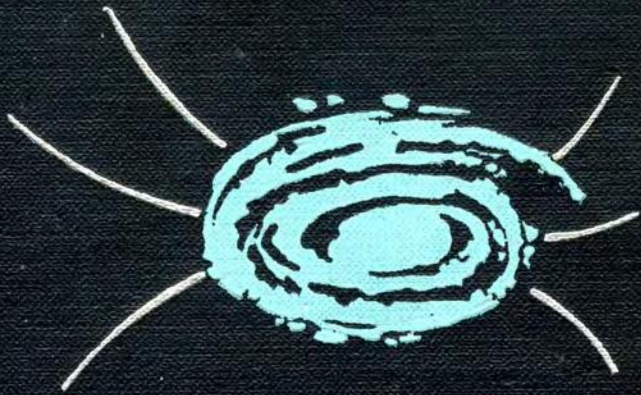
ГРАВИТАЦИОННОЕ ПОЛЕ И ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ЧАСТИЦЫ



К. П. СТАНЮКОВИЧ

ГРАВИТАЦИОННОЕ ПОЛЕ И ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ЧАСТИЦЫ

МОСКОВСКОЕ ОБЩЕСТВО ИСПЫТАТЕЛЕЙ ПРИРОДЫ
СЕКЦИЯ ФИЗИКИ

К. П. СТАНЮКОВИЧ

ГРАВИТАЦИОННОЕ ПОЛЕ И ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ЧАСТИЦЫ

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
Москва 1965

УДК 530.12 : 531.51

ПРЕДИСЛОВИЕ

Монография посвящена изложению и критическому рассмотрению общей теории относительности и используемого в ней вариационного формализма. Эти вопросы изложены в I части монографии. Далее в ней содержится некоторое развитие и обобщение этого формализма при допущении, что связь между тензором Риччи и тензором энергии-импульса может быть осуществлена не с помощью константы, а с помощью матрицы (тензора или псевдотензора). На основании этих представлений излагаются вопросы природы гравитационного излучения, рассматриваемого как результат излучений из любых элементарных частиц материи, происходящих вследствие флуктуации энергии, содержащейся в пространстве. При этом развиваются представления Фридмана о возможных моделях нашей Вселенной — Метагалактики.

Обычно в нашей литературе избегают критического разбора положений общей теории относительности и тем более каких-либо ее обобщений или иных неэйнштейновских трактовок гравитации. В данной работе автор поступил как раз наоборот и рассмотрел различные аспекты природы гравитационного поля и гравитационного излучения. Этому посвящается II часть монографии, причем, если в начале этой части дается строгий вариационный формализм и выводятся достаточно точные соотношения, то затем вводятся гипотетические и менее строгие рассуждения о связи между строением частиц и гравитацией. Это необходимо на данной стадии развития наших взглядов на материю. Без гипотез, при развитии одного только формализма, мы не сможем продвинуться дальше в нашем познании материи во Вселенной.

Дискуссии автора с Г. А. Соколиком, С. М. Колесниковым, В. Ц. Гуровичем, Н. П. Коноплевой, М. К. Поливановым, В. С. Брежневым и В. А. Захаровым были исключительно поле зны и во многом способствовали написанию монографии, за что автор сердечно благодарит своих коллег. В очень интересной книге Г. А. Соколика «Групповые методы в теории элементарных частиц», подготавливаемой к печати в издательстве «Атомиздат», содержатся новые результаты о природе частиц, гравитационном поле, о взаимодействии частиц и полей, полученные методами теории компенсирующих полей и теории групп. Эти результаты во многом оказались близкими к тем, которые автор получил иными, более эвристическими методами и изложил в своей монографии.

Автор приносит искреннюю благодарность Н. Н. Боголюбову и Я. П. Терлецкому, сделавшим много ценных критических и конструктивных замечаний по ряду разделов монографии. Автор также весьма благодарен редактору книги В. А. Лешковцеву, много сделавшему для улучшения рукописи.

ВВЕДЕНИЕ

Общая теория относительности, созданная Эйнштейном и во многом Пуанкаре, явилась мощным источником прогресса наших знаний о материи и Вселенной. Но, как и всякая теория, она не в состоянии объяснить все возрастающий поток новых экспериментальных фактов, связанных с эволюцией Вселенной, а также взаимосвязь между элементарными частицами, тяготением и электромагнитными полями, которая несомненно существует.

Общая теория относительности, которая по существу является частью теории гравитационного поля, описывая гравитационные взаимодействия, как кривизну пространства, оказалась как бы изолированной от других разделов теоретической и экспериментальной физики и не имеющей почти никакого выхода в эксперимент, за исключением возможной генерации и наблюдения гравитационных волн крайне малой интенсивности. Это привело к тому, что фактически после работ самого Эйнштейна и некоторых других физиков, таких, как Эддингтон, Вейль, де Ситтер и Фридман, и первой проверки геометрической стороны теории гравитации (задача Шварцшильда) прогресса в этой области не наблюдается, во всяком случае со стороны физики. Некоторый прогресс по групповой геометрической интерпретации свойств пространства Римана — Эйнштейна был достигнут в работах Петрова.

Незначительные и неутешительные попытки квантовать нелинейное гравитационное поле, начатые Бронштейном, не дали практически важных результатов, за исключением результатов Иваненко о возможности перехода гравитонов в другие виды частиц.

Общая теория относительности, по мнению Фока, с которым можно полностью согласиться, не является принципом общей относительности неинерциальных систем, да это и не нужно для построения ее аппарата.

По мнению Мак-Витти, интерпретация кривизны пространства, как причины тяготения, неудовлетворительна, с чем мы согласны, поскольку можно найти кривые пространства, не заполненные никакой материей, включая сами «материальные» гравитационные волны. Наоборот, пространство, заполненное материей, всегда искривлено.

Еще со времен Ньютона были сделаны многочисленные попытки разгадать природу тяготения (Гук, Лесаж, Бьеркнесс, Жуковский, Савченко и многие другие). Общая теория относительности создает иллюзию, что этого делать не надо: тяготение тождественно кривизне, вот и природа тяготения. Мак-Витти остроумно заметил по этому поводу, что здесь тайна объясняется загадкой.

Отдавая должное гениальной теории Эйнштейна, автор решил попытаться пойти по стопам этих многих ученых и понять природу гравитации, оставаясь в рамках общей теории относительности, но несколько расширяя ее уравнения и тем самым области ее применения. При этом пришлось пересмотреть методику вывода основных уравнений теории гравитационного поля, которая не нравилась еще самому Эйнштейну, а именно то, что левая (геометрическая) часть уравнений не очень естественно, по мнению Эйнштейна, связывалась с правой (материальной, феноменологической) частью через размерную константу тяготения.

Критический пересмотр вывода этих уравнений позволил уточнить и вывод псевдотензора энергии-импульса поля введением в него вторых производных g_{ik} и окончательно доказать реальность существования гравитационных волн.

Стало также необходимым пересмотреть вопрос о постоянстве величины $\varkappa$ и в согласии с гипотезой Дирака считать ее переменной. Это позволило сочетать гравитацию с другими видами поля и взаимодействиями элементарных частиц, а также указать путь к постановке новых экспериментов в области гравитационного излучения, связав теорию гравитационного поля с другими физическими явлениями.

Существенно подчеркнуть, что экспериментальная проверка общей теории относительности была дана лишь для шварцшильдовского поля (смещение перигелия Меркурия; отклонение лучей света, идущего от звезд, вблизи Солнца; смещение спектральных линий).

Следует также отдавать себе отчет в том, что вряд ли имеются серьезные основания думать о возможности описания закономерностей, происходящих в бесконечной Вселенной, только принципиально в рамках теории Эйнштейна. В лучшем случае общая теория относительности описывает некоторые существенные закономерности, наблюдающиеся в Метагалактике, которую мы будем далее называть «нашей Вселенной».

Человечество очень много раз ошибалось, полагая, что придумана окончательная модель всей бесконечной Вселенной. Более разумно вместо того, чтобы канонизировать теорию относительности и ее космологические выводы, постулировать бесконечность и неисчерпаемость материи (и Вселенной), развивать наши взгляды о Вселенной, а также соответствующие способы описания происходящих в ней процессов, в первую очередь в области, доступной для наблюдений, т. е. в Метагалактике. Постулат неисчерпаемой бесконечной Вселенной имеет ряд преимуществ (не только философских) по сравнению с моделями Фридмана.

Уравнения гравитационного поля Эйнштейна явно не описывают всего возможного многообразия материальных процессов, происходящих во Вселенной, поэтому они не могут быть ответственны за описание бесконечной Вселенной, а лишь за описание ее конечной, наблюдаемой нами части — Метагалактики.

В случае моделей Фридмана наблюдения над разлетом галактик показали, что наша Вселенная действительно расширяется. Однако в старой трактовке этого расширения было еще много неясного и противоречивого. Нам удалось обобщить и модели нашей Вселенной Фридмана, сохраняя его исключительно важную теорию расширения материи в нашей области Вселенной. Полученная на этом пути картина кратко выглядит так. Удар двух ультраультрарелятивистских (в смысле скоростей, близких к скорости света) частиц мог привести к множественному рождению частиц различных классов. Число частиц непрерывно увеличивается со временем, а их энергия уменьшается. При этом оказалось, что частицы меньших энергий, чем обычные элементарные частицы, образовавшись ранее, затем «стареют» медленнее, чем частицы больших энергий, и с течением времени из этих «старых» частиц могут образоваться «новые» элементарные частицы. Таким образом в нашей Вселенной происходит непрерывное образование вещества из гравитации и других видов полей. При этом соотношение между различными видами энергии сохраняется постоянным (в случае обобщенных фридмановских моделей Вселенной).

Изложенные представления позволяют рассматривать нашу Вселенную как конечную область пространства-времени, заполненную развивающейся материей и являющуюся частью бесконечной Вселенной.

ЧАСТЬ I

ОБЩАЯ ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

§ 1. Вариационные методы теории поля

Рассмотрим предварительно основные вариационные методы, используемые в теории поля. В дальнейшем мы несколько разовьем этот формализм.

В основу вывода законов сохранения энергии-импульса и уравнений движения в теории относительности, как известно, кладется следующий формализм. В случае сплошной среды ищется так называемый лагранжиан (плотность функции Лагранжа), являющийся скаляром, L. В случае общей теории относительности используется скалярная плотность $\mathfrak{L} = \sqrt{-g}L$, где $g = |g_{ik}|$ (детерминант, составленный из компонент метрического тензора). Далее ищется действие S, которое по определению также является скаляром:

$$-S = \frac{1}{c}\int \mathfrak{L} d\Omega, \tag{1.1}$$

где

$$d\Omega = dx\,dy\,dz\,d\tau = dv\,d\tau,$$

причем $\tau = ct$. Затем ищется экстремум (минимум) действия; при этом необходимо положить, что $-\delta S = \frac{1}{c}\,\delta\int\sqrt{-g}\,L d\Omega = 0$, откуда получается следующее вариационное уравнение (уравнение Лагранжа):

$$\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial q^{(r)}} - \frac{\partial}{\partial x^i}\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial q_i^{(r)}} + \frac{\partial^2}{\partial x^i\,\partial x^k}\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial q_{ik}^{(r)}} + \ldots + (-1)^n \frac{\partial^n}{\partial x^i, \ldots, \partial x^n}\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial q_{i\ldots n}^{(r)}} = 0, \tag{1.2}$$

где

$$q_i^{(r)} = \frac{\partial q^{(r)}}{\partial x^i}, \qquad q_{ik}^{(r)} = \frac{\partial q^{(r)}}{\partial x^i\,\partial x^k}, \ldots, \qquad q_{i\ldots n}^{(r)} = \frac{\partial^n q^{(r)}}{\partial x^i \ldots \partial x^n},$$

$$\mathfrak{L} = \mathfrak{L}\,(q^{(r)}, q_i^{(r)}, q_{ik}^{(r)}, \ldots, q_{i\ldots n}^{(r)}),$$

а $q^{(r)}$ являются обобщенными координатами. Знак r определяет характер этих координат.

Поскольку уравнения поля не должны содержать (как правило) членов, имеющих производные выше второго порядка, величины q_{ik} должны входить в лагранжиан линейно, а коэффициенты при них должны зависеть только от q. При этом уравнение Эйлера (1.2) примет вид

$$\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial q^{(r)}} - \frac{\partial}{\partial x^i} \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial q_i^{(r)}} + \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^k} \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial q_{ik}^{(r)}} = 0, \tag{1.3}$$

где

$$\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial q_{ik}^{(r)}} = \alpha_{ik}^{(r)}, \qquad \alpha_{ik}^{(r)} = \alpha_{ik}(q^{(r)}).$$

При выводе уравнений (1.2) предполагается, что на границах варьирования, на некоторой гиперповерхности f, вариации $\delta q^{(r)}$, $\delta q_i^{(r)}$, $\delta q_{ik}^{(r)}$, $\delta q_{i\ldots n+1}^{(r)}$ обращаются в нули. Однако (как мы увидим в дальнейшем, см. § 16) это требование не всегда необходимо и может не выполняться. Это обстоятельство следует учесть при выводе уравнений (1.2) или, например, в более частном случае, при выводе уравнений (1.3). Из требования $\delta S = 0$, полагая $\mathfrak{L} = \mathfrak{L}(q^{(r)}, q_i^{(r)}, q_{ik}^{(r)})$, найдем, что

$$-\delta S = \frac{1}{c} \int \left(\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial q} \delta q + \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial q_{ik}} \delta q_{ik} \right) d\Omega = 0 \tag{1.4}$$

(здесь и в дальнейшем мы будем опускать индексы r).

Сделаем некоторые преобразования:

$$\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial q_i} \delta q_i = \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\delta q \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial q_i} \right) - \frac{\partial}{\partial x^i} \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial q_i} \delta q,$$

$$\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial q_{ik}} \delta q_{ik} = \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\delta q_k \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial q_{ik}} \right) - \frac{\partial}{\partial x^i} \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial q_{ik}} \delta q_k,$$

$$\frac{\partial}{\partial x^i} \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial q_{ik}} \delta q_k = \frac{\partial}{\partial x^k} \left(\delta q \frac{\partial}{\partial x^i} \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial q_{ik}} \right) - \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^k} \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial q_{ik}} \delta q,$$

$$\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial q_{ik}} \delta q_k = \frac{\partial}{\partial x^k} \left(\delta q \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial q_{ik}} \right) - \frac{\partial}{\partial x^k} \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial q_{ik}} \delta q.$$

В результате получим

$$-\delta S = \frac{1}{c} \int \left\{ \left(\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial q} - \frac{\partial}{\partial x^i} \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial q_i} + \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^k} \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial q_{ik}} \right) \delta q + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial}{\partial x^k} \left[\left(\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial q_k} - \frac{\partial}{\partial x^i} \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial q_{ik}} \right) \delta q + \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial q_{ik}} \delta q_i \right] \right\} d\Omega = 0.$$

Обозначим

$$\left(\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial q_k} - \frac{\partial}{\partial x^i}\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial q_{ik}}\right)\delta q + \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial q_{ik}}\delta q_i = \delta A^k,$$

где A^k — некоторый «вектор»; тогда можно написать, что

$$-\delta S = \frac{1}{c}\int\left[\left(\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial q} - \frac{\partial}{\partial x^i}\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial q_i} + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^k}\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial q_{ik}}\right)\delta q + \frac{\partial}{\partial x^k}\delta A^k\right] d\Omega = 0. \quad (1.5)$$

Преобразуя по теореме Гаусса член $\frac{\partial}{\partial x^k}\delta A^k d\Omega$, найдем

$$\int \frac{\partial}{\partial x^k}\delta A^k d\Omega = \int \delta A^k df_k = \delta(A_2 - A_1) = \delta A_0. \quad (1.6)$$

Если на поверхности f вариации δq и δq_i обращаются в нуль, то и $\delta A_0 = 0$. При этом мы приходим к уравнению (1.3). Если же на поверхности f вариации δq и δq_i не обращаются в нуль (они могут испытывать разрыв), тогда можно поступить следующим образом.

Представим, что $\int \frac{\partial}{\partial x^k}\delta A^k d\Omega = \int B\delta q d\Omega$; при этом уравнение (1.5) приводит к следующему результату:

$$\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial q} - \frac{\partial}{\partial x^i}\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial q_i} + \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^k}\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial q_{ik}} + B = 0. \quad (1.7)$$

Вычислим

$$\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial x^i} = \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial q} q_i + \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial q_k} q_{ik} + \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial q_{lk}} q_{ikl},$$

и, поскольку

$$\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial q} = \frac{\partial}{\partial x^i}\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial q_i} - \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^k}\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial q_{ik}} - B,$$

будем иметь

$$\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial x^i} = \left(\frac{\partial}{\partial x^k}\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial q_k} - \frac{\partial^2}{\partial x^l \partial x^k}\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial q_{kl}}\right) q_i + \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial q_k} q_{ik} + \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial q_{lk}} q_{ikl} - Bq_i =$$
$$= \frac{\partial}{\partial x^k}\left[\left(q_i \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial q_k} + q_{il}\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial q_{kl}}\right) - \left(\frac{\partial}{\partial x^l}\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial q_{kl}} q_i\right)\right] - Bq_i = \delta_i^k \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial x^k}.$$

Отсюда получаем

$$\frac{\partial}{\partial x^k}\left(\mathfrak{L}\delta_i^k - q_i \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial q_k} + q_i \frac{\partial}{\partial x^l}\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial q_{kl}} - q_{il}\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial q_{kl}}\right) = -Bq_i. \quad (1.8)$$

Обозначим

$$\mathfrak{L}\delta_i^k - q_i \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial q_k} + q_i \frac{\partial}{\partial x^l} \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial q_{kl}} - q_{il} \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial q_{kl}} = \sqrt{-g}\, T_i^k. \tag{1.9}$$

Если вариации δq и δq_i на поверхности f обращаются в нуль, то $B = 0$ и

$$\frac{\partial \sqrt{-g}\, T_i^k}{\partial x^k} = 0. \tag{1.10}$$

Тензор T_i^k является тензором или псевдотензором (в зависимости от свойств величины q) энергии-импульса рассматриваемого поля. Уравнения (1.10) дают законы сохранения импульса и энергии, а также определяют законы движения и сплошности (неразрывности) среды.

Введем

$$\frac{\partial \sqrt{-g}\, T_i^{*k}}{\partial x^k} = Bq_i.$$

При этом (1.8) примет вид

$$\frac{\partial \sqrt{-g}\, T_i^k}{\partial x^k} = -\frac{\partial \sqrt{-g}\, T_i^{*k}}{\partial x^k}. \tag{1.11}$$

Тогда

$$\overline{T}_i^k = T_i^k + T_i^{*k} \tag{1.12}$$

будет играть роль тензора энергии-импульса в том случае, когда на поверхности $\delta q \neq 0$ и $\delta q_i \neq 0$, и для него будут иметь место законы сохранения

$$\frac{\partial \sqrt{-g}\, \overline{T}_i^k}{\partial x^k} = \frac{\partial \sqrt{-g}\, T_i^k}{\partial x^k} + \frac{\partial \sqrt{-g}\, T_i^{*k}}{\partial x^k} = 0. \tag{1.13}$$

Скалярная величина B имеет вид

$$B = \frac{\partial}{\partial x^k} \frac{\delta A^k}{\delta q} = \frac{\partial}{\partial x^k} \frac{\partial A^k}{\partial q}. \tag{1.14}$$

Поскольку

$$\delta A^k = \delta q \left(\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial q_k} - \frac{\partial}{\partial x^i} \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial q_{ik}} \right) + \delta q_i \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial q_{ik}},$$

то

$$\frac{\delta A^k}{\delta q} = \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial q_k} - \frac{\partial}{\partial x^i} \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial q_{ik}} + \frac{\delta q_i}{\delta q} \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial q_{ik}}, \tag{1.15}$$

откуда

$$B=\frac{\partial}{\partial x^k}\left[\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial q_k}-\frac{\partial}{\partial x^i}\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial q_{ik}}+\frac{\delta q_i}{\delta q}\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial q_{ik}}\right]. \tag{1.16}$$

В частном случае, если на поверхности f $\delta q_i=0$

$$B=\frac{\partial}{\partial x^k}\left[\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial q_k}-\frac{\partial}{\partial x^i}\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial q_{ik}}\right].$$

В случае специальной теории относительности необходимо положить $\sqrt{-g}=1$. В случае дискретной среды в специальной теории относительности для отдельных масс или «зарядов» необходимо определить функцию Лагранжа L^*; тогда действие

$$S=\int_{t_1}^{t_2}L^*\,dt=\frac{1}{c}\int\frac{L^*}{\theta}\,dS=\frac{1}{c}\int L^{**}\,dS, \tag{1.17}$$

где $dS=\theta c dt$ — интервал, $\theta=\sqrt{1-\frac{a^2}{c^2}}$, причем a — полная скорость частицы. Скалярная величина $L^{**}dS$ может быть составлена из векторов и тензоров и дифференциалов координат.

Далее, снова полагаем, что

$$\delta S=\delta\int L^*\,dt=0. \tag{1.18}$$

При этом получаются уравнения вида (1.3), где под $\mathfrak{L}$ надо понимать L^*, а под параметрами варьирования $q^{(r)}$ величины, входящие в L^*. Как правило, в L^* величины $q^{(r)}_{ik}$ не входят: $L^*=L^*(q^{(r)}, q^{(r)}_i)$.

Обобщения на случай общей теории относительности не представляют труда. В полученных уравнениях обычные производные заменяются на ковариантные. Так, например, при движении частиц в гравитационном поле для свободной частицы имеем

$$L^*=-mc^2\theta,\qquad S=-mc^2\int\theta dt=-mc\int dS,$$
$$dS=-mc\delta\int dS=0. \tag{1.19}$$

В специальной теории относительности уравнения движения имеют вид $\frac{du^i}{ds}=0$ или, иначе, $du^i=0$. Здесь $u^i=\frac{dx^i}{ds}$ — компоненты 4-х скорости: $u^\alpha=\frac{a^\alpha}{c\theta}$, $u^4=\frac{i}{\theta}$, где a^α — компоненты обычной 3-х скорости. В общей теории относительности в криволинейных координатах, заменяя обычную производную ковариантной, получаем уравнения $Du^i = 0$, что дает

$$\frac{du^i}{ds} + \Gamma^i_{kl} u^k \frac{dx^l}{ds} = 0,$$

или

$$\frac{d^2x^i}{ds^2} + \Gamma^i_{kl} \frac{dx^k}{ds} \frac{dx^l}{ds} = 0. \tag{1.20}$$

При движении частиц не только в гравитационном поле, но и в других полях к функции Лагранжа $-mc^2\theta$ прибавляются функции Лагранжа полей и взаимодействия с полями, что дает дополнительные члены в вариационных уравнениях.

§ 2. Классическая теория тяготения Ньютона и тяготение в специальной теории относительности

Закон тяготения, установленный Ньютоном на основе тщательного анализа фактических данных (движения планет по законам Кеплера), имеет вид

$$F = -\frac{GM_1M_2}{r^2}, \tag{2.1}$$

где

$$G \approx \frac{2}{3} 10^{-7} \frac{см^3}{г \cdot сек^2}$$

есть гравитационная постоянная, M_1, M_2 — массы обоих тяготеющих тел, r — расстояние между ними, F — сила притяжения.

Потенциал поля, создаваемый телом массы M, есть

$$\varphi = -\frac{GM_1}{r}. \tag{2.2}$$

Уравнения движения материальных тел имеют вид

$$\frac{da}{dt} = -\operatorname{grad} \varphi, \tag{2.3}$$

где a — скорость. Уравнение поля в случае сплошной среды (уравнение Пуассона) имеет вид

$$\Delta\varphi = 4\pi G\rho. \tag{2.4}$$

Эти уравнения, как мы сейчас увидим, легко вывести из общего вариационного принципа, причем мы несколько обобщим задачу и выведем уравнения движения и поля для сплошной среды (пренебрегая диссипацией энергии в ней).

Функции Лагранжа «частицы» и поля

$$L_i^* = \frac{ma^2}{2} - m\varphi. \tag{2.5}$$

Лагранжиан (плотность функции лагранжиана) сплошной среды есть давление

$$L_m = p. \tag{2.6}$$

Лагранжиан гравитационного поля может быть написан в виде

$$L_g = b_1 (\nabla\varphi)^2 + b_2\Delta\varphi \tag{2.7}$$

(поскольку уравнения поля должны быть линейными и не содержать третьих производных, такой вид лагранжиана является наиболее общим). Коэффициенты b_1 и b_2 определяются ниже. [Прибавление члена $\Delta\varphi$ не меняет последующих уравнений поля и движения, поскольку

$$\Delta\varphi = \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial\varphi}{\partial x_i},$$

т. е. имеет вид дивергенции (от градиента), и при вариации этот член, преобразуясь по теореме Гаусса, дает нуль, так как на границе (поверхности) варьирования обращается в нуль величина $\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}$.]

Таким образом, лагранжиан материи и поля будет иметь вид

$$L = p + b_1 (\nabla\varphi)^2 + b_2\Delta\varphi, \qquad p = \frac{w_{\text{кл}} - E_{\text{кл}}}{v}, \tag{2.8}$$

где $v = 1/\rho$ — удельный объем, $w_{\text{кл}}$ и $E_{\text{кл}}$ — классические теплосодержание и внутренняя энергия. При отсутствии поля

$$w_{\text{кл}} = \dot{S} - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial S}{\partial x_\alpha}\right)^2, \tag{2.9}$$

причем $\frac{\partial S}{\partial x_\alpha} = -a_\alpha$, где a_α — компонента скорости, S — действие (потенциал скорости). В случае поля можно положить, что

$$w_{\text{кл}} = \dot{S} - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial S}{\partial x_\alpha}\right)^2 - \varphi, \tag{2.10}$$

поэтому

$$L = \rho\left[\dot{S} - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial S}{\partial x_\alpha}\right)^2 - E_{\text{кл}} - \varphi\right] + b_1 (\nabla\varphi)^2 + b_2\Delta\varphi. \tag{2.11}$$

Уравнения поля имеют вид

$$\frac{\partial L}{\partial q^{(r)}} - \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial L}{\partial q_i^{(r)}} + \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_k} \frac{\partial L}{\partial q_{ik}^{(r)}} = 0, \tag{2.12}$$

где $q^{(r)}$ — параметры, определяющие состояние системы (обобщенные координаты)

$$q_i^{(r)} = \frac{\partial q^{(r)}}{\partial x_i}, \qquad q_{ik}^{(r)} = \frac{\partial^2 q^{(r)}}{\partial x_i \partial x_k}, \qquad i = \alpha = 1,\ 2,\ 3;$$

эти параметры соответствуют пространственным координатам; $i = 4$ соответствует временнóй координате.

Полагая, что $q^{(r)} = \varphi$, придем к уравнению

$$\rho + 2b_1 \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \frac{\partial \varphi}{\partial x_\alpha} = 0, \tag{2.13}$$

или $$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2_\alpha} = \Delta\varphi = -\frac{\rho}{2b_1}.$$

Так как $\Delta\varphi = \operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = \operatorname{div} g$, где $g = \operatorname{grad} \varphi$ — ускорение, то $\operatorname{div} g = -\frac{\rho}{2b_1}$.

В сферически-симметричном поле

$$\Delta\varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{2\partial\varphi}{r \partial r} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r}\right) = -\frac{\rho}{2b_1}.$$

откуда

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} = g = -\frac{1}{2b_1 r^2} \int_0^r \rho r^2 dr = -\frac{M}{8\pi b_1 r^2}, \quad \varphi = \frac{M}{8\pi b_1 r}.$$

Сравнивая с (2.2), находим, что

$$b_1 = -\frac{1}{8\pi G}. \tag{2.14}$$

При этом (2.13) принимает вид

$$\Delta\varphi = 4\pi G\rho \quad \text{(уравнение Пуассона)}. \tag{2.15}$$

Если рассматривать тяготение одной «материальной точки», например массы M_1 (сплошная среда отсутствует), то $\Delta\varphi = 0$, откуда

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r}\right) = 0 \text{ и } \frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{GM_1}{r^2}, \quad \varphi = -\frac{GM_1}{r}.$$

Взяв производную по x_α от (2.10), получим

$$\frac{\partial w}{\partial x_\alpha} = \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial S}{\partial x_\alpha} - \frac{\partial S}{\partial x_\beta}\frac{\partial^2 S}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} - \frac{\partial \varphi}{\partial x_\alpha},$$

или
$$\frac{\partial a_\alpha}{\partial t} + a_\beta \frac{\partial a_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial w}{\partial x_\alpha} = -\frac{\partial \varphi}{\partial x_\alpha}.$$

Поскольку $\frac{1}{\rho} dp = dw$, то последнее уравнение примет вид уравнения движения

$$\frac{\partial a_\alpha}{\partial t} + a_\beta \frac{\partial a_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_\alpha} = -\frac{\partial \varphi}{\partial x_\alpha}. \tag{2.16}$$

Понимая в (2.11) и (2.12) под $q_i^{(r)} = 1$, $\dot{S}$ и $\frac{\partial S}{\partial x_\alpha}$, придем к уравнению неразрывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho a_\alpha)}{\partial x_\alpha} = 0. \tag{2.17}$$

Присоединяя к этим уравнениям уравнение состояния

$$p = p(\rho, T), \tag{2.18}$$

тождество

$$\frac{\partial (p, v)}{\partial (T, \sigma)} \equiv 1, \tag{2.19}$$

(где T — температура, σ — энтропия) и уравнение энергии, например условия адиабатичности,

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{\partial \sigma}{\partial t} + a_\alpha \frac{\partial \sigma}{\partial x_\alpha}, \tag{2.20}$$

придем к полной системе уравнений (2.15) — (2.20) движения газа в гравитационном поле.

В случае малого давления среды уравнение (2.16) принимает вид

$$\frac{\partial a_\alpha}{\partial t} + a_\beta \frac{\partial a_\alpha}{\partial x_\beta} = \frac{d a_\alpha}{dt} = -\frac{\partial \varphi}{\partial x_\alpha}, \tag{2.21}$$

что дает уравнение движения частиц. В этом случае система уравнения состоит из двух уравнений: (2.15) и (2.21). Указанными соотношениями и исчерпывается задача о классическом движении идеальной среды в ньютоновском гравитационном поле.

Учет диссипации энергии может быть осуществлен, как и в обычной газовой динамике, внесением дополнительных членов в уравнения движения и энергии. Так же может быть учтен классический вклад электромагнитного поля.

Имеет некоторый (но только методический) смысл обобщить задачу о ньютоновской гравитации в рамках специальной теории относительности. При этом, полагая, что $x_\alpha = x, y, z$; $x_4 = ict$, придем к такому лагранжиану:

$$L = p - \frac{1}{8\pi G}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right)^2 + b_2 \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i^2} = \\ = p - \frac{1}{8\pi G}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right)^2 + b_2 \Box \varphi. \qquad (2.22)$$

Если гравитационное поле отсутствует, то теплосодержание

$$w = c\sqrt{-\left(\frac{\partial S}{\partial x_i}\right)^2} = c\sqrt{-S_i^2}, \quad wu_i = -c\frac{\partial S}{\partial x_i} = -cS,$$

где

$$u_\alpha = \frac{a_\alpha}{c\theta}, \qquad u_4 = \frac{i}{\theta}, \qquad \theta = \sqrt{1 - \frac{a^2}{c^2}}.$$

При наличии поля положим

$$wu_i = -cS_i - A\varphi u_i,$$

где w — теплосодержание; тогда

$$w = c\sqrt{-S_i} - A\varphi; \qquad (2.23)$$

$A = A(v)$ будет определена ниже. При этом

$$p = \frac{1}{v}\left(c\sqrt{-S_i^2} - E - A\varphi\right) = \frac{w - E}{v}$$

(где E — энергия)

$$L = \frac{1}{v}\left(c\sqrt{-S_i^2} - E - A\varphi\right) - \frac{1}{8\pi G}\varphi_i^2 + b_2\varphi_{ii}. \qquad (2.24)$$

Уравнение поля имеет вид

$$\Box\varphi = 4\pi G \frac{A}{v} \text{ (уравнение Даламбера).} \qquad (2.25)$$

Понимая в (2.24) S_i, как величины $q_i^{(r)}$, придем к уравнению неразрывности

$$\frac{\partial \frac{u_k}{v}}{\partial x_k} = 0. \qquad (2.26)$$

При этом автоматически получим соотношение $dE = -pdv - \varphi dA$ и, поскольку $w = E + pv$, найдем, что $dw = vdp - \varphi dA$, причем $E = \rho v c^2$, где ρ — полная плотность, включая внутреннюю энергию.

Уравнение (2.26) удобно написать в виде

$$\frac{\partial \delta}{\partial t} + \operatorname{div}(\delta a) = 0, \quad \text{где} \quad \delta = \frac{1}{v\theta}.$$

Беря производные по x_k от членов уравнения (2.23), придем к уравнениям движения

$$\frac{\partial [(w + A\varphi) u_i]}{\partial x_k} = -c \frac{\partial S_i}{\partial x_k} = -c \frac{\partial S_k}{\partial x_i} = \frac{\partial [(w + A\varphi) u_k]}{\partial x_i}.$$

Напишем эти уравнения в виде

$$\frac{d [w + A\varphi) u_i]}{\partial s} + \frac{\partial [(w + A\varphi)]}{\partial x_i} = 0,$$

где $ds = c\theta dt$ — интервал.

Поскольку $dw = vdp - \varphi dA$, то окончательно придем к уравнениям

$$\frac{d (wu_i)}{ds} + v \frac{\partial p}{\partial x_i} = -\frac{\partial (A\varphi)}{\partial x_i} - \frac{d (A\varphi u_i)}{ds} + \varphi \frac{\partial A}{\partial x_i} =$$

$$= -A \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} - \frac{d (A\varphi u_i)}{dS}. \qquad (2.27)$$

Уравнение (2.20) сохраняет прежний вид. Таким образом, полная система уравнений есть (2.18) — (2.20), (2.25) — (2.27).

В случае малого давления среды имеем

$$\frac{d \frac{a_\alpha}{\theta}}{\theta dt} = -A \frac{\partial \varphi}{\partial x_\alpha} - \frac{d \left(A\varphi \frac{a_\alpha}{\theta} \right)}{c^2 \theta dt}. \qquad (2.28)$$

В этом случае для определения движения и поля достаточно двух уравнений: (2.25) и (2.28); они характеризуют движение и поле точечных частиц.

Вычислим теперь тензор энергии-импульса

$$T_{ik} = \delta_{ik} L - q_i \frac{\partial L}{\partial q_k} + \left(q_i \frac{\partial}{\partial x_l} \frac{\partial L}{\partial q_{kl}} - q_{il} \frac{\partial L}{\partial q_{kl}} \right). \qquad (2.29)$$

Тензор энергии-импульса материи примет вид (учитывая взаимодействия материи с гравитационным полем)

$$T_{ikm} = \frac{w + A\varphi}{v} u_i u_k + \delta_{ik} p. \qquad (2.30)$$

Тензор энергии-импульса гравитационного поля есть

$$T_{ikg} = \left(-\frac{1}{8\pi G}\varphi_l^2 + b_2\varphi_{ll}\right)\delta_{ik} + \frac{\varphi_i\varphi_k}{4\pi G} - b_2\varphi_{ik}, \tag{2.31}$$

$$\frac{\partial T_{ikm}}{\partial x_k} = -\frac{\partial T_{ikg}}{\partial x_k} = -\frac{A}{v}\frac{\partial\varphi}{\partial x_i} = f_i;$$

откуда

$$\frac{\partial (T_{ikm} + T_{ikg})}{\partial x_k} = 0. \tag{2.32}$$

Здесь f_i — сила, действующая со стороны поля, в чем легко убедиться непосредственным вычислением. В самом деле,

$$\frac{\partial T_{ikm}}{\partial x_k} = \frac{u_k}{v}\frac{\partial\left[(w + A\varphi)u_i\right]}{\partial x_k} + \frac{\partial p}{\partial x_i} + (w + A\varphi)u_i\frac{\partial\frac{u_k}{v}}{\partial x_k} = f_i.$$

Умножая на v и скалярно на u_i, имеем

$$-\frac{d(w + A\varphi)}{ds} + \frac{vdp}{ds} - (w + A\varphi)\frac{\partial\frac{u_k}{v}}{\partial x_k} = vu_if_i$$

или

$$\varphi\frac{dA}{ds} - \frac{d(A\varphi)}{ds} - (w + A\varphi)\frac{\frac{\partial u_k}{v}}{\partial x_k} = vu_if_i =$$

$$= -A\frac{d\varphi}{ds} - (w + A\varphi)\frac{\frac{\partial u_k}{v}}{\partial x_k}.$$

Поскольку

$$vu_if_i = -Au_i\frac{\partial\varphi}{\partial x_i} = -A\frac{d\varphi}{ds},$$

то

$$\frac{\frac{\partial u_k}{v}}{\partial x_k} = 0,$$

что и дает уравнение неразрывности.

Уравнения движения примут вид (2.27):

$$\frac{\partial T_{ikg}}{\partial x_k} = \frac{1}{4\pi G}\varphi_i\varphi_{kk} = \frac{A}{v}\varphi_i = \frac{A}{v}\frac{\partial\varphi}{\partial x_i},$$

что и подтверждает справедливость уравнений (2.23).

Вычислим теперь плотность энергии материи и поля

$$\varepsilon = -T_{44} = -p + \frac{w}{\theta^2 v} + \frac{A\varphi}{\theta^2 v} + \frac{\varphi_l^2}{8\pi G} - \frac{\varphi_4^2}{4\pi G} - b_2(\varphi_{ll} - \varphi_{44}). \tag{2.33}$$

Преобразуя и используя (2.25), придем к такому уравнению:

$$\varepsilon = \frac{\delta}{\theta}\left(E + \frac{a^2}{c^2}\,pv\right) + \frac{\varphi\Box\varphi}{4\pi G}\left(1 + \frac{a^2}{c^2\theta^2}\right) + \\ + \frac{1}{8\pi G}\left[(\nabla\varphi)^2 + \frac{\dot\varphi^2}{c^2}\right] - b_2\left(\Box\varphi + \frac{\ddot\varphi}{c^2}\right). \quad (2.34)$$

В релятивистском случае уравнение Даламбера должно иметь вид

$$\Box\varphi = \frac{4\pi G}{c^2}\left(\theta^2\varepsilon_{\text{м}} - \frac{a^2}{c^2}\,p\right) = -\frac{4\pi G}{c^2}\left(\theta^2 T_{m44} + \frac{a^2}{c^2}\,p\right) = 4\pi G\rho. \quad (2.35)$$

Сравнивая с (2.25), найдем

$$A = \rho v = \frac{v}{c^2}\left[\varepsilon_{\text{м}} - \frac{a^2}{c^2}(\varepsilon_{\text{м}} + p)\right]. \quad (2.36)$$

Поскольку

$$\frac{\delta}{\theta}\left(E + \frac{a^2}{c^2}\,pv\right) = \frac{c^2}{\theta^2}\left(\rho + \frac{a^2}{c^4}\,p\right) = \varepsilon_{\text{м}},$$

то, преобразуя

$$b_2\Box\varphi = \frac{4\pi G b_2}{c^2}\left[\varepsilon_{\text{м}} - \frac{a^2}{c^2}(\varepsilon_{\text{м}} + p)\right],$$

найдем, что естественно положить

$$b_2 = \frac{c^2}{4\pi G}. \quad (2.37)$$

Член $\Box\varphi = \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}$ не дает вклада в плотность энергии, так как, преобразуя его по теореме Гаусса, найдем, что

$$\int\Box\varphi dV = \int\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\,dV = \int\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\,df_j = 0$$

$\left(\text{поскольку на поверхности компоненты } \frac{\partial\varphi}{\partial x_i} = 0\right)$.

Следовательно, можно записать (2.34) в виде

$$\varepsilon = \frac{\delta}{\theta}\left(E + \frac{a^2}{c^2}\,pV\right) + \frac{\varphi\Box\varphi}{4\pi G}\left(1 + \frac{a^2}{c^2\theta^2}\right) + \\ + \frac{1}{8\pi G}\left[(\nabla\varphi)^2 + \frac{\dot\varphi^2}{c^2}\right] - \frac{\ddot\varphi}{4\pi G}. \quad (2.38)$$

Поскольку

$$\frac{\varphi\Box\varphi}{4\pi G}\left(1 + \frac{a^2}{c^2\theta^2}\right) = \frac{1}{4\pi G}\left\{\left\{\frac{\partial}{\partial x_i}\left[1 + \frac{a^2}{c^2\theta^2}\right)\varphi\,\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right]\right\} - \\ - \left(1 + \frac{a^2}{c^2\theta^2}\right)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right)^2 - \frac{\varphi}{\theta^4 c^2}\,\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\,\frac{\partial a^2}{\partial x_i}\right\},$$

то

$$\varepsilon = \frac{\delta}{\theta}\left(E + \frac{a^2}{c^2}pv\right) +$$
$$+ \frac{1}{8\pi G}\left[-2\ddot{\varphi} - \frac{(\nabla\varphi)^2}{\theta^2}\left(1 + \frac{a^2}{c^2}\right) + \frac{\dot{\varphi}^2}{\theta^2 c^2}\left(3 - \frac{a^2}{c^2}\right)\right]. \qquad (2.39)$$

В классическом пределе

$$\varepsilon = \rho c^2 + \rho\frac{a^2}{2} + E_{\text{кл}} - \frac{1}{8\pi G}[(\nabla\varphi)^2 + 2\ddot{\varphi}]. \qquad (2.40)$$

Впишем теперь полный тензор энергии-импульса материи и поля и свернем его:

$$T_{ik} = T_{ikm} + T_{ikg} = [(p + \varepsilon)u_i u_k + \delta_{ik}p] +$$
$$+ \frac{\delta_{ik}}{4\pi G}\left(-\frac{\varphi_l^2}{2} + c^2\varphi_{ll}\right) + \varphi_i\varphi_k - c^2\varphi_{ik} + \varphi\Box\varphi u_i u_k. \qquad (2.41)$$

Сверка тензора дает

$$T_{ii} = T = (3p - \varepsilon) +$$
$$+ \frac{1}{4\pi G}(-2\varphi_l^2 + 4c^2\varphi_{ii} + \varphi_i^2 - c^2\varphi_{ii} - \varphi\Box\varphi),$$

или

$$T = (3p - \varepsilon) + \frac{1}{4\pi G}\left(3c^2\Box\varphi - \frac{1}{2}\Box\varphi^2\right). \qquad (2.42)$$

Отсюда следует, что

$$T_m = 3p - \varepsilon, \quad T_g = \frac{1}{4\pi G}\left(3c^2\Box\varphi - \frac{\Box\varphi^2}{2}\right),$$

но, поскольку члены $\Box\varphi$ и $\Box\varphi^2$ не дают вклада в энергию, $T_g = 0$, что соответствует частицам (гравитонам) с массой покоя, равной нулю.

Теперь следует ввести в рассмотрение и электромагнитное поле. Лагранжиан поля есть $-\frac{1}{16\pi}(F_{ik})^2$, где F_{ik} — тензор поля. Лагранжиан, характеризующий взаимодействие поля с материей, есть $\frac{1}{c}A_i j_i$, где плотность тока $j_i = \rho_e\frac{dx_i}{dt}$, j_i — компонента вектора тока, ρ_e — плотность заряда, A_i — компонента 4-х потенциала поля. Полный лагранжиан поля есть

$$L_l = \frac{1}{c}A_i j_i - \frac{1}{16\pi}F_{ik}^2, \qquad (2.43)$$

причем тензор поля

$$F_{ik} = \frac{\partial A_k}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial x_k}, \tag{2.44}$$

где F_{ik} является асимметричным тензором.

Уравнения электромагнитного поля получаются, если под $q^{(r)}$ понимать компоненты A_i (все члены лагранжиана L_m и L_g при варьировании дают нуль):

$$\frac{1}{c} j_i = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial F_{ik}}{\partial x_k},$$

откуда

$$\frac{4\pi}{c} j_i = \frac{\partial F_{ik}}{\partial x_k}, \tag{2.45}$$

или

$$\frac{4\pi}{c} j_i = \frac{\partial^2 A_k}{\partial x_i \partial x_k} - \Box A_i = - \Box A_i, \tag{2.46}$$

причем полагаем, что $\frac{\partial A_k}{\partial x_k} = 0$ (условия Лоренца).

На основании (2.44) легко убедиться, что имеют место уравнения

$$\frac{\partial F_{ik}}{\partial x_l} + \frac{\partial F_{kl}}{\partial x_i} + \frac{\partial F_{il}}{\partial x_k} = 0, \tag{2.47}$$

или

$$e_{iklm} \frac{\partial F_{lm}}{\partial x_k} = 0.$$

Уравнения (2.47) дают первые два векторных уравнения Максвелла. Четыре уравнения (2.45) дают вторую пару векторных уравнений Максвелла.

Вычислим теперь производные

$$\frac{4\pi}{c} \frac{\partial j_i}{\partial x_i} = \frac{\partial^2 F_{ik}}{\partial x_i \partial x_k}.$$

В силу антисимметричности тензора F_{ik} имеем

$$\frac{\partial^2 F_{ik}}{\partial x_i \partial x_k} = - \frac{\partial^2 F_{ki}}{\partial x_i \partial x_k} = - \frac{\partial^2 F_{ik}}{\partial x_i \partial x_k} = 0,$$

откуда

$$\frac{\partial j_i}{\partial x_i} = 0, \tag{2.48}$$

что является уравнением неразрывности для плотности тока j_i.

Остается теперь определить тензор энергии-импульса свободного поля (при отсутствии зарядов). При этом варьированию подлежат только величины F_{ik}. Таким образом,

$$\bar{L}_e = -\frac{1}{16\pi}(F_{kl})^2 = -\frac{1}{16\pi}\left(\frac{\partial A_l}{\partial x_k} - \frac{\partial A_k}{\partial x_l}\right)^2,$$

откуда, используя (2.29), найдем

$$T_{ike} = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial A_l}{\partial x_i}F_{kl} - \frac{1}{16\pi}\delta_{ik}F_{lm}^2 =$$

$$= \frac{1}{4\pi}\left(F_{il}F_{kl} - \frac{1}{4}F_{lm}^2\delta_{ik}\right) \qquad (2.49)$$

(мы вычли величины $\frac{1}{4\pi}\frac{\partial A_i}{\partial x_l}F_{kl} = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial (A_i F_{kl})}{\partial x_l}$, которые имеют вид дивергенции и поэтому после преобразования по теореме Гаусса дают нулевой результат; причем $\frac{\partial F_{kl}}{\partial x_l} = 0$, поскольку $j_k = 0$).

Для свободного поля 4-х дивергенция

$$\frac{\partial T_{ike}}{\partial x_k} = 0. \qquad (2.50)$$

В том случае, когда мы рассматриваем совместно поле и материю, полагая $j_k \neq 0$, придем к следующему результату:

$$\frac{\partial T_{ike}}{\partial x_k} = -\frac{1}{c}F_{ik}j_k, \qquad (2.51)$$

в чем легко убедиться, произведя необходимые вычисления и используя при этом уравнения Максвелла.

Для всех трех тензоров энергии-импульса (материи, гравитационного и электромагнитного полей) справедливы законы сохранения

$$\frac{\partial (T_{ikm} + T_{ikg} + T_{ike})}{\partial x_k} = 0. \qquad (2.52)$$

Окончательно всю систему уравнений, характеризующих адиабатические движения сплошной среды в гравитационном и электромагнитном полях, и уравнения самих полей можно выписать в виде

$$\frac{d(wu_i)}{ds} + v\frac{\partial p}{\partial x_i} =$$

$$= -\rho v\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + u_i u_k \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}\right) - \varphi u_k \frac{\partial}{\partial x_k}(u_i \rho v) + \frac{v}{c}F_{ik}j_k.$$

$$\frac{\partial \frac{u_k}{v}}{\partial x_k} = 0, \qquad \frac{d\sigma}{ds} = 0, \qquad p = p(T, v), \qquad \frac{\partial (p; v)}{\partial (T; \sigma)} = 1,$$

$$\Box \varphi = 4\pi G\rho,$$

$$\frac{4\pi}{c} j_i = \frac{\partial F_{ik}}{\partial x_k}, \qquad \frac{\partial F_{ik}}{\partial x_l} + \frac{\partial F_{kl}}{\partial x_i} + \frac{\partial F_{il}}{\partial x_k} = 0. \tag{2.53}$$

Если рассматривать реальную проводящую среду, то надо ввести два тензора: F_{ik} и H_{ik}, компонентами которых являются E, H, $B = \mu H$ и $D = \varepsilon E$, а также использовать закон Ома

$$j_i + u_i u_k j_k = \lambda u_k F_{ik}, \tag{2.54}$$

где j_i — сумма плотности тока зарядов и проводимости, λ — проводимость. Однако подобное развитие макроскопической электродинамики выходит за рамки данной работы и мы на этом здесь останавливаться не будем.

В классическом пределе будем иметь

$$\frac{du_\alpha}{dt} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_\alpha} = -\frac{\partial \varphi}{\partial x_\alpha} + \frac{1}{4\pi}\left\{[\operatorname{rot} HH]_\alpha - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{c}\left[\frac{\partial E}{\partial t} H\right]_\alpha + E_\alpha \operatorname{div} E\right\},$$

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} a = 0, \qquad \Delta \varphi = 4\pi G\rho,$$

$$\frac{\rho d\left(w_{\text{кл}} + \frac{a^2}{2}\right)}{dt} - \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{cE \operatorname{rot} H - E\frac{\partial E}{\partial t}}{4\pi}, \quad \frac{d\sigma}{dt} = 0,$$

$$\operatorname{div} H = 0, \qquad \operatorname{div} E = 4\pi\rho_e, \qquad \operatorname{rot} H = \frac{4\pi}{c} j + \frac{1}{c}\frac{\partial E}{\partial t},$$

$$\operatorname{rot} E = -\frac{1}{c}\frac{\partial H}{\partial t}.$$

Развитый здесь формализм полностью описывает движение среды в (слабых) гравитационном и электромагнитном полях в рамках специальной теории относительности.

В случае сильных полей подобный формализм не является удовлетворительным; он, например, неправильно описывает наблюдаемые эффекты небесной механики и искривление лучей света в гравитационном поле. Эти явления требуют принципиально нового подхода к проблеме, что и было сделано Эйнштейном в общей теории относительности. Уже начиная с членов порядка u^2/c^2 результаты, полученные здесь, будут расходиться с результатами, которые получаются при использовании общей теории относительности, что показывает на бесполезность попыток описывать гравитационное поле в рамках специальной теории относительности. Только вычисления, проводимые в рамках общей теории относительности, хорошо согласуются с данными наблюдений.

§ 3. Основные уравнения общей теории относительности

Основным уравнением общей теории относительности является, как известно, знаменитое уравнение Эйнштейна

$$R_i^k - \frac{1}{2}\delta_i^k R = \frac{8\pi G}{c^4} T_i^k, \tag{3.1}$$

где $G \approx \frac{2}{3} 10^{-7}$ $см^3/г \cdot сек^2$ — гравитационная постоянная, T_i^k — компоненты тензора энергии-импульса материи и электромагнитного поля, R_i^k — компоненты однажды свернутого тензора кривизны, $R = R_i^i = g^{ik}R_{ik}$ — скалярная кривизна пространства-времени (координатами здесь являются $x^\alpha = x, y, z$; $x^0 = ct$). Вывод этого уравнения, данный Эйнштейном после неудачных поисков общих уравнений гравитационного поля, достаточно прост. Мы обоснуем его следующим образом.

Прежде всего, согласно основной гипотезе Эйнштейна, тяготение есть следствие кривизны пространства-времени. Очевидно, что эта кривизна должна зависеть от материи, находящейся в пространстве. Материя характеризуется симметричным тензором 2-го ранга энергии-импульса T_i^k. Таким образом, кривизна пространства также должна характеризоваться симметричным тензором 2-го ранга.

Далее, по аналогии с ньютоновской теорией тяготения, с уравнением Пуассона

$$\Delta\varphi = 4\pi G\rho \tag{3.2}$$

(где φ — потенциал тяготения, ρ — плотность вещества) следует допустить, что тензор, характеризующий кривизну пространства, должен содержать вторые производные от величин, характеризующих метрику пространства g_{ik}, где g_{ik} — компоненты метрического тензора. Затем нужно предположить линейную связь обоих тензоров и при предельном переходе (в отсутствие поля) прийти к уравнениям сохранения энергии-импульса:

$$\frac{\partial T_i^k}{\partial x^k} = 0. \tag{3.3}$$

Следовательно, необходимо построить из величин g_{ik} такой тензор, который удолетворяет всем этим условиям. Таким единственным тензором является

$$P_i^k = R_i^k - \frac{1}{2}\delta_i^k R, \tag{3.4}$$

где

$$R_i^k = g^{kr}R_{ir} = g^{kr}\left(\frac{\partial\Gamma_{ir}^l}{\partial x^l} - \frac{\partial\Gamma_{il}^l}{\partial x^r} + \Gamma_{ir}^l\Gamma_{lm}^m - \Gamma_{il}^m\Gamma_{rm}^l\right), \tag{3.5}$$

причем символы Кристоффеля

$$\Gamma_{kl}^i = \frac{1}{2}g^{im}\left(\frac{\partial g_{mk}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{ml}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^m}\right). \tag{3.6}$$

Величины Γ_{kl}^i образуют тензор только относительно линейных преобразований.

Свернутый тензор кривизны (тензор Риччи) образуется при свертке тензора Римана — Кристоффеля

$$R_{ilr}^k = \frac{\partial\Gamma_{ir}^k}{\partial x^l} - \frac{\partial\Gamma_{il}^k}{\partial x^r} + \Gamma_{nl}^k\Gamma_{ir}^n - \Gamma_{nr}^k\Gamma_{il}^n. \tag{3.7}$$

При $k = l$ будем иметь

$$R_{ir} = \frac{\partial\Gamma_{ir}^l}{\partial x^l} - \frac{\partial\Gamma_{il}^l}{\partial x^r} + \Gamma_{nl}^l\Gamma_{ir}^n - \Gamma_{nr}^l\Gamma_{il}^n \tag{3.8}$$

(после умножения на g^{kr} получим R_i^k).

Покажем теперь, что $P_{i;k}^k = 0$. Поскольку для тензора R_{iml}^k имеют место тождества Бианки

$$R_{nml;\,i}^k + R_{nim;\,l}^k + R_{nli;\,m}^k = 0, \tag{3.9}$$

то, умножая члены этих тождеств на $g^{nm}\delta_k^l$, получим

$$\frac{\partial R}{\partial x^i} - 2R_{i;\,k}^k = 0,$$

что аналогично выражению

$$P_{i;\,k}^k = R_{i;\,k}^k - \frac{1}{2}\frac{\partial R}{\partial x_i} = \left(R_i^k - \frac{1}{2}\delta_i^k R\right)_{;\,k} = 0. \tag{3.10}$$

Поскольку P_i^k и T_i^k должны быть, согласно предположению, линейно связаны, то

$$P_i^k = \varkappa T_i^k, \tag{3.11}$$

где коэффициент пропорциональности $\varkappa = 8\pi G/c^4$, как это будет выяснено из предельного перехода к закону тяготения Ньютона. Тензор P_i^k называют тензором Эйнштейна.

Далее, поскольку $P_{i;k}^k = 0$, то и

$$T_{i;k}^k = 0, \tag{3.12}$$

что при предельном переходе дает условие (3.3). Таким образом, действительно тензор Риччи (3.4) удовлетворяет всем приведенным выше условиям.

Напишем уравнение (3.1) в несколько ином виде: свернем тензоры R_i^k и T_i^k, т. е. положим, что $k = i$. Тогда, поскольку $R_i^i = R$, $T_i^i = T$, придем к скалярному уравнению

$$R = -\varkappa T, \tag{3.13}$$

после чего (3.1) можно написать в виде

$$R_i^k = \varkappa\left(T_i^k - \frac{1}{2}\,\delta_i^k T\right) = \varkappa T_i^{*k}. \tag{3.14}$$

Если материя (или электромагнитное поле) отсутствует, то $T_i^k = 0$; при этом $R_i^k = 0$, что дает уравнение самого гравитационного поля в отсутствие материи.

В общем случае $R_{ilr}^k \neq 0$. Если $R_{ilr}^k = 0$, то пространство-время является евклидовым (псевдоевклидовым), при этом $\Gamma_{ik}^l = 0$. Если $R_{ilr}^k \neq 0$, то пространство является римановым.

Тензор R_{ilr}^k имеет 20 независимых компонент. Поскольку всегда в данной точке пространства-времени можно выбрать декартову (локальную) систему координат, то, рассматривая преобразования поворота осей этой локальной системы координат (так, что значения g_{ik} в данной точке остаются неизменными), можно обратить шесть компонент тензора кривизны в нуль (ибо можно осуществить шесть независимых поворотов четырехмерной системы координат). Отсюда следует, что в любой заданной точке кривизна четырехмерного пространства-времени определяется 14 независимыми величинами.

Тензор Риччи зависит от 10 независимых компонент g_{ik}. Четыре координаты x^i могут быть произвольно преобразованы, что позволяет произвольным образом выбрать четыре компоненты g_{ik}. Таким образом, в тензор Риччи (или тензор Эйнштейна) входит лишь шесть независимых величин g_{ik}.

Если электромагнитное поле отсутствует, то

$$T_i^k = (p + \varepsilon) u_i u^k + \delta_i^k p, \tag{3.15}$$

где u^i — компоненты 4-х скорости, причем $u_i u^i = -1$, p — давление, $\varepsilon = \rho c^2$ — плотность энергии (ρ — плотность материи, включая ее внутреннюю энергию), давление

$$p = p(\sigma, \varepsilon), \tag{3.16}$$

где σ — энтропия. Если $\sigma = \text{const}$ или если $\frac{d\sigma}{ds} = 0$, то тензор T_i^k оказывается зависимым от четырех величин: трех компонент u^i и p (или ε).

Десять уравнений (3.1) определяют, таким образом, шесть компонент метрического тензора g_{ik} и четыре компоненты тензора энергии-импульса T_i^k. Поскольку уравнения $P_{i;k}^k = 0$ выполняются тождественно, то и четыре уравнения $T_{i;k}^k = 0$ также являются тождествами. В отсутствие гравитационного поля эти уравнения определяют компоненты T_i^k и описывают законы сохранения энергии-импульса материи.

Если ввести теперь в рассмотрение электромагнитное поле, то шесть компонент поля F_{ik} будут однозначно определяться уравнениями Максвелла

$$\frac{\partial F_{ik}}{\partial x^l} + \frac{\partial F_{li}}{\partial x^k} + \frac{\partial F_{kl}}{\partial x^i} = 0, \tag{3.17}$$

$$F^{ik}_{;k} = \frac{4\pi}{c} j^i, \tag{3.18}$$

где

$$\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sqrt{-g}\, j^i\right) = 0, \tag{3.19}$$

причем

$$\sqrt{-g}\, j^i = \delta c \frac{dx^i}{dx^0}. \tag{3.20}$$

Уравнения (3.17) можно также написать в виде

$$e^{iklm} \frac{\partial F_{lm}}{\partial x^k} = 0; \tag{3.21}$$

они дают лишь три независимых уравнения. Уравнение (3.19) определяет вектор тока j^i. Тензор энергии-импульса поля определяется выражением

$$\overline{T}_i^k = \frac{1}{4\pi}\left(F_{il}F^{kl} - \frac{1}{4}\,\delta_i^k F_{lm}F^{lm}\right). \qquad (3.22)$$

Поскольку $\overline{T}_i^i = 0$, то скалярная кривизна пространства-времени при наличии только одного электромагнитного поля равна нулю.

Уравнения (3.1) содержат, как мы указывали, вторые производные g_{ik} по координатам, причем эти производные входят в уравнения линейно. Первые производные g_{ik} по координатам, напротив, входят в уравнения нелинейно. Таким образом, уравнения (3.1) квазилинейны и можно показать, что они являются уравнениями гиперболического типа. Следовательно, можно искать их решения и исследовать их методом характеристик, что и было сделано Франклем и Фоком.

Для решения конкретных задач при заданных начальных условиях (по времени) необходимо задавать произвольно первые производные по времени для шести величин (поскольку имеется лишь шесть вторых производных по времени). К этому надо добавить начальные распределения 10 величин g_{ik}, три компоненты скорости и закон распределения, например, p (или ε). Всего надо задать 20 различных величин (сюда входят и функции, произвольность которых связана с произволом в выборе системы четырех координат).

Однако число реально различных произвольных функций, которые надо задавать, значительно меньше. В действительности надо задать лишь рапределение p (как ε), трех компонент скорости и четырёх величин, характеризующих свободное (при отсутствии материи) гравитационное поле. Таким образом, всего надо задавать распределение восьми независимых величин. Остальные «начальные функции» определятся автоматически при решении уравнений.

Общее решение уравнений (3.1) невозможно. Имеет смысл искать лишь частные решения этих уравнений. Поскольку уравнения гравитационного поля нелинейны, они содержат в себе также и уравнения движения материи, создающей само поле (в отличие, например, от линейных уравнений Максвелла, не описывающих законы движения зарядов). Это ясно видно из того, что уравнение движения (сохранения) материи $T_{i;\,k}^k = 0$ содержится в самих уравнениях поля (3.1).

Уравнение поля (3.11) более корректно можно вывести из вариационного принципа наименьшего действия, что было сделано различными авторами. Обычно поступают следующим образом. Вариацию плотности скалярной кривизны представим следующим образом:

$$\delta\,(\sqrt{-g}R) = \delta\,(\sqrt{-g}G) + \delta\,\frac{\partial}{\partial x^l}(\sqrt{-g}w^l), \tag{3.23}$$

где псевдоскаляр

$$G = g^{ik}G_{ik} = g^{ik}\,(\Gamma^m_{il}\Gamma^l_{km} - \Gamma^l_{ik}\Gamma^m_{lm}), \tag{3.24}$$

псевдовектор

$$w^l = g^{ik}\Gamma^l_{ik} - g^{il}\Gamma^k_{ik} = g^{il}g_{km}\frac{\partial g^{km}}{\partial x^i} - \frac{\partial g^{il}}{\partial x^i}. \tag{3.25}$$

Вариация действия дает

$$2\varkappa c\delta S_g = \int \delta\,(\sqrt{-g}R)\,d\Omega = \int \delta\,(\sqrt{-g}G)\,d\Omega + \int \delta\,\frac{\partial}{\partial x^l}(\sqrt{-g}w^l)\,d\Omega.$$

Последний интеграл можно преобразовать по теореме Гаусса

$$\delta\int \frac{\partial}{\partial x^l}(\sqrt{-g}w^l)\,d\Omega = \delta\int \sqrt{-g}w^l dS_l.$$

Полагая на гиперповерхности (граница интегрирования) δg^{ik} и $\delta\Gamma^l_{ik}$ равными нулю, найдем, что этот интеграл обращается в нуль. Поэтому

$$\delta\int(\sqrt{-g}R)\,d\Omega = \delta\int(\sqrt{-g}G)\,d\Omega. \tag{3.26}$$

После некоторых вычислений можно найти, что

$$\begin{aligned}\delta\,(\sqrt{-g}G) &= \delta g^{ik}\sqrt{-g}\left(R_{ik} - \frac{1}{2}g_{ik}R\right) + \\ &+ \delta g^{ik}\frac{\partial}{\partial x^l}\left[\frac{\sqrt{-g}}{2}(g^{ab}\Gamma^l_{ab} - g^{al}\Gamma^b_{ab})\,g_{ik} - \sqrt{-g}\,(\Gamma^l_{ik} - \Gamma^b_{ib}\delta^l_k)\right] + \\ &+ \delta\frac{\partial g^{ik}}{\partial x^l}\left[\frac{\sqrt{-g}}{2}(g^{ab}\Gamma^l_{ab} - g^{al}\Gamma^b_{ab})\,g_{ik} - \sqrt{-g}\,(\Gamma^l_{ik} - \Gamma^b_{ib}\delta^l_k)\right].\end{aligned} \tag{3.27}$$

Напишем теперь уравнение (1.3), подразумевая в нем под величиной q компоненты g_{ik}, а под плотностью лагранжиана псевдоскаляр

$$-\frac{\sqrt{-g}G}{2\varkappa} = \sqrt{-g}L = \mathcal{L}. \tag{3.28}$$

При этих условиях найдем, что

$$\frac{\partial(\sqrt{-g}G)}{\partial g^{ik}} - \frac{\partial}{\partial x^l}\frac{\partial(\sqrt{-g}G)}{\partial\frac{\partial g^{ik}}{\partial x^l}} = 0. \tag{3.29}$$

Подставляя в (3.29) выражение (3.27), придем к уравнению свободного гравитационного поля

$$R_{ik} - \frac{1}{2}g_{ik}R = 0 \tag{3.30}$$

(подстановка второго и третьего членов соотношения (3.27) дает нулевой результат).

Изучая гравитационное поле при наличии материи, надо варьировать сумму действия $S_m + S_g$, полагая, что

$$\delta(S_m + S_g) = 0, \tag{3.31}$$

где S_m — действие для материи

$$2c\delta S_m = -\int T_{ik}\sqrt{-g}\,\delta g^{ik}d\Omega, \tag{3.32}$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{-g}T_{ik} = -\frac{\partial(\sqrt{-g}L_m)}{\partial g^{ik}} + \frac{\partial}{\partial x^l}\frac{\partial(\sqrt{-g}L_m)}{\partial\frac{\partial g^{ik}}{\partial x^l}} - \frac{\partial^2}{\partial x^l\partial x^r}\frac{\partial(\sqrt{-g}L_m)}{\partial\frac{\partial^2 g^{ik}}{\partial x^l\partial x^r}}, \tag{3.33}$$

а L_m — лагранжиан материи. Вывод этого соотношения общеизвестен; ниже (в § 16) мы сделаем его заново с необходимыми уточнениями.

Из (3.31), (3.32) и (3.33) будем иметь

$$R_{ik} - \frac{1}{2}g_{ik}R = \varkappa T_{ik}, \tag{3.34}$$

т. е. уравнение (3.11). (Если варьировать L_m не по g_{ik}, а по другим параметрам, то для определения T_{ik} надо воспользоваться уравнением (1.9), и мы снова получим уравнение (3.34), что также будет более подробно показано ниже.) Можно также, как это обычно и делается, вывести уравнение поля, не прибегая к вариационным уравнениям Лагранжа.

Напишем δS_g в виде

$$2\varkappa c\delta S_g = \int \delta\left(\sqrt{-g}R\right) d\Omega = \int \delta\left(\sqrt{-g}R_{ik}g^{ik}\right) d\Omega =$$
$$= \int \delta\left(\sqrt{-g}g^{ik}\right) R_{ik} d\Omega + \int \sqrt{-g}g^{ik}\delta R_{ik} d\Omega.$$

Далее имеем равенства:

$$\delta\left(\sqrt{-g}g^{ik}\right) R_{ik} = \left(R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik}R\right)\sqrt{-g}\delta g^{ik}, \tag{3.35}$$

$$\sqrt{-g}g^{ik}\delta R_{ik} = \frac{\partial}{\partial x^l}\left[\sqrt{-g}\left(g^{ik}\delta\Gamma^l_{ik} - g^{il}\delta\Gamma^k_{ik}\right)\right], \tag{3.36}$$

$$\int \frac{\partial}{\partial x^l}\sqrt{-g}\left(g^{ik}\delta\Gamma^l_{ik} - g^{il}\delta\Gamma^k_{ik}\right) d\Omega =$$
$$= \int \sqrt{-g}\left(g^{ik}\delta\Gamma^l_{ik} - g^{il}\delta\Gamma^k_{ik}\right) dS_l.$$

Последний интеграл равен нулю, поскольку мы полагаем, что на гиперповерхности $\delta\Gamma^l_{ik} = 0$. Окончательно имеем

$$\delta S_g = \frac{1}{2\varkappa c}\int \left(R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik}R\right)\sqrt{-g}\delta g^{ik} d\Omega = -\delta S_m =$$
$$= \frac{1}{2c}\int \sqrt{-g}T_{ik}\delta g^{ik}\, d\Omega,$$

откуда и получаем уравнения (3.34).

§ 4. Линейное приближение

Если гравитационное поле отсутствует, то величины $g_{ik} = g^{(0)}_{ik}$, где $g^{(0)}_{\alpha\beta} = 1$ если $\alpha = \beta$; $g^{(0)}_{\alpha\beta} = 0$, если $\alpha \neq \beta$, и $g^{(0)}_{00} = -1$, $g^{(0)}_{0\beta} = 0$. Итак,

$$g^{(0)}_{11} = g^{(0)}_{22} = g^{(0)}_{33} = -g^{(0)}_{00} = 1. \tag{4.1}$$

В случае относительно слабого гравитационного поля, такого, чтобы выполнялось условие $\frac{GM}{rc^2} \ll 1$, где M — масса вещества в области с радиусом r, уравнения (3.1) можно сильно упростить.

Положим, что

$$g_{ik} = g^{(0)}_{ik} + h_{ik}, \tag{4.2}$$

где h_{ik} — малые поправки к псевдоевклидовой метрике, определяющие гравитационное поле, и введем для удобства $\tau = ict = ix_0 = x_4$.

Далее, $h_i^k = g^{(0)kl}h_{il}$, $g^{ik} = g^{(0)ik} - h^{ik}$, причем

$$g_{il}g^{kl} = \delta_i^k. \tag{4.3}$$

Если пренебречь степенями h_{ik} выше первой, то будем иметь

$$R_i^k = R_{ik} = \frac{1}{2}\left(-\Box h_{ik} + \frac{\partial^2 h_i^l}{\partial x^k \partial x^l} + \frac{\partial^2 h_k^l}{\partial x^i \partial x^l} - \frac{\partial^2 h}{\partial x^i \partial x^k}\right), \tag{4.4}$$

где

$$\Box h_{ik} = g^{(0)lm}\frac{\partial^2 h_{ik}}{\partial x^l \partial x^m}, \quad h = h_i^i.$$

Введем теперь

$$\psi_i^k = h_i^k - \frac{1}{2}\delta_i^k h;$$

тогда

$$R_i^k = -\frac{1}{2}\Box h_i^k + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 \psi_i^l}{\partial x^k \partial x^l} + \frac{\partial^2 h_k^l}{\partial x^i \partial x^l}\right). \tag{4.5}$$

Налагая четыре (по числу координат) дополнительных условия на функцию ψ_{ik}, а именно полагая, что

$$\frac{\partial \psi_k^l}{\partial x^l} = 0, \tag{4.6}$$

найдем, что

$$R_i^k = -\frac{1}{2}\Box h_i^k. \tag{4.7}$$

Отсюда скалярная кривизна $R = -\frac{1}{2}\Box h$ и тензор Эйнштейна

$$P_i^k = -\frac{1}{2}\Box\left(h_i^k - \frac{1}{2}\delta_i^k h\right) = -\frac{1}{2}\Box\psi_i^k. \tag{4.8}$$

Таким образом,

$$\Box\psi_i^k = -2\varkappa T_i^k, \tag{4.9}$$

что и определяет уравнение слабого гравитационного поля и движение в гравитационном поле.

Поскольку

$$\frac{\partial \psi_i^k}{\partial x^k} = 0, \text{ то и } \frac{\partial T_i^k}{\partial x^k} = 0, \tag{4.10}$$

что в этом приближении заменяет уравнение $T_{i;k}^k = 0$.

В дальнейшем мы будем пользоваться уравнением

$$-2R_i^k = \Box h_i^k = -2\varkappa\left(T_i^k - \frac{1}{2}\delta_i^k T\right) = -2\varkappa T_i^{*k}. \tag{4.11}$$

Вычислим теперь все компоненты тензора h_i^k. Для этой цели сначала необходимо определить все компоненты тензора

$$T_i^{*k} = T_i^k - \frac{1}{2}\delta_i^k T,$$

где $T = T_i^i$.

Поскольку

$$T_i^k = (p + \rho c^2) u_i u^k + \delta_i^k p,$$

находим, что

$$T = T_i^i = (p + \rho c^2) u_i u^i + 4p = 3p - \rho c^2 = 3p - \varepsilon \qquad (4.12)$$

(заметим, что в ультрарелятивистском случае, когда

$$p = \frac{\varepsilon}{3} = \frac{1}{3}\rho c^2, \quad T = T_i^i = 0).$$

Таким образом,

$$T_i^{*k} = (p + \varepsilon) u_i u^k + \delta_i^k p - \frac{1}{2}\delta_i^k (3p - \varepsilon).$$

В собственной системе отсчета $u^\alpha = 0$, $u^4 = i$, поэтому

$$T_4^4 = -\varepsilon, \; T_\alpha^4 = 0, \; T_\alpha^\alpha = p, \; T_\alpha^\beta = 0 \text{ (при } \beta \neq \alpha).$$

Отсюда следует, что

$$T_4^{*4} = -\frac{1}{2}(3p + \varepsilon), \; T_\alpha^{*4} = 0, \; T^{*\beta=\alpha}_{\alpha} = \frac{1}{2}(\varepsilon - p), \; T_\alpha^{*\beta} = 0$$
(при $\beta \neq \alpha$).

(Для обычной среды $p \ll \varepsilon = \rho c^2$, тогда

$$-T_4^{*4} = \frac{1}{2}\rho c^2 = T^{*\beta=\alpha}_{\alpha} = \varepsilon/2.$$

Для ультрарелятивистского газа $T_4^{*4} = -3p = -\varepsilon$, $T^{*\beta=\alpha}_{\alpha} = p = \varepsilon/3$.) Учитывая это, получим

$$\Box h_4^4 = \varkappa (3p + \varepsilon), \quad \Box h^{\beta=\alpha}_{\alpha} = \varkappa (p - \varepsilon). \qquad (4.13)$$

Остальные компоненты тензора h_i^{*k} равны нулю.

Рассмотрим подробнее случай, когда $p \ll \varepsilon$; тогда

$$-\Box h_4^4 = \Box h_1^1 = \Box h_2^2 = \Box h_3^3 = -\varkappa\varepsilon = -\varkappa\rho c^2. \qquad (4.14)$$

Это уравнение при $c \to \infty$ должно переходить в уравнение

Пуассона $\Delta\varphi = 4\pi G\rho$. Поскольку

$$\Box h_4^4 = \Delta h_4^4 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial h_4^4}{\partial t^2},$$

то, пренебрегая вторым членом справа, получим, что

$$\Delta h_4^4 = \varkappa\rho c^2.$$

В слабом ньютоновском гравитационном поле функция Лагранжа

$$L = -\left(mc^2\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}} + m\varphi\right) = -mc^2\left(\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}} + \frac{\varphi}{c^2}\right). \tag{4.15}$$

Поскольку действие

$$S = -mc^2\int\frac{ds}{c} = \int L\,dt = -mc^2\int\left(\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}} + \frac{\varphi}{c^2}\right)dt,$$

то

$$ds = c\,dt\left(\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}} + \frac{\varphi}{c^2}\right).$$

Отсюда следует, что

$$ds^2 = c^2\,dt^2\left(1-\frac{u^2}{c^2} + \frac{2\varphi}{c^2}\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}} + \frac{\varphi^2}{c^4}\right), \tag{4.16}$$

или, пренебрегая членами порядка c^{-4} и подставляя

$$u = \frac{d\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{dt},$$

найдем:

$$ds^2 = c^2\,dt^2\left(1+\frac{2\varphi}{c^2}\right) - (dx^2+dy^2+dz^2). \tag{4.17}$$

Таким образом,

$$-g_{00} = g_{44} = g_{44}^{(0)} + h_{44} = 1 + \frac{2\varphi}{c^2}. \tag{4.18}$$

[Аналогичный результат можно получить из (4.9). Поскольку $h_i^k = \psi_i^k + \frac{1}{2}\delta_i^k h$, то $h_4^4 = \frac{1}{2}\psi_4^4$; далее, поскольку $\Box\psi_4^4 = -2\varkappa T_4^4$, то $\Box\psi_4^4 = \frac{16\rho\pi G}{c^2} = 2\Box h_4^4$, что снова дает (4.17). При этом $\psi_4^4 = 4\varphi/c^2$].

Так как $h_4^4 = 2\varphi/c^2$, то из (4.14) имеем

$$\Box\varphi = \frac{1}{2}\varkappa\rho c^4 = 4\pi\rho G, \tag{4.19}$$

откуда следует, что

$$\varkappa = \frac{8\pi G}{c^4}, \tag{4.20}$$

причем

$$\Box = \Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}.$$

Таким образом, с помощью предельного перехода к закону тяготения Ньютона выясняется значение коэффициента пропорциональности в этом законе, а также тот факт, что скорость распространения гравитационных волн равна скорости света.

Решение уравнений (4.14) не представляет труда. Из теории запаздывающего потенциала имеем

$$-h_4^4 = h_1^1 = h_2^2 = h_3^3 = \frac{\varkappa c^2}{4\pi}\int \frac{\rho_{t'} dV}{R} = \frac{2G}{c^2}\int \frac{\rho_{t'}\, dV}{R}, \tag{4.21}$$

где $t' = t - \frac{R}{c}$, причем $\varphi = -\frac{GM}{R}$ $(h = -2h_4^4 = 2h_1^1)$.

Из уравнения (4.19) видно, что тяготение распространяется со скоростью света.

Интересно отметить, что даже в нашем линейном приближении структура гравитационного поля отличается от ньютоновского гравитационного скалярного поля и имеет явно выраженный тензорный характер. Это становится ясным, если сравнить метрику в ньютоновском приближении (4.17)

$$ds^2 = c^2\, dt^2\left(1 + \frac{2\varphi}{c^2}\right) - (dx^2 + dy^2 + dz^2)$$

с метрикой, которую мы имеем в данном случае:

$$ds^2 = c^2\, dt^2\left(1 + \frac{2\varphi}{c^2}\right) - \left(1 - \frac{2\varphi}{c^2}\right)(dx^2 + dy^2 + dz^2). \tag{4.22}$$

Если член $2\varphi dt^2$ можно обнаружить при движении материальных тел, то при этом член порядка

$$\frac{2\varphi}{c^2}(dx^2 + dy^2 + dz^2)$$

обнаружить гораздо труднее. Однако это удалось сделать, проверив, таким образом, основные положения общей теории относительности.

В пустом пространстве [см. (4.11)]

$$\Box h_i^k = 0. \tag{4.23}$$

Это уравнение аналогично соответствующему уравнению для векторного потенциала в теории свободного электромагнитного поля. По аналогии с этим полем, где при отсутствии зарядов распространяются электромагнитные волны, можно полагать, что в свободном от масс пространстве должны распространяться гравитационные волны. Скорость их распространения должна равняться скорости распространения электромагнитных волн в пустоте, т. е. скорости света.

Рассмотрим плоскую гравитационную волну, распространяющуюся вдоль оси $x^1 = x$. При этом уравнение (4.23) примет вид

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{c}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) h_i^k = 0. \tag{4.24}$$

Отсюда

$$h_i^k = F_{1i}^k(x - ct) + F_{2i}^k(x + ct). \tag{4.25}$$

Рассмотрим бегущую (слева направо) волну; тогда $F_{2i}^k = 0$ и

$$h_i^k = F_{1i}^k(x - ct). \tag{4.26}$$

Поскольку мы имеем дополнительные условия

$$\frac{\partial \psi_i^k}{\partial x^k} = \frac{\partial\left(h_i^k - \frac{1}{2}\delta_i^k h\right)}{\partial x^k} = 0, \tag{4.27}$$

то в данном случае будем иметь

$$\frac{\partial\left(h_1^1 - \frac{1}{2}h\right)}{\partial x} + \frac{\partial h_1^0}{c\partial t} = 0, \qquad \frac{\partial h_{2,3,0}^1}{\partial x} + \frac{\partial h_{2,3,0}^0}{c\partial t} = 0.$$

Так как

$$\frac{\partial h_i^k}{\partial x} = -\frac{\partial h_i^k}{c\partial t},$$

то

$$\dot{F}_1^1 = \dot{F}_1^0 + \frac{1}{2}\frac{\partial h}{\partial x}, \qquad \dot{F}_{2,3,0}^1 = \dot{F}_{2,3,0}^0;$$

поскольку $h = h(x - ct)$, то $\frac{1}{2}\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\dot{h}}{2}$ (точки обозначают дифференцирование по аргументам $x - ct$).

Таким образом, $\dot{F}_1^1 = \dot{F}_1^0 + \frac{\dot{h}}{2}$. Интегрируя и отбрасывая константы (поскольку нас интересует лишь переменная часть поля), получим

$$F_1^1 = F_1^0 + \frac{h}{2}, \qquad F_{2,3,0}^1 = F_{2,3,0}^0.$$

Отсюда следует, что

$$h_1^1 = h_1^0 + \frac{h}{2}, \qquad h_{2,3,0}^1 = h_{2,3,0}^0. \tag{4.28}$$

Сделаем еще одно допустимое преобразование координат, а именно положим, что $x'^i = x^i + \xi^i$, где ξ^i — малая величина. При этом тензор h_i^k перейдет в

$$h_i'^k = h_i^k - \left(\frac{\partial \xi^i}{\partial x^k} + \frac{\partial \xi^k}{\partial x^i}\right), \tag{4.29}$$

где ξ^i подчиняется условию

$$\Box \xi^i = 0, \tag{4.30}$$

и уравнение $\Box h_i^k = 0$ переходит в уравнение $\Box h_i'^k = 0$. Всего мы будем иметь дополнительно четыре условия.

В случае плоской волны положим, что $\xi^i = \xi^i(x - ct)$. При этом условие (4.30) автоматически удовлетворяется.

Поскольку

$$h_i'^i = h' = h - 2\frac{\partial \xi^i}{\partial x^i} = h - 2\left(\frac{\partial \xi^1}{\partial x^1} + \frac{\partial \xi^0}{\partial x^0}\right) = h - 2(\dot{\xi}^1 - \dot{\xi}^0),$$

то, полагая, что $\overline{\xi'} - \overline{\xi^0} = h/2$, найдем, что $h' = 0$, $h = 0\,(\psi = 0)$. При этом $\psi_i'^k = h_i'^k$, $\psi_i^k = h_i^k$. Далее, используя остальные три условия для ξ^i, можно обратить в нуль $h_{1,2,3}^0$; при этом в нуль обратятся и величины $h_{1,2,3}^1$, а также величины $h_0^0 = h_0^1 = h_1^0 = h_1^1$. Поскольку $h' = h_1^1 + h_2^2 + h_3^3 + h_0^0$ и $h_0^1 = h_0^0 = 0$, то

$$h_2^2 + h_3^3 = 0. \tag{4.31}$$

Таким образом, остаются не равными нулю компоненты

$$h_2^3 = h_3^2, \qquad h_2^2 = -h_3^3.$$

Следовательно, волна является поперечной и определяется двумя компонентами: h_2^2, h_2^3, т. е. в этом смысле она действительно аналогична плоской электромагнитной волне.

Хотя мы провели эти рассуждения только для слабого гравитационного поля, они имеют более общий смысл, например, при задании четырех начальных условий для плоских волн, поскольку слабая поперечная волна должна иметь две независимые компоненты. Итак, всегда должны задаваться эти компоненты и их первые производные, т. е. всего четыре величины.

§ 5. Излучение гравитационных волн в линейном приближении

Теперь исследуем слабое гравитационное поле, которое могут создавать движущиеся тела. При этом ограничимся пока случаем, когда скорости тел малы по сравнению со скоростью света (изложение будем вести по методу Ландау — Лифшица). Воспользуемся уравнением (4.9)

$$\Box \psi_i^k = -2\varkappa T_i^k = -\frac{16\pi G}{c^4} T_i^k. \tag{5.1}$$

Решая это уравнение методом теории запаздывающих потенциалов, придем к результату

$$\psi_i^k = \frac{4G}{c^4} \int\limits_{t'=t-r/c} T_i^k \frac{dv}{r}. \tag{5.2}$$

В случае движения с малыми скоростями и на расстояниях r, значительно превышающих собственные размеры системы, будем иметь

$$\psi_i^k = \frac{4G}{c^4 r} \int T_i^k \, dv. \tag{5.3}$$

Поскольку имеет место уравнение сохранения

$$\frac{\partial T_i^k}{\partial x^k} = 0, \tag{5.4}$$

будут справедливы такие соотношения:

$$\frac{\partial T_\alpha^\gamma}{\partial x^\gamma} + \frac{\partial T_\alpha^4}{\partial x^4} = 0, \qquad \frac{\partial T_4^\gamma}{\partial x^\gamma} + \frac{\partial T_4^4}{\partial x^4} = 0. \tag{5.5}$$

Умножим первое уравнение (5.5) на x^β и проинтегрируем по всему пространству:

$$-\int \frac{\partial T_\alpha^4}{\partial x^4} x^\beta dv = \int \frac{\partial T_\alpha^\gamma}{\partial x^\gamma} x^\beta dv = \int \frac{\partial (T_\alpha^\gamma x^\beta)}{\partial x^\gamma} dv - \int T_\alpha^\beta dv \left(T_\alpha^\gamma \frac{\partial x^\beta}{\partial x^\gamma} = T_\alpha^\beta \right).$$

Так как на больших расстояниях от системы (на бесконечности) $T_i^k = 0$, то, преобразуя по теореме Гаусса первый интеграл правой части, найдем, что он равен нулю; поэтому

$$\int T^{\beta}_{\alpha}\,dv = \int \frac{\partial T^4_{\alpha}}{\partial x^4}\,x^{\beta}\,dv = \frac{1}{2}\int\left(\frac{\partial T^4_{\alpha}}{\partial x^4}\,x^{\beta} + \frac{\partial T^4_{\beta}}{\partial x^4}\,x^{\alpha}\right)dv = \\ = \frac{1}{2}\,\frac{\partial}{\partial x^4}\int (T^4_{\alpha}x^{\beta} + T^4_{\beta}x^{\alpha})\,dv.$$

Умножим второе уравнение (5.5) на $x_{\alpha}x^{\beta}$ и проинтегрируем по всему объему:

$$-\int \frac{\partial T^4_4}{\partial x^4}\,x_{\alpha}x^{\beta}\,dv = \int \frac{\partial T^{\gamma}_4}{\partial x^{\gamma}}\,x_{\alpha}x^{\beta}\,dv = \\ = \frac{1}{2}\int\left(\frac{\partial (T^{\gamma}_4 x_{\alpha})\,x^{\beta}}{\partial x^{\gamma}} + \frac{\partial (T^{\gamma}_4 x^{\beta})\,x_{\alpha}}{\partial x^{\gamma}}\right)dv - \int (T^4_{\alpha}x^{\beta} + T^{\beta}_4 x_{\alpha})\,dv.$$

Откуда получаем

$$\int \frac{\partial T^4_4}{\partial x^4}\,x_{\alpha}x^{\beta}\,dv = \int (T^4_{\alpha}x^{\beta} + T^{\beta}_4 x_{\alpha})\,dv,$$

$$\frac{\partial}{\partial x^4}\int T^4_4 x_{\alpha}x^{\beta}\,dv = \int (T^4_{\alpha}x^{\beta} + T^{\beta}_4 x_{\alpha})\,dv.$$

Сравнивая оба результата, найдем, что

$$\frac{1}{2}\,\frac{\partial^2}{(\partial x^4)^2}\int T^4_4 x_{\alpha}x^{\beta}\,dv = \int T^{\beta}_{\alpha}\,dv,$$

или

$$\int T^{\beta}_{\alpha}\,dv = \frac{1}{2c^2}\,\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int T^0_0 x_{\alpha}x^{\beta}\,dv. \tag{5.6}$$

Из (5.3) и (5.6) следует

$$\psi^{\beta}_{\alpha} = \frac{2G}{c^6 r}\,\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int T^0_0 x_{\alpha}x^{\beta}\,dv. \tag{5.7}$$

При $u \ll c$ $T^0_0 = \rho c^2$, поэтому

$$\psi^{\beta}_{\alpha} = \frac{2G}{c^4}\,\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int \rho x_{\alpha}x^{\beta}\,dv. \tag{5.8}$$

Преобразуем выражение

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int \rho x_{\alpha}x^{\beta}\,dv$$

и напишем его в виде

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int \rho x_{\alpha}x^{\beta}\,dv = \frac{1}{3}\,\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int \rho\,(3x_{\alpha}x^{\beta} - \delta^{\beta}_{\alpha}r^2)\,dv + \\ + \frac{1}{3}\,\delta^{\beta}_{\alpha}\,\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int \rho r^2\,dv.$$

Тогда

$$\psi_\alpha^\beta = \frac{2G}{3rc^4} \ddot{D}_\alpha^\beta + \delta_\alpha^\beta A = h_\alpha^\beta,$$

где

$$A = \frac{2G}{3rc^4} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int \rho r^2 \, dv, \qquad D_\alpha^\beta = \int \rho \, dv \, (3x_\alpha x^\beta - \delta_\alpha^\beta r^2) \tag{5.9}$$

есть квадрупольный момент масс (здесь и дальше точки обозначают дифференцирование по времени). Квадрупольный момент связан с тензором моментов инерции

$$I_\alpha^\beta = -\int \rho \, dv \, (x_\alpha x^\beta - \delta_\alpha^\beta r^2) \tag{5.10}$$

соотношением

$$D_\alpha^\beta = \delta_\alpha^\beta I_\gamma^\gamma - 3I_\alpha^\beta = \delta_\alpha^\beta I - 3I_\alpha^\beta. \tag{5.11}$$

Как мы покажем дальше [см. (12.16)], плотность энергии гравитационного поля для плоской волны

$$\varepsilon_g = -\frac{c^2}{16\pi G}\left[\dot{h}_{23}^2 + \left(\frac{\dot{h}_{22} - \dot{h}_{33}}{2}\right)^2\right] = -\frac{G}{36\pi r^2 c^6}\left[\dddot{D}_{23}^2 + \left(\frac{\dddot{D}_{32} - \dddot{D}_{33}}{2}\right)^2\right]. \tag{5.12}$$

Поскольку потеря энергии за единицу времени (мощность излучения) есть

$$\dot{E}_g = 4\pi r^2 \varepsilon_g c, \tag{5.13}$$

то для плоской волны

$$\dot{E}_g = -\frac{c^3 r^2}{4G}\left[\dot{h}_{23}^2 + \left(\frac{\dot{h}_{22} - \dot{h}_{33}}{2}\right)^2\right] = -\frac{G}{9c^5}\left[\dddot{D}_{23}^2 + \left(\frac{\dddot{D}_{22} - \dddot{D}_{33}}{2}\right)^2\right]. \tag{5.14}$$

В случае изотропного излучения надо усреднить выражение, стоящее справа, как показывают вычисления [см. (12.14)], при этом значение E_g уменьшится в пять раз

$$E_g = -\frac{G\dddot{D}_{\alpha\beta}^2}{45c^5}. \tag{5.15}$$

Величина $(\dddot{D}_\alpha^\beta)^2$ представляется собой 3-х скаляр. Эту величину можно представить как $\xi M^2 r^4 \omega^6$, где M — масса системы, r — «радиус» системы, ω — частота колебаний, ξ — безразмерный параметр, зависящий от геометрии и динамики системы.

