. Исследуем прежде всего гомологические свойства расслоений над надстройкой SY. Предположим, что $y_0 \in Y$ — невырожденная отмеченная точка. Положим

---

[1]) Впервые подробное изложение свойств отображения надстройки появилось в работе: Freudenthal H, Über die Klassen der Sphärenabbildungen, *Compositio Math.*, 5 (1937), 299—314. [Основные свойства гомоморфизма надстройки были открыты Л. С. Понтрягиным. Фрейденталь первым опубликовал подробные доказательства. — *Прим. ред.*]

$C_-Y = \{[y, t] \in SY \mid 0 \leqslant t \leqslant 1/2\}$ и $C_+Y = \{[y, t] \in SY \mid 1/2 \leqslant t \leqslant 1\}$. Тогда $SY = C_-Y \cup C_+Y$, и существует гомеоморфизм $Y \approx C_-Y \cap C_+Y$ (переводящий y в $[y, 1/2]$), с помощью которого мы отождествим Y и $C_-Y \cap C_+Y$. Пусть $S'Y$ — неприведенная надстройка, определенная как факторпространство пространства $Y \times I$, в котором $Y \times 0$ стянуто в одну точку, а $Y \times 1$ — в другую, и пусть C'_-Y, C'_+Y — аналогичные подпространства в $S'Y$ (отсюда $C'_-Y \cap C'_+Y = Y$). Отображение, стягивающее $S'y_0$ внутри $S'Y$ в одну точку, является естественной проекцией $k\colon S'Y \to SY$ и обладает тем свойством, что $k(C'_-Y) = C_-Y$ и $k(C'_+Y) = C_+Y$.

2. Лемма. *Если y_0 — невырожденная отмеченная точка пространства Y, то проекция $k\colon S'Y \to SY$ определяет гомотопическую эквивалентность любой пары, которую можно составить из пространств $S'Y$, C'_-Y, C'_+Y, Y и соответствующей пары, составленной из пространств SY, C_-Y, C_+Y и Y.*

Доказательство. Поскольку y_0 — невырожденная отмеченная точка пространства Y, то, как и при доказательстве леммы 7.3.2с, можно видеть, что вложение $Y \times \dot I \cup y_0 \times I \subset Y \times I$ является корасслоением. Пусть точка $[y, t]' \in S'Y$ определяется точкой $(x, t) \in Y \times I$ при проекции $k'\colon Y \times I \to S'Y$. Определим гомотопию $H'\colon (Y \times \dot I \cup y_0 \times I) \times I \to S'Y$, полагая $H'(y, 0, t) = [y_0, t/2]'$, $H'(y, 1, t) = [y_0, (2-t)/2]'$ и $H'(y_0, t', t) = [y_0, (1-t)\,t' + t/2]'$. Тогда гомотопию H' можно продолжить до гомотопии $H''\colon Y \times I \times I \to S'Y$, такой, что $H''(y, t, 0) = k'(y, t)$. Так как $H''(y, 0, t) = H''(y', 0, t)$ и $H''(y, 1, t) = H''(y', 1, t)$ для всех $y, y' \in Y$, существует такая гомотопия $H\colon S'Y \times I \to S'Y$, что $H([y, t]', t') = H''(y, t, t')$. Тогда H — гомотопия тождественного отображения пространства $S'Y$ в отображение, стягивающее отрезок $S'y_0$ в одну точку, причем $H(S'y_0 \times I) \subset S'y_0$. Поскольку $H(B \times I) \subset B$, если $B = C'_-Y$, C'_+Y или Y, наше утверждение вытекает теперь из леммы 7.1.5. ■

3. Следствие. *Если Y — линейно связное пространство с невырожденной отмеченной точкой, то пространство SY односвязно.*

Доказательство. Согласно лемме 2, пространства $S'Y$ и SY имеют один и тот же гомотопический тип, и, значит, достаточно проверить, что пространство $S'Y$ односвязно. Во всяком случае, ясно, что последнее пространство линейно связно, ибо оно является образом при проекции линейно связного пространства $Y \times I$.

Пусть $U_- = \{[y, t]' \in S'Y \mid t < 1\}$ и $U_+ = \{[y, t]' \in S'Y \mid t > 0\}$. Тогда U_- и U_+ — открытые стягиваемые подмножества пространства $S'Y$. Пусть ω — какой-нибудь замкнутый путь в $S'Y$, начинающийся в точке $[y_0, 1/2]'$. Существует такое разбиение отрезка I, скажем $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = 1$, что для каждого i, $1 \leqslant i \leqslant n$, либо

$\omega([t_{i-1}, t_i]) \subset U_-$, либо $\omega([t_{i-1}, t_i]) \subset U_+$. Более того, можно предположить, что $\omega(t_i) \in U_- \cap U_+$ для всех $0 \leqslant i \leqslant n$ (если некоторые точки $\omega(t_i)$ не принадлежат $U_- \cap U_+$, то соответствующие им числа t_i можно опустить и получить другое разбиение отрезка I, удовлетворяющее первоначальному предположению; повторив несколько раз эту операцию, получим разбиение, удовлетворяющее нужному нам дополнительному свойству). Поскольку множество $U_- \cap U_+$ гомеоморфно произведению $Y \times \mathbf{R}$, оно линейно связно. Для каждого i пусть ω_i — путь в пересечении $U_- \cap U_+$ между точками $\omega(t_{i-1})$ и $\omega(t_i)$, и пусть ω' — замкнутый путь, начинающийся в точке $[y_0, {}^1/_2]'$, определенный равенством $\omega'(t) = \omega_i((t - t_{i-1})/(t_i - t_{i-1}))$, $t_{i-1} \leqslant t \leqslant t_i$. Так как каждое из множеств U_- и U_+ односвязно, путь $\omega | [t_{i-1}, t_i]$ гомотопен пути $\omega' | [t_{i-1}, t_i]$ относительно $\{t_{i-1}, t_i\}$. Следовательно, $\omega \simeq \omega' \operatorname{rel} \dot{I}$. Поскольку ω' — замкнутый путь в U_+, он гомотопен нулю. Значит, путь ω также гомотопен нулю, т. е. пространство $S'Y$ односвязно. ■

4. Следствие. *Пусть пространство Y имеет невырожденную отмеченную точку, и пусть p: $E \to SY$ — некоторое расслоение. Тогда пара $\{p^{-1}(C_-Y), p^{-1}(C_+Y)\}$ удовлетворяет аксиоме вырезания.*

Доказательство. Предположим, что расслоение p': $E' \to S'Y$ индуцировано расслоением p и проекцией k: $S'Y \to SY$; пусть $\bar{k}$: $E' \to E$ — ассоциированное отображение. Из леммы 2 следует, что индуцированные отображением $\bar{k}$ вертикальные гомоморфизмы в коммутативной диаграмме

$$\begin{array}{ccc} H_*(p'^{-1}(C'_+Y),\ p'^{-1}(Y)) & \to & H_*(E',\ p'^{-1}(C'_-Y)) \\ \downarrow{\scriptstyle\approx} & & \downarrow{\scriptstyle\approx} \\ H_*(p^{-1}(C_+Y),\ p^{-1}(Y)) & \to & H_*(E,\ p^{-1}(C_-Y)) \end{array}$$

являются изоморфизмами. Поскольку C'_+Y — сильный деформационный ретракт множества U_+ (U_+ определено в следствии 3), а Y — сильный деформационный ретракт множества $U_+ \cap C'_-Y$, то $p'^{-1}(C'_+Y)$ и $p'^{-1}(Y)$ — сильные деформационные ретракты пространств $p'^{-1}(U_+)$ и $p'^{-1}(U_+ \cap C'_-Y)$ соответственно. Отсюда следует, что пара $\{p'^{-1}(C'_-Y),\ p'^{-1}(C'_+Y)\}$ удовлетворяет аксиоме вырезания. Нужное нам утверждение теперь следует из приведенной коммутативной диаграммы. ■

Поскольку пространства C_+Y и C_-Y стягиваемы относительно y_0, из сказанного следует, как и в § 2.8, что для любого расслоения p: $E \to SY$ со слоем $F = p^{-1}(y_0)$ существуют послойные гомотопические эквивалентности f_-: $C_-Y \times F \to p^{-1}(C_-Y)$ и g_+: $p^{-1}(C_+Y) \to C_+Y \times F$, такие, что отображение $f_- | y_0 \times F$ гомотопно отображению $(y_0, z) \to z$, а $g_+|F$ гомотопно отображению $z \to (y_0, z)$. Соответствующая *склеивающая функция* $\mu\colon Y \times F \to F$ определяется с помощью соотношения

$$g_+ f_-(y, z) = (y, \mu(y, z)), \quad y \in Y, \quad z \in F.$$

При этом отображение $\mu | y_0 \times F$ гомотопно отображению $(y_0, z) \to z$.

5. Теорема. *Пусть $p\colon E \to SY$ — расслоение со слоем $F = p^{-1}(y_0)$, где y_0 — невырожденная отмеченная точка пространства Y. Пусть $\mu\colon Y \times F \to F$ — склеивающая функция этого расслоения. Тогда для любого модуля коэффициентов имеют место точные последовательности*

$$\ldots \to H_q(E) \to H_q(C_-Y \times F, Y \times F) \xrightarrow{\mu_*\partial} H_{q-1}(F) \xrightarrow{i_*} H_{q-1}(E) \to \ldots,$$
$$\ldots \to H^q(E) \xrightarrow{i^*} H^q(F) \xrightarrow{\delta\mu^*} H^{q+1}(C_-Y \times F, Y \times F) \to H^{q+1}(E) \to \ldots.$$

Доказательство. Рассмотрим точную гомологическую последовательность пары (E, F)

$$\ldots \to H_q(F) \xrightarrow{i_*} H_q(E) \to H_q(E, F) \xrightarrow{\partial} H_{q-1}(F) \to \ldots.$$

Используя аксиому гомотопии и следствие 4, получаем следующие изоморфизмы, индуцированные вложениями:

$$H_q(E, F) \xrightarrow[\approx]{} H_q(E, p^{-1}(C_+Y)) \xleftarrow[\approx]{} H_q(p^{-1}(C_-Y), p^{-1}(Y)).$$

Имеют место гомотопическая эквивалентность

$$f_-\colon (C_-Y \times F, Y \times F) \to (p^{-1}(C_-Y), p^{-1}(Y))$$

и коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccccccc}
H_q(E, F) & \xrightarrow[\approx]{} & H_q(E, p^{-1}(C_+Y)) & \xleftarrow[\approx]{} & H_q(p^{-1}(C_-Y), p^{-1}(Y)) & \xleftarrow[\approx]{f_{-*}} & H_q((C_-Y, Y) \times F) \\
\downarrow{\scriptstyle\partial} & & \downarrow{\scriptstyle\partial} & & \downarrow{\scriptstyle\partial} & & \downarrow{\scriptstyle\partial} \\
H_{q-1}(F) & \xrightarrow[\approx]{j_*} & H_{q-1}(p^{-1}(C_+Y)) & \longleftarrow & H_{q-1}(p^{-1}(Y)) & \xleftarrow[\approx]{(f_- | Y \times F)_*} & H_{q-1}(Y \times F)
\end{array}$$

Существует также гомотопическая эквивалентность $g_+\colon p^{-1}(C_+Y) \to$ $\to C_+Y \times F$, и, значит, имеют место изоморфизмы

$$H_{q-1}(p^{-1}(C_+Y)) \xrightarrow[\approx]{g_{+*}} H_{q-1}(C_+Y \times F) \xrightarrow[\approx]{} H_{q-1}(F),$$

где правый изоморфизм индуцирован проекцией на второй сомножитель. Поскольку отображение $g_+|F$ гомотопно отображению $z \to (y_0, z)$, эта композиция совпадает с отображением j_*^{-1}. Согласно определению, μ — это композиция

$$Y \times F \xrightarrow{f_- | Y \times F} p^{-1}(Y) \subset p^{-1}(C_+Y) \xrightarrow{g_+} C_+Y \times F \to F,$$

Следовательно, имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} H_q(E,\ F) & \xrightarrow[\approx]{} & H_q((C_-Y,\ Y)\times F) \\ \downarrow{\scriptstyle\partial} & & \downarrow{\scriptstyle\partial} \\ H_{q-1}(F) & \xleftarrow[\approx]{\mu_*} & H_{q-1}(Y\times F) \end{array}$$

Нужная нам точная последовательность для гомологий получается заменой в точной гомологической последовательности пары $(E,\ F)$ группы $H_q(E,\ F)$ на группу $H_q((C_-Y,\ Y)\times F)$, а ∂ на $\mu_*\partial$. Аналогичными рассуждениями можно установить точность соответствующей когомологической последовательности. ■

Когда $Y=S^{n-1}$, надстройка $S(S^{n-1})$ гомеоморфна сфере S^n (лемма 1.6.6), и мы получаем следующую точную *последовательность Вана* для расслоений над сферой S^n:

6. Следствие. *Пусть p: $E\to S^n$ — расслоение со слоем F. Тогда имеют место точные последовательности*

$$\ldots\to H_q(F)\xrightarrow{i_*}H_q(E)\to H_{q-n}(F)\to H_{q-1}(F)\to\ldots,$$

$$\ldots\to H^q(E)\xrightarrow{i^*}H^q(F)\xrightarrow{\theta}H^{q-n+1}(F)\to H^{q+1}(E)\to\ldots.$$

Если коэффициентами второй последовательности служат элементы коммутативного кольца с единицей, то

$$\theta(u\smile v)=\theta(u)\smile v+(-1)^{(n-1)\deg u}\,u\smile\theta(v).$$

Доказательство. Положим $Y=S^{n-1}$ в теореме 5. Пара $(C_-Y,\ Y)$ гомеоморфна паре $(E^n,\ S^{n-1})$. Следовательно,

$$H_q((C_-Y,\ Y)\times F)\approx H_q\big((E^n,\ S^{n-1})\times F\big)\approx H_{q-n}(F),$$

и нужные нам точные последовательности получаются из точных последовательностей теоремы 5 заменой групп $H_q(C_-Y\times F,\ Y\times F)$ и $H^q(C_-Y\times F,\ Y\times F)$ на группы $H_{q-n}(F)$ и $H^{q-n}(F)$ соответственно. Дополнительное утверждение, касающееся отображения θ, легко получить, заметив, что из определения отображения μ^*: $H^q(F)\to H^q(S^{n-1}\times F)$ следует равенство

$$\mu^*(u)=1\times u+s^*\times\theta(u),$$

где $s^*\in H^{n-1}(S^{n-1})$ — подходящая образующая. Поскольку $s^*\smile s^*=0$, имеем

$$\begin{aligned}1\times(u\smile v)+s^*\times\theta(u\smile v)&=\mu^*(u\smile v)=\\ &=[1\times u+s^*\times\theta(u)]\smile[1\times v+s^*\times\theta(v)]=\\ &=1\times(u\smile v)+s^*\times[\theta(u)\smile v+(-1)^{(n-1)\deg u}u\smile\theta(v)].\end{aligned}$$

Отсюда вытекает мультипликативное свойство гомоморфизма θ. ■

Займемся теперь расслоением путей p: $PSY \to SY$ со слоем ΩSY. В этом случае имеется следующее простое выражение для склеивающей функции:

7. Лемма. *Пусть сечения* s_-: $C_-Y \to p^{-1}(C_-Y)$ *и* s_+: $C_+Y \to p^{-1}(C_+Y)$ *расслоения* p: $PSY \to SY$ *таковы, что обе петли* $s_-(y_0)$ *и* $s_+(y_0)$ *гомотопны нулю. Тогда отображение* μ: $Y \times \Omega SY \to \Omega SY$, *определенное равенством*

$$\mu(y, \omega) = (\omega * s_-(y)) * s_+(y)^{-1},$$

является склеивающей функцией расслоения p.

Доказательство. Указанные в лемме сечения существуют, поскольку пространства C_-Y и C_+Y стягиваемы относительно y_0. Определим сохраняющие слои отображения

$$f_-: C_-Y \times \Omega SY \to p^{-1}(C_-Y), \quad g_-: \quad p^{-1}(C_-Y) \to C_-Y \times \Omega SY,$$
$$f_+: C_+Y \times \Omega SY \to p^{-1}(C_+Y), \quad g_+: \quad p^{-1}(C_+Y) \to C_+Y \times \Omega SY,$$

полагая $f_-(z, \omega) = \omega * s_-(z)$, $g_-(\omega) = (p(\omega), \omega * (s_- p(\omega))^{-1})$, $f_+(z, \omega) = \omega * s_+(z)$ и $g_+(\omega) = (p(\omega), \omega * (s_+(p(\omega))^{-1})$ соответственно. Легко проверить, что отображение $g_- \circ f_-$ послойно гомотопно тождественному отображению пространства $C_-Y \times \Omega SY$, а $f_- \circ g_-$ — тождественному отображению пространства $p^{-1}(C_-Y)$. Следовательно, f_- — послойная гомотопическая эквивалентность. Точно так же, g_+ есть послойная гомотопическая эквивалентность. Более того, отображение $f_-(y_0, \omega) = \omega * s_-(y_0)$ гомотопно отображению $(y_0, \omega) \to \omega$, поскольку петля $s_-(y_0)$ гомотопна нулю. Аналогично, если $\omega \in \Omega SY$, то $g_+(\omega) = (y_0, \omega * s_+(y_0)^{-1})$ гомотопно отображению $\omega \to (y_0, \omega)$. Следовательно, композиция

$$Y \times \Omega SY \xrightarrow{f_-} p^{-1}(Y) \xrightarrow{g_+} Y \times \Omega SY \to \Omega SY$$

является склеивающей функцией для p. Эта композиция совпадает с отображением

$$(y, \omega) \to (\omega * s_-(y)) * s_+(y)^{-1}. \blacksquare$$

Пусть сечения s_- и s_+ — такие, как в лемме 7, и пусть отображение μ': $Y \to \Omega SY$ определено соотношением $\mu'(y) = s_-(y) * s_+(y)^{-1}$. Тогда μ' называется *характеристическим отображением* для расслоения p: $PSY \to SY$.

8. Следствие. *Пусть* μ': $Y \to \Omega SY$ — *характеристическое отображение для расслоения* p: $PSY \to SY$. *Отображение* $Y \times \Omega SY \to \Omega SY$, *переводящее* (y, ω) *в* $\omega * \mu'(y)$, *гомотопно склеивающей функции расслоения* p.

Доказательство. Это следует из леммы 7, поскольку ясно, что отображение

$$(y, \omega) \to (\omega * s_-(y)) * s_+(y)^{-1}$$

гомотопно отображению $(y, \omega) \to \omega * (s_-(y) * s_+(y)^{-1}) = \omega * \mu'(y)$. ■

Следующая теорема содержит главную часть доказательства теоремы о надстройке.

9. Теорема. *Пусть пространство Y n-связно для некоторого $n \geqslant 0$, и пусть y_0 — его невырожденная отмеченная точка. Тогда характеристическое отображение $\mu'\colon Y \to \Omega SY$ для расслоения $p\colon PSY \to SY$ индуцирует изоморфизм*

$$\mu'_*\colon H_q(Y) \approx H_q(\Omega SY), \qquad q \leqslant 2n+1.$$

Доказательство. Согласно следствию 3, пространство SY односвязно. Согласно следствию 4, пара $\{C_-Y, C_+Y\}$ удовлетворяет аксиоме вырезания, и из точности соответствующей приведенной последовательности Майера — Виеториса следует, что $\tilde{H}_q(SY) \approx \tilde{H}_{q-1}(Y)$. Этот факт вместе с абсолютным вариантом теоремы об изоморфизме Гуревича показывает, что SY есть $(n+1)$-связное пространство. Следовательчо, ΩSY есть n-связное пространство. Так как пространство PSY стягиваемо, теорема 5 дает нам изоморфизм приведенных модулей.

Пусть ω_0 — постоянная петля. Поскольку ΩSY есть n-связное пространство, а (C_-Y, Y) есть $(n+1)$-связная пара, из теоремы Кюннета следует, что вложение $(C_-Y, Y) \times \omega_0 \subset (C_-Y, Y) \times \Omega SY$ индуцирует изоморфизм

$$H_q((C_-Y, Y) \times \omega_0) \approx H_q((C_-Y, Y) \times \Omega SY), \quad q \leqslant 2n+2.$$

Пусть $\mu\colon Y \times \Omega SY \to \Omega SY$ — склеивающая функция, гомотопная отображению $(y, \omega) \to \omega * \mu'(y)$ (такие функции μ существуют согласно следствию 8). Так как отображение $\mu(y, \omega_0)$ гомотопно отображению $y \to \mu'(y)$, имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd}
H_q(C_-Y, Y) \arrow[r, "\approx"] \arrow[d, "\partial"] & H_q((C_-Y, Y) \times \omega_0) \arrow[r] \arrow[d, "\partial"] & H_q((C_-Y, Y) \times \Omega SY) \arrow[d, "\partial"] \\
\tilde{H}_{q-1}(Y) \arrow[r, "\approx"'] \arrow[dr, "\mu'_*"'] & \tilde{H}_{q-1}(Y \times \omega_0) \arrow[r] & \tilde{H}_{q-1}(Y \times \Omega SY) \arrow[dl, "\mu_*"] \\
& \tilde{H}_{q-1}(\Omega SY) &
\end{tikzcd}$$

Утверждение теоремы вытекает теперь из коммутативности этой диаграммы. ■

10. Следствие. *Пусть пространство Y обладает невырожденной отмеченной точкой. Если оно n-связно, $n \geqslant 0$, то отображение ρ: $Y \to \Omega SY$ индуцирует изоморфизм*

$$\rho_*: H_q(Y) \approx H_q(\Omega SY), \quad q \leqslant 2n+1.$$

Доказательство. Пусть сечения s_-: $C_-Y \to p^{-1}(C_-Y)$ и s_+: $C_+Y \to p^{-1}(C_+Y)$ определены равенствами $s_-[y, t](t') = [y, tt']$ и $s_+[y, t](t') = [y, 1-t'+tt']$. Ссответствующее характеристическсе отображение совпадает с ρ: $Y \to \Omega SY$, так что сформулированный результат является следствием теоремы 9. ∎

Теперь мы подготовлены к доказательству следующей *теоремы о надстройке*[1]):

11. Теорема. *Пусть пространство Y с невырожденной отмеченной точкой n-связно, $n \geqslant 1$, и пусть X — некоторый CW-комплекс с отмеченной точкой. Тогда отображение надстройки*

$$S\colon [X;\ Y] \to [SX;\ SY]$$

сюръективно, если $\dim X \leqslant 2n+1$, *и биективно, если* $\dim X \leqslant 2n$.

Доказательство. Поскольку оба пространства Y и ΩSY односвязны, из следствия 10 и теоремы Уайтхеда вытекает, что вложение ρ представляет собой $(2n+1)$-эквивалентность. Утверждение теоремы вытекает теперь из следствия 7.6.23 и леммы 1. ∎

Пусть Y — пространство с невырожденной отмеченной точкой. Тогда его надстройка SY линейно связна и обладает невырожденной отмеченной точкой, пространство S^2Y односвязно, а пространство S^mY $(m-1)$-связно. Если X — некоторый CW-комплекс, то надстройка S^mX представляет собой CW-комплекс и $\dim S^mX = m + \dim X$. Следовательно, если размерность комплекса X конечна и $m \geqslant 2 + \dim X$, то из теоремы 11 следует, что $S\colon [S^mX;\ S^mY] \approx [S^{m+1}X;\ S^{m+1}Y]$. ∎

Значит, для всякого конечномерного CW-комплекса X последовательность

$$[X;\ Y] \xrightarrow{S} [SX;\ SY] \xrightarrow{S} \ldots \xrightarrow{S} [S^mX;\ S^mY] \xrightarrow{S} \ldots,$$

начиная с некоторого места, состоит только из изоморфизмов. Полагая $X = S^{n+k}$ и $Y = S^n$ и вспоминая, что надстройка сферы является сферой, мы видим, что последовательность

$$\pi_{n+k}(S^n) \xrightarrow{S} \pi_{n+k+1}(S^{n+1}) \xrightarrow{S} \ldots,$$

[1]) Общая относительная форма этой теоремы приводится в статье: Spanier E., Whitehead J. H. C., The theory of carriers and S-theory, in «Algebraic Geometry and Topology» (a symposium in honor of S. Lefschetz), Princeton University Press, Princeton, 1957, pp. 330—360.

начиная с некоторого места, состоит только из изоморфизмов. Предел прямого спектра этой последовательности называется *k-стеблем*[1]). Из теоремы 11 следует, что k-стебель изоморфен группе $\pi_{2k+2}(S^{k+2})$. В частности, 0-стебель изоморфен группе целых чисел. Следующий результат определяет 1-стебель.

12. Теорема. $\pi_4(S^3) \approx \mathbf{Z}_2$.

Доказательство. Пусть $u_0 \in H^0(\Omega S^3)$ — единичный целочисленный класс. Пользуясь точностью последовательности Вана (см. следствие 6) для расслоения $PS^3 \to S^3$, определим индукцией по i образующие $u_i \in H^{2i}(\Omega S^3)$ с помощью формулы

$$\theta(u_{i+1}) = u_i, \qquad i \geqslant 0.$$

Поскольку отображение θ является дифференцированием[2]), $\theta(u_1 \smile u_1) = 2u_1\theta(u_1)$, откуда $u_1 \smile u_1 = 2u_2$. Мы знаем, что группа $\pi_2(\Omega S^3) \approx \pi_3(S^3)$ является бесконечной циклической. Отсюда следует, что ΩS^3 можно таким образом вложить в пространство X типа $(\mathbf{Z}, 2)$, чтобы вложение $\Omega S^3 \subset X$ индуцировало изоморфизм $\pi_2(\Omega S^3) \approx \pi_2(X)$. Поскольку пространство $\mathbf{C}P^\infty$ также имеет тип $(\mathbf{Z}, 2)$, $H^*(X) \approx H^*(\mathbf{C}P^\infty) \approx \varprojlim\{H^*(\mathbf{C}P^j)\}$ — полиномиальная алгебра с единственной образующей $v \in H^2(X)$, и эту образующую можно выбрать так, что $v \mid \Omega S^3 = u_1$.

Несложное вычисление с использованием точной когомологической последовательности пары $(X, \Omega S^3)$ показывает, что $H^q(X, \Omega S^3) = 0$, если $q < 5$, и $H^5(X, \Omega S^3) \approx \mathbf{Z}_2$. Формула универсальных коэффициентов дает $H_q(X, \Omega S^3) = 0$, если $q < 4$, и $H_4(X, \Omega S^3) \approx \mathbf{Z}_2$. Согласно относительной теореме об изоморфизме Гуревича, $\pi_4(X, \Omega S^3) \approx \mathbf{Z}_2$. Поскольку $\pi_3(X) = 0 = \pi_4(X)$, имеем

$$\pi_4(X, \Omega S^3) \overset{\partial}{\approx} \pi_3(\Omega S^3) \approx \pi_4(S^3). \ \blacksquare$$

Надстройка порядка $n-2$ образующей группы $\pi_3(S^2)$ служит образующей группы $\pi_{n+1}(S^n)$ (поскольку S: $\pi_3(S^2) \to \pi_4(S^3)$ — эпиморфизм в силу теоремы 11). Приклеивание клетки к сфере S^n при помощи отображения, определяющего эту образующую, должно, следовательно, «убивать» группу $\pi_{n+1}(S^n)$. Получающийся таким образом CW-комплекс имеет тот же гомотопический тип,

---

[1]) k-стебель называют также k-й стационарной гомотопической группой сферы S^n.— *Прим. перев.*

[2]) Имеется в виду свойство отображения θ, сформулированное в следствии 6.— *Прим. ред.*

что и $(n-2)$-кратная надстройка комплексной проективной плоскости $\mathbf{C}P^2$ [1]). Этим мы доказали следующий результат:

13. Следствие. $\pi_{n+1}(S^{n-2}(\mathbf{C}P^2))=0$, $n\geqslant 2$. ■

Мы хотим теперь провести классификацию отображений $(n+1)$-мерного комплекса в сферу S^n. Случай $n=2$ является частным случаем (при $m=1$) теоремы 8.4.11. С помощью стандартного разложения Постникова сферы S^n мы сводим нашу задачу к классификации отображений $(n+1)$-мерного комплекса в пространство E, где $p\colon E\to B$ — главное расслоение типа $(\mathbf{Z}_2, n+2)$ с базой типа $(\mathbf{Z}, n)$. Это расслоение определяет когомологическую операцию θ_n типа $(n, n+2; \mathbf{Z}, \mathbf{Z}_2)$.

14. Лемма. *Если $n>2$, то когомологическая операция θ_n совпадает с операцией $Sq^2\circ\mu_*$, где отображение $\mu_*\colon H^n(X;\mathbf{Z})\to H^n(X;\mathbf{Z}_2)$ индуцировано гомоморфизмом коэффициентов $\mu\colon \mathbf{Z}\to\mathbf{Z}_2$.*

Доказательство. Согласно теореме 12 и следствию 13, сфера $S^n\subset S^{n-2}(\mathbf{C}P^2)$ не является ретрактом. Следовательно, отображение $\theta_n\colon H^n(S^{n-2}(\mathbf{C}P^2)); \mathbf{Z})\to H^{n+2}(S^{n-2}(\mathbf{C}P^2); \mathbf{Z}_2)$ нетривиально (если бы оно было тривиальным, то существовало бы отображение $f\colon S^{n-2}(\mathbf{C}P^2)\to S^n$, для которого гомоморфизм

$$f^*\colon H^n(S^n;\mathbf{Z})\approx H^n(S^{n-2}(\mathbf{C}P^2);\mathbf{Z})$$

был бы обратным к гомоморфизму ограничения $H^n(S^{n-2}(\mathbf{C}P^2);\mathbf{Z})\approx\approx H^n(S^n,\mathbf{Z})$, а такое отображение f гомотопно слабой ретракции). Поскольку операция $Sq^2\circ\mu_*$ также нетривиальна, отсюда следует, что для пространства $S^{n-2}(\mathbf{C}P^2)$ имеет место равенство $\theta_n=$ $=Sq^2\circ\mu_*$.

Доказательство будет завершено, если мы покажем, что пространство $S^{n-2}(\mathbf{C}P^2)$ универсально для операций θ_n и $Sq^2\circ\mu_*$. Действительно, пусть размерность CW-комплекса X не превосходит $n+2$, и пусть $u\in H^n(X;\mathbf{Z})$. Поскольку $\pi_{n+1}(S^{n-2}(\mathbf{C}P^2))=0$, существует отображение $f\colon X\to S^{n-2}(\mathbf{C}P^2)$, для которого $f^*v=u$, где v — образующая группы $H^n(S^{n-2}(\mathbf{C}P^2))$. Из естественности операций θ_n и $Sq^2\circ\mu_*$ следует, что

$$\theta_n(u)=\theta_n f^*v=f^*\theta_n v=f^*Sq^2\mu_*v=Sq^2\mu_*u.$$

[1]) Комплексная проективная плоскость есть результат приклеивания четырехмерой клеткн e^4 к $\mathbf{C}P^1=S^2$. Вложение $\mathbf{C}P^2\subset\mathbf{C}P^\infty$ есть 5-эквивалентность, так что $\pi_3(\mathbf{C}P^2)\approx\pi_3(\mathbf{C}P^\infty)=0$. Значит, чтобы это было так, приклеивание клетки e^4 к $\mathbf{C}P^1=S^2$ должно «убить» образующую группы $\pi_3(\mathbf{C}P^1)$.— *Прим. ред.*

Поскольку это верно для всякого CW-комплекса размерности $\leqslant n+2$, а θ_n и $Sq^2 \circ \mu_*$ — операции типа $(n, n+2; \mathbf{Z}, \mathbf{Z}_2)$, то это верно также и для произвольного CW-комплекса. ■

Лемма 14 в сочетании с теоремой 8.4.10 дают следующую *теорему Стинрода о классификации*[1]:

15. Теорема. *Пусть $s^* \in H^n(S^n; \mathbf{Z})$ — образующая, где $n > 2$, и пусть X — некоторый CW-комплекс. Тогда образ отображения ψ: $[X; S^n] \to H^n(X; \mathbf{Z})$ равен $\{u \in H^n(X; \mathbf{Z}) \mid Sq^2\mu_*(u) = 0\}$, если $\dim X \leqslant n+2$, а если $\dim X \leqslant n+1$, то множество $\psi^{-1}(u)$ находится в биективном соответствии с множеством*

$$H^{n+1}(X; \mathbf{Z}_2)/(Sq^2\mu_* H^{n-1}(X; \mathbf{Z})). \ ■$$

УПРАЖНЕНИЯ

A. Пространство типа (π, n)

1. Рассмотрим для каждого целого p обобщенное линзовое пространство $L_n(p) = L(p, \overbrace{1, \ldots, 1}^{n})$. Покажите, что $L_n(p) \subset L_{n+1}(p)$ и что пространство $L_\infty(p) = \bigcup_n L_n(p)$, наделенное топологией, согласованной с семейством $\{L_n(p)\}$, является пространством типа $(\mathbf{Z}_p, 1)$.

2. Докажите, что если CW-комплекс X имеет тип (π, n), $n > 1$, а CW-комплекс Y произволен, то

$$\pi_n(X \vee Y) \approx \pi_n(Y) \oplus \bigoplus_{\lambda \in \pi_1(Y)} \pi_\lambda,$$

где $\pi_\lambda = \pi$ для каждого $\lambda \in \pi_1(Y)$.

3. Докажите, что если задана последовательность групп $\{\pi_q\}_{q \geqslant 1}$, абелевых при $q > 1$, и задано действие π_1 как группы операторов на группах π_q, $q > 1$, то существует пространство Y, реализующее эту последовательность (т. е. $\pi_q(Y) \approx \pi_q$ и действие группы $\pi_1(Y)$ на группе $\pi_q(Y)$ совпадает с действием группы π_1 на группе π_q).

B. Точные последовательности, содержащие отображение $g_\#$

Пусть отображение g: $(Y, B) \to (Y', B')$ сохраняет отмеченные точки, и пусть $g' = g \mid Y$: $Y \to Y'$ и $g'' = g \mid B$: $B \to B'$.

1. Покажите, что $E_{g''}$ является подпространством пространства $E_{g'}$ и что $p_{g''} = p_{g'} \mid E_{g''}$.

---

[1]) См. Steenrod N. E., Products of cocycles and extensions of mappings, *Ann. Math.*, **48** (1947), 290–320.

2. Определим отображение p: $(E_{g'}, E_{g''}) \to (Y, B)$, полагая $p \mid E_{g'} = p_{g'}$, и отображение j: $(\Omega Y', \Omega B') \to (E_{g'}, E_{g''})$, полагая $j(\omega) = (y_0, \omega)$. Докажите, что имеет место точная последовательность

$$(\Omega Y, \Omega B) \xrightarrow{\Omega g} (\Omega Y', \Omega B') \xrightarrow{j} (E_{g'}, E_{g''}) \xrightarrow{p} (Y, B) \xrightarrow{g} (Y', B').$$

3. Докажите, что имеет место точная последовательность

$$\ldots \xrightarrow{\Omega^n j} \Omega^n (E_{g'}, E_{g''}) \xrightarrow{\Omega^n p} \Omega^n (Y, B) \xrightarrow{\Omega^n g} \Omega^n (Y', B') \to \ldots \xrightarrow{g} (Y', B').$$

4. Определим отображение $(\Omega Y' \times E_{g'}, \Omega B' \times E_{g''}) \to (E_{g'}, E_{g''})$, считая, что $\omega \times (y, \omega') \to (y, \omega * \omega')$, и используем это отображение для определения действия слева $a \top b$ множества $[X, A; \Omega Y', \Omega B']$ на множестве $[X, A; E_{g'}, E_{g''}]$. Докажите, что равенство $p_{\#}(b_1) = p_{\#}(b_2)$ для $b_1, b_2 \in [X, A; E_{g'}, E_{g''}]$ имеет место тогда и только тогда, когда существует элемент $a \in [X, A; \Omega Y', \Omega B']$, такой, что $b_1 = a \top b_2$.

5. Докажите, что $j_{\#}(a_1) = j_{\#}(a_2)$, $a_1, a_2 \in [X, A; \Omega Y', \Omega B']$, тогда и только тогда, когда существует элемент $c \in [X, A; \Omega Y, \Omega B]$, такой, что $a_1 = a_2 \top (\Omega g)_{\#}(c)$.

