

Л. СПИТЦЕР

**Ф И З И К А
П О Л Н О С Т Ь Ю
И О Н И З О В А Н Н О Г О
Г А З А**

Ф И З И К А П О Л Н О С Т Ь Ю И О Н И З О В А Н Н О Г О Г А З А

Л. СПИТЦЕР

**PHYSICS OF
FULLY IONIZED GASES**

by

LYMAN SPITZER, JR.

Plasma Physics Laboratory,
Princeton University, Princeton, New Jersey

Second Revised Edition

INTERSCIENCE PUBLISHERS

a division of John Wiley and Sons,
New York—London 1962

Л. СПИТЦЕР

ФИЗИКА ПОЛНОСТЬЮ ИОНИЗОВАННОГО ГАЗА

*Перевод со второго переработанного
американского издания*

Р. З. МУРАТОВА и М. В. САМОХИНА

Под редакцией

М. Л. ЛЕВИНА

ИЗДАТЕЛЬСТВО „МИР“

Москва 1965

УДК 533.9 + 538.4

Редакция литературы по физике

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА ПЕРЕВОДА

Первое издание этой книги было опубликовано в США в 1956 г. (перевод первого издания был выпущен Издательством иностранной литературы в 1957 г.). Настоящая книга представляет собой перевод со второго значительно переработанного автором американского издания. В 1956 г. все исследования в области управляемого термоядерного синтеза были закрытыми и полем приложения физики плазмы была в основном астрофизика. Сам автор в то время был известен в научном мире только как теоретик-астрофизик.

После Харуэллского доклада И. В. Курчатова и Женевской конференции 1958 г. в литературу хлынул поток публикаций по физике горячей плазмы (за время между двумя изданиями книги Спитцера опубликовано около 5000 работ, в том числе монографии, обзоры, лекционные курсы и т. д.). Хотя на фоне уже вышедших книг, включающих часто самые свежие материалы, маленькая монография Спитцера может показаться старомодной, однако фактически она осталась все эти годы лучшим введением в теорию плазменных явлений.

Новое переработанное издание еще больше укрепляет за книгой Спитцера заслуженную репутацию классического руководства. Она вобрала в себя лишь бесспорную, устоявшуюся часть результатов, полученных в последние годы. Обо всех изменениях и добавлениях достаточно подробно сказано в предисловии автора ко второму изданию, поэтому здесь мы отметим только, что за эти годы возрос интерес читателя к предмету книги, а также и авторитет автора: нынешний Спитцер — это прежде всего руководитель

одного из крупнейших в мире научных центров по изучению физики плазмы — Принстонской лаборатории, инициатор и вдохновитель стеллараторной программы.

При редактировании перевода были исправлены отдельные описки и опечатки оригинала. Кроме того, мы позволили себе в примечании к гл. 1 указать простой вывод формулы (1.11), не нарушающий характера изложения в этой главе.

Книга представляет интерес для всех специалистов — физиков и инженеров, работающих в различных областях физики плазмы и ее практических применений. Бесспорные достоинства книги как учебного пособия делают ее особенно ценной для тех, кто приступил к изучению этого раздела физики — прежде всего студентов старших курсов и аспирантов физических и физико-технических факультетов. Много полезного материала для лекций и семинаров найдут здесь также преподаватели вузов, где физика плазмы или отдельные ее разделы входят в учебную программу.

Перевод выполнен Р. З. Муратовым (условные обозначения, гл. 2, 3 и приложение) и М. В. Самохиным (предисловия автора, гл. 1, 4, 5).

М. Левин

ПРЕДИСЛОВИЕ АВТОРА КО ВТОРОМУ ИЗДАНИЮ

За шесть лет, прошедших с момента выхода первого издания этой книги, исследования в области физики плазмы значительно расширились. Особенно много работ, относящихся к анализу процессов в полностью ионизованных газах, появилось в 1958 г., после рассекречивания проблемы управляемых термоядерных реакций. Понимание многих вопросов существенно продвинулось вперед. Размах исследований и прогресс знаний особенно поразителен в двух областях — проблеме магнитогидродинамического равновесия и устойчивости и проблеме распространения волн бесконечно малой амплитуды в плазме.

Первой заботой при переработке этой книги был выбор вопросов, которые нужно в нее включить. В основном мы следуем первому изданию и уделяем большое внимание макроскопическим уравнениям и их следствиям. Однако, как и в первом издании, во вводной главе рассматривается движение отдельных заряженных частиц, а заключительная глава, посвященная анализу столкновений заряженных частиц, содержит сводку различных коэффициентов, которые приходится использовать в макроскопических уравнениях. Глава о волнах в плазме почти полностью переделана и значительно расширена; добавлена также новая глава о магнитогидродинамическом равновесии и устойчивости. Результаты обширных исследований по динамике плазмы, полученные за последние несколько лет с помощью уравнения Больцмана, здесь совершенно не рассматриваются. Однако физические механизмы, лежащие в основе таких важных явлений, как затухание Ландау, циклотронное затухание и неустойчивость двух потоков, исследуются очень

простыми методами в конце гл. 3, посвященной изучению волн в плазме.

Одна из основных областей исследований, не включенных в новое издание, — это нелинейные явления, такие, как ударные волны и турбулентность. Хотя в последние годы решены некоторые идеализированные нелинейные задачи, наши знания, относящиеся к этим проблемам, еще очень ограничены.

О бурном росте количества исследований по плазме за последние годы свидетельствует большое число опубликованных работ, которые следовало бы включить в полную библиографию. Хотя количество приведенных ссылок увеличилось вдвое по сравнению с первым изданием, мы никоим образом не пытались дать полную библиографию; ссылки делаются в основном на работы, хорошо знакомые автору, причем эти работы не обязательно являются самыми ранними или самыми полными исследованиями по каждому вопросу. Поэтому цитируемые статьи, естественно, связаны в основном с работами, проводимыми в США, и в особенности с исследованиями в Лаборатории физики плазмы.

С удовольствием выражаю признательность многим ученым, которые внесли предложения по улучшению и исправлению содержания книги, в частности Т. Нортропу за ценные замечания к гл. 1 и 2, С. Буксбауму, А. Каксу и М. Ротману за многочисленные предложения, относящиеся к изложению гл. 3, А. Кауфману и Х. Драйсеру за замечания к гл. 5, В. Медору за замечания к приложению, а также А. Баносу, А. Бишопу, Дж. Даусону, М. Готтлибу и В. Ньюкомбу за большое число полезных советов. Особую благодарность приношу А. Саймону и Т. Стиксу за критические замечания при просмотре рукописи.

Лайман Спитцер

Лаборатория физики плазмы
Принстонский университет
Принстон, Нью-Джерси
Октябрь, 1961

ПРЕДИСЛОВИЕ АВТОРА К ПЕРВОМУ ИЗДАНИЮ

И в газовой электронике, и в теоретической астрофизике растет интерес к газам, характеризующимся почти полной ионизацией. Хотя ионизация, конечно, никогда не бывает полной, в определенных условиях доля присутствующих нейтральных частиц может быть меньше нескольких процентов, и поэтому при исследовании большинства физических процессов их влиянием можно пренебречь. Более того, в случае водорода, представляющего собой, несомненно, самый распространенный элемент в звездах и в межзвездном пространстве, ионизованные атомы лишены электронов. Гелий, следующий элемент по распространенности, лишен двух электронов в области внутри Солнца и в солнечной короне. Даже в лабораторном ионизованном газе некоторые наблюдаемые явления, такие, как колебания плазмы, не зависят ни от присутствия нейтральных частиц, ни от наличия связанных электронов в ионизованных атомах. Таким образом, для многих целей полезно теоретическое исследование поведения газа, состоящего лишь из электронов и голых ядер.

Преимущество такого газа в некоторых отношениях заключается в простоте исследования. Большинство квантовомеханических эффектов здесь можно обычно не учитывать, за исключением относительно слабого взаимодействия с полем излучения. Большинство явлений, важных в обычной газовой электронике, исчезает; захват электронов, рекомбинация, возбуждение и излучение атомов и молекул, электрический пробой и т. д. не происходят в ионизованном газе. Так как поверхность твердого тела уменьшает

степень ионизации, то следует предположить, что любая такая поверхность находится далеко от исследуемой области, и не рассматривать происходящие вблизи нее сложные процессы. Подобным же образом значительно упрощается учет столкновений между заряженными частицами, так как при силах взаимодействия, обратно пропорциональных квадрату расстояния, расчет более точен, чем в случае сложных взаимодействий систем, содержащих связанные электроны.

В исследовании полностью ионизованного газа встречаются проблемы нескольких видов. Хотя основные физические процессы проще, чем в обычном газе, движения частиц сложнее, поскольку они связаны с электромагнитным полем. При наличии сильного магнитного поля эта связь между динамикой и электромагнитным полем приводит к новым явлениям, которые впервые исследовал Альфвен; они объединены под общим названием «магнитная гидродинамика». Даже в отсутствие магнитного поля электрические свойства полностью ионизованного газа обуславливают сложные движения, которые включают в себя возвращающие электростатические силы и не имеют аналога в обычных газах. Наконец, теория столкновений частиц, определяющая коэффициенты переноса (электропроводность, теплопроводность, вязкость и т. д.) и время релаксации (время, в течение которого устанавливается равновесное распределение по скоростям), может рассматриваться с новой точки зрения вследствие дальнедействующего характера существующих сил, обратно пропорциональных квадрату расстояния.

Значительный прогресс в этой области за последние годы был достигнут в основном благодаря работам Альфвена, Каулинга и Шлютера. Еще нет общего и простого обзора этих проблем, и желающие ознакомиться с этими вопросами вынуждены обращаться главным образом к оригинальным статьям в различных журналах. Цель настоящей книги — дать ввод-

ный обзор, предназначенный для студентов старших курсов.

Материал книги ограничен вопросами, нужными для теоретического понимания предмета. Экспериментальные факты, относящиеся к разбираемым в книге вопросам, например те, которые связаны с электромагнитными и электростатическими волнами в плазме, здесь не излагаются. Добавить подробное сравнение с экспериментом значило бы сильно увеличить объем книги.

Эта книга предназначена для тех, кто прошел вводный курс теоретической физики, но может быть не знаком со строгой кинетической теорией газов. Предполагается знание уравнений Максвелла, а также знакомство с элементами векторного анализа в объеме вводной главы книги Пейджа (Page, Introduction to the Theoretical Physics, New York, 1945). Библиография ни в коей мере не является полной, однако включает в себя некоторые из основных работ по каждой теме. Можно надеяться, что тот, кто собирается работать с полностью ионизованными газами, найдет эти ссылки полезным введением в новую и быстро развивающуюся область физики.

Автор выражает глубокую благодарность М. Саветову, М. Шварцшильду, А. Саймону, Т. Стиксу и Л. Тонксу за внимательный просмотр рукописи и ряд ценных советов.

Лайман Спитцер

Принстон, Нью-Джерси
Июль, 1955

Условные обозначения

- a — радиус вращения, или ларморовский радиус; формула (1.4).
- A — атомный вес.
- A_e — атомный вес электрона.
- A_i — атомный вес иона.
- A_D — диффузионная постоянная; формула (5.18).
- A_r — постоянная захвата; формула (5.63).
- B — напряженность магнитного поля, в *гауссах*.
- δB — изменение B , возникающее в результате смещения ξ ; формула (4.8).
- c — скорость света, $2,9979 \cdot 10^{10}$ см/сек.
- C — числовая константа.
- d — длина затухания амплитуды волны; уравнение (3.5).
- e { — заряд протона, $4,803 \cdot 10^{-10}$ ед. CGSE.
— основание натуральных логарифмов.
- E — напряженность электрического поля, в единицах CGSM (10^8 в/см).
- E_{\parallel} — компонента E , параллельная B .
- E_{\perp} — компонента E , перпендикулярная к B .
- E_0 — амплитудное значение E в гармонической волне.
- $f(w)$ — функция распределения скоростей; плотность частиц в пространстве скоростей.
- $f^{(0)}(w)$ — функция распределения Максвелла — Больцмана; формула (5.8).
- F — сила, действующая на частицу, в *динах*.
- g — гравитационное ускорение.
- g_{\parallel} — компонента g , параллельная B .
- g_{\perp} — компонента g , перпендикулярная к B .
- \hat{g} — квантовомеханический поправочный множитель.

- g_{ff} — поправочный множитель для случая излучения при свободно-свободных переходах (тормозное излучение); формулы (5.59) и (5.61).
- g_{fn} — поправочный множитель для рекомбинационного излучения; формула (5.64).
- $G(x)$ — функция, определяемая формулой (5.20).
- h { — дебаевский радиус экранирования; формула (2.3).
— постоянная Планка, $6,625 \cdot 10^{-27}$ э · см²/сек.
- i — $(-1)^{1/2}$.
- I — полный ток, в единицах CGSM ($1/10$ а).
- $I(x)$ — мнимая часть x .
- j — плотность тока, в единицах CGSM ($1/10$ а/см²).
- k — постоянная Больцмана, $1,380 \cdot 10^{-16}$ эрг/град.
- K — диэлектрическая проницаемость; формула (2.32).
- \mathcal{K} — коэффициент теплопроводности.
- \mathcal{K}_L — коэффициент теплопроводности лоренцовского газа; формула (5.47).
- \mathcal{K}_\perp — коэффициент теплопроводности в направлении, перпендикулярном к сильному магнитному полю; формула (5.53).
- l { — параметр, характеризующий распределение Максвелла — Больцмана; формула (5.9).
— обозначение для левовращающей волны с круговой поляризацией.
- $\ln x$ — натуральный логарифм x .
- L — расстояние, длина.
- m — масса частицы, в граммах.
- m_e — масса электрона.
- m_i — масса иона.
- m { — целое число, характеризующее нормальный тип колебаний, в котором возмущение изменяется как $\exp(im\theta)$ (так называемая «мода» возмущения).
— число степеней свободы.
- M — приведенная масса; формула (5.3).
- n — плотность частиц (число частиц в 1 см³).

- N — число частиц в объеме или погонное число частиц на 1 см длины (пинч-эффект).
 N — число столкновений, испытываемых пробной частицей.
 o — обозначение для обыкновенной волны: \mathbf{E} параллельно \mathbf{B} .
 p — давление.
 p_e — давление электронов.
 p_i — давление ионов.
 p_{\parallel} — давление в направлении, параллельном \mathbf{B} .
 p_{\perp} — давление в направлении, перпендикулярном к \mathbf{B} .
 p — параметр столкновения (расстояние максимального сближения в отсутствие сил взаимодействия).
 p_0 — величина параметра столкновения, соответствующая отклонению в орбитальной плоскости на угол $\pi/2$.
 P_r — вероятность «убегания» электрона за единицу времени; формула (5.40).
 P — импульс, передаваемый в 1 см³ в 1 сек в результате столкновений частиц.
 P_{ij} — импульс, передаваемый частицами сорта j частицам сорта i .
 q — электрический заряд, в единицах CGSM ($1/10$ кулона).
 Q — поток тепла.
 Q_{\perp} — поток тепла в направлении, перпендикулярном к \mathbf{B} .
 \mathbf{r} — радиус-вектор.
 r — обозначение для правовращающей волны с круговой поляризацией.
 R — коэффициент отражения.
 R — радиус кривизны силовых линий; формулы (1.12) и (1.13).
 s — расстояние.
 ds — элемент длины.
 S — площадь.

- dS — элемент площади.
 t — время.
 t_c — время самостолкновений; формула (5.26).
 t_D — время отклонения; формула (5.22).
 t_E — время обмена энергией; формула (5.25).
 t_s — время замедления; формула (5.28).
 t_{eq} — время установления равномерного распределения между двумя группами частиц; формула (5.31).
 T — температура, в градусах Кельвина ($1 \text{ эв} = 11\,600^\circ \text{K}$).
 T_e — кинетическая температура электронов.
 T_i — кинетическая температура ионов.
 T_{\parallel} — кинетическая температура, определяемая компонентами скоростей, параллельными \mathbf{V} .
 T_{\perp} — кинетическая температура, определяемая компонентами скоростей, перпендикулярными к \mathbf{V} .
 u — относительная скорость (см. гл. 5).
 u_m — среднеквадратичная величина максимального значения скорости u захватываемых частиц (относительно волны); формула (3.50).
 U — электрический потенциал, в единицах CGSM (10^8 в).
 v — макроскопическая скорость; формулы (2.5) и (П.3).
 v_e — макроскопическая скорость электронов.
 v_i — макроскопическая скорость ионов.
 v_D — скорость диффузии.
 $v_{D\eta}$ — скорость диффузии, обусловленной конечной проводимостью (столкновения между электронами и ионами); формула (2.39).
 $v_{D\mu}$ — скорость диффузии, обусловленной вязкостью (столкновения между ионами); формула (2.42).
 v_{Dt} — скорость диффузии, обусловленной турбулентностью плазмы; формула (2.45).
 V — объем.

$\Delta V, dV$ — элемент объема.

V — фазовая скорость (см. гл. 3).

V_A — альфвеновская скорость; формула (3.29).

V_S — скорость звука (акустические или ионные волны); формула (3.21).

w — скорость частицы.

w_{\parallel} — компонента скорости, параллельная \mathbf{B} (см. гл. 1).

w_{\perp} — компонента скорости, перпендикулярная к \mathbf{B} (см. гл. 1). [w_{\parallel} и w_{\perp} не следует путать с Δw_{\parallel} и Δw_{\perp} (см. гл. 5).]

w_D — скорость дрейфа поперек магнитного поля; скорость ведущего центра.

w_r — скорость частиц, которые испытывают резонансное ускорение; формула (3.58).

W — энергия.

$\delta W(\xi, \xi)$ — приращение полной энергии, за исключением кинетической, возникающее при смещении ξ .

δW_S — часть приращения δW , обусловленная изменениями поля на поверхности плазмы; формула (4.6).

δW_p — часть приращения δW , обусловленная изменениями поля в объеме плазмы; формула (4.7).

δW_v — часть приращения δW , обусловленная изменениями поля вне плазмы.

x, y, z — координаты.

x — обозначение для необыкновенной волны (\mathbf{E} перпендикулярно к \mathbf{B}).

Z — зарядовое число иона; во всех макроскопических уравнениях — среднее зарядовое число ионов.

α $\left\{ \begin{array}{l} \text{— коэффициент рекомбинации; формула (5.67).} \\ \text{— постоянная тонкой структуры (см. гл. 5, § 2).} \end{array} \right.$

α, β — коэффициенты термоэлектрического эффекта; уравнения (5.43) и (5.44).

- β — отношение ω к скорости света c .
 β_{\parallel} — отношение ω_{\parallel} / c .
 β_{\perp} — отношение ω_{\perp} / c .
 β — $157\,000^{\circ} Z^2/T$; формулы (5.67) — (5.69).
 γ { — отношение удельных теплоемкостей.
 { — постоянная Эйлера, равная 0,5772.
 $\Upsilon_E, \Upsilon_{EB}$ — величины, на которые нужно разделить η_L , чтобы получить истинное η .
 Γ — параметр, входящий в выражение для вероятности убегания электронов, приблизительно равный отношению средней скорости дрейфа электронов к тепловой скорости; формула (5.39).
 δ_T — множитель, на который нужно умножить \mathcal{H}_L , чтобы получить \mathcal{H} .
 Δ — приращение.
 $\Delta\omega_{\parallel}$ — компонента приращения $\Delta\omega$, параллельная \mathbf{w} .
 $\Delta\omega_{\perp}$ — компонента приращения $\Delta\omega$, перпендикулярная к \mathbf{w} .
 ϵ — множитель, на который нужно умножить \mathcal{H} при учете термоэлектрического эффекта.
 ϵ_{ff} — скорость излучения при свободно-свободных переходах; формула (5.60).
 ϵ_s — скорость синхротронного излучения; формула (5.73).
 ϵ_{sn} — скорость излучения для n -й гармоники, формула (5.70).
 ζ — отношение квадратов частот ω_p для двух компонент плазмы.
 η — сопротивление, в единицах CGSM (10^9 ом · см).
 η_L — сопротивление лоренцовского газа; формула (5.34).
 η_{\perp} — сопротивление в направлении, перпендикулярном к сильному магнитному полю; формула (5.42).
 θ — угол.
 κ — волновое число ($2\pi/\lambda$).

- κ_ν — коэффициент поглощения на 1 см^3 для излучения с частотой ν , в $\text{см}^2/\text{см}^3$.
- λ — длина волны.
- λ — термоэлектрический коэффициент в сильном магнитном поле; формула (5.52).
- Λ — отношение дебаевского радиуса экранирования к ρ_0 , формула (5.14).
- μ — магнитный момент (диамагнитный) заряженной частицы, вращающейся вокруг магнитных силовых линий; формула (1.17).
- μ — коэффициент вязкости.
- μ_\perp — коэффициент вязкости для напряжений сдвига в плоскости, перпендикулярной к \mathbf{B} .
- ν — частота (в том числе частота столкновений).
- ν_c — циклотронная частота.
- $\bar{\mathbf{r}}(\mathbf{r})$ — произвольное смещение в жидкости.
- ρ — плотность массы, в $\text{г}/\text{см}^3$.
- σ — плотность заряда, в единицах CGSM ($1/10 \text{ кулон}/\text{см}^3$).
- σ — коэффициент затухания амплитуды волны.
- σ_s — поперечное сечение рассеяния фотона на свободных электронах; формула (5.56).
- $\sigma_{\text{сп}}$ — поперечное сечение процесса захвата свободного электрона на n -й уровень «голым» ядром; формула (5.62).
- τ — постоянная времени спада магнитного поля.
- φ — гравитационный потенциал.
- $\varphi(\beta)$ — функция, определяемая формулой (5.69).
- Φ — магнитный поток через поверхность.
- $\Phi(x)$ — функция ошибок.
- χ — угол отклонения в плоскости орбиты при столкновении двух частиц.
- ψ — угол, характеризующий столкновение между двумя частицами; фиг. 10 и формула (5.1).
- Ψ — тензор напряжений; формулы (2.6) и (П.13).
- ω — угловая частота.
- ω_c — циклотронная частота.

- ω_{ce} — циклотронная частота электронов.
 ω_{ci} — циклотронная частота ионов.
 ω_p — плазменная частота; формула (3.8).
 $\omega_r (\omega_r)$ — параметр, характеризующий число частиц со скоростью ω_r ; формула (3.60).
 ω_f — частота колебаний захваченных частиц; формула (3.51).
 Ω — телесный угол.
 $d\Omega$ — элемент телесного угла.
 ∇ — градиент.
 ∇_{\parallel} — компонента градиента, параллельная \mathbf{B} .
 ∇_{\perp} — компонента градиента, перпендикулярная к \mathbf{B} .
 $\langle X \rangle$ — диффузионный коэффициент; величина X суммируется по всем столкновениям, испытываемым пробной частицей за 1 сек, и усредняется по всем пробным частицам в элементе объема фазового пространства.

ДВИЖЕНИЕ ЗАРЯЖЕННОЙ ЧАСТИЦЫ

Движение заряженной частицы в заданных внешних полях было достаточно полно изучено лишь в последние годы. Настоящая вводная глава тесно связана с представлениями, развитыми Альфвенем [1], и может служить обзором этой области, являющейся основой для понимания динамических процессов в ионизованном газе.

В настоящей книге мы будем всюду пользоваться электромагнитной системой единиц CGSM; чтобы избежать путаницы с общепринятым обозначением заряда электрона e в электростатической системе единиц, будем применять для заряда электрона в электромагнитной системе единиц обозначение $-e/c$.

§ 1. Уравнения движения

Когда частица с зарядом q движется в области, где имеются электрическое поле \mathbf{E} и магнитное поле \mathbf{B} , на нее действуют две силы. Электростатическая сила, параллельная полю \mathbf{E} , равна $q\mathbf{E}$ дин, где q и \mathbf{E} измерены в электромагнитной системе единиц. Сила, обусловленная магнитным полем, перпендикулярна как к скорости частицы \mathbf{w} , так и к напряженности магнитного поля \mathbf{B} . Если скорость \mathbf{w} измерена в единицах системы CGS, а \mathbf{B} — в гауссах, то магнитная сила равна $q\mathbf{w} \times \mathbf{B}$ дин. Тогда уравнение движения имеет вид

$$m \frac{d\mathbf{w}}{dt} = q(\mathbf{E} + \mathbf{w} \times \mathbf{B}), \quad (1.1)$$

где m — масса частицы в граммах.

Это известное уравнение имеет простые решения в нескольких частных случаях. Когда магнитного поля \mathbf{B} нет, а электрическое поле \mathbf{E} однородно и постоянно, частицы движутся с постоянным ускорением $q\mathbf{E}/m$. Если отсутствует электрическое поле \mathbf{E} , то ускорение равно $q\mathbf{w} \times \mathbf{B}/m$ и всегда перпендикулярно к скорости, вследствие чего искривляется траектория частицы, а абсолютная величина скорости остается неизменной. Таким образом, магнитное поле не влияет на кинетическую энергию частицы. Когда \mathbf{E} равно нулю, а \mathbf{B} не меняется в пространстве и времени, то ускорение постоянно по величине, и если при этом начальная скорость \mathbf{w} перпендикулярна к \mathbf{B} , то частица движется по окружности радиуса a . Приравнявая численно ускорение $q\mathbf{w} \times \mathbf{B}/m$ центробежному ускорению ω^2/a , легко найти угловую скорость вращения ω/a :

$$\omega_c = \frac{qB}{m} = \frac{ZeB}{mc}, \quad (1.2)$$

причем заряд частицы мы приняли равным величине Z , умноженной на e/c , где $e = 4,803 \cdot 10^{-10}$ ед. CGSE. Величина ω_c называется циклотронной частотой, так как она равна угловой скорости, с которой заряженная частица вращается в циклотроне. Соответствующая частота ν_c , измеряемая числом оборотов за 1 сек, равна

$$\nu_c = \frac{\omega_c}{2\pi} = 1,54 \cdot 10^3 \frac{ZB}{A} \text{ сек}^{-1}, \quad (1.3)$$

где A — отношение массы частицы к массе единицы атомного веса, равной $1,660 \cdot 10^{-24}$ г. При отрицательном заряде Z нужно взять его абсолютную величину.

Радиус вращения, или *ларморовский радиус*, a равен w/ω_c . Если начальная скорость \mathbf{w} не перпендикулярна к \mathbf{B} , то для определения радиуса вращения a следует брать лишь перпендикулярную к \mathbf{B} составляющую w_{\perp} ; тогда

$$a = \frac{w_{\perp}}{\omega_c} = \frac{mw_{\perp}c}{ZeB}. \quad (1.4)$$

Параллельная \mathbf{B} компонента скорости \mathbf{w} , которую мы обозначим w_{\parallel} , не изменяется под действием магнитного поля и не оказывает влияния на поперечное движение (перпендикулярное полю). Сложив эти два движения, найдем, что результирующее движение происходит по спирали с постоянным шагом вдоль магнитной силовой линии.

В последующих параграфах будет изучено движение свободной частицы в других относительно простых случаях. Хотя рассмотрение различных случаев движения частицы является полезным, следует подчеркнуть, что для описания обычного ионизованного газа, в котором могут играть важную роль токи и заряды, часто не совсем удобно пользоваться представлением о движении отдельной частицы. В таком случае токи и заряды гораздо легче найти из макроскопических уравнений газа, приведенных в следующей главе, а не из микроскопической картины движения отдельной частицы.

§ 2. Дрейф заряженной частицы

Теперь рассмотрим движение заряженной частицы в магнитном поле \mathbf{B} при наличии различных возмущений, таких, как электрическое поле, небольшая пространственная неоднородность \mathbf{B} или медленное изменение \mathbf{B} во времени. В этих случаях можно приближенно представить движение частицы как вращение вокруг некоторой движущейся точки. Этот мгновенный центр вращения называется *ведущим центром*, а его движение в направлении, перпендикулярном к \mathbf{B} , — *дрейфом* частицы.

а. Электрическое поле. Пусть \mathbf{E} и \mathbf{B} не меняются в пространстве и времени, причем \mathbf{E} перпендикулярно к \mathbf{B} . Определим новую скорость \mathbf{w}' так, чтобы

$$\mathbf{w} = \mathbf{w}' + \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{B^2}. \quad (1.5)$$

Поскольку \mathbf{E} и \mathbf{B} предполагаются постоянными и однородными, подстановка формулы (1.5) в уравнение (1.1) дает

$$m \frac{d\mathbf{w}'}{dt} = q \left\{ \mathbf{E} + \mathbf{w}' \times \mathbf{B} + \frac{1}{B^2} (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} \right\}. \quad (1.6)$$

Раскрывая двойное векторное произведение и принимая во внимание, что скалярное произведение $\mathbf{B} \cdot \mathbf{E}$ равно нулю, получаем

$$(\mathbf{E} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} = -B^2 \mathbf{E}. \quad (1.7)$$

Комбинируя (1.6) и (1.7), находим

$$m \frac{d\mathbf{w}'}{dt} = q\mathbf{w}' \times \mathbf{B}. \quad (1.8)$$

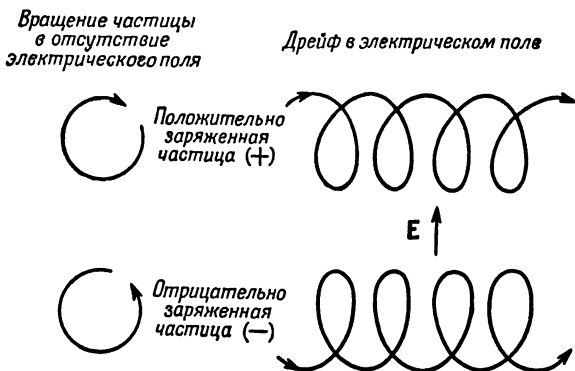
Движение, определяемое уравнением (1.8), не зависит от электрического поля и представляет собой вращение с циклотронной частотой вокруг силовой линии. Результирующая скорость \mathbf{w} является суммой \mathbf{w}' и скорости дрейфа \mathbf{w}_D , которая перпендикулярна как к \mathbf{E} , так и к \mathbf{B} . В общем случае, когда \mathbf{E} имеет не только перпендикулярную к магнитному полю компоненту E_{\perp} , но и параллельную компоненту E_{\parallel} , скорость дрейфа численно равна

$$\omega_D = \frac{E_{\perp}}{B} = \frac{10^8 E_{\perp} \text{ в/см}}{B}. \quad (1.9)$$

Составляющая E_{\parallel} вызывает равномерное ускорение вдоль магнитной силовой линии. Если величина ω_D , вычисленная по формуле (1.9), превышает скорость света c , то эта формула, разумеется, неприменима. В этом случае поперечная кинетическая энергия частицы будет непрерывно расти. Так, если магнитное поле равно 10^3 гаусс, то формула (1.9) пригодна лишь при E_{\perp} , меньшем $3 \cdot 10^{13}$ ед. CGSM, т. е. $3 \cdot 10^5$ в/см.

Появление дрейфа, скорость которого определяется формулой (1.9), можно пояснить двумя способами. Предположим, что положительно заряженная частица

вращается в плоскости, перпендикулярной к магнитному полю, как указано на фиг. 1. Магнитное поле направлено вертикально вверх от плоскости чертежа. Если теперь приложить электрическое поле, то частица будет ускоряться на левой половине окружности и замедляться на правой; в результате этого скорость частицы при прохождении верхней части



Фиг. 1. Дрейф в электрическом поле.

Магнитное поле направлено вертикально вверх от плоскости чертежа.

пути будет больше скорости на противоположной половине. Согласно соотношению (1.4), радиус вращения частицы увеличивается с ростом скорости, поэтому радиус кривизны траектории при прохождении верхней части пути больше, чем на противоположном участке. В результате возникает дрейф вправо. Для частиц другого знака вращение происходит в противоположном направлении, однако и ускорение, вызываемое электрическим полем, направлено в обратную сторону; поэтому направление дрейфа не изменится. Дальнейший анализ показывает, что скорость дрейфа не зависит ни от массы частицы, ни от ее скорости, ни от знака заряда.

Более глубоко этот вопрос можно рассмотреть с помощью преобразования \mathbf{E} и \mathbf{B} к движущейся системе координат. В системе, движущейся со скоростью $\mathbf{E} \times \mathbf{B} / B^2$, электрическое поле отсутствует, если E_{\parallel} равно нулю. Следовательно, наблюдатель, движущийся со скоростью \mathbf{w}_D , не обнаруживает электрического поля и видит, что частицы вращаются по окружностям вокруг магнитных силовых линий. Это рассуждение ясно показывает, что формула (1.9) справедлива и для частиц с релятивистскими энергиями, хотя уравнение (1.1) является нерелятивистским.

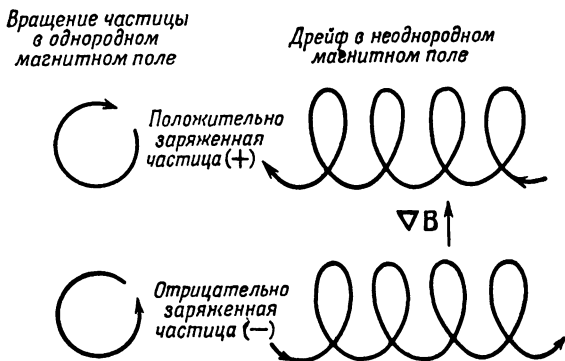
б. Гравитационное поле. Если на частицу действует гравитационная сила, имеющая составляющую $m\mathbf{g}_{\perp}$, перпендикулярную к \mathbf{B} , то частица дрейфует точно так же, как и при наличии электрического поля. Сила, приходящаяся на единицу заряда и равная в предыдущем случае \mathbf{E} , теперь оказывается равной $m\mathbf{g}_{\perp}/q$, где, как и прежде, q — заряд частицы. Скорость дрейфа \mathbf{w}_D после замены \mathbf{E}_{\perp} в формуле (1.9) определяется соотношением

$$\mathbf{w}_D = \frac{m\mathbf{g}_{\perp}}{qB} = \frac{\mathbf{g}_{\perp}}{\omega_c}, \quad (1.10)$$

где ω_c — циклотронная частота, величина которой дается формулой (1.2). Направление дрейфа перпендикулярно как к \mathbf{B} , так и к \mathbf{g}_{\perp} , однако теперь оно изменяется со знаком заряда частицы. Для положительно заряженной частицы дрейф происходит в направлении $\mathbf{g} \times \mathbf{B}$. Дрейф, вызванный гравитационным полем, обычно очень мал.

в. Неоднородное магнитное поле. Представим теперь, что частица движется в магнитном поле, направление которого параллельно оси z , а напряженность меняется вдоль оси x . Когда частица вращается вокруг силовой линии в плоскости xy , ее радиус

вращения по орбите, согласно (1.4), непрерывно меняется. Как и в рассмотренном ранее примере, в результате этого возникает дрейф, схематически изображенный на фиг. 2.



Ф и г. 2. Дрейф в неоднородном магнитном поле. Магнитное поле направлено вертикально вверх от плоскости чертежа.

В противоположность предыдущему случаю теперь скорость дрейфа можно найти только с помощью приближенной теории, в которой не принимаются во внимание малые члены. Теория «первого порядка», учитывающая только члены первого порядка по ω_D/ω_{\perp} , была разработана Альфвенем [1]. Сохранив прежние обозначения, его результаты можно представить в виде

$$\frac{\omega_D}{\omega_{\perp}} = \frac{a \nabla_{\perp} B}{2B}, \quad (1.11)$$

где a — радиус вращения, определяемый формулой (1.4), а $\nabla_{\perp} B$ — градиент скаляра B в плоскости, перпендикулярной к \mathbf{B} . За исключением коэффициента $1/2$,

соотношение (1.11) нетрудно получить из соображений размерности¹⁾.

Аналогично этому дрейф возникает также при движении частицы со скоростью w_{\parallel} вдоль искривленной силовой линии с радиусом кривизны R . Введем новую систему координат, вращающуюся с угловой скоростью w_{\parallel}/R вокруг центра кривизны поля. В этой системе координат частицы не движутся вдоль силовой линии, но центробежная сила mw_{\parallel}^2/R вызывает такой же дрейф, как и гравитационная сила той же самой величины. Используя уравнение (1.10), получаем

$$w_D = \frac{w_{\parallel}^2}{R\omega_c}. \quad (1.12)$$

Если токов в плазме нет, то $\nabla \times \mathbf{B}$ равно нулю и $\nabla_{\perp} B/B$ равно $1/R$. Тогда из соотношения (1.11) и (1.12) находим

$$w_D = \frac{1}{\omega_c R} \left(\frac{1}{2} w_{\perp}^2 + w_{\parallel}^2 \right). \quad (1.13)$$

Оба дрейфа происходят в одном и том же направлении; для положительно заряженной частицы w_D имеет направление $\mathbf{B} \times \nabla B$, а для частицы с отрицательным зарядом направление дрейфа изменяется на противоположное.

Если электрическое и магнитное поля меняются во времени, то в приближении первого порядка появляются дополнительные дрейфы. Точнее говоря, если при движении ведущего центра векторное произведение $\mathbf{E} \times \mathbf{B}/B^2$ изменяется во времени, то возникает дрейф, являющийся величиной первого порядка по $1/\omega_c$ и более высокого порядка относительно $1/B$.

¹⁾ В неоднородном поле $B_x = B(x)$ действующая на частицу центробежная сила равна $q w_{\perp} [B + (dB/dx)x]$, где значения B и dB/dx взяты в «центре» орбиты ($x = y = 0$). Умножая это выражение на $-x/a$ и усредняя по орбите ($\overline{x^2} = 1/2 a^2$), найдем среднее значение силы F_x , которая и вызывает, как легко видеть, дрейф, описываемый формулой (1.11). — Прим. ред.

Все эти дрейфы первого порядка по $1/\omega_c$ детально изучил Нортроп [7].

г. Удержание в аксиально симметричных полях. Вообще говоря, рассмотренные выше дрейфы, конечно, оказывают влияние на удержание заряженных частиц в магнитном поле, и это представляет интерес как для астрофизической плазмы, так и для плазмы в лабораторных условиях. Однако можно строго доказать, что дрейфы не влияют на удержание плазмы в случае аксиальной симметрии электрического и магнитного полей, если кинетическая энергия не слишком велика; точнее говоря, в этом случае заряженная частица колеблется вблизи поверхности постоянного магнитного потока, образованной вращением какой-либо магнитной силовой линии вокруг оси симметрии.

Чтобы получить этот результат, спроектируем уравнение (1.1) на направление θ , что даст величину ускорения вокруг оси симметрии. Поскольку мы предположили, что электрический потенциал U и магнитное поле \mathbf{B} не зависит от θ , электростатическая часть поля E_θ равна нулю. Если считать, что \mathbf{B} не зависит от времени, то наведенное электрическое поле \mathbf{E} отсутствует, и E_θ обращается в нуль. Чтобы упростить член $\omega_z B_r - \omega_r B_z$, введем функцию $\Phi(r, z)$, представляющую собой магнитный поток через круг радиуса r в плоскости $z = \text{const}$. В дифференциальной форме уравнение, определяющее Φ , имеет вид

$$\frac{\partial \Phi}{\partial r} = -2\pi r B_z. \quad (1.14)$$

Используя условие $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ и полагая производную $\partial B_\theta / \partial \theta$ равной нулю, находим

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = -2\pi r B_r. \quad (1.15)$$

Проекцию уравнения (1.1) на θ , дающую изменение момента количества движения под действием момента

сил, теперь можно непосредственно проинтегрировать; получаем

$$mr\omega_0 + \frac{q}{2\pi} \Phi(r, z) = C, \quad (1.16)$$

где C — постоянная. Компонента магнитного поля B_0 может быть произвольной функцией r и z , что не оказывает влияния на полученный результат.

Исходя из уравнений Максвелла, легко показать, что если \mathbf{B} зависит от времени, то $2\pi r E_0$ равно $-\partial\Phi/\partial t$; в этом случае уравнение (1.16) остается справедливым, но Φ зависит не только от r и z , но и от t . Из электродинамики известно, что $\Phi/2\pi r$ представляет собой θ -составляющую обычного вектор-потенциала, а уравнение (1.16) — это известный закон сохранения обобщенного момента количества движения в отсутствие внешнего момента сил. Этот результат сохраняется и при релятивистских скоростях, если под m понимать поперечную релятивистскую массу, а не массу покоя.

Уравнение (1.16) позволяет продемонстрировать условия, при которых можно удержать частицу. Для простоты ограничимся здесь случаем, когда траектория не замыкается вокруг оси симметрии и, следовательно, скорость ω_0 дважды обращается в нуль за один оборот. Когда скорость ω_0 равна нулю, формула (1.16) дает простую связь между r и z ; функцию r_1 , определяемую таким образом, обозначим $r_1(z, C)$. Поскольку Φ представляет собой, по определению, магнитный поток через круг радиуса r , ясно, что Φ постоянен вдоль силовой линии. Отсюда следует, что точки, в которых ω_0 обращается в нуль, лежат на поверхности, образуемой вращением некоторой силовой линии вокруг оси симметрии; мы назовем эту поверхность *поверхностью постоянного потока*. Различным поверхностям соответствуют различные значения постоянной C . При своем вращении частица все время пересекает в прямом и обратном направлениях поверхность постоянного потока $r_1(z, C)$.

Естественно ожидать, что отклонения заряженной частицы от этой поверхности относительно малы, если ларморовский радиус a мал по сравнению с расстоянием до оси r . Точнее, в каждой точке существует максимальная величина ω_{θ}^2 , определяемая известной энергией частицы и электрическим потенциалом $U(r, z)$. Если Φ является монотонной функцией r в достаточно большой области изменения аргумента, то, согласно соотношению (1.16), существование верхнего предела ω_{θ} приводит к существованию верхнего предела разности $r - r_1(z, C)$. Частица никогда не удаляется от поверхности постоянного потока на расстояние, превосходящее верхний предел, который примерно равен ларморовскому радиусу при условии, что Φ изменяется по линейному закону в рассматриваемой области изменения r . В этом смысле аксиально симметричная система обеспечивает абсолютное удержание отдельной частицы в радиальном направлении, если столкновения отсутствуют.

§ 3. Магнитный момент

При медленном изменении B в пространстве и времени магнитный момент заряженной частицы μ остается почти постоянным и поэтому представляет собой приближенный интеграл движения. Магнитный момент тока I , охватывающего площадь S , равен IS . В рассматриваемом случае площадь S равна просто πa^2 , где a — ларморовский радиус. Ток равен заряду q , умноженному на $\omega_c/2\pi$, т. е. на число оборотов в 1 сек. Отсюда следует:

$$\mu = \pi a^2 \frac{q\omega_c}{2\pi} = \frac{1/2 m \omega_{\perp}^2}{B}, \quad (1.17)$$

где были использованы соотношения (1.2) и (1.4). Магнитный поток через площадь, ограниченную орбитой частицы, прямо пропорционален μ , так как циклотронная частота ω_c пропорциональна B .

Рассмотрим, как меняется магнитный момент μ при изменении однородного магнитного поля \mathbf{B} во времени. Изменение \mathbf{B} вызывает электродвижущую силу вдоль траектории частицы. Из закона Фарадея [см. уравнение (2.18)] и теоремы Стокса следует

$$\text{э.д.с.} = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = - \int \frac{d\mathbf{B}}{dt} \cdot d\mathbf{S}, \quad (1.18)$$

где $d\mathbf{s}$ — элемент длины вдоль траектории, а $d\mathbf{S}$ — элемент поверхности, ограниченной орбитой. Изменение кинетической энергии в единицу времени равно произведению э.д.с. на эффективный ток I ; как мы знаем, ток I равен $q\omega_c/2\pi$. Легко видеть, что при увеличении B ток и э.д.с. направлены одинаково. Отсюда

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m\omega_{\perp}^2 \right) = \frac{q\omega_c}{2\pi} \pi a^2 \frac{dB}{dt} = \mu \frac{dB}{dt}. \quad (1.19)$$

Скорость изменения μ можно определить с помощью формулы (1.17); умножая на B и дифференцируя по времени, находим

$$\frac{d}{dt} (\mu B) = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m\omega_{\perp}^2 \right). \quad (1.20)$$

Сравнивая уравнения (1.19) и (1.20), получаем, что $d\mu/dt$ равно нулю. Поскольку μ определяется соотношением (1.17), этот результат справедлив лишь при нерелятивистских энергиях. В релятивистском случае, рассмотренном Хеллвигом [5] и Вандервоортом [9], магнитный момент μ остается постоянным, если в формулу (1.17) внести два изменения; m следует заменить на m^2/m_0 , где m_0 — масса покоя, а ω_{\perp}^2 и B нужно измерять в движущейся системе координат, где E_{\perp} отсутствует.

Любая величина, которая, подобно магнитному моменту μ , не меняется при медленных изменениях электрического и магнитного полей, называется *адиабатическим инвариантом*. Вообще при всяком периодическом движении с одной степенью свободы интеграл pdq по орбите является адиабатическим инва-

риантом; здесь p — обобщенный импульс, соответствующий координате q . Другой важный вид адиабатического инварианта рассматривается в следующем параграфе.

Магнитный момент μ оставался бы строго постоянным, если бы заряд электрона был равномерно распределен по окружности вращения. Степень постоянства магнитного момента зависит от скорости изменения \mathbf{B} . Физически очевидно, что если \mathbf{B} меняется за время, в течение которого электрон проходит малую дугу окружности вращения, то выражение для линейного интеграла от \mathbf{E} вдоль траектории, которое использовано в формуле (1.18), неприменимо, и $d\mu/dt$ не равно нулю. Однако если предположить, что $d\mathbf{B}/dt$ пропорционально $\omega\mathbf{B}$, и решить уравнение движения с точностью до членов первого порядка по ω/ω_c , то в этом приближении $d\mu/dt$ обращается в нуль.

Степень сохранения такого адиабатического инварианта, как магнитный момент μ , тщательно исследовалась при учете членов более высокого порядка по ω/ω_c . Крускал [6] показал, что фактически $\Delta\mu$ — приращение μ , обусловленное изменением \mathbf{B} , — равно нулю при учете членов всех порядков по ω/ω_c . Чтобы получить этот результат, относящийся к полному времени изменения \mathbf{B} , нужно определение μ через мгновенные значения \mathbf{w} и \mathbf{B} видоизменить так, чтобы включить члены более высоких порядков по ω/ω_c . Если μ определено в момент обращения в нуль $\partial\mathbf{B}/\partial t$ и всех производных высших порядков, то соответствующие члены, по определению, равны нулю. Эти результаты относятся к асимптотическому разложению $\Delta\mu$ в ряд по восходящим степеням ω/ω_c и отнюдь не означают, что $\Delta\mu$ строго равно нулю. Например, изменение $\ln \Delta\mu$, пропорциональное $-\omega_c/\omega$, согласуется с асимптотическим разложением, в котором обращаются в нуль члены всех порядков по ω/ω_c .

Рассмотрим теперь изменение μ в том случае, когда \mathbf{B} меняется вдоль траектории частицы, но

в каждой точке не зависит от времени. Пусть вращающаяся частица попадает в область большого поля. В этом случае силовые линии поля сходятся, и магнитное поле имеет составляющую B_r , направленную к силовой линии, вдоль которой движется ведущий центр (фиг. 3). Эта составляющая вызывает появление замедляющей силы, параллельной направлению движения частицы.



Фиг. 3. Движение частицы в магнитном поле со сходящимися силовыми линиями.

Легко найти величину этой силы. Следуя Альфвену, мы упростим расчет, полагая, что магнитное поле аксиально симметрично, а ведущий центр движется по оси z , являющейся осью симметрии. В более сложных случаях могут возникнуть другие дрейфы, но полученные здесь основные результаты не изменятся. В цилиндрических координатах r , θ , z магнитное поле не зависит от θ ; условие

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (1.21)$$

дает

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rB_r) + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0. \quad (1.22)$$

Если предположить, что производная $\partial B_z / \partial z$ постоянна в поперечном сечении траектории частицы и равна $\partial B / \partial z$, то можно проинтегрировать уравнение (1.22) по r и получить

$$B_r = -\frac{1}{2} r \frac{\partial B}{\partial z}. \quad (1.23)$$

Полагая, что r равно ларморовскому радиусу a , про-

ектируя уравнение (1.1) на ось z и используя соотношение (1.17), находим

$$m \frac{d\omega_{\parallel}}{dt} = -\mu \nabla_{\parallel} B, \quad (1.24)$$

где символ ∇_{\parallel} означает составляющую градиента в направлении \mathbf{B} . Уравнение (1.24) является точно таким уравнением, которое можно было ожидать для диамагнитной частицы.