Отсюда следует

$$-\dot{E}=\xi\,\frac{GM^2\omega}{r}\left(\frac{r\omega}{c}\right)^5=\xi\,\frac{GM^2c}{r^2}\left(\frac{r\omega}{c}\right)^6,$$

или

$$-\dot{E}=\xi E_0\omega\left(\frac{r\omega}{c}\right)^5=\xi E_0\,\frac{c}{r}\left(\frac{r\omega}{c}\right)^6, \tag{5.16}$$

где $E_0=GM^2/r$ — гравитационная энергия системы.

Удобно также соотношения (5.15) написать в виде

$$-\dot{E}=\alpha E=\frac{\xi GM^2c}{r^2}\left(\frac{r\omega}{c}\right)^6, \tag{5.17}$$

где α — «коэффициент» расхода энергии системы на гравитационное излучение.

Если учесть, что $E=Mc^2$, то (5.17) примет вид

$$\alpha=\frac{\xi GM}{r^2c}\left(\frac{r\omega}{c}\right)^6, \tag{5.18}$$

что и определяет величину α.

§ 6. Движение в общей теории относительности

Движение свободной материальной частицы при отсутствии гравитационного поля является инерциальным; при этом

$$du^i=0. \tag{6.1}$$

При наличии поля общий дифференциал надо заменить «ковариантным»:

$$Du^i=du^i+\Gamma^i_{kl}\,du^k\,dx^l=0. \tag{6.2}$$

Разделив члены этого уравнения на ds и подставляя

$$u^i=\frac{dx^i}{ds}, \tag{6.3}$$

придем к уравнению движения частиц

$$\frac{d^2x^i}{ds^2}+\Gamma^i_{kl}\,\frac{dx^k}{ds}\,\frac{dx^l}{ds}=0; \tag{6.4}$$

здесь

$$ds^2=g_{rm}\,dx^r\,dx^m. \tag{6.5}$$

В случае движения фотонов ($ds=0$), вводя параметр λ, меняющийся вдоль луча, можно преобразовать уравнение (6.4).

Пусть $\lambda = \lambda\,(s)$; тогда (6.4) принимает вид

$$\frac{d^2x^i}{d\lambda^2} + \Gamma^i_{kl}\frac{dx^k}{d\lambda}\frac{dx^l}{d\lambda} = \frac{dx^i}{d\lambda}\frac{s_{\lambda\lambda}}{s\lambda}. \tag{6.6}$$

Пусть $s = a\lambda$, где $a \to 0$; тогда $s_{\lambda\lambda} = 0$ и уравнение (6.6) принимает вид

$$\frac{d^rx^i}{d\lambda^2} + \Gamma^i_{kl}\frac{dx^k}{d\lambda}\frac{dx^l}{d\lambda} = 0. \tag{6.7}$$

Это уравнение и определяет траекторию световых лучей.

Величина $\frac{d^2x^i}{ds^2}$ является 4-х ускорением частицы; следовательно, величину

$$-m\Gamma^i_{kl}\frac{dx^k}{ds}\frac{dx^l}{ds} = f^i \tag{6.8}$$

можно назвать 4-х силой (m — масса покоя частицы).

Величины Γ^i_{kl} характеризуют напряженность поля, а компоненты тензора g_{ik} — потенциалы гравитационного поля.

§ 7. Движение в слабом гравитационном поле

Рассмотрим движение в слабом гравитационном поле в случае одного тела, создающего это поле. Массу движущегося тела будем считать малой.

Мы имеем интеграл, определяемый в виде

$$-ds^2 = (dx^4)^2\left(1 - \frac{r_0}{r}\right) + \left(1 + \frac{r_0}{r}\right)(dx^2 + dy^2 + dz^2), \tag{7.1}$$

где

$$r_0 = \frac{2GM}{c^2}, \quad \frac{r_0}{r} = -\frac{2\varphi}{c^2}, \quad \varphi = -\frac{GM}{r}$$

[см. (4.21) и (4.22)].

Таким образом,

$$g_{44} = 1 - \frac{r_0}{r}, \quad g_{11} = g_{22} = g_{33} = 1 + \frac{r_0}{r},$$

$$g^{44} = 1 + \frac{r_0}{r},$$

$$g^{11} = g^{22} = g^{33} = 1 - \frac{r_0}{r}.$$

Вычисление компонент Γ^i_{kl} приводит к следующему результату:

$$\Gamma^1_{11} = -\frac{1}{2}\left(1-\frac{r_0}{r}\right)\frac{r_0 x}{r^3}, \quad \Gamma^1_{12} = -\frac{1}{2}\left(1-\frac{r_0}{r}\right)\frac{r_0 y}{r^3},$$

$$\Gamma^1_{13} = -\frac{1}{2}\left(1-\frac{r_0}{r}\right)\frac{r_0 z}{r^3}, \quad \Gamma^1_{22} = \frac{1}{2}\left(1-\frac{r_0}{r}\right)\frac{r_0 x}{r^3},$$

$$\Gamma^1_{33} = \frac{1}{2}\left(1-\frac{r_0}{r}\right)\frac{r_0 x}{r^3}, \quad \Gamma^1_{44} = -\frac{1}{2}\left(1-\frac{r_0}{r}\right)\frac{r_0 x}{r^3},$$

$$\Gamma^2_{11} = \frac{1}{2}\left(1-\frac{r_0}{r}\right)\frac{r_0 y}{r^3}, \quad \Gamma^2_{21} = -\frac{1}{2}\left(1-\frac{r_0}{r}\right)\frac{r_0 x}{r^3},$$

$$\Gamma^2_{22} = -\frac{1}{2}\left(1-\frac{r_0}{r}\right)\frac{r_0 y}{r^3}, \quad \Gamma^2_{23} = -\frac{1}{2}\left(1-\frac{r_0}{r}\right)\frac{r_0 z}{r^3},$$

$$\Gamma^2_{33} = \frac{1}{2}\left(1-\frac{r_0}{r}\right)\frac{r_0 y}{r^3}, \quad \Gamma^2_{44} = -\frac{1}{2}\left(1-\frac{r_0}{r}\right)\frac{r_0 y}{r^3},$$

$$\Gamma^3_{11} = \frac{1}{2}\left(1-\frac{r_0}{r}\right)\frac{r_0 z}{r^3}, \quad \Gamma^3_{22} = \frac{1}{2}\left(1-\frac{r_0}{r}\right)\frac{r_0 z}{r^3},$$

$$\Gamma^3_{31} = -\frac{1}{2}\left(1-\frac{r_0}{r}\right)\frac{r_0 x}{r^3}, \quad \Gamma^3_{32} = -\frac{1}{2}\left(1-\frac{r_0}{r}\right)\frac{r_0 y}{r^3},$$

$$\Gamma^3_{33} = -\frac{1}{2}\left(1-\frac{r_0}{r}\right)\frac{r_0 z}{r^3}, \quad \Gamma^3_{44} = -\frac{1}{2}\left(1-\frac{r_0}{r}\right)\frac{r_0 z}{r^3},$$

$$\Gamma^4_{41} = \frac{1}{2}\left(1+\frac{r_0}{r}\right)\frac{r_0 x}{r^3}, \quad \Gamma^4_{42} = \frac{1}{2}\left(1+\frac{r_0}{r}\right)\frac{r_0 y}{r^3},$$

$$\Gamma^4_{43} = \frac{1}{2}\left(1+\frac{r_0}{r}\right)\frac{r_0 z}{r^3}.$$

Сохраняя члены порядка не меньше чем c^{-2}, можно теперь написать уравнения движения в виде

$$\frac{d^2x}{ds^2} + \frac{1}{2}\frac{r_0}{r^3}\left[-x\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 - 2y\frac{dx}{ds}\frac{dy}{ds} - 2z\frac{dx}{ds}\frac{dz}{ds} + x\left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + x\left(\frac{dz}{ds}\right)^2 + xc^2\left(\frac{dt}{ds}\right)^2\left(1-\frac{r_0}{r}\right)\right] = 0, \tag{7.2}$$

$$\frac{d^2y}{ds^2} + \frac{1}{2}\frac{r_0}{r}\left[y\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 - 2x\frac{dx}{ds}\frac{dy}{ds} - 2z\frac{dy}{ds}\frac{dz}{ds} - y\left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + y\left(\frac{dz}{ds}\right)^2 + yc^2\left(\frac{dt}{ds}\right)^2\left(1-\frac{r_0}{r}\right)\right] = 0, \tag{7.3}$$

$$\frac{d^2z}{ds^2} + \frac{1}{2}\frac{r_0}{r}\left[z\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 - 2x\frac{dx}{ds}\frac{dz}{ds} - 2y\frac{dy}{ds}\frac{dz}{ds} + z\left(\frac{dy}{ds}\right)^2 - z\left(\frac{dz}{ds}\right)^2 + zc^2\left(\frac{dt}{ds}\right)^2\left(1-\frac{r_0}{r}\right)\right] = 0, \tag{7.4}$$

$$\frac{d^2t}{ds^2} + \frac{r_0}{r^3}\left(x\frac{dx}{ds}\frac{dt}{ds} + y\frac{dy}{ds}\frac{dt}{ds} + z\frac{dz}{ds}\frac{dt}{ds}\right) = 0. \tag{7.5}$$

Последнее уравнение можно один раз проинтегрировать:

$$ct_s = \beta e^{r_0/r} \approx \beta\left(1 + \frac{r_0}{r}\right). \tag{7.6}$$

Теперь уравнения (7.2) — (7.4) можно привести к виду

$$x_{ss} + \frac{1}{2}\frac{r_0}{r^3}\Big[x\,(y_s^2 + z_s^2 - x_s^2) - 2\,(yy_s + zz_s)\,x_s +$$
$$+ \beta^2 x \times \left(1 + \frac{r_0}{r}\right)\Big] = 0,$$
$$y_{ss} + \frac{1}{2}\frac{r_0}{r^3}\Big[y\,(x_s^2 + z_s^2 - y_s^2) - 2\,(xx_s + zz_s)\,y_s +$$
$$+ \beta^2 y \times \left(1 + \frac{r_0}{r}\right)\Big] = 0,$$
$$z_{ss} + \frac{1}{2}\frac{r_0}{r^3}\Big[z\,(x_s^2 + y_s^2 - z_s^2) - 2\,(xx_s + yy_s)\,z_s +$$
$$+ \beta^2 z \times \left(1 + \frac{r_0}{r}\right)\Big] = 0. \tag{7.7}$$

Из (7.1) имеем

$$-1 = -c^2 t_s^2\left(1 - \frac{r_0}{r}\right) + (x_s^2 + y_s^2 + z_s^2)\left(1 + \frac{r_0}{r}\right),$$

или

$$-1 = \left(1 + \frac{r_0}{r}\right)(x_s^2 + y_s^2 + z_3^2 - \beta^2). \tag{7.8}$$

Заменяя $ds = \dfrac{cdt}{\beta\left(1 + \dfrac{r_0}{r}\right)}$, придем к уравнению

$$-\frac{1}{\beta^2} = \left(1 + \frac{r_0}{r}\right)\left[\frac{u^2}{c^2}\left(1 + 2\,\frac{r_0}{r}\right) - 1\right],$$

где $u^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2$; отсюда

$$-\frac{c^2}{\beta^2}(1 - \beta^2) + \frac{2GM}{r} = u^2\left(1 + \frac{6GM}{rc^2}\right). \tag{7.9}$$

Уравнение (7.8) является интегралом энергии системы (7.7). В самом деле, умножим первое уравнение системы на x_s, второе — на y_s и третье — на z_s и сложим почленно эти три уравнения. В результате придем к выражению

$$(x_s^2 + y_s^2 + z_s^2)_s = -\left(\frac{r_0}{r}\right)_s\left[(x_s^2 + y_s^2 + z_s^2) - \beta^2\left(1 + \frac{r_0}{r}\right)\right].$$

Вычитая из обеих частей уравнения по $\beta^2\left(\dfrac{r_0}{r}\right)_s$, получим

$$\left(x_s^2 + y_s^2 + z_s^2 - \beta^2\,\frac{r_0}{r}\right)_s = -\left(\frac{r_0}{r}\right)_s\left(x_s^2 + y_s^2 + z_s^2 - \beta^2\,\frac{r_0}{r}\right).$$

Откуда имеем

$$x_s^2 + y_s^2 + z_s^2 - \beta^2 \frac{r_0}{r} = B^2 e^{-r_0/r} \approx B^2 \left(1 - \frac{r_0}{r}\right), \qquad (7.10)$$

что при $B^2 = \beta^2 - 1$ совпадает с (7.8).

Напишем теперь интегралы моментов количества движения. Умножим первое уравнение системы (7.7) на y, второе — на x и вычтем его из первого уравнения:

$$x_{ss}y - y_{ss}x = \frac{d}{ds}(x_s y - y_s x) = -\frac{r_0}{r^3}\left[xy(y_s^2 - x_s^2) + \right.$$
$$\left. + (x^2 - y^2)\, x_s y_s + z z_s (x y_s - y x_s)\right].$$

Дифференцируя $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$, получим $zz_s = rr_s - (xx_s + yy_s)$, исключая из обоих последних уравнений zz_s, придем к следующему результату:

$$\frac{d}{ds}(x_s y - y_s x) = \frac{r_0}{r^2} r_s (x_s y - y_s x),$$

откуда

$$x_s y - y_s x = \frac{A_3}{c} e^{-r_0/r} = \frac{A_3}{c}\left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right) = \frac{A_3}{c}\left(1 - \frac{r_0}{r}\right). \qquad (7.11)$$

Аналогично найдем

$$y_s z - z_s y = \frac{A_1}{c}\left(1 - \frac{r_0}{r}\right), \qquad (7.12)$$

$$z_s x - x_s z = \frac{A_2}{c}\left(1 - \frac{r_0}{r}\right). \qquad (7.13)$$

Умножая (7.11) на z, (7.12) на x и (7.13) на y и складывая, найдем

$$A_1 x + A_2 y + A_3 z = 0. \qquad (7.14)$$

Следовательно, движение происходит в плоскости (7.14).

Всегда можно положить $A_1 = A_2 = 0$, при этом $z = 0$ и движение будет происходить в этой плоскости. Тогда основные уравнения движения примут вид

$$x_s^2 + y_s^2 = \beta^2 - 1 + \frac{r_0}{r}, \qquad (7.15)$$

$$x_s y - y_s x = \frac{A}{c}\left(1 - \frac{r_0}{r}\right), \qquad (7.16)$$

$$ct_s = \beta\left(1 + \frac{r_0}{r}\right). \qquad (7.17)$$

Уравнения (7.15) и (7.16) в полярной системе координат имеют вид

$$r_s^2 + r^2\varphi_s^2 = \beta^2 - 1 + \frac{r_0}{r}, \tag{7.18}$$

$$r^2\varphi_s = \frac{A}{c}\left(1 - \frac{r_0}{r}\right). \tag{7.19}$$

Исключая $ds = \dfrac{cr^2 d\varphi}{A\left(1 - \frac{r_0}{r}\right)}$, придем к уравнению траектории

$$\left(\frac{r_\varphi}{r^2}\right)^2 + \frac{1}{r^2} = \frac{c^2}{A^2}\left(1 + \frac{2r_0}{r}\right)\left(\beta^2 - 1 + \frac{r_0}{r}\right). \tag{7.20}$$

Полагая $r = \dfrac{1}{\xi}$, напишем это уравнение в виде

$$\xi_\varphi^2 + \xi^2 = \frac{c^2}{A^2}\{\beta^2 - 1 + r_0\xi\,[1 + 2(\beta^2 - 1)] + 2r_0^2\xi^2\}. \tag{7.21}$$

Дифференцируя по ξ, окончательно получим уравнение

$$\xi_{\varphi\varphi} + \xi^2 = \frac{r_0 c^2}{2A^2}[1 + 2(\beta^2 - 1) + 2r_0\xi] = \\ = \frac{GM}{A^2}\left[1 + 2(\beta^2 - 1) + \frac{4\xi GM}{c^2}\right]. \tag{7.22}$$

Введем

$$R^2 = r^2\left(1 + \frac{r_0}{r}\right) = r^2 + r_0 r; \tag{7.23}$$

тогда уравнения (7.18) и (7.19) примут вид

$$R_s^2 + (R^2 - r_0 R)\,\varphi_s^2 = \beta^2 - 1 + \frac{r_0}{R}, \quad R^2\varphi_s = \frac{A}{c}.$$

Исключая отсюда s, придем к уравнению

$$\left(\frac{R_\varphi}{R^2}\right)^2 + \frac{R^2 - r_0 R}{R^4} = \frac{c^2}{A^2}\left(\beta^2 - 1 + \frac{r_0}{R}\right).$$

Вводя $\xi = 1/R$, получим

$$\xi_\varphi^2 + \xi^2 = r_0\xi^3 + \frac{c^2}{A^2}(\beta^2 - 1 + r_0\xi).$$

Дифференцируя это уравнение по φ, будем иметь

$$\xi_{\varphi\varphi} + \xi = \frac{c^2 r_0}{2A^2} + \frac{3r_0\xi^2}{2} = \frac{GM}{A^2} + \frac{3\xi^2 GM}{c^2}. \tag{7.24}$$

Величина $A^2/GM = p$ — параметр орбиты.

Интервал при $R^2 = r^2 + r_0 r$ в полярных координатах запишется в виде

$$-ds^2 = -c^2dt^2\left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right) + dR^2\left(1 + \frac{2GM}{rc^2}\right) + \\ + R^2(\cos^2\theta d\varphi^2 + d\theta^2), \quad (7.25)$$

где $x = R\cos\varphi\cos\theta$, $y = R\sin\varphi\cos\theta$, $z = R\sin\theta$.

При $z = 0$ $\cos\theta = 1$, $d\theta = 0$ и

$$-ds^2 = -c^2dt^2\left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right) + dR^2\left(1 + \frac{2GM}{rc^2}\right) + R^2d\varphi^2. \quad (7.26)$$

Длина окружности $dl = rd\varphi$; отношение длины окружности к радиусу r есть 2π. В случае интервала (7.25) это отношение меньше, чем 2π. При этом уравнение (7.9) примет вид

$$-\frac{c^2}{\beta^2}(\beta^2 - 1) + \frac{2GM}{R}\left(1 + \frac{r_0}{2R}\right) = u^2\left(1 + \frac{6GM}{Rc^2}\right),$$

или

$$u^2 = \frac{2GM}{R}\left(1 - \frac{5GM}{Rc^2}\right) - \frac{GM}{a}\left(1 - \frac{6GM}{Rc^2}\right),$$

где $$\frac{c^2(\beta^2 - 1)}{\beta^2} = \frac{GM}{a}. \quad (7.27)$$

Исследуем уравнение (7.24), которое напишем в виде

$$\xi_{\varphi\varphi} + \xi = \frac{1}{p}\left(1 + \frac{3GMp}{R^2c^2}\right). \quad (7.28)$$

Уравнение классической орбиты

$$\xi_{\varphi\varphi} + \xi = \frac{1}{p} \quad (7.29)$$

сразу приводит к решению: $\xi = \frac{1}{p}(1 + e\cos\varphi)$, где e — эксцентриситет орбиты, или

$$R = \frac{p}{1 + e\cos\varphi}. \quad (7.30)$$

При этом на основании (7.27) скорость движения на классической орбите

$$u^2 = GM\left(\frac{2}{R} - \frac{1}{a}\right), \quad (7.31)$$

где $a = p/(1 - e^2)$ — полуось орбиты ($0 < a$ — эллипс; $a \to \infty$ — парабола, $a < 0$ — гипербола).

Уравнение (7.31) можно переписать в виде

$$u^2 = \frac{GM}{p}[2(1+e\cos\varphi) - 1 + e^2] = \frac{GM}{p}(1+2e\cos\varphi+e^2).$$

Величина

$$\frac{3GMp}{R^2c^2} = \frac{3u^2p^2}{R^2c^2(1+2e\cos\varphi+e^2)} = \frac{3u^2}{c^2}\,\frac{(1+e\cos\varphi)^2}{1+2e\cos\varphi+e^2}.$$

Поскольку угол α между касательной траекторией и перпендикуляром к радиусу вектора определяется соотношением

$$\cos\alpha = \frac{1+e\cos\varphi}{\sqrt{1+2e\cos\varphi+e^2}},$$

то $$\frac{3GMp}{R^2c^2} = \frac{3u^2}{c^2}\cos^2\alpha$$

и (7.28) принимает вид

$$\xi_{\varphi\varphi} + \xi = \frac{1}{p}\left(1 + \frac{3u^2}{c^2}\cos^2\alpha\right). \tag{7.32}$$

Приближенное решение этого уравнения будем искать в виде

$$\xi = \frac{1}{p}(1+e\cos\varphi) + \xi_1.$$

Подстановка в (7.32) дает

$$\xi_{1\varphi\varphi} + \xi_1 = \frac{3u^2}{pc^2}\cos^2\alpha = \frac{3GM\xi^2}{c^2} = \frac{3GM}{p^2c^2}(1+e\cos\varphi)^2;$$

откуда следует

$$\xi_1 = \frac{3GM}{p^2c^2}\left(1 + \frac{e^2}{3} + \frac{e^2}{3}\sin^2\varphi + e\varphi\sin\varphi\right). \tag{7.33}$$

Таким образом,

$$\xi = \frac{1}{p}\Big[1 + (3+e^2)\frac{GM}{pc^2} + \frac{GMe^2}{pc^2}\sin^2\varphi + \\ + e\left(\cos\varphi + \frac{3GM}{pc^2}\varphi\sin\varphi\right)\Big].$$

Поскольку

$$\cos\varphi + \frac{3GM\varphi}{pc^2}\sin\varphi = \cos\left[\varphi\left(1 - \frac{3GM}{pc^2}\right)\right],$$

то окончательно можно написать

$$\xi = \frac{1}{p}\Big[1 + (3+e^2)\frac{GM}{pc^2} + \frac{GMe^2}{pc^2}\sin^2\varphi + \\ + e\cos\varphi\left(1 - \frac{3GM}{pc^2}\right)\Big]. \tag{7.34}$$

Из этого уравнения следует, что за один оборот тела по «эллиптической» орбите большая полуось поворачивается на угол

$$\omega = \frac{6\pi GM}{pc^2}. \tag{7.35}$$

В случае распространения светового луча в поле тяготения $ds = 0$, $A \to \infty$ $(p \to \infty)$, поэтому (7.24) принимает следующий вид:

$$\xi_{\varphi\varphi} + \xi = \frac{3GM\xi^2}{c^2}. \tag{7.36}$$

Приближенное решение этого уравнения есть

$$\xi = \xi_0 \left[\cos\varphi + \frac{GM\xi_0}{c^2}(2 - \cos^2\varphi)\right] \tag{7.37}$$

(причем, поскольку угол φ определяется с точностью до произвольной постоянной, за невозмущенную прямую в плоскости можно выбрать $x = \text{const}$).

При распространении света происходит отклонение его на угол

$$\beta = \frac{4GM\xi_0}{c^2} = \frac{4GM}{r_0c^2}, \tag{7.38}$$

где $r_0 = 1/\xi_0$ — кратчайшее расстояние луча света от «центра» тяготения.

Изученные здесь эффекты общей теории относительности — «вращение» большой полуоси в направлении движения тела и отклонение луча света в поле тяжести — в рассматриваемом приближении (с точностью до члена $\sim c^{-4}$) совпадают с результатами точных решений (см. § 8) и прекрасно согласуются с данными наблюдений (смещение перигелия и отклонение звездного луча вблизи Солнца).

Рассмотрим теперь еще один эффект общей теории относительности — смещение частоты, или длины волны, светового луча в поле тяжести.

Поскольку элементарное собственное время

$$d\tau = \frac{dx^0}{c}\sqrt{-g_{00}} = \sqrt{1 - \frac{r_0}{r}}\,dt = \sqrt{1 - \frac{2GM}{rc^2}}\,dt, \tag{7.39}$$

или приближенно

$$d\tau = \left(1 - \frac{GM}{rc^2}\right)dt. \tag{7.40}$$

а потенциал $\varphi = -GM/r$, то

$$d\tau = \sqrt{1 + \frac{2\varphi}{c^2}}\, dt \approx \left(1 + \frac{\varphi}{c^2}\right) dt \qquad (7.41)$$

($dt = dx^0/c$ — мировое время).

Интегрируя (7.40) в данной точке пространства, найдем

$$\tau = \left(1 + \frac{\varphi}{c^2}\right) t. \qquad (7.42)$$

В поле тяжести собственное время течет медленнее, чем в отсутствие этого поля.

Поскольку собственная частота $\nu_0 \sim 1/t$, $\nu \sim 1/\tau$, то

$$\nu = \nu_0 \left(1 - \frac{\varphi}{c^2}\right), \qquad \lambda = \left(1 + \frac{\varphi}{c^2}\right) \lambda_0 \qquad (7.43)$$

(длина волны $\lambda = c/\nu$).

При приближении к гравитационным телам частота возрастает, при удалении — убывает (красное смещение). Эти эффекты имеют достаточно точное экспериментальное подтверждение. Заметим, что такой же эффект (с точностью до членов порядка c^{-2}) получается и в специальной теории относительности. В самом деле, напишем релятивистское уравнение Бернулли

$$w + m\varphi = w_0,$$

где $w_0 = h\nu_0$ — теплосодержание в отсутствие поля тяжести, $w = h\nu$ — теплосодержание в поле тяжести, $m = \frac{h\nu}{c^2}$ — «масса» покоя фотона. Отсюда $w\,[1 + (\varphi/c^2)] = w_0$, что и дает (7.43).

Эффекты вращения большой полуоси и отклонение траектории луча света (фотона) от прямолинейного в поле тяжести без дополнительных гипотез уже нельзя получить методами и аппаратом специальной теории относительности.

§ 8. Некоторые точные решения в общей теории относительности

Интересным и одним из наиболее важных примеров точного решения в общей теории относительности является так называемая задача Шварцшильда. В этой задаче рассматривается движение в центральном гравитационном поле.

Наиболее общий вид интервала в центрально-симметричном гравитационном поле имеет вид

$$ds^2 = A_1(r'_i,\ t')\, c^2 dt'^2 - A_2(r',\ t')\, dr'^2 - A_3(r',\ t')\, r'^2 \times \times (d\varphi^2 \sin^2\theta + d\theta^2) - A_4(r',\ t')\, c\, dt' dr', \quad (8.1)$$

где

$$x = r' \cos\varphi \cos\theta, \qquad y = r' \sin\varphi \sin\theta, \qquad z = r' \cos\theta.$$

Произведя преобразование координат r', t' к координатам r, t, так чтобы $A_4 = 0$ и $A_3 = 1$, найдем

$$ds^2 = A_1(r,\ t)\, c^2 dt^2 - A_2(r,\ t)\, dr^2 - r^2 (d\varphi^2 \sin^2\theta + d\theta^2). \quad (8.2)$$

Из (8.2) имеем

$$g_{11} = A_2,\ g_{22} = r^2,\ g_{33} = r^2 \sin^2\theta,\ -g_{00} = g_{44} = A_1,\ g^{11} = \frac{1}{A_2},\ g^{22} = \frac{1}{r^2},\ g^{33} = \frac{1}{r^2 \sin^2\theta},\ -g^{00} = g^{44} = \frac{1}{A_1}. \quad (8.3)$$

Далее находим компоненты Γ^i_{kl}:

$$\Gamma^0_{00} = \frac{\dot{A}_1}{2A_1},\ \Gamma^0_{10} = \frac{A'_1}{2A_1},\ \Gamma^0_{11} = \frac{\dot{A}_2}{2A_1},\ \Gamma^1_{33} = -\frac{r}{A_2}\sin^2\theta,$$

$$\Gamma^1_{00} = \frac{A'_1}{2A_2},\ \Gamma^1_{10} = \frac{\dot{A}_2}{2A_2},\ \Gamma^1_{11} = \frac{A'_1}{2A_2},\ \Gamma^1_{22} = -\frac{r}{A_2},\quad \Gamma^2_{12} = \frac{1}{r},$$

$$\Gamma^2_{33} = -\sin\theta\cos\theta,\qquad \Gamma^3_{13} = \frac{1}{r},\ \Gamma^3_{23} = \operatorname{ctg}\theta. \quad (8.4)$$

Остальные компоненты $\Gamma^i_{kl} = 0$ (штрих обозначает дифференцирование по r, точка — по $x^0 = ct$).

Компоненты тензора R^k_i оказываются при этом равными:

$$R^0_0 = \frac{1}{2A_1A_2}\left[\frac{A'_1}{2}\left(\frac{A'_1}{A_1} + \frac{A'_2}{A_2}\right) - \frac{\dot{A}_2}{2}\left(\frac{\dot{A}_1}{A_1} + \frac{\dot{A}_2}{A_2}\right) + \ddot{A}_2 - \left(A''_1 + \frac{2A'_1}{r}\right)\right]$$

$$R^1_1 = \frac{1}{2A_1A_2}\left[\frac{A'_1}{2}\left(\frac{A'_1}{A_1} + \frac{A'_2}{A_2}\right) - \frac{\dot{A}_2}{2}\left(\frac{\dot{A}_1}{A_1} + \frac{\dot{A}_2}{A_2}\right) + \ddot{A}_2 - \left(A''_1 - \frac{2A'_2}{r}\frac{A_1}{A_2}\right)\right], \quad (8.5)$$

$$R^2_2 = R^3_3 = \frac{1}{r^2}\left\{\left[1 - \left(\frac{r}{A_2}\right)'\right] - \frac{r}{2A_2}\left(\frac{A'_1}{A_1} + \frac{A'_2}{A_2}\right)\right\},\qquad R^1_0 = \frac{\dot{A}_2}{rA_2^2},$$

$$R = \frac{2}{r^2}\left[1 - \left(\frac{r}{A_2}\right)'\right] + \frac{1}{A_1A_2}\left[\frac{A'_1}{2}\left(\frac{A'_1}{A_1} + \frac{A'_2}{A_2}\right) - \frac{\dot{A}_2}{2}\left(\frac{\dot{A}_1}{A_1} + \frac{\dot{A}_2}{A_2}\right) + \ddot{A}_2 - \left(A''_1 + \frac{2A'_1}{r}\right)\right].$$

Остальные компоненты $R^k_i = 0$.

Если мы имеем одну центральную массу, то $R_i^k \equiv 0$. Отсюда сразу следует, что $\dot{A}_2 = 0$. Далее можно показать, что одно из первых трех уравнений системы (8.5) является следствием двух других. Два независимых уравнения можно написать в виде

$$\frac{A_1'}{A_1} + \frac{A_2'}{A_2} = 0, \qquad A_1'' + \frac{2A_1'}{r} = 0. \tag{8.6}$$

Решение этих уравнений имеет вид

$$A_1 = \beta - \frac{\alpha}{r} = \frac{1}{A_2}, \tag{8.7}$$

где α и β — постоянные интегрирования. Поскольку при $r \to \infty$ $A_1 = 1/A_2 \to 1$, то $\beta = 1$. При больших значениях $r \gg r^*$, где r^* — размеры гравитирующего тела, метрика должна переходить в галилееву, а закон тяготения — в закон Ньютона. Поэтому при $r \gg r^*$

$$g_{00\infty} = -1 - \frac{2\varphi}{c^2} = -1 + \frac{2GM}{rc^2}.$$

В нашем случае $g_{00\infty} = -1 + (\alpha/r)$, откуда $\alpha = 2GM/c^2$; окончательно можно написать

$$A_1 = 1 - \frac{2GM}{rc^2}, \qquad A_2 = \frac{1}{1 - \dfrac{2GM}{rc^2}}. \tag{8.8}$$

В третьем уравнении (8.5) имеем $1 - (r/A_2)'$, откуда $A_2 = 1/[1 - (\alpha/r)]$. Таким образом, мы видим, что действительно из первых трех уравнений системы (8.5) только два независимых. Следовательно, интервал имеет вид

$$-ds^2 = -c^2dt^2\left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right) + \frac{dr^2}{1 - \dfrac{2GM}{rc^2}} + r^2(d\varphi^2 \sin^2\theta + d\theta^2). \tag{8.9}$$

Подстановка

$$r = r_1\left(1 + \frac{GM}{2c^2r_1}\right)^2, \qquad dt^2 = d\tau^2\,\frac{\left(1 + \dfrac{GM}{2c^2r_1}\right)^6}{\left(1 - \dfrac{GM}{2c^2r_1}\right)^2};$$

приводится этот интервал к квазиевклидову виду

$$-ds^2 = \left(1+\frac{GM}{2c^2r_1}\right)^4 \{c^2d\tau^2 - [dr_1^2 + r_1^2(d\theta^2+\sin^2\theta d\varphi^2)]\}. \tag{8.10}$$

Значения Γ^i_{kl} имеют вид

$$\Gamma^1_{11} = -\frac{GM}{r^2c^2\left(1-\frac{2GM}{rc^2}\right)}, \quad \Gamma^0_{10} = \frac{GM}{r^2c^2\left(1-\frac{2GM}{rc^2}\right)},$$

$$\Gamma^2_{33} = -\sin\theta\cos\theta, \qquad \Gamma^3_{23} = \operatorname{ctg}\theta, \quad \Gamma^1_{22} = -r\left(1-\frac{2GM}{rc^2}\right),$$

$$\Gamma^1_{00} = \frac{GM}{r^2c^2}\left(1-\frac{2GM}{rc^2}\right), \qquad \Gamma^2_{12} = \Gamma^3_{13} = \frac{1}{r},$$

$$\Gamma^1_{33} = -r\left(1-\frac{2GM}{rc^2}\right)\sin^2\theta. \tag{8.11}$$

Поскольку всякое движение в центрально-симметричном поле «плоское» (в чем можно убедиться, проведя выкладки, аналогичные тем, которые мы сделали в § 7), можно принять за плоскость движения $\theta = \pi/2$.

Напишем теперь уравнения движения

$$\frac{d^2x^i}{ds^2} + \Gamma^i_{kl}\frac{dx^k}{ds}\frac{dx^l}{ds} = 0. \tag{8.12}$$

Подставляя в (8.12) значение Γ^i_{kl} из (8.11), будем иметь

$$\frac{d^2r}{ds^2} - \frac{r_0}{2r^2\left(1-\frac{r_0}{r}\right)}\left(\frac{dr}{ds}\right)^2 - r\left(1-\frac{r_0}{r}\right)\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2 + $$
$$+\frac{r_0}{2r^2}\left(1-\frac{r_0}{r}\right)\left(\frac{dx^0}{ds}\right)^2 = 0, \tag{8.13}$$

$$\frac{d^2\varphi}{ds^2} + \frac{2}{r}\frac{dr}{ds}\frac{d\varphi}{ds} = 0, \tag{8.14}$$

$$\frac{d^2x^0}{ds^2} + \frac{r_0}{r^2\left(1-\frac{r_0}{r}\right)}\frac{dr}{ds}\frac{dx^0}{ds} = 0, \tag{8.15}$$

где $r_0 = 2GM/c^2$.

Уравнения (8.14) и (8.15) легко интегрируются:

$$\frac{d\varphi}{ds}r^2 = \frac{A}{c}, \tag{8.16}$$

$$\frac{dx^0}{ds}\left(1-\frac{r_0}{r}\right) = \text{const} = A_1. \tag{8.17}$$

Исключая $\frac{dx^0}{ds}$ из (8.13) с помощью (8.17), приходим к уравнению

$$\frac{d^2r}{ds^2}-\frac{r_0}{2r^2\left(1-\frac{r_0}{r}\right)}\left(\frac{dr}{ds}\right)^2-r\left(1-\frac{r_0}{r}\right)\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2+\frac{r_0A_1^2}{2r^2\left(1-\frac{r_0}{r}\right)}=0.$$

Исключая отсюда $\frac{d\varphi}{ds}$ с помощью (8.16), находим

$$\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\varphi}\right)-\frac{r_0}{2r^4\left(1-\frac{r_0}{r}\right)}\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2-\frac{1-\frac{r_0}{r}}{r}-\frac{r_0c^2A_1^2}{2A^2\left(1-\frac{r_0}{r}\right)}=0. \tag{8.18}$$

Из (8.9) при $\Theta=\pi/2$ имеем

$$1=\left(\frac{dx^0}{ds}\right)^2\left(1-\frac{r_0}{r}\right)-\left(\frac{dr}{ds}\right)^2\frac{1}{1-\frac{r_0}{r}}-r^2\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2. \tag{8.19}$$

Исключая отсюда dx^0 и ds, приходим к уравнению

$$1=\frac{A_1^2}{1-\frac{r_0}{r}}-\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2\frac{A^2}{c^2r^4\left(1-\frac{r_0}{r}\right)}-\frac{A^2}{r^2c^2}. \tag{8.20}$$

Исключая из (8.18) и (8.20) величину $\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2$, получим

$$\xi_{\varphi\varphi}+\xi=\frac{GM}{A^2}+\frac{3\xi^2GM}{c^2}, \tag{8.21}$$

где $\xi=1/r$. К такому же результату можно прийти, дифференцируя по φ уравнение (8.20). Полезно отметить еще соотношение $\left(\frac{dr}{ds}\right)^2+1-\frac{r_0}{r}-A_1^2+r^2\left(1-\frac{r_0}{r}\right)\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2=0$, которое получается из (8.19) путем исключения $\frac{dx_0}{ds}$.

Уравнение (8.21) совпадает с (7.24), полученным на основании приближенного решения общих уравнений общей теории относительности.

Следовательно, приближенное решение задачи о центрально-симметричном гравитационном поле с точностью до членов порядка c^{-2}, т. е. с той точностью, с которой вообще ищутся приближенные решения общих уравнений теории тяготения, совпадает с точным решением.

Таким образом, выводы о вращении большой полуоси и отклонении траектории луча света от прямолинейной строго соответствуют точным решениям.

Для точного вычисления изменения длины волны (смещение спектральных линий) следует воспользоваться соотношением

$$\tau = \frac{x^0}{c}\sqrt{-g_{00}} = t\sqrt{1-\frac{2GM}{rc^2}}, \tag{8.22}$$

что полностью совпадает с (7.39).

Все эти эффекты, как известно, наблюдаемы, и результаты наблюдений прекрасно подтверждают выводы теории.

§ 9. Исследование уравнений центрально-симметричного поля

Основные уравнения гравитационного центрально-симметричного поля имеют вид [см. (8.5)]

$$R_0^0 = \frac{1}{2A_1A_2}\left[\frac{A_1'}{2}\left(\frac{A_1'}{A_1}+\frac{A_2'}{A_2}\right)-\frac{\dot A_2}{2}\left(\frac{\dot A_1}{A_1}+\frac{\dot A_2}{A_2}\right)+\ddot A_2 - \right.$$
$$\left. -\left(A_1''+\frac{2A_1'}{r}\right)\right],$$

$$R_1^1 = \frac{1}{2A_1A_2}\left[\frac{A_2'}{2}\left(\frac{A_1'}{A_1}+\frac{A_2'}{A_2}\right)-\frac{\dot A_2}{2}\left(\frac{\dot A_1}{A_1}+\frac{\dot A_2}{A_2}\right)+\ddot A_2 - \right.$$
$$\left. -\left(A_1''+\frac{2A_1'}{r}\right)+\frac{2A_1}{r}\left(\frac{A_1'}{A_1}+\frac{A_2'}{A_2}\right)\right],$$

$$R_2^2 = R_3^3 = \frac{1}{r^2}\left\{\left[1-\left(\frac{r}{A_2}\right)'\right]-\frac{r}{2A_2}\left(\frac{A_1'}{A_1}+\frac{A_2'}{A_2}\right)\right\},$$

$$R_0^1 = \frac{\dot A_2}{rA_2^2} = -\left(\frac{1}{rA_2}\right)^{\cdot}, \quad R = \frac{2}{r^2}\left[1-\left(\frac{r}{A_2}\right)'\right]+2R_0^0. \tag{9.1}$$

Введем

$$A_2 = \left(1-\frac{\beta}{r}\right)^{-1}, \qquad A_1 = \frac{\alpha}{A_2} = \alpha\left(1-\frac{\beta}{r}\right) = \alpha - \frac{\gamma}{r}, \tag{9.2}$$

где $\gamma = \alpha\beta$. Тогда система (9.1) примет вид

$$R_0^0 = \frac{1}{2\alpha}\left[\frac{\alpha'}{2\alpha}\left(\alpha'-\frac{\gamma'}{r}+\frac{\gamma}{r^2}\right)-\frac{\dot\alpha\dot\beta}{2\alpha r\left(1-\frac{\beta}{r}\right)^2} - \right.$$
$$\left. -\left(\alpha''+\frac{2\alpha'}{r}-\frac{\gamma''}{r}\right)+\frac{\ddot\beta+\dfrac{2\dot\beta^2}{r\left(1-\frac{\beta}{r}\right)}}{r\left(1-\frac{\beta}{r}\right)^2}\right],$$

$$R_1^1 = R_0^0 + \frac{\alpha\left(1-\frac{\beta}{2}\right)}{\alpha r}, \qquad R_2^2 = R_3^3 = \frac{1}{r^2}\left[\beta' - \frac{r\alpha'}{2\alpha}\left(1-\frac{\beta}{r}\right)\right],$$

$$R_0^1 = \frac{\dot\beta}{r^2}, \qquad R = \frac{2\beta'}{r^2} + 2R_0^0. \tag{9.3}$$

Рассмотрим частный случай

$$\alpha = A_2\xi(x^0),$$

т. е. когда $A_1 = \xi^2(x^0)$. Тогда система (9.1) принимает вид

$$R_0^0 = \frac{1}{2\xi A_2}\left[\ddot A_2 - \dot A_2\left(\frac{\dot\xi}{\xi} + \frac{\dot A_2}{2A_2}\right)\right], \quad R_1^1 = R_0^0 + \frac{A_2'}{rA_2^2},$$

$$R_2^2 = R_3^3 = \frac{1}{r^2}\left\{\left[1-\left(\frac{r}{A_2}\right)'\right] - \frac{rA_2'}{2A_2^2}\right\},$$

$$R_0^1 = -\left(\frac{1}{rA_2}\right)^{\cdot}, \qquad R = \frac{2}{r^2}\left[1-\left(\frac{r}{A_2}\right)'\right] + 2R_0^0. \tag{9.4}$$

Пусть далее $A_2 = A_2(r)$, тогда

$$R_0^0 = 0, \qquad R_0^1 = 0, \qquad R_1^1 = \frac{A_2'}{rA_2^2},$$

$$R_2^2 = R_3^3 = \frac{1}{r^2}\left\{\left[1-\left(\frac{r}{A_2}\right)'\right] - \frac{rA_2'}{2A_2^2}\right\},$$

$$R = \frac{2}{r^2}\left[1-\left(\frac{r}{A_2}\right)'\right]. \tag{9.5}$$

Если $A_2 = \dfrac{1}{1-\dfrac{r^2}{a^2}}, \qquad \beta = \dfrac{r^3}{a^2},$

то

$$R_1^1 = R_2^2 = R_3^3 = \frac{2}{a^2}, \qquad R = \frac{6}{a^2}. \tag{9.6}$$

При этом пространство будет изотропным, а интервал будет равен

$$+ds^2 = +c^2d\tau^2 - \left[\frac{dr^2}{1-\frac{r^2}{a^2}} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)\right], \tag{9.7}$$

где $d\tau = \xi dt$ — собственное время в каждой точке.

Возможны три типа пространства при метрике (9.7).

Если $a^2 > 0$, то наша Вселенная является замкнутой и имеет гауссову метрику (закрытая эллиптическая модель). Назовем это пространство пространством f_1.

Если $a^2 \to \infty$, то наша Вселенная «потенциально» бесконечна и имеет пространственную евклидову метрику-пространство f_2.

Если $a^2 < 0$, то наша Вселенная имеет метрику Лобачевского (гиперболическая модель) — пространство f_3 (оно тоже «потенциально» бесконечно).

Если $a^2 > 0$, то, вводя $cd\tau = ad\eta$, $r = a \sin \chi$, найдем

$$ds^2 = a^2(\eta) \{d\eta^2 - [d\chi^2 + \sin^2\chi (d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)]\},$$

причем a может быть не только постоянной, но и функцией времени. Именно при этом обобщении мы и будем рассматривать в дальнейшем модели нашей Вселенной.

Если $a^2 \to \infty$, то, вводя $cd\tau = bd\eta$, $r = b\chi$, найдем

$$ds^2 = b^2(\eta) \{d\eta^2 - [d\chi^2 + \chi^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)]\}.$$

Если $a^2 < 0$, то, вводя $a_1 = ia$, $cd\tau = a_1 d\eta$, $r = a_1 \operatorname{sh} \chi$, найдем, что

$$ds^2 = a_1^2(\eta) \{d\eta^2 - [d\chi^2 + \operatorname{sh}^2\chi (d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)]\}.$$

Все эти случаи можно объединить в один, полагая

$$ds^2 = a^2(\eta) \{d\eta^2 - [d\chi^2 + A^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)]\}, \tag{9.8}$$

где

$$cd\tau = ad\eta,\ r = aA,\ dr = adA,\ A = A_1 = \sin\chi,\ A = A_2 = \chi,$$
$$A = A_3 = \operatorname{sh}\chi, \tag{9.9}$$

соответственно для пространств f_1, f_2, f_3, причем теперь во всех случаях $a^2 > 0$; для евклидова пространства $a = b$ играет роль масштабного фактора. Координаты $x^0 = \eta$, $x^1 = \chi$, $x^2 = \theta$, $x^3 = \varphi$. Далее, находим, что

$$-g_{00} = g_{11} = a^2, \quad g_{22} = a^2A^2, \quad g_{33} = a^2A^2\sin^2\theta,$$

$$-g = a^8A^4\sin^2\theta,$$

$$\Gamma^0_{00} = \frac{\dot a}{c},\ \Gamma^0_{\alpha\beta} = \frac{\dot a}{ca^2} g_{\alpha\beta},\quad \Gamma^\beta_{0\alpha} = \frac{\dot a}{c}\delta^\beta_\alpha,\quad \Gamma^0_{\alpha 0} = \Gamma^\alpha_{00} = 0,$$

$$\Gamma^1_{11} = 0,\ \Gamma^2_{12} = \Gamma^3_{13} = \frac{d\ln A}{d\chi},\ \Gamma^1_{22} = -\frac{dA^2}{2d\chi},\ \Gamma^3_{23} = \operatorname{ctg}\theta,$$

$$\Gamma^2_{33} = -\sin\theta\cos\theta, \qquad \Gamma^1_{33} = -\frac{dA^2}{2d\chi}\sin^2\theta,$$

$$\dot a = \frac{da}{d\tau}. \tag{9.10}$$

Остальные компоненты $\Gamma^i_{kl} = 0$.

Вычисление компонент R_i^k приводит к следующему результату:

$$R_0^0 = \frac{3a\ddot{a}}{c^2a^2}, \qquad R_0^\alpha = 0,$$

$$R_\alpha^\beta = \frac{1}{a^2}\delta_\alpha^\beta\left[2\left(\beta_1 + \frac{\dot{a}^2}{c^2}\right) + \frac{a\ddot{a}}{c^2}\right],$$

$$R = R_0^0 + R_\alpha^\alpha = \frac{6}{a^2}\left(\beta_1 + \frac{\dot{a}^2}{c^2} + \frac{a\ddot{a}}{c^2}\right), \tag{9.11}$$

$\beta_1 = 1, 0, -1$ соответственно для пространств f_1, f_2, f_3.

Объем пространств

$$V = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\chi_0} a^3A^2 \sin\theta d\chi d\theta d\varphi = 4\pi a^3 \int_0^{\chi_0} A^2 d\chi = 2\pi^2a^3\beta_2, \tag{9.12}$$

где

$$\beta_2 = \frac{1}{\pi}\left(\chi_0 - \frac{1}{2}\sin 2\chi_0\right) = 1 \ (\chi_0 = \pi), \quad \frac{2\chi_0^3}{3\pi}(\chi_0 = 1),$$

$$\frac{1}{\pi}\left(-\chi_0 + \frac{1}{2}\operatorname{sh} 2\chi_0\right), \tag{9.13}$$

также соответственно для f_1, f_2, f_3. При этом в первом случае $\chi_0 = \pi$, поэтому $\beta_2 = 1$. Значение χ_0 в случае гиперболического пространства может быть в некотором смысле произвольным (хотя и для f_1 его тоже можно не фиксировать).

Вычислим теперь значение компонент тензора T_i^k (пренебрегая электромагнитным полем).

В собственной, сопутствующей системе отсчета $u^\alpha = 0$, $u^0 = 1/a$, и поскольку

$$T_i^k = (p + \varepsilon)\, u_i u^k + \delta_i^k p,$$

то

$$T_\alpha^\beta = \delta_\alpha^\beta p, \quad T_0^0 = -\varepsilon, \quad T_\alpha^0 = 0, \quad T = T_0^0 + T_\alpha^\alpha = 3p - \varepsilon. \tag{9.14}$$

Будем далее исследовать эти модели Вселенной, которые называются моделями Фридмана. Уравнения

$$R_i^k - \frac{1}{2}\delta_i^k R = \varkappa T_i^k \tag{9.15}$$

при этом дадут такие соотношения:

$$R_0^0 - \frac{1}{2}R = \varkappa T_0^0, \qquad R = -\varkappa T, \qquad R_1^1 - \frac{1}{2}R = \varkappa T_1^1. \tag{9.16}$$

Подставляя значения R_i^k, T_i^k, R и T, найдем

$$\frac{3}{a^2}\left(\beta_1 + \frac{\dot{a}^2}{c^2}\right) = \varkappa\varepsilon,$$

$$\frac{6}{a^2}\left(\beta_1 + \frac{\dot{a}^2}{c^2} + \frac{a\ddot{a}}{c^2}\right) = \varkappa(\varepsilon - 3p),$$

$$\frac{1}{a^2}\left(\beta_1 + \frac{\dot{a}^2}{c^2} + \frac{2a\ddot{a}}{c^2}\right) = -\varkappa p. \tag{9.17}$$

Нетрудно убедиться в том, что второе уравнение системы (9.16) является следствием остальных двух уравнений.

Итак, решим и исследуем уравнения

$$\frac{3}{a^2}\left(\beta_1 + \frac{\dot{a}^2}{c^2}\right) = \varkappa\varepsilon, \qquad \frac{1}{a^2}\left(\beta_1 + \frac{\dot{a}^2}{c^2} + \frac{2a\ddot{a}}{c^2}\right) = -\varkappa p.$$

Сначала исследуем случай малых давлений. Полагая $p \ll \varepsilon$, найдем, что второе уравнение подстановкой $\frac{\dot{a}}{c} = z$ дает $\frac{dz^2}{z^2 + \beta_1} = -\frac{da}{a}$, откуда имеем

$$(z^2 + \beta_1)\, a = B^2 = \text{const} \;\text{ или }\; \left(\frac{\dot{a}^2}{c^2} + \beta_1\right) a = a_0. \tag{9.18}$$

Первое уравнение системы (9.17) дает

$$\frac{3a_0}{\varkappa a^3} = \varepsilon. \tag{9.19}$$

Для определения константы B используем закон сохранения энергии. Очевидно, что как бы ни менялся радиус кривизны a или масштабный фактор b $(= a)$, будет иметь место соотношение

$$E_0 = V\varepsilon = V\rho c^2. \tag{9.20}$$

Сравнивая (9.19) и (9.20), найдем

$$a_0 = \frac{\varkappa\varepsilon a^3}{3} = \frac{\varkappa a^3 E_0}{3V} = \frac{\varkappa E_0}{6\pi^2\beta_2},$$

или

$$\varepsilon = \frac{E_0}{2\pi^2\beta_2 a^3}. \tag{9.21}$$

Для f_1, f_2, f_3 будем соответственно иметь

$$a_0 = \frac{\varkappa E_0}{6\pi^2}, \qquad a_0 = \frac{\varkappa E_0}{4\pi}, \qquad a_0 = \frac{\varkappa E_0}{6\pi(-\chi_0 + {}^1/_2 \operatorname{sh} 2\chi_0)}.$$

Уравнение (9.18) после интегрирования определит закон изменения во времени:

$$\int \frac{da}{\sqrt{\frac{a_0}{a}-\beta_1}} = c\tau + \text{const} = -2a_0 \int \frac{dz}{(z^2+\beta_1)^2}. \tag{9.22}$$

Однако в таком виде зависимость $\tau = \tau(a)$ имеет неудобный для дальнейшего анализа вид. Поэтому мы поступим иначе.

Введем снова $d\eta = \frac{c}{a} d\tau$, тогда (9.18) примет вид

$$d\eta = \frac{da}{\sqrt{a_0 a - \beta_1 a^2}}. \tag{9.23}$$

В качестве начальных условий возьмем $\tau = 0$, $\eta = 0$, $a = 0$. При $\beta_1 = 1$ будем иметь

$$a = \frac{a_0}{2}(1-\cos\eta) = \frac{\varkappa E_0}{12\pi^2}(1-\cos\eta),$$

$$c\tau = \frac{a_0}{2}(\eta - \sin\eta) = \frac{\varkappa E_0}{12\pi^2}(\eta-\sin\eta). \tag{9.24}$$

При $\beta = 0$ имеем

$$a = \frac{a_0}{4}\eta^2 = \frac{\varkappa E_0 \eta^2}{16\pi}, \qquad c\tau = \frac{a_0\eta^3}{12} = \frac{\varkappa E_0\eta^3}{48\pi}, \tag{9.25}$$

откуда, кстати, следует, что

$$a = \left(\frac{3}{2} a_0^{1/2} c\tau\right)^{2/3} = \left(\frac{3\varkappa E_0}{8\pi} c\tau\right)^{2/3}.$$

При $\beta_1 = -1$ имеем

$$a = \frac{a_0}{2}(\operatorname{ch}\eta - 1) = \frac{\varkappa E_0}{12\pi^2\beta_2}(\operatorname{ch}\eta - 1),$$

$$c\tau = \frac{a_0}{2}(\operatorname{sh}\eta - 1) = \frac{\varkappa E_0}{12\pi^2\beta_2}(\operatorname{sh}\eta - \eta). \tag{9.26}$$

где

$$\beta_2 = \frac{1}{\pi}\left(-\chi_0 + \frac{1}{2}\operatorname{sh} 2\chi_0\right).$$

Заметим, что уравнение

$$T^k_{i;k} = 0 \tag{9.27}$$

при этом выполняется тождественно.

В самом деле, поскольку (9.27) можно написать в виде

$$\frac{\partial \sqrt{-g}\, T_i^k}{\partial x^k} = \frac{\sqrt{-g}}{2} T^{kl} \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i}, \tag{9.28}$$

то при $i = 0$ имеем

$$\frac{\partial \sqrt{-g}\, T_0^0}{\partial x^0} = \frac{\sqrt{-g}}{2} T^{kl} \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^0} = \frac{\sqrt{-g}}{2} T^{00} \frac{\partial g_{00}}{\partial x^0} =$$
$$= \frac{\sqrt{-g}}{2} \left(T_0^0 g^{00} \frac{\partial g_{00}}{\partial x^0} + T_\delta^\beta g^{\delta\gamma} \frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial x^\alpha} \right),$$

что дает

$$\frac{d(a^4\varepsilon)}{da} = \frac{a^4\varepsilon}{2a^2} \frac{da^2}{da} = \varepsilon a^2,$$

откуда следует, что $\varepsilon a^3 = \text{const}$. При $i = 1, 2, 3$ имеем

$$\frac{\partial \sqrt{-g}\, T_\alpha^k}{\partial x^k} = T_\alpha^k \frac{\partial \sqrt{-g}}{\partial x^k} = \frac{\sqrt{-g}}{2} T^{kl} \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^\alpha} =$$
$$= \frac{\sqrt{-g}}{2} \left(T_0^0 g^{00} \frac{\partial g_{00}}{\partial x^\alpha} + T_\delta^\beta g^{\delta\gamma} \frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial x^\alpha} \right) = 0,$$

т. е. уравнения удовлетворяются тождественно.

Рассмотрим теперь другой предельный случай $p = \varepsilon/3$ $(a \to 0)$. При этом второе уравнение системы (9.17) принимает вид

$$\beta_1 + \frac{\dot{a}^2}{c^2} + \frac{a\ddot{a}}{c^2} = 0.$$

Снова вводя $\frac{\dot{a}}{c} = z$, придем к уравнению $\frac{dz^2}{z^2 + \beta_1} = -\frac{da^2}{a^2}$, откуда

$$(z^2 + \beta_1)\, a^2 = a_0^2 = \text{const} \quad \text{или} \quad \left(\frac{\dot{a}^2}{c^2} + \beta_1 \right) a^2 = a_0^2. \tag{9.29}$$

Первое уравнение системы (9.17) дает

$$\frac{3a_0^2}{\varkappa a^4} = \varepsilon. \tag{9.30}$$

Поскольку при $p = \varepsilon/3$; $\rho v^{4/3} = \text{const}$, где v — удельный объем, то

$$E_0 = \frac{Vc^2}{v} = \frac{Vc^2 \rho^{3/4}}{v_0 \rho_0^{4/3}} = \frac{Vc^2 \varepsilon^{3/4}}{v_0 \varepsilon_0^{3/4}} = \frac{Vc^2}{v_0 \varepsilon_0^2 a^3} \left(\frac{3a_0^2}{\varkappa} \right)^{3/4} = \frac{2\pi^2 \beta_2}{v_0 \varepsilon_0^{3/4}} \left(\frac{3a_0^2}{\varkappa} \right)^{3/4}. \tag{9.31}$$

Отсюда

$$a_0^2 = \frac{\varkappa\varepsilon_0}{3}\left(\frac{v_0 E_0}{2\pi^2\beta_2}\right)^{4/3},$$

$\varepsilon_0 v_0^{4/3} = \text{const}$, где ε_0, v_0 — начальные значения ε и v.

Для пространств f_1, f_2, f_3 будем соответственно имет

$$a_0^2 = \frac{\varkappa\varepsilon_0 v_0^{4/3} E_0^{4/3}}{3\,(2\pi^2)^{4/3}},$$

$$a_0^2 = \frac{\varkappa\varepsilon_0 v_0^{4/3} E_0}{3\left(\frac{4}{3}\pi\right)^{4/3}},$$

$$a_0^2 = \frac{\varkappa\varepsilon_0 v_0^{4/3} E_0^{4/3}}{3\left[2\pi\left(-\chi_0 + \frac{1}{2}\operatorname{sh} 2\chi_0\right)\right]^{4/3}}.$$

Уравнение (9.29) примет теперь вид

$$\int \frac{da}{\sqrt{\frac{a_0^2}{a^2} - \beta_1}} = c\tau + \text{const} = \frac{1}{2}\int \frac{da^2}{\sqrt{a_0^2 - \beta_1 a^2}}.$$

Отсюда при $\beta_1 = 1$ имеем

$$c\tau = \frac{1}{2}\int \frac{da^2}{\sqrt{a_0^2 - a^2}} = a_0 - \sqrt{a_0^2 - a^2}$$

или

$$a = \sqrt{2a_0 c\tau - c^2\tau^2}.$$

При $\beta = 0$

$$c\tau = \frac{a^2}{2a_0^2},$$

или

$$a = \sqrt{2a_0 c\tau}.$$

При $\beta = -1$

$$c\tau = \frac{1}{2}\int \frac{da^2}{\sqrt{a_0^2 + a^2}} = \sqrt{a_0^2 + a^2} - a_0$$

или

$$a = \sqrt{2a_0 c\tau + c^2\tau^2}.$$

Выражения (9.34) — (9.36) можно объединить одной общей формулой:

$$a = \sqrt{2a_0 c\tau - \beta_1 c^2 \tau^2}.$$

Поскольку уравнение состояния $p = \varepsilon/3$ справедливо лишь при очень больших давлениях, что соответствует весьма малым значениям a, то при $a \to 0$ для всех трех моделей Вселенной имеет место один асимптотический закон $a = \sqrt{2a_0 c\tau}$, где лишь значения a_0 могут быть различны для разных моделей.

Для контроля снова воспользуемся уравнением (9.28). При $i = 0$ имеем

$$\frac{d(a^4\varepsilon)}{da} = \frac{a^4\varepsilon}{2a^2}\frac{da^2}{da} - \frac{3pa^4}{2a^2}\frac{da^2}{da} = a^3(\varepsilon - 3p) = 0,$$

откуда $\varepsilon a^4 = \text{const}$, что и дает (9.30). При $i = 1, 2, 3$ имеем

$$\frac{\partial \sqrt{-g}\, T^k_\alpha}{\sqrt{-g}\,\partial x^k} = \frac{1}{2} T^k_\alpha g^{il} \frac{\partial g_{il}}{\partial x^\alpha} = \frac{1}{2} T^k_\alpha \frac{\partial \ln g}{\partial x^k} = T^k_\alpha \frac{\partial \sqrt{-g}}{\sqrt{-g}\,\partial x^k},$$

что тождественно удовлетворяется.

Полученный при $p = \varepsilon/3$ результат можно уточнить. Поскольку $\varepsilon - 3p = c^2/v$, то второе уравнение системы (9.17) будет иметь вид

$$\beta_1 + \frac{\dot a^2}{c^2} + \frac{a\ddot a}{c^2} = \frac{c^2\bar\beta a^2}{6v} = \frac{\varkappa E_0\bar\beta}{12\pi^2\beta_2 a}, \tag{9.37}$$

где $\frac{c^2}{v} = \frac{E_0}{V} = \frac{E_0}{2\pi^2\beta_2 a^3}$ [что точнее по сравнению с (9.21), которое приближенно и годится при больших a]. Преобразуя (9.37), получим

$$\beta_1 a + a_{\eta\eta} = \frac{\varkappa E_0\bar\beta}{12\pi^2\beta_2}.$$

Решение этого уравнения, например, для $\beta_1 = 1$ имеет вид

$$a = a_0 \sin\eta + \frac{\varkappa E_0\bar\beta}{12\pi^2\beta_2}(1 - \cos\eta),$$

$$c\tau = a_0(1 - \cos\eta) + \frac{\varkappa E_0\bar\beta}{12\pi^2\beta_2}(\eta - \sin\eta)$$

(и аналогично для $\beta_1 = 0$ и $\beta_1 = -1$). При этом для всех трех моделей находим

$$\varepsilon = \frac{3a^2}{\varkappa a^4} + \frac{E_0\bar\beta}{2\pi^2\beta_2 a^3}. \tag{9.38}$$

При малых a получаем выражение (9.30), при больших a — (9.21) ($\bar\beta < 1$), так что соотношение (9.38) ($\bar\beta = 1$) является интерполяционным. При этом

$$\frac{3a_0^2}{\varkappa a}+\frac{\bar{\beta}E_0}{2\pi^2\beta_2}=\frac{E_0}{2\pi^2\beta_2}$$

или

$$\bar{\beta}=1-\frac{6\pi^2\beta_2 a_0^2}{\varkappa E_0 a}\leqslant 1 \quad (a>0).$$

В заключение этого раздела рассмотрим первую модель Вселенной Эйнштейна — модель стационарной Вселенной. Пусть $a=\mathrm{const}$, тогда уравнение (9.17) принимает вид

$$\frac{3\beta_1}{a^2}=\varkappa\varepsilon, \quad \frac{6\beta_1}{a^2}=\varkappa(\varepsilon-3p), \quad \frac{\beta_1}{a^2}=-\varkappa p. \tag{9.39}$$

Последнее уравнение этой системы есть следствие первых двух уравнений. Уравнения имеют смысл лишь при $\beta_1=1$. Таким образом,

$$\frac{3}{a^2}=\varkappa\varepsilon, \qquad \frac{6}{a^2}=\varkappa(\varepsilon-3p),$$

откуда

$$\frac{\varkappa\varepsilon}{3}=-\varkappa p=+\frac{1}{a^2}. \tag{9.40}$$

Давление при этом получается отрицательным. Эйнштейн интерпретировал его как давление некоего суммарного поля. При $a\to\infty$ $\varepsilon=0$, $p=0$.

Поскольку $E_0=2\pi^2a^3\varepsilon$,

то

$$\frac{3}{a^2}=\frac{\varkappa E_0}{2\pi^2a^3},$$

откуда

$$a=\frac{\varkappa E_0}{6\pi^2}, \tag{9.41}$$

что совпадает с (9.21) при $a=a_0$.

§ 10. Модели нашей Вселенной, предложенные Фридманом

Мы нашли корректные решения для возможных трех вариантов моделей нашей Вселенной. Займемся теперь анализом этих моделей. В случае пространства f_1 $a^2>0$ и решение определяется в интервале $0\leqslant\eta\leqslant 2\pi$. При $\eta=\pi$ $a=a_0=a$, при $\eta=2\pi$

$a = 0$. Таким образом, это модель пульсирующей (периодической) Вселенной, объем которой всегда ограничен.

В случае пространства f_2 решение определено при $\tau \geqslant 0$ ($\eta \geqslant 0$). Наша Вселенная неограниченно расширяется, оставаясь в смысле пространственной метрики евклидовой. В случае пространства f_3 решение определено при $\eta \geqslant 0$. Объем пространства неограниченно растет со временем.

Во всех трех случаях расстояние от любого произвольного выбранного начала координат (любая точка пространств в этом смысле равноправна) определяется простым соотношением

$$l = \int a d\chi. \tag{10.1}$$

Величина χ играет роль лагранжевой координаты. Скорость удаления двух «лагранжевых частиц» (частиц, имеющих фиксированные значения $\chi = \overline{\chi}$) определяется соотношением

$$v = \left(\frac{\partial (a\chi)}{\partial \tau}\right)_\chi = \chi \dot{a} = l \frac{\dot{a}}{a} = hl. \tag{10.2}$$

Отсюда следует, что скорость удаления какой-либо частицы от заданной частицы в данный фиксированный момент времени пропорциональна расстоянию между этими частицами.

Величина

$$H = \frac{\dot{a}}{a} = \frac{cda}{a^2 d\eta} \tag{10.3}$$

называется постоянной Хэббла, а эффект удаления — «красным смещением» частоты (при удалении объектов линии в спектрах смещаются в красную часть спектра). Это обстоятельство, как известно, имеет место в действительности.

Воспользуемся теперь первым уравнением системы (9.17)

$$\frac{3}{a^2}\left(\beta_1 + \frac{\dot{a}^2}{c^2}\right) = \varkappa\varepsilon,$$

которое напишем в виде

$$\beta_1 \frac{c^2}{a^2} = \frac{\varkappa c^2 \varepsilon}{3} - h^2 = \frac{8\pi g \rho}{3} - h^2, \tag{10.4}$$

причем для пространств f_1, f_2, f_3 из (9.24) — (9.26) имеем соответственно

$$h = \frac{2c \sin \eta}{a_0 (1 - \cos \eta)^2}, \qquad h = \frac{8c}{a_0 \eta^3} = \frac{2}{3\tau}, \qquad h = \frac{2c \operatorname{sh} \eta}{a_0 (\operatorname{ch} \eta - 1)^2}. \tag{10.5}$$

Исходя из смещений спектральных линий «разбегающихся» галактик можно определить $\frac{\omega_0-\omega}{\omega_0}=\frac{v}{c}=\frac{Hl}{c}$; откуда

$$H=\frac{c}{l}\frac{\omega_0-\omega}{\omega_0}, \tag{10.6}$$

где ω_0 — излученная, ω — принятая (на Земле) частота данной линии спектра какой-либо галактики, расстояние l до которой известно (по наблюдениям Цефеид).

Зная H и, хотя очень приближенно, ρ, можно оценить член $\beta_1 c^2/a^2$, точнее хотя бы его знак, т. е. выяснить знак β_1. Данные наблюдения показывают, что $H \approx 2{,}5\cdot 10^{-18}$ *сек*$^{-1}$, $\rho \approx 10^{-28}$ *г/см*^{3}. Отсюда находим, что $\beta_1 < 0$, т. е. наша Вселенная, по-видимому, является или квазиевклидовой, или гиперболической. При этом соотношения (10.5) могут позволить оценить связь между величинами полной энергии (или параметра a_0) и a.

Найдем теперь уравнения распространения света. Если свет распространяется из начала координат, то вдоль световых лучей $\varphi=\mathrm{const}$, $\theta=\mathrm{const}$, и, поскольку $ds=0$, мы придем к такому уравнению для световых лучей: $d(\eta^2-\chi^2)=0$, откуда

$$\chi=\pm\eta+\mathrm{const}. \tag{10.7}$$

Следуя Фоку, приведем теперь метрики моделей f_1 и f_3 к конформно-галилеевой метрике. Пространство f_2 уже имеет эту метрику:

$$ds^2=b^2(\eta)\{d\eta^2-[d\chi^2+\chi^2(d\theta^2+\sin^2\theta\, d\varphi^2)]\}. \tag{10.8}$$

В случае пространства f_1 введем новые r и t соотношениями

$$Ae^{i\eta}=\sqrt{r^2-c^2t^2}, \qquad \frac{r}{ct}=i\,\mathrm{tg}\,\chi.$$

Тогда получим

$$ds^2=\frac{a^2}{r^2-c^2t^2}[c^2\,dt^2-dr^2-r^2(d\theta^2+\sin^2\theta\, d\varphi^2)], \tag{10.9}$$

где $a=f(\sqrt{r^2-c^2t^2})$.

В случае пространства f_3, вводя r и t соотношениями

$$Ae^{\eta}=\sqrt{c^2t^2-r^2}, \qquad \frac{r}{ct}=\mathrm{th}\,\chi,$$

найдем

$$ds^2=\frac{a^2}{c^2t^2-r^2}[c^2\,dt^2-dr^2-r^2(d\theta^2+\sin^2\theta\, d\varphi^2)], \tag{10.10}$$

где $a=f(\sqrt{c^2t^2-r^2})$.

Уравнение (10.8) подстановкой $\chi = r$, $d\eta = cdt = cd\tau/b$ преобразуем к виду

$$ds^2 = b^2 [c^2 dt^2 - dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)], \tag{10.11}$$

где $b = b(t)$.

Заметим, что величина a является известной функцией η, поэтому и $\sqrt{r^2 - c^2t^2}$ (или $\sqrt{c^2t^2 - r^2}$), так же как и b, является известной функцией времени.

В написанном здесь виде интервалы весьма удобны для простой интерпретации возможных моделей Вселенной. Наблюдения далеких внегалактических объектов — других галактик — убедительно указывают на то, что эти галактики действительно удаляются друг от друга по закону $v \sim l$, что в основном подтверждает справедливость динамических моделей Вселенной Фридмана, а не статической модели Эйнштейна.

§ 11. Законы сохранения в общей теории относительности

Напишем выражения для $\delta(S_g + S_m) = 0$ в виде

$$\frac{1}{c}\int \delta g^{ik}\left[\left(\frac{\partial(\sqrt{-g}L)}{\partial g^{ik}} - \frac{\partial}{\partial x^l}\frac{\partial(\sqrt{-g}L)}{\partial\dfrac{\partial g^{ik}}{\partial x^l}}\right) + \frac{\sqrt{-g}}{2}T_{ik}\right]d\Omega = 0. \tag{11.1}$$

Поскольку δg^{ik} произвольны, будет иметь место уравнение

$$\frac{\partial(\sqrt{-g}L)}{\partial g^{ik}} - \frac{\partial}{\partial x^l}\frac{\partial(\sqrt{-g}L)}{\partial\dfrac{\partial g^{ik}}{\partial x^l}} = -\frac{\sqrt{-g}}{2}T_{ik}. \tag{11.2}$$

Так как $L = -G/2\varkappa$, то уравнение (11.2) можно написать в виде

$$\frac{\partial(\sqrt{-g}G)}{\partial g^{lm}} - \frac{\partial}{\partial x^i}\frac{\partial(\sqrt{-g}G)}{\partial\dfrac{\partial g^{lm}}{\partial x^i}} = \sqrt{-g}\varkappa T_{lm}. \tag{11.3}$$

Вычислим теперь величину

$$\frac{\partial(\sqrt{-g}G)}{\partial x^i} = \frac{\partial(\sqrt{-g}G)}{\partial g^{ml}}\frac{\partial g^{ml}}{\partial x^i} + \frac{\partial(\sqrt{-g}G)}{\partial\dfrac{\partial g^{ml}}{\partial x^k}}\frac{\partial^2 g^{ml}}{\partial x^i\partial x^k}. \tag{11.4}$$

Исключая из (11.3) и (11.4) $\frac{\partial(\sqrt{-g}G)}{\partial g^{ml}}$, придем к уравнению

$$\frac{\partial}{\partial x^k}\left[\frac{\partial g^{ml}}{\partial x^i}\frac{\partial(\sqrt{-g}G)}{\partial\frac{\partial g^{ml}}{\partial x^k}}\right]-\delta_i^k\frac{\partial(\sqrt{-g}G)}{\partial x^k}=-\sqrt{-g}\varkappa T_{ml}\frac{\partial g^{ml}}{\partial x^i}. \tag{11.5}$$

Обозначим

$$\frac{\partial g^{ml}}{\partial x^i}\frac{\partial(\sqrt{-g}G)}{\partial\frac{\partial g^{ml}}{\partial x^k}}-\delta_i^k(\sqrt{-g}G)=-2\varkappa\sqrt{-g}\,t_i^k, \tag{11.6}$$

где величины t_i^k являются компонентами так называемого псевдотензора энергии-импульса гравитационного поля (в том, что t_i^k не тензор, нетрудно убедиться).

Используя (11.6), можно написать (11.5) в виде

$$\frac{\partial(\sqrt{-g}\,t_i^k)}{\partial x^k}=\frac{\sqrt{-g}}{2}T_{ml}\frac{\partial g^{ml}}{\partial x^i}=-\frac{\sqrt{-g}}{2}T^{ml}\frac{\partial g_{ml}}{\partial x^i}. \tag{11.7}$$

Из тождеств (свернутых) Бианки

$$\left(R_i^k-\frac{1}{2}\delta_i^kR\right)_{;k}=0 \tag{11.8}$$

и уравнений поля

$$R_i^k-\frac{1}{2}\delta_i^kR=\varkappa T_i^k \tag{11.9}$$

следует, что

$$T_{i;k}^k=\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial(\sqrt{-g}T_i^k)}{\partial x^k}-\frac{1}{2}T^{ml}\frac{\partial g_{ml}}{\partial x^i}=0. \tag{11.10}$$

Используя (11.10), напишем (11.7) в виде

$$\frac{\partial}{\partial x^k}[\sqrt{-g}(t_i^k+T_i^k)]=0. \tag{11.11}$$

Эти уравнения являются фундаментальными при интерпретации «законов» сохранения материи и гравитационного поля. Поскольку уравнения (11.11) получаются при использовании тождеств Бьянки, они также имеют характер тождеств.

Вычисляя с помощью (3.27) левую часть (11.6), найдем, что

$$t_i^k = \frac{\delta_i^{ik}}{2\varkappa} G + \frac{1}{2\varkappa\sqrt{-g}}\left[\Gamma^k_{lm}\frac{\partial(\sqrt{-g}\,g^{lm})}{\partial x^i} - \Gamma^l_{ml}\frac{\partial(\sqrt{-g}\,g^{km})}{\partial x^i}\right], \tag{11.12}$$

$$t_{ik} = \frac{g_{ik}}{2\varkappa} G + \frac{g_{kr}}{2\varkappa\sqrt{-g}}\left[\Gamma^r_{lm}\frac{\partial(\sqrt{-g}\,g^{lm})}{\partial x^i} - \Gamma^l_{ml}\frac{\partial(\sqrt{-g}\,g^{rm})}{\partial x^i}\right]. \tag{11.13}$$

Величины t_{ik} в общем случае не составляют тензора; лишь при линейных преобразованиях координат t_{ik} является тензором, поскольку t_{ik} можно выразить через символы Γ^l_{ik}. Величины t_{ik} образуют так называемый псевдотензор, несимметричный по индексам i, k.

Преобразуем теперь выражение

$$\sqrt{-g}\,(t_i^k + T_i^k) = \sqrt{-g}\left[t_i^k + \frac{1}{\varkappa}\left(R_i^k - \frac{1}{2}\delta_i^k R\right)\right].$$

Легко показать, что

$$\sqrt{-g}\,(t_i^k + T_i^k) = \frac{1}{2\varkappa}\frac{\partial \chi_i^{kl}}{\partial x^l},$$

где

$$\chi_i^{kl} = \frac{g_{in}}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x^m}\left[(-g)\left(g^{kn}g^{lm} - g^{ln}g^{km}\right)\right], \tag{11.14}$$

причем χ_i^{kl} является псевдотензором, антисимметричным по индексам k, l; поэтому

$$\frac{\partial^2 \chi_i^{kl}}{\partial x^k \partial x^l} \equiv 0. \tag{11.15}$$

Очевидно, что псевдотензор t_i^k вообще определяется не однозначно, а с точностью до производной от антисимметричного тензора или псевдотензора ψ_i^{kl} вида $\frac{\partial}{\partial x^l}\left[\sqrt{-g}\,\psi_i^{kl}\right] = \sqrt{-g}A_i^k$, причем величины ψ_i^{kl} можно выбрать так, чтобы симметризировать по индексам i, k псевдотензор t_{ik}.

Поскольку t_i^k и χ_i^{kl} не симметричны по индексам i, k, то полный момент импульса поля и материи не сохраняется. Следует особо подчеркнуть, что если в отсутствие гравитационного поля законы сохранения накладывают соответственные условия на изменения параметров, характеризующих движение и состояние среды, то уравнения сохранения (11.11) по существу являются тождествами, совпадающими с тождествами Бианки, и дополнительных ограничений на величины g_{ik} не накладывают (в противном случае, из десяти уравнений R_{ik} независимых осталось бы только два, что было бы абсурдным).

Интегральные законы сохранения имеют вид

$$c\sqrt{-g}\,P_i = \int \sqrt{-g}\,(T_i^k + t_i^k)\,dS_k = \frac{1}{2\varkappa}\int \frac{\partial x_i^{kl}}{\partial x^l}\,dS_k =$$

$$= \frac{1}{4\varkappa}\int \chi_i^{kl}\,d\overset{*}{f}_{kl}\,, \qquad (11.16)$$

где P_i — 4-x импульс, $d\overset{*}{f}_{kl} = \frac{1}{2}\,e_{klsp}\,df^{sp}$ — тензор, дуальный тензору элемента «площади» df^{sp} ($d\overset{*}{f}_{kl}$ изображает элемент поверхности, равный и нормальный элементу df^{kl}).

Если за область интегрирования принять гиперповерхность $x^0 = \text{const}$, то

$$c\sqrt{-g}\,P_i = \int \sqrt{-g}\,(T_i^0 + t_i^0)\,dV. \qquad (11.17)$$

Поскольку псевдотензор t_i^k ведет себя как тензор при линейных преобразованиях, то и псевдовекторная плотность $\sqrt{-g}\,P_i$ также является вектором относительно линейных преобразований координат. Поэтому имеет смысл проводить вычисления при $\sqrt{-g} = 1$ или, в крайнем случае, подразумевать под $\sqrt{-g}$ его значение на бесконечности.

Примем снова в качестве области интегрирования гиперповерхность $x^0 = \text{const}$. При этом

$$df^{kl} = df^{\alpha\beta}, \qquad d\overset{*}{f}_{kl} = d\overset{*}{f}_{0\alpha} = df_\alpha,$$

где df_α — элемент обычной трехмерной поверхности. При этом (11.17) принимает вид

$$\sqrt{-g}\,cP_i = \frac{1}{2\varkappa}\int \chi_i^{0\alpha}\,d\overset{*}{f}_{0\alpha} = \frac{1}{2\varkappa}\int \chi_i^{0\alpha}\,df_\alpha. \qquad (11.18)$$

Очевидно, что

$$\chi_i^{0\alpha} = \frac{g_{in}}{\sqrt{-g}}\,\frac{\partial}{\partial x^m}\left[(-g)\,(g^{0n}g^{\alpha m} - g^{\alpha n}g^{0m})\right]. \qquad (11.19)$$

Интегрирование в римановом (кривом) пространстве наталкивается на значительные трудности, и, в частности, результаты соотношений (11.17) и (11.18) могут быть различны. Поэтому, пока что мы корректно рассмотрим, как это принято в общей теории относительности, предельный случай слабого поля с квазигалилеевой метрикой.

Будем рассматривать лишь постоянное поле, когда g_{ik} не зависит от x^0. Интервал такого слабого поля, как мы знаем, может быть записан в виде [см. (4.22)]

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2Gm}{rc^2}\right) dx^{02} - \left(1 + \frac{2Gm}{rc^2}\right)(dx^2 + dy^2 + dz^2), \tag{11.20}$$

где $x^0 = ct$, m — полная масса системы тел. На больших расстояниях поле любой системы тел становится симметричным, поэтому (11.20) переходит в

$$ds^2 = ds_0^2 - \frac{2Gm}{c^2}(dx^{02} + dr^2), \tag{11.21}$$

где

$$ds_0^2 = -(dx^{02} + dx^{12} + dx^{22} + dx^{32})$$

есть интервал в пустом пространстве.

Таким образом,

$$g_{00} = -\left(1 - \frac{2Gm}{rc^2}\right), \qquad g_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} + \frac{n_\alpha n_\alpha}{r}\,\frac{2Gm}{c^2}, \tag{11.22}$$

где $dr = n_\alpha dx^\alpha$ (n — единичный вектор в направлении r). Вычисления проводятся с нужной точностью (до членов $\sim 1/r^2$) в предположении $\sqrt{-g} = 1$. Далее очевидно, что $m = \beta$ и

$$\chi_0^{0\alpha} = g_{00}\,\frac{\partial}{\partial x^\beta}(g^{00}g^{\alpha\beta} - g^{\alpha 0}g^{0\beta}) = g_{00}\frac{\partial}{\partial x^\beta}(g^{00}g^{\alpha\beta}),$$

$$\chi_\gamma^{0\alpha} = g_{\gamma n}\,\frac{\partial}{\partial x^\beta}(g^{0n}g^{\alpha\beta} - g^{\alpha n}g^{0\beta}) \equiv 0.$$

Таким образом,

$$ {}^{c}P_0 = \frac{1}{2\varkappa}\int g_{00}\frac{\partial}{\partial x^\beta}(g^{00}g^{\alpha\beta})\,df_\alpha =$$

$$= \frac{1}{2\varkappa}\int \frac{\partial}{\partial x^\beta}\left(1 + \frac{2Gm}{rc^2}\right)\left(\delta^{\alpha\beta} - \frac{2Gm}{rc^2}n^\alpha n^\beta\right) df_\alpha .$$

Поскольку

$$\frac{\partial}{\partial x^\beta}\left[\left(1 + \frac{2Gm}{rc^2}\right)\left(\delta^{\alpha\beta} - \frac{2Gm}{rc^2}\,n^\alpha n^\beta\right)\right] =$$

$$= \frac{2Gm}{c^2}\,\frac{\partial}{\partial x^\beta}\left(\frac{\delta^{\alpha\beta}}{r} - \frac{n^\alpha n^\beta}{r}\right) = \frac{4Gmn^\alpha}{c^2 r^2},$$

причем $x^\alpha = n^\alpha r$; $n^\alpha df_\alpha = r^2 d\omega$, $\quad \int d\omega = 4\pi$,

то

$$cP_0 = \frac{4Gmc^4}{16\pi Gc^2} \int \frac{r^2}{r^2}\, d\omega = mc^2 = E_0. \tag{11.23}$$

Отсюда следует, что $P_0 = mc = E_м/c$, где $E_м$ — энергия вещества, входящего в систему.

Этот результат считается естественным и обычно трактуется как равенство «тяжелой» и «инертной» массы.

Далее очевидно, что

$$cP_\gamma = \frac{1}{2\varkappa} \int \chi_\gamma^{0\alpha}\, df_\alpha = 0.$$

В случае постоянного поля можно показать, что

$$R_0^0 = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left(\sqrt{-g}\, g^{i0}\, \Gamma_{0i}^\alpha\right).$$

Интеграл

$$\int \sqrt{-g}\, R_0^0\, dv = \oint \sqrt{-g}\, g^{i0}\, \Gamma_{i0}^\alpha\, df_\alpha.$$

Если подставить сюда выражение для g_{ik} из (11.21), то легко вычислить, что

$$\int \sqrt{-g}\, R_0^0\, dv = -\frac{4\pi Gm}{c^2} = -\frac{4\pi GE_м}{c^4} = -\frac{\varkappa E_м}{2}. \tag{11.24}$$

Поскольку

$$R_0^0 = \varkappa \left(T_0^0 - \frac{1}{2} T\right) = \frac{\varkappa}{2} \left(T_0^0 - T^\alpha\right),$$

то

$$E_м = \int \sqrt{-g}\, (T_\alpha^\alpha - T_0^0)\, dV = mc^2. \tag{11.25}$$

Этот важный результат, определяющий полную энергию материи и постоянного гравитационного поля через тензор энергии-импульса материи, был получен в 1930 г. Толманом. Результат имеет существенное значение для дальнейшего изложения.

Для исследования моделей Вселенной Эйнштейна и Фридмана в общем виде мы, к сожалению, не можем применить указанные интегральные принципы, поскольку для этих моделей $\sqrt{-g} \neq 1$.

Можно лишь рассмотреть предельный случай эйнштейновской Вселенной когда $\frac{r}{a} \ll 1$, $a \to \infty$ (при этом $\sqrt{-g} = 1$), и случай квазиевклидовой фридмановской Вселенной, когда $\sqrt{-g} = f(x^0)$,

Разберем эти два предельных случая.