C. Примеры

1. Приведите пример n-мерного полиэдра X, где $n > 1$, и непрерывного отображения f: $X \to S^n$, таких, что гомоморфизм f_*: $\tilde{H}_*(X) \to \tilde{H}_*(S^n)$ тривиален, но отображение f не гомотопно отображению в точку.

2. Пусть X — некоторый n-мерный полиэдр. Докажите, что два отображения f, g: $X \to S^n$ гомотопны тогда и только тогда, когда $f_* = g_*$: $H_n(X; G) \to H_n(S^n; G)$ для $G = \mathbf{Z}_p$ (где p — произвольное простое число) и для $G = \mathbf{R}$.

3. Вычислите когомотопическую группу $\pi^{2m-1}(\mathbf{C}P^m)$ $(m \geqslant 2)$.

4. Пусть (Y, B) есть $(n-1)$-связная пара $(n \geqslant 2)$, вложение $B \subset Y$ является простым и $\iota \in H^n(Y, B; \pi)$ — некоторый n-характеристический элемент для (Y, B). Докажите, что если (X, A) — относительный CW-комплекс, а f: $(X, A) \to (Y, B)$ — некоторое отображение, то $f^*(\iota) \in H^n(X, A; \pi)$ является первым препятствием к деформации отображения f относительно A в некоторое отображение $X \to B$.

D. Надстройка

1. Пусть X — некоторый $(n-1)$-связный CW-комплекс размерности $\leqslant 2n-1$. Докажите, что существует CW-комплекс Y, надстройка которого SY имеет тот же гомотопический тип, что и X. (*Указание.* Покажите, что CW-комплекс X имеет гомотопический тип CW-комплекса X', для которого $(X')^{n-1}$ — одна точка. Стройте затем пространство Y индуктивно, используя отображения, надстройки которых служат отображениями приклеивания клеток в комплексе X'.)

2. Пусть замкнутые подпространства A и B пространства X таковы, что $X = A \cup B$. Предположим, что отображения f, g: $X \to Y$ удовлетворяют условию $f(A) = y_0 = g(B)$, и определим отображение h: $X \to Y$, полагая $h \mid A = g \mid A$ и $h \mid B = f \mid B$. Докажите, что в группе $[SX; SY]$ имеет место равенство

$$[Sf][Sg] = [Sh].$$

3. Пусть X и Y — линейно связные CW-комплексы с отмеченной точкой. Докажите, что отображение f: $X \to Y$ тогда и только тогда обладает тем свойством, что $S^k f\colon S^k X \to S^k Y$ — гомотопическая эквивалентность для некоторого $k \geqslant 0$, когда $Sf\colon SX \to SY$ — гомотопическая эквивалентность. (*Указание*. Покажите, что любое из этих условий эквивалентно условию $f_*\colon H_*(X) \approx H_*(Y)$.)

4. Пусть X и Y — линейно связные CW-комплексы с отмеченной точкой, и пусть $p_1\colon X \times Y \to X$, $p_2\colon X \times Y \to Y$ и $k\colon X \times Y \to X \# Y = (X \times Y)/(X \vee Y)$ — естественные проекции. Считая эти отображения отображениями в $X \vee Y \vee \vee (X \# Y)$, докажите, что

$$((Sp_1) * (Sp_2)) * (Sk)\colon S(X \times Y) \to S(X \vee Y \vee X \# Y)$$

является гомотопической эквивалентностью.

5. Покажите, что существуют гомотопически различные CW-комплексы, надстройки которых гомотопически эквивалентны.

E. Стабильная категория

Пусть $\{X, A; Y, B\} = \varinjlim [S^k X, S^k A; S^k Y, S^k B]$. Для всякого целого q (положительного или отрицательного) пусть $\{X, A; Y, B\}_q = \varinjlim [S^{k+q} X, S^{k+q} A; S^k Y, S^k B]$. Если $\alpha\colon S^{k+q}(X, A) \to S^k(Y, B)$ — некоторое отображение, то через $\{\alpha\}$ мы будем обозначать соответствующий элемент множества $\{X, A; Y, B\}_q$.

1. Докажите, что существует спаривание

$$\{Y, B; Z, C\}_p \otimes \{X, A; Y, B\}_q \to \{X, A; Z, C\}_{p+q},$$

переводящее элемент $\{\alpha\} \otimes \{\beta\}$ в элемент $\{\alpha \circ \beta\}$, где

$$S^{p+q+k}(X, A) \xrightarrow{\beta} S^{p+k}(Y, B) \xrightarrow{\alpha} S^k(Z, C).$$

2. Докажите, что если подпространство A замкнуто в X и пара (X, A) обладает невырожденной отмеченной точкой, то пара пар $\{(C_-X, C_-A), (C_+X, C_+A)\}$ удовлетворяет аксиоме вырезания. Тогда $S\colon H_q(X, A) \approx H_{q+1}(SX, SA)$ и $S\colon H^q(X, A) \approx H^{q+1}(SX, SA)$ — изоморфизмы соответствующих относительных последовательностей Майера — Виеториса.

3. Докажите, что можно определить спаривания

$$\{X, A; Y, B\}_p \otimes H_q(X, A) \to H_{p+q}(Y, B),$$
$$\{X, A; Y, B\}_p \otimes H^r(Y, B) \to H^{r-p}(X, A),$$

переводящие элемент $\{\alpha\} \otimes z$ в элемент $S^{-k}(\alpha_*(S^{k+p} z))$, а элемент $\{\alpha\} \otimes u$ в $S^{-k-p}(\alpha^*(S^k u))$, $z \in H_q(X, A)$, $u \in H^r(Y, B)$ и $\alpha\colon S^{k+p}(X, A) \to S^k(Y, B)$.

4. Докажите, что если (X, A) — некоторая пара с отмеченной точкой, причем $A \subset X$ — корасслоение, а Y — произвольное пространство с отмеченной точкой, то имеет место точная последовательность

$$\ldots \to \{X; Y\}_q \to \{A; Y\}_q \to \{X/A; Y\}_{q-1} \to \{X; Y\}_{q-1} \to \ldots .$$

5. Пусть X — пространство с отмеченной точкой, а (Y, B) — такая пара с отмеченной точкой, что $B \subset Y$ — корасслоение. Докажите, что если отображение $f\colon X \to Y$ таково, что композиция $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{k} Y/B$ гомотопна нулю, то отображение Sf гомотопно композиции $SX \xrightarrow{f'} SB \subset SY$ для некоторого отображения f'. Выведите из этого существование точной последовательности

$$\ldots \to \{X; B\}_q \to \{X; Y\}_q \to \{X; Y/B\}_q \to \{X; B\}_{q-1} \to \ldots .$$

F. Двойственность в стабильной категории [1])

В этой группе упражнений все пространства предполагаются конечными CW-комплексами с отмеченной точкой; *n-двойственностью* называется такой элемент $u \in \{X^* \# X;\ S^0\}_{-n}$, что отображение, переводящее элемент $\{\alpha\} \in \{S^0;\ X^*\}_q \approx \{S^q;\ X^*\}$ в элемент $u \circ (\{\alpha\} \# \{1_X\}) \in \{S^q \# X;\ S^0\}_{-n} \approx \{X;\ S^0\}_{q-n}$, является изоморфизмом

$$D_u\colon \{S^0;\ X^*\}_q \approx \{X;\ S^0\}_{q-n},$$

и отображение, переводящее элемент $\{\beta\} \in \{S^0;\ X\}_q \approx \{S^q;\ X\}$ в элемент $u \circ (\{1_{X^*}\} \# \{\beta\}) \in \{X^* \# S^q;\ S^0\}_{-n} \approx \{X^*;\ S^0\}_{q-n}$, также является изоморфизмом

$$D^u\colon \{S^0;\ X\}_q \approx \{X^*;\ S^0\}_{q-n}.$$

1. Докажите, что если $f\colon S^p \# S^q \to S^{p+q}$ — гомеоморфизм, то элемент $\{f\} \in \{S^p \# S^q;\ S^0\}_{-p-q}$ является $(p+q)$-двойственностью.

2. Докажите, что если $u \in \{X^* \# X;\ S^0\}_{-n}$ — некоторая n-двойственность, то элемент $u' \in \{X \# X^*;\ S^0\}_{-n}$, соответствующий элементу u при гомеоморфизме $X \# X^* \to X^* \# X$, также является n-двойственностью.

3. Докажите, что если $u \in \{X^* \# X;\ S^0\}_{-n}$ — некоторая n-двойственность, то для произвольных комплексов Y и Z имеют место изоморфизмы

$$D_u\colon \{Y;\ Z \# X^*\}_q \approx \{Y \# X;\ Z\}_{q-n},$$
$$D^u\colon \{Y;\ X \# Z\}_q \approx \{X^* \# Y;\ Z\}_{q-n},$$

такие, что $D_u\{\alpha\} = (\{1_Z\} \# u) \circ (\{\alpha\} \# \{1_X\})$, $\{\alpha\} \in \{Y;\ Z \# X^*\}_q$, и $D^u\{\beta\} = (u \# \{1_Z\}) \circ (\{1_{X^*}\} \# \{\beta\})$, $\{\beta\} \in \{Y;\ X \# Z\}_q$. (*Указание.* Если Y и Z — сферы, то это верно согласно определению n-двойственности. Для произвольных Y и Z используйте индукцию по числу клеток и лемму о пяти гомоморфизмах.)

Пусть заданы n-двойственности $u \in \{X^* \# X;\ S^0\}_{-n}$ и $v \in \{Y^* \# Y;\ S^0\}_{-n}$. Определим изоморфизм

$$D(u,\ v)\colon \{X;\ Y\}_q \approx \{Y^*;\ X^*\}_q$$

таким образом, чтобы следующая диаграмма была коммутативной:

$$\begin{tikzcd}
\{X;\ Y\}_q \arrow[rr, "D(u,\ v)"] \arrow[dr, "D^v"', "\approx"] & & \{Y^*;\ X^*\}_q \arrow[dl, "D_u", "\approx"'] \\
& \{Y^* \# X;\ S^0\}_{q-n} &
\end{tikzcd}$$

4. Докажите, что $D(v',\ u') = (D(u,\ v))^{-1}\colon \{Y^*;\ X^*\}_q \approx \{X;\ Y\}_q$.

5. Пусть заданы n-двойственности $u \in \{X^* \# X;\ S^0\}_{-n}$, $v \in \{Y^* \# Y;\ S^0\}_{-n}$, $w \in \{Z^* \# Z;\ S^0\}_{-n}$ и элементы $\{\alpha\} \in \{X;\ Y\}_p$ и $\{\beta\} \in \{Y;\ Z\}_q$. Докажите, что в группе $\{Z^*;\ X^*\}_{p+q}$ имеет место равенство

$$D(u,\ w)(\{\beta\} \circ \{\alpha\}) = (D(u,\ v)\{\alpha\}) \circ (D(v,\ w)\{\beta\}).$$

---

[1]) См. Spanier E., Function spaces and duality, *Ann. Math.*, **70** (1959), 338—378, где рассмотрен другой подход к излагаемому здесь материалу. Здесь мы следуем предложению П. Фрейда; подобным образом рассматривал эти вопросы и Д. Хьюзмоллер.

Пусть отображения $f\colon X^* \# X \to S^n$ и $g\colon Y^* \# Y \to S^n$ таковы, что $\{f\}$ и $\{g\}$ являются n-двойственностями, и пусть отображения $\alpha\colon X \to Y$ и $\beta\colon Y^* \to X^*$ таковы, что

$$f \circ (\beta \# 1_X) \simeq g \circ (1_{Y^*} \# \alpha)\colon Y^* \# X \to S^n$$

(откуда также следует, что $D(\{f\}, \{g\})\{\alpha\} = \{\beta\}$). Пусть C_α и C_β — конусы отображений α и β соответственно. Рассмотрим коточные последовательности

$$X \xrightarrow{\alpha} Y \xrightarrow{i} C_\alpha \xrightarrow{k} SX \xrightarrow{S\alpha} SY,$$

$$Y^* \xrightarrow{\beta} X^* \xrightarrow{i'} C_\beta \xrightarrow{k'} SY^* \xrightarrow{S\beta} SX^*.$$

6. Докажите, что существует отображение $h\colon C_\beta \# C_\alpha \to S^{n+1}$, делающее гомотопически коммутативными следующие диаграммы:

$$\begin{tikzcd}
X^* \# C_\alpha \arrow[r, "1 \# k"] \arrow[d, "i' \# 1"'] & X^* \# SX \arrow[r, leftrightarrow] & S(X^* \# X) \arrow[d, "Sf"] \\
C_\beta \# C_\alpha \arrow[rr, "h"] & & S^{n+1}
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
C_\beta \# Y \arrow[rr, "1 \# i"] \arrow[d, "k' \# 1"'] & & C_\beta \# C_\alpha \arrow[d, "h"] \\
SY^* \# Y \arrow[r, leftrightarrow] & S(Y^* \# Y) \arrow[r, "Sg"] & S^{n+1}
\end{tikzcd}$$

Выведите отсюда, что элемент $\{h\} \in \{C_\beta \# C_\alpha;\ S^0\}_{-n-1}$ является $(n+1)$-двойственностью.

7. Для всякого комплекса X найдется такое целое n и такое пространство X^*, что существует n-двойственность $u \in \{X^* \# X;\ S^0\}_{-n}$. (*Указание.* Докажите это индукцией по числу клеток комплекса X, используя упражнения 1 и 6 из этой группы.)

Глава 9

СПЕКТРАЛЬНЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ И ГОМОТОПИЧЕСКИЕ ГРУППЫ СФЕР

Техника теории препятствий, развитая в предыдущей главе, фокусирует наше внимание на задаче вычисления гомотопических групп. В этой главе мы получим некоторые результаты о гомотопических группах сфер. Мы пользуемся методом, принадлежащим Серру[1]). Этот метод опирается на технику спектральных последовательностей. Это алгебраическое понятие было введено для изучения гомологических и когомологических свойств произвольных расслоений, но оно имеет и другие важные применения в алгебраической топологии, причем их число непрерывно растет. Некоторое представление о силе спектральных последовательностей можно получить из результатов, приводимых в этой главе.

В § 9.1 дается определение спектральной последовательности, а в § 9.2 строится гомологическая спектральная последовательность расслоения. В § 9.3 спектральные последовательности используются для получения обобщений точных гомологических последовательностей Гизина и Вана. Там же помещено доказательство теоремы о гомотопическом вырезании, которая используется вместе с инвариантом Хопфа при более подробном изучении отображения надстройки для гомотопических групп сфер.

Когомологические спектральные последовательности рассматриваются в § 9.4, где также строится когомологическая спектральная последовательность расслоения. В § 9.5 мультипликативные свойства спектральных последовательностей применяются для получения более сильных результатов по сравнению с теми, которые получаются с помощью гомологических спектральных последовательностей. В § 9.6 вводятся классы Серра абелевых групп, а также получаются методом спектральных последовательностей некоторые технические результаты, необходимые для установления изоморфизмов групп относительно класса Серра.

---

[1]) См. две основные статьи Серра: Serre J.-P., Homologie singulière des espaces fibrés, *Ann. Math.*, **54** (1951), 425—505; Groupes d'homotopie et classes de groups abéliens, *Ann. Math.*, **58** (1953), 258—294. [Перевод в сб. «Расслоенные пространства и их приложения», М., 1953, стр. 9—114 и 124—162.—*Прим перев.*]

В § 9.7 техника, основанная на классах Серра, применяется к доказательству того, что все гомотопические группы сфер конечно порождены и, за исключением некоторых (размерности последних точно указаны), конечны. Там же помещены некоторые результаты о p-примарных компонентах гомотопических групп сфер. Дальнейшую информацию о гомотопических группах сфер можно найти в упражнениях в конце главы.

§ 1. Спектральные последовательности

Всякому подкомплексу цепного комплекса можно поставить в соответствие точную последовательность модулей гомологий. Поэтому заданной возрастающей последовательности подкомплексов некоторого цепного комплекса можно поставить в соответствие последовательность точных последовательностей модулей гомологий. Эта последовательность точных последовательностей образует новый алгебраический объект, известный под названием спектральной последовательности. Она дает нам информацию о гомологиях первоначального цепного комплекса в терминах гомологий факторкомплексов, построенных из подкомплексов, образующих рассматриваемую последовательность. Спектральная последовательность состоит из последовательности цепных комплексов, каждый из которых является модулем гомологий предыдущего. Можно определить соответствующий предельный модуль, и спектральную последовательность можно рассматривать как последовательность аппроксимаций этого предельного модуля. В этом параграфе мы определяем нужные нам алгебраические понятия. В следующем параграфе мы применим эти понятия к изучению гомологий расслоения.

Мы рассматриваем модули над фиксированной областью главных идеалов R. *Биградуированным модулем* E (*над кольцом* R) называется семейство R-модулей $E_{s,t}$, определенных для каждой пары целых чисел s и t. *Дифференциалом* $d\colon E \to E$ *бистепени* $(-r, r-1)$ называется семейство гомоморфизмов $d\colon E_{s,t} \to E_{s-r,t+r-1}$, определенных для всех s и t и таких, что $d^2 = 0$. *Модулем гомологий* $H(E)$ называется биградуированный модуль, состоящий из модулей

$$H_{s,t}(E) = [\ker(d\colon E_{s,t} \to E_{s-r,t+r-1})]/d(E_{s+r,t-r+1}).$$

Заметим, что если $E_q = \bigoplus_{s+t=q} E_{s,t}$, то дифференциал d определяет гомоморфизм $\partial\colon E_q \to E_{q-1}$, превращающий систему $\{E_q, \partial\}$ в цепной комплекс. Далее, q-й модуль гомологий этого цепного комплекса совпадает с модулем $\bigoplus_{s+t=q} H_{s,t}(E)$.

Спектральной последовательностью E *типа* E^k называется последовательность цепных комплексов $\{E^r, d^r\}$ $(r \geqslant k)$, такая, что

(a) E^r — биградуированный модуль, а d^r — его дифференциал бистепени $(-r, r-1)$;

(b) если $r \geqslant k$, то имеет место изоморфизм $H(E^r) \approx E^{r+1}$.

Заметим, что спектральная последовательность начинается с члена E^k и роль числа k заключается единственно в том, чтобы отметить, с какого номера начинается спектральная последовательность. В наших приложениях мы обычно будем иметь дело со случаями $k=1$ или 2. Ясно, что спектральная последовательность типа E^k определяет спектральную последовательность типа $E^{k'}$ для каждого $k' \geqslant k$.

Гомоморфизмом $\varphi\colon E \to E'$ спектральных последовательностей типа E^k называется совокупность гомоморфизмов $\varphi^r\colon E^r_{s,t} \to E'^r_{s,t}$ для $r \geqslant k$ и всех s и t, коммутирующих с дифференциалами и таких, что гомоморфизмы $\varphi^r_*\colon H(E^r) \to H(E'^r)$ соответствуют гомоморфизмам $\varphi^{r+1}\colon E^{r+1} \to E'^{r+1}$ при изоморфизмах $H(E^r) \approx E^{r+1}$ и $H(E'^r) \approx E'^{r+1}$. Композиция гомоморфизмов является гомоморфизмом, и, следовательно, можно определить категорию спектральных последовательностей типа E^k (для фиксированного k) и их гомоморфизмов.

Для определения предельного члена спектральной последовательности отождествим E^{r+1} с $H(E^r)$, $r \geqslant k$, с помощью изоморфизма, указанного в определении спектральной последовательности. Пусть биградуированный модуль Z^k составлен из модулей $Z^k_{s,t} = \ker(d^k\colon E^k_{s,t} \to E^k_{s-k,\ t+k-1})$, а биградуированный модуль B^k — из $B^k_{s,t} = d^k(E^k_{s+k,\ t-k+1})$. Тогда $B^k \subset Z^k$ и $E^{k+1} = Z^k/B^k$. Пусть, далее, биградуированный модуль $Z(E^{k+1})$ составлен из модулей $Z(E^{k+1})_{s,t} = \ker\left(d^{k+1}\colon E^{k+1}_{s,t} \to E^{k+1}_{s-k-1,\ t+k}\right)$, а биградуированный модуль $B(E^{k+1})$ — из $B(E^{k+1})_{s,t} = d^{k+1}\left(E^{k+1}_{s+k+1,\ t-k}\right)$. Из теоремы Нётер об изоморфизме следует существование таких подмодулей Z^{k+1} и B^{k+1} модуля Z^k, содержащих B^k, что $Z(E^{k+1})_{s,t} = Z^{k+1}_{s,t}/B^k_{s,t}$ и $B(E^{k+1})_{s,t} = B^{k+1}_{s,t}/B^k_{s,t}$ для всех s и t. Отсюда следует, что $B^{k+1} \subset Z^{k+1}$, и, стало быть,

$$B^k \subset B^{k+1} \subset Z^{k+1} \subset Z^k.$$

Продолжая по индукции, построим такие подмодули $(r \geqslant k)$

$$B^k \subset B^{k+1} \subset \ldots \subset B^r \subset \ldots \subset Z^r \subset \ldots \subset Z^{k+1} \subset Z^k,$$

что $E^{r+1} = Z^r/B^r$. Пусть $Z^\infty = \bigcap\limits_r Z^r$, $B^\infty = \bigcup\limits_r B^r$ и $E^\infty = Z^\infty/B^\infty$. Биградуированный модуль E^∞ называется *пределом* спектральной последовательности E; члены E^r служат последовательными аппроксимациями модуля E^∞.

Говорят, что спектральная последовательность E *сходится*, если для всяких s и t существует целое $r(s, t) \geqslant k$, такое, что все дифференциалы d^r: $E^r_{s,t} \to E^r_{s-r,\, t+r-1}$ тривиальны при $r \geqslant r(s, t)$. Тогда модуль $E^{r+1}_{s,t}$ изоморфен фактормодулю модуля $E^r_{s,t}$, а модуль $E^\infty_{s,t}$ изоморфен пределу прямого спектра последовательности

$$E^{r(s,\, t)}_{s,\, t} \to E^{r(s,\, t)+1}_{s,\, t} \to \ldots .$$

Часто случается, что спектральная последовательность сходится в строгом смысле, т. е. для произвольных s и t можно найти такое $r(s, t)$, что $E^r_{s,t} \approx E^\infty_{s,t}$, если $r \geqslant r(s, t)$. Например, если спектральная последовательность E обладает тем свойством, что для некоторого r существуют целые числа N и N', такие, что $E^r_{s,t} = 0$ при $s < N$ или $t < N'$, то $E^{r'}_{s,t} = 0$ при $r' \geqslant r$. Если при этих предположениях для заданных s и t число r' выбрать так, что $r' > \sup(s - N,\, t - N' + 1)$ и $r' \geqslant r$, то в последовательности

$$E^{r'}_{s+r',\, t-r'+1} \xrightarrow{d^{r'}} E^{r'}_{s,\, t} \xrightarrow{d^{r'}} E^{r'}_{s-r',\, t+r'-1}$$

первый модуль равен нулю, поскольку $t - r' + 1 < N'$, а последний равен нулю, поскольку $s - r' < N$. Следовательно, если число r' достаточно велико, то

$$E^{r'}_{s,\, t} \approx E^{r'+1}_{s,\, t} \approx \ldots \approx E^\infty_{s,\, t},$$

и спектральная последовательность E сходится в строгом смысле.

Важным примером таких спектральных последовательностей является спектральная последовательность первой четверти, т. е. последовательность, обладающая тем свойством, что для некоторого r мы имеем $E^r_{s,t} = 0$, если $s < 0$ или $t < 0$. Такая спектральная последовательность сходится в строгом смысле, и для всякого q имеется лишь конечное число нетривиальных модулей $E^\infty_{s,t}$, для которых $s + t = q$. Спектральную последовательность первой четверти удобно изображать в первой четверти плоскости, «привязывая» модуль $E^r_{s,t}$ к точке решетки с координатами (s, t) и изображая дифференциалы d^r наклонными стрелками (рис. 15). Модуль $E^{r+1}_{s,t}$ является фактормодулем ядра стрелки, начинающейся в точке (s, t), относительно образа стрелки, кончающейся в этой же точке.

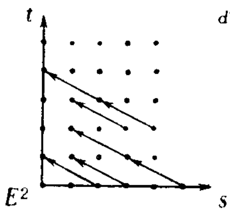


Рис. 15.

Гомоморфизм φ: $E \to E'$ спектральных последовательностей типа E^k индуцирует гомоморфизм φ^∞: $E^\infty \to E'^\infty$ их предельных модулей. Следовательно, можно определить ковариантный функтор из категории спектральных последовательностей типа E^k в категорию биградуированных модулей, сопоставляющий всякой спектральной последовательности ее предел. Следующий полезный результат вытекает непосредственно из того, что цепное преобразование, являющееся изоморфизмом, индуцирует изоморфизм соответствующих модулей гомологий.

1. Теорема. *Пусть φ: $E \to E'$ — гомоморфизм спектральных последовательностей типа E^k, являющийся изоморфизмом для некоторого $r \geqslant k$. Тогда гомоморфизм φ является изоморфизмом для всех $r' \geqslant r$. Более того, если спектральные последовательности E и E' сходятся, то φ^∞ — изоморфизм их предельных модулей.* ■

Возрастающей фильтрацией F R-модуля A называется последовательность его подмодулей F_sA, $s \in \mathbf{Z}$, такая, что $F_sA \subset F_{s+1}A$. Если A — градуированный модуль (т. е. если $A = \{A_t\}$), то требуется, чтобы фильтрация F была согласована с градуировкой (т. е. чтобы градуировка модуля F_sA состояла из модулей F_sA_t). Если задана фильтрация F модуля A, то *градуированный модуль* $G(A)$, *присоединенный к* A *относительно фильтрации* F, определяется равенством $G(A)_s = F_sA/F_{s-1}A$. Если модуль A градуирован, то модуль $G(A)$ биградуирован: $G(A)_{s,\,t} = F_sA_{s+t}/F_{s-1}A_{s+t}$. В этом случае число s называется *фильтрующей степенью*, t — *дополнительной степенью* и, наконец, $s+t$ — *полной степенью* элемента, лежащего в $G(A)_{s,\,t}$. Последовательность

$$\ldots \subset F_{s-1}A \subset F_sA \subset F_{s+1}A \subset \ldots$$

является бесконечным композиционным рядом модуля A, и присоединенный модуль состоит из факторов этого композиционного ряда.

Фильтрация F модуля A называется *сходящейся*, если $\bigcap_s F_sA = 0$ и $\bigcup_s F_sA = A$. Для сходящейся фильтрации присоединенный модуль $G(A)$ более тесно связан с A, чем в случае произвольной фильтрации. Однако даже если фильтрация конечна в том смысле, что $F_sA = 0$ для некоторого s и $F_{s'}A = A$ для некоторого s', то, вообще говоря, не верно, что модуль $G(A)$ изоморфен A. В последнем случае присоединенный модуль $G(A)$ определяет модуль A с точностью до конечного числа расширений.

Фильтрацией F цепного комплекса C называется фильтрация, согласованная с градуировкой и дифференциалом комплекса C (т. е. F_sC — цепной подкомплекс комплекса C, состоящий из модулей F_sC_t). Фильтрация F комплекса C индуцирует фильтрацию F модуля $H_*(C)$, определяемую следующим образом:

$$F_sH_*(C) = \operatorname{im}[H_*(F_sC) \to H_*(C)].$$

Поскольку функтор гомологий коммутирует с пределами прямых спектров, в случае сходящейся фильтрации F комплекса C имеем $\bigcup_s F_sH_*(C) = H_*(C)$; однако в общем случае не верно, что $\bigcap_s F_sH_*(C) = 0$. Таким образом, для получения сходящейся фильтрации F модуля $H_*(C)$ следует наложить более сильные ограничения на первоначальную фильтрацию комплекса C.

Фильтрация F градуированного модуля A называется *ограниченной снизу*, если для всякого t существует такое число $s(t)$, что $F_{s(t)}A_t = 0$. Ясно, что если F — ограниченная снизу фильтрация цепного комплекса C, то индуцированная фильтрация комплекса $H_*(C)$ также ограничена снизу. Таким образом, если F — сходящаяся и ограниченная снизу фильтрация комплекса C, то она индуцирует такого же рода фильтрацию модуля $H_*(C)$.

Следующая теорема сопоставляет всякой фильтрации цепного комплекса некоторую спектральную последовательность.

2. Теорема. *Пусть F — ограниченная снизу сходящаяся фильтрация цепного комплекса C. Тогда существует сходящаяся спектральная последовательность типа E^1, для которой*

$$E^1_{s,t} \approx H_{s+t}(F_sC/F_{s-1}C)$$

(*оператор d^1 соответствует граничному оператору триады $(F_sC, F_{s-1}C, F_{s-2}C)$*), *и предел E^∞ изоморфен биградуированному модулю $GH_*(C)$* (*присоединенному относительно фильтрации $F_sH_*(C) = \operatorname{im}(H_*(F_sC) \to H_*(C))$*).

Доказательство. Для произвольного числа r пусть

$$Z^r_s = \{c \in F_sC \mid \partial c \in F_{s-r}C\},$$
$$Z^\infty_s = \{c \in F_sC \mid \partial c = 0\}.$$

Эти модули можно считать градуированными, полагая

$$Z^r_{s,t} = \{c \in F_sC_{s+t} \mid \partial c \in F_{s-r}C\} \text{ и } Z^\infty_{s,t} = \{c \in F_sC_{s+t} \mid \partial c = 0\}.$$

Получаем последовательность градуированных модулей

$$\ldots \subset \partial Z^{-1}_{s-1} \subset \partial Z^0_s \subset \partial Z^1_{s+1} \subset \ldots \subset \partial C \cap F_sC \subset$$
$$\subset Z^\infty_s \subset \ldots \subset Z^1_s \subset Z^0_s = F_sC.$$

Пусть, далее,

$$E^r_s = Z^r_s/(Z^{r-1}_{s-1} + \partial Z^{r-1}_{s+r-1}),$$
$$E^\infty_s = Z^\infty_s/(Z^\infty_{s-1} + \partial C \cap F_sC),$$

Оператор ∂ отображает модуль Z_s^r в Z_{s-r}^r, а модуль $Z_{s-1}^{r-1}+$ $+\partial Z_{s+r-1}^{r-1}$ в ∂Z_{s-1}^{r-1}. Следовательно, он индуцирует гомоморфизм

$$d^r\colon E_s^r \to E_{s-r}^r.$$

Тогда E^r — биградуированный модуль, а d^r — его дифференциал бистепени $(-r, r-1)$. Если $r<0$, то $d^r=0$ и $E_s^r = F_sC/F_{s-1}C$. Следовательно,

$$E_{s,t}^0 = F_sC_{s+t}/F_{s-1}C_{s+t} = G(C)_{s,t},$$

и оператор d^0: $F_sC_{s+t}/F_{s-1}C_{s+t} \to F_sC_{s+t-1}/F_{s-1}C_{s+t-1}$ является граничным оператором факторкомплекса $F_sC/F_{s-1}C$. Далее,

$$E_{s,t}^1 = Z_{s,t}^1/\left(Z_{s-1,t+1}^0 + \partial Z_{s,t+1}^0\right),$$

где $Z_{s,t}^1 = \{c \in F_sC_{s+t} \mid \partial c \in F_{s-1}C_{s+t-1}\}$. Следовательно, $Z_{s,t}^1/Z_{s-1,t+1}^0$ есть модуль $(s+t)$-мерных циклов модуля $F_sC/F_{s-1}C$, а $\left(Z_{s-1,t+1}^0 + \partial Z_{s,t+1}^0\right)/Z_{s-1,t+1}^0$ — модуль $(s+t)$-мерных границ модуля $F_sC/F_{s-1}C$. Из теоремы Нётер об изоморфизме следует, что $E_{s,t}^1 \approx$ $\approx H_{s+t}(F_sC/F_{s-1}C)$. То, что при этом изоморфизме оператор d^1 соответствует граничному оператору триады $(F_sC, F_{s-1}C, F_{s-2}C)$, доказывается прямой проверкой определений.

Мы докажем, что $E=\{E^r\}_{r\geqslant 1}$ — спектральная последовательность, вычисляя гомологии члена E^r относительно дифференциала d^r. Имеем

$$\begin{aligned}\{c \in Z_s^r \mid \partial c \in Z_{s-r-1}^{r-1} + \partial Z_{s-1}^{r-1}\} &= \\ &= \{c \in Z_s^r \mid \partial c \in F_{s-r-1}C\} + \{c \in Z_s^r \mid \partial c \in \partial Z_{s-1}^{r-1}\} = \\ &= Z_s^{r+1} + \left(Z_{s-1}^{r-1} + Z_s^{\infty}\right) = Z_s^{r+1} + Z_{s-1}^{r-1}.\end{aligned}$$

Следовательно, $\ker\left(d^r\colon E_s^r \to E_{s-r}^r\right) = \left(Z_s^{r+1} + Z_{s-1}^{r-1}\right)/\left(Z_{s-1}^{r-1} + \partial Z_{s+r-1}^{r-1}\right)$. Согласно определению,

$$\operatorname{im}\left(d^r\colon E_{s+r}^r \to E_s^r\right) = \left(\partial Z_{s+r}^r + Z_{s-1}^{r-1}\right)/\left(Z_{s-1}^{r-1} + \partial Z_{s+r-1}^{r-1}\right).$$

Следовательно, в силу теоремы Нётер об изоморфизме имеем

$$\begin{aligned}\ker d^r/\operatorname{im} d^r &\approx \left(Z_s^{r+1} + Z_{s-1}^{r-1}\right)/\left(\partial Z_{s+r}^r + Z_{s-1}^{r-1}\right) \approx \\ &\approx Z_s^{r+1}/\left[Z_s^{r+1} \cap \left(\partial Z_{s+r}^r + Z_{s-1}^{r-1}\right)\right] = Z_s^{r+1}/\left(\partial Z_{s+r}^r + Z_{s-1}^r\right) = E_s^{r+1}.\end{aligned}$$

Отсюда вытекает изоморфизм $H_*(E^r) \approx E^{r+1}$, и, значит, E — спектральная последовательность.

Вычислим ее предел. Из определения и теоремы Нётер об изоморфизме следует, что

$$E_s^r = Z_s^r/\left(Z_{s-1}^{r-1} + \partial Z_{s+r-1}^{r-1}\right) \approx \left(Z_s^r + F_{s-1}C\right)/\left(F_{s-1}C + \partial Z_{s+r-1}^{r-1}\right).$$

В последнем выражении при возрастании r «числитель» убывает, а «знаменатель» возрастает. Согласно определению, предел равен

$$\bigcap_r (Z_s^r + F_{s-1}C)/\bigcup_r (F_{s-1}C + \partial Z_{s+r-1}^{r-1}) = \\ = (\bigcap_r Z_s^r + F_{s-1}C)/(F_{s-1}C + \bigcup_r \partial Z_{s+r-1}^{r-1}).$$

Поскольку $\bigcup_s F_sC = C$, имеем $\bigcup_r \partial Z_{s+r-1}^{r-1} = \partial C \cap F_sC$. Для заданного числа t, поскольку $F_sC_t = 0$ для достаточно малых s, имеем $\bigcap_r Z_{s,t}^r = Z_{s,t}^\infty$. Значит, предельный член равен

$$(Z_s^\infty + F_{s-1}C)/(F_{s-1}C + \partial C \cap F_sC) = Z_s^\infty/(Z_{s-1}^\infty + \partial C \cap F_sC) = E_s^\infty.$$

Покажем, что построенная спектральная последовательность сходится. Поскольку фильтрация ограничена снизу, для фиксированного числа $s+t$ справедливо равенство $E_{s,t}^r = 0$ при достаточно малых s. Следовательно, для фиксированных s и t существует такое r, что при $r' \geqslant r$ модуль $E_{s,t}^{r'+1}$ является фактормодулем модуля $E_{s,t}^{r'}$, и, значит, наша спектральная последовательность сходится.