Используя формулу (1.24) и закон сохранения кинетической энергии $\frac{1}{2}m(\omega_{\perp}^2 + \omega_{\parallel}^2)$, можно определить изменение μ в пространстве. Умножая уравнение (1.24) на ω_{\parallel} , получаем

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m \omega_{\parallel}^2 \right) = -\mu \frac{dB}{dt}, \quad (1.25)$$

где d/dt представляет собой производную по времени вдоль траектории частицы. Из закона сохранения энергии и соотношения (1.17) вытекает, что

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m \omega_{\parallel}^2 \right) = -\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m \omega_{\perp}^2 \right) = -\frac{d}{dt} (\mu B). \quad (1.26)$$

Из формул (1.25) и (1.26) снова следует, что μ является интегралом движения, причем этот вывод теперь справедлив и для частиц с релятивистскими энергиями. Как и прежде, полученный результат является приближенным и неприменим, когда B сильно меняется на расстоянии порядка ларморовского радиуса. Если производная \mathbf{B} по координатам пропорциональна κB , то, как вытекает из исследования Крускала [6], магнитный момент μ постоянен с точностью до членов любого порядка по $\alpha\kappa$. Этот результат опять-таки справедлив только в том случае, если определение μ видоизменить, включив члены более высоких порядков по $\alpha\kappa$.

Изменение μ , очевидно, оказывается малым всякий раз, как только \mathbf{E} и \mathbf{B} меняются достаточно медленно в пространстве и времени. Когда магнитный

момент μ можно считать постоянным, исследование движения частицы в магнитном поле значительно упрощается, поскольку в этом случае нужно принимать во внимание лишь перемещение ведущего центра. Если у двух частиц совпадают ведущие центры, кинетическая энергия и магнитный момент, то ведущие центры движутся по одинаковым траекториям, не зависящим от фаз частиц, вращающихся вокруг своих ведущих центров. Этот полезный результат справедлив с той же степенью точности, что и утверждение о сохранении магнитного момента.

Другим важным следствием инвариантности μ является отражение вращающихся частиц от областей усиливающейся напряженности магнитного поля. Если θ — угол между вектором скорости и осью z , то отношение составляющей ω_{\perp} к полной скорости равно $\sin \theta$. Пусть θ_0 — начальная величина угла θ в точке, где $B = B_0$. Тогда неизменность магнитного момента $m\omega_{\perp}^2/2B$ означает, что ω_{\perp} с ростом поля увеличивается пропорционально B , так что, очевидно,

$$\sin^2 \theta = \frac{B}{B_0} \sin^2 \theta_0. \quad (1.27)$$

Когда отношение B/B_0 возрастает до величины $1/\sin^2 \theta_0$, вся кинетическая энергия частицы переходит в поперечную кинетическую энергию, компонента ω_{\parallel} обращается в нуль, и частица отражается в область меньшей напряженности поля. Обратное, если B_m означает максимальную величину магнитного поля, то отразятся все частицы, для которых $\sin^2 \theta_0$ превосходит B_0/B_m . Такую отражающую область можно назвать *магнитным зеркалом*. Удержание заряженных частиц между магнитными зеркалами наблюдается в лабораторных установках и в геомагнитном поле, где захваченные ионы образуют над атмосферой радиационные пояса.

Предполагая, что частицы перед зеркалом имеют изотропное распределение по скоростям, можно легко рассчитать коэффициент отражения R , определяемый

как отношение числа отраженных частиц к числу частиц, падающих на зеркало в единицу времени. Рассмотрим частицы с некоторой заданной полной начальной скоростью ω . Число частиц, достигающих зеркала за 1 сек в интервале телесного угла $d\Omega$, пропорционально $\cos \theta_0 d\Omega$. Отсюда

$$R = \int_{\theta_0=\theta_1}^{\pi/2} \cos \theta_0 d\Omega \bigg| \int_{\theta_0=0}^{\pi/2} \cos \theta_0 d\Omega, \quad (1.28)$$

где $\sin^2 \theta_1$ равен B_0/B_m . Поскольку $d\Omega$ равно $2\pi \sin \theta_0 d\theta_0$, получаем

$$R = 1 - \frac{B_0}{B_m}. \quad (1.29)$$

Так как величина R не зависит от выбранной начальной скорости, коэффициент отражения остается тем же самым при произвольном распределении по скоростям, если только оно изотропно.

Для захваченной частицы, колеблющейся между двумя магнитными зеркалами, параллельная магнитному полю составляющая скорости обуславливает появление *продольного* адиабатического инварианта. Если ds — элемент длины вдоль магнитного поля, то этот инвариант представляет собой интеграл от $\omega_{\parallel} ds$, взятый за период колебания между зеркалами. Как мы увидим в следующем параграфе, при медленном изменении расстояния между зеркалами этот инвариант остается постоянным. Кроме того, он не меняется и при медленном дрейфе орбиты частицы по направлению к другим силовым линиям, имеющим иные расстояния L между точками отражения. Если этот продольный адиабатический инвариант представить в виде асимптотического ряда по восходящим степеням dL/dt , то, как установили Гарднер [4] и Крускал [6], его постоянство сохраняется при учете членов любого порядка совершенно так же, как в случае магнитного момента.

§ 4. Ускорение частиц

Ускорение заряженных частиц до очень высоких энергий представляет интерес в изучении и космических лучей, и высоко температурной плазмы. По существу, такое ускорение невозможно без электрического поля. Здесь мы рассмотрим кратко три простых способа ускорения.

В принципе самым простым является ускорение электрическим полем в случае, когда магнитное поле равно нулю или параллельно электрическому. При отсутствии члена $w \times \mathbf{B}$ решение уравнения (1.1) тривиально. Однако при высоких температурах проводимость ионизованного газа весьма велика, так что в этом случае электрическое поле, параллельное \mathbf{B} , чрезвычайно мало. Поэтому Ферми [3] и Альфвен [2] указали два других метода ускорения частиц до энергий космических лучей; для лабораторной плазмы предложены разновидности этих методов.

В механизме ускорения, рассмотренном Ферми, заряженная частица движется в магнитном поле между двумя межзвездными облаками. Если предположить, что магнитное поле в облаках больше, чем в пространстве между ними, то в этом случае частица оказывается захваченной между двумя магнитными зеркалами, которые исследованы в предыдущем параграфе. Разумеется, захвачены будут лишь такие частицы, скорость которых составляет достаточно большой угол с магнитным полем. Предположим, что облака, представляющие собой два зеркала, движутся навстречу друг другу с относительной скоростью V . Тогда энергия заряженной частицы увеличивается при каждом отражении от зеркала.

Можно найти ускорение частицы, воспользовавшись постоянством продольного адиабатического инварианта, рассмотренного в предыдущем параграфе. Покажем здесь сохранение этого инварианта, приняв для простоты, что величина магнитного поля \mathbf{B} между облаками не зависит от координат и не изме-

няется при их встречном движении. Допустим также, что магнитное поле \mathbf{B} аксиально симметрично относительно некоторой прямой, проходящей через оба облака; как показано в § 2, расстояние частицы от оси симметрии не зависит от дрейфа, так что дрейфом можно пренебречь. В этом простом случае ω_{\parallel} фактически не меняется вдоль всего пути интегрирования, и продольный инвариант равен $2\omega_{\parallel}L$.

Чтобы наглядно показать, что величина $\omega_{\parallel}L$ сохраняется, будем считать одно облако неподвижным, а другое движущимся навстречу со скоростью V ; тогда каждое отражение частицы от движущегося облака увеличивает ее скорость на $2V$. Число таких отражений в 1 сек равно $\omega_{\parallel}/2L$, так что имеем

$$\frac{d\omega_{\parallel}}{dt} = \frac{\omega_{\parallel}}{2L} 2V = -\frac{\omega_{\parallel}}{L} \frac{dL}{dt}. \quad (1.30)$$

Интегрируя это уравнение, получаем, что величина $\omega_{\parallel}L$ постоянна. Соответствующее прямое доказательство действительного сохранения продольного адиабатического инварианта в более общем случае дано Нортропом и Теллером [8].

Удобно выразить ω_{\parallel}^2 , или продольную температуру T_{\parallel} , не через L , а через n и B . Так как полное число захваченных частиц внутри трубки силовых линий радиуса r не меняется, величина nLr^2 должна быть постоянной; поскольку также Br^2 не зависит от времени, находим

$$L \sim \frac{B}{n}. \quad (1.31)$$

Поэтому для группы таких частиц кинетическая температура T_{\parallel} , определяемая как энергия $m\omega_{\parallel}^2/2$, изменяется во времени по закону

$$T_{\parallel} \sim \left(\frac{n}{B}\right)^2. \quad (1.32)$$

В рассмотренном выше простом случае поле B считалось постоянным, расстояние L было обратно пропорциональным n , а температура T_{\parallel} изменялась

прямо пропорционально n^2 . Пропорциональность между величинами T_{\parallel} и n^2 является непосредственным результатом предположения одномерности системы; ведь мы считали, что сжатие происходит в одном измерении, а передача кинетической энергии в два других измерения пренебрежимо мала. Хорошо известно, что для адиабатического сжатия

$$T \sim n^{\gamma-1}, \quad (1.33)$$

где γ — отношение теплоемкостей при постоянном давлении и постоянном объеме, определяемое формулой

$$\gamma = \frac{2+m}{m}, \quad (1.34)$$

а m — число степеней свободы. В полностью ионизованном газе можно не принимать во внимание внутренние степени свободы, так что для одномерного сжатия $m=1$, $\gamma=3$, и мы приходим к соотношению (1.32). Если скорости частиц за время сжатия хаотизируются из-за столкновений, то в формуле (1.33) следует считать γ равным его обычному значению $5/3$.

Такой способ ускорения частиц имеет одно существенное ограничение. С увеличением ω_{\parallel} угол θ между направлением скорости \mathbf{w} и магнитным полем \mathbf{B} уменьшается и в конце концов частица больше не захватывается. Таким образом, величина отношения полной энергии к поперечной энергии возрастает лишь до определенного предела, зависящего от коэффициента отражения магнитных зеркал. Другое проявление этого же ограничения заключается в том, что при отсутствии изменения магнитного поля B поперечная скорость не может увеличиваться, поскольку, если не учитывать столкновения и другие возмущения, магнитный момент μ является интегралом движения. Поэтому, чтобы получить длительное ускорение частиц, нужно предположить, что столкновения или какие-либо другие эффекты после увеличения ω_{\parallel} восстанавливают изотропное распределение по ско-

ростам, после чего частицы опять захватываются и ускоряются. Так как для частиц высоких энергий столкновения между электронами и ионами сравнительно мало эффективны, Ферми предположил, что в межзвездном пространстве ударные волны или колебания плазмы восстанавливают изотропное распределение по скоростям.

В другом механизме, предложенном Альфвенем, заряженные частицы в пространстве ускоряются непосредственно нарастающим магнитным полем. Рассмотрим область, в которой магнитное поле однородно в пространстве и увеличивается во времени; очевидно, что вследствие сохранения магнитного момента μ для частиц в этой области

$$T_{\perp} \sim B, \quad (1.35)$$

где мы использовали определение μ , даваемое формулой (1.17). Если не учитывать малые дрейфы, рассмотренные в § 2, то заряженные частицы стремятся двигаться вдоль силовых линий; при увеличении B силовые линии сближаются, и в частном случае двумерного сжатия n изменяется пропорционально B и, следовательно, пропорционально T_{\perp} . Пропорциональность между T_{\perp} и n опять можно получить из (1.33) и (1.34), так как в этом случае, если речь идет о скоростях, сжатие двумерно, и $\gamma=2$.

Ускорение частиц таким способом также имеет ограничение, поскольку относительные изменения T_{\perp} и B одинаковы. Альфвен предположил, что частицы могут неоднократно проходить через области, где B изменяется во времени, и снова ускоряться, в то время как столкновения или какие-либо другие возмущения восстанавливают изотропное распределение по скоростям между периодами ускорения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Alfvén H., *Cosmical Electrodynamics*, Oxford, 1950. (Имеется перевод: Х. Альфвен, *Космическая электродинамика*, ИЛ, 1952.)

2. Alfvén H., *Tellus*, **6**, 232 (1954).
3. Fermi E., *Astrophys. Journ.*, **119**, 1 (1954).
4. Gardner C. S., *Phys. Rev.*, **115**, 791 (1959).
5. Hellwig G., *Zs. Naturforsch.*, **10a**, 508 (1955).
6. Kruskal M. D., *Rendiconti del Terzo Congresso Internazionale sul Fenomeni d'Ionizzazione nei Gas*, p. 562 (Societa Italiani di Fisica, Milan, 1957); *Supplement — Part 2*, 775 (1962). (Имеется перевод: М. Крускал, Адиабатические инварианты, ИЛ, 1962.)
7. Northrop T. G., *Ann. Phys.*, **15**, 79 (1961).
8. Northrop T. G., Teller E., *Phys. Rev.*, **117**, 215 (1960).
9. Vandervoort P., *Ann. Phys.*, **10**, 401 (1960).

МАКРОСКОПИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ПЛАЗМЫ

Изучение движения отдельных заряженных частиц нередко позволяет понять поведение ионизованного газа. Однако в конкретных задачах для получения количественных результатов такой метод изучения является обычно не самым удобным. Отчасти это объясняется важной ролью, которую играет в большинстве случаев плотность тока j , приводящая к возникновению электрического и магнитного полей. Как мы увидим ниже, при наличии магнитного поля связь между j и скоростями частиц отнюдь не проста. Кроме того, при любых точных расчетах необходимо принимать во внимание распределение частиц по скоростям. Вследствие этого вычисление j с помощью скоростей отдельных частиц требует рассмотрения чрезвычайно большого числа частиц. Для получения строгих результатов в сложных случаях нельзя избежать таких вычислений. Однако для более быстрого, хотя и приближенного, решения многих конкретных задач лучше пользоваться макроскопическими уравнениями движения. Эти уравнения вместе с другими необходимыми соотношениями представлены в последующих параграфах.

Может показаться неожиданным, что приведенные ниже макроскопические уравнения не очень сильно зависят от отношения частоты столкновений ν к циклотронной частоте электронов ω_{ce} . Очевидно, что величина этого отношения весьма существенно влияет на характер движения отдельных частиц. К тому же от нее зависят как величина электрического тока, возникающего под действием приложенного электрического поля (см. § 4 настоящей главы), так и истинное значение сопротивления η , соответствующего току

поперек магнитного поля (см. гл. 5, § 4). Однако, когда сопротивление η мало, на первый план выступает независимость макроскопического движения плазмы от v/ω_{ce} , особенно если условия вдоль каждой силовой линии однородны.

Чтобы раскрыть важную роль основных уравнений, в конце этой главы рассматривается ряд специальных вопросов. В гл. 3 и гл. 4 проводится последовательное применение этих уравнений к некоторым типичным проблемам физики плазмы.

§ 1. Электрическая нейтральность

Прежде чем заняться рассмотрением макроскопических уравнений, изучим сначала основное свойство плазмы, заключающееся в ее стремлении к электрической нейтральности. Если в достаточно большом объеме число электронов в 1 см^3 заметно отличается от соответствующего числа положительных ионов, то благодаря возникающим электростатическим силам потенциальная энергия, приходящаяся на одну частицу, будет значительно больше средней тепловой энергии частицы. При отсутствии специальных условий, которые поддерживали бы столь высокие потенциалы, заряженные частицы быстро перераспределяются так, чтобы уменьшить эту разность потенциалов, т. е. восстановить электрическую нейтральность.

. Количественное рассмотрение этого вопроса мы проведем для случая, когда электрическое поле всюду параллельно оси x . Пусть в некоторой области ионы отсутствуют. Тогда электрический потенциал U определяется уравнением Пуассона (2.16), которое принимает следующий вид:

$$\frac{d^2U}{dx^2} = 4\pi n_e e c. \quad (2.1)$$

Здесь электрический потенциал U выражен в электромагнитных единицах, тогда как заряд электрона в электромагнитных единицах обозначается $-e/c$; n_e — число электронов в 1 см^3 . Если потенциальную энер-

гию электрона, равную $-eU/c$, обозначить через W , то изменение W в слое толщиной x дается формулой

$$\Delta W = -2\pi n_e e^2 x^2 \quad (2.2)$$

при условии, что на одной стороне слоя электрическое поле обращается в нуль. Будем обозначать через h то значение x , при котором абсолютная величина ΔW становится равной $kT/2$, т. е. средней кинетической энергии частицы, приходящейся на одну степень свободы; здесь T — температура в градусах Кельвина, а k — постоянная Больцмана. Очевидно, что

$$h = \left(\frac{kT}{4\pi n_e e^2} \right)^{1/2} = 6,90 \left(\frac{T}{n_e} \right)^{1/2}. \quad (2.3)$$

Величина h , определяемая соотношением (2.3), называется *дебаевским радиусом экранирования* в честь Дебая, который, основываясь на некоторых упрощениях, показал, что потенциал поля точечного заряда в электролите изменяется как $(1/r)\exp(-r/h)$, и на расстояниях r , превышающих h , это электрическое поле экранируется зарядами противоположного знака. Хотя вопрос о строгой применимости результатов теории Дебая к ионизованному газу остается открытым, несомненно, однако, что дебаевский радиус является мерой расстояния, на котором плотность электронов n_e может существенно отклониться от $n_i Z$. Формула для h , выведенная самим Дебаем, содержит в знаменателе вместо n_e величину $n_e + n_i Z^2$. Такой результат соответствует тому обстоятельству, что и ионы и электроны способны эффективно экранировать постоянный заряд. Однако созданная Дебаем теория является весьма приближенной, и, согласно более точной теории, экранирующий эффект, вызываемый ионами, явно отличается от соответствующего эффекта электронов, особенно при учете быстро флуктуирующих явлений. Сколько-нибудь точное рассмотрение этих эффектов требует весьма подробного исследования, мы же для простоты будем понимать соотношение (2.3) как определение грубой меры расстояния, на котором n_e может заметно

отклониться от $n_i Z$. Например, в области, толщина которой в 10 раз больше h , плотность электронов должна равняться $n_i Z$ с точностью до 1%, если электрическая потенциальная энергия, приходящаяся на один электрон, не превышает среднюю тепловую энергию. Рассмотрение аналогичной трехмерной задачи не изменяет порядка величины этой оценки.

Согласно определению, введенному Ленгмюром [6], ионизованный газ называется плазмой, если дебаевский радиус h мал по сравнению с другими характерными расстояниями.

Для плазмы, создаваемой в лабораторных условиях, величина дебаевского радиуса одновременно является приблизительной оценкой толщины защитного слоя, образующегося в местах, где плазма касается твердых тел. Если бы не было защитного слоя, то в отсутствие магнитного поля плазма теряла бы электроны из-за их большой скорости значительно быстрее, чем ионы. В случае, когда эти тела изолированы, электрический ток на их поверхность прекращается. В устанавливаемом равновесном режиме у стенок возникает потенциальный барьер, благодаря которому большая часть электронов возвращается в плазму, и числа электронов и ионов, достигающих стенок, уравниваются. Внутри защитного слоя электрическая нейтральность не сохраняется даже приблизительно, а изменение величины eU/c в слое сравнимо с kT . Из этого сразу следует, что толщина слоя приблизительно должна равняться дебаевскому радиусу. Подробный физический анализ экранирующего слоя плазмы при различных предположениях относительно разности потенциалов между плазмой и стенками камеры был дан Тонксом и Ленгмюром [14].

§ 2. Основные уравнения

Макроскопические величины j и v определяются с помощью макроскопических уравнений движения, т. е. так называемых уравнений переноса (или транспорт-

ных уравнений) кинетической теории. Ввиду особой важности этих уравнений в приложении дается их вывод из уравнения Больцмана. Для ионов с зарядом Ze/c и массой m_i уравнение движения (П.16) имеет вид

$$n_i m_i \left(\frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial t} + \mathbf{v}_i \cdot \nabla \mathbf{v}_i \right) = \frac{n_i Z e}{c} (\mathbf{E} + \mathbf{v}_i \times \mathbf{B}) - \nabla \cdot \Psi_i - n_i m_i \nabla \varphi + \mathbf{P}_{ie}, \quad (2.4)$$

где n_i — плотность ионов, φ — гравитационный потенциал, а \mathbf{v}_i — средняя скорость частиц в элементе объема ΔV , равная

$$\mathbf{v}_i = \frac{1}{n_i \Delta V} \sum \mathbf{w}_i. \quad (2.5)$$

Величина Ψ_i есть тензор напряжений (или диада), определяемый формулой

$$\Psi_i = \frac{m_i}{\Delta V} \sum (\mathbf{w}_i - \mathbf{v}_i)(\mathbf{w}_i - \mathbf{v}_i), \quad (2.6)$$

в которой суммирование проводится по всем частицам элемента объема. Наконец, \mathbf{P}_{ie} — это полный импульс, который приобретают в единицу времени ионы, находящиеся в единице объема, в результате столкновений с электронами. Необходимо также учитывать изменение импульса из-за столкновений с ионами других сортов, если они присутствуют. Для простоты здесь мы будем считать, что плазма состоит из ионов одного сорта и электронов. Уравнение движения для электронов получается из уравнения (2.4), если заменить \mathbf{v}_i , n_i , m_i , Ψ_i и \mathbf{P}_{ie} величинами \mathbf{v}_e , n_e , m_e , Ψ_e и \mathbf{P}_{ei} соответственно и положить $Z = -1$.

Для нерелятивистского идеального газа уравнение (2.4) является точным. Однако этим уравнением удобно пользоваться лишь в тех случаях, когда характер распределения скоростей частиц таков, что допускает приближенное представление тензора напряжений в сравнительно простом виде. В общем случае тензор Ψ имеет девять компонент Ψ_{lm} , где

индексы l и m соответствуют направлениям вдоль каждой из трех координатных осей. Поскольку $\Psi_{lm} = \Psi_{ml}$, то число независимых компонент равно шести. В простейшем случае изотропного распределения скоростей $\mathbf{w}_i - \mathbf{v}_i$ компоненты Ψ_{lm} обращаются в нуль при $l \neq m$, а три диагональные компоненты Ψ_{xx} , Ψ_{yy} и Ψ_{zz} становятся равными друг другу и скалярному давлению p . В этом случае имеем

$$\nabla \cdot \Psi = \nabla p. \quad (2.7)$$

Можно привести два примера, когда соотношение (2.7) справедливо. Первый имеет место, если средняя длина свободного пробега частицы мала по сравнению с характерным расстоянием, на котором заметно изменяются p , \mathbf{v} и другие макроскопические величины. Это условие является обычным в гидродинамике и осуществляется, например, в плазме звезд. Хорошо известно, что при достаточно малых длинах свободного пробега распределение скоростей близко к изотропному.

В несколько измененном виде уравнение (2.7) справедливо и в случае больших длин свободного пробега, если при этом выполняются два следующих условия: а) плазма помещена в достаточно сильное магнитное поле, так что ларморовский радиус вращения a любой частицы мал по сравнению с характерным расстоянием, на котором заметно изменяются все макроскопические величины; б) форма области, занятой плазмой, и ее изменения во времени таковы, что можно пренебрегать компонентами градиентов любых величин в направлении магнитных силовых линий. Как показали Ватсон [15], а также Чу, Гольдбергер и Лоу [3], условие «а» приводит к тому, что тензор Ψ становится диагональным, причем две его компоненты, перпендикулярные магнитному полю \mathbf{B} , равны между собой. Обозначим их через p_{\perp} , а компоненту, параллельную \mathbf{B} , — через p_{\parallel} . Этот результат физически очевиден в предельном случае бесконечных длин свободного пробега, так как при этом каждая частица

вращается вокруг своего ведущего центра с почти постоянной скоростью ω_{\perp} . Если на расстоянии порядка ларморовского радиуса распределение ведущих центров является почти однородным, то в каждом из двух направлений, перпендикулярных к \mathbf{B} , дисперсия скоростей, обусловленная вращением частиц со скоростью ω_{\perp} , должна быть примерно равной $\omega_{\perp}^2/2$.

В общем случае представление Ψ с помощью лишь двух независимых компонент p_{\perp} и p_{\parallel} оказывается недостаточным для решения макроскопических уравнений. Обе величины p_{\perp} и p_{\parallel} даже в стационарном случае могут изменяться вдоль направления \mathbf{B} . Если же условия переменны во времени, то характер изменения p_{\perp} и p_{\parallel} найти не так просто, так как при этом вдоль силовых линий может существовать поток тепла. При редких столкновениях этот тепловой поток зависит от конкретных свойств функции распределения скоростей и не может быть найден непосредственно из макроскопических уравнений. Если вместе с условием «а» выполняется условие «б», то каждая из величин p_{\perp} и p_{\parallel} постоянна вдоль силовой линии, при этом поток тепла вдоль направления \mathbf{B} отсутствует и зависимость p_{\perp} от \mathbf{B} определяется известным адиабатическим законом для двумерного сжатия с показателем адиабаты γ , равным 2 (см. гл. 1, § 4). Ввиду того что компонента градиента вдоль \mathbf{B} , по предположению, близка к нулю, мы не будем учитывать градиента продольного давления p_{\parallel} , и если столкновения несущественны, то становится применимым уравнение (2.7), в котором p заменено на p_{\perp} . Условие «б» по существу эквивалентно предположению, что задача является двумерной (однородность вдоль направления \mathbf{B}).

В произвольном случае у тензора напряжений могут быть недиагональные компоненты Ψ_{xy} , Ψ_{yz} и Ψ_{zx} , дающие опущенные в уравнении (2.7) вязкие напряжения. В пределе малых длин свободного пробега

предположение, что эти напряжения являются линейными функциями величин $\partial v_r / \partial x_s$, где r и s соответствуют координатным направлениям, приводит к обычному уравнению Навье — Стокса для вязкого газа. Влияние вязкости в противоположном предельном случае больших длин свободного пробега рассматривается кратко в § 5 настоящей главы и в гл. 5, § 5. Так как изучено довольно мало случаев, когда учет вязкости полностью ионизованного газа существен, мы пренебрежем этими недиагональными компонентами в получаемых здесь общих уравнениях плазмы.

Итак, примем уравнение (2.7) в качестве основного упрощения. Полученные таким образом макроскопические уравнения могут применяться с высокой точностью как в случае небольших длин свободного пробега, когда давление p почти изотропно, так и в случае сильного зависящего, по существу, от двух координат магнитного поля, когда p можно заменить на p_{\perp} . До некоторой степени особый случай, в котором уравнение (2.7) также дает надежные результаты, рассматривается в гл. 3, § 2, в связи с распространением электростатических волн. В остальных случаях это уравнение может давать полезные указания о происходящем, но должно использоваться с осторожностью.

Из уравнения (2.4) и аналогичного уравнения для электронов можно получить уравнения для макроскопических величин \mathbf{v} и \mathbf{j} . Для газа, состоящего лишь из электронов и положительных ионов одного типа, эти величины определяются равенствами

$$\mathbf{v} = \frac{1}{\rho} (n_i m_i \mathbf{v}_i + n_e m_e \mathbf{v}_e), \quad (2.8)$$

$$\mathbf{j} = \frac{e}{c} (n_i Z \mathbf{v}_i - n_e \mathbf{v}_e), \quad (2.9)$$

где ρ — плотность массы, т. е.

$$\rho = n_i m_i + n_e m_e. \quad (2.10)$$

При изучении поведения плазмы можно использовать либо макроскопические уравнения для скоростей ионов v_i и электронов v_e , либо, напротив, уравнения для v и j . Достоинство первого способа состоит в том, что он позволяет просто и ясно получить картину движения в тех идеализованных случаях, когда или электроны, или ионы неподвижны. Однако в более общих случаях использование v_e и v_i становится до некоторой степени неудобным, поскольку плотность тока j , вызывающего возникновение полей E и B , приходится вычислять отдельно с помощью формулы (2.9). Чтобы сделать изложение предмета по возможности единообразным, мы будем повсюду в настоящей книге пользоваться уравнениями для v и j .

Точные уравнения для v и j , рассмотренные Шлютером [10] и Люстом [7], довольно сложны. Так как, однако, ни для одного из разбираемых ниже вопросов физики плазмы не потребуются эти полные уравнения, мы упростим исследование, сделав три основных допущения:

1. Все члены, квадратичные по v , j и их производным, считаются пренебрежимо малыми, благодаря чему линеаризуются все уравнения.

2. Предполагается электрическая нейтральность, т. е. $n_i Z = n_e$. В тех случаях, когда в плазме может существовать электрическое поле, отклонения от электронейтральности нужно учитывать в уравнении Пуассона (2.16); в динамических же уравнениях для j и v ими можно пренебречь.

3. Тензор напряжения заменяется скалярным давлением в соответствии с уравнением (2.7).

Складывая $n_i m_i (\partial v_i / \partial t)$ и $n_e m_e (\partial v_e / \partial t)$, получаем обычное линеаризованное уравнение движения

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} = j \times B - \nabla p - \rho \nabla \varphi. \quad (2.11)$$

Члены взаимодействия P_{ei} и P_{ie} взаимно уничтожились в силу третьего закона Ньютона. Вычитая

$n_e(\partial \mathbf{v}_e / \partial t)$ из $n_i Z(\partial \mathbf{v}_i / \partial t)$, находим

$$\frac{m_i m_e c^2}{Z \rho e^2} \frac{d\mathbf{j}}{dt} = \mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} - \eta \mathbf{j} + \\ + \frac{c}{e Z \rho} [m_i \nabla p_e - Z m_e \nabla p_i - (m_i - Z m_e) \mathbf{j} \times \mathbf{B}]. \quad (2.12)$$

В это выражение гравитационная сила не вошла.

При выводе уравнения (2.12) мы предположили, что

$$\mathbf{P}_{ei} = \frac{\eta n_e}{c} \mathbf{j}, \quad (2.13)$$

где η — соответствующий коэффициент пропорциональности. Естественно считать, что импульс, которым обменялись электроны и ионы, должен быть пропорционален относительной скорости этих двух типов частиц. Так как сечения столкновений зависят от скорости, то величина \mathbf{P}_{ei} будет включать в себя и члены, пропорциональные ∇T и $\mathbf{B} \times \nabla T$; эти термоэлектрические члены учитываются в гл. 5, однако они опущены в уравнении (2.12), поскольку влияние термоэлектрических эффектов на динамику плазмы пока еще, по существу, не исследовано.

Если $d\mathbf{j}/dt$, \mathbf{B} , ∇p_e и ∇p_i исчезающе малы, то уравнение (2.12) сводится к закону Ома, в котором η равно электрическому сопротивлению. В связи с этим уравнение (2.12) мы можем рассматривать как *обобщенный закон Ома*. Как мы увидим в гл. 5, § 4, сопротивление η для токов, перпендикулярных к сильному магнитному полю, примерно вдвое больше, чем для токов, параллельных \mathbf{B} (или при отсутствии \mathbf{B}). Поэтому, строго говоря, член $\eta \mathbf{j}$ следовало бы разложить на его компоненты $\eta_{\perp} j_{\perp}$ и $\eta_{\parallel} j_{\parallel}$, перпендикулярную и параллельную полю \mathbf{B} соответственно. Однако в первом приближении можно считать, что сопротивление η изотропно. Когда в плазме имеется несколько сортов ионов, обобщенный закон Ома становится более сложным и для определения относительных скоростей обоих сортов ионов должны быть добавлены другие уравнения.

Уравнения (2.11) и (2.12) следует дополнить уравнениями непрерывности, выражающими законы сохранения массы и электрического заряда. Согласно общему уравнению непрерывности (П.8), выведенному в приложении, можно написать

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0, \quad (2.14)$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0, \quad (2.15)$$

где σ — плотность заряда в единицах CGSM. Подставляя в эти формулы выражения (2.8) и (2.9), можно получить отдельно уравнения для $\partial n_e / \partial t$ и $\partial n_i / \partial t$.

Наконец, систему основных уравнений дополняют уравнения Максвелла для электромагнитного поля. Записанные в электромагнитных единицах эти уравнения имеют вид:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi c^2 \sigma = 4\pi e c (n_i Z - n_e), \quad (2.16)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (2.17)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (2.18)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + 4\pi \mathbf{j}. \quad (2.19)$$

Уравнение непрерывности (2.15) можно вывести непосредственно из уравнений (2.16) и (2.19).

Возможно, покажется несколько необычным использование $\nabla \times \mathbf{B}$ вместо $\nabla \times \mathbf{H}$ в уравнении (2.19). Поскольку плазма является средой диамагнитной, предпочтительно основным вектором считать \mathbf{B} , чтобы подчеркнуть то обстоятельство, что магнитное поле в газе может отличаться от поля, создаваемого внешними токами. Однако вместо введения для плазмы магнитной проницаемости целесообразней в уравнении (2.19) в явном виде учитывать все токи в плазме. Тогда различие между \mathbf{B} и \mathbf{H} исчезает, и в левой части уравнения (2.19) законно писать $\nabla \times \mathbf{B}$. При

желании можно заменить \mathbf{B} на \mathbf{H} и использовать при этом в качестве единицы измерения *эрстед* вместо *гаусса*.

К написанным уравнениям нужно добавить также соотношение, определяющее температуру и, следовательно, давление. В ряде простых случаев можно использовать уравнение адиабаты, рассмотренное в гл. 1, § 4. Если благодаря столкновениям распределение скоростей почти изотропно, а потери энергии пренебрежимо малы, то γ в уравнении (1.33) должно быть равным $5/3$. В том случае, когда столкновения редки, а все величины зависят от двух координат, перпендикулярных \mathbf{B} , следует в написанных выше уравнениях заменить ρ на ρ_{\perp} , считая при этом температуру T_{\perp} пропорциональной B , как в соотношении (1.35). При медленных изменениях плотности температура находится из уравнения, выражающего закон сохранения энергии, в котором учтены такие эффекты, как омические потери (джоулево тепло), излучение и поглощение электромагнитных волн и теплопроводность.

В уравнении (2.12) удержаны члены порядка m_e/m_i . Они нужны, например, для получения правильных результатов при изучении низкочастотных волн в сильно разреженной плазме. В большинстве случаев, однако, этими членами можно пренебречь. Если, кроме того, положить равными нулю производные $d\mathbf{j}/dt$ и $d\mathbf{v}/dt$, рассматривая столь медленные изменения, при которых влияние инерции исчезающе мало, то мы получим более простые уравнения

$$\nabla p = \mathbf{j} \times \mathbf{B} - \rho \nabla \varphi, \quad (2.20)$$

$$\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} = \eta \mathbf{j} + \frac{c}{en_e} (\nabla p_i + \rho \nabla \varphi). \quad (2.21)$$

Здесь мы воспользовались уравнением (2.11) для исключения члена $\mathbf{j} \times \mathbf{B}$ в уравнении (2.12). Эти уравнения будут основными при изучении равновесных конфигураций плазмы в гл. 4.

§ 3. Связь между макроскопической и микроскопической скоростями

Уравнения (2.20) и (2.21) определяют макроскопические величины \mathbf{j} и \mathbf{v} , если условия в плазме изменяются медленно. Чтобы найти \mathbf{j} и \mathbf{v} , умножим векторно эти уравнения на \mathbf{B} . Тогда при η и ϕ , равных нулю, сразу получим

$$\mathbf{j}_{\perp} = \frac{\mathbf{B} \times \nabla p}{B^2}, \quad (2.22)$$

$$\mathbf{v}_{\perp} = \frac{\mathbf{B}}{B^2} \times \left(-\mathbf{E} + \frac{c}{en_e} \nabla p_i \right). \quad (2.23)$$

Этим уравнениям должно удовлетворять любое квазистационарное решение. Интересно отметить, что роли двух основных уравнений поменялись: уравнение движения определяет теперь плотность тока, в то время как скорость находится из обобщенного закона Ома. Эта инверсия является важным свойством, характеризующим в квазистационарном случае помещенную в магнитное поле плазму.

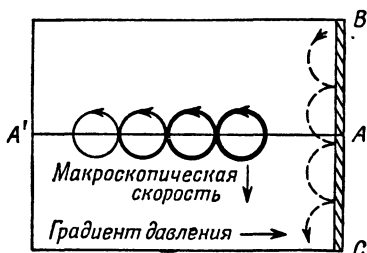
Движение, описываемое уравнениями (2.22) и (2.23), не согласуется с картиной дрейфа частиц, полученной при микроскопическом рассмотрении гл. 1, § 2. Лишь влияние электрического поля \mathbf{E} остается одинаковым в этих двух случаях: макроскопические скорости, вызываемые полем \mathbf{E} , совпадают в уравнениях (1.9) и (2.23), а электрический ток не возникает вследствие равенства скоростей дрейфа электронов и ионов. С другой стороны, микроскопические дрейфы в неоднородных магнитных полях не отражены в макроскопических величинах \mathbf{v} и \mathbf{j} , а макроскопические скорости и токи, связанные с градиентами давлений, не имеют, очевидно, соответствующего аналога в дрейфовом движении отдельной заряженной частицы. Такая явная парадоксальность приводила ранее к некоторой путанице. Проанализируем здесь различие между двумя видами средней скорости.

Скорость дрейфа w_D определяется как средняя скорость ведущих центров в элементе объема. Если рассматривать все частицы, вращающиеся вокруг этих ведущих центров, то фазы вращения различных частиц будут случайными, так что скорости вращения при усреднении исключатся. Поэтому средняя скорость таких частиц, которую можно обозначить v' , будет равна w_D . Однако v' не совпадает с макроскопической скоростью v , определяемой как средняя скорость всех частиц, находящихся в единице объема независимо от того, где расположены их ведущие центры. Таким образом, чтобы получить v , мы должны подправить величину v' , исключая из рассмотрения частицы, находящиеся вне элемента объема, хотя их ведущие центры и лежат внутри него, и, наоборот, учитывая частицы, которые в данный момент находятся в элементе объема, но имеют ведущие центры снаружи. Проведя такое уточнение, мы увидим, что вычисленная подобным образом величина v будет подчиняться уравнению (2.23). Такого рода анализ был проведен Шлютером [11] и Спитцером [12].

Вместо детального количественного анализа здесь будет дано более общее физическое толкование результатов на примере некоторых характерных случаев. Если существует градиент давления, то макроскопические уравнения определяют как плотность тока j , так и скорость v . С другой стороны, при условии однородности магнитного поля \mathbf{B} скорость дрейфа w_D равна нулю. Действительно, из приведенного ниже уравнения (4.1) видно, что градиент давления возникает вместе с градиентом B , но скорость w_D , обусловленная этим градиентом поля, становится пренебрежимо малой по сравнению с соответствующей макроскопической скоростью, найденной из уравнения (2.23), когда выполняется неравенство $p \ll B^2/8\pi$. Будем считать для простоты, что магнитное поле \mathbf{B} однородно и $w_D = 0$.

На фиг. 4 показано, каким образом при наличии градиента давления могут возникать макроскопиче-

ские токи и скорости поперек силовых линий, даже если ведущие центры отдельных частиц не имеют поперечного дрейфа. На фиг. 4 изображены орбиты частиц, ведущие центры которых лежат в плоскости $A'A$, перпендикулярной к плоскости чертежа. Магнитное поле также перпендикулярно к плоскости чертежа. Графической мерой числа частиц, вращающихся по каждой круговой орбите, служит толщина



Фиг. 4. Возникновение макроскопической скорости из-за градиента давления.

Толщина каждой линии пропорциональна числу частиц, вращающихся по данной окружности.

линии. Таким образом, с правой стороны число вращающихся частиц больше, чем с левой. Ясно, что через малый элемент плоскости $A'A$ вниз будет проходить больше частиц, чем вверх. Расчет показывает, что вклады в плотность тока, вносимые как положительными ионами, так и электронами, пропорциональны градиентам их парциальных давлений. Макроскопическая скорость зависит лишь от ионов благодаря их значительно большей массе. Поэтому в уравнении (2.23) отсутствует градиент электронного давления.

Общее число частиц, пересекающих плоскость $A'A$, должно быть одним и тем же вне зависимости от того, микроскопическая или макроскопическая картина рассматривается. При этом для получения согласия

нужно принимать во внимание краевые эффекты. Предположим, что плазма ограничена справа бесконечной плоскостью $ВАС$. Отраженные от этой плоскости частицы будут двигаться вниз, как показано пунктиром на фиг. 4. При учете таких частиц полный поток частиц через плоскость $A'A$ будет одним и тем же, как бы он ни определялся — микроскопически или макроскопически.

Учет частиц, отраженных от стенки, необходим для согласования микроскопической и макроскопической картины. На важную роль таких частиц впервые указали Бор и Ван-Леевен, которые объяснили, почему изотермический электронный газ постоянной плотности, окруженный отражающими стенками, не будет диамагнитным при наличии магнитного поля. Диамагнетизм, возникающий в результате вращения всех свободных электронов, полностью компенсируется током у стенки, создаваемым отраженными от стенок электронами, как показано на фиг. 4. Если же электронное давление неоднородно, то возникают макроскопические токи и, как показано ниже (см. гл. 4, § 2), газ становится диамагнитным.

Мы показали, что токи и макроскопические скорости могут существовать даже при отсутствии дрейфа частиц. Сейчас же мы покажем, что дрейфы частиц, обусловленные неоднородностями магнитного поля, не вызывают никаких макроскопических эффектов. Согласно уравнениям (2.22) и (2.23), неоднородность \mathbf{B} не приводит к возникновению каких-либо упорядоченных токов при условии равенства нулю \mathbf{E} и ∇p . Этот результат необходимо согласовать с уравнениями (1.11) и (1.12).

Чтобы уяснить причину кажущегося парадокса, вновь обратимся к рассмотрению области, окруженной идеально отражающими стенками. Пусть внутри области существует произвольное магнитное поле \mathbf{B} , так что сила, действующая на заряженную частицу, равна $q\mathbf{w} \times \mathbf{B}$. Представим теперь, что в какой-то начальный момент времени t_0 в эту область вводится

некоторое количество одинаково заряженных частиц. (Для сохранения электрической нейтральности требуется и присутствие противоположно заряженных частиц, однако здесь их можно не учитывать, поскольку не принимаются во внимание столкновения.) Предположим, что абсолютные величины скоростей всех этих частиц имеют разброс внутри узкого интервала Δw , распределение скоростей изотропно и плотность частиц в начальный момент постоянна. Иными словами, в объеме фазового пространства, ограниченном интервалом Δw для абсолютных величин скоростей w , плотность частиц постоянна, а вне указанного объема она равна нулю. Теорема Лиувилля, которая применима для данного случая, устанавливает, что плотность частиц в фазовом пространстве остается постоянной вдоль динамической траектории. Так как рассматриваемая сила перпендикулярна к w , то направление движения частицы будет изменяться вдоль фазовой траектории, но абсолютная величина скорости не изменится. Ввиду того, что начальная плотность частиц в фазовом пространстве не зависит ни от направления движения частиц, ни от их положения в пространстве, движение частиц не приведет к какому-либо изменению их плотности в фазовом пространстве. Следовательно, начальное распределение будет сохраняться все время. Поскольку распределение скоростей изотропно, макроскопические ток и скорость, очевидно, будут равны нулю. Рассмотрение частиц с другими скоростями не изменит этого результата. Таким образом, в области, где начальное распределение скоростей изотропно, а плотность и давление постоянны, макроскопические скорости и токи возникнуть не могут независимо от наличия магнитного поля \mathbf{B} , если при этом производная $\partial \mathbf{B} / \partial t$ равна нулю.

Как и прежде, общий поток частиц через любую бесконечную плоскость должен быть одним и тем же, как бы он ни вычислялся — макроскопически или микроскопически. Поэтому поток отраженных от

стенок частиц должен точно компенсировать общее число частиц, пересекающих плоскость в результате дрейфа в неоднородном магнитном поле.

Если столкновения существенны, то это доказательство можно видоизменить. Рассмотрим сначала систему без столкновений, но с распределением скоростей, которое всюду является изотропным и максвелловским с постоянной температурой в рассматриваемой области. Согласно вышеизложенному, такое распределение будет самоподдерживающимся, и макроскопические скорости и токи не возникнут. Учет столкновений, разумеется, не нарушит распределения скоростей. И мы приходим к заключению, сформулированному Каулингом [4]: при термодинамическом равновесии в замкнутой системе плотность тока \mathbf{j} должна равняться нулю.

§ 4. Электрические токи

В определенных случаях отношение \mathbf{j} к \mathbf{E} нередко называют проводимостью. Если закон Ома выполняется, то это отношение действительно является обычной проводимостью, или $1/\eta$. Однако в других случаях \mathbf{j} и \mathbf{E} могут не быть параллельными, и отношения их компонент в различных направлениях зависят от конкретного вида решения основных уравнений. В самом деле, отношение j_x/E_x может принимать любые значения от нуля до бесконечности в зависимости от «предыстории» плазмы. В связи с некоторой неясностью, существовавшей в прошлом в этом вопросе, имеет смысл несколько подробнее рассмотреть, как изменяется в различных условиях величина \mathbf{j} .

Существуют условия, при которых закон Ома в обычной форме всегда выполняется для плазмы. Так, например, если плазма находится в стационарном состоянии и скорость \mathbf{v} и гравитационная сила повсюду равны нулю, то уравнение (2.21) дает

$$\eta \mathbf{j} = \mathbf{E} - \frac{c}{en_e} \nabla p_i. \quad (2.24)$$

Согласно уравнению (2.20), в присутствии магнитного поля плотность тока \mathbf{j} не может иметь компоненты, параллельной ∇p . Если при этом ∇p_i и ∇p_e всюду параллельны друг другу, то \mathbf{j} не имеет компоненты в направлении ∇p_i , и в соответствии с уравнением (2.24) величина $\eta \mathbf{j}$ должна равняться компоненте поля \mathbf{E} , параллельной току. Таким образом, в известном смысле выполняется закон Ома в обычной форме. Оставшаяся компонента \mathbf{E} уравнивает градиент p_i , в результате чего скорость в уравнении (2.23) обращается в нуль. Как показал Шлютер [10], плазма в магнитном поле проявляет заметное стремление к равновесному состоянию, при котором справедливо уравнение (2.24).

Умножив уравнение (2.24) скалярно на \mathbf{j} , мы получим в рассматриваемом идеализованном случае

$$\eta j^2 = \mathbf{j} \cdot \mathbf{E}. \quad (2.25)$$

Очевидно, что $\mathbf{j} \cdot \mathbf{E}$ есть работа, совершаемая электрическим полем над током в единице объема в единицу времени, в то время как ηj^2 представляет собой тепло, выделяемое в газе под действием тока. Чтобы состояние оставалось стационарным, джоулево тепло должно, конечно, сразу переходить в излучение.

В других случаях $\eta \mathbf{j}$ и \mathbf{E} могут быть слабо связаны друг с другом, хотя количество тепла, выделяемое при омическом нагреве, всегда равно ηj^2 . Чтобы рассмотреть простейший возможный случай, выявляющий характерные черты изучаемого вопроса, допустим, что электрическое поле \mathbf{E} , перпендикулярное к магнитному полю, прикладывается внезапно, увеличиваясь от нуля до постоянного значения, причем в момент включения поля ($t=0$) равны нулю \mathbf{v} и \mathbf{j} . Мы рассмотрим бесконечную среду без гравитационного поля, предполагая, что давление везде постоянно. Будем пренебрегать всеми электрическими и магнитными полями, наведенными изменениями тока, хотя в действительности они могут препятство-

вать проникновению электрического поля в плазму (скин-эффект). Исключим из уравнения (2.12) скорость v с помощью (2.11), выразив попутно η через частоту столкновений ν по формуле (5.32). Предполагая, что $\mathbf{j} \cdot \mathbf{B} = 0$, и пренебрегая членами порядка m_e/m_i по сравнению с единицей, после некоторых преобразований находим

$$\frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} = \frac{\nu \mathbf{E}}{\eta} - \omega_{ci} \omega_{ce} \int_0^t \mathbf{j} dt - \omega_{ce} \frac{\mathbf{j} \times \mathbf{B}}{B} - \nu \mathbf{j}, \quad (2.26)$$

где ω_{ce} и ω_{ci} — циклотронные частоты электронов и ионов соответственно. Исследуем решение уравнения (2.26) в некоторых частных случаях.