При

$$ds^2 = ds_0^2 - \frac{dr^2}{\frac{a^2}{r^2} - 1} \tag{11.26}$$

будем иметь

$$g_{00} = -1, \qquad g_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} + \frac{n_\alpha n_\beta}{\frac{a^2}{r^2} - 1}, \qquad \sqrt{-g} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{r^2}{a^2}}},$$

$$\chi_i^{0\alpha} = \frac{g_{i0}}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^\beta} [(-g)\, g^{00} g^{\alpha\beta}],$$

$$\chi_\gamma^{0\alpha} = 0, \qquad P_\gamma = 0, \qquad \chi_0^{0\alpha} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^\beta} [(-g)\, g^{\alpha\beta}].$$

В пределе при $\frac{r}{a} \ll 1$

$$\chi_0^{0\alpha} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial [g^{\alpha\beta}(-g)]}{\partial x^\beta} = n^\alpha n^\beta \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left(\frac{r}{a}\right)^2 = \frac{2n^\alpha r}{a^2},$$

$$cP_0 = E_0 = \frac{1}{\varkappa a^2} \int r n^\alpha df_\alpha = \frac{\varepsilon}{3} \int r n^\alpha df_\alpha = \frac{4}{3} \pi \varepsilon r^3 \approx E_0.$$

Полагая, что $\frac{4}{3} \pi r^3 = v$, получаем тот же результат, что и в случае шварцшильдовского поля, что естественно.

В случае фридмановской квазиевклидовой Вселенной

$$-ds^2 = -dx^{02} + b^2(\tau)(dx^2 + dy^2 + dz^2). \qquad (11.27)$$

При этом $g_{00} = -1$, $g_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} b^2$, $\sqrt{-g} = b^3$,

$$-\chi_i^{0\alpha} = 2g_{in} \frac{db^3}{dx^0} (g^{0n} g^{\alpha 0} - g^{\alpha n} g^{0n}) + g_{in} b^3 \frac{\partial}{\partial x^\beta} (g^{0n} g^{\alpha\beta} - g^{\alpha n} g^{0\beta}) =$$

$$= 2g_{in} \frac{db^3}{dx^0} (g^{0n} g^{\alpha 0} + g^{\alpha n}).$$

Очевидно, что $\chi_0^{0\alpha} = 0$. Отсюда следует, что

$$P_0 = 0, \qquad -\chi_\gamma^{0\alpha} = 2\delta_\gamma^\alpha \frac{db^2}{dx^0},$$

$$cP_{2,3} = \frac{1}{\varkappa} \frac{db^3}{dx^0} \int df_{2,3} = 0,$$

$$cP_1 = -\frac{db^3}{\varkappa dx^0} f = -\frac{2}{3\varkappa} \frac{d^2 b^3}{dx_0^2} v \neq 0.$$

Однако если вычислять по (11.7), то $P_i \equiv 0$.

Этот результат нелеп, и можно утверждать, что применение интегральных законов к этой модели Вселенной неприменимо (пространство-время все же криво). (В случае эллиптических и гиперболических моделей аналогичные результаты получаются при $\sqrt{-g} = 1$ и еще более нелепые — при $\sqrt{-g} \neq 1$.) Следовательно, эти «законы» сохранения не являются корректными в кривом римановом пространстве и годятся лишь для линейных преобразований, на что мы и указывали выше.

§ 12. Энергия гравитационного поля и гравитационных волн

Так как псевдотензор поля $t_i^k = t_i^k(g_{ik}, \Gamma_{ik}^l)$ (причем Γ_{ik}^l входит всюду сомножителем), а в локально-инерциальной системе отсчета $\Gamma_{ik}^l = 0$, то в этой системе и $t_i^k = 0$. При желании одним только выбором системы отсчета в точке можно сделать энергию гравитационного поля равной нулю или любой наперед заданной величиной, что ставит под сомнение, как на это неоднократно указывал Инфельд, реальность существования гравитационных волн произвольной интенсивности.

Действительно, согласно принципу эквивалентности мы можем в ускоренной (неинерциальной) системе отсчета локально «парализовать» гравитационное поле, но тогда должны возникнуть свои собственные гравитационные (инерциальные) волны. Однако в инерциальной системе отсчета они возникнуть не могут, а энергия начального поля теряется, что необъяснимо. Поэтому, несмотря на бесполезность рассуждений о том, может ли гравитационное поле быть локализованным в данном элементе пространства или нет, псевдотензор t_i^k не описывает всех свойств гравитационного поля в общем случае. Лишь в приближении слабого поля, в том случае, когда мы имеем дело только с линейными преобразованиями координат, т. е. когда величины Γ_{ik}^l и t_i^k ведут себя как тензоры, можно сравнительно корректно написать выражения для энергии, переносимой гравитационными волнами, причем эта энергия не обращается в нуль ни в какой системе отсчета.

Однако интегральные законы сохранения и в этом приближении заставляют желать лучшего и нуждаются в уточнении, несмотря на то что в принципе величина P_i является вектором, только относительно линейных преобразований. Указанная ситуация с псевдотензором t_i^k и законами сохранения привела к многочисленным работам, где рассматривались другие варианты «аппроксимации» псевдотензора. Одним авторам не нравилось то, что нельзя написать закон сохранения полного момента количества движения, другие хотели разрешить парадокс с энергией гравитационных волн, третьи вообще хотели написать не псевдотензор, а истинный тензор поля, что противоречит основным принципам теории гравитационного поля.

Этими вопросами мы займемся в следующем параграфе, а сейчас перейдем к исследованию энергии волн в данном варианте псевдотензора t_i^k в случае слабого поля. Напишем псевдотензор гравитационного поля в виде

$$t_i^k = \frac{\delta_i^k}{2\varkappa} G + \frac{1}{4\varkappa\sqrt{-g}} \left[g^{ks} \left(\frac{\partial g_{ls}}{\partial x^m} + \frac{\partial g_{ms}}{\partial x^l} - \frac{\partial g_{lm}}{\partial x^s} \right) \frac{\partial(\sqrt{-g}\, g^{lm})}{\partial x^i} - \right.$$
$$\left. - g^{ls} \frac{\partial g_{ls}}{\partial x^m} \frac{\partial(\sqrt{-g}\, g^{km})}{\partial x^i} \right]. \qquad (12.1)$$

Плотность энергии поля $\overline{\varepsilon}_g = -t_0^0$, причем

$$t_0^0 = \frac{G}{2\varkappa} + \frac{1}{4\varkappa\sqrt{-g}} \left[g^{0s} \left(\frac{\partial g_{ls}}{\partial x^m} + \frac{\partial g_{ms}}{\partial x^l} - \frac{\partial g_{lm}}{\partial x^s} \right) \frac{\partial(\sqrt{-g}\, g^{lm})}{\partial x^0} - \right.$$
$$\left. - g^{ls} \frac{\partial g_{ls}}{\partial x^m} \frac{\partial(\sqrt{-g}\, g^{0m})}{\partial x^0} \right]. \qquad (12.2)$$

Плотность потока энергии в случае плоской гравитационной волны (а на большом расстоянии от любого излучателя волну можно считать плоской), распространяющейся вдоль оси $x = x^1$, определяется соотношением

$$c\sqrt{-g}\, t_0^1 = \frac{c}{4\varkappa} \left[g^{1s} \left(\frac{\partial g_{ls}}{\partial x^m} + \frac{\partial g_{ms}}{\partial x^l} - \frac{\partial g_{lm}}{\partial x^s} \right) \times \right.$$
$$\left. \times \frac{\partial(\sqrt{-g}\, g^{lm})}{\partial x^0} - g^{ls} \frac{\partial g_{ls}}{\partial x^m} \frac{\partial(\sqrt{-g}\, g^{1m})}{\partial x^0} \right]. \qquad (12.3)$$

Поскольку все величины в плоской волне зависят от $x^1 = x$ $x^0 = ct$, то

$$\sqrt{-g}\, t_0^1 = \frac{1}{4\varkappa} \left[g^{1s} \left(\frac{\partial g_{ls}}{\partial x^0} \frac{\partial(\sqrt{-g}\, g^{0l})}{\partial x^0} + \frac{\partial g_{ls}}{\partial x^1} \frac{\partial(\sqrt{-g}\, g^{1l})}{\partial x^0} + \right. \right.$$
$$\left. + \frac{\partial g_{ms}}{\partial x^0} \frac{\partial(\sqrt{-g}\, g^{0m})}{\partial x^0} + \frac{\partial g_{ms}}{\partial x^1} \frac{\partial(\sqrt{-g}\, g^{1m})}{\partial x^0} \right) -$$
$$- \left(g^{01} \frac{\partial g_{lm}}{\partial x^0} \frac{\partial(\sqrt{-g}\, g^{lm})}{\partial x^0} + g^{11} \frac{\partial g_{lm}}{\partial x^1} \frac{\partial(\sqrt{-g}\, g^{lm})}{\partial x^0} + \right.$$
$$\left. \left. + g^{ls} \frac{\partial g_{ls}}{\partial x^0} \frac{\partial(\sqrt{-g}\, g^{01})}{\partial x^0} + g^{ls} \frac{\partial g_{ls}}{\partial x^1} \frac{\partial\sqrt{-g}\, g^{01})}{\partial x^0} \right) \right]$$

Так как в плоской волне (как будет показано ниже)

$$g^{00} = -1, \quad g^{11} = 1, \quad g^{22} \neq 1, \quad g^{33} \neq 1, \quad g^{23} \neq 1, \qquad (12.4)$$

причем $\frac{\partial^2 g_{22}}{\partial x^{02}} = -\frac{\partial^2 g_{33}}{\partial x^{02}}$ (см. § 16), то (12.4) принимает вид

$$-4\varkappa t_0^1 = \frac{\partial g_{lm}}{\partial x^1} \frac{\partial g^{lm}}{\partial x^0} + \frac{1}{2} \frac{\partial \ln g}{\partial x^1} \frac{\partial \ln g}{\partial x^0}.$$

В случае линеаризованной плоской волны компоненты g_{ik} имеют, как известно, следующие значения:

$$g_{00} = -1, \quad g_{11} = 0, \quad g_{22} = 1 + h_{22}, \quad g_{33} = 1 + h_{33}, \quad g_{23} = h_{23};$$

остальные компоненты g_{ik} равны нулю, при этом $h_{33} = -h_{22}$ и $h = h_i^i = 0$.

Вычисляя теперь t_0^1 с точностью до членов второго порядка, будем иметь (в линейном случае t_{ik} симметричен по индексам i, k)

$$t_{01} = t_0^1 = -\frac{1}{4\varkappa}\frac{\partial g_{lm}}{\partial x_1}\frac{\partial g_{lm}}{\partial x_0} = \frac{1}{4\varkappa}\frac{\partial h_{lm}}{\partial x^0}\frac{\partial h_{lm}}{\partial x^1} =$$

$$= \frac{1}{2\varkappa}\left(\frac{\partial h_{22}}{\partial x^0}\frac{\partial h_{22}}{\partial x^1} + \frac{\partial h_{23}}{\partial x^0}\frac{\partial h_{23}}{\partial x^1}\right). \quad (12.5)$$

Поскольку $h_{ik} = f(x - ct)$, то

$$\frac{\partial h_{ik}}{\partial x^1} = f^1, \qquad \frac{\partial h_{ik}}{\partial t} = -cf^1,$$

поэтому

$$\frac{\partial h_{ik}}{\partial x^1} = -\frac{1}{c}\frac{\partial h_{ik}}{\partial t} = -\frac{\dot{h}_{ik}}{c} = -\frac{\partial h_{ik}}{\partial x^0},$$

$$t_0^1 = -\frac{c^2}{16\pi G}(\dot{h}_{22}^2 + \dot{h}_{23}^2). \quad (12.6)$$

Так как $h_{22} = -h_{33}$, то для дальнейших преобразований удобно написать (12.6) в виде

$$t_0^1 = -\frac{c^2}{16\pi G}\left[\dot{h}_{23}^2 + \left(\frac{\dot{h}_{22} - \dot{h}_{33}}{2}\right)^2\right]. \quad (12.7)$$

В случае плоских волн $h_{ik} = \psi_{ik}$. Величины ψ_i^k в случае слабого поля определяются соотношением

$$\frac{1}{2}\Box\psi_i^k = -\frac{8\pi G}{c^4}T_i^k = -\varkappa T_i^k \quad (12.8)$$

[см. (5.1)], что является аналогом уравнения Пуассона, причем

$$\psi_\alpha^\beta = \frac{2G}{3rc^4}\ddot{D}_\alpha^\beta + \delta_\alpha^\beta A = h_\alpha^\beta \quad (12.9)$$

[см. (5.9)], где $A = \frac{2G}{3rc^4}\int \rho^* \, dv x_\gamma^2$.

Это соотношение позволяет выразить, например, поток энергии вдоль оси $x = x^1 t_0^1$ через квадраты третьих производных компонент тензора квадрупольного момента системы тел:

$$-t_{01} = -t_0^1 = t^{01} = \frac{G}{36\pi r^2 c^6}\left[\dddot{D}_{23}^2 + \left(\frac{\dddot{D}_{22} - \dddot{D}_{33}}{2}\right)^2\right] \qquad (12.10)$$

(точно так же можно вычислить поток энергии вдоль любой оси x^α).

Используемый здесь и ниже формализм был развит Ландау и Лифшицем, впервые получившими правильную общую формулу для вычисления потерь энергии системой ускоренно движущихся тел (обладающих квадрупольным моментом), переходящих в энергию гравитационных волн. В отличие от электромагнитного излучения, где имеет место дипольное излучение, гравитационное излучение носит квадрупольный характер.

Зная t_0^1 для плоской волны, можно легко определить излучение в произвольном направлении. Обозначим через η_α единичный вектор в этом направлении. Для этой цели составим из компонент тензора $\dddot{D}_{\alpha\beta}$ и вектора η_α скаляр, квадратичный по $\dddot{D}_{\alpha\beta}$, который при $n_1 = 1$, $n_2 = n_3 = 0$ переходил бы в выражение

$$\dddot{D}_{23}^2 + \left(\frac{\dddot{D}_{22} - \dddot{D}_{33}}{2}\right)^2.$$

Таким единственным скаляром является выражение

$$\frac{1}{4}(\dddot{D}_{\alpha\beta}\eta_\alpha\eta_\beta)^2 + \frac{1}{2}\dddot{D}_{\alpha\beta}^2 - \dddot{D}_{\alpha\beta}\dddot{D}_{\alpha\gamma}\eta_\beta\eta_\gamma = -\frac{36\pi c^6 r^2}{G}\hat{t}.$$

Интенсивность излучения в элементе телесного угла $d\omega$ определяется выражением $dI = c\hat{t}r^2 d\omega$, поэтому

$$dI = -\frac{G}{36\pi c^5}\left[\frac{1}{4}(\dddot{D}_{\alpha\beta}\eta_\alpha\eta_\beta)^2 + \frac{1}{2}\dddot{D}_{\alpha\beta}^2 - \dddot{D}_{\alpha\beta}\dddot{D}_{\alpha\gamma}\eta_\beta\eta_\gamma\right]d\omega, \qquad (12.11)$$

Далее очевидно, что энергия, теряемая согласно (12.11) на гравитационное излучение за единицу времени (мощность излучения) определяется соотношением

$$\frac{dE_g}{dt} = \dot{E}_g = \int dI = I. \qquad (12.12)$$

Поскольку мы рассматриваем изотропное излучение, достаточно усреднить правую часть (12.11) и результат умножить на 4π. Так как

$$\overline{\eta_\alpha\eta_\beta} = \frac{1}{3}, \quad \overline{\eta_\alpha\eta_\beta\eta_\gamma\eta_\delta} = \frac{1}{15}, \qquad (12.13)$$

то

$$\frac{1}{4}(\dddot{D}_{\alpha\beta}\eta_\alpha\eta_\beta)^2=\frac{2}{4\cdot 15}\dddot{D}^2_{\alpha\beta}=\frac{\dddot{D}^2_{\alpha\beta}}{30},\ \dddot{D}_{\alpha\beta}D_{\alpha\gamma}\eta_\beta\eta_\gamma=\frac{1}{3}\dddot{D}^2_{\alpha\beta}.$$

и

$$\int dI=-\frac{G\dddot{D}^2_{\alpha\beta}4\pi}{36\pi c^5}\left(\frac{1}{30}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)=-\frac{G\dddot{D}^2_{\alpha\beta}4\pi}{36\cdot 5\pi c^5},\qquad(12.14)$$

$$\dot{E}_g=-\frac{G\dddot{D}^2_{\alpha\beta}}{45c^5}.\qquad(12.15)$$

Мы пришли к соотношению (5.15), написанному нами ранее. Вычисляя t_0^0 для плоской волны, найдем

$$4\varkappa t_0^0=2G+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial lng}{\partial x^0}\right)^2+\frac{\partial g_{lm}}{\partial x^0}\frac{\partial g^{lm}}{\partial x^0}=2G+4\varkappa t_0^1.$$

Поскольку, как легко вычислить, $G=0$, то

$$t_0^0=t_0^1.\qquad(12.16)$$

В случае слабой волны

$$\begin{aligned}\varepsilon_g=t_0^0=-\bar{\varepsilon}_g=-\frac{1}{2\varkappa c^2}(\dot{h}^2_{22}+\dot{h}^2_{33})=\\=-\frac{c^2}{16\pi G}\left[\dot{h}^2_{23}+\left(\frac{\dot{h}_{22}-\dot{h}_{33}}{2}\right)^2\right]=\\-\frac{G}{36\pi r^2c^6}\times\left[\dddot{D}^2_{23}+\left(\frac{\dddot{D}_{22}-\dddot{D}_{33}}{2}\right)^2\right]=t_0^1,\end{aligned}\qquad(12.17)$$

где $\bar{\varepsilon}_g$ — плотность энергии в плоской слабой волне, ε_g — плотность гравитационной энергии, теряемой на излучение.

Давление гравитационного поля в плоской волне

$$-\frac{\varepsilon_g}{3}=P=\frac{\bar{\varepsilon}_g}{3}=\frac{c^2}{48\pi G}(\dot{h}^2_{23}+\dot{h}^2_{22}).\qquad(12.18)$$

Переходя к пределу для ньютоновского поля, надо положить $h_{23}=h_{22}=\frac{\varphi}{c^2}$, тогда

$$\varepsilon_g=-\frac{c^4}{16\pi G}\left[\left(\frac{\partial h_{23}}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial h_{22}}{\partial x}\right)^2\right]=-\frac{1}{8\pi G}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2.\qquad(12.19)$$

Поскольку плотность энергии является в пределе скалярной величиной, то для произвольной трехмерной волны

$$\varepsilon_g=-\frac{1}{8\pi G}(\nabla\varphi)^2,\qquad(12.20)$$

что, естественно, совпадает с найденным ранее выражением (2.40), где величина $-\frac{(\nabla\varphi)^2}{8\pi G}$ дает вклад гравитационного поля в полную плотность энергии поля и материи.

Далее мы рассмотрим некоторые свойства гравитационных волн произвольной амплитуды. Сейчас же укажем только на то, что основное положение относительно квадрупольного характера излучения волн справедливо в общем случае для волн любой амплитуды. Легко убедиться в том, что утверждение о квадрупольном характере излучения волн равносильно утверждению об излучении волн телами, движущимися с ускорениями.

В самом деле, поскольку $D = D_\alpha^\alpha \sim ml^2$, то $\ddot{D} \sim m(3ug + l\dot{g})$, где $\dot{l} = u$, $\ddot{l} = \dot{u} = g$. Если $g \neq 0$, то $\dddot{D} \neq 0$ и излучение волн имеет место.

§ 13. Основные модификации t_i^k

Некоторые положения общей теории относительности, связанные с некорректностью и противоречиями в определении t_i^k и формулировке законов сохранения, породили ряд работ, в которых выбиралось иное выражение для t_i^k, чем то, которое было установлено Эйнштейном и записано нами в предыдущем параграфе.

Вычислим псевдотензор поля, введенный Ландау и Лифшицем. Напишем выражение для *

$$(-g)(T^{ik} + t^{ik}) = \frac{\sqrt{-g}}{2\varkappa} g^{ir} \frac{\partial \chi_r^{kl}}{\partial x^l} + \frac{\chi_r^{kl}}{2\varkappa} \frac{\partial(\sqrt{-g}\, g^{ir})}{\partial x^l} = \frac{1}{2\varkappa} \frac{\partial}{\partial x^l} \left(\sqrt{-g}\chi^{ikl}\right), \quad (13.1)$$

где

$$\sqrt{-g}\chi^{ikl} = g^{ir} g_{rn} \frac{\partial}{\partial x^m} [(-g)(g^{kn}g^{lm} - g^{ln}g^{km})] = \frac{\partial}{\partial x^m} [(-g)(g^{ik}g^{lm} - g^{il}g^{km})]. \quad (13.2)$$

Мы подобрали очевидным методом контрвариантный антисимметричный по индексам k, l псевдотензор χ^{ikl} для контрвариантных величин $T^{ik} + t^{ik}$, причем $\frac{\partial(\sqrt{-g}\chi^{ikl})}{\partial x^k \partial x^l} = 0$. В этом случае псевдотензор t^{ik} оказывается симметричным по индексам

* В случае линейных преобразований можно выполнять операции вида $t_{ir} = t_i^k g_{kr}$.

i, k, что позволяет сформулировать закон сохранения полного 4-х момента импульса:

$$M^{ik} = \int (x^i dp^k - x^k dp^i), \tag{13.3}$$

где

$$p^i = \frac{1}{c} \int (-g)\,(T^{ik} + t^{ik})\, dS_k \tag{13.4}$$

есть 4-х импульс.

Из (13.1) и (13.2) имеем

$$(-g)\,(T^{ik} + t^{ik}) = \frac{1}{2\varkappa} \frac{\partial^2}{\partial x^l \partial x^m} [(-g)\,(g^{ik}g^{lm} - g^{il}g^{km})]. \tag{13.5}$$

Очевидно, что

$$t^{ik} = \frac{g^{ik}}{2\varkappa} G + \frac{g^{ir}}{2\varkappa \sqrt{-g}} \left[\Gamma^k_{lm} \frac{\partial (\sqrt{-g} g^{lm})}{\partial x^r} - \right.$$
$$\left. - \Gamma^l_{ml} \frac{\partial (\sqrt{-g}\, g^{km})}{\partial x^r} \right] + \frac{1}{2\varkappa (-g)} \frac{\partial}{\partial x^m} [(-g) \times$$
$$\times (g^{kn}g^{lm} - g^{ln}g^{km})] \frac{\partial g_{rn}}{\sqrt{-g}} \frac{\partial (\sqrt{-g}\, g^{ir})}{\partial x^l}. \tag{13.6}$$

Вывод, данный Ландау и Лифшицем, несколько более громоздкий и приводит для t^{ik} к следующему выражению:

$$t^{ik} = \frac{1}{2\varkappa} [(2\Gamma^n_{lm}\Gamma^p_{np} - \Gamma^n_{lp}\Gamma^p_{mn} - \Gamma^n_{ln}\Gamma^p_{mp})\,(g^{il}g^{km} - g^{ik}g^{lm}) +$$
$$+ g^{il}g^{mn}\,(\Gamma^k_{lp}\Gamma^p_{mn} + \Gamma^k_{mn}\Gamma^p_{lp} - \Gamma^k_{np}\Gamma^p_{lm} - \Gamma^k_{lm}\Gamma^n_{np}) +$$
$$+ g^{kl}g^{mn}\,(\Gamma^i_{lp}\Gamma^p_{mn} + \Gamma^i_{mn}\Gamma^p_{lp} - \Gamma^i_{np}\Gamma^p_{lm} - \Gamma^i_{lm}\Gamma^p_{np}) +$$
$$+ g^{lm}g^{np}\,(\Gamma^i_{ln}\Gamma^k_{mp} - \Gamma^i_{lm}\Gamma^k_{np})]. \tag{13.7}$$

Величины $(-g)\,(T^{ik} + t^{ik})$ не являются афинной тензорной плотностью, поэтому они не преобразуются как тензор (вектор) при общих линейных координатных преобразованиях, как это справедливо заключает Меллер (это имеет место только при ортогональных преобразованиях). В самом деле, поскольку

$$\sqrt{-g}\,(T^k_i + t^k_i) = \frac{g_{ir}}{2\varkappa \sqrt{-g}} (\sqrt{-g}\chi^{rkl}),$$

$$\frac{\partial}{\partial x^k} [\sqrt{-g}\,(T^k_i + t^k_i)] = \frac{1}{2\varkappa} \frac{\partial}{\partial x^l} (\sqrt{-g}\chi^{rkl}) \frac{\partial}{\partial x^k} \frac{g_{ir}}{\sqrt{-g}} \neq 0.$$

Поэтому также разность $2\varkappa\,(-g)\,(t^{ik}_{\text{л}} - t^{ik}_{\text{э}}) \neq \frac{\partial}{\partial x^l} \psi^{ikl}$. Этот симметричный псевдотензор единственный не содержащий производных старше первого порядка. Заметим, что все недостатки, присущие псевдотензору Эйнштейна, сохраняются и при записи t^{ik} в форме, данной Ландау и Лифшицем.

Симметризовать псевдотензор и требовать выполнения законов сохранения момента количества движения — операция бесполезная и противоестественная, поскольку риманово пространство полностью неоднородно и в нем заведомо не могут выполняться законы сохранения, а могут существовать лишь четыре тождества для $(T_i^k + t_i^k)$. Поскольку теперь

$$\sqrt{-g}\chi^{i0\alpha} = \frac{\partial}{\partial x^m}[(-g)(g^{i0}g^{\alpha m} - g^{i\alpha}g^{0m})],$$

то

$$(-g)\, cp^i = \frac{1}{2\varkappa}\int \frac{\partial}{\partial x^m}[(-g)(g^{i0}g^{\alpha m} - g^{i\alpha}g^{0m})]\, df_\alpha. \tag{13.8}$$

Для слабого шварцшильдовского поля

$$(-g)\, cP^i = \frac{1}{2\varkappa}\int \frac{\partial}{\partial x^\beta}[(-g)(g^{i0}g^{\alpha\beta})]\, df_\alpha. \tag{13.9}$$

Отсюда, полагая, что $(-g) = 1$, найдем:

$$cP^\gamma = 0,\ cP^0 = \frac{1}{2\varkappa}\int \frac{\partial}{\partial x^\beta}(g^{00}g^{\alpha\beta})\, df_\alpha = -mc^2 = -E_0,$$

$$cP_0 = E_0.$$

В случае космологических моделей получаем результаты, во всем аналогичные рассмотренным выше, с применением псевдотензора (11.12).

Меллер и Мицкевич (независимо друг от друга) написали псевдотензор t_i^k иначе, введя в него вторые производные по координатам, так, чтобы в инерциальной системе отсчета энергия поля и гравитационных волн не обращалась в нуль. Не приводя их вывода, связанного с вариацией не $\frac{\sqrt{-g}\,G}{2\varkappa}$, а $\frac{\sqrt{-g}\,R}{2\varkappa}$ (см. далее), прямо напишем, что

$$\sqrt{-g}\,(T_i^k + t_i^k) = \frac{1}{2\varkappa}\frac{\partial \chi_i^{kl}}{\partial x^l},$$

где

$$\chi_i^{kl} = 2g^{kn}g^{lm}\sqrt{-g}\left(\frac{\partial g_{im}}{\partial x^n} - \frac{\partial g_{in}}{\partial x^m}\right), \tag{13.10}$$

причем, как очевидно, $\frac{\partial^2 \chi_i^{kl}}{\partial x^k \partial x^l} = 0.$

Величины t_i^k можно записать в виде

$$t_i^k = \frac{R}{2\varkappa}\,\delta_i^k + \hat{t}_i^k,$$

где

$$\varkappa\hat{t}_i^k = \left(\frac{\partial\Gamma_{il}^l}{\partial x^n}\,g^{kn} - \frac{\partial\Gamma_{il}^k}{\partial x^n}\,g^{ln}\right) + \left(g^{nm}\Gamma_{il}^k\Gamma_{nm}^l - g^{ln}\Gamma_{in}^m\Gamma_{lm}^k\right). \tag{13.11}$$

Поскольку $T_i^k = \frac{1}{\varkappa}\left(R_i^k - \frac{1}{2}\,\delta_i^k R\right)$, то уравнение (13.10) можно написать в виде

$$\sqrt{-g}\left(\frac{R_i^k}{\varkappa} + \hat{t}_i^k\right) = \frac{1}{2\varkappa}\,\frac{\partial\chi_i^k}{\partial x^l}, \tag{13.12}$$

откуда легко вычисляется

$$\varkappa\hat{t}_i^k = -R_i^k + \frac{\partial\chi_i^{kl}}{2\sqrt{-g}\,\partial x^l} = \frac{1}{2}\left(g^{km}\,\frac{\partial\Gamma_{lm}^l}{\partial x_i} - g^{ml}\,\frac{\partial\Gamma_{ml}^k}{\partial x^i}\right) +$$

$$+\frac{1}{2}\,\frac{1}{\sqrt{-g}}\,\frac{\partial}{\partial x^l}\left[\sqrt{-g}\,g^{kn}g^{lm}\left(\frac{\partial g_{im}}{\partial x^n} - \frac{\partial g_{in}}{\partial x^m}\right)\right]. \tag{13.13}$$

Так как

$$\chi_i^{0\alpha} = 2g^{0n}g^{\alpha m}\sqrt{-g}\left(\frac{\partial g_{im}}{\partial x^n} - \frac{\partial g_{in}}{\partial x^m}\right), \tag{13.14}$$

то

$$cP_i = \frac{1}{\varkappa\sqrt{-g}}\int g^{0n}g^{\alpha m}\sqrt{-g}\left(\frac{\partial g_{im}}{\partial x^n} - \frac{\partial g_{in}}{\partial x^m}\right)df_\alpha. \tag{13.15}$$

Для слабого шварцшильдовского поля будем иметь

$$cP_i = -\frac{1}{\varkappa\sqrt{-g}}\int\sqrt{-g}\,g^{00}g^{\alpha\beta}\,\frac{\partial g_{i0}}{\partial x^\beta}\,df_\alpha, \tag{13.16}$$

откуда

$$cP_\gamma = 0,$$

$$-cP_0 = \frac{1}{\varkappa\sqrt{-g}}\int\sqrt{-g}\,g^{00}g^{\alpha\beta}\,\frac{\partial g_{00}}{\partial x^\beta}\,df_\beta =$$

$$= \frac{1}{\varkappa}\int\frac{\partial g_{00}}{\partial x^\beta}\,df^\beta = mc^2 = E_0.$$

В этом варианте записи t_i^k при вычислении cP_i можно не полагать $\sqrt{-g} = 1$, что является существенным преимуществом данного метода. В случае космологических моделей снова получатся нелепые результаты.

Меллер при выводе своего выражения использовал не только вариационный формализм (тогда бы значение χ_i^{kl} оказалось в два раза меньше, в чем мы ниже убедимся), но и условие равенства $-cP_0$ полной энергии. Как мы увидим далее, в этом и состоит существенный недостаток формализма Меллера (и Мицкевича).

Если Меллера этот формализм устраивал, то Мицкевич от него отказался, делая попытки построить не псевдотензор, а истинный тензор поля. Были попытки усложнить псевдотензор Меллера — Мицкевича, внося в него дополнительные члены, что вообще довольно бесполезно.

Поиски в решении общей теории относительности «истинного тензора гравитационного поля» обречены на неудачу, как и поиски законов, а не тождеств сохранения. Риманово пространство не обладает никакой симметрией, поэтому уравнения поля не допускают никакой группы преобразований координат, а следовательно, законы сохранения нельзя по теореме Нетер представить в виде интегралов системы уравнений. Нет групп преобразований, нет законов сохранения, а есть лишь тривиальные тождества. Гравитационные взаимодействия не обладают никакой симметрией; они являются минимальными взаимодействиями во Вселенной, если их рассматривать в рамках общей теории относительности. Следовательно, гравитационное поле принципиально не может быть описано каким-либо тензором. Его можно описывать лишь псевдотензором.

Поиски псевдотензора поля, симметричного по индексам i, k и дающего возможность сформулировать законы сохранения полного 4-х момента импульса, также, как мы видели, обречены на неудачу. Поскольку выражение Ландау — Лифшица (13.5) единственное (с первыми производными) и не является афинным тензором, то оно не годится для общих линейных преобразований координат, а пригодно только для ортогональных преобразований и, следовательно, оно вообще не выражает инвариантных законов сохранения в общем виде, в чем мы уже убедились выше. (Можно попытаться симметризовать t_i^k со вторыми производными, но вряд ли это следует делать в неоднородном пространстве.)

Попытки различных авторов идти по пути спекулятивного выбора t_i^k (пользуясь кажущимся «произволом» в его определении) вызывают только удивление. Некоторого внимания среди них заслуживает лишь вариант Меллера — Мицкевича, хотя ниже мы и его подвергнем критике.

§ 14. Анализ моделей нашей Вселенной, предложенных Эйнштейном и Фридманом

Модели нашей Вселенной, созданные Фридманом, как статические, так и динамические играют существенную роль в понимании общих ее свойств, но при их анализе можно натолкнуться на существенные противоречия аналитического и общепознавательного значения.

Рассмотрим в основном именно формальную сторону вопроса, тогда анализ его познавательной стороны станет проще и отпадут кажущиеся противоречия между позициями диалектического материализма и общей теории относительности.

Эйнштейн построил статическую модель Вселенной. В ней (см. § 9), как мы знаем, давление получалось отрицательным, что в общем объяснимо. Однако Эйнштейн модифицировал свой формализм уравнений поля, написав их в виде

$$R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik}R = \varkappa T_{ik} + \lambda g_{ik}. \tag{14.1}$$

Поскольку $g_{ik;k} = 0$, то тождества Бианки сохраняются и сохраняются уравнения движения. Заметим, что λ-член непосредственно из вариационного формализма не появляется, хотя и не противоречит ему; он вводится ad hoc. Уравнения статической модели нашей Вселенной при этом принимают вид

$$\frac{3}{a^2} = \varkappa\varepsilon - \lambda, \qquad \frac{1}{a^2} = -(\varkappa p + \lambda). \tag{14.2}$$

Отсюда

$$\lambda = -\frac{\varkappa}{2}(\varepsilon + 3p), \qquad \varepsilon + p = \frac{2}{\varkappa a^2}; \tag{14.3}$$

при этом давление может быть любым. В пределе при $p \ll \varepsilon$

$$\lambda = -\frac{\varkappa}{2}\varepsilon, \qquad \varepsilon = \frac{2}{\varkappa a^2}. \tag{14.4}$$

Как первая модель (при $\lambda = 0$), так и вторая (при $\lambda \neq 0$) в общем неудовлетворительны, поскольку они противоречат наблюдательным данным, хотя и внутренне непротиворечивы, в чем их большое достоинство. Так как λ-член вряд ли имеет смысл, то наиболее интересна первая модель. Ее можно несколько развить. При $\lambda = 0$ модель Эйнштейна в центральной системе отсчета представляет «звезду» с $r = r_g$ без градиента давления с уравнением состояния $3p + \varepsilon = 0$.

Будем понимать под T_i^k сумму двух тензоров: ${}_1T_i^k + {}_2T_i^k$, где ${}_1T_i^k$ относится к материи с массой покоя, не равной нулю, а ${}_2T_i^k$ — к материи с массой покоя, равной нулю. Тогда получим уравнения

$$\frac{3}{a^2} = \varkappa\,(\varepsilon_1 + \varepsilon_2), \qquad \frac{1}{a^2} = -\varkappa\,(p + {}_2T_1^1), \tag{14.5}$$

причем

$$3{}_2T_1^1 + {}_2T_0^0 = {}_2T = 0,$$

поэтому

$${}_2T_1^1 = -\frac{{}_2T_0^0}{3} = \frac{\varepsilon_2}{3}.$$

Таким образом,

$$\frac{1}{a^2} = -\varkappa\left(p + \frac{\varepsilon_2}{3}\right) = \frac{\varkappa}{6}\,(\varepsilon_1 - 3p).$$

Теперь можно легко получить, что

$$\varepsilon_2 = -\frac{\varepsilon_1 + 3p}{2}. \tag{14.6}$$

Полная плотность энергии

$$\varepsilon_0 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \frac{\varepsilon_1 - 3p}{2} = \frac{c^2}{2v}\,\bar{\beta}, \tag{14.7}$$

где при уравнении состояния среды $pv^k = \mathrm{const}$,

$$\bar{\beta} = 1 + \frac{pv\,(4 - 3k)}{(k-1)\,c^2} \approx 1,$$

v — удельный объем. Очевидно, что полная энергия

$$E_0 = V\varepsilon_0 = \frac{c^2V}{2v}\,\bar{\beta} = \frac{Mc^2}{2}\,\bar{\beta}, \tag{14.8}$$

что при $p = 0$ дает

$$E_0 = \frac{Mc^2}{2} = \frac{E_{\text{м}}}{2}, \tag{14.9}$$

где $E_{\text{м}} = Mc^2$ — энергия среды, M — полная масса среды во Вселенной. Отсюда также следует, что энергия «полей»

$$E_{\text{п}} = -\frac{E_{\text{м}}}{2} = -\frac{Mc^2}{2} = E_0 - E. \tag{14.10}$$

Воспользовавшись соотношением Толмана (см. § 11) и заменяя $E_{\text{м}}$ на $E_0 = \int \sqrt{-g}\,(T_\alpha^\alpha - T_0^0)\,dv$, найдем, что при законе (14.6) $v \to \infty$, $\varepsilon = 0$. Таким образом, данная модель Вселенной при $\lambda = 0$ лишена смысла.

Как известно, электромагнитная энергия электрона

$$\bar{E}_э = \frac{3}{4}\,\bar{E}_м = \frac{3}{4}\,\bar{m}c^2, \qquad (14.11)$$

где $\bar{m}$ — масса покоя электрона (понимаем под электромагнитной энергией электрона $\bar{E}_э = \bar{E}_0 = E_0/N$, где N — число электронов (частиц) во Вселенной). У нас же $\bar{E}_\alpha = \frac{1}{2}\,mc^2$.

Вводя вновь λ-член в уравнения, можно его выбрать так, чтобы выполнялось соотношение $\bar{E}_\alpha = \frac{3}{4}\bar{m}c^2$. В самом деле, напишем уравнения (14.2) в виде

$$\frac{3}{a^2} = \varkappa(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) - \lambda, \qquad \frac{1}{a^2} = -\left[\varkappa\left(p + \frac{\varepsilon_2}{3}\right) + \lambda\right]. \qquad (14.12)$$

Пусть

$$\varepsilon_2 = -\frac{\varepsilon_1 + 9p}{4},$$

отсюда

$$\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2 + 3p = -\frac{2\lambda}{\varkappa}, \qquad \frac{3}{a^2} = -2\lambda + \frac{\varkappa}{2}(\varepsilon_1 - 3p). \qquad (14.13)$$

Тогда

$$\lambda = \frac{\varkappa}{4}(3p - \varepsilon_1) = -\frac{3}{4a^2} + \frac{9\varkappa p}{8}, \qquad \varepsilon_1 = \frac{3}{\varkappa a^2} - \frac{3p}{2}, \qquad (14.14)$$

а также следует, что $\lambda = -R/8$, $R = -2\varkappa T$.

Полная плотность энергии

$$\varepsilon_0 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \frac{3}{4}\left(\varepsilon_1 - \frac{3}{4}p\right),$$

откуда следует, что

$$\bar{E}_э = \frac{3}{4}\,\bar{E}_м. \qquad (14.15)$$

Похожую методику расчета электромагнитной энергии заряженных частиц (учитывая вклад электромагнитного поля) использовал сам Эйнштейн. Мы упростили его выкладки, однако, помимо использования необоснованного λ-члена, эта методика нехороша тем, что учет всех уравнений гравитационного и электромагнитного полей указывает на невозможность подобного статического распределения полей и материи.

Вообще говоря, статические модели Вселенной вряд ли имеют отношение к нашей реальной области Вселенной. Заметим, что если в уравнении (14.12) заменить a^2 на $-a^2$, то мы придем к модели гиперболической статической Вселенной, на возможность существования которой при определенных значениях λ впервые указал Фридман. При этом $\lambda \geqslant \frac{\varkappa}{4}(\varepsilon_1 - 3p)$.

Перейдем к критическому рассмотрению динамических моделей Вселенной Фридмана. Рассмотрим сначала промежуточный случай — модель квазиевклидовой Вселенной. Для нее имеем

$$ds^2 = b^2(\eta)\,[d\eta^2 - d\chi^2 - \chi^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)], \qquad (14.16)$$

причем

$$bd\eta = cd\tau,\; bd\chi = b_0 dr,\; b\chi = b_0 r = l, \qquad (14.17)$$

где $b_0 = b_0(\tau)$ — безразмерный масштабный фактор, l — расстояние.

Можно также написать

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 - b_0^2(\tau)\,[dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)], \qquad (14.18)$$

или

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 - b_0^2(\tau)(dx^2 + dy^2 + dz^2), \qquad (14.19)$$

где x, y, z — лагранжевы координаты обычного трехмерного Евклидова пространства, r — также лагранжева координата.

В самом деле, наша система координат является сопутствующей (собственной), а для нее время τ и координата r выбраны именно так, что сферическая поверхность $r = \mathrm{const}$ движется вместе с веществом, лежащим на этой поверхности.

Рассмотрим радиальные движения; тогда $d\theta = 0$, $d\varphi = 0$ и

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 - b_0^2 dr^2. \qquad (14.20)$$

Для луча света (фотонов) и любых частиц с массой покоя, равной нулю, $ds = 0$, поэтому

$$cd\tau = \pm b_0 dr. \qquad (14.21)$$

Скорость их движения, очевидно, есть

$$c = \pm \frac{b_0 dr}{d\tau}. \qquad (14.22)$$

Для фотона и частицы с $m_0 = 0$, вылетевшей из точки $l = 0$, в начальный момент разлета $r = r_0 = \mathrm{const}$, поэтому $dr = 0$ и $d\tau = 0$. Скорость (в собственной системе отсчета) любой фиксированной частицы (для которой $r = r^* = \mathrm{const}$) определится из соотношения

$$v^* = \frac{\partial}{\partial\tau}(b_0 r^*) = r^* \frac{db_0}{d\tau} = r^* \dot{b}_0. \tag{14.23}$$

Поскольку скорость «первой» вылетевшей частицы не должна превышать c и в пределе должна к ней стремиться, то для

$$r^* = r_0, \qquad v^* = c = s_0 \dot{b}_0, \tag{14.24}$$

откуда следует, что

$$\dot{b}_0 = \frac{c}{r_0}, \qquad b_0 = \frac{c\tau}{r_0}. \tag{14.25}$$

Отсюда и из (14.15) следует, что

$$\frac{v^*}{c} = \frac{r^*}{r_0}. \tag{14.26}$$

Так как для «первой частицы» (для частицы на фронте разлета) вся наша Вселенная находится «позади», то, применяя решение задачи Шварцшильда [см. (8.19)], будем иметь ($d\varphi = 0$)

$$\left(\frac{dr}{ds}\right)^2 + \left(1 - \frac{r_0}{r}\right) = A_1^2, \tag{14.27}$$

где $r_0 = \frac{2GM}{c^2}$, M — масса Вселенной.

Поскольку $ds = \frac{cdt}{A_1}\left(1 - \frac{r_0}{r}\right)$, то уравнение принимает вид

$$\left(\frac{dr}{cdt}\right)^2 = \left(1 - \frac{r_0}{r}\right)^2 \left(1 - \frac{1 - \frac{r_0}{r}}{A_1^2}\right) \text{ при } ds = 0, \ A_1 \to \infty,$$

$$\frac{dr}{cdt} = 1 - \frac{r_0}{r}$$

или $\frac{dr^*}{cd\tau} = 1$, где $d\tau = dt\sqrt{1 - \frac{r_0}{r}}$ — истинное (собственное) время:

$$dr^* = \frac{dr}{\sqrt{1 - \frac{r_0}{r}}}. \tag{14.28}$$

Отсюда следует, что $v = c$, где $v = \frac{dr^*}{d\tau}$ — скорость с массой покоя, равной нулю. Таким образом, предельная постоянная скорость действительно равна фундаментальной скорости света c. Итак, мы пришли к выводу, что $b_0(\tau) = c\tau/r_0$. Из фридмановского решения (9.35), (9.36) следует, что вблизи начала разлета

$b_0 \sim \tau^{1/2}$; с увеличением времени $b_0 \sim \tau^{2/3}$. Это противоречие отчасти вызвано тем, что мы применяем различные системы отсчета.

Из (14.15) будем иметь

$$v^* = r^*\dot{b}_0 = nr^* \frac{b_0^*\tau^{n-1}}{\tau^{*n}}, \tag{14.29}$$

где

$$b_0 = b_0^*\left(\frac{\tau}{\tau^*}\right)^n. \tag{14.30}$$

Очевидно, что эта скорость будет для фиксированного b_0^* изменяться со временем. При $\tau \to 0$, поскольку $n < 1$, $v^* \to \infty$, что как будто бы абсурдно. Можно утверждать, что виной этому является собственное время τ. Чтобы избавиться от скоростей $v^* > c$, следует использовать условное время

$$d\bar{\tau} = \frac{d\tau}{\sqrt{1 - \frac{\hat{v}^2}{c^2}}},$$

где $\hat{v} = r^* \frac{db_0}{d\hat{\tau}}$.

Тогда $\hat{v} = r^* \frac{db_0}{d\tau}\frac{d\tau}{d\hat{\tau}} = v^*\sqrt{1 - \frac{\hat{v}^2}{c^2}}$,

откуда

$$\frac{\hat{v}}{c} = \frac{\frac{v^*}{c}}{\sqrt{1 + \frac{v^{*2}}{c^2}}} \leqslant 1.$$

Однако если переменно v^*, то переменно и v, поэтому и в этой условной системе измерения времени скорость расширения (разлета первых частиц) будет также переменной. Но всегда можно выбрать такую модель Вселенной, что в центральной системе отсчета времена и расстояния $d\tau$ и dr^* или $d\tau^* = \sqrt{1 - \frac{r_0}{r}}\, d\tau = \left(1 - \frac{r_0}{r}\right) dt$ и dr, такие, что скорость «границы» будет равна c. Однако и при этом закон расширения не будет равномерным ($a \neq c\tau$), а распределение вещества однородным.

Совершенно аналогичные выводы можно сделать и для двух других моделей нашей Вселенной — эллиптической и гиперболической.

Поскольку фридмановские решения являются особыми (частными), то как будто бы нет необходимости требовать выполнения граничных условий — прямолинейность первой характеристики и совпадение ее с траекторией первой частицы, или решать задачу Коши. Но для этого в моделях f_2 и f_3 надо допустить, как это часто делают, что при $\tau = 0$ $\rho \to \infty$ во всем бесконечном пространстве. Однако это предложение не только философски, но и физически в общем мало оправдано. Если считать, что при $\tau = 0$ $\rho \to \infty$ только в точке, тогда для всех типов моделей Фридмана в центральной системе отсчета надо требовать решения задачи Коши, поскольку началось расширение в пустоту, которое должно происходить по законам релятивистской газовой динамики. Но модели Фридмана этому требованию не удовлетворяют и фактически описывают «пульсирующие» или расширяющиеся «звезды».

Более реальные модели должны описываться сложной «отраженной волной», сопрягающейся с тонким слоем первой квазипростой волны, на переднем фронте которой $p \to 0$. Причем при $\varkappa = \mathrm{const}$ распределение плотности энергии в волнах будет весьма неоднородно.

Можно с полным основанием утверждать, что модели Фридмана, являясь весьма полезными для нашего познания Метагалактики, поскольку в них установлено ее расширение, не могут претендовать на полное описание свойств не только «всей Вселенной», но даже и Метагалактики.

Далее следует отметить, что использование сопутствующих систем отсчета и сопутствующих пространств не позволяет однозначно, без дополнительного анализа делать какие-либо выводы об истинных свойствах пространства, и поэтому, например, рассуждения о единственности во Вселенной «эллиптической» Вселенной Эйнштейна — Фридмана совершенно не основательны.

Легко исследовать осесимметричные модели нашей Вселенной и ввести в рассмотрение электромагнитное поле.

Посмотрим теперь, что может дать учет частиц с массой покоя, равной нулю. (Учет λ-члена бесполезен, поскольку при этом в изотропной Вселенной заведомо не могут получиться законы $b \sim \tau$ и $a \sim \tau$.)

Напишем снова основные уравнения (9.16), описывающие нестационарную изотропную нашу Вселенную с учетом тензора материи ${}_2T_i^k$. Поскольку ${}_2T_1^1 = -\frac{1}{3}\,{}_2T_0^0 = \frac{1}{3}\varepsilon_2$, то эти уравнения имеют вид

$$\frac{3}{a^2}\left(\beta_1 + \frac{\dot{a}^2}{c^2}\right) = \varkappa(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) = -\left[\varkappa(3p + \varepsilon_2) + \frac{6a\ddot{a}}{c^2a^2}\right]. \quad (14.31)$$

Полная плотность энергии

$$\varepsilon_0 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \frac{E_0}{V} = \frac{E_0}{2\pi^2 a^3 \beta_2}. \tag{14.32}$$

Так как $T_2 = 0$, то

$$-T_1 = \varepsilon_1 - 3p = \frac{c^2}{V}\bar{\beta} = \frac{E_{\text{м}}^*}{V}, \tag{14.33}$$

где $E_{\text{м}}^*$ — полная энергия вещества.

Эти выражения должны удовлетворять уравнениям сохранения

$$({}_1T_i^k + {}_2T_i^k)_{;\,k} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x^k}[\sqrt{-g}\,({}_1T_i^k + {}_2T_i^k)] - \\ -\frac{1}{2}\frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i}({}_1T^{kl} + {}_2T^{kl}) = 0. \tag{14.34}$$

При $i = 0$ будем иметь

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x^0}[\sqrt{-g}\,({}_1T_0^0 + {}_2T_0^0)] = \frac{1}{2}g^{mk}\frac{\partial g_{kl}}{\partial x^0}({}_1T_m^l + {}_2T_m^l) = \\ = \frac{1}{2}\left[g^{00}\frac{\partial g_{00}}{\partial x^0}({}_1T_0^0 + {}_2T_0^0) + 3g^{11}\frac{\partial g_{11}}{\partial x^0}({}_1T_1^1 + {}_2T_1^1)\right]$$

или

$$\frac{d}{da}[aE_0] = E_{\text{м}}^*,$$

что дает

$$E_0 = E_{\text{м}}^*. \tag{14.35}$$

Отсюда следует, что $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \varepsilon - 3p$, т. е., что ${}_2T_0^0 = -\varepsilon_2 = 3p = -3\,{}_2T_1^1$ или ${}_2T_1^1 = -p$. При $i = 1, 2, 3$ уравнение (14.34) выполняется тождественно. Таким образом, уравнения (14.31) примут вид

$$\frac{3}{a^2}\left(\beta_1 + \frac{\dot{a}^2}{c^2}\right) = \varkappa(\varepsilon_1 - 3p) = -\frac{6a\ddot{a}}{c^2a^2} = \frac{\varkappa E_0}{2\pi^2 a^3\beta_2}. \tag{14.36}$$

Отсюда имеем

$$\beta_1 + \frac{\dot{a}^2}{c^2} + \frac{2a\ddot{a}}{c^2} = 0,$$

т. е. мы приходим к уравнению, аналогичному последнему уравнению (9.17), описывающему движение «границы» при $T_2 = 0$ для $p = 0$. Решение этого уравнения мы уже знаем. При этом уравнение

$$\frac{\varkappa E_0}{2\pi^2 a^3 \beta_2} \equiv -\frac{6a\ddot{a}}{c^2a^2} \equiv \frac{3}{a^2}\left(\beta_1 + \frac{\dot{a}^2}{c^2}\right)$$

выполняется тождественно.

Мы видим, что при введении ${}_2T_i^k$ весьма естественно описываются все три модели нашей Вселенной, причем охватывается весь интервал изменений a (или τ). Однако при этом скорость расширения пространства снова оказывается переменной. Если в уравнениях (14.31) положить $\frac{\dot{a}}{c} = \text{const} = \frac{1}{\chi_0}$, где χ_0 — значение χ на границе, то будем иметь

$$\frac{3}{a^2}\left(1 + \frac{1}{\chi_0^2}\right) = \varkappa(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) = -\varkappa(3p + \varepsilon_2),$$

откуда

$$\varepsilon_2 = -\frac{\varepsilon_1 + 3p}{2}, \quad \varepsilon_0 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \frac{\varepsilon_1 - 3p}{2} = \frac{c^2\beta}{2v} = \frac{E_{\text{м}}^*}{2V} = \frac{E_0}{V}$$

и

$$E_0 = \frac{E_{\text{м}}}{2}, \qquad E_2 = -\frac{E_{\text{м}}}{2}.$$

Но при этом, если положить $\varepsilon_0 \sim a^{-3}$, уравнения (14.34) уже не будут выполняться. И наоборот, требуя их выполнения, мы не получим закона сохранения $\varepsilon_0 \sim a^{-3}$; его заменит нелепый закон $\varepsilon_0 \sim a^{-2}$. Все это заставляет отказаться от попытки одним только введением ${}_2T_i^k$ описать динамические модели Вселенной с постоянной скоростью расширения (так как при этом нарушаются законы сохранения).

Следует заметить, что космогонические модели, по сути говоря, описываются уравнениями релятивистской газодинамики в собственном поле тяжести (в римановом пространстве).

Были сделаны (и продолжаются) попытки построения неизотропных и неоднородных моделей нашей Вселенной без особых точек во времени; в этих моделях в различных системах отсчета не получается скоростей больше скорости света. Однако это — приближенные попытки (в них используются приближенные методы решения основных уравнений), и мы сейчас на них останавливаться не будем.

§ 15. Предварительный анализ полученных результатов

Подведем некоторые итоги. Достоинства «стандартной» общей теории относительности, основные положения и закономерности которой мы изучали выше, вполне очевидны. Эта теория вполне точно описывает закономерности движения космических объектов во взаимных полях тяготения. В какой-то мере она описывает некоторые свойства нашей Вселенной, например «разбегание» внегалактических объектов, и помогает установить основные черты их общего происхождения. Однако модели Вселенной оказываются некорректными, поскольку при их построении не выполняются газодинамические условия — постоянство скорости разлета, или, говоря на языке теории дифференциальных уравнений, первая характеристика не оказывается прямолинейной в собственной системе отсчета. А при разлете в пустоту она непременно должна быть прямолинейной.

В самом деле, во всех динамических моделях Фридмана $\ddot{a} \neq 0$, $\dot{a} \neq c\tau$, а следовательно, например, в случае квазиевклидова пространства f_2 скорость расширения непостоянна. То же имеет место и для пространств f_1 и f_3. Существенным недостатком является также неясность в законах сохранения материи и гравитационного поля и невозможность существования гравитационных волн произвольной (не малой) амплитуды, которые всегда бы переносили энергию во всех системах отсчета.

Попытки корректировки законов сохранения, рассмотренные выше, не убедительны. В связи с этим возникает необходимость пересмотра некоторых основных предпосылок, положенных в основу выводов фундаментальных уравнений гравитационного поля.

Заметим прежде всего, что вызывает сомнение уже требование, чтобы на гиперповерхности (на границе нашей Вселенной) вариации $\delta\Gamma^l_{ik} = 0$. Вспомнив общую ньютоновскую теорию потенциала тяготения, можно убедиться в том, что на границе какого-либо тела величина потенциала φ не претерпевает разрыва. Ускорение и вариации $\delta\varphi$ также обычно не терпят разрыва, хотя вариации ускорения $\delta g = \delta \frac{\partial \varphi}{\partial r} \neq 0$ на границе, т. е. испытывают разрыв (если только на границе плотность $\rho \not\equiv 0$).

Аналогичное положение мы должны иметь и на поверхности сферы квазиевклидовой нашей Вселенной при $x^0 = \mathrm{const}$ и на ее гиперповерхности при $x^0 = \mathrm{const}$ также и для двух других моделей Вселенной (при этом существенно, что на гиперповерхности $\varepsilon \not\equiv 0$). Во всяком случае, нет никаких оснований полагать на гиперповерхностях $\delta\Gamma^l_{ik} = 0$, поскольку g_{ik} играет роль потенциалов, а Γ^l_{ik} — роль ускорений. Далее следует заметить, что в общей теории относительности иногда оперируют не просто с гиперповерхностью, а с гиперповерхностью, удаленной на бесконечность, и с метрикой пространства на бесконечности, что также вряд ли можно считать обоснованным.

Если принять, что наша Вселенная, представляющая конечную подобласть в бесконечной Вселенной, «образовалась» конечное время тому назад (о чем говорят разбегающиеся туманности и возраст элементов), то за это конечное время она занимает лишь конечную область в пространстве. Мы условно принимаем, что вне нашей Вселенной «пустота», хотя правильнее считать, что вне ее также существует материя, заполняющая «внешнее» пространство с другой метрикой. Ни один сигнал из нашей Вселенной не может проникнуть за ее границы, поэтому оперировать с метрикой нашей Вселенной на бесконечности не имеет большого смысла.

В случае гиперболической или квазиевклидовой Вселенной пространство действительно бесконечно, но лишь конечная часть его занята «нашей» материей. И можно (как это теперь делает Зельдович) сопрягать нашу фридмановскую Вселенную с внешней Вселенной. В случае сферической нашей Вселенной объем пространства конечен, но изменяется со временем. И в этом случае все пространство можно считать бесконечным, а внутри него выделить «кривую» замкнутую область. При этом тем более не надо апеллировать к бесконечности. Ведь мы не знаем, какая конкретная материя находится «в ней».

Подчеркнем еще раз, что и в том случае, когда вне нашей Вселенной пустота, снова на гиперповерхности при $x^0 = \mathrm{const}$ $\delta\Gamma^l_{ik} \neq 0$. Мы будем в дальнейшем рассматривать именно этот самый общий случай, когда на гиперповерхности $\delta\Gamma^l_{ik} \neq 0$.

Наконец, еще одно важное замечание. Сам Эйнштейн надеялся на создание такого формализма общей теории относительности, в котором уравнения поля с правой частью, не равной нулю (неоднородные уравнения с учетом материи), могли бы быть выведены из одних геометрических построений, из одного лагранжиана, объясняя материю как «особые» точки пространства-времени. Дуализм вывода уравнений, когда для поля и материи надо варьировать два лагранжиана, ему не нравился, он справедливо считал это существенным недостатком своей теории.

Сейчас мы покажем, что в основном его идею единого вывода неоднородных уравнений гравитационного поля с материей можно осуществить.

§ 16. Строгий вариационный принцип в общей теории относительности

Для вывода уравнений гравитационного поля при наличии материи и «законов сохранения» будем исходить из вариации плотности скаляра

$$\mathfrak{L} = \sqrt{-g}L = -\frac{\sqrt{-g}}{2\varkappa}R. \tag{16.1}$$

Поскольку

$$R = R\left(g_{ik}, \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l}, \frac{\partial^2 g_{ik}}{\partial x^l \partial x^r}\right),$$

то мы используем неоднородные вариационные уравнения Лагранжа (1.7), которые напишем в виде

$$-c\delta S = \int \delta(\sqrt{-g}L)d\Omega = \int \left(\frac{\partial(\sqrt{-g}L)}{\partial g^{ik}} \delta g^{ik} + \frac{\partial(\sqrt{-g}L)}{\partial \frac{\partial g^{ik}}{\partial x^l}} \delta \frac{\partial g^{ik}}{\partial x^l} + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial(\sqrt{-g}L)}{\partial \frac{\partial^2 g^{ik}}{\partial x^l \partial x^r}} \delta \frac{\partial^2 g^{ik}}{\partial x^l \partial x^r} \right) d\Omega = 0, \tag{16.2}$$

или

$$\delta g^{ik} \left[\frac{\partial(\sqrt{-g}L)}{\partial g^{ik}} - \frac{\partial}{\partial x^l} \frac{\partial(\sqrt{-g}L)}{\partial \frac{\partial g^{ik}}{\partial x^l}} + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial^2}{\partial x^l \partial x^r} \frac{\partial(\sqrt{-g}L)}{\partial \frac{\partial^2 g^{ik}}{\partial x^l \partial x^r}} + \frac{\sqrt{-g}}{2} T_{ik} \right] = 0, \tag{16.3}$$

где под $\frac{1}{2}\sqrt{-g}\, T_{ik}$ следует понимать выражения

$$\frac{\sqrt{-g}}{2} T_{ik}\delta g^{ik} = \frac{\partial}{\partial x^l} \left[\left(\frac{\partial(\sqrt{-g}L)}{\partial \frac{\partial g^{ik}}{\partial x^l}} - \frac{\partial}{\partial x^r} \frac{\partial(\sqrt{-g}L)}{\partial \frac{\partial^2 g^{ik}}{\partial x^r \partial x^l}} \right) \delta g^{ik} + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial(\sqrt{-g}L)}{\partial \frac{\partial^2 g^{ik}}{\partial x^l \partial x^r}} \delta \frac{\partial g^{ik}}{\partial x^r} \right]. \tag{16.4}$$

При выводе (16.3) мы полагали на гиперповерхности $\delta \Gamma^l_{ik} \neq 0$, поэтому и появилось выражение (16.4) для

$$\frac{\sqrt{-g}}{2} T_{ik}\delta g^{ik} = \frac{\partial}{\partial x^l}(\sqrt{-g}\delta w^{*l}), \tag{16.5}$$

$$\delta w^{*l} = \left(\frac{\partial L}{\partial \dfrac{\partial g^{ik}}{\partial x^l}} - \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial \sqrt{-g}}{\partial x^r}\frac{\partial L}{\partial \dfrac{\partial^2 g^{ik}}{\partial x^r \partial x^l}}\right)\delta g^{ik} + \\ + \frac{\partial L}{\partial \dfrac{\partial^2 g^{ik}}{\partial x^r \partial x^l}}\,\delta\,\frac{\partial g^{ik}}{\partial x^r}, \qquad (16.6)$$

причем δw^{*l} — псевдовектор.

Так как $L = -R/2\varkappa$, $\delta(\sqrt{-g}R) = \delta(\sqrt{-g}g^{ik})R_{ik} + \sqrt{-g}\times$ $\times g^{ik}\delta R_{ik}$ или

$$\delta(\sqrt{-g}R) = \delta g^{ik}\left[\sqrt{-g}\left(R_{ik} - \frac{1}{2}g_{ik}R\right)\right] + \delta\frac{\partial^2 g^{ik}}{\partial x^l \partial x^m}\times \\ \times [\sqrt{-g}(g^{lm}g_{ik} - \delta_i^l\delta_k^m)] + \frac{1}{2}\delta\frac{\partial g^{ik}}{\partial x^l}\left[\sqrt{-g}\left(3g^{ml}\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^m} - \right.\right. \\ \left.\left. - 2g^{ml}\frac{\partial g_{im}}{\partial x^k} - 2g^{rm}\delta_k^l\frac{\partial g_{rm}}{\partial x^i}\right) + 2\frac{\partial}{\partial x^m}(\sqrt{-g}g^{lm}g_{ik})\right] + \\ + \frac{1}{2}\delta g^{ik}\left\{\frac{\partial}{\partial x^l}\left[\sqrt{-g}\left(3g^{ml}\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^m} - 2g^{ml}\frac{\partial g_{im}}{\partial x^k} - \right.\right.\right. \\ \left.\left.\left. - g^{rm}\frac{\partial g_{rm}}{\partial x_i}\delta_k^l\right)\right]\right\}, \qquad (16.7)$$

то, вычисляя (16.3), найдем

$$R_{ik} - \frac{1}{2}g_{ik}R = \varkappa T_{ik}, \qquad (16.8)$$

причем подстановка второго, третьего и четвертого членов правой части уравнения (16.7) в (16.3) дает нулевой вклад.

Вычислим теперь для контроля правую часть выражения (16.4) и выясним, что собой представляют пока формально введенные величины T_{ik}:

$$-\varkappa\sqrt{-g}T_{ik}\delta g^{ik} = \frac{\partial}{\partial x^l}\left[\frac{1}{2}\sqrt{-g}\left(3g^{ml}\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^m} - 2g^{ml}\frac{\partial g_{im}}{\partial x^k} - \right.\right. \\ \left.\left. - g^{rm}\frac{\partial g_{rm}}{\partial x_i}\delta_k^l\right)\delta g^{ik} + \sqrt{-g}(g^{lm}g_{ik} - \delta_i^l\delta_k^m)\,\delta\frac{\partial g^{ik}}{\partial x^m}\right]. \qquad (16.9)$$

После вычисления производных, найдем

$$-\varkappa\sqrt{-g}T_{ik}\delta g^{ik}=\frac{1}{2}\delta g^{ik}\left\{\frac{\partial}{\partial x^l}\left[\sqrt{-g}\left(3g^{ml}\frac{\partial g^{ik}}{\partial x^m}-\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.-2g^{ml}\frac{\partial g_{im}}{\partial x^k}-g^{rm}\frac{\partial g_{rm}}{\partial x_i}\delta_k^l\right)\right]\right\}+\frac{1}{2}\delta\frac{\partial g^{ik}}{\partial x^l}\left[\sqrt{-g}\left(3g^{ml}\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^m}-\right.\right.$$

$$\left.\left.-2g^{ml}\frac{\partial g_{im}}{\partial x^k}-2g^{rm}\frac{\partial g_{rm}}{\partial x^i}\delta_k^l\right)+2\frac{\partial}{\partial x^m}\left(\sqrt{-g}g^{lm}g_{ik}\right)\right]+$$

$$+\delta\frac{\partial^2 g^{ik}}{\partial x^l\partial x^m}\left[\sqrt{-g}\left(g^{lm}g_{ik}-\delta_i^l\delta_k^m\right)\right]=$$

$$=\delta\left(\sqrt{-g}R\right)-\delta g^{ik}\left[\sqrt{-g}\left(R_{ik}-\frac{1}{2}g_{ik}R\right)\right].$$

Отсюда следует, что

$$-\varkappa\sqrt{-g}T_{ik}\delta g^{ik}=\sqrt{-g}g^{ik}\delta R_{ik}. \tag{16.10}$$

Поскольку правая часть (16.10) является тензором, то T_{ik} — также тензор.

Так как $\delta(\sqrt{-g}R)=0$,
то $\sqrt{-g}g^{ik}\delta R_{ik}=-\delta g^{ik}\left[\sqrt{-g}\left(R_{ik}-\frac{1}{2}g_{ik}R\right)\right]$;

поэтому снова имеем (16.8), что подтверждает правильность наших выкладок.

Таким образом, не прибегая к вариационным уравнениям Лагранжа, можно было бы сразу получить уравнение (16.8), варьируя непосредственно $\delta(\sqrt{-g}R)$ и полагая, что

$$\sqrt{-g}\,g^{ik}\delta R_{ik}=-\varkappa\sqrt{-g}T_{ik}\delta g^{ik}\neq 0.$$

Ниже мы покажем, что

$$\sqrt{-g}\,g^{ik}\delta R_{ik}=\frac{\partial}{\partial x^l}\left[\sqrt{-g}\left(g^{ik}\delta\Gamma_{ik}^l-g^{il}\delta\Gamma_{ik}^k\right)\right], \tag{16.11}$$

откуда

$$-\varkappa\sqrt{-g}T_{ik}\delta g^{ik}=\frac{\partial}{\partial x^l}\left[\sqrt{-g}\left(g^{ik}\delta\Gamma_{ik}^l-g^{il}\delta\Gamma_{ik}^k\right)\right]. \tag{16.12}$$

Сравнивая (16.5) и (16.12), найдем

$$\delta w^{*l}=-\frac{1}{2\varkappa}\left(g^{ik}\delta\Gamma_{ik}^l-g^{il}\delta\Gamma_{ik}^k\right). \tag{16.13}$$

Поскольку

$$\int\frac{\partial}{\partial x^l}\left(\sqrt{-g}\,\delta w^{*l}\right)d\Omega=\int\sqrt{-g}\delta w^{*l}\,dS_l,$$

то

$$\int \sqrt{-g}\,T_{ik}\delta g^{ik}\,d\Omega = 2\int \sqrt{-g}\,\delta w^{*l}\,dS_l =$$

$$= -\frac{1}{\varkappa}\int \sqrt{-g}\,(g^{ik}\delta\Gamma^l_{ik} - g^{il}\delta\Gamma^k_{ik})\,dS_l. \quad (16.14)$$

В старой стандартной теории полагали, что на S_l $\delta\Gamma^l_{ik} = 0$, поэтому получилось, что $T_{ik} = 0$, и таким образом приходили к однородным уравнениям Эйнштейна. Там же полагалось

$$\delta(\sqrt{-g}\,R) = \delta(\sqrt{-g}\,G) + \delta\frac{\partial}{\partial x^l}(\sqrt{-g}\,w^l) = \delta(\sqrt{-g}\,G),$$

где

$$w^l = g^{ik}\Gamma^l_{ik} - g^{il}\Gamma^k_{ik} = g^{il}g_{km}\frac{\partial g^{km}}{\partial x^i} - \frac{\partial g^{il}}{\partial x^i},$$

поскольку

$$\int \frac{\partial}{\partial x^l}\delta(\sqrt{-g}\,w^l)\,d\Omega = \delta\int \sqrt{-g}\,w^l\,dS_l = 0$$

(принимая на S_l, $\delta\Gamma^l_{ik} = 0$ и $\delta g_{ik} = 0$).

Покажем теперь, что последнее выражение, даже при допущении, что на S_l, $\delta\Gamma^l_{ik} = 0$ и $\delta g_{ik} = 0$, неоправданно. В самом деле,

$$\delta\frac{\partial(\sqrt{-g}\,w^l)}{\partial x^l} = \frac{\partial}{\partial x^l}[\Gamma^l_{ik}\delta(\sqrt{-g}\,g^{ik}) - \Gamma^k_{ik}\delta(\sqrt{-g}\,g^{il})] +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial x^l}[\sqrt{-g}\,(g^{ik}\delta\Gamma^l_{ik} - g^{il}\delta\Gamma^k_{ik})] =$$

$$= -2\varkappa\frac{\partial}{\partial x^l}[\sqrt{-g}\,(\delta A^l + \delta w^{*l})],$$

$$-2\varkappa\sqrt{-g}\,\delta A^l = \Gamma^l_{ik}\delta(\sqrt{-g}\,g^{ik}) - \Gamma^k_{ik}\delta(\sqrt{-g}\,g^{ik}). \quad (16.15)$$

На S_l если даже $\delta g^{ik} = 0$, то δA^l не обязательно равно нулю, поскольку в него сомножителями входят величины Γ^l_{ik}, которые соответствующим выбором системы отсчета могут быть на S_l сделаны сколь угодно большими. И несмотря на то, что $\delta\Gamma^l_{ik} = 0$, величины

$$\delta\frac{\partial(\sqrt{-g}\,w^l)}{\partial x^l} \neq 0.$$

Следовательно, первое слагаемое в вариации

$$\delta \frac{\partial(\sqrt{-g}w^l)}{\partial x^l} = \frac{\partial}{\partial x^l}[\Gamma^l_{ik}\delta(\sqrt{-g}g^{ik}) - \Gamma^k_{ik}\delta(\sqrt{-g}g^{ik})] +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial x^l}[\sqrt{-g}(g^{ik}\delta\Gamma^l_{ik} - g^{il}\delta\Gamma^k_{ik})]$$

имеет смысл только при $\delta g^{ik} = 0$. Второе же имеет физический смысл и характеризует величины T_{ik}.

Выведем теперь соотношения (16.11). Поскольку

$$\delta(\sqrt{-g}R) = \delta(\sqrt{-g}g^{ik})R_{ik} + \sqrt{-g}g^{ik}\delta R_{ik} =$$

$$= \delta(\sqrt{-g}G) - 2\varkappa\frac{\partial}{\partial x^l}[\sqrt{-g}(\delta A^l + \delta w^{*l})]$$

и можно простым вычислением показать, что

$$-2\varkappa\frac{\partial}{\partial x^l}(\sqrt{-g}\delta A^l) = R_{ik}\delta(\sqrt{-g}g^{ik}) - \delta(\sqrt{-g}G), \tag{16.16}$$

то

$$\delta(\sqrt{-g}R) = \delta(\sqrt{-g}g^{ik})R_{ik} + \sqrt{-g}\,g^{ik}\delta R_{ik} =$$

$$= R_{ik}\delta(\sqrt{-g}g^{ik}) - 2\varkappa\frac{\partial}{\partial x^l}(\sqrt{-g}\,\delta w^{*l}),$$

откуда

$$\sqrt{-g}g^{ik}\delta R_{ik} = -2\varkappa\frac{\partial}{\partial x^l}(\sqrt{-g}\delta w^{*l}) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x^l}[\sqrt{-g}(g^{ik}\delta\Gamma^l_{ik} - g^{il}\delta\Gamma^k_{ik})],$$

что и дает соотношение (16.11).

Это соотношение было в общем виде уже давно выведено другим способом Палатини.

Если на S_l $\delta g_{ik} = 0$, то

$$\frac{\sqrt{-g}}{2}T_{ik}\delta g^{ik} = -\frac{1}{2\varkappa}\frac{\partial}{\partial x^l}\left(\frac{\partial(\sqrt{-g}\,R)}{\partial\frac{\partial^2 g^{ik}}{\partial x^l\partial x^r}}\delta\frac{\partial g^{ik}}{\partial x^r}\right).$$

Поскольку

$$\delta\frac{\partial g^{ik}}{\partial x^r}\frac{\partial(\sqrt{-g R})}{\partial\frac{\partial^2 g^{ik}}{\partial x^l\partial x^r}} = \sqrt{-g}(g^{lr}g_{ik} - \delta^l_i\delta^r_k)\,\delta\frac{\partial g^{ik}}{\partial x^r} =$$

$$= \sqrt{-g}\left(g^{lr}g_{ik}\delta\frac{\partial g^{ik}}{\partial x^r} - \delta\frac{\partial g^{lr}}{\partial x^r}\right) = \sqrt{-g}(g^{rm}\delta\Gamma^l_{mr} - g^{lm}\Gamma^r_{mr}),$$

то

$$-\sqrt{-g}\,\varkappa T_{ik}\delta g^{ik}=\frac{\partial}{\partial x^l}\,[\sqrt{-g}\,(g^{rm}\delta\Gamma^l_{mr}-g^{lm}\delta\Gamma^r_{mr})],$$

т. е. мы снова приходим к (16.12).

Теперь можно сделать важный вывод: значение вариации δg_{ik} на S_l не играют никакой роли; все определяется вариациями символов Кристоффеля. [Тот же результат, естественно, получается, если в (16.8) заменить производные g^{ik} на символы Кристоффеля. Члены с δg^{ik} сократятся и мы снова придем к (16.12).]

Перейдем к интерпретации физического смысла величин T_{ik}. Напишем (16.10) в виде

$$\sqrt{-g}\,(g^{ik}\delta R_{ik}+\varkappa T_{ik}\delta g^{ik})=-2\varkappa\delta\,(\sqrt{-g}\hat{L}), \tag{16.17}$$

где $\hat{L}$ — новый лагранжиан. Подставляя его в общее уравнение (16.3) (поскольку $\sqrt{-g}g^{ik}\delta R_{ik}$ при этом дает нулевой вклад), придем к тождеству

$$\sqrt{-g}\left(-\frac{\sqrt{-g}}{2}\,T_{ik}+\frac{\sqrt{-g}}{2}\,T_{ik}\right)\equiv 0.$$

Поэтому из (16.17) имеем

$$\frac{\sqrt{-g}}{2}\,T_{ik}=-\frac{\partial(\sqrt{-g}\hat{L})}{\partial g^{ik}}\,. \tag{16.18}$$

Напишем вариацию действия для лагранжиана $\hat{L}$:

$$d\hat{S}=\frac{1}{c}\int\delta\sqrt{-g}\hat{L}\,d\Omega=\frac{1}{2c}\int\sqrt{-g}T_{ik}\delta g^{ik}\,d\Omega. \tag{16.19}$$

Это выражение является действием для материи, поэтому мы можем написать, что $\hat{L}=L_m$, $\hat{S}=S_m$, где L_m, S_m — лагранжиан и действие, описывающее материю. Следовательно, T_{ik} мы можем трактовать как материальный тензор энергии-импульса.

Таким образом, уравнения (16.18) являются уравнениями Эйнштейна для гравитационного поля; следовательно, все решения, схемы и модели, связанные с этим уравнением, справедливы и для нашего формализма. Здесь мы не получаем новых результатов, за исключением более целесообразной и корректной методики вывода основных уравнений теории гравитационного поля.

Теперь, следуя традициям общей теории относительности, можно поступить таким образом. Напишем, что

$$\delta(S_g + S_m) = 0, \tag{16.20}$$

$$\delta S_g = -\frac{1}{c}\delta\int\sqrt{-g}L_g\,d\Omega = \frac{1}{2\varkappa c}\int\sqrt{-g}\,\delta g^{ik}\left[\frac{\partial(\sqrt{-g}R)}{\partial g^{ik}} - \right.$$

$$\left. -\frac{\partial}{\partial x^l}\frac{\partial(\sqrt{-g}R)}{\partial\dfrac{\partial g^{ik}}{\partial x^l}} + \frac{\partial^2}{\partial x^l\partial x^r}\frac{\partial(\sqrt{-g}R)}{\partial\dfrac{\partial^2 g^{ik}}{\partial x^l\partial x^r}}\right]d\Omega =$$

$$= \frac{1}{2c}\int\sqrt{-g}\,\delta g^{ik}\left(R_{ik} - \frac{1}{2}g_{ik}R\right)d\Omega, \tag{16.21}$$

$$\delta S_m = \frac{1}{c}\delta\int\sqrt{-g}L_m\,d\Omega = \frac{1}{c}\int\sqrt{-g}\,\delta g^{ik}\left[\frac{\partial(\sqrt{-g}L_m)}{\partial g^{ik}} - \right.$$

$$\left. -\frac{\partial}{\partial x^l}\frac{\partial(\sqrt{-g}L_m)}{\partial\dfrac{\partial g^{ik}}{\partial x^l}} + \frac{\partial^2}{\partial x^l\partial x^r}\frac{\partial(\sqrt{-g}L_m)}{\partial\dfrac{\partial^2 g^{ik}}{\partial x^l\partial x^r}}\right]d\Omega =$$

$$= -\frac{1}{2c}\int\sqrt{-g}\,\delta g^{ik}T_{ik}\,d\Omega, \tag{16.22}$$

где введено обозначение

$$-\frac{1}{2}\sqrt{-g}T_{ik} = \frac{\partial\sqrt{-g}L_m}{\partial g^{ik}} - \frac{\partial}{\partial x^l}\frac{\partial(\sqrt{-g}L_m)}{\partial\dfrac{\partial g^{ik}}{\partial x^l}} +$$

$$+\frac{\partial^2}{\partial x^l\partial x^r}\frac{\partial(\sqrt{-g}L_m)}{\partial\dfrac{\partial^2 g^{ik}}{\partial x^l\partial x^r}} = \frac{\partial(\sqrt{-g}L_m)}{\partial g^{ik}}, \tag{16.23}$$

причем тензор T_{ik} называют тензором материи.

Подставляя (16.21) и (16.22) в (16.20) и учитывая, что δg^{ik} произвольны, находим уравнения поля (16.8)

$$R_{ik} - \frac{1}{2}g_{ik}R = \varkappa T_{ik}.$$

Можно также варьировать S_m по другим параметрам (не по g_{ik} в результате снова получим уравнения (16.8) (далее для конкретных видов материи мы это покажем на примерах).

В этом формализме мы варьируем два лагранжиана, $\hat{L}_g = -R/2\varkappa$ и L_m, причем вид второго лагранжиана остается неизвестным, пока не задана конкретная форма материи.

В развиваемом нами формализме достаточно варьировать лишь один лагранжиан $L = L_g = -R/2\varkappa$, в чем большое преимущество нашей методики. При этом мы автоматически получаем формулу Белифанте (16.19). Вид T_{ik} по-прежнему остается неизвестным, но его легко выяснить для любого конкретного уравнения состояния материи, что мы и сделаем ниже. Отметим только, что для этой цели необходимо знать L_m, но не для вывода уравнений поля, а лишь для установления вида T_{ik}.

Полученный результат можно интерпретировать еще и следующим образом. В поле без источников поля поток через поверхность равен нулю, поэтому дивергенция от компонент, характеризующих поле, также должна быть равной нулю. В случае источников поля эта дивергенция отлична от нуля.

В случае гравитационного поля источником его является материя (любой вид энергии), поэтому 4-х дивергенция

$$\frac{\partial}{\partial x^l}\left[\sqrt{-g}\left(g^{ik}\delta\Gamma^l_{ik} - g^{il}\delta\Gamma^k_{ik}\right)\right] = -\varkappa\sqrt{-g}T_{ik}\delta g^{ik} \neq 0.$$

Эта дивергенция и характеризует тензор энергии-импульса материи. Величины вариаций Γ^l_{ik} на гиперповерхности S_l будут зависеть от T_{ik}.

При отсутствии материи мы получаем для уравнения (16.2) кстремаль одного класса, которая характеризует свободное поле; в случае материи мы получаем экстремаль другого класса, которой соответствует неоднородное уравнение поля (16.8).

Очевидно также, что

$$\delta S_m = -\frac{1}{2c}\int\sqrt{-g}T_{ik}\delta g^{ik}\,d\Omega = \frac{1}{c}\int\frac{\partial(\sqrt{-g}L_m)}{\partial g^{ik}}\,\delta g^{ik}\,d\Omega.$$

или

$$\delta S_m = \frac{1}{2c\varkappa}\int\frac{\partial}{\partial x^l}\left[\sqrt{-g}\left(g^{mr}\delta\Gamma^l_{mr} - g^{lm}\delta\Gamma^r_{mr}\right)\right]d\Omega =$$

$$= \frac{1}{2c\varkappa}\int\sqrt{-g}\left(g^{mr}\delta\Gamma^l_{mr} - g^{lm}\delta\Gamma^r_{mr}\right)dS_l.$$

Вычислим теперь величину

$$\frac{\partial(\sqrt{-g}L)}{\partial x^i} = \frac{\partial(\sqrt{-g}L)}{\partial g^{ml}}\frac{\partial g^{ml}}{\partial x^i} + \frac{\partial(\sqrt{-g}L)}{\partial\frac{\partial g^{ml}}{\partial x^k}}\frac{\partial^2 g^{ml}}{\partial x^i\partial x^k} +$$

$$+ \frac{\partial(\sqrt{-g}L)}{\partial\frac{\partial^2 g^{ml}}{\partial x^k\partial x^r}}\frac{\partial^3 g^{ml}}{\partial x^i\partial x^k\partial x^r}. \quad (16.24)$$

Исключая из (16.3) и (16.24) величины $\frac{\partial(\sqrt{-g}L)}{\partial g^{ml}}$, придем к уравнению

$$\frac{\partial}{\partial x^k}\left[\frac{\partial g^{ml}}{\partial x^i}\frac{\partial(\sqrt{-g}L)}{\partial\frac{\partial g^{ml}}{\partial x^k}}+\frac{\partial^2 g^{ml}}{\partial x^i\partial x^r}\frac{\partial(\sqrt{-g}L)}{\partial\frac{\partial^2 g^{ml}}{\partial x^k\partial x^r}}-\right.$$

$$\left.-\frac{\partial g^{ml}}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial x^r}\frac{\partial(\sqrt{-g}L)}{\partial\frac{\partial^2 g^{ml}}{\partial x^k\partial x^r}}\right]-\frac{\sqrt{-g}}{2}T_{ml}\frac{\partial g^{ml}}{\partial x^i}=\delta_i^k\frac{\partial(\sqrt{-g}L)}{\partial x^k}. \tag{16.25}$$

Поскольку величина $\sqrt{-g}\,d\Omega$ инвариантна, то $\delta(\sqrt{-g}\,d\Omega)=0$, и, по сути дела, надо при варьировании по координатам величин $\frac{\partial(\sqrt{-g}L\,d\Omega)}{\partial x^i}$ считать $\frac{\partial(\sqrt{-g}L\,d\Omega)}{\partial x^i}=\frac{\partial L}{\partial x^i}\sqrt{-g}\,d\Omega$, а не $\frac{\partial(\sqrt{-g}L\,d\Omega)}{\partial x^i}=\frac{\partial(\sqrt{-g}L)}{\partial x^i}d\Omega$.

Однако легко показать, что оба эти выражения приводят к одинаковым результатам, поскольку выражения $\frac{\partial(\sqrt{-g}L)}{\partial x^i}=$ $=\frac{\partial(\sqrt{-g}L)}{\partial g^{lm}}\frac{\partial g^{lm}}{\partial x^i}+\ldots$ являются тождествами. Это также видно из следующих вычислений:

$$\frac{\partial(\sqrt{-g}L)}{\partial x^i}=\sqrt{-g}\left(\frac{\partial L}{\partial x^i}+L\frac{\partial\ln\sqrt{-g}}{\partial x^i}\right)=$$

$$=\sqrt{-g}\left(\frac{\partial L}{\partial g^{lm}}\frac{\partial g^{lm}}{\partial x^i}+L\frac{\partial\ln\sqrt{-g}}{\partial g^{lm}}\frac{\partial g^{lm}}{\partial x^i}+\ldots\right)=$$

$$=\frac{\partial(\sqrt{-g}L)}{\partial g^{lm}}\frac{\partial g^{lm}}{\partial x^i}+\ldots$$

Так как

$$\frac{\partial\ln\sqrt{-g}}{\partial g^{lm}}\frac{\partial g^{lm}}{\partial x^i}=\frac{\partial\ln\sqrt{-g}}{\partial x^i},$$

то действительно

$$\frac{\partial L}{\partial x^i}=\frac{\partial L}{\partial g^{lm}}\frac{\partial g^{lm}}{\partial x^i}+\ldots.$$

Заметим также, что

$$\frac{\partial\,d\Omega}{d\Omega\partial x^i}=-\Gamma_{ik}^k=-\frac{\partial\ln\sqrt{-g}}{\partial x^i}.$$

Поэтому если при варьировании учитывать изменения $\delta d\Omega$, то мы снова получим прежний результат.

Отсюда при $L = -R/2\varkappa$ будем иметь

$$\frac{\partial(\sqrt{-g}\,t_i^k)}{\partial x^k} = \frac{\sqrt{-g}}{2} T_{lm} \frac{\partial g^{lm}}{\partial x^i} = -\frac{\sqrt{-g}}{2} T^{lm} \frac{\partial g_{lm}}{\partial x^i}, \tag{16.26}$$

где

$$t_i^k = \frac{1}{2\varkappa} \delta_i^k R + \bar{t}_i^k, \tag{16.27}$$

причем

$$2\varkappa\sqrt{-g}\,\bar{t}_i^k = -\sqrt{-g}\left(\frac{\partial R}{\partial \dfrac{\partial g^{lm}}{\partial x^k}} \frac{\partial g^{lm}}{\partial x^i} + \frac{\partial R}{\partial \dfrac{\partial^2 g^{lm}}{\partial x^k \partial x^r}} \frac{\partial^2 g^{lm}}{\partial x^i \partial x^r}\right) +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial x^r}\left(\sqrt{-g}\,\frac{\partial R}{\partial \dfrac{\partial^2 g^{ml}}{\partial x^k \partial x^r}}\right)\frac{\partial g^{ml}}{\partial x^i} \tag{16.28}$$

является псевдотензором гравитационного поля (в том, что $\bar{t}_i^k$ не составляет тензора, легко убедиться непосредственными вычислениями).

Поскольку имеют место тождества Бианки

$$\left(R_i^k - \frac{1}{2}\delta_i^k R\right)_{;\,k} = 0,$$

то

$$T^k_{i;\,k} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial(\sqrt{-g}\,T_i^k)}{\partial x^k} - \frac{T^{lm}}{2} \frac{\partial q_{lm}}{\partial x^i} = 0. \tag{16.29}$$

Из (16.26) и (16.29) имеем

$$\frac{\partial}{\partial x^k}\left[\sqrt{-g}\,(T_i^k + t_i^k)\right] = 0, \tag{16.30}$$

т. е. мы приходим к четырем «уравнениям» сохранения энергии-импульса материи и поля.

Эти уравнения совершенно аналогичны тождествам Бианки и поэтому являются тождествами.