Для завершения доказательства покажем, что предельный член E^∞ можно интерпретировать как присоединенный модуль $GH_*(C)$. По определению, $GH_*(C)_{s,t} = F_sH_{s+t}(C)/F_{s-1}H_{s+t}(C)$, где

$$F_sH_{s+t}(C) = \operatorname{im}[H_{s+t}(F_sC) \to H_{s+t}(C)].$$

Отсюда следует, что $F_sH_*(C) = Z_s^\infty/\partial C \cap F_sC$ и

$$F_sH_*(C)/F_{s-1}H_*(C) = (Z_s^\infty/\partial C \cap F_sC)/(Z_{s-1}^\infty/\partial C \cap F_{s-1}C) \approx \\ \approx Z_s^\infty/(Z_{s-1}^\infty + \partial C \cap F_sC) = E_s^\infty. \blacksquare$$

Заметим, что построенный в теореме 2 член E^∞ даже при самых благоприятных обстоятельствах определяет модуль $H_*(C)$ не полностью, а лишь с точностью до расширений. Заметим также, что мы на самом деле определили спектральную последовательность типа E^0. Теорема была сформулирована в терминах соответствующей спектральной последовательности типа E^1, поскольку член E^1 несет больше информации, нежели E^0.

Следует отметить, что спектральная последовательность теоремы 2 функториальна на категории цепных комплексов, обладающих сходящейся ограниченной снизу фильтрацией. Отсюда в сочетании с теоремой 1 получаем следующий результат:

3. Теорема. *Пусть* $\tau\colon C \to C'$ — *сохраняющее фильтрацию цепное отображение цепных комплексов, обладающих сходящейся ограниченной снизу фильтрацией. Если для некоторого* $r \geqslant 1$ *инду-*

цированное отображение τ^r: $E^r \to E'^r$ *является изоморфизмом, то отображение* τ *индуцирует изоморфизм*

$$\tau_*: H_*(C) \approx H_*(C').$$

Доказательство. Согласно теореме 1, отображение τ^∞ является изоморфизмом. Имеет место коммутативная диаграмма с точными строками

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 \to & F_{s-1}H_n(C) & \to & F_sH_n(C) & \to & E^\infty_{s,\,n-s} & \to 0 \\
& \downarrow{\scriptstyle \tau_*} & & \downarrow{\scriptstyle \tau_*} & & \downarrow{\scriptstyle \tau^\infty} & \\
0 \to & F_{s-1}H_n(C') & \to & F_sH_n(C') & \to & E'^\infty_{s,\,n-s} & \to 0
\end{array}$$

Для фиксированного n оба модуля $F_{s-1}H_n(C)$ и $F_{s-1}H_n(C')$ равны нулю при достаточно малом s (поскольку обе фильтрации ограничены снизу). Индукция по s, использующая лемму о пяти гомоморфизмах и тот факт, что τ^∞ — изоморфизм, показывает, что τ_*: $F_sH_n(C) \approx F_sH_n(C')$ — изоморфизм для всех s. Поскольку обе фильтрации сходятся, $H_n(C) = \bigcup_s F_sH_n(C)$ и $H_n(C') = \bigcup_s F_sH_n(C')$ и, значит, τ_*: $H_n(C) \approx H_n(C')$. ∎

Приведем примеры спектральных последовательностей.

4. Пусть C' и C'' — свободные неотрицательные цепные комплексы с граничными операторами ∂' и ∂'' соответственно, и пусть $C = C' \otimes C''$ — их тензорное произведение с граничным оператором ∂. Ограниченную снизу сходящуюся фильтрацию комплекса C можно определить, полагая $F_sC = \bigoplus_{q \leqslant s} C'_q \otimes C''$. У соответствующей спектральной последовательности

$$E^1_{s,\,t} \approx C_s \otimes H_t(C'')$$

и $E^r_{s,\,t} \approx H_s(C' \otimes H_t(C''))$ при $r \geqslant 2$. Мы придем к аналогичному результату, если для определения фильтрации воспользуемся вторым сомножителем.

5. *Возрастающей фильтрацией* пары топологических пространств (X, A) называется последовательность подпространств X_s, содержащих A, такая, что $X_s \subset X_{s+1}$. Такая фильтрация пары (X, A) индуцирует фильтрацию F цепного комплекса $\Delta(X, A)$, определяемую равенством $F_s(\Delta(X, A)) = \Delta(X_s, A)$. Если $X_s = A$ для некоторого s, то индуцированная фильтрация ограничена снизу. Если $X = \bigcup X_s$ и всякое компактное подмножество пространства X содержится в некотором подпространстве X_s, то $\bigcup_s F_s(\Delta(X, A)) = \Delta(X, A)$. Следовательно, если фильтрация $\{X_s\}$ обладает двумя указанными выше свойствами, то индуцированная фильтрация комплекса $\Delta(X, A)$ сходится и ограничена снизу. Значит, можно определить сходящуюся спектральную последовательность типа E^1, для которой $E^1_{s,t} \approx H_{s+t}(X_s, X_{s-1})$ и d^1 соответствует граничному оператору триады (X_s, X_{s-1}, X_{s-2}). Предельный член этой спектральной последовательности является биградуированным модулем, присоединенным относительно соответствующей фильтрации к модулю $H_*(X, A)$.

В частности, если (X, A) — относительный CW-комплекс, $X_s=(X, A)^s$ есть s-мерный остов при $s \geqslant 0$ и $X_s = A$ при $s<0$, то $E^1_{s,t} \neq 0$ тогда и только тогда, когда $t=0$, $s \geqslant 0$, и $E^1_{s,0} \approx H_s(X_s, X_{s-1})$. Следовательно, если $r \geqslant 2$, то модуль $E^r_{s,0}$ является модулем гомологий цепного комплекса $C=\{C_s, \partial\}$, где $C_s = H_s(X_s, X_{s-1})$, а $\partial\colon C_s \to C_{s-1}$ — граничный оператор триады (X_s, X_{s-1}, X_{s-2}).

Наш следующий пример — другое описание спектральной последовательности примера 5, конструкция которой не требует использования цепных модулей. Эту конструкцию можно применить для построения спектральной последовательности, соответствующей произвольной последовательности функторов, обладающих такими же свойствами точности, что и гомологические функторы.

6. Пусть $\{X_s\}$ — некоторая возрастающая фильтрация пары (X, A). Для каждого s имеет место точная гомологическая последовательность пары (X_s, X_{s-1}) (с коэффициентами в некотором модуле)

$$\ldots \to H_q(X_{s-1}) \xrightarrow{i_*} H_q(X_s) \xrightarrow{j_*} H_q(X_s, X_{s-1}) \xrightarrow{\partial} H_{q-1}(X_{s-1}) \to \ldots .$$

Следовательно, мы получили последовательность точных последовательностей. Соберем их в следующую коммутативную диаграмму:

$$\begin{tikzcd}
 & \vdots \arrow[d] & & \vdots \arrow[d] & \\
\ldots \arrow[r, "\partial"] & H_q(X_{s-1}) \arrow[r, "j_*"] \arrow[d, "i_*"'] & H_q(X_{s-1}, X_{s-2}) \arrow[r, "\partial"] & H_{q-1}(X_{s-2}) \arrow[r, "j_*"] \arrow[d, "i_*"] & \ldots \\
\ldots \arrow[r, "\partial"] & H_q(X_s) \arrow[r, "j_*"] \arrow[d, "i_*"'] & H_q(X_s, X_{s-1}) \arrow[r, "\partial"] & H_{q-1}(X_{s-1}) \arrow[r, "j_*"] \arrow[d, "i_*"] & \ldots \\
\ldots \arrow[r, "\partial"] & H_q(X_{s+1}) \arrow[r, "j_*"] \arrow[d] & H_q(X_{s+1}, X_s) \arrow[r, "\partial"] & H_{q-1}(X_s) \arrow[r, "j_*"] \arrow[d] & \ldots \\
 & \vdots & & \vdots &
\end{tikzcd}$$

в которой всякая последовательность, состоящая из вертикального отображения i_*, следующих за ним двух горизонтальных отображений j_* и ∂, затем снова отображений i_*, j_* и ∂ и т. д. (мы обозначили одну из таких последовательностей жирными стрелками на диаграмме), точна. С помощью этой диаграммы можно получить спектральную последовательность типа E^1, для которой $E^1_{s,\,t}=H_{s+t}(X_s,\ X_{s-1})$; если $r\geqslant 2$, то член $E^r_{s,\,t}$ определяется как фактормодуль $Z^r_{s,\,t}/B^r_{s,\,t}$, где

$$Z^r_{s,\,t}=\partial^{-1}\left(i_*^{r-1}H_{s+t-1}(X_{s-r})\right),$$
$$B^r_{s,\,t}=j_*\left(\ker\left[i_*^{r-1}\colon\ H_{s+t}(X_s)\to H_{s+t}(X_{s+r-1})\right]\right).$$

Эта спектральная последовательность сходится, если для фиксированного числа q мы имеем $H_q(X)\approx\varinjlim\{H_q(X_s)\}$ и $H_q(X_s,\ A)=0$ для достаточно малого s. В последнем случае предел представляет собой биградуированный модуль, присоединенный относительно фильтрации $F_sH(X,\ A)=\operatorname{im}(H(X_s,\ A)\to H(X,\ A))$ к модулю $H(X,\ A)$.

Нетрудно проверить, что спектральчая последовательность примера 6 есть не что иное, как спектральная последовательность примера 5. Тот же самый процесс можно применить для получения спектральной последовательности из любой диаграммы, обладающей свойствами точности, аналогичными свойствам диаграммы примера 6. Эти свойства можно формализовать, введя понятие *точной пары* [1]), но мы не будем приводить здесь его определение.

§ 2. Спектральная последовательность расслоения

Одним из наиболее плодотворных применений спектральных последовательностей является применение их к вычислению гомологий расслоений. При соответствующих предположениях относительно ориентируемости расслоения можно построить спектральную последовательность, сходящуюся к биградуированному модулю, присоединенному относительно некоторой фильтрации к модулю гомологий пространства расслоения, причем член E^2 этой последовательности изоморфен гомологиям базы с коэффициентами в гомологиях слоя. Настоящий параграф посвящен построению этой спектральной последовательности. Такое построение основано на изучении гомологий пространства расслоения, причем предполагается, что базой расслоения является относительный CW-комплекс. При этом используется фильтрация пространства расслоения, образованная прообразами остовов базы. Используя CW-аппроксимацию, мы строим далее спектральную последовательность типа E^2 для расслоения над произвольным линейно связным пространством. Некоторые применения этой спектральной последовательности мы приведем в следующем параграфе.

Пусть $p\colon E\to B$ — некоторое расслоение. Если $A\subset B$, то пусть $E_A=p^{-1}(A)\subset E$. Тогда проекция p отображает пару $(E,\ E_A)$

[1]) Massey W. S., Exact couples in algebraic topology, parts I and II, *Ann. Math.*, **56** (1952), 364–396; parts III, IV and V, *Ann. Math.*, **57** (1953), 248–286.

в (B, A). Предположим, что (B, A) — относительный CW-комплекс, и пусть $E_s = p^{-1}((B, A)^s)$ — часть E, лежащая над s-мерным остовом комплекса B, если $s \geqslant 0$, и $E_s = E_A$, если $s < 0$. Тогда $E_s \subset E_{s+1}$, и, значит, $\{E_s\}$ — возрастающая фильтрация пары (E, E_A). Далее, $E_{-1} = E_A$, $\bigcup_s E_s = E$, и всякое компактное подмножество пространства E содержится в одном из подпространств E_s. Используя метод примера 9.1.5, получаем следующий результат:

1. Теорема. *Пусть $p\colon E \to B$ — расслоение над относительным CW-комплексом (B, A). Для сингулярных гомологий с коэффициентами в произвольном модуле G существует сходящаяся спектральная последовательность типа E^1, для которой $E^1_{s,\,t} \approx \approx H_{s+t}(E_s, E_{s-1}; G)$, d^1 — граничный оператор триады (E_s, E_{s-1}, E_{s-2}), а E^∞ — биградуированный модуль, присоединенный к модулю $H_*(E, E_A; G)$ относительно фильтрации*

$$F_s H_*(E, E_A; G) = \operatorname{im}[H_*(E_s, E_A; G) \to H_*(E, E_A; G)]. \blacksquare$$

Чтобы этот результат можно было применять, необходимо вычислить модуль $H_n(E_s, E_{s-1}; G)$. Пусть $\{e_\lambda\}$ — совокупность s-мерных клеток, лежащих в $B - A$.

2. Лемма. *Вложения $i_\lambda\colon (p^{-1}(e_\lambda), p^{-1}(\dot e_\lambda)) \subset (E_s, E_{s-1})$ индуцируют разложение в прямую сумму*

$$\{i_{\lambda *}\}\colon \bigoplus_\lambda H_n(p^{-1}(e_\lambda), p^{-1}(\dot e_\lambda)) \approx H_n(E_s, E_{s-1})$$

и разложение в прямое произведение

$$\{i_\lambda^*\}\colon H^n(E_s, E_{s-1}) \approx \prod_\lambda H^n(p^{-1}(e_\lambda), p^{-1}(\dot e_\lambda)).$$

Доказательство. Для каждого λ пусть e'_λ — симплекс размерности s, вложенный в $e_\lambda - \dot e_\lambda$. Тогда вложения $((B, A)^s, (B, A)^{s-1}) \subset \subset ((B, A)^s, (B, A)^s - \bigcup_\lambda (e'_\lambda - \dot e'_\lambda))$ и $(e_\lambda, \dot e_\lambda) \subset (e_\lambda, e_\lambda - (e'_\lambda - \dot e'_\lambda))$ являются гомотопическими эквивалентностями. Следовательно, соответствующие вложения $(E_s, E_{s-1}) \subset (E_s, E_s - \bigcup_\lambda p^{-1}(e'_\lambda - \dot e'_\lambda))$ и $(p^{-1}e_\lambda, p^{-1}\dot e_\lambda) \subset (p^{-1}e_\lambda, p^{-1}(e_\lambda - (e'_\lambda - \dot e'_\lambda)))$ также являются гомотопическими эквивалентностями. Имеет место коммутативная диаграмма, индуцированная вложениями:

$$\begin{tikzcd}
\bigoplus_\lambda H_n(p^{-1}e_\lambda, p^{-1}\dot e_\lambda) \arrow[r, "\{i_{\lambda *}\}"] \arrow[d] & H_n(E_s, E_{s-1}) \arrow[d] \\
\bigoplus_\lambda H_n(p^{-1}e_\lambda, p^{-1}(e_\lambda - (e'_\lambda - \dot e'_\lambda))) \arrow[r] & H_n(E_s, E_s - \bigcup_\lambda p^{-1}(e'_\lambda - \dot e'_\lambda)) \\
\bigoplus_\lambda H_n(p^{-1}e'_\lambda, p^{-1}\dot e'_\lambda) \arrow[r] \arrow[u] & H_n(\bigcup_\lambda p^{-1}e'_\lambda, \bigcup_\lambda p^{-1}\dot e'_\lambda) \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

в которой все вертикальные отображения являются изоморфизмами (два верхних индуцированы гомотопическими эквивалентностями, а два нижних индуцированы соответствующими отображениями вырезания). Поскольку симплексы e'_μ и e'_λ не пересекаются, если $\mu \neq \lambda$, нижнее горизонтальное отображение представляет собой изоморфизм, так как оно индуцировано цепным изоморфизмом. Это доказывает первую часть леммы. Аналогичными рассуждениями можно доказать наше утверждение и для когомологий. ■

Прежде чем продолжить вычисление модуля $H_n(E_s, E_{s-1})$ и граничного оператора триады (E_s, E_{s-1}, E_{s-2}), введем подкомплекс сингулярного цепного комплекса относительного CW-комплекса, цепно эквивалентный самому этому сингулярному комплексу.

3. Теорема. *Пусть $\{X_s\}$ — возрастающая последовательность подпространств пространства X, и пусть $\bar{\Delta}(X)$ — подкомплекс комплекса $\Delta(X)$, порожденный сингулярными симплексами σ: $\Delta^q \to X$, для которых $\sigma(\Delta^q)^k \subset X_k$ при всех k. Если для каждого s пара (X, X_{s-1}) является $(s-1)$-связной, то вложение $\bar{\Delta}(X) \subset \Delta(X)$ есть цепная эквивалентность.*

Доказательство. Воспользуемся леммой 7.4.7. Всякому сингулярному симплексу σ: $\Delta^q \to X$ поставим в соответствие такое отображение $P(\sigma)$: $\Delta^q \times I \to X$, что выполняются предположения леммы 7.4.7 (где $C = \bar{\Delta}(X)$). Это можно сделать индукцией по q. Когда $q = 0$ и $\sigma(\Delta^0) \subset X_0$, определим $P(\sigma)$ как композицию $\Delta^0 \times I \to \Delta^0 \xrightarrow{\sigma} X$. Если $\sigma(\Delta^0) \notin X_0$, то существует путь ω: $I \to X$ от точки $\sigma(\Delta^0)$ до некоторой точки, лежащей в X_0 (поскольку пара (X, X_0) 0-связна). Отображение $P(\sigma)$: $\Delta^0 \times I \to X$ определим в этом случае формулой $P(\sigma)(v_0, t) = \omega(t)$.

Пусть теперь $q > 0$. Сделаем индуктивное предположение, что отображение $P(\sigma)$, удовлетворящее предположениям леммы 7.4.7, уже определено для всех сингулярных симплексов σ размерности $< q$. Пусть σ: $\Delta^q \to X$ — сингулярный q-мерный симплекс пространства X. Если $\sigma(\Delta^q)^k \subset X_k$ для всех k, то отображение $P(\sigma)$ определим как композицию $\Delta^q \times I \to \Delta^q \xrightarrow{\sigma} X$. Пусть $\sigma(\Delta^q)^k \not\subset X_k$ для некоторого k. Условия (a) и (c) леммы 7.4.7 определяют отображение $P(\sigma)$ на $\Delta^q \times 0 \cup \dot{\Delta}^q \times I$, а условие (b) обеспечивает, что полученное отображение переводит $(\dot{\Delta}^q)^k \times 1$ в X_k для всех k.

Легко видеть, что можно найти гомеоморфизм $\Delta^q \times I \approx E^q \times I$, переводящий $(\Delta^q \times 0 \cup \dot{\Delta}^q \times I,\ \dot{\Delta}^q \times 1)$ в $(E^q, S^{q-1}) \times 0$ и $\Delta^q \times 1$ в $S^{q-1} \times I \cup E^q \times 1$. Поскольку (X, X_q) есть q-связная пара, полученное отображение $(\Delta^q \times 0 \cup \dot{\Delta}^q \times I, \dot{\Delta}^q \times 1) \to (X, X_q)$ продолжается до такого отображения $P(\sigma)$: $\Delta^q \times I \to X$, что $P(\sigma)(\Delta^q \times 1) \subset X_q$. Тогда отображение $P(\sigma) \mid \Delta^q \times 1$: $\Delta^q \times 1 \to X$ таково, что $(\Delta^q)^k$ переводится в X_k для всех k, и, значит, отображения $P(\sigma)$ можно определить для всех симплексов σ так, чтобы выполнялись предположения леммы 7.4.7. ■

Заметим, что теорему 3 можно применить к фильтрации, определенной остовами относительного CW-комплекса (X, A). Следовательно, если $\bar{\Delta}(X) \subset \Delta(X)$ — соответствующий подкомплекс клеточного сингулярного комплекса, то вложение $\bar{\Delta}(X) \subset \Delta(X)$ является цепной эквивалентностью. Далее, если (X', A) — подкомплекс комплекса (X, A), то $\bar{\Delta}(X') = \Delta(X') \cap \bar{\Delta}(X)$. Используя теорему 4.6.10 и лемму о пяти гомоморфизмах, находим, что вложение $\bar{\Delta}(X, X') \subset \Delta(X, X')$ является цепной эквивалентностью. В частности, вложение

$$\bar{\Delta}\left((X, A)^s, (X, A)^{s-1}\right) \subset \Delta\left((X, A)^s, (X, A)^{s-1}\right)$$

является цепной эквивалентностью для любого s.

4. Следствие. *Пусть задан относительный CW-комплекс (X, A), и пусть $C(X, A) = \{C_s, \partial\}$ — такой цепной комплекс, что*

$$C_s = H_s\left(\bar{\Delta}\left((X, A)^s, (X, A)^{s-1}\right)\right),$$

а ∂: $C_s \to C_{s-1}$ — граничный оператор триады $\left((X, A)^s, (X, A)^{s-1}, (X, A)^{s-2}\right)$. Тогда $H_*(C(X, A)) \approx H_*(X, A)$.

Доказательство. Определим фильтрацию F комплекса $\bar{\Delta}(X, A)$, полагая $F_s\bar{\Delta}(X, A) = \bar{\Delta}((X, A)^s, A)$. Тогда соответствующая спектральная последовательность обладает тем свойством, что $E^1_{s,t} \approx H_{s+t}\left((X, A)^s, (X, A)^{s-1}\right)$, а оператор d^1 соответствует граничному оператору триады $\left((X, A)^s, (X, A)^{s-1}, (X, A)^{s-2}\right)$. Применяя лемму 2 к тривиальному расслоению $X \to X$, получаем изоморфизм

$$\bigoplus_\lambda H_q(e_\lambda, \dot{e}_\lambda) \approx H_q\left((X, A)^s, (X, A)^{s-1}\right),$$

где $\{e_\lambda\}$ — совокупность s-мерных клеток пары (X, A). Тогда $H_q\left((X, A)^s, (X, A)^{s-1}\right) = 0$, если $q \neq s$, и, значит, $E^1_{s,t} = 0$, если $t \neq 0$, и $E^1_{s,0} \approx C_s$. Отсюда вытекает, что $E^2_{s,t} = 0$, если $t \neq 0$, и $E^2_{s,0} \approx H_s(C(X, A))$. Следовательно, индукцией по r можно установить, что $E^r_{s,t} = 0$, если $t \neq 0$, и $E^r_{s,0} = E^2_{s,0}$, $r \geqslant 2$. Значит, $E^\infty_{s,t} = 0$, если $t \neq 0$, и $E^\infty_{s,0} \approx H_s(C(X, A))$. Поскольку E^∞ — биградуированный модуль, присоединенный относительно некоторой фильтрации к модулю $H_*(X, A)$, то $H_s(C(X, A)) \approx H_s(X, A)$. ■

Напомним, что, согласно теореме 2.8.12, существует контравариантный функтор из фундаментального группоида пространства B в категорию гомотопических типов, сопоставляющий точке $b \in B$ слой F_b над ней, а классу путей $[\omega]$ пространства B — гомотопический класс $h_{[\omega]} \in [F_{\omega(0)}; F_{\omega(1)}]$. Следовательно, для фиксированного кольца R можно определить контравариантный функтор из фундаментального группоида пространства B в категорию градуированных R-модулей, сопоставляющий точке $b \in B$ модуль $H_*(F_b; R)$, а классу $[\omega]$ — гомоморфизм $h_{[\omega]*}: H_*(F_{\omega(0)}; R) \to H_*(F_{\omega(1)}; R)$. Расслоение называется *ориентируемым над кольцом* R, если $h_{[\omega]*} = 1$ для любого замкнутого пути ω пространства B. Это понятие обобщает понятие ориентируемости расслоения на сферы. (Действительно, расслоение на сферы ξ тогда и только тогда ориентируемо как расслоение на сферы, когда $\dot{p}_\xi: \dot{E}_\xi \to B$ — ориентируемое расслоение.)

5. Теорема. (a) *Расслоение над односвязной базой ориентируемо над любым кольцом R.*

(b) *Расслоение, индуцированное ориентируемым расслоением над R, также ориентируемо над R.*

Доказательство. Первое утверждение является непосредственным следствием определения. Докажем утверждение (b). Пусть расслоение $p': E' \to B'$ индуцировано расслоением $p: E \to B$ и отображением $f: B' \to B$, и пусть $g': E' \to E$ — ассоциированное отображение. Для любого класса путей $[\omega']$ пространства B' пусть гомеоморфизмы $g'_0: F'_{\omega'(0)} \to F_{g\omega'(0)}$ и $g'_1: F'_{\omega'(1)} \to F_{g\omega'(0)}$ являются ограничениями отображения g'. Легко проверить, что $[g'_1] \circ h_{[\omega']} = h_{[g \circ \omega']} \circ [g'_0]$, откуда следует утверждение (b). ∎

Отображение $f: p^{-1}(b_0) \to p^{-1}(b_1)$ слоев расслоения $p: E \to B$ называется *допустимым*, если существует такой класс путей $[\omega]$ с началом b_0 и концом b_1, что $[f] = h_{[\omega]}$. Следующие предложения вытекают непосредственно из определения:

6. *Допустимое отображение является гомотопической эквивалентностью.* ∎

7. *Композиция допустимых отображений есть допустимое отображение.* ∎

8. *Гомотопически обратное к допустимому отображению есть допустимое отображение.* ∎

9. *Если пространство B линейно связно, то между любыми двумя слоями над B существует допустимое отображение.* ∎

10. *Если расслоение $p: E \to B$ ориентируемо над R, то всякие два допустимых отображения $p^{-1}(b_0) \to p^{-1}(b_1)$ индуцируют один и тот же изоморфизм модулей $H_*(p^{-1}(b_0); R)$ и $H_*(p^{-1}(b_1); R)$.* ∎

Пусть $b_0 \in B$ — отмеченная точка, и пусть $F = p^{-1}(b_0)$. Если задано отображение α: $X \to B$, то *допустимым поднятием отображения* α называется такое отображение $\bar{\alpha}$: $X \times F \to E$, что $p\bar{\alpha}(x, z) = \alpha(x)$, $x \in X$, $z \in F$, и для любой точки $x \in X$ отображение f_x: $F \to p^{-1}(\alpha(x))$, определяемое формулой $f_x(z) = \bar{\alpha}(x, z)$ $(z \in Z)$, является допустимым. Следующий результат дает нам полезный критерий допустимости поднятия.

11. Лемма. *Пусть p: $E \to B$ — некоторое расслоение, и пусть X — линейно связное пространство. Пусть заданы такие отображения α: $X \to B$ и $\bar{\alpha}$: $X \times F \to E$, что $p\bar{\alpha}(x, z) = \alpha(x)$. Отображение $\bar{\alpha}$ тогда и только тогда является допустимым поднятием отображения α, когда существует такая точка $x_0 \in X$, что отображение f_{x_0}: $F \to p^{-1}(\alpha(x_0))$ допустимо.*

Доказательство. Необходимость условия очевидна. Докажем его достаточность. Пусть $x_1 \in X$, и пусть ω: $I \to X$ — некоторый путь от x_0 до x_1. Так как отображение f_{x_0} допустимо, существует такой путь ω' в пространстве B между точками b_0 и $\alpha(x_0)$, что $[f_{x_0}] = h_{[\omega']}$. Теперь нетрудно проверить, что $[f_{x_1}] = h_{[\omega * (\alpha \circ \omega)]}$, и, значит, отображение f_{x_1} допустимо. ■

Мы хотим доказать существование допустимых поднятий в некоторых частных случаях, которые нам в дальнейшем понадобятся. Ниже приводится вариант следствия 7.2.7, верный для неполиэдральных пар (X, A).

12. Лемма. *Пусть p: $E \to B$ — некоторое расслоение, X — некоторое пространство, а A — его сильный деформационный ретракт. Пусть заданы отображения f: $A \to E$ и g: $X \to B$, такие, что $p \circ f = g \mid A$. Тогда существует такое отображение $\bar{g}$: $X \to E$, что $p \circ \bar{g} = g$ и отображение $\bar{g} \mid A$ послойно гомотопно отображению f.*

Доказательство. Пусть D: $X \times I \to X$ — гомотопия относительно A между некоторой ретракцией r: $X \to A$ и 1_X (такая гомотопия существует, поскольку A — сильный деформационный ретракт пространства X). Тогда отображения $g \circ D$: $X \times I \to B$ и $f \circ r$: $X \to E$ таковы, что $gD(x, 0) = gr(x) = pfr(x)$. В силу свойства накрывающей гомотопии существует такое отображение F: $X \times I \to E$, что $p \circ F = g \circ D$ и $F(x, 0) = fr(x)$. Пусть отображение $\bar{g}$: $X \to E$ определено формулой $\bar{g}(x) = F(x, 1)$. Тогда

$$p\bar{g}(x) = pF(x, 1) = gD(x, 1) = g(x)$$

и $F \mid A \times I$ — послойная гомотопия между отображениями f и $\bar{g} \mid A$. Следовательно, отображение $\bar{g}$ обладает нужными нам свойствами. ■

Пусть p: $E \to B$ — расслоение над линейно связной базой, и пусть (B, A) — относительный CW-комплекс. Пусть $b_0 \in B$ — отмеченная точка и $F = p^{-1}(b_0)$. Для всякого числа s вершина v_0 является сильным деформационным ретрактом симплекса Δ^s, и, значит, $v_0 \times F$ — сильный деформационный ретракт произведения $\Delta^s \times F$. Из леммы 12 следует, что для всякого сингулярного симплекса

$$\sigma\colon (\Delta^s, \dot\Delta^s) \to ((B, A)^s, (B, A)^{s-1}),$$

принадлежащего $\bar\Delta((B, A)^s, (B, A)^{s-1})$, существуют такие отображения $\bar\sigma$: $(\Delta^s, \dot\Delta^s) \times F \to (E_s, E_{s-1})$, что $p\bar\sigma(x, z) = \sigma(x)$, $x \in \Delta^s$, $z \in F$, и отображение $\bar\sigma \mid v_0 \times F$: $F \to p^{-1}(\sigma(v_0))$ допустимо. Согласно лемме 11, $\bar\sigma$ — допустимое поднятие отображения σ.

Если $\bar\sigma_0$, $\bar\sigma_1$: $(\Delta^s, \dot\Delta^s) \times F \to (E_s, E_{s-1})$ — два допустимых поднятия отображения σ, то существует такое допустимое отображение f: $F \to F$, что $\bar\sigma_0 \mid v_0 \times F \underset{p}{\simeq} (\bar\sigma_1 \mid v_0 \times F) \circ f$. Пусть отображение g: $\Delta^s \times F \times 0 \cup v_0 \times F \times I \cup \Delta^s \times F \times 1 \to E_s$ определено формулами $g(x, z, 0) = \bar\sigma_0(x, z)$, $g(x, z, 1) = \bar\sigma_1(x, f(z))$ и $g \mid v_0 \times F \times I$: $\bar\sigma_0 \mid v_0 \times F \underset{p}{\simeq} (\bar\sigma_1 \mid v_0 \times F) \circ f$. Поскольку отображение $p \circ g$ можно продолжить до отображения $\Delta^s \times F \times I \to B$ (переводя (x, z, t) в $\sigma(x)$), а $\Delta^s \times F \times 0 \cup v_0 \times F \times I \cup \Delta^s \times F \times 1$ — сильный деформационный ретракт пространства $\Delta^s \times F \times I$, из леммы 12 следует, что $g \mid \Delta^s \times F \times 0 \underset{p}{\simeq} g \mid \Delta^s \times F \times 1$. Следовательно, отображение $\bar\sigma_0$ гомотопно композиции

$$(\Delta^s, \dot\Delta^s) \times F \xrightarrow{1 \times f} (\Delta^s, \dot\Delta^s) \times F \xrightarrow{\bar\sigma_1} (E_s, E_{s-1}).$$

Если расслоение p: $E \to B$ ориентируемо над R, то отображение f_*: $H_*(F) \to H_*(F)$ является тождественным, и, значит, композиция

$$H_*((\Delta^s, \dot\Delta^s) \times F) \xrightarrow{(1 \times f)_*} H_*((\Delta^s, \dot\Delta^s) \times F) \xrightarrow{\bar\sigma_{1*}} H_*(E_s, E_{s-1})$$

совпадает с $\bar\sigma_{1*}$. Следовательно, $\bar\sigma_{0*} = \bar\sigma_{1*}$, и тем самым мы доказали такой результат:

13. Теорема. *Пусть p: $E \to B$ — ориентируемое расслоение над линейно связным относительным CW-комплексом (B, A), и пусть $F = p^{-1}(b_0)$. Для всякого сингулярного симплекса σ: $(\Delta^s, \dot\Delta^s) \to ((B, A)^s, (B, A)^{s-1})$ существует корректно определенное отображение*

$$\bar\sigma_*\colon H_*((\Delta^s, \dot\Delta^s) \times F) \to H_*(E_s, E_{s-1}),$$

определяемое как гомоморфизм, индуцированный некоторым допустимым поднятием $\bar\sigma$: $(\Delta^s, \dot\Delta^s) \times F \to (E_s, E_{s-1})$ отображения σ. ■

Тождественное отображение $\xi_s\colon \Delta^s \subset \Delta^s$ является циклом по модулю границы $\dot{\Delta}^s$, и его класс гомологий $\{\xi_s\}$ порождает модуль $H_s(\Delta^s, \dot{\Delta}^s; R)$. Если $w \in H_n(F; G)$, то $\{\xi_s\} \times w \in H_{n+s}((\Delta^s, \dot{\Delta}^s) \times F; G)$ и $\bar{\sigma}_*(\{\xi_s\} \times w) \in H_{n+s}(E_s, E_{s-1}; G)$. Ясно, что для фиксированного симплекса σ отображение $w \to \bar{\sigma}_*(\{\xi_s\} \times w)$ определяет гомоморфизм $H_n(F; G) \to H_{n+s}(E_s, E_{s-1}; G)$. Поскольку клеточные отображения σ образуют базис свободного модуля $\bar{\Delta}_s(B) = \bar{\Delta}_s((B, A)^s)$, имеет место гомоморфизм

$$\psi\colon \bar{\Delta}_s((B, A)^s) \otimes H_n(F; G) \to H_{n+s}(E_s, E_{s-1}; G),$$

определенный равенством $\psi(\sigma \otimes w) = \bar{\sigma}_*(\{\xi_s\} \times w)$. Если $\sigma(\Delta^s) \subset \subset (B, A)^{s-1}$, то $\bar{\sigma}(\Delta^s \times F) \subset E_{s-1}$ для любого допустимого поднятия отображения σ. Следовательно, $\bar{\sigma}_*(\{\xi_s\} \times w) = 0$, и, значит, гомоморфизм ψ определяет гомоморфизм

$$\psi\colon \bar{\Delta}_s\left((B, A)^s, (B, A)^{s-1}\right) \otimes H_n(F; G) \to H_{n+s}(E_s, E_{s-1}; G).$$

Теперь покажем, что гомоморфизм ψ индуцирует гомоморфизм

$$H_s\left((B, A)^s, (B, A)^{s-1}; H_n(F; G)\right) \to H_{n+s}(E_s; E_{s-1}; G).$$

14. Лемма. *Композиция*

$$\begin{array}{c} \bar{\Delta}_{s+1}\left((B, A)^s, (B, A)^{s-1}\right) \otimes H_n(F; G) \\ \Big\downarrow {\scriptstyle \partial \otimes 1} \\ \bar{\Delta}_s\left((B, A)^s, (B, A)^{s-1}\right) \otimes H_n(F; G) \\ \Big\downarrow {\scriptstyle \psi} \\ H_{n+s}(E_s, E_{s-1}; G) \end{array}$$

тривиальна.