а. $\mathbf{B} = 0$, т. е. $\omega_{ci} = \omega_{ce} = 0$. В этом случае имеем простое решение

$$\mathbf{j} = \frac{\mathbf{E}}{\eta} (1 - e^{-\nu t}). \quad (2.27)$$

Очевидно, что \mathbf{j} достигает своего предельного значения очень быстро, за время нескольких столкновений.

б. $\omega_{ci} \approx 0$, $\omega_{ce} \neq 0$. Поскольку нас интересует главным образом величина установившегося тока, положим $\partial \mathbf{j} / \partial t = 0$. Если ось z направить вдоль \mathbf{B} , а ось y — вдоль \mathbf{E} , то решением уравнения (2.26) теперь будет

$$j_y = \frac{E_y}{\eta} \frac{1}{1 + (\omega_{ce}/\nu)^2}, \quad (2.28)$$

$$j_x = \frac{-E_y}{\eta} \frac{\omega_{ce}/\nu}{1 + (\omega_{ce}/\nu)^2}. \quad (2.29)$$

Если сохранить член $\partial \mathbf{j} / \partial t$, то мы найдем, что j_y и j_x будут колебаться около своих предельных значений с угловой частотой ω_{ce} , причем за время нескольких столкновений эти колебания затухнут. Таким образом, соотношения (2.28) и (2.29) справедливы для моментов времени, больших по сравнению с $1/\nu$.

Когда ω_{ce} значительно превышает ν , то ток, параллельный приложенному электрическому полю, сильно уменьшается и линейно зависит от частоты столкновений (так как сопротивление η пропорционально ν). Этот результат нетрудно понять, рассматривая дрейфовое движение отдельных заряженных частиц. Пусть электрическое поле E_y , приложенное к группе электронов, перпендикулярно к магнитному полю, направленному по оси z . Двигаясь сначала параллельно оси y , электроны после смещения на d_y в этом направлении начнут дрейфовать со скоростью E_y/B_z в направлении оси x . После того как электроны испытают столкновения с неподвижными положительными ионами и потеряют свой импульс в направлении оси x , они претерпят новое смещение в среднем на d_y , прежде чем снова начнут дрейфовать параллельно оси x . Чем чаще столкновения, тем чаще смещения в направлении оси y и тем больше соответствующий ток. Ток в направлении оси x , называемый холловским током, не зависит от ν , если $\omega_{ce} \gg \nu$, и просто равен плотности заряда $-n_e e/c$, умноженной на скорость поперечного дрейфа E_y/B .

в. $\omega_{ci} \neq 0$, $\omega_{ce} \neq 0$. Хотя точное решение уравнения (2.26) становится в этом общем случае довольно сложным, сами результаты оказываются простыми и физически понятными. За время, сравнимое с $1/\omega_{ci}$, ионы также испытывают воздействие электрического поля и начинают дрейфовать поперек магнитного поля со скоростью E_y/B . Их вклад в j_y (плотность тока, параллельную \mathbf{E}) значительно превосходит вклад электронов, если $\omega_{ce}/\nu \gg 1$, тогда как ионная составляющая в плотности тока j_x (перпендикулярной как к \mathbf{E} , так и к \mathbf{B}) стремится скомпенсировать электронный ток Холла. В стационарном состоянии и электроны и ионы дрейфуют параллельно оси x со скоростью E_y/B . Когда электроны сталкиваются с ионами, они не теряют импульса в направлении оси x и, следовательно, совсем не подвергаются смещению

в направлении оси y . В результате этого электронный ток, параллельный \mathbf{E} , равен нулю. По этой же причине отсутствует и ионный ток, параллельный электрическому полю \mathbf{E} . Дело в том, что в установившемся состоянии должны исчезнуть все токи, поскольку для наблюдателя, движущегося со скоростью дрейфа, электрическое поле отсутствует. Вообще уравнение (2.22) показывает, что стационарные электрические токи, перпендикулярные к \mathbf{B} , обуславливаются лишь градиентами давления, перпендикулярными к магнитному полю.

Точное решение уравнения (2.26), в котором сохранены все члены, но предположено, что $v \ll \omega_{ce}$, показывает, что в момент времени $t = v/\omega_{ci}\omega_{ce}$ вклад в j_y , даваемый ионами, равен вкладу электронов, определяемому формулой (2.28). В последующие моменты времени ионный ток продолжает некоторое время расти, а затем начинает колебаться с частотой ω_{ci} , причем эти колебания затухают по закону $\exp(-vt\omega_{ci}/\omega_{ce})$. Таким образом, формула (2.28) справедлива лишь при $t < v/\omega_{ci}\omega_{ce}$. С другой стороны, как уже указывалось, соотношения (2.28) и (2.29) верны лишь для $t > 1/v$, так как для более ранних моментов времени становится существенным отброшенный инерциальный член, пропорциональный $\partial j/\partial t$. Следовательно, в ионизованном газе эти соотношения выполняются только в случае, когда v превышает $\sqrt{\omega_{ce}\omega_{ci}}$, причем лишь для определенного интервала значений t . В слабо ионизованном газе требуется гораздо больше времени, чтобы газ в целом начал дрейфовать со скоростью E_y/B , так что область применимости указанных формул значительно расширяется.

г. Поляризация. Хотя из-за математической сложности мы не рассматриваем здесь точное общее решение уравнения (2.26), тем не менее остановимся на одном простом результате, непосредственно вытекающем из этого уравнения. Мы видели, что в стационар-

ном состоянии, которое устанавливается после наложения постоянного поля \mathbf{E} , плотность тока \mathbf{j} должна равняться нулю. Отсюда сразу получаем следующее условие для интеграла от \mathbf{j} по времени:

$$\int_0^{\infty} \mathbf{j} dt = \frac{\mathbf{v}}{\omega_{ci} \omega_{ce} \eta} \mathbf{E} = \frac{\rho}{B^2} \mathbf{E}, \quad (2.30)$$

где ρ — как обычно, плотность массы и где мы вновь воспользовались формулой (5.32) для отношения \mathbf{v}/η . Полный ток сходит на нет по мере того, как сила $\mathbf{j} \times \mathbf{V}$ ускоряет газ до скорости дрейфа E/B . Из формулы (2.30) следует также, что для достаточно большого времени t интеграл от холловского тока по времени должен быть точно равен нулю.

Уравнение (2.30) получено для случая, когда поле \mathbf{E} становится постоянным после резкого начального возрастания. Если \mathbf{E} изменяется медленно, так что его относительное изменение за время $1/\omega_{ci}$ мало, то скорость \mathbf{v} будет все время почти точно равняться $\mathbf{E} \times \mathbf{V}/B^2$, и из уравнения движения (2.11) мы получаем

$$\mathbf{j}_{\perp} = \frac{\rho}{B^2} \mathbf{V} \times \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\rho}{B^2} \frac{d\mathbf{E}_{\perp}}{dt}, \quad (2.31)$$

т. е. уравнение для поляризуемой среды с поляризуемостью ρ/B^2 . Соответствующая диэлектрическая проницаемость K будет равна

$$K = 1 + \frac{4\pi\rho c^2}{B^2}. \quad (2.32)$$

Таким образом, в этом случае полностью ионизованный газ, помещенный в магнитное поле, не обладая обычной проводимостью, проявляет свойства диэлектрика по отношению к компоненте электрического поля \mathbf{E} , перпендикулярной к \mathbf{V} . Если ρ и \mathbf{V} зависят от времени, то поляризация, вообще говоря, не может быть найдена с помощью диэлектрической

проницаемости K , даваемой формулой (2.32), а должна определяться непосредственно из основных уравнений.

§ 5. Движение вещества поперек силовых линий

Как показал Альфвен [1], силовые линии внутри идеально проводящего газа словно «вморожены» в вещество. Такое представление может показаться несколько неопределенным, поскольку электромагнитная теория не дает однозначного определения движения силовых линий. Выражаясь точнее, можно сказать, что в проводящем газе магнитный поток Φ через любой замкнутый контур, каждый элемент которого движется с локальной скоростью газа v , стремится остаться постоянным. Если магнитный поток Φ через каждый контур строго постоянен в процессе движения, то, как было показано Ньюкомбом [8], магнитные силовые линии всегда можно представлять реально движущимися, причем каждый элемент силовой линии движется с локальной скоростью v . Такое представление не всегда однозначно, и поэтому некоторые магнитные поля могут быть представлены силовыми линиями, которые не будут двигаться с локальной скоростью сплошной среды; допустимо, например, предполагать произвольное вращение вокруг оси симметрии. Если поток Φ через контур, движущийся со средой, не остается постоянным, но $\mathbf{E} \cdot \mathbf{V} = 0$, то хотя поле \mathbf{V} и можно представлять с помощью силовых линий, однако они не будут неподвижными по отношению к среде. Если же $\mathbf{E} \cdot \mathbf{V} \neq 0$, то силовые линии могут терять свою индивидуальность при изменении \mathbf{V} , и представление поля системой силовых линий, движущихся с какой-либо скоростью, может оказаться невозможным.

Чтобы выяснить условия, при которых силовые линии можно считать вмороженными в сплошную среду, определим сперва общие условия, когда маг-

нитный поток через замкнутый контур, движущийся со средой, остается постоянным. Затем рассмотрим скорость, с которой плазма диффундирует поперек сильного магнитного поля в результате столкновений частиц, и некоторые другие эффекты.

а. Изменение потока через движущуюся поверхность. Изменение Φ через движущуюся поверхность обусловлено двумя причинами: во-первых, изменением поля \mathbf{B} во времени в различных точках поверхности и, во-вторых, движением самого контура, в результате чего может увеличиваться или уменьшаться охватываемый им поток. Связанное с зависимостью поля от времени изменение потока Φ описывается формулой

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \int \int \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}, \quad (2.33)$$

где $d\mathbf{S}$ — элемент поверхности. Изменение Φ , обусловленное одним лишь движением, определяется скоростью, с которой контур движется поперек силовых линий. При этом можно считать, что $\partial \mathbf{B} / \partial t = 0$, а силовые линии неподвижны. Если $d\mathbf{s}$ — элемент длины контура, то $\mathbf{v} \times d\mathbf{s}$ есть площадь, перекрываемая при движении этого элемента в единицу времени. Поток через эту площадь равен $\mathbf{B} \cdot \mathbf{v} \times d\mathbf{s}$. Следовательно, изменение Φ , вызываемое одним движением, равно

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \int \mathbf{B} \cdot \mathbf{v} \times d\mathbf{s}. \quad (2.34)$$

Здесь интегрирование производится по всему контуру.

Сложив выражения (2.33) и (2.34), получим полную производную от Φ по времени. При этом заменим подынтегральную функцию в формуле (2.33) с помощью уравнения (2.18), а в формуле (2.34) произведем циклическую перестановку векторов и преобразуем линейный интеграл в поверхностный,

согласно теореме Стокса. В результате получим

$$\frac{d\Phi}{dt} = - \int \int \nabla \times \{\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}\} \cdot d\mathbf{S}. \quad (2.35)$$

Таким образом, $d\Phi/dt=0$ для любой поверхности, если подынтегральное выражение в формуле (2.35) всюду равняется нулю:

$$\nabla \times \{\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}\} = 0. \quad (2.36)$$

Итак, при выполнении равенства (2.36) магнитный поток через произвольную поверхность, движущуюся со скоростью \mathbf{v} , будет оставаться постоянным.

Чтобы проверить, выполняется ли соотношение (2.36), применим операцию rot к уравнению (2.12), выражающему обобщенный закон Ома. Можно видеть, что при некоторых дополнительных условиях соотношение (2.36) выполняется для полностью ионизованного газа. Исключив с помощью уравнения (2.11) член $\mathbf{j} \times \mathbf{B}$, мы получим в качестве дополнительных условий следующие: величины $\nabla \times (\partial \mathbf{j} / \rho \partial t)$ и $\nabla \times (\partial \mathbf{v} / \partial t)$ являются пренебрежимо малыми, ρ_i и ρ_e зависят только от ρ , сопротивление η столь мало, что его можно не учитывать. Для сравнительно медленных движений хорошо проводящего газа эти условия обычно удовлетворяются приближенно, однако в общем случае движение газа нельзя строго отождествлять с каким-либо движением, приписываемым силовым линиям.

Естественное ослабление магнитного поля в результате омических потерь нетрудно найти из уравнения (2.35), если при этом в уравнении (2.12) сохранить член $\eta \mathbf{j}$ и пренебречь производными $\partial \mathbf{j} / \partial t$, $\partial \mathbf{v} / \partial t$, $\nabla \rho_i$, $\nabla \rho_e$ и $\nabla \phi$. Исключая \mathbf{j} с помощью уравнения (2.19) (в котором величина $\partial \mathbf{E} / \partial t$ опущена) и считая сопротивление η постоянным, получаем

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \frac{\eta}{4\pi} \int \int \nabla^2 \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}. \quad (2.37)$$

Если в качестве приближенного значения $\nabla^2 \mathbf{V}$ взять \mathbf{V}/L^2 , где L — характерный размер системы, то видно, что Φ спадает экспоненциально с постоянной времени τ , равной

$$\tau \approx \frac{4\pi L^2}{\eta} \approx 2 \cdot 10^{-13} T^{3/2} L^2 \text{ сек}, \quad (2.38)$$

где численное значение η для электронно-протонного газа взято из формулы (5.37), в которой $\ln \Lambda$ положен равным 10. Время τ есть просто промежуток времени, в течение которого из-за омических потерь ηj^2 рассеивается энергия, сравнимая с плотностью магнитной энергии $B^2/8\pi$.

б. Диффузия поперек сильного магнитного поля. Мы рассмотрим сейчас весьма частный случай, когда плазма удерживается сильным магнитным полем \mathbf{B} , величина которого в каждой точке пространства постоянна во времени независимо от поведения плазмы. Магнитное поле, обладающее такими свойствами, может быть легко создано. Для этого необходимо, чтобы магнитное поле внутри рассматриваемой области создавалось постоянными токами, находящимися вне этой области; необходимо далее, чтобы газовое давление p внутри области было пренебрежимо мало по сравнению с $B^2/8\pi$, при этом квазистационарные плазменные токи, описываемые уравнением (2.22), будут пренебрежимо слабо влиять на \mathbf{B} .

Скорость диффузии поперек магнитного поля, возникающей в результате столкновений электронов с ионами, может быть теперь найдена из уравнений (2.20) и (2.21) для квазистационарного состояния. Если учитывается конечная проводимость, то к правой части уравнения (2.23) следует добавить член $-\eta \mathbf{j} \times \mathbf{B}/B^2$. Используя уравнение (2.20) для исключения $\mathbf{j} \times \mathbf{B}$, мы найдем добавку к v_{\perp} , которую будем обозначать через $v_{D\tau}$, подчеркивая этим, что рассматриваемая скорость поперечной диффузии является

результатом конечной проводимости. Добавка равна

$$v_{D\eta} = -\frac{\eta}{B^2} \nabla p = -\frac{1,78 \cdot 10^{-3} Z \ln \Lambda}{B^2 T^{1/2}} \nabla n. \quad (2.39)$$

Здесь мы использовали формулу (5.42) для поперечного сопротивления η в ионизованном газе и считали, что температура T постоянна. Следует отметить, что компонента вектора v_{\perp} , перпендикулярная к ∇p_i и определяемая уравнением (2.23), не ухудшает условий удержания плазмы, поскольку движение вещества происходит параллельно изобарам и поэтому не происходит ухода частиц. При $\nabla T \neq 0$ необходимо еще учитывать термоэлектрические эффекты, рассмотренные в гл. 5, § 5.

Если рассматривать выражение (2.39) как определение скорости среды относительно магнитных силовых линий, то этот результат будет довольно общим, ограниченным лишь условиями допустимости пренебрежения в общих макроскопических уравнениях инерционными членами и гравитационным потенциалом. Уравнения (2.38) и (2.39) отражают различные стороны одного основного процесса. В самом деле, уравнение (2.37) можно вывести из того условия, что Φ изменяется в результате относительного движения между средой и силовыми линиями со скоростью $v_{D\eta}$, определяемой формулой (2.39). Для такого вывода необходима еще перпендикулярность \mathbf{j} к полю \mathbf{B} ; если это условие выполняется, то при изменении поля $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}$ будет оставаться равным нулю и, как показал Ньюкомб [8], силовые линии будут сохранять свою индивидуальность во время этого процесса затухания.

Движение удерживаемой плазмы поперек сильного магнитного поля наружу называют столкновительной диффузией. Измерения, проведенные Д'Анжелло и Ринном [5] на цезиевой плазме, показали, что скорость диффузии находится в согласии с соотношением (2.39) для столкновительной диффузии.

Если в плазме присутствуют ионы различных сортов, то благодаря столкновениям вновь возникнут упорядоченные движения поперек силовых линий, хотя теперь различные ионы могут двигаться в разных направлениях. В этом случае скорости диффузии, вычисленные Спитцером [12], стремятся к равновесию, при котором величина $\nabla p_i/n_i$ становится пропорциональной зарядовому числу Z_i для каждого сорта ионов. Таким образом, частицы с бóльшим зарядом будут сосредотачиваться в более плотных областях плазмы.

Столкновения между одинаковыми частицами не вызывают сколько-нибудь заметной диффузии, во всяком случае в первом приближении. Для уяснения этого довольно неожиданного результата обратимся к микроскопической картине, чтобы увидеть, почему, по крайней мере, в одном специальном случае диффузия, обусловленная такими столкновениями, пренебрежимо мала по сравнению с диффузией, описываемой формулой (2.39) и связанной со столкновениями неодинаковых частиц. Рассмотрим движение центра тяжести ведущих центров. Пусть \mathbf{r} — радиус-вектор частицы, а \mathbf{r}_c — радиус-вектор ее ведущего центра в некоторой системе координат. Тогда

$$\mathbf{r}_c = \mathbf{r} + \frac{m}{qB^2} \mathbf{w} \times \mathbf{B}. \quad (2.40)$$

Рассмотрим систему, состоящую из N одинаковых частиц. Центр тяжести ведущих центров этих частиц расположен в точке $\sum \mathbf{r}_c / N$ (суммирование проводится по всем частицам). Движение центра тяжести определяется уравнением

$$\frac{1}{N} \frac{d}{dt} \sum \mathbf{r}_c = \frac{1}{N} \sum \mathbf{w} + \frac{m}{NqB^2} \sum \frac{d\mathbf{w}}{dt} \times \mathbf{B} \quad (2.41)$$

при условии однородности поля \mathbf{B} в пространстве. Если воспользоваться теперь уравнением (1.1) для $d\mathbf{w}/dt$, положив $\mathbf{E}=0$, то оба члена в правой части уравнения (2.41) взаимно уничтожатся при условии

отсутствия средней скорости, параллельной **V**. Правда, в уравнении (1.1) надо еще принять во внимание член, учитывающий силы взаимодействия между частицами, однако такие члены при суммировании по всем частицам уничтожатся в силу третьего закона Ньютона, даже когда эти силы являются дальнедействующими. В этой микроскопической картине для смещений ведущих центров, обусловленных столкновениями, имеет место детальное равновесие. Столкновение двух одинаковых частиц смещает два ведущих центра на равные и противоположные расстояния. С другой стороны, когда сталкиваются две частицы с противоположными знаками зарядов, то их ведущие центры будут двигаться в одинаковых направлениях и вызовут заметное смещение центра тяжести.

Как мы увидим сейчас на одном частном примере, требование неподвижности центра тяжести накладывает весьма заметные ограничения на характер диффузии. Допустим, что плазма заключена между двумя бесконечными параллельными плоскостями $x=x_1$ и $x=x_2$ и что сильное однородное магнитное поле направлено параллельно оси z . Будем считать обе плоскости идеально отражающими. При каждом отражении частицы ведущий центр будет скачкообразно смещаться в направлении оси y параллельно плоскости, совершенно не перемещаясь в направлении оси x . Таким образом, в результате отражений от стенок x -компонента радиус-вектора центра тяжести всех частиц изменяться не будет. Если газ находился первоначально у одной из стенок, так что среднее значение x_c было близко к x_1 или x_2 , то он и будет оставаться около стенки бесконечно долго. Следовательно, в этом смысле диффузия в среднем не возникает, хотя столкновения должны влиять на точное пространственное распределение плазмы.

Более подробное рассмотрение поперечной диффузии, связанной со столкновениями между ионами, показывает, что с макроскопической точки зрения эта диффузия возникает из-за вязкого трения,

появляющегося в результате таких столкновений. Вычислим скорость дрейфа, соответствующую такой диффузии в простом случае, когда скорость скольжения \mathbf{v} перпендикулярна к \mathbf{B} . Пусть движение стационарно, $d\rho/dt$ равно нулю и скорость \mathbf{v} параллельна поверхностям постоянной плотности и температуры. При этих условиях $\nabla \cdot \mathbf{v}$ и $\mathbf{v} \cdot \nabla \mu$ обращаются в нуль (μ — коэффициент вязкости), и входящая в общее уравнение Навье — Стокса объемная вязкая сила, которую следует прибавить к правой части уравнения (2.11), принимает вид $\nabla \cdot (\mu \nabla \mathbf{v})$. В стационарном состоянии параллельная \mathbf{v} сила трения, обусловленная вязкостью, должна уравниваться силой $\mathbf{j} \times \mathbf{B}$, если не принимать во внимание гравитационную силу и считать, что градиент давления перпендикулярен к этому направлению. Поскольку вклад в вязкость, обусловленный электронными столкновениями, мал, то сила трения будет действовать преимущественно на ионы, которые и будут создавать ток. Следовательно, плотность тока \mathbf{j} равна $n_i Z e v_{D\mu} / c$, где $v_{D\mu}$ — скорость результирующего ионного дрейфа, перпендикулярного к магнитному полю. Тогда из уравнения (2.11), дополненного членом, учитывающим вязкость, получим

$$\mathbf{v}_{D\mu} = - \frac{c}{en_e B^2} \mathbf{B} \times (\nabla \cdot \mu \nabla \mathbf{v}). \quad (2.42)$$

В общем случае величина коэффициента вязкости μ различна для различных компонент тензора напряжений. Здесь мы рассмотрим частный случай, когда скорость \mathbf{v} не только перпендикулярна к \mathbf{B} , но и не изменяется в направлении \mathbf{B} , так что ее производная по этому направлению равна нулю. Тогда у тензора напряжений отличными от нуля будут компоненты, перпендикулярные к \mathbf{B} , и можно заменить μ на μ_{\perp} . В случае сильного магнитного поля величина μ_{\perp} описывается формулой (5.55).

В стационарном случае при $\mathbf{E} = 0$ величина $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ может быть выражена через ρ_i с помощью уравне-

ния (2.21), в котором не учитывается малый член ηj . Еще более идеализируя задачу и предполагая, что \mathbf{B} постоянно во всей рассматриваемой области, находим

$$\mathbf{v}_{D\mu} = \frac{c^2}{e^2 n_e B^2} (\nabla \cdot \mu_{\perp} \nabla) \left(\frac{\nabla p_l}{n_e} \right). \quad (2.43)$$

Допущение, что \mathbf{E} исчезающе мало, может не выполняться; в частности, ток, связанный с $\mathbf{v}_{D\mu}$, стремится вызвать электрические поля, которые снижают скорость скольжения до нуля. Если выполняется соотношение (2.43), то легко показать, что в одномерном изотермическом случае скорость $\mathbf{v}_{D\mu}$ пропорциональна $n \partial / \partial x (\partial^2 n / \partial x^2)$. Этот результат можно сопоставить с соотношением (2.39). Очевидно, что в этом процессе диффузии более высокого порядка скорость $\mathbf{v}_{D\mu}$ обращается в нуль, если n экспоненциально зависит от x .

Многочисленные наблюдения показывают, что в присутствии флуктуирующих или турбулентных полей скорость диффузии плазмы поперек силовых линий может значительно превышать скорость столкновительной диффузии, описываемую уравнением (2.39). Бом [2] и его сотрудники постулировали, что эта диффузия вызывается беспорядочными флуктуациями в газе, родственными турбулентности в обычных жидкостях. Если считать, что этот процесс не связан со столкновениями между частицами, то ожидаемую величину скорости диффузии можно оценить из следующих соображений размерности.

Предположим, что поток частиц равен произведению коэффициента диффузии D на градиент плотности ∇n , т. е.

$$n \mathbf{v}_D = D \nabla n, \quad (2.44)$$

причем D имеет размерность скорости, умноженной на длину. Для обычной диффузии нейтральных атомов в газе коэффициент D примерно равен $\lambda \omega_T$, где λ — средняя длина свободного пробега, а ω_T — тепло-

вая скорость. Скорость диффузии поперек сильного магнитного поля, описываемая формулой (2.39), соответствует коэффициенту диффузии D , равному $\lambda\omega_T (a/\lambda)^2$, где a — ларморовский радиус; этот результат может быть проверен непосредственно с помощью соотношения (5.32). Очевидно, что простейшей формой D , не связанной с λ , является $a\omega_T$. Заменяя a согласно формуле (1.4), мы найдем, что $D \approx ckT/eB$. Вводя еще численный множитель $1/16$, получим коэффициент диффузии D , предложенный Бомом. Если обозначить через v_{Dt} скорость диффузии, возникающей из-за турбулентности плазмы, то для бомовского коэффициента диффузии она равна

$$v_{Dt} = - \frac{ckT}{16en_e B} \nabla n_e = - \frac{5,4 \cdot 10^2 T}{n_e B} \nabla n_e. \quad (2.45)$$

По-видимому, множитель 16, стоящий в знаменателе, не имеет никакого особого теоретического обоснования, так как еще не было дано точного вывода этого выражения в рамках какого-либо конкретного механизма. Вывод, построенный на соображениях размерности, не очень убедителен, поскольку остается произвол, связанный с возможностью умножения D на какой-нибудь из нескольких безразмерных параметров плазмы, таких, как m_i/m_e или, например, как диэлектрическая проницаемость K .

Экспериментальные исследования не дали пока окончательного подтверждения формулы (2.45). Косвенные измерения, проведенные Стодиком, Эллисом и Горманом [13], на плазме, через которую пропускался большой электрический ток, показали, что v_D изменяется как T/B , но ее численная величина примерно втрое больше, чем дает формула Бома. С другой стороны, измерения Поста и др. [9] на плазме, удерживаемой в магнитной ловушке, в отсутствие заметных плазменных токов приводят к значениям скорости диффузии, меньшим по порядку величины, чем предсказывает бомовская формула. Очевидно, что необходимы новые исследования, чтобы выяснить не

только условия, при которых флуктуации в плазме могут увеличивать поперечную диффузию, но и природу других эффектов, вызываемых такими турбулентными изменениями.

ЛИТЕРАТУРА

1. Alfvén H., Ark. Mat., Astr. Fysik, **29B**, № 2 (1942).
2. Bohm D., The Characteristics of Electrical Discharges in Magnetic Fields, New York, 1949, Ch. 2, Sec. 5.
3. Chew G. F., Goldberger M. L., Low F. E., Proc. Roy. Soc., **236A**, 112 (1956). (Имеется перевод в сборнике: «Проблемы современной физики», № 7, ИЛ, 1957, стр. 139.)
4. Cowling T. G., Monthly Notices, Roy. Astron. Soc., **92**, 407 (1932).
5. D'Angelo N., Rynn N., Phys. Fluids, **4**, 1303 (1961).
6. Langmuir I., Phys. Rev., **33**, 954 (1929).
7. Lüst R., Fortschr. Phys., **7**, 503 (1959).
8. Newcomb W. A., Ann. Phys., **3**, 347 (1958).
9. Post R. F., Ellis R. E., Ford F. C., Rosenbluth M. N., Phys. Rev. Lett., **4**, 166 (1960).
10. Schlüter A., Zs. Naturforsch., **5a**, 72 (1950). (Имеется перевод в сборнике: «Проблемы современной физики», № 2, ИЛ, 1956, стр. 7.)
11. Schlüter A., Ann. Phys., **6—10**, 422 (1952).
12. Spitzer L., Astrophys. Journ., **116**, 299 (1952). (Имеется перевод в сборнике. «Проблемы современной физики», № 2, ИЛ, 1956, стр. 26.)
13. Stodiek W., Ellis R. A., Gorman J. G., Nuclear Fusion Supplement, P. 1, 193 (1962).
14. Tonks L., Langmuir I., Phys., Rev., **34**, 876 (1929).
15. Watson K. M., Phys. Rev., **102**, 12 (1956). (Имеется перевод в сборнике: «Управляемые термоядерные реакции», Атомиздат, 1960, стр. 261.)

ВОЛНЫ В ПЛАЗМЕ

Ионизованному газу присуще большое разнообразие волновых движений. Эти волновые движения, вообще говоря, могут быть чрезвычайно сложными. Здесь мы ограничимся рассмотрением бесконечно малых возмущений в однородных средах при сравнительно простых условиях. Теоретически наиболее полно изучены следующие три вида волн, характерные для плазмы: электромагнитные, магнитогидродинамические и электростатические волны. Хотя в чистом виде такие идеализованные волны вряд ли существуют в природе (исключая возможность их искусственного получения в лабораторных условиях), понимание этих простых волновых движений позволит объяснить более сложные явления, происходящие в плазме.

Изучение указанных видов волн основывается главным образом на уравнениях Максвелла, приведенных в гл. 2. Применяя операцию rot к уравнению (2.18) и дифференцируя уравнение (2.19) по времени, мы получаем после исключения $\nabla \times \partial \mathbf{B} / \partial t$ основное уравнение для электромагнитных волн

$$\nabla^2 \mathbf{E} - 4\pi c^2 \nabla \sigma = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} + 4\pi \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t}. \quad (3.1)$$

При выводе этого уравнения мы раскрыли двойное векторное произведение и использовали формулу (2.16) для исключения $\nabla \cdot \mathbf{E}$. Уравнение (3.1) непригодно для компоненты E_x вектора \mathbf{E} , параллельной направлению распространения волны, поскольку для этой компоненты обе части уравнения тождественно обращаются в нуль. Вместо уравнения (3.1) мы

воспользуемся соотношением

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial E_x}{\partial t} + 4\pi j_x = 0, \quad (3.2)$$

вытекающим непосредственно из формулы (2.19), так как производная вектора \mathbf{E} по направлению, параллельному фронту волны, равна нулю.

Для определения \mathbf{E} необходимо решить уравнения (3.1) и (3.2) совместно с другими уравнениями гл. 2. Величины σ и \mathbf{j} связаны уравнением (2.15). Плотность тока \mathbf{j} и скорость \mathbf{v} , которая может входить в выражение для \mathbf{j} , находятся из уравнений (2.12) и (2.11). Изменения давления можно вычислить с помощью уравнения (2.14) при условии, что известно либо уравнение состояния, либо температура.

В общем случае, когда условия заданы произвольным образом, при любой частоте могут распространяться четыре независимые волны бесконечно малой амплитуды, хотя фазовая скорость некоторых из них может оказаться мнимой. Простейший случай соответствует отсутствию внешнего магнитного поля. При этом возможны волны двух видов: электромагнитные и электростатические. В обычных электромагнитных волнах вектор \mathbf{E} перпендикулярен к направлению распространения. Можно говорить о двух волнах такого типа, различающихся направлением поляризации. Благодаря взаимодействию электронов плазмы с этими поперечными волнами скорость волны увеличивается. Если частота меньше некоторого критического значения, называемого *плазменной частотой* и возрастающего с увеличением плотности, то фазовая скорость становится мнимой, и электромагнитные волны в отсутствие магнитного поля не могут распространяться в плазме.

Другая пара волн, наблюдаемая в отсутствие магнитного поля, есть волны электростатического типа, в которых \mathbf{j} и \mathbf{E} параллельны направлению распространения. В одной из этих волн ионы, по существу, неподвижны и колеблются лишь электроны; такая

волна называется *электронной* или *плазменной*. Во второй волне, называемой *ионной*, и ионы и электроны движутся вместе; при этом скорость волны из-за инерции ионов оказывается обычно меньше скорости электронной волны. В отсутствие магнитного поля фазовая скорость электронной волны становится мнимой при значениях частоты, меньших плазменной. Ионная же волна не может распространяться, если частота превышает некоторое критическое значение, меньшее плазменной частоты в $\sqrt{m_i/m_e}$ раз.

Эти четыре волны сильно видоизменяются, если плазма помещена в магнитное поле, однако число независимых волн остается тем же самым. *Магнито-гидродинамическими* называются волны, которые возникают в плазме в присутствии магнитного поля и при частотах, малых по сравнению с циклотронной частотой ионов ω_{ci} . В такой волне ионы обуславливают инерцию колебаний, тогда как магнитные силы, описываемые членом $\mathbf{j} \times \mathbf{B}$ в уравнении (2.11), играют роль возвращающих (квазиупругих) сил. Магнито-гидродинамические волны можно рассматривать как колебания магнитных силовых линий, которые ведут себя подобно натянутым струнам, отталкивающимся друг от друга, и «нагружены» заряженными частицами.

Однако, в общем случае, механизм колебаний в волне, распространяющейся в плазме в присутствии магнитного поля, включает в себя как электростатические, так и магнитные силы. Например, высокочастотное возмущение обычно представляет собой сочетание поперечной электромагнитной волны с продольной электростатической волной. В магнито-гидродинамической волне электрические силы могут играть такую же роль, как и в волне электростатической. Градиенты плотности также могут приводить к взаимосвязи волн различных типов. Все эти осложнения, разумеется, непосредственно вытекают из основных уравнений гл. 2.

В настоящей главе мы будем исследовать решение уравнения (3.1), получаемое в предположении, что E изменяется как $\exp[i(kx - \omega t)]$. Так как основные уравнения линеаризованы, то картину, вызываемую произвольным возмущением, можно получить, исследуя свойства гармонических волн, на которые раскладывается произвольное возмущение. Угловая частота ω равна $2\pi\nu$, где ν — обычная частота, а k — волновое число, связанное с длиной волны λ соотношением $k = 2\pi/\lambda$. Уравнение (3.1) совместно с другими уравнениями позволяет получить формулу, связывающую k и ω . Поскольку фазовая скорость V равна

$$V = \frac{\omega}{k}, \quad (3.3)$$

мы найдем функциональную зависимость между V и ω , называемую *дисперсионным уравнением*. Зная зависимость k от ω , можно определить и групповую скорость, равную $d\omega/dk$.

Знать величину V полезно во многих отношениях. Так, с помощью этой величины можно определить ход преломленного луча в том случае, когда фазовая скорость V является медленно меняющейся функцией координат, так как показатель преломления изменяется как $1/V$. Далее от скачка V зависит, какая часть энергии отразится от границы раздела сред. Если фазовая скорость по обе стороны поверхности раздела двух сред имеет значения V_1 и V_2 соответственно, то для волны, падающей нормально к поверхности, доля отраженной энергии, или коэффициент отражения, определяется формулой

$$R = \left(\frac{V_1 - V_2}{V_1 + V_2} \right)^2, \quad (3.4)$$

при условии, что амплитуда волны и ее первая производная непрерывны на поверхности раздела (такое допущение обычно справедливо в случае нормального падения волны), и при условии, что энергия пропорциональна квадрату амплитуды. Наконец, дисперсионное уравнение позволяет найти расстояние, на

котором заметно затухают волны заданной частоты. Расстояние, на протяжении которого амплитуда волны уменьшается в e раз, мы обозначим буквой d и будем называть *длиной затухания*. Тогда

$$\frac{1}{d} = I(\kappa) = I\left(\frac{\omega}{V}\right), \quad (3.5)$$

где $I(\kappa)$ означает мнимую часть величины κ .

§ 1. Электромагнитные волны в отсутствие магнитного поля

В отсутствие тока, когда \mathbf{j} и σ равны нулю, уравнение (3.1) переходит в обычное волновое уравнение. В плазме величину $\partial \mathbf{j} / \partial t$ нужно находить из уравнения (2.12). В этом параграфе мы будем считать, что $\mathbf{V} = 0$, и рассматривать волны, в которых плотность тока \mathbf{j} параллельна фронту волны. Тогда $\nabla \cdot \mathbf{j} = 0$, т. е. не происходит накопления заряда, и плотность заряда σ равна нулю. В этих условиях давление не будет изменяться в течение периода колебаний и, поскольку невозмущенная плазма предполагается однородной, мы можем всюду пренебречь градиентами давлений ∇p_e и ∇p_i . Кроме того, сначала будем считать $\eta = 0$, а эффекты, обусловленные сопротивлением, изучим несколько позже. В результате сделанных предположений правая часть уравнения (2.12) будет содержать лишь величину \mathbf{E} . Рассмотрим волну, распространяющуюся вдоль оси x ; для компоненты E_z мы имеем

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} - \frac{4\pi\rho Z e^2 E_z}{m_i m_e c^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2}. \quad (3.6)$$

Для решения вида $\exp[i(\kappa x - \omega t)]$ получается следующее дисперсионное уравнение:

$$V^2 = \frac{c^2}{1 - \omega_p^2 / \omega^2}, \quad (3.7)$$

где «плазменная частота» ω_p определяется как

$$\omega_p = \left(\frac{4\pi n_e e^2}{m_e}\right)^{1/2} \left(1 + Z \frac{m_e}{m_i}\right)^{1/2}. \quad (3.8)$$

Членом m_e/m_i обычно пренебрегают, так что численно мы получаем

$$\nu_p = \frac{\omega_p}{2\pi} = 8,97 \cdot 10^3 n_e^{1/2}. \quad (3.9)$$

Как указывалось выше, существуют две независимые волны электромагнитного типа. При распространении волн в направлении оси x в качестве независимых можно рассматривать либо две плоскополяризованные волны, в которых вектор \mathbf{E} направлен по оси y или z соответственно, либо две волны, поляризованные по кругу.

Очевидно, что электрическое и магнитное поля в таких волнах имеют такую же структуру, как в вакууме. Электроны колеблются под действием электрического поля, а движение ионов несущественно. Связанные с движением электронов токи изменяют переменное магнитное поле и влияют на величину фазовой скорости волны V . В самом деле, V и κ при $\omega < \omega_p$ становятся мнимыми и волна не распространяется. Причину такого результата можно выяснить непосредственно из основных уравнений. Как следует из уравнения (2.12), величины $\partial \mathbf{j} / \partial t$ и \mathbf{E} должны иметь одинаковые знаки и фазы. Поскольку и \mathbf{j} , и \mathbf{E} зависят от времени по синусоидальному закону, то величины \mathbf{j} и $\partial \mathbf{E} / \partial t$ будут сдвинуты по фазе на 180° . Это означает, что они пропорциональны друг другу, но противоположны по знаку. Следовательно, в уравнении (2.19) ток \mathbf{j} противоположен току смещения. При частотах, значительно больших плазменной частоты, ток частиц из-за инерции электронов мал и волна почти не испытывает каких-либо воздействий. При более низких частотах этот ток превысит уменьшающийся ток смещения, так что полный ток сменит знак. Как видно из уравнения (2.19), качественно это эквивалентно замене κ мнимым числом.

Если величина V является мнимой, то волна проникает на некоторое расстояние в плазму, но амплитуда ее на некотором расстоянии d уменьшается

в e раз. Из формул (3.5) и (3.7) находим, что длина затухания d равна

$$d = \frac{c}{\omega_p} \frac{1}{(1 - \omega^2/\omega_p^2)^{1/2}}. \quad (3.10)$$

Таким образом, при $\omega \ll \omega_p$ величина d примерно в 2π раз меньше, чем длина волны в вакууме, соответствующая плазменной частоте.

При учете конечной проводимости величина κ^2 становится комплексной. При частоте ω , достаточно большой по сравнению с плазменной ω_p , распространение волны сопровождается ее постепенным затуханием, так как происходит диссипация энергии в виде омических потерь ηj^2 . Если частота ω достаточно мала по сравнению с ω_p , то в уравнении (2.12) можно пренебречь членом $\partial j/\partial t$, а, следовательно, в уравнении (3.1) можно положить $j = E/\eta$. Тогда

$$\kappa^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 + \frac{4\pi i c^2}{\omega \eta} \right). \quad (3.11)$$

В частности, при $4\pi c^2/\omega\eta \gg 1$ можно не учитывать действительную часть величины κ^2 , и из формул (3.5) и (3.11) мы получим для длины затухания d известное выражение толщины скин-слоя

$$d = \left(\frac{\eta}{2\pi\omega} \right)^{1/2}. \quad (3.12)$$

Величина сопротивления электронно-протонного газа дается формулой (5.37), справедливой при условии, что $\omega \ll 1/t_c$ (t_c — время самостолкновений). Для этого случая мы получаем из уравнения (3.12)

$$d = \frac{4,07 \cdot 10^5}{T^{3/4}} \left(\frac{\ln \Lambda}{\nu} \right)^{1/2}, \quad (3.13)$$

где ν — частота. Условие $4\pi c^2/\omega\eta \gg 1$ означает, что формула (3.13) остается справедливой, пока вычисляемая по ней длина затухания d будет значительно меньше отношения c/ω (длины волны в пустоте,

деленной на 2π). С другой стороны, в уравнении (2.12) можно пренебречь членом $\partial \mathbf{j} / \partial t$ лишь в том случае, если формула (3.13) дает большее значение, чем формула (3.10). Из двух значений, определяемых по формулам (3.10) и (3.13), в качестве d следует выбирать наибольшее.

§ 2. Электростатические волны в отсутствие магнитного поля

Исследуем теперь волны, в которых квазиупругие силы являются электростатическими и создаются зарядами, связанными с дивергенцией плотности тока \mathbf{j} . Как уже отмечалось, существуют два основных вида таких волн: электронная и ионная.

При рассмотрении электронных волн в уравнении (2.12) можно не учитывать члена ∇p_i . Если считать также, что равны нулю η и \mathbf{B} , то обобщенный закон Ома примет вид

$$\frac{m_i m_e c^2}{Z \rho e^2} \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} = \mathbf{E} + \frac{c m_i}{e Z \rho} \nabla p_e. \quad (3.14)$$

Вид последнего члена в уравнении (3.14) равнозначен предположению, что тензор напряжений является изотропным. Однако это предположение на самом деле не выполняется, поскольку частоты рассматриваемых колебаний велики по сравнению с частотами столкновений, и поэтому переменная часть тензора напряжений должна быть анизотропной. Так как нет магнитного поля, то нельзя заменить p_e на $p_{e\perp}$. Тем не менее, как показал Оберман (см. ссылку в работе [9]), уравнение (3.14) все-таки можно использовать, выбирая в качестве p_e компоненту тензора напряжений в направлении распространения волны, если только фазовая скорость волны V велика по сравнению со скоростями хаотического движения частиц. В этом случае потоки тепла в любом направлении пренебрежимо малы и любая компонента тензора напряжений будет изменяться адиабатически.

Так как в рассматриваемом случае сжатие одномерно, то $\gamma=3$, согласно результатам гл. 1, § 4. Пренебрегая членами порядка m_e/m_i , сравнимыми с уже опущенным членом ∇p_i , получаем

$$\nabla p_e = 3kT\nabla n_e = -\frac{3kT_e e}{e} \nabla \sigma. \quad (3.15)$$

Если теперь взять дивергенцию от обеих частей уравнения (3.14), а затем с помощью соотношений (2.15), (2.16) и (3.15) выразить \mathbf{j} , \mathbf{E} и ∇p_e через σ , то окончательно получим

$$\frac{\partial^2 \sigma}{\partial t^2} = -\omega_p^2 \sigma + \frac{3kT_e}{m_e} \nabla^2 \sigma, \quad (3.16)$$

где ω_p определяется формулой (3.8). С помощью такого приема исключаются волны, для которых $\nabla \cdot \mathbf{j} = 0$; соотношение (3.2) выполняется теперь автоматически, так как оно является следствием уравнений (2.15) и (2.16). Считая, что σ изменяется по закону $\exp[i(\kappa x - \omega t)]$, мы находим

$$V^2 = \frac{\omega^2}{\kappa^2} = \frac{\omega_p^2}{\kappa^2} + \frac{3kT_e}{m_e}. \quad (3.17)$$

В предельном случае очень низких температур электронные колебания могут иметь лишь одну частоту ω_p независимо от длины волны. Этот результат впервые был получен Тонксом и Ленгмюром [39]. В этом предельном случае электроны колеблются под действием квазиупругой силы, возникающей из-за разделения зарядов; приближенно частоту этих колебаний можно найти с помощью уравнения Пуассона (2.16) и уравнений движения и непрерывности для электронов.

Чтобы представить фазовую скорость V электронной волны как функцию от ω , исключим κ^2 из равенства (3.17). Тогда получим

$$V^2 = \frac{1}{1 - \omega_p^2/\omega^2} \frac{3kT_e}{m_e}. \quad (3.18)$$

Нетрудно заметить, что дисперсионное уравнение для электронных волн в отсутствие \mathbf{V} подобно уравнению (3.7) для электромагнитных волн; роль c теперь играет средняя квадратичная скорость хаотического движения электронов. Так как, по предположению $V^2 \gg 3kT_e/m_e$, то уравнение (3.18) справедливо лишь при значениях ω , лежащих близко к ω_p ; такое ограничение эквивалентно требованию малости дебаевского радиуса по сравнению с длиной волны.

Электронные колебания можно исследовать и с помощью анализа функции распределения скоростей, как это сделано в основополагающих работах Ландау [27] и Бома и Гросса [10]. Эти работы, опирающиеся на уравнение Больцмана, приводят к дисперсионным уравнениям, как правило, не сильно отличающимся от тех, которые получаются из макроскопических уравнений; однако такой микроскопический подход дает ряд новых результатов относительно возбуждения и затухания волн, которые нельзя получить из макроскопических уравнений. Некоторые из этих результатов рассмотрены кратко в § 5 настоящей главы.

Экспериментально электронные колебания впервые были обнаружены Пеннингом [31], и с тех пор их наблюдали многие исследователи. В частности, тщательные измерения, проведенные Луни и Брауном [28], показывают, что частота этих колебаний приблизительно равна плазменной частоте ν_p , определяемой формулой (3.9). Обзор экспериментальных и теоретических работ, относящихся к этой области, был дан Габором [18].

Значительные радишумы, излучаемые активными участками поверхности Солнца, вероятно, в какой-то степени обязаны своим происхождением электронным колебаниям. Исследованию закономерностей, связывающих такие колебания внутри плазмы с электромагнитным излучением наружу, посвящены работы Филда [16], Тидмана [38] и других авторов. Эти

исследования показывают, что заметная доля энергии колебаний может излучаться в пространство.

Перейдем теперь к рассмотрению ионных колебаний. Они представляют собой волны сравнительно низкой частоты, в которых в высокой степени сохраняется электрическая нейтральность. Ввиду малости частоты можно предположить сначала, что ω меньше, чем частоты столкновений электронов и ионов: тогда тензор напряжений будет изотропным, поскольку мала средняя длина свободного пробега. Так как при движении ионов осциллирует макроскопическая скорость \mathbf{v} , мы должны теперь вместо уравнения (2.12) использовать уравнение движения (2.11). Изменение давления p , которое мы обозначим через $p^{(1)}$, можно определить с помощью адиабатического уравнения состояния в предположении равенства электронной и ионной температур. Величина $\rho^{(1)}$, т. е. изменение плотности ρ , находится из уравнения непрерывности (2.14). Если положить $\rho = n_i m_i$, то из этих двух уравнений следует

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p^{(1)}}{\partial t} = - \frac{(1+Z) \gamma k T}{m_i} \nabla \cdot \mathbf{v}. \quad (3.19)$$

Применяя к уравнениям (2.11) и (3.19) операции $\partial/\partial t$ и grad соответственно и исключая $\nabla \partial p^{(1)}/\rho \partial t$, мы получим для волны, распространяющейся в направлении оси x , следующее уравнение:

$$\frac{\partial^2 v_x}{\partial t^2} = \frac{(1+Z) \gamma k T}{m_i} \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2}. \quad (3.20)$$

Здесь мы пренебрегли произведениями величин первого порядка малости, таких, как \mathbf{v} , $p^{(1)}$ или $\rho^{(1)}$. Уравнение (3.20) — это обычное уравнение для акустических волн. Если температуры электронов и ионов различны, то величину $\gamma k T$ следует заменить некоторым средним значением. Для этого необходимо пользоваться записанными для каждого сорта частиц уравнениями непрерывности и уравнениями адиабаты,

находя из первых двух n_i и n_e , а из второй пары уравнений — давления. Если считать при этом, что в волне хорошо выполняется условие электронейтральности, т. е. $n_e^{(1)} \approx Zn_i^{(1)}$, то скорость такой акустической волны определяется по формуле

$$V^2 = V_S^2 \equiv \frac{Z\gamma_e k T_e + \gamma_i k T_i}{m_i}. \quad (3.21)$$

Ввиду того, что скорость ионной волны будет встречаться и в дальнейшем, мы ввели для нее обозначение V_S . Очевидно, что V_S — это обычная скорость звука. Таким образом, ионную волну можно рассматривать как разновидность акустических волн.