Так как $R = -\varkappa T$, то

$$T_i^k + t_i^k = T_i^k + \frac{\delta_i^k}{2\varkappa} R + \bar{t}_i^k = \bar{t}_i^k + \frac{1}{\varkappa} R_i^k;$$

при этом (16.30) можно написать в виде

$$\frac{\partial}{\partial x^k}\left[\sqrt{-g}\left(\bar{t}_i^k+\frac{1}{\varkappa}R_i^k\right)\right]=0. \tag{16.31}$$

Далее, поскольку

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x^k}(\sqrt{-g}R_i^k)=-\frac{R_{lm}}{2}\frac{\partial g^{lm}}{\partial x^i}+\frac{1}{2}\frac{\partial R}{\partial x^i}=\frac{1}{2}g^{lm}\frac{\partial R_{lm}}{\partial x^i},$$

то (16.31) можно написать в виде

$$\frac{\partial(\sqrt{-g}\bar{t}_i^k)}{\partial x^k}=-\frac{\sqrt{-g}}{2}g^{lm}\frac{\partial R_{lm}}{\partial x^i}. \tag{16.32}$$

Вычисляя компоненты $\bar{t}_i^k$ из (16.28), имеем

$$-2\varkappa\bar{t}_i^k=\left(\frac{\partial g^{lm}}{\partial x^i\partial x^r}g_{lm}g^{rk}-\frac{\partial^2 g^{kr}}{\partial x^i\partial x^r}\right)+$$
$$+\frac{1}{2}\left[\frac{\partial g^{lm}}{\partial x^i}g^{rk}\left(3\frac{\partial g_{lm}}{\partial x^r}-2\frac{\partial g_{lr}}{\partial x^m}\right)-g^{lm}\frac{\partial g_{lm}}{\partial x^r}\frac{\partial g^{rk}}{\partial x^i}\right]. \tag{16.33}$$

Заменяя производные g^{ik} на символы Кристоффеля, придем к следующему простому соотношению:

$$2\varkappa\bar{t}_i^k=g^{km}\frac{\partial\Gamma_{lm}^l}{\partial x^i}-g^{lm}\frac{\partial\Gamma_{ml}^k}{\partial x^i}. \tag{16.34}$$

Таким образом,

$$t_i^k=\frac{1}{2\varkappa}\delta_i^kR+\frac{1}{2\varkappa}\left(g^{km}\frac{\partial\Gamma_{lm}^l}{\partial x^i}-g^{lm}\frac{\partial\Gamma_{ml}^k}{\partial x^i}\right). \tag{16.35}$$

Этот псевдотензор несимметричен по индексам i, k, как и должно быть. Следует особо заметить, что при дифференцировании по x^k выражения $\left(\bar{t}_i^k+\frac{1}{\varkappa}R_i^k\right)$ третьи производные g_{ik} по x^k сокращаются.

Уравнение (16.30) с псевдотензором (16.35) легко получить исходя из старой методики, связанной с варьированием двух действий S_g и S_m. В самом деле [см. (11.1)], напишем

$$\delta(S_g+S_m)=\frac{1}{c}\int\left(\frac{\partial(\sqrt{-g}L_g)}{\partial g^{ik}}-\frac{\partial}{\partial x^l}\frac{\partial(\sqrt{-g}L_g)}{\partial\frac{\partial g^{ik}}{\partial x^l}}+\right.$$
$$\left.+\frac{\partial^2}{\partial x^l\partial x^r}\frac{\partial(\sqrt{-g}L_g)}{\partial\frac{\partial^2 g^{ik}}{\partial x^l\partial x^r}}-\frac{\sqrt{-g}}{2}T_{ik}\right)d\Omega=0,$$

где

$$\delta S_m = -\frac{1}{2c}\int \sqrt{-g}T_{ik}\delta g^{ik}d\Omega;$$

откуда снова получаем (16.3), после чего повторяются все остальные выкладки. Таким образом, мы можем получить все необходимые выражения, как старым, так и новым методом. Поэтому все дальнейшие выкладки не зависят от методики вывода уравнений.

Вычислим теперь величины $\left(\bar{t}_i^k + \frac{1}{\varkappa} R_i^k\right)$. Оказывается, что

$$\sqrt{-g}\,(T_i^k + t_i^k) = \sqrt{-g}\left(\bar{t}_i^k + \frac{1}{\varkappa} R_i^k\right) = \frac{1}{2\varkappa}\frac{\partial \chi_i^{kl}}{\partial x^l}, \tag{16.36}$$

где

$$\chi_i^{kl} = \sqrt{-g}g^{kn}g^{lm}\left(\frac{\partial g_{im}}{\partial x^n} - \frac{\partial g_{in}}{\partial x^m}\right). \tag{16.37}$$

Вычисление χ_i^{kl} можно провести весьма простым методом, предложенным Колосницыным.

Поскольку χ_i^{kl} антисимметричны по индексам k, l, то в левой части уравнений (16.36) надо выделить антисимметричные по этим же индексам члены, содержащие вторые производные. Из

$$\bar{t}_i^k = \frac{1}{2\varkappa}\left(g^{km}\frac{\partial \Gamma_{mr}^r}{\partial x_i} - g^{rm}\frac{\partial \Gamma_{mr}^k}{\partial x^i}\right)$$

можно выделить только симметричную часть, содержащую вторые производные g_{ik}. Следовательно, этот член должен содержаться в компонентах R_i^k, которые представим в виде

$$R_i^k = g^{kr}\left(\frac{\partial \Gamma_{ir}^l}{\partial x^l} - \frac{\partial \Gamma_{il}^l}{\partial x^r}\right) - g^{kr}G_{ir} = -\frac{1}{2\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x^l}[\sqrt{-g}\,(g^{kr}\times$$

$$\times\,\Gamma_{ir}^l - g^{lr}\Gamma_{ir}^k)] + \frac{1}{2\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x^l}[\sqrt{-g}\,(g^{kr}\Gamma_{ir}^l + g^{lr}\Gamma_{ik}^k)] -$$

$$- g^{kl}\frac{\partial \Gamma_{ir}^r}{\partial x^l} + \frac{1}{\sqrt{-g}}\left[\frac{\partial(\sqrt{-g}g^{kr})}{\partial x^l}\Gamma_{il}^l - \frac{\partial(\sqrt{-g}g^{kr})}{\partial x^l}\Gamma_{ir}^l\right] - g^{kr}G_{ir}.$$

Очевидно, что только первый член слева в правой части уравнения является антисимметричным по индексам k, l; поэтому

$$\chi_i^{kl} = \sqrt{-g}\,(g^{kr}\Gamma_{ir}^l - g^{lr}\Gamma_{ir}^k) = \sqrt{-g}\,(g^{kn}\Gamma_{in}^l - g^{lm}\Gamma_{im}^k) =$$

$$= g^{kn}g^{lm}\sqrt{-g}\left(\frac{\partial g_{im}}{\partial x^n} - \frac{\partial g_{in}}{\partial x^m}\right).$$

Остальные члены сокращаются с $\bar{t}_i^k$, в чем легко убедиться (кстати, отсюда легко вычисляют величины $\bar{t}_i^k$).

Вспомним теперь, что у Меллера и Мицкевича

$$\chi_{\text{м}i}^{kl} = \overline{\chi}_i^{kl} = 2\sqrt{-g}g^{kn}g^{lm}\left(\frac{\partial g_{im}}{\partial x^n} - \frac{\partial g_{in}}{\partial x^m}\right) = 2\chi_i^{kl}$$

[см. (13.10)]. Следовательно, можно, не производя новых вычислений, написать, что в задаче Шварцшильда

$$cP_\gamma = 0, \qquad cP_0 = E_0 = \frac{mc^2}{2} = \frac{E_\text{м}}{2}. \tag{16.38}$$

Сейчас мы выяснили, почему $E_0 = \frac{E_\text{м}}{2}$ и почему результаты Меллера — Мицкевича, которые считали, что $E_0 = E_\text{м}$, неверны. Эти авторы специально «подгоняли» под равенство $E_0 = E_\text{м}$ свои выражения для t_i^k и χ_i^{kl}.

Для всех космологических моделей, как легко установить простыми вычислениями, $\overline{t}_0^0 + \frac{1}{\varkappa}R_0^0 = 0$; поэтому $cP_0 = 0$, но $\overline{t}_\alpha^\alpha + \frac{1}{\varkappa}R_\alpha^\alpha \neq 0$. Поэтому в зависимости от метода вычислений $cP_{1,2}$ или равны, или не равны нулю; $cP_3 = 0$.

Вычислим теперь разницу между псевдотензором в эйнштейновском вариационном варианте и в нашем случае.

$$2\varkappa\sqrt{-g}\,(t_i^k - {}_\text{э}t_i^k) = \frac{\partial}{\partial x^l}(\chi_i^{kl} - {}_\text{э}\chi_i^{kl}) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x^l}\left[\sqrt{-g}g^{kn}g^{lm}\left(\frac{\partial g_{im}}{\partial x^n} - \frac{\partial g_{in}}{\partial x^m}\right)\right] - \frac{g_{in}}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x^m}\left[(-g)(g^{kn}g^{lm} - g^{ln}g^{km})\right] = \frac{\partial}{\partial x^l}\left[\sqrt{-g}\,(\delta_i^k w^l - \delta_i^l w^k)\right], \tag{16.39}$$

где

$$w^l = \frac{\partial g^{rm}}{\partial x^s}g_{rm}g^{ls} - \frac{\partial g^{ls}}{\partial x^s}.$$

Далее очевидно, что

$$\frac{\partial}{\partial x^k}\left[\sqrt{-g}\,(t_i^k - {}_\text{э}t_i^k)\right] = 0.$$

Попытаемся симметризовать выражение $T_i^k + t_i^k$. Очевидно, единственным симметричным выражением $T^{ik} + t^{*ik}$, при котором $cP_0 = \frac{E_\text{м}}{2}$, будет

$$2\varkappa(-g)(T^{ik} + t^{*ik}) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^m \partial x^l}\left[(-g)(g^{ik}g^{lm} - g^{il}g^{km})\right]. \tag{16.40}$$

У Ландау и Лифшица

$$2\varkappa(-g)(T^{ik}+t^{ik}_{\wedge})=\frac{\partial^2}{\partial x^m\partial x^l}[(-g)(g^{ik}g^{lm}-g^{il}g^{km})].$$

Отсюда очевидно, что

$$2\varkappa(-g)(t^{*ik}-t^{ik}_{\wedge})=-\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^m\partial x^l}[(-g)(g^{ik}g^{lm}-g^{il}g^{km})].$$

Поскольку

$$2\varkappa(-g)(t^{ik}_{\wedge}-t^{ik}_{\text{э}})=\frac{g_{rn}}{\sqrt{-g}}\frac{\partial(\sqrt{-g}g^{ir})}{\partial x^l}\frac{\partial}{\partial x^m}[(-g)(g^{kn}g^{lm}-g^{ln}g^{km})],$$

то, принимая во внимание (16.39), найдем

$$2\varkappa(-g)(t^{*ik}-t^{ik})=\frac{g_{rn}}{\sqrt{-g}}\frac{\partial(\sqrt{-g}g^{ir})}{\partial x^l}\frac{\partial}{\partial x^m}[(-g)(g^{kn}g^{lm}-g^{ln}g^{km})]-\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^m\partial x^l}[(-g)(g^{ik}g^{lm}-g^{il}g^{km})]-$$
$$-\sqrt{-g}g^{ir}\frac{\partial}{\partial x^l}[\sqrt{-g}(w^l\delta^k_r-w^k\delta^l_r)].$$

В случае плоской гравитационной волны произвольной амплитуды будем для $t^1_0=\bar{t}^1_0$ иметь значения

$$t^1_0=\bar{t}^1_0=\frac{1}{2\varkappa}\left(g^{1m}\frac{\partial\Gamma^l_{lm}}{\partial x^0}-g^{ln}\frac{\partial\Gamma^1_{ml}}{\partial x^0}\right)=\frac{1}{4\varkappa}\left[g^{11}\frac{\partial^2\ln g}{\partial x^0\,\partial x^1}+\right.$$
$$\left.+\frac{\partial\ln g}{\partial x^1}\frac{\partial g^{11}}{\partial x^0}+g^{11}g^{lm}\frac{\partial^2 g_{lm}}{\partial x^0\,\partial x^1}-g^{1m}\frac{\partial}{\partial x^0}\left(g^{1s}\frac{\partial g_{ms}}{\partial x^1}\right)\right].$$

Положим по аналогии со слабыми волнами, что в пустом пространстве

$$-g_{00}=g_{11}=1,\qquad g_{22}\neq1,\qquad g_{33}\neq1,\qquad g_{23}\neq0$$

(остальные $g_{ik}=0$), причем $\frac{\partial^2 g_{22}}{\partial x^{02}}=-\frac{\partial^2 g_{33}}{\partial x^{02}}$ (что будет показано в конце этого параграфа). При этом

$$t^1_0=-t^{01}=t_{01}=\frac{1}{4\varkappa}\left(\frac{\partial^2 \ln g}{\partial x^0\,\partial x'}+g^{lm}\frac{\partial^2 g_{lm}}{\partial x^0\,\partial x^1}\right).$$

Отсюда

$$2\varkappa t_{01}=\frac{\partial^2 \ln g}{\partial x^0\,\partial x^1}-\frac{1}{2}\frac{\partial g^{lm}}{\partial x^0}\frac{\partial g_{lm}}{\partial x^1}=-2\varkappa t^{01}.\qquad(16.41)$$

В случае слабых волн будем иметь

$$t_{01} = t_0^1 = -t^{01} = \frac{c^3}{32\pi G}\left[\left(\frac{\partial h_{22}}{\partial t}\frac{\partial h_{22}}{\partial x} + \frac{\partial h_{33}}{\partial t}\frac{\partial h_{33}}{\partial x} + 2\frac{\partial h_{23}}{\partial t}\frac{\partial h_{23}}{\partial x}\right) - \right.$$
$$\left. - \frac{\partial^2}{\partial t\, \partial x}(h_{22}^2 + h_{33}^2 + 2h_{33}^2)\right], \quad (16.42)$$

где $h_{22} = g_{22} - 1$, $h_{33} = -h_{22} = g_{33} - 1$, $h_{23} = g_{23}$.

Напишем (16.42) в виде

$$t_0^1 = t_{01} = \frac{c^2}{16\pi G}[(h_{22}^2 + h_{23}^2)^{\cdot\cdot} - (\dot{h}_{22}^2 + \dot{h}_{23}^2)] =$$
$$= \frac{c^2}{16\pi G}\left\{\left[\left(\frac{h_{22} - h_{23}}{2}\right)^2 + h_{23}^2\right]^{\cdot\cdot} - \left[\left(\frac{\dot{h}_{22} - \dot{h}_{33}}{2}\right)^2 + \dot{h}_{23}^2\right]\right\} =$$
$$= \frac{G}{36\pi r^2 c^6}\left\{\left[\left(\frac{\ddot{D}_{22} - \ddot{D}_{33}}{2}\right)^2 + \ddot{D}_{23}^2\right]^{\cdot\cdot} - \left[\left(\frac{\dddot{D}_{22} - \dddot{D}_{33}}{2}\right)^2 + \dddot{D}_{23}^2\right]\right\}.$$
$$(16.43)$$

Используя преобразования (12.11) — (12.14), найдем, что

$$\dot{E}_g = \frac{G}{45c^5}[-\dddot{D}_{\alpha\beta}^2 + (\ddot{D}_{\alpha\beta}^2)^{\cdot\cdot}]. \quad (16.44)$$

При квадрупольном круговом излучателе и вообще для «стационарного» квадруполя $h_{22}^2 + h_{23}^2 = \mathrm{const}$, поэтому

$$\dot{E}_g = -\frac{G}{45c^5}\dddot{D}_{\alpha\beta}^2,$$

что совпадает с ранее полученным «классическим» результатом [см. (12.15)].

Вычислим теперь величину $t_0^0 = -\bar{\varepsilon}_g = \varepsilon_g$. Очевидно, что

$$t_0^0 = \frac{R}{2\varkappa} + \frac{1}{2\varkappa}\left(g^{00}\frac{\partial \Gamma_{l0}^l}{\partial x^0} - g^{lm}\frac{\partial \Gamma_{ml}^0}{\partial x^0}\right) = \frac{1}{2\varkappa}\left(g^{ik}\frac{\partial \Gamma_{ik}^1}{\partial x^1} - \frac{\partial \Gamma_{1l}^l}{\partial x^1}\right) =$$
$$= \frac{c^4}{16\pi G}\left(-\frac{\partial^2 \ln g}{\partial x^{02}} + \frac{1}{2}\frac{\partial g^{lm}}{\partial x^0}\frac{\partial g_{lm}}{\partial x_0}\right) \quad (16.45)$$

(заметим, что $R = 0$). Сравнивая (16.41) и (16.45), легко установить, что

$$\varepsilon_g = -\bar{\varepsilon}_g = t_0^0 = t_0^1 = t_{01}. \quad (16.46)$$

Поэтому, используя соотношение $\dot{E}_g = 4\pi r^2 c\varepsilon_g$, мы при определении $\dot{E}_g$ снова придем к (16.44).

Плотность энергии в слабой плоской волне будет

$$\varepsilon_g = -\bar{\varepsilon}_g = \frac{c^2}{16\pi G}[(h_{22}^2 + h_{23}^2)^{\cdot\cdot} - (\dot{h}_{22}^2 + \dot{h}_{22}^2)] =$$
$$= \frac{c^4}{16\pi G}\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}(h_{22}^2 + h_{23}^2) - \left(\frac{\partial h_{22}}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial h_{23}}{\partial x}\right)^2\right]. \quad (16.47)$$

В ньютоновском пределе, полагая, что $h_{22} = h_{23} = \varphi/c^2$, будем иметь

$$\varepsilon_g = \frac{1}{8\pi G}\left[-\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial^2\varphi^2}{\partial x^2}\right], \tag{16.48}$$

что для трехмерного случая дает

$$\varepsilon_g = \frac{1}{8\pi G}\,[-(\nabla\varphi)^2 + \Delta\varphi^2]. \tag{16.49}$$

Но, поскольку $\Delta\varphi^2$ не дает вклада в полную (интегральную) энергию, мы по-прежнему получаем

$$\varepsilon_g = -\frac{1}{8\pi G}(\nabla\varphi)^2. \tag{16.50}$$

Заметим, что для всех рассмотренных нами видов псевдотензора поток энергии в плоской гравитационной волне определяется выражением

$$t_0^1 = -T_0^1 + \frac{1}{2\varkappa\sqrt{-g}}\frac{\partial\chi_0^{1l}}{\partial\chi^l},$$

причем для всех видов псевдотензора величины $\chi_0^{1l} = 0$. Поэтому $t_0^1 = -T_0^1 = -R_0^1/\varkappa$; следовательно, во всех случаях значение потока энергии одинаково:

$$-2\varkappa t_0^1 = -2\varkappa t_{01} = 2\varkappa t^{01} = +\frac{1}{2}\frac{\partial g^{lm}}{\partial x^0}\frac{\partial g_{lm}}{\partial x^1} - \frac{\partial^2 \ln g}{\partial x^0\,\partial x^1}. \tag{16.51}$$

Точно так же, поскольку $\chi_0^{0l} = 0$,

$$t_1^0 = -T_0^0 = \bar{\varepsilon}_m = \frac{1}{\varkappa}\left(\frac{1}{2}R - R_0^0\right) = \frac{1}{2\varkappa}\left(-\frac{\partial^2\ln g}{\partial x^{02}} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}\frac{\partial g^{lm}}{\partial x^0}\frac{\partial g_{lm}}{\partial x^0}\right) = t_0^1 \tag{16.52}$$

(причем $R = 0$), где

$$\bar{\varepsilon}_м = -\bar{\varepsilon}_g = \varepsilon_g \tag{16.53}$$

есть энергия, теряемая на излучение.

В инерциальной системе отсчета

$$2\varkappa\,{}_0t_i^k = \delta_i^k\left(g^{ab}g_{lm}\frac{\partial^2 g^{lm}}{\partial x^a\partial x^b} - \frac{\partial^2 g^{lm}}{\partial x^l\partial x^m}\right) + \frac{\partial^2 g^{kr}}{\partial x^i\partial x^r} - g_{lm}g^{rk}\frac{\partial^2 g^{lm}}{\partial x^i\partial x^r}, \tag{16.54}$$

$$2\varkappa\,{}_0t_i^i = 2\varkappa t_0 = 3\left(g^{ab}g_{lm}\frac{\partial^2 g^{lm}}{\partial x^a\partial x^b} - \frac{\partial^2 g^{lm}}{\partial x^l\partial x^m}\right). \tag{16.55}$$

Для плоской волны $t_0 = 0$.

Всегда можно выбрать такую неинерциальную систему отсчета, в которой поток энергии гравитационного поля (волны) станет равным нулю, но в этой неинерциальной системе будут излучаться свои гравитационные волны и энергия поля «никуда не денется». Поэтому возражение Инфельда о невозможности существования гравитационных волн, несущих в любой системе отсчета энергию, отпадает.

Будем рассматривать так называемую локально-плоскую волну, для которой производные компонент g_{ik} по пространственным координатам в направлении распространения волны равны нулю.

В инерциальной (геодезической) системе координат $\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} = 0$, при этом 4-х тензор Римана R_{iklm} примет вид

$$R_{iklm} = -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{im}}{\partial x^k \partial x^l} + \frac{\partial^2 g_{kl}}{\partial x^i \partial x^m} - \frac{\partial^2 g_{il}}{\partial x^k \partial x^m} - \frac{\partial^2 g_{km}}{\partial x^i \partial x^l}\right). \tag{16.56}$$

Пусть волна распространяется вдоль оси $x = x^1$. Тогда

$$\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^2} = \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^3} = 0.$$

При этом, исходя из (16.56), можно найти:

$$R_{2020} = -\frac{1}{2}\frac{\partial^2 g_{22}}{\partial x^{02}}, \qquad R_{1220} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 g_{22}}{\partial x^0 \partial x^1},$$

$$R_{2030} = -\frac{1}{2}\frac{\partial^2 g_{23}}{\partial x^{02}}, \qquad R_{1230} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 g_{23}}{\partial x^0 \partial x^1},$$

$$R_{3030} = -\frac{1}{2}\frac{\partial^2 g_{33}}{\partial x^{02}}, \qquad R_{1320} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 g_{33}}{\partial x^0 \partial x^1},$$

$$R_{1212} = -\frac{1}{2}\frac{\partial^2 g_{22}}{\partial x^{12}}, \qquad R_{1330} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 g_{33}}{\partial x^0 \partial x^1},$$

$$R_{1213} = -\frac{1}{2}\frac{\partial^2 g_{23}}{\partial x^{12}}, \qquad R_{1313} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 g_{33}}{\partial x^{12}},$$

$$R_{1223} = R_{1323} = R_{1023} = R_{2323} = R_{2320} = R_{2330} = 0,$$

$$R_{1030} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{30}}{\partial x^0 \partial x^1} - \frac{\partial^2 g_{13}}{\partial x^{02}}\right), \qquad R_{1020} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{20}}{\partial x^0 \partial x^1} - \frac{\partial^2 g_{12}}{\partial x^{02}}\right),$$

$$R_{1310} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{13}}{\partial x^0 \partial x^1} - \frac{\partial^2 g_{30}}{\partial x^{12}}\right), \qquad R_{1210} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{12}}{\partial x^0 \partial x^1} - \frac{\partial^2 g_{20}}{\partial x^{12}}\right),$$

$$R_{1010} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 g_{10}}{\partial x^0 \partial x^1} - \left(\frac{\partial^2 g_{00}}{\partial x^{12}} + \frac{\partial^2 g_{11}}{\partial x^{02}}\right)\right]. \tag{16.57}$$

Если $T_{ik} = 0$, то $R_{ik} = 0$; используя квазигалилееву метрику найдем:

$$
\begin{aligned}
&R_{12} = R_{1020},\\
&R_{20} = R_{1210},\\
&R_{11} = R_{1010} - R_{1313} - R_{1312} = 0,\\
&R_{22} = R_{2020} - R_{1212} = 0,\\
&R_{33} = R_{3030} - R_{1313} = 0,\\
&R_{00} = R_{3030} + R_{2030} + R_{1010} = 0,\\
&R_{10} = R_{1220} + R_{1330} = 0,\\
&R_{13} = R_{1030} = 0,\\
&R_{23} = R_{2030} - R_{1213} = 0,\\
&R_{30} = R_{1310} = 0.
\end{aligned}
$$

Отсюда следует, что $R_{1030} = R_{1020} = R_{1310} = R_{1210} = 0$. Из уравнений для R_{11}, R_{22}, R_{32} и R_{00} следует, что $R_{1010} = 0$. Единственные отличные от нуля компоненты $R_{ik\,lm}$ написаны в (16.57), причем все они выражены через g_{22}, g_{33}, g_{23}.

Из уравнения

$$R_{00} = R_{3030} + R_{2020} = -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{33}}{\partial x^{02}} - \frac{\partial^2 g_{22}}{\partial x^{02}}\right) = 0$$

следует, что

$$\frac{\partial^2 g_{33}}{\partial x^{02}} = -\frac{\partial^2 g_{22}}{\partial x^{02}}. \tag{16.58}$$

Отсюда также следует, что

$$g_{33} = -g_{22} + A_1(x^1)\,x^0 + A_2(x^1). \tag{16.59}$$

В случае слабого поля выражение (16.56) справедливо во всем пространстве, и мы приходим к уже известным результатам для компонент поля

$$h_{22} = g_{22} - 1, \qquad h_{33} = g_{33} - 1, \qquad h_{23} = g_{23},$$

причем

$$\frac{\partial^2 h_{33}}{\partial x^{02}} = -\frac{\partial^2 h_{22}}{\partial x^{02}}.$$

Отсюда следует, что $h_{33} = -h_{22}$ $(A_1 = 0,\ A_2 = 2)$.

Необходимо особо отметить, что еще Эддингтон, видимо впервые, интегрировал не равную нулю дивергенцию

$$\frac{\partial}{\partial x^l}[\sqrt{-g}\,(g^{il}\delta\Gamma^k_{ik}-g^{ik}\delta\Gamma^l_{ik})]$$

как источник поля *.

Эддингтон решил рассмотреть конкретную задачу для одной частицы, обладающей шварцшильдовским полем. Ход его рассуждений был таков.

Поскольку

$$\delta\int\sqrt{-g}R\,d\Omega=\int\sqrt{-g}\left(R_{ik}-\frac{1}{2}g_{ik}R\right)\delta g^{ik}d\Omega+$$
$$+\int\frac{\partial}{\partial x^l}[\sqrt{-g}\,(g^{ik}\delta\Gamma^l_{ik}-g^{il}\delta\Gamma^k_{ik})]\,d\Omega=0,$$

и, полагая, что $\delta\Gamma^l_{ik}$ и $\delta\Gamma^k_{ik}$ на S_l не равны нулю (так как есть частицы, создающие поле, и поток энергии через гиперповерхность), будем иметь, что

$$\frac{1}{c}\int\frac{\partial}{\partial x^l}[\sqrt{-g}\,(g^{ik}\delta\Gamma^l_{ik}-g^{il}\delta\Gamma^k_{ik})\,d\Omega=$$
$$=\iiiint\frac{\partial}{\partial x^l}[\sqrt{-g}\,(g^{ik}\delta\Gamma^l_{ik}-g^{il}\delta\Gamma^k_{ik})]\,r^2dld\varphi d\theta cdt=A\neq 0.$$

Полагая, что $l=1$, и интегрируя по $x^l=x^1$, найдем

$$A=\iiint\sqrt{-g}\,(g^{ik}\delta\Gamma^1_{ik}-g^{i1}\delta\Gamma^k_{ik})\,r^2d\varphi d\theta cdt=$$
$$=\int 4\pi^2ds\,(g^{ik}\delta\Gamma^1_{ik}-g^{i1}\delta\Gamma^k_{ik}).$$

Подставляя значения Γ^k_{ik}, Γ^1_{ik}, g^{i1}, g^{ik} из шварцшильдовской метрики и варьируя только M, найдем, что $A=-4\pi\int r^2ds$ $\left(\delta\gamma'+\frac{2}{r}\delta\gamma\right)$, где

$$\gamma=1-\frac{2GM}{rc^2},\quad \gamma'=\frac{d\gamma}{dr}.$$

Отсюда следует, что

$$A=\frac{8\pi G}{c^2}\int ds\delta M=\frac{8\pi G}{c^4}\int\delta Eds=\varkappa\int\delta Eds,$$

где $ds=cdt\sqrt{-g}$; M — масса тела, создающего поле; $E=mc^2$

* А. Эддингтон. Теория относительности, § 63. ГТТИ, 1934.

Таким образом Эддингтон приходит к уравнению

$$\int \sqrt{-g}\left(R_{ik}-\frac{1}{2}g_{ik}R\right)d\Omega=\int \varkappa\delta E ds,$$

правая часть которого описывает источник поля — частицу.

Если мы захотим перейти к непрерывно распределенной материи, то надо положить, что

$$\delta E=\delta\varepsilon dV=\delta\rho c^2 dV;$$

тогда

$$\int \delta E ds=\int \sqrt{-g}\delta\varepsilon dV c dt=\int \sqrt{-g}\delta g^{ik}T_{ik}d\Omega,$$

$$\left(R_{ik}-\frac{1}{2}g_{ik}R\right)\delta g^{ik}=\varkappa T_{ik}\delta g^{ik},$$

откуда сразу получаем уравнение поля $R_{ik}-\frac{1}{2}g_{ik}R=\varkappa T_{ik}$.

Таким образом, из частного вывода Эддингтона следует и общий результат, что существенно подтверждает вывод, сделанный нами выше.

§ 17. Интегральные законы сохранения в общей теории относительности

Мы знаем, что интегральные законы сохранения

$$cP_i=\int \sqrt{-g}\,(T_i^k+t_i^k)\,dS_k \tag{17.1}$$

не справедливы в общем случае, а годятся только для линейных (афинных) преобразований, поскольку t_i^k является тензором лишь для этой группы преобразований.

Соотношение (17.1) следует из таких соображений. Если выполняются дифференциальные законы сохранения

$$\frac{\partial\sqrt{-g}A_i^k}{\partial x^k}=0, \tag{17.2}$$

где A_i^k — тензор, то имеют место интегральные законы сохранения

$$c\bar{P}_i=\int \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x^k}\left(\sqrt{-g}A_i^k\right)\sqrt{-g}\,d\Omega=\int \sqrt{-g}A_i^k dS_k. \tag{17.3}$$

Но если A_i^k не является тензором, то (17.3) есправедливо. Поэтому из дифференциальных условий (тождеств)

$$\frac{\partial}{\partial x^k}[\sqrt{-g}(t_i^k + T_i^k)] = 0 \tag{17.4}$$

не следует в общем виде (17.1).

Тождество (17.4), по сути дела, является тождеством Бианки

$$\left(R_i^k - \frac{1}{2}\delta_i^k R\right)_{;k} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial(\sqrt{-g}R_i^k)}{\partial x^k} - \frac{1}{2}\left(R^{lm}\frac{\partial g_{lm}}{\partial x^i} + \frac{\partial R}{\partial x^i}\right) = 0. \tag{17.5}$$

При этом только члены

$$\int\frac{1}{\sqrt{-g}}\left(\frac{\partial\sqrt{-g}R_i^k}{\partial x^k} - \frac{1}{2}\frac{\partial R}{\partial x^i}\right)\sqrt{-g}\,d\Omega = \int\sqrt{-g}\left(R_i^k dS_k - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{2}RdS_i\right)$$

дают законы сохранения. Член $\frac{1}{2}R^{lm}\frac{\partial g_{lm}}{\partial x^i}$ будет нарушать общий интегральный закон сохранения, а следовательно, в общем случае уравнения (17.1) не могут иметь места.

Для того чтобы вывести истинные законы сохранения в интегральном виде, надо поступать иным образом: интегрировать не тензорные или векторные, а скалярные плотности. Правомерность интегрирования скаляра в римановом пространстве не может вызывать сомнений и забот в выборе «манеры» интегрирования (скаляр есть скаляр, ему не «страшна» кривизна пространства).

Единственным простым скаляром, характеризующим риманово пространство, является $L = -R/2\varkappa$. Напишем сначала выражение для действия:

$$S = -\frac{1}{c}\int\sqrt{-g}Ld\Omega = \frac{1}{2c}\int\sqrt{-g}\,\frac{R}{\varkappa}\,d\Omega = -$$
$$-\frac{1}{2c}\int\sqrt{-g}\;T\,d\Omega. \tag{17.6}$$

Далее очевидно, что

$$-\sqrt{-g}\,Td\Omega = \sqrt{-g}(\varepsilon - 3p)\,dV\,dx^0 = dE_{\text{м}}dx^0, \tag{17.7}$$

причем

$$dE_{\text{м}} = \sqrt{-g}\,dv\;(\varepsilon - 3p) = dV^*(\varepsilon - 3p),$$

где $dV^* = \sqrt{-g}\,dV$ — элемент объема в системе отсчета, а $\sqrt{-g} = 1$. Отсюда следует, что

$$S = \frac{1}{2c}\iint dE_{\text{м}}dx^0 = \frac{1}{2c}\int E_{\text{м}}dx^0 = \frac{1}{2}\int E_{\text{м}}d\tau, \tag{17.8}$$

$$\frac{\partial S}{\partial \tau} = \frac{1}{2} E_{\text{м}} = \frac{Mc^2}{2}, \qquad l_\alpha = \frac{\partial S}{\partial x^\alpha} = 0. \tag{17.9}$$

Таким образом, полная энергия, содержащаяся в каком-либо объеме V, равна $E_{\text{м}}/2$. Такой же результат, как мы видели, получается в статической модели нашей Вселенной Эйнштейна.

По определению

$$\frac{\partial S}{\partial \tau} = \frac{\partial S_g}{\partial \tau} = E_0. \tag{17.10}$$

Полная энергия определяется только частицами с массой покоя, не равной нулю, т. е. тензором ${}_1T_i^k$ (для тензора ${}_2T_i^k$, характеризующего частицы с массой покоя, равной нулю, $T_2 = 0$).

Поскольку

$$E_0 = E_{\text{м}} + E_g = \frac{E_{\text{м}}}{2},$$

то

$$E_g = -\frac{E_{\text{м}}}{2}. \tag{17.11}$$

В самом деле,

$$\varepsilon_g = -t_0^0 = -\frac{\varepsilon + 3p}{2} = -\frac{E_{\text{м}}^*}{2V},$$

откуда и следует (17.11).

Эти соотношения справедливы для всех моделей нашей Вселенной, как статических, так и динамических (при $\lambda = 0$), но в случае динамических моделей при $E_0 = E_{\text{м}}/2$, как мы видели ранее [см. § 14 и § 17], не выполняются условия $\varepsilon \sim a^{-3}$ или при $\varepsilon \sim a^{-3}$ не выполняется закон сохранения энергии

$$T_{i,k}^k = 0. \tag{17.12}$$

Уравнение (17.12) при $\varepsilon \sim a^{-3}$ выполняется лишь при условии, что

$$E_0 = E_{\text{м}}, \qquad E_g = 0, \tag{17.13}$$

что противоречит (17.11). Таким образом, мы лишний раз убеждаемся в том, что динамические фридмановские модели нашей Вселенной являются неудовлетворительными, внутренне противоречивыми в данном случае с энергетической стороны.

Если теперь принять, что $L = L_{\text{м}} = p$, то

$$S_{\text{м}} = -\int \sqrt{-g}\, p dV\, d\tau = \int \sqrt{-g} \varepsilon dV\, d\tau$$

и

$$\frac{\partial S_{\text{м}}}{\partial \tau}=\int \sqrt{-g}\,p\,dv=E_{\text{м}}=E_{\text{м, кл}}+Mc^2, \qquad (17.14)$$

в полном согласии с термодинамическим определением энергии; здесь $E_{\text{м, кл}}$ — классическая часть внутренней энергии, Mc^2 — полная энергия частиц (энергия покоя плюс кинетическая энергия). Полная энергия снова при таком написании будет $E_0=E_{\text{м}}+E_g=E_{\text{м}}/2$, поскольку $E_g=-E_{\text{м}}/2$.

Так как во фридмановских моделях все вычисления проводились в собственной системе отсчета, то под dM там надо понимать величины $dM=\dfrac{dM_0}{\sqrt{1-\frac{a^2(M_0)}{c^2}}}$, т. е. массу покоя с учетом кинетической энергии.

Следует также заметить, что элемент объема $dv=\dfrac{dv_0}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}=\dfrac{dv_0}{\theta}$; здесь dv_0 — элемент объема в собственной системе отсчета, dM_0 — масса покоя. Поэтому удельный объем $v=\dfrac{v_0}{\theta}$, $\dfrac{dV}{v}=\dfrac{dV_0}{v_0}$, что подтверждает законность соотношения (17.7) и последующих соотношений.

§ 18. Тензор материи и уравнения движения

Мы выяснили [(см. (16.19)], что в случае действия для материи

$$S_{\text{м}}=\frac{1}{c}\int \sqrt{-g}\,L_{\text{м}}\,d\Omega \qquad (18.1)$$

будем иметь

$$\delta S_{\text{м}}=\frac{1}{c}\int \delta\sqrt{-g}\,L_{\text{м}}\,d\Omega=-\frac{1}{2c}\int \sqrt{-g}\,T_{ik}\delta g^{ik}\,d\Omega, \qquad (18.2)$$

где $L_{\text{м}}$ — лагранжиан для материи, T_{ik} — тензор энергии-импульса материи. При этом уравнения Лагранжа имеют вид

$$-\frac{\partial(\sqrt{-g}\,L_m)}{\partial g^{ik}}=\frac{\sqrt{-g}}{2}\,T_{ik}. \qquad (18.3)$$

Поскольку для электромагнитного поля

$$L_{э} = -\frac{1}{16\pi} F_{ik}F^{ik} = -\frac{1}{16\pi} F_{ik}F_{lm} g^{il} g^{ik}, \tag{18.4}$$

то

$$_{э}T_{ik} = \frac{1}{4\pi}\left(F_{il}F^{l}_{k} - \frac{1}{4} g_{ik}F_{lm}F^{lm}\right). \tag{18.5}$$

Теперь необходимо выяснить, какой вид имеет лагранжиан для вещества. Мы знаем, что термодинамическими («газодинамическими») инвариантами как в специальной, так и в общей теории относительности являются p и σ (где σ — энтропия, отнесенная к единице полной массы или энергии). Будем рассматривать лишь адиабатические процессы — процессы, протекающие без диссипации энергии. При этом вдоль мировой линии $\frac{d\sigma}{ds} = 0$, $\sigma = \mathrm{const}$; поэтому единственным инвариантом — скаляром является давление среды p.

Найдем его выражение через g_{ik} и плотность действия $\overline{S}$ (далее мы будем плотность $\overline{S}$ обозначать через S).

Уравнение Гамильтона — Якоби для материальной точки в римановом пространстве (в общей теории относительности), как известно, имеет вид

$$g^{ik}\frac{\partial S^*}{\partial x^i}\frac{\partial S^*}{\partial x^k} = -m^2c^2 = -\frac{E^2}{c^2}, \tag{18.6}$$

где E — энергия частицы, S^* — действие;
$\frac{\partial S^*}{\partial x^i} = p_i = mcu_i$ есть 4-х импульс частицы, $\frac{\partial S^*}{\partial x^\alpha} = p_\alpha = \frac{ma_\alpha}{\sqrt{1-\frac{a^2}{c^2}}} = \frac{ma_\alpha}{\theta}$ — 3-х импульс и $c\frac{\partial S^*}{\partial x^0} = E$ — энергия частицы.

В случае сплошной среды энергия, приходящаяся на одну частицу,

$$E = \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial n}\right)_\sigma = mw,$$

где w — теплосодержание единицы полной массы (включая внутреннюю энергию), σ — энтропия, n — плотность числа частиц.

При этом (18.6) можно написать в виде

$$g^{ik}\frac{\partial S^*}{\partial x^i}\frac{\partial S^*}{\partial x^k} = -m^2\frac{w^2}{c^2}. \tag{18.7}$$

Вводя действия, рассчитанные на единицу массы, $S = S^*/m$, окончательно напишем уравнение (18.8), являющееся уравнением Гамильтона — Якоби для сплошной среды, в виде

$$g^{ik}\frac{\partial S}{\partial x^i}\frac{\partial S}{\partial x^k}+\frac{w^2}{c^2}=0, \tag{18.8}$$

причем $c\dfrac{\partial S}{\partial x^i}=wu_i$.

Лагранжианом в механике сплошных сред является давление

$$p=L=\frac{w-E}{v}, \tag{18.9}$$

где $v\sim 1/n$ — удельный объем. Из (18.8) и (18.9) находим

$$L=p=\frac{1}{v}\left(-E+ic\sqrt{g^{ik}S_iS_k}\right). \tag{18.10}$$

Кроме того, можно написать, что

$$L=p=\frac{1}{4}\left[(p+\varepsilon)\,u_iu_ku_lu_m\,g^{il}g^{km}+(3p-\varepsilon)\right],$$

где для сокращения вычислений введено $S_i=\dfrac{\partial S}{\partial x^i}$.

Прежде всего найдем тензор энергии-импульса для лагранжиана (18.10). Как известно,

$$\frac{\sqrt{-g}}{2}T_{ik}=-\frac{\partial(\sqrt{-g}\,L)}{\partial g^{ik}}+\frac{\partial}{\partial x^l}\frac{\partial(\sqrt{-g}\,L)}{\partial\dfrac{\partial g^{ik}}{\partial x^l}}+\ldots \tag{18.11}$$

При этом величины S_i считаются постоянными.

Вычисления дают

$$T_{ik}=-L\frac{\partial\ln g}{\partial g^{ik}}-2\frac{\partial L}{\partial g^{ik}}=g_{ik}p-2\frac{\partial L}{\partial g^{ik}}=$$

$$=g_{ik}\,p-\frac{icS_iS_k}{v\sqrt{g^{lm}S_lS_m}}\left(1-\frac{dE+pdv}{dw}\right).$$

Для адиабатических процессов

$$\frac{d\sigma}{ds}=0, \tag{18.12}$$

где s — интервал.

Поскольку $dE = Td\sigma - pdv$, что при (18.12) дает $dE + pdv = 0$, то имеем

$$-\frac{icS_i S_k}{\sqrt{g^{lm} S_l S_m}}\left(1 - \frac{dE + pdv}{dw}\right) = \frac{c^2 S_i S_k}{vw} = (p + \varepsilon)\, u_i u_k.$$

Далее очевидно, что

$$T_{ik} = (p + \varepsilon)\, u_i u_k + g_{ik} p, \tag{18.13}$$

и мы получили правильное известное выражение для тензора энергии-импульса.

Это же выражение можно получить, если воспользоваться другим вариационным уравнением Лагранжа

$$\sqrt{-g}\, T_i^k = \sqrt{-g}\, L\delta_i^k - \frac{\partial S}{\partial x^i} \frac{\partial(\sqrt{-g}\, L)}{\partial \dfrac{\partial S}{\partial x^k}}. \tag{18.14}$$

При этом величины g^{ik} считаются постоянными. Очевидно, что

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial(\sqrt{-g}\, L)}{\partial S_k} = \frac{\partial L}{\partial S_k} = -\frac{cu^k}{v} \text{ и } T_i^k = (p + \varepsilon)\, u_i u^k + \delta_i^k p. \tag{18.15}$$

Уравнения поля имеют вид

$$\frac{\partial(\sqrt{-g}\, L)}{\partial S} - \frac{\partial}{\partial x^k} \frac{\partial(\sqrt{-g}\, L)}{dS_k} = 0. \tag{18.16}$$

Вычисления дают

$$\frac{\partial}{\partial x^k}\left(\sqrt{-g}\, \frac{cg^{ik} S_i}{vw}\right) = \frac{\partial}{\partial x^k}\left(\sqrt{-g}\, \frac{u_k}{v}\right) = 0, \tag{18.17}$$

что дает уравнение неразрывности. Величины S и $\frac{1}{v\theta} = \delta$ являются канонически сопряженными, поскольку $\frac{\partial L}{\partial \dot{S}} = -\delta$.

Для среды, подчиняющейся уравнению состояния,

$$pv^k = A = \text{const}, \quad w = \alpha c^2 + \frac{k}{k-1} A^{1/k} p^{(k-1)/k}, \tag{18.18}$$

где $\alpha = 1$ или 0 соответственно для релятивистского и ультрарелятивистского случаев. При этом

$$L = \text{const}\,(i\sqrt{g^{ik} S_i S_k} - \alpha c)^{k/(k-1)}. \tag{18.19}$$

[Уравнение (18.11) снова дает правильный тензор поля, что вполне естественно.]

Уравнения поля приводят к важному уравнению (18.21), удобному для решения. Поскольку

$$-\frac{\partial(\sqrt{-g}\,L)}{\partial S_k}=\text{const}\,\frac{k}{k-1}\,(i\sqrt{g^{rs}S_rS_s}-\alpha c)^{1/(k-1)}\,\frac{S^k}{i\sqrt{g^{sm}S_lS_m}},$$

то уравнения поля примут вид

$$\frac{\partial}{\partial x^k}\left[\sqrt{-g}\,\frac{S^k}{i\sqrt{g^{lm}S_lS_m}}(i\sqrt{g^{rs}S_rS_s}-\alpha c)^{1/(k-1)}\right]=0. \quad (18.20)$$

Вычисляя, найдем, что

$$-\sqrt{S_rS^r}\left[\frac{2-k}{2(k-1)}S^k\frac{\partial}{\partial x^k}(S_iS^i)+S_iS^i\frac{\partial S^k}{\partial x^k}+\right.$$
$$\left.+S_iS^iS^k\frac{\partial\ln\sqrt{-g}}{\partial x^k}\right]=\alpha c\left[S_iS^i\frac{\partial S^k}{\partial x^k}-\right.$$
$$\left.-\frac{1}{2}S^k\frac{\partial(S_iS^i)}{\partial x^k}+S_iS^iS^k\frac{\partial\ln\sqrt{-g}}{\partial x^k}\right]. \quad (18.21)$$

Уравнение (18.21) является результирующим скалярным уравнением, описывающим изэнтропические движения релятивистского газа в римановом пространстве (в собственном поле тяжести). Его удобнее написать в виде

$$(S_iS^i)^{\frac{2-k}{2(k-1)}}S^k\frac{\partial\ln\sqrt{-g}}{\partial x^k}+\frac{\partial}{\partial x^k}\left[S^k(S_iS^i)^{\frac{2-k}{2(k-1)}}\right]=$$
$$=\alpha c\,(S_iS^i)^{\frac{2-k}{2(k-1)}}\left(\frac{\partial\ln\sqrt{-g}}{\partial x^k}\,\frac{S^k}{\sqrt{-S_lS^l}}+\frac{\partial}{\partial x^k}\,\frac{S^k}{\sqrt{-S_lS^l}}\right). \quad (18.22)$$

В случае ультрарелятивистского газа, когда $\alpha=0$, будем иметь

$$(S_iS^i)^{\frac{2-k}{2(k-1)}}S^k\frac{\partial\ln\sqrt{-g}}{\partial x^k}+\frac{\partial}{\partial x^k}\left[S^k(S_iS^i)^{\frac{2-k}{2(k-1)}}\right]=0. \quad (18.23)$$

В частном, но самом важном и естественном случае $k={}^4/_3$; тогда

$$S_iS^iS^k\frac{\partial\ln\sqrt{-g}}{\partial x^k}+\frac{\partial}{\partial x^k}(S_iS^iS^k)=0. \quad (18.24)$$

При $k=2$ имеем

$$S^k \frac{\partial \ln \sqrt{-g}}{\partial x^k} + \frac{\partial S^k}{\partial x^k} = 0,$$

или

$$\frac{\partial (\sqrt{-g}\, S^k)}{\partial x^k} = 0. \qquad (18.25)$$

При дальнейших преобразованиях и вычислениях полезно заметить, что

$$\frac{\partial}{\partial x^k}(S_i S^i) = \frac{\partial S}{\partial x^l}\left(\frac{\partial S}{\partial x^i}\frac{\partial g^{il}}{\partial x^k} + 2g^{il}\frac{\partial^2 S}{\partial x^i\, \partial x^k}\right);$$

$$\frac{\partial S^k}{\partial x^k} = \frac{\partial S}{\partial x^l}\frac{\partial g^{kl}}{\partial x^k} + g^{kl}\frac{\partial^2 S}{\partial x^k\, \partial x^l}.$$

Эти соотношения позволяют написать основное уравнение (18.21) в виде

$$g^{ks} S_r S_l \left(g^{il} S_{ik} + \frac{1}{2} S_i \frac{\partial g^{il}}{\partial x^k}\right)\left(\frac{2-k}{k-1}\sqrt{-g^{mn} S_m S_n} + \alpha c\right) +$$
$$+ g^{kl}\left(S_{kl} + S_l \frac{\partial g^{kl}}{\partial x^k}\right) g^{ir} S_i S_r \left(\sqrt{-g^{mn} S_m S_n} - \alpha c\right) +$$
$$+ \frac{\partial \ln \sqrt{-g}}{\partial x^k} S_r S_l S_m g^{kr} g^{lm} \left(\sqrt{-g^{mn} S_m S_n} - \alpha c\right) = 0. \qquad (18.26)$$

Если ввести скорость звука ω, то только что написанным соотношениям можно придать иной, более простой вид.

Напишем уравнение неразрывности в виде

$$\frac{S^k}{vw}\frac{\partial \ln \sqrt{-g}}{\partial x^k} + \frac{\partial}{\partial x^k}\left(\frac{S^k}{vw}\right) = 0.$$

Подставляя значение

$$-\frac{d \ln w}{d \ln v} = \frac{\omega^2}{c^2} = \frac{kAv^{1-k}}{\alpha c^2 + \frac{k}{k-1} A v^{1-k}} = (k-1)\left(1 - \frac{\alpha c^2}{w}\right),$$

мы сразу придем к уравнению

$$S^k \frac{\partial \ln \sqrt{-g}}{\partial x^k} + S^k_k = S^k\left(1 - \frac{\omega^2}{c^2}\right)\frac{\partial \ln w}{\partial x^k} = \frac{S^k}{2}\left(1 - \frac{c^2}{\omega^2}\right)\frac{\partial \ln w^2}{\partial x^k}.$$

После некоторых простых преобразований будем иметь

$$S_k S^k \left(S^l \frac{\partial \ln \sqrt{-g}}{\partial x^l} + S^l_l\right) +$$
$$+ \frac{S^l}{2}\left(\frac{c^2}{\omega^2} - 1\right)\left(S_i S_k \frac{\partial g^{ik}}{\partial x^l} + 2S^k S_{kl}\right) = 0.$$

Полученные результаты легко обобщаются на случай движения заряженных частиц сплошной среды в электромагнитном поле. [В этом более общем случае следует учесть диссипацию энергии на джоулево тепло и положить $\frac{ds}{dS} \neq 0$]. При этом, как хорошо известно, для частицы выполняются следующие соотношения:

$$\frac{\partial S^*}{\partial x^i} = mcu_i + \frac{e}{c} A_i, \tag{18.27}$$

$$\left(\frac{\partial S^*}{\partial x^i} - \frac{e}{c} A_i\right)\left(\frac{\partial S^*}{\partial x^k} - \frac{e}{c} A_k\right) g^{ik} + m^2c^2 = 0,$$

где A_i — компоненты вектора электромагнитного поля.

Для сплошной среды аналогично будем иметь

$$cS_i = c\frac{\partial S}{\partial x^i} = wu_i + \frac{e}{m} A_i, \tag{18.28}$$

где m — полная масса частицы. Далее имеем

$$\frac{w^2}{c^2} = -\left(S_i - \frac{e}{mc} A_i\right)\left(S^i - \frac{e}{mc} A^i\right). \tag{18.29}$$

Легко убедиться в том, что все уравнения, выведенные выше, обобщаются на случай электромагнитного поля простой заменой в них

$$S_i \to \hat{S}_i = S_i - \frac{e}{mc} A_i. \tag{18.30}$$

Проверим теперь полученные соотношения следующим образом. Законы сохранения вещества вместе с электромагнитным полем даются уравнениями

$$\hat{T}^k_{i;k} = (T^k_i + \overline{T}^k_i)_{;k} = 0, \tag{18.31}$$

где

$$\overline{T}^k_i = \frac{1}{4\pi}\left(F_{il}F^{kl} - \frac{1}{4}\delta^k_l F_{lm}F^{lm}\right) \tag{18.32}$$

— тензор энергии-импульса электромагнитного поля.

Напишем (18.31) в виде

$$T^k_{i,k} = -\overline{T}^k_{i;k} = f_i, \tag{18.33}$$

где f_i — 4-х сила взаимодействия вещества с электромагнитным полем. Вычислим

$$T^k_{i,k} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial(\sqrt{-g}\, T^k_i)}{\partial x^k} - \frac{T^{kl}}{2}\frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i} = f_i. \tag{18.34}$$

Преобразуя (18.34), найдем, что

$$v f_i = \frac{d(wu_i)}{ds} + v\frac{\partial p}{\partial x^i} + \frac{vwu_i\,\partial\left(\sqrt{-g}\,\frac{u^k}{v}\right)}{\partial x^k} - \frac{w}{2}u^k u^l\frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i}, \tag{18.35}$$

где

$$u^k\frac{\partial}{\partial x^k} = \frac{d}{ds}.$$

Умножая скалярно на u^i и используя термодинамическое условие

$$dw = vdp + Td\sigma, \tag{18.36}$$

найдем

$$v f_i u^i + T\frac{d\sigma}{ds} = -\frac{vw}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x^k}\left(\sqrt{-g}\,\frac{u^k}{v}\right) = 0. \tag{18.37}$$

Левая часть определяет выделяемое джоулево тепло, правая — дает уравнение неразрывности.

Теперь можно написать (18.35) в виде

$$\frac{d(wu_i)}{ds} + \frac{\partial w}{\partial x^i} - \frac{w}{2}\,u^k u^l\frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i} = v f_i + T\frac{\partial\sigma}{\partial x^i}. \tag{18.38}$$

Система уравнений (18.37) и (18.38) при известных f_i и g_{ik} полностью определяет движение сплошной среды.

Преобразуя $u^k u^l\frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i} = 2u^k\frac{\partial u_k}{\partial x^i}$, найдем

$$\frac{d(wu_i)}{ds} + \frac{\partial w}{\partial x^i} - wu^k\frac{\partial u_k}{\partial x_i} = v f_i + T\frac{\partial\sigma}{\partial x^i}. \tag{18.39}$$

Эти уравнения можно написать в таком виде:

$$u^k\left[\frac{\partial(wu_i)}{\partial x^k} - \frac{\partial(wu_k)}{\partial x^i}\right] = v f_i + T\frac{\partial\sigma}{\partial x^i}. \tag{18.40}$$

Вычислим теперь $\overline{T}^k_{i;k} = -f_i$. Простые выкладки показывают, что

$$\overline{T^k_{i,k}} = -f_i = -\frac{1}{c}F_{ik}j^k, \tag{18.41}$$

где

$$F_{ik} = \frac{\partial A_k}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^k}. \tag{18.42}$$

Компоненты электромагнитного поля и вектора тока связаны уравнением Максвелла

$$\frac{\partial F_{ik}}{\partial x^l}+\frac{\partial F_{li}}{\partial x^k}+\frac{\partial F_{kl}}{\partial x^i}=0, \tag{18.43}$$

$$\frac{4\pi}{c}j^i=\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial(\sqrt{-g}\,F^{ik})}{\partial x^k}, \tag{18.44}$$

причем имеет место очевидное уравнение неразрывности для тока

$$\frac{\partial(\sqrt{-g}\,j^i)}{\partial x^i}=0. \tag{18.45}$$

В этих условиях (18.38) принимает вид

$$\frac{d(wu_i)}{ds}-\frac{\partial w}{\partial x^i}-\frac{w}{2}\,u^k u^l\,\frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i}=-\frac{v}{c}F_{ik}j^k+T\frac{\partial\sigma}{\partial x^i}. \tag{18.46}$$

Если мы рассматриваем процессы, протекающие без диссипации энергии, то

$$f_i u^i=0,\quad \frac{d\sigma}{ds}=0,\quad \sigma=\mathrm{const}. \tag{18.47}$$

Тогда

$$j^k=\frac{\delta c}{\sqrt{-g}}\frac{dx^k}{dx^0}=\delta c u^k\frac{ds}{\sqrt{-g}\,dx^0}=\delta c\frac{u^k}{\sqrt{-g}\,u^0},$$

где δ — плотность заряда, $u^k=\frac{dx^k}{ds}$, $\frac{\delta v}{\sqrt{-g}u^0}=\frac{e}{m}$,

$$\frac{v}{c}F_{ik}j^k=\frac{e}{m}F_{ik}u^k, \tag{18.48}$$

$$vf_i=-vT^k_{i,k}=\frac{v}{c}F_{ik}j^k=\frac{e}{m}F_{ik}u^k=\frac{e}{m}u^k\left(\frac{\partial A_k}{\partial x^i}-\frac{\partial A_i}{\partial x^k}\right). \tag{18.49}$$

При этом (18.40) принимает вид

$$u^k\left[\frac{\partial\left(wu_i+\frac{e}{m}A_i\right)}{\partial x^k}-\frac{\partial\left(wu_k+\frac{e}{m}A_k\right)}{\partial x^i}\right]=0, \tag{18.50}$$

откуда

$$c\frac{\partial S}{\partial x^i}=wu_i+\frac{e}{m}A_i,$$

и мы приходим к уравнению (18.28).

В случае среды, подчиняющейся уравнению состояния $p = (k-1)\varepsilon$ (ультрарелятивистский газ), уравнения (18.50) и (18.28) при замене

$$w \to c^2 \left(\frac{p}{p_0}\right)^{(k-1)/k}$$

(где p_0 — некоторое начальное давление) будут иметь место и при $\sigma \neq \mathrm{const}$, но при условии $\frac{d\sigma}{ds} = 0$, т. е. не только для изэнтропических, но и для адиабатических движений.

Вычислим теперь величины

$$\frac{\partial (\sqrt{-g}\, L_{\text{м}})}{\partial x^i} = \frac{\partial \sqrt{-g}\, L_{\text{м}})}{\partial g^{lm}} \frac{\partial g^{lm}}{\partial x^i} + \sqrt{-g}\, \frac{\partial L_{\text{м}}}{\partial S} \frac{\partial S}{\partial x^i} + \\ + \sqrt{-g}\, \frac{\partial L_{\text{м}}}{\partial S_k} \frac{\partial S_k}{\partial x^i}. \quad (18.51)$$

Поскольку уравнения поля имеют вид

$$\frac{(\partial \sqrt{-g}\, L_{\text{м}})}{\partial S} - \frac{\partial}{\partial x^k} \frac{(\partial \sqrt{-g}\, L_{\text{м}})}{\partial S_k} = 0, \qquad (18.52)$$

то (18.51) можно написать в виде

$$\delta_i^k \frac{\partial (\sqrt{-g}\, L_{\text{м}})}{\partial x^k} = -\frac{T_{lm}\sqrt{-g}}{2} \frac{\partial g^{lm}}{\partial x^i} + \\ + \frac{\partial}{\partial x^k} \frac{\partial (\sqrt{-g}\, L_{\text{м}})}{\partial S_k} S_i + \frac{\partial (\sqrt{-g}\, L_{\text{м}})}{\partial S_k} \frac{\partial S_i}{\partial x^k} = \\ = \frac{T^{lm}\sqrt{-g}}{2} \frac{\partial g_{lm}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x^k}\left[\frac{\partial (\sqrt{-g}\, L_{\text{м}})}{\partial S_k} S_i\right],$$

или

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^k}\left[\delta_i^k \sqrt{-g}\, L_{\text{м}} - \frac{\partial (\sqrt{-g}\, L_{\text{м}})}{\partial S_k} S_i\right] = \frac{T^{lm}}{2} \frac{\partial g_{lm}}{\partial x^i}.$$

Так как

$$\delta_i^k \sqrt{-g}\, L_{\text{м}} - \frac{\partial (\sqrt{-g}\, L_{\text{м}})}{\partial S_k} S_i = \sqrt{-g}\, T_i^k,$$

то

$$\frac{\partial (\sqrt{-g}\, T_i^k)}{\sqrt{-g}\, \partial x^k} - \frac{T^{lm}}{2} \frac{\partial g_{lm}}{\partial x^i} = T_{i,k}^k = 0. \qquad (18.53)$$

Таким образом, мы приходим к уже известному результату, вытекающему из уравнений гравитационного поля и тождеств Бианки. Уравнение (18.53) является уравнением сохранения движения и неразрывности для сплошной среды, в чем мы уже убедились выше.

§ 19. Основные замечания по общей теории относительности

Подводя итоги результатам, которые мы получили выше, можно обнаружить ряд существенных недостатков общей теории относительности.

Прежде всего заметим, что более корректный вариационный вывод основных уравнений общей теории относительности, как нам кажется, заслуживает внимания, поскольку он рационален и позволяет единым образом из одного «геометрического» лагранжиана скалярной кривизны R получить все необходимые уравнения. Те, кому этот метод не понравится, могут получить все те же уравнения старым, «дуалистическим» методом так, что полученные уравнения (имеется в виду новое выражение для t_i^k) не могут вызвать сомнений. Этот формализм (как наш, так и «классический»), при котором не выбрасываются вторые производные g_{ik} по координатам, кажется наиболее естественным и точным. При этом мы получили совершенно однозначный результат в смысле «интерпретации» законов сохранения материи и гравитационного поля.

Поскольку риманово пространство не обладает никакими свойствами симметрии (оно полностью неоднородно), уравнения гравитационного поля не допускают никаких групп преобразований и, следовательно, никаких законов сохранения. В римановом пространстве законы сохранения приобретают смысл тождеств, что и было нами показано выше.

Далее мы показали, что всегда существуют гравитационные волны, которые переносят энергию. Здесь следует снова отметить, что большая заслуга в модификации псевдотензора введением в него вторых производных g_{ik} принадлежит Меллеру и Мицкевичу. Однако их псевдотензор отличается от нашего тем, что антисимметричная часть псевдотензора у них в два раза больше нашей.

Выводы, проделанные Меллером, не очень четкие, причем t_i^k выбиралось таким образом, чтобы выполнялось условие $cp_0 = E_0 = E_{\text{м}}$. Мицкевич дал почти аналогичный вывод, но потом от него отказался в поисках истинного тензора. Однако надо заметить, что в римановом пространстве истинный тензор поля не имеет смысла. Соответствующий выбор χ_i^{kl} позволяет получить любое значение cP_0.

В случае слабого поля, или, точнее говоря, поля, в котором допускаются линейные преобразования координат, наш псевдотензор, псевдотензор Эйнштейна и псевдотензор Ландау — Лифшица дают для плоских волн одинаковые результаты, что естественно. Псевдотензор Меллера — Мицкевича дает такой же результат, так как «добавка» к нашему псевдотензору при этом обращается в нуль; различие имеет место лишь в интегральных законах сохранения.

Поскольку в нашем формализме (как и следовало ожидать) уравнение поля имеет обычный вид, все космологические модели и связанные с ними неприятности сохраняются. Сейчас мы можем сформулировать следующие связанные с этим положения.

Нельзя построить однородные динамические модели нашей Вселенной так, чтобы решение уравнений поля

$$R_i^k - \frac{1}{2}\delta_i^k R = \varkappa\,({}_1T_i^k + {}_2T_i^k) \qquad (19.1)$$

подчинялось разумному граничному условию $a \sim \tau$, $\chi = \chi_0$ при

$$v = c, \qquad (19.2)$$

и так, чтобы в разных системах отсчета первая характеристика была бы прямолинейной.

Возможно построить динамические модели конечной неоднородной нашей Вселенной, удовлетворяющие этому условию, что, вообще говоря, не вполне отвечает данным наблюдений.

В статической модели Вселенной Эйнштейна, рассматривая теорию двух видов с массой покоя, не равной нулю и равной нулю (что более разумно, чем учет только вещества), можно получить интересный результат:

$$E_0 = {}_{(1)}E_{\text{м}} + {}_{(2)}E_g = \frac{E_{\text{м}}}{2} = \frac{Mc^2}{2} = cp_0. \qquad (19.3)$$

Для этой модели в собственной системе отсчета полная энергия получается равной нулю. Однако в общем нелинейном случае всегда можно выбрать такую систему отсчета, в которой $cp_i \neq 0$, но эта операция не будет законной.

Рассматривая асимптотическую задачу при $r/a \ll 1$, когда мы можем применять шварцшильдовскую метрику, при $(a \to \infty)$ найдем, что $E_0 = cp_0 = Mc^2/2$.

В случае псевдотензора Меллера — Мицкевича получаем $E_0 = Mc^2$, что соответствует существованию только одного сорта материи в нашей Вселенной. Этот вариант представляется нам ненадежным, поскольку мы уже знаем из наблюдений, что энергия различного вида частиц с массой покоя, равной нулю (сюда же должно войти и гравитационное излучение — гравитоны), дает существенный вклад в полную энергию нашей Вселенной. У нас этот вклад равен половине энергии вещества, взятой с обратным знаком. Отсюда следует, что это в основном вклад энергии гравитационного поля, поскольку именно его энергия отрицательна, что, кстати, следует из отрицательности давления гравитации, выражающейся как сила притяжения.

Таким образом, в случае единственно и внутренне непротиворечивой статической модели нашей Вселенной, следующей из общей теории относительности, мы приходим к выводу, что псевдотензор поля Меллера — Мицкевича не верен, более правильным псевдотензором гравитационного поля является полученный нами.

Динамические однородные модели нашей Вселенной оказываются совершенно неудовлетворительными как из-за невыполнения граничного условия, так и вследствие невозможности получить такое решение, чтобы полная энергия нашей Вселенной была правильно определена. Нулевой результат явно неудовлетворителен. Это означает, что

$$E_g = -E_{\text{м}} = -Mc^2.$$

Но мы показали [см. (14.35)], что закон сохранения энергии может быть выполнен лишь при условии, что $E = E_{\text{м}}$, т. е. при $E_g = 0$.

Таким образом, мы приходим к явному противоречию. Оно несомненно связано с первым недостатком — невыполнением граничного условия. Отсюда, кстати, вытекает вывод о том, что вряд ли можно придумать в рамках общей теории относительности такую модель динамической Вселенной, где бы выполнялись корректные граничные условия и закон сохранения энергии при гипотезе однородности, удовлетворительно согласующейся с наблюдениями.

Снова следует сделать вывод, что невозможность построения непротиворечивых динамических моделей однородной Вселенной является следствием некоторой ограниченности постулатов общей теории относительности. Для неоднородных моделей можно решать задачу Коши и при $\varkappa = \text{const}$. Но при этом неоднородность распределения плотности по расстоянию будет настолько сильной, что ее, вероятно, можно было бы наблюдать.

Уравнения

$$R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R = \varkappa T_{ik}$$

при $\varkappa = \mathrm{const}$ не имеют частных решений с прямолинейной первой характеристикой в собственной системе отсчета. Исключение составляет случай, когда $\beta_1 = -1$, $a/c = 1$, но тогда $T_{ik} \equiv 0$, т. е. отсутствует какая-либо материя (модель Милна). Этот случай явно бессмыслен. Любая модель нашей Вселенной с течением времени станет приближаться к сферически-симметричной, но в этом случае (и для расходящихся и сходящихся волн) должно выполняться условие сохранения — $T \sim \varepsilon \sim a^{-3}$.

Поскольку уравнения поля имеют вид $R = -\varkappa T$, а $R \sim a^{-2} f$, то мы будем иметь $fa \sim \varkappa$, где

$$f = f\left[(a, \dot{a}, \ddot{a}), \frac{\partial a}{\partial x^\alpha}, \frac{\partial^2 a}{\partial x^\alpha \partial x^\beta}, \frac{\partial \dot{a}}{\partial x^\gamma}, \ldots\right],$$

откуда можно сделать вывод, что $f = \mathrm{const}/a$, $\dot{a} \neq \mathrm{const}$. Это простое рассуждение показывает, почему в общей теории относительности невозможны такие динамические модели, в которых $\dot{a} = \mathrm{const}$. При $a = \mathrm{const}$ $f = f(a) = \mathrm{const}$ и условие $fa \sim \varkappa$ соблюдается. Такая статическая модель вполне возможна.

Только статическая модель Вселенной Эйнштейна (и вообще задача с полем, не зависящим от a), а также приближение слабого поля оказываются не противоречивыми в общей теории относительности.

Заметим, что в последнем случае и в случае малых окрестностей выбранной точки (для произвольного поля) можно вводить линейную группу преобразований (преобразований Лоренца), что позволяет в малом объеме и в случае слабого поля более корректно рассматривать законы сохранения энергии-импульса. Теория относительности по сути дела является теорией движения материи (газодинамикой — вболее частном случае) в собственном поле тяжести.

Квантование произвольного поля не проходит из-за его нелинейности, но и квантование слабого поля пока что не выполнено достаточно строго, что также связано с недостатком общей теории относительности.

Существует огромное число исследований по модификациям общей теории относительности или по иным возможным направлениям развития теории гравитационного поля.

Главные из этих направлений — тензорная геометрия, двухпараметрическая геометрия, исследование пространств (риманова и иных) с кручением, когда $g^{kl}(\Gamma^i_{kl} - \Gamma^i_{lk}) = \Omega^i \neq 0$, и т. д.

Эти направления имеют формальный характер и пока мало что дают для изучения природы гравитационного поля и связи его с другими полями.

Исследования в области теории компенсирующих полей, сами по себе полезные, кое что обещают для значительного прогресса в области теории гравитации.

Весьма важными явились работы Калуза по пятимерному пространству, в которых удалось из единого формализма вывести уравнения гравитационного и электромагнитного полей (во второй части книги мы воспользуемся этим важным формализмом). Но и эти исследования были чисто формальными.

Нам кажется, что наиболее существенным было развитие представлений Дирака о возможном изменении гравитационной постоянной и перестройки в связи с этим формализма общей теории относительности. Однако здесь физики (в частности, Иордан, внесший наибольший вклад в этой области) шли не очень строгим путем и их работы оказались неубедительными и не получили общего признания.

Развитие теории, в которой может изменяться гравитационная постоянная, представляет незаурядный интерес. Поскольку тела и частицы, движущиеся с ускорениями, должны излучать гравитационные волны, хотя мощность гравитационного излучения мала, этот процесс все же ведет к потере энергии и массы покоя этими телами и частицами.

Далее, допуская, что взаимодействие двух тел связано с взаимодействием всей материи Вселенной, можно сделать вывод, что изменение массы покоя тел и плотности гравитационного поля в динамической Вселенной может повлиять на изменение этого взаимодействия и на величину, характеризующую взаимодействие, т. е. на «гравитационную постоянную» G или $\varkappa = \frac{8\pi G}{c^4}$.

Может быть, учет этого обстоятельства поможет построению непротиворечивых динамических однородных моделей нашей Вселенной (ниже мы увидим, что это именно так).

В локально-инерциальной системе

$$2\varkappa t_i^k = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^l} [\sqrt{-g} \, (\delta_i^k w^l - \delta_i^l w^k)] =$$

$$= \frac{\partial^2 \ln g}{\partial x^l \, \partial x^s} (g^{ks}\delta_i^l - g^{ls}\delta_i^k) + \frac{\partial^2}{\partial x^l \, \partial x^s} (g^{ks}\delta_i^l - g^{ls}\delta_i^k),$$

но $\frac{\partial (\sqrt{-g} \, t_i^k)}{\sqrt{-g} \, \partial x^k} = 0,$

что свидетельствует о выполнении принципа эквивалентности, поскольку при этом

$$\frac{\partial\,(\sqrt{-g}\,T_i^k)}{\sqrt{-g}\,\partial x^k} = \frac{\partial T_i^k}{\partial x^k} = 0.$$

Это соотношение имеет место при отсутствии гравитационного поля и является выражением локального принципа эквивалентности. Поскольку при этом $t_i^k \neq 0$, то мы приходим к выводу, что различные ускоренные системы отсчета не эквивалентны, если это ускорение вызвано гравитацией. При этом и кривизна не обращается в нуль.

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ПРОСТРАНСТВА И МАТЕРИИ

§ 1. Основные предпосылки теории пространства и материи

Постулат бесконечности пространства-времени и бесконечного запаса энергии (и энтропии) не исключает возможности рассмотрения схем конечных подобластей Вселенной (нашей Вселенной), квазизамкнутых в пространстве и квазиизолированных во времени от воздействия других подобластей бесконечной Вселенной. Квазизамкнутость подобласти 4-х пространства всегда может иметь место, и, пренебрегая обменом энергии и энтропией (информацией — в более широком аспекте), на гиперповерхности данной подобласти пространства при взаимодействии с другими подобластями мы можем рассматривать эту подобласть Вселенной как некоторую «нашу», самостоятельно существующую некоторое время Вселенную и заниматься изучением ее основных свойств.

Будем следовать далее идеям, которые в свое время выдвигали многие ученые, особенно, Пуанкаре, и которые выясняли, какое минимальное количество постоянных и переменных величин должно характеризовать Вселенную и основные физические законы, имеющие место в ней. Итак, выясним, какое минимальное число констант надо задать для определения основных свойств нашей Вселенной. Здесь и ниже снова под Вселенной будем понимать нашу подобласть бесконечной Вселенной, в которой мы живем и свойства которой в состоянии изучать, т. е. Метагалактику. Относительно Большой бесконечной Вселенной мы ровным счетом ничего сказать не можем, кроме постулатов о ее материальности, структурности и бесконечности ее 4-х пространства (бесконечности во времени и в пространстве).

Очевидно, что нужно задать минимум три размерных параметра: длину l, массу m и время t. Однако целесообразнее задать длину l, энергию $E = mc^2$ и момент количества движения $M = ml\bar{c}$, где $\bar{c}$ — некоторая скорость.

Подразумевая под E и M энергию и момент количества движения нашей Вселенной, будем требовать, чтобы эти величины сохранялись; потребуем также, чтобы было постоянным и l. Таким образом, положим

$$l = l_0 = \text{const}, \quad E = E_0 = \text{const}, \quad M = M_0 = \text{const}; \quad (1.1)$$

отсюда следует, что $\bar{c} = \text{const}$. Очевидно, что можно просто положить

$$\bar{c} = c = \text{const}, \quad (1.2)$$

где c — фундаментальная скорость света, постоянная в локально-инерциальной системе отсчета. Под l_0 можно понимать любую характерную длину. Удобно считать, что l_0 характеризует размеры нуклона, точнее говоря, $l_0 = \xi r$, где r — радиус нуклона, а величина ξ порядка единицы (см. дальше).

Число частиц во Вселенной может быть переменным, как это видно из простого примера. При столкновении двух частиц больших энергий рождается большое количество различных частиц меньших энергий; число фотонов также переменно.

Обозначим полное число частиц во Вселенной через

$$N = \sum_{i=1}^{n} N_i, \quad (1.3)$$

где N_i — число частиц конкретного вида. Номер n в конечной подобласти Вселенной может быть как конечным, так и бесконечным.

Различные безразмерные величины могут быть выражены через безразмерную комбинацию M_0, E_0, l_0 и N. Если N не входит в структуру безразмерных величин, они должны быть постоянны, в противном случае эти безразмерные величины переменны.

Различные размерные величины можно также получить из комбинации указанных величин. Если N не входит в эту комбинацию, то эти величины постоянны, в противном случае они будут переменны. Очевидно, можно, например, считать, что c, l_0, E_0 переменны, но тогда все равно придется выделить какие-то менее удобные величины и требовать их сохранения, однако законы их сохранения не будут отвечать трансформационным свойствам

4-х пространства и не будут иметь смысла законов сохранения, например, 4-х импульса, что вряд ли можно считать удобным. В других «абстрактных» пространствах будут сохраняться и иные величины, более тонко характеризующие материю.

Как будто бы несколько произвольной величиной является l_0; можно, например, требовать сохранения величины E_0/l_0 и т. д., но тогда все равно будет сохраняться l_0. При сохранении E_0 и M_0 и любой третьей разумной величины, не совпадающей по размерностям с E_0 и M_0, величина длины l_0 будет сохраняться. Это просто масштабная величина. Она является характеристикой групп масштабных преобразований пространства.

Итак, для описания основных параметров, характеризующих Вселенную, достаточно задать E_0, c_0, l_0 и N. Ниже мы покажем, что важно задать и четвертую безразмерную постоянную величину — постоянную тонкой структуры $\alpha = e^2/\hbar c$ или отношение масс электрона и протона. При этом уточнятся соотношения между массами элементарных частиц.

§ 2. Обобщенный вариационный формализм

Обычная процедура выделения дивергенции, в которую вводят вторые производные g_{ik}, но которая не является ковариантной, как мы уже знаем, не приводит к удовлетворительному псевдотензору гравитационного поля и законам сохранения энергии-импульса. Поэтому мы снова будем проводить варьирование обобщенной скалярной кривизны с учетом вторых производных g_{ik}, так как последние входят в скалярную кривизну.

Поскольку космология, основанная на общей теории относительности, также не является совершенно корректной, мы попробуем обобщить методы общей теории относительности, полагая, что «гравитационная постоянная» $\varkappa = 8\pi G/c^4$ (где G — ньютонова «гравитационная постоянная»), может быть переменной и в общем виде даже тензором (или псевдотензором, матрицей), так как связь между тензором поля и тензором материи в самом общем случае может быть тензорной.

Выскажем ряд соображений в пользу необходимости считать величину $\varkappa$ переменной. Обычно под лагранжианом гравитационного поля понимают величину

$$L_g = -R/2\varkappa, \tag{2.1}$$

где R — скалярная кривизна. Под лагранжианом материи понимают величину

$$L_м = p, \tag{2.2}$$

где p — давление.

Вариация выражения, если $\delta\Gamma^l_{ik} = 0$,

$$\delta\left[\sqrt{-g}\,(L_g + L_м)\right] = \delta\left[\sqrt{-g}\left(\frac{R}{2\varkappa} + p\right)\right] = 0, \tag{2.3}$$

дает уравнения гравитационного поля

$$R^k_i - \frac{1}{2}\,\delta^k_i R = \varkappa T^k_i. \tag{2.4}$$

Если $\delta\Gamma^l_{ik} \neq 0$, то достаточно варьировать один лагранжиан L_g, что дает тот же результат. При изменении расстояния l с постоянной скоростью и при $\varkappa = \mathrm{const}$ левая часть уравнений (2.4) меняется, как l^{-2}, правая часть,— как l^{-3}.

Следовательно, левая и правая части преобразуются по различным группам преобразования, что нарушает закон сохранения энергии и делает неудовлетворительными уравнения (2.4). При изменении масштаба все члены уравнений (2.4) преобразуются, напротив, по одной группе. Далее очевидно, что безразлично, менять ли масштаб или расстояние. Выскажем предположение, что уравнения, отображающие мировые законы, должны быть инвариантными относительно применения каждой из этих операций, как, например, уравнения Максвелла. Поскольку же уравнения гравитационного поля (2.4) зависят от того, что мы меняем, то можно сделать выводы, что они не корректны с этой точки зрения при дополнительном требовании постоянства скорости изменения всех расстояний. Поэтому следует высказать предположение, что если необходимо варьировать различные лагранжианы, то их надо выбирать так, чтобы все члены, получившиеся в результате варьирования уравнений, преобразовывались по одной и той же группе преобразований, т. е. проводить при выводе этих уравнений последовательно принципы, изложенные в теореме Нетер.

Гравитационную постоянную $\varkappa$ можно представить в виде

$$\varkappa = \frac{l}{E}, \tag{2.5}$$

где E — некоторая величина, имеющая размерность энергии.

Если энергия должна сохраняться при изменении объема нашей Вселенной, то это, вообще говоря, несправедливо для любой заранее выбранной характерной длины, от которой может зависеть $\varkappa$. Поэтому нет никаких оснований считать, что размерная величина $\varkappa$ не может меняться со временем и зависеть от местных условий во Вселенной, т. е. следует помнить, что $\varkappa$ должно зависеть от координат x^i. Уравнения поля и сохранения энергии-импульса получаются при варьировании какой-либо скалярной величины, характеризующей это поле, причем в случае гравитационного поля этой скалярной величиной может быть не обязательно R, а, вообще говоря, любая функция от R.

Далее очевидно, что при вариации различных скаляров, характеризующих различные поля, надо выбирать их так, чтобы связь между ними устанавливалась лишь с помощью действительно сохраняющихся размерных величин, каковыми являются энергия, импульс и момент импульса или энергия, скорость света и характерная длина l_0, характеризующая размеры элементарных частиц. К этому надо добавить, что, конечно, характерные размерные величины должны входить в каждый лагранжиан так, чтобы лагранжиан имел размерность плотности энергии, т. е. давления.

В случае гравитационного поля в уравнении (2.5) под E можно понимать величину $\bar{E}_0$, пропорциональную полной энергии данной модели нашей Вселенной, а под l — величину a (радиус кривизны, характеризующий размеры нашей Вселенной). В самом деле,

$$\varkappa = \frac{8\pi G}{c^4} = \frac{\frac{16}{3}\pi \cdot 10^{-7}}{0{,}81 \cdot 10^{42}} = 2 \cdot 10^{-48} \ \textit{см/эрг}.$$

Поскольку $l = a \approx 10^{29}$ *см*, $\bar{E}_0 = 10^{77}$ *эрг*,

$$\bar{E}_0 = mc^2 = Nm_pc^2 = 10^{80} \cdot 10^{-24} \cdot 10^{21} = 10^{77} \ \textit{эрг},$$

m_0 — масса Метагалактики, N — число нуклонов, m_p — масса нуклона, то

$$\frac{a}{\bar{E}_0} = \frac{10^{29}}{10^{77}} = 10^{-48} \ \textit{см/эрг} \approx \frac{8\pi G}{c^4} = \varkappa.$$

В динамических моделях величина a переменна, поэтому должна меняться и величина $\varkappa$, так как $\bar{E}_0 = \text{const}$, а $\varkappa \sim a$ (то, что $l = a$, $E = E_0$, ясно, поскольку $R \sim \varkappa T \sim \frac{\varkappa \bar{E}_0}{a^3} = \frac{\text{const}}{a^2}$, откуда

$x \sim \frac{a}{\bar{E}_0}\Big)$. Так как гравитационный радиус нуклона (любой частицы)

$$r_g = \frac{2Gm_p}{c^2}, \text{ то } \frac{r_g}{m_p c^2} = \frac{2G}{c^4} = \frac{\varkappa}{4\pi},$$

где m_p — масса нуклона (любой частицы). Таким образом,

$$\frac{a}{\bar{E}_0} = \frac{4\pi r_g}{E_p} = \frac{10 \cdot 10^{-52}}{10^{-3}} = 10^{-48} \text{ см/эрг},$$

где $E_p = m_p c^2$ — энергия нуклона (частицы). (Из других характерных длин и энергий нельзя получить величину $l/E \approx 10^{-48}$.)

Если мы выберем лагранжиан гравитационного поля в виде

$$L_g = -\frac{\bar{E}_0}{3} R_0^{3/2}, \tag{2.6}$$

где R_0 — скалярная кривизна нашей Вселенной, то, поскольку $\bar{E}_0 = \text{const}$, придем к выводу, что лагранжиан (2.6) преобразуется при изменении l так же, как и лагранжиан материи (2.2), и это условие будет иметь место и при изменении масштаба. Следовательно, уравнения, которые мы получим в результате варьирования, будут преобразовываться в обоих случаях по одной группе, что необходимо для строгого выполнения законов сохранения энергии-импульса.

Другие соображения, которые также свидетельствуют о том, что $\varkappa$ может или, точнее говоря, должна изменяться вместе с кривизной (и при изменении координат), мы выскажем ниже.

Представления об идеально однородном и изотропном пространстве, в рамках которых обычно рассматриваются модели нашей Вселенной (Метагалактики), не могут считаться удовлетворительными, поскольку даже в пространстве, которое в среднем однородно, как мы знаем, встречаются сильные локальные неоднородности — звезды. В этих областях кривизна пространства и плотность энергии сильно отличаются от среднего значения кривизны и плотности энергии, заполняющей Метагалактику. Таким образом, нужно ввести в рассмотрение в принципе как бы две кривизны — среднюю кривизну R_0 и локальную R.

Перейдем к выводу уравнений поля и законов сохранения, полагая в самом общем виде, что величина $\varkappa$ не только может зависеть от кривизны R_0, характеризующей Метагалактику в среднем, но и иметь тензорный характер.

Основной тензорной величиной, характеризующей свойства пространства, является тензор кривизны

$$R^l_{imk} = \frac{\partial \Gamma^l_{ik}}{\partial x^m} - \frac{\partial \Gamma^l_{im}}{\partial x^k} + \Gamma^l_{nm}\Gamma^n_{ik} - \Gamma^l_{nk}\Gamma^n_{im}. \qquad (2.7)$$

Введем теперь тензор (или псевдотензор)

$$B^m_r = f\left[R,\ g_{ik},\ \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^r},\ \frac{\partial^2 g_{ik}}{\partial x^r \partial x^m},\ \lambda^{(\alpha)}\right], \qquad (2.8)$$

«обобщающий» гравитационную постоянную $\varkappa$, причем $\lambda^{(\alpha)}$ — различные параметры, отличающиеся от g_{ik} и их производных, например координаты x^i, скорости $\frac{dx^i}{ds} = u^i$, какие-либо термодинамические величины — давление и энтропия (σ).

В частном случае тензор B^m_r должен иметь вид

$$B^m_r = \frac{1}{\varkappa}\delta^m_r, \quad B = \frac{4}{\varkappa}. \qquad (2.9)$$

Введем также тензор A^l_m, обратный тензору B^m_r с помощью обычного соотношения $B^m_r A^l_m = \delta^l_r$. В частном случае,

$$A^l_m = \varkappa\delta^l_m.$$

Образуем обобщенный тензор кривизны 4-го ранга и свернутый тензор 2-го ранга

$$R^{*l}_{irk} = B^m_r R^l_{imk},\ R^*_{ik} = R^{*l}_{ilk} = B^m_l R^l_{imk}. \qquad (2.10)$$

Образуем также обобщенную скалярную кривизну

$$R^* = \delta^r_l g^{ik} R^{*l}_{irk} = g^{ik} B^m_l R^l_{imk} = B^m_l R^l_m = B^{ml} R_{ml}.$$

Лагранжианом гравитационного поля теперь можно считать скаляр

$$L = -\frac{R^*}{2}. \qquad (2.11))$$

Основным вариационным уравнением теперь будет *

$$\delta(\sqrt{-g}L) = \frac{\partial(\sqrt{-g}\,L)}{\partial g^{ik}}\delta g^{ik} + \frac{\partial(\sqrt{-g}\,L)}{\partial\frac{\partial g^{ik}}{\partial x^l}}\delta\frac{\partial g^{ik}}{\partial x^l} +$$

$$+ \frac{\partial(\sqrt{-g}\,L)}{\partial\frac{\partial^2 g^{ik}}{\partial x^l \partial x^r}}\delta\frac{\partial^2 g^{ik}}{\partial x^l \partial x^r} + \frac{\partial(\sqrt{-g}\,L)}{\partial\lambda^{(\alpha)}}\delta\lambda^{(\alpha)} = 0,$$

* Здесь и ниже мы опускаем очевидную операцию интегрирования по 4-х объему.

что после преобразования дает

$$\delta g^{ik}\left[\frac{\partial(\sqrt{-g}\,L)}{\partial g^{ik}}-\frac{\partial}{\partial x^l}\frac{\partial(\sqrt{-g}\,L)}{\partial\dfrac{\partial g^{ik}}{\partial x^l}}+\right.$$

$$\left.+\frac{\partial^2}{\partial x^l\partial x^2}\frac{\partial(\sqrt{-g}\,L)}{\partial\dfrac{\partial^2 g^{ik}}{\partial x^l\partial x}}+\frac{1}{2}\sqrt{-g}\,T^*_{ik}\right]=0, \qquad (2.12)$$

где

$$\frac{1}{2}\sqrt{-g}\,T^*_{ik}\delta g^{ik}=\frac{\partial(\sqrt{-g}\,L)}{\partial\lambda^{(\alpha)}}\delta\lambda^{(\alpha)}+\frac{\partial}{\partial x^l}\left[\left(\frac{\partial(\sqrt{-g}\,L)}{\partial\dfrac{\partial g^{ik}}{\partial x^l}}-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{\partial}{\partial x^r}\frac{\partial(\sqrt{-g}\,L)}{\partial\dfrac{\partial^2 g^{ik}}{\partial x^l\partial x^r}}\right)\delta g^{ik}+\frac{\partial\sqrt{-g}\,L)}{\partial\dfrac{\partial^2 g^{ik}}{\partial x^l\partial x^r}}\delta\frac{\partial g^{ik}}{\partial x^r}\right], \qquad (2.13)$$

причем $\overset{*}{T}_{ik}$ — псевдотензор материи, отличающийся от истинного тензора материи T_i^k так, что

$$T_i^{*k}=T_i^k+\theta_i^k, \qquad (2.14)$$

где θ_i^k будет определена ниже в (2.34). Уравнения поля в общем случае получаются 4-го порядка, однако его члены с производными g_{ik} 3-го и 4-го порядка можно «загнать» в тензор энергии-импульса материи.