Доказательство. Пусть $\sigma\colon \left(\Delta^{s+1}, (\Delta^{s+1})^{s-1}\right) \to \left((B, A)^s, (B, A)^{s-1}\right)$ — сингулярный $(s+1)$-мерный симплекс пары $(B, A)^s$, и пусть

$$\bar{\sigma}\colon \left(\Delta^{s+1}, (\Delta^{s+1})^{s-1}\right) \times F \to (E_s, E_{s-1})$$

— некоторое допустимое поднятие симплекса σ. Пусть $e^i_{s+1}\colon \Delta^s \to \to \Delta^{s+1}$ — отображение i-й грани $(0 \leqslant i \leqslant s+1)$. Тогда $\sigma^{(i)} = \sigma \circ e^i_{s+1}$ и композиция

$$\Delta^s \times F \xrightarrow{e^i_{s+1} \times 1} \dot{\Delta}^{s+1} \times F \xrightarrow{\sigma'} E_s,$$

где $\sigma' = \bar{\sigma} \mid \dot{\Delta}^{s+1} \times F$, является допустимым поднятием отображения $\sigma^{(i)}$. Следовательно,

$$\psi(\sigma^{(i)} \otimes w) = \sigma'_*(e^i_{s+1} \times 1)_*(\{\xi_s\} \times w) = \sigma'_*(\{e^i_{s+1}\} \times w),$$

где $\{e^i_{s+1}\} \in H_s(\dot\Delta^{s+1}, (\Delta^{s+1})^{s-1})$. Отсюда следует, что

$$\psi(\partial\sigma \times w) = \sigma'_*\left(\left\{\sum(-1)^i e^i_{s+1}\right\} \times w\right).$$

В комплексе $\Delta(\Delta^{s+1})$ имеет место равенство $\partial\xi_{s+1} = \sum(-1)^i e^i_{s+1}$. Следовательно, если $j\colon (\dot\Delta^{s+1}, (\Delta^{s+1})^{s-1}) \subset (\Delta^{s+1}, (\Delta^{s+1})^{s-1})$, то $j_*\left\{\sum(-1)^i e^i_{s+1}\right\} = 0$. Отображение σ' совпадает с композицией

$$\dot\Delta^{s+1} \times F \overset{j\times 1}{\subset} \Delta^{s+1} \times F \xrightarrow{\bar\sigma} E_s,$$

поэтому

$$\psi(\partial\sigma \otimes w) = \bar\sigma_*(j \times 1)_*\left(\left\{\sum(-1)^i e^i_{s+1}\right\} \times w\right) = \bar\sigma_*(0) = 0. \ \blacksquare$$

Всякий элемент модуля $\bar\Delta_s((B, A)^s, (B, A)^{s-1}) \otimes H_n(F; G)$ является s-мерным циклом цепного комплекса $\bar\Delta((B, A)^s, (B, A)^{s-1}) \otimes H_n(F; G)$, а s-мерные границы — это элементы, принадлежащие образу отображения

$$\partial \otimes 1\colon \bar\Delta_{s+1}((B, A)^s, (B, A)^{s-1}) \otimes H_n(F; G) \to$$
$$\to \bar\Delta_s((B, A)^s, (B, A)^{s-1}) \otimes H_n(F; G).$$

Из леммы 14 следует, что отображение ψ порождает гомоморфизм

$$\psi_*\colon H_s((B, A)^s, (B, A)^{s-1}; H_n(F; G)) \to H_{n+s}(E_s, E_{s-1}; G).$$

Вычисление члена E^1 изучаемой нами спектральной последовательности заканчивается доказательством следующего результата:

15. Теорема. (a) *Для всех* $s \geqslant 0$ *имеет место изоморфизм*

$$\psi_*\colon H_s((B, A)^s, (B, A)^{s-1}; H_n(F; G)) \approx H_{n+s}(E_s, E_{s-1}; G).$$

(b) *При* $s \geqslant 1$ *имеет место коммутативная диаграмма*

$$\begin{array}{ccc}
H_s((B, A)^s, (B, A)^{s-1}; H_n(F; G)) & \xrightarrow{\psi_*} & H_{n+s}(E_s, E_{s-1}; G) \\
\Big\downarrow{\scriptstyle\partial} & & \Big\downarrow{\scriptstyle\partial} \\
H_{s-1}((B, A)^{s-1}, (B, A)^{s-2}; H_n(F; G)) & \xrightarrow{\psi_*} & H_{n+s-1}(E_{s-1}, E_{s-2}; G)
\end{array}$$

Доказательство. (a) Поскольку оба модуля разлагаются в прямую сумму (правый согласно лемме 2), а гомоморфизм ψ_* естествен, достаточно доказать, что отображение

$$\psi_*\colon H_s(e, \dot e; H_n(F; G)) \to H_{n+s}(p^{-1}(e), p^{-1}(\dot e); G)$$

является изоморфизмом для каждой s-мерной клетки, принадлежащей $B - A$. Пусть $f\colon (E^s, S^{s-1}) \to (e, \dot e)$ — характеристическое отображение для клетки e, и пусть $p'\colon E' \to E^s$ — индуцированное расслоение над E^s с соответствующим отображением f': $(E', p'^{-1}(S^{s-1})) \to (p^{-1}(e), p^{-1}(\dot e))$. Тогда имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} H_s(E^s, S^{s-1}; H_n(F; G)) & \xrightarrow{\psi_*} & H_s(E', p'^{-1}(S^{s-1}); G) \\ \downarrow{\scriptstyle f_*} & & \downarrow{\scriptstyle f'_*} \\ H_s(e, \dot e; H_n(F; G)) & \xrightarrow{\psi_*} & H_s(p^{-1}(e), p^{-1}(\dot e); G) \end{array}$$

в которой вертикальные отображения являются изоморфизмами (в силу свойств вырезания и гомотопии). Следовательно, достаточно доказать утверждение (а) для тривиальных расслоений над E^s, а для таких расслоений гомоморфизм ψ_* является изоморфизмом в силу теоремы Кюннета.

(b) Пусть задан сингулярный симплекс σ: $(\Delta^s \dot\Delta^s) \to ((B, A)^s, (B, A)^{s-1})$, и пусть элемент $\{\sigma \otimes w\} \in H_s((B, A)^s, (B, A)^{s-1}; H_n(F; G))$ определен циклом $\sigma \otimes w$. Тогда $\partial\{\sigma \otimes w\} = \{\sum (-1)^i \sigma^{(i)} \otimes w\} \in$ $\in H_{s-1}((B, 1)^{s-1}, (B, A)^{s-2}; H_n(F; G))$. Пусть $\bar\sigma$: $(\Delta^s, \dot\Delta^s) \times F \to$ $\to (E_s, E_{s-1})$ — допустимое поднятие симплекса σ. Если $0 \leqslant i \leqslant s$, то композиция

$$(\Delta^{s-1}, \dot\Delta^{s-1}) \times F \xrightarrow{e_s^i \times 1} (\dot\Delta^s, (\Delta^s)^{s-2}) \times F \xrightarrow{\sigma'} (E_{s-1}, E_{s-2}),$$

где $\sigma' = \bar\sigma \,|\, (\dot\Delta^s, (\Delta^s)^{s-2})$, является допустимым поднятием симплекса $\sigma^{(i)}$. Следовательно,

$$\begin{aligned} \psi_*\partial(\sigma \otimes w) &= \sum (-1)^i \sigma'_*(e_s^i \times 1)_*(\{\xi_{s-1}\} \times w) = \\ &= \sigma'_*(\{\sum (-1)^i e_s^i\} \times w) = \sigma'_*(\partial\{\xi_s\} \times w) = \sigma'_*\partial(\{\xi_s\} \times w) = \\ &= \partial\bar\sigma_*(\{\xi_s\} \times w) = \partial\psi_*\{\sigma \otimes w\}. \ \blacksquare \end{aligned}$$

Поскольку $H_s((B, A)^s, (B, A)^{s-1})$ — свободный модуль, из теоремы об универсальных коэффициентах следует, что

$$\begin{aligned} H_s((B, A)^s, (B, A)^{s-1}; H_n(F; G)) &\approx H_s((B, A)^s, (B, A)^{s-1}) \otimes H_n(F; G) = \\ &= C_s(B, A) \otimes H_n(F; G). \end{aligned}$$

Нетрудно видеть, что при этом изоморфизме граничный оператор триады $((B, A)^s, (B, A)^{s-1}, (B, A)^{s-2})$ соответствует отображению

$$\partial \otimes 1: C_s(B, A) \otimes H_n(F; G) \to C_{s-1}(B, A) \otimes H_n(F; G).$$

Следовательно, теорему 15 можно интерпретировать как утверждение, что гомоморфизм ψ_* индуцирует изоморфизм биградуированного цепного комплекса $C_*(B, A) \otimes H_*(F; G)$ и члена E^1 спектральной последовательности теоремы 1. Вместе со следствием 4 это приводит к такому результату о члене E^2:

16. Теорема. *Пусть* $p\colon E\to B$ — *ориентируемое расслоение над линейно связным относительным* CW-*комплексом* (B, A), *и пусть* $F=p^{-1}(b_0)$. *Тогда существует сходящаяся спектральная последовательность типа* E^2, *такая, что* $E^2_{s,t}\approx H_s(B, A;\ H_t(F;\ G))$, *а* E^∞ — *биградуированный модуль, присоединенный к модулю* $H_*(E, E_A;\ G)$ *относительно фильтрации*

$$F_sH_*(E, E_A;\ G)=\operatorname{im}[H_*(E_s, E_A;\ G)\to H_*(E, E_A;\ G)].\ \blacksquare$$

Заметим, что спектральная последовательность теоремы 16 является спектральной последовательностью первой четверти и что она функториальна на категории ориентируемых расслоений $p\colon E\to B$ над линейно связным относительным CW-комплексом (B, A) и сохраняющих слои отображений $f'\colon E'\to E$, для которых отображение баз $f\colon (B', A')\to(B, A)$ является клеточным.

Распространим эту спектральную последовательность на расслоения с более общими базами. Пусть $p\colon E\to B$ — ориентируемое расслоение над линейно связной базой B, и пусть $A\subset B$. Пусть $f\colon (B', A)\to(B, A)$ — некоторая относительная CW-аппроксимация пары (B, A) (такая аппроксимация существует согласно теореме 7.8.1). Пусть $p'\colon E'\to B'$ — индуцированное расслоение, а $f'\colon E'\to E$ — сохраняющее слои отображение, индуцированное отображением f. Из точности гомотопической последовательности расслоения и леммы о пяти гомоморфизмах следует, что f' — слабая гомотопическая эквивалентность. Следовательно, отображение f индуцирует изоморфизм между гомологической последовательностью пары (E', E'_A) и гомологической последовательностью пары (E, E_A). Поскольку пространство B' линейно связно, а расслоение $p'\colon E'\to B'$ ориентируемо, существует сходящаяся спектральная последовательность типа E^2, такая, что

$$E^2_{s,t}\approx H_s(B', A;\ H_t(F;\ G))\approx H_s(B, A;\ H_t(F;\ G)),$$

а член E^∞ присоединен относительно некоторой фильтрации к модулю $H_*(E', E'_A;\ G)\approx H_*(E, E_A;\ G)$. Если $g\colon (B'', A)\to(B, A)$ — другая относительная CW-аппроксимация пары (B, A), то существует такое клеточное отображение $h\colon (B'', A)\to(B', A)$, что $f\circ h\simeq g\ \mathrm{rel}\ A$. Отображение h индуцирует изоморфизм спектральных последовательностей типа E^2 для расслоений $p''\colon E''\to B''$ и $p'\colon E'\to B'$ (но не индуцирует изоморфизм членов E^1). Отсюда следует, что фильтрации модуля $H_*(E, E_A;\ G)$, индуцированные изоморфизмами $H_*(E', E'_A;\ G)\approx H_*(E, E_A;\ G)$ и $H_*(E'', E''_A;\ G)\approx H_*(E, E_A;\ G)$, совпадают, и мы получаем следующий важный результат:

17. Теорема. *Пусть $p: E \to B$ — ориентируемое расслоение над линейно связной базой B и F — его слой над точкой $b_0 \in B$. Пусть $A \subset B$. Тогда существует такая сходящаяся спектральная последовательность типа E^2, что $E^2_{s,t} \approx H_s(B, A; H_t(F; G))$, а E^∞ — биградуированный модуль, присоединенный относительно некоторой фильтрации к модулю $H_*(E, E_A; G)$. Эта спектральная последовательность есть спектральная последовательность первой четверти, функториальная на категории ориентируемых расслоений и сохраняющих слои отображений.* ■

§ 3. Применение гомологической спектральной последовательности

В этом параграфе мы рассмотрим применения спектральной последовательности расслоения и покажем, как можно получить обобщенные гомологические последовательности Гизина и Вана в случае, когда слой или база является гомологической сферой. Кроме того, мы используем спектральную последовательность в доказательстве теоремы о гомотопическом вырезании. В заключение определяется инвариант Хопфа (являющийся гомоморфизмом) и точная последовательность, связывающая его с гомоморфизмом надстройки гомотопических групп сфер.

1. Теорема. *Пусть $p: E \to B$ — расслоение над линейно связной базой со слоем F, ориентируемое над некоторым полем. Предположим, что определены эйлеровы характеристики $\chi(F)$ и $\chi(B)$ (над тем же полем). Тогда эйлерова характеристика $\chi(E)$ также определена и $\chi(E) = \chi(B) \cdot \chi(F)$.*

Доказательство. Воспользуемся спектральной последовательностью теоремы 9.2.17. Для конечно порожденного биградуированного модуля E^r определим эйлерову характеристику, полагая $\chi(E^r) = \sum_{s,t} (-1)^{s+t} \dim E^r_{s,t}$. Поскольку модуль коэффициентов является полем, то, согласно формуле Кюннета,

$$E^2_{s,t} \approx H_s(B; H_t(F)) \approx H_s(B) \otimes H_t(F).$$

Следовательно, $\chi(E^2) = \chi(B)\chi(F)$. Так как $E^{r+1} \approx H(E^r)$, то, как и в теореме 4.3.14, получаем

$$\chi(E^2) = \chi(E^3) = \ldots = \chi(E^r).$$

Поскольку $E^2_{s,t} = 0$, если числа s и t достаточно велики, это верно и для модулей $E^r_{s,t}$, $r \geqslant 2$. Следовательно, $E^\infty = E^r$ для достаточно большого r, и, значит, $\chi(E^\infty) = \chi(B)\chi(F)$. Поскольку

$$\dim [H_n(E)] = \sum_{s+t=n} \dim E^\infty_{s,t},$$

имеем $\chi(E) = \chi(E^\infty) = \chi(B)\chi(F)$. ■

Вычислим теперь в терминах спектральной последовательности расслоения гомоморфизм, индуцированный вложением $i\colon F \subset E$. Если $r \geqslant 2$, то $E_{0,t}^{r+1}$ является фактормодулем модуля $E_{0,t}^r$ (поскольку $E_{-r,\,t+r-1}^r = 0$ для спектральной последовательности первой четверти). Следовательно, определен эпиморфизм $E_{0,t}^2 \to E_{0,t}^\infty$. Поскольку база B линейно связна, имеет место изоморфизм $H_t(F;\,G) \approx H_0(B;\,H_t(F;\,G))$. Используя спектральную последовательность расслоения $F \to b_0$ и свойство функториальности спектральной последовательности, мы видим, что гомоморфизм $i_*\colon H_t(F;\,G) \to H_t(E;\,G)$ совпадает с композицией

$$H_t(F;\,G) \approx H_0(B;\,H_t(F;\,G)) \approx E_{0,t}^2 \to E_{0,t}^\infty = F_0H_t(E;\,G) \subset H_t(E;\,G).$$

Сказанное приводит к следующей *обобщенной гомологической последовательности Вана*:

2. Теорема. *Пусть $p\colon E \to B$ — расслоение со слоем F, база которого B есть односвязная n-мерная гомологическая сфера (над R) для некоторого $n \geqslant 2$ (т. е. $H_q(B) = 0$, если $q \neq 0$ или $q \neq n$, и $H_0(B) \approx R \approx H_n(B)$). Тогда имеет место точная последовательность*

$$\ldots \to H_t(F;\,G) \xrightarrow{i_*} H_t(E;\,G) \to H_{t-n}(F;\,G) \to H_{t-1}(F;\,G) \xrightarrow{i_*} \ldots .$$

Доказательство. Поскольку модуль $H_*(B)$ не имеет кручения, второй член спектральной последовательности расслоения p имеет вид $E_{s,t}^2 \approx H_s(B) \otimes H_t(F;\,G)$. Следовательно, $E_{s,t}^2 = 0$, если $s \neq 0$ или $s \neq n$, и единственным нетривиальным дифференциалом является $d^n\colon E_{n,t}^2 \to E_{0,t+n-1}^2$ [1]). Значит, имеют место точные последовательности

$$0 \to E_{n,t}^\infty \to E_{n,t}^2 \xrightarrow{d^n} E_{0,\,t+n-1}^2 \to E_{0,\,t+n-1}^\infty \to 0,$$
$$0 \to E_{0,t}^\infty \to H_t(E;\,G) \to E_{n,\,t-n}^\infty \to 0.$$

Соединив их вместе, получим точную последовательность

$$\ldots \to H_t(E;\,G) \to E_{n,\,t-n}^2 \xrightarrow{d^n} E_{0,\,t-1}^2 \to H_{t-1}(E;\,G) \to \ldots .$$

Нужный нам результат следует теперь из того, что

$$E_{n,\,t-n}^2 \approx H_n(B) \otimes H_{t-n}(F;\,G) \approx H_{t-n}(F;\,G),$$
$$E_{0,\,t-1}^2 \approx H_0(B) \otimes H_{t-1}(F;\,G) \approx H_{t-1}(F;\,G)$$

---

[1]) Так как $d^i = 0$, если $2 \leqslant i < n$, то $E^2 = E^3 = \ldots = E^n$, и поэтому E^2 можно отождествить с E^n. — *Прим. ред.*

и что при замене в полученной точной последовательности модуля $E^2_{0,\,t-1}$ модулем $H_{t-1}(F;\ G)$ отображение $H_{t-1}(F;\ G)\to\to H_{t-1}(E;\ G)$ совпадает с i_*. ■

Пусть p: $E\to B$ — ориентируемое расслоение над линейно связной базой, и пусть $B'\subset B$ и $E'=p^{-1}(B')$. Покажем теперь, как гомоморфизм, индуцированный отображением p: $(E,\ E')\to\to(B,\ B')$, определяется с помощью построенной спектральной последовательности. Если $r\geqslant 2$, то $E^{r+1}_{s,0}$ — подмодуль модуля $E^r_{s,0}$ (поскольку $E^r_{s+r,\,-r+1}=0$). Следовательно, отображение $E^\infty_{s,0}\to E^2_{s,0}$ является мономорфизмом. Аугментация $H_0(F;\ G)\to G$ индуцирует гомоморфизм $H_s(B,\ B';\ H_0(F;\ G))\to H_s(B,\ B';\ G)$. Используя спектральную последовательность расслоения $B\subset B$ и функториальное свойство спектральных последовательностей, мы находим, что отображение p_*: $H_s(E,\ E';\ G)\to H_s(B,\ B';\ G)$ совпадает с композицией

$$H_s(E,\ E';\ G)=F_sH_s(E,\ E';\ G)\to E^\infty_{s,0}\to E^2_{s,0}\approx$$
$$\approx H_s(B,\ B';\ H_0(F;\ G))\to H_s(B,\ B';\ G).$$

Это приводит к следующей *обобщенной гомологической последовательности Гизина*:

3. Теорема. *Пусть p: $E\to B$ — ориентируемое расслоение над линейно связной базой, слой которого F является n-мерной гомологической сферой (над R) для некоторого $n\geqslant 1$. Если $B'\subset B$ и $E'=p^{-1}(B')$, то имеет место точная последовательность*

$$\ldots\to H_s(E,\ E';\ G)\xrightarrow{p_*}H_s(B,\ B';\ G)\to H_{s-n-1}(B,\ B';\ G)\to$$
$$\to H_{s-1}(E,\ E';\ G)\xrightarrow{p_*}\ldots.$$

Доказательство. Поскольку в спектральной последовательности расслоения p имеет место равенство

$$E^2_{s,\,t}\approx H_s(B,\ B';\ H_t(F;\ G))=0,\quad t\neq 0,\quad t\neq n,$$

единственным ненулевым дифференциалом является d^{n+1}: $E^2_{s,0}\to\to E^2_{s-n-1,\,n}$. Следовательно, имеют место точные последовательности

$$0\to E^\infty_{s,0}\to E^2_{s,0}\xrightarrow{d^{n+1}}E^2_{s-n-1,\,n}\to E^\infty_{s-n-1,\,n}\to 0,$$
$$0\to E^\infty_{s-n,\,n}\to H_s(E,\ E';\ G)\to E^\infty_{s,0}\to 0.$$

Соединим их вместе в одну точную последовательность

$$\ldots\to H_s(E,\ E';\ G)\to E^2_{s,0}\xrightarrow{d^{n+1}}E^2_{s-n-1,\,n}\to H_{s-1}(E,\ E';\ G)\to\ldots.$$

Заметив далее, что

$$E^2_{s,0} \approx H_s(B, B'; H_0(F; G)) \approx H_s(B, B'; G),$$

$$E^2_{s-n-1,n} \approx H_{s-n-1}(B, B'; H_n(F; G)) \approx H_{s-n-1}(B, B'; G),$$

и заменив в полученной точной последовательности модуль $E^2_{s,0}$ модулем $H_s(B, B'; G)$, мы увидим, что полученное в результате отображение $H_s(E, E'; G) \to H_s(B, B'; G)$ совпадает с p_*. ■

4. Лемма. *Пусть p: $E \to B$ — ориентируемое расслоение с линейно связным слоем F над линейно связной базой. Предположим, что $H_q(B, B') = 0$, если $q < n$, и $H_q(F) = 0$, если $0 < q < m$ (для любых модулей коэффициентов R). Тогда гомоморфизм p_*: $H_q(E, E') \to H_q(B, B')$ является изоморфизмом, если $q \leqslant n + m - 1$, и эпиморфизмом, если $q = n + m$.*

Доказательство. Рассмотрим спектральную последовательность этого расслоения. Тогда

$$E^2_{s,t} \approx H_s(B, B'; H_t(F)) \approx H_s(B, B') \otimes H_t(F) \oplus H_{s-1}(B, B') * H_t(F).$$

Мы предположили, что $E^2_{s,t} = 0$, если $s < n$ или $0 < t < m$. Следовательно, если $q \leqslant n + m - 1$, то $E^2_{s,\,q-s} = 0$, за исключением, быть может, члена $E^2_{q,0}$. Отсюда следует, что $E^r_{s,\,q-s} = 0$, за исключением члена $E^r_{q,0}$, и $E^r_{q,0} \approx E^2_{q,0}$. Значит, $E^\infty_{q,0} \approx E^2_{q,0}$ и $E^\infty_{s,\,q-s} = 0$, если $s \neq q$. Следовательно,

$$H_q(E, E') \approx H_q(B, B'; H_0(F)) \approx H_q(B, B'),$$

и этот изоморфизм индуцирован отображением p_*.

Если $q = n + m$, то $E^2_{s,\,n+m-s} = 0$, за исключением, может быть, членов $E^2_{n+m,0}$ и $E^2_{n,m}$. Поскольку $E^2_{n+m-r,\,r-1} = 0$ при $r \geqslant 2$, имеем

$$E^\infty_{n+m,0} \approx E^2_{n+m,0} \approx H_{n+m}(B, B'; H_0(F)) \approx H_{n+m}(B, B').$$

Следовательно, $p_*(H_{n+m}(E, E')) = H_{n+m}(B, B')$. ■

Эту лемму мы используем при доказательстве следующей *теоремы о гомотопическом вырезании*[1]:

5. Теорема. *Пусть A, B и $A \cap B$ — линейно связные подпространства пространства X, такие, что*

(а) *либо $X = \operatorname{int} A \cup \operatorname{int} B$, либо $X = A \cup B$, причем A и B — такие замкнутые в X подмножества, что пересечение $A \cap B$ — сильный*

---

[1]) Более общую форму этой теоремы можно найти в статье: Blakers A. L., Massey W. S., The homotopy groups of a triad, II, *Ann. Math.*, **55** (1952), 192—201.

деформационный ретракт некоторой своей окрестности в A (*или в* B);

(b) *фундаментальные группы пространств* A, B, $A \cap B$ *и* X *изоморфны*[1]);

(c) *пара* $(A, A \cap B)$ n-*связна, а пара* $(B, A \cap B)$ m-*связна, где* $m, n \geqslant 1$.

Тогда гомоморфизм

$$j_{\#}\colon \pi_q(A, A \cap B) \to \pi_q(X, B),$$

индуцированный отображением вырезания $j\colon (A, A \cap B) \subset (X, B)$, *является изоморфизмом, если* $q \leqslant n + m - 1$, *и эпиморфизмом, если* $q = n + m$.

Доказательство. Прежде всего мы сведем задачу к случаю $X = \operatorname{int} A \cup \operatorname{int} B$. Пусть подпространства A и B замкнуты в X, $A \cap B$ — сильный деформационный ретракт некоторой своей окрестности U в подпространстве B, и пусть $A' = A \cup U$. Заметим, что подпространство A является сильным деформационным ретрактом пространства A'. Далее, $A' \cap B = U$ и вложение $(A, A \cap B) \subset \subset (A', A' \cap B)$ есть гомотопическая эквивалентность; стало быть, пара $(A', A' \cap B)$ n-связна. Из точности гомотопической последовательности триады $(B, A' \cap B, A \cap B)$ и из того, что $(A' \cap B, A \cap B)$ есть k-связная пара для любого k, следует, что $(B, A' \cap B)$ есть m-связная пара. Заметим, что

$$X = A \cup (B - A) \subset \operatorname{int} A' \cup \operatorname{int} B,$$

и, значит, подпространства A' и B удовлетворяют условиям (a), (b) и (c). Поскольку имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd}
\pi_q(A, A \cap B) \arrow[rr, "\approx"'] \arrow[dr, "j_{\#}"'] & & \pi_q(A', A' \cap B) \arrow[dl, "j'_{\#}"] \\
& \pi_q(X, B) &
\end{tikzcd}$$

мы свели нашу задачу к доказательству того, что отображение $j'_{\#}$ обладает нужными нам свойствами.

Аналогично, пусть $A \cap B$ — сильный деформационный ретракт некоторой своей окрестности V в подпространстве A, и пусть $B' = V \cup B$. Заметим, что B — сильный деформационный ретракт пространства B'. Тогда $A \cap B' = V$, откуда, как и раньше, следует, что пара $(A, A \cap B')$ n-связна, а пара $(B', A \cap B')$ m-связна. Поскольку $X = (A - B) \cup B \subset \operatorname{int} A \cup \operatorname{int} B'$, подпространства A и B' удовле-

[1]) Более того, эти изоморфизмы порождаются соответствующими вложениями. — *Прим. ред.*

творяют условиям (a), (b) и (c). Так как имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \pi_q(A, A\cap B) & \xrightarrow[\approx]{} & \pi_q(A, A\cap B') \\ {\scriptstyle j_\#}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle j''_\#} \\ \pi_q(X, B) & \xrightarrow[\approx]{} & \pi_q(X, B') \end{array}$$

наша задача свелась к доказательству того, что отображение $j''_\#$ обладает требуемыми свойствами.

Итак, достаточно доказать теорему в предположении $X = \operatorname{int} A \cup \cup \operatorname{int} B$, и, начиная с этого места, мы будем считать, что это так. Согласно следствию 7.3.8, существует такое расслоение p: $E \to X$ с односвязным пространством расслоения E, что $p_\#$: $\pi_q(E) \approx \pi_q(X)$, если $q > 1$. Пусть E_A и E_B — части расслоения E, лежащие над подпространствами A и B соответственно. Тогда $E_A \cap E_B$ — часть расслоения E над $A \cap B$. Из теоремы 7.2.8 следует, что пара $(E_A, E_A \cap E_B)$ n-связна, а пара $(E_B, E_A \cap E_B)$ m-связна. Используя свойство (b) и точность гомотопической последовательности расслоения, нетрудно увидеть, что все пространства $E_A \cap E_B$, E_A и E_B односвязны. Очевидно, что $E = p^{-1}(\operatorname{int} A) \cup p^{-1}(\operatorname{int} B) = \operatorname{int} E_A \cup \operatorname{int} E_B$. Это позволяет свести теорему к случаю, когда все исследуемые пространства односвязны. Действительно, это вытекает из следующей коммутативной диаграммы:

$$\begin{array}{ccc} \pi_q(E_A, E_A\cap E_B) & \xrightarrow[\approx]{} & \pi_q(A, A\cap B) \\ {\scriptstyle \bar{j}_\#}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle j_\#} \\ \pi_q(E, E_B) & \xrightarrow[\approx]{} & \pi_q(X, B) \end{array}$$

Таким образом, можно предположить, что $X = \operatorname{int} A \cup \operatorname{int} B$ и что пространства $A \cap B$, A, B и X односвязны. Заменим вложение $A \subset X$ гомотопически ему эквивалентным расслоением путей p: $P \to X$, как это сделано в теореме 2.8.9. Здесь P — это пространство путей ω: $(I, 0) \to (X, A)$, наделенное компактно-открытой топологией, причем $p(\omega) = \omega(1)$. Слоем F расслоения p над точкой $a_0 \in A \cap B$ служит пространство путей пространства X, начинающихся в A и кончающихся в a_0. Если p': $PX \to X$ — расслоение, состоящее из всех путей пространства X, оканчивающихся в точке a_0, и $p'(\omega) = \omega(0)$, то $F = p'^{-1}(A)$. Так как пространство PX стягиваемо, имеют место изоморфизмы

$$\pi_q(X, A) \xleftarrow[\approx]{p'_\#} \pi_q(PX, F) \xrightarrow[\approx]{\partial} \pi_{q-1}(F).$$

Поскольку $X = \operatorname{int} A \cup \operatorname{int} B$, отображение вырезания j': $(B, A \cap B) \subset \subset (X, A)$ индуцирует изоморфизм гомологий. Из относительной теоремы об изоморфизме Гуревича и из m-связности пары $(B, A \cap B)$ следует, что пара (X, A) также m-связна. Следовательно, F есть $(m-1)$-связное пространство, и, значит, $H_q(F)=0$, если $0<q<m$.

Пусть $E'=p^{-1}(B)$. Поскольку пространство X односвязно, расслоение $p\colon E \to X$ ориентируемо. Так как $j_*\colon H_q(A, A\cap B) \approx \approx H_q(X, B)$ — изоморфизм, отсюда следует, что $H_q(X, B)=0$, если $q<n+1$. Согласно лемме 4, гомоморфизм

$$p_*\colon H_q(E, E') \to H_q(X, B)$$

является изоморфизмом, если $q \leqslant n+m$, и эпиморфизмом, если $q=n+m+1$. Отображение $j\colon (A, A\cap B) \subset (X, B)$ обладает поднятием $\bar{j}\colon (A, A\cap B) \to (E, E')$, где $\bar{j}(a)$ — постоянный путь в точке a. Имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] H_q(A, A\cap B) \arrow[rr, "\bar{j}_*"] \arrow[dr, "j_*"', "\approx"] & & H_q(E, E') \arrow[dl, "p_*"] \\ & H_q(X, B) & \end{tikzcd}$$

Следовательно, $\bar{j}_*$ — изоморфизм, если $q \leqslant n+m$, а так как $\bar{j}\,|\,A\colon A \to E$ — гомотопическая эквивалентность, то из леммы о пяти гомоморфизмах следует, что гомоморфизм

$$(\bar{j}\,|\,A\cap B)_*\colon H_q(A\cap B) \to H_q(E')$$

является изоморфизмом, если $q \leqslant n+m-1$.

Поскольку $\pi_1(E') \approx \pi_1(F) \approx \pi_2(X, A)$, а последняя группа является факторгруппой группы $\pi_2(X)$, так как $\pi_1(A)=0$, то фундаментальная группа пространства E' абелева. Но пространство $A\cap B$ односвязно, поэтому из абсолютной теоремы об изоморфизме Гуревича следует, что пространство E' также односвязно. В силу теоремы Уайтхеда гомоморфизм

$$(\bar{j}\,|\,A\cap B)_{\#}\colon \pi_q(A\cap B) \to \pi_q(E')$$

является изоморфизмом, если $q \leqslant n+m-2$, и эпиморфизмом, если $q=n+m-1$. Поскольку $\bar{j}\,|\,A\colon A \to E$ — гомотопическая эквивалентность, из леммы о пяти гомоморфизмах следует, что гомоморфизм

$$\bar{j}_{\#}\colon \pi_q(A, A\cap B) \to \pi_q(E, E')$$

является изоморфизмом, если $q \leqslant n+m-1$, и эпиморфизмом если $q=n+m$. Теорема теперь следует из коммутативности диаграммы

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] \pi_q(A, A\cap B) \arrow[rr, "\bar{j}_{\#}"] \arrow[dr, "j_{\#}"'] & & \pi_q(E, E') \arrow[dl, "p_{\#}", "\approx"'] \\ & \pi_q(X, B) \ \blacksquare & \end{tikzcd}$$

Следует отметить, что основу только что проведенного доказательства составил случай, когда подпространства A и B удовлетворяют условию (c), условию (b) в усиленной форме, т. е. когда все исследуемые пространства односвязны, и, наконец, условию, что пара $\{A, B\}$ подмножеств пространства X удовлетворяет аксиоме вырезания, т. е. условию (a) в слабой форме. Следует также отметить, что если пространства A и B удовлетворяют условию (a) теоремы 5, то из n-связности пары $(A, A \cap B)$ (или m-связности пары $(B, A \cap B)$), как нетрудно видеть, следует n-связность пары (X, B) (или m-связность пары (X, A)). Более того, если подпространства A и B удовлетворяют условиям (a) и (c), а пересечение $A \cap B$ односвязно, то A и B также односвязны, откуда получаем, что и X односвязно. Следовательно, условие (b) также выполнено, и теорема 5 в этом случае верна.

6. Следствие. *Пусть (X, A) — относительный n-связный CW-комплекс, $n \geqslant 2$, а подпространство A m-связно, $m \geqslant 1$. Тогда проекция k: $(X, A) \to (X/A, x_0)$ индуцирует гомоморфизм*

$$k_{\#}\colon \pi_q(X, A) \to \pi_q(X/A),$$

являющийся изоморфизмом, если $q \leqslant m+n$, и эпиморфизмом, если $q = m+n+1$.

Доказательство. Пусть CA — неприведенный конус над A. Рассмотрим его как пространство, пересечение которого с X равно A. Поскольку подпространство A m-связно, а конус CA стягиваем, (CA, A) есть $(m+1)$-связная пара. Применим теорему 5 к этому случаю, подставив вместо A и B соответственно X и CA. Так как $X \cap CA = A$ — сильный деформационный ретракт некоторой своей окрестности в конусе CA, условие (a) теоремы 5 выполняется. Поскольку подпространство A односвязно и выполняется условие (c), из предыдущих замечаний следует, что выполняется и условие (b). Значит, все предположения теоремы 5 выполнены, так что вложение j: $(X, A) \subset (X \cup CA, CA)$ индуцирует гомоморфизм

$$j_{\#}\colon \pi_q(X, A) \to \pi_q(X \cup CA, CA),$$

являющийся изоморфизмом, если $q \leqslant n+m$, и эпиморфизмом, если $q = n+m+1$. Лемма 7.1.5 показывает, что проекция k': $(X \cup CA, CA) \to (X \cup CA, CA)/CA = X/A$ является гомотопической эквивалентностью. Утверждение следствия вытекает теперь из коммутативности диаграммы

$$\begin{tikzcd}
\pi_q(X, A) \arrow[rr, "j_{\#}"] \arrow[dr, "k_{\#}"'] & & \pi_q(X \cup CA, CA) \arrow[dl, "k'_{\#}", "\approx"'] \\
& \pi_q(X/A) &
\end{tikzcd} \blacksquare$$

7. Следствие. *Пусть f: $(X', A') \to (X, A)$ — относительный гомеоморфизм относительных CW-комплексов. Пусть обе пары n-связны, $n \geqslant 2$, а пространства A и A' m-связны, $m \geqslant 1$. Тогда отображение f индуцирует изоморфизм*

$$f_{\#}\colon \pi_q(X', A') \approx \pi_q(X, A), \qquad q \leqslant n+m.$$

Доказательство. Пусть k': $(X', A') \to (X'/A', x_0')$ и k: $(X, A) \to (X/A, x_0)$ — проекции. Тогда f индуцирует гомеоморфизм f': $X'/A' \to X/A$, такой, что $f' \circ k' = k \circ f$. Поскольку отображение f' индуцирует изоморфизмы гомотопических групп во всех размерностях, наше утверждение вытекает из следствия 6. ■

Используем последний результат для более подробного изучения отображения надстройки

$$S\colon \pi_q(S^n) \to \pi_{q+1}(S^{n+1}).$$

Так как $S^{n+1} = S(S^n)$, для расслоения путей $PS^{n+1} \to S^{n+1}$ определено характеристическое отображение μ': $S^n \to \Omega S^{n+1}$. С помощью коммутативной диаграммы

$$\begin{tikzcd}
\pi_q(S^n) \arrow[rr, "\mu'_{\#}"] \arrow[dr, "S"'] & & \pi_q(\Omega S^{n+1}) \\
& \pi_{q+1}(S^{n+1}) \arrow[ur, "\partial"', "\approx"] &
\end{tikzcd}$$

мы сводим изучение отображения надстройки S к изучению гомоморфизма $\mu'_{\#}$.