Несмотря на то что в приведенные выше уравнения электрическое поле E_x явно не входит, фактически оно играет существенную роль в рассматриваемых колебаниях. В макроскопическое уравнение (2.11) входит градиент полного давления, а температуры T_i и T_e входят в выражение (3.21) для V_S . Важная роль T_i и ионного давления очевидна, но, пожалуй, менее ясно, каким образом электроны воздействуют на волну, особенно в случае, когда можно не учитывать столкновений между электронами и ионами. Движение электронов определяется в первую очередь обобщенным законом Ома, т. е. уравнением (2.12). С помощью уравнения (3.2) нетрудно убедиться, что отношение члена, содержащего $\partial j/\partial t$, к E в уравнении (2.12) равно просто $(\omega/\omega_p)^2$. Таким образом, для низкочастотных колебаний член $\partial j/\partial t$, учитывающий главным образом влияние инерции электронов, можно положить равным нулю, так что два основных члена в правой части уравнения, а именно E и член ∇p_e , должны компенсировать друг друга. Тогда электрическое поле будет действовать на ионы с силой, связанной с градиентом давления электронов. Поэтому при $T_e \gg T_i$ скорость этих акустических волн велика по сравнению с тепловой скоростью ионов; если же температуры T_i и T_e становятся сравнимыми между собой, то скорость волны и

тепловая скорость ионов оказываются приблизительно равными.

Дадим другое объяснение этому факту. Мы можем считать движение ионов настолько медленным, что электроны в каждый момент будут иметь равновесное распределение в электростатическом поле с потенциалом U . Таким образом, можно написать

$$n_e = \bar{n}_e e^{eU/ckT}, \quad (3.22)$$

где \bar{n}_e — средняя плотность. Поскольку мы предположили, что частота столкновений между электронами значительно больше частоты рассматриваемых колебаний, то распределение (3.22), разумеется, будет выполняться. Вследствие этого в уравнении (2.12) член, содержащий ∇p_e , должен быть равен $-E$. При любом распределении ионов потенциал U будет устанавливаться таким образом, чтобы значение n_e , определяемое формулой (3.22), приближенно равнялось Zn_i . Обусловленное градиентом этого потенциала электрическое поле создает квазиупругую силу, действующую на ионы. Если бы не было электрических сил, то, как и в акустической волне в обычном газе, плотности n_e и n_i все же изменялись бы одинаково из-за столкновений между электронами и ионами. Однако в ионной волне электрические силы способствуют тому, что соотношение $n_e = Zn_i$ выполняется с гораздо большей точностью, чем оно обеспечивалось бы в результате одних лишь столкновений.

Поскольку скорость звука V_S меньше, чем тепловая скорость электронов, то нельзя считать, как это было в случае электронных колебаний, что фазовая скорость велика по сравнению со скоростями хаотического движения всех частиц. Следовательно, приведенные рассуждения перестают быть справедливыми, когда частоты столкновений меньше ω . Несмотря на то, что Бернштейн, Грин и Крускал [8] получили точное решение для нарастающих акустических волн, тем не менее полная картина разнообразных явлений, возможных в этом предельном случае редких

столкновений, еще недостаточно изучена, хотя представляется правдоподобным, что формула (3.21) будет еще приблизительно верно описывать действительную часть фазовой скорости волны. Результаты теории наименее достоверны в случае, когда $T_i \approx T_e$, так как при этом тепловая скорость ионов сравнима с V . Как показали Фрайд и Гулд [17], кинетическое рассмотрение в линейном приближении в этом случае редких столкновений предсказывает сильное затухание; это так называемое *затухание Ландау* обсуждается в § 5 настоящей главы. Если $T_i \ll T_e$, то соотношение (3.21) будет справедливо при условии, что столкновения или некий другой механизм поддерживают максвелловское распределение скоростей электронов.

Рассмотрим подробнее дисперсионное уравнение в случае, когда в макроскопическом уравнении движения снимается предположение об электронейтральности, а $n_e^{(1)}$ и $n_i^{(1)}$ находятся по отдельности. Соответствующие результаты будут теперь применимы и в случае, когда длина волны меньше дебаевского радиуса. Здесь мы будем считать, что отношение T_i/T_e пренебрежимо мало, так что затухание можно не учитывать. Снова положим \mathbf{V} и η равными нулю и будем пренебрегать величинами m_e/m_i и ρ_i . При этих условиях уравнения (2.11) и (2.12) остаются еще справедливыми, причем в рассматриваемом случае все поправочные члены в $n_e - Zn_i$ являются исчезающе малыми. Поступая иначе, можно взять порознь отдельные макроскопические уравнения для электронов и ионов и использовать уравнение (3.2) и соотношение (2.9). При любом подходе мы получим дисперсионное уравнение, имеющее два корня. Один из них описывает электронные колебания и дает соотношение (3.17); другой, который нас сейчас интересует, приводит к следующему выражению для скорости ионной волны:

$$V^2 = \frac{Z\gamma_e k T_e}{m_i} \frac{1}{1 + \gamma_e k^2 h^2}, \quad (3.23)$$

где h — дебаевский радиус, определяемый формулой (2.3). При малых κh уравнение (3.23) переходит в ранее полученную формулу (3.21). Если κh велико, то уравнение (3.23) более удобно представить в виде

$$\omega^2 = \frac{Z m_e \omega_p^2}{m_i} \frac{1}{1 + 1/(\gamma_e \kappa^2 h^2)}. \quad (3.24)$$

При достаточно большой температуре T_e величина κh , очевидно, велика по сравнению с единицей и частота приближается к постоянному значению, получаемому при замене m_e на m_i/Z в формуле (3.8) для ω_p . В этом предельном случае электронный тензор напряжений выпадает из рассмотрения, и уравнение (3.24) справедливо даже в отсутствие столкновений при условии, что число электронов, движущихся с фазовой скоростью волны, пренебрежимо мало. При этом электроны образуют фон постоянной плотности, который нейтрализует электрические заряды ионов в невозмущенной плазме. Колеблющиеся ионы в этом случае не экранируются, и частота колебаний близка к плазменной частоте ионов. Гернквист [23] наблюдал колебания с частотой $\omega_p \sqrt{m_e/m_i}$ в плазме, состоящей из электронов больших энергий и однозарядных ионов, при комнатной температуре. Описанные выше акустические волны, скорость которых почти не зависит от частоты, экспериментально наблюдали Алексеефф и Нейдиг [1].

§ 3. Магнитогидродинамические волны

Если плазма находится в магнитном поле, то изученные в предыдущих двух параграфах четыре типа волн видоизменяются. И в этом случае возможно провести полное аналитическое рассмотрение, хотя оно и оказывается громоздким. Чтобы выяснить свойства некоторых наиболее важных видов волн, проведем здесь упрощенное исследование магнитогидродинамических волн, т. е. волн, распространяющихся в

плазме при $\omega \ll \omega_{ci}$. Как и в предыдущих параграфах, будем предполагать, что невозмущенная плазма однородна и гравитационный потенциал ϕ равен нулю.

Простой вид магнитогидродинамической волны, впервые исследованный Альфвеном [2] и называемый теперь альфвеновской волной, соответствует случаю, когда скорость v и возмущение $\mathbf{V}^{(1)}$ магнитного поля параллельны оси y , но не зависят от y , а невозмущенное магнитное поле \mathbf{B} параллельно оси x , совпадающей с направлением распространения волны. Тогда у плотности тока \mathbf{j} отлична от нуля лишь z -компонента, так что и \mathbf{j} , и v параллельны фронту волны. При таком виде движения давление не влияет на ускорение в направлении оси y , поскольку все величины не зависят от координат y и z . В уравнении (2.12) мы пренебрежем следующими членами: а) $\partial \mathbf{j} / \partial t$, б) $\mathbf{j} \times \mathbf{B}$, в) $\eta \mathbf{j}$. Первые два из этих членов по сравнению с остальными членами уравнения являются величинами порядка $\omega^2 / \omega_{ci} \omega_{ce}$ и ω / ω_{ci} соответственно и не существенны, если частота ω достаточно мала. После таких упрощений уравнения (2.11) и (2.12) приобретают вид

$$\rho \frac{\partial v_y}{\partial t} = j_z B, \quad (3.25)$$

$$E_z - v_y B = 0. \quad (3.26)$$

Если мы выразим j_z через E_z с помощью уравнений (3.25) и (3.26) и подставим в уравнение (3.1), то получим

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} = \left(1 + \frac{4\pi\rho c^2}{B^2}\right) \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2}. \quad (3.27)$$

Уравнение (3.27) является волновым уравнением для среды с диэлектрической проницаемостью K , где K , по-прежнему, определяется формулой (2.32). Таким образом, альфвеновскую волну можно рассматривать как обычную электромагнитную волну, распространяющуюся в газе с большой диэлектрической прони-

цаемостью. Фазовая скорость такой волны равна

$$V = \frac{c}{K^{1/2}} = \frac{c}{(1 + 4\pi\rho c^2/B^2)^{1/2}}. \quad (3.28)$$

При $K \gg 1$ фазовая скорость становится приблизительно равной так называемой альфвеновской скорости V_A , которая определяется соотношением

$$V_A = \frac{B}{(4\pi\rho)^{1/2}}. \quad (3.29)$$

С другой точки зрения альфвеновские волны удобно рассматривать как колебания магнитных силовых линий; согласно рассуждениям, приведенным в гл. 2, § 5, движение плазмы сопровождается движением силовых линий. Система напряжений, связанных с магнитным полем, сводится к продольным натяжениям силовых линий (натяжение равно $B^2/8\pi$) и боковому давлению на них, также равному $B^2/8\pi$. Как заметил Каулинг [13], такая система эквивалентна гидростатическому давлению $B^2/8\pi$ и удвоенному продольному натяжению $B^2/4\pi$. Если $y(x)$ — смещение среды, то, согласно теории струны, объемная плотность упругих сил равна величине натяжения, умноженной на $\partial^2 y / \partial x^2$. Следовательно, уравнение движения имеет вид

$$\rho \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{B^2}{4\pi} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, \quad (3.30)$$

что согласуется с уравнением (3.27) при больших значениях K . Поскольку альфвеновская волна является поперечной электромагнитной волной, она может быть поляризованной в одном из двух направлений. Это дает две независимые волны, распространяющиеся в направлении магнитного поля \mathbf{B} . Двумя другими независимыми волнами являются электронная и ионная волны, которые были рассмотрены выше и которые не изменяются при наличии магнитного поля, если направление их распространения параллельно \mathbf{B} .

Для плоскополяризованных альфвеновских волн большой амплитуды необходимо еще учитывать действующую в направлении оси x пондеромоторную силу $-j_z B_y^{(1)}$, пропорциональную квадрату амплитуды волны. В несжимаемой жидкости скорость в направлении оси x возникнуть не может, поскольку, согласно уравнению непрерывности (2.14), $\partial v_x / \partial x = 0$; в этом случае сила, действующая в x -направлении, будет уравновешиваться соответствующим градиентом давления, и уравнения (3.27) и (3.28) оказываются справедливыми для волн произвольной амплитуды. В случае сжимаемого газа и волн большой амплитуды возникают скорости в x -направлении, в результате чего уравнения (3.27) и (3.28) изменяют свой вид. Если, кроме того, частота столкновений мала и скорости частиц сравнимы с фазовой скоростью волны V , то для плоских волн конечной амплитуды появляются дополнительные осложнения. Однако положение значительно упрощается в случае волн с круговой поляризацией. Как было показано Ферраро [15], для поляризованных по кругу альфвеновских волн сила $\mathbf{j} \times \mathbf{B}^{(1)}$ обращается в нуль, и формула (3.28) дает точное значение скорости таких волн большой амплитуды. К тому же распределение скоростей частиц теперь не вызывает какого-либо эффекта, если только давление изотропно (см. гл. 4, § 2).

Альфвеновские волны можно вызвать посредством начального смещения вещества в направлении, перпендикулярном магнитному полю \mathbf{B} . Вообще говоря, в результате такого смещения возникнут две волны, распространяющиеся в противоположные стороны вдоль силовых линий. Более подробно свойства этих волн, включая их затухание, обусловленное конечной проводимостью среды, рассматриваются в монографии Альфвена [3].

Рассмотрим теперь волну, в которой скорость частиц \mathbf{v} параллельна направлению распространения и перпендикулярна к \mathbf{B} . Такую продольную магнито-

гидродинамическую волну мы будем называть в дальнейшем *магнитозвуковой* волной. В этом случае следует в уравнении (2.11) сохранить ∇p и соответствующим образом изменить уравнение (3.25). Ввиду того что теперь вдоль магнитных силовых линий условия однородны, в макроскопических уравнениях можно заменить $\nabla \cdot \Psi$ на ∇p_{\perp} . Таким образом, даже в отсутствие столкновений такой подход к изучению магнитозвуковых волн является справедливым без каких-либо ограничений на соотношение между скоростями частиц и фазовой скоростью волны. Как и прежде, не будем учитывать в уравнении (2.12) члены порядка ω/ω_{ci} , т. е. $\partial \mathbf{j} / \partial t$, $\mathbf{j} \times \mathbf{B}$ и $\eta \mathbf{j}$. Кроме того, можно показать, что при малых ω/ω_{ci} плотность заряда σ в уравнении (3.1) пренебрежимо мала. После некоторых алгебраических преобразований получим

$$V^2 = \frac{V_A^2 + V_S^2}{1 + V_A^2/c^2}, \quad (3.31)$$

где V_A и V_S суть альфвеновская скорость и скорость акустической волны (скорость звука), определяемые формулами (3.29) и (3.21), соответственно. В отсутствие столкновений возмущения магнитного поля меняют скорости частиц в двух направлениях, перпендикулярных к \mathbf{B} , и, следовательно, сжатие является двумерным; поэтому в уравнении (3.21) в этом случае $\gamma_e = \gamma_i = 2$.

В таких волнах инерции ионов противодействуют две упругие силы: градиент давления газа и градиент «магнитного давления». Если магнитное давление $B^2/8\pi$ велико по сравнению с газовым давлением p , то скорость магнитозвуковой волны приблизительно равна скорости альфвеновской волны, хотя эти волны и являются совершенно различными с точки зрения участвующих в них магнитных напряжений. Если же газовое давление значительно больше магнитного, то магнитозвуковая волна является, по существу,

акустической волной, которая подобна ионной волне, рассмотренной в предыдущем параграфе.

Для магнитогидродинамических волн, распространяющихся под углом θ к силовым линиям, возможны три вида колебаний; в пределе низких частот исключаются электронные волны, которые при $\omega < \omega_p$ обычно не возникают. Исследования Герлофсона [22] и ван де Хюлста [40] показывают, что одним из этих трех видов колебаний будет альфвеновская волна, скорость частиц в которой перпендикулярна как к магнитному полю \mathbf{B} , так и к волновому вектору \mathbf{k} . Если рассматривать магнитное поле как систему натянутых струн, то очевидно, что любое возмущение, в котором смещение перпендикулярно и к \mathbf{B} , и к волновому вектору, будет распространяться параллельно \mathbf{B} с обычной альфвеновской скоростью. Таким образом, наблюдаемая в направлении, перпендикулярном к волновому фронту, скорость волны равна

$$V = \frac{c \cos \theta}{K^{1/2}} \approx \frac{B}{(4\pi\rho)^{1/2}} \cos \theta. \quad (3.32)$$

Здесь B — магнитное поле в невозмущенной плазме, а θ — угол между направлением распространения \mathbf{k} и полем \mathbf{B} . Математически соотношение (3.32) легко вывести, если считать, что невозмущенное магнитное поле, кроме параллельной \mathbf{k} компоненты B_x , которая входит в уравнения (3.25) и (3.28), имеет компоненту B_z , перпендикулярную к направлению распространения. При этом следует учитывать также параллельные направлению распространения компоненты j_x и E_x , связанные уравнением (3.2). Несмотря на появление продольного электрического поля, скорость частиц \mathbf{v} остается параллельной оси y , движение при малых возмущениях остается аналогичным движению несжимаемой жидкости, а уравнение (3.28) заменяется уравнением (3.32), в котором диэлектрическая проницаемость K зависит от квадрата полного магнитного поля, т. е. от $B_x^2 + B_z^2$. Нетрудно убедиться, что вектор Пойнтинга параллелен магнитному полю \mathbf{B} :

как и следовало бы ожидать из физических соображений, при таком виде волнового движения энергия переносится вдоль силовых линий с групповой скоростью $c/K^{1/2}$.

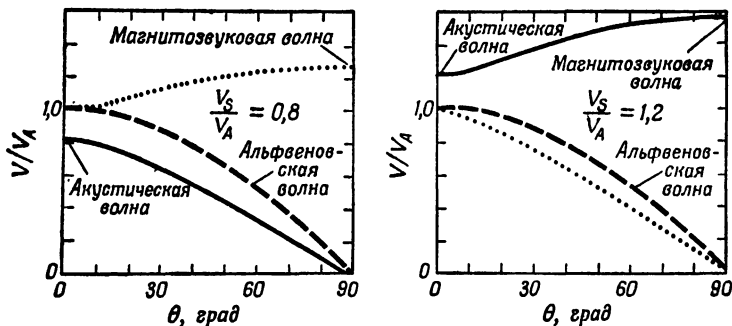
Другие две волны связаны с макроскопическими движениями в плоскости, определяемой векторами \mathbf{B} и $\mathbf{ж}$. В обеих этих волнах плотность газа меняется. При $K \gg 1$, т. е. $V_A \ll c$, справедливо соотношение

$$\frac{1}{V^2} = \frac{V_A^2 + V_S^2}{2V_A^2 V_S^2} \sec^2 \theta \left[1 \pm \left(1 - \frac{4V_A^2 V_S^2 \cos^2 \theta}{(V_A^2 + V_S^2)^2} \right)^{1/2} \right], \quad (3.33)$$

где V_A и V_S по-прежнему даются формулами (3.29) и (3.21). При значениях θ , близких к 90° , второе слагаемое в квадратных скобках может быть разложено в ряд по степеням $\cos^2 \theta$, и если перед этим слагаемым берется знак минус, то из формулы (3.33) получается, что скорость V равна $(V_A^2 + V_S^2)^{1/2}$, т. е. скорости магнитозвуковой волны, определяемой равенством (3.31). При $\theta=0$ эта же волна может быть либо акустической ($V=V_S$), либо альфвеновской ($V=V_A$) в зависимости от того, какая из скоростей (V_S или V_A) больше. В другой волне, соответствующей знаку плюс перед квадратным корнем, скорость, как и для альфвеновской волны, исчезает пропорционально $\cos \theta$. Ту из волн, которая при $\theta=0$ становится альфвеновской, мы будем называть *модифицированной альфвеновской волной*. Зависимость фазовой скорости V от угла θ для двух различных значений V_S/V_A представлена графически на фиг. 5. Из графика видно, что при $V_S < V_A$ волна с наибольшей скоростью (названная ван де Хюлстом *быстрой волной*) является модифицированной альфвеновской волной. Соответственно волна с наименьшей скоростью называется *медленной волной*. При $V_S/V_A \gg 1$ модифицированная альфвеновская волна, которая является теперь медленной волной, становится едва отличимой от чисто альфвеновской волны. В этом же предельном

случае быстрая волна является акустической, причем скорость ее почти не зависит от угла θ .

Затухание всех трех видов магнитогидродинамических волн, обусловленное вязкостью и конечной проводимостью, рассматривалось ван де Хюлстом [40]



Фиг. 5. Скорость магнитогидродинамической волны.

Показана зависимость отношения фазовой скорости V к альфвеновской скорости V_A от угла θ между направлением магнитного поля и направлением распространения волн для двух значений отношения скорости звука V_S к V_A . Штриховая линия соответствует альфвеновской волне, пунктирная — модифицированной альфвеновской волне.

и другими авторами (см., например, [9]). Когда частота ω приближается к ω_{ci} , поляризация независимых волн становится эллиптической; соответствующее дисперсионное уравнение рассматривается в следующем параграфе. Общий обзор магнитогидродинамических явлений, охватывающий стационарные движения и другие явления, а также низкочастотные волны, был сделан Лундквистом [29].

§ 4. Волны в холодной однородной плазме

Рассмотрим теперь общую теорию распространения волн в плазме в присутствии магнитного поля. Как и прежде, будут рассматриваться волны бесконечно малой амплитуды, и все величины в невозму-

щенной плазме будут считаться однородными. Несмотря на принципиальную простоту общей теории распространения волн в горячей плазме, она тем не менее является очень громоздкой. Влияние температуры сказывается главным образом на изученных выше ионной и магнитогидродинамической волнах. Поскольку заранее ясно, что эффекты, обусловленные тепловым разбросом скоростей, не всегда точно описываются макроскопическими уравнениями, то мы упростим анализ, пренебрегая в этих уравнениях давлениями p_i и p_e . Такое пренебрежение оправдано для холодной плазмы.

В этом приближении число возможных видов колебаний, естественно, уменьшается. Волна, которая в случае параллельности векторов \mathbf{k} и \mathbf{B} соответствует ионной волне, исчезает совсем, так как ее скорость пропорциональна $T^{1/2}$. Очевидно, что при $T=0$ звуковые волны не могут распространяться в газе. Колебания, соответствующие электронным, или плазменным волнам, становятся более простыми, поскольку в уравнении (2.12) не учитывается ∇p_e . Если волновой вектор \mathbf{k} параллелен \mathbf{B} , то это упрощение состоит в том, что ω перестает зависеть от \mathbf{k} . Если волновой вектор \mathbf{k} имеет компоненту, перпендикулярную к \mathbf{B} , то общее дисперсионное уравнение упрощается, превращаясь из кубического уравнения относительно \mathbf{k}^2 в квадратное. Таким образом, для каждого значения ω^2 возможны лишь два значения \mathbf{k}^2 ; в этом смысле существуют только два вида колебаний. Однако поскольку общее дисперсионное уравнение остается еще кубическим относительно ω^2 , то всякому значению \mathbf{k}^2 соответствуют три возможных значения ω^2 , и в этом смысле могут существовать продольные электронные волны. Как мы увидим дальше, при поперечном распространении эти электронные волны возникают в особой области значений ω .

Для плоской волны, распространяющейся под произвольным углом θ по отношению к магнитному полю, формулы становятся несколько более сложными.

Этот общий случай был изучен Астрёмом [5]. Позднее Аллис, Буксбаум и Берс [4] провели весьма подробное исследование этого вопроса. Здесь мы во многом будем следовать им. Наше рассмотрение в основном будет ограничено двумя крайними значениями угла θ , а именно $\theta = \pi/2$ (\mathbf{j} и \mathbf{B} взаимно перпендикулярны) и $\theta = 0$ (\mathbf{j} и \mathbf{B} параллельны друг другу), некоторые же результаты, касающиеся произвольных значений θ , приводятся в конце этого параграфа.

а. Распространение поперек магнитного поля \mathbf{B} . Пусть ось z выбрана в направлении невозмущенного магнитного поля \mathbf{B} , а волна распространяется в направлении оси x . Рассмотрим систему уравнений (2.11), (2.12), (3.1) и (3.2). Считая, что \mathbf{j} , \mathbf{E} и \mathbf{v} изменяются как $\exp[i(\kappa x - \omega t)]$, мы найдем, что j_z и E_z не связаны с другими компонентами. Из уравнений (2.12) и (3.1) следует, что фазовая скорость волны, содержащей лишь j_z и E_z , вновь дается выражением (3.7). Действительно, эта так называемая *обыкновенная волна* является поперечной волной, в которой электрический вектор параллелен магнитному полю \mathbf{B} в невозмущенной плазме и которая поэтому совсем не зависит от \mathbf{B} .

Компоненты векторов \mathbf{E} и \mathbf{j} в двух других направлениях связываются вместе в одной волне, которая называется *необыкновенной*. Поскольку как E_x , так и E_y отличны от нуля, то эта волна не является ни чисто продольной, ни чисто поперечной. После несложных алгебраических преобразований мы получим однородную систему двух уравнений относительно j_x и j_y . Чтобы такая система имела нетривиальное решение, ее определитель должен быть равен нулю. Это условие приводит к следующему дисперсионному уравнению:

$$\frac{c^2}{V^2} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 - \omega_{ce}\omega_{ci} + \frac{\omega^2(\omega_{ce} - \omega_{ci})^2}{\omega_p^2 - \omega^2 + \omega_{ce}\omega_{ci}}}. \quad (3.34)$$

Когда V близко к нулю, циклотронные частоты ω_{ce} и ω_{ci} [определяемые формулой (1.2)] также стремятся к нулю и мы вновь приходим к уравнению (3.7). При стремлении ω к нулю получается известное соотношение [формула (3.28)] для магнитогидродинамических волн, если при этом воспользоваться равенством

$$\frac{\omega_{ce}\omega_{ci}}{\omega_p^2} = \frac{V_A^2}{c^2} = \frac{1}{K-1}, \quad (3.35)$$

где альфвеновская скорость V_A и диэлектрическая проницаемость K определяются соответственно формулами (3.29) и (2.32). В этом предельном случае необыкновенная волна является скорее магнитозвуковой волной, нежели альфвеновской, но, поскольку температура не учитывается, ее скорость совпадает с альфвеновской скоростью. Точнее говоря, если отношения ω/ω_p и V_A/c малы, то из уравнения (3.34) получаем, пренебрегая величиной ω_{ci}/ω_{ce} по сравнению с единицей,

$$\frac{V^2}{V_A^2} = 1 - \frac{\omega^2}{\omega_{ce}\omega_{ci}} \left(1 + \frac{\omega_{ce}^2}{\omega_p^2} \right). \quad (3.36)$$

Наконец, если частота ω сравнима с ω_{ce} или превосходит ее, то можно пренебречь циклотронной частотой ионов ω_{ci} в уравнении (3.34). При этом получается общее дисперсионное уравнение для электромагнитных волн в ионосфере (подробнее см. в книгах Митра [30] и Ратклиффа [33]).

При анализе дисперсионного уравнения часто полезно рассматривать частоты, при которых скорость V обращается в нуль или бесконечность. Значения частоты, соответствующие первому случаю, называются *резонансными*, поскольку при этих частотах в плазме имеет место резонанс с приложенным поперечным электрическим полем. Частоты же, при которых V обращается в бесконечность, будем называть *критическими*. При критической частоте волна обычно отражается, в то время как при резонансе может

иметь место либо поглощение, либо отражение в зависимости от природы рассматриваемых механизмов затухания (см. [36]). Как видно из уравнения (3.7), обыкновенная волна не имеет резонансных частот, критический же режим для нее наступает при $\omega = \omega_p$. Это значение частоты, характерное для обыкновенной волны, в каком бы направлении она ни распространялась (исключая лишь распространение под углом θ , равным нулю), называется *критической плазменной частотой*.

Необыкновенная волна имеет две резонансные и две критические частоты. Резонансные частоты можно найти с помощью уравнения (3.34), если решать его относительно ω , полагая $V=0$. Раскладывая решение по степеням m_e/m_i и ограничиваясь лишь первыми членами разложения, получаем

$$\omega^2 = \begin{cases} \omega_{h1}^2 \frac{\omega_p^2 + \omega_{ce}\omega_{ci}}{\omega_p^2 + \omega_{ce}^2}, \\ \omega_{h2}^2, \end{cases} \quad (3.37)$$

где ω_{h1} и ω_{h2} — нижняя и верхняя *гибридные* частоты соответственно, определяемые формулами

$$\omega_{h1}^2 = \omega_{ce}\omega_{ci}, \quad (3.38)$$

$$\omega_{h2}^2 = \omega_p^2 + \omega_{ce}^2. \quad (3.39)$$

Нижняя резонансная частота приближается к нижней гибридной частоте, когда отношение ω_p^2/ω_{ce}^2 [равное $(K-1)m_e/m_i$, согласно уравнению (3.35)] становится большим. С уменьшением величины ω_p/ω_{ce} эта резонансная частота уменьшается и, пройдя при $\omega_p/\omega_{ce} = (m_e/m_i)^{1/2}$ значение $(m_e\omega_p^2/m_i)^{1/2}$, т. е. плазменную частоту ионов, переходит в конце концов при K , стремящемся к единице, в ω_{ci} .

Эти резонансы возникают при частотах, совпадающих с собственными частотами плазмы в отсутствие электромагнитного поля, т. е. когда электрическое

поле, параллельное фронту волны, равно нулю. Так как $\nabla \times \mathbf{E}$ определяется уравнением Максвелла (2.18), то это условие осуществляется при резонансе, характеризуемом малыми длинами волн или большими k . На верхней гибридной частоте колеблются только электроны, и резонансные частоты определяются непосредственно из уравнения (2.12), в котором пренебрегается величинами v , ρ_e , ρ_i и η , а уравнение (3.2) использовано для определения электрического поля E_x в направлении распространения волны; компонента E_y положена равной нулю, хотя обусловленная членом $j_x B_z$ составляющая тока j_y должна учитываться. Резонансные колебания являются результатом совместного действия электростатических и магнитных сил на электроны, вращающиеся в плоскости xy , которая перпендикулярна как к \mathbf{B} , так и к фронту волны.

Ауэр, Гурвиц и Миллер [6] рассмотрели случай, когда частота совпадает с нижней гибридной частотой. При этом электроны и ионы колеблются вместе; из условия электронейтральности следует, что их скорости в направлении распространения волны (совпадающем с осью x) должны быть приблизительно равными. Если магнитное поле направлено по оси z , то в направлении оси y на электроны и ионы будет действовать сила, равная $-qv_x B_z$. Влияние этой силы на движение ионов несущественно вследствие их большой инерции, однако электроны будут сильно ускоряться, что приводит к появлению тока j_y , пропорционального смещению плазмы в направлении оси x . Обусловленная этим током пондеромоторная сила $j_y B_z$ и будет квазиупругой силой, действующей на ионы. Возникающее электростатическое поле E_x будет уравнивать скорости электронов и ионов в направлении оси x , причем роль этого поля состоит в том, что оно гасит воздействие силы $j_y B_z$ на электроны и, следовательно, переносит ее действие на ионы. Очевидно, что инерция ионов определяет ускорение в направлении оси x , тогда как инерцией

электронов определяется ток j_y , ответственный за силу, которая действует в направлении оси x . Поэтому выражение для резонансной частоты включает в себя как m_i , так и m_e .

Две критические частоты также можно найти с помощью уравнения (3.34), если положить в нем $V = \infty$. Как мы увидим ниже, эти частоты можно называть левой и правой, обозначая их через ω_{ol} и ω_{or} соответственно. Для них получаются простые соотношения

$$\frac{\omega_p^2}{\omega_{ol}^2} = \left(1 + \frac{\omega_{ce}}{\omega_{ol}}\right) \left(1 - \frac{\omega_{ci}}{\omega_{ol}}\right), \quad (3.40)$$

$$\frac{\omega_p^2}{\omega_{or}^2} = \left(1 - \frac{\omega_{ce}}{\omega_{or}}\right) \left(1 + \frac{\omega_{ci}}{\omega_{or}}\right). \quad (3.41)$$

При заданных величинах циклотронных частот эти уравнения можно рассматривать как уравнения, определяющие плотность в критическом режиме при каких-либо произвольных значениях ω_{ol} или ω_{or} . Разрешая эти уравнения относительно самих критических частот и удерживая лишь первые члены в разложении по степеням m_e/m_i , получаем

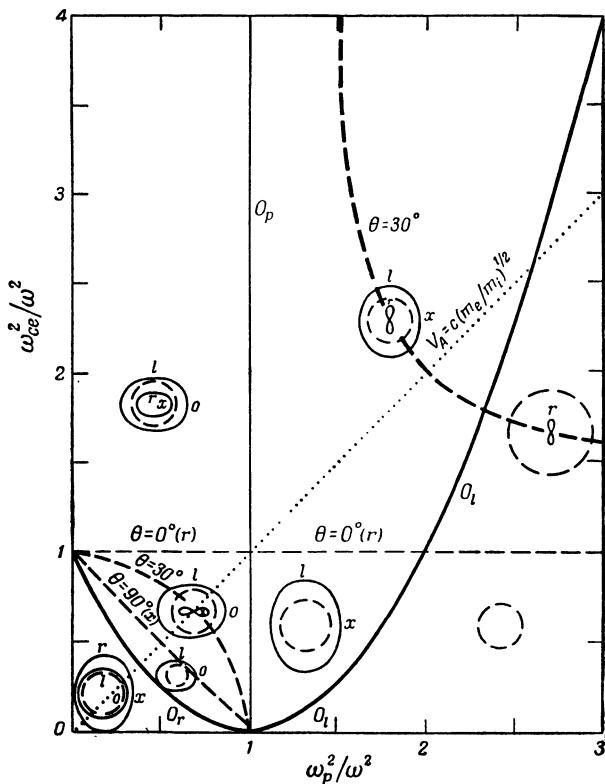
$$\omega_{ol} = \left[\omega_p^2 + \frac{(\omega_{ce} + \omega_{ci})^2}{4}\right]^{1/2} + \frac{\omega_{ci} - \omega_{ce}}{2}, \quad (3.42)$$

$$\omega_{or} = \left(\omega_p^2 + \frac{\omega_{ce}^2}{4}\right)^{1/2} + \frac{\omega_{ce}}{2}. \quad (3.43)$$

Если отношение $\omega_p^2/\omega_{ce}\omega_{ci}$ мало, то $\omega_{ol} \approx \omega_{ci}$, а $\omega_{or} = \omega_{ce}$. Поэтому эти две критические частоты называются критическими циклотронными частотами. Однако если отношение ω_p/ω_{ce} велико, то и ω_{ol} , и ω_{or} близки к ω_p .

Критические и резонансные частоты удобно изображать на так называемых диаграммах Аллиса (см. [4]), на которых по осям отложены величины ω_{ce}^2/ω^2 и ω_p^2/ω^2 . При постоянном значении ω ординаты и аб-

сиссы пропорциональны величинам B^2 и n_e соответственно. На фиг. 6 представлена такая диаграмма

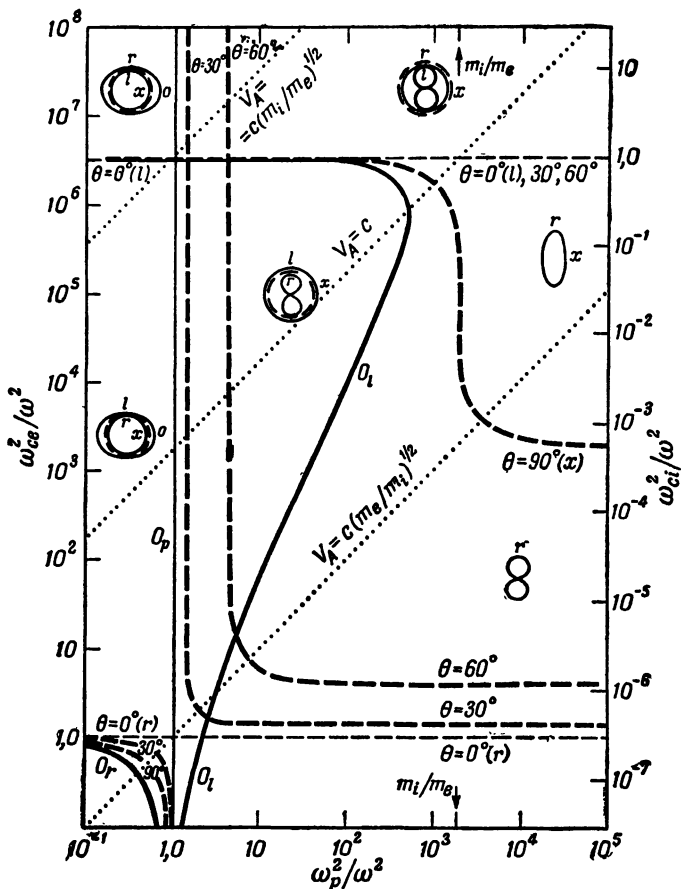


Фиг. 6. Диаграмма Алиса для высоких частот.

Сплошным линиям соответствуют значения ω_p^2/ω^2 и ω_{ce}^2/ω^2 , при которых V обращается в бесконечность (критические значения). Штриховым линиям соответствуют точки, в которых для выбранных значений θ скорость V обращается в нуль (резонансы).

Маленькие диаграммы изображают зависимость V от θ для различных типов волн.

для малых значений ординаты, соответствующих высоким частотам. Сплошной линией обозначаются



Фиг. 7. Диаграмма Аллиса для низких частот.

Критические и резонансные кривые показаны сплошными и штриховыми линиями соответственно и относятся к электронно-протонному газу ($m_i/m_e = 1836$). Пунктирные линии соответствуют различным отношениям альфвеновской скорости V_A к c .

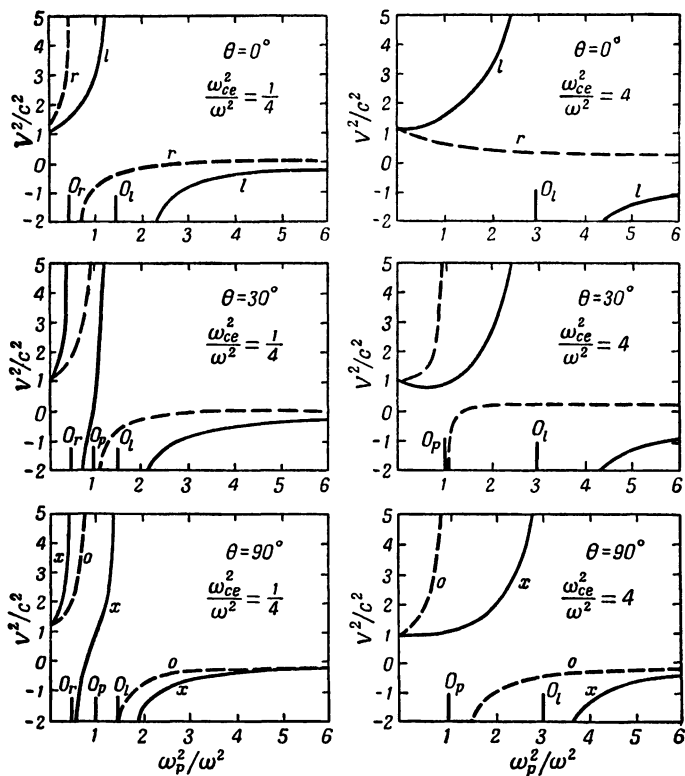
Маленькие диаграммы изображают зависимость V от θ для различных типов волн.

критические режимы, штриховой — резонансы. Вдоль пунктирной прямой альфвеновская скорость V_A равна $c(m_e/m_i)^{1/2}$; очевидно, что в любой точке этой прямой отношение ω_{ce}/ω_p равно единице. Области, заключенные между этой прямой и осью абсцисс, соответствуют случаю, когда плазменная частота ω_p превосходит циклотронную частоту электронов ω_{ce} , т. е. соответствуют большой плотности или слабому магнитному полю. Смысл изображенных в каждой области полярных диаграмм объясняется ниже. Графики, подобные фиг. 6, но без полярных диаграмм, были введены Клеммовым и Мэллели [12]. На фиг. 7 представлена диаграмма Аллиса для низких частот, причем, чтобы информация была более полной, используется логарифмическая шкала. При построении этой диаграммы отношение масс m_i/m_e принималось равным 1836.

Величины V^2/c^2 для обыкновенной и необыкновенной волн изображены на нижних графиках фиг. 8 и фиг. 9. При этом фиг. 8 соответствует высоким частотам, когда ω_p^2/ω^2 и ω_{ce}^2/ω^2 невелики, а фиг. 9 — низким частотам. В качестве независимой переменной во всех этих графиках выбрано отношение ω_p^2/ω^2 , что облегчает сопоставление с диаграммами Аллиса и показывает, как V^2/c^2 зависит от плотности плазмы. На фиг. 9 используется такая же логарифмическая шкала, как на фиг. 7. Для упрощения чертежа на фиг. 9 вместо величины V^2/c^2 изображено графически отношение V^2 к c^2/K (т. е. к квадрату скорости альфвеновской волны). В областях, где величина V^2 принимает отрицательные значения, волна распространяться не может (волна «отсекается»), эти области иногда называют *полосами запертия*.

Отметим на фиг. 8 некоторые точки. Обыкновенная волна, конечно, всегда отсекается при $\omega_p \geq \omega$. Соответствующее критическое значение обозначено на фигуре через O_p . Необыкновенная волна отсекается при плотностях, больших, чем плотность,

соответствующая левой критической точке O_l (т. е. при $\omega < \omega_{ol}$). Если $\omega_{ce} < \omega$, то необыкновенная волна

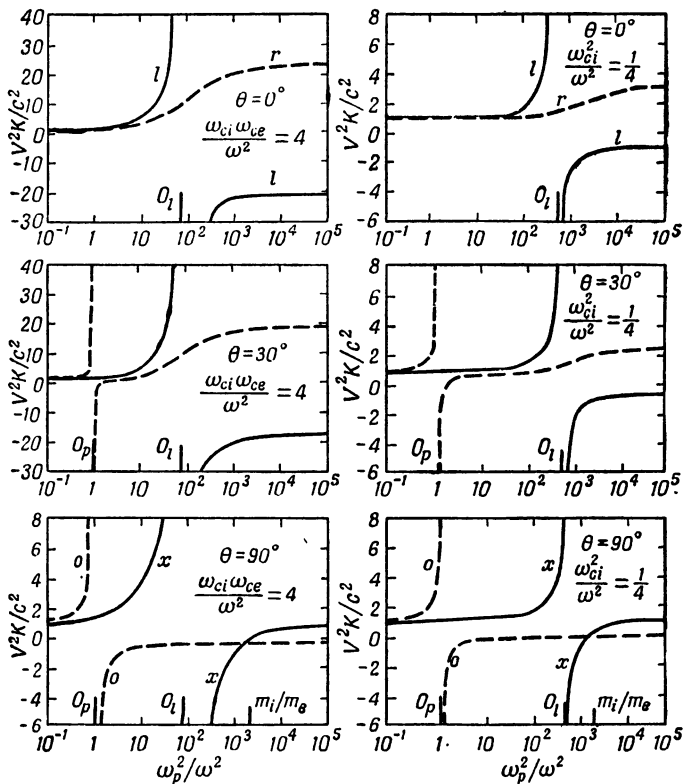


Фиг. 8. Фазовые скорости высокочастотных волн.

Изображена зависимость отношения V^2/c^2 от плотности плазмы для случаев $\omega = \omega_{ce}/2$ и $\omega = 2\omega_{ce}$. Вертикальные черточки в нижней части каждого графика указывают расположение различных критических точек.

отсекается также и при плотностях, больших, чем плотность, соответствующая правой критической точке O_r . При дальнейшем увеличении плотности распространение волны вновь становится возможным в ин-

тервале между плотностями, соответствующими верхнему гибриднему резонансу и левой критической точке.



Фиг. 9. Фазовые скорости низкочастотных волн.

Изображена зависимость отношения V^2 к квадрату скорости альфвеновской волны c^2/K от плотности плазмы для случаев $\omega = (\omega_{ce} \omega_{ci})^{1/2}/2$ и $\omega = 2\omega_{ci}$ соответственно. Вертикальные черточки в нижней части каждого графика указывают плазменное критическое значение (O_p) и левое критическое значение (O_l).

В последнем случае, когда значения частоты заключены между ω_{h2} и ω_{ol} , электрическое поле направлено

преимущественно по оси x , т. е. параллельно направлению распространения \mathbf{j} ; при стремлении к нулю отношения ω_c/ω эта волна превращается в чисто электростатическую волну. Таким образом, волны в этом интервале частот можно отождествлять с электронными волнами, которые, как мы уже видели, в результате отбрасывания члена ∇p_e в обобщенном законе Ома выделяются в совершенно независимый тип колебаний. Из двух нижних диаграмм фиг. 9 мы видим, что, в то время как поведение обыкновенной волны, распространяющейся поперек магнитного поля, не зависит от увеличения отношения ω_{ce}/ω и эта волна не распространяется при плотностях, больших, чем в точке O_p , необыкновенная волна, исчезающая при левой критической частоте, которой соответствует точка O_l , вновь появляется при достаточно больших плотностях при условии, что $\omega < \omega_{h1}$. При больших ω_{ci}/ω необыкновенная волна превращается в магнитозвуковую волну, рассмотренную в предыдущем параграфе.

б. Распространение параллельно В. Рассмотрим опять волну, распространяющуюся в направлении оси x , но будем теперь считать, что магнитное поле \mathbf{B} в невозмущенной плазме имеет лишь компоненту \mathbf{B}_x . В этом случае уравнение, связывающее E_x и j_x , не содержит других компонент и описывает обычные электронные колебания с плазменной частотой ω_p . Компоненты в направлении осей y и z образуют систему двух уравнений относительно j_y и j_z . Условие обращения в нуль определителя, составленного из коэффициентов этих уравнений, приводит к следующему дисперсионному уравнению:

$$\frac{c^2}{V^2} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 - \omega_{ce}\omega_{ci} \pm \omega(\omega_{ce} - \omega_{ci})}. \quad (3.44)$$

Знак плюс в уравнении (3.44) соответствует поляризованной по кругу волне, в которой электрический вектор вращается влево, причем считается, что маг-

нитное поле направлено в сторону возрастания x (т. е. \mathbf{j} и \mathbf{B} направлены одинаково). Именно в этом направлении происходит вращение положительных ионов в магнитном поле. Поэтому такая волна называется *левовращающей* и обозначается индексом l . Знак минус соответствует *правовращающей* волне, или r -волне.

Это уравнение, как и уравнение (3.34), при $\omega_{ce} = \omega_{ci} = 0$ сводится к формуле (3.7), а при очень малых ω дает соотношение (3.28) для альфвеновской волны. Если $V \ll c$, то уравнение (3.44) можно представить в виде

$$\frac{V^2}{V_A^2} = \left(1 \mp \frac{\omega}{\omega_{ci}}\right) \left(1 \pm \frac{\omega}{\omega_{ce}}\right), \quad (3.45)$$

где верхние и нижние знаки относятся к l - и r -волнам соответственно.

Из уравнения (3.44) очень легко получить резонансные частоты для этих волн. Они равны

$$\omega = \begin{cases} \omega_{ci} & \text{для } l\text{-волны,} \\ \omega_{ce} & \text{для } r\text{-волны.} \end{cases} \quad (3.46)$$

Физически очевидно, что резонанс должен возникать, когда частота и направление вращения электрического вектора совпадают с частотой и направлением вращения частиц. Эти циклотронные резонансы показаны штриховыми линиями на фиг. 6 и 7. Может возникнуть вопрос, почему необыкновенная волна, распространяющаяся перпендикулярно к \mathbf{B} , не проявляет резонансных свойств при $\omega = \omega_{ce}$, когда переменное электрическое поле перпендикулярно к \mathbf{B} . Вычисление E_x и E_y для этого случая показывает, что вектор \mathbf{E} поляризован по кругу в плоскости, перпендикулярной к \mathbf{B} , но вращается влево. Поэтому, электроны ускоряться не будут.

Полагая в уравнении (3.44) скорость V равной бесконечности, найдем критические частоты. Легко видеть, что для l -волны критическая частота равна ω_{ol} , а для r -волны она равна ω_{or} ; частоты ω_{ol} и ω_{or} определены выше соотношениями (3.40) и (3.41).

Именно по этой причине мы и назвали их сразу левой и правой критическими частотами.

Поведение r - и l -волн при различных условиях иллюстрируется верхними диаграммами на фиг. 8 и фиг. 9. При $\omega_{ce} < \omega$ дисперсионные кривые не сильно отличаются от дисперсионных кривых для обыкновенной волны, распространяющейся перпендикулярно к \mathbf{B} , за исключением того обстоятельства, что критические точки смещены по обе стороны от точки, соответствующей $\omega = \omega_p$, т. е. плазменной критической частоте. Однако если $\omega_{ce} > \omega$, то r -волна распространяется при любой величине отношения ω_p^2/ω^2 , как видно из верхних диаграмм фиг. 9 и правой верхней диаграммы фиг. 8. Аналогично l -волна распространяется при любых ω_p^2/ω^2 , если $\omega_{ci} > \omega$.