Займемся теперь вычислениями вариации плотности обобщенной скалярной кривизны

$$\delta(\sqrt{-g}R^*)=\delta(\sqrt{-g}\,B_0 g^{ik}R_{ik})+\delta(\sqrt{-g}N)=0, \qquad (2.15)$$

где
$$B_0=B_0(R)=\frac{1}{\varkappa}=\frac{2}{3}E_0\sqrt{R_0},$$

$$N=R_{ik}(B^{ik}-B_0 g^{ik})=R^*-\frac{R}{\varkappa}. \qquad (2.16)$$

Для начала мы несколько сузим задачу и будем варьировать лишь скалярную величину

$$-L_{0g}=\frac{\sqrt{R_0}E_0}{3}R=\frac{R}{2\varkappa}=-\left(L+\frac{N}{2}\right), \qquad (2.17)$$

т. е. пренебрежем возможными тензорными (матричными) свойствами величины $\varkappa$ и будем считать, что $\varkappa$ зависит лишь от общей средней кривизны Метагалактики R_0 (ниже мы снова введем в рассмотрение скаляр, характеризующий тензорные свойства $\varkappa$).

Вычислим вариацию величины $\sqrt{-g}L_{0g}$:

$$-\delta(\sqrt{-g}L_{0g}) = \frac{E_0}{3}\sqrt{R_0}\left[\delta(\sqrt{-g}R) + \frac{\sqrt{-g}}{2}\frac{R}{R_0}\delta R_0\right],$$

причем

$$-\delta(\sqrt{-g}R) = \sqrt{-g}\left[\delta g^{ik}\left(R_{ik} - \frac{1}{2}g_{ik}R\right) + g^{ik}\delta R_{ik}\right],$$

откуда следует, что

$$-\delta(\sqrt{-g}L_{0g}) = \frac{\sqrt{-g}E_0\sqrt{R_0}}{3}\left\{\left[\delta g^{ik}\left(R_{ik} - \frac{1}{2}g_{ik}R\right) + g^{ik}\delta R_{ik}\right] + \frac{R}{2R_0}(R_{0ik}\delta g_0^{ik} + g_0^{ik}\delta R_{0ik})\right\}. \quad (2.18)$$

Величина

$$\sqrt{-g}\left(g^{ik}\delta R_{ik} + \frac{R}{2R_0}g_0^{ik}\delta R_{0ik}\right) = \varkappa T_{ik}\delta g^{ik} = \frac{3T_{ik}}{2E_0\sqrt{R_0}}\delta g^{ik}. \quad (2.19)$$

Здесь

$$T_{ik} = T_{0ik} + T_{\text{л}\,ik}, \quad (2.20)$$

где T_{0ik} и $T_{\text{л}\,ik}$ — тензоры энергии-импульса, средний для всей Метагалактики и локальный; $R_{\text{л}\,ik}$ — тензор локальной кривизны.

Далее можно написать, что

$$\delta g_{ik} = \delta g_{0ik} + \delta g_{\text{л}\,ik}, \quad (2.21)$$

где δg_{0ik} и $\delta g_{\text{л}\,ik}$ — вариации метрических тензоров, относящиеся к полям R_0 и $R_{\text{л}}$ соответственно. Затем можно представить δg_0^{ik} в виде

$$\delta g_0^{ik} = A_{lm}^{ik}\delta g^{lm}, \quad (2.22)$$

где A_{lm}^{ik} — компоненты безразмерного тензора, связывающего в каждой точке 4-х пространства компоненты вариаций метрических тензоров g_0^{ik} и g^{ik}. Поскольку вариации δg^{ik} произвольны, то (2.19) принимает вид

$$R_i^k - \frac{1}{2}\delta_i^k R + \frac{R}{2R_0}A_{il}^{km}R_{0m}^l = \varkappa T_i^k = \frac{3T_i^k}{2E_0\sqrt{R_0}}. \quad (2.23)$$

При $\delta g_{\text{л}}^{ik} \gg \delta g_0^{ik}$, $R_{\text{л}\,ik} \gg R_{0ik}$, $A_{il}^{km} = 0$ формула (2.23) переходит в обычные уравнения Эйнштейна $R_i^k - \frac{1}{2}\delta_i^k R = \varkappa T_{ik}$ (2.4), а лангранжиан поля переходит в $-L_g = \frac{R}{2\varkappa}$, причем $\varkappa$ можно считать постоянным. Уравнения (2.4) справедливы в окрестностях больших неоднородностей материи с сильно повышенной по сравнению со средним значением плотностью.

При $\delta g_{\text{л}}^{ik} = 0$, $R_{\text{л}\, ik} = 0$, $A_{il}^{km} = \delta_l^k \delta_l^m$ формула (2.23) принимает вид

$$\frac{3}{2} R_{0i}^k - \frac{1}{2} \delta_i^k R_0 = \varkappa T_{0i}^k = \frac{3}{2} \frac{T_{0i}^k}{E_0 \sqrt{R_0}}, \tag{2.24}$$

или

$$R_{0i}^k - \frac{1}{3} \delta_i^k R_0 = \frac{2}{3} \varkappa T_{0i}^k = \frac{T_i^k}{E_0 \sqrt{R_0}}, \tag{2.25}$$

что характеризует среднее гравитационное поле Метагалактики. При этом лагранжиан поля принимает вид

$$-L_g = \frac{E_0}{3} R_0^{3/2}. \tag{2.26}$$

Уравнение (2.23) удобно написать в другом виде. Воспользуемся уравнением (2.25) и исключим из (2.23)

$$R_{0m}^l = \frac{2}{3} \varkappa T_{0m}^l + \frac{1}{3} \delta_m^l R_0.$$

Тогда (2.23) примет вид

$$R_i^k - \frac{R}{2} \left(\delta_i^k - \frac{1}{2} A_i^k \right) = \varkappa \left(T_i^k - \frac{R}{3R_0} A_{il}^{km} T_{0m}^l \right), \tag{2.27}$$

где $A_i^k = A_{il}^{km} \delta_m^l$.

Поскольку $\left(R_i^k - \frac{1}{2} \delta_i^k R \right)_{;k} = 0$ и $T_{i;k}^k = 0$, $T_{0i;k}^k = 0$, (2.28)

то, дифференцируя ковариантно (2.27), будем иметь

$$\frac{3}{2E_0 \sqrt{R_0}\, R_0} \frac{\partial R_0}{\partial x^k} \left(T_i^k - \frac{1}{3} \xi_i^k \right) + \frac{A_i^k}{3} \frac{\partial R}{\partial x^k} + \frac{R}{3} A_{i;k}^k + \\ + \frac{\xi_{i;k}^k}{E_0 \sqrt{R_0}} = 0,$$

где

$$\xi_i^k = \frac{R}{R_0} A_{il}^{km} T_{0m}^l.$$

Используя (2.20) и (2.27), найдем

$$\frac{R_i^k}{R_0} \frac{\partial R_0}{\partial x^k} - \frac{R}{2R_0} \frac{\partial R_0}{\partial x^k} (\delta_i^k - A_i^k) + \frac{A_i^k}{3} \left(\frac{\partial R}{\partial x^k} - \frac{R}{R_0} \frac{\partial R_0}{\partial x^k} \right) + \\ + \frac{R}{3} A_{i;k}^k + \frac{\xi_{i;k}^k}{E_0 \sqrt{R_0}} = 0. \quad (2.29$$

При $R_{\text{л}\,ik} \gg R_{0ik}$, когда $A \to 0$, будем иметь в пределе тождественно нуль. При $R_{\text{л}\,ik} = 0$ будем иметь

$$A_i^k = \delta_i^k, \quad \xi_i^k = T_{0i}^k \quad \text{и} \quad R_{0i}^k \frac{\partial R_0}{\partial x^k} = 0. \tag{2.30}$$

В общем случае четыре уравнения (2.29) накладывают четыре условия на тензор A_{il}^{km}.

Выведем теперь уравнения поля Метагалактики R_0 непосредственно из уравнений Лагранжа (для простоты вместо R_0 мы будем писать R).

Мы имеем

$$\delta(\sqrt{-g}R) = \left(R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik}R\right)\sqrt{-g}\,\delta g^{ik} + \sqrt{-g}\,g^{ik}\,\delta R_{ik}$$

и

$$\sqrt{-g}\,g^{ik}\,\delta R_{ik} = \delta g^{ik}\,\frac{\partial D_{ik}^l}{\partial x^l} + \delta\,\frac{\partial g^{ik}}{\partial x^l} B_{ik}^l + \delta\,\frac{\partial^2 g^{ik}}{\partial x^l \partial x^m} C_{ik}^{lm},$$

где (2.31)

$$D_{ik}^l = \frac{\sqrt{-g}}{2}\left[g^{ml}\left(3\,\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^m} - 2\,\frac{\partial g_{im}}{\partial x^k}\right) - \frac{\partial \ln g}{\partial x_i}\,\delta_k^l\right],$$

$$B_{ik}^l = \frac{\sqrt{-g}}{2}\left[g^{ml}\left(3\,\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^m} - 2\,\frac{\partial g_{im}}{\partial x^k}\right) - 2\,\frac{\partial \ln g}{\partial x^i}\,\delta_k^l\right] + \frac{\partial}{\partial x^m}\,[\sqrt{-g}\,g^{lm} g_{ik}],$$

$$C_{ik}^{lm} = \sqrt{-g}\,(g^{lm} g_{ik} - \delta_i^m \delta_k^l),$$

причем

$$B_{ik}^l = D_{ik}^l - \frac{\partial C_{ik}^{lm}}{\partial x^m}. \tag{2.32}$$

Подставляя в (2.12) и (2.13) значения $-\sqrt{-g}\,L_{g_0} = -\sqrt{-g}\,L_g = \frac{E_0}{3} R_0^{3/2}$ (и помня, что L_g не зависит от $\lambda^{(\alpha)}$), придем к уравнениям

$$-\frac{2}{\sqrt{-g}}\left[\frac{\partial(\sqrt{-g}\,L_g)}{\partial g^{ik}} - \frac{\partial}{\partial x^l}\,\frac{\partial(\sqrt{-g}\,L_g)}{\partial\,\frac{\partial g^{ik}}{\partial x^l}} + \frac{\partial^2}{\partial x^l \partial x^m}\,\frac{\partial(\sqrt{-g}\,L_g)}{\partial\,\frac{\partial^2 g^{ik}}{\partial x^l\,\partial x^k}}\right] = -\frac{2}{\sqrt{-g}}\,\Omega_{ik}\left\{\sqrt{-g}\,L_g\right\} =$$

$$= E_0\sqrt{R_0}\left(R_{ik} - \frac{1}{3} g_{ik}R\right) + \theta_{ik} = T_{ik}^{*} = T_{ik} + \theta_{ik}, \tag{2.33}$$

где Ω_{ik} — «оператор» уравнения Лагранжа

$$\frac{\sqrt{-g}}{E_0}\theta_{ik} = \frac{\partial\sqrt{R}}{\partial x^l}\left[2\frac{\partial C_{ik}^{lm}}{\partial x^m} - B_{ik}^l\right] + C_{ik}^{lm}\frac{\partial^2\sqrt{R}}{\partial x^l \partial x^k}. \qquad (2.34)$$

Уравнения (2.33) сразу можно написать в стандартном виде:

$$\frac{3}{2}R_{ik} - \frac{1}{2}g_{ik}R = \frac{3T_{ik}}{2E_0\sqrt{R_0}} = \varkappa T_{ik}, \qquad (2.24)$$

при этом

$$R = -2\varkappa T. \qquad (2.35)$$

Компоненты псевдотензора θ_{ik} появляются из-за переменности $\varkappa$: при $\varkappa = \mathrm{const}$ $\theta_{ik} \equiv 0$. В более общем случае при лагранжиане $-L_g = \frac{E_0\sqrt{R}}{3}R$ величины $\theta_{ik} = \overset{*}{\theta}_{ik}$ определяются аналогично, но имеют более сложный вид: в них входят также компоненты тензора A_{il}^{km} и их производные. Мы этих вычислений делать не будем.

Если теперь учесть скаляр $\frac{N}{2} = R_{ik}\left(\frac{B^{ik}}{2} - \frac{1}{3}E_0\sqrt{R_0}g^{ik}\right)$, т. е. ввести снова в рассмотрение тензор B^{ik}, то надо из левой части уравнения поля [например, (2.23)] вычесть величины $\frac{2}{\sqrt{-g}}\Omega_{ik}\{\sqrt{-g}N\}$, учитывая, что величина θ_{ik} также изменится. При этом $\frac{2}{\sqrt{-g}}\Omega_{ik} - \Delta\theta_{ik} = \Delta T_{ik}$ будет составлять тензор.

Совершенно аналогичные вычисления и уравнения можно получить, если считать, что $g^{ik}\,\delta R_{ik} = 0$ ($g^{ik}\,\delta R_{0ik} = 0$), при этом нужно лишь варьировать лагранжиан материи $L_\text{м} = p$ ($L_{0\,\text{м}} = p_0$). В дальнейшем мы будем исследовать подробно только случаи, когда $N = 0$, поскольку лишь он может быть в какой-то мере практически проверен. Общий неоднородный случай введения B^{ik} пока вряд ли заслуживает более детального рассмотрения.

Поскольку мы ввели в рассмотрение некие тензорные или псевдотензорные величины B_l^m, или, в частном случае, считали, что $\varkappa \neq \mathrm{const}$, то как будто бы необходимо ввести в рассмотрение новый лагранжиан $\overset{*}{L}_\varkappa$ (скаляр или псевдоскаляр), образованный из B_r^m и его производных, порождающих новое поле (новые взаимодействия), соответствующее этому лагранжиану. Посмотрим, действительно ли необходимо это делать.

Развивая формализм с переменной скалярной величиной $\varkappa$, несколько аналогичный нашему, Иордан ввел, например, в свое время в рассмотрение

$$L_{\varkappa}^{*}=\frac{\bar{\gamma}}{\varkappa^{3}}\frac{\partial\varkappa}{\partial x^{i}}\frac{\partial\varkappa}{\partial x_{i}}=\frac{\gamma}{\varkappa^{3}}\frac{\partial\varkappa}{\partial x^{i}}\frac{\partial\varkappa}{\partial x^{k}}g^{ik}, \tag{2.36}$$

где $\bar{\gamma}$ — безразмерная константа. Этому лагранжиану соответствовало некоторое скалярное поле, характеризующее как бы «рождение материи».

Сейчас мы увидим, что новый лагранжиан надо действительно вводить, но сделать это можно несколько иным способом, чем тот, которым пользовался Иордан.

В нашем общем случае

$$L_{\varkappa}=\bar{\gamma}_{1}Bg^{ik}\frac{\partial\ln B}{\partial x^{i}}\frac{\partial\ln B}{\partial x^{k}}, \tag{2.37}$$

где $\bar{\gamma}_1$ — безразмерная константа, B — скаляр или псевдоскаляр. Довольно очевидно, что также можно написать

$$L_{\varkappa}=\gamma g^{ik}\frac{\partial^{2}B}{\partial x^{i}\partial x^{k}},$$

где γ — безразмерная константа.

Оба эти лагранжиана эквивалентны друг другу. Полный лагранжиан $\hat{L}$ равен

$$\hat{L}=L+L_{\varkappa}=-\frac{R^{*}}{2}+\gamma g^{ik}\frac{\partial^{2}B}{\partial x^{i}\partial x^{k}}=$$

$$=\frac{1}{2}B_{l}^{m}R_{m}^{l}+\gamma g^{ik}\frac{\partial^{2}B}{\partial x^{i}\partial x^{k}}. \tag{2.38}$$

Считая, что B зависит также от параметров $\lambda^{(\alpha)}$, можно было бы добавить к лагранжиану новый член, в частности с какой-либо размерной константой, однако, как сейчас мы увидим, этого можно и не делать.

В самом деле, поскольку B_l^m пока произвольно, можно написать, что

$$\hat{L}=-\frac{1}{2}\hat{B}_{l}^{m}R_{\mathrm{м}}^{l}=-\frac{1}{2}B_{l}^{m}R_{m}^{l}+\gamma g^{ik}\frac{\partial^{2}B}{\partial x^{i}\partial x^{k}}, \tag{2.39}$$

где $\hat{B}_l^m$ — новые величины.

Следовательно, заменяя всюду B_l^m на $\hat{B}_l^m$ и опуская знак ($\wedge$) наверху, мы придем к прежним уравнениям. Если все же варьировать сумму L и $L_{\varkappa}$, то у нас появятся новые члены в уравнениях поля, но это приведет к тому, что определения ${}_1T_i^k$ и

${}_2T_i^k$ будут иными. Добавочные члены можно включить в ${}_1T_i^k$ и ${}_2T_i^k$, поскольку новое поле B повлияет и на материальный тензор энергии-импульса. (${}_1T_i^k$, ${}_2T_i^k$ — соответственно тензоры материи со шпуром (с массой покоя) отличным от нуля и равным нулю.) Изменится также определение псевдотензора t_i^k, но вид уравнений поля и законов сохранения останется прежним. Поскольку и оба указанные тензоры и псевдотензор определяются из конкретных задач, то введение B-поля изменит только условия определения ${}_1T_i^k$, ${}_2T_i^k$ и t_i^k, но не основные уравнения.

Вывод уравнений поля и законов сохранения из единого лагранжиана при $\varkappa \neq \text{const}$ имеет явное преимущество по сравнению со старым методом варьирования двух лагранжианов — поля и материи, хотя результаты получаются одинаковые, при этом сразу видно, что уравнения поля и сохранения не изменятся.

В случае варьирования двух лагранжианов должен быть изменен и лагранжиан материи за счет ее взаимодействия с B-полем (он должен быть умножен на тот же коэффициент, что и L) и вследствие того, что B должно зависеть от термодинамических параметров — давления и энтропии.

В частном случае, когда $B_l^m = \delta_l^m \dfrac{1}{\varkappa}$, $B = \dfrac{4}{\varkappa} = 4B_0$,

$$\hat{L} = -\frac{R}{2\varkappa} + 4\gamma g^{ik} \frac{\partial^2 \frac{1}{\varkappa}}{\partial x^i \partial x^k} = -\frac{R}{2\varkappa} + 4\bar{\gamma}_1 \frac{g^{ik}}{\varkappa} \frac{\partial \ln \varkappa}{\partial x^i} \frac{\partial \ln \varkappa}{\partial x^k}. \tag{2.40}$$

Если $\hat{L}$ зависит от p и σ, то надо учесть и этот дополнительный член. Однако поскольку в самом общем случае $\hat{L} = \hat{L}(R, p, \sigma)$, а p и σ — скаляры и $f(p, \sigma) = \varphi(R)$, то всегда $\hat{L} = \hat{L}(R)$.

Далее очевидно, что

$$4\bar{\gamma}_1 \frac{g^{ik}}{\varkappa} \frac{\partial \ln \varkappa}{\partial x^i} \frac{\partial \ln \varkappa}{\partial x^k} = 4\bar{\gamma}_1 \frac{g^{ik}}{\varkappa} \left(\frac{d \ln \varkappa}{d \ln R}\right)^2 \frac{\partial \ln R}{\partial x^i} \frac{\partial \ln R}{\partial x^k} = f(R). \tag{2.41}$$

Так как исходя из соображения размерности $f(R)$ должна иметь вид $f(R) = \bar{\gamma}_0 \dfrac{R}{2\varkappa}$, из (2.40) и (2.41) находим, что

$$\hat{L} = -\frac{R}{2\varkappa}(1 + \bar{\gamma}_0) = -\gamma_0 \frac{R}{2\varkappa}. \tag{2.42}$$

В частном случае изотропного пространства это очевидно, поскольку

$$R = R(a) = \text{const}\, a^{-2}, \quad \varkappa = \varkappa(a) = \text{const}\, a$$

и

$$R = \mathrm{const}\, a^{-3} = -\bar{\gamma}_0 \frac{R}{2\varkappa}\,.$$

При полном лагранжиане (2.42) ни уравнения поля, ни законы сохранения, выведенные выше (при $\gamma_0 = 1$), не изменятся. При дуалистическом выводе этих уравнений соответственно изменится определение T_i^k; эта величина также войдет в уравнения с множителем γ_0. Коэффициент γ_0 должен быть вычислен исходя из конкретных условий, «задавая» вид пространства и определяя его полную энергию. Иными словами, γ_0 можно найти из законов сохранения энергии. В следующем параграфе мы увидим, что для Метагалактики $\gamma_0 = {}^3/_4$, что представляет возможность интересно интерпретировать полную ее энергию.

В качестве приближенного, но интересного примера выведем интерполяционные уравнения для случая «внутреннего» или внешнего шварцшильдовского поля, помещенного в общий фон тяготения Метагалактики. Выбрав некоторую точку в центре локального поля, создаваемого, например, Солнцем, найдем, что в случае, когда время собственное для радиальных движений

$$g^{00} = -1,\quad g_0^{11} = 1 - \frac{r^2}{a^2} = 1 - \frac{r_a}{r}\frac{\rho_0}{\bar{\rho}}\quad,\qquad \bar{\rho} = \frac{3m_{\text{л}}}{4\pi r^3},$$

$$r_g = \frac{2Gm_{\text{л}}}{c^2} = \frac{8\pi G r^3 \bar{\rho}}{3c^2}\ \text{(для фридмановского поля).}$$

Здесь $\bar{\rho}$ — средняя плотность на расстоянии r, ρ_0 — средняя локальная плотность Метагалактики, причем $\frac{8\pi G\rho_0 a^2}{3c^2} \simeq 1$. Для шварцшильдовской метрики $g_{\text{л}}^{00} = -1$, $g_{\text{л}}^{11} = 1 - \frac{r_g}{r}$ (другие g_{ik} одинаковы для обоих полей). Здесь под a надо понимать «радиус» Метагалактики.

Очевидно, что

$$\delta g^{11} = \delta g_0^{11}\left(1 + \frac{\bar{\rho}}{\rho_0}\right) = \delta g_0^{11}\frac{\rho_{\text{п}}}{\rho_0},$$

где $\rho_{\text{п}} = \rho_0 + \bar{\rho}$ — общая плотность. Таким образом, $A = \frac{\rho_0}{\rho_{\text{п}}} \approx \frac{R_0}{R}$, и уравнение (2.27) приближенно примет вид

$$R_i^k - \frac{1}{2}\delta_i^k\left(R - \frac{R_0}{3}\right) \approx \varkappa\left(T_i^k - \frac{1}{3}T_{0i}^k\right). \tag{2.43}$$

При $R \gg R_0$ имеем

$$R_i^k - \frac{1}{2}\delta_i^k R = \varkappa T_i^k. \qquad (2.4)$$

При $R = R_0 (R_л = 0)$ имеем

$$\frac{3}{2} R_{0i}^k - \frac{1}{2}\delta_i^k R_0 = \varkappa T_{0i}^k. \qquad (2.24)$$

Законы сохранения энергии выполняются для лагранжиана $L = \frac{R}{2\varkappa} = \text{const}$, поскольку в областях локальных неоднородностей энергия этих областей взаимодействует с энергией Метагалактики и законы сохранения выполняются только для Метагалактики при $R = R_0$, $\varkappa \sim a$. Величины $g_л^{11} = g_0^{11}$ при $\frac{r_0}{r} = \frac{r^2}{a^2}$, что дает

$$r^3 = r_g a^2 = \frac{2Gma^2}{c^2} = \text{const} \cdot 2GmT^2 \approx 10^{28} m, \qquad (2.44)$$

где $\text{const} = 1$, причем величина $\frac{1}{2Gr^2} = 10^{-28}$ *г/см*$^2 = \bar{\rho}_0$, что соответствует средней плотности Метагалактики.

При $r_g \ll a$ справедлив закон Ньютона. При $r_g \to a$ [как мы увидим ниже (см. ч. II, § 4)] $r = a = c\tau$, что имеет место для всей Метагалактики. Очевидно, что при $r^3 < r_g a^2$ действуют законы Ньютона — Эйнштейна. При $r^3 > r_g a^2$ вступает в силу закон общего расширения Метагалактики (см. далее § 4).

Интересно отметить, что для нуклонов (частиц) в нашей Вселенной $r^3 = 10^4$ *см*^{3}, $r = 20$ *см*, что соответствует средней плотности нуклонов в Метагалактике ($\bar{\rho}_0 = 10^{-28}$ *г/см*^{3}). Для звезд $r^3 = 10^{60}$ *см*^{3}, $r = 10^{20}$ *см*, что соответствует их среднему расстоянию; для галактик $r^3 = 10^{72}$ *см*^{3}, $r = 10^{24}$ *см*, что также соответствует среднему расстоянию между галактиками. Для Метагалактики $r^3 = a^3 = 10^{84}$ *см*^{3}, $r = a = 10^{28}$ *см*, что также соответствует действительности.

Равенства $r_{0g} = a = r$ являются следствием известного выражения

$$\frac{2Gm_0}{c^2} = r_{0g} = a = \frac{8\pi\bar{\rho}_0 G r^3}{3c^2}.$$

При предположении, что $G \sim a \approx c\tau$, мы имеем, что $r^3 \sim \tau$, поскольку $M\tau^2 = \text{const}$. При $G = \text{const}$, $r^3 \sim \tau^2$. Трудно предположить, что мы живем именно в ту «счастливую» для физиков эпоху, когда эти законы дают совпадающие величины, гравитационный радиус Метагалактики равен ее обычному радиусу (радиусу кривизны), а $\varkappa$ выражается именно как отношение радиуса Метагалактики к ее энергии.

Поскольку изменения устойчивых расстояний между объектами различных классов в Метагалактике (нуклонами, звездами и галактиками) со временем при двух крайних гипотезах ($G \sim a$ и $G = \text{const}$) различны, есть надежда по астрономическим данным выяснить, какой из этих двух законов отвечает действительности. При $G = \text{const}$ объекты должны были ранее находиться ближе, чем при $G \sim a$. Например $5 \cdot 10^9$ лет тому назад объем, приходившийся на один нуклон, звезду или галактику, при $G = \text{const}$ был бы в два раза меньше, чем при $G > a$, и составлял приблизительно одну четверть от современного среднего объема.

На нуклоны и другие частицы в пространстве, свободном от локальных неоднородностей, помимо ньютоновых сил притяжения действует давление общего гравитационного поля

$$p_g \approx \frac{Gm_0^2}{a^4} \approx \frac{Gm_p^2}{r_p^4} \approx 10^{-7}\ \textit{дин/см}^2,\ r_p \approx 10^{-13}\ \textit{см},$$

что и приводит к кажущемуся нарушению ньютонова закона притяжения. Та же ситуация имеет место на больших расстояниях от локальных неоднородностей.

Плотность энергии гравитационного поля и его давление являются скалярами, поэтому в любой системе отсчета они действуют на материю, от них нельзя избавиться, как, например, от силы Архимеда в жидкости. Отсюда снова следует вывод, что определенная часть энергии гравитационного поля и волн — это реальная энергия.

Можно думать, что устойчивым средним расстояниям отвечают как раз расстояния $r = (r_g a^2)^{1/3}$ и средняя плотность равна плотности Метагалактики $\sim 10^{-28}$ *г/см*^{3}, поскольку увеличению расстояния будет препятствовать равновесный метагалактический фон тяготения. В случае $G \sim a$ при $r = r_g a^2$ меняется закон движения. Если при $r^3 < r_g a^2$ ускорение $g \neq 0$ (действует сила притяжения), то при $r^3 \gg r_g a^2$ частицы движутся по инерции вместе с общим фоном Метагалактики, что приводит к определенным «устойчивым» расстояниям. При $G = \text{const}$ закон движения всюду примерно одинаков и ускорение всюду не равно нулю, а поэтому вряд ли могут существовать «устойчивые» расстояния.

Поскольку для частиц четырех классов (нуклоны, звезды, галактики, метагалактики) существуют определенные «устойчивые» расстояния в каждый данный момент времени, это говорит в пользу гипотезы, что $G \sim a$. Так как размеры галактик, согласно выводам астрономов, могут со временем возрастать лишь очень незначительно, то это тоже говорит в пользу гипотезы, что $G \sim a$.

Снова отметим, что общие уравнения Эйнштейна (2.4) не содержат вообще никакой группы, поскольку в полностью неоднородном пространстве нет никакой симметрии. Во фридмановских моделях, основанных на уравнениях (2.4), 4-х пространство обладает симметрией, и уравнения в этом частном случае обладают группой, но группа для пространственных координат — одна, для временной — другая, поскольку расстояния меняются не пропорционально мировому времени. Пространственные координаты и время входят неравноправно в уравнения Эйнштейна. В рассмотренном нами обобщении уравнений Эйнштейна все четыре координаты входят равноправно, как и в специальной теории относительности. При исследовании моделей нашей Вселенной, заменяющих модели Фридмана, расстояния меняются пропорционально мировому времени, что соответствует разумному требованию постоянства скорости расширения изучаемой области пространства, введенному нами из других предположений. Уравнения (2.24), обобщающие уравнения (2.4), обладают поэтому одной и той же группой для всех четырех координат.

Однако общие уравнения (2.23), так же как и уравнения Эйнштейна, не обладают группой. Рассматривая Метагалактику с помощью уравнений (2.24), мы, как указывали ранее, пренебрегаем ее взаимодействием с окружающим фоном (краевыми эффектами). Если учитывать взаимодействия, то уравнения (2.24) примут вид уравнений (2.23), т. е. эти уравнения опять не будут содержать группу масштабных преобразований и не будут выражать закон сохранения энергии.

Если в качестве лагранжиана выбрать

$$L = \mathrm{const}\,(B^2)^\alpha,$$

где $B^2 = R_{ilkm}R^{ilkm}$, $\alpha = \frac{3}{4}$ и $\mathrm{const} = E_0$, то также можно получить соответствующие уравнения поля, однако они будут четвертого порядка и не будут (при любой степени α, т. е. при $\varkappa = \mathrm{const}$) обеспечивать переход к ньютоновской гравитации, что делает применение этого лагранжиана нецелесообразным. Однако использование величин R_{ilkm} при изучении гравитационных волн (нелинейных) вполне целесообразно.

В заключение следует отметить, что поскольку

$$\varkappa = \frac{3}{2E_0 \sqrt{R_0}} \simeq \frac{a}{E_0},$$

т. е. $\varkappa$ зависит от некоторой характерной длины и полной энергии системы, то, очевидно, в областях локальных неоднородностей материи значение $\varkappa$ может изменяться, что будет соответствовать принципу Маха.

Согласно принципу Маха, развитому Дике, притяжение двух тел происходит не только благодаря их непосредственному взаимодействию, но и благодаря влиянию всего гравитационного фона Вселенной (см. ч. II, § 7); при этом гравитационная «постоянная» может слабо изменяться, как функция расстояния от области локальной неоднородности материи.

Так как в абсолютно однородном пространстве $\frac{1}{\varkappa} \simeq \frac{E_0}{a}$, то при наличии локальной неоднородности материи, обладающей энергией $E_л$, на расстоянии r от нее будем приближенно иметь

$$\frac{1}{\varkappa} = \frac{E_0 - E_л}{a} + \beta \frac{E_л}{r} = \frac{E_0}{a} + E_л \left(\frac{\beta}{r} - \frac{1}{a} \right) \approx \frac{1}{\varkappa_0} + \beta \frac{E_л}{r} = \frac{E_0}{a^*},$$

где $\varkappa_0 \approx \frac{a}{E_0}$ — значение $\varkappa$ на большом расстоянии от локальной неоднородности; $a^* = \dfrac{a}{1 + \beta \dfrac{E_л}{r} \dfrac{a}{E_0}} = \dfrac{a}{1 + \beta \dfrac{\varphi_л}{\varphi_0}}$. Величину a^* можно назвать приведенным «радиусом» кривизны, $\beta \approx \frac{a}{\varkappa_0 E_0} \approx \frac{1}{10}$.

Но при локальном изменении a изменится «темп» излучения гравитационного поля (см. ч. II, § 7), причем

$$\varkappa_i = \varkappa \frac{a^2}{a^{*2}} \frac{\rho_0}{\rho_{л_0}}$$

и этот эффект практически скомпенсирует вычисленный выше.

§ 3. Законы сохранения

Выведем закон сохранения пока для частного случая, когда $T_{\text{л}ik} \ll T_{0ik}$; $\varkappa = \varkappa(R_0)$, т. е. тогда, когда поле определяется лагранжианом

$$-L_{0g} = \frac{E_0}{3} R_0^{3/2}. \tag{3.1}$$

Далее, мы обобщим задачу на случай

$$-L_{0g} = \frac{E_0 \sqrt{R_0}}{3} R \tag{3.2}$$

и на случай, когда $N \neq 0$.

Вычислим теперь величину (мы опускаем у R индекс нуль):

$$\frac{\partial(\sqrt{-g}\,L_g)}{\partial x^i} = \frac{\partial(\sqrt{-g}\,L_g)}{\partial g^{lm}} \frac{\partial g^{lm}}{\partial x^i} + \frac{\partial(\sqrt{-g}\,L_g)}{\partial \frac{\partial g^{lm}}{\partial x^k}} \frac{\partial^2 g^{lm}}{\partial x^i \partial x^k} + \\ + \frac{\partial(\sqrt{-g}\,L_g)}{\partial \frac{\partial^r g^{lm}}{\partial x^k \partial x^r}} \frac{\partial^3 g^{lm}}{\partial x^i \partial x^k \partial x^r}. \tag{3.3}$$

Исключая из (2.33) и (3.3) величину

$$\frac{\partial(\sqrt{-g}\,L_g)}{\partial g^{lm}} \frac{\partial g^{lm}}{\partial x^i}$$

(предварительно умножив все члены (2.33) на $\frac{\partial g^{lm}}{\partial x^i}$ и изменяя соответственно индексы), придем к уравнениям

$$\frac{\partial}{\partial x^k}\left[\frac{\partial g^{lm}}{\partial x^i}\left(\frac{\partial(\sqrt{-g}\,L_g)}{\partial \frac{\partial g^{lm}}{\partial x^k}} - \frac{\partial}{\partial x^r}\frac{\partial(\sqrt{-g}\,L_g)}{\partial \frac{\partial^2 g^{lm}}{\partial x^k \partial x^r}}\right) + \right. \\ \left. + \frac{\partial^2 g^{lm}}{\partial x^i \partial x^r} \frac{\partial(\sqrt{-g}\,L_g)}{\partial \frac{\partial^2 g^{lm}}{\partial x^k \partial x^r}} - \delta_i^k \sqrt{-g}\,L_g\right] = \\ = \frac{\sqrt{-g}}{2}(T_{lm} + \theta_{lm})\frac{\partial g^{lm}}{\partial x^i} = -\frac{\sqrt{-g}}{2}(T^{lm} + \theta^{lm})\frac{\partial g_{lm}}{\partial x^i}. \tag{3.4}$$

Обозначив

$$-t_i^k = \delta_i^k L_g + \frac{\partial g^{ml}}{\partial x^i}\left[-\frac{\partial L_g}{\partial \frac{\partial g^{lm}}{\partial x^k}} + \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x^r}\left(\sqrt{-g}\,\frac{\partial L_g}{\partial \frac{\partial^2 g^{lm}}{\partial x^k \partial x^r}}\right)\right] - \\ - \frac{\partial^2 g^{kl}}{\partial x^k \partial x^r} \frac{\partial L_g}{\partial \frac{\partial^2 g^{kl}}{\partial x^k \partial x^r}} = \overset{*}{\Omega}_i(L_g) \tag{3.5}$$

(где Ω^* — «оператор» псевдотензора, t_i^k — псевдотензор энергии-импульса гравитационного поля), придем к такому важному соотношению:

$$\frac{\partial}{\partial x^k}(\sqrt{-g}\, t_i^k) = -\frac{\sqrt{-g}}{2}(T^{lm}+\theta^{lm})\frac{\partial g_{lm}}{\partial x^i}. \tag{3.6}$$

Вычисляя (3.5), найдем, что

$$\frac{t_i^k}{E_0} = \delta_i^k \frac{\sqrt{R}}{3} R + \frac{3}{2E_0}\bar{t}_i^k + \frac{1}{2}\frac{\partial g^{ml}}{\partial x^i}\frac{\partial \sqrt{R}}{\partial x^r}\frac{C_{ml}^{kr}}{\sqrt{-g}} \tag{3.7}$$

(здесь $R = R_0$),

$$-\frac{3\bar{t}_i^k\sqrt{-g}}{E_0\sqrt{R}} = -2\varkappa\bar{t}_i^k\sqrt{-g} = C_{ml}^{kr}\frac{\partial^2 g^{ml}}{\partial x^i \partial x^r} + D_{lm}^k \frac{\partial g^{lm}}{\partial x^i},$$

или

$$-2\varkappa\bar{t}_i^k = \left[g^{lm}\frac{\partial \Gamma_{lm}^k}{\partial x^i} - g^{km}\frac{\partial \Gamma_{ml}^l}{\partial x^i}\right]. \tag{3.8}$$

Определим теперь величины

$$T_i^k + t_i^k = E_0\sqrt{R}\left[\frac{3}{2E_0\sqrt{R}}\bar{t}_i^k + R_i^k\right] + \frac{E_0}{2}\frac{\partial \sqrt{R}}{\partial x^r}\frac{\partial g^{ml}}{\partial x}\frac{C_{ml}^{kr}}{\sqrt{-g}}. \tag{3.9}$$

Далее, поскольку

$$T_{i;k}^k = \frac{\partial(\sqrt{-g}\, T_i^k)}{\sqrt{-g}\,\partial x^k} - \frac{T^{lm}}{2}\frac{\partial g_{lm}}{\partial x^i} = 0, \tag{3.10}$$

то, исключая из (3.6) и (3.10) величины $-\frac{\sqrt{-g}}{2}T^{lm}\frac{\partial g_{lm}}{\partial x^i}$, придем к выражению

$$\frac{\partial}{\partial x^k}[\sqrt{-g}(T_i^k + t_i^k)] = \frac{\sqrt{-g}}{2}\theta_{lm}\frac{\partial g^{lm}}{\partial x^i}. \tag{3.11}$$

Сравнивая величины $\frac{\partial}{\partial x^k}[\sqrt{-g}(T_i^k + t_i^k)]$, которые можно получить из (3.9), с выражением (3.11), найдем, что

$$E_0\frac{\partial\sqrt{R}}{\partial x^k}\frac{3}{2}\frac{\bar{t}_i^k}{2E_0\sqrt{R}} + \frac{E_0\sqrt{R}}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x^k}\left[\sqrt{-g}\left(\frac{3}{2}\frac{\bar{t}_i^k}{E_0\sqrt{R}} + R_i^k\right)\right] + \frac{E_0}{2\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x^k}\left[C_{ml}^{kr}\frac{\partial\sqrt{R}}{\partial x^r}\frac{\partial g^{ml}}{\partial x^i}\right] = \frac{1}{2}\theta_{lm}\frac{\partial g^{lm}}{\partial x^i}.$$

Используя (3.7) и несколько преобразуя, найдем

$$\frac{E_0\sqrt{R}}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x^k}\left[\sqrt{-g}\left(\frac{3}{2}\frac{\bar{t}_i^k}{E_0\sqrt{R}}+R_i^k\right)\right]=0. \tag{3.12}$$

Это условие действительно должно иметь место, поскольку

$$\sqrt{-g}\,(\varkappa\bar{t}_i^k+R_i^k)=\sqrt{-g}\left(\frac{3}{2}\frac{\bar{t}_i^k}{E_0\sqrt{R}}+R_i^k\right)=\frac{1}{2}\frac{\partial\chi_i^{kl}}{\partial x^l}, \tag{3.13}$$

где

$$\chi_i^{kl}=\sqrt{-g}\,g^{kn}g^{lm}\left(\frac{\partial g_{im}}{\partial x^n}-\frac{\partial g_{in}}{\partial x^m}\right) \tag{3.14}$$

есть антисимметричный по индексам k; l псевдотензор.

Таким образом, законы сохранения можно написать в виде

$$\frac{3}{2\varkappa}\frac{\partial}{\partial x^k}[\sqrt{-g}\,(\varkappa\bar{t}_i^k+R_i^k)]=\frac{3}{4\varkappa}\frac{\partial^2\chi_i^{kl}}{\partial x^k\partial x^l}=0. \tag{3.15}$$

Вычислим теперь более подробно величину θ_{ik}. Очевидно, что

$$\frac{\sqrt{-g}}{E_0}\theta_{ik}=\frac{\partial\sqrt{R}}{\partial x^l}(B_{ik}^l-2D_{ik}^l)+\frac{\partial^2\sqrt{R}}{\partial x^l\partial x^k}C_{ik}^{lm}=$$

$$=\frac{\partial}{\partial x^m}\left(C_{ik}^l\frac{\partial\sqrt{R}}{\partial x^l}\right)-\frac{\partial\sqrt{R}}{\partial x^l}D_{ik}^l=$$

$$=\sqrt{-g}\left\{\frac{\partial\sqrt{R}}{\partial x^l}\left[\frac{1}{2}g^{lm}\left(g_{ik}\frac{\partial\ln g}{\partial x^m}-\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^m}\right)+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\left(g_{ik}\frac{\partial g^{lm}}{\partial x^m}-g_{im}\frac{\partial g^{lm}}{\partial x^k}\right)\right]+\frac{\partial^2\sqrt{R}}{\partial x^l\partial x^m}(g^{lm}g_{ik}-\delta_i^k\delta_k^l)\right\}.$$

После преобразования можно прийти к выражению

$$\frac{\theta_{ik}}{E_0}=\frac{\partial\sqrt{R}}{\partial x^l}(g_{im}g^{lr}\Gamma_{kr}^m-g_{ik}g^{mr}\Gamma_{mr}^l)+\frac{\partial^2\sqrt{R}}{\partial x^l\partial x^k}(g^{lm}g_{ik}-\delta_i^m\delta_k^l). \tag{3.16}$$

Теперь (3.11) можно окончательно написать в виде

$$\frac{\partial}{\partial x^k}[\sqrt{-g}(T_i^k+t_i^k)]=\frac{\sqrt{-g}}{2}E_0\left[\frac{\partial\sqrt{R}}{\partial x^l}\left(\frac{\partial\ln g}{\partial x^i}g^{mr}\Gamma_{mr}^l-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{\partial g_{ab}}{\partial x^i}g^{am}\Gamma_{mr}^b g^{lr}\right)-\frac{\partial^2\sqrt{R}}{\partial x^l\partial x^m}\left(g^{lm}\frac{\partial\ln g}{\partial x^i}+\frac{\partial g^{lm}}{\partial x^i}\right)\right]=\sqrt{-g}f_i. \tag{3.17}$$

В локально-инерциальной системе

$$\frac{\partial}{\partial x^k}[\sqrt{-g}(T_i^k+t_i^k)]=0. \tag{3.18}$$

Уравнения (3.17) выражают дифференциальные законы сохранения энергии-импульса материи и гравитационного поля.

Пусть теперь $-L_{0g}=\frac{E_0}{3}\sqrt{R_0}R$; точные вычисления их псевдотензора и законов сохранения в общем виде возможны и в этом случае, но они чрезвычайно сложны и не необходимы. Будем искать для них простые приближенные выражения, имеющие характер интерполяции. Напишем выражение $-\delta(\sqrt{-g}L_{0g})$ в виде

$$-\delta(\sqrt{-g}L_{0g})=$$

$$=\frac{\sqrt{-g}E_0\sqrt{R_0}}{3}\left[\frac{1}{\sqrt{-g}}\delta(\sqrt{-g}R)+\frac{R}{2R_0}\delta R_0\right].$$

Далее, допустим, что $\frac{R}{R_0}\delta R_0=f\delta R$, где $f=f(x^i)$. Тогда придем к такому результату:

$$-\delta(\sqrt{-g}L_{0g})=\frac{\sqrt{-g}E_0\sqrt{R_0}}{3}\left\{\delta g^{ik}\left[R_{ik}\left(1+\frac{f}{2}\right)-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{1}{2}g_{ik}R\right]+\left(1+\frac{f}{2}\right)g^{ik}\delta R_{ik}\right\}. \tag{3.19}$$

Если $R_л\gg R_0$, то $f=0$; если $R_л=0$, то $f=1$. Повторяя выкладки, которые мы только что проделали, можно прийти к соотношениям

$$t_i^k=\frac{\delta_i^k}{2\varkappa}R+\left(1+\frac{f}{2}\right)\bar{t}_i^k+$$

$$+\frac{E_0}{3}\frac{\partial g^{ml}}{\partial x^i}\frac{C_{ml}^{kr}}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x^r}\left[\left(1+\frac{f}{2}\right)\sqrt{R_0}\right], \tag{3.20}$$

$$\frac{\partial}{\partial x^k}[\sqrt{-g}(T_i^k+t_i^k)]=\frac{\sqrt{-g}}{2}\theta_{lm}^*\frac{\partial q^{lm}}{\partial x^i}, \tag{3.21}$$

где

$$\overset{*}{\theta}_{ik} = \frac{\partial\left[\sqrt{R_0}\left(1+\frac{f}{2}\right)\right]}{\partial x^l}\left[g_{im}g^{lr}\Gamma^m_{kr} - g_{ik}g^{mr}\Gamma^l_{mr}\right] + \\ + \frac{\partial^2\left[\sqrt{R_0}\left(1+\frac{f}{2}\right)\right]}{\partial x^l \partial x^m}\left(g^{lm}g_{ik} - \delta^m_i\delta^l_k\right). \qquad (3.22)$$

При $f = 0$, поскольку $R_0 \ll R$, $\frac{\partial \sqrt{R_0}}{\partial x^l} \to 0$, $\frac{\partial^2 \sqrt{R_0}}{\partial x^l \partial x^m} \to 0$, мы приходим к обычным тождествам сохранения. При $f = 1$, так как $R_л = 0$, приходим к предельным уравнениям, выведенным только что для лагранжиана

$$-L_{0g} = \frac{E_0}{3} R_0^{\frac{3}{2}} = \frac{R_0}{2\varkappa}, \text{ где } \varkappa = \frac{3}{2E_0\sqrt{R_0}}.$$

Если $N \neq 0$, то при вычислении t^k_i надо из правой части уравнения (3.20) вычесть $\overset{*}{\Omega}{}^k_i(N)$. Соответственно необходимо будет изменить величины $\overset{*}{\theta}_{ik}$. При этом автоматически величины $N^x_{ik} - \Delta\theta_{ik} = \Delta T^x_{ik}$ будут представлять компоненты тензора.

Поскольку при $f = 1$ в локально-инерциальной системе

$$T^k_i + t^k_i = E_0\sqrt{R_0}\left[\varkappa \bar{t}^k_i + R^k_i\right] = \frac{3}{2}\left(\bar{t}^k_i + \frac{R^k_i}{\varkappa}\right) = \frac{3}{4\sqrt{-g}}\frac{\partial \chi^{kl}_i}{\partial x^l}, \qquad (3.23)$$

то всюду, где при $f = 0$ полная энергия $\bar{E}_0 = \frac{\bar{E}_м}{2}$, теперь будет иметь место выражение

$$\bar{E}_0 = \frac{3}{4}\bar{E}_м, \qquad (3.24)$$

так как перед выражением $\bar{t}^k_i + \frac{R^k_i}{\varkappa}$ стоит множитель $^3/_2$.

Поскольку $\bar{E}_0 = \bar{E}_м + E_g = \frac{3}{4}\bar{E}_м$, то

$$\bar{E}_g = -\frac{1}{4}\bar{E}_м, \qquad (3.25)$$

что полностью объясняет несоответствие между электромагнитной энергией ($\bar{E}_э$) элементарных частиц (электроны) и их обычной энергией, которая определяется через импульс.

Очевидно, что

$$\bar{E}_э = \bar{E}_0 = \frac{3}{4}\bar{E}_м = \frac{3}{4}mc^2. \qquad (3.26)$$

Причем в отличие от «искусственных» результатов А. Эйнштейна [см. (14.15)] в статической модели, которая неприемлема, здесь $E_\alpha = \frac{3}{4} mc^2$ имеет место в общем динамическом случае, что вполне разумно. Применяя к этому случаю интегральные законы сохранения

$$cP_i = -\frac{\partial}{\partial x^i} \int \sqrt{-g}\, \hat{L}\, d\Omega, \tag{3.27}$$

найдем, что

$$cP_i = \gamma_0 \frac{\partial}{\partial x^i} \int \sqrt{-g} \frac{R}{2\varkappa} d\Omega = -\gamma_0 \frac{\partial}{\partial x^i} \int \sqrt{-g}\, T d\Omega. \tag{3.28}$$

Отсюда

$$cP_\alpha = 0, \quad cP_0 = E_0 = \gamma_0 E_{\text{м}}. \tag{3.29}$$

Поскольку для шварцшильдовской задачи

$$cP_0 = \frac{3}{4} E_{\text{м}} = E_0, \tag{3.30}$$

то

$$\gamma_0 = \frac{3}{4}. \tag{3.31}$$

Таким образом, в случае однородных моделей Вселенной

$$\hat{L} = \frac{3}{4} L = -\frac{3}{4} \frac{R}{2\varkappa}. \tag{3.32}$$

Ниже мы убедимся в справедливости соотношения (3.32), а следовательно, и в том, что константу γ_0 в случае однородных моделей Вселенной можно определять по стационарному шварцшильдовскому полю.

В общем случае

$$cP_i = -\frac{\partial}{\partial x^i} \int \sqrt{-g}\, \hat{L} d\Omega = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x^i} \int \sqrt{-g}\, R^* d\Omega, \tag{3.33}$$

где

$$R^* = B_l^m R_m^l.$$

Теперь следует подчеркнуть, что дифференциальные соотношения сохр нения, например, (3.21) не имеют характер тождеств, а дают уравнения законов сохранения, поскольку эти соотношения не совпадают с тождествами Бианки.

§ 4. Обобщение моделей нашей Вселенной (Вселенной фридмана)

Рассмотрим модели однородной Вселенной в том случае, когда $\varkappa \neq \mathrm{const}$. Для однородных моделей естественно положить, что

$$B_l^m = \frac{1}{\varkappa}\delta_l^m. \tag{4.1}$$

При этом уравнения поля примут вид

$$\frac{3}{2}R_i^k - \frac{1}{2}\delta_i^k R = \varkappa\,(T_i^k + \bar{t}_i^{*k}), \tag{4.2}$$

или

$$R_i^k - \frac{1}{2}\delta_i^k R = \varkappa\,(T_i^k + t_i^{*k}) - \delta_i^k R\,\frac{\partial \ln\varkappa}{\partial \ln g}, \tag{4.3}$$

где $\bar{t}_i^{*k}$ — тензор, t_i^{*k} — псевдотензор частиц с массой поля, равной нулю,

$$\varkappa\,(t_i^{*k} - \bar{t}_i^{*k}) = -\frac{1}{2}R_i^k + \delta_i^k R\,\frac{\partial \ln\varkappa}{\partial \ln g} = \varkappa\theta_i^{*k}. \tag{4.4}$$

Воспользуемся для дальнейших выкладок уравнением (4.3).

Метрика однородных пространств будет такая же, как и при $\varkappa = \mathrm{const}$, поэтому значения компонент R_i^k будут также прежними (см. ч. I, § 9) (изменится лишь зависимость $a = a(\tau)$):

$$R_0^0 = \frac{3a\ddot{a}}{c^2a^2},\ R_0^\alpha = 0,\ R_\alpha^\beta = \frac{\delta_\alpha^\beta}{a^2}\left[2\left(\beta_1 + \frac{\dot{a}^2}{c^2}\right) + \frac{a\ddot{a}}{c^2}\right], \tag{4.5}$$

$$R = \frac{6}{a^2}\left(\beta_1 + \frac{\dot{a}^2}{c^2} + \frac{a\ddot{a}}{c^2}\right) = R(a). \tag{4.6}$$

Поскольку

$$\varkappa = \varkappa(a), \qquad (-g) = a^8A^4\sin^2\theta,$$

то

$$\frac{\partial \ln\varkappa}{\partial \ln g} = \frac{d\ln\varkappa}{d\ln a}\,\frac{1}{\dfrac{\partial \ln g}{\partial \ln a}} = \frac{1}{8}\,\frac{d\ln\varkappa}{d\ln a}, \tag{4.7}$$

и уравнения (4.3) примут вид

$$R_0^0 - \frac{1}{2}R = \varkappa\,(T_0^0 + t_0^{*0}) - \frac{R}{8}\,\frac{d\ln\varkappa}{d\ln a}, \tag{4.8}$$

$$R_1^1 - \frac{1}{2}R = \varkappa\,(T_1^1 + t_1^{*1}) - \frac{R}{8}\,\frac{d\ln\varkappa}{d\ln a}. \tag{4.9}$$

Отсюда, принимая во внимание, что

$$t^* = t^{*0}_0 + 3t^{*1}_1 = 0, \tag{4.10}$$

легко найти

$$R = -2\varkappa T. \tag{4.11}$$

Подставляя в эти уравнения

$$T = 3p - \varepsilon, \qquad T^0_0 = -\varepsilon, \qquad T^1_1 = p \tag{4.12}$$

и значения R^0_0, R^1_1 и R из (4.6), окончательно получим

$$3\left(\beta_1 + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{a\ddot{a}}{c^2}\right)\left(1 - \frac{1}{4}\frac{d\ln\varkappa}{d\ln a}\right) = a^2\varkappa\left(\varepsilon - t^{*0}_0\right) + \frac{3a\ddot{a}}{c^2}, \tag{4.13}$$

$$6\left(\beta_1 + \frac{\dot{a}^2}{c^2} + \frac{a\ddot{a}}{c^2}\right)\left(1 - \frac{1}{2}\frac{d\ln\varkappa}{d\ln a}\right) = a^2\varkappa\left(\varepsilon - 3p\right), \tag{4.14}$$

$$\left(\beta_1 + \frac{\dot{a}^2}{c^2} + \frac{a\ddot{a}}{c^2}\right)\left(1 - \frac{3}{4}\frac{d\ln\varkappa}{d\ln a}\right) = -\left[a^2\varkappa\left(p + t^{*1}_1\right) + \frac{a\ddot{a}}{c}\right] \tag{4.15}$$

[причем уравнение (4.15) является следствием уравнений (4.13) и (4.14)].

Напишем теперь закон сохранения полной энергии E_0, т. е. энергии, материи и гравитационного поля. Очевидно, что

$$-\left(T^0_0 + t^{*0}_0\right)V_0 = E_0 = 2\pi^2 a^3\beta_2\left(\varepsilon - t^{*0}_0\right) = \\ = -\int\sqrt{-g}\left(T^0_0 + t^{*0}_0\right)dV. \tag{4.16}$$

Заметим, что полный объем равен

$$V_0 = \int\sqrt{-g}\,dV = 2\pi^2 a^3\beta_2. \tag{4.17}$$

Поскольку имеет место уравнение

$$\varepsilon v = c^2 + \frac{pv}{k-1}, \tag{4.18}$$

где при $p \to \infty$ $k = {}^4/_3$, а при $p \ll \varepsilon$ k может быть произвольным ($k \geqslant 1$), то можно написать

$$\varepsilon - 3p = \frac{c^2}{v}\bar{\beta} = \bar{\beta}\rho^* c^2 = \frac{E^*_m\bar{\beta}}{2\pi^2\beta_2 a^3}, \tag{4.19}$$

где

$$\bar\beta = 1 + \frac{pv\,(4-3k)}{(k-1)\,c^2}\,;$$

ρ^* — плотность материи (без учета внутренней энергии), $\bar\beta E_m^* = (\varepsilon - 3p)\,V_0 = \int \sqrt{-g}\,(\varepsilon - 3p)\,dV$ — энергия материи.

Подставляя (4.17) в (4.13) и (4.19) в (4.14), придем к уравнениям

$$\left(\beta_1 + \frac{\dot a^2}{c^2} + \frac{a\ddot a}{c^2}\right)\left(1 - \frac{1}{4}\frac{d\ln\varkappa}{d\ln a}\right) = \frac{a\ddot a}{c^2} + \frac{\varkappa E_0}{6\pi^2\beta_2 a}\,, \tag{4.20}$$

$$\left(\beta_1 + \frac{\dot a^2}{c^2} + \frac{a\ddot a}{c^2}\right)\left(1 - \frac{1}{2}\frac{d\ln\varkappa}{d\ln a}\right) = \frac{\varkappa E_{\text{м}}^*\bar\beta}{12\pi^2\beta_2 a}\,. \tag{4.21}$$

Напишем эти уравнения в виде

$$\frac{\varkappa}{a} = \frac{3\pi^2\beta_2\left(\beta_1 + \dfrac{\dot a^2}{c^2} - \dfrac{a\ddot a}{c^2}\right)}{E_0 - \dfrac{E_{\text{м}}^*\bar\beta}{4}}\,, \tag{4.22}$$

$$\frac{d\ln\varkappa}{d\ln a} = 2\,\frac{\left(E_0 - \dfrac{\bar\beta E_{\text{м}}^*}{2}\right)\left(\beta_1 + \dfrac{\dot a^2}{c^2} + \dfrac{a\ddot a}{c^2}\right) + \bar\beta\,\dfrac{E_{\text{м}}^*}{2}\,\dfrac{a\ddot a}{c^2}}{\left(\beta_1 + \dfrac{\dot a^2}{c^2} + \dfrac{a\ddot a}{c^2}\right)\left(E_0 - \bar\beta\,\dfrac{E_{\text{м}}^*}{4}\right)}\,. \tag{4.23}$$

Дифференцируя (4.22), найдем

$$\frac{d\ln\varkappa}{d\ln a} = 1 + \frac{\dfrac{a\ddot a}{c^2} - \dfrac{a^2\ddot a}{\dot a c^2}}{\beta_1 + \dfrac{\dot a^2}{c^2} - \dfrac{a\ddot a}{c^2}} = \frac{\beta_1 + \dfrac{\dot a^2}{c^2} - \dfrac{a^2\ddot a}{\dot a c^2}}{\beta_1 + \dfrac{\dot a^2}{c^2} - \dfrac{a\ddot a}{c^2}}\,. \tag{4.24}$$

Сравнивая (4.23) и (4.24), придем к уравнению

$$2\left[\left(E_0 - \bar\beta\,\frac{E_{\text{м}}^*}{2}\right)\left(\beta_1 + \frac{\dot a^2}{c^2} + \frac{a\ddot a}{c^2}\right) + \frac{\bar\beta E_{\text{м}}^* a\ddot a}{2c^2}\right]\left(\beta_1 + \frac{\dot a^2}{c^2} - \frac{a\ddot a}{c^2}\right) =$$

$$= \left(\beta_1 + \frac{\dot a^2}{c^2} - \frac{a^2\ddot a}{\dot a c^2}\right)\left(\beta_1 + \frac{\dot a^2}{c^2} + \frac{a^2\ddot a}{c^2}\right)\left(E_0 - \frac{\bar\beta E_{\text{м}}^*}{4}\right).$$

Откуда

$$\frac{3}{4}\,\frac{\left(\beta_1 + \dfrac{\dot a^2}{c^2}\right)^2}{E_0 - \bar\beta\,\dfrac{E_{\text{м}}^*}{4}}\left(\frac{4}{3}E_0 - \bar\beta E_{\text{м}}^*\right) = \left(\beta_1 + \frac{\dot a^2}{c^2}\right)\left(\frac{a\ddot a}{c^2} - \frac{a^2\ddot a}{\dot a c^2}\right) -$$

$$- \frac{a^3\ddot a\dddot a}{c^4\dot a} + \frac{a^2\ddot a^2}{c^4}\,\frac{2E_0 - \bar\beta E_{\text{м}}^*}{E_0 - \bar\beta\,\dfrac{E_{\text{м}}^*}{4}} - \frac{\bar\beta E_{\text{м}}^*}{E_0 - \bar\beta\,\dfrac{E_{\text{м}}^*}{4}}\,\frac{a\ddot a}{c^2}\left(\beta_1 + \frac{a^2}{c^2} - \frac{a\ddot a}{c^2}\right). \tag{4.25}$$

Это уравнение и определяет $a = a(\tau)$, после чего из (4.22) находим $\varkappa = \varkappa(a)$.

Рассмотрим теперь для контроля наших вычислений уравнение

$$[\varkappa (T_i^k + t_i^{*k})]_{;\,k} = \frac{\partial}{\partial x^i}\left(R\frac{\partial \ln \varkappa}{\partial \ln g}\right) = \frac{1}{8}\frac{\partial}{\partial x^i}\left(R\frac{d \ln \varkappa}{d \ln a}\right). \tag{4.26}$$

При $i = 1, 2, 3$ эти уравнения выполняются тождественно, что легко проверить. При $i = 0$ получим уравнения, подчиняющиеся следствиям уравнений (4.13) и (4.14).

В самом деле,

$$[\varkappa (T_i^k + t_i^{*k})]_{;\,k} = -\frac{\partial}{\partial x^i}(\varkappa T \psi), \tag{4.27}$$

где

$$\psi = \frac{\partial \ln x}{\partial \ln g}\,\frac{1}{1 - 4\dfrac{\partial \ln \varkappa}{\partial \ln g}} = \frac{1}{8}\frac{d \ln \varkappa}{d \ln a}\,\frac{1}{1 - \dfrac{1}{2}\dfrac{d \ln \varkappa}{d \ln a}}.$$

Далее,

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial(\sqrt{-g}\,\varkappa T_i^k)}{\partial x^k} - \frac{\varkappa T^{kl}}{2}\frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i} + \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial(\sqrt{-g}\,\varkappa t_i^{*k})}{\partial x^k} - \frac{\varkappa t^{*kl}}{2}\frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i} + \frac{\partial(\varkappa T\psi)}{\partial x^i} = 0.$$

При $i = 0$ будем иметь

$$\frac{1}{a^4}\frac{d(\varkappa a^4 T_0^0)}{da} - \frac{\varkappa T^{00}}{2}\frac{dg_{00}}{da} - \frac{3\varkappa T^{11}}{2}\frac{dg_{11}}{da} + \frac{1}{a^4}\frac{d(\varkappa a^4 t_0^{*0})}{da} - \frac{\varkappa t_m^{*k} g^{ml}}{2}\frac{dg_{kl}}{da} + \frac{d(\varkappa T\psi)}{da} = 0.$$

Поскольку

$$T^{00} = T_0^0 g^{00} = \frac{\varepsilon}{a^2},$$

$$T^{11} = T_1^1 g^{11} = \frac{p}{a^2},$$

$$t_m^{*k} g^{ml}\, dg_{kl} = 0,$$

мы придем к следующему результату:

$$\frac{3\varkappa(\varepsilon + p)}{a} + \frac{d(\varkappa\varepsilon)}{da} + \frac{d[\varkappa(\varepsilon - 3p)\psi]}{da} = \frac{4\varkappa t_0^0}{a} + \frac{d(\varkappa t_0^0)}{da}.$$

Отсюда после простых преобразований имеем

$$\frac{4\varkappa}{a}(\varepsilon - t_0^0) - \frac{\varkappa}{a}(\varepsilon - 3p) + \frac{d\,[\varkappa(\varepsilon - t_0^0)]}{da} + $$
$$+ \frac{d\,[\varkappa\psi(\varepsilon - 3p)]}{da} = 0. \quad (4.28)$$

Так как из (4.27) следует, что

$$\varkappa\psi(\varepsilon - 3p) = -\frac{\varkappa(\varepsilon - 3p)}{4} + \frac{3}{2a^2}\left(\beta_1 + \frac{\dot{a}^2}{c^2} - \frac{a\ddot{a}}{c^2}\right),$$

то (4.28) можно написать в виде

$$\frac{d}{da}\left[a^4\varkappa\left((\varepsilon - t_0^0) - \frac{1}{4}(\varepsilon - 3p)\right)\right] =$$
$$= -\frac{3}{2}a^4\frac{d}{da}\frac{\beta_1 + \frac{\dot{a}^2}{c^2} + \frac{a\dot{a}}{c^2}}{a^2} = -\frac{3}{2}\frac{d}{da}\left[a^2\left(\beta_1 + \frac{\dot{a}^2}{c^2} - \frac{a\ddot{a}}{c^2}\right)\right].$$

Отсюда

$$\varkappa a^2\left[(\varepsilon - t_0^0) - \frac{1}{4}(\varepsilon - 3p)\right] = \frac{3}{2}\left(\beta_1 + \frac{\dot{a}^2}{c^2} - \frac{a\ddot{a}}{c^2}\right), \quad (4.29)$$

что является следствием уравнений (4.13) и (4.14).

Поскольку расширение полости, занятой материей, должно происходить со скоростью света, то на границе этой полости ($dl = d\theta = 0$) должны выполняться соотношения

$$ds^2 = c^2\,d\tau^2 - a^2\,d\chi^2 = a^2 d\,(\eta^2 - \chi^2) = 0, \quad \eta = \pm\chi + \text{const}, \quad (4.30)$$

откуда $cd\tau = ad\chi = ad\eta$. При этом поскольку для частицы $\chi = \chi_0 = \text{const}$ и $d\chi = 0$, то $d\tau = 0$ и собственное время $\tau = 0$. Далее, для первого «фотона» $\eta = \chi - \chi_0 = 0$; при $\chi = \chi_0 = \text{const}$ изменение расстояния от «точки» разлета

$$dl = \chi_0\,da. \quad (4.31)$$

Если рассматривать расширение относительно выбранной «точки» разлета (которая может быть произвольной), то для нее расстояние до «первого» фотона $l = a\chi_0 = c\tau_0$, где τ_0—собственное время в этой точке; поэтому

$$dl = \chi_0\,da = c\,d\tau_0; \quad \frac{\partial a}{c\partial\tau} = \frac{\dot{a}}{c} = \frac{1}{\chi_0}; \quad \frac{a}{c} = \frac{\tau_0}{\chi_0}. \quad (4.32)$$

Этот результат можно интерпретировать следующим образом. Например, в квазиевклидовой нашей Вселенной вне ее границы пространство (среду) справа на границе можно считать невозмущенным, поэтому для него

$$dl = \bar{a}d\bar{\chi} = \bar{a}d\bar{\eta} = cd\tau,$$

где $\bar{\chi}$ — Лагранжевы координаты частиц «среды», находящихся в покое вне границы Вселенной; при этом они будут совпадать с Эйлеровыми координатами, и именно поэтому в данной области можно считать $\bar{a} = \text{const}$.

Внутри границы Вселенной, точнее говоря, слева на границе $\chi = \chi_0 = \text{const}$ (координаты границы), a переменно (увеличивается со временем) и $dl = \chi_0 da$. Отсюда и следует, что $cd\tau = \chi_0 da$. Этот результат можно перенести и на остальные две модели (метрики) Вселенной. В случае гиперболической Вселенной и в случае эллиптической (замкнутой самой в себе) Вселенной надо представить себе, что наши рассуждения относятся к пространству в собственной системе отсчета.

При этом поскольку на границе

$$\frac{r_0}{r} = \frac{r^2}{a^2} = \text{const}, \quad \lambda = \text{const}, \quad \nu = \text{const}$$

и условие прямолинейности первой характеристики, совпадающей с траекторией первой лагранжевой частицы, будет иметь место как в собственной, так и в центральной системах отсчета, а времена и собственные расстояния будут отличаться только постоянными множителями, то подобная «автомодельность» будет иметь место и во всем пространстве.

Итак, при таком «автомодельном» расширении пространства $\frac{\dot{a}}{c} = \frac{1}{\chi_0}$, $\ddot{a} = 0$. Уравнения (2.30) $R_i^k \frac{\partial R}{\partial x^k} = 0$ при этом автоматически выполняются, а уравнения поля, выведенные выше, сильно упростятся.

Исходя из (4.25), легко вычислить, что

$$E_0 = \frac{3}{4} \bar{\beta} E_{\text{м}}^{*}. \tag{4.33}$$

Далее, из (4.26) имеем

$$\frac{\varkappa}{a} = \frac{9\pi^2\beta_2\left(\beta_1 + \frac{1}{\chi_0^2}\right)}{2E_0} = \frac{6\pi^2\beta_2\left(\beta_1 + \frac{1}{\chi_0^2}\right)}{\bar{\beta} E_{\text{м}}^{*}}, \quad \frac{d \ln \varkappa}{d \ln a} = 1, \tag{4.34}$$

при этом $\frac{d \ln R}{d \ln a} = -2 + \frac{3a\ddot{a}/c^2 + \dddot{a}\, a^2/\dot{a}c^2}{\beta_1 + \dot{a}^2/c^2 + a\ddot{a}/c^2} = -2.$

Из (4.17) и (4.19) имеем

$$\frac{\varepsilon - 3p}{\varepsilon - t_0^{*0}} = \frac{\bar{\beta} E_{\text{м}}^*}{E_0} = \frac{4}{3},$$

откуда

$$t_0^{*0} = \frac{1}{4}(\varepsilon + 9p) = -3t_1^{*1}. \tag{4.35}$$

Уравнения (4.13) и (4.14) теперь удобно написать в виде

$$-3t_1^{*1} = t_0^{*0} = 3\left[p + \frac{1}{4\varkappa a^2}\left(\beta_1 + \frac{1}{\chi_0^2}\right)\right],$$

$$\varepsilon = 3\left[p + \frac{1}{4\varkappa c^2}\left(\beta_1 + \frac{1}{\chi_0^2}\right)\right]. \tag{4.36}$$

Уравнения (4.2) можно написать в виде

$$\frac{3}{2} R_0^0 - \frac{1}{2} R = \varkappa (T_0^{*0} + \bar{t}_0^{*0}), \tag{4.37}$$

$$\frac{3}{2} R_1^1 - \frac{1}{2} R = \varkappa (T_1^{*1} + \bar{t}_1^{*1}), \tag{4.38}$$

или

$$3\left(\beta_1 + \frac{1}{\chi_0^2}\right) = \varkappa a^2 (\varepsilon - \bar{t}_0^{*0}), \qquad T_1^{*1} + \bar{t}_1^{*1} = 0 \tag{4.39}$$

или

$$\bar{t}_1^{*1} = -p.$$

Отсюда, поскольку $\bar{t}_0^{*0} = -3\bar{t}_1^{*1}$, имеем

$$\bar{t}_0^{*0} = 3p, \tag{4.40}$$

$$3\left(\beta_1 + \frac{1}{\chi_0^2}\right) = \varkappa a^2 (\varepsilon - 3p),$$

т. е. приходим к уравнению (4.14), что и является свидетельством правильности наших вычислений. Далее находим, что

$$-\varkappa \theta_i^{*k} = \frac{1}{2}\left(R_i^k - \frac{1}{4}\delta_i^k R\right), \qquad \theta_i^{*i} = \theta^* = 0. \tag{4.41}$$

Псевдотензор θ_i^{*k} (или t_i^{*k}) можно интерпретировать как псевдотензор частиц гравитационного поля (гравитонов), а тензор $\bar{t}_i^{*k}$ — как тензор частиц с массой покоя, равной нулю.

Поскольку имеет место уравнение

$$R = -2\varkappa T, \tag{4.41}$$

то, используя его, легко написать для контроля баланс энергии:

$$S = -\frac{1}{c}\int \sqrt{-g}\, L d\Omega = -\frac{\gamma_0}{c}\int \frac{R}{2\varkappa}\sqrt{-g}\, d\Omega = \\ = -\frac{\gamma_0}{c}\int T\sqrt{-g}\, d\Omega,$$

или

$$S = \frac{3}{4}\int \sqrt{-g}\,(\varepsilon - 3p)\, dv\, d\tau,$$

откуда

$$\frac{\partial S}{\partial \tau} = E_0 = \frac{3}{4}(\varepsilon - 3p)\, v_0 = \frac{3}{4}\beta E^*, \tag{4.42}$$

что и должно выполняться [см. (4.35)]. Поскольку $a \sim R^{-1/2} \sim \tau$, то a и E в однородных моделях являются скалярами и действительно выполняется закон сохранения энергии.

Соотношение $E_0 = \frac{3}{4}\bar{\beta}E^0_{\text{м}}$ может помочь в объяснении величины массы и энергии электрона. Так как $F_{\text{эм}} = \frac{3}{4}E_{\text{м}}$, где $E_{\text{эм}}$ — электромагнитная энергия Кулонова поля, то можно думать, что, поскольку в настоящее время $p \ll \varepsilon\,(p \to 0)$, $\bar{\beta} = 1$, $E^*_{\text{м}} = E_{\text{м}}$, будет выполняться и

$$\bar{E}_{\text{эм}} = \bar{E}_0 = \bar{E}_{\text{м}} + E_g = \frac{3}{4} m_0 c^2. \tag{4.43}$$

Здесь $\bar{E}_{\text{м}} = m_0 c^2$, где m_0 — масса покоя электрона (напомним, что наши результаты имеют место в собственной системе отсчета; это и позволяет интерпретировать m_0 как массу покоя).

Энергия гравитационного поля электрона

$$\bar{E}_g = \bar{E}_0 - \bar{E}_{\text{м}} = -\frac{E_{\text{м}}}{4} = -\frac{m_0 c^2}{4}. \tag{4.44}$$

Мы пришли к такому же результату, как и в случае анализа шварцшильдовского поля.

Напомним, что и в статической модели Вселенной Эйнштейна можно было искусственными приемами получить аналогичный результат, однако он не был корректным (уравнение электродинамики не имеет необходимых для этой цели статических решений). Во фридмановских моделях мы имели $E_0 = E$ или $E_0 = E/2$, но в последнем случае, как мы видели, существует некорректность в выполнении законов сохранения. И, наконец, в наших обобщенных моделях получаются необходимые корректные результаты.

Исследуем теперь в общем случае энергетический баланс рассматриваемых моделей Вселенной.

Полная энергия

$$E_0 = E_\text{м} + E_g = \frac{3}{4}\bar{\beta}E^*_\text{м}, \tag{4.45}$$

где E_g — энергия гравитационного поля,

$$E_\text{м} = E^*_\text{м} + E_{\text{м, п}} + E_{\text{м, к}} \tag{4.46}$$

есть полная энергия материи. Здесь $E_{\text{м,п}} = \frac{pV}{k-1} = \frac{pvE^*_\text{м}}{(k-1)c^2}$ — потенциальная энергия материи, а $E_{\text{м, к}} = \beta_3(1+\bar{\bar{\beta}})\, E^*_\text{м}$ — ее кинетическая энергия, причем факторы $\beta_3 = \text{const}$, $\bar{\bar{\beta}} \neq \text{const}$ зависят от распределения скоростей по частицам.

Таким образом,

$$E_\text{м} = E^*_\text{м}\left[1 + \frac{pv}{(k-1)c^2} + \beta_3(1+\bar{\bar{\beta}})\right]. \tag{4.47}$$

Принимая во внимание (4.45), находим, что

$$E_\text{м} = \frac{4E_0}{3\bar{\beta}}\left[1 + \frac{pv}{(k-1)c^2} + \beta_3(1+\bar{\bar{\beta}})\right], \tag{4.48}$$

$$E_g = E_0 - E_\text{м} = -E_0\left[\frac{4}{3\bar{\beta}} - 1 + \frac{pv}{(k-1)c^2} + \beta_3(1+\bar{\bar{\beta}})\right] =$$

$$= -E^*_\text{м}\left\{1 - \frac{3}{4}\bar{\beta} + \frac{3}{4}\bar{\beta}\left[\frac{pv}{(k-1)c^2} + \beta_3(1+\bar{\bar{\beta}})\right]\right\}. \tag{4.49}$$

Рассмотрим два предельных случая расширения.

I. Пусть расширение изэнтропично. Тогда имеет место уравнение

$$pv^k = \text{const} = p_0 v_0^k,$$

откуда

$$pv = p_0 v_0 \left(\frac{v_0}{v}\right)^{k-1} = p_0 v_0 \left(\frac{a_0}{a}\right)^{3(k-1)}.$$

При $a \to \infty$, $p \to 0$ величина $\frac{pv}{(k-1)c^2} = \frac{p_0 v_0}{(k-1)c^2}\left(\frac{a_0}{a}\right)^{3(k-1)}$ быстро становится пренебрежимо малой по сравнению с единицей, величина $\bar{\beta} \to 1$, а величина $\bar{\bar{\beta}} \to \text{const}$. Обозначив $\beta_3(1+\bar{\bar{\beta}}) = \bar{\beta}_3 = \text{const}$, найдем, что

$$E_\text{м} = \frac{4}{3}E_0(1+\bar{\beta}_3),$$

$$E_g = -E_0\left(\frac{1}{3}+\bar{\beta}_3\right) = -\frac{E_м}{4}\frac{1+3\bar{\beta}_3}{1+\bar{\beta}_3}. \tag{4.50}$$

Компоненты

$$-\varepsilon_g = t_0^0 = -3t_1^1 =$$

$$= \frac{3\left(\beta_1+\frac{1}{\chi_0^2}\right)}{4\varkappa a^2} = \frac{E_0}{6\pi^2\beta_2 a^3} = \frac{E_м^*}{8\pi^2\beta_2 a^3} = \frac{\varepsilon}{4}. \tag{4.51}$$

II. Пусть движение изотермично; при этом $\bar{\bar{\beta}} = \text{const}$

$$pv = p_0v_0 = RT_0, \qquad E_м = \frac{4}{3}\frac{E_0}{\bar{\beta}}\left(1+\frac{c_vT_0}{c^2}+\bar{\beta}_3\right),$$

$$E_g = -E_0\left(\frac{4}{3\bar{\beta}}-1+\frac{c_vT_0}{c^2}+\bar{\beta}_3\right), \tag{4.52}$$

причем

$$\bar{\beta} = 1+\frac{4-3k}{k-1}\frac{c_vT_0}{c^2}.$$

Очевидно, что здесь второе слагаемое мало по сравнению с единицей, и мы снова приходим к соотношениям (4.50) и (4.51). При этом возрастает энергия. Так как, $T_0d\sigma = pdv = RT_0 d\ln v$, откуда $\frac{\sigma-\sigma_0}{R} = \ln\frac{v}{v_0} = 3\ln\frac{a}{a_0}$.

Вводя эффективную вероятность состояния $\hat{p} = 3\ln\frac{\sigma-\sigma_0}{R}$, найдем

$$\hat{p} = a/a_0. \tag{4.53}$$

Таким образом, в этом случае эффективная вероятность состояния возрастает вместе с радиусом кривизны.

Снова подчеркнем, что в пределе, когда $\bar{\beta} = 1$, $-E_g = \frac{E_0}{3} = \frac{E_м}{4}$. Эти соотношения и являются исходными для дальнейших вычислений. Рассмотренные модели однородной и изотропной Вселенной (Фридмана)—единственно возможные и удовлетворяют как «граничным» условиям и уравнениям поля, так и условиям сохранения энергии-импульса.

§ 5. Гравитационное излучение и волны

Псевдотензор гравитационного поля при $\varkappa \neq \text{const}$ имеет вид [см. (3.20)]

$$t_i^k = \frac{R}{2\varkappa}\delta_i^k + \frac{E_0}{3}\frac{\partial}{\partial x^r}\left[\left(1+\frac{f}{2}\right)\sqrt{R_0}\right]\frac{\partial g^{ml}}{\partial x^i}\frac{C_{ml}^{kr}}{\sqrt{-g}} - \\ - \Omega_i^{*k}(N) + \left(1+\frac{f}{2}\right)\bar{t}_i^k. \quad (5.1)$$

В случае, когда $\varkappa = \varkappa(R_0)$, $\Omega_i^{*k}(N) = 0$,

$$t_i^k = \frac{R}{2\varkappa}\delta_i^k + \bar{t}_i^k\left(1+\frac{f}{2}\right) + \bar{\theta}_i^k, \quad (5.2)$$

где

$$\bar{\theta}_i^k = \frac{E_0}{3}\frac{\partial}{\partial x^r}\left[\left(1+\frac{f}{2}\right)\sqrt{R_0}\right]\frac{\partial g^{ml}}{\partial x^i}\frac{C_{ml}^{kr}}{\sqrt{-g}}. \quad (5.3)$$

Напишем теперь t_i^k в виде

$$t_i^k = t_{0i}^k + \frac{f}{2}\bar{t}_i^k + \bar{\theta}_i^k, \quad (5.4)$$

где

$$t_{0i}^k = \frac{R}{2\varkappa}\delta_i^k + \bar{t}_i^k \quad (5.5)$$

есть значение t_i^k при $\varkappa = \text{const}$, вычисленное нами ранее.

Рассмотрим плоскую гравитационную волну произвольной амплитуды (при этом можно положить, что $f = 0$). Вычислим значения t_0^0 и t_0^1 для волны, распространяющейся вдоль оси $x^1 = x$). Как мы уже знаем [см. (ч. I, § 16)],

$$2\varkappa t_{00}^0 = 2\varkappa t_{00}^1 = \frac{\partial^2 \ln g}{\partial x^0\,\partial x^1} - \frac{1}{2}\frac{\partial g^{lm}}{\partial x^0}\frac{\partial g_{lm}}{\partial x^1}. \quad (5.6)$$

Вычисление компонент $\bar{\theta}_i^k$ дает

$$\bar{\theta}_i^k = -\frac{E_0}{3}\frac{\partial\sqrt{R_0}}{\partial x^0}\left(1+\frac{f}{2}\right)\left(\frac{\partial \ln g}{\partial x^i}g^{lk} + \frac{\partial g^{lk}}{\partial x^i}\right), \quad (5.7)$$

откуда

$$\bar{\theta}_0^0 = -\frac{E_0}{3}\frac{\partial\sqrt{R_0}}{\partial x^0}\left(1+\frac{f}{2}\right)\left(\frac{\partial \ln g}{\partial x^0}g^{00} + \frac{\partial g^{00}}{\partial x^0}\right) = \\ = -\frac{1}{2\varkappa a}\left(1+\frac{f}{2}\right)\frac{\dot{a}}{c}\frac{\partial \ln g}{\partial x^0}, \quad \bar{\theta}_0^1 = 0. \quad (5.8)$$

В случае слабого поля

$$2\varkappa t_0^0 = 2\varkappa\,(t_0^1 + \bar{\theta}_0^0) = 2\varkappa\bar{\theta}_0^0 -$$

$$-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial h_{22}}{\partial x^0}\right)^2 + \left(\frac{\partial h_{33}}{\partial x^0}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial h_{23}}{\partial x^0}\right)^2\right] + \frac{\partial^2}{\partial x^{02}}(h_{22}^2 + h_{33}^2 + 2h_{23}^2), \tag{5.9}$$

или

$$t_0^0 = t_0^1 + \bar{\theta}_0^0 = \bar{\theta}_0^0 + \frac{c^2}{16\pi G}\left[(h_{22}^2 + h_{23}^2)^{\cdot\cdot} - (\dot{h}_{22}^2 + \dot{h}_{23}^2)\right] =$$

$$= \bar{\theta}_0^0 + \frac{c^2}{16\pi G}\left[\left(\frac{h_{22}-h_{33}}{2}\right)^{\cdot\cdot} + (h_{23}^2)^{\cdot\cdot} - \left(\frac{\dot{h}_{23}-\dot{h}_{33}}{2}\right)^2 - \dot{h}_{23}^2\right]. \tag{5.10}$$

Заменяя $h_{\alpha\beta}$ и $\ddot{D}_{\alpha\beta}$, найдем

$$t_0^0 = t_0^1 + \bar{\theta}_0^0 = \frac{G}{48\pi r^2 c^6}\left[-\left(\dddot{D}_{23}^2 + \frac{\dddot{D}_{22}-\dddot{D}_{33}}{2}\right) + \right.$$

$$\left. + \left(\ddot{D}_{23}^2 + \frac{\ddot{D}_{22}-\ddot{D}_{33}}{2}\right)^{\cdot\cdot}\right] + \bar{\theta}_0^0. \tag{5.11}$$

Поскольку значение t_0^1 не зависит от дополнительного члена $\bar{\theta}_0^0$, то, усредняя (см. ч. I, § 16), найдем

$$-\dot{E}_g = \frac{G}{45c^5}\left[-\dddot{D}_{\alpha\beta}^2 + (\ddot{D}_{\alpha\beta}^2)^{\cdot\cdot}\right]. \tag{5.12}$$

Для стационарного «квадруполя»

$$\ddot{D}_{\alpha\beta}^2 = \text{const}, \tag{5.13}$$

$$-\dot{E}_g = \frac{G}{45c^5}\dddot{D}_{\alpha\beta}^2. \tag{5.14}$$

Так как $t_0^0 = t_{00}^0 + \bar{\theta}_0^0$, то плотность энергии гравитационного поля при $\varkappa \sim a$ оказывается больше плотности энергии, вычисленной при $\varkappa = \text{const}$. Сделаем оценку величины $\bar{\theta}_0^0$. Поскольку

$$\frac{\partial \ln g}{\partial x^0} \approx \frac{\partial h^2}{c\partial t} \approx \frac{(h^2)^{\cdot}}{c},$$

то

$$\bar{\theta}_0^0 \approx -\frac{\dot{a}\,(h^2)^{\cdot}}{c^2\varkappa a}. \tag{5.15}$$

Сравнивая θ_0^0 с $t_{00}^0 \approx \frac{(\dot{h})^2}{\varkappa c^2}$, найдем

$$\bar{\theta}_0^0 \approx -t_{00}^0\frac{\dot{a}h}{a\dot{h}} \approx -t_{00}^0\frac{\dot{a}}{c}\frac{c}{a\omega} \approx -t_{00}^0\frac{c}{\omega a} = -t_{00}^0\frac{\alpha}{\omega}, \tag{5.16}$$

где ω — частота гравитационных волн.

Поскольку $\alpha \approx 10^{-17}$ *сек*$^{-1}$, ω для реальных квадруполей всегда больше, чем α, на много порядков, то вклад $\bar{\theta}_0^0$ несуществен.

Если же t_{00}^0 и $\bar{\theta}_0^0$ вычислять для всей Метагалактики, то $\bar{\theta}_0^0 \approx \approx -t_{00}^0$, так как $\omega \approx \alpha$ [см. ниже (5.32)]. В самом деле,

$$h \approx \frac{\varkappa \ddot{D}}{R}, \qquad D \approx D_0 \sin \omega_0 t \approx MR^2 \sin \omega_0 t.$$

Поэтому

$$t_0^0 \approx \frac{GM^2}{R^4}\left(\frac{R\omega}{c}\right)^6 \simeq \frac{GM^2}{R^4} \simeq p_0.$$

Далее,

$$-\theta_0^0 \approx \frac{GM^2}{R^4}\,\frac{\dot{a}}{c}\,\frac{R}{a}\left(\frac{R\omega_0}{c}\right)^5 \approx \frac{GM^2}{R^4}.$$

Поскольку $\frac{\dot{a}}{c} \approx 1$, $R \approx a$. Таким образом, действительно $-\theta_0^0 \approx t_{00}^0$.

Вычислим величины $D_{\alpha\beta}$ для «кругового» квадруполя. Типичным примером такого квадруполя является двойная звезда или, скажем, система Солнце — Юпитер (считая движение обеих компонент по круговым орбитам общего центра тяжести).

В сферической системе координат $x = r\cos\varphi\cos\lambda$, $y = r\cos\varphi\sin\lambda$, $z = r\sin\varphi$ (где λ — «долгота», φ — «широта»), $dv = r^2 dr \cos\varphi\, d\varphi\, d\lambda$.