Пусть пространство X^{2n} получено из произведения $S^n \times S^n$ отождествлением точек (z, z_0) и (z_0, z), $z \in S^n$ (где z_0 — некоторая фиксированная точка сферы S^n). Будем считать, что сфера S^n вложена в пространство X^{2n} как множество точек, соответствующих $S^n \times z_0 \subset S^n \times S^n$. Поэтому пространство X^{2n} является CW-комплексом, состоящим из сферы S^n и единственной $2n$-мерной клетки, приклеенной при помощи некоторого отображения α_n: $S^{2n-1} \to S^n$.

8. Лемма. *Существует отображение g: $X^{2n} \to \Omega S^{n+1}$,* где $n \geqslant 2$, *являющееся $(3n-1)$-эквивалентностью и такое, что $g \mid S^n = \mu'$.*

Доказательство. Пусть отображение μ: $S^n \times \Omega S^{n+1} \to \Omega S^{n+1}$ определено равенством $\mu(z, \omega) = \omega * \mu'(z)$. Согласно следствию 8.5.8, отображение μ гомотопно склеивающей функции расслоения $PS^{n+1} \to S^{n+1}$. Пусть отображение f: $S^n \times S^n \to \Omega S^{n+1}$ определено формулой $f(z, z') = \mu'(z') * \mu'(z)$. Имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd}
H_{n+1}(C_-S^n, S^n) \otimes H_n(\Omega S^{n+1}) \arrow[rr, "\approx"'] \arrow[d, "\partial\otimes 1"', "\approx"] & & H_{2n+1}((C_-S^n, S^n)\times \Omega S^{n+1}) \arrow[dl, "\partial"'] \arrow[d, "\mu_*\partial", "\approx"'] \\
H_n(S^n) \otimes H_n(\Omega S^{n+1}) \arrow[r, "\approx"'] & H_{2n}(S^n \times \Omega S^{n+1}) \arrow[r, "\mu_*"] & H_{2n}(\Omega S^{n+1}) \\
H_n(S^n) \otimes H_n(S^n) \arrow[u, "1\otimes\mu'_*"', "\approx"] \arrow[rr, "\approx"'] & & H_{2n}(S^n \times S^n) \arrow[ul, "(1\times\mu')_*"] \arrow[u, "f_*"']
\end{tikzcd}$$

Следовательно, f_*: $H_{2n}(S^n \times S^n) \approx H_{2n}(\Omega S^{n+1})$. Так как отображение $f \mid S^n \vee S^n$ гомотопно отображению, переводящему точки (z, z_0) и (z_0, z) в $\mu'(z)$, то отображение f гомотопно такому отображению f', что $f'(z, z_0) = \mu'(z) = f'(z_0, z)$. Тогда f' определяет такое отображение g: $X^{2n} \to \Omega S^{n+1}$, что $g \circ k = f'$, где k: $S^n \times S^n \to X^{2n}$ — естественная проекция. Тогда $g \mid S^n = \mu'$ и (поскольку $H_n(S^n) \approx \approx H_n(X^{2n})$) g_*: $H_n(S^n) \approx H_n(\Omega S^{n+1})$. Так как k_*: $H_{2n}(S^n \times S^n) \approx \approx H_{2n}(X^{2n})$, отсюда следует, что g_*: $H_{2n}(X^{2n}) \approx H_{2n}(\Omega S^{n+1})$. Нетривиальными группами гомологий пространства X^{2n} являются лишь нульмерная, n-мерная и $2n$-мерная; в размерностях $< 3n$ нетривиальными группами гомологий пространства ΩS^{n+1} также являются лишь нульмерная, n-мерная и $2n$-мерная. Следовательно, g_*: $H_q(X^{2n}) \approx H_q(\Omega S^{n+1})$, если $q < 3n$. Поскольку $n \geqslant 2$, оба пространства X^{2n} и ΩS^{n+1} односвязны. Из теоремы Уайтхеда теперь следует, что гомоморфизм

$$g_{\#}\colon \pi_q(X^{2n}) \to \pi_q(\Omega S^{n+1})$$

является изоморфизмом, если $q < 3n - 1$, и эпиморфизмом, если $q = 3n - 1$. ■

Пусть $\bar{\alpha}_n$: $(E^{2n}, S^{2n-1}) \to (X^{2n}, S^n)$ — характеристическое отображение для $2n$-мерной клетки комплекса X^{2n}, соответствующее отображению приклеивания α_n: $S^{2n-1} \to S^n$. Тогда $\bar{\alpha}_n$ — относительный гомеоморфизм $(2n-1)$-связных пар, в которых обе сферы S^{2n-1} и S^n $(n-1)$-связны. Из следствия 7 вытекает, что гомоморфизм $\bar{\alpha}_{n\#}$: $\pi_q(E^{2n}, S^{2n-1}) \to \pi_q(X^{2n}, S^n)$ является изоморфизмом, если $q \leqslant 3n - 2$.

Инвариантом Хопфа [1]) называется гомоморфизм

$$H\colon \pi_{q+1}(S^{n+1}) \to \pi_{q-1}(S^{2n-1}), \quad q \leqslant 3n - 2,$$

---

[1]) См. Hopf H., Über die Abbildungen von Sphären auf Sphären niedriegerer Dimension, *Fund. Math.*, 25 (1935), 427—440, а также Whitehead G. W., A generalization of the Hopf invariant, *Ann. Math.*, 51 (1950), 192—237.

определенный так, чтобы следующая диаграмма была коммутативна (j: $X^{2n} \subset (X^{2n}, S^n)$ — вложение):

$$\begin{tikzcd}
\pi_{q+1}(S^{n+1}) \arrow[r, "\bar{\partial}", "\approx"'] \arrow[d, "H"'] & \pi_q(\Omega S^{n+1}) \arrow[r, "g_{\#}^{-1}", "\approx"'] & \pi_q(X^{2n}) \arrow[d, "j_{\#}"] \\
\pi_{q-1}(S^{2n-1}) & \pi_q(E^{2n}, S^{2n-1}) \arrow[l, "\partial"', "\approx"] & \pi_q(X^{2n}, S^n) \arrow[l, "\bar{\alpha}_{n\#}^{-1}"', "\approx"]
\end{tikzcd}$$

Инвариант Хопфа играет важную роль при изучении отображения надстройки благодаря следующему свойству точности[1]):

9. Теорема. *Для $n \geqslant 2$ имеет место точная последовательность*

$$\pi_{3n-2}(S^n) \xrightarrow{S} \ldots \to \pi_q(S^n) \xrightarrow{S} \pi_{q+1}(S^{n+1}) \xrightarrow{H}$$
$$\to \pi_{q-1}(S^{2n-1}) \xrightarrow{\alpha_{n\#}} \pi_{q-1}(S^n) \to \ldots .$$

Доказательство. Утверждение следует из точности гомотопической последовательности пары (X^{2n}, S^n) и коммутативности следующей диаграммы:

$$\begin{tikzcd}
& \pi_q(S^n) \arrow[dl, "S"'] \arrow[d, "\mu'_{\#}"] \arrow[dr, "i_{\#}"] & \\
\pi_{q+1}(S^{n+1}) \arrow[r, "\bar{\partial}", "\approx"'] \arrow[d, "H"'] & \pi_q(\Omega S^{n+1}) \arrow[r, "g_{\#}^{-1}", "\approx"'] & \pi_q(X^{2n}) \arrow[d, "j_{\#}"] \\
\pi_{q-1}(S^{2n-1}) \arrow[dr, "\alpha_{n\#}"'] & \pi_q(E^{2n}, S^{2n-1}) \arrow[l, "\partial"', "\approx"] & \pi_q(X^{2n}, S^n) \arrow[l, "\bar{\alpha}_{n\#}^{-1}"', "\approx"] \arrow[dl, "\partial"] \\
& \pi_{q-1}(S^n) &
\end{tikzcd}$$ ■

Пусть G — бесконечная циклическая группа. Определим функцию $|\cdot|$, отображающую группу G в множество неотрицательных целых чисел, полагая $g \to |g|$. Поскольку $\pi_{2n-1}(S^{2n-1}) \approx \mathbf{Z}$, можно определить число $|H[\alpha]|$, $[\alpha] \in \pi_{2n+1}(S^{n+1})$. Следующая теорема дает интерпретацию функции $|H[\alpha]|$.

10. Теорема. *Пусть отображение α: $S^{2n+1} \to S^{n+1}$ сохраняет отмеченную точку, и пусть $E_\alpha \to S^{2n+1}$ — главное расслоение, инду-*

[1]) См. Whitehead G. W., On the Freudenthal theorem, *Ann. Math.*, 57 (1953), 209—228.

цированное отображением α. *В этом случае* $|H[\alpha]|=m$ *тогда и только тогда, когда целочисленная группа гомологий* $H_{2n}(E_\alpha)$ *изоморфна группе* $\mathbf{Z}_m$ (*где* $\mathbf{Z}_0=\mathbf{Z}$).

Доказательство. Из определения гомоморфизма H и естественности гомоморфизма Гуревича φ нетрудно усмотреть, что $|H[\alpha]|=|\varphi\bar\partial[\alpha]|$, где

$$\varphi\bar\partial[\alpha]\in H_{2n}(\Omega S^{n+1})\approx\mathbf{Z}.$$

Поскольку α индуцирует отображение $\bar\alpha$: $(E_\alpha,\Omega S^{n+1})\to(PS^{n+1},\Omega S^{n+1})$, имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd}
\pi_{2n+1}(S^{2n+1}) \arrow[d, "\alpha_\#"'] \arrow[dr, "\bar\partial"] & & \\
& \pi_{2n}(\Omega S^{n+1}) \arrow[r, "\varphi"] & H_{2n}(\Omega S^{n+1}) \\
\pi_{2n+1}(S^{n+1}) \arrow[ur, "\bar\partial"'] & &
\end{tikzcd}$$

Следовательно, $|\varphi\bar\partial[\alpha]|=|\varphi\bar\partial\alpha_\#[1_{S^{2n+1}}]|=|\varphi\bar\partial[1_{S^{2n+1}}]|$. Кроме того, имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd}
\pi_{2n+1}(S^{2n+1}) \arrow[d, "\varphi"', "\approx"] & \pi_{2n+1}(E_\alpha,\ \Omega S^{n+1}) \arrow[l, "\approx"'] \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "\varphi"] & \pi_{2n}(\Omega S^{n+1}) \arrow[d, "\varphi"] \\
H_{2n+1}(S^{2n+1}) & H_{2n+1}(E_\alpha,\ \Omega S^{n+1}) \arrow[l, "\approx"'] \arrow[r, "\partial"] & H_{2n}(\Omega S^{n+1})
\end{tikzcd}$$

из которой следует, что $|\varphi\bar\partial[1_{S^{2n+1}}]|=|\partial(z)|$, где z — образующая группы $H_{2n+1}(E_\alpha,\ \Omega S^{n+1})$. Из леммы 4 получаем, что

$$H_{2n}(E_\alpha,\ \Omega S^{n+1})\approx H_{2n}(S^{2n+1})=0$$

и, значит,

$$H_{2n}(E_\alpha)\approx H_{2n}(\Omega S^{n+1})/\partial H_{2n+1}(E_\alpha,\ \Omega S^{n+1}).$$

Теорема доказана. ∎

§ 4. Мультипликативные свойства спектральных последовательностей

Этот параграф посвящен спариваниям двух спектральных последовательностей в третью. Мы построим (при помощи гомологического прямого произведения) спаривание спектральных последовательностей двух расслоений в спектральную последовательность их произведения. Мы рассмотрим также когомологические спектральные последовательности. Для расслоения можно также построить когомологическую спектральную последовательность и аналогичное спаривание когомологических спектральных последовательностей двух расслоений в когомологическую спектральную последовательность их произведения. Диагональное отображение наделяет когомологическую спектральную последовательность мультипликативной структурой, которую мы будем применять в следующем параграфе.

Пусть p: $(E, E_A) \to (B, A)$ и p': $(E', E'_{A'}) \to (B', A')$ — расслоения над относительными CW-комплексами, и пусть p'': $E \times E' \to B \times B'$ — их произведение (т. е. $p'' = p \times p'$). Определим фильтрацию пары $(E \times E', E_A \times E' \cup E \times E'_{A'})$, полагая $(E \times E')_k = E_A \times E' \cup E \times E'_{A'} \cup \bigcup_{i+j=k} E_i \times E'_j$, где $\{E_i\}$ и $\{E'_j\}$ — фильтрации расслоений (E, E_A) и $(E', E'_{A'})$, соответствующие остовам пар (B, A) и (B', A') соответственно. Тогда $E \times E' = \bigcup_k (E \times E')_k$ и всякое компактное подмножество произведения $E \times E'$ содержится хотя бы в одном из подпространств $(E \times E')_k$. Методом, использованным в примере 9.1.5, можно построить сходящуюся спектральную последовательность типа E^1, для которой $E^1_{s,t} \approx H_{s+t}((E \times E')_s, (E \times E')_{s-1}; G)$, а E^∞ — биградуированный модуль, присоединенный к модулю $H_* = H_*((E, E_A), (E', E'_{A'}); G)$ относительно фильтрации

$$F_s H_* = \operatorname{im}\left[H_*((E \times E')_s, E \times E'_{A'} \cup E_A \times E'; G) \to H_*\right].$$

Мы свяжем эту спектральную последовательность с гомологическим прямым произведением спектральных последовательностей расслоений p и p'. Пусть E, E' и E'' — спектральные последовательности типа E^k. *Спариванием* последовательностей E и E' в E'' называется последовательность гомоморфизмов

$$h^r\colon E^r_{s,t} \otimes E'^r_{s',t'} \to E''^r_{s+s',t+t'}\ {}^{1)}$$

для всех $r \geqslant k$, такая, что для всякого элемента $x \in E^r_{s,t}$ справедливо равенство

$$d''^r h^r(x \otimes y) = h^r(d^r x \otimes y) + (-1)^{s+t} h^r(x \otimes d'^r y)$$

и отображение h^{r+1} совпадает с композицией

$$E^{r+1} \otimes E'^{r+1} \approx H(E^r) \otimes H(E'^r) \to H(E^r \otimes E'^r) \xrightarrow{h^r_*} H(E''^r) \approx E''^{r+1}.$$

Рассмотрим последовательность подмодулей, использованную при определении члена E^∞:

$$B^k \subset B^{k+1} \subset \ldots \subset B^r \subset \ldots \subset Z^r \subset \ldots \subset Z^{k+1} \subset Z^k.$$

---

[1]) Правильнее было бы писать $h^r_{(s,t;s',t')}$ и $h^r = \sum_{s,t} h^r_{(s,t;s',t')}$. — *Прим. ред.*

Ясно, что гомоморфизм h^k спаривает модули Z^k и Z'^k в Z''^k таким образом, что произведение $Z^r \otimes Z''$ отображается в Z''^r, а $B^r \otimes Z''^r + Z^r \otimes B'^r$ — в B''^r для всех $r \geqslant k$. Отсюда следует, что гомоморфизм h^k отображает $Z^\infty \otimes Z'^\infty = \left(\bigcap\limits_r Z^r\right) \otimes \left(\bigcap\limits_r Z'^r\right)$ в $\bigcap\limits_r Z''^r = Z''^\infty$, а $B^\infty \otimes Z'^\infty + Z^\infty \otimes B'^\infty = \bigcup\limits_r \left(B^r \otimes \bigcap\limits_j Z'^j\right) + \bigcup\limits_r \left(\bigcap\limits_j Z^j \otimes B'^r\right)$ в $\bigcup\limits_r B''^r = B''^\infty$. Таким образом определяется индуцированное спаривание

$$h^\infty \colon E^\infty \otimes E'^\infty \to E''^\infty,$$

согласованное со спариваниями $\{h^r\}$.

1. **Теорема.** *Пусть $p\colon E \to B$ и $p'\colon E' \to B'$ — ориентируемые расслоения над линейно связными относительными CW-комплексами (B, A) и (B', A') со слоями $F = p^{-1}(b_0)$ и $F' = p'^{-1}(b'_0)$ соответственно. Тогда существует такое спаривание $\{h^r\}$ спектральных последовательностей типа E^1 расслоений p и p' в спектральную последовательность типа E^1 их произведения $p \times p'$, для которого спаривание h^∞ индуцировано спариванием прямого произведения* [1])

$$H_*(E, E_A;\ G) \otimes H_*(E', E'_{A'};\ G') \to H_*((E, E_A) \times (E', E'_{A'});\ G \otimes G').$$

Доказательство. Цепное отображение Эйленберга — Зильбера $\Delta(E, E_A) \otimes \Delta(E', E'_{A'}) \to \Delta((E, E_A) \times (E', E'_{A'}))$ индуцирует отображение

$$F_s\Delta(E, E_A) \otimes F_{s'}\Delta(E', E'_{A'}) \to F_{s+s'}\Delta((E, E_A) \times (E', E'_{A'}))$$

для любых s и s'. Следовательно, оно естественным образом индуцирует спаривание соответствующих спектральных последовательностей. Поскольку цепное отображение Эйленберга — Зильбера индуцирует гомологическое прямое произведение, наше утверждение доказано. ∎

Дадим интерпретацию полученного результата на уровне члена E^2. Пусть цепные комплексы $C_*(B, A)$ и $C_*(B', A')$ относительных CW-комплексов (B, A) и (B', A') соответственно определены так же, как в следствии 9.2.4. Если $\sigma \in \bar{\Delta}_s((B, A)^s, (B, A)^{s-1})$, то

$$\{\sigma\} \in H_s(\bar{\Delta}((B, A)^s, (B, A)^{s-1})) = C_s(B, A),$$

[1]) Имеется в виду спаривание присоединенных групп

$$G(H_*(E, E_A) \otimes H_*(E', E'_{A'})) \to GH_*((E, E_A) \times (E', E'_A)),$$

индуцированное указанным спариванием. — *Прим. ред.*

и эти элементы $\{\sigma\} \in C_s(B, A)$ порождают модуль $C_s(B, A)$. Определим гомоморфизм

$$\psi'': C_s(B, A) \otimes C_{s'}(B', A') \otimes H_n(F \times F'; G'') \to$$
$$\to H_{s+s'+n}\left((E \times E')_{s+s'}, (E \times E')_{s+s'-1}; G''\right),$$

полагая

$$\psi''(\{\sigma\} \otimes \{\sigma'\} \otimes w) = (\bar\sigma \times \bar\sigma')_* T_*\left(\{\xi_s\} \times \{\xi_{s'}\} \times w\right),$$

где $\bar\sigma: (\Delta^s, \dot\Delta^s) \times F \to (E'_s, E'_{s-1})$ и $\bar\sigma': (\Delta^{s'}, \dot\Delta^{s'}) \times F' \to (E'_{s'}, E'_{s'-1})$ — допустимые поднятия симплексов σ и σ' соответственно, а отображение

$$T: (\Delta^s, \dot\Delta^s) \times (\Delta^{s'}, \dot\Delta^{s'}) \times F \times F' \to (\Delta^s, \dot\Delta^s) \times F \times (\Delta^{s'}, \dot\Delta^{s'}) \times F'$$

является перестановкой второго и третьего сомножителей. Тот факт, что отображение ψ'' корректно определено, следует из рассуждений, аналогичных использованным при доказательстве леммы 9.2.14.

2. Лемма. *Отображение ψ'' индуцирует изоморфизм*

$$\psi'': [C_*(B, A) \otimes C_*(B', A')]_s \otimes H_n(F \times F'; G'') \approx E''^1_{s,n},$$

такой, что $\psi'' \circ (\partial \otimes 1) = d^1 \circ \psi''$ и имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc}
C_s(B, A) \otimes H_t(F; G) \otimes C_{s'}(B', A') \otimes H_{t'}(F'; G') & \xrightarrow{\psi \otimes \psi'} & E^1_{s,t} \otimes E'^1_{s',t'} \\
\downarrow{\scriptstyle\varphi} & & \downarrow{\scriptstyle h^1} \\
C_s(B, A) \otimes C_{s'}(B', A') \otimes H_{t+t'}(F \times F'; G'') & \xrightarrow{\psi''} & E''^1_{s+s', t+t'}
\end{array}$$

где $\varphi(c \otimes w \otimes c' \otimes w') = (-1)^{ts'} c \otimes c' \otimes (w \times w')$ (модули G и G' спарены в G'').

Доказательство. Первая часть доказывается рассуждениями, аналогичными использованным при доказательстве леммы 9.2.15. Вторая часть доказывается при помощи цепочки равенств

$$\psi''\varphi(\{\sigma\} \otimes w \otimes \{\sigma'\} \otimes w') = (-1)^{ts'} \psi''(\{\sigma\} \otimes \{\sigma'\} \otimes (w \times w')) =$$
$$= (-1)^{ts'} (\bar\sigma \times \bar\sigma')_* T_*(\{\xi_s\} \times \{\xi_{s'}\} \times (w \times w')) =$$
$$= (\bar\sigma \times \bar\sigma')_*((\{\xi_s\} \times w) \times (\{\xi_{s'}\} \times w')) =$$
$$= h^1(\psi(\{\sigma\} \otimes w) \otimes \psi'(\{\sigma'\} \otimes w')). \blacksquare$$

Из теоремы 1 и леммы 2 следует, что

$$E''^2_{s,t} \approx H_s((B, A) \times (B', A'); H_t(F \times F'; G'')),$$

и спаривание h^2 из $E^2_{s,t}$ и $E'^2_{s',t'}$ в $E''^2_{s+s',t+t'}$ соответствует $(-1)^{ts'}$-кратному спаривания, определенного прямым произведением

$$H_s(B, A; H_t(F; G)) \otimes H_{s'}(B', A'; H_{t'}(F'; G')) \to$$
$$\to H_{s+s'}((B, A) \times (B', A'); H_{t+t'}(F \times F'; G'')),$$

коэффициенты в котором сами спарены с помощью прямого произведения. Другими сл' в ıми, левая часть изоморфна произведению

$$H_s\big((B,\ A)^s,\ (B,\ A)^{s-1}\big) \otimes H_t(F;\ G) \otimes H_{s'}\big((B',\ A')^{s'},\ (B',\ A')^{s'-1}\big) \otimes \\ \otimes H_{t'}(F';\ G'),$$

правая часть изоморфна

$$H_{s+s'}\big(((B,\ A) \times (B',\ A'))^s,\ ((B,\ A) \times (B',\ A'))^{s-1}\big) \otimes H_{t+t'}(F \times F';\ G''),$$

и спаривание переводит элемент $x \otimes y \otimes x' \otimes y'$ в $(-1)^{ts'}(x \times x') \otimes \otimes (y \times y')$.

Теорема 3. *Пусть p: $E \to B$ и p': $E' \to B'$ — ориентируемые расслоения над линейно связными базами со слоями F и F' соответственно. Пусть $A \subset B$ и $A' \subset B'$. Предположим, что пары $\{B \times A',\ A \times B'\}$ и $\{E_A \times E',\ E \times E'_{A'}\}$ удовлетворяют аксиоме вырезания в $B \times B'$ и $E \times E'$ соответственно. Если задано спаривание $G \otimes G' \to G''$, то можно определить спаривание спектральных последовательностей типа E^2 расслоений p и p' в спектральную последовательность типа E^2 расслоения $p \times p'$, ограничение которого на член E^2 совпадает с $(-1)^{ts'}$-кратным спаривания, определенного прямым произведением*

$$H_s(B,\ A;\ H_t(F;\ G)) \otimes H_{s'}(B',\ A';\ H_{t'}(F';\ G')) \to \\ \to H_{s+s'}((B,\ A) \times (B',\ A');\ H_{t+t'}(F \times F';\ G'')),$$

и ограничение которого на E^∞ совместимо со спариванием, определенным прямым произведением:

$$H_n(E,\ E_A;\ G) \otimes H_{n'}(E',\ E'_{A'};\ G') \to H_{n+n'}((E,\ E_A) \times (E',\ E'_{A'});\ G'').$$

Доказательство. Пусть f: $(X,\ A) \to (B,\ A)$ и f': $(X',\ A') \to \to (B',\ A')$ — относительные CW-аппроксимации пар $(B,\ A)$ и $(B',\ A')$ соответственно. Пусть E_X и $E'_{X'}$-индуцированные расслоения над комплексами X и X' соответственно с отвечающими им отображениями

$$\bar{f}\colon\ (E_X,\ E_A) \to (E,\ E_A) \quad \text{и} \quad \bar{f}'\colon\ (E'_{X'},\ E'_{A'}) \to (E',\ E'_{A'}).$$

Из предположений о вырезании следует, что можно применить формулу Кюннета и получить изоморфизмы

$$(f \times f')_*\colon\ H_*((X,\ A) \times (X',\ A')) \approx H_*((B,\ A) \times (B',\ A')),$$
$$(\bar{f} \times \bar{f}')_*\colon\ H_*((E_X,\ E_A) \times (E'_{X'},\ E'_{A'})) \approx H_*((E,\ E_A) \times (E',\ E'_{A'})).$$

Утверждение теперь получается применением теоремы 1 и леммы 2 к расслоениям $E_X \to X$ и $E'_{X'} \to X'$ и из предыдущих замечаний об индуцированном спаривании членов E^2 (при этом результирующая спектральная последовательность типа E^2 не зависит от выбора аппроксимаций X и X'). ■

Спаривание, указанное в теореме 3, обладает свойствами, аналогичными свойствам обычного спаривания, индуцированного прямым произведением. В частности, оно функториально относительно сохраняющих слои отображений и коммутирует с точностью до знака с гомоморфизмом, индуцированным переменой порядка сомножителей в произведении $p \times p'$.

Рассмотрим теперь когомологические спектральные последовательности. Пусть $C^* = \{C^q, \delta\}$ — коцепной комплекс. *Убывающей фильтрацией* F комплекса C^* называется такая последовательность его подкомплексов F^sC^*, что $F^sC^* \supset F^{s+1}C^*$ для всех s. Эта фильтрация *сходится*, если $\bigcup F^sC^* = C^*$ и $\bigcap F^sC^* = 0$. Фильтрация *ограничена сверху*, если для каждого n существует такое $s(n)$, что $F^{s(n)}C^n = 0$. Для сходящейся ограниченной сверху фильтрации коцепного комплекса C^* имеет место аналог теоремы 9.1.2, утверждающий, что существует сходящаяся спектральная последовательность $\{E_r, d_r\}$ типа E_1, для которой член E_r биградуирован модулями $E_r^{s,t}$, а дифференциал d_r, действующий на члене E_r, имеет бистепень $(r, 1-r)$. Далее, $E_1^{s,t} \approx H^{s+t}(F^sC^*/F^{s+1}C^*)$, и оператор d_1 соответствует когграничному оператору триады $(F^sC^*, F^{s+1}C^*, F^{s+2}C^*)$. Предельный член E_∞ является биградуированным модулем, присоединенным к модулю $H^*(C^*)$ относительно следующей фильтрации:

$$F^sH^*(C^*) = \ker\left[H^*(C^*) \to H^*(F^{s-1}C^*)\right]$$

(т. е.

$$E_\infty^{s,t} = \ker\left[H^{s+t}(C^*) \to H^{s+t}(F^{s-1}C^*)\right]/\ker\left[H^{s+t}(C^*) \to H^{s+t}(F^sC^*)\right]).$$

4. Пример. Пусть $\{X_s\}$ — возрастающая фильтрация пары (X, A), и пусть $\bar{\Delta}(X, A)$ — подкомплекс комплекса $\Delta(X, A)$, порожденный всеми теми сингулярными симплексами $\sigma\colon \Delta^q \to X$, для которых $\sigma((\Delta^q)^k) \subset X_k$ при всех k. Пусть $\bar{C}^* = \operatorname{Hom}(\bar{\Delta}(X, A), G)$. Убывающая фильтрация комплекса $\bar{C}^*$ определяется следующим образом:

$$F^s\bar{C}^* = \{c \in \bar{C}^* \mid c \mid \bar{\Delta}(X_{s-1}, A) = 0\},$$

где $\bar{\Delta}(X_{s-1}, A) = \bar{\Delta}(X, A) \cap \Delta(X_{s-1}, A)$. Так как $\bar{\Delta}_s(X, A) = \bar{\Delta}_s(X_s, A)$, то $F^{s+1}\bar{C}_s^* = 0$, и, значит, эта фильтрация ограничена сверху. В случае когда фильтрация пары (X, A) ограничена снизу (т. е. $X_s = A$ для некоторого s), мы имеем $\bigcup F^s\bar{C}^* = \{c \in \bar{C}^* \mid c \mid \bar{\Delta}(A, A) = 0\} = \bar{C}^*$. Следовательно, возникающая в этом случае спектральная последовательность типа E_1 сходится. В случае когда вложения $\bar{\Delta}(X, A) \subset \Delta(X, A)$ и $\bar{\Delta}(X_s, A) \subset \Delta(X, A)$ являются цепными эквивалентностями, эта спектральная последовательность обладает тем свойством, что $E_1^{s,t} \approx H^{s+t}(X_s, X_{s-1}; G)$ и E_∞ — биградуированный мо дуль, присоединенный к модулю $H^*(X, A; G)$ относительно фильтрации

$$F^sH^*(X, A; G) = \ker[H^*(X, A; G) \to H^*(X_{s-1}, A; G)].$$

В частности, если (X, A) — относительный CW-комплекс, $X_s = (X, A)^s$ при $s \geqslant 0$ и $X_s = A$ при $s < 0$, то из теоремы 9.2.3 следует, что все перечисленные выше условия выполняются и

$$E_1^{s,t} \approx H^{s+t}((X, A)^s, (X, A)^{s-1}; G) = 0, \quad t \neq 0.$$

Следовательно, эта спектральная последовательность состоит лишь из одной строки, и модуль $H^s(X, A; G)$ изоморфен $E_2^{s,0} \approx H^*(C^*)$, где $C^* = \{C^q, \delta\}$ — коцепной комплекс

$$C^q = H^q((X, A)^q, (X, A)^{q-1}; G),$$

а δ — кограничный оператор триады $((X, A)^q, (X, A)^{q-1}, (X, A)^{q-2})$. Согласно теореме об универсальных коэффициентах для когомологий, $C^* = \operatorname{Hom}(C_*(X, A), G)$. Таким образом, мы доказали, что

$$H^*(X, A; G) \approx H^*(C_*(X, A); G).$$

5. **Теорема.** *Пусть $p: E \to B$ — расслоение над относительным CW-комплексом (B, A). Тогда существует сходящаяся когомологическая спектральная последовательность типа E_1, для которой $E_1^{s,t} \approx H^{s+t}(E_s, E_{s-1}; G)$, а E_∞ — биградуированный модуль, присоединенный к модулю $H^*(E, E_A; G)$ относительно фильтрации*

$$F^sH^*(E, E_A; G) = \ker[H^*(E, E_A; G) \to H^*(E_{s-1}, E_A; G)].$$

Доказательство. Поскольку $(B, (B, A)^s)$ есть s-связная пара, из теоремы 7.2.8 следует, что пара (E, E_s) также s-связна. Согласно теореме 9.2.3, цепной комплекс $\bar{\Delta}(E, E_A)$ цепно эквивалентен комплексу $\Delta(E, E_A)$, а $\bar{\Delta}(E_s, E_A)$ — комплексу $\Delta(E_s, E_A)$. Утверждение теоремы теперь следует из построений примера 4. ∎

Для вычисления члена $E_1^{s,t}$ предположим, что пространство B линейно связно, а $p: E \to B$ — ориентируемое расслоение. Пусть $F = p^{-1}(b_0)$, и пусть $\sigma: (\Delta^s, \dot{\Delta}^s) \to ((B, A)^s, (B, A)^{s-1})$ — некоторый сингулярный симплекс, принадлежащий комплексу $\bar{\Delta}(B, A)$. Если $\bar{\sigma}: (\Delta^s, \dot{\Delta}^s) \times F \to (E_s, E_{s-1})$ — допустимое поднятие симплекса σ, то гомоморфизм

$$\bar{\sigma}^*: H^n(E_s, E_{s-1}; G) \to H^n((\Delta^s, \dot{\Delta}^s) \times F; G)$$

зависит только от σ и не зависит от частного выбора поднятия $\bar{\sigma}$ (поскольку расслоение ориентируемо). Пусть образующая $\{\xi_s\}^* \in H^s(\Delta^s, \dot{\Delta}^s)$ определена условием $\langle\{\xi_s\}^*, \{\xi_s\}\rangle = 1$. Из теоремы 5.6.1 следует, что отображение $v \to \{\xi_s\}^* \times v$ является изоморфизмом

$$H^q(F; G) \approx H^{s+q}((\Delta^s, \dot{\Delta}^s) \times F; G).$$

Как и в теореме 9.2.13 и лемме 9.2.14, можно показать, что существует корректно определенный гомоморфизм

$$\psi^*\colon H^n(E_s, E_{s-1}; G) \to H^s((B, A)^s, (B, A)^{s-1}; H^{n-s}(F; G)),$$

заданный уравнением

$$\{\xi_s\}^* \times \langle \psi^*(u), \{\sigma\}\rangle = \bar{\sigma}^*(u),$$

где $\sigma\colon (\Delta^s, \dot{\Delta}^s) \to ((B, A)^s, (B, A)^{s-1})$ — некоторый сингулярный симплекс, $\bar{\sigma}\colon (\Delta^s, \dot{\Delta}^s) \times F \to (E_s, E_{s-1})$ — его допустимое поднятие и $\langle \psi^*(u), \{\sigma\}\rangle \in H^{n-s}(F; G)$. Аналогом теоремы 9.2.15 является утверждение о том, что ψ^* — изоморфизм (при этом используется вторая часть леммы 9.2.2 вместо первой) и что он коммутирует с дифференциалом d_1 и когграничным оператором триады $((B, A)^s, (B, A)^{s-1}, (B, A)^{s-2})$. Используя технику относительной CW-аппроксимации, мы приходим к следующему аналогу теоремы 9.2.17:

6. Теорема. *Пусть $p\colon E \to B$ — ориентируемое расслоение над линейно связной базой, и пусть $F = p^{-1}(b_0)$. Для всякого $A \subset B$ существует сходящаяся когомологическая спектральная последовательность типа E_2, такая, что $E_2^{s,t} \approx H^s(B, A; H^t(F; G))$, а E_∞ — биградуированный модуль, присоединенный к модулю $H^*(E, E_A; G)$ относительно некоторой фильтрации. Эта спектральная последовательность есть спектральная последовательность первой четверти, функториальная на категории ориентируемых расслоений и сохраняющих слои отображений.* ■

При описании мультипликативных свойств когомологических спектральных последовательностей мы будем использовать следующий результат о спариваниях таких последовательностей:

7. Теорема. *Пусть $p\colon E \to B$ и $p'\colon E' \to B'$ — ориентируемые расслоения над линейно связными относительными CW-комплексами (B, A) и (B', A') со слоями F и F'. Тогда можно определить спаривание $\{h_r\}$ когомологических спектральных последовательностей типа E_1 расслоений p и p' в когомологическую спектральную последовательность типа E_1 расслоения $p \times p'$, ограничение которого на E_2 индуцировано $(-1)^{ts'}$-кратным спаривания прямого произведения*

$$H^s(B, A; H^t(F; G)) \otimes H^{s'}(B', A'; H^{t'}(F'; G')) \to$$
$$\to H^{s+s'}((B, A) \times (B', A'); H^{t+t'}(F \times F'; G'')),$$

а на E_∞ — спариванием прямого произведения

$$H^*(E, E_A; G) \otimes H^*(E', E'_{A'}; G') \to H^*((E, E_A) \times (E', E'_{A'}); G'')$$

(модули G и G' спарены в G'').

Доказательство. Имеют место цепные эквивалентности

$$\bar\Delta(E, E_A)\otimes\bar\Delta(E', E'_{A'})\subset\Delta(E, E_A)\otimes\Delta(E', E'_{A'})\to\Delta((E, E_A)\times(E', E'_A))$$

и, следовательно, изоморфизм

$$H^*((E, E_A)\times(E', E'_{A'}); G'')\approx H^*(\bar\Delta(E, E_A)\otimes\bar\Delta(E', E'_{A'}); G'').$$

В комплексе $C^*=\operatorname{Hom}(\bar\Delta(E, E_A)\otimes\bar\Delta(E', E'_{A'}), G'')$ определим фильтрацию, полагая

$$F^sC^*=\{c\in C^*\,|\,c\,|\bar\Delta(E_i, E_A)\otimes\bar\Delta(E'_j, E'_{A'})=0,\ i+j=s-1\}.$$

Тогда прямое произведение

$$\operatorname{Hom}(\bar\Delta(E, E_A), G)\otimes\operatorname{Hom}(\bar\Delta(E', E'_{A'}), G')\to C^*$$

отображает модуль $F^s\otimes F^{s'}$ в $F^{s+s'}C^*$. Отсюда очевидным образом вытекает, что это произведение индуцирует спаривание соответствующих когомологических спектральных последовательностей и что спаривание h_∞ обладает сформулированным свойством.