Очевидно, что и для l -, и для r -волн существуют полосы запираения, когда $\omega_c/\omega < 1$ и плотность достаточно велика. Однако при низкой плотности эти полосы запираения сводятся к узким интервалам частот, при которых ω_c/ω немного меньше единицы. Если скорость V_A является величиной порядка $c(m_i/m_e)^{1/2}$, что соответствует случаю $\omega_{ce}^2/\omega_p^2 > m_i/m_e$ и, следовательно, случаю сравнительно малых плотностей плазмы или больших магнитных полей, то критическая частота ω_{ol} лежит весьма близко к резонансной частоте ω_{ci} , что можно видеть из фиг. 7, и полоса запираения для l -волн фактически исчезает.

При больших плотностях и значениях частоты, заключенных между ω_{ce} и ω_{ci} , r -волна имеет интересную физическую интерпретацию. Если считать, что $\omega_p^2/\omega^2 \gg m_i/m_e$, то из уравнения (3.44) следует, что отношение квадратов скоростей V^2/c^2 равно при этом $\omega\omega_{ci}/\omega_p^2$, или $\omega B/4\pi n_e c$. Очевидно, что V не зависит в этом случае ни от массы электрона, ни от массы иона. Силовые линии являются спиральными и вращаются, перенося с собой электроны; пондеромоторная сила, действующая на вращающиеся электроны, уравновешивается непосредственно магнитными

натяжениями, связанными со спиральными силовыми линиями, а инерциальные силы являются несущественными.

в. Распространение в произвольном направлении. Когда $0 < \theta < \pi/2$, дисперсионное уравнение становится довольно сложным и здесь не будет рассматриваться. При высоких частотах, когда величиной ω_{ci}/ω можно пренебречь, соотношение, связывающее V и θ , хорошо известно из исследований по ионосфере (см. книги Митра [30] и Ратклиффа [33]). В более общем случае соответствующие уравнения были получены Астрёмом [5], а также Аллисом и др. [4]. Здесь мы приведем лишь некоторые из общих результатов.

Один весьма существенный результат состоит в том, что критические частоты не зависят от θ . К этому заключению можно прийти, представляя дисперсионное уравнение в виде квадратного уравнения относительно c^2/V^2 . Свободный член в этом квадратном уравнении оказывается не зависящим от θ , поэтому значения частоты ω , при которых этот член обращается в нуль и при которых, следовательно, один из корней V^2 обращается в бесконечность, также не зависят от θ .

Однако резонансные частоты зависят от угла θ . Угол θ , при котором скорость V становится равной нулю и который мы назовем *резонансным углом*, определяется формулой

$$\sin^2 \theta = \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_p^2}\right) \left[1 - \frac{\omega^2 (\omega^2 - \omega_{ce} \omega_{ci})}{(\omega^2 - \omega_{ce}^2)(\omega^2 - \omega_{ci}^2)}\right]^{-1}. \quad (3.47)$$

Кривая, соответствующая зависимости между ω_p^2/ω^2 и ω_{ce}^2/ω^2 , описываемой этим уравнением для произвольных значений θ , является промежуточной между кривыми при $\theta = 0^\circ$ и при $\theta = 90^\circ$. На фиг. 6 и 7 показаны резонансные кривые, соответствующие $\theta = 30^\circ$.

Изменение величины V^2/c^2 при $\theta = 30^\circ$ представлено на фиг. 8 и 9 для тех же значений параметров,

что и в случае двух других направлений распространения. Для дополнительной качественной информации о том, как изменяется фазовая скорость $V(\theta)$ в зависимости от направления распространения, в каждой области диаграмм Аллиса (см. фиг. 6 и 7) начерчены качественные полярные диаграммы величины $V(\theta)$. Для мнимых значений V диаграммы не вычерчиваются. Углу $\theta=0^\circ$ на диаграмме соответствует вертикальное направление, и относительно этого направления поверхность нормалей симметрична. Волны, распространяющиеся под углами 0° и 90° , отмечены буквами r , l , o и x . Чтобы указать масштаб скоростей, на фиг. 6 вычерчены штриховые окружности, соответствующие скорости света c . На фиг. 7 на некоторых полярных диаграммах $V(\theta)$ скорости существенно меньше c ; для таких диаграмм штриховые окружности не даны.

При пересечении критической линии возникает или исчезает целый вид колебаний, причем при приближении к этой линии с одной из сторон V стремится к бесконечности. При пересечении резонансной линии обращается в нуль скорость волны, распространяющейся в соответствующем направлении, так что при переходе от резонансной линии для $\theta=0^\circ$ к резонансной линии $\theta=90^\circ$ пропадает целый вид колебаний из-за постепенного увеличения резонансного угла.

Если r - и x -волны лежат на одной и той же поверхности нормалей, как в левом нижнем углу на фиг. 6, то говорят, что эти волны находятся в соответствии. Из рассмотрения фиг. 6 и 7 видно, что при переходе через критическую плазменную линию вместо соответствий между r - и x -волнами и l - и o -волнами появляются соответствия между r и o -волнами и l - и x -волнами. Противоположными становятся соответствия и при пересечении линии, на которой $\omega^2 = \omega_{ci}^2 + \omega_p^2 m_e/m_i$ и которой на двух нижних графиках фиг. 9 соответствуют места пересечений кривых, относящихся к o - и x -волнам.

О распространении r - и l -волн при больших плот-

ностях, если ω меньше соответствующей циклотронной частоты ω_c , уже говорилось выше. Изменение хода резонансной линии для r -волн в зависимости от θ , представленное в правой нижней части фиг. 7, показывает, что при значениях ω , несколько меньших, чем ω_{ce} , такое распространение оказывается возможным лишь в сравнительно узком конусе, расширяющемся, когда ω становится значительно меньше ω_{ce} . Из уравнения (3.47) видно, что при больших ω_p^2/ω^2 резонансный угол увеличивается до 30° для $\omega_{ce}^2/\omega^2 = 4/3$. Этот вид колебаний наблюдался среди волн вдоль земного магнитного поля на расстоянии порядка нескольких радиусов Земли (так называемые *свистящие атмосферерики*).

Когда ω становится меньше ω_{ci} , резонансный конус для l - или o -волн также расширяется, но значительно более быстро. Как можно видеть из уравнения (3.47), при больших ω_p^2/ω^2 резонансный угол θ увеличивается до 30° при возрастании ω_{ci}^2/ω^2 от 1 до $1 + m_e/3m_i \approx 1,00018$. В случае, когда $\omega_p/\omega > \sec \theta$, резонансная линия для произвольного угла θ сливается с резонансной линией для $\theta = 0^\circ$, что иллюстрируется в верхней части фиг. 7 штриховой линией, соответствующей $\theta = 30^\circ$. Скорость этих левовращающих волн изменяется приблизительно как $\sin \theta$, как мы уже видели на фиг. 5. Этот вид колебаний плазмы при частотах, несколько меньших циклотронной частоты ионов, был назван ионной циклотронной волной. Волны такого типа для частного случая аксиальной симметрии были подробно исследованы Стиксом [35].

§ 5. Затухание и возбуждение волн

В предыдущих параграфах этой главы рассматривалась идеализованная среда, в которой различного типа волны бесконечно малой амплитуды могут распространяться неопределенно долго, не теряя своей энергии. В обычной жидкости затухание волн происхо-

дит в результате столкновений, тогда как возбуждение волн вызывается возмущениями на границе. Аналогичные процессы, конечно, могут иметь место и в плазме. Такие факторы, как вязкость, электрическое сопротивление и теплопроводность, могут привести в ионизованном газе к превращению энергии волны в тепловую энергию. Возбуждение волн на границе плазмы также возможно. Эти процессы являются простыми и хорошо известными. Здесь мы рассмотрим другие процессы, происходящие внутри плазмы в отсутствие столкновений. Как мы увидим ниже, в результате взаимодействия между волной и частицами, движущимися в газе, энергия волны может уменьшаться или, если распределение скоростей не является максвелловским, может происходить усиление волны. Процессы, приводящие к экспоненциальному росту амплитуды волны в «немаксвелловской» плазме, часто называются *микроскопическими неустойчивостями*, поскольку их изучение основано на микроскопическом описании газа. Детальное рассмотрение этих процессов требует систематического использования уравнения Больцмана, что выходит за рамки настоящей книги. Некоторые из этих проблем подробно изложены в недавно вышедшей книге Стикса [37]. Здесь мы только обсудим основные физические принципы, лежащие в основе трех наиболее важных механизмов затухания и возбуждения волн.

а. Затухание Ландау. В рамках линеаризованной теории Ландау [27] показал, что в плазме с максвелловским распределением скоростей частиц продольная волна затухает благодаря взаимодействию с частицами, скорость которых близка к фазовой скорости волны. Когда фазовая скорость V волны значительно превосходит среднеквадратичную скорость частиц, это затухание происходит медленно и связано с ускорением частиц, движущихся менее быстро, чем волна. Движение частиц, скорость которых превышает V , замедляется, но поскольку производная функции на-

чального распределения скоростей, т. е. величина $df^{(0)}/d\omega$, отрицательна при $\omega = V$, результирующим эффектом будет затухание волны. Амплитуда этой волны будет уменьшаться по закону $\exp(-\sigma t)$.

Динамику этого процесса исследовал Даусон [14], рассмотревший траектории отдельных частиц. Предположим, что волна возникает в момент времени $t=0$, когда частицы имеют максвелловское распределение по скоростям. Сначала все частицы будут обмениваться энергией с волной. Однако по прошествии некоторого времени частицы, у которых начальная скорость u относительно волны является достаточно большой, достигнут состояния, в котором они попеременно будут то отнимать энергию у волны, то отдавать ее обратно по мере прохождения через гребни и впадины волны. Частицам же с меньшей абсолютной величиной скорости u требуется больше времени, чтобы достигнуть этого состояния, и с течением времени частицы с меньшими значениями u^2 будут накапливать энергию все больше и больше. Если электрическое поле достаточно велико, то такое последовательное ускорение все более медленных частиц в конце концов прекратится из-за явления захвата частиц, на котором мы остановимся более подробно.

В системе отсчета, движущейся со скоростью продольной волны V , электрический потенциал не будет зависеть от времени; полагая временно $\sigma = 0$, можно написать

$$U = U_0 \cos \kappa x. \quad (3.48)$$

Частица, имеющая в этой системе отсчета скорость u в направлении оси x и координату x , захватывается в потенциальную яму, если выполняется неравенство

$$\frac{1}{2} mu^2 + \frac{ZeU_0}{c} \cos \kappa x < \left| \frac{ZeU_0}{c} \right|. \quad (3.49)$$

Когда такая захваченная частица отражается от потенциального барьера, ее энергия в системе отсчета, связанной с волной, не изменяется, но в лабораторной системе отсчета кинетическая энергия частицы

изменяется при этом на величину $2mVu$. Если сравнить в лабораторной системе отсчета начальную энергию со средней энергией за большой промежуток времени, в течение которого частица испытывает многократные отражения вперед и назад по отношению к волне, то избыток энергии, отдаваемый захваченной частицей, будет равен mVu . Эта энергия будет отдана волне всеми частицами, скорость u и координата x которых удовлетворяют неравенству (3.49). Если обозначить через u_m среднеквадратичную величину максимального значения u , при котором захват еще возможен, то, заменяя знак неравенства на знак равенства и усредняя по всем значениям x , получаем

$$u_m^2 = \left| \frac{2ZeU_0}{mc} \right|. \quad (3.50)$$

Частицы, для которых $u \ll u_m$ и которые находятся у «дна» потенциальной ямы, будут совершать простые гармонические колебания в таких ямах. Частоту колебаний захваченных частиц, которую мы обозначим через ω_t , нетрудно найти с помощью формулы (3.48) в предположении малости κx . Мы получим

$$\omega_t = \kappa \left| \frac{ZeU_0}{mc} \right|^{1/2}. \quad (3.51)$$

Промежуток времени, который требуется, чтобы частицы соответствующих энергий оказались захваченными, равен по порядку величины $1/\omega_t$. Очевидно, что при условии $\sigma/\omega_t \ll 1$ (σ — коэффициент затухания амплитуды U_0) потенциал U_0 будет оставаться почти постоянным в течение времени затухания, и захват частиц действительно произойдет. Однако если отношение σ/ω_t велико, то затухание U_0 за время $1/\omega_t$ будет большим и амплитуда волны уменьшится настолько быстро, что фактически захвата частиц не произойдет.

Эти заключения имеют прямое отношение к явлению затухания Ландау. Рассмотрим сначала случай, когда величина σ/ω_t мала и захват частиц возможен.

В этом случае переход энергии от волны к частицам малых скоростей u должен прекратиться, когда $t \gg 1/\omega_t$. Как только захват частиц произойдет, волна не сможет больше ускорять частицы и будет распространяться, сохраняя величину своей амплитуды.

Величину затухания Ландау можно приближенно вычислить, исходя из того условия, что энергия, теряемая волной за время захвата, равна энергии, приобретаемой захваченными частицами. Следуя Джексо-ну [25], мы можем вычислить полную энергию W , приобретаемую захваченными частицами, следующим образом:

$$W = - \int_{-u_m}^{+u_m} n f^{(0)}(w) dw \cdot m V u = - n m V u_m^3 \cdot \frac{2}{3} \frac{df^{(0)}(V)}{dw} \quad (3.52)$$

где по-прежнему $u = w - V$, а $m V u$ — энергия, приобретаемая каждой частицей в результате ее захвата. Здесь мы считаем, что функция $f^{(0)}(w)$ нормирована на единицу в пространстве скоростей. Усредняя результаты по координатному пространству, можно заменить u_m^3 средней величиной, определяемой уравнением (3.50). Время передачи энергии W от волны к частицам равно приблизительно $1/\omega_t$, и, следовательно, величина средней передаваемой мощности за этот промежуток времени есть $W\omega_t$. Если разделить эту мощность на $\kappa^2 U_0^2 / 8\pi c^2$, т. е. на плотность потенциальной и кинетической энергии волны, то частное будет равно 2σ , где σ — коэффициент затухания амплитуды. В случае, когда электроны в плазме взаимодействуют с электронной волной, $Z = -1$, $V = \omega_p / \kappa$, и мы получаем

$$\sigma = b \frac{\omega_p}{(\kappa h)^3} e^{-0,5/(\kappa h)^2}, \quad (3.53)$$

где дебаевский радиус h и плазменная частота ω_p определяются формулами (2.3) и (3.8) соответственно. На основании приближенного рассмотрения,

проведенного выше, константа b численно равна $\frac{4}{3}\sqrt{\pi}$; Ландау [27] получил выражение (3.53), в котором $b = \sqrt{(\pi/8)}$. Таким образом, когда величина σ/ω_t мала, энергия, теряемая волной из-за затухания Ландау в течение времени, равного $1/\omega_t$, сообщается главным образом захваченным частицам; по истечении времени $1/\omega_t$ затухание Ландау в бесстолкновительном газе прекращается.

В противоположном случае больших значений σ/ω_t захватывание частиц незначительно. Формула (3.53) остается справедливой, но коэффициент затухания в этом случае не зависит от времени. Как видно из выражения (3.51), отношение σ/ω_t будет большим для волн достаточно малой амплитуды.

Следует отметить, что эти результаты могут измениться, если в момент, когда волна начинает распространяться, будут другие начальные условия. В частности, если предположить, что $f(V+u) = f(V-u)$ для достаточно большого интервала значений u , то затухания Ландау не будет даже для волн бесконечно малой амплитуды, и в отсутствие столкновений становится возможным распространение стационарной волны любой амплитуды [8].

Надо отметить, что все эти результаты справедливы, если выполняется условие

$$(\chi h)^2 = \frac{kT}{mV^2} \ll 1. \quad (3.54)$$

Когда это условие нарушается, то фазовая скорость оказывается меньше или порядка тепловой скорости частиц, затухание становится сильным, и сделанные выше предположения перестают быть справедливыми. Длина волны в этом случае будет меньше или порядка дебаевского радиуса, и формулы для затухания, полученные Ландау, принимают вид, совершенно отличный от выражения (3.53); коэффициент затухания σ равняется теперь

$$\sigma \approx \chi \left(\frac{kT}{m} \right)^{1/2}. \quad (3.55)$$

Физический процесс, протекающий в этом случае, совершенно отличен от рассмотренного выше. При длинах волн, малых по сравнению с дебаевским радиусом h , дальнедействующие силы оказываются недостаточными для обеспечения коллективного характера движения частиц. Частицы движутся прямолинейно, почти не отклоняясь под действием электростатических сил, и любые макроскопические флуктуации плотности рассеиваются за время, в течение которого частицы благодаря тепловому движению проходят расстояние, равное длине волны.

б. Циклотронное затухание. В условиях, когда некоторые частицы подвержены воздействию переменной возмущающей силы, частота которой совпадает с их циклотронной частотой, возникает мощный механизм затухания. Это легко может произойти, например, если волна, электрический вектор которой перпендикулярен к \mathbf{B} , распространяется в направлении, не перпендикулярном к магнитному полю \mathbf{B} . Тогда по отношению к частицам, движущимся вдоль \mathbf{B} , частота переменного электрического поля изменится вследствие эффекта Доплера и при некотором значении скорости частиц будет близка к циклотронной частоте.

Вычислим длину затухания d , соответствующую циклотронному механизму затухания, в простом идеализированном случае. Допустим, что в направлении оси z параллельно магнитному полю распространяется с фазовой скоростью V поляризованная по кругу волна. Предположим также, что частицы, движущиеся со скоростью w_{\parallel} в направлении магнитного поля, имеют в плоскости $z=0$ максвелловское распределение скоростей. Вычислим энергию, которая поглощается частицами, движущимися вдоль силовых линий, предполагая, что затухание мало и может не учитываться в предварительном анализе ускорений частиц. Для положительно заряженных частиц нужно рассматривать левовращающую волну (если направление

распространения волны совпадает с направлением \mathbf{B}), так что электрическое поле тогда имеет вид

$$\begin{aligned} E_x &= E_0 \cos(\kappa z - \omega t), \\ E_y &= E_0 \sin(\kappa z - \omega t). \end{aligned} \quad (3.56)$$

Фазовая скорость ω/κ такой волны дается формулой (3.44). Электрическое поле не изменяет скорость частицы w_{\parallel} в направлении оси z . Обозначим через Δw_{\perp} приращение поперечной скорости за время t после прохождения плоскости $z=0$. Если начальное распределение поперечных скоростей является изотропным (т. е. если фазы вращения частиц вокруг силовых линий магнитного поля распределены при $z=0$ случайным образом, то, подставив выражения (3.56) в уравнение движения (1.1), нетрудно получить

$$\frac{m}{2} \Delta w_{\perp}^2 = \frac{2Z^2 e^2 E_0^2}{mc^2} \frac{\sin^2[(\kappa w_{\parallel} + \omega_c - \omega)t/2]}{(\kappa w_{\parallel} + \omega_c - \omega)^2}. \quad (3.57)$$

Так как $t = z/w_{\parallel}$, то уравнение (3.57) описывает приращение энергии группы частиц как функцию координаты z вдоль магнитного поля. Уменьшение потока энергии волны с увеличением z должно в точности равняться увеличению потока энергии, переносимой всеми частицами. Чтобы вычислить это увеличение потока энергии, умножим уравнение (3.57) на $w_{\parallel} n(w_{\parallel}) dw_{\parallel}$, т. е. на плотность потока частиц, скорость которых вдоль магнитного поля заключена в интервале от w_{\parallel} до $w_{\parallel} + dw_{\parallel}$, и проинтегрируем по w_{\parallel} от нуля до бесконечности. Поскольку начальное распределение скоростей предполагается максвелловским, а w_{\parallel} не зависит от времени, то $n(w_{\parallel})$ является обычной максвелловской функцией распределения. При больших значениях z подынтегральное выражение имеет острый максимум при $w_{\parallel} = \omega_r$, где ω_r — резонансная скорость, определяемая равенством

$$\omega_r = \frac{\omega - \omega_c}{\kappa}. \quad (3.58)$$

Поэтому мы можем вычислить величину $\omega_{\parallel} n(\omega_{\parallel})$ при $\omega_{\parallel} = \omega_r$; проинтегрировав затем оставшееся выражение, получим результат, пропорциональный z . Увеличение плотности потока энергии частиц на единице пути может быть затем приравнено соответствующему уменьшению плотности потока электромагнитной энергии $E_0^2/4\pi V$, т. е. уменьшению вектора Пойтинга. Для длины затухания d , определяемой уравнением (3.5), мы после некоторых алгебраических преобразований получим выражение

$$d = \frac{2}{\pi} \left(\frac{c}{V} \right)^2 \frac{\omega \omega_r}{\omega_{pr}^2}, \quad (3.59)$$

в котором величина $(c/V)^2$ дается формулой (3.44), а

$$\omega_{pr}^2(\omega_r) = \frac{4\pi \omega_r n(\omega_r) e^2}{m}. \quad (3.60)$$

Очевидно, что выражение для частоты ω_{pr} аналогично выражению для плазменной частоты, в котором, однако, плотность частиц n и масса электрона m_e заменены величиной $\omega_r n(\omega_r)$ и массой рассматриваемой частицы соответственно. В случае электронного циклотронного затухания в формулы (3.58) и (3.60) входят соответственно величины ω_{ce} и m_e , а в выражениях (3.56) E_y следует брать с противоположным знаком, чтобы получить правовращающую волну. С помощью этих формул нетрудно показать, что энергия волны переходит вследствие циклотронного затухания в энергию частиц на сравнительно малых расстояниях.

При получении выражения (3.59) изменение E_0 в результате затухания не учитывалось и амплитуда волны считалась бесконечно малой. Учет первого приближения не изменяет результатов, так как если считать, что амплитуда E_0 пропорциональна $\exp(-z/d)$, то при условии малости длины волны по сравнению с d вновь получается формула (3.59). Эффекты, связанные с конечностью амплитуды, были рассмотрены

Стиксом [37]; как и в случае затухания Ландау, циклотронное затухание для волн достаточно большой амплитуды является из-за захвата частиц процессом, ограниченным во времени.

в. Возбуждение волн, двухпучковая неустойчивость. Рассмотренные выше два механизма затухания связаны с превращением энергии волны в хаотическую кинетическую энергию при условии, что начальное распределение скоростей частиц близко к максвелловскому. Если же начальное распределение скоростей достаточно сильно отличается от максвелловского, то может возникнуть обратный процесс и будет происходить усиление волны. В образовании этого эффекта могут совместно участвовать несколько различных механизмов.

Простейшим усилительным процессом является процесс, обратный затуханию Ландау и происходящий вследствие захвата частиц, которые движутся с фазовой скоростью волны. Из приведенного выше анализа [см. уравнение (3.52)] ясно, что если производная $df^0(V)/dv$ положительна, а не отрицательна, то в результате захвата частиц волна будет получать, а не терять энергию.

Если плазму пронизывают один или несколько пучков электронов, то может возникнуть более эффективный вид усиления. В этом случае продольные электронные волны могут стать неустойчивыми и их амплитуда будет быстро нарастать.

Физический механизм, приводящий к неустойчивости, состоит в том, что электронный пучок, обгоняя продольную волну, амплитуда которой экспоненциально растет, замедляет свое движение относительно волны. Рассмотрим этот процесс в системе отсчета, относительно которой волна покоится. Если амплитуда волны экспоненциально возрастает, то компоненту E_x можно записать в виде

$$E_x = Ae^{\sigma t} \sin \kappa x. \quad (3.61)$$

Линеаризованное уравнение движения пучка электронов можно представить в виде

$$\frac{\partial u^{(1)}}{\partial t} + u \frac{\partial u^{(1)}}{\partial x} = -\frac{eE_x}{mc}, \quad (3.62)$$

где u — начальная скорость пучка и $u^{(1)}$ — линейная поправка к скорости (или возмущение скорости). Соответствующее уравнение для возмущения плотности электронов $n^{(1)}$ имеет вид

$$\frac{\partial n^{(1)}}{\partial t} + u \frac{\partial n^{(1)}}{\partial x} + n \frac{\partial u^{(1)}}{\partial x} = 0. \quad (3.63)$$

Здесь n — невозмущенная плотность. Решая эти уравнения относительно $n^{(1)}$, получаем, что возмущение $n^{(1)}$ содержит член, пропорциональный σ и изменяющийся как $\sin kx$, т. е. в фазе с E_x . Вследствие этого среднее значение произведения $n^{(1)} E_x$ отлично от нуля и приводит к замедлению пучка, пропорциональному A^2 . Энергия, теряемая в результате торможения пучка, идет на увеличение энергии волны. В противоположном случае, когда амплитуда волны уменьшается, происходит увеличение скорости пучка относительно волны. Если величина σ чисто мнимая, то $n^{(1)}$ и E_x будут сдвинуты по фазе на $\pi/2$, и полное изменение энергии пучка при прохождении расстояния, равного длине волны, будет равно нулю.

Чтобы вывести точно условия, при которых становится возможным усиление волны, нужно рассматривать по меньшей мере два сорта частиц. Обозначим через n_j , $Z_j e/c$, m_j и u_j соответственно плотности, заряды, массы и скорости частиц сорта j . При этом для каждого сорта частиц скорость $u_j^{(1)}$ и плотность $n_j^{(1)}$ удовлетворяют соответственно уравнениям (3.62) и (3.63). Для нахождения E_x можно использовать уравнение (3.2), в котором плотность тока j_x определяется линеаризованным соотношением вида

$$j_x = \sum_j \frac{Z_j e}{c} (n_j^{(1)} u_j + n_j u_j^{(1)}). \quad (3.64)$$

Считая теперь все величины пропорциональными $\exp[i(\kappa x - \omega t)]$ и рассматривая систему уравнений (3.2), (3.62), (3.63), мы получим окончательно следующее дисперсионное уравнение:

$$\sum_j \frac{\omega_{pj}^2}{(\omega - \kappa u_j)^2} = 1, \quad (3.65)$$

где ω_{pj}^2 дается известной формулой (3.8), в которую подставлены соответствующие значения n_j , Z_j и m_j для j -го сорта частиц. Уравнение (3.65) впервые было получено Хаэффом [19, 20] и Пирсом [32]. Обзор относящихся к этому вопросу работ дан в статье [9].

В том простом случае, когда имеются два пучка электронов одинаковой плотности с равными по величине и противоположными по направлению скоростями $\pm u/2$, уравнение (3.65) переходит в квадратное уравнение относительно ω^2 , решение которого [26] имеет вид

$$\omega^2 = \omega_p^2 + \frac{\kappa^2 u^2}{4} \pm (\omega_p^4 + \omega_p^2 \kappa^2 u^2)^{1/2}. \quad (3.66)$$

Частота ω_p — это плазменная частота каждого из пучков в отдельности. Нетрудно видеть, что одно из решений ω^2 является отрицательным при

$$\kappa u < 2^{3/2} \omega_p. \quad (3.67)$$

Если каждый пучок проходит расстояние, равное длине волны возмущения, за время, гораздо меньшее, чем $1/\omega_p$, то это возмущение будет устойчивым. Волны с мнимой частотой ω являются стоячими волнами, которые экспоненциально нарастают или затухают; в системе отсчета, связанной с одним из пучков, частота этих волн равна $\kappa u/2$. Если $\kappa u/\omega_p$ мало, то инкремент нарастания описывается формулой

$$\sigma \equiv i\omega \approx \pm \frac{\kappa u}{2}. \quad (3.68)$$

Такие длинные волны, которые по отношению к пучкам частиц имеют очень низкую частоту, в отсутствие

пучков не имеет себе аналога; возрастание (или уменьшение) амплитуды этих волн происходит медленно.

При $\kappa u/\omega_p = 3^{1/2}$ инкремент нарастания становится максимальным и равен $\sigma = \omega_p/2$. При этом в системе отсчета, связанной с одним из пучков, наблюдаемая частота равна $0,86 \omega_p$. Очевидно, что в этом случае нарастание амплитуды волны происходит очень быстро. Вообще двухпучковая неустойчивость развивается весьма быстро, если в системе отсчета, в которой пучок покоится, частота сравнительно близка к плазменной частоте пучка. В этом случае обусловленное волной группирование частиц в пучке приводит к тому, что энергия волны увеличивается наибоыстрейшим образом.

Рассмотрение двух пучков в общем случае, когда плотности и массы частиц различаются, более сложно. Однако области неустойчивости и максимальные инкременты нарастания могут быть и здесь получены в аналитическом виде [9]. Введем индексы 1 и 2 таким образом, чтобы выполнялось неравенство $\omega_{p1}^2 > \omega_{p2}^2$, и обозначим отношение $\omega_{p2}^2/\omega_{p1}^2$ буквой ζ . Нам будет удобнее рассматривать волну в системе отсчета, связанной с первым пучком, плазменная частота которого больше. Пусть u , по-прежнему, обозначает относительную скорость двух пучков. Отношение ω/ω_{p1} является теперь функцией двух параметров: ζ и κu . Неустойчивость возникает при

$$\frac{\kappa u}{\omega_{p1}} < (1 + \zeta^{1/3})^{3/2}. \quad (3.69)$$

При $\zeta=1$ это неравенство совпадает с неравенством (3.67). Инкремент нарастания достигает максимума при значении $\kappa u/\omega_{p1}$, лежащем между единицей и верхним пределом, даваемым неравенством (3.69). При малых ζ это максимальное значение σ определяется формулой

$$\frac{\sigma}{\omega_{p1}} = \frac{3^{1/2}}{2} \left(\frac{\zeta}{2} \right)^{1/3}, \quad (3.70)$$

которая была получена Бунеманом [11]. Таким образом, если пучок электронов с плотностью n_2 движется в плазме, плотность электронов в которой равна n_1 , то максимальный инкремент нарастания является величиной порядка $0,7(n_2/n_1)^{1/3}\omega_{p1}$. Действительная часть частоты ω оказывается несколько меньшей, чем κu , в соответствии с физическим условием, состоящим в том, что скорость пучка u должна превосходить фазовую скорость волны ω/κ .

Пусть теперь электроны и ионы, образуя в целом нейтральную систему, движутся друг относительно друга со скоростью u . В этом случае $\zeta = Zm_e/m_i$ и для электронно-протонного газа максимальное значение σ равно $0,056 \omega_p$; такой инкремент нарастания соответствует волнам, волновые числа которых приблизительно равны ω_p/u . В соответствии с правилом, введенным выше, волна рассматривается в системе отсчета, связанной с электронами. В системе отсчета, связанной с ионами, частота отличается на величину κu . Действительная часть частоты ω , измеренной в этой системе, оказывается не большей чем σ , т. е. мала по сравнению с ω_p . Таким образом ионы будут колебаться, но из-за их большей массы как частота колебаний, так и инкремент нарастания будут меньше.

Учет теплового разброса скоростей частиц делает анализ более громоздким. Неустойчивости, возникающие в результате общего движения ионов относительно электронов со скоростью u , рассматривались недавно различными авторами [11, 24] в предположении, что как электроны, так и ионы имеют свое максвелловское распределение скоростей. Чтобы возникла неустойчивость, скорость u не только должна быть ограничена верхним критическим значением, как в неравенстве (3.69), но должна также быть ограничена снизу. Если температура электронов T_e равна температуре ионов T_i , то нижнее критическое значение приблизительно совпадает с тепловой скоростью электронов. При $T_i/T_e < 0,1$ критическое значение примерно равно скорости акустической или ионной волны;

согласно равенству (3.21), эта скорость в $(m_i/m_e)^{1/2}$ раз меньше тепловой скорости электронов.

Если предполагается, что магнитное поле остается невозмущенным, то может происходить также усиление поперечных электромагнитных волн. Впервые этот вопрос был подробно исследован Бейли [7]. Бернштейн и Трихан [9] рассмотрели дисперсионные уравнения для нескольких простых случаев. Как и в случае продольных волн, при выполнении целого ряда условий может происходить сравнительно быстрое усиление волны.

В присутствии магнитного поля в плазме могут существовать и другие механизмы возбуждения волн. Как показано в следующей главе, некоторые типы магнитогидродинамических возмущений могут приводить к неустойчивости плазмы, если давление в достаточной степени анизотропно. Сагдеев и Шафранов [34] показали, что даже при незначительном различии давлений p_{\perp} и p_{\parallel} будет происходить медленное усиление электромагнитных волн. Эта неустойчивость создается частицами, движущимися вдоль силовых линий с резонансной скоростью ω_r , определяемой соотношением (3.58); по отношению к этим частицам частота волны претерпевает доплеровское смещение и становится равной циклотронной частоте. Аналогичного рода неустойчивость, возникающая в случае «квазипродольных» волн при частоте, близкой к ω_c , была изучена Харрисом [21].

ЛИТЕРАТУРА

1. Alexeff I., Neidigh R. V., Phys. Rev. Lett., 7, 223 (1961).
2. Alfvén H., Ark. Mat., Astr. Fysik, 29B, № 2 (1942).
3. Alfvén H., Cosmical Electrodynamics, Ch. IV, Oxford, 1950. (Имеется перевод: Х. Альфвен, Космическая электродинамика, ИЛ, 1952, гл. 4.)
4. Allis W. P., Buchsbaum S. J., Bers A., Wave in Anisotropic Plasmas, Massachusetts, 1963.
5. Aström E., Ark. Fys., 2, 443 (1950).

6. Auer P. L., Hurwitz H., Miller R. D., Phys. Fluids, **1**, 501 (1958).
7. Bailey V. A., Australian Journ. Sci. and Industr. Res., **1**, 351 (1948).
8. Bernstein I. B., Greene J. M., Kruskal M. D., Phys. Rev., **108**, 546 (1957). (Имеется перевод в сборнике: «Колебания сверхвысоких частот в плазме», ИЛ, 1961, стр. 278.)
9. Bernstein I. B., Trehan S. K., Nucl. Fusion, **1**, 3 (1960).
10. Bohm D., Gross E. P., Phys. Rev., **75**, 1851 (1949); 1864 (1949). (Имеется перевод в сборнике: «Проблемы современной физики», № 11, ИЛ, стр. 7, 30.)
11. Buneman O., Phys. Rev., **115**, 503 (1959).
12. Clemmow P. C., Mullaly R. F., The Physics of the Ionosphere, Physical Society, London, 1955, p. 340.
13. Cowling T. G., Magnetohydrodynamics, Interscience, New York, 1957. (Имеется перевод: Т. Каулинг, Магнитная гидродинамика, ИЛ, 1959.)
14. Dawson J., Phys. Fluids, **4**, 869 (1961).
15. Ferraro V. C. A., Proc. Roy. Soc., **A233**, 310 (1955). (Имеется перевод в сборнике: «Проблемы современной физики» № 7, ИЛ, 1957, стр. 26.)
16. Field G. B., Astrophys. Journ., **124**, 555 (1956).
17. Fried B. D., Gould R. W., Phys. Fluids, **4**, 139 (1961).
18. Gabor L., Brit. Journ. Appl. Phys., **2**, 209 (1951).
19. Haeff A. V., Phys. Rev., **74**, 1532 (1948).
20. Haeff A. V., Proc. Inst. Radio Eng., **37**, 4 (1949).
21. Harris E. G., Journ. Nucl. Ener., Part C, Plasma Phys., **2**, 138 (1961).
22. Herlofson N., Nature, **165**, 1020 (1950).
23. Hernqvist K. G., Journ. Appl. Phys., **26**, 1029 (1955).
24. Jackson E. A., Phys. Fluids, **3**, 786 (1960).
25. Jackson J. D., Journ. Nucl. Ener., Part C, Plasma Phys., **1**, 171 (1960).
26. Kahn F. D., Journ. Fluid Mech., **2**, 601 (1957).
27. Ландау Л. Д., ЖЭТФ, **16**, 574 (1946).
28. Looney D. H., Brown S. C., Phys. Rev., **93**, 965 (1954). (Имеется перевод в сборнике: «Проблемы современной физики». № 2, ИЛ, 1956, стр. 176.)

29. Lundquist S., Ark. Fys., 5, 297 (1952). (Имеется перевод в сборнике: «Проблемы современной физики», № 2, ИЛ, 1954 стр. 7.)
30. Mitra S. K., The Upper Atmosphere, Royal Asiatic Society of Bengal, 1947, p. 143. (Имеется перевод: С. К. Митра, Верхняя атмосфера, ИЛ, 1955.)
31. Penning F. M., Physica, 6, 241 (1926).
32. Pierce J. R., Journ. Appl. Phys., 19, 231 (1948).
33. Ratcliffe J. A., The Magneto-Ionic Theory and its Application to the Ionosphere, Cambridge, 1959. (Имеется перевод: Дж. А. Ратклифф, Магнитно-ионная теория и ее приложения к ионосфере, ИЛ, 1962.)
34. Сагдеев Р. З., Шафранов В. Д., ЖЭТФ, 39, 181 (1960).
35. Stix T., Phys. Rev., 106, 1146 (1957).
36. Stix T., Phys. Fluids, 3, 19 (1960).
37. Stix T., Theory of Plasma Waves, New York, 1962.
38. Tidman D. A., Phys. Rev., 117, 366 (1960).
39. Tonks L., Langmuir I., Phys. Rev., 33, 195 (1929).
40. van de Hulst H. C., Problems of Cosmical Aerodynamics, Central Air Documents Office, Dayton, Ohio, 1951, Ch. VI. (Имеется перевод в сборнике: «Проблемы космической аэродинамики», 1953, гл. 6.)

РАВНОВЕСИЕ И УСТОЙЧИВОСТЬ

Плазма считается находящейся в состоянии равновесия, если характеризующие ее макроскопические величины не изменяются во времени. В лабораторных и астрофизических исследованиях особый интерес представляет так называемая *удерживаемая* плазма, т. е. плазма, находящаяся в равновесии в конечной области пространства, окруженной магнитным полем. Предполагается, что при осуществлении управляемой термоядерной реакции будет использована удерживаемая плазма. Поэтому в последние годы ее изучению уделялось много внимания, причем было рассмотрено большое количество различных конфигураций магнитного поля.

Возможность осуществления состояния равновесия, его основные свойства и степень устойчивости можно исследовать с помощью макроскопических уравнений, приведенных в гл. 2. При этом нет необходимости привлекать более сильный, но значительно более сложный метод исследования, опирающийся на уравнение Больцмана и функцию распределения по скоростям. Мы рассмотрим здесь равновесие плазмы сравнительно простой геометрии и кратко обсудим проблемы устойчивости, обратив внимание на типы неустойчивостей, которые могут возникнуть в ионизованном газе. В § 1 обсуждаются основные закономерности устойчивого равновесия, а в последующих параграфах рассматривается применение этих общих результатов к различным конфигурациям плазмы.

§ 1. Основные условия устойчивого равновесия

Для того чтобы система длительное время находилась в определенном состоянии, должны выполняться два условия: а) система должна быть в равновесии, б) это равновесие должно быть устойчивым. Полностью ионизованный газ находится в равновесии, если удовлетворяются уравнения (2.11) — (2.19), в которых производные по времени равны нулю. Это состояние равновесия устойчиво, если бесконечно малое возмущение любого вида приводит к затухающим колебаниям около положения равновесия, и неустойчиво, если возмущения одного или нескольких видов экспоненциально нарастают. Рассмотрим более подробно каждое из этих условий.

Исследовать состояние равновесия просто. Если пренебречь членами порядка m_e/m_i , то останутся лишь уравнения (2.20) и (2.21). Удерживаемая плазма может находиться в равновесии только при отсутствии сопротивления η . В качестве альтернативы можно рассматривать такое состояние равновесия, в котором происходит медленная диффузия плазмы наружу вследствие отличного от нуля сопротивления, причем плотность поддерживается постоянной за счет некоторого источника частиц. Пренебрежем членом $\eta \mathbf{j}$ в уравнении (2.21). Тогда оно свяжет величины \mathbf{E} и \mathbf{v} . Заметим, что ρ , \mathbf{j} и \mathbf{B} нельзя получить из этого уравнения.

Основным уравнением состояния равновесия является (2.20). Пренебрегая гравитационным потенциалом ϕ , получаем

$$\nabla p = \mathbf{j} \times \mathbf{B} = \frac{1}{4\pi} (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B} - \frac{1}{8\pi} \nabla B^2. \quad (4.1)$$

Здесь мы исключили \mathbf{j} с помощью уравнения (2.19), положив величину $\partial \mathbf{E} / \partial t$ равной нулю. Уравнение (4.1) иногда называют *уравнением магнитной гидростатики*. Член $(1/4\pi) (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B}$ в правой части уравнения

(4.1) представляет собой натяжение, обусловленное продольной упругостью силовых линий; когда эти линии искривлены, могут возникнуть объемные силы. Член $(1/8\pi)\nabla B^2$ представляет натяжение, вызванное взаимным отталкиванием силовых линий. Это натяжение описывается тензором давления, изотропным в плоскости, перпендикулярной к \mathbf{B} .

Несколько простых результатов можно получить сразу. Если (4.1) скалярно умножить сначала на \mathbf{B} , а затем на \mathbf{j} , то в обоих случаях правая часть этого уравнения даст нуль. Следовательно, ∇p не может иметь составляющих, параллельных \mathbf{B} и \mathbf{j} ; последние должны быть параллельны изобарическим поверхностям. В случае если силами инерции пренебречь нельзя или тензор давления анизотропен, уравнение (4.1) значительно усложняется. Тогда эти простые результаты, разумеется, несправедливы.

Если равновесные p и \mathbf{B} известны, то исследование бесконечно малых возмущений также не вызывает принципиальных затруднений и, по существу, совпадет с анализом распространения волн бесконечно малой амплитуды, изложенным в предыдущей главе. В гл. 3 рассматривалось однородное состояние равновесия, поэтому малые возмущения описывались дифференциальными уравнениями с постоянными коэффициентами. В данном случае эти коэффициенты являются функциями координат, так что исследование возмущений приводит к сложным задачам на собственные значения. Решив такую задачу, можно получить все нормальные типы волн, и если какой-нибудь из типов волн не осциллирует, а экспоненциально нарастает, то равновесие неустойчиво.

Здесь мы исследуем устойчивость более простым способом, рассматривая изменение потенциальной энергии для случая произвольной деформации. Потенциальную энергию плазмы W можно записать в виде

$$W = \int \left\{ \frac{B^2}{8\pi} + \frac{3p}{2} + p\varphi \right\} d\tau, \quad (4.2)$$

где $d\tau$ — элемент объема, а интеграл берется по всему пространству, включающему занятый плазмой объем и окружающий плазму вакуум. Объем интегрирования конечен лишь в том случае, если система ограничена идеальным проводником. Поскольку мы пренебрегли сопротивлением и вязкостью, система не имеет потерь. Поэтому полная энергия, являющаяся суммой W и кинетической энергии, не меняется.

Пусть возмущение системы описывается произвольным смещением ξ , являющимся функцией начального положения. Изменение потенциальной энергии δW , пропорциональное первой степени ξ , должно равняться нулю, поскольку, по предположению, система находится в равновесии. Если сохранить в δW все члены порядка ξ^2 , то по знаку $\delta W(\xi, \xi)$ можно определить, устойчива система или неустойчива. Если изменение энергии $\delta W(\xi, \xi)$ положительно, то кинетическая энергия не может превзойти начальную величину δW и возмущение не будет нарастать. Однако при отрицательном $\delta W(\xi, \xi)$ кинетическая энергия и $|\delta W|$ нарастают с увеличением ξ^2 , поэтому система неустойчива.

Для количественного анализа напишем закон сохранения энергии в виде

$$\frac{1}{2} \int \rho \left(\frac{d\xi}{dt} \right)^2 d\tau + \delta W(\xi, \xi) = 0. \quad (4.3)$$

Полагая, что ξ изменяется во времени по закону $e^{-i\omega t}$, получаем

$$\omega^2 = \frac{\delta W(\xi, \xi)}{\frac{1}{2} \int \rho \xi^2 d\tau}. \quad (4.4)$$

Следовательно, при $\delta W < 0$ частота ω оказывается мнимой и возмущение экспоненциально нарастает. Скорость нарастания возмущения одинакова для всех участков плазмы только в том случае, если ξ является собственной функцией соответствующей задачи на собственные значения. Однако даже при подстановке

приближенного значения ξ формула (4.4) правильно дает порядок величины скорости нарастания ξ .

Бернштейн, Фримен, Крускал и Кулсруд [2], исходя из макроскопических уравнений, получили общие уравнения для $\delta W(\xi, \xi)$ и установили, что отрицательный знак δW является необходимым и достаточным условием существования неустойчивости. Они нашли также метод определения возмущения ξ , обеспечивающего минимальность δW . Некоторые относящиеся к этому вопросу исследования были выполнены Хайном, Люстом и Шлютером [9]. Розенблют и Лонгмайер [15] исследовали дрейф частиц при наличии отрицательного знака у δW и дали микроскопическое объяснение магнитогидродинамических неустойчивостей.

Ограничиваясь рамками макроскопического описания, рассмотрим сначала изменение энергии δW_s на поверхности раздела. На этой поверхности S , параллельной силовым линиям, давление плазмы в невозмущенном состоянии равновесия терпит разрыв. Мы получим величину δW_s , вычисляя изменение энергии поверхностного слоя, замененного гибкой мембраной, причем будем считать, что при медленных возмущениях мембраны плазма по обе стороны мембраны остается в равновесии. Обозначим возмущение, перпендикулярное к поверхности, символом ξ_n . Сила F , приходящаяся на единицу площади и перпендикулярная к поверхности раздела, пропорциональна ξ_n . Величина работы, произведенной смещением ξ_n над жидкостью, дается интегралом по этой поверхности

$$\delta W_s = -\frac{1}{2} \int \xi_n \cdot F(\xi_n) dS. \quad (4.5)$$

Как мы увидим ниже, в состоянии равновесия полное давление по нормали к поверхности раздела равно $p + B^2/8\pi$. С увеличением ξ_n давление по обе стороны поверхности раздела изменяется неодинаково, поскольку $\nabla_n(p + B^2/8\pi)$ имеет различное значение на каждой из сторон; здесь мы обозначили символом ∇_n

нормальную к поверхности раздела S составляющую градиента. Очевидно, что $-\mathbf{F}(\xi_n)$ является произведением ξ_n на разность градиентов при пересечении поверхности в направлении увеличения ξ_n . Отсюда

$$\delta W_S = \frac{1}{2} \int \xi_n^2 \langle \nabla_n \left(p + \frac{B^2}{8\pi} \right) \rangle dS, \quad (4.6)$$

где $\langle X \rangle$ означает изменение величины X при пересечении поверхности, равное разности $X(\xi_n) - X(-\xi_n)$ при ξ_n , стремящемся к нулю.

Кроме того, потенциальная энергия изменяется на величину δW_p из-за деформаций внутри плазмы. В целях упрощения задачи предположим, что плазма несжимаема. Действительно, в рассматриваемых ниже простых задачах, связанных с вычислением δW_p , минимальным значениям δW соответствуют такие ξ , для которых $\nabla \xi$ обращается в нуль. Даже в более общих случаях это ограничение не сильно сказывается на критерии устойчивости. Вычисление δW_p подобно приведенному выше для δW_S , но более громоздко; в результате получаем [2]

$$\delta W_p = \frac{1}{2} \int \left\{ \frac{(\delta B)^2}{4\pi} - \frac{1}{4\pi} \mathbf{j} (\delta \mathbf{B} \times \xi) - \right. \\ \left. - (\xi \cdot \nabla \varphi) (\xi \cdot \nabla \rho) \right\} dV, \quad (4.7)$$

где dV — элемент объема. Величина $\delta \mathbf{B}$, получаемая исключением \mathbf{E} из уравнений (2.18) и (2.36) и последующим интегрированием по dt , равна

$$\delta \mathbf{B} = \nabla \times (\xi \times \mathbf{B}). \quad (4.8)$$

Кроме δW_S и δW_p , нужно найти также величину δW_v , представляющую собой изменение магнитной энергии в области вакуума. И $\delta \mathbf{B}$ в вакууме, и $\xi \times \mathbf{B}$ на поверхности раздела между плазмой и вакуумом определяются лишь уравнениями Максвелла. Однако в рассматриваемых далее задачах нам нигде не понадобится выражение для этой вакуумной добавки.

§ 2. Плоская система

Рассмотрим сначала случай, в котором все величины зависят только от x . Преимущество такой идеализации заключается в том, что при ее исследовании, требующем относительно простого математического аппарата, отчетливо выявляются природа и роль диамагнетизма плазмы, бессилового поля и перестановочной, или желобковой, неустойчивости.