Компоненты квадрупольного момента имеют вид

$$D_{xx} = \int \rho^* dv r^2 (3\cos^2\varphi\cos^2\lambda - 1), \quad D_{xy} = 3\int \rho^* dv r^2 \cos^2\varphi \cos\lambda\sin\lambda,$$

$$D_{yy} = \int \rho^* dv r^2 (3\cos^2\varphi\sin^2\lambda - 1), \quad D_{xz} = 3\int \rho^* dv r^2 \cos\varphi \sin\varphi\cos\lambda,$$

$$D_{zz} = \int \rho^* dv r^2 (3\sin^2\varphi - 1), \qquad D_{yz} = 3\int \rho^* dv r^2 \cos\varphi\sin\varphi\sin\lambda,$$

где в собственной системе отсчета

$$\rho^* = -\frac{T_0^0}{c^2} = \frac{\varepsilon}{c^2}. \tag{5.17}$$

Пусть плоскость вращения есть $z = 0$, тогда $\varphi = 0$ и

$$D_{xx} = \int \rho^* dv r^2 (3\cos^2\lambda - 1), \quad D_{yy} = \int \rho^* dv r^2 (3\sin^2\lambda - 1),$$

$$D_{zz} = -\int \rho^* dv r^2, \qquad D_{xy} = 3\int \rho^* dv r^2 \cos\lambda \sin\lambda,$$

$$D_{xz} = D_{yz} = 0. \tag{5.18}$$

Далее, пусть вращение происходит с угловой частотой ω, тогда $\lambda = \omega t$, $\int \rho^* dv = m = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ — приведенная масса; m_1, m_2 — массы компонент двойной астрономической системы (звезды). Очевидно, что

$$\dddot{D}_{xx} = 12mr^2\omega^3 \sin^2\lambda, \qquad \dddot{D}_{yy} = -12mr^2\omega^3 \sin^2\lambda,$$

$$\dddot{D}_{xy} = -12mr^2\omega^3 \cos^2\lambda, \quad \dddot{D}_{zz} = 0,$$

$$\dddot{D}^2_{\alpha\beta} = 288m^2r^4\omega^6. \tag{5.19}$$

Поскольку

$$\ddot{D}_{xx} = -6mr^2\omega^2 \cos^2\lambda, \qquad \ddot{D}_{yy} = 6mr^2\omega^2 \cos^2\lambda,$$

$$\ddot{D}_{xy} = 6mr^2\omega^2 \sin^2\lambda,$$

то

$$\ddot{D}^2_{\alpha\beta} = 72mr^2\omega^2 \text{ и } (\dddot{D}^2_{\alpha\beta}) = 0.$$

Таким образом,

$$-\dot{E}_g = \frac{288G}{45c^5} m^2r^4\omega^6 = \frac{32}{5} \frac{m_1^2 m_2^2 G}{(m_1 + m_2)^2 r^2} \left(\frac{r\omega}{c}\right)^6. \tag{5.20}$$

Если учесть, что

$$-\dot{E}_g = \alpha (m_1 + m_2) = \alpha M c^2, \tag{5.21}$$

где $M = m_1 + m_2$ — полная масса системы, α — «коэффициент расхода энергии», то

$$\alpha = \frac{32Gm_1^2 m_2^2}{5M^3cr^2} \left(\frac{r\omega}{c}\right)^6. \tag{5.22}$$

Частота ω связана с r следующим уравнением (в случае ньютоновых сил притяжения):

$$r^2\omega^2 = \frac{GM}{r}, \tag{5.23}$$

поэтому

$$\alpha = \frac{32G^4 m_1^2 m_2^2}{5r^5c^7}. \tag{5.24}$$

Довольно очевидно, что если вместо квадрупольного момента ввести момент инерции G, то в соотношении (5.16) достаточно заменить $\ddot{D}^2_{\alpha\beta}$ на $g\ddot{I}^2_{\alpha\beta}$. Тогда (5.16) примет вид

$$\dot{E}_g = \frac{G}{5c^5}[-\dddot{I}^2_{\alpha\beta} + (\ddot{I}^2_{\alpha\beta})^{\cdot\cdot}]. \tag{5.25}$$

Это соотношение позволяет легко рассмотреть ставшую классической задачу об излучении гравитационных волн вращающимся (около оси z) стержнем. Очевидно, что поскольку момент инерции относительно оси z $I = \frac{3}{5} mr^2$, где r — радиус, m — его масса, то

$$\dddot{I} = \frac{12}{5} mr^2\omega^3 = 4I\omega^3, \qquad \dddot{I}^2_{\alpha\beta} = \frac{288}{25} m^2r^2\omega^6, \tag{5.26}$$

откуда следует, что

$$-\dot{E}_g = \frac{32GI^2\omega^6}{5c^5} = \frac{288Im^2c}{125r^2}\left(\frac{r\omega}{c}\right)^6,$$

$$\ddot{I}^2_{\alpha\beta} = \text{const}, \qquad (\ddot{I}^2_{\alpha\beta}) = 0. \tag{5.27}$$

Величина гравитационного излучения астрономическими системами и вращающимися стержнями весьма мала. Например, для тесной двойной звезды W Большой Медведицы

$$m_1 = 0{,}75m_\odot, \qquad m_2 = 0{,}7m_\odot, \qquad m = \frac{m_1m_2}{m_1+m_2} = 0{,}36m_\odot,$$

где $m_\odot \approx 2\cdot10^{33}$ — масса Солнца, радиус орбиты около общего центра тяжести составляют около 1 600 000 *км*, период обращения $T^* \approx 8$ *час* $\approx 3\cdot10^4$ *сек*, $\omega \approx 2\cdot10^{-4}$ *сек*$^{-1}$. При этом $-\dot{E}_g \approx$ $\approx 10^{29}$ *эрг/сек* $= 10^{22}$ *вт*, $\alpha \approx 3\cdot10^{-25}$ *сек*$^{-1}$. Гравитационная энергия системы $E_g = \frac{Gm^2}{r}\cdot10^{47}$ *эрг*, поэтому $\alpha_{\text{гр}} \approx -\frac{\dot{E}_g}{E_g} \approx$ $\approx 2\cdot10^{-18}$ *сек*$^{-1}$. Для других двойных систем звезд величина α может быть лишь несколько больше, но для обычных, нетесных систем величина α значительно меньше. Например, для системы Солнце — Юпитер — $E_g \approx 450$ *вт*.

Поскольку для всей нашей Вселенной $\alpha \approx 10^{-17} - 10^{-18}$ *сек*$^{-1}$, то потеря энергии даже такими тесными двойными звездами, как W Большой Медведицы, ничтожно мала. Эти процессы не могут играть сколько-нибудь значительной роли в эволюции нашей Вселенной.

Технически возможное вращение стержня даст еще меньшую мощность гравитационного излучения. Другие виды механических квадруполей, которые могут инициировать гравитационные волны, как, например, колеблющиеся кристаллы кварца и иные осцилляторы, описанные Вебером и Брагинским, при огромных размерах (10^2 — 10^3 $м^2$), видимо, смогут в недалеком будущем позволить наблюдать эти реальные гравитационные волны, хотя технически это очень трудно осуществимо.

В случае динамичесих моделей Вселенной имеет смысл оценить величину t_0^0. Очевидно, что

$$t_0^0 = \frac{R}{2\varkappa} + \overline{\theta_0^0} + \frac{3}{2}\,{}_0\bar{t}_0^0. \tag{5.28}$$

Поскольку

$${}_0\bar{t}_0^0 = -\frac{R_0^0}{\varkappa} = -\frac{3a\ddot{a}}{\varkappa a^2 c^2}, \qquad \overline{\theta_0^0} = -\frac{9}{2\varkappa a^2}\frac{\dot{a}^2}{c^2},$$

то

$$t_0^0 = \frac{3}{a^2\varkappa}\left(\beta_1 - \frac{\dot{a}^2}{2c^2} - \frac{a\ddot{a}}{2c^2}\right) = \frac{3}{a^2\varkappa}\left(\beta_1 - \frac{1}{2\chi_0^2}\right). \tag{5.29}$$

Так как

$$T_0^0 = {}_1T_0^0 + {}_2T_0^0 = -\frac{9}{4a^2\varkappa}\left(\beta_1 + \frac{1}{\chi_0^2}\right),$$

то

$$t_0^0 + T_0^0 = \frac{3}{4a^2\varkappa}\left(\beta_1 - \frac{1}{\chi_0^2}\right).$$

В случае $\varkappa = \mathrm{const}$

$$t_0^0 = -T_0^0 = \frac{3}{a^2\varkappa}\left(\beta_1 + \frac{\dot{a}^2}{c^2}\right), \qquad T_0^0 + t_0^0 = 0.$$

Здесь мы видим, как плотность энергии гравитационного поля связана с плотностью материи. Посмотрим, не может ли движение всех тел нашей Вселенной, точнее, всей материи нашей Вселенной, создать само себе гравитационное поле за счет излучения гравитационных волн.

Напишем уравнение (5.20) в виде

$$-\dot{E}_g = \xi\frac{GM^{*2}c}{45R^2}\left(\frac{R\omega}{c}\right)^6 = \alpha Mc^2, \tag{5.30}$$

где ξ — безразмерный параметр, зависящий от характера квадрупольных колебаний, R, M, ω — размеры, масса и частота колеблющихся масс. Если под R и $1/\omega$ понимать значения, близкие к радиусу и времени существования нашей Вселенной (возраст нашей Вселенной $\approx 3\cdot10^{17}$ *сек*), то, как мы указывали выше, все три члена в правой части уравнения (5.11) будут иметь одинаковый порядок величины.

Напишем (5.30) в виде

$$\alpha = \frac{\xi G M^{*2}}{45 M c R^{*2}} \left(\frac{R^{*}\omega}{c}\right)^{6}. \tag{5.31}$$

(В случае идеально однородной нашей Вселенной квадрупольный момент при расширении равен нулю. Но вряд ли такая идеализация Вселенной закономерна).

Пусть R^{*3} в уравнении (5.31) характеризует эффективный объем, занятый неоднородностями материи и дающий отличный от нуля вклад в квадрупольный момент, M^* — приведенная колеблющаяся масса. Положим, что

$$\xi \left(\frac{R^{*}\omega}{c}\right)^{6} = \xi_0,$$

тогда

$$\alpha = \xi_0 \frac{G M^{*2}}{45 c R^{*2} M}. \tag{5.32}$$

Поскольку в настоящее время $\alpha = 5 \cdot 10^{-18}$ *сек*$^{-1}$, $M \approx 10^{56}$ *г*, то, полагая $M^* = \gamma M$, где $\gamma < 1$, $R^{*3} = \gamma R^3$, $R = 10^{28}$ *см*, найдем, что $\xi_0 = \frac{5 \cdot 27 \cdot 10^2}{2\gamma^{4/3}}$, $\frac{R^{*}\omega}{c} = \frac{4}{\xi^{1/6}\gamma^{2/9}} = \frac{\gamma^{1/3} R\omega}{c}$. Так как $\omega = 2\pi a \approx$ $\approx 3 \cdot 10^{-17}$ *сек*$^{-1}$, то, полагая $\xi^{1/6} = 2$ (что справедливо для радиальных колебаний), найдем $\frac{R^{*}\omega}{c} = \frac{2}{\gamma^{5/4}} = 10$, откуда $\gamma^{5/9} \approx \frac{2}{10}$, $\gamma = \frac{3}{100}$.

Таким образом, достаточно предположить, что лишь несколько сотых объема нашей Вселенной «неоднородны» и создают при расширении квадрупольный момент, чтобы объяснить энергию гравитационного поля как энергию, возникающую при квадрупольных колебаниях материи с частотой порядка $1/T$, где T — возраст нашей Вселенной. Учитывая вращательный момент, для которого $\xi \geqslant 10^2$, найдем, что v^*/v будет еще примерно на порядок меньше, чем мы вычислили. Для отдельных вращающихся галактик, у которых масса $M \approx 10^{45}$ *г*, $R \approx 10^{23}$ *см*, $\omega \approx 10^{-14}$ *сек*$^{-1}$, будем иметь $-E_g = 10^{41}$ *эрг/сек*, $\alpha = 10^{-25}$ *сек*$^{-1}$.

Поскольку гравитационное поле, создаваемое подобным «общевселенским» движением материи, сильнее и приводит к кривизне пространства, надо учитывать не только квадрупольное, но и любое мультипольное излучение. Очевидно, что любой мультиполь будет давать вклад в излучение в виде члена

$$\xi_n \frac{Gm^2c}{R^2}\left(\frac{R\omega}{c}\right)^{2n},$$

где n — порядок мультиполя ($n=2$ — диполь, $\xi_2=0$, $n=3$ — квадруполь, $\xi_3 \neq 0$ и т. д.).

Общее излучение будет определяться соотношением

$$-E_g = \sum_3^n \xi_n \frac{Gm^2c}{R^2}\left(\frac{R\omega}{c}\right)^{2n} = \xi_0 \frac{Gm^2c}{R^2}, \tag{5.33}$$

где

$$\xi_0 = \sum \xi_n \left(\frac{R\omega}{c}\right)^{2n}. \tag{5.34}$$

К этим же соотношениям можно прийти, исходя их следующих соображений.

В системе отсчета, в которой центр инерции системы тел покоится, основной вклад в гравитационном поле будут давать лишь некоторые компоненты тензора материи T_i^k. При этом наибольший вклад дает $T_0^0 = -\varepsilon$; компоненты $T_\alpha^{\alpha=\beta} = p$ дадут за счет давления лишь небольшой вклад, компоненты T_0^α, T_α^0 никакого вклада не дадут. В результате мы придем к продольному эйнштейновскому гравитационному полю.

Если система тел движется (вращается и колеблется) относительно центра инерции, то появится дополнительный тензор материи ΔT_i^k, который можно выразить через тензор инерции или тензор квадрупольного момента. Можно представить ΔT_i^k в виде

$$Av\Delta T_{ik} = \Delta E_{ik} = B_{ik} m r^2 \omega^2,$$

где A и B_{ik} — некоторые константы, зависящие от характера движения (колебания) тел около центра инерции, v — объем системы тел, m — их приведенная масса, ΔE_{ik} — компоненты дополнительной энергии «колеблющейся» системы тел.

В этом случае к компонентам g_{ik}^0, определяемым основным тензором материи T_i^k, добавятся компоненты метрического тензора Δg_{ik}, зависящие от ΔT_{ik}.

Очевидно, что $\Delta g_{ik} = \frac{2\Delta\varphi_{ik}}{c^2}$, где $\Delta\varphi_{ik} = -\frac{G\Delta E_{ik}}{rc^2}$ — «дополнительные» потенциалы, возникающие за счет движения тел около центра инерции. Отсюда следует, что

$$\Delta g_{ik} = g_{ik} - g_{ik}^0 = -\frac{2G\Delta E_{ik}}{rc^4}. \tag{5.35}$$

В случае слабого поля

$$\Delta E_{ik} = \ddot{I}_{ik} = -\frac{1}{3}\ddot{D}_{ik} + \frac{2}{3}\delta_{ik}\ddot{r}^2.$$

Соотношение (5.35) имеет смысл для волн любой интенсивности, и мы далее исследуем этот существенный вопрос подробнее. Окончательно имеем:

$$\Delta g_{ik} = \frac{2}{3}\frac{G\ddot{D}_{ik}}{rc^4} - \frac{4}{3}g_{ik}\frac{Gm\ddot{r}^2}{rc^4},$$

что обобщает формулу (12.9) в ч. I.

Наши оценки имеют пока предварительный качественный характер, поскольку нельзя для всей нашей Вселенной говорить о волновой зоне гравитационных волн. Перейдем к исследованию иных, не чисто механических осцилляторов, которые, возможно, также способны излучать гравитационные поля. Исследуем возможность излучения волн осциллятором, действующим за счет кулоновских сил. Простейшей такой системой является система протон — электрон.

В классическом приближении в случае движения электрона около ядра любого элемента номера Z будем иметь

$$R^2\omega^2 = \frac{Ze^2M}{Rm_1m_2} = \frac{ee^*}{Rm}, \qquad (5.36)$$

где $M = m_1 + m_2$, $e^* = Ze$ — заряд ядра, e — заряд электрона, $\omega = 2\pi/T$ — частота вращения.

Исключая ω из соотношения (5.34), можно написать

$$\xi_0 = \sum \xi_n \left(\frac{Ze^2}{Rmc^2}\right)^n. \qquad (5.37)$$

Поскольку для системы протон — электрон

$$\frac{\omega R}{c} \ll 1, \qquad \ddot{D}^2_{\alpha\beta} = \mathrm{const},$$

то в случае круговой орбиты

$$-\dot{E}_g = \frac{32Gm^2}{5R^4c^5}\left(\frac{e^2Z}{Rm}\right)^3 = \frac{32Ge^6Z^3}{5R^5c^5m},$$

$$\alpha = \frac{32Ge^6Z^3}{5R^5c^5m_1m_2}. \qquad (5.38)$$

В случае квантованных орбит (круговых, их рассмотрение достаточно для оценки порядков величин) будем иметь

$$R = \frac{n^2\hbar^2}{me^2Z} \tag{5.39}$$

$$\omega = \frac{me^4Z^2}{n^3\hbar^3}, \qquad n = 1, 2, 3, 4. \tag{5.40}$$

При этом

$$-\dot{E}_g = \frac{32Gm^4e^{16}Z^8}{5c^5\hbar^{10}n^{10}}, \qquad \alpha = \frac{32Gm^4e^{16}Z^8}{5c^7\hbar^{10}n^{10}M}. \tag{5.41}$$

Энергия, теряемая за время «одного оборота»,

$$E_g = -\frac{\dot{E}_g}{\omega} = \frac{32Gm^3e^{12}Z^6}{5c^5\hbar^7n^7}. \tag{5.42}$$

Разность энергии при переходе с орбиты n на орбиту k ($k = 1, 2, 3, 4, \ldots$)

$$\Delta E_g = \frac{32Gm^3e^{12}Z^6}{5c^5\hbar^7}\left(\frac{1}{n^7} - \frac{1}{k^7}\right). \tag{5.43}$$

При этом энергия, теряемая на электромагнитное излучение,

$$\Delta E_э = \hbar\left(\omega_n^* - \omega_k^*\right) = \frac{mZ^2e^4}{2\hbar^2}\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{k^2}\right) = \frac{e^2cn}{2R^2\bar{\alpha}}\left(\frac{R\omega}{c}\right)^2\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{k^2}\right), \tag{5.44}$$

где ω^* — излучаемая частота.

Отношение энергий

$$\frac{\Delta E_g}{\Delta E_э} = \frac{64Gm^2}{5e^2Z}(Z\bar{\alpha})^5\bar{A}, \tag{5.45}$$

где $\bar{\alpha} = \frac{e^2}{c\hbar} = \frac{1}{137}$ — постоянная тонкой структуры,

$$\bar{A} = \frac{k^2}{n^5(k^2 - n^2)}. \tag{5.46}$$

При $Z = 1$

$$\frac{\Delta E_g}{\Delta E_э} = 10^{-5}\bar{A} \approx 10^{-51} \quad (k \to \infty,\ n = 1),$$

т. е. при этом выход гравитационной энергии в 10^{-51} раз меньше, чем электромагнитной.

Для атома водорода $\alpha = 10^{-43}$ *сек* ($Z = 1$, $n = 1$).

Для дипольного электромагнитного излучения

$$-\dot{E}_{\text{э,д}} = \frac{8}{3c^3}\ddot{d}^2_{\text{э,д}} = \frac{2e^2R^2\omega^4}{3c^3} = \frac{2}{3}\frac{e^2c}{R^2}\left(\frac{R\omega}{c}\right)^4,$$

где $d_{\text{э,д}} = \frac{e}{2}x_\alpha$ — дипольный электрический момент. Поэтому

$$\frac{\dot{E}_g}{\dot{E}_{\text{э,д}}} = \frac{48}{5}\frac{Gm^2}{e^2n^2}(Z\alpha)^2. \tag{5.47}$$

Для квадрупольного электромагнитного излучения

$$-\dot{E}_{\text{э, кв}} = \frac{\dddot{D}^2_{\text{э}\alpha\beta}}{45c^5} = \frac{288}{180}\frac{e^2R^4\omega^6}{c^5} = \frac{288}{180}\frac{e^2c}{R^2}\left(\frac{R\omega}{c}\right)^6,$$

где $D_{\text{э}\alpha\beta} = \frac{e}{2}(3x_\alpha x_\beta - \delta_{\alpha\beta}r^2)$ — квадрупольный электромагнитный момент. Поэтому

$$\frac{\dot{E}_g}{\dot{E}_{\text{э, кв}}} = 4\frac{Gm^2}{e^2}. \tag{5.48}$$

Аналогично можно легко оценить энергии, теряемые за один оборот (за квантовый переход):

$$\frac{\Delta E_g}{\Delta E_{\text{э}g}} = \frac{\dot{E}_g}{\dot{E}_{\text{э}g}} = \frac{48}{5}\frac{Gm^2}{e^2n^2}(Z\alpha)^2, \tag{5.49}$$

$$\frac{\Delta E_g}{\Delta E_{\alpha\text{кв}}} = \frac{\dot{E}_g}{\dot{E}_{\alpha\text{кв}}} = 4\frac{GM^2}{e^2}. \tag{5.50}$$

Легко прийти к выводу, что роль гравитационного излучения в подобных «квантовых излучениях» исключительно мала. Такое излучение практически не может наблюдаться и не может иметь значения в ядерных процессах.

Наибольшее значение для дальнейшего будет иметь соотношение (5.50). Заметим, что для системы протон — электрон

$$\frac{\dot{E}_g}{\dot{E}_{\text{э, кв}}} = \frac{\Delta E_g}{\Delta E_{\text{э, кв}}} = 1{,}4\cdot 10^{-42}.$$

Теперь легко определить величину α. Очевидно, что

$$\alpha = -\frac{\dot{E}_g}{Mc^2} = -\frac{4Gm^2}{e^2}\frac{\dot{E}_{\text{э, кв}}}{Mc^2}. \tag{5.51}$$

Это соотношение легко обобщить на случай произвольных квадрупольных колебаний.

В общем случае

$$D_{э\alpha\beta} = e^* (3x_\alpha x_\beta - \delta_{\alpha\beta} r^2),$$

где e^* — приведенный заряд. Для двух произвольных зарядов

$$e^* = \frac{e_1 e_2}{e_1 + e_2} = \frac{Z_1 Z_2 e}{Z_1 + Z_2}, \qquad e_1 = Z_1 e, \qquad e_2 = Z_2 e.$$

Если отношение колеблющихся масс к зарядам одинаково, $\frac{e_i^*}{m_i} = \text{const}$, то (5.50) и (5.51) принимают вид

$$\frac{\dot{E}_g}{\dot{E}_{\alpha кв}} = \frac{\Delta E_g}{\Delta E_{\alpha кв}} = \frac{GM^2}{e^{*2}}, \qquad \alpha = -\frac{Gm^2}{e^{*2}} \frac{\dot{E}_{э,\,кв}}{Mc^2}. \tag{5.52}$$

Если $\frac{e_i^*}{m_i} = \beta_1$ различны для разных элементов масс Δm_i, то

$$\frac{\dot{E}_g}{\dot{E}_{э,\,кв}} = \frac{\Delta E_g}{\Delta E_{\alpha кв}} = \eta_1 \frac{Gm^2}{r_1 e^{*2}} = \gamma^0,$$

$$\alpha = -\eta_1 \frac{Gm^2}{e^{*2}} \frac{\dot{E}_{э,\,кв}}{Mc^2} = -\gamma^0 \frac{\dot{E}_{э,\,кв}}{Mc^2},$$

где коэффициент η_1 зависит от распределения $\beta_i = \beta_i (\Delta m_i)$, т. е. $\eta_1 = \eta_1 (\beta_1)$; однако отличие η_1 от единицы, вообще говоря, незначительно (в случае $\varkappa = \text{const}$ в (5.52) и (5.53) числовой коэффициент будет равен единице).

В обычной квантовой теории, не учитывающей гравитационного поля, надо считать, что излучение гравитационных волн происходит лишь при квантовых переходах, т. е. при излучении электромагнитных волн. При распаде ядра тоже наблюдается электромагнитное излучение. Наибольший возможный практический интерес для исследования роли гравитационного излучения могут представить возбуждения ядра, когда при их квантовых переходах имеют место излучения γ-квантов, α- и β-частиц. Мы здесь не будем рассматривать теории колебаний ядерной поверхности, развитой О. Бором и другими. Отметим только, что дипольное γ-излучение при этом менее вероятно, чем квадрупольное. Далее важно подчеркнуть, что квантованным колебаниям ядерной поверхности соответствуют фононы со спином $s \geqslant 2$ и что не всякое электромагнитное излучение может порождать сопутствующее ему гравитационное излучение.

Пусть полная мощность излучения (γ-кванта) $\dot{E} = \dot{N}\hbar\omega$, где $\dot{N} = \frac{dN}{dt}$ — число частиц, распадающихся за одну секунду. При этом полная мощность гравитационного излучения будет определяться соотношениями

$$\Delta\dot{E}_{0g} = \dot{N}\Delta E_g = \gamma^0 \dot{N}\Delta E_{\text{э, кв}} \approx \gamma^0 \dot{N} \frac{\dddot{D}^2_{\text{э}\alpha\beta}}{45c^5\omega}.$$

Приведем пример. Пусть

$$\omega \approx 10^{21}\ \textit{сек}^{-1},\ r = 10^{-11}\ \textit{см},\ D_{\alpha\beta} \approx e r^2_{n_\alpha n_\beta} \approx 10^{-32},\quad \dddot{D}^2_{\alpha\beta} = 10^{56},$$

$$-\dot{E}_{\text{э, кв}} \approx 10^9\ \textit{эрг/сек},\quad -\frac{1}{\omega}\dot{E}_{\alpha\text{кв}} = \Delta E_{\text{э}} = 10^{11}\ \textit{эрг},$$

$$m = 10^{-22}\ \textit{г},\ \gamma^0 = \frac{GM^2}{e^2} \approx 10^{-32}\quad (\text{для протонов } \gamma^0 \approx 10^{-36},$$

$$\text{для электронов } \gamma^0 \approx 10^{-42}), \Delta\dot{E}_{0g} = \dot{N}\cdot 10^{-38}\cdot 10^{-11} =$$

$$= N\cdot 10^{-43}\ \textit{эрг/сек},\ \dot{E} = N\cdot 10^{-7}\ \textit{эрг/сек},$$

$$\frac{\Delta\dot{E}_{0g}}{\dot{E}} = 10^{-36}.$$

Так как современные приборы могут зарегистрировать мощность гравитационного излучения порядка 10^{-15} *эрг/сек*, то нужно $\dot{N} = \frac{10^{-15}}{10^{-43}} = 10^{28}$ *частиц/сек*, или 10^6 *г* вещества (1 *т*); при этом полное излучение энергии составит 10^{21} *эрг*, что технически неосуществимо (исключая взрыв атомной бомбы, когда вблизи от места взрыва эти эффекты все равно нельзя измерить).

Однако, поскольку для одной частицы $-\dot{E}_g = 10^9\cdot 10^{-32} = 10^{-23}$ *эрг/сек*, для обеспечения мощности гравитационного излучения порядка 10^{-15} *эрг/сек* достаточно, чтобы одновременно распадались $N^* = \frac{10^{-15}}{10^{-23}} = 10^8$ *частиц* (очевидно, что $\dot{N} = N^*\omega$). При этом полное излучение будет составлять всего 10^{-15} *эрг*.

Таким образом, создав своеобразный γ-лазер, можно сделать наблюдение гравитационных излучений более или менее реальным, если верить расчетам, производимым в рамках обычной квантовой механики. Правда, чтобы зарегистрировать такую малую мощность, как 10^{-15} *эрг/сек*, необходимо некоторое время. Поэтому реальный расход частиц должен быть больше, и потребуется ряд импульсов, что увеличит общее выделение энергии на 4—5 порядков. Однако и это вполне возможно.

Следует заметить, что расчеты, связанные с возможностью использования ядерных осцилляторов для генерации гравитационного излучения, проводили многие авторы, в частности Уиллер, Вебер, Шюкинг.

Если разгонять частицы в ускорителях, то, обозначив коэффициент увеличения энергии через $\eta^* = \frac{E^*}{E} = \frac{m^*}{m}$ (где m^* и $E^* = m^*c^2$ — масса и энергия частиц в режиме ускорения), легко сообразить, что в предыдущих выкладках величины мощностей возрастают в η^{*3} раз ($\sim \gamma^0 E_{\text{э, кв}} \sim m^{*3}$), α увеличится в η^{*2} раз, число частиц, необходимых для достижения заданной мощности гравитационного излучения, уменьшится в η^{*3} раз, а полная энергия излучения уменьшится в η^{*2} раза.

Например, для ускорителя в 100 *Бэв* $\eta^* = 100$, и мы будем иметь (для частиц $m = 10^{-22}$ *г*) $N = 10^{22}$ *частиц/сек*, а полная энергия частиц при этом будет равна 10^{17} *эрг*.

Если удастся создать приборы с точностью измерения 10^{-20} *эрг/сек*, тогда в обычных условиях достаточно иметь $N = 10^{23}$ *частиц/сек*, при этом полная энергия будет 10^{16} *эрг*. Для ускорителя с $\eta^* = 10 (10 \textit{Бэв})$ $\dot{N} = 10^{20}$ *частиц/сек* и полная энергия будет 10^{14} *эрг*, что уже вполне доступно для эксперимента (эта энергия эквивалентна взрыву 10 *кг* взрывчатых веществ). При этом выгодно ускорять частицы, потому что при ударе о мишень выход полной энергии будет на несколько порядков выше, чем обычный выход энергии γ-квантов, который мы использовали в предыдущих подсчетах.

Разумеется, наши результаты имеют чисто предварительный, оценочный характер. Совершенствование ускорителей и повышение чувствительности регистрирующей аппаратуры наверняка сделают возможность указанных гравитационных экспериментов делом не очень далекого будущего, и подготовку к ним надо вести уже сейчас.

§ 6. Излучение гравитационных волн элементарными частицами

Анализируя результаты предыдущего параграфа, можно установить интересную закономерность. Значение α минимально для электронных оболочек, для космических объектов оно больше (тем больше, чем крупнее сам объект) и стремится к величине порядка $1/T$ для всей Вселенной. Для ядер, имеющих меньшие размеры, чем сами атомы, α снова растет. Интересно выяснить, какое значение может иметь α для устойчивых элементарных частиц — нуклонов и электронов, размеры которых еще меньше, чем у ядер. Забегая вперед, скажем, что это значение больше, чем для ядер,

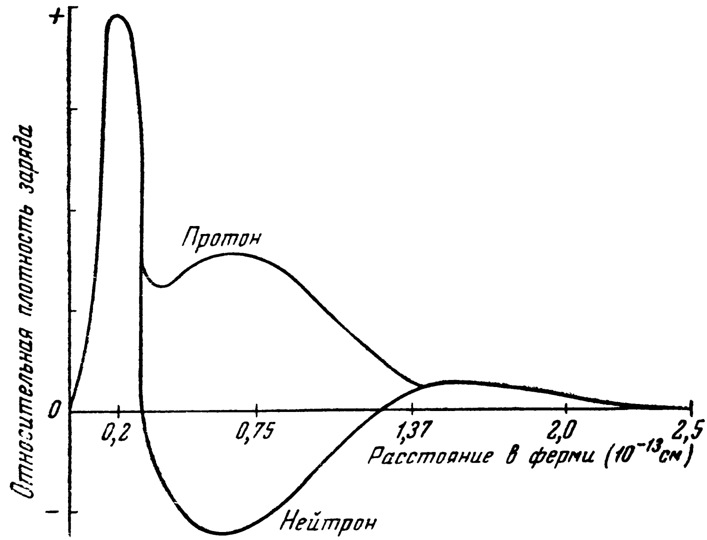


Рис. 1. Распределение электрического заряда в нуклоне

и приближается к значению $1/T$. Правда, надо выяснить, закономерно ли рассматривать «квадрупольное» излучение или его аналог для самих элементарных частиц.

Прежде всего напомним современные представления о структуре нуклона, полученные на основании последних экспериментальных и теоретических (эмпирических) данных (в основном Р. Хофстадтера). Радиус нуклона около $1{,}2 \cdot 10^{-13}$ *см*. Нуклон состоит из внутренней, более плотной части ($r_k = 2 \cdot 10^{-14}$ *см*), где сосредоточено около 0,75 всей его массы, и оболочки (мезонной шубы, или облака), содержащей около 0,25 массы. Заряд в протоне распределен так, что центральные его части несут около 0,15 положительного заряда (за единицу принята абсолютная величина заряда электрона), далее внутренняя часть оболочки до радиуса около $9 \cdot 10^{-14}$ *см* несет 0,5 заряда и внешние слои — около 0,35 заряда. В нейтроне средняя часть несет 0,5 отрицательного заряда, во внутренней части сосредоточено около 0,15 и во внешнем слое оболочки около 0,35 положительного заряда.

Оболочка нуклона состоит из движущихся мезонов, которые периодически «вырываются» из внешних частей оболочки, вращаются около нуклона, проходя несколько десятых долей окружности на расстоянии до $1{,}5 \div 2 \cdot 10^{-13}$ *см*, и снова втягиваются «внутрь» нуклона. При этом оказывается (см. ниже), что у нейтрона

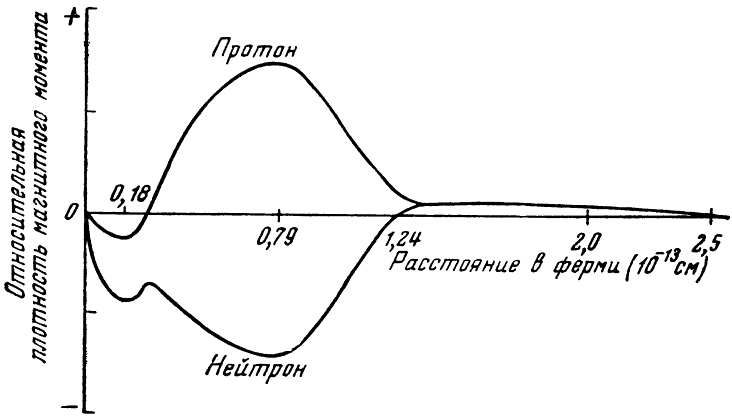


Рис. 2. Распределение аномального магнитного момента в нуклоне

выбрасываются π^--мезоны, а у протона π^+-мезоны, поэтому «облако» мезонов, движущихся около нейтрона, имеет отрицательный заряд.

Если оболочка состоит из разных виртуальных мезонов, то таинственная внутренняя часть состоит из виртуальных K-мезонов и гиперонов (странных частиц), а также пар нуклонов и антинуклонов (на рис. 1, 2 и 3 представлены схематические распределения зарядов, магнитных моментов и плотностей в нуклоне). В настоящее время считают, что у нуклона нет резко выраженного более плотного керна, но все же имеется указанное распределение зарядов внутри нуклона. Нам безразлично, какая «схема» нуклона, с керном или без него, справедлива. Важно, что в нуклоне есть виртуальные π-(снаружи) и K (внутри)-мезонные облака.

Оценим время движения мезонного облака около нуклона. Поскольку эффективный «радиус движения» в среднем сравним с r_0, где r_0 — радиус нуклона, то

$$\tau = \frac{2\pi r_0}{c} = 2{,}5 \cdot 10^{-23}\ \textit{сек}, \qquad \omega = \frac{2\pi}{\tau} = \frac{c}{r_0} = 3 \cdot 10^{23}\ \textit{сек}^{-1},$$

где τ — период обращения мезонного облака, ω — частота обращения. Время свободного существования мезонного облака у нуклона

$$\tau^* = k\tau, \text{ где } k = {}^1/_4, \ \omega^* = c / kr_0 \approx 10^{24} \ сек^{-1}.$$

Сейчас трудно представить себе механизм подобного «извержения» виртуальных, т. е. находящихся внутри нуклона, мезонов, но можно думать, что за эти процессы ответственны

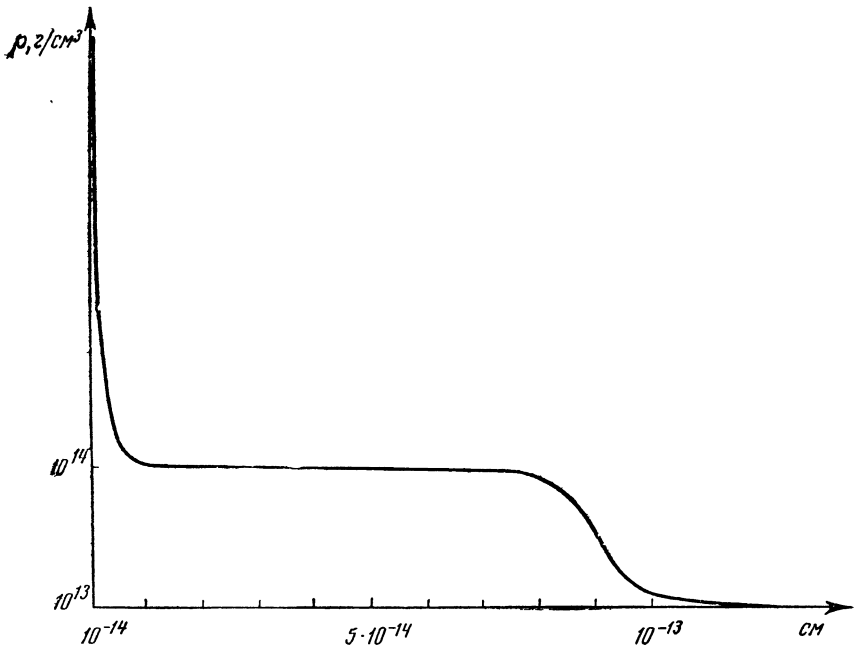


Рис. 3. Примерное распределение плотности в нуклоне

внутренние области нуклона, плотность которых $\rho_k = \frac{1}{4} 10^{18} \ г/см^3$, что в $\frac{10^3}{4} \approx 250$ раз превышает среднюю плотность нуклона ρ_0, равную $10^{15} \ г/см^3$. Тогда характерная частота процесса при $r \approx 2 \cdot 10^{-14}$ *см* $\omega_k \simeq 1{,}5 \cdot 10^{24} \ сек^{-1}$, что близко к ω^*. Если отказаться от схемы с керном, то надо просто говорить о характерном радиусе «образования» π- и k-мезонов, который порядка $10^{-13} \div 10^{-14}$ *см*. (Мы еще вернемся к этому вопросу ниже).

Поскольку протон и нейтрон являются двумя различными состояниями (вообще говоря, возбужденными) одной и той же частицы, то можно написать реакции переходов $p \to n \to p$ и т. д.

Очевидно, что приближенно $p \to n + \pi^+$, $n \to p + \pi^-$. При этом вращающееся заряженное мезонное облако должно иметь свой собственный магнитный момент.

Согласно квантовой теории Дирака, протон как заряженная частица со спином $s = 1/2$ должен иметь магнитный момент, равный одному ядерному магнетону:

$$\bar{\mu}_{0p} = \frac{e\hbar}{2M_p c} = -\bar{\mu}_{0э} \frac{M_e}{M_p}, \tag{6.1}$$

где

$$\bar{\mu}_{0э} = \frac{e\hbar}{2M_e c} \tag{6.2}$$

есть электронный магнетон Бора, M_p — масса протона, M_e — масса электрона. Однако у протона наблюдается аномальный магнитный момент

$$\bar{\mu}_p = 2{,}7928\, \bar{\mu}_{0p} = \bar{\mu}_p + \Delta\bar{\mu}_p, \quad \Delta\bar{\mu}_p = 1{,}7928\, \bar{\mu}_{0p}. \tag{6.3}$$

У нейтрона магнитный момент должен равняться нулю, однако и у него наблюдается аномальный магнитный момент

$$\Delta\bar{\mu}_n = -1{,}9128\, \bar{\mu}_{0p}, \tag{6.4}$$

так что

$$\Delta\bar{\mu}_p + \Delta\bar{\mu}_n = -0{,}12\, \bar{\mu}_{0p}. \tag{6.5}$$

Эти аномалии магнитного момента вызваны тем, что у протона «вращается» π^+-мезон (дополнительный момент положителен), а у нейтрона π^--мезон (дополнительный момент отрицателен).

«Вращение» происходит с вероятностью 2/3 с орбитальным моментом $l = 1$ в сторону, противоположную «вращению» самого нуклона, и с вероятностью, равной 1/3, с орбитальным моментом $l = 0$.

Вращающиеся мезонные облака тоже являются виртуальными в том смысле, что их нельзя непосредственно наблюдать. Но если им сообщить некоторую энергию, то они вырвутся из «нуклонного плена» и смогут быть непосредственно наблюдаемы, т. е. перестанут быть виртуальными. Но, поскольку «виртуальные» вращающиеся около нуклона мезоны (точнее говоря, π- и K-мезоны) создают аномальные магнитные моменты, т. е. активно себя проявляют, то вряд ли теперь имеет смысл называть их виртуальными, скорее — это «планетарные мезоны».

Следует заметить, что электрон тоже имеет аномальный момент. Согласно простой теории Дирака, магнитный момент электрона должен быть равен $\bar{\mu}_{0э}$, однако наблюдаемый магнитный момент электрона есть

$$\bar{\mu}_э = \bar{\mu}_{0э} + \Delta\bar{\mu}_э, \tag{6.6}$$

где

$$\Delta\bar{\mu}_э = \frac{\alpha}{2\pi}\,\bar{\mu}_{0э} = \frac{e^2\bar{\mu}_{0э}}{2\pi\hbar c},$$

или

$$\Delta\bar{\mu}_э = \frac{1}{860}\,\bar{\mu}_{0э} = \frac{1}{860}\,\frac{M_p}{M_э}\,\bar{\mu}_{0p} = 2\cdot 15\,\bar{\mu}_{0p}.$$

Интересно отметить, что аномальный магнитный момент электрона по абсолютной величине близок к аномальному магнитному моменту протона.

Аномальный магнитный момент электрона вызван не виртуальным мезоном, а виртуальными фотонами (γ-квантами), которые аналогично мезонам могут, «вращаясь» около керна электрона,создавать дополнительный импульс отдачи, ведущий к переориентации его спина, что и создает аномальный магнитный момент. Кстати говоря, у нуклона импульс отдачи и переориентация спина также вносят свой вклад в аномальный магнитный момент помимо мезонных токов (у электрона, видимо, ток вращающихся зарядов равен нулю, поскольку γ-кванты нейтральны). Размеры керна электрона неизвестны, но его «атмосфера» более «раздута», чем у нуклонов, и эффективный радиус электрона, имеющий смысл при исследовании взаимодействия электрона с гравитационным полем (электромагнитный радиус), больше, чем у нуклона.

Соответствующие магнитным моментам механические моменты получаются из известного соотношения

$$\tilde{M} = \frac{2\bar{M}c\bar{\mu}}{e} = \frac{2E\bar{\mu}}{ec}, \tag{6.7}$$

где $\bar{M} = \dfrac{M_0}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}$ — полная масса движущихся частиц, M_0 — их масса покоя, E — энергия частиц или фотонов, v — скорость движения частиц.

Скорость «вращения» мезонов близка к скорости света. Между нуклоном и мезонами действуют силы, которые хотя и могут иметь электромагнитную природу, но в сильных полях отличаются от чисто электромагнитных (линейных) сил и являются силами так называемого сильного взаимодействия.

Поэтому, рассматривая в чисто оценочном приближении движение мезонов «около» нуклона, можно написать уравнение элементарной квантовой теории Бора — Зоммерфельда

$$\frac{M_0 c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - M_0 c^2 = \frac{M_0^* c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \tag{6.8}$$

где $\frac{g^2}{r} e^{-R/R^*}$ — потенциал Юкавы, $R^* = \hbar / \overline{M}c$ — радиус действия ядерных сил. Однако с большой точностью можно положить, что

$$\frac{M_0 c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - M_0 c^2 = \frac{Ze^{*2}}{2R}, \tag{6.9}$$

где $v = R\omega$, $Ze^{*2} = g^2$ — квадрат эффективного заряда, $M_0^* = M_0\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - 1\right)$ — эффективная приведенная масса покоя мезонного облака, $M_0 = \frac{m_1 m_2}{M}$ — приведенная масса покоя, m_2 — масса мезонного облака, m_1 — масса остальной части нуклона, $M = m_1 + m_2$ — их полная масса.

Далее следует положить, что

$$\frac{M_0 R^2 \omega}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{M_0 R v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = n\hbar. \tag{6.10}$$

Пусть

$$\mu_p = \xi \frac{e\hbar}{2\mu_p c}, \tag{6.11}$$

где

$$\xi = \frac{\mu_p}{\mu_{0p}}.$$

Тогда исходя из (6.6) будем иметь выражение

$$\frac{M_0 R^2 \omega}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{2M_0 c}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\, e} \xi \frac{e\hbar}{2M_p c} = \frac{\xi M_0 \hbar}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\, M_p},$$

откуда

$$M_p R^2 \omega = \xi\hbar. \tag{6.12}$$

Из (6.10) и (6.12) имеем

$$\xi = n \frac{M_p}{M_0} \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = \frac{nM_p}{\overline{M}}. \tag{6.13}$$

Из (6.9) и (6.10) находим соотношение

$$\frac{R\omega}{c\left(1-\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\right)}=\frac{2n\hbar c}{Z^*e^2}=\frac{2n}{Z^*\bar{\alpha}}, \tag{6.14}$$

откуда

$$\frac{R\omega}{c}=\frac{4n}{Z^*\bar{\alpha}}\frac{1}{1+\frac{4n^2}{Z^{*2}\bar{\alpha}^2}}. \tag{6.15}$$

Далее, из (6.10) следует, что

$$M_0Rc=n\hbar\frac{1-\frac{4n^2}{Z^{*2}\alpha^2}}{1+\frac{4n^2}{Z^{*2}\alpha^2}}. \tag{6.16}$$

Подставляя в (6.12) формулу (6.15), будем имеıь

$$M_pRc=\xi\hbar\frac{Z^*\alpha}{4n}\left(1+\frac{4n^2}{Z^{*2}\bar{\alpha}^2}\right). \tag{6.17}$$

Из (6.16) и (6.17) находим

$$\frac{M_0}{M_p}=\frac{n}{\xi}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}=\frac{n}{\xi}\frac{1-\frac{4n^2}{Z^{*2}\bar{\alpha}^2}}{1+\frac{4n^2}{Z^{*2}\bar{\alpha}^2}}, \tag{6.18}$$

$$R=\frac{\xi\hbar}{M_pc}\frac{Z^*\bar{\alpha}}{4n}\left(1+\frac{4n^2}{Z^{*2}\bar{\alpha}^2}\right). \tag{6.19}$$

Далее получим

$$\omega=\frac{M_0c^2}{\xi\hbar}\left(\frac{4n}{Z^*\bar{\alpha}}\right)^2\frac{1}{\left(1+\frac{4n^2}{Z^{*2}\bar{\alpha}^2}\right)^2}. \tag{6.20}$$

Сделаем некоторые оценки. Поскольку $\xi\approx 2$ ł

$$R=\frac{2{,}8\cdot 10^{-27}}{5\cdot 10^{-14}}\left(\frac{Z^*}{4\cdot 137\,n}-137\,\frac{n}{Z^*}\right).$$

Полагая $n=1$ и $Z=10^3$, что характерно для сильных взаимодействий, находим

$$R=R_0=1{,}1\cdot 10^{-13}\ см,\qquad \frac{R\omega}{c}=\frac{v}{c}=\frac{1}{2},$$

$$\omega=\frac{c}{2R}=1{,}5\cdot 10^{23}\ сек^{-1},$$

$$M_0=0{,}18\,M_p,\qquad \bar{M}=\frac{2}{3}\sqrt{3}\,M_0=0{,}2\,M_p,\qquad \mu=0{,}6\,\hbar.$$

По аналогии с боровским радиусом для электрона R_0 можно назвать боровским радиусом для мезонов (для сильных взаимодействий). Этот радиус получается порядка размеров нуклона.

Попробуем теперь вычислить квадрупольный момент нуклона, полагая, что он может быть отличен от нуля, а также мощность его гравитационного излучения и значение величины α. Проделав простые выкладки, находим

$$D^2_{\alpha\beta} = 10^{-100}, \quad \dddot{D}^2_{\alpha\beta} = 10^{39}, \quad -\dot{E}_g = 7{,}5\cdot 10^{-21}\ \textit{эрг/сек},$$
$$\alpha = 5\cdot 10^{-18}\ \textit{сек}^{-1}.$$

Таким образом, значение α действительно получается порядка $1/T$, на что мы указывали выше.

Эти предварительные вычисления показывают, что, может быть, имеет смысл более серьезно разобраться в возможности излучения гравитационных волн элементарными частицами и в механизме этого излучения.

Прежде всего рассмотрим более подробно вопрос о том, может ли нуклон излучать квадрупольно. В так называемой обобщенной (коллективной) теории ядра квантованный квадрупольный момент ядер в состоянии I, Ω описывается соотношением

$$Q = Q_0 \frac{(3\Omega^2 - I)(I+1)}{(I+1)(2I+3)} + Q^*, \tag{6.21}$$

где

$$Q_0 = \frac{2}{5} Ze(b^2 - a^2) \tag{6.22}$$

есть обычный (неквантованный) квадрупольный момент ядра Z_e, a и b — большие полуоси эллипсоидального ядра (заряд считается равномерно распределенным по эллипсоидальному ядру), I — полный момент, Ω — сумма моментов проекции импульса. $Q^* \ll Q_0$ зависит от внутренней структуры частиц.

В основном состоянии, когда $\Omega = I = I_0$, имеем (при $Q^*=0$)

$$Q = Q_0 = \frac{I_0(2I_0 - 1)}{(I_0+1)(2I_0+3)}. \tag{6.23}$$

Если $I_0=0, {}^1/_2$, то $Q=Q^*\approx 0$. Отсюда и следует вывод, что ядра, имеющие спины 0, ${}^1/_2$. в основном состоянии не обладают квадрупольными моментами. Однако в возбужденном состоянии они могут иметь квадрупольные моменты. Соотношение (6.21) выведено для малых колебаний ядерной поверхности или для «жесткого» волчка и неприменимо к нуклону с вращающимся около него мезонным облаком в гравитационном поле. В этом случае нужна релятивистская теория квантованных моментов, учитывающая гравитационное поле (см. ч. II, § 8).

Аномальный магнитный момент может свидетельствовать о возбужденном состоянии нуклона, который при этом может иметь отличный от нуля квадрупольный механический момент. Наши предварительные подсчеты дают порядковую оценку для этого квадрупольного момента. (При этом нам не надо даже в принципе делать какие-либо предположения о структуре нуклона. Достаточно просто сказать, что есть π- и K-мезоны с частотами пульсаций (образования) порядка 10^{23} и 10^{24} *сек* соответственно.)

В том случае, когда нуклон получит дополнительную энергию, равную энергии мезона

$$E_\pi = M_\pi c^2 \tag{6.24}$$

(где M_π — масса мезона), виртуальные мезоны могут стать реальными, т. е. уйти из сферы влияния данного нуклона. Эта энергия равна 135 *Мэв* $= 2\cdot 10^{-4}$ *эрг*. Поскольку в природе нет изолированных нуклонов, а все они находятся в нашей Вселенной, то они все время взаимодействуют с общим энергетическим фоном Вселенной. Ниже мы дадим основные возможные числовые характеристики нашей Вселенной, сейчас же укажем лишь, что возможное число нуклонов (N) в нашей Вселенной может быть порядка 10^{80} — 10^{82} (как это и предполагал Эддингтон).

Если энергия всех полей нашей Вселенной есть E_0, то возможные флуктуации энергии $\Delta E_\text{ф} = \dfrac{E_0}{\sqrt{N}}$ и на один нуклон приходится энергия $\dfrac{E_0}{N} = E_p$, а флуктуация энергии на один нуклон

$$\Delta E = \frac{\Delta E_\text{ф}}{N} = \frac{E_0}{N^{3/2}}. \tag{6.25}$$

Если учесть, что гравитационное взаимодействие уменьшает полную энергию, то $E_0 = f(N) N E_p$, где для заданного N $f(N) = \text{const} < 1$.

Допустим далее, что эти флуктуации делают возможным превращение части энергии пиона, равной ΔE, из виртуальной в свободную, т. е. часть энергии, равная $\Delta E_\text{ф}$, уходит из нуклонов во внешнее пространство. Тогда очевидно, что из одного нуклона уходит энергия

$$\Delta \overline{E} = \Delta E = \frac{\Delta E_\text{ф}}{N} = \frac{E_0}{N^{3/2}} = \frac{M_p c^2}{N^{1/2}} \approx 10^{-41} M_p c^2. \tag{6.26}$$

Флуктуация объема

$$\Delta V_{ф} = \frac{V_0}{\sqrt{N}}. \qquad (6.27)$$

Если V_0 — объем всей нашей Вселенной, $\Delta V_ф$ — флуктуация объема нашей Вселенной, то на каждую частицу флуктуация объема будет составлять

$$\Delta V = \frac{\Delta V_ф}{N} = \frac{V_0}{N^{3/2}}. \qquad (6.28)$$

Поскольку «радиус нашей Вселенной» $a = R = 10^{28}$ *см*, то

$$V_0 = 10^{84}\ см^3 \text{ и } \Delta V = \frac{10^{84}}{10^{123}} = 10^{-39}\,см.$$

Характерный радиус флуктуации пространства, приходящегося на один нуклон,

$$r_ф = \frac{R}{\sqrt{N}} = 10^{-13}\ см \approx \frac{T_m c}{\sqrt{T_m^2}\omega_0} = \frac{c}{\omega_0} = \text{const [см. (6.73)]},$$

что соответствует характерным размерам нуклона.

Здесь $T_m = \omega_0 T$ — безразмерный дираковский возраст нашей Вселенной. Так как скорость распространения в полях есть c, то порядок характерной частоты флуктуации $\omega_ф = \frac{c}{r_ф} = 10^{23}\,сек^{-1}$, что совпадает с характерной частотой «пульсаций» нуклона, происходящих вследствие вращения виртуального мезонного облака.

Очевидно, что этот процесс тесно связан с флуктуациями энергии в нашей Вселенной. По-видимому, не случайно размеры элементарных частиц соответствуют размерам областей — ячеек элементарных флуктуаций, и все эти процессы связаны с полной энергией и числом частиц в нашей Вселенной. Вселенная при изменении ее радиуса кривизны не является равновесной.

При флуктуациях энергия может как излучаться, так и поглощаться элементарными частицами. Однако общий баланс энергии в неравновесной Вселенной должен приводить обязательно к потере энергии элементарными частицами, поскольку флуктуации не симметричны — это в расширяющейся Метагалактике диссипативный процесс, ведущий к более равномерному распределению энергии. При этом общая энтропия Вселенной (Метагалактики) будет обязательно возрастать. В § 9 мы рассмотрим этот вопрос более подробно.

Поскольку плотность энергии в электромагнитных частицах значительно выше средней плотности энергии во Вселенной, а со временем плотность энергии должна выравниваться, то энергия частиц действительно должна убывать. Возможно, что устойчивость основных элементарных частиц — нуклонов, электронов (e^+, e^-) и фотонов — связана с тем, что их размеры при заданном запасе энергии соответствуют различным устойчивым ячейкам флуктуаций, а для мезонов, гиперонов и других неустойчивых элементарных частиц такое соответствие не имеет места.

Относительно диссипации энергии из нуклонов можно высказать еще и такие соображения. Поскольку мы имеем теперь все основания считать элементарные частицы структурными образованиями, полагая буквально по Ленину, что и «электрон неисчерпаем», то можно говорить о внутренней «газоэлектродинамике» этих частиц. Микроэлементарные частицы (которые можно называть или не называть виртуальными), являясь носителями микрозарядов, будут создавать внутреннее электромагнитное поле, структура которого уже наблюдается. В этом поле под влиянием флуктуации энергии несомненно будет происходить диссипация энергии на «джоулево тепло» и, возможно, в виде микроизлучения уходить наружу, так сказать сбрасываться частицей. Эту энергию и можно отождествлять с $\Delta E = \frac{E}{N^{3/2}} = \frac{\Delta E_ф}{N}$ в грубом классическом приближении.

Мощность диссипации энергии будет равна

$$-M_p \frac{dQ}{dt} = -E_Q = V_p \frac{\Delta j^2}{\sigma} = V_p \Delta j \Delta \overline{E} = V_p \delta \overline{u} \frac{\Delta e}{r^{*2}} = \\ = \frac{(\Delta e)^2 \overline{u}}{r^{*2}} = \frac{(\dot{\Delta e})^2 c}{r^{*2}} \frac{\overline{u}}{c}, \qquad (6.29)$$

где $\dot{Q}$ — теряемое тепло, V_p — объем нуклона, $\Delta j = \sigma \Delta \overline{E}$ — флуктуация тока, $\Delta \overline{E} = \frac{\Delta e}{r^{*2}}$ — флуктуация электромагнитного поля, Δe — флуктуация заряда, $\overline{u}$ — скорость движения микрозарядов, $\Delta \delta = \frac{\Delta e}{V_p}$ — флуктуация плотности микрозарядов.

Поскольку $\frac{(\dot{\Delta e})^2}{r^2} = \frac{e^2}{r^2 \sqrt{N}}$, то окончательно

$$-\dot{E}_Q = \frac{e^2 c}{\sqrt{N} r^{*2}} \frac{\overline{u}}{c}, \qquad (6.30)$$

причем с большой точностью можно положить, что $\overline{u} = c$, тогда

$$-\dot{E}_Q = \frac{e^2 c}{\sqrt{N} r^{*2}}. \qquad (6.31)$$

Энергия, теряемая за одну «пульсацию»,

$$\Delta E_Q = \frac{E_p}{\sqrt{N}} \frac{c}{r^*\omega} = \frac{E_p}{\sqrt{N}}, \tag{6.32}$$

где $\frac{e^2}{r^*} = M_p c^2 = E_p$, r^*— эффективный радиус нуклона $\backsim 10^{-16}$ *см*, что совпадает с (6.26).

Коэффициент расхода энергии

$$\alpha_Q = \frac{e^2}{\sqrt{N} M_p c r^2} = \frac{c}{r\sqrt{N}} = \frac{c}{a} = \frac{c}{R} = \frac{1}{T} \tag{6.33}$$

действительно соответствует общему объему расхода энергии на гравитационные излучения в нашей Вселенной, происходящего, согласно нашей гипотезе, за счет излучения энергии из элементарных частиц.

Заметим, что при этом внутренняя проводимость нуклона составляет

$$\sigma = \frac{\Delta j}{\Delta \bar{E}} = \frac{\Delta \delta c r^2}{\Delta e} = \frac{c}{4r} = \omega = 10^{23}\ сек^{-1},$$

т. е. она очень велика.

Итак, считая, что внутри частиц происходит диссипация энергии, а этот процесс согласно второму началу термодинамики совершенно универсальный, мы приходим к неизбежному выводу, что элементарные частицы должны терять эту энергию в виде излучения во внешнюю среду.

Допустим, что изменение энергии за одну пульсацию нуклона можно, видимо, интерпретировать в виде квантового перехода

$$\hbar\Delta\omega = \Delta E, \tag{6.34}$$

где

$$\Delta\omega = \frac{\omega}{\sqrt{N}}, \tag{6.35}$$

поскольку можно написать, что $E = \hbar\omega$. В этом случае квадрупольное электромагнитное излучение и квадрупольное гравитационное излучение будут совпадать.

В самом деле,

$$\frac{\Delta E_{э,\ кв}}{\Delta E_g} = \frac{(\Delta e)^2}{GM_p^2} = \frac{e^2}{GM_p^2 \sqrt{N}}. \tag{6.36}$$

Отношение $\frac{GM_p^2}{e^2}$ по порядку величин как раз соответствует $N^{-1/2}$. Будем теперь считать, что точно выполняется условие

$$\frac{GM_p^2}{e^2} = \frac{1}{\sqrt{N}}. \tag{6.37}$$

Тогда $\frac{\Delta E_{э,\ кв}}{\Delta E_g} = 1$ (во всяком случае, эти величины будут одного порядка).

Теперь мы можем окончательно интерпретировать гравитационное излучение как результат флуктуаций электромагнитного поля, поскольку энергия гравитационного излучения

$$E_g = \frac{GM_p^2}{r} = \frac{E_э}{\sqrt{N}} = \frac{e^2}{\sqrt{N}\,r} \approx E_p \frac{GM_p^2}{e_2}. \tag{6.38}$$

Энергия флуктуации электромагнитного поля нуклонов порождает кванты гравитационного поля — гравитоны. Но квантовое соотношение (6.34) при этом надо будет заменить другим, более точным и целесообразным для данной ситуации.

Так как $\frac{GM_p^2}{e^2} = \frac{1}{\sqrt{N}}$, и, с другой стороны, введя, согласно Дираку, безразмерное мировое время

$$T_m = T\omega_m, \tag{6.39}$$

где ω_m — некоторая частота, которая равна частоте пульсаций мезонного облака ω, то можно положить, что $\omega = \omega_m = \omega_0$. Легко показать, что $\sqrt{N} = \frac{T_0}{T_{m_0}}$, где $T_{m_0} = \text{const} = 1$.

В самом деле, $\sqrt{N} = 10^{41}$, $T_m = 3 \cdot 10^{17} \cdot 3 \cdot 10^{23} = 10^{41}$. Таким образом, оказывается, что

$$\frac{GM_p^2}{e^2} = \frac{1}{T_m}, \quad N = T_m^2. \tag{6.40}$$

В связи с этим Дирак предположил, что происходит «старение» сил гравитации, «старение» гравитационной постоянной, и допустил, что

$$G = \frac{1}{T_m}, \tag{6.41}$$

Но, исследуя обобщение фридмановских моделей Вселенной, мы показали, что закон изменения G со временем иной, а именно

$$G \sim T_m. \tag{6.42}$$

При законе (6.41) или любом другом, кроме (6.42), если G = const, допуская, что c = const, закон «расширения» нашей Вселенной не удовлетворяет требованиям постоянства скорости «первой частицы» — прямолинейности первой характеристики в разных системах отсчета. Требование c = const является вполне разумным и, как мы говорили выше (см. ч. II, § 1), допущение $c \neq \text{const}$ не изменило бы наших представлений об эволюции Вселенной, а просто переопределило бы масштаб других размерных величин (ниже мы еще раз вернемся к этому вопросу).

Итак, допустим, что $c = c_0 = \text{const}$, $G \sim T_m$. Далее не будем уже утверждать, что излучение флуктуации энергии — гравитонов нуклонами сопряжено обязательно с наличием квадрупольных моментов. В общем случае больших колебаний разложение параметров колебаний «поверхности» по полиномам Лежандра не имеет смысла. Поступим проще и более общим образом. В общей теории относительности показано, что любое ускорение системы является источником гравитационных волн. Вблизи источника (не в волновой зоне) эти колебания будут и продольными и поперечными, поэтому мы просто будем говорить об излучении квантов гравитационного поля — гравитонов нуклонами. Поскольку скорость флуктуаций поверхности и зарядов мала по сравнению со скоростью света, несмотря на то, что скорость виртуальных мезонов к ней приближается, мы имеем право использовать здесь приближение как бы «слабого поля». Как мы видели в § 5 части II, в этом общем случае

$$-\dot{E}_g = -c^2 \frac{dM_p}{dt} = \xi \frac{Gm^2c}{r^2} = \xi_1 \frac{GM_p^2 c}{r^2}, \tag{6.43}$$

$$\alpha = \xi \frac{Gm^2}{r^2 M_p c} = \xi \frac{Gm_1^2 m_2^2}{M_p^2 r^2 c} = \xi_1 \frac{GM_p}{r^2 c}, \tag{6.44}$$

где

$$\xi_1 = \xi \left(\frac{m}{M_p}\right)^2 = \frac{\xi}{10^2}.$$

Поскольку, как пока мы утверждаем [см. (6.34)], ω может меняться со временем, а именно уменьшаться, и так как $\omega \approx c/r$, то радиус частиц должен увеличиваться; поскольку радиус Вселенной $a = R = cT = \frac{c}{\omega_0} T_m$, то отношение

$$\frac{a}{r} = \frac{R}{r} = T_\omega = \frac{\omega}{\omega_0} T_m = \frac{\omega}{\omega_0} \sqrt{N},$$

что при $\omega = \omega_0$, как видели выше, действительно имеет место.

За одну пульсацию (за единицу изменения мирового времени) ω меняется на величину $\Delta\omega$, определяемую из соотношения $\hbar\Delta\omega = \Delta E$, поэтому

$$\hbar\Delta\omega = \Delta E \Delta T_m,$$

$$\hbar \frac{d\omega}{dT_m} = \Delta E = \frac{\dot{E}_g}{\omega} = -\xi_1 \frac{GM_p^2 c}{\omega r^2} = -\xi_1 \frac{GM_p^2}{r} = c^2 \frac{dM_p}{dT},$$

откуда

$$\hbar d\omega = c^2 dM_p = d\Delta E,$$

$$\hbar\omega = \Delta E = M_p c^2, \qquad -\xi_1 \frac{GM_p^3}{c\hbar} = \frac{dM_p}{dT_m},$$

$$-\frac{dM_p}{M_p^3} = \frac{\xi_1 G}{c} dT_m = \frac{\xi_1 G_0}{\hbar c} T_m dT_m = \frac{\xi_1 G_0}{2\hbar c} dT_m^2$$

$(G = G_0 T_m)$.

Отсюда $\frac{1}{M_p^2} = \text{const} + \frac{\xi_1 G_0}{\hbar c} T_m^2$, причем можно положить, что $\text{const} = 0$, тогда

$$M_p = \frac{1}{T_m} \sqrt{\frac{\hbar c}{\xi_1 G_0}}. \tag{6.45}$$

Так как $N = T_m^2$, то полная энергия частиц

$$E_{0m} = NM_p c^2 = T_m c^2 \sqrt{\frac{\hbar c}{\xi_1 G_0}}, \tag{6.46}$$

т. е. она будет расти пропорционально мировому времени.

Мы пришли к явному противоречию: несмотря на наличие диссипативного процесса общая масса нуклонов о Вселенной растет. Поскольку запасы полной энергии $E_{0п}$ в нашей Вселенной конечны, то энергия полей $E_{эg} = E_{0п} - NM_p c^2$ будет уменьшаться со временем и при $T_м = \frac{E_{0п}}{c^2} \sqrt{\frac{\xi_1 G_0}{\hbar c}}$ обратится в нуль, что уже совершенно бессмысленно. Далее, поскольку $\omega = \frac{c}{r} = \frac{M_p c^2}{\hbar} = \frac{c^2}{T_m} \sqrt{\frac{c}{\xi_1 \hbar g_0}}$, то $r = \frac{T_m}{c} \sqrt{\frac{\xi_1 G_0 \hbar}{c}}$, а так как $R = cT = \frac{cT_m}{\omega}$, то

$$R = \frac{T_m^2}{c} \sqrt{\frac{\xi \hbar G_0}{c}}, \qquad e^2 \approx rc^2 M_p \approx c\hbar = \text{const}.$$

Полный заряд во Вселенной (по модулю) $Ne^2 \sim N \sim T_m^2$, т. е. растет со временем, что также нелепо. При этом $\alpha = \frac{c^3}{T_m^2 \sqrt{\xi_1 c G_0 \hbar}}$, хотя должно было бы быть $\alpha \sim T_m^{-1}$.

Поэтому нам следует отказаться от предположения, что при излучении флуктуаций (т. е. гравитационного поля) характерная частота нуклона меняется. Ее надо считать постоянной, как об этом мы уже говорили выше (см. ч. II, § 1).

Итак, пусть $c = c_0 = \mathrm{const}$; $\omega = \omega_0 = \mathrm{const}$; тогда $r = \mathrm{const}$. Уравнение (6.43) при $G = G_0 T_m$ дает

$$-\frac{dM_p}{dT_m} = \xi_1 \frac{G_0 T_m M_p^2}{r^2 c \omega_0},$$

откуда

$$\frac{1}{M_p} = \mathrm{const} + \frac{\xi_1 G_0 T_m^2}{2r^2 c \omega_0},$$

причем $\mathrm{const} = 0$ и

$$M_p = \frac{r^2 c \omega_0}{2\xi_1 G_0 T_m^2} = \frac{rc^2}{2\xi_1 G_0 T_m^2}. \tag{6.47}$$

Отсюда следует, что

$$E_{0m} = NM_p c^2 = \frac{rc^4}{2\xi_1 G_0} = \mathrm{const}, \tag{6.48}$$

что вполне возможно. При этом энергия полей также постоянна, т. е. происходит постоянное излучение энергии полей частицами, а часть этой энергии идет на образование новых частиц, увеличивая их число. Этот процесс кажется вполне естественным и правдоподобным. Если же постулировать, что $E_{0m} = \mathrm{const}$, то сразу получается закон $N \sim T^2$, который до сих пор был эмпирическим соотношением. Ниже мы вернемся к уточнению этих закономерностей.

Поскольку

$$\Delta E = \frac{E_p}{\sqrt{N}} = \frac{\hbar\omega_0}{\sqrt{N}},$$

то удобно ввести вспомогательную величину

$$\hbar_g = \frac{\hbar}{\sqrt{N}}. \tag{6.49}$$

Тогда (6.48) примет вид

$$\Delta E = \hbar_g \omega_0. \tag{6.50}$$

Используя уравнение $\hbar\omega_0 = M_p c^2$, находим

$$\hbar = \frac{rc^4}{2\xi_1 \omega_0 G_0 T_m^2} = \frac{r^2 c^3}{2\xi_1 G_0 T_m^2}. \tag{6.51}$$

Так как $e^2 = r^* M_p c^2$, то

$$e^2 = \frac{r^* r c^4}{2\xi_1 G_0 T_m^2}. \tag{6.52}$$

Полный заряд (по модулю) $Ne^2 = \frac{r^* r c^4}{2\xi_1 G_0} = \text{const}$. Это соотношение лишний раз подтверждает справедливость сделанных выше предположений, что $c = c_0 = \text{const}$, $\omega = \omega_0 = \text{const}$. Постоянная тонкой структуры $\bar{\alpha} = \frac{e^2}{\hbar c} = \text{const}$, причем $\text{const} = \frac{1}{137} = \frac{r^*}{r} = \frac{r^* \omega_0}{c}$.

Величина

$$\alpha = \frac{c}{2rT_m} = \frac{\omega_0}{2T_m} = \frac{1}{2T}, \tag{6.53}$$

что вполне естественно.

Мы видим, что величина «постоянной» Планка меняется с изменением G, поэтому естественно «квантовать» флуктуационные излучения с помощью соотношения

$$\frac{1}{2} \Delta \hbar \omega_0 = \Delta E. \tag{6.54}$$

За одну пульсацию $\hbar$ изменяется на величину

$$\Delta \hbar = -\frac{r c^4}{\xi_1 \omega_0 G_0 T_m^3} = -\frac{2\hbar}{T_m} = -2\hbar_g,$$

поэтому

$$\Delta E = \Delta E_1 = -h_g \omega_0 = \frac{\hbar \omega_0}{\sqrt{N}} \approx 10^{-44}\ \textit{эрг}, \tag{6.55}$$

для электрона $\Delta E \approx 10^{-47}$ *эрг*.

Ниже мы еще вернемся к рассмотрению этого исключительно принципиального вопроса, а сейчас рассмотрим, как и что может излучать электрон. При этом снова будем считать, что $c = c_0 = \text{const}$, $\omega_0 = \text{const}$, но будем полагать, что $\omega \neq \omega_0$, где $\omega = \text{const}$ равна частоте собственных пульсаций электрона.

При этом электронное безразмерное время жизни нашей Вселенной

$$T_{\text{э}m} = \omega T = \frac{\omega}{\omega_0} T_m = \sqrt{N} \frac{\omega}{\omega_0}. \tag{6.56}$$

Далее,

$$-\dot{E}_g = \xi_{1\text{э}} \frac{G M_{\text{э}}^2 c}{r_{\text{э}}^2} = -c^2 \frac{dM_{\text{э}}}{dt}, \quad \alpha = \xi_{1\text{э}} \frac{G M_{\text{э}}}{r_{\text{э}}^2 c}, \tag{6.57}$$

где $r_э = \mathrm{const}$ — «радиус» электрона, который может иметь смысл при исследовании флуктуаций, $\xi_{1э} = \mathrm{const}\,\xi_1$. Полагая $G = G_0 T_m$, сразу найдем

$$M_э = \frac{r_э^2 c\omega_0}{2\xi_{1э} G_0 T_m^2}, \qquad \alpha = \frac{1}{2T}. \tag{6.58}$$

Очевидно, что

$$\frac{r_э^2}{\xi_{1э}} = \frac{M_э}{M_p}\frac{r^2}{\xi_1}. \tag{6.59}$$

Далее,

$$\hbar = \frac{M_э c^2}{\omega} = \frac{r_э^2 c^3 \omega_0}{2\xi_{1э} G_0 T_m^2 \omega}. \tag{6.60}$$

По-видимому,

$$\frac{r_э^2}{\xi_{1э}} = \frac{r^2\omega}{\xi_1\omega_0} = \frac{r^2}{\xi_1}\frac{M_э}{M_p}, \quad \frac{\omega}{\omega_0} = \frac{M_э}{M_p}, \tag{6.61}$$

$$e^2 = r_э^* M_э c^2 = \frac{r^* r_э^2 c^3 \omega_0}{2\xi_{1э} G_0 T_m^2}, \tag{6.62}$$

где

$$r_э = 2\cdot 10^{-13}\ \textit{см}, \quad \bar{\alpha} = \frac{r_э^*}{r_э} = \frac{r_э^*\omega}{c} = \frac{1}{137},$$

причем

$$\frac{r_э^* r_э^2}{\xi_{1э}} = \frac{r^* r^2}{\xi_1}. \tag{6.63}$$

Отсюда и из (6.59) следует

$$r_э^* = r^* \frac{M_p}{M_э}. \tag{6.64}$$

Очевидно, что $r_э < r$, $\xi_{1э} > \xi_1$. Несколько дальше (см. ч. II, § 7) мы сделаем более точные оценки всех рассматриваемых здесь величин. Заметим, что в выражение для $\xi_{1э} = \mathrm{const}\left(\frac{r_э\omega^*}{c}\right)^6$ входят не частоты ω, а $\omega^* \simeq \frac{c}{r_э}$, поэтому $\xi_{1э} = \xi_1$; при этом $\frac{M_э}{r_э^2} = \frac{M_p}{r_p^2}$.

Резюмируя результаты, существенно отметить, что, исходя из законов сохранения полной энергии, момента количества движения и полагая, что $c = c_0 = \mathrm{const}$, мы можем вычислять все основные мировые «константы», которые в динамической изотропной однородной Вселенной оказываются переменными скалярными величинами.

В неоднородной и неизотропной Вселенной эти мировые «константы» будут тензорами или псевдотензорами, спинорами и т. д.; в общем они могут быть представлены некоторыми матрицами. Это мы исследуем ниже.

Покажем теперь, что к основным соотношениям для гравитационного излучения (6.43) и (6 44) можно прийти иным путем, не связанным с вращательными мультипольными моментами.

Под влиянием аномальных магнитных моментов нуклоны и электроны испытывают периодические дрожания — ускорения. Величину ускорения можно легко подсчитать. На один нуклон за время $1/\omega_0$ действует импульс $M_p c/\sqrt{N}$, поэтому ускорение нуклона будет

$$g = \frac{c\omega_0}{\sqrt{N}} = 3\cdot 10^{-7}\ \textit{см/сек}^2. \qquad (6.65)$$

Это ускорение можно также приписать действию флуктуации общего поля. Частота изменения ускорения есть также ω_0. Поэтому максимальная скорость, которую может получить нуклон при подобных колебаниях, $\Delta u_m = \frac{g}{\omega_0} = \frac{c}{\sqrt{N}} \approx 3\cdot 10^{-21}$ *см/сек*, а максимальное смещение $\Delta r_m \approx \frac{g}{2\omega_0^2} \approx \frac{c}{2\sqrt{N}\omega_0} \approx 10^{-54}$ *см*, что соизмеримо с его гравитационным радиусом

$$r_g = \frac{GM_p}{c^2} \approx 10^{-52}\ \textit{см}.$$

Так как ускорения, скорости и смещения нуклонов малы, то в данном случае мы имеем право апеллировать к теории квадрупольного гравитационного излучения. При этом механический квадрупольный момент всех нуклонов будет

$$D_{0\alpha\beta} = ND_{\alpha\beta} = NM_p(3x_\alpha x_\beta - \delta_{\alpha\beta}r^2) \simeq 2NM_p r^2\delta_{\alpha\beta}. \qquad (6.66)$$

Поскольку можно представить r в виде

$$r = r_0\left(1 + \frac{\Delta r_m}{r_0}\sin\omega_0 t\right),$$

то, пренебрегая величиной порядка $\left(\frac{\Delta r_m}{r_0}\right)^2 \ll 1$, найдем, что

$$\dddot{D}_{0\alpha\beta}^2 = 16N^2M_p^2r_0^2\Delta r_m^2\omega_0^6\sin^2\omega_0 t \qquad (6.67)$$

и

$$\dddot{D}^2_{0\alpha\beta} = 8N^2M_p^2r_0^2\Delta r_m^2\omega_0^6.$$

Поэтому

$$-\dot{E}_{0g} = \frac{8GN^2M_p^2\omega_0^6r_0^2\Delta r_m^2}{30c^5} = 10^6 \text{ эрг/сек},$$

$$\alpha = \frac{8GNM_p\omega_0^6r_0^2\Delta r_m^2}{30c^7} = 10^{-18} \text{ сек}^{-1}, \tag{6.68}$$

т. е. мы приходим к старому результату, что вполне естественно. Совершенно аналогичный результат мы получим и для электронов.

Если рассматривать дрожание нуклона под действием излучения и поглощения виртуальных мезонов, то мы вновь придем к прежним результатам в смысле оценок E_g и α. В самом деле, время жизни π- и K-мезонов Δt порядка $\sim \frac{\hbar}{E_p}$, что дает

$$\omega \sim \frac{1}{\Delta t} \approx \frac{c\sqrt{J^2 + m_\mu c^2}}{\hbar},$$

где m_μ — масса мезона, $v = \frac{J}{m_p} \approx \frac{m_\mu c}{m_p}$ — скорость дрожания нуклона, J — импульс,

$$\Delta r = \frac{J\Delta t}{m_p} = \frac{J\hbar}{m_pc\sqrt{m_\mu c^2 + J^2}} \approx \frac{\hbar}{m_pc\sqrt{2}} \approx r_p$$

— смещение, $g = v\omega \approx \omega c\frac{m_\mu}{m_p}$ — ускорение. Остальные вычисления проводим аналогично только что выполненным [см. (6.66)—(6.68)], с той лишь разницей, что при вычислении $D_{\alpha\beta}$ результат не умножаем на N.

Мы вычислили квадрупольный момент для каждого нуклона, причем главный вклад дает «пульсация» мезонов, а не пульсация самого нуклона.

В заключение снова, но уже в самой общей форме покажем, что любая иная модель однородной и изотропной Вселенной, в которой $c \neq \text{const}$, $\omega \neq \text{const}$ ($r \neq \text{const}$), будет абсурдна. Можно всегда положить, что $N \simeq T_m^2$, в противном случае казалось бы странным, почему только в настоящее время $N \equiv T^2$ и $G = G_0T_m$, как это следует из строгих фридмановских моделей. Однако допустим на время, что мы не знаем решений для моделей Вселенной и, не зная, как изменяется G, вслед за Дираком можем всегда положить $\frac{GM_p^2}{e^2} = \frac{1}{T_m}$. Тогда, считая, что все мировые величины являются степенными функциями T_m, придем к некоторым важным соотношениям.

Пусть

$$\hbar \sim T_m^{\alpha_1}, \quad e \sim T_m^{\alpha_2}, \quad M_p \sim T_m^{\alpha_3}, \quad c \sim T_m^{\alpha_4}, \quad r \sim T_m^{\alpha_5},$$
$$G \sim T_m^{\alpha_6}, \quad R \sim T_m^{\alpha_7}. \qquad (6.69)$$

Для этих семи величин имеем пять уравнений:

$$\frac{\hbar c}{r} = M_p c^2 = \frac{e^2}{r}, \quad \frac{GM_p^2}{e^2} = \frac{1}{T_m}, \quad \frac{GM_p^2 N^2}{Rc^2} = 1, \; R = rT_m. \qquad (6.70)$$

Потребуем далее, чтобы полная энергия, состоящая из энергии веществ, гравитационного поля и электромагнитного поля, сохранялась:

$$\beta_1 N M_p c^2 + \beta_2 \frac{GM_p^2 N^2}{R} + \beta_3 \frac{Ne^2}{r} = \text{const} \; (\beta_i = \text{const}).$$

Допустим также, что сохраняется полный момент количества движения всех полей; тогда будет иметь место соотношение

$$\beta_1^* N M_p c^2 r + \beta_2^* \frac{GM_p^2 N^2 r}{R} + \beta_3^* Ne^2 = \text{const} \; (\beta_i^* = \text{const}).$$

Таким образом, всего будет семь уравнений для семи показателей степени при T_m:

$$\alpha_1 - \alpha_5 = \alpha_3 + \alpha_4, \; \alpha_1 + \alpha_4 = 2\alpha_2, \; \alpha_6 + 2\alpha_3 - 2\alpha_2 = -1,$$
$$4 + \alpha_6 + 2\alpha_3 = 2\alpha_4 + \alpha_7, \; \alpha_7 = \alpha_5 + 1,$$
$$A_1 T_m^{2+\alpha_3+2\alpha_4} + A_2 T_m^{4+\alpha_6+2\alpha_3-\alpha_7} + A_3 T_m^{2+2\alpha_2-\alpha_5} = \text{const},$$
$$BT_m^{2+\alpha_3+2\alpha_4+\alpha_5} + B_2 T_m^{4+\alpha_6+2\alpha_3-\alpha_7+\alpha_5} + B_3 T^{2+2\alpha_2} = \text{const}, \qquad (6.71)$$

где A_i и B_i — некоторые постоянные коэффициенты.

Первые пять уравнений системы (6.71) дают следующий результат:

$$\alpha_3 = -2, \quad \alpha_5 = 2 + \alpha_1 - \alpha_4, \quad 2\alpha_2 = \alpha_1 + \alpha_4,$$
$$\alpha_6 = 3 + \alpha_1 + \alpha_4, \quad \alpha_7 = 3 + \alpha_1 - \alpha_4. \qquad (6.72)$$

Шестое уравнение системы (6.71) принимает после подстановки (6.72) вид

$$(A_1 + A_2 + A_3)\, T_m^{2\alpha_4} = \text{const},$$

откуда следует, что $\alpha_4 = 0$. Таким образом, приходим к системе уравнений

$$\alpha_5 = \alpha_1 + 2, \quad 2\alpha_2 = \alpha_1, \quad \alpha_6 = \alpha_1 + 3, \quad \alpha_7 = \alpha_1 + 3,$$

$$\alpha_3 = -2; \quad \alpha_4 = 0.$$

Остается определить показатель степени α_1.

Седьмое уравнение системы (6.71) теперь имеет вид

$$(B_1 + B_2 + B_3)\, T_m^{2\alpha_4 + \alpha_5} = \mathrm{const}.$$

Поскольку $\alpha_4 = 0$, то и $\alpha_5 = 0$. Теперь окончательно находим

$$\alpha_1 = -2, \quad \alpha_2 = -1, \quad \alpha_6 = 1, \quad \alpha_7 = 1.$$

Таким образом, при $N = T_m^2$, $\frac{GM_p^2}{e^2} = \frac{1}{T_m}$ будем иметь ($\omega_0 = \mathrm{const}$):

$$\hbar \sim T_m^{-2},\ e \sim T_m^{-1},\ M_p \sim T_m^{-2},\ c = c_0 = \mathrm{const},\ r = r_0 = \mathrm{const},$$

$$G \sim T_m,\ R \sim T_m. \tag{6.73}$$

При этом $\bar{\alpha} = \frac{e_2}{\hbar c} = \mathrm{const} = \frac{1}{137}$. Боровские радиусы и частота также остаются неизменными (не меняют основных результатов квантовой теории поля), что весьма существенно. В самом деле, $r = r_б \approx \frac{\hbar^2}{e^2 m} = \mathrm{const}$, $\omega^2 = \omega^2{}_б \approx \frac{e^2}{m r_б^3} \approx \frac{e^8 m^2}{\hbar^6} = \mathrm{const}$. Итак, потребовав выполнения законов сохранения, мы однозначно пришли к уже полученному результату. При этом автоматически получается, что все три вида энергии одинаково зависят от T_m и, следовательно, их отношения не зависят от T_m. Если не использовать закон сохранения количества движения, то достаточно положить на основании обобщенных фридмановских моделей, что $G \sim T_m$. Тогда сразу же получаем, что $\alpha_6 = 1$, и опять приходим к прежнему результату. Если использовать закон сохранения энергии и условие $G \sim T_m$, то автоматически как следствие получим, $N \sim T_m^2$. Если же при выведении закона сохранения энергии, следуя Дираку, положить, что $G \sim T_m^{-1}$, т. е. что $\alpha_6 = -1$, мы придем к следующему результату: $\alpha_1 = -4$, $\alpha_7 = -1$, $\alpha_6 = -1$, $\alpha_2 = -2$, $\alpha_5 = -2$, $\alpha_3 = -2$, $\alpha_4 = 0$, что совершенно нелепо (Вселенная сжимается). Если не требовать закона сохранения энергии и допустить, что $\alpha_7 = 1$ (расширение Вселенной), то найдем, что при $\alpha_6 = -1$

$$\alpha_1 = -3,\ \alpha_2 = -2,\ \alpha_3 = -3,\ \alpha_4 = -1,\ \alpha_5 = 0,$$

что также нелепо, и к тому же полная энергия не сохраняется. Допустим теперь, что все же справедлив закон Дирака $G \sim T_m^{-1}$. При этом, как мы знаем, $M_0 \sim T_m^2$, $N \sim T_m^2$, $m_p = \text{const}$, $e = \text{const}$, $\hbar = \text{const}$ и скорость света также постоянна. Соотношение $M_0 \sim T_m^2$ можно интерпретировать не как рождение материи «из ничего», что абсурдно, а как приток новой материи при расширении нашей Вселенной во внешнюю не пустую среду. При этом надо учитывать поток энергии через «границу» нашей Вселенной, допуская, что раньше эта материя не могла гравитационно реагировать с материей нашей Вселенной. Такова, например, точка зрения Дике. Это более разумная точка зрения, чем непрерывное рождение материи из ничего, которую раньше поддерживали Иордан, Хойл, Голд и Бонди. При этом, однако, надо положить, что во «внешнем» пространстве $\varepsilon = \varepsilon^* \sim R^{-1}$, тогда приток энергии будет $\sim R^2$ при расширении нашей Вселенной с постоянной скоростью. Плотность энергии в пространстве при этом будет падать $\sim T_m^{-1}$, и, следовательно, убыль энергии из частиц скомпенсируется притоком внешней энергии. Частицы, обладающие постоянной энергией, всегда будут находиться в равновесии с внешним фоном энергии.

Можно обобщить эти рассуждения, считая, что плотность энергии внешней среды и приток энергии через внешнюю границу в общем случае могут измениться и происходить по произвольному закону

$$\varepsilon^* = f(T_m) = f(R),$$

тогда

$$E_0 = M_0 c^2 \sim f(R) R^3 \sim f(T_m) T_m^3.$$

Легко подсчитать при этом, как будут изменяться различные «константы».

Однако во всех этих рассуждениях, как и рассуждениях Дике, есть серьезный недостаток. Во-первых, почему плотность внешней энергии изменяется именно как R^{-1}. Это слишком частный случай, но все же допустим, что раз $N \sim T_m^2$, именно он имеет место. Во-вторых, если мы примем гипотезу излучения элементарными частицами гравитонов [т. е. полагая их источниками гравитационных взаимодействий и используя соотношения для гравитационного излучения — $\dot{E}_g \sim \frac{G m_p^2 c}{r_0^2}$, которое можно получить из простых соображений размерности, допуская, что

$-\dot{E}_9 \sim E \approx \frac{Gm_p^2}{r_0}$ $(\frac{c}{r_0} = \omega_0 = \text{const})$], то немедленно найдем, что в случае Дике $-\frac{dE}{E^2} \sim \frac{dT_m}{T_m}$, т. е. $E = \frac{E_н}{1 + \beta \ln T_m}$, что противоречит условиям неизменности энергии частиц и тем самым закону сохранения энергии.

В самом деле, из условий масштабной калибровки уравнения $R \sim -\varkappa T$, которое справедливо в любых случаях, мы приходим к выводу, что при $\varkappa \sim T_m^{-1}, T \sim T_m^{-1}$, а полная энергия всегда $\sim T_m^2$, число частиц также $\sim T_m^2$; следовательно, $m_p = \text{const}$. Правда, логарифмическая зависимость дает небольшое изменение массы и поэтому, полагая, что $c^2 m_p N = E_0 \sim T_m^2$, можно считать $N \sim \frac{T_m^2}{m_p} = \frac{T_m^2}{m_н}(1 + \beta \ln T_m)$, а не $N \sim T_m^2$, как это получается приближенно эмпирически.

Аналогичные рассуждения будут иметь место при любом законе притока внешней энергии, в случае однородных и изотропных моделей нашей Вселенной. Более существенно другое.

Проникновение энергии извне заведомо нарушает однородность и изотропность, только в более общих моделях можно получить непротиворечивые соотношения, когда «константы» будут зависеть по меньшей мере от $R \sim T_m$ и r. (В гипотезах непрерывного творения материи она возникает всюду, во всем объеме, что обеспечивает и однородность и изотропность.)

При этом на каждую новую порцию захваченного вещества, если оно до захвата было неподвижно, будут приходиться все меньшие и меньшие доли энергии, и поэтому эти порции будут получать все меньшие скорости. Скорость «расширения» будет иметь максимум ближе к центру расширения. Прежде чем произойдет перераспределение скоростей и закон станет хеббловским (хотя бы в видимой части нашей Вселенной), должно пройти время, в 2—3 раза большее «возраста» Вселенной. Все это противоречит данным наблюдений.