Докажем теперь утверждение о спаривании h_2. Пусть C_* и C'_* — цепные комплексы пар (B, A) и (B', A') соответственно, и пусть $C''_*=C_*\otimes C'_*$. Определим гомоморфизм

$$\psi''^*\colon E''^{s,t}_1\to\operatorname{Hom}(C''_s, H^t(F\times F'; G''))$$

условием

$$\{\xi_i\}^*\times\{\xi_j\}^*\times\langle\psi''^*(u), \{\sigma\}\times\{\sigma'\}\rangle=(\bar\sigma\times\bar\sigma')^*(u),$$

где $\sigma\colon(\Delta^i, \dot\Delta^i)\to((B, A)^i, (B, A)^{i-1})$ и $\sigma'\colon(\Delta^j, \dot\Delta^j)\to((B', A')^j, (B', A')^{j-1})$ — произвольные сингулярные симплексы $(i+j=s)$, а $\bar\sigma\colon(\Delta^i, \dot\Delta^i)\times F\to\to(E_i, E_{i-1})$ и $\bar\sigma'\colon(\Delta^j, \dot\Delta^j)\times F'\to(E'_j, E'_{j-1})$ — их допустимые поднятия $(u\in H^{s+t}((E\times E')_s, (E\times E')_{s-1}; G\otimes G'))$. Тогда ψ'' — изоморфизм, при котором оператор d_1 переходит в кограничный оператор коцепного комплекса $\operatorname{Hom}(C''_*, H^*(F\times F'; G''))$.

Далее, если $v\in E_1^{s,t}$ и $v'\in E'^{s',t'}_1$, то $v\times v'\in E''^{s+s',t+t'}_1$ и из определений следует, что

$$\begin{aligned}\{\xi_s\}^*\times\{\xi_{s'}\}^*\times\langle\psi''^*(v\times v'), \{\sigma\}\times\{\sigma'\}\rangle&=\\=(\bar\sigma\times\bar\sigma')^*(v\times v')=\bar\sigma^*(v)\times\bar\sigma'^*(v')&=\\=(\{\xi_s\}^*\times\langle\psi^*(v), \{\sigma\}\rangle)\times(\{\xi_{s'}\}^*\times\langle\psi'^*(v'), \{\sigma'\}\rangle)&=\\=(-1)^{ts'}\{\xi_s\}^*\times\{\xi_{s'}\}^*\times\langle\psi^*(v)\times\psi'^*(v'), \{\sigma\}\times\{\sigma'\}\rangle.&\end{aligned}$$

Следовательно, $\psi''^*(v\times v')=(-1)^{ts'}\psi^*(v)\times\psi'^*(v')$, откуда и вытекает утверждение о спаривании h_2. ■

Доказанная теорема позволяет получить следующее важное мультипликативное свойство когомологической спектральной последовательности расслоения:

8. Теорема. *Пусть* $p\colon E \to B$ — *ориентируемое расслоение над линейно связной базой со слоем* F. *Пусть пара* $\{A_1, A_2\}$ *линейно связных подпространств базы* B, *удовлетворяющая аксиоме вырезания в* B, *такова, что пара* $\{E_{A_1}, E_{A_2}\}$ *также удовлетворяет аксиоме вырезания в* E. *Тогда существует функториальное спаривание когомологических спектральных последовательностей типа* E_2 *пар* (E, E_{A_1}) *и* (E, E_{A_2}) *в когомологическую спектральную последовательность типа* E_2 *пары* $(E, E_{A_1} \cup E_{A_2})$, *которое на члене* E_2 *изоморфно* $(-1)^{ts'}$-*кратному спаривания, соответствующего произведению* (G *и* G' *спарены в* G''):

$$H^s(B, A_1; H^t(F; G)) \otimes H^{s'}(B, A_2; H^{t'}(F'; G')) \to$$
$$\to H^{s+s'}(B, A_1 \cup A_2; H^{t+t'}(F; G'')),$$

а на члене E_∞ *индуцировано спариванием, соответствующим* $\smile$-*произведению*:

$$H^*(E, E_{A_1}; G) \otimes H^*(E, E_{A_2}; G') \to H^*(E, E_{A_1} \cup E_{A_2}; G'').$$

Доказательство. Покажем прежде всего, что существуют CW-комплекс X, его подкомплексы X_1 и X_2 и слабая гомотопическая эквивалентность $f\colon X \to B$, ограничения которой $f\,|\,X_1\colon X_1 \to A_1$ и $f\,|\,X_2\colon X_2 \to A_2$ также представляют собой слабые гомотопические эквивалентности. Действительно, пусть $g\colon Y \to B$, $g_1\colon Y_1 \to A_1$ и $g_2\colon Y_2 \to A_2$ — некоторые CW-аппроксимации. Тогда существуют такие отображения $g_1'\colon Y_1 \to Y$ и $g_2'\colon Y_2 \to Y$ (которые можно считать клеточными), что отображения $g \circ g_1'\colon Y_1 \to B$ и $g \circ g_2'\colon Y_2 \to B$ гомотопны соответственно композициям $Y_1 \xrightarrow{g_1} A_1 \overset{i}{\subset} B$ и $Y_2 \xrightarrow{g_2} A_2 \overset{i'}{\subset} B$. Пусть CW-комплекс X получен из несвязного объединения $Y_1 \times I \cup Y \cup Y_2 \times I$ отождествлением точек $(y_1, 0)$ и $g_1'(y_1) \in Y$ для всех $y_1 \in Y_1$ и точек $(y_2, 0)$ и $g_2'(y_2) \in Y$ для всех $y_2 \in Y_2$. Пусть $k\colon Y_1 \times I \cup Y \cup Y_2 \times I \to X$ — проекция. Определим отображение $f\colon X \to B$ так, чтобы $(f \circ k)\,|\,Y = g$, отображение $(f \circ k)\,|\,Y_1 \times I$ было гомотопией между отображениями $g \circ g_1'$ и $i \circ g_1$, а отображение $(f \circ k)\,|\,Y_2 \times I$ — между $g \circ g_2'$ и $i' \circ g_2$. Пусть $X_1 = k(Y_1 \times 1)$ и $X_2 = k(Y_2 \times 1)$. Заметим, что X_1 и X_2 — такие подкомплексы комплекса X, что $f\,|\,X_1\colon X_1 \to A_1$ и $f\,|\,X_2\colon X_2 \to A_2$ — слабые гомотопические эквивалентности. Далее, $k(Y)$ — сильный деформационный ретракт пространства X. Поскольку $f\,|\,k(Y)\colon k(Y) \to B$ — слабая гомотопическая эквивалентность, таково же и отображение $f\colon X \to B$. Следовательно, отображение $f\colon X \to B$ обладает нужными нам свойствами.

Поскольку пара $\{A_1, A_2\}$ удовлетворяет аксиоме вырезания, отображение f индуцирует изоморфизм

$$f^*\colon H^*(B, A_1 \cup A_2) \approx H^*(X, X_1 \cup X_2).$$

Пусть $p'\colon E_X \to X$ — индуцированное расслоение над X, и пусть $\bar{f}\colon E_X \to E$ — соответствующее отображение. Тогда $\bar{f}$ индуцирует изоморфизмы

$$H^*(E, E_{A_1}) \approx H^*(E_X, E_{X_1}) \quad \text{и} \quad H^*(E, E_{A_2}) \approx H^*(E_X, E_{X_2}).$$

Поскольку пара $\{E_{A_1}, E_{A_2}\}$ удовлетворяет аксиоме вырезания, отображение $\bar{f}$ также индуцирует изоморфизм

$$H^*(E, E_{A_1} \cup E_{A_2}) \approx H^*(E_X, E_{X_1} \cup E_{X_2}).$$

Согласно теореме 7, существует спаривание когомологических спектральных последовательностей типа E_2 пар (E_X, E_{X_1}) и (E_X, E_{X_2}) в когомологическую спектральную последовательность типа E_2 пары $(E_X, E_{X_1}) \times (E_X, E_{X_2})$, которому соответствует гомологическое прямое произведение на E_2 и E_∞. Имеет место коммутативная диаграмма (горизонтальные отображения которой суть соответствующие диагональные отображения)

$$\begin{array}{ccc} E_X & \to & E_X \times E_X \\ {\scriptstyle p'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p' \times p'} \\ X & \to & X \times X \end{array}$$

Пусть $d\colon X \to X \times X$ — некоторая клеточная аппроксимация диагонального отображения, для которой $d(X_1) \subset X_1 \times X_1$ и $d(X_2) \subset \subset X_2 \times X_2$ (такие аппроксимации существуют). Значит, можно определить поднятие $\bar{d}\colon E_X \to E_X \times E_X$ отображения $d \circ p'\colon E_X \to X \times X$, гомотопное диагональному отображению $E_X \to E_X \times E_X$. Тогда $\bar{d}$ отображает фильтрацию пары $(E_X, E_{X_1} \cup E_{X_2})$ в фильтрацию пары $(E_X, E_{X_1}) \times (E_X, E_{X_2})$ и, значит, индуцирует гомоморфизм когомологических спектральных последовательностей типа E_2 пары $(E_X, E_{X_1}) \times (E_X, E_{X_2})$ в когомологическую спектральную последовательность типа E_2 пары $(E_X, E_{X_1} \cup E_{X_2})$. Так как отображение $\bar{d}$ переводит прямое произведение в $E_X \times E_X$ в $\smile$-произведение в E_X, композиция этого гомоморфизма с указанным выше спариванием является спариванием спектральных последовательностей пар (E_X, E_{X_1}) и (E_X, E_{X_2}) в спектральную последовательность пары $(E_X, E_{X_1} \cup E_{X_2})$, которое индуцирует $\pm\smile$-произведение в членах E_2 и E_∞.

Изоморфизмы, индуцированные отображениями f и $\bar{f}$, позволяют получить спаривание когомологических спектральных последовательностей типа E_2 пар (E, E_{A_1}) и (E, E_{A_2}) в когомологическую спектральную последовательность типа E_2 пары $(E, E_{A_1} \cup E_{A_2})$, индуцированное $\pm\smile$-произведением в членах E_2 и E_∞. Получающееся в результате спаривание не зависит от выбора аппроксимации пространства X. ■

9. Следствие. *Пусть* $p\colon E \to B$ — *ориентируемое расслоение над линейно связной базой* B *со слоем* F. *Для всякого* $A \subset B$ *существует сходящаяся когомологическая спектральная последовательность типа* E_2, *состоящая из биградуированных алгебр, для которой* $E_2^{s,t} \approx H^s(B, A; H^t(F; R))$, *а* E_∞ — *биградуированная алгебра, присоединенная относительно некоторой фильтрации к алгебре* $H^*(E, E_A; R)$. *Эта спектральная последовательность функториальна на категории таких расслоений и сохраняющих слои отображений.* ■

§ 5. Применение когомологической спектральной последовательности

Поскольку когомологическая спектральная последовательность расслоения обладает мультипликативной структурой, она является более мощным орудием исследования, чем гомологическая спектральная последовательность. Мы используем ее для вывода обобщенных когомологических последовательностей Вана и Гизина, а затем для получения другого описания инварианта Хопфа в некоторых размерностях. Этот параграф заканчивается некоторыми результатами о гомологиях и когомологиях пространств типа $(\pi, 1)$.

Пусть $p\colon E \to B$ — ориентируемое расслоение над линейно связной базой со слоем F. Прежде всего мы опишем гомоморфизм $i^*\colon H^*(E; G) \to H^*(F; G)$, где $i\colon F \subset E$ — вложение слоя в пространство расслоения, в терминах спектральной последовательности расслоения E. Поскольку мы имеем дело со спектральной последовательностью первой четверти, определено вложение $E_\infty^{0,t} \subset E_2^{0,t}$. Из линейной связности B следует, что $H^0(B; H^t(F; G)) \approx \approx H^t(F; G)$. Так как когомологическая спектральная последовательность функториальна, гомоморфизм i^* отображает спектральную последовательность расслоения $E \to B$ в спектральную последовательность расслоения $F \to b_0$. Следовательно, гомоморфизм $i^*\colon H^*(E; G) \to H^*(F; G)$ совпадает с композицией

$$H^t(E; G) = F^0H^t(E; G) \to E_\infty^{0,t} \to E_2^{0,t} \approx H^0(B; H^t(F; G)) \approx H^t(F; G).$$

Это приводит к следующей *обобщенной когомологической последовательности Вана*:

1. Теорема. *Пусть* $p\colon E \to B$ — *расслоение со слоем* F *над односвязной базой, являющейся* n-*мерной когомологической сферой (над кольцом* R), $n \geqslant 2$. *Тогда имеет место точная последовательность*

$$\ldots \to H^t(E; G) \xrightarrow{i^*} H^t(F; G) \xrightarrow{\theta} H^{t-n+1}(F; G) \to H^{t+1}(E; G) \xrightarrow{i^*} \ldots,$$

причем $\theta(u \smile v) = \theta(u) \smile v + (-1)^{(n+1)\deg u} u \smile \theta(v)$ (*с соответствующим образом спаренными коэффициентами*).

Доказательство. Так как когомологии пространства B не имеют кручения, для когомологической спектральной последовательности расслоения $E \to B$ мы имеем

$$E_2^{s,t} \approx H^s(B) \otimes H^t(F;\ G) = 0, \quad s \neq 0,\ n.$$

Как и при доказательстве теоремы 9.3.2, это приводит к точной последовательности

$$\ldots \to H^t(E;\ G) \to E_2^{0,t} \xrightarrow{d_n} E_2^{n,\,t-n+1} \to H^{t+1}(E;\ G) \to \ldots.$$

Пусть $1 \in H^0(B)$ — единичный класс, и пусть $w \in H^n(B)$ — некоторая образующая. Отображение $u \to 1 \otimes u$ является изоморфизмом модулей $H^t(F;\ G)$ и $E_2^{0,t}$, а отображение $v \to w \otimes v$ является изоморфизмом модулей $H^{t-n+1}(F;\ G)$ и $E_2^{n,\,t-n+1}$. Определим гомоморфизм θ: $H^t(F;\ G) \to H^{t-n+1}(F;\ G)$ условием

$$d_n(1 \otimes u) = w \otimes \theta(u).$$

Тогда нужная нам точная последовательность получается из написанной выше заменой члена $E_2^{0,t}$ модулем $H^t(F;\ G)$, члена $E_2^{n,\,t-n+1}$ модулем $H^{t-n+1}(F;\ G)$ и, наконец, заменой гомоморфизма d_n гомоморфизмом θ. Для проверки того, что θ обладает сформулированным мультипликативным свойством, воспользуемся тем, что d_n — дифференцирование. Имеем

$$\begin{aligned} w \otimes \theta(u \smile v) &= d_n(1 \otimes (u \smile v)) = d_n(1 \otimes u \smile 1 \otimes v) = \\ &= d_n(1 \otimes u) \smile 1 \otimes v + (-1)^{\deg u}\, 1 \otimes u \smile d_n(1 \otimes v) = \\ &= w \otimes \left[\theta(u) \smile v + (-1)^{(n+1)\deg u} u \smile \theta(v)\right]. \ \blacksquare \end{aligned}$$

Пусть p: $E \to B$ — ориентируемое расслоение над линейно связной базой, и пусть $B' \subset B$ и $E' = p^{-1}(B')$. Мы хотим интерпретировать гомоморфизм

$$p^*\colon H^*(B,\ B';\ G) \to H^*(E,\ E';\ G)$$

в терминах когомологической спектральной последовательности расслоения $(E,\ E')$. Поскольку эта спектральная последовательность есть спектральная последовательность первой четверти, определен эпиморфизм $E_2^{s,0} \to E_\infty^{s,0}$. Аугментация $G \to H^0(F;\ G)$ индуцирует гомоморфизм $H^s(B,\ B';\ G) \to H^s(B,\ B';\ H^0(F;\ G))$. Используя спектральную последовательность расслоения $B \subset B$ и свойство функториальности этой спектральной последовательности, находим, что гомоморфизм $p^*\colon H^s(B, B'; G)\to H^s(E, E'; G)$ совпадает с композицией

$$H^s(B, B'; G)\to H^s(B, B'; H^0(F; G))\approx$$
$$\approx E_2^{s,0}\to E_\infty^{s,0}\approx F^sH^s(E, E'; G)\subset H^s(E, E'; G).$$

Это приводит к следующей *обобщенной когомологической последовательности Гизина*:

2. Теорема. *Пусть $p\colon E\to B$ — ориентируемое расслоение над линейно связной базой, слой которого F является n-мерной когомологической сферой (над кольцом R), $n\geqslant 1$. Если $B'\subset B$ и $E'=p^{-1}(B')$, то имеет место точная последовательность*

$$\ldots\xrightarrow{p^*} H^s(E, E'; G)\to H^{s-n}(B, B'; G)\xrightarrow{\Psi}$$
$$\to H^{s+1}(B, B'; G)\xrightarrow{p^*} H^{s+1}(E, E'; G)\to\ldots,$$

где $\Psi(u)=u\smile\Omega$ для некоторого элемента $\Omega\in H^{n+1}(B; R)$. Если n четно, то $2\Omega=0$.

Доказательство. Для когомологической спектральной последовательности расслоения (E, E') мы имеем

$$E_2^{s,t}\approx H^s(B, B'; H^t(F; G))=0,\quad t\neq 0, n.$$

Как и при доказательстве теоремы 9.3.3, это приводит к точной последовательности

$$\ldots\to H^s(E, E'; G)\to E_2^{s-n,n}\xrightarrow{d_{n+1}} E_2^{s+1,0}\to H^{s+1}(E, E'; G)\to\ldots.$$

Пусть $1\in H^0(F; R)$ — единичный класс, а $w\in H^n(F; R)$ — некоторая образующая. Этим образующим соответствуют изоморфизмы $G\approx H^0(F; G)$ и $G\approx H^n(F; G)$. Следовательно, мы получаем изоморфизмы

$$H^s(B, B'; G)\approx H^s(B, B'; H^0(F; G))\approx E_2^{s,0},$$

композицию которых обозначим через $\alpha\colon H^s(B, B'; G)\approx E_2^{s,0}$, и изоморфизмы

$$H^s(B, B'; G)\approx H^s(B, B'; H^n(F; G))\approx E_2^{s,n},$$

композицию которых обозначим через $\beta\colon H^s(B, B'; G)\approx E_2^{s,n}$. Определим гомоморфизм $\Psi\colon H^{s-n}(B, B'; G)\to H^{s+1}(B, B'; G)$ с помощью соотношения

$$\alpha\Psi(u)=(-1)^{\deg u}d_{n+1}\beta(u).$$

Нужная нам точная последовательность получается из написанной выше заменой члена $E_2^{s-n,n}$ модулем $H^{s-n}(B, B'; G)$, члена $E_2^{s+1,0}$ модулем $H^{s+1}(B, B'; G)$ и, наконец, гомоморфизма d_{n+1} — гомоморфизмом Ψ.

В спектральной последовательности расслоения E с коэффициентами в кольце R имеют место аналогичные изоморфизмы α: $H^s(B; R) \approx E_2^{s,0}$ и β: $H^s(B; R) \approx E_2^{s,n}$. Обозначим символом 1 единичный класс модуля $H^0(B; R)$. Определим элемент $\Omega \in H^{n+1}(B; R)$ с помощью соотношения

$$\alpha(\Omega) = d_{n+1}\beta(1).$$

Для проверки равенства $\Psi(u) = u \smile \Omega$ мы используем спаривание, определенное $\smile$-произведением, спектральной последовательности расслоения (E, E') с коэффициентами в модуле G и спектральной последовательности расслоения E с коэффициентами в кольце R в спектральную последовательность расслоения (E, E') с коэффициентами в модуле G. Тогда

$$\alpha\Psi(u) = (-1)^{\deg u} d_{n+1}\beta(u) = (-1)^{\deg u} d_{n+1}(\alpha(u) \smile \beta(1)) = \\ = \alpha(u) \smile d_{n+1}\beta(1) = \alpha(u) \smile \alpha(\Omega) = \alpha(u \smile \Omega).$$

Следовательно, $\Psi(u) = u \smile \Omega$. Так как $w \smile w = 0$, в спектральной последовательности расслоения E справедливо равенство $\beta(1) \smile \smile \beta(1) = 0$. Следовательно, если n четно, то

$$0 = d_{n+1}(\beta(1) \smile \beta(1)) = \alpha(\Omega) \smile \beta(1) + \beta(1) \smile \alpha(\Omega) = \beta(2\Omega),$$

откуда $2\Omega = 0$. ∎

Мы используем когомологическую спектральную последовательность для получения другой интерпретации целого числа $|H[\alpha]|$, где $[\alpha] \in \pi_{2n+1}(S^{n+1})$, а H: $\pi_{2n+1}(S^{n+1}) \to \pi_{2n-1}(S^{2n-1})$ — инвариант Хопфа, определенный в § 9.3.

3. Теорема. *Пусть отображение* α: $S^{2n+1} \to S^{n+1}$ *сохраняет отмеченную точку, и пусть CW-комплекс* Y_α *получен приклеиванием* $(2n+2)$*-мерной клетки к сфере* S^{n+1} *при помощи отображения* α. *Тогда обе группы* $H^{n+1}(Y_\alpha)$ *и* $H^{2n+2}(Y_\alpha)$ *бесконечные циклические, и если* u *и* v *— их соответствующие образующие, то* $u \smile u = \pm |H[\alpha]| v$.

Доказательство. Если Z — цилиндр отображения α, то $Y_\alpha = Z/S^{2n+1}$ и, значит, $H^*(Y_\alpha) \approx H^*(Z, S^{2n+1})$. Допустим, что $u \in H^{n+1}(Z, S^{2n+1})$ и $v \in H^{2n+2}(Z, S^{2n+1})$ — образующие. Достаточно доказать, что $u \smile u = \pm |H[\alpha]| v$.

Пусть r: $Z \to S^{n+1}$ — ретракция, и пусть $E \to Z$ — главное расслоение, индуцированное отображением r. Поскольку r — гомотопическая эквивалентность, индуцированное отображение $E \to \to PS^{n+1}$ индуцирует изоморфизм гомологий. Следовательно, $\tilde{H}_*(E) = 0$ и $\tilde{H}^*(E) = 0$. Ограничение расслоения E на S^{2n+1} представляет собой главное расслоение $E_\alpha \to S^{2n+1}$, индуцированное отображением α. Согласно теореме 9.3.10, $|H[\alpha]| = m$ тогда и только тогда, когда $H_{2n}(E_\alpha) \approx \mathbf{Z}_m$. Используя соответствующую часть точной гомологической последовательности Вана расслоения E_α:

$$0 \to H_{2n+1}(E_\alpha) \to H_0(\Omega S^{n+1}) \to H_{2n}(\Omega S^{n+1}) \to H_{2n}(E_\alpha) \to 0,$$

мы видим, что если $m \neq 0$, то $H_{2n+1}(E_\alpha) = 0$, а если $m = 0$, то $H_{2n+1}(E_\alpha) \approx \mathbf{Z}$. Согласно формуле универсальных коэффициентов для когомологий, $H^{2n+1}(E_\alpha) \approx \mathbf{Z}_m$ независимо от того, равно число m нулю или нет (напомним, что мы полагаем $\mathbf{Z}_0 = \mathbf{Z}$).

Так как $\tilde{H}^*(E) = 0$, имеет место изоморфизм

$$\delta\colon H^{2n+1}(E_\alpha) \approx H^{2n+2}(E, E_\alpha),$$

и, значит, $H^{2n+2}(E, E_\alpha) \approx \mathbf{Z}_m$, где $m = |H[\alpha]|$. Вычислим теперь порядок группы $H^{2n+2}(E, E_\alpha)$, используя когомологическую спектральную последовательность.

Если $s + t = 2n + 2$, то среди членов $E_2^{s,t}$ единственным ненулевым является

$$E_2^{2n+2,0} \approx H^{2n+2}(Z, S^{2n+1}) \otimes H^0(\Omega S^{n+1}),$$

а если $s + t = 2n + 1$, то среди членов $E_2^{s,t}$ единственным ненулевым является

$$E_2^{n+1,n} \approx H^{n+1}(Z, S^{2n+1}) \otimes H^n(\Omega S^{n+1}).$$

Отсюда следует, что

$$H^{2n+2}(E, E_\alpha) \approx E_\infty^{2n+2,0} \approx E_2^{2n+2,0}/d_{n+1}(E_2^{n+1,n}).$$

Пусть образующая $u' \in H^{n+1}(Z)$ определена как ограничение $u' = u|Z$. Тогда из равенства $\tilde{H}^*(E) = 0$ выводим существование образующей $w \in H^n(\Omega S^{n+1})$, для которой в спектральной последовательности расслоения E имеет место равенство $d_{n+1}(1 \otimes w) = u' \otimes 1$. Используя спаривание когомологических спектральных последовательностей расслоений (E, E_α) и E в когомологическую спектральную последовательность расслоения (E, E_α), получаем

$$\begin{aligned} d_{n+1}(u \otimes w) &= d_{n+1}(u \otimes 1 \smile 1 \otimes w) = \\ &= \pm u \otimes 1 \smile d_{n+1}(1 \otimes w) = \pm u \otimes 1 \smile u' \otimes 1 = \\ &= \pm (u \smile u') \otimes 1 = \pm (u \smile u) \otimes 1. \end{aligned}$$

Следовательно, группа $H^{2n+2}(E, E_\alpha)$ тогда и только тогда является бесконечной циклической, когда $u \smile u = 0$, и тогда и только тогда имеет порядок m, когда $u \smile u = \pm mv$. Сравнивая это с приведенным выше описанием группы $H^{2n+2}(E, E_\alpha)$, получаем нужный нам результат. ■

4. Следствие. *Для всякого целого числа $m \geqslant 1$ инвариант Хопфа*

$$H\colon \pi_{4m+1}(S^{2m+1}) \to \pi_{4m-1}(S^{4m-1})$$

является тривиальным гомоморфизмом.

Доказательство. Если для какого-нибудь отображения $\alpha\colon S^{4m+1} \to S^{2m+1}$ CW-комплекс Y_α получен приклеиванием $(4m+2)$-мерной клетки к S^{2m+1} при помощи отображения α, и если $u \in H^{2m+1}(Y_\alpha)$ — произвольный элемент, то $u \smile u = -u \smile u$ и, значит, $u \smile u = 0$. Из теоремы 3 следует, что $|H[\alpha]| = 0$, и, следовательно, $H[\alpha] = 0$ для всех $[\alpha] = \pi_{4m+1}(S^{2m+1})$. ■

5. Следствие. *Пусть $\alpha_{2m}\colon S^{4m-1} \to S^{2m}$ — отображение, использованное при построении CW-комплекса X^{4m} $(m \geqslant 1)$. Тогда $|H[\alpha_{2m}]| = 2$.*

Доказательство. Вспомним определение CW-комплекса $X^{4m} = Y_{\alpha_{2m}}$, данное в § 9.3. Определена проекция $k\colon S^{2m} \times S^{2m} \to X^{4m}$, обладающая тем свойством, что если $u' \in H^{2m}(S^{2m})$ — образующая, то существуют образующие $u \in H^{2m}(X^{4m})$ и $v \in H^{4m}(X^{4m})$, для которых $k^*u = u' \times 1 + 1 \times u'$ и $k^*v = u' \times u'$. Тогда

$$k^*(u \smile u) = (u' \times 1 + 1 \times u') \smile (u' \times 1 + 1 \times u') = 2u' \times u'.$$

Поскольку $k^*\colon H^{4m}(X^{4m}) \approx H^{4m}(S^{2m} \times S^{2m})$, имеем $u \smile u = 2v$. Наше утверждение теперь вытекает из теоремы 3. ■

Пусть π — некоторая группа. Определим группы $H_*(\pi)$ (и $H^*(\pi)$) как целочисленные группы гомологий (когомологий) пространства типа $(\pi, 1)$. Поскольку, как легко видеть, всякие два пространства типа $(\pi, 1)$ имеют один и тот же слабый гомотопический тип, эти группы не зависят (с точностью до канонического изоморфизма) от частного выбора пространства типа $(\pi, 1)$. Более того, всякий гомоморфизм $\pi \to \pi'$ индуцирует гомоморфизмы $H_*(\pi) \to H_*(\pi')$, $H^*(\pi') \to H^*(\pi)$[1]. Мы используем когомологическую спектральную последовательность для получения информации об этих группах.

6. Теорема. *Если $n > 1$, то имеют место изоморфизмы*

$$H^q(\mathbf{Z}_n) = \begin{cases} 0, & q \text{ нечетно}, \\ \mathbf{Z}, & q = 0, \\ \mathbf{Z}_n, & q \text{ четно}, \ q > 0. \end{cases}$$

[1]) В последнем случае даже гомоморфизм алгебр. — *Прим. перев.*

Доказательство. Пусть X — некоторый CW-комплекс типа $(\mathbf{Z}, 2)$, и пусть $PX \to X$ — расслоение путей. Тогда слой ΩX этого расслоения есть пространство типа $(\mathbf{Z}, 1)$. Следовательно, ΩX — когомологическая одномерная сфера, а поскольку пространство PX стягиваемо, из теоремы 2 следует, что $H^*(X)$ — полиномиальная алгебра с образующей Ω степени 2, определенной соотношением $\Omega \otimes 1 = d_2(1 \otimes w)$ (где w — образующая группы $H^1(\Omega X)$, а d_2 — дифференциал члена E_2 спектральной последовательности расслоения $PX \to X$). Пусть отображение $f\colon X \to X$ таково, что $f^*\iota = n\iota$ для некоторого 2-характеристического элемента $\iota \in H^2(X)$ (такое отображение существует согласно теореме 8.1.10). Отсюда следует, что $f^*(u) = nu$ для всякого $u \in H^2(X)$, и гомоморфизм $f_\#\colon \pi_2(X) \to \pi_2(X)$ действует согласно формуле $f_\#[\alpha] = n[\alpha]$. Пусть $p\colon E \to X$ — главное расслоение, индуцированное отображением f. Тогда слоем расслоения p является пространство ΩX, и из свойства функториальности когомологической спектральной последовательности следует, что $d_2(1 \otimes w) = f^*\Omega \otimes 1 = n\Omega \otimes 1$ (в спектральной последовательности расслоения $p\colon E \to X$). Значит, в последовательности Гизина для расслоения p гомоморфизм

$$\Psi\colon H^{s-1}(X) \to H^{s+1}(X)$$

совпадает с $\smile$-умножением на $n\Omega$, и поэтому

$$\ker \Psi = 0, \quad \operatorname{coker} \Psi \approx \mathbf{Z}_n.$$

Следовательно, $H^q(E) = 0$ для нечетного q, и $H^0(E) \approx \mathbf{Z}$ и $H^q(E) \approx \mathbf{Z}_n$, если q четно, $q > 0$.

Осталось лишь проверить, что E — пространство типа $(\mathbf{Z}_n, 1)$. Это вытекает из следующей коммутативной диаграммы с точными строками:

$$\begin{array}{ccccccccc}
\ldots \to & \pi_q(X) & \xrightarrow{\partial} & \pi_{q-1}(\Omega X) & \to & \pi_{q-1}(E) & \xrightarrow{p_\#} & \pi_{q-1}(X) & \to \ldots \\
& \downarrow{\scriptstyle f_\#} & & \downarrow{\scriptstyle =} & & \downarrow & & \downarrow & \\
\ldots \to & \pi_q(X) & \xrightarrow{\partial} & \pi_{q-1}(\Omega X) & \to & \pi_{q-1}(PX) & \to & \pi_{q-1}(X) & \to \ldots
\end{array} \quad \blacksquare$$

7. Следствие. *Для $n > 1$ имеют место изоморфизмы*

$$H_q(\mathbf{Z}_n) \approx \begin{cases} 0, & q \text{ четно и } q \neq 0, \\ \mathbf{Z}, & q = 0, \\ \mathbf{Z}_n, & q \text{ нечетно, } q > 0. \end{cases}$$

Доказательство. Это будет вытекать из теоремы 6 и формулы универсальных коэффициентов, если только мы проверим, что группа $H_*(\mathbf{Z}_n)$ имеет конечный тип. Воспользуемся пространством E типа $(\mathbf{Z}_n, 1)$, построенным при доказательстве теоремы 6. Так как слой ΩX расслоения $p\colon E \to X$ является одно-мерной гомологической сферой, то, согласно теореме 9.3.3, имеет место точная гомологическая последовательность Гизина

$$\ldots \to H_s(E) \xrightarrow{p_*} H_s(X) \to H_{s-2}(X) \to H_{s-1}(E) \to \ldots.$$

Поскольку группа $H_*(X)$ имеет конечный тип (действительно, с помощью последовательности Гизина для расслоения $PX \to X$ легко получить, что $H_q(X)=0$, если q нечетно, и $H_q(X) \approx \mathbf{Z}$, если q четно и >0), группа $H_*(E)$ также имеет конечный тип. ■

Окружность S^1 является пространством типа $(\mathbf{Z}, 1)$, поэтому группа $H_*(\pi)$ нам известна, если π — бесконечная циклическая группа. Если же группа π представляет собой прямую сумму конечного числа циклических групп, то группы $H_*(\pi)$ можно вычислить индуктивно, используя формулу Кюннета и следующий результат:

8. Лемма. *Если Y и Y' — пространства типа* $(\pi, 1)$ *и* $(\pi', 1)$ *соответственно, то $Y \times Y'$ — пространство типа* $(\pi \times \pi', 1)$.

Доказательство. Из определения гомотопических групп сразу следует, что $\pi_q(Y \times Y') \approx \pi_q(Y) \times \pi_q(Y')$. ■

Таким способом мы можем определить $H_*(\pi)$, если π — конечно порожденная абелева группа. Следующий результат дает информацию о группе $H_*(\pi)$ для произвольной абелевой группы π.

9. Теорема. *Пусть $\{\pi_\alpha\}$ — направленное по включению семейство конечно порожденных подгрупп некоторой абелевой группы π. Тогда*

$$H_*(\pi) \approx \varinjlim \{H_*(\pi_\alpha)\}.$$

Доказательство. Сопоставим окружность S^1_λ каждому элементу $\lambda \in \pi$. Пусть $X^1 = \bigvee S^1_\lambda$; определим гомоморфизм $\beta\colon \pi_1(X^1) \to \pi$ условием $\beta[\omega_\lambda] = \lambda$, где элемент $[\omega_\lambda] \in \pi_1(X^1)$ определяется вложением $S^1_\lambda \subset X^1$ (здесь $\pi_1(X^1)$ — свободная группа, порожденная множеством $\{[\omega_\lambda]\}_{\lambda \in \pi}$). Используем всякое сохраняющее отмеченную точку отображение $\omega\colon S^1 \to X^1$, такое, что $\beta[\omega]=0$, для приклеивания двумерной клетки к пространству X^1. Обозначим через X^2 пространство, полученное из X^1 приклеиванием всех таких клеток. Продолжая этот процесс индуктивно, определим пространство X^m для $m \geqslant 3$ как пространство, полученное из X^{m-1} приклеиванием m-мерных клеток по всякому отображению $S^{m-1} \to X^{m-1}$. Пусть X — такой CW-комплекс, что его m-мерным остовом является X^m для всех $m \geqslant 1$, а нульмерным остовом — отмеченная точка комплекса X^1. Тогда X — пространство типа $(\pi, 1)$.

Для всякого конечного подмножества $a \subset \pi$ пусть X_a — наибольший подкомплекс комплекса X, для которого $X_a^1 = \bigvee_{\lambda \in a} S_\lambda^1$. Тогда из конструкции комплекса X видно, что X_a — пространство типа $(\pi_a, 1)$, где π_a — подгруппа группы π, порожденная множеством a. Поскольку всякое компактное подмножество пространства X содержится в одном из подкомплексов X_a, $a \subset \pi$, имеем

$$H_*(\pi) \approx H_*(X) \approx \varinjlim \{H_*(X_a)\} \approx \varinjlim \{H_*(\pi_a)\}.$$

Так как π_a — конечно порожденная подгруппа группы π и всякая конечно порожденная подгруппа группы π имеет такой вид, правая часть этого равенства изоморфна $\varinjlim \{H_*(\pi_a)\}$. ■

Эти результаты о группе $H_*(\pi)$ будут использованы в следующем параграфе при доказательстве обобщенной теоремы об изоморфизме Гуревича.