а. Равновесие. Если исключить тривиальный случай однородного поля \mathbf{B} , компонента B_x должна равняться нулю. Это следует из уравнения (4.1), в котором $B_x(\partial B_y/\partial x)$ и $B_x(\partial B_z/\partial x)$ должны равняться нулю, так как векторы ∇p и ∇B^2 не имеют y - и z -составляющих. Следовательно, член $(\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{B}$ в уравнении (4.1) равен нулю. Поэтому, интегрируя по dx , получаем

$$p + \frac{B^2}{8\pi} = \text{const.} \quad (4.9)$$

В такой простой геометрии $B^2/8\pi$ можно рассматривать как магнитное давление, причем сумма газового и магнитного давлений постоянна. Таким образом, удерживаемая плазма является диамагнитной; магнитное давление в плазме меньше, чем в окружающем вакууме. Очевидно, что p и B могут быть произвольными функциями x , удовлетворяющими уравнению (4.9).

Более того, направление \mathbf{B} в плоскости yz также может быть произвольной функцией x , что совершенно не влияет на уравнение (4.9). В частности, если величина магнитного поля B не зависит от x , то на плазму магнитные силы не действуют даже в том случае, когда отношение B_y/B_z изменяется произвольным образом. Такое поле есть пример так называемого *бессилового поля*. Поскольку поле в вакууме также является бессильным, мы сохраним это название за полями, в которых отличный от нуля ток \mathbf{j} удовлет-

воряет соотношению

$$\mathbf{j} = \nabla \times \mathbf{B} = \alpha(\mathbf{r}) \mathbf{B}, \quad (4.10)$$

где $\alpha(\mathbf{r})$ — некоторая функция координат. Так как $\nabla \cdot \mathbf{j} = 0$, то функция $\alpha(\mathbf{r})$ должна быть постоянной вдоль силовой линии. Если ток параллелен силовым линиям магнитного поля в соответствии с (4.10), то поперечная сила $\mathbf{j} \times \mathbf{B}$, очевидно, равна нулю. В плоском случае, где все величины зависят только от x , самым общим видом бессилового поля является такое поле, в котором составляющая B_x равна нулю, B постоянно, а отношение B_y/B_z — произвольная функция x (кроме того, может быть вакуумное поле $\mathbf{B} = \text{const}$). Полагая B_y и B_z равными $B \sin \theta$ и $B \cos \theta$ соответственно, из уравнения (4.10) получаем

$$\frac{d\theta}{dx} = \alpha(x). \quad (4.11)$$

Магнитное поле, направление которого в плоскости yz изменяется непрерывно с изменением x , иногда называется *полем с магнитным скосом* или *скошенным полем* (shear field)¹⁾.

Выясним теперь, какое электрическое поле существует в нашей плоской системе. Предположим, что скорость \mathbf{v} равна нулю. Тогда уравнение (2.21) связывает непосредственно \mathbf{E} с давлением p_i . Если выразить поле \mathbf{E} через потенциал U , а p_i заменить на $n_i kT$, считая T постоянной величиной, то, интегрируя по x , получаем

$$\ln n_i + \frac{Ze}{ckT} U = \text{const}. \quad (4.12)$$

Следовательно, при \mathbf{v} , равном нулю, электрический потенциал должен быть таким, чтобы плотность положительных ионов подчинялась закону Больцмана.

¹⁾ Среди русских эквивалентов слова shear мы выбрали *скос*, так как такой термин, по нашему мнению, лучше отражает факт поворота направления, чем, например, часто встречающийся при переводах термин *сдвиг*. — Прим. ред.

Очевидно, что в этом случае пондеромоторная сила, обусловленная градиентом \mathbf{B} , действует только на электроны, которые фактически создают весь ток.

Для сравнения рассмотрим электрическое поле в изотермической атмосфере в отсутствие магнитного поля, но при наличии поля тяжести (или постоянного ускорения). В этом случае в уравнениях (2.20) и (2.21) следует сохранить гравитационные члены. Так как при одинаковых температурах электронов и ионов $p_i = p_e/Z = p/(1+Z)$, то, исключив p_i с помощью уравнения (2.20), из уравнения (2.21) получим

$$-\frac{Ze}{c} \nabla U = \frac{Z}{1+Z} m_i \nabla \phi. \quad (4.13)$$

Таким образом, электрическая сила, действующая на ион по вертикали и определяемая левой частью этого уравнения, уравновешивает часть силы тяжести иона, равную $Z/(1+Z)$, так что результирующие силы, приложенные к ионам и электронам, в точности одинаковы. Очевидно, что это электрическое поле необходимо для сохранения электронейтральности.

б. Устойчивость, изотропное давление. Само собой разумеется, что при наличии однородного магнитного поля и максвелловского распределения по скоростям с постоянной температурой не возникает никаких неустойчивостей; система не имеет состояния с более низкой энергией и более высокой энтропией. Однако положение изменяется, если плазма удерживается магнитным полем, и p зависит от x . Очевидно, что под действием столкновений происходит диффузия поперек силовых линий. В отсутствие столкновений диффузию могут вызвать более сложные эффекты, например неустойчивости, турбулентность и т. д. До сих пор еще не выяснено, является ли неустойчивость неотъемлемым свойством удерживаемой плазмы.

Если исходить из приведенных в гл. 2 макроскопических уравнений, при выводе которых давление предполагалось изотропным, то в плазме, находящейся

ся в равновесии в плоской геометрии, неустойчивости в отсутствие гравитационного поля не возникают. В этом случае интеграл в выражении (4.7) является суммой квадратов, если ξ обращается в нуль на границах области интегрирования. Из физических соображений ясно, что сжатие магнитного поля в одном месте и расширение в другом увеличивают энергию системы, поскольку энергия, затрачиваемая на увеличение давления в сжимаемой части, превосходит энергию, освобождающуюся при понижении давления в расширяющейся части.

В том особом случае равновесия, когда магнитные силовые линии параллельны, возможны возмущения, при которых δW равно нулю. Мы уже предположили, что $\nabla \cdot \xi = 0$. Если предположим также, что \mathbf{B} всюду параллельно оси z , а $d\xi/dz$ равно нулю, то при таких возмущениях силовые линии не искривляются, а магнитная энергия не меняется. В этом случае движение плазмы в плоскости xu является движением несжимаемой жидкости и не зависит от z . Силовые линии перемещаются как жесткие стержни, так что в любом элементе объема жидкости напряженность магнитного поля \mathbf{B} не меняется ни по величине, ни по направлению. Таким образом, по отношению к возмущениям, при которых обмениваются местами области сильного и слабого \mathbf{B} , равновесие плазмы является безразличным. Эти возмущения, сводящиеся к движению групп силовых линий в противоположных направлениях, называются *перестановочными возмущениями*.

Если в рассматриваемом объеме существуют электрические токи, параллельные полю \mathbf{B} , и вследствие этого поле \mathbf{B} с изменением x меняет направление в плоскости uz , то по отношению к таким возмущениям равновесие плазмы уже не будет безразличным. Теперь направление силовых линий в плоскости uz зависит от x и, за исключением тривиального случая поступательного движения в плоскости uz , силовые линии не могут обмениваться местами друг с другом, перемещаясь как жесткие стержни, поскольку этому

препятствуют другие силовые линии. Поэтому скошенное магнитное поле обеспечивает бóльшую устойчивость, чем поле, силовые линии которого всюду параллельны.

Когда магнитное поле имеет неизменное направление и поддерживает плазму в равновесии против силы тяжести ρg (на 1 см^3), в плазме может возникнуть неустойчивость; неустойчивость может проявиться также при ускорении плазмы магнитным полем, действующим против эквивалентной силы инерции — $\rho(dv/dt)$. В случае резкой границы, разделяющей две области с различными плотностями поля, δW можно найти с помощью уравнения (4.6). Если в уравнении (2.20) сохранить гравитационный член, то (4.1) в одномерном случае примет следующий вид:

$$\frac{d}{dx} \left(p + \frac{B^2}{8\pi} \right) = -\rho g. \quad (4.14)$$

Здесь ускорение силы тяжести g направлено в сторону отрицательных x . Поэтому уравнение (4.6) дает

$$\delta W_S = -\frac{1}{2} \langle \rho \rangle g \int \xi_n^2 dS. \quad (4.15)$$

Следовательно, величина δW_S отрицательна, если плотность верхнего слоя больше, чем плотность нижнего слоя. Если считать, что положительные x направлены в сторону g , то знак минус в (4.14) и (4.15) сменится на плюс; однако определение $\langle \rho \rangle$, согласно уравнению (4.6), в этом случае также изменится, так что окончательно знак δW_S останется прежним. Нужно еще рассмотреть изменение энергии в областях, лежащих выше и ниже поверхности раздела. Предположим, что возмущение ξ не меняется вдоль силовой линии. Тогда силовые линии движутся как жесткие стержни, и магнитная энергия также не меняется. Изменение энергии вещества в объеме, даваемое последним членом уравнения (4.7), мало, если мала длина волны возмущения $2\pi/k$ по сравнению с характерным макроскопическим размером $\rho/\nabla\rho$. Итак, величина δW

отрицательна, когда при наличии силы тяжести более плотная плазма опирается на менее плотную, а магнитное поле \mathbf{B} всюду имеет одно и то же направление; поэтому такое равновесие неустойчиво. Тот же вывод можно сделать и в том случае, если менее плотная плазма подталкивает более плотную плазму и вызывает ее ускорение.

Неустойчивые возмущения гофрируют поверхность раздела, вызывая появление желобков, параллельных силовым линиям. Поэтому неустойчивость поверхности раздела при таких коротковолновых возмущениях часто называют *желобковой* неустойчивостью. Так как такие возмущения приводят к перестановке местами силовых линий без их искривления, эта неустойчивость носит также название *перестановочной* неустойчивости.

Скорость нарастания возмущения можно получить из уравнения (4.4). Самым простым видом возмущения ξ , которое не меняет магнитную энергию и стремится к нулю при удалении от поверхности раздела, является следующий:

$$\begin{aligned}\xi_x &= Ae^{\pm \kappa x} \sin \kappa y, \\ \xi_y &= \pm Ae^{\pm \kappa x} \cos \kappa y, \\ \xi_z &= 0,\end{aligned}\tag{4.16}$$

причем знак минус берется для области выше поверхности раздела, а знак плюс — для области, расположенной ниже поверхности раздела. Для этого возмущения получаем

$$\omega^2 = - \frac{g_x \langle \rho \rangle}{2\rho},\tag{4.17}$$

где $\bar{\rho}$ — среднее значение, а $\langle \rho \rangle$ — скачок величины ρ на поверхности раздела. Так как возмущение ξ , определяемое соотношением (4.16), есть нормальное (собственное) колебание, то выражение (4.17) является обычной формулой для неустойчивости Рэля — Тейлора. Возмущения с самой короткой длиной волны, очевидно, нарастают наиболее быстро.

Если при переходе через поверхность раздела или в прилегающем объеме направление \mathbf{B} меняется из-за электрических токов, текущих вдоль силовых линий, то полученные результаты оказываются несправедливыми. В этом случае невозможна перестановка силовых линий между верхним и нижним слоями; любое возмущение, которое меняет местами элементы жидкости при разных значениях x , должно изгибать силовые линии и увеличивать магнитную энергию. Величину этого эффекта легко рассчитать, полагая, что выше поверхности раздела магнитное поле \mathbf{B} направлено под углом θ к оси z , а ниже поверхности раздела — под углом $-\theta$. Если ξ дается формулой (4.16), то величину приращения магнитной энергии можно получить путем подстановки равенства (4.8) в соотношение (4.7). Легко показать, что отношение приращений энергии δW_p к δW_s равно $\kappa B^2 \sin^2 \theta / (-2\pi g \langle \rho \rangle)$. Поэтому величина δW для малых длин волн (больших κ) положительна, а при достаточно больших длинах волн, как и прежде, появляется неустойчивость. Неустойчивость здесь обусловлена тем, что длинноволновые возмущения сравнительно слабо деформируют силовые линии. Стабилизация же коротковолновых возмущений — достаточно общее свойство скошенных полей.

в. Устойчивость, анизотропное давление. Когда p_{\perp} и p_{\parallel} различны, даже однородная среда может быть неустойчивой. Поскольку неустойчивые возмущения создают градиенты вдоль \mathbf{B} , макроскопические уравнения непосредственно неприменимы и при соответствующем исследовании нужно рассматривать функцию распределения по скоростям. В частности, при развитии неустойчивости могут возникнуть магнитные зеркала, а существующие магнитные зеркала — усилиться. Наличие захваченных частиц в этих зеркалах макроскопические уравнения не могут учитывать, так как они основаны на упрощающих предположениях относительно тензора давления.

Несмотря на это, применение макроскопических уравнений в таких задачах все же вносит иногда некоторую ясность. Поэтому мы рассмотрим здесь один случай, где макроскопические уравнения дают верный результат, — неустойчивость первоначально однородной плазмы, в которой p_{\parallel} превосходит p_{\perp} на величину, большую $B^2/4\pi$. Если \mathbf{V} и ρ в состоянии равновесия однородны, то в отсутствие гравитационного потенциала из формулы (4.2) следует, что изменение потенциальной энергии дается выражением вида

$$\delta W = \frac{1}{8\pi} \int (\delta B)^2 d\tau + \frac{1}{2} \int \delta p_{\parallel} d\tau + \int \delta p_{\perp} d\tau. \quad (4.18)$$

Член $\mathbf{j}(\delta \mathbf{V} \times \boldsymbol{\xi})$, имевшийся в формуле (4.7), здесь равен нулю, так как ток \mathbf{j} в состоянии равновесия отсутствует.

Предположим, что \mathbf{V} параллельно оси z , и рассмотрим возмущение, в котором $\boldsymbol{\xi}$ параллельно оси x . Очевидно, $\nabla \cdot \boldsymbol{\xi}$ обращается в нуль, когда $\partial \xi_x / \partial x$ равно нулю. Если считать ξ_x функцией z , не зависящей ни от x , ни от y , то получим возмущение, имеющее вид альфвеновской волны. Физически очевидно и легко проверить, исходя из уравнения (4.8), что $\delta B_y = \delta B_z = 0$, так что следует принимать во внимание лишь δB_x . Поскольку мы рассматриваем движение несжимаемой жидкости, δp_{\parallel} и δp_{\perp} можно заменить соответственно $nk\delta T_{\parallel}$ и $nk\delta T_{\perp}$, где T_{\parallel} и T_{\perp} определяются выражениями (1.32) и (1.35). Величину $\delta B^n/B^n$, входящую в выражения для $(\delta T_{\parallel})/T_{\parallel}$ и $(\delta T_{\perp})/T_{\perp}$ можно найти с помощью простого соотношения

$$\frac{\delta B^n}{B^n} = \{B^2 + (\delta B_x)^2\}^{n/2} - B_z^n \approx \frac{n}{2} \frac{\delta B^2}{B^2}, \quad (4.19)$$

так как первоначально магнитное поле \mathbf{B} было направлено по оси z . С учетом (4.19) уравнение (4.18) приводится к виду

$$\delta W = \frac{1}{2B^2} \int (\delta B)^2 d\tau \left\{ \frac{B^2}{4\pi} - nkT_{\parallel} + nkT_{\perp} \right\}. \quad (4.20)$$

Очевидно, возмущение неустойчиво, если

$$p_{\parallel} - p_{\perp} > \frac{B^2}{4\pi}. \quad (4.21)$$

Эту неустойчивость, впервые найденную Паркером [13], иногда называют *шланговой неустойчивостью* (finghoose instability). Если p_{\parallel} значительно превосходит как p_{\perp} , так и $B^2/4\pi$, то изгиб силовых линий, увеличивающий их длину, приводит к тому, что p_{\parallel} уменьшается в большей степени, чем увеличивается магнитная энергия или поперечная кинетическая энергия. Говоря иначе, при большом p_{\parallel} центробежная сила, возникающая при искривлении линий, еще больше выпячивает эти линии.

Так как возмущенное магнитное поле меняется по величине вдоль силовых линий, при развитии неустойчивостей возможен захват частиц. Однако исследования Чандрасекара, Кауфмана и Ватсона [4] и Сагдеева, Кадомцева, Рудакова и Веденова [16] показывают, что более точный анализ снова приводит к неравенству (4.21) как критерию неустойчивости. Это и неудивительно, поскольку изменение B является величиной второго порядка относительно ξ , и те частицы, движение которых создает силы, приводящие к неустойчивости, т. е. частицы, движущиеся в основном вдоль силовых линий, не захватываются.

Имеется другой — в известном смысле противоположный — вид неустойчивости, называемый *зеркальной неустойчивостью*, которая может возникнуть в первоначально однородной среде при условии, что p_{\perp} намного превосходит p_{\parallel} . В этом типе неустойчивости производная $\partial\xi_x/\partial x$ отлична от нуля, и тогда, как следует из уравнения (4.8), величина δB_z равна $-B_z \partial\xi_x/\partial x$, так что напряженность магнитного поля зависит от ξ линейно, а не квадратично, как в случае шланговой неустойчивости. Если, кроме того, предположить, что производная $\partial\xi_x/\partial x$ медленно осциллирует вдоль координаты z , то возмущения приводят к появлению магнитных зеркал и силовые линии поперемен-

но проходят через области уменьшающегося и увеличивающегося магнитного поля. Частицы, скорости которых направлены преимущественно перпендикулярно к \mathbf{B} , захватываются в эти зеркала и создают значительные силы, приводящие к неустойчивости, ибо при развитии неустойчивости кинетическая энергия таких частиц уменьшается. В работах [4, 16] показано, что в этом случае критерий неустойчивости, который нельзя получить из обычных макроскопических уравнений, приобретает вид

$$p_{\perp} - p_{\parallel} > \frac{p_{\parallel}}{p_{\perp}} \frac{B^2}{8\pi}. \quad (4.22)$$

Грубое экспериментальное подтверждение зеркальной неустойчивости получили Пост и Перкинс [14], наблюдавшие возрастание величины диффузии из магнитного зеркала при условиях, соответствующих неравенству (4.22).

§ 3. Цилиндрическая система

Когда все величины являются функциями только расстояния r от оси симметрии, дело обстоит иначе, чем в плоской геометрии, потому что в состоянии равновесия силовые линии могут быть искривлены. В результате этого условия равновесия несколько меняются и возникают новые виды неустойчивостей.

а. Равновесие. Чтобы упростить уравнение (4.1), напишем выражение для тока (2.19) в цилиндрической системе координат, снова считая производную $\partial E/\partial t$ равной нулю:

$$4\pi j_r = \frac{1}{r} \frac{\partial B_z}{\partial \theta} - \frac{\partial B_{\theta}}{\partial z}, \quad (4.23)$$

$$4\pi j_{\theta} = \frac{\partial B_r}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial r}, \quad (4.24)$$

$$4\pi j_z = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r B_{\theta}) - \frac{1}{r} \frac{\partial B_r}{\partial \theta}. \quad (4.25)$$

Предполагая, что магнитное поле \mathbf{B} зависит только от r , находим из уравнения (4.23), что ток j_r равен нулю. Если положить также равными нулю производные $\partial p/\partial z$ и $\partial p/\partial \theta$, то из уравнения (4.1) получим, что, за исключением тривиального случая $j_\theta = j_z = 0$, компонента B_r тоже должна обращаться в нуль. Если считать, что в соотношениях (4.24) и (4.25) B_r отсутствует, то r -составляющая уравнения (4.1) приобретает вид

$$\frac{\partial}{\partial r} \left\{ p + \frac{B_\theta^2 + B_z^2}{8\pi} \right\} + \frac{1}{4\pi} \frac{B_\theta^2}{r} = 0. \quad (4.26)$$

При обращении в нуль B_θ сумма газового и магнитного давлений становится постоянной, подобно тому как это было в случае плоской геометрии. Однако если составляющая B_θ отлична от нуля, то на равновесие оказывает влияние натяжение вдоль силовых линий.

Уравнение (4.26) можно легко проинтегрировать в общем виде при условии, что $p(r)$ обращается в нуль на расстоянии r , равном или большем некоторого предельного радиуса R . Для этого преобразуем соотношение (4.26), переходя к величинам S и I вместо r и B_θ в соответствии с формулами

$$dS = 2\pi r dr, \quad (4.27)$$

$$B_\theta = \frac{2I}{r}. \quad (4.28)$$

Очевидно, S представляет собой площадь поперечного сечения плазмы внутри цилиндра радиуса r , а I — ток через это поперечное сечение в направлении z . Тогда уравнение (4.26) принимает вид

$$S \frac{d}{dS} \left\{ p + \frac{B_z^2}{8\pi} \right\} = -I \frac{dI}{dS}. \quad (4.29)$$

Производная dI/dS равна, очевидно, плотности тока j_z . Интегрируя по частям, находим

$$\frac{1}{2} I^2(R) = NkT + \frac{1}{8\pi} \int_0^R [B_z^2(r) - B_z^2(R)] \cdot 2\pi r dr, \quad (4.30)$$

где было сделано предположение, что температура T постоянна; следовательно,

$$\int_0^R p dS = kT \int_0^R n dS = NkT. \quad (4.31)$$

Величина N есть число частиц, приходящееся на 1 см длины удерживаемой плазмы. Частный случай соотношения (4.30) при $B_z=0$ впервые рассмотрел Беннет [1]. Приведенный здесь вывод принадлежит Кингу¹⁾. Сжатие шнура с током его собственным магнитным полем называется *пинч-эффектом*. Мы будем называть плазму, сжимающуюся под действием собственного магнитного поля B_θ , *самосжимающимся разрядом*, а плазму, удерживаемую внешним полем B_z , назовем *разрядом, сжимаемым внешними полями*. Самосжимающийся разряд называют иногда *продольным пинчем*, так как ток, текущий в плазме, является продольным; разряд, сжимаемый внешними полями, называют часто *азимутальным пинчем*, или *тэта-пинчем*.

Как и в плоской геометрии, в случае цилиндрической симметрии возможно бессилое поле, в котором всюду градиент давления ∇p равен нулю, а направление \mathbf{B} изменяется с изменением r . В таком поле величины B_z^2 и I^2 должны быть связаны уравнением (4.29), в котором опущен член ∇p , а в остальном эти величины произвольны, если не считать, что ток I должен обратиться в нуль при $S=0$. В то время как в плоской геометрии абсолютная величина бессилового поля \mathbf{B} постоянна, а меняется только направление \mathbf{B} , в случае цилиндрической симметрии с увеличением r изменяется также величина \mathbf{B} . Если потребовать, чтобы B_z и j_z одновременно обращались в нуль на расстоянии r , равном или большем некоторого значения R , то при $r > R$ ток I не зависит от S , а составляющая B_θ пропорциональна $1/r$. В простейшей

¹⁾ J. I. F. King, частное сообщение, 1958,

бессиловой системе ток j_z постоянен в области $r < R$, а B_z^2 в этой области есть убывающая линейная функция S . Несмотря на то, что такая система является бессиловой, натяжения не равны нулю. Вблизи оси, где \mathbf{V} направлено преимущественно вдоль z , силовые линии имеют тенденцию отталкиваться друг от друга. Необходимое уравнивающее натяжение создается за счет компоненты B_θ на больших расстояниях, где натяжение вдоль силовых линий стремится переместить эти силовые линии внутрь.

Остается еще определить радиальное электрическое поле E_r и скорость \mathbf{v} в самосжимающемся разряде. Эти величины связаны соотношением (2.21), которое, если пренебречь членом $\eta \mathbf{j}$, принимает вид

$$E_r - v_z B_\theta + v_\theta B_z - \frac{c}{en_e} \frac{dp_i}{dr} = 0. \quad (4.32)$$

Условия стационарности недостаточны для определения этих величин, и мы вынуждены проанализировать процесс установления. Скорость, полученная из уравнения (4.32), перпендикулярна как к \mathbf{V} , так и к \mathbf{g} . Из уравнения движения (2.11) следует, что изменить эту скорость может лишь радиальный ток j_r , который вызывает пондеромоторную силу в направлении $\mathbf{r} \times \mathbf{V}$. Поскольку всякий сколько-нибудь заметный радиальный ток связан с большим электростатическим полем E_r , можно ожидать, что скорость \mathbf{v} останется малой. Покажем, что это действительно имеет место. Упростим исследование, полагая, что B_z равно нулю; тот же самый результат получается и в более общем случае.

Составляющая уравнения (2.11), параллельная оси z , имеет вид

$$\rho \frac{\partial v_z}{\partial t} = j_r B_\theta. \quad (4.33)$$

Кроме того, проектируя уравнение (2.19) на направление \mathbf{r} , получаем соотношение

$$4\pi j_r + \frac{1}{c^2} \frac{\partial E_r}{\partial t} = 0, \quad (4.34)$$

с помощью которого можно исключить j_r из уравнения (4.33).

Чтобы выполнить интегрирование по времени получающегося при таком исключении уравнения, предположим, что ρ/B_0 не меняется во времени при формировании пинча. Для самосжимающегося разряда такое предположение не слишком близко к действительности, но оно дает приблизительную оценку ожидаемого эффекта.

Тогда из уравнения (4.33) окончательно имеем

$$E_r = - \frac{4\pi\rho c^2}{B_0} v_z, \quad (4.35)$$

причем мы приняли, что и E_r и v_z вначале равны нулю. Сравнивая соотношения (4.35) и (4.32) (с заменой dp_i/dr на $\partial p_i/\partial r$) и исключая E_r , получаем

$$v_z = - \frac{c}{Ken_e B_0} \frac{\partial p_i}{\partial r}, \quad (4.36)$$

где K — диэлектрическая проницаемость, которая выражается формулой (2.33). Если бы составляющая E_r равнялась нулю, то скорость v_z определялась бы формулой (4.36), в которой K равно единице. Таким образом, при больших K радиальное электростатическое поле почти полностью гасит скорость, которая могла бы возникнуть из-за градиента давления ионов.

Аналогичное заключение было сделано Спитцером [19] в несколько отличающемся случае. Если плазма удерживается магнитным полем, а температура возрастает, то можно было бы предполагать, что скорость вещества v , перпендикулярная к \mathbf{B} и ∇p_i , увеличивается с ростом ∇p_i в соответствии с уравнением (2.23). Однако в этом случае на ускорение должны влиять также электрические токи, направленные вдоль градиента давления; поскольку эти токи создают электростатическое поле, параллельное ∇p_i , результирующая скорость уменьшается в K раз по сравнению с ее величиной в отсутствие электростатического поля,

б. Устойчивость. Если в состоянии равновесия силовые линии искривлены, то неустойчивость может существовать даже при отсутствии ускорения. Как и в предыдущем параграфе, исследуем здесь неустойчивость поверхности раздела, при пересечении которой давление терпит разрыв. Так как магнитное давление, обусловленное полем B_z , увеличивает устойчивость, рассмотрим сначала пинч в цилиндрической плазме, когда компонента B_z равна нулю.

Изменение потенциальной энергии из-за возмущений поверхности раздела определяется формулой (4.6). Как и в плоской геометрии, сумма давлений $p + B^2/8\pi$ непрерывна при переходе через поверхность раздела. Примем, что граница характеризуется некоторой величиной скачка $\langle p \rangle$; для удерживаемой плазмы давление p снаружи меньше, так что величина $\langle p \rangle$ отрицательна. Производную $\partial B^2/\partial r$ находим из уравнения (4.26); она равна $-2B_0^2/r$, поскольку $\partial p/\partial r$, по предположению, равна нулю. Отсюда получаем

$$\left\langle \nabla_n \left(p + \frac{B^2}{8\pi} \right) \right\rangle = -\frac{1}{r} \left\langle \frac{B_0^2}{4\pi} \right\rangle. \quad (4.37)$$

Используя непрерывность $p + B_0^2/8\pi$, запишем (4.6) в виде

$$\delta W_S = \frac{\langle p \rangle}{r} \int \xi_n^2 dS. \quad (4.38)$$

Отсюда следует, что приращение δW_S отрицательно, если отрицательна величина $\langle p \rangle$, т. е. если давление p снаружи цилиндрической границы меньше, чем внутри.

Неустойчивость появится при любом возмущении ξ , для которого вклад в приращение δW , обусловленный деформациями внутри плазмы, пренебрежимо мал. Поэтому мы опять рассмотрим такое возмущение ξ , для которого $\nabla \cdot \xi = 0$, а член $(\mathbf{B} \cdot \nabla) \xi$ исче-

зающе мал. Если длина волны возмущения достаточно мала по сравнению с r , то этим требованиям приближенно удовлетворяет выражение (4.16), где следует x , y и z заменить соответственно на r , z и θ . Изменения потенциальной энергии в объеме газа и снаружи в вакууме пренебрежимо малы, и вместо соотношения (4.17) теперь получаем

$$\omega^2 = \frac{z \langle p \rangle}{r \rho}; \quad (4.39)$$

это выражение применимо, если κr значительно больше единицы. Это другой пример желобковой неустойчивости, которая теоретически всегда существует на границе раздела, если силовые линии обращены выпуклостью в область меньшего давления плазмы, а магнитное поле не имеет скоса.

Для малых κr уже нельзя пренебрегать δW_p и δW_v . Так как в состоянии равновесия все величины не зависят от θ и z , естественно рассматривать фурье-компоненты возмущения ξ , полагая

$$\xi = \mathbf{f}(\mathbf{r}) e^{i m \theta + i x z - i \omega t}. \quad (4.40)$$

Очевидно, ξ является периодической функцией θ , и поэтому m должно быть целым. Критерии устойчивости различны для разных m , и для их получения требуется детальное исследование. Такие исследования, включающие подробный анализ нормальных типов колебаний, были выполнены Крускалом и Шварцшильдом [11], Крускалом и Таком [12], Шафрановым [17] и Тейлером [21]. Некоторые из основных результатов, полученных ими, приводятся дальше, причем мы ограничиваемся здесь случаем однородной цилиндрической плазмы, вне которой в вакууме имеется магнитное поле.

Для $m=0$ плазма неустойчива при любых κ . При малых κr возмущенный столб плазмы несколько напоминает связку сосисок, и поэтому неустойчивость такого вида иногда называют *сосисочной неустойчи-*

востью¹⁾. Если в невозмущенном состоянии давление плазмы однородно, а вне цилиндра радиуса r находится вакуум, то скорость нарастания неустойчивости с $m=0$ при малых κr дается выражением

$$\omega^2 = -\kappa^2 \frac{\gamma p}{(\gamma - 1) \rho}, \quad (4.41)$$

где p и ρ относятся теперь к объему, занятому плазмой. Для возмущения с $m=1$ плазменный цилиндр изогнут, и поэтому такой вид неустойчивости иногда называется *неустойчивостью изгиба*. При малых κr скорость роста этого вида неустойчивости определяется формулой

$$\omega^2 = -\kappa^2 \frac{2p}{\rho} \left(1 - \gamma + \ln \frac{2}{\kappa r} \right), \quad (4.42)$$

где $\gamma=0,5772$ — постоянная Эйлера. Возмущения для $m \geq 2$ устойчивы при малых κr , а при больших κr , значительно превосходящих m^2 , скорость нарастания этих возмущений, как и в случае $m=0$ и $m=1$, определяется выражением (4.39), в котором ρ заменено на $\rho/2$.

Как и в плоской геометрии, скошенное магнитное поле имеет тенденцию стабилизировать эти неустойчивости. При наличии вне плазмы поля B_0 наибольший магнитный скос достигается в том случае, когда аксиальное поле B_z существует только внутри плазмы, а снаружи отсутствует. При этом лучше всего стабилизируются возмущения с $m=0$. Критерий устойчивости для них можно получить сразу из рассмотрения действующих сил. Сила, приводящая к неустойчивости, возникает из-за поля B_0 на границе плазмы; для радиального возмущения с $m=0$ это поле пропорционально $1/r$, и любое сжатие плазмы, находившейся первоначально в равновесии, приводит к увеличению направленной внутрь силы и, следовательно, будет расти дальше. Подобным же образом неустойчиво расширение. Давление газа не препятствует

¹⁾ Или неустойчивостью типа перетяжек. — Прим. перев.

нарастанию неустойчивости, если при движении вещество остается несжимаемым; сжатие при некотором z компенсируется расширением в другой области. С другой стороны, поле B_z внутри плазмы стремится воспрепятствовать развитию неустойчивости. Так как магнитный поток вдоль оси не меняется, то поле B_z , очевидно, пропорционально $1/r^2$. Устойчивость имеет место, если B_z^2 при сжатии плазмы увеличивается на границе больше, чем B_0^2 . Поскольку относительное изменение B_z^2 при данном изменении r в два раза превосходит соответствующую величину для B_0^2 , легко видеть, что аксиальное магнитное поле внутри плазмы стабилизирует неустойчивость типа перетяжек, если на границе

$$B_z^2 \geq \frac{1}{2} B_0^2. \quad (4.43)$$

Труднее стабилизировать неустойчивость изгиба, так как такое возмущение слегка растягивает силовые линии поля B_z , но почти не сжимает их; в плоскости $z = \text{const}$ возмущение с $m=1$ приводит к параллельному переносу силовых линий без искажения. Как и в плоской геометрии, устойчивость возможна только при достаточно больших κ . Точнее говоря, если поле B_z обращается в нуль вне плазменного цилиндра, а поле B_0 равно нулю внутри, то неустойчивость все же имеет место при

$$\kappa r < 2e^{1-\gamma-B_z^2/B_0^2}, \quad (4.44)$$

где B_z — величина поля на внутренней стороне границы плазмы, а B_0 — на внешней; γ — опять постоянная Эйлера. Даже в том крайнем случае, когда поле B_z в плазме приблизительно равно полю B_0 снаружи, а давление плазмы пренебрежимо мало, неустойчивость возникает при любых κr , меньших примерно 1,12. Если B_z одинаково внутри и снаружи плазмы, а B_0 на границе гораздо меньше B_z , условие неустойчивости с точностью до первой степени отношения

B_θ/B_z принимает вид

$$kr < \frac{B_\theta}{B_z}. \quad (4.45)$$

Как показывает теория, неустойчивость изгиба для цилиндра с однородным давлением может быть стабилизирована окружающим плазму идеально проводящим цилиндром (кожухом). Однако при более точном анализе области с градиентом давления оказывается, что в этой переходной области возникают перестановочные неустойчивости; эти неустойчивости соответствуют возмущениям с большими m . Чтобы стабилизировать цилиндрический разряд по отношению к магнитогидродинамическим неустойчивостям во всем объеме плазмы, требуется выполнение довольно-таки жестких условий: например, устойчивость имеет место, если внутри плазмы B_θ уменьшается с увеличением r быстрее, чем по закону $1/r$. Это условие выполняется, в частности, в случае, когда в плазме имеется цилиндрическая полость, внутри которой находится аксиальный проводник с током, — иногда такую систему называют *обратным пинчем* [5].

Некоторые экспериментальные подтверждения существования таких неустойчивостей были получены в полностью ионизованном газе. Наблюдалась неустойчивость самосжимающегося разряда для возмущений с $m=0$ и $m=1$, хотя в пинчах, изученных Карзоном и др. [7], неустойчивость Рэлея — Тейлора, возникавшая во время сжатия пинча, очевидно, играла не меньшую роль, чем неустойчивость из-за искривления силовых линий. В плазме с однородным полем B_z и полем B_θ неустойчивость для $m=1$ наблюдалась Крускалом и др. [10] и Долговым-Савельевым и др. [8] при условиях, предсказываемых неравенством (4.45). Однако перестановочные неустойчивости с большими m , которые следуют из теории для случая плавного изменения давления, экспериментально не наблюдались.

§ 4. Аксиально симметричная система

С усложнением системы число возможных неустойчивостей становится все больше и больше и поэтому представляет менее общий интерес. Систему частного вида всегда можно исследовать, применяя прямые численные методы. В настоящем параграфе мы рассмотрим лишь небольшое число общих результатов, относящихся к равновесию аксиально симметричных конфигураций, причем наш анализ будет относиться только к таким системам, в которых либо силовые линии магнитного поля, либо линии электрического тока являются окружностями, охватывающими ось симметрии. Удержание частиц в аксиально симметричных системах уже было рассмотрено в гл. 1, § 2, при условии, что \mathbf{B} имеет составляющую заметной величины, параллельную оси симметрии.

Сначала рассмотрим системы, в которых магнитные силовые линии представляют собой окружности, т. е. B_r и B_z равны нулю, а B_θ не зависит от θ . Это как раз такой случай, где рассуждения гл. 1, § 2 неприменимы, так как $\Phi(r, z)$ обращается в нуль. Макроскопическое уравнение (4.1) приводит здесь к сравнительно простому результату. Если взять rot от обеих частей уравнения (4.1), то левая часть обращается в нуль; из θ -компоненты правой части получаем

$$\frac{\partial}{\partial z} (j_z B_\theta) + \frac{\partial}{\partial r} (j_r B_\theta) = 0. \quad (4.46)$$

Подставляя сюда j_r и j_z из (4.23) и (4.25), приходим к результату

$$\frac{1}{r} \frac{\partial B_\theta^2}{\partial z} = 0. \quad (4.47)$$

Поскольку r конечно, компонента B_θ не зависит от z , так что давление p также не должно зависеть от z . Поэтому, например, простое тороидальное поле B_θ не может удерживать плазму в конечном объеме, а

разряд, сжимаемый внешним полем, не может находиться в равновесии, если он имеет тороидальную форму. Физически этот результат можно объяснить дрейфами частиц, обусловленными неоднородностью поля B_0 . Из-за этих дрейфов возникает электрический ток в направлении z , и если B_0 изменяется с z , то дивергенция тока отлична от нуля. Этот же самый результат можно также получить непосредственно из макроскопических уравнений; если решить уравнение (2.20) относительно тока \mathbf{j} , считая магнитное поле B_0 чисто тороидальным полем и пренебрегая гравитационным потенциалом, то нетрудно убедиться, что $\nabla \cdot \mathbf{j}$ не обратится в нуль, пока не будет выполнено равенство (4.47).

Теперь рассмотрим противоположный случай, когда линии электрического тока представляют собой окружности, охватывающие ось симметрии. При этих условиях поле B_0 тождественно равно нулю. Если ток j_0 течет только в газе, то, как легко показать, равновесие невозможно; чтобы поддерживать такое расположение токов, должен течь ток во внешних проводниках. Конфигурация плазмы определяется как геометрией, так и относительной величиной этих внешних токов. Возможно большое разнообразие положений равновесия. Одним предельным случаем, когда величина этих внешних токов минимальна, является самосжимающийся разряд тороидальной формы. Другим предельным случаем аксиально симметричной плазмы с круговыми токами является плазма, удерживаемая между двумя магнитными зеркалами, внешние токи в которых намного превосходят токи в плазме. Как мы уже убедились в гл. 1, § 3, удержание между магнитными зеркалами возможно только при анизотропном распределении по скоростям. В этом более общем случае градиент давления ∇p в выражении (4.1) следует заменить на $\nabla \cdot \Psi$, где теперь тензор Ψ имеет компоненты p_{\perp} в двух направлениях, перпендикулярных к \mathbf{B} , и компоненту p_{\parallel} в направлении \mathbf{B} . Так как локальная система координат, в кото-

рой тензор Ψ диагонален, меняется от точки к точке, величина $\nabla \cdot \Psi$ может быть отличной от нуля даже при постоянных p_{\parallel} и p_{\perp} . После некоторых алгебраических преобразований найдем, что составляющая этого обобщенного уравнения (4.1), параллельная полю \mathbf{B} , имеет вид

$$\nabla_{\parallel} p_{\parallel} = (p_{\parallel} - p_{\perp}) \frac{\nabla_{\parallel} B}{B}, \quad (4.48)$$

где ∇_{\parallel} означает составляющую градиента в направлении магнитного поля. Так как p_{\perp} равно $nm\omega_{\perp}^2/2$, то уравнение (4.48) при условии малости p_{\perp} по сравнению с p_{\parallel} переходит в обычное уравнение гидростатического равновесия [уравнение (4.14), где $B=0$], в котором ускорение силы тяжести g заменено на ускорение диамагнитной частицы из-за градиента магнитного поля [см. уравнение (1.24)].

Возможны и такие равновесные конфигурации с электрическим током, текущим по окружностям вокруг оси симметрии, которые представляют собой нечто среднее между магнитным зеркалом и самосжимающейся тороидальной плазмой [6]. В этих системах внешнее поле B_z вносит существенный вклад в удержание, но в тороидальной плазме возникает достаточно большой ток, который ослабляет или даже обращает поле B_z , пронизывающее тор.

Возможны также, конечно, аксиально симметричные поля более общего вида, в которых линии тока и силовые линии магнитного поля не являются окружностями. Если предположить, что в тороидальной плазме, сжимаемой внешним полем, имеется малый ток j_{θ} , то состояние равновесия оказывается возможным [3, 18]; силовые линии уже не являются замкнутыми, а возникающие из-за дрейфа токовые дивергенции гасятся токами, параллельными \mathbf{B} . Равновесие может быть достигнуто и в отсутствие токов в плазме, если только использовать более сложные внешние поля, не обладающие аксиальной симмет-

рией [20]. Такие сложные поля, применяемые в стеллараторе, важны для устойчивого удержания плазмы, но их рассмотрение выходит за рамки этой книги.

ЛИТЕРАТУРА

1. Bennett W., Phys. Rev., 45, 890 (1934).
2. Bernstein I. B., Frieman E. A., Kruskal M. D., Kulsrud R., Proc. Roy. Soc., A244, 17 (1958). (Имеется перевод в сборнике: «Управляемые термоядерные реакции», Атомиздат, 1960, стр. 226.)
3. Biermann L., Hain K., Jörgens K., Lüst R., Zs. Naturforsch., 12a, 826 (1957). (Имеется перевод в сборнике: «Управляемые термоядерные реакции, Атомиздат, 1960, стр. 151.)
4. Chandrasekhar S., Kaufman A. N., Watson K. M., Proc. Roy. Soc., A245, 435 (1958).
5. Colgate S. A., Furth H. P., Phys. Fluids, 3, 982 (1960).
6. Christofilos N. C., Proc. Second United Nations Internat. Conf. on Peaceful Uses of Atomic Energy, Geneva, 1958, V. 32, p. 279. [Имеется перевод в сборнике: «Труды Второй международной конференции по мирному использованию атомной энергии». (Избранные доклады иностранных ученых), т. 1 (Физика горячей плазмы и термоядерные реакции), Атомиздат, 1959, стр. 597.]
7. Curzon F. L., Folkierski A., Latham R., Nation J. A., Proc. Roy. Soc., A257, 386 (1960).
8. Долгов-Савельев Г. Г., Мухоматов В. С., Стрелков В. С., Шепелев М. Н., Явлинский Н. А., ЖЭТФ, 38, 394 (1960); также опубликовано в сборнике: Proceeding of the Fourth International Conference on Ionization Phenomena in Gases, Uppsala, Amsterdam, 1960, V. II, p. 947.
9. Hain K., Lüst R., Schlüter A., Zs. Naturforsch., 12a, 833 (1957). (Имеется перевод в сборнике: «Управляемые термоядерные реакции», Атомиздат, 1960, стр. 165.)
10. Kruskal M. D., Johnson J. L., Gottlieb M. B., Goldman L. M., Phys. Fluids, 1, 421 (1958).

11. Kruskal M. D., Schwarzschild, Proc. Roy. Soc., **A223**, 348 (1954). (Имеется перевод в сборнике: «Проблемы современной физики», ИЛ, 1956, № 2, стр. 108.)
12. Kruskal M. D., Tuck J. L., Proc. Roy. Soc., **A245**, 222 (1958).
13. Parker E. N., Phys. Rev., **109**, 1874 (1958).
14. Post R. F., Perkins W. A., Phys. Rev. Lett., **6**, 85 (1961).
15. Rosenbluth M. N., Longmire C. L., Ann. Phys., **1**, 120 (1957). (Имеется перевод в сборнике: «Проблемы современной физики», ИЛ, 1958, № 1, стр. 99.)
16. Сагдеев Р. З., Кадомцев Б. Б., Рудаков Л. И., Веденов А. А., см. в сборнике: «Труды Второй международной конференции по мирному использованию атомной энергии». (Доклады советских ученых), т. 1 (Ядерная физика), Атомиздат, 1959, стр. 152.
17. Шафранов В. Д., см. в сборнике: «Физика плазмы и проблемы управляемых термоядерных реакций», т. 2, Издательство АН СССР, 1958, стр. 130.
18. Шафранов В. Д., ЖЭТФ, **33**, 710 (1957).
19. Spitzer L., Astrophys. Journ., **116**, 299 (1952). (Имеется перевод в сборнике: «Проблемы современной физики», № 2, ИЛ, 1956, стр. 26.)
20. Spitzer L., Phys. Fluids, **1**, 253 (1958).
21. Tayler R. J., Proc. Phys. Soc., **B70**, 31 (1957). (Имеется перевод в сборнике: «Управляемые термоядерные реакции», «Атомиздат, 1960, стр. 47.)

СТОЛКНОВЕНИЯ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ

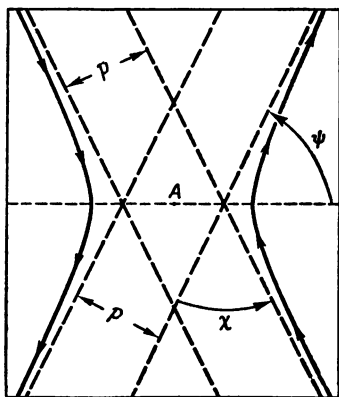
Если газ находится в состоянии термодинамического равновесия, то столкновения частиц представляют малый интерес, так как они не влияют на состояние газа. Однако, чтобы исследовать неравновесные явления, необходимы количественные данные о процессах столкновений. Следует различать два вида неравновесных состояний. Газ может находиться в состоянии, далеком от равновесного, и желательно знать скорость установления равновесия. Например, проходящий через плазму пучок частиц рассеивается и замедляется, или кинетические температуры электронов и ионов могут быть различными (и тогда эти температуры постепенно выравниваются). Другим видом неравновесных состояний являются установившиеся неравновесные состояния. Примером может служить протекание электрического тока или перенос тепла в газе; для анализа этих явлений используются коэффициенты переноса, такие, как электрическое сопротивление η и коэффициент теплопроводности κ .

В настоящей главе мы будем исследовать эффекты столкновений и применим полученные результаты для изучения этих двух видов неравновесных явлений. Электростатические силы взаимодействия частиц имеют значительно больший радиус действия, чем силы между нейтральными атомами. Поэтому необходимо принимать во внимание не только близкие столкновения между заряженными частицами, которые могут полностью изменить их скорости, но и так называемые далекие столкновения, каждое из которых дает настолько малый эффект, что термин *столк-*

новение едва ли здесь даже уместен. Сначала мы рассмотрим такие далекие взаимодействия и изложим методы их количественного описания, которые затем используем в последующих параграфах этой главы.

§ 1. Далекие столкновения

Когда две заряженные частицы проходят на некотором расстоянии друг от друга, каждая частица движется по гиперболе относительно их общего центра масс. В той системе координат, где центр масс покоится, движение обеих частиц происходит в одной



Фиг. 10. Траектории движения двух одинаково заряженных частиц при столкновении.

Система координат выбрана так, что центр тяжести, находящийся в точке A , неподвижен.

плоскости, называемой *орбитальной плоскостью*. Траектории обеих частиц в этой плоскости изображены на фиг. 10 для случая двух одинаковых частиц; центр тяжести находится в точке A , пунктирные жирные линии представляют собой асимптоты обеих гипербол.

Если обозначить относительную скорость двух частиц $w_1 - w_2$ через u , а минимальное расстояние между ними в отсутствие сил, называемое *параметром столкновения*, через p , то угловое отклонение каждой

частицы χ будет определяться выражением

$$\chi = \pi - 2\psi, \quad (5.1)$$

где

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{M \rho u^2}{Z_1 Z_2 e^2}. \quad (5.2)$$

Величины $Z_1 e/c$ и $Z_2 e/c$ представляют собой заряды частиц в единицах системы CGSM, а M — приведенная масса, определяемая формулой

$$\frac{1}{M} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}. \quad (5.3)$$

Найдем сначала условия, при которых частица массы m_1 в результате столкновения отклоняется на 90° . Чтобы упростить анализ, рассмотрим сначала случай, когда m_2 значительно больше m_1 , и будем считать более тяжелую частицу неподвижной; отклонение χ тогда будет истинным отклонением легкой частицы в той системе координат, где макроскопическая скорость газа v равна нулю. Из выражения (5.1) видно, что угол χ равен $\pi/2$, когда $\operatorname{tg} \psi$ равен единице. Таким образом, легкая частица отклоняется на угол 90° , когда потенциальная энергия на расстоянии ρ в 2 раза больше начальной кинетической энергии. Обозначая эту величину параметра столкновения через ρ_0 , имеем

$$\rho_0 = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{m_1 w_1^2}. \quad (5.4)$$

Очевидно, поперечное сечение для столкновений с $\chi \geq 90^\circ$ равно $\pi \rho_0^2$.