Можно именно предположить, что это вещество уже имело большие скорости «убегания» и догонялось с незначительной относительной скоростью. Тогда можно, выбирая закон распределения начальных скоростей, добиться хеббловского распределения скоростей в нашей Вселенной. Однако эта схема еще более надуманна и малоестественна, чем предыдущая, и при этом «константы» будут очень резко зависеть от r.

Более естественно предполагать, как это сделано у нас, что внешний приток энергии незначителен, и рассматривать модели нашей Вселенной при постоянной полной энергии. Поэтому можно настаивать на том, что развиваемая нами схема нашей Вселенной более близка к действительности, чем модели Дирака — Хойла — Дике. Наша модель однородной и изотропной Вселенной действительно единственно возможная, которая удовлетворяет и законам сохранения энергии и всем требованиям теории относительности и теории элементарных частиц. Все мировые величины находятся в соответствии с требованиями § 1 части II путем задания трех размерных констант и одной безразмерной переменной величины — числа частиц. Эта модель может быть развита и для описания неоднородной и неизотропной Вселенной.

§ 7. Взаимодействие частиц при излучении гравитационных волн

Уравнения слабого гравитационного поля имеют вид

$$\Box \psi_i^k = -\frac{16\pi G}{c^4} T_i^k. \tag{7.1}$$

Для ψ_0^0 будем иметь

$$\Box \psi_0^0 = -\frac{16\pi G}{c^4} T_0^0 = \frac{16\pi G\left(\rho + \frac{pv^2}{c^4}\right)}{c^2}. \tag{7.2}$$

Далее можно написать, что

$$\left(\Box - \frac{16\pi G\rho^*}{c^2\psi_0^0}\right)\psi_0^0 = (\Box - k_0^2)\,\psi_0^0 = 0, \tag{7.3}$$

где

$$\psi_0^0 \approx \frac{\varphi}{c^2} \approx \frac{GM}{ac^2} \approx 1, \quad k_0^2 = \frac{16\pi G\rho^*}{c^2\psi_0^0} \approx \frac{6}{a^2}, \quad \rho^* = \rho + \frac{pv^2}{c^4} \approx \rho,$$

a — радиус Метагалактики, v — скорость среды.

Квантовый аналог уравнения (7.3) имеет точно такой же вид, причем

$$k_0^2 = \frac{16\pi G\rho^*}{\psi_0^0\, c^2} = \frac{m_g^2 c^2}{\hbar^2} = \frac{E_g^2}{\hbar^2 c^2}, \tag{7.4}$$

где $k_0 = 1/\lambda$ — волновой вектор, λ — длина волны де Бройля, соответствующая гравитону, ρ — плотность материи в нашей Вселенной, E_g — энергия гравитона, m_g — эквивалентная этой энергии масса покоя. Из (7.4) имеем

$$E_g = 4\hbar\sqrt{\pi G\rho^*}. \tag{7.5}$$

Поскольку в настоящее время плотность $\rho^* = 10^{-29}$ *г/см*^{3}, то сейчас

$$E_g \approx 10^{-44} \text{ эрг}, \qquad m_g \approx \frac{E_g}{c^2} \approx 10^{-66} \text{ г},$$

что весьма близко к результатам предыдущего параграфа. При этом

$$\lambda = \frac{\hbar}{m_g c} = \frac{\hbar c}{E_g} \approx 3 \cdot 10^{28} \text{ см} \approx R, \ E_g = \frac{\hbar c}{R} = \alpha \hbar = H\hbar, \qquad (7.6)$$

где H — постоянная Хэббла.

Ранее мы имели

$$E_g = \frac{E_p}{\sqrt{N}} \approx \frac{16 \cdot 10^{-3}}{10^{41}} = 1{,}6 \cdot 10^{-44} \text{ эрг}.$$

Поскольку

$$16\pi\rho^* = \frac{\xi_2 E_0}{c^2\lambda^3} = \frac{\xi_2 N E_p}{\lambda^3 c^2} = \frac{\xi_2 N E_p E_g^3}{c^5 \hbar^3},$$

где ξ_2 — константа, то

$$E_g^2 = \frac{\hbar c^5}{\xi_2 G \sqrt{N^3}}, \qquad M_p^2 = \frac{\hbar c}{\xi_2 G \sqrt{N}}, \qquad (7.7)$$

что совпадает с (6.47) предыдущего параграфа при подстановке $\hbar$ из (6.51).

Эти вычисления не дают ничего нового, но контролируют прежние результаты с несколько иной точки зрения, согласуя оба подхода к решению поставленной задачи — исследованию гравитационного излучения элементарными частицами.

Пользуясь принципом неопределенности

$$\Delta E_g \Delta T \sim \hbar, \qquad (7.8)$$

находим время существования гравитона

$$\Delta T \sim \frac{\hbar}{\Delta E_g} = \frac{10^{-27}}{10^{-44}} \approx 10^{17} \text{ сек} \approx T, \qquad (7.9)$$

что свидетельствует о способности гравитона «пронизать» всю нашу Вселенную. Таким образом, с точки зрения нашей Вселенной гравитон может быть виртуальным, а с точки зрения нуклона — реальным. Следовательно, гравитон действенно реален. Радиус его взаимодействия соответствует размерам нашей Вселенной. Легко видеть, что квазистатические решения уравнения (7.3) можно записать в виде

$$\psi_0^0 = \frac{4GM_0}{rc^2} e^{-k_0 r}, \tag{7.10}$$

где $M_0 = E_0/c^2$, M_0 — масса нашей Вселенной, откуда вновь следует, что гравитационные взаимодействия распространяются на всю нашу Вселенную практически без затухания.

Подойдем теперь к проблеме гравитационного взаимодействия частиц, исходя из совершенно иных представлений. Мы допускаем, что нуклоны и электроны, как и вообще все частицы, могут выбрасывать вследствие флуктуаций энергии или ускорений определенные порции энергии, которые, взаимодействуя между собой, приводят к взаимодействиям частиц, их породивших. Будем пока считать в общем виде, что масса покоя таких порций энергии — гравитонов не равна нулю, а затем уже сделаем предельный переход к нулевой массе покоя. Истинную величину массы покоя гравитона мы определим ниже.

Идеализируем задачу и будем считать, что гравитоны, которые в нашем представлении являются ультрарелятивистскими частицами, поскольку скорость их движения близка к скорости света, а импульс пропорционален энергии, выбрасываются из элементарных частиц радиально и изотропно. На самом деле это не так, и в случае квадрупольного излучения и особенно в случае излучения из «экваториального» мезонного облака излучение будет неизотропно (см. ч. II, § 9). Однако можно считать, что излучение совокупности элементарных частиц на расстояниях, превышающих хотя бы на порядок их размера, будет изотропно. При выбросе гравитонов из мезонного облака тангенциальная составляющая скорости a_θ не равна нулю, однако поскольку вращательный момент сохраняется, то

$$a_\theta = a_{0\theta} \frac{r_0}{r}, \tag{7.11}$$

где $a_{0\theta}$ — начальное значение a_θ, r — текущее расстояние от центра частицы, r_0 — расстояние, с которого произошел выброс. Поэтому на расстояниях порядка $10 \div 20 r_0$ величиной a_θ можно пренебречь, а на больших расстояниях движение будет практически мало отличаться от радиального. Вблизи частиц движение гравитонов будет спиральным и в самом общем случае будет происходить вдоль линий двоякой кривизны.

Далее мы пренебрегаем влиянием электромагнитных полей на гравитоны, хотя оно должно иметь место, поскольку гравитоны могут нести заряд. Влияние этого фактора мы исследуем ниже.

Для рассмотрения радиального движения ультрарелятивистских частиц — гравитонов, излучаемых элементарными частицами, воспользуемся уравнением движения сплошной среды, пренебрегая диссипативными процессами и кривизной пространства, что для элементарных частиц вполне допустимо. Эти уравнения для адиабатических движений имеют вид

$$\frac{d(wu_i)}{ds} + \frac{\partial w}{\partial x^i} = T\frac{\partial \sigma}{\partial x^i}, \qquad \frac{\partial\left(\frac{u_k}{v}\right)}{\partial x^k} = 0, \tag{7.12}$$

$$\frac{d\sigma}{ds} = 0, \tag{7.13}$$

$$dw = T^0 d\sigma + v dp, \tag{7.14}$$

где σ — энтропия, T^0 — температура, w — теплосодержание. Здесь всего четыре независимых уравнения, первое уравнение этой системы при $i = 0$ (уравнение энергии) является следствием уравнений при $i = \alpha = 1, 2, 3$ (уравнения движения) и второго уравнения этой системы (уравнение неразрывности).

Для радиальных одноразмерных движений уравнения (7.12) и (7.13) принимают вид

$$\begin{gathered}
\frac{1}{\theta^2}\left(\frac{\partial a}{\partial t} + a\frac{\partial a}{\partial r}\right) = \omega^2\left(\frac{\partial \ln v}{\partial r} + \frac{a}{c^2}\frac{\partial \ln v}{\partial z}\right) + \frac{c^2}{w}\theta^2 T\frac{\partial \sigma}{\partial r}, \\
\frac{\partial \ln v}{\partial t} + a\frac{\partial \ln v}{\partial r} = \frac{1}{\theta^2}\left(\frac{\partial a}{\partial r} + \frac{a}{c^2}\frac{\partial a}{\partial t}\right) + \frac{Na}{r}, \\
\frac{\partial \sigma}{\partial t} + a\frac{\partial \sigma}{\partial r} = 0,
\end{gathered} \tag{7.15}$$

где $\theta^2 = 1 - \frac{a^2}{c^2}$, $N = 0, 1, 2$ для плоских, цилиндрических и сферических волн соответственно,

$$\frac{\omega^2}{c^2} = \left(\frac{\partial p}{\partial \varepsilon}\right)_\sigma = -\left(\frac{\partial \ln w}{\partial \ln v}\right)_\sigma, \tag{7.16}$$

где ω — скорость звука.

Поскольку газ, состоящий из гравитонов, движущихся со скоростями, близкими к скорости света, можно уподобить идеальному газу, то связь между давлением и удельным объемом в случае адиабатических движений можно аппроксимировать соотношением

$$pv^k = \sigma^*(\sigma), \tag{7.17}$$

где σ^* — некоторая функция энтропии. Заметим, что показатель адиабаты k, вообще говоря, не является отношением удельных теплоемкостей.

Очевидно, что, поскольку $w = pv + \rho vc^2 = pv + \varepsilon v$, то

$$dw = Td\sigma + vdp = pdv + vdp + vd\varepsilon + \varepsilon dv, \tag{7.18}$$

откуда имеем

$$Td\sigma = (p + \varepsilon)\, dv + vd\varepsilon. \tag{7.18}$$

Для адиабатических движений вдоль мировой линии $d\sigma = 0$

$$-d \ln v = \frac{d\varepsilon}{p+\varepsilon}. \tag{7.19}$$

Подставляя (7.16) в (7.19) и интегрируя, найдем

$$\varepsilon v - \varepsilon_0 v_0 = \frac{pv - p_0 v_0}{k-1}, \tag{7.20}$$

где ε_0, v_0, p_0 — некоторые начальные значения параметров ε, v, p.

Напишем (7.20) в виде

$$\varepsilon v = \frac{pv}{k-1} + \alpha c^2, \text{ где } \alpha c^2 = \varepsilon_0 v_0 - \frac{p_0 v_0}{k-1}.$$

Далее,

$$w = pv + \varepsilon v = pv + E = \frac{kpv}{k-1} + \alpha c^2 = \frac{k\sigma^*}{k-1} v^{1-k} + \alpha c^2,$$

где E — внутренняя энергия (на единицу полной массы, включая внутреннюю микроскопическую энергию).

Затем находим, что

$$\frac{\omega^2}{c^2} = -\frac{d \ln w}{d \ln v} = \frac{kpv}{\frac{k}{k-1} pv + \alpha c^2} = \frac{k\sigma^* v^{1-k}}{\frac{k}{k-1} \sigma^* v^{1-k} + \alpha c^2}. \tag{7.21}$$

В случае ультрарелятивистского газа $\alpha = 0$, поскольку

$$p = (k-1)\,\varepsilon, \tag{7.22}$$

при этом

$$\frac{\omega^2}{c^2} = k - 1. \tag{7.23}$$

В пределе $k = 4/3$, $p = \frac{1}{3}\varepsilon = \frac{1}{3}\rho c^2$, $\frac{\omega^2}{c^2} = \frac{1}{3}$. Однако пока мы будем решать задачу в общем виде, не предопределяя значения k.

Пусть $\frac{a}{c} = 1 - 2\Delta$, где $\Delta \ll 1$. Пренебрегая членами, содержащими Δ и Δ^2, придем к системе уравнений

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \ln \sqrt{\Delta}}{\partial \tau} + \frac{\partial \ln \sqrt{\Delta}}{\partial r} + \frac{\omega^2}{c^2}\left(\frac{\partial \ln v}{\partial \tau} + \frac{\partial \ln v}{\partial r}\right) = -\frac{4T}{w}\frac{\partial \sigma}{\partial r}\Delta, \\
&\frac{\partial \ln \sqrt{\Delta}}{\partial \tau} + \frac{\partial \ln \sqrt{\Delta}}{\partial r} + \frac{\partial \ln v}{\partial \tau} + \frac{\partial \ln v}{\partial r} = \frac{N}{r}, \\
&\frac{\partial \sigma^*}{\partial \tau} + \frac{\partial \sigma^*}{\partial r} = 0, \\
&\tau = ct.
\end{aligned} \tag{7.24}$$

Отсюда сразу находим, что

$$pv^k = \sigma^*(\sigma) = f_3(r - \tau). \tag{7.25}$$

Первое и второе уравнения системы (7.24) напишем теперь в виде

$$\frac{d \ln \sqrt{\Delta}}{\partial \tau} = \frac{d \ln w}{\partial \tau} = \frac{d \ln \theta}{d\tau}, \quad \frac{d \ln (v\theta)}{d\tau} = \frac{N}{r}\left(\frac{d}{d\tau} = \frac{\partial}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial r}\right),$$

откуда находим, что

$$\frac{w}{\theta} = f_1(r - \tau), \tag{7.26}$$

$$\frac{Br^N c}{v\theta} = \frac{Br^N a}{v\theta} = f_2(r - \tau), \tag{7.27}$$

где $B = 1,\ 2\pi,\ 4\pi$ для $N = 0, 1, 2$ соответственно.

Уравнения (7.26) и (7.27) описывают интеграл движения и уравнение неразрывности. Поскольку в самом общем случае $= \alpha c^2 + [k/(k-1)]\,pv$, то, исключая из (7.25) — (7.27) параметры v, θ, w, придем к уравнению

$$\alpha c^2 + \frac{k}{k-1} f_3^{1/k} p^{(k-1)/k} = \frac{p^{1/k}}{f_3^{1/k}} \frac{f_1}{f_2} Bcr^N. \tag{7.28}$$

В случае $\alpha = 0$ (ультрарелятивистский газ)

$$p = \frac{\psi_1(r - \tau)}{r^{kN/(2-k)}}; \text{ при } N = 2, p = \frac{\psi_1(r - \tau)}{r^{2k/(2-k)}}.$$

Сила, действующая на какую-либо замкнутую поверхность, $F \sim r^2 p \sim \psi_1 r^{-\frac{4(k-1)}{2-k}}$; в пределе при $k = 4/3$

$$p = \psi_1 r^{-4}, \quad F \sim \psi r^{-2}, \quad v = \psi_2 r^3, \qquad \theta = \frac{\psi_3}{r} = \frac{w}{w_0}. \tag{7.29}$$

Волновые функции f и ψ могут, например, иметь вид

$$f = f_0\left[1 + \xi \sin \omega\left(t - \frac{r - r_0}{c}\right)\right], \tag{7.30}$$

где ξ — амплитуда колебаний, r_0 — начальное значение r, с которого начинается излучение. При $r = r_0$, $f = f_0(1 + \xi \sin \omega t)$.

Очевидно, что всегда можно пользоваться средним значением $f = \bar{f}$ и считать, что $\bar{f}$ и $\bar{\psi}$ постоянны. Тогда (7.29) примет вид

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{r_0}{r}\right)^4, \qquad \frac{v}{v_0} = \left(\frac{r}{r_0}\right)^3, \qquad \frac{\theta}{\theta_0} = \frac{r_0}{r} = \frac{w}{w_0},$$
$$F = \frac{\text{const}}{r^2}. \tag{7.31}$$

Здесь p_0, v_0, θ_0, w_0 — начальные значения p, v, θ, w при $r = r_0$. В пределе при $r \to \infty$ $\theta \to 0$, $a \to c$ и газ становится «фотонным». Уравнение состояния фотонного газа такое же, как и для ультрарелятивистского:

$$p = \frac{1}{3}\rho c^2.$$

Так как $pv = \bar{R}T$, где $\bar{R}$ — некоторая константа, то как для ультрарелятивистского, так и для фотонного газов

$$\frac{T}{T_0} = \frac{r_0}{r}, \qquad p = \text{const}\cdot T^4, \tag{7.32}$$

т. е. имеет место уравнение Стефана — Больцмана.

Поскольку излучение энергии происходит по закону

$$-\dot{E} = -\frac{dE}{dt} = \alpha M_0 c^2 = 4\pi r_0^2 \rho_0 c^3, \tag{7.33}$$

где M_0 — масса излучающего тела, то

$$p_0 = \frac{\rho_0 c^2}{3} = \frac{\alpha M_0 c}{12\pi r_0^2} \tag{7.34}$$

и

$$p = \frac{\alpha M_0 c r_0^2}{12\pi r^4}. \tag{7.35}$$

Если из (7.34) и (7.35) исключить r_0, то

$$p = \frac{\alpha^2 M_0^2 c^2}{(12\pi)^2 p_0 r^4}. \tag{7.36}$$

Эти соотношения понадобятся нам сейчас для вычисления силы взаимодействия двух тел, излучающих ультрарелятивистские частицы — гравитоны.

Очевидно, что за время T_m число излученных одной частицей гравитонов

$$N_g^* \approx T_m. \tag{7.37}$$

Полное число гравитонов в пространстве будет

$$N_g = NT_m = T_m^3 = N^{3/2} \text{ (где } m_g c^2 \text{— энергия гравитона)} \tag{7.38}$$

К этому же соотношению легко прийти и из таких соображений.

Энергия гравитационного поля постоянна и равна $1/4$ от энергии частиц (в обобщенной фридмановской модели Вселенной). Поэтому по порядку величины

$$N_g m_g c^2 = N_g \frac{M_p c^2}{\sqrt{N}} \approx \frac{1}{4} N M_p c^2,$$

откуда

$$N_g \approx \frac{NM_p}{4m_g} \simeq \frac{1}{4} N^{3/2},$$

или же, что также очевидно,

$$N_g \approx \int N dT_m = \frac{1}{3} T_m^3 \sim \frac{1}{3} N^{3/2}.$$

Число гравитонов в единице объема

$$n_g = \frac{N_g}{V} = \frac{N\sqrt{N}}{V} = n_0 \sqrt{N} = \text{const},$$

где

$$n_0 = \frac{N}{V} = \frac{\omega^3}{c^3 T_m} \sim \frac{1}{r_0^3 T_m} = \text{const}.$$

Число нуклонов (или иных элементарных частиц) в единице объема

$$n_0 \approx \frac{1}{10^{-39}\cdot 10^{41}} \approx 10^{-2} \textit{ частиц/см}^3,$$

$$n_g \approx \frac{3}{4\pi r_0^3} \approx 10^{38} \textit{ частиц/см}^3.$$

Приблизительное число соударений (столкновений) гравитонов с гравитонами в 1 *см*^{3} за 1 *сек* $n_{g\text{ст}}$ вычисляется из соотношения

$$n_{g\text{ст}} = 2n_g^2\pi r_g^2 c \approx 10^{87} r_g^2.$$

Длина свободного пробега гравитонов

$$\lambda = \frac{1}{4\pi n_g r_g^2} \approx \frac{10^{-38}}{r_g^2},$$

где r_g — эффективный радиус гравитона. Если плотность гравитона соответствует плотности порождающей его частицы, то

$$\frac{4}{3}\pi\delta r_g^{*3} = \frac{4}{3}\pi\delta r_0^3 N^{-1/2},$$

откуда $\overset{*}{r}_g = r_0 N^{-1/6}$, где δ — плотность нуклона. В данное время $\overset{*}{r}_g = 10^{-13}\cdot 10^{-14} \simeq 10^{-27}$ *см*. При этом $\overset{*}{n}_{g\text{ст}} \approx 10^{33}$ *см*$^{-3}$*сек*$^{-1}$.

Если считать, что плотность гравитона соответствует средней плотности пространства ($\rho \approx 10^{-29}$ *г/см*^{3}), то размеры и длина свободного пробега гравитона соответствуют размерам нуклона ($r \approx 10^{-13}$ *см*) и не зависят от времени, при этом $n_{g\text{ст}} \approx 10^{61}$. Однако гравитон рождается при флуктуациях, когда $\Delta v_g = \dfrac{v_n}{\sqrt{N_g^*}}$, при этом $\rho_{\text{гр}} = \delta\sqrt{N_g^*}$ (см. ч. II, § 8) и

$$\frac{4}{3}\pi\delta r_g^3\sqrt{N_g^*} = \frac{4}{3}\frac{\pi\delta r_0^3}{\sqrt{N}},$$

откуда

$$v_g \approx r_g^3 = \frac{r_0^3}{N_g^{*3/2}} = \frac{r_0^3}{N^{3/4}}, \qquad r_g = \frac{r_0}{N^{1/4}},$$

$$n_{g\text{ст}} = \frac{2\pi n^2 c r_0^2}{N^{1/2}}, \qquad \lambda = \frac{\sqrt{N}}{4\pi n_g r_0^2}. \tag{7.39}$$

В настоящее время

$$r_g = 10^{-33}\ \textit{см},\ n_{g\text{ст}} = 10^{21}/\textit{см}^3\cdot\textit{сек},\ \lambda = 10^{28}\ \textit{см}.$$

При этом размеры флуктуации керна нуклона (электрона) будут

$$r_{\text{ф к}} = r_{\text{ок}}\sqrt[3]{\frac{\delta}{\rho_{\text{гр}}}} = \frac{r_{\text{ок}}}{\sqrt{N_g}}. \tag{7.40}$$

В настоящее время $r_{\text{ф,к}} = 10^{-21}$. Может быть, именно флуктуация сечения «керна» $\sim 10^{-42}$ *см*^{2} и задерживает нейтрино (см. ч. II, § 8). Заметим также, что средняя длина свободного пробега нуклонов в нашей Вселенной порядка 10^{28}, а число соударений гравитонов с нуклонами в 1 *см*^{3} за 1 *сек* порядка 10^{20}.

Очевидно, что даже при $r_g = 10^{-33}$ *см* число столкновений гравитонов между собой (10^{21}) таково, что обеспечивает их взаимодействия, которые можно считать упругими, поскольку свойства Бозе-газа, описывающие гравитонный газ (спин гравитона равен двум), отвечают как раз свойствам вполне упругого газа.

Сейчас мы рассматривали общий «гравитонный фон» нашей Вселенной. Допустим на время, что мы имеем всего одну частицу. Для описания свойств гравитонного газа выше мы уже получили соответствующие уравнения. К ним необходимо добавить, что число частиц $n_g/n_{0g} = (r_0/r)^3 = v_0/v$, причем для ультрарелятивистского газа

$$p = \frac{1}{4}\left(\frac{6\pi^2}{g}\right)^{1/3}\hbar c n_g^{4/3} = \frac{\rho c^2}{3} = \frac{R\overline{T}}{v} \approx \frac{3}{4}\hbar c n_g^{4/3}, \tag{7.41}$$

где $g = 2$ — статистический вес.

Для фотонного газа

$$n_g = 0{,}244\left(\frac{kT}{\hbar c}\right)^3 \approx \frac{1}{4}\left(\frac{kT}{\hbar c}\right)^3, \quad p = \frac{4\bar{\sigma}}{3c}T^4,$$

где $k = 1{,}38\cdot 10^{-16}$ *эрг/град* — постоянная Больцмана, $\bar{\sigma} = \frac{\pi^2 k^4}{60\hbar^3 c^2} = 5{,}67\cdot 10^{-5}$ *г/сек*$^{-3}\cdot$*град*$^{-4}$ — постоянная Стефана — Больцмана. Отсюда следует, что

$$p = \frac{\pi^2}{45}c\hbar\left(\frac{n_g}{0{,}244}\right)^{4/3} = 2c\hbar n_g^{4/3}. \tag{7.42}$$

При этом длина свободного пробега будет возрастать с расстоянием.

Допустим теперь, что мы имеем две неподвижные частицы, находящиеся в пустом пространстве. Пусть каждая из них испускает ультрарелятивистский газ. Уточним теперь уравнение состояния этого газа. Для одночастичного газа

$$p = \frac{nm}{3}\overline{\frac{a^2}{\sqrt{1-\frac{a^2}{c^2}}}}, \quad \rho c^2 = \varepsilon = nmc^2\overline{\frac{1}{\sqrt{1-\frac{a^2}{c^2}}}},$$

где черта означает среднее значение, a — «хаотическая» скорость движения частиц, nm — масса частиц в единице объема.

Отсюда имеем

$$p = \frac{\rho a^2}{3}f,$$

где

$$f = \left(\frac{a^2}{\theta}\right)\frac{\bar{\theta}}{a^2} \approx 1, \qquad \theta = \sqrt{1 - \frac{a^2}{c^2}}.$$

При $\frac{a}{c} = 1 - 2\Delta$

$$p = \frac{\rho c^2}{3} f(1 - \theta^2) = \frac{\rho c^2}{3} f_0,$$

где

$$f_0 = f(1 - 4\Delta).$$

При $\Delta \to 0$ $f_0 \to 1$, и мы придем к уравнению состояния, которым уже пользовались выше.

Очевидно, что гравитоны, испускаемые обеими частицами, будут взаимодействовать друг с другом и при этом, возможно, создавать взаимодействия обоих тел. Ничего не предрешая, легко догадаться, что сила взаимодействия будет меняться обратно пропорционально квадрату расстояния между телами, поскольку $F \sim sp \sim r^2 p$, $p \sim 1/r^4$. Далее, можно сообразить, что эта сила будет силой притяжения. Очевидно, что истечение газа из частиц будет происходить до тех пор, пока потоки интенсивности излучения — мощности или силы $pr^2 \sim 1/r^2$ — не уравновесятся. При этом истечение в пространство «вне тел» будет происходить до давления $p \to 0$, а в пространство между телами — до давления $p > 0$, поэтому количество движения, создаваемое газом за единицу времени, равно силе реакции, будет больше в пространстве вне тел, чем между ними. Эта реактивная сила стремится сблизить тела, ее и можно назвать силой притяжения.

Обозначая расстояние между телами, масса которых M_1 и M_2 ($M_2 \ll M_1$), через R, а расстояние до произвольной точки вне тел через r_1 и r_2 (для тел M_1 и M_2 соответственно M_1 справа, M_2 слева), придем к очевидному уравнению

$$r_1^2 = r_2^2 + R^2 - 2r_2 R \cos\varphi \cos\lambda, \tag{7.43}$$

причем ось x направлена от тела M_2 к телу M_1; φ и λ «широта» и «долгота» выбранной точки, отсчитываемые от тела M_2.

Поскольку расширение газа продолжается до тех пор, пока не будет выполняться условие

$$p_1 r_1^2 = \frac{M_1^2 c^2 \alpha_1^2}{(12\pi)^2 p_{10} r_1^2} = \frac{M_2 c^2 \alpha_2^2}{(12\pi)^2 p_{20} r_2^2}, \tag{7.44}$$

то, считая, что $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha \sim 1/T = \text{const}$ (так как α — космологическая величина и должна быть постоянной), придем к условию

$$\frac{M_1}{r_1 \sqrt{p_{10}}} = \frac{M_2}{r_2 \sqrt{p_{20}}}. \tag{7.45}$$

Исключая из (7.43) с помощью (7.45) величину r_1, придем к уравнению

$$\left(\frac{r_2}{R}\right)^2 (1 - \bar{a}) - 2\,\frac{r_2}{R}\cos\varphi\cos\lambda + 1 = 0,$$

где

$$\bar{a} = \frac{M_1^2}{M_2^2}\,\frac{p_{20}}{p_{10}}.$$

Отсюда

$$\frac{r_2}{R} = \frac{1}{(1-\bar{a})}\left(\cos\varphi\cos\lambda \pm \sqrt{\cos^2\varphi\cos^2\lambda + \bar{a} - 1}\right) = \\ = \frac{1}{\cos\varphi\cos\lambda \mp \sqrt{\cos^2\varphi\cos^2\lambda + \bar{a} - 1}}. \tag{7.46}$$

Для ультрарелятивистского газа при усреднении волновых функций $f\,(r - \tau)$ сохраняются следующие величины:

$$d\dot{E}_0 = \frac{dSac^2}{\theta v}, \qquad \frac{w}{\theta} = w_0,$$

где

$$\theta = \sqrt{1 - \frac{a^2}{c^2}}.$$

Отсюда следует, что

$$\frac{w_0}{c^2}\,d\dot{E} = \frac{dSa}{\theta^2}(p + \rho c^2). \tag{7.47}$$

При этом изменяющаяся величина силы

$$-dF = d\dot{I} = \frac{dS\,(p + \rho a^2)}{\theta^2} = \frac{w_0}{c^2}\,d\dot{E}_0\,\frac{p + \rho a^2}{(p + \rho c^2)\,a}, \tag{7.48}$$

где $dS = r^2\cos\varphi\,d\varphi\,d\lambda$ — элемент поверхности.

Поскольку

$$w_0 = p_0 v_0 + \rho_0 v_0 c^2 = \frac{4}{3}\,\rho_0 v_0 c^2,$$

то

$$\frac{w_0}{c^2} = \frac{4}{3}\,\rho_0 v_0 = \frac{4}{3}.$$

Далее, при $\frac{a}{c}=1-2\Delta$, где $\Delta \ll 1$, пренебрегая членами Δ^2 и меньшими, найдем, что

$$\frac{p+\rho a^2}{(p+\rho c^2)\,a}=\frac{1+\frac{3a^2}{c^2}}{c\cdot 4\,\frac{a}{c}}=\frac{1-\Delta}{c}=\frac{1}{c}\left(1-\frac{\theta^2}{4}\right)=$$

$$=\frac{1}{c}\left(1-\frac{1}{4}\sqrt{\frac{p}{p_0}}\right).$$

Поэтому

$$-dF=\frac{4}{3}\,\frac{d\dot{E}_0}{c}\left(1-\frac{1}{4}\sqrt{\frac{p}{p_0}}\right)=\frac{4}{3}\,\frac{d\dot{E}_0}{c}\left(1-\frac{1}{4}\,\frac{r_0^2}{r^2}\right) \qquad (7.49)$$

(мы ведем рассуждения для тела M_2).

В случае фотонного Бозе-газа, состоящего из частиц с массой покоя, равной нулю, будем иметь

$$-dF=\frac{1}{3c}\,(d\dot{E}_0-d\dot{E})=\frac{dSc^3}{3}\,(\rho_0-\rho)=\frac{dS_0\rho_0c^3}{3}\left(1-\frac{\rho}{\rho_0}\right)\frac{dS}{dS_0}.$$

Поскольку

$$\frac{\rho}{\rho_0}=\frac{p}{p_0}=\left(\frac{r_0}{r}\right)^4,\qquad \frac{dS}{dS_0}=\frac{r^2}{r_0^2},\qquad dE_0=dS_0\rho_0c^3,$$

то

$$-dF=\frac{d\dot{E}_0}{3c}\left(1-\frac{r_0^2}{r^2}\right). \qquad (7.50)$$

При интегрировании по любой поверхности в выражении (7.49)

$$dF=-\frac{4}{3}\,\frac{d\dot{E}_0}{c}+\frac{1}{3}\,\frac{d\dot{E}_0}{c}\,\frac{r_0^2}{r^2},$$

первый член справа дает тождественный нуль [то же будет и для (7.50)]. Поэтому в обоих случаях (ультрарелятивистский и фотонный газы)

$$d\Delta F=\frac{1}{3}\,\frac{d\dot{E}_0}{c}\,\frac{r_0^2}{r^2}. \qquad (7.51)$$

Проекция силы на ось x (сила притяжения)

$$dF_x=d\Delta F\cos\varphi\cos\lambda,\qquad \frac{d\dot{E}_0}{\dot{E}_0}=\frac{dS}{4\pi r^2}=\frac{\cos\varphi\,d\varphi\,d\lambda}{4\pi},$$

поэтому

$$dE_x=\frac{\dot{E}_0r_0^2\cos^2\varphi\cos\lambda\,d\varphi\,d\lambda}{12\pi cr^2}. \qquad (7.52)$$

Далее, так как

$$\dot{E}_0 = 4\pi r_0^2 \rho_0 c^3 = 12\pi r_0^2 p_0 c = \alpha M_2 c^2,$$

$$\frac{r_0^2}{r^2} = \frac{r_0^2}{r_2^2} = \frac{r_0^2}{R^2}\frac{R^2}{r_2^2} =$$

$$= \frac{r_0^2}{R^2}\left(\cos\varphi\cos\lambda \mp \sqrt{\cos^2\varphi\cos^2\lambda + \bar{a} - 1}\right)^2,$$

то (7.52) примет вид

$$dE_x = \frac{\alpha M_2 c r_0^2 \cos^2\varphi\cos\lambda\, d\varphi\, d\lambda}{12\pi R^2}(\cos\varphi\cos\lambda \mp$$

$$\mp \sqrt{\cos^2\varphi\cos^2\lambda + \bar{a} - 1}).$$

Заменяя

$$r_0^2 = \frac{E_0}{4\pi\rho_{02}c^3} = \frac{\alpha M_2}{4\pi\rho_{02}c}, \quad (\rho_0 = \rho_{02}),$$

окончательно находим, что

$$dF_x = \frac{\alpha^2 M_2^2 \cos^2\varphi\cos\lambda\, d\varphi\, d\lambda}{48\pi^2\rho_{02}R^2}(\cos\varphi\cos\lambda \mp$$

$$\mp \sqrt{\cos^2\varphi\cos^2\lambda + \bar{a} - 1})^2. \tag{7.53}$$

Полная сила будет

$$F_x = \frac{4\alpha^2 M_2^2}{48\pi^2\rho_{02}R^2}\bar{F}(\bar{a}), \tag{7.54}$$

где

$$\bar{F}(\bar{a}) = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\pi}\left(\cos\varphi\cos\lambda \mp \sqrt{\cos^2\varphi\cos^2\lambda + \bar{a} - 1}\right)^2 \times$$

$$\times \cos^2\varphi\cos^2\lambda\, d\varphi d\lambda =$$

$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\cos^2\varphi\cos^2\lambda + \bar{a} - 1}\cos^2\varphi\cos\lambda\, d\varphi\, d\lambda.$$

При $\bar{a} = 1$

$$\frac{r_2}{R} = \frac{1}{2\cos\varphi\cos\lambda},$$

$$\bar{F}(\bar{a}) = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\varphi\cos^3\lambda\, d\varphi\, d\lambda = \frac{\pi}{2}, \tag{7.55}$$

$$F_x = \frac{\alpha^2 M_2^2}{24\pi\rho_0 R^2},$$

В этом частном случае сразу можно убедиться в том, что сила взаимодействия между телами есть сила притяжения. В интервале $\pi \leqslant \lambda \leqslant \frac{\pi}{2}$ $\overline{F}(\bar{a}) = 0$, при $0 \leqslant \lambda \leqslant \frac{\pi}{2}$ $\overline{F}(\bar{a}) > 0$. Поскольку эти величины вычитаются из полного импульса, то и возникает сила притяжения.

При $\bar{a} \gg 0$

$$\overline{F}(\bar{a}) = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\bar{a}} \left[1 + \frac{1}{2\bar{a}} (\cos^2\varphi \cos^2\lambda - 1)\right] \times$$
$$\times \cos^3\varphi \cos^2\lambda \, d\varphi \, d\lambda = \frac{2}{3} \pi \sqrt{\bar{a}} \left(1 - \frac{1}{5\bar{a}}\right) =$$
$$= \frac{2}{3} \pi \frac{M_1}{M_2} \sqrt{\frac{p_{20}}{p_{10}}} \left(1 - \frac{M_2^2 p_{10}}{5 M_2^2 p_{20}}\right),$$

$$F_x = \frac{\alpha^2 M_1 M_2}{18\pi \rho_{02} R^2} \sqrt{\frac{p_{20}}{p_{10}}} \left(1 - \frac{M_2^2 p_{10}}{5 M_1^2 p_{20}}\right) =$$
$$= \frac{\alpha^2 M_1 M_2}{18\pi R^2 \sqrt{\rho_{01}\rho_{02}}} \left(1 - \frac{M_2^2 p_{10}}{5 M_1^2 p_{20}}\right). \qquad (7.56)$$

При $M_1 = M_2$

$$F_x = \frac{2}{45} \frac{\alpha^2 M_2^2}{\pi \rho_0 R^2} = \frac{16}{15} \frac{\alpha^2 M_2^2}{24\pi \rho_0 R^2}.$$

Отсюда следует, что асимптотическое соотношение (7.56) дает даже при $M_1 = M_2$ почти верный результат.

При $M_2 \ll M_1$ это соотношение будет точным. Очевидно, что более точная асимптотическая формула будет иметь вид

$$F_x = \frac{\alpha^2 M_1 M_2}{18\pi R^2 \sqrt{\rho_{01}\rho_{02}}} \left(1 - \frac{1}{4} \frac{M_2^2 p_{10}}{M_1^2 p_{20}}\right). \qquad (7.57)$$

Если взаимодействие гравитонов сопровождается потерями энергии или это взаимодействие неполное (неидеально упругое), то $F_x^* = \theta^* F_x$, где $\theta^* < 1$.

Поскольку закон тяготения Ньютона, который должен выполняться в рассматриваемом приближении, имеет вид

$$F = \frac{G M_1 M_2}{R^2}, \qquad (7.58)$$

то, сравнивая (7.57) и (7.58), находим

$$G = \frac{\theta^* \alpha^2}{18\pi \sqrt{\rho_{01}\rho_{02}}} \left(1 - \frac{1}{4} \frac{M_2^2}{M_1^2} \frac{p_{10}}{p_{20}}\right) = \frac{\theta_1^* \alpha^2}{24\pi \rho_{02}}, \qquad (7.59)$$

где

$$\theta_1^* = \frac{4}{3}\theta^* \sqrt{\frac{\rho_{02}}{\rho_{01}}}\left(1 - \frac{1}{4}\frac{M_2^2}{M_1^2}\frac{p_{10}}{p_{20}}\right).$$

Так как

$$r_{02}^2 = \frac{\alpha M_2}{4\pi c\rho_{02}}, \tag{7.60}$$

то из двух последних соотношений следует, что

$$\alpha = \frac{6GM_{1,2}}{\theta_1^* c r_{01,2}^2},\quad \rho_{01,2} = \frac{3GM_{1,2}^2}{2\pi\theta_1^* c^2 r_{01,2}^2},$$

$$p_{01,2} = \frac{GM_{1,2}^2}{2\pi\theta_1^* r_{01,2}^4}. \tag{7.61}$$

Поскольку $\alpha = \text{const} \simeq \frac{1}{T}$, то

$$\frac{M_1}{r_{01}^2} = \frac{M_2}{r_{02}^2} = \text{const}. \tag{7.62}$$

При этом

$$p_{01} = p_{02},\ \rho_{01} = \rho_{02},\ \theta_1^* = \frac{4}{3}\theta^*\left(1 - \frac{M_2^2}{M_1^2}\right).$$

Очевидно, что θ_1^* не должно зависеть от M_2/M_1, поэтому $\theta^* = \frac{3}{4}\theta_1^* \frac{1}{1 - \left(\frac{M_2}{2M_1}\right)^2}$ зависит от M_2/M_1 и меняется в пределах

$$\theta^* = \frac{3}{4}\theta_1^*\left(\frac{M_2}{M_1} = 0\right),\ \theta^* = \theta_1^*\left(\frac{M_2}{M_1} = 1\right).$$

Интересно отметить, что действительно и для нуклонов и для нашей Вселенной $\frac{M_p}{r_0^2} = \frac{M_p N}{R^2} = \text{const} = 10^2$, поскольку $R = \sqrt{N} r_0 = T_m r_0$. Рассматривая квадрупольное излучение или флуктуационные излучения элементарных частиц, мы пришли к соотношению [см. ч. II, (6.44)]

$$\alpha = \xi_1 \frac{GM_p^2}{cr^2} \approx \frac{6\cdot GM_p^2}{10^2 cr^2}, \tag{7.63}$$

что совпадает с (7.61) при $\theta_1^* = 1$ и при $r_{02} = 10r$, где r — «истинные» размеры нуклона порядка 10^{-13} *см*.

Наибольший интерес представляет, конечно, исследование взаимодействия двух элементарных частиц.

Для двух нуклонов имеем при $\theta_1^* = 1$

$$\alpha = \frac{6GM_p}{cr_{02}^2}. \tag{7.64}$$

При $\alpha = 5 \cdot 10^{-18}$ *сек*$^{-1}$ находим, что $r_{02} = 3 \cdot 10^{-12}$ *см.*

Для двух электронов при таком же значении α будем иметь $r_{02} = \frac{1}{2} \cdot 10^{-13}$ *см.* В обоих случаях $\rho_0 = 5 \cdot 10^{-30}$ *г/см*^{3},

$$p_0 = \frac{5}{3} \cdot 10^{-9} \text{ дин/см}^2.$$

Здесь r_{02} — эффективные размеры частиц, отвечающие расстоянию, начиная с которого происходит «срыв» гравитонов. Эти расстояния соизмеримы со стандартными размерами самих частиц, причем для нуклона это расстояние несколько превышает его радиус, что естественно, поскольку флуктуационные процессы в протяженном мезонном облаке могут разыгрываться на некотором расстоянии от «поверхности нуклона».

Итак, мы получили весьма важный результат. Взаимодействие гравитонов, испускаемых частицами, приводит к взаимодействию самих частиц по закону Ньютона в первом приближении при неподвижных частицах, что полностью согласуется с развитой выше теорией квадрупольного (мультипольного) флуктуационного излучения.

В случае взаимодействия двух сложных тел, состоящих из многих элементарных частиц, соотношения (7.57) и (7.61) также дают закон Ньютона. Однако при этом $r_{01,2}$ будет значительно отличаться от размеров тел и от эффективных размеров тела $r_{0,\text{эфф}}$, определяемых следующим образом:

$$\frac{4}{3}\pi r_{0,\,\text{эфф}}^3 \delta = \frac{4}{3}\pi r_0^3 \delta N,$$

где δ — плотность элементарных частиц (нуклонов), откуда $r_{0,\text{эфф}} = r_0 N^{1/3}$. (Здесь мы считаем, что все тело спрессовано до нуклонной плотности $\delta \approx 10^{14}$ *г/см*^{3}.)

В самом деле,

$$\alpha = \text{const} = \frac{6GM_pN}{cr_{02}^2} = \frac{4\pi}{3}\frac{6Gr_0^3N\delta}{cr_{02}^2},$$

откуда

$$\frac{r_{02}}{r_0} = \left(\frac{8\pi G\delta r_0 N}{c\alpha}\right)^{1/2}.$$

В системе Солнце — Земля для Земли $r_{0,\,эфф} = 10^4$ *см*, $r_{02} = 10^{14}$ *см*, для Солнца $r_{0,\,эфф} = 10^6$ *см*, $r_{02} = 10^{17}$ *см*. Для нуклона и нашей Вселенной r_{02} на порядок больше размеров нуклона.

Поскольку для нашей Вселенной $\frac{GM}{Rc^2} \approx 1$, то эффективный радиус взаимодействия всех частиц, естественно, стремится к размерам нашей Вселенной. При $r_{02} = r_0$ для нуклона $\rho_0 = \frac{5}{3} 10^{-27}$ *г/см*^{3}, при $r_{02} = 10 r_0$ $\rho_0 = \frac{5}{3} 10^{-29}$ *г/см*^{3}, что равно средней плотности нашей Вселенной. В общем случае $r_{02} = 10^{-12} \sqrt{N}$. При $N = 10^{24}$ (тело массой 1 *г*) $r_{02} = 1$ *см*, что также соответствует размерам тела (при плотности порядка 1 *г/см*^{3}).

Такое большое расстояние $r_{02} \approx 10^{17}$ *см* для системы Солнце — Земля означает, что взаимодействие гравитонов в случае двух массивных тел происходит на расстояниях, сравнимых с межзвездными (10^{18} *см*); они должны многократно обмениваться импульсами, прежде чем их средние энергии выровнятся.

Если рассматривать непосредственно притяжение Земли к Солнцу, считая, что сила притяжения не может быть больше, чем $M_з \alpha c$, то найдем, что ускорение Земли будет не больше, чем 10^{-7} *см/сек*^{2}. Однако истинное ускорение Земли около 0,6 *см/сек*^{2}. Такое же ускорение будет иметь каждый нуклон, входящий в состав Земли. Эта разница почти в семь порядков может быть объяснена многократным обменом импульсами между гравитонами нуклона, входящего в состав Земли, и гравитонами, излучаемыми из частиц, составляющих Солнце, причем эти взаимодействия разыгрываются на значительных расстояниях, сравнимых с межзвездными расстояниями.

Закон сохранения импульса надо всегда понимать как сохранение полного импульса или количества движения. В данном случае полное количество движения тел, испускающих гравитоны, и самих гравитонов равно нулю, поскольку в этой системе действуют только внутренние силы.

Одностороннее количество движения может возрасти по мере увеличения массы (энергии) частиц, вовлеченных в движение.

Это обстоятельство фактически связано с так называемым принципом Маха.

Приведем его краткое изложение, воспользовавшись очень убедительными рассуждениями Дике: «Большинство физиков долгое время полагало, что пустое космическое пространство не имеет никакой структуры. Предполагалось, что математические понятия точек, линий, геодезические понятия и т. д. не имеют физической аналогии в совершенно пустом пространстве. Физические концепции должны ассоциироваться только с физическими объектами. По этой причине принималось, что геометрические свойства пространства должны определяться непосредственно материей космического пространства.

Уравнения общей теории относительности являются такими, что геометрия будет определена только после того, как будут определены граничные условия, и до сих пор все еще невозможно сформулировать вполне удовлетворительные граничные условия. Такие граничные условия должны были бы, например, исключать решения без наличия материи в пространстве.

Мах много лет назад и еще раньше епископ Беркли заключили, что с точки зрения относительности и бесструктурного пространства вполне реальные и обычные силы инерции, которые действуют на гироскоп во вращающейся лаборатории, могут считаться возникающими при вращении отдаленной материи вокруг стационарной лаборатории. Таким образом, вообще говоря, силы инерции могут интерпретироваться как взаимодействие гравитационного поля, создаваемого отдаленной ускоряющейся материей, и поля, создаваемого материей в лаборатории. Точка зрения Маха только частично отражена в общей теории относительности.

Имеется существенное различие между точкой зрения Маха и точкой зрения Эйнштейна. В общей теории относительности постоянная гравитация является универсальной постоянной, которая определяет напряженность гравитационного поля и движение гравитирующей материи. По Маху, однако, ускорения определяются распределением материи безотносительно к напряженности поля. Таким образом, с точки зрения Маха, Земля, хотя она и имеет направленное к Солнцу ускорение, если рассматривать ее в системе координат, относительно которой Земля покоится, будет подвергаться действию двух уравновешивающихся гравитационных сил: гравитационного притяжения Солнца и гравитационного притяжения отдаленной материи. Если обе силы удваиваются в результате общего удвоения всех гравитационных сил, то ускорение не изменяется. Таким образом, ускорение зависит только от распределения массы.

Для упрощенной модели Вселенной нетрудно получить выражение для ускорения Земли по направлению к Солнцу. Предположим, что отдаленная материя во Вселенной имеет форму полой сферической оболочки массы M_0 и радиуса R (и то и другое измеряется в атомных единицах) и что Солнце имеет массу $M_\odot \ll M_0$ и находится в центре сферы. Земля отдалена от Солнца на расстояние $r \ll R$. Ускорение Земли по направлению к Солнцу пропорционально $M_\odot/r$; принимается также, что оно зависит от M_0, R и c (скорость света, с которой, как предполагается, распространяются гравитационные волны).

Общее выражение для ускорения, совместимое с элементарными соотношениями размерностей, будет

$$g = \gamma \frac{M_\odot}{r^2} \frac{Rc^2}{M_0},$$

где γ — безразмерная константа, которая может быть по порядку величины принята близкой к единице. По Ньютону, ускорение может быть записано как

$$g = \frac{GM_\odot}{r^2},$$

где G — постоянная тяготения. Сопоставление этих равенств дает

$$GM/rc^2 = \gamma.$$

Это предполагает, что G является не «универсальной постоянной», а функцией M_0/R. Здесь G характеризует поле, определяемое распределением отдаленной материи. Последнее равенство предполагает, что для статистического распределения материи локальное значение G дается выражением

$$G^{-1} = \gamma^{-1} \int \frac{\rho dV}{rc^2},$$

где ρ — плотность материи. Если эта интерпретация принципа Маха правильная, то доля G^{-1}, обусловленная наличием Солнца, на расстоянии орбиты Земли будет порядка 10^{-8}.

В действительности Вселенная представляет собой не громадную сферическую оболочку, а более или менее равномерное распределение массы, отдельные части которой разбегаются одна относительно другой (расширяющаяся Вселенная). Вследствие эффекта Допплера свет, приходящий из отдаленных частей

Вселенной, испытывает покраснение. На определенном расстоянии электромагнитные сигналы поступают только от ограниченной части Вселенной, которая в целом, возможно, бесконечна. Если гравитационные волны распространяются подобным образом, то силы инерции следует относить к этой ограниченной пределами видимости части Вселенной. Величины M_0 и R в этих уравнениях можно интерпретировать как массу и радиус этой видимой Вселенной, а в последнем уравнении ρ может быть определено как «эффективная» плотность. В общем случае вследствие движения отдаленной материи обычно ρ было бы функцией r» *.

В наших расчетах мы имели такое же соотношение между вычисленной силой притяжения Солнца и наблюдаемой непосредственно. Вычисляемая сила в 10^{-7} раз оказалась меньше наблюдаемой. Это расхождение ликвидируется постулированием справедливости принципа Маха.

Следует еще обратить внимание на то, что принцип Маха лишний раз подтверждает необходимость введения и общей фоновой кривизны R_0 (кривизны Метагалактики) и локальной $R_л$ (см. ч. II, § 2).

В принципе было бы необходимо для системы и тел ввести n величин кривизны ($R_п$), однако в качестве очень хорошего приближения достаточно, вводя только две кривизны, как бы решать частную задачу «трех тел» в общей теории относительности. Величина G при этом зависит в основном от общей кривизны R_0 и слабо — от локальной, что делает возможным некоторую экспериментальную проверку этой зависимости.

В качестве примера рассмотрим теперь задачу о расширении фотонного газа внутри сферического поршня массы $M_п$. Пусть начальный радиус сферы, заполненный фотонным газом, есть l_0; тогда в каждый момент времени будет иметь место соотношение

$$M_п = \frac{d}{dt}\frac{v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{M_п \frac{dr}{dt}}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}} = Sp = 4\pi l^2 (k-1)\rho c^2,$$

где $S = 4\pi l^2$, l — текущий радиус, $k = \frac{4}{3}$, $\rho = \rho_0\left(\frac{l_0}{l}\right)^4$ — плотность фотонного газа, ρ_0 — начальная плотность, v — скорость движения поршня.

* Р. Х. Дике. В книге «Наука в космосе», ч. II, гл. 3, Изд-во «Наука», 1964.

Поскольку $\frac{dv}{dt} = \frac{1}{2}\frac{dv^2}{dl}$, будем иметь

$$\frac{M_п}{2}\frac{d\frac{v^2}{c^2}}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}} = \frac{4\pi}{3}\rho_0\frac{l_0^4}{l^2}dl.$$

Интегрируя при условии $l = l_0$, $v = 0$, придем к выражению

$$M_п c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}-1\right) = \frac{4}{3}\pi\rho_0 l_0^3 c^2\left(1-\frac{l_0}{l}\right) = E_п\left(1-\frac{l_0}{l}\right),$$

где $E_п = \frac{4}{3}\pi\rho_0 l^3 c^2$ — начальная энергия фотонного газа. Количество движения, которое приобретает поршень, будет

$$I = \frac{M_п v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \sqrt{2M_п E_п\left(1-\frac{l_0}{l}\right)\left[1+\frac{E_п}{2M_п c^2}\left(1-\frac{l_0}{l}\right)\right]}.$$

Поскольку начальное количество движения $I_п = \frac{E_п}{c}$, то

$$\frac{I}{I_п} = \sqrt{\frac{2M_п c^2}{E_п}\left(1-\frac{l_0}{l}\right)\left(1+\frac{E_п}{2M_п c^2}\left(1-\frac{l_0}{l}\right)\right)} = \frac{\dot{I}}{\dot{I}_п}.$$

В пределе при $l \to \infty$

$$\frac{I}{I_0} = \sqrt{\frac{2M_п c^2}{E_п}} = \sqrt{2\frac{E_{п,\,н}}{E_п}} = \frac{\dot{I}}{\dot{I}_0},$$

где $E_{п,\,н}$ — энергия покоя поршня. Очевидно, что отношение I/I_0 может быть очень велико в случае относительно тяжелого поршня.

В случае взаимодействия полей, поскольку масса покоя гравитонов $m_g \neq 0$, но очень мала, импульс I будет возрастать пропорционально количеству энергии $E_п$ взаимодействующих полей: $I = E_п/c$.

В рассматриваемом случае взаимодействия двух макроскопических тел импульс отдачи, например, тела с массой $M_2 < M_1$, равный силе тяготения, будет обусловлен, во-первых, взаимодействием гравитационных волн, идущих от тела с массой M_2 и тела с массой M_1, и, во-вторых, взаимодействием элементарного импульса отдачи с самим телом за одну пульсацию. При этом мы предполагаем, что тело хотя бы частично отражает импульс гравитационных волн, т. е. сами волны.

Поскольку непосредственный импульс отдачи можно написать в виде $-\dot{I}_{1,2}=\bar{\beta}_1 \alpha M_2 c$, где $\bar{\beta}_1<1$ характеризует именно ту часть секундного импульса, которая сообщает телу реактивную силу, то, учитывая взаимодействие с гравитационными волнами, идущими от тела M_1, будем иметь силу отдачи

$$-\dot{I}_{2,2}=-\bar{\beta}_2 \dot{I}_{1,2}\frac{\dot{E}_1}{\dot{E}_2}=-\bar{\beta}_2 \dot{I}_{1,2}\frac{M_1}{M_2}=\bar{\beta}_1\bar{\beta}_2 M_1 \alpha c.$$

Очевидно, что $\bar{\beta}_2=\bar{\beta}_0\frac{M_2}{4\pi r^2}$, где коэффициент $\bar{\beta}_0$ показывает, какая в среднем часть потока массы αM_2 взаимодействует на площадке в 1 $см^2$ с потоком массы αM_1. Таким образом, последнее соотношение можно написать в виде

$$-\dot{I}_{2,2}=\bar{\beta}_1\bar{\beta}_0\frac{\alpha c M_1 M_2}{4\pi r^2}.$$

Взаимодействие поля с телом массы M_2 (и аналогично с другими телами) можно представить следующим образом. При взаимодействии полей (которые являются нелинейными и, следовательно, точно не суперпозируют) гравитоны меньших энергий или волны меньших энергий, отражаясь от волн бо́льших энергий, бегут обратно к телу и частично от него отражаются. Этот процесс может, затухая, происходить многократно, что повышает величину потока импульса.

Полный поток импульса определяется соотношением

$$-\dot{I}_{3,2}=-\bar{\beta}_3\dot{I}_{2,2}\sqrt{\frac{2E_п}{E_{02}}}=-\bar{\beta}_3\dot{\bar{I}}_{2,2}\sqrt{\frac{2\omega_0}{\alpha}}=$$
$$=\frac{\bar{\beta}_1\bar{\beta}_3\bar{\beta}_0}{4\pi}\sqrt{2\alpha\omega_0 c}\,\frac{M_1 M_2}{r^2}.$$

Здесь $\bar{\beta}_3<1$ показывает, какая часть энергии волн отражается от тела. Приравнивая

$$-\dot{I}_{1,2}=F=\frac{GM_1M_2}{r^2},$$

найдем

$$\frac{\bar{\beta}_1\bar{\beta}_3\bar{\beta}_0}{4\pi}c\sqrt{2\alpha\omega_0}=G.$$

Поскольку $\alpha\simeq 5\cdot 10^{-18}$, $\omega_0\approx\frac{1}{2}10^{24}$, то $\bar{\beta}_1$, $\bar{\beta}_3$, $\bar{\beta}_0=2\cdot 10^{-20}$ $см^2/г$.

Можно полагать $\bar{\beta}_1\simeq 10^{-2}\div 10^{-3}$, $\bar{\beta}_0={}^1/_2$, тогда, например, для случая Земля — Солнце $\bar{\beta}_2={}^1/_2$, $\bar{\beta}_3=10^{-17}\div 10^{-18}$, т. е. эта величина очень мала и, следовательно, мал коэффициент отражения гравитационных волн от макроскопических тел. Действительно, учитывая взаимодействие потоков гравитонов между собой и с макроскопическими телами, можно понять, почему получается необходимая сила притяжения. (В случае относительно малых расстояний между телами величина $\bar{\beta}_2$ может быть значительно больше, чем только что вычисленная.) Совершенно аналогичные рассуждения и соотношения будут иметь место и для тела массы M_1.

В реальном случае все тела находятся в пространстве, заполненном средой, электромагнитным и гравитационным излучением. Взаимодействие тел с излучением (и вообще со средой, заполняющей пространство) можно оценить следующим образом:

$$-\dot{I}_{4,2} = F = -\bar{\beta}_4 \dot{I}_{3,2},$$

где $\bar{\beta}_4 > 1$, в случае взаимодействия только гравитационных полей (другими взаимодействиями, очевидно, можно пренебречь) $\beta_4 \sim \varepsilon_{04}$ — плотность энергии общего поля.

Элементарные частицы могут не только испускать, но и поглощать гравитационные волны. Поглощаемая энергия при взаимодействии ее с телом мала по сравнению с $\dot{E}_g$ и определяется соотношением

$$\frac{d\dot{E}^*}{dt} = \dot{E}^* = \frac{1}{2}(\dot{\psi}_{22}\ddot{D}_{22} + \dot{f}_{23}\ddot{D}_{23}),$$

что в рассматриваемом случае дает нуль. В других, более общих случаях величина $\dot{E}^*$ не может превышать значения, которое определяется формулой

$$\dot{E}^* = \frac{6Gm^2\omega}{r}\left(\frac{r_0\omega}{c}\right)^4.$$

Сравнивая в этом случае $\dot{E}^*$ и $\dot{E}_g$, найдем

$$\frac{\dot{E}^*}{\dot{E}_g} = -\frac{15}{16}\frac{r_0}{r}\left(\frac{c}{r_0\omega_0}\right).$$

При расстояниях между телами порядка $10^{-7} \div 10^{-8}$ *см* поглощение энергии не будет превышать $10^{-5} \div 10^{-6}$, т. е. оно весьма незначительно, причем это поглощение нельзя обнаружить, поскольку оно автоматически входит в величину G.

В общем случае можно считать, что гравитационное взаимодействие между телами обусловлено не только испусканием, но и поглощением гравитационных волн (гравитонов). Это несколько увеличивает силу взаимодействия, и поэтому результирующая величина α несколько уменьшается. Такое уменьшение, видимо, не может быть сколько-нибудь ощутимо. При полном балансе испускания и поглощения гравитационных волн (при виртуальном обмене) взаимодействия будут отсутствовать. Необходимо только, чтобы испускание превышало поглощение, тогда все предыдущие рассуждения будут справедливы с точностью до фактора $\bar{\beta}_5 < 1$, т. е. $F = -\bar{\beta}_5 I_{4,2}$. Взаимодействие потоков гравитонов, испускаемых частицами, с общим фоном и между собой будет происходить до тех пор, пока давление и потоки энергии не выровняются. Таким образом, эти рассуждения снова подтверждают справедливость принципа Маха, а также нашей модели гравитационного взаимодействия.

Следует отметить, что закон $p \sim 1/r^4$ при истечении среды может быть получен в двух и только в двух случаях. Первый случай ультрарелятивистского или фотонного газа, подчиняющихся уравнению $p = {}^1/_3 \rho c^2$, мы только что рассмотрели; второй случай — это колебание несжимаемой жидкости, когда $\rho = \rho_0 = \mathrm{const}$.

В самом деле, поскольку имеет место уравнение Бернулли $\Delta p = -\frac{\rho_0 u^2}{2}$, а для сферических волн $u = \frac{f(t)}{r^2}$, то $\overline{\Delta p} = -\frac{\rho_0 \overline{u^2}}{2} = -\frac{\rho_0 \overline{f^2}}{2r^4}$, откуда $\overline{F} \sim \overline{\Delta p} r^2 \sim \frac{1}{r^2}$.

Этим обстоятельством в свое время воспользовались такие известные ученые, как Бьеркнис и Жуковский и многие другие теоретики-гидродинамики, для модельного описания процессов тяготения в колеблющейся несжимаемой жидкости. Дальше всех в этом отношении пошел известный ученый в области небесной механики — Савченко. В 1944 г. он опубликовал исследования, где, по-видимому, впервые (во всяком случае, среди советских ученых) не только рассмотрел, как это делали и до него, ньютонову силу взаимодействия между двумя пульсирующими частицами, погруженными в несжимаемую жидкость, но и определил массу гравитона порядка 10^{-65} *г*, что прекрасно согласуется с нашими исследованиями.

Рассматривая силы гравитации, как архимедовы силы, которые стремятся вытолкнуть пульсирующие тела из жидкости, Савченко приходит к соотношению $F = \frac{GM_1M_2}{r^2}$, где $G = \frac{\omega^2}{6\pi\rho_0}$, ρ_0 — плотность среды во Вселенной (он полагает ее равной $2 \cdot 10^{-28}$ *г/см*^{3}), ω — круговая частота пульсаций. Савченко полагает, что $\omega = 2\pi/T$, где T — возраст Вселенной порядка $\approx 4 \cdot 10^{17}$ *сек*, откуда $\omega = \frac{3}{2} 10^{-17}$ *сек*$^{-1}$, $G = \frac{2}{3} \cdot 10^{-7}$ *см*^{3}/*г·сек*^{2}, т. е. он получает правильное значение гравитационной постоянной G, близкое к найденному нами,

$$G = \frac{\alpha^2}{24\pi\rho_0}.$$

Давление среды во Вселенной Савченко вычисляет из соотношения $p_0 = \frac{1}{3}\rho_0 c^2$, при этом $p_0 = 10^{-7}$ *дин/см*^{2}. Далее он впервые получает массу гравитона, считая, что $m_g = \frac{4}{3}\pi r_0^3 \rho_0 \approx$ $\approx 10^{-65}$ *г*, принимая r_0 для гравитона равным r_0 для нуклона. Затем он использует квантовое соотношение $\hbar\omega = m_g c^2$, что контролирует значение ω — частоту излучения Вселенной.

Эти соображения Савченко представляются нам весьма существенными, и формализм, развитый нами в этом разделе, во многом обязан работе Савченко.

Любопытно, что концепция несжимаемой жидкости, совершенно «нелепая» с первого взгляда в применении к полям и среде, заполняющей пространство, дает все же численные результаты, близкие к действительным. Это связано с тем, что изменения плотности среды за счет флуктуации весьма малы, и учет сжимаемости среды и полей не вносит существенных изменений в получаемые результаты.

В самом деле, исходя из общих уравнений релятивистских движений газа, обладающих центральной симметрией [формула (7.15), ч. II], при $\frac{u}{c} \ll 1$ легко прийти к таким уравнениям:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{\rho + p/c^2}\frac{\partial p}{\partial r} = 0, \quad -\left(\frac{\partial \ln v}{\partial t} + u\frac{\partial \ln v}{\partial r}\right) + \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{Nu}{r} = 0,$$

где в данном случае $N=2$. Для «фотонного» газа $p = (k-1)\rho c^2 = \frac{1}{3}\rho c^2 = Av^{-k}$, поэтому величина $\frac{1}{\rho + p/c^2} = \frac{1}{k\rho} = \frac{3}{4\rho}$.

Поскольку

$$v = v_0\left(1 + \frac{\Delta v}{v_0}\right), \quad p = p_0\left(1 + \frac{\Delta p}{p_0}\right),$$

$$\frac{dp}{d\rho} = (k - 1)\, c^2 = a_0^2 = \frac{p_0}{\rho_0}$$

(где $a_0 = \text{const}$ — скорость звука в «фотонном» газе)

$$-d \ln v = \frac{1}{k}\, d \ln p = -\frac{d\Delta p}{k p_0},$$

то придем к уравнениям

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{k\rho_0}\frac{\partial \Delta p}{\partial r} = 0, \quad \frac{1}{k\rho_0 a_0^2}\left(\frac{\partial \Delta p}{\partial t} + u\frac{\partial \Delta p}{\partial r}\right) + \\ + \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{2u}{r} = 0.$$

Сделаем теперь оценки порядка величин, входящих в эти уравнения

$$-\Delta v/v_0 \simeq \Delta p/p_0 = 1/T_m = 10^{-40},$$

поскольку изменение объема связано с флуктуациями. Далее очевидно, что

$$\frac{u}{c} \simeq \frac{\Delta p}{p_0} \simeq 10^{-40},$$

так как $\Delta r/r_0 = 10^{-40} = \dfrac{\Delta r}{t^* r_0/t^*} = \dfrac{u}{c}$, где $t^* = 10^{-24}$ *сек* — характерное время одной «пульсации» нуклона.

Вводя потенциал скорости $\dfrac{\partial \varphi}{\partial r} = u$ и пренебрегая членами $u\dfrac{\partial u}{\partial r}$, $u\dfrac{\partial \Delta p}{\partial r}$, окончательно придем к уравнениям

$$-\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{\Delta p}{k\rho_0}, \qquad -\frac{1}{k\rho_0 a_0^2}\frac{\partial \Delta p}{\partial t} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{2\partial \varphi}{r \partial r}.$$

Исключая Δp, найдем, что потенциал φ удовлетворяет уравнению

$$\Box \varphi = -\frac{1}{a_0^2}\frac{\partial^2 (\varphi r)}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 (\varphi r)}{\partial r^2} = 0,$$

откуда

$$\varphi = \frac{[F_1 (r - a_0 t) + F_2 (r + a_0 t)]\, a_0 r_0}{r},$$

$$\Delta p = \frac{4}{3}\rho_0 a_0^2 \frac{r_0}{r}\,[F'(r - a_0 t) - F_2' (r + a_0 t)].$$

Мы приходим к результату Савченко * с той только разницей, что в случае несжимаемой жидкости $\Delta p = -\rho_0 \frac{\partial\varphi}{\partial t}$, в нашем случае $\Delta p = -\frac{4}{3}\rho_0 \frac{\partial\varphi}{\partial t} = -k\rho_0 \frac{\partial\varphi}{\partial t}$. У Савченко $G^* = \frac{\alpha^2}{6\pi\rho_0}$, в нашем случае $G^* = \frac{2\alpha^2}{9\pi\rho_0}$, что по порядку величины совпадает с величиной G, найденной для потока гравитонов:

$$G = \frac{\alpha^2}{24\pi\rho_0} \text{ [(7.59), ч. II)]}, \quad G^* = \frac{16}{3} G.$$

Разница заключается в том, что излучение гравитонов сопровождается поперечными гравитационными волнами, распространяющимися со скоростью света. Здесь же мы имеем дело со «звуковыми» продольными волнами (фононами), распространяющимися со скоростью звука $a_0 = (\sqrt{3}/3)\, c$. Это обстоятельство аналогично «альфвеновским продольным волнам», сопровождающим электромагнитное излучение в плазме.

Можно полагать, таким образом, что гравитационное взаимодействие передается и поперечными и продольными волнами и установление какого-либо режима движения в переменном гравитационном поле происходит не сразу, а в течение некоторого интервала времени, протекающего между проходом первой гравитационной волны и «звуком». По-видимому, звуковые гравитационные волны будет легче обнаружить на опыте, чем чисто гравитационные. Снова отметим большую заслугу Савченко в установлении гидродинамической модели гравитации. Гравионы, видимо, легче обнаружить, чем сами гравитоны.

Поскольку нуклоны теряют свою энергию на гравитационном излучении, то их энергия падает. Вычисления показывают, что $E_p \sim \hbar \sim e^2 \sim T_m^{-2}$, $G \sim T_m$. Постоянная тонкой структуры и боровские квантовые условия при этом не изменятся.

В описании взаимодействия частиц с помощью гравитонов помимо того, что мы всюду пользовались разумным уравнением состояния $p = {}^1/_3\rho c^2$, мы также использовали закон сохранения энергии, что дало лишнее уравнение, связывающее эффективный радиус частиц с остальными величинами.

Важно еще подчеркнуть, что данная концепция без дополнительных гипотез уже позволяет установить связь между G и $\hbar$.

---

* К. Н. Савченко. К вопросу о теории тяготения. Изв. Астр. обс. Одесского ун-та, **2**, вып. 1, 1949.

В самом деле (приближенно), поскольку

$$G = \frac{\alpha^2}{24\pi\rho_0}, \qquad 2\pi\hbar\alpha \simeq m_g c^2,$$

то

$$\frac{G\hbar^2}{m_g^2 c^4} \approx \frac{1}{96\pi^3\rho_0} \approx \frac{r_0^3}{72\pi^2 m_g}.$$

В развитой выше общей концепции мы, задавая три размерные константы и безразмерное переменное число частиц, находили все основные величины и тем самым устанавливали между ними единственно возможные связи. Данное соотношение является частным случаем этих связей

$$\frac{G\hbar^2}{m_g c^4} = \frac{r_0^3}{72\pi^2} = \text{const}, \qquad \frac{G\hbar^2}{m_g} = \text{const}.$$

Отметим также, что отношение плотностей элементарных частиц (нуклонов) и Вселенной $\frac{\delta}{\rho_0} = \sqrt{N} = T_m$. В самом деле,

$$\delta = \frac{3M_p}{4\pi r_0^3}, \qquad \rho_0 = \frac{3NM_p}{4\pi R^3}, \qquad \frac{\delta}{\rho_0} = \frac{c^3 T_m^3}{r_0^3 \omega^3 T_m^2} \approx T_m.$$

Рассматривая взаимодействие движущихся тел, излучающих гравитоны, необходимо учесть, что потоки импульса и энергии необходимо подвергнуть преобразованиям Лоренца. В системе отсчета, в которой одно тело неподвижно, а другое движется, сила сопротивления будет направлена по перпендикуляру к радиусу-вектору, соединяющему центр обоих тел:

$$d\overline{F} = \frac{d\overline{S}}{\theta_0^2}(p_0 + \rho_0 a_0^2) = \frac{dS\theta_0^2}{\theta_0^2}(p_0 + \rho_0 a_0^2) = dS(p_0 + \rho_0 a^2) =$$
$$= dF\left(1 + \frac{\rho_0 a_0^2}{p_0}\right),$$

где $dF = dSp_0$, dS — сила и элемент площади в случае неподвижных тел; $d\overline{F}$ и $d\overline{S}$ — те же величины в случае движущихся тел, a_0 — относительная скорость движения, направленная по перпендикуляру к радиусу-вектору. Поскольку $p_0 = \frac{1}{3}\rho_0 c^2$, где p_0, ρ_0 — невозмущенные давление и плотность среды, то

$$d\overline{F} = dF\left(1 + 3\frac{a_0^2}{c^2}\right).$$

Таким образом, при движении, например, планет около Солнца к силе взаимодействия будет добавляться малый член (при малых скоростях движения) $\frac{3a_0^2}{c^2} = \frac{3a^2}{c^2}\cos^2\alpha$, причем $a_0 = a\cos\alpha$, a — полная скорость движения, α — угол между касательной к траектории движущихся планет и перпендикуляром к радиусу-вектору.

Сила притяжения

$$F_\alpha = \frac{GMr_\alpha}{r^3}\left(1 + \frac{3a^2}{c^2}\cos^2\alpha\right) = \frac{GMr_\alpha}{r^3}\left(1 + \frac{3\bar{p}GM}{r^2c^2}\right),$$

где $\bar{p}$ — параметр орбиты. При этом для уравнения орбиты мы получим такое же уравнение, как и в задаче Шварцшильда:

$$\xi_{\varphi\varphi} + \xi = \frac{1}{\bar{p}}\left(1 + \frac{3\bar{p}GM}{r^2c^2}\right),$$

где $\xi = {}^1/_2$, φ — полярный угол.

Таким образом, возмущения, вносимые кривизной пространства, можно трактовать, как возмущения силы, вносимые дополнительным взаимодействием гравитонов, идущих от движущегося тела (планеты), с гравитонами, испускаемыми неподвижным телом (Солнцем). Это обстоятельство представляет несомненный интерес.

Очевидно, что методика учета взаимодействия тел при их движении здесь весьма приближенная, но она достаточна для оценки получаемого эффекта. При этом оказывается, что изменяет взаимодействие лишь составляющая скорости $a_0 = a\cos\alpha$, другая радиальная составляющая скорости $\overset{*}{a}_0 = a\sin\alpha$ при интегрировании по всей сфере вклада не дает.

Перейдем теперь к некоторому уточнению и интерпретации полученных результатов и установлению возможностей квантования (хотя бы приближенного) гравитационного поля.

§ 8. Гравитационное поле и излучение и их возможное квантование

В предыдущем параграфе мы пришли к важному результату, что число гравитонов в нашей Вселенной порядка $N_g = N^{3/2} = T_m^3$. Ниже мы уточним понятие гравитона, которым пока пользовались чисто умозрительно. Прежде всего снова рассмотрим вопрос о пространственных ячейках, занимаемых гравитонами, с точки зрения флуктуации числа частиц и энергии.

На один гравитон приходится объем

$$v = \frac{v_0}{N_g} = \frac{v_0}{T_m^3}, \tag{8.1}$$

флуктуация объема

$$\Delta v_g = \frac{v_0}{N_g \sqrt{N_g}} = \frac{v_0}{T_m^{9/2}}. \tag{8.2}$$

Соответственные размеры определятся из соотношений

$$\lambda_g = \frac{R}{T_m}, \qquad \Delta\lambda_g = \frac{R}{T_m^{3/2}} = \frac{r_0}{\sqrt{T_m}}. \tag{8.3}$$

В настоящее время

$$\lambda_g = \frac{10^{28}}{10^{41}} \approx 10^{-13}\ \textit{см}, \quad \Delta\lambda_g = 10^{-33}\ \textit{см}. \tag{8.4}$$

Определим теперь гравитационный радиус самих элементарных частиц. Из метрики Шварцшильда

$$ds^2 = c^2\,dt^2\left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right) - \left[\frac{dr^2}{1 - \frac{2GM}{rc^2}} + r^2\left(\sin^2\theta\,d\varphi^2 + d\theta^2\right)\right]$$

следует, что при

$$r = \frac{2GM}{c^2} = r_g^* \tag{8.5}$$

компоненты $g_{00} = 0$, $g_{11} \to \infty$. Величина r_g^* называется гравитационным радиусом тела, в данном случае — частицы. «Сейчас» для нуклона $r_g^* = 10^{-52}$ *см*, для электрона $r_g^* = 10^{-55}$ *см*.

Величина

$$\frac{r_g^*}{r_0} = \frac{2GM_p}{r_0 c^2} = \frac{1}{\xi_1 T_m}. \tag{8.6}$$

Поскольку $T_m = 10^{40}$, то для нуклонов $\xi_1 \approx 10^{-1}$, для электронов $\xi_{1э} \approx 10^2$. Таким образом, мы уточнили значение r_g^*, введенное нами в § 6 части II (при закрепленном значении r_0).

Отметим также, что значение r_g^* приблизительно соответствует величине смещения центра масс частиц при их флуктуационных колебаниях. В самом деле,

$$\Delta r_m \approx \frac{gt^2}{2} = \frac{g}{2\omega^2} = \frac{\alpha c}{2\omega^2} = \frac{c}{2\omega T_m} \approx \frac{r_0}{2T_m} = \frac{r_0}{2\sqrt{N}} \approx \frac{\xi_1}{2} r_g^*$$

(откуда $\xi_1 = 1$; поэтому надо снова предположить, что r_0 для нуклонов и электронов различно).

Так как гравитационный радиус элементарных частиц весьма мал и весьма малы по сравнению с размерами частиц характерные размеры гравитона, то можно высказать законное сомнение в применимости обычных принципов и методов квантования как гравитонного поля, так и самих частиц — гравитонов, поскольку их можно считать реально существующими.

Мы уже убедились в том, что при гравитационном излучении элементарных частиц частота их пульсации остается постоянной, а меняется «постоянная» Планка, причем процесс этого излучения, в отличие от электромагнитного, необратим. «Постоянная» Планка монотонно уменьшается. Возможны, видимо, флуктуационные изменения этой величины в обе стороны, но это будут уже флуктуации флуктуаций — флуктуации второго порядка, и они могут носить лишь временный характер, не влияющий на общее монотонное уменьшение величины $\hbar$. При этом справедливо соотношение (6.54)

$$\frac{1}{2}\Delta\hbar\omega_0 = \Delta E_g,$$

причем

$$\Delta\hbar = -\frac{2\hbar}{T_m} = -2\hbar_g, \tag{8.7}$$

$$\hbar_g = \frac{\hbar}{T_m} = \frac{\hbar}{\sqrt{N}}. \tag{8.8}$$

За одну пульсацию энергия излучающей частицы уменьшится на

$$\Delta E_I = -\hbar_g\omega_0. \tag{8.9}$$

За n пульсаций излучается энергия

$$\Delta E_n = -\hbar_g\omega_0 n = -\hbar_g\omega_0\alpha t = \hbar\omega_0\frac{t}{T}, \tag{8.10}$$

где t — продолжительность излучения, $T = \frac{\omega_0}{T_m} = \frac{1}{\alpha}$.

В связи со сказанным выше возникает весьма принципиальный вопрос: обязательно ли при гравитационном излучении должно возникать электромагнитное излучение?

В классической теории всегда можно найти случаи, когда электрические (электромагнитные) дипольное и квадрупольное излучения равны нулю, а механический квадруполь и его третья производная не равны нулю, так что имеет место механическое гравитационное излучение. Для равномерно заряженного шара дипольный и квадрупольный электрические моменты равны нулю, но, поскольку для разных частиц отношения e/m различны, всегда можно так распределить массы, например в виде эллипсоида, что механический квадрупольный момент будет отличен от нуля. При колебаниях такого заряженного шара с эллипсоидальным распределением масс (допустим, тяжелые у экватора и легкие у полюсов) дипольное и квадрупольное электрические излучения будут отсутствовать, а механическое гравитационное будет иметь место. Можно придумать и противоположный пример, когда будут иметь место дипольное и квадрупольное электрические излучения, а механическое будет отсутствовать. Для этой цели следует, например, в колеблющемся шаре поместить протоны у экватора, а нейтроны у полюсов.

В квантовом приближении также можно найти аналогичные случаи, когда правила отбора запрещают дипольные и квадрупольные электромагнитные излучения, но разрешают механическое (и наоборот), что следует опять-таки из-за разного отношения e/m для различных частиц или, в интегральном представлении, из-за того, что распределения

$$\int \delta x_\alpha dv, \qquad \int \delta\,(3x_\alpha x^\beta - \delta_\alpha^\beta r^2)\,dv,$$

где δ — плотность зарядов и $\int \rho\,(3x_\alpha x^\beta - \delta_\alpha^\beta\, r^2)\,dv$ различны $\left(\int \rho x_\alpha dv \equiv 0\right.$ — механический дипольный момент, который всегда равен нулю в системе отсчета центра инерции$\left.\right)$.

Однако это утверждение сделано для свободного поля без учета гравитационного, а свободных полей вообще не может быть, поскольку всегда любому полю сопутствует гравитационное.

В гравитационном поле должно иметь место сверхтонкое расщепление линий энергетического спектра излучения частиц.

Выскажем гипотезу, что если без учета гравитационного поля в каких-либо случаях запрещены квантовые электромагнитные и гравитационные квадрупольные излучения, то в гравитационном поле они должны иметь место и носить характер как бы флуктуационных излучений.

Оператор квадрупольного момента в гравитационном поле напишем в виде

$$\hat{Q}_\alpha^\beta = \frac{3Q_0}{2(j+1)(2j+3)}\left[g_{\alpha\gamma}\left(\hat{j}^\beta\hat{j}^\gamma + \hat{j}^\gamma\hat{j}^\beta\right) - \frac{2}{3}\delta_\alpha^\beta\hat{j}^2\right],$$

где Q_0 — классический квадрупольный момент ($Q_0 = \text{const}\cdot er^2$); $\hat{j}$ — оператор «вектора» полного момента системы, причем усреднение надо производить с учетом гравитационного поля; компоненты $g_{\alpha\gamma}$ характеризуют поле у частицы.

Если вне гравитационного поля сохраняется полный момент количества движения $\bar{j} = \bar{l} + \bar{s}$, где $\bar{l}$ — орбитальный момент, который является интегралом движения, то в гравитационном поле интегралом движения F, коммутирующим с гамильтонианом H, при $[H, F] = 0$ будет $F = \bar{j} = \bar{l} + \bar{s} + \bar{j}_g$, где $\bar{j}_g$ — момент количества движения гравитационного поля, приходящийся и передаваемый одной частице.

Умножение операторов на величины $g_{\alpha\gamma}$ возможно, поскольку эти величины являются псевдоскалярами (числами).

Таким образом, в гравитационном поле полный момент (спин) частицы будет ($l = 0$) $F = \bar{s} + \bar{j}_g$, причем величины $\bar{j}_g$ и $\bar{s}$ являются флуктуирующими величинами с частотой $\omega = \dfrac{c}{r_0}$.

Проекцию полного момента нуклонов и электронов в гравитационном поле можно написать в виде $j^* = \dfrac{1}{2} + s_g = \dfrac{1}{2} + \dfrac{j_g}{\hbar}$. При этом проквантованный квадрупольный момент этих частиц в основном состоянии в гравитационном поле будет определяться выражением

$$Q = Q_0\frac{j^*(2j^*-1) + 3\eta_{zz}j^{*2}}{(2j^*+3)(j^*+1)} = \frac{Q_0}{6}\left[s_g + \frac{3}{4}\eta_{zz}\right].$$

При $s = 0$ $\quad Q = \dfrac{2}{3}Q_0 s_g, \quad \eta_{zz} = g_{zz} - g_{tt}^0.$

Поскольку величина s_g флуктуирует, то $\sqrt{\overline{s^2}} \geqslant 0$ и $\overline{\ddot{Q}^2} > 0$. Определим теперь величину j_g. Очевидно, что

$$j_g = \frac{m_g r_\Phi N_g c}{N_p} \approx M_p c r_\Phi = \hbar\frac{r_\Phi}{r_0} = \frac{\hbar}{\sqrt{T_m}} =$$

$$= N_g\hbar T_m\left(\frac{r_\Phi}{a}\right)^3 (m_g N_g \approx M_p N_p),$$

где

$$r_\Phi = \sqrt{\frac{G\hbar}{c^3}} = 10^{-33}\ \textit{см}.$$

Полный момент гравитационного поля соответствует полному моменту материи, момент, приходящийся на один гравитон порядка $\hbar$, и флуктуация этого момента и дают величину j_g, поскольку $N_g^* = \sqrt{N} = T_{mi}\sqrt{N_g^*} = \sqrt{T_m}$ этому моменту соответствует расстояние порядка 10^{-7} *см*. Далее находим

$$\dddot{Q} \approx \frac{Q_0}{3}\dddot{s}_g \approx \frac{Q_0\omega^3}{3}s_g \approx \frac{Q_0\omega^3}{\sqrt{T_m}},$$

$$\dddot{Q}^2 \approx \frac{Q_0^2\omega^6}{T_m} = \text{const}\cdot\frac{e^2r_0^4\omega^6}{\sqrt{N}} = \text{const}\cdot GM_p^2r_0^4\omega^6,$$

что дает нам механический квадрупольный момент, введенный выше из чисто эвристических соображений. При этом величина гравитационного излучения будет равна

$$-\dot{E}_g = \text{const}\,\frac{GM_p^2c}{r_0^2}\left(\frac{r_0\omega}{c}\right)^6,$$

$$\alpha = -\frac{\dot{E}_g}{M_pc} = \frac{1}{T_m} \approx 10^{-17}\ сек^{-1}.$$

Очевидно, что часть квадрата квадрупольного момента Q^*, введенная нами в § 6, должна быть как раз порядка $\frac{Q_0}{\sqrt{N}}$.

При этом $D_m = \sqrt{G}M_pr_0^2 \approx \frac{er_0^2}{\sqrt{T_m}} \approx \frac{Q_0}{\sqrt{T_m}}$ — механический квадрупольний момент.

Совершенно аналогичные результаты можно получить, исследуя квадрупольное расщепление уровней в гравитационном поле

$$\Delta E = \frac{1}{6}\,\frac{3}{2}\,\frac{Q_0g^{\alpha l}}{(j^*+1)(2j^*+3)}\Big[g_{\alpha r}(\hat{j}^\beta\hat{j}^r + \hat{j}^r\hat{j}^\beta) -$$

$$-\frac{2}{3}\delta_\alpha^\beta\,\hat{j}^2\Big]\frac{\partial^2\varphi_g}{\partial x^l\,\partial x^\beta} = \frac{Q_0}{6}\,\frac{\partial^2\varphi_g}{\partial r^2}\left[\frac{j^*(2j^*-1)+3\eta_{zz}\,j^{*2}}{(j^*+1)(2j^*+3)}\right];$$

$\varphi_g = -\frac{\sqrt{G}M_p}{r}$, $l = \beta = 3$ (вектор r направлен по оси z), откуда

$$\Delta E \approx Q_0s_g\frac{\partial^2\varphi_g}{\partial r^2} \approx Q_0s_g\frac{\sqrt{G}M_p}{r^3} \approx \frac{e^2}{r}\,\frac{s_g}{\sqrt{T_m}} \approx \frac{e^2}{rT_m} \approx \frac{E_p}{T_m}.$$

Можно также, предположив, что в течение времени $\tau = \frac{10^{-23}}{10^{40}}\,сек = 10^{-63}$ *сек* за одну «пульсацию» мезонного облака возникает возбужденное состояние нуклона с моментом $l = \frac{3}{2}$ или гравитона с $l = 2$ и энергией нуклона, опять прийти к такому же результату.

В самом деле, $-\dot{E}_g = -\dot{E}_э \cdot 10^{-40} \approx \frac{e^2 r_0^4 \omega^6}{c^5} 10^{-40} = \frac{G M_p^2 r_0^4 \omega^6}{c^5}$.

Интервал времени $\bar{\tau}$ соответствует энергии гравитона (и частицы) в 10^{40} больше невозбужденного, и этот виртуальный процесс разыгрывается в интервале $r \approx 10^{-52}$ *см*, что получается из принципа неопределенности. Видимо, в произвольном гравитационном поле понятие спина как квантового числа уже не имеет прежнего значения, поскольку произвольное гравитационное поле неоднородно и не обладает симметрией.

Флуктуации внешнего гравитационного поля приводят к нарушению сферически симметричного распределения заряда в нуклоне (включая мезонную шубу), что и создает флуктуирующий электрический квадрупольный момент нуклона, соответствующий его механическому квадруполю, введенный нами выше из чисто эвристических соображений и обеспечивающий как раз такое гравитационное излучение, которое полностью объясняет его «ньютоновское» гравитационное взаимодействие.

Поскольку гравитоны должны иметь спин, равный двум, то возникает дилемма: или надо предполагать, что за время $\tau^* \approx \omega^{-1}$ излучаются два гравитона с противоположно ориентированными спинами, или что спин гравитона определяется в единицах $\hbar T_m^{-1} = \hbar_g$, что более вероятно, а спин, равный двум и вычисляемый в единицах $\hbar$, относится к квантованному свободному поперечному гравитационному полю.

Итак, квадрупольное гравитационное и сопутствующее ему флуктуационное электромагнитное излучение возможно и в тех случаях, когда квантовая теория, не учитывающая гравитационное поле, запрещает электромагнитное квадрупольное излучение. Это утверждение в принципе можно проверить экспериментально.