§ 6. Классы Серра абелевых групп

Спектральная последовательность расслоения хорошо приспособлена к индуктивным рассуждениям, когда исходным моментом служит случай минимальной (или максимальной) размерности, в которой встречается интересующее нас явление. Дальнейшее упрощение этих рассуждений состоит в последовательном игнорировании некоторых абелевых групп с целью выделения именно той части данной группы, которая имеет отношение к данному явлению. Например, при изучении p-примарных компонент конечно порожденных абелевых групп удобно пренебречь конечными слагаемыми, порядок которых не делится на p. Процесс «пренебрежения» некоторыми группами будет формализован в этом параграфе с помощью изучения групп «по модулю класса Серра абелевых групп». Эта техника будет применена (с помощью спектральных последовательностей расслоения) к изучению гомотопических групп. В частности, в конце этого параграфа приводятся интересные обобщения теорем Гуревича и Уайтхеда.

Классом Серра абелевых групп называется непустой класс $\mathscr{C}$ абелевых групп, обладающий тем свойством, что для любой точной трехчленной последовательности абелевых групп $A \to B \to C$ из A, $C \in \mathscr{C}$ следует $B \in \mathscr{C}$.

1. Теорема. *Класс $\mathscr{C}$ абелевых групп тогда и только тогда является классом Серра, когда он обладает следующими свойствами:*

(a) *в $\mathscr{C}$ содержится тривиальная группа;*

(b) *если $A \in \mathscr{C}$ и $A \approx A'$, то $A' \in \mathscr{C}$;*

(c) *если $A \subset B$ и $B \in \mathscr{C}$, то $A \in \mathscr{C}$;*

(d) *если* $A \subset B$ *и* $B \in \mathscr{C}$, *то* $B/A \in \mathscr{C}$;

(e) *если короткая точная последовательность* $0 \to A \to B \to C \to 0$ *такова, что* A, $C \in \mathscr{C}$, *то и* $B \in \mathscr{C}$.

Доказательство. Если $\mathscr{C}$ — класс Серра, то он непуст, и если $A \in \mathscr{C}$, то (a) вытекает из точности последовательности $A \to 0 \to A$. Свойства (b), (c) и (d) следуют из (a) и из точности последовательностей $0 \to A' \to A$, $0 \to A \to B$ и $B \to B/A \to 0$ соответственно, в то время как (e) следует из определения класса Серра.

Обратно, если класс $\mathscr{C}$ удовлетворяет свойствам (a) — (e), то он непуст в силу (a). Если $A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C$ — некоторая точная последовательность, то имеет место короткая точная последовательность

$$0 \to \operatorname{im} \alpha \to B \to \operatorname{coker} \alpha \to 0$$

и изоморфизмы $A/\ker \alpha \approx \operatorname{im} \alpha$ и $\operatorname{coker} \alpha \approx \operatorname{im} \beta \subset C$. Если $A \in \mathscr{C}$, то из свойств (d) и (b) следует, что $\operatorname{im} \alpha \in \mathscr{C}$. Если $C \in \mathscr{C}$, то из свойств (c) и (b) следует, что $\operatorname{coker} \alpha \in \mathscr{C}$. Если A, $C \in \mathscr{C}$, то из (e) получаем, что $B \in \mathscr{C}$. Следовательно, $\mathscr{C}$ — класс Серра. ■

Заметим, что, как следует из свойств (a) и (b), класс Серра не является множеством. Приведем несколько примеров классов Серра.

2. Класс всех абелевых групп.

3. Класс тривиальных групп.

4. Класс конечно порожденных абелевых групп.

5. Класс конечных абелевых групп.

6. Класс периодических абелевых групп.

7. Класс p-примарных групп для данного простого p [1]).

8. Класс групп, не содержащих элементов, порядком которых является степень данного простого числа.

Пусть задан некоторый класс $\mathscr{C}$. Нас интересуют вычисления по модулю групп из класса $\mathscr{C}$. Гомоморфизм $\varphi: A_1 \to A_2$ называется *$\mathscr{C}$-мономорфизмом* (или *$\mathscr{C}$-эпиморфизмом*), если $\ker \varphi \in \mathscr{C}$ (или $\operatorname{coker} \varphi \in \mathscr{C}$), и *$\mathscr{C}$-изоморфизмом*, если выполнены сразу оба условия. Легко проверить, что композиция $\mathscr{C}$-изоморфизмов снова является $\mathscr{C}$-изоморфизмом. Две абелевы группы A_1 и A_2 называются *$\mathscr{C}$-изоморфными* (обозначается $A_1 \underset{\mathscr{C}}{\approx} A_2$), если существуют некоторая абелева группа A и $\mathscr{C}$-изоморфизмы $A \to A_1$ и $A \to A_2$.

---

[1]) Группа называется p-примарной, если порядок каждого ее элемента есть степень простого числа p. — *Прим. перев.*

Отметим аналогию между определением $\mathscr{C}$-изоморфности абелевых групп и определением принадлежности двух пространств одному и тому же слабому гомотопическому типу.

9. Лемма. *Отношение $\mathscr{C}$-изоморфности является отношением эквивалентности.*

Доказательство. Ясно, что это отношение рефлексивно и симметрично. Докажем, что оно транзитивно. Предположим, что $A_1 \underset{\mathscr{C}}{\approx} A_2$ и $A_2 \underset{\mathscr{C}}{\approx} A_3$. Тогда существуют абелевы группы B и B' и $\mathscr{C}$-изоморфизмы $\varphi_1\colon B \to A_1$, $\varphi_2\colon B \to A_2$, $\varphi_2'\colon B' \to A_2$ и $\varphi_3'\colon B' \to A_3$. Пусть $C = \{(b, b') \in B \oplus B' \mid \varphi_2(b) = \varphi_2'(b')\}$, и пусть $p\colon C \to B$ и $p'\colon C \to B'$ — проекции (C является расслоенным произведением гомоморфизмов φ_2 и φ_2' в категории абелевых групп). Поскольку имеет место точная последовательность

$$\ker \varphi_2' \to C \xrightarrow{p} B \to \operatorname{coker} \varphi_2',$$

гомоморфизм p является $\mathscr{C}$-изоморфизмом. Аналогично, p' — также $\mathscr{C}$-изоморфизм. Следовательно, композиции $C \xrightarrow{p} B \xrightarrow{\varphi_1} A_1$ и $C \xrightarrow{p'} B' \xrightarrow{\varphi_3'} A_3$ являются $\mathscr{C}$-изоморфизмами, откуда $A_1 \underset{\mathscr{C}}{\approx} A_3$. ■

Топологическое пространство X называется *$\mathscr{C}$-ацикличным*, если его целочисленные группы гомологий принадлежат классу $\mathscr{C}$, т. е. $H_q(X) \in \mathscr{C}$ $(q > 0)$. Для того чтобы произведение двух $\mathscr{C}$-ацикличных пространств было $\mathscr{C}$-ацикличным, необходимо наделить класс $\mathscr{C}$ дополнительным свойством: если A, $B \in \mathscr{C}$, то $A \otimes B$, $A * B \in \mathscr{C}$. Класс Серра, наделенный этим дополнительным свойством, называется *кольцом абелевых групп.*

Пара (X, X'), $X' \neq \varnothing$, называется $\mathscr{C}$-ацикличной, если целочисленные группы гомологий $H_q(X, X')$ принадлежат классу $\mathscr{C}$, $q \geqslant 0$. Для того чтобы произведение $\mathscr{C}$-ацикличной пары и произвольного пространства было $\mathscr{C}$-ацикличной парой, необходимо наделить класс $\mathscr{C}$ еще одним свойством: из $A \in \mathscr{C}$ следует, что $A \otimes B$, $A * B \in \mathscr{C}$ для произвольной абелевой группы B. Класс Серра, наделенный этим свойством, называется *идеалом абелевых групп*. Очевидно, что идеал абелевых групп является кольцом абелевых групп. В примерах 2, 3, 6 и 7 приведены идеалы абелевых групп, а в примерах 4, 5 и 8 — кольца абелевых групп, не являющиеся идеалами.

В последующем изложении некоторые результаты будут верны для колец абелевых групп, а другие, более сильные, — лишь для идеалов. Формулировка результатов будет обычно состоять из двух частей: одна для колец абелевых групп, а другая для идеалов. Доказательства обеих частей, как правило, различаются незначительными деталями. Следующее обобщение леммы 9.3.4

является основным результатом, полученным с помощью спектральных последовательностей.

10. Теорема. *Пусть p: $E \to B$ — ориентируемое расслоение над линейно связной базой B с линейно связным слоем F, и пусть B' — непустое подпространство пространства B. Положим $E' = p^{-1}(B')$. Пусть $\mathscr{C}$ — некоторый класс Серра. Предположим, что $H_i(B, B'; R) \in \mathscr{C}$, если $0 \leqslant i < n$, и $H_j(F; G) \in \mathscr{C}$, если $0 < j < m$. Определим целое число $r \geqslant 0$ следующим образом:*

(a) *если $\mathscr{C}$ — кольцо абелевых групп и $H_1(B, B'; R) = 0$, то $r = \min(n, m+1)$;*

(b) *если $\mathscr{C}$ — идеал абелевых групп, то $r = n + m - 1$.*

Тогда гомоморфизм p_*: $H_q(E, E'; G) \to H_q(B, B'; G)$ является $\mathscr{C}$ мономорфизмом, если $q \leqslant r$, и $\mathscr{C}$-эпиморфизмом, если $q \leqslant r + 1$.

Доказательство. Рассмотрим спектральную последовательность расслоения (E, E'). Покажем прежде всего, что $E^2_{s,\,t} \in \mathscr{C}$, если $s + t \leqslant r$ и $t \geqslant 1$. Как мы знаем,

$$E^2_{s,\,t} \approx H_s(B, B'; R) \otimes H_t(F; G) \oplus H_{s-1}(B, B'; R) * H_t(F; G).$$

В случае (a) из равенств $H_0(B, B'; R) = 0 = H_1(B, B'; R)$ вытекает, что $E^2_{s,\,t} \in \mathscr{C}$, если $s = 0$ или 1. Если $s > 1$, то $t < m$ (поскольку $s + t \leqslant m + 1$). Следовательно, $H_t(F; G) \in \mathscr{C}$, и, так как $s < n$, обе группы $H_s(B, B'; R)$ и $H_{s-1}(B, B'; R)$ принадлежат $\mathscr{C}$. Так как $\mathscr{C}$ — кольцо абелевых групп, то $E^2_{s,\,t} \in \mathscr{C}$.

В случае (b) имеем

$$s + t \leqslant r = n + m - 1,$$

откуда $s \leqslant n - 1$ или $t \leqslant m - 1$. Поскольку $\mathscr{C}$ — идеал абелевых групп, опять-таки $E^2_{s,\,t} \in \mathscr{C}$.

Для завершения доказательства заметим, что спектральная последовательность этого расслоения позволяет построить композиционные ряды

$$0 \subset D_0 \subset D_1 \subset \ldots \subset D_q = H_q(E, E'; G),$$

где D_0, D_1/D_0, ..., D_q/D_{q-1} — предельные члены спектральной последовательности (т. е $D_i/D_{i-1} \approx E^\infty_{i,\,q-i}$). Следовательно,

$$H_q(E, E'; G)/D_{q-1} \approx E^\infty_{q,\,0} \subset E^2_{q,\,0} = H_q(B, B'; G),$$

и ядро гомоморфизма p_*: $H_q(E, E'; G) \to H_q(B, B'; G)$ совпадает с ядром гомоморфизма $D_q \to D_q/D_{q-1}$. Покажем, что p_* есть $\mathscr{C}$-мономорфизм. Очевидно, для этого необходимо, чтобы $D_{q-1} \in \mathscr{C}$. Простой индукцией (по D_k, $0 \leqslant k \leqslant q - 1$) задача сводится к доказательству того, что $E^\infty_{s,\,t} \in \mathscr{C}$, если $s + t \leqslant r$ и $t \geqslant 1$. Но это следует из соответствующего уже доказанного свойства для члена $E^2_{s,\,t}$.

Докажем, что гомоморфизм p_* является $\mathscr{C}$-эпиморфизмом. Достаточно показать, что $E^2_{q,\,0}/E^\infty_{q,\,0} \in \mathscr{C}$, если $q \leqslant r+1$. Имеет место последовательность включений

$$E^2_{q,\,0} \supset E^3_{q,\,0} \supset \ldots \supset E^{q+1}_{q,\,0} = E^\infty_{q,\,0}.$$

Снова простая индукция сводит все к доказательству того, что $E^k_{q,\,0}/E^{k+1}_{q,\,0} \in \mathscr{C}$, $q \leqslant r+1$ и $k \geqslant 2$. Из определения следует, что

$$E^{k+1}_{q,\,0} \approx \ker\left(d^k\colon\ E^k_{q,\,0} \to E^k_{q-k,\,k-1}\right).$$

Следовательно, модуль $E^k_{q,\,0}/E^{k+1}_{q,\,0}$ изоморфен подмодулю модуля $E^k_{q-k,\,k-1}$, и, значит, достаточно показать, что $E^k_{q-k,\,k-1} \in \mathscr{C}$, если $q \leqslant r+1$ и $k \geqslant 2$. Но это следует из того факта (уже доказанного), что $E^2_{q-k,\,k-1} \in \mathscr{C}$, если $q \leqslant r+1$ и $k \geqslant 2$. ■

Рассматривая случай, когда B' — одна точка, получаем следующее интересное применение последнего результата:

11. Следствие. *Пусть p: $E \to B$ — расслоение над односвязной базой B с линейно связным слоем F. Предположим, что пространство E $\mathscr{C}$-ациклично и $H_i(B) \in \mathscr{C}$ для $0 < i < n$. Тогда $H_i(F) \in \mathscr{C}$ для $0 < i < n-1$ и*

(a) *если $\mathscr{C}$ — кольцо абелевых групп, то $H_{n-1}(F) \underset{\mathscr{C}}{\approx} H_n(B)$;*

(b) *если $\mathscr{C}$ — идеал абелевых групп, то $H_i(F) \underset{\mathscr{C}}{\approx} H_{i+1}(B)$ для $i < 2n-2$.*

Доказательство. Пусть $B' = \{b_0\}$ и $E' = p^{-1}(b_0) = F$. Используем индукцию по числу n. Примем в качестве предположения индукции, что $H_i(F) \in \mathscr{C}$, если $0 < i < n-1$. Применим теперь теорему 10, положив $m = n-1$. В случае (a) имеем $r = n$, а в случае (b) $r = 2n-2$ и $H_i(E,\ F) \underset{\mathscr{C}}{\approx} H_i(B,\ b_0)$, если $i \leqslant r$. Поскольку пространство E $\mathscr{C}$-ациклично, то $H_i(E,\ F) \underset{\mathscr{C}}{\approx} H_{i-1}(F)$, если $i \geqslant 2$, а так как b_0 — точка, то $H_i(B) \approx H_i(B,\ b_0)$, $i > 0$. Утверждение следствия получается теперь комбинацией полученных $\mathscr{C}$-изоморфизмов. ■

12. Следствие. *Пусть p: $E \to B$ — расслоение над односвязной базой с линейно связным слоем F. Если $\mathscr{C}$ — кольцо абелевых групп и если любые два пространства из трех E, B и F $\mathscr{C}$-ацикличны, то и третье $\mathscr{C}$-ациклично.*

Доказательство. Если пространства B и F $\mathscr{C}$-ацикличны, то, положив $B' = \{b_0\}$ и $E' = p^{-1}(b_0) = F$, применим теорему 10a к случаю $n = m = \infty$. Она показывает, что пара (E, F) $\mathscr{C}$-ациклична. Поскольку слой F $\mathscr{C}$-ацикличен, то пространство E также $\mathscr{C}$-ациклично. Если $\mathscr{C}$-ацикличны пространства E и B, то из следствия 11a вытекает, что $\mathscr{C}$-ацикличен слой F. Если же $\mathscr{C}$-ацикличны пространства E и F, то пусть $n \geqslant 2$ — наименьшее целое число, для которого $H_n(B) \notin \mathscr{C}$ (если такие целые числа существуют). Из следствия 11a вытекает, что $H_{n-1}(F) \notin \mathscr{C}$, и мы пришли к противоречию. Следовательно, пространство B $\mathscr{C}$-ациклично. ■

Следующий частный случай последнего утверждения заслуживает специального упоминания.

13. Следствие. *Пусть X — односвязное пространство, а $\mathscr{C}$ — некоторое кольцо абелевых групп. Пространство X тогда и только тогда $\mathscr{C}$-ациклично, когда его пространство петель ΩX $\mathscr{C}$-ациклично.* ■

Для нашего следующего приложения спектральной последовательности расслоения (а именно для доказательства обобщенной теоремы об изоморфизме Гуревича) понадобится еще одно свойство классов Серра абелевых групп. Класс Серра $\mathscr{C}$ абелевых групп называется *ацикличным*, если всякое пространство типа $(\pi, 1)$, где $\pi \in \mathscr{C}$, является $\mathscr{C}$-ацикличным. Таким образом, класс $\mathscr{C}$ тогда и только тогда ацикличен, когда из $\pi \in \mathscr{C}$ вытекает, что $H_q(\pi) \in \mathscr{C}$, $q > 0$. Из замечаний и результатов, приведенных в конце § 9.5, следует, что каждый из классов примеров 2—8 является ацикличным.

Пространство петель пространства типа (π, n), где $n \geqslant 2$, является пространством типа $(\pi, n-1)$. Из следствия 13 получаем индукцией по n такой результат:

14. Лемма. *Если $\mathscr{C}$ — ацикличное кольцо абелевых групп, то всякое пространство типа (π, n), где $n \geqslant 1$ и $\pi \in \mathscr{C}$, является $\mathscr{C}$-ацикличным.* ■

Используя этот факт и разложение Постникова, можно показать, что если X — односвязное пространство, гомотопические группы которого принадлежат некоторому ацикличному кольцу $\mathscr{C}$ абелевых групп, то пространство X $\mathscr{C}$-ациклично. Это вытекает также из следующей *обобщенной абсолютной теоремы Гуревича об изоморфизме*:

15. Теорема. *Пусть $\mathscr{C}$ — ацикличное кольцо абелевых групп, и пусть X — односвязное пространство. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(a) $\pi_i(X) \in \mathscr{C}$ *для* $2 \leqslant i < n$;

(b) $H_i(X) \in \mathscr{C}$ *для* $2 \leqslant i < n$.

Далее, из каждого из этих условий вытекает, что гомоморфизм Гуревича

$$\varphi\colon \pi_i(X) \to H_i(X)$$

является $\mathscr{C}$-изоморфизмом, если $i \leqslant n$.

Доказательство. Очевидно, достаточно доказать, что условие (b) влечет за собой $\mathscr{C}$-изоморфизм $\varphi\colon\ \pi_n(X) \underset{\mathscr{C}}{\approx} H_n(X)$. Если $n=2$, то это следует из абсолютной теоремы об изоморфизме Гуревича. Предположим, что $n \geqslant 3$, и докажем это утверждение индукцией по n. Пусть $\pi_i(X) \in \mathscr{C}$ для $i<n$.

Согласно следствию 8.3.8, существует последовательность расслоений

$$E_{n-1} \xrightarrow{p_{n-1}} \ldots \xrightarrow{p_2} E_1 = X,$$

в которой пространство E_j j-связно, а слой F_j расслоения p_j: $E_j \to E_{j-1}$ является пространством типа $(\pi_j(X),\ j-1)$.

Из ацикличности кольца $\mathscr{C}$ следует $\mathscr{C}$-ацикличность слоев F_j, если $2 \leqslant j \leqslant n-1$ (так как $\pi_j(X) \in \mathscr{C}$, если $j<n$). Индукцией по j, $2 \leqslant j \leqslant n-1$, мы покажем, что p_{j*}: $H_i(E_j) \underset{\mathscr{C}}{\approx} H_i(E_{j-1})$, если $i \leqslant n$. Считая это выполненным для $j-1$ $(j>1)$, мы видим, что $H_i(E_{j-1}, e_0) \in \mathscr{C}$, если $i<n$, и $H_i(F) \in \mathscr{C}$, если $0<i$. Из теоремы 10а следует, что p_{j*}: $H_i(E_j, F_j) \underset{\mathscr{C}}{\approx} H_i(E_{j-1})$, $0<i\leqslant n$. Поскольку пространство F_j $\mathscr{C}$-ациклично, p_{j*}: $H_i(E_j) \underset{\mathscr{C}}{\approx} H_i(E_{j-1})$, если $i \leqslant n$. Это завершает индукцию.

Следовательно, композиция $f = p_2 \circ \ldots \circ p_{n-1}$: $E_{n-1} \to X$ обладает тем свойством, что

$$f_*\colon\ H_i(E_{n-1}) \underset{\mathscr{C}}{\approx} H_i(X), \qquad i \leqslant n.$$

Имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \pi_n(E_{n-1}) & \xrightarrow{\varphi} & H_n(E_{n-1}) \\ {\scriptstyle f_\#}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f_*} \\ \pi_n(X) & \xrightarrow{\varphi} & H_n(X) \end{array}$$

в которой, согласно абсолютной теореме об изоморфизме Гуревича, верхний гомоморфизм является изоморфизмом. Поскольку оба вертикальных отображения представляют собой $\mathscr{C}$-изоморфизмы, утверждение теоремы доказано. ■

Из этой теоремы очевидным образом следует, что односвязное пространство тогда и только тогда $\mathscr{C}$-ациклично (для некоторого ацикличного кольца $\mathscr{C}$ абелевых групп), когда все его гомотопические группы принадлежат кольцу $\mathscr{C}$. Взяв в качестве $\mathscr{C}$ ацикличное кольцо всех конечно порожденных абелевых групп, мы получаем такое

16. Следствие. *Группы гомологий односвязного пространства тогда и только тогда конечно порождены во всех размерностях, когда его гомотопические группы конечно порождены во всех размерностях.* ■

В частности, из следствия 16 вытекает, что все гомотопические группы сферы любой размерности конечно порождены. Следствие 16 становится неверным, если предположить, что группа $\pi_1(X)$ конечно порождена (но не равна нулю). Покажем это на примере.

17. Пример. Пусть $X = S^2 \vee S^1$. Тогда группа $\pi_1(X) \approx \mathbf{Z}$ конечно порождена, так же как и группы $H_i(X)$ для всех i. Однако $\pi_2(X)$ — свободная абелева группа со счетным числом образующих [1]) и, значит, не является конечно порожденной.

Несмотря на это, существует обобщение следствия 16, справедливое также и для неодносвязных пространств. Пусть X — линейно связное пространство и j: $X \subset B$ — вложение пространства X в некоторое пространство B типа $(\pi_1(X), 1)$, такое, что $j_{\#}$: $\pi_1(X) \approx \approx \pi_1(B)$. Пусть p: $P_j \to B$ — расслоение путей, соответствующее вложению j (см. определение в § 2.8; пространства X и P_j имеют один и тот же гомотопический тип). Говорят, что X — *строго простое* пространство, если группа $\pi_1(X)$ абелева и расслоение p: $P_j \to B$ ориентируемо над кольцом $\mathbf{Z}$.

18. Пример. Пусть пространство X таково, что для каждого элемента $a \in \pi_1(X)$ существует такое отображение $\bar{\omega}$: $S^1 \times X \to X$, что отображение $\bar{\omega} \mid S^1 \times x_0$ представляет элемент a. Тогда пространство X является строго простым (поскольку пространство P_j обладает тем же свойством, что и X). В частности, всякое H-пространство строго простое.

19. Лемма. *Пусть $\mathscr{C}$ — ацикличное кольцо абелевых групп, и пусть строго простое пространство X таково, что $\pi_1(X) \in \mathscr{C}$ и $H_i(X) \in \mathscr{C}$, если $0 < i < n$, $n \geqslant 2$. Если F — слой расслоения p: $P_j \to B$, то гомоморфизм $H_q(F) \to H_q(P_j)$ является $\mathscr{C}$-изоморфизмом при $q \leqslant n$.*

Доказательство. Поскольку пространства X и P_j имеют один и тот же гомотопический тип, $H_i(P_j) \in \mathscr{C}$, если $0 < i < n$.

[1]) Напомним, что $\pi_2(X) \approx \pi_2(\tilde{X})$, где $\tilde{X}$ — накрывающее пространство для X. Легко показать, что в данном случае пространство $\tilde{X}$ гомотопически эквивалентно букету счетного числа двумерных сфер. — *Прим. перев.*

Пусть $m<n$; примем в качестве индуктивного предположения, что $H_q(F) \underset{\mathscr{C}}{\approx} H_q(P_j)$, если $q \leqslant m$. Тогда $H_q(F) \in \mathscr{C}$, если $0<q\leqslant m$.

Докажем теперь, что $H_{m+1}(F) \underset{\mathscr{C}}{\approx} H_{m+1}(P_j)$. С помощью спектральной последовательности расслоения (это расслоение ориентируемо, поскольку X — строго простое пространство) получаем композиционный ряд

$$0 \subset D_0 \subset D_1 \subset \ldots \subset D_{m+1} = H_{m+1}(P_j),$$

где $D_s/D_{s-1} \approx E^{\infty}_{s,\,m+1-s}$ и $D_0 = \operatorname{im}\left[H_{m+1}(F) \to H_{m+1}(P_j)\right]$. Докажем, что отображение $H_{m+1}(F) \to H_{m+1}(P_j)$ является $\mathscr{C}$-эпиморфизмом. Для этого достаточно показать, что $E^{\infty}_{s,\,m+1-s} \in \mathscr{C}$ для любого $s>0$. Во всяком случае, это будет так, если $E^2_{s,\,m+1-s} \in \mathscr{C}$ для $s>0$. Но

$$E^2_{s,\,m+1-s} \approx H_s(B) \otimes H_{m+1-s}(F) \oplus H_{s-1}(B) * H_{m+1-s}(F).$$

Так как $\mathscr{C}$ — ацикличный класс Серра, то $H_s(B) \in \mathscr{C}$, если $s>0$ (и, разумеется, $H_0(B) \approx \mathbf{Z}$). Поскольку, согласно индуктивному предположению, $H_{m+1-s}(F) \in \mathscr{C}$ для $s>0$, то $E^2_{s,\,m+1-s} \in \mathscr{C}$ для $s \geqslant 0$, так как $\mathscr{C}$ — кольцо абелевых групп.

Покажем, что гомоморфизм $H_{m+1}(F) \to H_{m+1}(P_j)$ является $\mathscr{C}$-мономорфизмом. Имеет место последовательность гомоморфизмов

$$H_{m+1}(F) \approx E^2_{0,\,m+1} \to E^3_{0,\,m+1} \to \ldots \to E^{\infty}_{0,\,m+1} \approx D_0.$$

Достаточно показать, что $\ker\left(E^r_{0,\,m+1} \to E^{r+1}_{0,\,m+1}\right) \in \mathscr{C}$, если $r \geqslant 2$. Это эквивалентно тому, что группа $d^r\left(E^r_{r,\,m+2-r}\right) \subset E^r_{0,\,m+1}$ принадлежит $\mathscr{C}$, $r \geqslant 2$. Это будет так, если $E^2_{r,\,m+2-r} \in \mathscr{C}$, $r \geqslant 2$. Но

$$E^2_{r,\,m+2-r} \approx H_r(B) \otimes H_{m+2-r}(F) \oplus H_{r-1}(B) * H_{m+2-r}(F),$$

и поскольку $m+2-r \leqslant m$, то $H_{m+2-r}(F) \in \mathscr{C}$ согласно индуктивному предположению. Отсюда вытекает нужное нам утверждение, поскольку $\mathscr{C}$ — ацикличное кольцо абелевых групп. ■

Мы можем теперь получить следующий усиленный вариант теоремы 15:

20. Теорема. *Пусть X — некоторое строго простое пространство, и пусть $\mathscr{C}$ — ацикличное кольцо абелевых групп. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(a) $\pi_i(X) \in \mathscr{C}$, *если* $2 \leqslant i < n$;

(b) $H_i(X) \in \mathscr{C}$, *если* $2 \leqslant i < n$.

Каждое из этих условий влечет за собой, что $\varphi\colon \pi_i(X) \to H_i(X)$ *есть $\mathscr{C}$-изоморфизм при* $i \leqslant n$.

Доказательство. Достаточно доказать, что условие (b) влечет за собой $\mathscr{C}$-изоморфизм $\varphi\colon \pi_n(X) \underset{\mathscr{C}}{\approx} H_n(X)$. Пусть F — слой расслоения $p\colon P_j \to B$. Так как пространства X и P_j имеют один и тот же гомотопический тип, существует отображение $f\colon F \to X$, гомотопически эквивалентное вложению $F \subset P_j$. Поскольку $\pi_i(F) \approx \approx \pi_i(P_j)$ при $i \geqslant 2$, то $f_{\#}\colon \pi_i(F) \approx \pi_i(X)$, если $i \geqslant 2$. Из леммы 19 следует, что гомоморфизм $f_*\colon H_i(F) \to H_i(X)$ является $\mathscr{C}$-изоморфизмом, если $i \leqslant n$. Так как слой F односвязен, из теоремы 15 вытекает, что $\varphi\colon \pi_n(F) \underset{\mathscr{C}}{\approx} H_n(F)$, а так как $\varphi \circ f_{\#} = f_* \circ \varphi$, утверждение теоремы полностью доказано. ■

Используем этот результат для доказательства следующей *обобщенной относительной теоремы об изоморфизме Гуревича*:

21. Теорема. *Пусть $\mathscr{C}$ — ацикличный идеал абелевых групп, и пусть $A \subset X$. Предположим, что пространства A и X односвязны. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(a) $\pi_i(X, A) \in \mathscr{C}$, *если* $2 \leqslant i < n$;

(b) $H_i(X, A) \in \mathscr{C}$, *если* $2 \leqslant i < n$.

Каждое из этих условий влечет за собой условие

(c) $\varphi\colon \pi_n(X, A) \underset{\mathscr{C}}{\approx} H_n(X, A)$.

Доказательство. Достаточно доказать индукцией по n, что из (b) следует (c). Для $n = 2$ это вытекает из относительной теоремы Гуревича об изоморфизме. Следовательно, можно предположить, что $n \geqslant 3$ и $\pi_i(X, A) \in \mathscr{C}$, если $i < n$. Пусть $x_0 \in A$, PX — пространство путей в X, начинающихся в точке x_0, и пусть расслоение $p\colon PX \to X$ получено сопоставлением всякому пути его конечной точки. Слоем $p^{-1}(x_0)$ этого расслоения является пространство петель ΩX. Согласно теореме 7.2.8, $p_{\#}\colon \pi_k(PX, p^{-1}(A)) \approx \approx \pi_k(X, A)$, $k \geqslant 1$. Поскольку пространство PX стягиваемо, $\pi_k(PX, p^{-1}(A)) \approx \pi_{k-1}(p^{-1}(A))$, $k \geqslant 2$, и $H_k(PX, p^{-1}(A)) \approx \approx H_{k-1}(p^{-1}(A))$, $k \geqslant 2$. Для всякого $i \geqslant 2$ имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd}
\pi_{i-1}(p^{-1}(A)) \arrow[d, "\varphi"'] & \pi_i(PX, p^{-1}(A)) \arrow[l, "\partial"', "\approx"] \arrow[r, "p_{\#}", "\approx"'] \arrow[d, "\varphi"] & \pi_i(X, A) \arrow[d, "\varphi"] \\
H_{i-1}(p^{-1}(A)) & H_i(PX, p^{-1}(A)) \arrow[l, "\partial"', "\approx"] \arrow[r, "p_*"] & H_i(X, A)
\end{tikzcd}$$

Применяя теорему 10b и считая, что $H_i(X, A) \in \mathscr{C}$, если $i < n$, $m = 1$ (ΩX линейно связно, так как пространство X односвязно), мы получим, что $p_*\colon H_i(PX, p^{-1}(A)) \underset{\mathscr{C}}{\approx} H_i(X, A)$, если $i \leqslant n$. Следовательно, когда $i = n$, все горизонтальные отображения в приведенной диаграмме являются $\mathscr{C}$-изоморфизмами. Для завершения доказательства достаточно показать, что

$$\varphi\colon \pi_{n-1}(p^{-1}(A)) \underset{\mathscr{C}}{\approx} H_{n-1}(p^{-1}(A)).$$

Но это будет вытекать из теоремы 20, если только мы покажем, что пространство $p^{-1}(A)$ строго простое.

Так как $p^{-1}(A)$ — главное расслоение со слоем ΩX, существует непрерывное отображение $\Omega X \times p^{-1}(A) \to p^{-1}(A)$, а так как $\pi_2(X) \to \pi_2(X, A)$ — эпиморфизм, отображение $\pi_1(\Omega X) \to \pi_1(p^{-1}(A))$ — также эпиморфизм. Следовательно, из существования отображения

$$\Omega X \times p^{-1}(A) \to p^{-1}(A)$$

вытекает, что пространство $p^{-1}(A)$ строго простое, как указывалось в примере 18. ∎

Используя цилиндр отображения (как и при доказательстве теоремы 7.5.9), из теоремы 21 можно вывести следующую *обобщенную теорему Уайтхеда*:

22. Теорема. *Пусть $\mathscr{C}$ — ацикличный идеал абелевых групп, и пусть $f\colon X \to Y$ — отображение односвязных пространств. Для $n \geqslant 1$ следующие утверждения эквивалентны:*

(a) $f_{\#}\colon \pi_i(X) \to \pi_i(Y)$ *есть $\mathscr{C}$-изоморфизм, если $i \leqslant n$, и $\mathscr{C}$-эпиморфизм, если $i = n+1$;*

(b) $f_*\colon H_i(X) \to H_i(Y)$ *есть $\mathscr{C}$-изоморфизм, если $i \leqslant n$, и $\mathscr{C}$-эпиморфизм, если $i = n+1$.* ∎

§ 7. Гомотопические группы сфер

Результаты предыдущего параграфа были получены с помощью гомологической спектральной последовательности расслоения. В этом параграфе мы используем мультипликативные свойства когомологической спектральной последовательности для получения некоторых конкретных результатов о гомотопических группах сфер. Эти гомотопические группы конечно порождены. Мы получим некоторые сведения об их p-примарных компонентах. Первым важным результатом является следующее утверждение: если n нечетно, то единственной бесконечной гомотопической группой сферы S^n является группа $\pi_n(S^n)$, а если n четно, то сфера S^n имеет две бесконечные гомотопические группы: $\pi_n(S^n)$ и $\pi_{2n-1}(S^n)$. Другой важный результат касается двукратного гомоморфизма надстройки. Будет показано, что для нечетного n этот гомоморфизм

$$S^2\colon \pi_m(S^n) \to \pi_{m+2}(S^{n+2})$$

индуцирует изоморфизм p-примарных компонент этих групп для существенно более широкой области значений m и n (зависящей от p), чем область, в которой имеет место изоморфизм этих групп. Комбинируя это с конкретным вычислением p-примарных компонент группы $\pi_m(S^3)$, мы определяем минимальную размерность $m>n$, в которой группа $\pi_m(S^n)$ (для нечетного n) имеет нетривиальную p-примарную компоненту.