В обычном газе, состоящем в основном из нейтральных частиц, происходят главным образом *близкие столкновения*, при которых частицы отклоняются на большие углы. Если мы назовем *близким столкновением* взаимодействие, приводящее к отклонению на 90° или больше, то промежуток времени между двумя близкими столкновениями будет тогда хорошим приближением к действительному времени между столк-

новениями, которое мы обозначим через t_c . Имеем

$$t_c = \frac{1}{\pi n_2 w_1 p_0^2}, \quad (5.5)$$

где n_2 — число частиц с массой m_2 в 1 см^3 .

Для газа, состоящего из заряженных частиц, выражение (5.5) является очень грубым приближением: оно дает слишком большую среднюю длину свободного пробега, превышающую истинную более чем на порядок величины. Причина этого состоит в том, что с увеличением расстояния электростатические силы спадают гораздо медленнее, чем силы, действующие между нейтральными атомами. Поэтому при прохождении двух частиц на расстоянии, значительно превосходящем p_0 , отклонением χ уже нельзя пренебрегать, а так как число таких «далеких столкновений» велико, то их действие превышает эффекты близких столкновений.

Точнее говоря, из приведенных выше уравнений следует, что при p , гораздо большем p_0 , ψ стремится к $1/2\pi - p_0/p$; тогда отклонение χ равно $2p_0/p$, т. е. сравнительно медленно уменьшается с ростом p . Если бы все столкновения вызывали отклонения в одном и том же направлении, то далекие столкновения приводили бы к огромному эффекту, так как число столкновений с параметром столкновения между p и $p+dp$ пропорционально $2\pi p dp$. В действительности отклонения имеют случайные направления и почти гасят друг друга. Поэтому для анализа далеких столкновений необходима статистическая теория, которая рассматривает эффекты, вызванные большим числом малых случайных изменений скорости. Основные понятия, используемые в этой теории, приведены в следующем параграфе.

§ 2. Диффузионные коэффициенты

Проследим за отдельной частицей, движущейся через ионизованный газ. Назовем эту частицу *пробной частицей*. Пробная частица имеет массу m ,

заряд Ze/c и скорость w . Частицы, с которыми пробные частицы сталкиваются, назовем *полевыми частицами* в соответствии с терминологией Чандрасекара [6]. Примем для простоты, что все полевые частицы имеют одинаковую массу m_f и заряд $Z_f e/c$. Распределение по скоростям у полевых частиц может быть любым.

При своем движении пробная частица испытывает много отклонений, но эти отклонения большей частью малы. Вместо довольно сложного в математическом отношении суммирования последовательных угловых отклонений мы рассмотрим изменение скорости пробной частицы Δw . Направим ось z вдоль скорости w и рассмотрим сначала составляющую Δw вдоль оси x . Если $(\Delta w_x)_j$ представляет собой изменение этой составляющей при j -м столкновении, то полное изменение w_x за N столкновений дается выражением

$$\Delta w_x = (\Delta w_x)_1 + (\Delta w_x)_2 + \dots + (\Delta w_x)_N = \sum_j (\Delta w_x)_j. \quad (5.6)$$

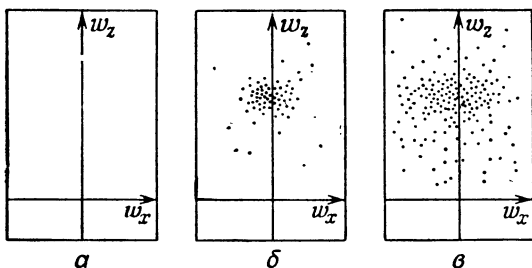
Предположим, что последовательные столкновения случайны. Тогда невозможно предсказать, каково точное значение Δw_x . Однако если рассмотреть много пробных частиц, движущихся первоначально в одном и том же направлении с одинаковой скоростью и испытывающих N столкновений, то можно усреднить Δw_x по всем этим частицам. Обозначим такое усредненное значение через $\overline{\Delta w_x}$. Если распределение по скоростям в газе изотропно, то величина $\overline{\Delta w_x}$ будет, очевидно, вследствие симметрии равняться нулю. Однако при этом $\overline{\Delta w_z}$ не обязательно обращается в нуль.

Средний квадрат величины Δw_x не равен нулю. Этот средний квадрат содержит члены вида $(\Delta w_x)_j^2$, а также члены вида $(\Delta w_x)_j (\Delta w_x)_k$. Если отклонение $(\Delta w_x)_j$ при каждом столкновении мало, то повторные столкновения дадут такие же средние скорости, как и первые столкновения. Поэтому все N членов $(\Delta w_x)_j^2$

одинаковы. С другой стороны, все перекрестные члены должны исчезнуть при усреднении по всем рассматриваемым частицам, поскольку последовательные столкновения не коррелированы между собой. Отсюда следует

$$\overline{(\Delta w_x)^2} = N \overline{(\Delta w_x)^2}_j. \quad (5.7)$$

Если мы изобразим скорость каждой пробной частицы точкой на плоскости (в пространстве скоростей), как показано на фиг. 11, то для рассматриваемой группы частиц первоначально все изображающие



Фиг. 11. Диффузия пробных частиц в пространстве скоростей.

а — начальное состояние; б — после N столкновений; в — после $10 N$ столкновений.

точки будут совпадать (см. фиг. 11, а). После N и $10 N$ столкновений точки разойдутся по плоскости, как изображено на фиг. 11, б и в соответственно. Разброс точек возрастает по закону $N^{1/2}$, но может иметь различные значения для разных направлений. Центр тяжести всей группы может переместиться на расстояние, пропорциональное N . При этом, конечно, предполагается, что пробные частицы, изображенные точками на плоскости, представляют собой лишь малую часть всех рассматриваемых частиц.

Мы видим, что в результате последовательных столкновений распределение по скоростям группы заряженных частиц постепенно расширяется. Этот

эффект аналогичен явлению диффузии частиц в обычном газе, и мы можем говорить, что столкновения вызывают диффузию в пространстве скоростей.

Чтобы оценить скорость диффузии в направлении ω_x , будем считать N в уравнении (5.7) равным среднему числу столкновений в 1 сек, включая столкновения всех видов. Получающуюся при этом выборе N величину $\overline{(\Delta\omega_x)^2}$ обозначим $\langle(\Delta\omega_x)^2\rangle$. Эта величина, характеризующая увеличение дисперсии скоростей группы частиц в 1 сек, называется *диффузионным коэффициентом*. Соответствующие выражения $\langle\Delta\omega_x\rangle$ и $\langle(\Delta\omega_x)(\Delta\omega_y)\rangle$ также представляют собой диффузионные коэффициенты, которые обращаются в нуль вследствие симметрии, если полевые частицы имеют изотропное распределение по скоростям. Аналогично определяются диффузионные коэффициенты и для других направлений.

В принципе можно найти диффузионные коэффициенты при любом распределении полевых частиц по скоростям. Наиболее важным является кинетически равновесное распределение, или распределение Максвелла — Больцмана, которое можно написать в виде

$$f^{(0)}(\omega) = \frac{nl^3}{\pi^{3/2}} e^{-l^2\omega^2}, \quad (5.8)$$

где n — плотность рассматриваемых частиц; величина l связана с массой частиц m и температурой T равенством

$$l^2 \equiv \frac{m}{2kT}. \quad (5.9)$$

Выражение (5.8) дает плотность частиц в 1 $см^3$ и в единице фазового объема; его следует умножить на $4\pi\omega^2$, чтобы получить число частиц в 1 $см^3$, приходящееся на единицу интервала абсолютной величины скорости независимо от направления.

Если можно считать, что функция распределения полевых частиц дается формулой (5.8), то достаточно определить три независимых диффузионных коэффициента: $\langle\Delta\omega_{\parallel}\rangle$, $\langle(\Delta\omega_{\parallel})^2\rangle$ и $\langle(\Delta\omega_{\perp})^2\rangle$. Первый из них

равен $\langle \Delta\omega_z \rangle$ в системе координат, используемой в этом параграфе. Эта величина, вообще говоря, отрицательная, характеризует торможение движущихся пробных частиц из-за взаимодействия с полевыми частицами. Чандрасекар [7] назвал этот диффузионный коэффициент *коэффициентом динамического трения*. Величина $\langle (\Delta\omega_{\parallel})^2 \rangle$, или $\langle (\Delta\omega_z)^2 \rangle$ в нашем обозначении, дает скорость нарастания $(\Delta\omega)^2$ в направлении, параллельном первоначальной скорости движения пробных частиц. Соответствующая величина $\langle (\Delta\omega_{\perp})^2 \rangle$ представляет собой скорость нарастания $(\Delta\omega)^2$ в перпендикулярном направлении и равна удвоенному значению $\langle (\Delta\omega_x)^2 \rangle$ или $\langle (\Delta\omega_y)^2 \rangle$.

Чтобы проиллюстрировать рассмотренные основные положения, вычислим $\langle (\Delta\omega_{\perp})^2 \rangle$ в простом случае, когда масса полевой частицы m_f значительно больше массы пробных частиц m , так что скорость частиц m_f можно считать равной нулю. Обычно при вычислении диффузионного коэффициента приходится интегрировать по распределению скоростей полевых частиц, но в данном простом случае необходимость в таком интегрировании отпадает.

Когда скорость ω_f пренебрежимо мала, из (5.1) получаем

$$(\Delta\omega_{\perp})^2 = \omega^2 \sin^2 \chi = 4\omega^2 \sin^2 \psi \cos^2 \psi. \quad (5.10)$$

Исключая ψ с помощью формул (5.2) и (5.4), находим

$$(\Delta\omega_{\perp})^2 = \frac{4\omega^2 (p/p_0)^2}{[1 + (p/p_0)^2]^2}. \quad (5.11)$$

Для усреднения по всем пробным частицам заметим, что число столкновений, для которых параметр столкновения находится между p и $p + dp$, равно $2\pi p \omega n_f dp$ в 1 сек. Отсюда следует

$$\langle (\Delta\omega_{\perp})^2 \rangle = 8\pi n_f \omega^3 p_0^2 \int_0^{p_m/p_0} \frac{x^3 dx}{(1+x^2)^2}. \quad (5.12)$$

При бесконечном верхнем пределе этот интеграл расходится. Если введенный нами — пока произвольно —

параметр обрезания ρ_m/ρ_0 велик по сравнению с единицей, то приближенно получим

$$\langle(\Delta\omega_{\perp})^2\rangle = 8\pi n_f \omega^3 \rho_0^2 \ln \frac{\rho_m}{\rho_0}. \quad (5.13)$$

Остается оценить расстояние обрезания ρ_m . На первый взгляд ρ_m следовало бы отождествить со средним расстоянием между полевыми частицами, равным примерно $n_f^{-1/3}$; при больших расстояниях на пробную частицу будут одновременно действовать много полевых частиц, так что уравнением (5.1) пользоваться нельзя. Однако Коэн, Спитцер и Роутли [9] показали, что в ряде простых случаев отклонения, вызываемые полевыми частицами при прохождении на расстояниях, больших, чем $n_f^{-1/3}$ правильно описываются формулами, выведенными в предположении парных столкновений. Физически это объясняется тем, что статистические флуктуации плотности заряда проносятся с той же средней скоростью, что и полевые частицы, и эти флуктуации вызывают отклонения, которые следует учитывать. Как показали Пайнс и Бом [27], на расстояниях, превосходящих h , флуктуации плотности заряженных частиц уже не являются случайными, а ослабляются макроскопическими электрическими силами. Поэтому мы будем считать величину ρ_m , равной h , причем h определяется формулой (2.3). Более точные исследования Ренда [28] и других приводят фактически к тому же результату. Так как логарифмический член изменяется медленно, мы будем брать обычно среднее значение ρ_0 для всех пробных частиц, заменяя $m\omega^2$ на $3kT$. Тогда

$$\Lambda \equiv \left(\frac{h}{\rho_0}\right) = \frac{3}{2ZZ_f e^3} \left(\frac{k^3 T^3}{\pi n_e}\right)^{1/2}. \quad (5.14)$$

В этом соотношении мы пренебрегли экранировкой положительными ионами.

Когда температура электронов превышает приблизительно $4 \cdot 10^{50}$ К, величина Λ должна быть несколько

уменьшена по сравнению со значением, даваемым формулой (5.14). Это связано с квантовомеханическими эффектами. Электронная волна, проходящая через круглое отверстие радиуса r , отклоняется из-за диффракции на угол $\lambda/2\pi r$, где λ — длина волны электрона. Если это отклонение превосходит классическое отклонение $2r_0/r$, то предыдущие выражения следует видоизменить; в соответствии с результатами Маршака [24] единственное необходимое изменение заключается в умножении Λ на отношение $2\alpha c/\omega$, где α — постоянная тонкой структуры, равная $1/137$. Это означает, что величину Λ , даваемую выражением (5.14), нужно при T , превышающем $4,2 \cdot 10^5$ К, умножить на $(4,2 \cdot 10^5/T)^{1/2}$. Для столкновений между ионами квантовомеханическая поправка незначительна. Значения $\ln \Lambda$ для электронно-протонного газа приведены в табл. 1. При высоких плотностях и низких

Таблица 1

ЗНАЧЕНИЯ $\ln \Lambda$

$T, \text{ }^\circ\text{K}$	Плотность электронов $n_e, \text{ см}^{-3}$								
	1	10^3	10^6	10^9	10^{12}	10^{15}	10^{18}	10^{21}	10^{24}
10^2	16,3	12,8	9,43	5,97					
10^3	19,7	16,3	12,8	9,43	9,57				
10^4	23,2	19,7	16,3	12,8	9,43	5,97			
10^5	26,7	23,2	19,7	16,3	12,8	9,43	5,97		
10^6	29,7	26,3	22,8	19,3	15,9	12,4	8,96	5,54	
10^7	32,0	28,5	25,1	21,6	18,1	14,7	11,2	7,85	4,39
10^8	34,3	30,9	27,4	24,0	20,5	17,0	13,6	10,1	6,69

температурах теория неприменима, и поэтому значения $\ln \Lambda$ не приводятся.

Точные вычисления диффузионных коэффициентов были выполнены Чандрасекаром [6, 7], который учел движение центра масс сталкивающихся частиц. Окончательные формулы для трех диффузионных коэффи-

центов имеют вид

$$\langle \Delta w_{\perp} \rangle = -A_D l_f^2 \left(1 + \frac{m}{m_f} \right) G(l_f w), \quad (5.15)$$

$$\langle (\Delta w_{\parallel})^2 \rangle = \frac{A_D}{w} G(l_f w), \quad (5.16)$$

$$\langle (\Delta w_{\perp})^2 \rangle = \frac{A_D}{w} \{ \Phi(l_f w) - G(l_f w) \}, \quad (5.17)$$

где *диффузионная постоянная* A_D определяется соотношением

$$A_D = \frac{8\pi e^4 n_f Z^2 Z_f^2 \ln \Lambda}{m^2}, \quad (5.18)$$

$\Phi(x)$ — обычный интеграл ошибок:

$$\Phi(x) = \frac{2}{\pi^{1/2}} \int_0^x e^{-y^2} dy, \quad (5.19)$$

а функция $G(x)$ связана с $\Phi(x)$ формулой

$$G(x) = \frac{\Phi(x) - x\Phi'(x)}{2x^2}. \quad (5.20)$$

Значения G и разности $\Phi - G$ приведены в табл. 2. Из (5.9) сразу следует, что при стремлении m_f к бесконечности величина l_f также становится бесконечной. Тогда разность $\Phi(l_f w) - G(l_f w)$ стремится к единице, и выражение (5.17) переходит в (5.13). Входящая во все уравнения величина $l_f w$ есть, как видно из (5.9), просто отношение скорости w к среднеквадратичной двумерной скорости полевых частиц.

При выводе соотношений (5.15) — (5.17) были оставлены только члены, пропорциональные $\ln \Lambda$. Чандрасекар назвал их *основными членами*. Из табл. 1 легко видеть, что $\ln \Lambda$, который обычно примерно равен отношению основных членов к неосновным членам, вообще говоря, не очень велик. В некоторых частных случаях неосновные члены в действительности превышают основные. В точной формуле для $\langle (\Delta w_{\parallel})^2 \rangle$, например, члены, отброшенные в вы-

Таблица 2

ЗНАЧЕНИЯ $G(x)$ и $\Phi(x) - G(x)$

x	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
$G(x)$	0	0,037	0,073	0,107	0,137	0,162	0,183	0,198	0,208	0,213
$\Phi(x) - G(x)$	0	0,075	0,149	0,221	0,292	0,358	0,421	0,480	0,534	0,584
x	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9
$G(x)$	0,214	0,211	0,205	0,196	0,186	0,175	0,163	0,152	0,140	0,129
$\Phi(x) - G(x)$	0,629	0,669	0,706	0,738	0,766	0,791	0,813	0,832	0,849	0,863
x	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0	5,0	6,0	7,0	8,0	10,0
$G(x)$	0,119	0,080	0,056	0,041	0,031	0,020	0,014	0,010	0,008	0,005
$\Phi(x) - G(x)$	0,876	0,920	0,944	0,959	0,969	0,980	0,986	0,990	0,992	0,995

ражении (5.16), на самом деле больше оставленных при $l_f^2 \omega^2$, превосходящем величину $\ln \Lambda$. Более того, когда $l_f \omega$ велико, сама величина коэффициента $\langle (\Delta \omega_{\parallel})^2 \rangle$ уже не характеризует увеличение дисперсии скорости в направлении первоначальной скорости. Скорость роста дисперсии в направлении движения частицы, строго говоря, определяется разностью $\overline{(\Delta \omega_{\parallel})^2} - (\overline{\Delta \omega_{\parallel}})_j^2$, просуммированной по всем столкновениям j в единицу времени. Сумма величин $(\overline{\Delta \omega_{\parallel}})_j^2$ не является основным членом, поэтому она была отброшена, но при больших $l_f \omega$ такое приближение уже несправедливо. Итак, выражение (5.16) становится неточным, когда скорости пробных частиц значительно превосходят скорости полевых частиц. Для двух других диффузионных коэффициентов неосновные члены играют меньшую роль, и ими обычно можно пренебречь.

Из формул (5.15) — (5.17) сразу следует ряд интересных физических выводов. Когда ω равно нулю, величина $\langle \Delta \omega_{\parallel} \rangle$ также обращается в нуль и различие между смещениями, параллельными и перпендику-

лярными к ω , должно исчезнуть. Однако, поскольку выражение $\langle(\Delta\omega_{\perp})^2\rangle$ включает два направления, а $\langle(\Delta\omega_{\parallel})^2\rangle$ только одно, первая из этих величин при пренебрежимо малой скорости ω в 2 раза превосходит вторую. В другом предельном случае, когда скорость ω превосходит хаотическую скорость полевых частиц, величина $\langle(\Delta\omega_{\perp})^2\rangle$ стремится к A_D/ω , в то время как $\langle(\Delta\omega_{\parallel})^2\rangle$ становится меньше в $2l_f^2\omega^2$ раз. Когда группа пробных частиц движется быстрее, чем полевые частицы, диффузия соответствующих точек в пространстве скоростей происходит главным образом вбок, т. е. перпендикулярно к первоначальной скорости. Однако если $l_f^2\omega^2$ превышает $\ln \Lambda$, то отношение величины $\langle(\Delta\omega_{\parallel})^2\rangle$ к $\langle(\Delta\omega_{\perp})^2\rangle$ уменьшается уже не так быстро, поскольку соотношение (5.16) больше не является хорошим приближением.

С увеличением m при постоянных m_f , l_f и ω величина $\langle\Delta\omega_{\parallel}\rangle$ постепенно становится большей по сравнению с двумя другими коэффициентами, хотя с уменьшением A_D все коэффициенты делаются малыми. Как увидим в следующем параграфе, для пробных частиц большой массы, движущихся с заметными скоростями среди частиц меньшей массы, замедление из-за динамического трения значительно важнее, чем увеличение дисперсии скоростей, обусловленное двумя другими коэффициентами.

§ 3. Времена релаксации

Понятие *время релаксации* часто используется для обозначения времени, в течение которого столкновения вызывают значительное изменение некоторого начального распределения по скоростям. Из-за множественности характеристик этого распределения такое определение вряд ли является четким. Можно ввести несколько времен, определяемых через диффузионные коэффициенты, каждое из которых по-своему характеризует быстроту изменения распределения по скоростям из-за столкновений заряженных частиц.

Временем между столкновениями, т. е. величиной, обратной частоте столкновений, можно считать промежуток времени, за который пробная частица отклоняется на 90° в результате постепенного накопления малых отклонений. Точнее говоря, можно определить *время отклонения* t_D соотношением

$$\langle (\Delta w_\perp)^2 \rangle t_D = w^2. \quad (5.21)$$

Если бы диффузионный коэффициент $\langle (\Delta w_\perp)^2 \rangle$ оставался постоянным при медленной диффузии пробных частиц в пространстве скоростей, то в этом случае за время t_D среднеквадратичная величина $\sin \chi$, где χ — угол отклонения, возросла бы до единицы, что соответствует среднему отклонению на 90° . Однако лишь в особых случаях — например, при движении электронов среди почти неподвижных тяжелых ионов — возможно такое простое истолкование.

Подставив диффузионный коэффициент, определяемый выражением (5.17), получим

$$t_D = \frac{w^3}{A_D \{ \Phi(l_f w) - G(l_f w) \}} = \frac{1}{8\pi n_f w p_0^2 (\Phi - G) \ln \Lambda}, \quad (5.22)$$

где p_0 дается формулой (5.4). Когда масса m_f велика и, следовательно, велика величина $l_f w$, Φ стремится к единице, а G обращается в нуль. Значение t_D , определяемое выражением (5.22), меньше в $8 \ln \Lambda$ раз, чем то значение, которое получается из формулы (5.5) для случая близких столкновений. Из табл. 1 видно, что множитель $1/(8 \ln \Lambda)$ может быть меньше 0,01.

Далее можно ввести *время обмена энергией*, определяя его соотношением

$$\langle (\Delta E)^2 \rangle t_E = E^2. \quad (5.23)$$

Изменение энергии ΔE за одно столкновение дается выражением

$$\Delta E = \frac{m}{2} \{ 2w \Delta w_\parallel + (\Delta w_\parallel)^2 + (\Delta w_\perp)^2 \}. \quad (5.24)$$

Если оставить только основные члены, то $\langle (\Delta E)^2 \rangle$ равно $m^2 \omega^2 \langle (\Delta \omega_{\parallel})^2 \rangle$. Из соотношения (5.23) окончательно получаем

$$t_E = \frac{\omega^3}{4A_D G (l_f \omega)}. \quad (5.25)$$

Величина отношения t_D/t_E , полученная путем деления (5.22) на (5.25), приведена в табл. 3. Для

Таблица 3

ОТНОШЕНИЕ ВРЕМЕН РЕЛАКСАЦИИ

$l_f \omega$	0,0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4
t_D/t_E	2,00	1,99	1,88	1,74	1,56	1,36	1,16	0,97
$l_f \omega$	1,6	1,8	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0	5,0
t_D/t_E	0,80	0,66	0,54	0,35	0,24	0,17	0,13	0,082

больших значений $l_f \omega$ эта величина отношения t_D/t_E определена не очень надежно, так как на t_E начинают влиять неосновные члены. Чандрасекар [5] рассмотрел вклад неосновных членов в $\langle (\Delta E)^2 \rangle$, однако он не учел добавочных членов, необходимых для получения истинной скорости увеличения дисперсии E . Он показал, что при очень больших $l_f \omega$ нужно в формуле (5.25) заменить $G \ln \Lambda$ на $0,5(1 + m_j/m)^{-2}$. Физически очевидно, что t_E при $m_j/m \rightarrow \infty$ должно стремиться к бесконечности, а скорости полевых частиц должны обратиться в нуль. В этом случае пробные частицы движутся в заданном потенциальном поле, так что их энергия сохраняется.

Важным частным случаем является взаимодействие группы частиц друг с другом. Если рассматривать частицы, скорости которых равны среднеквадратичной величине скорости для этой группы, то произведение $l\omega$ равно $(1,5)^{1/2}$, или 1,225, так что t_D/t_E составляет 1,14. Таким образом, в этом случае t_D приблизительно равно t_E и служит мерой как време-

ни, в течение которого существенно уменьшается анизотропность распределения по скоростям, так и времени, за которое распределение по кинетическим энергиям приближается к максвелловскому распределению. Мы отметим это частное значение t_D при $l\omega$, равном $(1,5)^{1/2}$, символом t_c и назовем его *временем самостолкновений* для группы взаимодействующих друг с другом частиц. Подставляя численные значения, из (5.22) получаем

$$t_c = \frac{m^{1/2} (3kT)^{3/2}}{8 \cdot 0,714 \pi n e^4 Z^4 \ln \Lambda} = \frac{11,4 A^{1/2} T^{3/2}}{n Z^4 \ln \Lambda} \text{ сек}, \quad (5.26)$$

где T выражается в градусах Кельвина. Мы положили массу m равной $A m_0$, где m_0 — масса единицы атомного веса. Для электронов атомный вес A равен $1/1836$, так что для нахождения времени самостолкновений электронов t_{ce} нужно в формуле (5.26) заменить $11,4 A^{1/2}/Z^4$ на $0,266$. Очевидно, t_{ce} меньше времени самостолкновений протонов в 43 раза, что равно отношению скоростей. Таким образом, средняя длина свободного пробега электронов, сталкивающихся с электронами, в точности равна средней длине свободного пробега протонов, сталкивающихся с протонами, при условии, что у них одинаковая кинетическая температура.

Значение t_c , даваемое равенством (5.26), определяет выбор величины γ , необходимой для вычисления T при адиабатическом сжатии [см. формулу (1.33)]. Если сжатие происходит медленно по сравнению с t_c , то величина γ равна $5/3$. Для случая быстрого сжатия величина γ равна 2 или 3 в зависимости от того, происходит ли сжатие перпендикулярно магнитным силовым линиям (двумерное сжатие) или параллельно \mathbf{B} (одномерное сжатие).

Интересно отметить, что, как вытекает из соотношений (5.18), (5.22) и (5.25), времена t_D и t_E не содержат явно m_f (m_f входит косвенно через l_f), но зависят от массы пробной частицы m , а именно пропорциональны m^2 . Для далеких столкновений, которые

здесь рассматриваются, частицы движутся почти прямолинейно, и ускорение полевых частиц за время столкновения относительно мало влияет на пробные частицы.

До сих пор мы рассматривали увеличение дисперсии скоростей и энергий пробных частиц. В некоторых случаях основной интерес представляет быстрота уменьшения средней скорости пробной частицы из-за столкновений. Поэтому введем еще *время замедления* t_s , определяемое соотношением

$$\langle \Delta w_{\parallel} \rangle t_s = -w. \quad (5.27)$$

Очевидно, величина средней скорости пробных частиц убывает с быстротой w/t_s . Если масса пробной частицы m значительно больше m_f , то средняя кинетическая энергия пробных частиц w уменьшается с быстротой $-2W/t_s$. Однако при $m \ll m_f$ время t_s характеризует скорее эффекты отклонений, чем потерю энергии.

Из уравнения (5.15) следует

$$t_s = \frac{w}{(1 + m/m_f) A_D l_f^2 G(l_f w)}. \quad (5.28)$$

Наиболее важны два предельных вида формулы (5.28). Если скорость w велика по сравнению со среднеквадратичной скоростью полевых частиц, то произведение $l_f w$ велико, а $l_f^2 G(l_f w)$ равно $1/2 w^2$ и время t_s пропорционально w^3 . С другой стороны, когда скорость w много меньше хаотической скорости полевых частиц, произведение $l_f w$ мало и t_s является приблизительно постоянной величиной, определяемой выражением

$$t_s = \frac{3\pi^{1/2}}{2(1 + m/m_f) A_D l_f^3} = 11,7 \frac{A^2 T_f^{3/2}}{(A + A_f) A_f^{1/2} n_f Z^2 Z_f^2 \ln \Lambda} \text{ сек.} \quad (5.29)$$

В области применимости формулы (5.29) средняя скорость пробных частиц экспоненциально стремится

к нулю с постоянной времени t_s . Уменьшение кинетической энергии W со временем можно получить путем усреднения равенства (5.24) и использования соотношений (5.15) — (5.17). Если отношение m/m_f велико, время спада кинетической энергии W равно $t_s/2$.

Точный численный расчет распределения по энергиям для дейтронов, инжектируемых в дейтериевую плазму, был проведен Кранцером [19]. Он показал, что в соответствии с (5.28) время термализации больше времени самостолкновений t_c для дейтериевой плазмы в $(A_i/A_e)^{1/2}$ раз, если скорость w инжектируемых ионов превосходит хаотическую скорость ионов плазмы приблизительно в $(A_i/A_e)^{1/6}$ раз, а вызывающие торможение электроны движутся быстрее, чем инжектируемые дейтроны. Если же скорость w больше тепловой скорости электронов, то время термализации еще больше и растет как w^3 .

Рассмотрим, наконец, скорость установления равномерного распределения энергии между двумя группами частиц. Предположим, что пробные и полевые частицы имеют максвелловские распределения по скоростям, но их кинетические температуры T и T_f различны. Используя соотношение (5.24) для нахождения $\langle \Delta E \rangle$ и усредняя его по максвелловскому распределению скоростей пробных частиц, получаем результат, найденный Спитцером [34],

$$\frac{dT}{dt} = \frac{T_f - T}{t_{eq}}, \quad (5.30)$$

где время установления равномерного распределения определяется выражением

$$\begin{aligned} t_{eq} &= \frac{3mm_f k^{3/2}}{8(2\pi)^{1/2} n_f Z^2 Z_f^2 e^4 \ln \Delta} \left(\frac{T}{m} + \frac{T_f}{m_f} \right)^{3/2} = \\ &= 5,87 \frac{AA_f}{n_f Z^2 Z_f^2 \ln \Delta} \left(\frac{T}{A} + \frac{T_f}{A_f} \right)^{3/2} \text{ сек.} \end{aligned} \quad (5.31)$$

Из (5.31) вытекает, что время t_{eq} можно считать постоянным, если средний квадрат относительной

скорости частиц, пропорциональный $(T/m) + (T_f/m_f)$, заметно не меняется. Если, кроме того, T_f также не меняется, то отклонение от равномерного распределения уменьшается по экспоненциальному закону с постоянной времени t_{eq} . При сохранении суммы $nT + n_f T_f$ постоянная времени для приближения к равновесию становится равной $t_{eq} \cdot (1 + n/n_f)^{-1}$.

Разберем теперь, что происходит, например, с протонно-электронным газом при произвольном начальном распределении по скоростям. Будем считать, что средние кинетические энергии электронов и протонов одинаковы по порядку величины. Столкновения электронов с протонами отклоняют электроны и приводят к изотропному распределению по скоростям, но незначительно меняют распределение электронов по кинетическим энергиям; отношение t_D/t_E мало для большой величины $l_f \omega$. Электрон-электронные столкновения постепенно устаноят для электронов максвелловское распределение по скоростям, в то время как протон-протонные столкновения приведут к соответствующему распределению по скоростям протонов, но при этом их кинетическая температура может отличаться от электронной температуры. Электроны из-за их большей скорости придут к максвелловскому равновесному распределению быстрее, чем протоны. Мы уже видели, что время t_c для электронов меньше, чем для протонов, в $\sqrt{A_p/A_e}$ раз, где под корнем стоит отношение массы протона к массе электрона, или в 43 раза. Окончательное уравнивание температур электронов и протонов происходит благодаря электрон-протонным столкновениям. Последние мало эффективны при обмене энергиями; поэтому t_{eq} содержит множитель $1/A_e^{1/2}$. Если пренебречь малым различием численных коэффициентов в выражениях (5.26) и (5.31), то время t_{eq} в 43 раза больше времени между столкновениями для протонов t_c и в 1836 раз больше соответствующего времени между столкновениями электронов.

§ 4. Электрическое сопротивление

Электрическое сопротивление η было определено формулой (2.13) как отношение скорости изменения плотности количества движения электронов P_{ei} , обусловленного столкновениями с ионами, к плотности тока j . При таком определении сопротивление η непосредственно связано с тепловым эффектом, возникающим при прохождении тока через среду с сопротивлением. Мощность, переходящая в теплоту в единице объема, равна силе, действующей на электроны из-за столкновений с ионами, умноженной на среднюю скорость дрейфа электронов относительно ионов. Первая из этих величин — это просто P_{ei} , а вторая равна cj/ne [см. уравнение (2.9)]. Уравнение (2.13) сразу дает выражение вида ηj^2 для омического, или джоулева нагрева. Таким образом, коэффициент η , использованный в предыдущих главах, всегда имеет простой физический смысл и тесно связан с диссипацией энергии электрическим током.

Более привычным является определение η как отношения E к j . Так как связь между E и j при наличии магнитного поля сложна, это обычное определение вряд ли целесообразно. Тем не менее во многих случаях закон Ома, как уже мы видели, выполняется, причем с η , определяемым через P_{ei} . Тогда, очевидно, не имеет значения, находится ли η из отношения P_{ei}/j или из отношения E/j , так как результат один и тот же. В частности, при отсутствии магнитного поля оба эти определения просто совпадают. Дальше будет показано, что точное вычисление сопротивления η поперек магнитного поля гораздо проще сделать непосредственно с помощью выражения (2.13), а не закона Ома.

Для оценки порядка величины η можно воспользоваться самой элементарной формой кинетической теории, в которой предполагается, что каждое столкновение вызывает большое отклонение. Количество движения, приобретаемое тогда электроном при

каждом столкновении, равно в среднем $m_e(v_i - v_e)$, где v_e и v_i — макроскопические скорости электронов и ионов. Число таких столкновений в 1 см^3 можно считать равным νn_e , где ν — частота столкновений электрона. Плотность тока равна $n_e e(v_i - v_e)/c$. Подставляя эти величины в выражение (2.13), получаем

$$\eta = \frac{m_e c^2 \nu}{n_e e^2}. \quad (5.32)$$

Эта известная элементарная формула для η является приближенной. В полностью ионизованном газе имеется некоторая неопределенность в выборе численного значения величины ν , которое следует использовать в соотношении (5.32).

Частота столкновений равна $1/t_D$; согласно формуле (5.22), t_D изменяется приблизительно как ω^3 для больших $l_f \omega$, т. е. весьма значительно в рассматриваемой области скоростей электронов.

Точный количественный расчет тока опирается на уравнение Больцмана для плотности электронов f в фазовом пространстве (см. приложение). Когда в однородной среде течет постоянный ток, производные $\partial f/\partial t$ и $\partial f/\partial x_i$ обращаются в нуль, и основное уравнение (П. 1) принимает вид

$$-\frac{\partial f(\mathbf{w})}{\partial \mathbf{w}} \frac{eE \cos \theta}{m_e c} = \left(\frac{\partial f(\mathbf{w})}{\partial t} \right)_{\text{coll}}, \quad (5.33)$$

где θ — угол между вектором скорости \mathbf{w} и электрическим полем \mathbf{E} . Выражение для $[\partial f(\mathbf{w})/\partial t]_{\text{coll}}$ было получено в общем виде Розенблютом, Мак Дональдом и Джаддом [29]. Решение этого уравнения далеко не простая задача.

Относительно простым является случай так называемого лоренцовского газа, т. е. полностью ионизованного газа, в котором, по предположению, электроны не взаимодействуют между собой, а ионы покоятся. В таком газе диффузионные коэффициенты очень просты, и для достаточно малого электрического поля \mathbf{E} можно найти f точно. Электрическое

сопротивление такого идеального лоренцовского газа, которое мы обозначим через η_L , дается формулой

$$\eta_L = \frac{\pi^{3/2} m_e^{1/2} Z e^2 c^2 \ln \Lambda}{2 (2kT)^{3/2}}, \quad (5.34)$$

где Z — заряд иона. Подставляя численные значения, находим

$$\begin{aligned} \eta_L &= 3,80 \cdot 10^{12} \frac{Z \ln \Lambda}{T^{3/2}} \text{ ед. CGSM} = \\ &= 3,80 \cdot 10^3 \frac{Z \ln \Lambda}{T^{3/2}} \text{ ом} \cdot \text{см}. \end{aligned} \quad (5.35)$$

Чтобы получить истинное выражение для η в ионизованном газе, нужно принять во внимание электрон-электронные столкновения. Этому вопросу посвящен ряд исследований. Каулинг [10] и более подробно Ландсгофф [20] использовали общую теорию Чепмена и Каулинга [8]. Аналогичный расчет с помощью диффузионных коэффициентов был выполнен Коэном, Спитцером и Роутли [9], а окончательная величина η получена Спитцером и Хэрмом [36]. Эти различные исследования полностью согласуются между собой, и основные результаты можно представить в виде

$$\eta = \frac{\eta_L}{\gamma_E}, \quad (5.36)$$

где значения величины γ_E , зависящей от заряда иона Z , приведены в табл. 4. Таким образом, в наиболее

Таблица 4

ОТНОШЕНИЕ ПРОВОДИМОСТИ $1/\eta$ К ПРОВОДИМОСТИ ЛОРЕНЦОВСКОГО ГАЗА

Заряд иона Z	1	2	4	16	∞
γ_E	0,582	0,683	0,785	0,923	1,000

важном случае $Z=1$ мы имеем

$$\begin{aligned} \eta &= 6,53 \cdot 10^{12} \frac{\ln \Lambda}{T^{3/2}} \text{ ед. CGSM} = \\ &= 6,53 \cdot 10^3 \frac{\ln \Lambda}{T^{3/2}} \text{ ом} \cdot \text{см}. \end{aligned} \quad (5.37)$$

Экспериментальное подтверждение этих результатов получили Лин, Реслер и Кантровиц [21], а также Меккер, Петерс и Шенк [23]. Согласно с формулой (5.37) следует рассматривать, однако, как некоторую счастливую случайность, так как в этих экспериментах величина $\ln \Lambda$ была невелика ($3 < \ln \Lambda < 6$).

Наши результаты основаны на допущении, что поле E достаточно мало, так что потенциальная энергия, приобретаемая на средней длине свободного пробега, мала по сравнению с kT . Так как средняя длина свободного пробега пропорциональна ω^4 , то при достаточно высоких скоростях основное предположение, очевидно, нарушается; энергия, приобретаемая на средней длине свободного пробега, возрастает с увеличением ω . Когда энергия, приобретаемая на средней длине свободного пробега, сравнима с кинетической энергией, имеется заметная вероятность, что частица будет непрерывно ускоряться электрическим полем (если предположить, что плазма бесконечна, а поле E однородно). Вероятность изменения скорости из-за столкновений с другими заряженными частицами уменьшается с ростом E настолько быстро, что, как только скорость частицы превзойдет некоторую критическую величину, влияние всех последующих столкновений становится малым. Такие непрерывно ускоряющиеся частицы называются *убегающими*.

Скорость, после достижения которой электроны становятся убегающими, можно рассчитать из условия, чтобы $-\langle \Delta \omega_{\parallel} \rangle$ было меньше, чем ускорение eE/mc . Рассматривая электрон, скорость которого w

параллельна E , предположим, что скорость w намного больше среднеквадратичной скорости ионов или электронов, так что $l_f^2 G(l_f w)$ в выражении (5.15) можно заменить на $1/(2w^2)$. При этих предположениях условие убегания электрона имеет вид

$$\frac{m_e w^2}{2kT} > \frac{1}{\Gamma} \left(1 + \frac{2}{Z}\right), \quad (5.38)$$

где мы учли динамическое трение, обусловленное как другими электронами, так и ионами с зарядом Ze/c ; безразмерный параметр Γ дается формулой

$$\Gamma = \frac{kTE}{2\pi c Z e^3 n_e \ln \Lambda} = 6,61 \cdot 10^8 \frac{TE \text{ (в/с.м.)}}{Z n_e \ln \Lambda}. \quad (5.39)$$

Величина Γ приблизительно равна отношению средней скорости дрейфа электрона к хаотической тепловой скорости $(3kT/m_e)^{1/2}$; для однородного лоренцовского газа из формул (2.9), (2.24) и (5.34) следует, что это отношение равно величине Γ , умноженной на $8(2/3\pi)^{1/2}$, или $3,69\Gamma$. Очевидно, выражение (5.37) для η справедливо лишь при Γ , малом по сравнению с единицей.

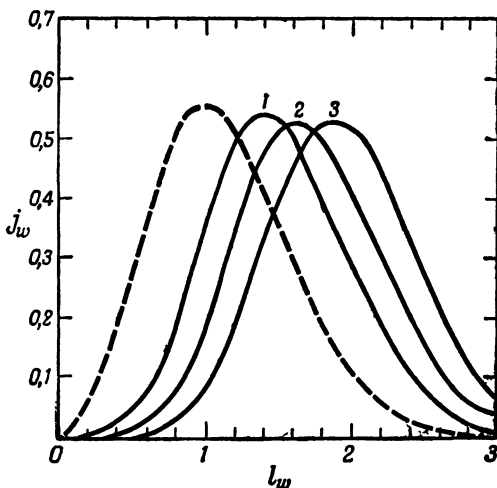
Скорость, с которой электроны диффундируют в область высоких энергий и становятся убегающими частицами, была приблизительно рассчитана Дрейсером [12] для случая $Z=1$. Его численные результаты, полученные для Γ в интервале от 0,3 до 0,03, можно представить в виде формулы

$$P_r = \frac{24eEe^{-(8/\Gamma)^{1/2}}}{\Gamma c (2mkT)^{1/2}} = \frac{30,9}{t_{ce}} e^{-(8/\Gamma)^{1/2}}, \quad (5.40)$$

где $P_r dt$ — доля электронов, которые убегают за интервал времени dt , а t_{ce} — время самостолкновений для электронов, определяемое выражением (5.26).

Когда величина Γ очень мала, убегающие электроны несущественны, и применима линеаризованная теория, приводящая к численным значениям, указанным в табл. 4. В этом случае известный интерес представляет распределение тока по электронам различных скоростей. На фиг. 12 приведены различные

кривые для j_w ; $j_w d\omega$ есть вклад в электрический ток от электронов, скорости которых находятся между ω и $\omega + d\omega$. По существу величина j_w пропорциональна скорости ω , умноженной на избыток числа электронов, движущихся со скоростью ω в одну сторону, над



Фиг. 12. Распределение тока по электронам различных скоростей.

Пунктирная кривая соответствует распределению Максвелла—Больцмана; кривые 1, 2, 3 дают величину j_w , нормированную на единицу, для следующих случаев: 1 — поперек сильного магнитного поля B ; 2 — электронно-протонный газ при $B=0$; 3 — электронный газ с ионами очень большого заряда Z при $B=0$.

соответствующим числом электронов, движущихся в противоположную сторону. Все эти различные кривые приведены к одинаковой площади. Для сравнения нанесена пунктирная кривая, соответствующая числу электронов на единицу интервала скоростей, которое, согласно формуле Максвелла — Больцмана, равно $\omega^2 f^{(0)}(\omega)$, где $f^{(0)}(\omega)$ дается формулой (5.8). Кривая 3 относится к лоренцевскому газу, в котором

j_w пропорционально $\omega^7 f^{(0)}(\omega)$. Эта кривая применима для газа, в котором ионы имеют очень большой заряд ядра, так как в таком газе электрон-электронные столкновения дают пренебрежимо малый эффект. Кривая 2 дает плотность тока j_w для электронно-протонного газа и построена на основании расчетов Спитцера и Хэрма [36].

В присутствии магнитного поля, перпендикулярного к электрическому полю, эти результаты становятся неверными, так как распределение тока по электронам различных скоростей изменяется. Рассмотрим сильное магнитное поле, для которого ларморовский радиус a много меньше средней длины свободного пробега; иными словами, частота ω_{ce} намного превосходит частоту столкновений ν . Тогда можно пользоваться картиной движения отдельной частицы, разобранный в гл. 1. Если температура постоянна, то ток в точке P возникает вследствие того, что ведущих центров с одной стороны от точки P больше, чем с другой. Следовательно, вклад в ток j электронов со скоростями ω зависит от разности между плотностями ведущих центров по обе стороны от точки P . Расстояние этих ведущих центров от P равно ларморовскому радиусу a , и так как a меняется пропорционально ω , а плотность линейно зависит от расстояния, то в первом приближении избыток электронов, движущихся в одном направлении, над электронами, перемещающимися в противоположном направлении, пропорционален ω . Поскольку электрический ток пропорционален этому избытку электронов, умноженному на скорость, то ток j_w изменяется как ω^2 , умноженное на число частиц в единичном интервале полной скорости, т. е. как $\omega^4 f^{(0)}(\omega)$. Эта зависимость j_w от ω изображается кривой 1 на фиг. 12.

При заданном токе количество движения, передаваемое от электронов к ионам, которое было положено в основу определения η в § 2, естественно, зависит от того, как этот ток распределен по электронам различных скоростей. Например, если бы ток

был полностью обусловлен электронами очень большой скорости, то передаваемое количество движения было бы очень мало, так как поперечное сечение взаимодействия очень быстро падает с ростом скорости. Для данной зависимости j_w от ω сопротивление η можно рассчитать непосредственно, не обращаясь к электрическому полю E . Расчеты, произведенные Спитцером [35], показывают, что для тока поперек сильного магнитного поля сопротивление, найденное для лоренцовского газа, нужно поделить на величину γ_{EB} , где

$$\gamma_{EB} = \frac{3\pi}{32} = 0,295. \quad (5.41)$$

Вводя в (5.35) множитель (5.41) для сопротивления поперек сильного магнитного поля η_{\perp} , получаем формулу

$$\begin{aligned} \eta_{\perp} &= 1,29 \cdot 10^{13} \frac{Z \ln \Lambda}{T^{3/2}} \text{ ед. CGSM} = \\ &= 1,29 \cdot 10^4 \frac{Z \ln \Lambda}{T^{3/2}} \text{ ом} \cdot \text{см}. \end{aligned} \quad (5.42)$$

При наличии поперечных градиентов температуры эффективное сопротивление изменяется под влиянием термоэлектрических членов, рассмотренных ниже [см. выражение (5.49)].

§ 5. Теплопроводность и вязкость

Методы, использованные при вычислении сопротивления, можно также применить для определения других коэффициентов переноса. Здесь мы рассмотрим теплопроводность и вязкость.

При наличии градиента температуры ∇T появляется не только поток тепла \mathbf{Q} , но и электрический ток \mathbf{j} . Градиент температуры искажает распределение по скоростям, и появляется поток электронов. Подобным же образом электрическое поле вызывает поток тепла. В отсутствие магнитного поля для ста-

ционарного состояния можно написать

$$\mathbf{j} = \frac{1}{\eta} \mathbf{E} + \alpha \nabla T, \quad (5.43)$$

$$\mathbf{Q} = -\beta \mathbf{E} - \mathcal{K} \nabla T. \quad (5.44)$$

Как показывается в термодинамике необратимых процессов [14], эти четыре коэффициента не являются независимыми, а связаны соотношением

$$\beta = \alpha T + \frac{5kT}{2e\eta}. \quad (5.45)$$

Наличие перекрестных термоэлектрических членов в уравнении (5.43) приводит к уменьшению эффективного коэффициента теплопроводности. Обычно в стационарном состоянии ток не может течь в направлении градиента температуры, так как иначе происходило бы накопление зарядов и неограниченное нарастание электрического поля. Поэтому ∇T вызывает вторичное электрическое поле, гасящее ток, обязанный градиенту температуры, и в свою очередь уменьшающее поток тепла. Из-за этого эффективный коэффициент теплопроводности уменьшается до величины $\epsilon \mathcal{K}$, где

$$\epsilon = 1 - \frac{\beta \alpha \eta}{\mathcal{K}}. \quad (5.46)$$

Для лоренцовского газа величина \mathcal{K} равна

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_L &= 20 \left(\frac{2}{\pi} \right)^{3/2} \frac{(kT)^{3/2} k}{m_e^{1/2} e^4 Z \ln \Lambda} = \\ &= 4,67 \cdot 10^{-12} \frac{T^{1/2}}{Z \ln \Lambda} \text{ кал}/(\text{сек} \cdot \text{см} \cdot \text{град}) \end{aligned} \quad (5.47)$$

и $\epsilon = 0,40$. Для реального газа

$$\mathcal{K} = \delta_T \mathcal{K}_L. \quad (5.48)$$

Величины δ_T и ϵ приведены в табл. 5 для разных Z ; они взяты из той же работы Спитцера и Хэрма [36], в которой, кроме того, даны точные значения α и β . Пользуясь этими данными, легко проверить, что

соотношение (5.45) удовлетворяется с точностью до 1/1000, что характеризует точность численных расчетов этой работы.