Начнем со следующего полезного технического результата о когомологической спектральной последовательности расслоения:

1. Лемма. *Пусть X — односвязное пространство. Предположим, что существует элемент $u \in H^n(X; R)$, $n \geqslant 2$, для которого $u^{m-1} \neq 0$ (при некотором $m \geqslant 2$) и $\{1, u, u^2, \ldots, u^{m-1}\}$ — аддитивный базис алгебры $H^*(X; R)$ в размерностях $<mn$. Тогда существует такой элемент $v \in H^{n-1}(\Omega X; R)$, что $\{1, v\}$ — аддитивный базис алгебры $H^*(\Omega X; R)$ в размерностях $<mn-2$.*

Доказательство. Воспользуемся спектральной последовательностью теоремы 9.4.7 расслоения $PX \to X$, считая подпространство A пустым. Так как пространство PX стягиваемо, $E_\infty^{s,t}=0$, если $(s, t) \neq (0, 0)$, а так как X не имеет кручения в размерностях $<mn$, то $E_2^{s,t} \approx H^s(X) \otimes H^t(\Omega X)$, если $s<mn$ (для любого кольца коэффициентов R). Тогда $E_2^{s,t}=0$, если $s<mn$ и $s \neq 0$, n, $2n$, $\ldots$, $(m-1)n$. Поскольку d_r имеет бистепень $(r, 1-r)$, то при $s<mn$ гомоморфизм $d_r\colon E_r^{s,t} \to E_r^{s+r,t-r+1}$ нулевой, за исключением случаев $r=n$, $2n$, $\ldots$, $(m-1)n$. Следовательно, $E_n^{s,t} \approx E_2^{s,t}$, если $s<mn$. Если $t<n-1$, то $E_n^{0,t} \approx E_\infty^{0,t}$, а если $0<t<n-1$, то

$$H^t(\Omega X) \approx E_2^{0,t} \approx E_\infty^{0,t}=0,$$

и, значит, $H^t(\Omega X)=0$, если $0<t<n-1$. Более того, имеет место точная последовательность

$$0 \to E_\infty^{0,n-1} \to H^0(X) \otimes H^{n-1}(\Omega X) \xrightarrow{d_n} H^n(X) \otimes H^0(\Omega X) \to E_\infty^{n,0} \to 0.$$

Поскольку $E_\infty^{0,n-1}=0=E_\infty^{n,0}$, существует такой элемент $v \in H^{n-1}(\Omega X)$, что $d_n(1 \otimes v)=u \otimes 1$. Так как d_n — дифференцирование, то $d_n(u^k \otimes v)=(-1)^{kn} u^{k+1} \otimes 1$. Из предположения о когомологиях пространства X вытекает, что при $s<mn$ отображение $d_n\colon E_n^{s-n,n-1} \to E_n^{s,0}$ является изоморфизмом. Поскольку d_n — дифференциал, композиция

$$E_n^{s-2n,2n-2} \xrightarrow{d_n} E_n^{s-n,n-1} \xrightarrow{d_n} E_n^{s,0}$$

тривиальна. Следовательно, отображение $d_n\colon E_n^{s-2n,2n-2} \to E_n^{s-n,n-1}$ тривиально, если $s<mn$, и $E_{n+1}^{s-n,n-1}=0=E_{n+1}^{s,0}$, если $s<mn$. Отсюда

вытекает, что

$$E_r^{s,t}=0,\quad s<mn,\quad t\leqslant n-1,\quad r\geqslant n+1,$$
$$E_{n+1}^{0,2n-2}=E_2^{0,2n-2}.$$

Предположим, что лемма неверна; пусть q — наименьшее целое число, для которого $n-1<q<mn-2$ и $H^q(\Omega X)\neq 0$. Покажем, что в этом случае

$$E_\infty^{0,q}=E_2^{0,q}\approx H^q(\Omega X),$$

что является противоречием. Известно, что $E_n^{0,q}\approx E_2^{0,q}$. Далее, отображение d_n: $E_n^{0,q}\to E_n^{n,q-n+1}$ тривиально, так как если $q-n+{}$ $+1\neq n-1$, то $H^{q-n+1}(\Omega X)=0$ и $E_r^{s,q-n+1}=0$ для всех r и s, а если $q-n+1=n-1$, то $E_{n+1}^{0,2n-2}=E_2^{0,2n-2}$. Следовательно, $E_{n+1}^{0,q}\approx E_n^{0,q}$. Из предположения о том, что q — наименьшее целое число, превосходящее $n-1$, для которого $H^q(\Omega X)\neq 0$, следует, что $E_r^{s,t}=0$, если $s<mn$, $t<q$ и $r\geqslant n+1$ (для случая $t\leqslant n-1$ это было отмечено выше). Следовательно, отображение d_r: $E_r^{0,q}\to$ $\to E_r^{r,q-r+1}$ тривиально для всех $r\geqslant n+1$, и $E_\infty^{0,q}\approx E_{n+1}^{0,q}$. Значит, имеют место изоморфизмы

$$E_\infty^{0,q}\approx E_{n+1}^{0,q}\approx E_n^{0,q}\approx E_2^{0,q}. \blacksquare$$

Используя обобщенную последовательность Гизина (теорема 9.5.2), легко показать, что если пространство ΩX есть n-мерная когомологическая сфера для некоторого нечетного $n\geqslant 1$, то $H^*(X)$ — полиномиальная алгебра от одной образующей степени $n+1$. Следующее обращение этого результата вытекает непосредственно из леммы 1 для случая $m=\infty$.

2. Следствие. *Пусть X — такое односвязное пространство, что $H^*(X;\ R)$ — полиномиальная алгебра от одной образующей степени n (число n тогда автоматически четно). Тогда его пространство петель ΩX является $(n-1)$-мерной когомологической сферой.* ■

Нам понадобится также такое следствие обобщенной последовательности Вана теоремы 9.5.1.

3. Лемма. *Пусть X — односвязное пространство, являющееся n-мерной когомологической сферой для некоторого нечетного $n>1$. Тогда кольцо когомологий $H^*(\Omega X)$ его пространства петель ΩX имеет аддитивный базис, состоящий из таких элементов $\{1, u_1, u_2, \ldots\}$ степеней $\deg u_k=k(n-1)$, что $u_p\smile u_q=[(p+q)!/p!q!]\,u_{p+q}$.*

Доказательство. Воспользуемся точной последовательностью Вана расслоения $PX \to X$. Поскольку пространство PX стягиваемо, отображение

$$\theta\colon H^t(\Omega X) \to H^{t-n+1}(\Omega X)$$

является изоморфизмом, если $t \neq 0$. Определим элементы $u_k \in H^{k(n-1)}(\Omega X)$, $k \geqslant 0$, по индукции с помощью условий

$$u_0 = 1,$$
$$\theta(u_k) = u_{k-1}, \qquad k > 0.$$

Тогда множество $\{1, u_1, u_2, \ldots\}$ образует аддитивный базис алгебры $H^*(\Omega X)$. Проверим двойной индукцией по p и q, что этот базис обладает сформулированным мультипликативным свойством. Если $i = 0$ или $j = 0$, то $u_i \smile u_j = u_{i+j}$. Пусть теперь $p > 0$ и $q > 0$; предположим, что $u_i \smile u_j = [(i+j)!/i!\,j!]\,u_{i+j}$, если $i + j < p + q$, $i \geqslant 0$ и $j \geqslant 0$. Поскольку n нечетно, то

$$\theta(u_p \smile u_q) = \theta(u_p) \smile u_q + u_p \smile \theta(u_q) = u_{p-1} \smile u_q + u_p \smile u_{q-1} =$$
$$= \left[\frac{(p+q-1)!}{(p-1)!\,q!} + \frac{(p+q-1)!}{p!\,(q-1)!}\right] u_{p+q-1} = \frac{(p+q)!}{p!\,q!}\,u_{p+q-1}.$$

Поскольку θ — мономорфизм, имеем

$$u_p \smile u_q = \frac{(p+q)!}{p!\,q!}\,u_{p+q}. \ ■$$

Из леммы 3 следует, что $(u_1)^p = p!\,u_p$. Над полем характеристики нуль элементы $\{1, u_1, u_1^2, \ldots\}$ также образуют базис алгебры $H^*(\Omega X)$, и мы получаем такое

4. Следствие. *Пусть X — односвязное пространство, являющееся n-мерной когомологической сферой над полем рациональных чисел для некоторого нечетного $n > 1$. Тогда алгебра рациональных когомологий его пространства петель ΩX представляет собой полиномиальную алгебру от одной образующей степени $n-1$.* ■

Пусть X — некоторое пространство типа $(\mathbf{Z}, 3)$, и пусть отображение $f\colon S^3 \to X$ таково, что $f_\#\colon \pi_3(S^3) \approx \pi_3(X)$. Пусть $p\colon E \to S^3$ — главное расслоение, индуцированное отображением f. Тогда слой F расслоения $p\colon E \to S^3$ является пространством типа $(\mathbf{Z}, 2)$. Нам понадобится следующее соотношение для групп гомологий пространства E:

5. Лемма. *Пусть расслоение $p\colon E \to S^3$ со слоем F, являющимся пространством типа $(\mathbf{Z}, 2)$, таково, что $\bar{\partial}\colon \pi_3(S^3) \approx \pi_2(F)$.*

Тогда целочисленные гомологии пространства E имеют следующий вид:

$$H_q(E) \approx \begin{cases} 0, & q \text{ нечетно}, \\ \mathbf{Z}, & q = 0, \\ \mathbf{Z}_n, & q = 2n > 0. \end{cases}$$

Доказательство. Мы знаем, что $H^*(F)$ — полиномиальная алгебра от одной образующей u степени 2. Так как ∂: $\pi_3(S^3) \approx \approx \pi_2(F)$, пространство E 3-связно, и, значит, $H^2(E) = 0$. Из точной последовательности Вана этого расслоения следует, что θ: $H^2(F) \approx \approx H^0(F)$. Без ограничения общности можно предположить, что $\theta(u) = 1$. Тогда $\theta(u^n) = nu^{n-1}$. Из точной последовательности Вана далее следует, что $H^q(E) = 0$, если q четно или $q < 0$, и $H^{2n+1}(E) \approx \mathbf{Z}_n$, если $n \geqslant 1$. Утверждение леммы теперь вытекает из теоремы об универсальных коэффициентах. ■

Пусть $\mathscr{C}$ — класс Серра абелевых групп, не содержащих элементов, порядком которых является степень заданного простого числа p. Тогда $H_i(E) \in \mathscr{C}$, если $0 < i < 2p$. Согласно теореме 9.6.15, $\pi_i(E) \in \mathscr{C}$, если $i < 2p$, и $\pi_{2p}(E) \underset{\mathscr{C}}{\approx} \mathbf{Z}_p$. Так как $\pi_i(E) \approx \pi_i(S^3)$, если $i > 3$, мы получаем такое

6. Следствие. *Группа $\pi_i(S^3)$ имеет тривиальную p-примарную компоненту, если $3 < i < 2p$, и ее p-примарная компонента равна $\mathbf{Z}_p$, если $i = 2p$.* ■

Теперь мы подготовлены к доказательству конечности высших гомотопических групп нечетномерных сфер.

7. Теорема. *Для всякого нечетного числа n группа $\pi_m(S^n)$ конечна, если $m \neq n$.*

Доказательство. Применим индукцию по n. В случае $n = 1$ нам уже известно, что $\pi_m(S^1) = 0$, если $m \neq 1$. Пусть теперь $n = 3$. Если E — пространство, использованное в лемме 5, а $\mathscr{C}$ — класс Серра конечных групп, то пространство E $\mathscr{C}$-ациклично. Согласно теореме 9.6.15, $\pi_i(E) \in \mathscr{C}$ для всех i. Поскольку $\pi_i(E) \approx \approx \pi_i(S^3)$, если $i > 3$, группа $\pi_i(S^3)$ конечна, если $i > 3$.

Предположим, что группа $\pi_m(S^{n-2})$ конечна, если $m \neq n-2$, а $n > 3$. Вычислим алгебры рациональных когомологий пространств ΩS^n и $\Omega^2 S^n$. Согласно следствию 4, ΩS^n является полиномиальной алгеброй с образующей степени $(n-1)$, а согласно следствию 2, $\Omega^2 S^n$ — рациональная когомологическая $(n-2)$-мерная сфера. Теорема об универсальных коэффициентах показывает, что группа целочисленных гомологий $H_i(\Omega^2 S^n)$ является периодической, если $0 < i \neq n-2$, а группа $H_{n-2}(\Omega^2 S^n)$ изоморфна прямой сумме группы $\mathbf{Z}$ целых чисел и периодической группы. Более того, $\pi_k(\Omega^2 S^n) \approx \pi_{k+2}(S^n)$ для всех k. Следовательно, пространство $\Omega^2 S^n$ является $(n-3)$-связным и φ: $\pi_{n-2}(\Omega^2 S^n) \approx H_{n-2}(\Omega^2 S^n)$. Если α: $S^{n-2} \to \Omega^2 S^n$ — некоторая образующая, а $\mathscr{C}$ — класс Серра периодических групп, то α_*: $H_i(S^{n-2}) \underset{\mathscr{C}}{\approx} H_i(\Omega^2 S^n)$ для всех i. Поскольку $\mathscr{C}$ — ацикличный идеал абелевых групп, а оба пространства S^{n+2} и $\Omega^2 S^n$ односвязны, из обобщенной теоремы Уайтхеда 9.6.22 следует, что $\alpha_{\#}$: $\pi_i(S^{n-2}) \underset{\mathscr{C}}{\approx} \pi_i(\Omega^2 S^n)$. По индуктивному предположению группа $\pi_i(S^{n-2})$ конечна для $i > n-2$. Следовательно, $\pi_i(\Omega^2 S^n) \underset{\mathscr{C}}{\approx} \pi_{i+2}(S^n)$ — периодическая группа, если $i > n-2$. Так как группа $\pi_m(S^n)$ конечно порождена, группа $\pi_m(S^n)$ конечна при $m \neq n$. ■

Теперь мы хотим получить аналогичный результат для четномерных сфер. Мы установим его, рассматривая подходящее расслоение на $(n-1)$-мерные сферы над сферой S^n. Пусть W^{2n-1} — подпространство пространства $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$, состоящее из всех пар (z_1, z_2) единичных взаимно ортогональных векторов, и пусть отображение p: $W^{2n-1} \to S^n$ переводит (z_1, z_2) в z_1. Тогда p: $W^{2n-1} \to S^n$ — расслоение со слоем S^{n-1} (касательный векторный пучок единичных векторов сферы S^n); это легко проверить построением конкретного гомеоморфизма $p^{-1}(U) \approx U \times S^{n-1}$ для каждого собственного открытого подмножества $U \subset S^n$.

8. Лемма. *Если число n четно, то все группы целочисленных гомологий пространства W^{2n-1} конечны, за исключением групп $H_0(W^{2n-1})$ и $H_{2n-1}(W^{2n-1})$, которые являются бесконечными циклическими.*

Доказательство. Так как число n четно, не существует отображения f: $S^n \to S^n$, переводящего каждую точку сферы S^n в ортогональную ей точку (согласно следствию 4.7.11). Отсюда вытекает, что расслоение p: $W^{2n-1} \to S^n$ не имеет сечения. Пусть $[\alpha] \in \pi_n(S^n)$ — некоторая образующая. Элемент $[\alpha]$ не принадлежит образу гомоморфизма

$$p_{\#}\colon \pi_n(W^{2n-1}) \to \pi_n(S^n)$$

(поскольку нет сечения). Следовательно, $0 \neq \partial[\alpha] \in \pi_{n-1}(S^{n-1})$. Поскольку группа $\pi_{n-1}(S^{n-1})$ бесконечная циклическая, ∂: $\pi_n(S^n) \to$ $\to \pi_{n-1}(S^{n-1})$ — мономорфизм и $\pi_{n-1}(W^{2n-1}) \approx \pi_{n-1}(S^{n-1})/\partial(\pi_n(S^n))$ — конечная группа. Так как пространство W^{2n-1} является

$(n-2)$-связным, то $\pi_{n-1}(W^{2n-1}) \approx H_{n-1}(W^{2n-1})$. Следовательно, $H_{n-1}(W^{2n-1})$ — конечная группа, и из точной последовательности Вана

$$0 \to H_n(W^{2n-1}) \to H_0(S^{n-1}) \xrightarrow{\theta} H_{n-1}(S^{n-1}) \to H_{n-1}(W^{2n-1}) \to 0$$

следует, что $H_n(W^{2n-1}) = 0$. Из этой точной последовательности также следует, что $H_i(W^{2n-1}) = 0$, если $n < i < 2n-1$, и что группа $H_{2n-1}(W^{2n-1})$ бесконечная циклическая. ■

9. Теорема. *Пусть число n четно. Тогда группа $\pi_m(S^n)$ конечна, если $m \neq n$ и $m \neq 2n-1$, а группа $\pi_{2n-1}(S^n)$ есть прямая сумма бесконечной циклической и конечной групп.*

Доказательство. Пусть $\mathscr{C}$ — ацикличный идеал абелевых групп, состоящий из периодических групп. Из леммы 8 следует, что $H_i(W^{2n-1}) \in \mathscr{C}$, если $0 < i < 2n-1$. Из теоремы 9.6.15 следует, что $\pi_{2n-1}(W^{2n-1}) \underset{\mathscr{C}}{\approx} H_{2n-1}(W^{2n-1})$. Поскольку группа $\pi_{2n-1}(W^{2n-1})$ конечно порождена (согласно следствию 9.6.16), а группа $H_{2n-1}(W^{2n-1})$ бесконечная циклическая, то $\pi_{2n-1}(W^{2n-1})$ — прямая сумма бесконечной циклической и конечной групп. Если отображение $\alpha\colon S^{2n-1} \to W^{2n-1}$ представляет образующую бесконечного циклического слагаемого группы $\pi_{2n-1}(W^{2n-1})$, то $\alpha_*\colon H_i(S^{2n-1}) \underset{\mathscr{C}}{\approx} H_i(W^{2n-1})$ для всех i. Согласно обобщенной теореме Уайтхеда, $\alpha_\#\colon \pi_i(S^{2n-1}) \underset{\mathscr{C}}{\approx} \pi_i(W^{2n-1})$ для всех i. Используя этот факт и теорему 7, мы видим, что группа $\pi_i(W^{2n-1})$ конечна, если $i \neq 2n-1$. Теперь наше утверждение следует из точной гомотопической последовательности расслоения $W^{2n-1} \to S^n$ и из того факта (см. теорему 7), что группа $\pi_i(S^{n-1})$ конечна для $i \neq n-1$. ■

Рассмотрим теперь двойную надстройку

$$\pi_i(S^n) \xrightarrow{S} \pi_{i+1}(S^{n+1}) \xrightarrow{S} \pi_{i+2}(S^{n+2})$$

для нечетного n. Для изучения этого отображения необходимо, в частности, изучить композицию

$$S^n \xrightarrow{\rho} \Omega S^{n+1} \xrightarrow{\Omega\rho} \Omega(\Omega S^{n+2}).$$

Мы начнем со следующего частичного вычисления $\mathbf{Z}_p$-гомологий пространства $\Omega^2 S^{n+2}$:

10. Лемма. *Пусть n нечетно, и пусть p — некоторое простое число. Тогда $H_q(\Omega^2 S^{n+2}; \mathbf{Z}_p) = 0$, если $n < q < p(n+1)-2$.*

Доказательство. Согласно лемме 3, множество $\{1, u_1, u_1^2, \ldots \ldots, u_1^{p-1}\}$ образует аддитивный базис алгебры $H^*(\Omega S^{n+2}; \mathbf{Z}_p)$ в размерностях $<p(n+1)$, и, значит, в силу леммы 1 существует такой элемент $v \in H^n(\Omega^2 S^{n+2}; \mathbf{Z}_p)$, что $\{1, v\}$ — базис алгебры $H^*(\Omega^2 S^{n+2}; \mathbf{Z}_p)$ в размерностях $<p(n+1)-2$. Теперь утверждение леммы вытекает из теоремы об универсальных коэффициентах. ■

Это влечет за собой следующий результат о двойной надстройке:

11. Теорема. *Пусть n — нечетное целое, а p — некоторое простое число. Пусть $\mathscr{C}$ — ацикличный идеал периодических групп с тривиальными p-примарными компонентами. Тогда отображение*

$$S^2\colon \pi_i(S^n) \to \pi_{i+2}(S^{n+2})$$

является $\mathscr{C}$-изоморфизмом, если $i<p(n+1)-3$, и $\mathscr{C}$-эпиморфизмом, если $i=p(n+1)-3$.

Доказательство. Композиция

$$S^n \xrightarrow{\rho} \Omega S^{n+1} \xrightarrow{\Omega\rho} \Omega^2 S^{n+2}$$

индуцирует изоморфизм групп $\pi_n(S^n)$ и $\pi_n(\Omega^2 S^{n+2})$ и, согласно теореме Уайтхеда, изоморфизм $H_n(S^n) \approx H_n(\Omega^2 S^{n+2})$. Отсюда и из леммы 10 следует, что эта композиция индуцирует изоморфизм $H_q(S^n; \mathbf{Z}_p) \approx H_q(\Omega^2 S^{n+2}; \mathbf{Z}_p)$, если $q \leqslant p(n+1)-3$. Согласно формуле универсальных коэффициентов, она также индуцирует $\mathscr{C}$-изоморфизм $H_q(S^n) \approx H_q(\Omega^2 S^{n+2})$, если $q \leqslant p(n+1)-3$. Из обобщенной теоремы Уайтхеда следует, что имеет место $\mathscr{C}$-изоморфизм $\pi_q(S^n) \approx \pi_q(\Omega^2 S^{n+2})$, если $q<p(n+1)-3$, и $\mathscr{C}$-эпиморфизм $\pi_{p(n+1)-3}(S^n) \underset{\mathscr{C}}{\approx} \pi_{p(n+1)-3}(\Omega^2 S^{n+2})$. Теперь наше утверждение следует из того, что надстройка S^2 соответствует рассмотренному индуцированному гомоморфизму при изоморфизме

$$\pi_q(\Omega^2 S^{n+2}) \approx \pi_{q+2}(S^{n+2}). \ ■$$

12. Следствие. *Пусть $n \geqslant 3$ — нечетное, а p — простое число. Тогда p-примарные компоненты групп $\pi_i(S^n)$ и $\pi_{i-n+3}(S^3)$ изоморфны, если $i<4p+n-6$.*

Доказательство. Используем индукцию по n. Если $n=3$, то доказывать нечего. Если $n \geqslant 5$, то необходимо лишь доказать, что гомоморфизм $S^2\colon \pi_{i-2}(S^{n-2}) \to \pi_i(S^n)$ индуцирует изоморфизм

p-примарных компонент. Согласно теореме 11, это так, если $i-2<p(n-1)-3$. Следовательно, достаточно проверить, что

$$4p+n-6\leqslant p(n-1)-1.$$

Но это эквивалентно тому, что $(p-1)(n-5)\geqslant 0$. ■

Объединяя следствие 12 со следствием 6, получаем такой результат:

13. Следствие. *Пусть $n\geqslant 3$ — нечетное, а p — некоторое простое число. Если $0<m<2p-3$, то группа $\pi_{m+n}(S^n)$ не имеет нетривиальной p-примарной компоненты, а p-примарная компонента группы $\pi_{n+2p-3}(S^n)$ изоморфна $\mathbf{Z}_p$.* ■

УПРАЖНЕНИЯ

А. Спектральные последовательности и надстройка

В этой группе упражнений все пространства предполагаются конечными CW-комплексами с отмеченной точкой, а все пары — конечными CW-парами с отмеченной точкой.

1. Докажите, что группа $\{X;\ Y\}$ конечно порождена.

2. Докажите, что для любых пространств X и Y существует сходящаяся спектральная последовательность $\{E^r\}$ типа E^2, такая, что

$$E^2_{s,\ t}\approx H_s\left(Y;\ \left\{X;\ S^0\right\}_t\right),$$

а член E^∞ изоморфен градуированной группе, присоединенной к группе $\{X;\ Y\}_*$ относительно возрастающей фильтрации

$$F_s\{X;\ Y\}_*=\operatorname{im}\left(\{X;\ Y^s\}_*\to\{X;\ Y\}_*\right).$$

3. Докажите, что для любых пространств X и Y существует сходящаяся спектральная последовательность $\{E_r\}$ типа E_2, такая, что

$$E_2^{s,\ t}\approx H^s\left(X;\ \left\{S^0;\ Y\right\}_{-t}\right),$$

а член E_∞ изоморфен градуированной группе, присоединенной к группе $\{X;\ Y\}_*$ относительно убывающей фильтрации

$$F^s\{X;\ Y\}_*=\ker\left(\{X;\ Y\}_*\to\left\{X^{s-1};\ Y\right\}_*\right).$$

В. Трансгрессия

Пусть $p\colon E\to B$ — расслоение над линейно связной базой с линейно связным слоем $F=p^{-1}(b_0)$. Рассмотрим гомоморфизмы

$$H^q(F;\ G)\xrightarrow{\delta}H^{q+1}(E,\ F;\ G)\xleftarrow{p^*}H^{q+1}(B,\ b_0;\ G)\xrightarrow{j^*}H^{q+1}(B;\ G).$$

Трансгрессией τ называется гомоморфизм (подгруппы группы $H^q(F;\ G)$ в факторгруппу группы $H^{q+1}(B;\ G)$)

$$\tau\colon\ \delta^{-1}\left(\operatorname{im}p^*\right)\to H^{q+1}(B;\ G)/j^*\left(\ker p^*\right),$$

определенный равенством $\tau(u) = j^* p^{*-1} \delta(u)$, где элемент $u \in H^q(F;\ G)$ таков, что $\delta(u) \in p^*(H^{q+1}(B,\ b_0;\ G))$.

1. Докажите, что трансгрессия τ коммутирует с квадратами Стинрода Sq^i и с индуцированными гомоморфизмами индуцированных расслоений.

2. Предположим, что B есть $(n-1)$-связное пространство для некоторого $n \geqslant 2$. Рассмотрим расслоение путей $p\colon PB \to B$ со слоем ΩB. Докажите, что $\tau\colon H^{n-1}(\Omega B;\ G) \approx H^n(B;\ G)$ и что элемент $\iota \in H^{n-1}(\Omega B;\ G)$ тогда и только тогда является $(n-1)$-характеристическим для пространства ΩB, когда элемент $\tau(\iota)$ является n-характеристическим для B.

В остальных упражнениях этой группы мы предполагаем, что все расслоения ориентируемы над кольцом R и что все кольца коэффициентов совпадают с R.

3. Докажите следующие утверждения для спектральной последовательности расслоения:

(a) $\delta^{-1}(\operatorname{im} p^*) \approx E_{q+1}^{0,\,q} \subset E_2^{0,\,q} \approx H^q(F)$;

(b) $H^{q+1}(B)/j^*(\ker p^*) \approx E_{q+1}^{q+1,\,0}$, и этот модуль является фактормодулем модуля $E_2^{q+1,\,0} \approx H^{q+1}(B;\ G)$;

(c) при этих изоморфизмах трансгрессия τ соответствует дифференциалу $d_{q+1}\colon E_{q+1}^{0,\,q} \to E_{q+1}^{q+1,\,0}$.

4. Докажите, что если $\tilde{H}^*(E) = 0$, то равенство $H^i(F) = 0$ при $0 < i < q$ имеет место тогда и только тогда, когда $H^i(B) = 0$ при $0 < i < q+1$, причем в этом случае $\tau\colon H^q(F) \approx H^{q+1}(B)$.

5. Предположим, что $H^i(B) = 0$, если $0 < i < s$, и $H^j(F) = 0$, если $0 < j < t$. Докажите точность следующей *когомологической последовательности Серра*:

$$\ldots \to H^q(F) \xrightarrow{\tau} H^{q+1}(B) \xrightarrow{p^*} H^{q+1}(E) \xrightarrow{i^*} H^{q+1}(F) \to \ldots \to H^{s+t-1}(F).$$

Рассмотрим гомоморфизмы

$$H_q(B) \xrightarrow{j_*} H_q(B,\ b_0) \xleftarrow{p_*} H_q(E,\ F) \xrightarrow{\partial} H_{q-1}(F)$$

и определим *гомологическую трансгрессию*

$$\tau_*\colon j_*^{-1}(\operatorname{im} p_*) \to H_{q-1}(F)/\partial(\ker p_*)$$

равенством $\tau_*(z) = \partial p_*^{-1} j_*(z)$, где элемент $z \in H_q(B)$ таков, что $j_*(z) \in p_*(H_q(E,\ F))$.

6. Пусть $H_i(B) = 0$, если $0 < i < s$, и $H_j(F) = 0$, если $0 < j < t$. Докажите точность следующей *гомологической последовательности Серра*:

$$H_{s+t-1}(F) \to \ldots \to H_q(F) \xrightarrow{i_*} H_q(E) \xrightarrow{p^*} H_q(B) \xrightarrow{\tau_*} H_{q-1}(E) \to \ldots.$$

C. Классы Серра абелевых групп

Цепным комплексом по модулю $\mathscr{C}$ называется градуированная группа $C = \{C_q\}$ и последовательность гомоморфизмов $\{\partial_q\colon C_q \to C_{q-1}\}$, такая, что $(\partial_{q-1} \circ \partial_q)(C_q) \in \mathscr{C}$ для всех q. *Группой гомологий комплекса* C называется градуированная группа $H(C) = \{H_q(C)\}$, где

$$H_q(C) = \ker \partial_q / (\ker \partial_q \cap \operatorname{im} \partial_{q+1}) \approx (\ker \partial_q \cup \operatorname{im} \partial_{p+1}) / \operatorname{im} \partial_{q+1}.$$

Трехчленная последовательность групп и гомоморфизмов

$$G' \xrightarrow{\alpha} G \xrightarrow{\beta} G''$$

называется *$\mathscr{C}$-точной*, если $(\operatorname{im}\alpha \cup \ker\beta)/\operatorname{im}\alpha \in \mathscr{C}$ и $(\operatorname{im}\alpha \cup \ker\beta)/\ker\beta \in \mathscr{C}$. Последовательность произвольной длины называется *$\mathscr{C}$-точной*, если всякая ее трехчленная подпоследовательность $\mathscr{C}$-точна.

1. Пусть C — цепной комплекс по модулю $\mathscr{C}$, а C' — подкомплекс комплекса C $\left(\text{т. е. } C'_q \subset C_q \text{ и } \partial'_q = \partial_q \,\middle|\, C'_q \text{ для всех } q\right)$. Рассмотрим комплекс $C/C' = \left\{C_q/C'_q, \partial''_q\right\}$, где граничный гомоморфизм ∂''_q индуцирован граничным гомоморфизмом ∂_q. Докажите, что имеет место $\mathscr{C}$-точная последовательность

$$\ldots \to H_q(C') \to H_q(C) \to H_q(C/C') \to H_{q-1}(C') \to \ldots.$$

2. Пусть $0 \to C' \xrightarrow{\alpha} C \xrightarrow{\beta} C'' \to 0$ — короткая $\mathscr{C}$-точная последовательность цепных комплексов по модулю $\mathscr{C}$ и цепных отображений (α и β коммутируют с граничными гомоморфизмами цепных комплексов). Докажите, что имеет место $\mathscr{C}$-точная последовательность

$$\ldots \to H_q(C') \xrightarrow{\alpha_*} H_q(C) \xrightarrow{\beta_*} H_q(C'') \xrightarrow{\partial_*} H_{q-1}(C') \to \ldots.$$

3. Докажите *лемму о пяти гомоморфизмах по модулю $\mathscr{C}$*. Другими словами, если задана коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd}
G_5 \arrow[r, "\alpha_5"] \arrow[d, "\gamma_5"'] & G_4 \arrow[r, "\alpha_4"] \arrow[d, "\gamma_4"'] & G_3 \arrow[r, "\alpha_3"] \arrow[d, "\gamma_3"'] & G_2 \arrow[r, "\alpha_2"] \arrow[d, "\gamma_2"'] & G_1 \arrow[d, "\gamma_1"'] \\
H_5 \arrow[r, "\beta_5"] & H_4 \arrow[r, "\beta_4"] & H_3 \arrow[r, "\beta_3"] & H_2 \arrow[r, "\beta_2"] & H_1
\end{tikzcd}$$

с $\mathscr{C}$-точными строками, для которой γ_1, γ_2, γ_4 и γ_5 являются $\mathscr{C}$-изоморфизмам, то γ_3 также является $\mathscr{C}$-изоморфизмом.

В оставшихся двух упражнениях мы предполагаем, что $p\colon E \to B$ — расслоение над односвязной базой с линейно связным слоем, а $\mathscr{C}$ — некоторый идеал абелевых групп.

4. Докажите, что если $H_i(B) \in \mathscr{C}$, когда $0 < i$, то $H_i(F) \underset{\mathscr{C}}{\approx} H_i(E)$ для всех i.

5. *Теорема Виеториса — Бегля об отображении по модулю $\mathscr{C}$.* Докажите, что если слой F $\mathscr{C}$-ацикличен, то $H_i(E) \underset{\mathscr{C}}{\approx} H_i(B)$ для всех i.

D. Гомотопические группы сфер

1. Докажите, что если сфера S^n является H-пространством, то имеет место короткая точная последовательность

$$0 \to \pi_q(S^n) \xrightarrow{S} \pi_{q+1}(S^{n+1}) \xrightarrow{H} \pi_{q-1}(S^{2n-1}) \to 0, \qquad q \leqslant 3n-2.$$

2. Докажите, что $\pi_7(S^4) \approx \pi_6(S^3) \oplus \pi_7(S^7)$ и что порядок группы $\pi_8(S^5)$ равен удвоенному порядку группы $\pi_6(S^3)$.

3. Пусть CW-комплекс X^n_p получен приклеиванием $(n+1)$-мерной клетки к n-мерной сфере при помощи отображения степени p. Докажите, что если $n \geqslant 2$, а p простое, то группы $\pi_q(X^n_p)$ являются конечными p-группами для всех q, а если $q \leqslant 2n-2$, то имеет место точная последовательность

$$0 \to \pi_q(S^n) \otimes \mathbf{Z}_p \to \pi_q(X^n_p) \to \pi_{q-1}(S^n) * \mathbf{Z}_p \to 0.$$

4. Докажите, что пространство $S(X_p^n)$ имеет тот же гомотопический тип, что и пространство X_p^{n+1}, и $\{X_p^n;\ X_p^n\} \approx \mathbf{Z}_p$, если $p \neq 2$, а $[X_2^n;\ X_2^n]$ — группа порядка 4.

5. Пусть расслоение p: $E \to S^3$, слоем которого является пространство типа $(\mathbf{Z}, 2)$, таково, что $\bar{\partial}$: $\pi_3(S^3) \approx \pi_2(F)$ (как в лемме 9.7.5). Пусть отображение f: $X_2^4 \to E$ таково, что $f_{\#}$: $\pi_4(X_2^4) \approx \pi_4(E)$ (такое отображение существует, поскольку $\pi_4(E) \approx \mathbf{Z}_2$). Докажите, что $f_{\#}$: $\pi_5(X_2^4) \approx \pi_5(E)$ и что $f_{\#}$ — мономорфизм группы $\pi_6(X_2^4)$ на 2-примарную компоненту группы $\pi_6(E)$. (*Указание*. Докажите, что f_*: $H_q(X_2^4) \to H_q(E)$ является изоморфизмом 2-примарных компонент для $q < 8$, и используйте обобщенную теорему Уайтхеда.)

6. Докажите, что $\pi_{n+2}(S^n) \approx \mathbf{Z}_2$, если $n \geqslant 2$.

7. Докажите следующие утверждения:

(a) $\pi_5(S^2) \approx \mathbf{Z}_2$;
(b) $\pi_6(S^3)$ — группа порядка 12;
(c) $\pi_7(S^4) \approx \pi_6(S^3) \oplus \mathbf{Z}$;
(d) $\pi_{n+3}(S^n)$ — группа порядка 24, если $n \geqslant 5$.

УКАЗАТЕЛЬ

ОГЛАВЛЕНИЕ

Э. СПЕНЬЕР

Алгебраическая топология

Редактор *Н. И. Плужникова*
Художник *Д. В. Орлов* Художественный редактор *В. И. Шаповалов*
Технический редактор *В. П. Сизова* Корректор *О. Ф. Иванова*

Сдано в набор 26/XI 1970 г. Подписано к печати 24/VIII 1971 г. Бумага кн-жур. $60\times90^1/_{16}$=
=21,25 бум. л. 42,5 печ. л. Уч.-изд. л. 39,95. Изд. № 1/5451. Цена 3 р. Зак. 888

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»
Москва, 1-й Рижский пер., 2.

Ордена Трудового Красного Знамени
Ленинградская типография № 2 имени Евгении Соколовой Главполиграфпрома
Комитета по печати при Совете Министров СССР. Измайловский проспект, 29

Э. СПЕНЬЕР

АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ТОПОЛОГИЯ

Перевод с английского
Б. М. ПРАНОВА

Под редакцией
А. М. ВИНОГРАДОВА

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР» МОСКВА 1971