Таблица 5

ЗНАЧЕНИЯ δ_T и ε

Z	1	2	4	16	∞
δ_T	0,225	0,356	0,513	0,791	1,000
ε	0,419	0,410	0,401	0,396	0,400

Сильное магнитное поле уменьшает поток тепла Q_{\perp} . Предполагая, что состояние квазистационарное, и считая столкновения редкими (частота столкновений ν много меньше ω_{ci}), мы получаем следующие взаимно связанные уравнения:

$$\mathbf{j}_{\perp} = \frac{1}{\eta_{\perp}} \mathbf{E}' + \lambda \mathbf{B} \times \nabla T, \quad (5.49)$$

$$\mathbf{Q}_{\perp} = -\lambda T \mathbf{B} \times \mathbf{E}' - \mathcal{K} \nabla T, \quad (5.50)$$

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} - \frac{c}{en_e} \nabla p_i; \quad (5.51)$$

причем здесь предполагается, что ∇T и \mathbf{E}' не имеют составляющих вдоль \mathbf{B} . Кроме того, считается, что электроны и ионы имеют локальное максвелловское распределение по скоростям. Коэффициент η_{\perp} определяется выражением (5.42), в то время как два других коэффициента даются формулами

$$\lambda = \frac{3kn_e}{2B^2}, \quad (5.52)$$

$$\mathcal{K}_{\perp} = \frac{8(\pi m_i k)^{1/2} n_i^2 Z^2 e^2 c^2 \ln \Lambda}{3B^2 T^{1/2}} =$$

$$= 3,54 \cdot 10^{-25} \frac{A^{1/2} Z^2 n_i^2 \ln \Lambda}{T^{1/2} B^2} \text{ кал}/(\text{сек} \cdot \text{см} \cdot \text{град}). \quad (5.53)$$

Эти выражения для случая $Z=1$ были получены Розенблютом и Кауфманом [30]. Поперечная теплопро-

водность в этом приближении обусловлена только ионами вследствие их большой массы и большого ларморовского радиуса. Легко видеть, что отношение \mathcal{K}_\perp и \mathcal{K}_L пропорционально $1/(\omega_{ci}t_{ci})^2$, где t_{ci} — время самостолкновений ионов. Выражение (5.53) справедливо только при больших $\omega_{ci}t_{ci}$; когда величина $\omega_{ci}t_{ci}$ сравнима с единицей, это соотношение неприменимо, и теплопроводность описывается более общими формулами Брагинского [4].

Вязкость полностью ионизованного газа была исследована Брагинским [4]. В отсутствие магнитного поля коэффициент вязкости дается формулой

$$\mu = \frac{0,406m_i^{1/2}(kT)^{3/2}}{Z^4e^4 \ln \Lambda} = 2,21 \cdot 10^{-15} \frac{T^{3/2}A_i^{1/2}}{Z^4 \ln \Lambda} \text{ г/(см} \cdot \text{сек)}, \quad (5.54)$$

где A_i — атомный вес ионов. Вязкость связана главным образом с ионами; вязкие натяжения, обусловленные электронами, как правило, пренебрежимо малы.

Когда имеется магнитное поле, величина μ зависит и от направления скорости и от направления ее перепада. Чтобы рассчитать натяжение, параллельное \mathbf{B} и обусловленное градиентом v_\parallel вдоль \mathbf{B} , можно использовать непосредственно выражение (5.54). Когда скорость \mathbf{v} перпендикулярна к магнитному полю, натяжение, вызванное градиентом скорости в направлении, перпендикулярном и к \mathbf{B} и к \mathbf{v} , характеризуется коэффициентом μ_\perp . Как было отмечено в гл. 2, вязкость поперек сильного магнитного поля приводит к дрейфу ионов, описываемому формулой (2.43). Для газа с очень сильным магнитным полем ($\omega_{ci}t_{ci}$ значительно больше единицы) величина μ_\perp дается выражением

$$\begin{aligned} \mu_\perp &= \frac{2}{5} \left(\frac{\pi}{m_i k T_i} \right)^{1/2} \frac{Z^4 e^4 n_i^2 \ln \Lambda}{\omega_{ci}^2} = \\ &= 2,68 \cdot 10^{-26} \frac{A_i^{3/2} Z^2 n_i^2 \ln \Lambda}{T_i^{3/2} B^2} \text{ г/(см} \cdot \text{сек)}, \quad (5.55) \end{aligned}$$

впервые полученным Саймоном [33]. Отношение μ_{\perp} к μ , найденное из формул (5.54) и (5.55), по порядку величины, очевидно, равно $1/\omega_{ci}^2 t_{ci}^2$. Несколько иное по подходу исследование Лонгмайера и Розенблюта [22] приводит к результату, отличающемуся от (5.55) численным коэффициентом $4/3$; происхождение этой разницы неясно. Как показал Кауфман [18], эффективный коэффициент вязкости, обусловленный градиентом v_{\parallel} в направлении поперек \mathbf{B} , равен $4\mu_{\perp}$, если магнитное поле очень велико. Результаты, относящиеся к различным компонентам натяжения, в общем случае, включающем $\omega_{ci} t_{ci} \approx 1$, получены Брагинским [4]¹⁾.

§ 6. Излучение

В то время как в предыдущих параграфах исследование, по существу, было классическим, микроскопическое взаимодействие фотонов с отдельными заряженными частицами ионизованного газа во многих случаях следует рассматривать с помощью квантовой механики. Теория излучения выходит за рамки этой книги; она подробно изложена у Гайтлера [16], Бете и Солпитера [3], а также в других руководствах. Вследствие важности этих процессов излучения мы здесь лишь перечислим кратко результаты, полученные для частного случая полностью ионизованного газа.

Рассмотрим три процесса взаимодействия фотона со свободным электроном. Во-первых, фотоны могут рассеиваться на электронах. Во-вторых, электрон в присутствии тяжелого иона может испустить или поглотить фотон. В-третьих, электрон в магнитном поле может излучать или поглощать фотоны, частота которых приблизительно равна циклотронной частоте ω_{ce} или кратным ей значениям.

¹⁾ В предельном случае $\omega_{ci} t_{ci} \gg 1$ результат Брагинского [4] для μ_{\perp} совпадает с формулой (5.55). — *Прим. ред.*

а. Рассеяние фотонов свободными электронами. Полное поперечное сечение рассеяния фотона на электро-не дается выражением

$$\sigma_s = \frac{8\pi}{3} \left(\frac{e^2}{m_e c^2} \right)^2 = 6,65 \cdot 10^{-25} \text{ см}^2. \quad (5.56)$$

В формуле (5.56) не учитываются релятивистские эффекты. Когда энергия фотона сравнима с энергией покоя электрона, нужно пользоваться формулой Клейна — Нишины [16].

Рассеянное излучение частично поляризовано. Кроме того, частота фотона при этом процессе может меняться. Если сначала электрон покоился, то уменьшение длины волны $\Delta\lambda$ равно $\lambda_0(1 - \cos \chi)$, где χ — угол отклонения фотона, а λ_0 — комптоновская длина волны

$$\lambda_0 = \frac{h}{m_e c} = 2,43 \cdot 10^{-2} \text{ \AA}. \quad (5.57)$$

Если электрон быстро движется, то приращение $\Delta\lambda$ может иметь большое положительное или отрицательное значение из-за эффекта Допплера.

б. Излучение фотонов при электрон-ионных столкновениях. Когда электрон испускает квант света, причем тяжелый ион приобретает некоторое количество движения, энергия электрона должна уменьшиться. Если электрон остается свободным, то такие переходы называются свободно-свободными переходами, а испускаемое излучение — тормозным излучением. В случае электронов, имеющих одну и ту же кинетическую энергию, меньшую энергии ионизации для рассматриваемых ионов, график спектральной интенсивности энергии излучения имеет почти плоский участок [3] в интервале от частоты максимума $m_e \omega^2 / 2h$ и до $1/10$ этой частоты. При максвелловском распределении электронов по скоростям с кинетической температурой T интенсивность энергии излучения на единицу частоты пропорциональна $\exp(-h\nu/kT)$. Кроме испускания излучения, возмож-

но также поглощение фотона в свободно-свободном переходе. Коэффициент поглощения κ_ν (в $\text{см}^2/\text{см}^3$) равен приблизительно

$$\begin{aligned}\kappa_\nu &= \frac{4}{3} \left(\frac{2\pi}{3kT} \right)^{1/2} \frac{n_e n_i Z^2 e^6}{h c m_e^{3/2} \nu^3} g_{ff} = \\ &= 3,69 \cdot 10^8 \frac{Z^3 n_i^2}{T^{1/2} \nu^3} g_{ff} \text{ см}^{-1},\end{aligned}\quad (5.58)$$

где мы снова заменили n_e на Zn_i . Индуцируемое излучение уменьшает эффективный коэффициент поглощения; чтобы учесть этот эффект, нужно величину, полученную из формулы (5.58), умножить на $1 - \exp(-h\nu/kT)$.

Величина g_{ff} , входящая в выражение (5.58), является поправочным множителем, необходимым для получения точных результатов. Численные значения этого множителя, вообще говоря, порядка единицы. Однако для радиоволн в случае, когда величина ν много меньше kT/h , но много больше плазменной частоты $\omega_p/2\pi$, как показали Элворт [13] и Шойер [31]:

$$g_{ff} = \frac{3^{1/2} V}{\pi c} \left\{ \ln \frac{(2kT)^{3/2}}{\pi Z e^2 \nu m_e^{1/2}} - \frac{5\gamma}{2} \right\}, \quad (5.59)$$

где V — скорость волны, а γ — постоянная Эйлера, равная 0,5772. Для частот, сравнимых с $\omega_p/2\pi$, приближенные формулы для g_{ff} получены Остером [26].

Обозначим через ϵ_{ff} полное количество энергии, излучаемой при свободно-свободных переходах из 1 см^3 за 1 сек . Для максвелловского распределения по скоростям

$$\begin{aligned}\epsilon_{ff} &= \left(\frac{2\pi kT}{3m_e} \right)^{1/2} \frac{2^5 \pi e^6}{3 h m_e c^3} Z^2 n_e n_i \overline{g_{ff}} = \\ &= 1,42 \cdot 10^{-27} Z^3 n_i^2 T^{1/2} \overline{g_{ff}} \text{ эрг}/(\text{см}^3 \cdot \text{сек}).\end{aligned}\quad (5.60)$$

Если положить g_{ff} и $\overline{g_{ff}}$ равными единице, выражения (5.58) и (5.60) перейдут в полуклассические результаты Крамерса.

Если положить

$$\overline{g_{ff}} = \frac{2 \cdot (3)^{1/2}}{\pi} = 1,103, \quad (5.61)$$

то для ϵ_{ff} получается $\overline{g_{ff}}$ приближение Борна. Точные значения величины $\overline{g_{ff}}$ в широком интервале изменения n_i и T найдены Гринем [15].

Испускание излучения может также происходить и при захвате электронов. При высоких температурах это рекомбинационное излучение пренебрежимо мало по сравнению с тормозным излучением, однако оно является существенной характеристикой скорости процесса захвата электронов ионами. Электрон может быть захвачен на любой уровень с квантовым числом n . Для ядер водорода энергия испускаемого фотона $h\nu$ равна $\frac{1}{2}m_e\omega^2 + h\nu_0/n^2$, где $-h\nu_0$ — энергия основного состояния. Поперечное сечение для захвата на уровень n , которое мы обозначим σ_{cn} , равно

$$\sigma_{cn} = A_r \frac{\nu_0}{\nu} \frac{h\nu_0}{\frac{1}{2}m_e\omega^2} \frac{g_{fn}}{n^3}, \quad (5.62)$$

где *постоянная захвата* A_r определяется выражением

$$A_r = \frac{2^4}{3^{3/2}} \frac{he^2}{m_e^2 c^3} = 2,11 \cdot 10^{-22} \text{ см}^2. \quad (5.63)$$

Для захвата в основное состояние (n равно единице) поправочный множитель g_{fn} равен

$$g_{f1} = 8\pi \cdot 3^{1/2} \frac{\nu_0}{\nu} \frac{\exp\{-4[\nu_0/(\nu - \nu_0)]^{1/2} \arctg[(\nu - \nu_0)/\nu_0]^{1/2}\}}{1 - \exp\{-2\pi[\nu_0/(\nu - \nu_0)]^{1/2}\}}. \quad (5.64)$$

Из формулы (5.64) можно видеть, что для электронов малой скорости (частота ν приблизительно равна ν_0) величина g_{f1} равна 0,797, а при $\nu \gg \nu_0$ величина g_{f1} уменьшается пропорционально $(\nu_0/\nu)^{1/2}$.

Уход электронов из-за радиационной рекомбинации описывается уравнением

$$\frac{dn_e}{dt} = -an_e n_i, \quad (5.65)$$

где

$$\alpha = \sum_n \overline{\sigma_{cn} \omega}, \quad (5.66)$$

причем усреднение производится по всем скоростям электронов, а суммирование распространяется по всем связанным состояниям, на которые электрон может быть захвачен. Если распределение по скоростям считать максвелловским и принять величину g_{fn} в формуле (5.62) равной единице, то выражение (5.66) приводится к виду

$$\alpha = 2A_r \left(\frac{2kT}{\pi m_e} \right)^{1/2} \beta \varphi(\beta) = 2,07 \cdot 10^{-11} Z^2 T^{-1/2} \varphi(\beta), \quad (5.67)$$

где

$$\beta = \frac{h\nu_0}{kT} = \frac{157\,000^\circ Z^2}{T} \quad (5.68)$$

и

$$\varphi(\beta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta}{n^3} e^{\beta/n^2} \left\{ -Ei\left(-\frac{\beta}{n^2}\right) \right\}. \quad (5.69)$$

Функция $-Ei(-x)$ есть обычная интегральная показательная функция. Численные значения $\varphi(\beta)$ приведены в табл. 6.

Таблица 6

ЗНАЧЕНИЯ $\varphi(\beta)$

β	0,01	0,02	0,05	0,1	0,2	0,5
T/Z^2	$1,6 \cdot 10^7$	$7,9 \cdot 10^6$	$3,2 \cdot 10^6$	$1,6 \cdot 10^6$	$7,9 \cdot 10^5$	$3,2 \cdot 10^5$
$\varphi(\beta)$	0,053	0,090	0,18	0,28	0,43	0,70
β	1,0	2,0	5	10	100	1000
T/Z^2	$1,6 \cdot 10^5$	$7,9 \cdot 10^4$	$3,2 \cdot 10^4$	$1,6 \cdot 10^4$	$1,6 \cdot 10^3$	$1,6 \cdot 10^2$
$\varphi(\beta)$	0,96	1,26	1,69	2,02	3,2	4,3

Значения α для плазмы, измеренные в лабораторных условиях, обычно на много порядков величины

превосходят значения, приведенные выше. Как было показано Бэйтсом [1], это явное расхождение может быть связано с различными типами рекомбинационных процессов, при которых молекулярный ион захватывает электрон и распадается на два нейтральных атома. Кроме того, как отметили Д'Анжело [11] и Бэйтс и Кингстон [2], при сравнительно высоких плотностях электронов и низких температурах тройные столкновения между ионом и двумя электронами способны сильно увеличить скорость рекомбинации. Хиннов и Хиршберг [17] показали, что рекомбинация, наблюдаемая в плотной водородной и гелиевой плазме, имеет скорость, согласующуюся с теоретическим значением, вычисленным для этого процесса.

Согласно равенству (5.63), поперечное сечение радиационного захвата электрона протоном очень мало по сравнению с геометрическим поперечным сечением атома водорода и равно лишь $2,1 \cdot 10^{-21} \text{ см}^2$ для захвата электрона с энергией 1 эв на основной уровень. В противоположность этому поперечное сечение ионизации нейтрального атома быстрым электроном намного больше и составляет приблизительно 10^{-16} см^2 для электрона с энергией 100 эв, налетающего на атом водорода. Уточненные теоретические величины поперечных сечений столкновений приведены в полном обзорном труде Месси и Бархопа [25], где можно найти также подробные данные о разнообразных процессах, включая возбуждение, ионизацию, нейтрализацию, рекомбинацию и диссоциацию атомов и молекул; все эти вопросы выходят, очевидно, за рамки настоящей книги.

в. Синхротронное излучение. При вращении заряженной частицы в магнитном поле происходит излучение на всех гармониках циклотронной частоты. Так как это излучение было обнаружено в синхротроне, его обычно называют синхротронным излучением. Более раннее исследование Швингера [32] было обобщено Трубниковым [37], который принял во внимание

движение вдоль \mathbf{B} . Если обозначить через β_{\perp} и β_{\parallel} соответственно ω_{\perp}/c и ω_{\parallel}/c , то $\epsilon_{sn}(\theta)$ — мощность, излученная на n -й гармонике в единицу телесного угла в направлении, составляющем угол θ с магнитным полем \mathbf{B} , дается выражением

$$\epsilon_{sn}(\theta) = \frac{e^2 \omega_c^2 (1 - \beta^2) y^2}{2\pi c (1 - \beta_{\parallel} \cos \theta)} \times \\ \times \left\{ \left(\frac{\cos \theta - \beta_{\parallel}}{\beta_{\perp} \sin \theta} \right)^2 J_n^2(y \sin \theta) + J_n'^2(y \sin \theta) \right\}. \quad (5.70)$$

Здесь ω_c — угловая циклотронная частота для массы покоя, J_n — функция Бесселя порядка n , β^2 равно сумме β_{\perp}^2 и β_{\parallel}^2 , а

$$y = \frac{n\beta_{\perp}}{1 - \beta_{\parallel} \cos \theta}. \quad (5.71)$$

Угловая частота излучения ω , испускаемого в этом направлении, дается формулой

$$\omega = \frac{\omega_c y (1 - \beta^2)^{1/2}}{\beta_{\perp}}. \quad (5.72)$$

Как показал Швингер, полная энергия излучения, по всем направлениям и на всех n , определяется выражением

$$\epsilon_s = \frac{2e^2}{3c^3} \frac{1}{(1 - \beta^2)^2} \left(\frac{dv}{dt} \right)^2 = 1,59 \cdot 10^{-15} \frac{B^2 \beta_{\perp}^2}{1 - \beta^2} \text{ эрг/сек.} \quad (5.73)$$

При сверхрелятивистских скоростях излучение имеет максимум интенсивности на гармонике с n , приблизительно равным $\beta_{\perp} (1 - \beta^2)^{-1/2}$, а затем при больших n резко спадает. Интенсивность испускаемого излучения для двух направлений поляризации была получена в этом случае Вестфольдом [38]. В плазме с умеренной температурой нужно учитывать поглощение; если распределение по скоростям максвелловское, то испускаемое излучение не может превосходить излучения черного тела при этой кинетической температуре.

ЛИТЕРАТУРА

1. Bates D. R., Phys. Rev., **77**, 718 (1950), Phys. Rev., **78**, 492 (1950).
2. Bates D. R., Kingston A. E., Nature, **189**, 652 (1961).
3. Bethe H. A., Salpeter E. E., Handbuch der Physik, XXXV, Sec. 4, 1957.
4. Брагинский С. И., ЖЭТФ, **33**, 459 (1957).
5. Chandrasekhar S., Astrophys. Journ., **93**, 285 (1941).
6. Chandrasekhar S., Principles of Stellar Dynamics, Chicago, 1942, Ch. 2 and Sec. 5.6. (Имеется перевод: С. Чандрасекар, Принципы звездной динамики, ИЛ, 1948.)
7. Chandrasekhar S., Astrophys. Journ., **97**, 255 (1943).
8. Chapman S., Cowling T. G., The Mathematical Theory of Non-Uniform Gases, Cambridge, 1953. (Имеется перевод: С. Чепмен и Т. Каулинг, Математическая теория неоднородных газов, ИЛ, 1960.)
9. Cohen R. S., Spitzer L., Routly P. McR., Phys. Rev., **80**, 230 (1950). (Имеется перевод в сборнике: «Проблемы современной физики», № 2, ИЛ, 1956, стр. 54.)
10. Cowling T. G., Proc. Roy. Soc., **A183**, 453 (1945).
11. D'Angelo N., Phys. Rev., **121**, 505—507 (1961).
12. Dreicer H., Phys. Rev., **117**, 329 (1960).
13. Elwert G., Zs. Naturforsch, **3A**, 477 (1948).
14. deGroot S. R., Thermodynamics of Irreversible Processes, New York—London, 1961, Ch. VIII. (Имеется перевод с первого издания: де Гроот, Термодинамика необратимых процессов, М.—Л., 1956.)
15. Greene J., Astrophys. Journ., **130**, 693 (1959).
16. Heitler W., Quantum Theory of Radiation, Oxford, 1953. (Имеется перевод: В. Гайтлер, Квантовая теория излучения, ИЛ, 1956.)
17. Hinnov E., Hirschberg J. G., Phys. Rev., **125**, 795 (1962).
18. Kaufman A., La Théorie des Gas Neutres et Ionizés, Paris, 1960, p. 319.
19. Kranzer H. C., Phys. Fluids, **4**, 214 (1960).

20. Landshoff R., Phys. Rev., **76**, 904 (1949). (Имеется перевод в сборнике: «Проблемы современной физики», № 2, ИЛ, 1956, стр. 44); Phys. Rev., **82**, 442 (1951).
21. Lin S., Resler E. L., Kantrowitz A., Journ. Appl. Phys., **26**, 95 (1955).
22. Longmire C., Rosenbluth M., Phys. Rev., **103**, 507 (1956).
23. Maecker H., Peters Th., Schenck H., Zs. Physik, **140**, 119 (1955).
24. Marshak R., Ann. N. Y. Acad. Science, **41**, 49 (1941).
25. Massey H. S. W., Burhop E. H., Electronic and Ionic Impact Phenomena, Oxford, 1952, p. 88. (Имеется перевод: Г. Месси, Е. Бархоп, Электронные и ионные столкновения, ИЛ, 1958.)
26. Oster L., Zs. Astrophys., **47**, 169 (1959).
27. Pines D., Bohm D., Phys. Rev., **85**, 338 (1952). (Имеется перевод в сборнике: «Проблемы современной физики», № 11, ИЛ, 1952, стр. 130.)
28. Rand S., Phys. Fluids, **4**, 1251 (1961).
29. Rosenbluth M. N., MacDonald W., Judd D., Phys. Rev., **107**, 1 (1957).
30. Rosenbluth M. N., Kaufman A. N., Phys. Rev., **109**, 1 (1958).
31. Scheuer P. A. G., Monthly Notices Roy. Astron. Soc., **120**, 231, 1960.
32. Schwinger J., Phys. Rev., **75**, 1912 (1949).
33. Simon A., Phys. Rev., **100**, 1557 (1955).
34. Spitzer L., Monthly Notices, Roy. Astron. Soc., **100**, 396 (1940).
35. Spitzer L., Astrophys. Journ., **116**, 299 (1952). (Имеется перевод в сборнике: «Проблемы современной физики», № 2, ИЛ, 1956, стр. 26.)
36. Spitzer L., Härm R., Phys. Rev., **89**, 977 (1953). (Имеется перевод в сборнике: «Проблемы современной физики», № 2, ИЛ, 1956, стр. 70.)
37. Трубников Б. А., ДАН СССР, **118**, 913 (1958).
38. Westfold K. C., Astrophys. Journ., **130**, 241 (1959).

УРАВНЕНИЕ БОЛЬЦМАНА

Для получения точных результатов в кинетической теории газов необходимо, вообще говоря, пользоваться уравнением Больцмана. Входящая в него величина f представляет собой плотность частиц в фазовом пространстве и является функцией координаты \mathbf{r} и скорости \mathbf{w} .

Точнее, $f(\mathbf{r}, \mathbf{w}, t) dx dy dz dw_x dw_y dw_z$ есть число частиц, которые находятся внутри пространственного объема $dx dy dz$, окружающего точку \mathbf{r} , и скорости которых лежат в пределах интервалов $d w_x$, $d w_y$ и $d w_z$ около значения \mathbf{w} . Определим Df/Dt как скорость изменения f вдоль траектории свободного движения частицы, вычисленной без учета столкновений между частицами. Уравнение Больцмана устанавливает, что величина Df/Dt полностью обусловлена столкновениями между частицами. Для группы одинаковых частиц это дифференциальное уравнение в частных производных, детально рассмотренное Чепменом и Каулингом [3], можно записать в виде

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \sum_i w_i \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_i \frac{F_i}{m} \frac{\partial f}{\partial w_i} = \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{\text{coll}}, \quad (\text{П. 1})$$

где i принимает значения 1, 2 и 3, причем оси x , y и z обозначены через x_1 , x_2 и x_3 ; w_i и F_i являются i -и компонентами скорости частицы и внешней силы соответственно, а m — масса частицы. Величина $(\partial f/\partial t)_{\text{coll}}$ есть изменение f , обусловленное столкновениями частиц в фиксированной точке пространства и в определенный момент времени. Уравнение (П.1) справедливо, вообще говоря, для консервативных

систем; сила \mathbf{F} может, впрочем, содержать магнитный член $q\mathbf{w} \times \mathbf{B}$. В отсутствие столкновений это уравнение сводится к теореме Лиувилля, устанавливающей, что для консервативной системы функция f постоянна вдоль динамической траектории.

Решать уравнение (П.1) довольно трудно даже в сравнительно простых случаях. Здесь мы только покажем, как с помощью этого уравнения можно получить основные макроскопические уравнения, применявшиеся в гл. 2. Макроскопические плотность частиц $n(\mathbf{r}, t)$ и скорость $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ можно выразить через f следующим очевидным образом:

$$n(\mathbf{r}, t) = \int \int \int_{-\infty}^{+\infty} f(\mathbf{r}, \mathbf{w}, t) d\mathbf{w}_x d\mathbf{w}_y d\mathbf{w}_z, \quad (\text{П. 2})$$

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{n(\mathbf{r}, t)} \int \int \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{w} f(\mathbf{r}, \mathbf{w}, t) d\mathbf{w}_x d\mathbf{w}_y d\mathbf{w}_z. \quad (\text{П. 3})$$

Вообще для любой величины $Q(\mathbf{w})$ среднее значение $\bar{Q}(\mathbf{r}, t)$ определяется по формуле

$$\bar{Q}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{n(\mathbf{r}, t)} \int \int \int_{-\infty}^{+\infty} Q(\mathbf{w}) f(\mathbf{r}, \mathbf{w}, t) d\mathbf{w}_x d\mathbf{w}_y d\mathbf{w}_z. \quad (\text{П. 4})$$

Чтобы получить соотношения между макроскопическими величинами, следует проинтегрировать уравнение (П.1) по пространству скоростей. Умножая это уравнение на $Q(\mathbf{w})d\mathbf{w}_x d\mathbf{w}_y d\mathbf{w}_z$, где $Q(\mathbf{w})$ — некоторая произвольная функция от \mathbf{w} , и интегрируя по скоростям \mathbf{w} , мы получаем

$$\begin{aligned} & \int \int \int_{-\infty}^{+\infty} Q(\mathbf{w}) \frac{\partial f}{\partial t} d\mathbf{w}_x d\mathbf{w}_y d\mathbf{w}_z = \\ & = \frac{\partial}{\partial t} \int \int \int_{-\infty}^{+\infty} Q(\mathbf{w}) f d\mathbf{w}_x d\mathbf{w}_y d\mathbf{w}_z = \frac{\partial}{\partial t} (n\bar{Q}) \quad (\text{П. 5}) \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} & \int \int \int_{-\infty}^{+\infty} Q(\mathbf{w}) w_i \frac{\partial f}{\partial x_i} d w_x d w_y d w_z = \\ & = \frac{\partial}{\partial x_i} \int \int \int_{-\infty}^{+\infty} Q(\mathbf{w}) w_i f d w_x d w_y d w_z = \frac{\partial}{\partial x_i} (n \overline{w_i Q}). \end{aligned} \quad (\text{П. 6})$$

Интегрирование по частям дает

$$\begin{aligned} & \int \int \int_{-\infty}^{+\infty} Q(\mathbf{w}) F_i(\mathbf{r}, \mathbf{w}) \frac{\partial f}{\partial w_i} d w_x d w_y d w_z = \\ & = - \int \int \int_{-\infty}^{+\infty} f \frac{\partial}{\partial w_i} \{F_i(\mathbf{r}, \mathbf{w}) Q(\mathbf{w})\} d w_x d w_y d w_z = \\ & = - n \overline{\frac{\partial}{\partial w_i} (F_i Q)}, \end{aligned} \quad (\text{П. 7})$$

поскольку $f(\mathbf{w})$ обращается в нуль при $w_i = \pm \infty$.

Чтобы получить уравнение непрерывности, положим $Q=1$. Можно считать, что $\partial F_i / \partial w_i = 0$. Для магнитных сил это так, а из рассматриваемых нами сил лишь они зависят от скорости. Кроме того, интеграл по пространству скоростей от $(\partial f / \partial t)_{\text{coll}}$, очевидно, обращается в нуль, так как общее число частиц на 1 см^3 не может измениться в результате столкновений. Из соотношений (П.5) и (П.6) тогда следует, что

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla \cdot (n \mathbf{v}) = 0. \quad (\text{П. 8})$$

Уравнение переноса импульса, которое в гл. 2 называлось уравнением движения, можно получить, полагая $Q = m \mathbf{w}$. В этом случае

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} (n m \mathbf{v}) + \nabla \cdot (n m \overline{\mathbf{w} \mathbf{w}}) - n \overline{\mathbf{F}} = \\ & = \int \int \int_{-\infty}^{+\infty} m \mathbf{w} \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{\text{coll}} d w_x d w_y d w_z. \end{aligned} \quad (\text{П. 9})$$

Это уравнение можно представить в иной форме, преобразуя по отдельности его члены. Напишем первый член в виде

$$\frac{\partial}{\partial t} (nmv) = nm \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial (nm)}{\partial t}. \quad (\text{П. 10})$$

Величину \overline{w} во втором члене можно упростить, воспользовавшись равенством

$$\mathbf{w} = \mathbf{v} + \mathbf{u}, \quad (\text{П. 11})$$

где \mathbf{v} — средняя скорость, т. е. \overline{v} , а \mathbf{u} — скорость беспорядочного движения. Тогда

$$\nabla \cdot (nm\overline{w}) = \nabla \cdot (nmv) + \nabla \cdot (nm\overline{u}), \quad (\text{П. 12})$$

так как \overline{u} равно нулю. Из сравнения уравнения (2.6) с уравнением (П. 4) видно, что

$$nm\overline{u} = \Psi, \quad (\text{П. 13})$$

где Ψ — тензор напряжений. Раскрыв $\nabla \cdot (nmv)$, получим следующее выражение для второго члена уравнения (П.9):

$$\nabla \cdot (nm\overline{w}) = nmv \cdot \nabla v + v \nabla \cdot (nmv) + \nabla \cdot \Psi. \quad (\text{П. 14})$$

В третьем члене можно положить

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} + q\mathbf{w} \times \mathbf{B} - m\nabla\phi. \quad (\text{П. 15})$$

Здесь \mathbf{E} и \mathbf{B} — напряженности электрического и магнитного полей в единицах CGSM, q — заряд частицы в той же системе единиц, а ϕ — гравитационный потенциал. Чтобы получить значение \mathbf{F} , усредненное по всем частицам в единице объема, нужно заменить в формуле (П.15) \mathbf{w} на \mathbf{v} .

Преобразуем, наконец, четвертый член. Он, очевидно, представляет изменение импульса в результате столкновений рассматриваемых частиц. Ясно, что столкновения одинаковых частиц друг с другом не изменят количества движения. Столкновения же с частицами другого сорта могут привести к изменению импульса, которое мы обозначим через \mathbf{P} .

Рассматривая теперь преобразованные четыре члена в уравнении (П.9) и используя уравнение непрерывности (П.8), мы получаем окончательно

$$nm \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \right) = \\ = nq (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) - \nabla \cdot \Psi - nm \nabla \varphi + \mathbf{P}. \quad (\text{П. 16})$$

Это основное уравнение (2.4), которое было использовано в этой книге.

Если положить $Q = m\mathbf{w}\mathbf{w}$, то получается уравнение для производной по времени от тензора напряжений $\partial \Psi / \partial t$. Это уравнение, рассмотренное Джинсом [4], а позднее рядом других авторов [1], содержит тензор третьего ранга, который называется тензором потока тепла. В простых случаях, например в сильном магнитном поле при условии однородности вдоль каждой силовой линии, этот тензор равен нулю, и тогда можно вычислить изменение Ψ во времени. Последовательное исследование динамики плазмы, основанное на уравнении для $\partial \Psi / \partial t$ при равном нулю тензоре потока тепла, было проведено Бунеманом [2]. В более общих случаях потоком тепла пренебрегать нельзя, поскольку он может существенно влиять на локальное распределение скоростей и, следовательно, на тензор напряжений. Если влияние потока тепла трудно оценить, то макроскопические уравнения перестают быть полезными и необходимо исследовать функцию распределения скоростей $f(\mathbf{r}, \mathbf{w}, t)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Bernstein I. B., Trehan S. K., Nuclear Fusion, 1, 3 (1960), Sec. II.
2. Buneman O., Phys. Fluids, 4, 669 (1961).
3. Chapman S., Cowling T. G., The Mathematical Theory of Non-Uniform Gases, Cambridge, 1953; (Имеется перевод: С. Чепмен и Т. Каулинг, Математическая теория неоднородных газов, ИЛ, 1960.)
4. Jeans J. H., The Dynamical Theory of Gases, 3rd ed., Cambridge, 1921, Ch. IX.

ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Алексефф (Alexeff I.) 91, 129
Аллис (Allis W.) 100, 113, 129
Альфвен (Alfvén H.) 21, 27, 34, 38, 41, 42, 66, 76, 92, 94, 129
Астрём (Aström E.) 100, 113, 129
Ауэр (Auer P.) 103, 130
- Бархоп (Burhop E.) 197, 200
Бейли (Bailey V.) 129, 130
Беннет (Bennet W.) 149, 160
Бернштейн (Bernstein I.) 89, 129, 130, 136, 160, 205
Берс (Bers A.) 100, 129
Бете (Bethe H.) 192, 199
Бирман (Biermann L.) 160
Бом (Bohm D.) 74—76, 86, 130, 170, 200
Бор (Bohr N.) 58
Брагинский С. И. 191, 192, 199
Браун (Brown S.) 86, 130
Буксбаум (Buchsbaum S.) 100, 129
Бунеман (Buneman O.) 128, 130, 205
Бэйтс (Bates D.) 197, 199
- Вандервоорт (Vandervoort P.) 32, 42
ван де Хюлст (van de Hulst H.) 96—98, 131
Ван-Леевен (van Leewen H.) 58
Ватсон (Watson K.) 48, 76, 146, 160
Веденов А. А. 146, 161
Вестфольд (Westfold K.) 198, 200
- Габор (Gabor L.) 86, 130
Гайтлер (Heitler W.) 192, 199
Гарднер (Gardner C.) 37, 42
Герлофсон (Herlofson N.) 96, 130
Гернквист (Hernqvist K.) 91, 130
Голдман (Goldman L.) 160
Гольдбергер (Goldberger M.) 48, 76
Горман (Gorman J.) 75, 76
Готтлиб (Gottlieb M.) 160
Грин (Greene J.) 89, 130, 195, 199
Гросс (Gross E.) 86, 130
Гулд (Gould R.) 90, 130
Гурвиц (Hurwitz H.) 103, 130
- Д'Анжело (D'Angelo N.) 70, 76, 197, 199
Даусон (Dawson J.) 117, 130
Дебай (Debye P.) 45
де Гроот (de Groot S.) 199
Джадд (Judd D.) 182, 200
Джексон Дж. (Jackson J.) 119, 130
Джексон Е. (Jackson E.) 130
Джинс (Jeans J.) 205
Джонсон (Johnson J.) 160
Долгов-Савельев Г. Г. 156, 160
Дрейсер (Dreicer H.) 185, 199
- Йоргенс (Jørgens K.) 119
- Кадомцев Б. Б. 146, 161
Кан (Kahn F.) 130
Кантровиц (Kantrowitz A.) 184, 200

- Карзон (Curzon F.) 156, 160
Каулинг (Cowling T.) 60, 76,
93, 130, 183, 199, 201, 205
Кауфман (Kaufman A.) 146,
160, 190, 192, 199, 200
Кинг (King J.) 149
Кингстон (Kingston A.) 197,
199
Клеммов (Clemmow P.) 107,
130
Колгейт (Colgate S.) 160
Коэн (Cohen R.) 170, 183, 199
Крамерс (Kramers H.) 194
Кранцер (Kranzer H.) 179, 199
Кристофилос (Christofilos N.)
160
Крускал (Kruskal M.) 33, 35,
37, 42, 89, 130, 136, 153, 156,
160, 161
Кулсруд (Kulsrud R.) 136, 160

Ландау Л. Д. 86, 116, 120, 130
Ландсгофф (Landshoff R.) 183,
200
Ленгмюр (Langmuir I.) 46, 76,
85, 131
Лин (Lin S.) 184, 200
Лонгмайер (Longmire C.) 136,
161, 192, 200
Лоу (Low F.) 48, 76
Лундквист (Lundquist S.) 98,
131
Луни (Looney D.) 86, 130
Лэтем (Latham R.) 160
Люст (Lüst R.) 51, 76, 136, 160

Мак Дональд (MacDonald
W.) 182, 200
Маршак (Marshak R.) 171, 200
Меккер (Maecker H.) 184, 200
Месси (Massey H.) 197, 200
Миллер (Miller R.) 103, 130
Митра (Mitra S.) 101, 113, 131
Муховатов В. С. 160
Мэллели (Mullaly R.) 107, 130

Нейдиг (Neidigh R.) 91, 129
Нейшн (Nation J.) 160
Нортроп (Northrop T.) 29, 39,
42
Ньюкомб (Newcomb W.) 66,
70, 76

Оберман (Oberman C.) 84
Остер (Oster L.) 194, 200

Пайнс (Pines D.) 170, 200
Паркер (Parker E.) 146, 161
Пеннинг (Penning F.) 86, 131
Перкинс (Perkins W.) 147, 161
Петерс (Peters Th.) 184, 200
Пирс (Pierce J.) 126, 131
Пост (Post R.) 75, 76, 147, 161

Ратклифф (Ratcliffe J.) 101,
113, 131
Ренд (Rand S.) 170, 200
Реслер (Resler E.) 184, 200
Ринн (Rynn N.) 70, 76
Розенблют (Rosenbluth M.)
76, 136, 161, 182, 190, 192, 200
Роутли (Routly P.) 170, 183,
199
Рудаков Л. И. 146, 161

Сагдеев Р. З. 129, 131, 146, 161
Саймон (Simon A.) 192, 200
Солпитер (Salpeter E.) 192, 199
Спитцер (Spitzer L.) 56, 71, 76,
151, 161, 170, 179, 183, 187,
188, 199, 200
Стикс (Stix T.) 115, 116, 124,
131
Стодик (Stodiek W.) 75, 76
Стрелков В. С. 160

Так (Tuck J.) 153, 161
Тейлер (Tayler R.) 153, 161
Теллер (Teller E.) 39, 42
Тидман (Tidman D.) 86, 131
Тонкс (Tonks L.) 46, 76, 85,
131
Трихан (Trehan S.) 129, 130,
205
Трубников Б. А. 197, 200

- Ферми (Fermi E.) 38, 41, 42
 Ферраро (Ferraro V.) 94, 130
 Филд (Field G.) 86, 130
 Фолкьерски (Folkierski A.) 160
 Форд (Ford F.) 76
 Фрайд (Fried B.) 90, 130
 Фримен (Frieman E.) 136, 160
 Фурт (Furth H.) 160
- Хайн (Hain K.) 136, 160
 Харрис (Harris E.) 129, 130
 Хаэфф (Haeff A.) 126, 130
 Хеллвиг (Hellwig G.) 32, 42
 Хиннов (Hinnov E.) 197, 199
 Хиршберг (Hirschberg J.) 197, 199
 Хэрм (Härm R.) 183, 187, 189, 200
- Чандрасекар (Chandrasekhar S.) 146, 160, 166, 169, 171, 172, 176, 199
- Чепмен (Charman S.) 183, 199, 201, 205
 Чу (Chew G.) 48, 76
- Шафранов В. Д. 129, 131, 153, 161
 Шварцшильд (Schwarzschild M.) 153, 160
 Швингер (Schwinger J.) 197, 198, 200
 Шенк (Schenck H.) 184, 200
 Шепелев М. Н. 160
 Шлютер (Schlüter A.) 51, 56, 61, 76, 136, 160
 Шойер (Scheuer P.) 194, 200
- Элwert (Elwert G.) 194, 199
 Эллис Р. А. (Ellis R. A.) 75, 76
 Эллис Р. Е. (Ellis R. E.) 76
- Явлинский Н. А. 160

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Адиабатический инвариант 32, 33
— — продольного движения 37—39
Акустические волны 87—91, 96
Аллиса диаграмма 104—107, 114
Альфвена волна 92—94, 96
— модифицированная волна 97
— скорость 93
- Больцмана уравнение 201
Бома формула 75
Быстрая волна 97, 98
- Ведущий центр 23
«Вмороженное» магнитное поле 66
Волновое уравнение 77
Время замедления 178
— обмена энергией 175
— отклонения 175
— столкновений 83, 177, 185
- Гибридная частота 102
Групповая скорость 97
- Дебаевский радиус 45, 46
Джоулево тепло 54, 61
Диамагнетизм плазмы 58
Динамическое трение 169
Дисперсионное уравнение 80, 81, 85, 86, 99—101
Диффузия плазмы поперек магнитного поля 69—76, 140
Диэлектрическая проницаемость 65, 66
Длина затухания 81, 83, 84, 121, 123
Дрейф заряженных частиц 23—29, 55—57
- Дрейф заряженных частиц в неоднородном магнитном поле 26
— — — скрещенных полях 23
- Ионная волна 79, 87—91, 96
— циклотронная волна 115
- Коэффициент отражения для частиц, достигающих магнитного зеркала 36, 37, 40
— — — электромагнитной волны, падающей на поверхность раздела сред 80
Коэффициенты переноса 162
Критическая частота 101
— — левая 104, 111, 112
— — плазменная 102
— — правая 104, 111, 112
— — циклотронная 104
- Ландау затухание 90, 116—121, 124
Ларморовский радиус 22
Левовращающая волна 111, 112, 114, 115, 121
Лиувилля теорема 59, 202
- Магнитное давление 95
— зеркало 36—38
— поле «бессилое» 138
— — «вмороженное» 66
— — «скошенное» 139, 142, 144
Магнитный момент 31—37, 40
— поток 29, 30, 66—69
Магнитогидродинамические волны 79, 91—98
— неустойчивости 186, 156
Магнитозвуковая волна 94
Максвелла—Больцмана распределение 168

- Максвелла уравнения 53
 Медленная волна 97
 Микроскопические неустойчивости 116
- Необыкновенная волна 100, 102, 107—110
 Неустойчивость двухпучковая 124—128
 — желобковая 138, 143
 — зеркальная 146, 147
 — изгиба 154—156
 — перестановочная 138, 143, 156
 — Рэлея—Тейлора 143, 156
 — типа перетяжек 154, 155
 — шланговая 146
- Обыкновенная волна 100, 102, 107, 110
 Ома закон 52, 55, 60, 61
 Омический нагрев плазмы (см. Джоулево тепло)
- Параметр столкновения 163
 Пинч азимутальный (или тэта-пинч) 149
 — обратный 156
 — продольный 149
 Пинч-эффект 149—151
 Плазменная волна (см. Электронная волна)
 — частота 78, 81, 82
 Полоса запираания 107
 Поляризация ионизованного газа 64—66
 Правовращающая волна 111, 112, 114, 115
- Равновесные плазменные конфигурации 54, 132—160
 Радиационные пояса Земли 36
 Резонансная скорость 122, 129
 — частота 101
 Резонансный угол 113, 115
- Свистящие атмосферники 115
 Синхротронное излучение 197, 198
- Скин-слоя толщина 83
 Скорость звука в плазме 88
 Стелларатор 160
 Столкновения близкие 164
 — далекие 162, 163, 165
- Тензор напряжений 47—50, 84, 87, 204, 205
- Удержание заряженных частиц 29—31
 — — — в аксиально симметричных полях 157—160
 — — — между магнитными зеркалами 36
 Уравнение магнитной гидростатики 133
 — непрерывности 53, 203
 Уравнения переноса 46, 47, 203—205
- Фазовая скорость 80, 85, 88, 90, 93, 95—97, 108, 109
- Холла ток 63, 65
- Циклотронная частота 22
 Циклотронное затухание 121—124
 Циклотронный резонанс 111
- Частицы полевые 166
 — пробные 165
- Электрическая нейтральность 44—46, 51
 Электромагнитные волны 81—84
 Электронная волна 79, 84—87, 110
 Электростатические волны 78, 84—91, 110
- Явление «захвата» частиц 117—120
 — «убегающих» электронов 184, 185

ОГЛАВЛЕНИЕ

<i>Предисловие редактора перевода</i>	5
<i>Предисловие автора ко второму изданию</i>	7
<i>Предисловие автора к первому изданию</i>	9
Условные обозначения	13
Глава 1. Движение заряженной частицы	21
§ 1. Уравнения движения	21
§ 2. Дрейф заряженной частицы	23
§ 3. Магнитный момент	31
§ 4. Ускорение частиц	38
Литература	41
Глава 2. Макроскопические свойства плазмы	43
§ 1. Электрическая нейтральность	44
§ 2. Основные уравнения	46
§ 3. Связь между макроскопической и микроскопической скоростями	55
§ 4. Электрические токи	60
§ 5. Движение вещества поперек силовых линий	66
Литература	76
Глава 3. Волны в плазме	77
§ 1. Электромагнитные волны в отсутствие магнитного поля	81
§ 2. Электростатические волны в отсутствие магнитного поля	84
§ 3. Магнитогидродинамические волны	91
§ 4. Волны в холодной однородной плазме	98
§ 5. Затухание и возбуждение волн	115
Литература	129
Глава 4. Равновесие и устойчивость	132
§ 1. Основные условия устойчивого равновесия	133
§ 2. Плоская система	138

§ 3. Цилиндрическая система	147
§ 4. Аксially симметричная система	157
Литература	160
Глава 5. Столкновения заряженных частиц	162
§ 1. Далекие столкновения	163
§ 2. Диффузионные коэффициенты	165
§ 3. Времена релаксации	174
§ 4. Электрическое сопротивление	181
§ 5. Теплопроводность и вязкость	188
§ 6. Излучение	192
Литература	199
Приложение Уравнение Больцмана	201
Литература	205
Именной указатель	206
Предметный указатель	209

Л. С п и т ц е р

Физика полностью ионизованного газа

Редактор *Е. Майкова*

Художник *Н. А. Усачев*

Художественный редактор

Е. И. Подмарькова

Технический редактор *Л. М. Харьковская*

Корректор *Е. Г. Литвок*

Сдано в производство 3/XI 1964 г.

Подписано к печати 1/II 1965 г.

Бумага $84 \times 108 \frac{1}{32} = 3,30$ бум. л.

10,90 печ. л.

Уч.-изд. л. 9,22.

Изд. № 2/2939. Цена 80 коп. Зак. 811.

(Темплан 1965 г. Изд-ва «Мир», пор. № 65)

ИЗДАТЕЛЬСТВО „МИР“

Москва, 1-й Рижский пер., 2.

Ленинградская типография № 2 имени Евгении Соколовой

Главполиграфпрома Государственного комитета

Совета Министров СССР по печати.

Измайловский проспект, 29