Далее отметим, что если исходить из уравнения Гамильтона — Якоби

$$g^{ik} S_i S_k + m^2 c^2 = 0,$$

написав его в виде

$$g^{00} S_0^2 + 2 g^{0\alpha} S_0 S_\alpha + g^{\alpha\beta} S_\alpha S_\beta + m^2 c^2 = 0,$$

то для энергии получим выражение

$$-\sqrt{-g^{00}}\, p_0 = \frac{E}{c} = -\frac{g^{0\alpha} J_\alpha}{\sqrt{-g^{00}}} \pm \sqrt{J^2 + m^2 c^2 + \frac{(g^{0\alpha} J_\alpha)^2}{(-g^{00})}},$$

где $S_\alpha = J_\alpha$ — компоненты трех импульса. Отсюда следует, что гравитационное поле будет по-разному взаимодействовать с частицами и античастицами и нарушать комбинированную инверсию. При этом изменение энергии взаимодействия и массы частиц будет порядка $T_m^{-\frac{1}{2}} = 10^{-20}$.

Это могло привести к значительной гравитационной дифференциации вещества и антивещества в Метагалактике, поскольку при малых T_m различие взаимодействия было значительным.

Рассмотрим механические колебания какого-либо возмущенного ядра — изомера. Ранее мы полагали, что гравитационные механические излучения будут лишь сопутствовать электромагнитному. Мы полагали, что если изомер не излучает γ-кванты, то он и не излучает гравитационные волны, несмотря на то что может обладать отличным от нуля механическим квадрупольным моментом.

Для систем, подчиняющихся классической релятивистской механике, всякое квадрупольное колебание будет обязательно сопровождаться гравитационным излучением. Для квантовых систем это утверждение обычно ставится под сомнение. Считается, что автономного от электромагнитного излучения гравитационного излучения не существует. Только квантовые электромагнитные переходы инициируют и гравитационные излучения. Однако, как мы только что показали, это не так. Гравитационные и электромагнитные флуктуационные излучения могут иметь место независимо от квантового электромагнитного, если учитывать гравитационное поле. Причем это справедливо не только для отдельных частиц, но и для их любых совокупностей, например, ядер. Данное положение также можно проверить экспериментально.

Выше (см. ч. II, § 5) мы показали, что если гравитационное излучение происходит только при электромагнитном квадрупольном излучении, то для обнаружения гравитационного излучения с минимальной мощностью 10^{-15} *эрг/сек* необходим распад на γ-кванты примерно 1000 *кг* каких-либо изотопов или не существующий пока γ-лазер с одновременным распадом 10^8 *частиц*. Если гравитационное излучение может возникать при механических квадрупольных (возбужденных или нулевых) колебаниях без излучения γ-квантов, то для его обнаружения потребуются значительно меньшие количества изотопов (изомеров).

В самом деле, при «спокойных» квадрупольных колебаниях, не сопровождающихся электромагнитным излучением,

$$-\dot{E}_g^* = \frac{G\dddot{D}^{*2}_{\alpha\beta}}{45c^5} = \xi^* \frac{Gm^{*2}c}{45r^2}\left(\frac{r^*\omega^*}{c}\right)^6, \quad \alpha^* = \xi \frac{Gm^{*2}c^2}{45r^2M^*}\left(\frac{r^*\omega^*}{c}\right)^6 \quad (8.12)$$

(звездочка обозначает, что соответствующие величины относятся не к элементарным частицам, а к любым телам).

Отношение

$$\frac{\alpha^*}{\alpha} = \frac{\xi^*}{\xi}\frac{m^{*2}}{m^2}\frac{M}{M^*}\left(\frac{r^*\omega^*}{r\omega}\right)^6.$$

Для малых колебаний типичного тяжелого ядра, имеющего квадрупольный момент

$$\frac{\xi^*}{\xi} = 10^{-6}, \qquad \omega^* = 10^{21}\ \textit{сек}^{-1}, \qquad r^* = 10^{-11}\ \textit{см},$$
$$m^* = 100\ m, \qquad M^* = 100\ m,$$

тогда $\frac{\alpha^*}{\alpha} = 10^{-10}$ $\left(\text{при } \omega^* = 10^{-20}\ \textit{сек}^{-1},\ \frac{\alpha^*}{\alpha} = 10^{-16}\right)$.

Подобное гравитационное излучение можно измерить и оно может сказаться на изменении дефекта массы. В самом деле, полагая $M^* = 10^{-22}$ *г*, находим

$$-\Delta\dot{E}^*_{0g} = -N\dot{E}^*_g = \alpha NMc^2 = N\cdot 10^{-28}\ \textit{эрг/сек};$$

при

$$\Delta\dot{E}_{0g} = 10^{-15}\ \textit{эрг/сек} \qquad N = \frac{10^{-15}}{10^{-28}} = 10^{13}\ \textit{частиц} \approx 10^{-9}\ \textit{г}.$$

При расчетах, сделанных в рамках старой стандартной теории, $\dot{N} = 10^{28}$ *частиц/сек*, что приводит к секундному расходу массы порядка 10^6 *г* (различие на 15 порядков). Существенно, что в прежних расчетах гравитационное излучение имело место только в процессе одного колебания; это дало бы расхождение на 21 порядок. Расхождение на 6 порядков, равное отношению ξ^*/ξ, объясняется тем, что амплитуда колебаний при испускании γ-квантов и эффективный радиус колебаний значительно больше, чем при спокойных колебаниях ядра. Наши расчеты имеют предварительный качественный характер, и цель их оценить порядок величин. По-видимому, такая точка зрения вполне может быть приемлема, тем более что она может быть подвергнута экспериментальной проверке, а это весьма существенно.

Поскольку гравитационный радиус нуклона и электрона примерно в 10^{-40} раз меньше размеров этих частиц, то сама частица является целой Вселенной для гравитонов, число которых в любой момент времени составляет $N^*_g = T_m$ (сейчас $N^*_g = 10^{40}$).

Видимо, для квантования гравитационного поля и гравитонов постулаты обычной квантовой теории не могут быть применены непосредственно без каких-либо изменений, о чем мы уже говорили. Заметим, что все попытки применения обычного квантования и вторичного квантования в этом аспекте терпели неудачу, что обычно объясняется нелинейностью гравитационного поля. Это верно, но не только в этом дело. Невольно намечается следующий путь для попыток квантования гравитации.

«Постоянная» Планка связана с зарядом соотношением

$$\frac{e^2}{\hbar c} = \bar{\alpha} = \frac{1}{137} = \text{const}. \tag{8.13}$$

Очевидно, что изменение e, поскольку $c = \text{const}, \bar{\alpha} = \text{const}$, должно повлечь за собой и изменение величины $\hbar$. Поскольку гравитоны или те субэлементарные частицы, из которых могут состоять наши обычные элементарные частицы, имеют массу $m_g = m_p/T_m$, они должны нести заряд порядка

$$e_g = \frac{e}{T_m^{\frac{1}{2}}}, \tag{8.14}$$

и для них соответствующая «постоянная» Планка

$$\hbar_g = \frac{\hbar}{T_m} = \frac{\hbar}{\sqrt{N}}. \tag{8.15}$$

К этому же соотношению мы уже пришли, исходя из гипотезы о наличии гравитационного излучения у элементарных частиц [см. (8.8)].

Здесь надо сделать замечание о том, что для нейтральных частиц под e^2 надо понимать квадрат суммы положительных и отрицательных зарядов по модулю. Для нейтрона, как уже условлено экспериментально,

$$e^2 = \bar{e}^2 = \left[\frac{1}{2}\,|\,e^+\,| + \frac{1}{2}\,|\,e^-\,|\right]^2, \text{ хотя } e = e^+ + e^- = 0. \tag{8.16}$$

Если бы нейтральные частицы не представляли собой своеобразных «диполей», то вряд ли к ним были бы применимы методы квантования.

Далее следует указать на то, что и гравитоны могут, в зависимости от того, какими частицами они порождаются, быть положительными, отрицательными и нейтральными и обладать определенными свойствами симметрии и четности. Тогда и к этим частицам следует применять квантовые свойства с фундаментальной величиной $\hbar_g$.

При основном гравитационном излучении, идущем из элементарных частиц, величина $\hbar_g = \hbar/\sqrt{N} = \hbar/T_m \sim 1/T_m^3$ дискретно уменьшается, поскольку число частиц N может принимать только целочисленные значения. Сама величина $\hbar \sim 1/T_m^2 \sim 1/N$ также имеет дискретное число значений. При дополнительном квадрупольном (мультипольном) гравитационном излучении величины $\hbar$ и $\hbar_g$ также «дополнительно» изменяются, причем опять-таки значения $\hbar$ и $\hbar_g$ могут иметь лишь дискретный спектр, поскольку само излучение дискретно и имеет квантовый характер, так как значение частот колебаний дискретно. При этом получается любопытное следствие: эти дополнительные колебания, за исключением нулевых стандартных волн, вклад которых идет в основное излучение $\left(\Delta E_{\text{нул}} = \frac{1}{2}\,\hbar_g\omega_0 = \frac{1}{2}\,\hbar\Delta\omega_0\right)$, дают дополнительные излучения и уменьшение энергии частиц. Эти частицы не стабильны и рано или поздно распадаются на различные компоненты таким образом, что эти компоненты автоматически оказываются «в равновесном» энергетическом состоянии с аналогичными частицами, не прошедшими перед этим процессы возбуждения. Иными словами, гравитационное излучение, как оно ни мало, может способствовать сбросу излишней энергии.

До сих пор мы говорили о гравитационном излучении из элементарных частиц (нуклонов и электронов). Естественно считать, что и фотоны, подвергаясь действию флуктуаций, также дают гравитационные излучения с частотой, присущей нуклонам. При этом $\alpha = \xi\,(G\hbar\omega^*/r^2c^3)\,(r\omega/c)^6$, откуда определяется эффективный радиус фотона при заданном $\alpha \sim 5\cdot10^{-18}$ *сек*$^{-1}$.

Частота колебаний и этот радиус не зависят от мирового времени; при $\xi \approx 200$ и $\omega^* = 10^{16}$ *сек*$^{-1}$ $r \approx 10^{-14}$ *см*.

При изучении основного гравитационного излучения мы обнаружили, что имеет место монотонное необратимое уменьшение величин $\hbar$ и $\hbar_g$. При дополнительном гравитационном излучении в общем процесс также необратим, однако добавление порций энергии, приводящих простые и сложные частицы в возбужденное состояние, может увеличивать величины $\hbar$ и $\hbar_g$. Но во всех случаях суммарно энтропия будет возрастать, несмотря на то что в определенных областях и частицах энтропия может флуктуативно уменьшаться. Величина же $\hbar$ при этом может возрастать на величину $n\hbar_g = n\hbar/\sqrt{N}$, где n — некоторое целое число:

$$n \leqslant N_g^* = \sqrt{N}.$$

Мы показали, что число гравитонов в единице объема

$$n_g = \frac{3}{4\pi r_0^3} = 10^{38}\ \textit{см}^{-3} = \text{const}.$$

Поэтому температура гравитонного газа $T = T_0 = \text{const}$. Значение температуры приближенно можно определить из соотношения

$$p_0 v_0 = \frac{R_{0g}}{\mu_g} T_0 = \frac{1}{3} c^2,$$

где $\mu_g = 10^{-40}$ («атомный» вес гравитонов), $R_{0g} = 8{,}3 \cdot 10^7 \cdot 10^{-40}$ *эрг/град* — универсальная газовая постоянная,

$$T_0 = \frac{\mu_g c^2}{3R_{0g}} = 4 \cdot 10^{12} \text{ град.}$$

Считая, что масса покоя гравитонов равна нулю, найдем

$$\frac{kT_0}{\hbar c} = (4n_g)^{1/3} = 10^{13}, \quad \text{откуда} \quad T_0 = 4 \cdot 10^{12} \text{ град.}$$

Если же относить температуру не к гравитонам, а к нуклонам, то

$$T_{0p} = T_0 \cdot 10^{-40} \simeq 4 \cdot 10^{-28} \text{ град.}$$

Эта температура практически не будет отличаться от абсолютного нуля.

Следует заметить, что значение

$$k_g = \frac{k}{\sqrt{N}}, \quad R_{0g} = \frac{R_0}{\sqrt{N}}, \quad \mu_g = \frac{\mu}{\sqrt{N}}, \quad k \sim R_0 \sim \mu \sim T_m^{-2}.$$

Поэтому отношения

$$\frac{k_g}{\hbar_g} = \frac{k}{\hbar}, \qquad \frac{R_g}{\mu_g} = \frac{R_0}{\mu}. \tag{8.17}$$

Расширение пространства и материи в пространстве происходит при постоянной температуре среды, заполняющей пространство, что также следует из постоянства скорости света. Эта среда состоит из гравитационного и электромагнитного излучений. Но при этом не очевидно, что и число электромагнитных квантов в единице объема постоянно и постоянна электромагнитная температура пространства. Однако в однородной и изотропной Вселенной отношения всех видов энергии всегда постоянны. Полное давление

$$p = \frac{E_0}{3v_0}, \qquad E_0 = \text{const}, \qquad v_0 \sim R^3, \quad \text{поэтому } p \sim R^{-3}.$$

Для электромагнитного поля имеем:

$$n_э \sim T_m^{-3/4}, \; T_э^0 \sim T_m^{-1/4}, \; n_э k T_э^0 \sim T_m^{-3}.$$

К этому соотношению можно также прийти, анализируя чисто гравитационные давления (давление гравитонного газа). В самом деле,

$$p_g \approx \frac{GM^2}{R^4}, \quad \text{но } G \sim R, \quad \text{поэтому} \quad p_g \sim R^{-3}.$$

Поскольку

$$pV^{4/3} = \sigma^{*}(\sigma) = pVV^{1/3} \simeq \frac{GM^2}{R} V^{1/3} = \text{const}\cdot R =$$
$$= \text{const}\cdot T_m = G_0 M^2 T_m, \qquad (8.18)$$

величина σ^* пропорциональна e^{σ/c_v} и характеризует вероятность состояния. Таким образом, возрастание мирового времени коррелирует с увеличением вероятности состояния Вселенной и ее энтропии, определяемой для гравитонного газа.

Для излучения одной частицы, когда $p = GM_p^2/r^4$, процесс идет как бы адиабатически (изэнтропически), но при взаимодействии с общим фоном (и из-за увеличения G) он быстро становится изотермическим, и энтропия этого излучения также начинает возрастать.

Существен вопрос о том, имеет ли гравитон массу покоя и заряд. Плотность гравитонного газа в момент его образования определяется соотношениями

$\rho_0 = \dfrac{n_0 \overset{*}{m}_0}{\sqrt{1 - \dfrac{\bar{a}_0^2}{c^2}}} = \dfrac{n_0 \overset{*}{m}_0}{\bar{\theta}_0} = n_0 m_0$, $\bar{a}_0 = \text{const}$, скорость теплового движения гравитонов $n_0 = \dfrac{1}{v_0} = \dfrac{3}{4\pi r_0^3}$, где v_0 — объем нуклона (электрона), m_0 — начальная масса гравитона, $m_0 = \rho_0 v_0 \bar{\theta}_0$. Далее,

$$\rho_0 = \alpha \frac{m_p}{4\pi r_0^2 c},$$

откуда следует

$$\frac{m_0}{m_p} = \frac{\alpha r_0}{3c} = \frac{\alpha}{3\omega} = \frac{1}{T_m},$$

а отсюда в свою очередь следует, что $m_0 = m_g$. Поэтому m_0 можно интерпретировать как начальную массу покоя гравитона. Сейчас масса гравитона, образованного нуклоном, порядка 10^{-66} *г*, для электрона $m_g = 10^{-69}$ *г*. Далее гравитон «быстро» перестраивается и занимает объем $\sim \left(\dfrac{r_0}{\sqrt{T_m}}\right)^3$, поэтому его плотность как частицы $\delta_0 = \rho_0 \sqrt{T_m^3}$ сейчас равна $\delta_0 \simeq 10^{33}$ *г/см*^{3}. Поскольку

$$\frac{m}{m_0} = \frac{\rho}{\rho_0}\frac{n_0}{n}, \qquad \frac{\rho}{\rho_0} = \left(\frac{r_0}{r}\right)^4, \qquad \frac{n_0}{n} = \left(\frac{r}{r_0}\right)^3,$$

то $$\frac{m}{m_0} = \frac{r_0}{r}, \qquad (8.19)$$

т. е. масса покоя гравитона падает обратно пропорционально расстоянию; полная энергия гравитона

$$E_{g0} = \frac{m_g c^2}{\theta} = \mathrm{const}.$$

Предельное значение массы гравитона при $r = R = r_0 T_m$

$$m = \frac{m_0}{T_m} = 10^{-106}\ г.$$

Таким образом, мы приходим к выводу, что гравитон всюду обладает отличной от нуля массой покоя.

Поскольку, как показали, заряд частиц уменьшается со временем [для нейтральных частиц уменьшается модуль заряда $e = e^- = \frac{1}{2}(|e^+| + |e^-|)$], то гравитоны, испускаемые положительно заряженными частицами, должны иметь положительный заряд g^+, а гравитоны, испускаемые отрицательно заряженными частицами, должны уносить отрицательный заряд g^-; гравитоны же, идущие от нейтральных частиц, должны быть нейтральными, т. е. уносить как положительный, так и равный ему отрицательный заряд (g^0-гравитоны). В последнем случае гравитон обязательно должен быть сложной частицей, но, видимо, g^+- и g^--гравитоны — также сложные частицы.

Теперь мы сможем дать уже более четкую формулировку того, что мы называем гравитоном. Под гравитоном можно подразумевать некоторую «элементарную» квазистабильную частицу, излучаемую за счет флуктуации любыми частицами материи, заряженную или нейтральную (в том смысле, как мы это делаем для нуклонов, электронов и фотонов), с массой покоя и скоростью движения порядка скорости света (несколько меньше). Спин гравитона равен двум ($s = 2$); это следует из того, что гравитационное поле описывается тензором 2-го ранга, имеющим 10 независимых компонент. А всякий десятикомпонентный тензор 2-го ранга, обладающий нулевым шпуром, описывает частицы со спином 2, как это было показано Паули.

В свое время Иваненко предположил, что пара нейтральных гравитонов больших энергий может при взаимодействии образовать обычные частицы (или γ-кванты). Вероятность такого процесса трансмутации гравитонов ничтожно мала, что также показал Иваненко, поскольку энергия ньютонова гравитационного поля на 40 порядков меньше энергии электромагнитного поля нуклонов.

Если энергия гравитона возрастет на 20 порядков, то E^2 (или M^2) увеличится на 40 порядков и вероятность образования пары частиц из гравитонов приближается к вероятности подобного процесса при электромагнитных взаимодействиях (что и было показано выше). Иными словами, можно допустить процессы

$$g^0 + g^0 = 2g^0 \to e^+ + e^-, \qquad 2g^0 \to p^+ + p^-, \quad 2g^0 \to n + \overline{n},$$

$$2g^0 \to \nu + \widetilde{\nu}, \quad g^0 + g^0 \to 2\gamma, \quad g^+ + g^- \to e^+ + e^-, \quad 2g^+ = 2p^+$$

и т. д. (и обратные).

Однако то обстоятельство, что гравитоны могут нести заряды, несколько изменяет ситуацию. Для заряженных частиц эти процессы могут быть более многообразны, а некоторые и запрещены.

В развиваемой нами концепции энергия частиц в каждый момент времени $\sim T_m^{-2}$, а энергия только что испущенных гравитонов $\sim T_m^{-3}$. Предполагая, что испускаемые раньше гравитоны в какой-то момент времени T_{m1} не «стареют» или стареют по какому-то закону более слабому, чем T_m^{-3} (или частота их взаимодействий иная, чем у нуклонов), тогда некоторые гравитоны могут обладать энергией порядка энергии элементарных частиц. И при взаимодействии друг с другом и самими частицами они могут образовать новые элементарные частицы — нуклоны и электроны. При этом вероятность этого образования будет более соизмерима с вероятностью электромагнитных трансмутаций. Этот крайне любопытный и существенный для миропонимания вопрос мы рассмотрим в следующем параграфе.

Здесь же мы допустим, что испускаемые ранее гравитоны не «стареют». (Это, вообще говоря, неверно. Ниже, в следующем параграфе, мы избавимся от этого допущения.) Тогда можно написать такие соотношения. При $T_m = T_{m1}$

$$m_{g1} = \frac{M_0}{T_{m1}^3}, \tag{8.20}$$

где M_0 — начальная масса нашей Вселенной (см. следующий параграф). При $T_m = T_{m0} > T_{m1}$ (наше время)

$$M_{p0} = \frac{M_0}{T_{m0}^2}. \tag{8.21}$$

Полагая, что $m_{g1} = M_{p0}$, находим

$$T_{m1} = T_{m0}^{2/3}. \tag{8.22}$$

При этом число гравитонов массы m_{g1} в единице объема n_{g1} и число нуклонов массы M_{p0} в единице объема n_{p0} при $T = T_m$, одинаково. В самом деле

$$n_{p0} = \frac{N_{p0}}{v} = \frac{T_{m0}^2}{v} = n_{g1} = \frac{N_{g1}}{v} = \frac{T_{m1}^3}{v} = \frac{T_{m0}^2}{v}.$$

Очевидно, что гравитоны с массой m_{g1} могут при взаимодействии друг с другом и с нуклонами порождать новые нуклоны.

Число столкновений частиц двух сортов в 1 *см*^{3} за 1 *сек* определяется соотношением

$$n_{\text{ст}} = \pi c n_1 n_2 (r_1 + r_2)^2, \tag{8.23}$$

где $n_{1,2}$, $r_{1,2}$ — число частиц в 1 *см*^{3} и их линейные размеры. Пусть $n_1 = n_{p0}$, $r_1 = r_0$, $n_2 = n_{g1}$, далее $r_2 = \frac{r_0}{\sqrt{T_{m0}}} < r_1$, поэтому

$$n_g \approx \pi c n_{p0} n_{g1} r_0^2. \tag{8.24}$$

В рассматриваемом случае

$$n_{\text{ст}} = \pi c r_0^2 n_{p0}^2. \tag{8.25}$$

Поскольку

$$n_{\text{ст}} T_0 = \pi c r_0^2 n_0^2 \frac{T_0}{T_m^2} = \frac{\pi c r_0^2 n_0^2}{\omega_0^2 T_0}, \qquad n_{g1} = \frac{n_0}{T_m} = \frac{n_0}{\omega_0 T_0}, \tag{8.26}$$

то $n r_0^3 n_0 \leqslant 1$, как и должно быть. Здесь T_0 обычное время (в секундах). К моменту времени T_{0m} все частицы смогут провзаимодействовать только за время T_{0m}, и поэтому соотношение (8.25) годится во всем интервале времени $T_{m_1} \leqslant T_m \leqslant T_{m_0}$.

Будем предполагать, что каждое соударение гравитона с нуклоном ведет к образованию нового нуклона. Например, $g^* + p^* \to 2p^+$, тогда в 1 *см*^{3} за 1 *сек* будет образовываться масса

$$\Delta\dot{m} = n_{\text{ст}} m_p = \pi c n_{p0}^2 r_0^2 m_p \approx 10^{-46}\, г \cdot см^{-3} \cdot сек^{-1}. \tag{8.27}$$

Эта масса должна соответствовать теряемой нуклонами массе

$$\Delta\dot{m}^* = \alpha n_{p0} m_p = \frac{n_{p0} m_p \omega_0}{T_m}. \tag{8.28}$$

Действительно,

$$\pi c n_{p0}^2 r_0^2 m_p = \frac{n_{p0} m_p \omega_0}{T_m},$$ откуда, поскольку $r_0 \omega_0 = c$, $\pi r_0^3 n_{p0} \sim \frac{1}{T_m}$ или $n_{p0} \simeq \frac{1}{\pi T_m r_0^3} = \frac{n_0}{T_m}$, что всегда имеет место.

Таким образом, мы пришли к фундаментальному выводу о том, что вследствие взаимодействия гравитонов с нуклонами, электронами и другими частицами образуется столько же вещества, сколько теряется на гравитационное излучение. Отсюда следует, что наши представления о постоянном соотношении между различными видами энергии в пространстве и, в частности, между энергией вещества и энергией гравитационного поля оправдываются и с точки зрения рассматриваемой модели.

Аналогичный результат получается, если рассчитать число соударений всех гравитонов в данный момент времени

$$n_{\text{ст}} = \frac{\pi c n_0^2 r_0^2}{T_m}, \qquad n_{\text{ст}} m_g = \frac{\pi c n_0^2 r_0^2 m_0}{T_m^4} = \frac{M_0 \omega_0}{r_0^3 T_m^4},$$

где справа стоит выражение для потери массы в единице объема $\frac{\alpha M_0}{V}$.

Таким образом, число соударений обеспечивает гибель гравитонов той самой массы, которую теряют частицы. Из гибнущих гравитонов образуются новые частицы. (Во всех этих вычислениях мы условно считаем объем нашей Вселенной равным $R = r_0^3 T_m^3$, что достаточно для приближенных оценок, а они, в свою очередь, достаточны для проверки справедливости наших основных концепций об изменении массы частиц со временем.) Разумеется, все сказанное относится также к электронным гравитонам и к рождению пар электронов и позитронов.

В следующем параграфе мы покажем, что аналогичные результаты, но еще более интересные получаются, если считать, что уже родившиеся гравитоны также «стареют» со временем. Причем эта новая концепция более естественна и закономерна.

Рассмотрим вопрос о возможности обнаружения гравитационного излучения элементарными частицами. Если рассматривать излучение гравитационных волн из элементарных частиц при их малых флуктуационных колебаниях со смещением центра масс порядка их гравитационных радиусов, то такое излучение будет слабым и может быть описано как квадрупольное излучение. При «одномерных» колебаниях волны будут распространяться в направлении колебаний, меняя метрику и создавая ускорение в плоскости, перпендикулярной к направлению движения. При этом $^1/_6$ часть всех частиц как целое будет совершать колебания в одном направлении. Поскольку флуктуации происходят хаотически, в среднем за период времени, больший $\frac{10}{\omega_0}$, излучение будет изотропным.

Если рассматривать отдельные нуклоны и электроны, то, поскольку имеется «ось вращения» (спин), в случае слабого квадруполя интенсивность квадрупольного излучения $D^2 = D_0^2 (3 \cos^2 \theta - 1)^2$, где $D_0 = \text{const}$. При $\theta = 0$ (θ — угол, отсчитываемый от оси вращения) $D^2 = 4D_0^2$; при $\theta = \pi/2$ $D^2 = D_0^2$; при $\cos^2 \theta = {}^1/_3$ ($\theta = 55°$) $D^2 = 0$.

При большой скорости срыва гравитонов излучение будет наиболее интенсивно в плоскости «экватора», с двумя максимумами в этой плоскости. Поскольку начальная скорость гравитонов $\frac{u}{c} \approx \frac{1}{2}$, будет иметь место промежуточное распределение интенсивности гравитационного излучения, которое в принципе можно исследовать.

Если рассмотреть взаимодействие этого излучения с каким-либо внешним стационарным гравитационным полем, например полем Земли, то мы придем к выводу, что при определенной ориентации спинов по направлению силы тяжести излучение частиц не будет изотропным, а приведет к кажущемуся изменению веса тела, частицы которого (хотя бы часть из них) поляризовались.

В зависимости от «диаграммы направленности» излучения может произойти уменьшение или увеличение веса тела. Если излучение сосредоточено в «экваториальной» плоскости, то вес тела уменьшится. В случае слабого квадруполя вес тела может увеличиться. Подобные исследования уже проводятся Слабким и Покровским.

Можно, например, поляризовать «свободные» нуклоны какого-либо тела (жидкости), помещая его в магнитное поле. В слабых полях доля поляризованных нуклонов ко всему числу частиц будет зависеть от $\mu H/kT$, где μ — магнитный момент нуклона, H — напряженность магнитного поля. При $H = 10^4$ *э* $T = 300°$, $\mu H/kT = 10^{-6}$. Поскольку мезон находится «вне протона» лишь 0,1—0,2 времени пульсации, то ожидаемый эффект изменения веса тела (тяжелой массы) уменьшается на один-два порядка (или несколько меньше). При низких температурах изменение веса тела может достичь 10^{-3}—10^{-4}. В перпендикулярных направлениях к магнитному полю инерция тела (инертная масса) будет изменяться со знаком, противоположным изменению тяжелой массы. Общая интегральная масса (излучение по всему объему), конечно, не изменится. (Увеличением энергии за счет магнитного поля $H^2\bar{v}/8\pi \ll \bar{M}_0c^2$, где $\bar{M}_0$ — начальная масса, $\bar{v}$ — объем тела, всегда можно пренебречь.) Закон сохранения энергии при этом выполняется автоматически, учитывая взаимодействия локального поля данного поляризованного нуклона с общим гравитационным фоном Метагалактики.

Масса тел имеет тензорные свойства, которые, очевидно, можно исследовать при анизотропном гравитационном излучении. Если исследовать решения уравнения Дирака для частиц со спином $s = 1/2$, находящихся во внешнем гравитационном поле, то можно установить слабую зависимость изменения гравитационного взаимодействия от ориентации спина.

Поскольку часть гравитонов должна обладать зарядом (во всяком случае, около половины числа гравитонов), то в электрическом поле гравитоны должны отклоняться, что может также привести к анизотропии гравитационного излучения.

Очевидно, что принцип эквивалентности при гравитационном излучении может выполняться только с точностью до порядка членов c^{-4}. Так как излучение зависит от c^{-5}, то не удивительно, что этот вовсе не обязательный для построения общей теории относительности принцип может нарушаться.

В связи с гравитационным излучением элементарных частиц следует отметить еще один любопытный факт.

При «вращении» мезонного облака около «керна» нуклона это облако с периодом времени около 10^{-24} *сек* выбрасывается из керна и снова в него втягивается. Этот процесс грубо можно описать следующим образом. Поскольку гравитационная энергия взаимодействия мезона и внутренних частей нуклона

$$E_g = -\frac{Gm_1m_2}{2r}, \text{ то } \frac{dr}{dt} = \frac{2r^2}{Gm_1m_2}\frac{dE_g}{dt} = -\frac{64}{5}\frac{m_1m_2c}{M^2}\left(\frac{r_0\omega}{c}\right)^6.$$

Интегрируя, найдем, что

$$\frac{r}{r_0} = 1 - \frac{64}{5}\frac{m_1m_2}{M^2}\left(\frac{r_0\omega}{c}\right)^6\frac{ct}{r_0};$$

при $t = 0$ $r = r_0$, при $t = \frac{r_0}{c} = \frac{1}{\omega}$ $\frac{r}{r_0} = 0$. (Если при интегрировании полагать справа r переменным, то при $t = \frac{1}{\omega}$ $\frac{r}{r_0} = 2\cdot10^{-2}$, $r = 2\cdot10^{-15}$ *см*, что мало отличает от нуля.) Отсюда следует, что за одну пульсацию гравитационное излучение так изменяет энергию нуклона, что этого оказывается достаточным для падения мезона на керн ядра.

Итак, мы видим, что квантование гравитационного поля наталкивается на значительные, пока непреодолимые трудности. Удается квантовать лишь слабые волны, однако и эта операция не является корректной, потому что слабое поле не бывает изолированным, а находится на фоне сильного поля (в кривом пространстве). Возмущения сильного поля могут уничтожить или видоизменить тонкие квантовые эффекты слабого поля.

Для квантования сильного поля предлагались различные методы. При этом надо иметь в виду, что гравитационное излучение — это процесс преобразования частиц, приводящий к изменению мировых констант.

Существенно, что произвольное гравитационное поле нелинейно и величины $\frac{\sqrt{-g}\,R}{\varkappa}$, являющиеся плотностью действия, не аддитивно входят в общее действие многих частиц и полей даже при $\varkappa = \text{const}$. Поскольку при этом не выполняются принципы суперпозиции, трудно говорить вообще об обычном квантовании. Нелинейное же квантование полей пока неизвестно.

В случае гравитационного поля, видимо, надо пользоваться не величиной $\hbar$, а ее плотностью $\frac{\hbar}{\Omega}$, где $d\Omega = dvcdt$ — 4-х объем, и находить перестановочные соотношения между $R^{-1/2} \sim \sim \frac{1}{\sqrt{\varkappa T}}$ и $\frac{p}{c\lambda}$ или $\frac{T}{c\lambda_3}$, где T — свернутый тензор энергии-импульса материи, λ — длина волны.

§ 9. Возможная структура и развитие материи

Вопрос о дискретной (квантовой) структуре пространства-времени рассматривается с давних пор различными авторами (Иваненко, Амбарцумян, Гейзенберг, Кадышевский, Марков, Абраменко, Снайдер, Коиш, Шапиро и др.). Эти работы весьма интересны; в них обнаружены различные характерные масштабы и ячейки 4-х и 3-х пространств, в которых разыгрываются квазистабильные материальные процессы. Но в них практически не устанавливается связь между этими ячейками и различными «мировыми константами» и их эволюцией со временем: с ними скорее связывается тип взаимодействия частиц и законы сохранения четности, симметрии и т. д. Наш формализм, хотя и предварительный, позволяет несколько продвинуться вперед в этом вопросе и установить количественную взаимосвязь между пространством и материей.

Еще Планк обратил внимание на то, что из констант G, $\hbar$, c можно построить два размерных выражения:

$$L^*_{см} = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}}, \qquad m^*_г = \sqrt{\frac{\hbar c}{G}}. \tag{9.1}$$

Первое соотношение легко выводится из второго в предположении $L^* = \hbar/m^*c$. Второе соотношение обозначает, что энергия сильных и гравитационных взаимодействий при $L = L^*$ одинакова. В настоящее время $L^* = 1{,}6 \cdot 10^{-33}$ *см*, $m^* = 2{,}2 \cdot 10^{-5}$ *г*. Первая величина обычно связывается с флуктуациями метрики гравитационного поля, а вторая — с флуктуациями массы, как это, например, делают Блохинцев и Уиллер. Первая величина совпадает с введенным нами размером гравитона

$$\Delta\lambda_g = \frac{r_0}{\sqrt{T_m}}.$$

В самом деле,

$$L^* = \sqrt{\frac{\hbar_0 G_0}{c^3 T_m}}, \tag{9.2}$$

где $\hbar = \frac{\hbar_0}{T_m^2}$, $G = G_0 T_m$, $\hbar$ и G_0 — начальные значения $\hbar$ и G при $T_m = 1$. Очевидно, что

$$\Delta\lambda_{g0} = r_0 = \sqrt{\frac{\hbar_0 G_0}{c^3}}. \tag{9.3}$$

Далее,

$$m^* = \frac{M_0}{T_m^{3/2}} = \sqrt{\frac{\hbar_0 c}{G_0 T_m^3}}, \tag{9.4}$$

$$M_0 = \sqrt{\frac{\hbar_0 c}{G_0}}. \tag{9.5}$$

Поскольку мы считаем, что

$$r_0 = \mathrm{const}, \qquad c = \mathrm{const}, \qquad E_0 = M_0 c^2 = \mathrm{const},$$

то, зная r_0, c, E_0, легко определить $\hbar_0$ и G_0:

$$G_0 = c^2 \frac{L_0}{m_0}, \qquad \hbar_0 = M_0 L_0 c.$$

Наоборот, зная $\hbar$, G и c, легко найти

$$M_0 = \sqrt{\frac{\hbar c}{G}} T_m^{3/2}, \qquad L_0 = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}} T_m^{1/2}. \tag{9.6}$$

Поскольку $L_0 = r_0 = \Delta\lambda_{g0}$ также известно, то из (9.6) имеем

$$T_m = \frac{r_0^2 c^3}{\hbar G}, \qquad M_0 = \frac{c^5 r_0^3}{\hbar G^2}. \tag{9.7}$$

Подставляя

$$r_0 = 2\cdot 10^{-13}\ \text{см},\ c = 3\cdot 10^{10}\ \text{см/сек},\ \hbar = 10^{-27}\ \text{эрг}\cdot\text{сек},$$
$$G = \frac{2}{3} 10^{-7}\ \text{см}^3\cdot\text{г}^{-2}\cdot\text{сек}^{-2},$$

находим
$T_m = 10^{40}$, $M_0 = 10^{56}$ *г*; при этом $N = 10^{80}$. Контролируя, находим $M_p = \frac{m_0}{N} = 10^{-24}$ *г*. Контрольное соотношение

$$\frac{GM_0}{Rc^2} = \frac{G_0 M_0}{r_0 c^2}$$

при этом дает значение ≈ 6. Очевидно, что $R = 6T_m r_0$; при этом $R = 10^{28}$ *см*.

Далее, легко вычислить $G_0 = \frac{G}{T_m} = \frac{2}{3} 10^{-47}$, $h_0 = \hbar T_m^2 = 10^{53}$, $e^2 = r^* mc = 5\cdot 10^{-10}$, $e_0 = eT_m = 5\cdot 10^{30}$, $\omega_0 = \frac{c}{r_0} = \frac{3}{2}\ 10^{23}$, $R = r_0 T_m = 2\cdot 10^{27}$ *см*.

Выясним теперь смысл величины

$$m^* = \frac{M_0}{T_m^{3/2}} = \frac{M_0}{N^{3/4}} = \frac{M_0}{N_g^{*3/2}}.$$

Эта величина флуктуации массы нашей Вселенной связана с энергией гравитонов, точнее говоря, $m^*c^2 = E^*$ есть величина флуктуации энергии гравитонов (гравитационного поля) в нашей Вселенной.

Аналогичные рассуждения с точки зрения элементарной теории флуктуации энергии и пространства можно сделать и для электронов, число которых должно быть больше, чем число нуклонов. Точнее говоря, надо было бы рассмотреть флуктуации двухкомпонентной среды. Однако это уточнение пока еще не имеет смысла проводить. Мы ведь не знаем предысторию образования «первой частицы». При $T_m = 1$ $N = 1$ (или $N = 2$), поэтому можно говорить о «взрыве» прародительского «атома», но с неизвестно какими свойствами, как это делает Гамов, или же считать, вместе с Блохинцевым, что имело место столкновение двух ультра-ультрарелятивистских частиц неизвестной природы. Может быть отношения масс электрона и протона $M_e/M_p = 1/1840 = \text{const}$ и величина постоянной тонкой структуры $\bar{\alpha} = e^2/\hbar c = 1/137 = \text{const}$ получат объяснение только после того, как мы узнаем эту «предысторию». Может быть, какие-то черты этой предыстории сохранились и поныне и мы в состоянии, как это предполагал Эддингтон, по свойствам волновой функции найти эти величины.

Пока же будем рассуждать так.

Поскольку $e^2 = r^* m_e c^2$, то

$$\bar{\alpha} = \frac{r^* M_e c^2}{\hbar c} = \frac{r^* c M_p}{1840\hbar c} = \frac{r^* c M_0}{1840\hbar_0} = \frac{r^* M_0 c r_0}{r_0 1840\hbar_0} \simeq \frac{r^*}{r_0 1840}.$$

Следовательно, $\bar{\alpha}$ и отношение M_e/M_p связаны между собой через характерные размеры электрона $[M_e/M_p \approx \alpha^{-3/2}]$. Для уточнения наших оценочных вычислений помимо m_0, r_0, c и $N = T_m^2$ следует задать одну из этих величин. Отношение

$$\frac{\hbar c}{G M_p^2} = \frac{\hbar_0 c T_m}{G_0 M_0^2} \simeq \frac{T_m}{20} \simeq \frac{10^{39}}{6},$$

откуда $T_m = 3 \cdot 10^{40}$, что близко к значению T_m, найденному выше.

Значение постоянной Хеббла $\alpha_x = \frac{1}{T_x} = \frac{1}{3 \cdot 10^{17}}\,\textit{сек}^{-1} \approx$ $\approx 3 \cdot 10^{-18}\,\textit{сек}^{-1}$. Поскольку $\omega_0 = 1{,}5 \cdot 10^{23}\,\textit{сек}$, то $T_m = 4{,}5 \cdot 10^{40}$, что близко к только что найденному значению T_m.

Таким образом, можно думать, что величина T_m может лежать в пределах $10^{40} < T_m < 5 \cdot 10^{40}$ и, во всяком случае, не превосходит (если учесть энергию электронов) значение 10^{41}.

В § 6, ч. II [см. (6.47)] мы получили для M_0 соотношение

$$M_0 = M_p T_m^2 = \frac{r c^2}{2\,\xi_1 G_0}.$$

Исходя из этого соотношения можно допустить, что фактор $\xi_1 = 1$. Там же для нуклонов мы нашли $\xi_1 \approx 10^{-1}$, что уменьшает значение T_m в три раза, т. е. приближает значение T_m к 10^{40}. Однако вычисления, проделанные в данном параграфе, кажутся нам более надежными, поскольку они в какой-то мере основаны на фактическом материале, в то время как в § 6 они основывались на приближенной теории излучения гравитационных волн. Не удивительно, что, несмотря на столь огромные величины, расхождение в их значении получается не более чем на полпорядка.

Остановимся для дальнейших вычислений на величине $N = 5 \cdot 10^{40}$. Прежде всего определим возможный момент количества движения нашей Вселенной, точнее говоря, момент количества движения гравитационного поля ($\mathfrak{M}_g$). Поскольку, например, компонента псевдотензора $t^1_2 \approx \frac{1}{\varkappa a^2}$, $t^2_1 = 0$ и другие отличные от нуля компоненты имеют тот же порядок величин, то компоненты $\mathfrak{M}_{ik}$ не сохраняются. Однако если симметризовать псевдотензор t^{ik}, то полный момент импульса поля и материи будет сохраняться по порядку величины. Момент гравитационного поля

$$\mathfrak{M}_g = -\frac{t^1_2 a V_0}{c} \approx -\frac{a^2 c^3}{G} \approx -\frac{c^5 T_m}{G_0 \omega_0^2} \approx -m_0 r_0 c T = -m_0 R C; \tag{9.8}$$

момент импульса материи (поскольку T^1_2 и T^2_1 тоже порядка $\sim c^4 a^2/G$) имеет почти ту же величину, но взятую с обратным знаком.

Мы приходим к вполне разумному результату. Величина момента растет со временем. Полный момент количества движения должен сохраняться и иметь значение

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_0 = \hbar_0 = m_0 r_0 c. \tag{9.9}$$

Величина $\hbar_0$ может играть роль действия в нашей Вселенной. Так как $\hbar_0 = \hbar T_m^2 = \hbar N$, то

$$\mathfrak{M}_g = -\hbar_0 T_m = -\hbar N^{3/2}, \tag{9.10}$$

на один гравитон приходится момент поля приблизительно $\hbar$ ($2\hbar$). Очевидно, что поскольку момент поля растет, а полный момент количества движения должен сохраняться, то надо предположить, что момент материи $\mathfrak{M}_m = \hbar_0 + \hbar N^{3/2}$, тогда

$$\mathfrak{M}_m + \mathfrak{M}_g = \hbar_0 = \text{const}.$$

При расширении нашей Вселенной гравитационное излучение помогает раскручивать Вселенную и ее отдельные области, например галактики.

В предыдущих параграфах мы получили существенный результат, который здесь несколько уточнен, а именно гравитационное поле можно рассматривать как флуктуацию электромагнитного поля. Число гравитонов, приходящихся на один нуклон (одну элементарную частицу), $N_g^* = \sqrt{N}$. Флуктуация объема для гравитации и масса гравитона определяются соотношениями

$$\Delta V_g = \frac{V_0}{N_g \sqrt{N_g}} = \frac{V_0}{N_p^{3/2} N_g^{*3/2}} = \frac{\Delta V_p}{N_g^{*3/2}}, \quad m_g = \frac{m_p}{\sqrt{N}} = \frac{M_p}{N_g^*} \text{ и т. д.}$$

Если энергия нуклонов и электронов испытывает флуктуации, то, очевидно, и гравитоны могут отдавать в пространство за счет флуктуации часть своей энергии в виде еще более «элементарных» мелких частиц. Попробуем рассмотреть иерархию классов частиц в условиях, когда более мелкие частицы рождаются за счет флуктуации более крупных.

Пусть соответствующий номер класса частиц n описывает элементарные частицы (нуклоны и электроны), гравитоны и другие частицы высших классов. Тогда, считая, что

$$E_{n+1} = \frac{E_n}{\sqrt{N_n}}, \qquad m_{n+1} = \frac{m_n}{\sqrt{N_n}}, \qquad N^*_{n+1} = \sqrt{N_n} \qquad (9.11)$$

(где N_{n+1} — число частиц класса $n+1$, приходящихся на одну частицу класса n), придем к такой закономерности, определяющей «размеры» частиц и флуктуации этих размеров:

$$V_n = \frac{V_0}{N_{\text{п}n}}, \qquad \Delta V_n = \frac{V_0}{N_{\text{п}n}^{3/2}}. \qquad (9.12)$$

Зная (9.11), легко рассчитать полное число частиц различных классов:

$$N_{1\text{п}} = \int T_m^2 dT_m = \frac{T_m^3}{3}, \qquad N_{2\text{п}} = \frac{1}{3}\int \frac{T_m^3}{\sqrt{T_m}}\, dT_m = \frac{2}{3\cdot 7}\, T_m^{7/2},$$

$$N_{3\text{п}} = \frac{2\cdot 4}{3\cdot 7\cdot 15} T_m^{15/4}, \qquad N_{4\text{п}} = \frac{2\cdot 4\cdot 8}{3\cdot 7\cdot 15\cdot 31} T_m^{31/8} \text{ и т. д.}$$

Отсюда следует в общем виде, что

$$N_{\text{п}n} = A_n T_m^{2(2-2^{-n})}, \qquad (9.13)$$

где

$$A_n = \frac{\Pi 2^{n-1}}{\Pi\,(4\cdot 2^{n-1} - 1)}, \qquad A_0 = 1, \qquad A_\infty = 0, \qquad A_1 = \frac{1}{3},$$

$$A_2 = \frac{2}{21} \approx \frac{1}{10}, \qquad A_3 = \frac{1}{40}.$$

При больших n

$$A_n = \frac{1}{10 \cdot 4^{n-2}} \quad (n \geqslant 2).$$

Масса частиц класса n определяется из соотношений

$$m_0 = M_p = \frac{M_0}{T_m^2}, \quad m_1 \approx \frac{m_0}{T_m}, \quad m_2 \approx \frac{m_0}{T_m^{3/2}}, \quad m_3 \approx \frac{m_0}{T_m^{7/4}}, \quad m_4 \approx \frac{m_0}{T_m^{15/8}}$$

и т. д.,

где m_0 — масса частицы класса $n=0$ (нуклоны). Отсюда следует, что

$$m_n = A_n m_0 T_0^{-2(1-2^{-n})} = A_n M_0 T_n^{-2(2-2^{-n})}. \tag{9.14}$$

Полная масса частиц класса n есть

$$m_{\text{п}n} = m_n N_{\text{п}n} = A_n m_0 T_m^2 = A_n M_0, \tag{9.15}$$

где M_0 — полная масса частиц класса $n = 0$. При $n \to \infty$

$$N_{\infty\text{п}} = A_\infty T_m^4 \to 0, \qquad m_\infty = \frac{m_0}{T_m^2} = \frac{M_0}{T_m^4},$$

$$m_{\infty\text{п}} = A_\infty M_0 \to 0, \qquad N_{\infty\, n\text{п}} \approx \sum_0^\infty N_{\infty\text{п}} \approx \text{const}\ T_m^4.$$

Полная масса и энергия частиц есть

$$M_{0\text{п}} = \Sigma A_n M_0, \qquad E_{0\text{п}} = \Sigma A_n E_0, \tag{9.16}$$

где $E_0 = M_0 c^2$.

Весьма полезно отметить, что Абраменко находит полное число ячеек (квантов) 4-х пространства-времени (полное число возможных частиц) следующим образом. 4-х объем одной частицы $\Delta\Omega = \frac{r_0^3}{\omega_0}$; полный 4-х объем пространства $\Omega = \frac{R^3}{\alpha}$; отношения объемов есть $\left(\frac{R}{r_0}\right)^3 \frac{\omega_0}{\alpha} = T_m^4$, что полностью совпадает с нашими вычислениями, поскольку при $n \to \infty$ $N_n \sim A_n T^4$.

Можно рассуждать и следующим образом. Поскольку нуклоны и электроны «стареют», теряют свою энергию со временем, испуская более «мелкие» в энергетическом смысле частицы, которые мы назовем гравитонами, то, очевидно, следует предположить, что и гравитоны могут «стареть» со временем, также испуская еще менее значительные по энергии частицы — «субгравитоны», и т. д. Другими словами, следует допустить, что может существовать определенная иерархия частиц.

Попытаемся установить основные закономерности этой иерархии. Поскольку $N_0 \approx T_m^2$, $N_1 \approx T_m^3$ (где N_0 и N_1 — полные числа нуклонов и гравитонов, а $\frac{N_1}{N_0} \approx T_m = \sqrt{N_0} = N_1^*$, где N_1^* — «виртуальное» количество гравитонов в одном нуклоне), то $N_1 = N_0 \sqrt{N_0} = N_0 N_1^*$. Таким образом, можно допустить, что «виртуальное» число гравитонов в одном нуклоне определяется флуктуацией числа нуклонов в пространстве.

Продолжая рассуждения, надо положить, что

$$N_2^* = N_1^{*1/2} = N_0^{1/4} = T_m^{1/2}, \quad N_2 = N_1 N_2^* = T_m^{3+1/2} = T_m^{7/2} \text{ и т. д.}$$

Легко написать общую формулу для N_n, где N_n — число частиц класса n:

$$N_n \approx T_m^{2(2-2^{-n})}. \tag{9.17}$$

При $n \to \infty$ $N_\infty \approx T_m^4$.

Поскольку объем, приходящийся на нуклон,

$$\Delta v \approx r_0^3 \approx \frac{V_0}{N_0^{3/2}} \simeq \frac{R^3}{N_0^{3/2}} \simeq \frac{r_0^3 T_m^3}{N_0^{3/2}},$$

то аналогично найдем, что

$$\Delta v_n \approx r_n^3 \approx \frac{V_0}{N_n^{3/2}} \approx r_0^3 \frac{T_m^3}{N_n^{3/2}},$$

откуда

$$\frac{r_n}{r_0} = \frac{T_m}{N_n^{1/2}} = \frac{T_m}{T_m^{2-2^{-n}}} = \frac{1}{T_m^{1-2^{-n}}} \frac{r_n}{R_0} = \frac{1}{T_m^{2-2^{-n}}}. \tag{9.18}$$

Для гравитонов $\frac{r_1}{r_0} = \frac{1}{\sqrt{T_m}}$, что соответствует действительности.

При $n \to \infty$ $\frac{r_\infty}{r_0} = \frac{1}{T_m}$, откуда $r_\infty = r_{g0} = \frac{2Gm_p}{c^2}$.

Заметим, что длина пробега частиц всех классов одинакова и соответствует размерам Метагалактики. В самом деле,

$$\lambda_n \approx \frac{1}{r_n^2 n_n} = \frac{V_0}{r_n^2 N_n} = \frac{r_0^3 T_m^3}{r_n^2 T_m^{2(2-2^{-n})}},$$

откуда

$$\lambda_n \sim r_0 T_m \sim R. \tag{9.19}$$

Поскольку $N_0 m_0 c^2 = \text{const}$, $N_1 m_1 c^2 = \text{const}$, то можно полагать, что и $N_n m_n c^2 = \text{const} = E_n$, откуда

$$m_n c^2 = \frac{E_n}{T_m^{2(2-2^{-n})}} = \frac{M_n c^2}{T_m^{2(2-2^{-n})}}. \qquad (9.20)$$

Причем можно полагать, что величины E_n имеют близкий порядок.

Плотность различных частиц определяется из соотношения

$$\delta_n \simeq \frac{m_n}{r_n^3} = \frac{E_n T_m^{3(1-2^{-n})}}{r_0^3 c^2 T_m^{2(2-2^{-n})}} \approx \frac{\delta_{0n}}{T_m^{1+2^{-n}}}, \qquad (9.21)$$

где $\delta_{0n} = \frac{E_n}{c^2 r_0^3} \approx \frac{M_n}{r_0^3}$ — начальная плотность частиц класса n.

Попробуем теперь рассчитать частоты столкновений частиц различных классов между собой (число столкновений частицы в секунду).

Порядок частот соударений можно вычислить по приближенному соотношению (мы не вводим экспоненты $e^{-\hbar\omega/kT_0}$, которая несущественна)

$$\frac{\omega_{nk}}{\omega_{00}} = \frac{\pi c r_n^2 n_k}{\omega_0} \approx \left(\frac{r_n}{r_0}\right)^2 r_0^3 n_k = \left(\frac{r_n}{r_0}\right)^2 \frac{N_k}{T_m^3}, \qquad (9.22)$$

где $\omega_{00} \approx \frac{\pi c}{r_0}$. Подставляя значения $\frac{r_n}{r_0}$ и N_k, найдем

$$\frac{\omega_{nk}}{\omega_{00}} = \frac{T_m^{4-2\cdot 2^{-k}}}{T_m^{5-2\cdot 2^{-n}}} = \frac{1}{T_m^{1+2(2^{-k}-2^{-n})}}. \qquad (9.23)$$

При $k = n + 1$

$$\frac{\omega_{n,n+1}}{\omega_{00}} = \frac{1}{T_m^{1-2^{-n}}}. \qquad (9.24)$$

Если $k = 1$, то $\frac{\omega_{01}}{\omega_{00}} = 1$, т. е. частота соударений нуклонов с гравитонами совпадает с частотой сильных взаимодействий. Таким образом, ударяющие гравитоны не только выбивают из нуклона новые, но и поддерживают постоянную частоту флуктуаций мезонного облака, являясь, видимо, ее причиной. При $k = n$

$$\frac{\omega_{nn}}{\omega_{00}} = \frac{1}{T_m}. \qquad (9.25)$$

При $k \to \infty$

$$\frac{\omega_{n\infty}}{\omega_0} = \frac{1}{T_m^{1-2\cdot 2^{-n}}}. \qquad (9.26)$$

Считая, что при каждом столкновении двух частиц меньшие «выбивают» из больших энергию, равную (или большую, что правдоподобно) той, которую несут эти меньшие частицы, мы придем к выводу, что частицы всех классов «выбивают» из данной частицы примерно одинаковое количество энергии (или массы), поскольку $N_k m_k c^2 \simeq E_k = \text{const}$. В самом деле,

$$\Delta E_{nk} \approx \left(\frac{r_n}{r_0}\right)^2 \frac{N_k m_k c^2 \Delta T_m}{T_m^3} \approx \frac{E_k \Delta T_m}{T_m^{5-2\cdot 2^{-n}}} \approx E_k \Delta \left[\frac{1}{T_m^{2\,2(2-2^{-n})}}\right].$$

При заданном n и ΔT $\Delta E_{nk} \sim E_k$.

Подсчеты частот хорошо обосновывают вывод соотношения (9.14). Можно написать, что

$$dN_{n+1} = N_n \omega_n dt = N_n dT_m \frac{\omega_n}{\omega_0} = \frac{N_m dT_m}{T_m^{1-2^{-n}}}, \quad (\omega_0 = \omega_{00}).$$

Пусть $N_n = A_n T_m^{\alpha_n}$, тогда $T_m^{\alpha_{n+1}} \backsim T_m^{\alpha_n} T_m^{2^{-n}}$, откуда имеем $\alpha_{n+1} = \alpha_n + 2^{-n}$, что дает

$$\alpha_n = 2(2 - 2^{-n}),$$

$$dN_{n+1} = \frac{A_n T_m^{2\,(2-2^{-n})}\, dT_m}{T_m^{1-2^{-n}}} = A_n T_m^{3-2^{-n}} dT_m,$$

$$N_{n+1} = \frac{A_n}{4 - 2^{-n}} T_m^{4-2^{-n}} = \frac{A_n}{2\,[2 - 2^{-(n+1)}]} T_m^{2\,[2-2^{-(n+1)}]},$$

где

$$A_n = \frac{\Pi 2^{n-1}}{\Pi (4\cdot 2^{n-1} - 1)}.$$

Однако коэффициенты A_n неточны, поскольку при различных столкновениях частиц классов n и k также рождаются частицы разных классов. Вряд ли следует их уточнять, хотя формально это можно сделать, поскольку мы практически мало что знаем о механизме соударений и образовании новых частиц. Следует лишь иметь в виду, что полная энергия всех частиц $E_0 = \Sigma A_n m_n c^2$ должна быть задана и ряд $A_n m_n$ должен иметь пределом величину $M_0 = \Sigma A_n m_n$.

Плотность частиц класса n определяется соотношением

$$\delta_n = \frac{m_n}{(r_n)^3} \approx A_n^{3/2} \frac{m_0}{R_0^3} T_m^{4-2^{-n}} = A_n^{3/2} \frac{m_0}{r_0^3} T_m^{(1-2^{-n})} = A_n^{3/2} \frac{M_0}{r_0^3} T_m^{-(1+2^{-n})}.$$

Если определять плотность как

$$\delta = \frac{m^*}{L^{*3}} = \frac{c^5}{\hbar G^2} \approx \text{const} \approx \frac{10^{56}}{10^{-39}} \simeq 10^{95}\ г/см^3,$$

то очевидно, что она характеризует начальную плотность материи при $T_m = 1$, но величина δ не является плотностью вакуума, как это утверждает Уиллер.

Квадрат напряженности электростатического поля гравитона есть

$$\varepsilon_e^2 = \frac{e^2}{L^{*4}} = \frac{c^7}{\hbar G^2} = \text{const}.$$

Поскольку $\hbar_m = m_n r_n c$,
где

$$r_m = R_0 N_{\text{пп}}^{-1/2} = R_0 A_n^{-1/2} T_m^{-(2-2^{-n})},$$

то

$$\hbar_m = c r_0 m_0 A_n^{-1/2} T_m^{3(1-2^{-n})} = \hbar_0 A_n^{-1/2} T_m^{3(1-2^{-n})}. \tag{9.27}$$

При этом

$$r_{\min} = \frac{R_0}{T_m^2} = \frac{r_0}{T_m} = r_g, \quad \Delta T_{\min} = \frac{r_g}{c}.$$

Сейчас $r_{\min} \approx 10^{-55}$ *см*; $\Delta T_{\min} \simeq 10^{-65}$ *сек*.
Изменение величины $\hbar_n$ определяется соотношением

$$\Delta\hbar_n = \frac{\hbar_m}{\sqrt{N_{\text{пп}}}} = \frac{\hbar_m}{\sqrt{A_n T_m^{2-2^{-n}}}} = \frac{\hbar}{A_n} T_m^{-(5-4/2^n)}. \tag{9.28}$$

Поскольку

$$e^2 = \xi m_n r_n c^2 = \text{const}\ \hbar_m c = 137 \hbar_n c,$$

то e_n^2 определяется соотношением (9.27)

$$\hbar_\infty = \frac{\hbar_0}{A_n T_m}, \qquad \Delta\hbar_\infty = \frac{\hbar_0}{A_n T^5}.$$

Не очень ясно, как меняются («стареют») частицы различных классов ($n = 1, 2, 3, \ldots$), испущенные в разные моменты времени. Если написать соотношение

$$dm_n \approx \omega_n m_{n+1} dt = m_{n+1} \frac{\omega_n}{\omega_0} dT, \tag{9.29}$$

поскольку

$$\frac{\omega_n}{\omega_0} \approx T^{-(1+2^{-n})}, \qquad m_{n+1} \simeq M_0 T^{-(4-2^{-n})},$$

будем иметь

$$dm_n = \frac{M_0 dT}{T^{5-2\cdot 2^{-n}}}$$

и

$$m_n \approx \frac{M_0}{T^{2(2-2^{-n})}}. \tag{9.14}$$

Таким образом, мы полагаем, что частицы всех классов, образовавшиеся в любой момент времени, «стареют» по одному закону (9.14). Однако из гравитонов и других частиц классов $n \geqslant 1$, энергия которых мала, при взаимодействиях практически не будут возникать новые элементарные частицы (нуклоны и электроны). Поэтому надо полагать, что соотношение (9.29) является предельным и не описывает реально происходящих взаимодействий, так же как пределен закон $m_1 = m_g = \text{const}$, использованный нами ранее.

Около половины гравитонов и частиц старших классов образуется из обломков заряженных частиц и потому обладает электрическим зарядом. Одновременно заряженные гравитоны и частицы высших классов, очевидно, могут взаимодействовать на таких расстояниях, при которых не будет непосредственного контакта между частицами. При этом частицы не будут терять своей энергии (массы покоя) и закон «старения», возникший в какой-либо момент времени частицы, не будет описываться соотношением (9.14). Он будет иным, например с другим показателем степени у T_m. (Под массой покоя элементарных частиц и частиц классов $n \geqslant 1$ следует по существу понимать их энергию, деленную на квадрат скорости света, поскольку скорости движения более мелких образований, из которых состоят эти частицы, близки к скорости света.)

С течением времени число безрезультатных взаимодействий должно возрасти. В самом деле, поскольку для нуклонов

$$e^2 = e_0^2 \sim m_0 \sim T_m^{-2}, \text{ то } \frac{e_1^2}{m_1} = \frac{(\Delta e_0)^2}{\Delta m_0} = \frac{e_0^2}{m_0} = \text{const}$$

и

$$\frac{e_1}{m_1} = \frac{e_0}{m_0}\sqrt{\frac{m_0}{m_1}} = \frac{e_0\sqrt{T_m}}{m_0}.$$

Далее следует, что $\dfrac{e_n^2}{m_n} = \dfrac{e_0^2}{m_0} = \text{const}$, $\dfrac{e_n}{m_n} = \dfrac{e_0}{m_0}\sqrt{\dfrac{m_0}{m_n}} =$

$= \frac{e_0}{m_0} T_m^{1-2^{-n}}$, т. е. отношение заряда к массе растет и повышает роль кулоновых сил, приводящих к меньшим контактам одноименных частиц.

Допустим, что в момент времени T_{mn} возникает частица класса n с массой $m_{п\text{н}}$ и что в среднем для всех частиц класса n $m_n = nm_{\text{пп}} \left(\frac{T_{nm}}{T_m}\right)^\alpha$. Попробуем определить степень α из следующих соображений.

Прежде всего заметим, что отношения полных чисел частиц и их масс двух соседних классов определяются соотношениями

$$\frac{N_{n+1,n}}{N_{\text{п}n}} = \frac{A_{n\text{п}}}{A_n} T_m^{1/2n}, \qquad \frac{m_n}{m_{n-1}} \simeq T_m^{1/2^{n-1}}.$$

Допустим далее, что и

$$\frac{m_n}{m_{\text{пн}}} = \left(\frac{T_{m\text{н}}}{T_m}\right)^{1/2^{n-1}}. \tag{9.30}$$

Таким образом, в момент времени $T_m = T_{m0}$ масса частиц класса n будет

$$m_n = m_{\text{пн}} \left(\frac{T_{m\text{н}}}{T_{m0}}\right)^{1/2^{n-1}} = \frac{M_0}{T_{m\text{н}}^{2(2-2^{-n})}} \left(\frac{T_{mn}}{T_{m0}}\right)^{1/2^{n-1}}. \tag{9.31}$$

В действительности часть частиц будет «стареть» по закону (9.14), а часть — по иному, более медленному, чем (9.30). Однако, не уточняя деталей этих процессов, для предварительных расчетов можно воспользоваться усредненным законом (9.30). Число столкновений частиц класса n между собой во всем объеме нашей Вселенной за время $\Delta T_m = T_{m0} - T_{m\text{н}}$ определится соотношением

$$dN_{n\text{ст}} = \frac{\pi c\,(\Delta r_n)^2 N_{\text{пп}m}^2\, dT_m}{V_0\omega_0} = \frac{\sigma c A_n T_{m\text{н}}^{4(2-2^{-n})}}{\omega_0 R_0 T_m^{2(2-2^{-n})}}\, dT_m.$$

Поскольку

$$\frac{c}{\omega_0 R_0} = \frac{c}{\omega_0 r_0 T_m} \approx \frac{1}{T_m},$$

то

$$dN_{n\text{ст}} = A_n \sigma T_{m\text{п}}^{4(2-2^{-n})}\, dT_m T_m^{-[1+2(2-2^{-n})]}.$$

Интегрируя это выражение, найдем

$$N_{n\text{ст}} = \frac{\sigma A_n T_{m\text{н}}^{4(2-2^{-n})}}{2(2-2^{-n})}\left[T_{m\text{н}}^{-2(2-2^{-n})} - T_{m0}^{-2(2-2^{-n})}\right]. \tag{9.32}$$

Напишем (9.32) в виде

$$\frac{N_{n\text{ст}}}{N_{m\text{пт}}} = \frac{\sigma}{2(2-2^{-m})}\left[1 - \left(\frac{T_{mn}}{T_{m0}}\right)^{2(2-2^{-n})}\right], \tag{9.33}$$

где σ — коэффициент, зависящий от кривизны пространства и характера столкновений $\left(\sigma = \frac{\pi R_0^3}{V_0}\right)$. Полагая $\sigma = 2(2-2^{-m})\sigma_0$, причем $\sigma_0 \leqslant 1$, найдем, что к моменту времени T_{m0} еще осталось число частиц класса

$$\Delta N_n = N_{n\text{пт}}\left[\sigma_0\left(\frac{T_{m\text{н}}}{T_{m0}}\right)^{2(2-2^{-n})} + (1-\sigma_0)\right]. \tag{9.34}$$

Очевидно, что если $\sigma_0 = 1$, то все столкновения этих частиц произойдут при $T_{m0} \to \infty$. При $\sigma_0 < 1$ всегда останутся нестолкнувшиеся частицы. (Заметим, что зависимости числа частиц и энергии от времени мы получаем степенные, а не экспоненциальные, поскольку массы частиц и само их число переменны, см. рис. 4, где показано схематическое изменение энергии нуклонов и гравитонов со временем.)

Выберем такие моменты времени $T_{m\text{н}}$, чтобы при $T_m = T_{m0}$ $m_n = m_p = m_0$. Очевидно, что из (9.31) следует

$$\frac{M_0}{T_{m0}^2} = \frac{M_0}{T_{m\text{н}}^{2(2-2^{-n})}}\left(\frac{T_{m\text{н}}}{T_{m0}}\right)^{\frac{1}{2^{n-1}}},$$

откуда

$$T_{m\text{н}} = T_{m0}^{1/2}. \tag{9.35}$$

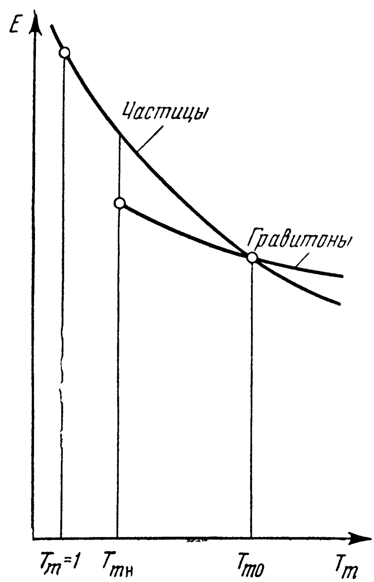


Рис. 4. Трансмутации гравитонов.

К моменту времени T_{m0} произойдет следующее число столкновений:

$$N_{n\text{ст}} = N_{n\text{п}m}\sigma_0 \left[1 - T_{m0}^{-(2-2^{-n})}\right], \tag{9.36}$$

при этом

$$\Delta N_n = N_{n\text{п}m}\left[\sigma_0 T_{m0}^{-(2-2^{-n})} + (1 - \sigma_0)\right]. \tag{9.37}$$

Если $\sigma_0 = 1$, то $\Delta N_n = N_{n\text{п}m} T_{m0}^{-(2-2^{-n})} = A_n$, т. е. к моменту времени T_{m0} столкнутся все частицы, образовавшиеся в момент времени $T_{m\text{н}}$. Если $\sigma_0 < 1$, то $\Delta N_n = (1 - \sigma_0)\, N_{n\text{п}m}$.

Поскольку энергия этих частиц больше или при $T_m = T_{m0}$ равна энергии нуклонов, то можно ожидать, что при этом будут образовываться новые нуклоны. Например, сейчас для частиц класса $n = 1$ при $\sigma_0 = 1$ (гравитоны)

$$T_{m\text{н}} = T_{m0}^{1/2} = 10^{20}, \qquad \frac{N_{n\text{ст}}}{N_{n\text{п}m}} = 1 - T_{m0}^{-3/2} = 1 - 10^{-60},$$

$$N_{1\text{п}m} = 10^{60}, \quad N_{\text{пст}} = 10^{60}\,(1 - 10^{-60}) \approx 10^{60}, \quad \Delta N_{\text{п}} = 0.$$

При $\sigma_0 = 1/4$ (это получается из соотношения

$$\sigma_0 = \frac{\pi R_0^3}{\frac{4}{3}\,\pi R_0^3 \cdot 3} = \frac{1}{4}\Bigg) \qquad \Delta N_n = \Delta N_1 = \frac{1}{4}\cdot 10^{60}.$$

Энергия частиц разных классов идет на создание новых элементарных частиц класса $n = 0$ (и других классов). Это и оправдывает сделанное нами предположение, что флуктуации энергии ведут к уменьшению энергии и массы покоя элементарных частиц и, следовательно, к необратимому излучению гравитонов (см. ч. II, § 6).

Для частиц класса $n \to \infty$

$$m_n = m_{n\text{н}} = \frac{M_0}{T_m^4}, \quad N_n = A_m T^4, \quad m_{n\text{п}} = A_n M_0.$$

При разлете этих частиц через цепочку реакций образуются новые обычные частицы (нуклоны, электроны и другие частицы) общей массой $N_m m_m \approx M_0$, что также восполняет потерю массы (энергии) нуклонами и электронами. Общий баланс энергии может определить выбор коэффициентов A_n так, чтобы выполнялись исходные соотношения зависимости числа частиц от времени.

Аналогичные расчеты можно сделать и для электронов. Легко также подсчитать, какое число частиц любой массы $M^* < M_0$

находится сейчас в пространстве. Пусть, например, $M^* = 10^{-11} M^0 = 10^{45}$ *г* $= 10^{12} M_{\odot}$, где $M_{\odot}$ — масса Солнца. Рассмотрим, например, частицы класса $n = 6$ (субгравитоны). Соотношение (9.31) дает $T_{тн} = 10^{5/2} \approx 330$, $N_n \approx 10^8$ (при $\sigma_0 = 1/4$), $\Delta N \simeq 10^7$ *частиц*. Частота столкновений сейчас во всем объеме (с нуклонами) порядка 10^{-12} *сек*$^{-1}$.

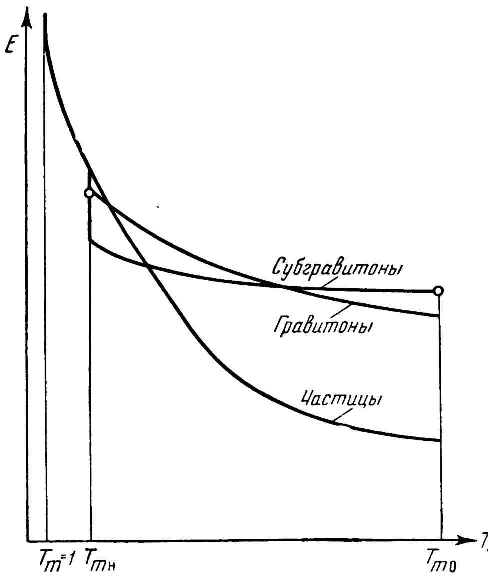


Рис. 5. Трансмутации гравитонов и «субгравитонов»

Поскольку мы наблюдаем достаточно большую часть Метагалактики (около 10^{-3}), то в этом объеме за 10^8 лет может произойти около одного подобного столкновения. Следует отметить, что частицы старших классов (при больших n), образовавшихся ранее, «стареют» медленнее, чем частицы малых n. Они-то и могут давать сейчас явления взрыва гиперзвезд и ряд еще неизвестных явлений. На рис. 5 схематически изображено изменение энергии нуклонов, гравитонов и субгравитонов со временем. Могут быть и другие взаимодействия с иными частицами, ведущие к распаду «старых мощных» частиц, что приведет к более быстрому их распаду в прошлом и к значительно меньшему числу таких частиц в настоящее время.

Не являются ли гиперновые звезды распадающимися мощными «гравитонами» какого-либо класса $n > 1$? Начальная плотность такого «гравитона» велика; например, для $n=6$ она не меньше, чем

$$\delta_6 \simeq \frac{10^{45}}{10^{-39}} = 10^{85} \ г/см^3.$$

Возможно, что так называемая дозвездная материя огромной плотности, находящаяся, по мнению Амбарцумяна, в центрах галактик, также является еще нераспавшимися частицами класса

$n \gg 1$, образовавшимися в начале развития Метагалактики. Возможно также, что именно эти частицы и дали начало образованию галактик, причем у некоторых галактик процесс старения этих частиц продолжается, что пополняет галактики новым веществом и звездами, которые могут родиться также непосредственно при распаде частиц соответствующих классов.

Поскольку некоторые частицы высоких классов ($n \gg 1$) «стареют» очень медленно, то их гравитационный радиус мало отличается от собственного радиуса, что приводит к малому собственному времени и еще более задерживает «старение». При разлете, имея околосветовую скорость, такие частицы со временем должны «тормозиться» и приобрести в конце концов скорость, соответствующую скорости расширения в данном месте.

В самом деле, «гравитационный радиус» частиц класса n изменяется со временем по закону: $\frac{r_{gn}}{r_0} = \frac{2Gm_n}{r_0 c^2}$.

Для частиц класса n, образовавшихся при $T_{nm} < T_{0m}$, будем иметь

$$\frac{r_{gn}}{r_0} = \frac{T_{0m}^{1-2\cdot 2^{-n}}}{T_{\text{н}m}^{4(1-2^{-n})}}.$$

Радиус этих частиц

$$\frac{\overset{*}{r}_n}{r_0} = \left(T_{\text{н}m}^{4(1-2^{-n})} T_{0m}^{2\cdot 2^{-n}}\right)^{-\frac{(1-2^{-n})}{2(2-2^{-n})}}.$$

Отсюда

$$\frac{r_{gn}}{\overset{*}{r}_n} = T_{\text{н}m}^{\frac{2(4\cdot 2^{-n}-2^{-2n}-3)}{2-2^{-n}}} T_{0m}^{\frac{2+2^{-2n}-4\cdot 2^{-n}}{2-2^{-n}}}.$$

При $\frac{r_{gn}}{\overset{*}{r}_n} = 1 \quad T_{0m} = T_{\text{н}m}^{\frac{2(3+2^{-2n}-4\cdot 2^{-n})}{2+2^{-2n}-4\cdot 2^{-n}}}$;

при $n = 1$ $T_{0m} = T_{\text{н}m}^{10}$; при $n \to \infty$ $T_{0m} = T_{\text{н}m}^{6}$.

Таким образом, действительно для частиц высоких классов (при $n \gg 1$) с течением времени гравитационный радиус приближается к обычному, что задерживает эволюцию («старение») частиц.

При любом законе старения частиц, образовавшихся при $T_m = T_{nm}$, более слабом, чем $\sim T_m^{-2(2-2^{-n})}$, эта закономерность всегда будет иметь место.

При столкновениях давно образовавшихся «мощных» частиц, очевидно, возникают не только новые частицы, но и жесткие

γ кванты, а также α- и β-излучения, часть которых мы можем воспринимать как космические лучи. При энергиях гравитонов, меньших, чем Mpc^2, будут образовываться электроны и в большом количестве нейтрино.

Кстати говоря, интенсивность γ-квантов и космических лучей в космическом пространстве в какой-то степени соответствует аннигиляции 10^{-46} *г·см*$^{-3}$·*сек*$^{-1}$, т. е. той величине, которая следует по нашей теории. В самом деле, за единицу времени во Вселенной нуклоны (и электроны) теряют массу $\alpha M = 10^{-18} \cdot 10^{56}$ *г/сек* $\approx 10^{38}$ *г/сек*. В единице объема эта потеря будет составлять

$$\Delta \dot{m} = \frac{\alpha M}{V_0} = \frac{10^{38}}{10^{84}} = 10^{-46} \ г \cdot см^{-3} \cdot сек^{-1},$$

что соответствует приведенному выше числу. Как мы только что показали выше, столько же энергии конденсируется в новые частицы, поскольку вся энергия, растраченная на образование частиц низших классов (старших по n и низших по массе), идет на образование молодых частиц высших классов (то же следует из фридмановских моделей нашей Вселенной) и отход этой энергии, который, очевидно, образует разнообразный фон космического излучения.

Миллиарды лет тому назад мощных частиц было больше, они взаимодействовали значительно чаще, чем теперь, и мощное излучение, сопутствующее подобным взаимодействиям, вряд ли могло тогда способствовать возникновению сложных химических соединений и жизни во Вселенной. Видимо, в очень далеком будущем изменение «констант» взаимодействий частиц и их числа может привести к гибели данных форм жизни и, быть может, к возникновению новых живых форм.

Следует теперь отметить, что энергия частиц класса $n = 1$ составляет $^1/_3$ от энергии частиц класса $n = 0$. В самом деле, $m_{1п} = \frac{1}{3} M_0$; отсюда следует, что полная энергия этих двух типов частиц $E^* = M_0c^2 \left(1 + \frac{1}{3}\right) = \frac{4}{3} M_0c^2$. А значит, $E_0 = \frac{3}{4} E^*$, $E_1 = \frac{1}{4} E^*$, что соответствует фридмановским обобщенным моделям Вселенной. Но мы здесь говорим не об энергии поля $E_g = -E_1$, а о собственной энергии (полная масса покоя) гравитонов. Очевидно, что энергия гравитационного поля (притяжение) равна и противоположна по знаку энергии гравитонов (давление — отталкивание).

Частицы различных классов обладают несомненно различными гравитационными взаимодействиями (различные силы), и их гравитационные радиусы различны. В сильных полях мировое время T_m идет медленнее и в них частицы могут быть более молодыми.

Следует также отметить, что в пульсирующей однородной Вселенной энтропия должна была бы колебаться, что вряд ли возможно.

Особо следует отметить, что при сжатии звезд за гравитационный радиус они будут представлять эйнштейновские сферические замкнутые вселенные в общем большом мире.

Очевидно также, что мы не можем претендовать на установление «точной» иерархии частиц.

Ученые много раз ошибались, считая, что они установили что-то окончательное. Развитие материи несомненно происходит более многообразно, чем мы думаем. Однако все же можно выяснить еще некоторые самые общие закономерности этого развития. Мы будем считать, что наша Вселенная бесконечна (это не противоречит общей теории относительности даже в случае закрытой модели, на чем мы остановимся ниже), и попытаемся для описания эволюции бесконечного числа частиц, которые образуют нашу Вселенную, воспользоваться самыми общими математическими и логическими соображениями, не предрешая специальных свойств частиц, кроме их материальности. Эти соображения относятся к элементам теории бесконечных множеств.

Первая наша работа в этом направлении была сделана в 1949 г., и этому вопросу специально посвящен § 12.

Заметим, что поскольку $G_n \approx \frac{\alpha^2}{\rho_{0n}}$, а для частиц различных классов

$$\rho_{0n} = \frac{m_n N_n}{v_0} = \mathrm{const}, \qquad \alpha_n = \frac{dm_n}{dtm_n} \approx \mathrm{const},$$

то и $G_n \simeq G = \mathrm{const}$, что свидетельствует об универсальности гравитационного взаимодействия для частиц различных классов (включая фотоны). Гравитационное взаимодействие является общим, связующим все остальные взаимодействия.

Следует еще заметить, что «распад» мощных старых «частиц» происходит, видимо, не «непрерывно», а для частиц с большими значениями n импульсивно, с различными периодами времени. Может быть, это объясняет «загадочное» периодическое излучение центров галактик, открытое Амбарцумяном.

Поскольку частицы всех классов удовлетворяют условию равновесных положений в пространстве, т. е. подчиняются закону

$$r_n^3 = r_{gn} a^2, \tag{9.38}$$

то, полагая, что одни частицы образуют галактики, а другие — звезды, входящие в состав галактик, мы поймем, почему и звезды и галактики также подчиняются условию (9.33). При редких пульсациях мощных частиц они будут распадаться на мелкие частицы по определенной цепочке, пока образовавшиеся частицы не придут в равновесие с общим энергетическим фоном, т. е. не станут обычными частицами. Так как столкновения частиц могут быть любыми, скорость центра масс после столкновения при распаде частиц может уже не равняться скорости света, а быть любой и произвольно направленной, что может помочь в объяснении некоторых аномалий в скоростях разбегания галактик.

Развиваемая концепция позволяет, по-видимому, сделать вполне определенный вывод о том, что колебания нуклона и других частиц связаны с его внешними взаимодействиями. Один изолированный нуклон через некоторое время перестал бы колебаться и вряд ли вообще мог существовать изолированно. Поэтому и можно говорить об эволюции частиц в связи с эволюцией Метагалактики. Эволюции частиц и метрики Метагалактики, таким образом, взаимосвязаны.

Нуклоны и электроны, по представлению Френкеля, являются «регенерирующими со скоростью света» устойчивыми образованиями в Метагалактике. Они появляются как флуктуации энергии импульса в 4-х пространстве в какой-либо момент, в какой-либо области, затем исчезают, чтобы появиться в соседней области, и т. д.

Вернемся к определению «постоянных» Планка. Поскольку

$$\frac{1}{c}\hbar_n = m_n r_n = \frac{M_0 r_0}{T^{5-3\cdot 2^{-n}}} = \frac{m_0 r_0}{T^{3(1-2^{-n})}},$$

а с другой стороны, можно ввести

$$\frac{1}{c}\hbar_n^* = m_n r_n = \frac{M_0 r_0}{T^{5-4\cdot 2^{-n}}} = \frac{m_0 r_0}{T^{3-4\cdot 2^{-n}}},$$

то для каждой частицы класса n можно ввести как бы две «постоянных» Планка: внешнюю $\hbar_n^*$ и внутреннюю $\hbar_n$.

Для частиц класса $(n+1)$ $\hbar_n$ играет роль внешнего параметра, $\hbar_{n+1}$ — роль внутреннего параметра, при этом $\Delta\hbar_n = \hbar^*_{n+1}$. Снаружи частицы играет роль величина $\hbar^*_n$, внутри $\hbar_n$. Для Метагалактики $\hbar^*_0 = m_0 r_0 c T_m = m_0 c R_0$, $\hbar_0 = m_0 r_0 c$ и одновременно $\hbar_0$ и $\hbar_1{}^* = m_1 r_0 c$ играют роли внешнего и внутреннего параметра для нуклонов (электронов) и так далее для частиц всех классов.

Очевидно, что закономерности обычной квантовой теории поля описывают взаимодействия частицы с полем вследствие флуктуации энергии с помощью внешних параметров $\hbar$. Внутри частицы эти закономерности неприменимы, там надо квантовать с внутренним, значительно меньшим $\hbar$. В «атмосфере» частиц влияние внешнего $\hbar$ постепенно уменьшается.

Произведем любопытный подсчет. Гравитационный радиус гравитона $r_{1g} = \frac{GM_1}{c^2}$; характерное время, соответствующее этому радиусу, $\tau_{1g} = \frac{r_{1g}}{c} = \frac{GM_1}{c^3}$. Внутри гравитона, как и внутри любой частицы, могут согласно обычным представлениям рождаться виртуальные частицы бóльших энергий, чем энергия самой частицы. Согласно принципу неопределенности $\Delta E = \frac{\hbar}{\tau}$ $(\hbar = \hbar_0)$. В данном случае при $\tau = \tau_{1g}$

$$\Delta E = \frac{\hbar}{\tau_{1g}} = \frac{\hbar c^3}{GM_1} = \frac{\hbar^*_0 c^3 T_m}{G^*_0 M_0} = \frac{\hbar^*_0 c}{r_0} = \hbar^*_0 \omega_0 = N m_p c^2,$$

где $\hbar_0$ и G_0 — значения $\hbar$ и G при $T_m = 1$;

$$\tau_{1g} = \frac{G_0 M_0 T_m}{c^3 T^3_m} = \frac{R_0}{c T^3_m} = \frac{t_m}{N_0^{3/2}} = \frac{t_m}{N_{1\text{п}}}.$$

Мы приходим к чрезвычайно парадоксальному выводу, что за время τ_{1g} внутри гравитона может родиться и существовать (в смысле энергии) «вся наша Вселенная — Метагалактика».

Поскольку число гравитонов $N_{1\text{п}}$, то для всех гравитонов «время существования» виртуальных метагалактик будет соответствовать реальному времени существования нашей Метагалактики. (Аналогичное вычисление можно проделать и для частиц других классов.)

Этот весьма сомнительный вывод в принципе не хуже аналогичного утверждения, что внутри мезона могут рождаться пары нуклонов и антинуклонов и т. д. Видимо, подобные рассуждения следует ограничить каким-то минимально возможным временем образования подобных виртуальных пар и бо́льших по энергии образований, а это минимальное время $\sim 10^{-24}$ *сек* $\div\ 10^{-64}$ *сек* для нуклонов и гравитонов. Если это так, то мы снова приходим к выводу, что пользоваться обычными квантовыми представлениями «уже очень» внутри частицы не следует. Внутри нее свои «константы», свой мир, своя статистика.

В заключение приведем таблицу, которая характеризует основные параметры частиц различных классов в наше время:

n	$E_n \sim m_n \sim e_n^2$	ω_n	r_n	$\hbar_n$	$\hbar_n^*$	$N_п$
0	10^{-80}	1	1	1	10^{40}	10^{80}
1	10^{-120}	10^{-20}	10^{-20}	10^{-60}	10^{-40}	10^{120}
2	10^{-140}	10^{-30}	10^{-30}	10^{-90}	10^{-80}	10^{130}
3	10^{-150}	10^{-35}	10^{-35}	10^{-105}	10^{-100}	10^{135}
4	10^{-155}	$10^{-37,5}$	$10^{-37,5}$	$10^{-112,5}$	10^{-110}	$10^{137,5}$
∞	10^{-160}	10^{-40}	10^{-40}	10^{-120}	10^{-120}	10^{160}

Примечание. Энергия, масса и заряд (по модулю) Метагалактики приняты за единицу. Значение $\hbar_0 = m_0 c r_0$ принято за единицу. Так же принято $\omega_0 = 1$; $r_0 = 1$.

§ 10. О некоторых свойствах пространства и взаимодействиях в нем

Нам хочется теперь высказать определенные соображения относительно того, как можно понимать кривизну пространства-времени и квазизамкнутость нашей Вселенной в случае закрытой (эллиптической) модели Вселенной Фридмана.

Прежде всего покажем, как удалось в одном частном, но важном случае шварцшильдовского пространства, т. е. в случае гравитационного поля, создаваемого одной частицей, найти метрику «кривого пространства» исходя только из специальной теории относительности, т. е. из метрики Минковского. Эта важная редко цитируемая работа принадлежит Ленцу, и она изложена в книге Зоммерфельда *.

Пусть в качестве частицы, создающей гравитационное поле, мы имеем, например, Солнце, которое считаем покоящимся. Пусть

* А. Зоммерфельд. Электродинамика. ИЛ, гл. 4, § 381, 1958.

далее из бесконечности по радиусу на Солнце падает ящик K_∞. Поскольку K_∞ падает свободно, то он никак не чувствует гравитационного поля и поэтому все время несет с собой справедливую на бесконечности псевдоевклидову метрику. Пусть измеряемые в нем координаты будут x_∞ (продольная, т. е. в направлении движения), y_∞, z_∞ (поперечные) и t_∞. Расстояние r от Солнца ящик K_∞ достигает со скоростью v. Будем считать, что v и r измеряются в системе K, связанной с Солнцем и подверженной действию гравитационного поля; в качестве координат в этой системе будем использовать r, θ, φ и t. Тогда K_∞ и K будут связаны специальным преобразованием Лоренца, в котором K_∞ будет играть роль системы, «движущейся» со скоростью $v = \beta c$, а K — «покоящейся» системы. При этом будут выполняться соотношения:

$$dx_\infty = \frac{dr}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad \text{(сокращение Лоренца)},$$

$$dt_\infty = dt\sqrt{1-\beta^2} \quad \text{(эйнштейново растяжение времени)},$$

$$dy_\infty = rd\theta \quad \text{(инвариантность поперечных длин)}.$$

$$dz_\infty = r\sin\theta d\varphi$$

Поскольку

$$\beta^2 = \frac{u^2}{c^2} = \frac{2GM_\odot}{rc^2},$$

где $M_\odot$ — масса Солнца, то окончательно в первом приближении придем именно к шварцшильдовскому интервалу

$$ds^2 = c^2dt^2\left(1 - \frac{2GM_\odot}{rc^2}\right) - \\ - \left[\frac{dr^2}{1-\frac{2GM_\odot}{rc^2}} + r^2(\sin^2\theta d\varphi^2 + d\theta^2)\right].$$

Эта задача позволяет представить себе кривизну пространства как пространство Минковского, в котором лучи света и волны де Бройля испытывают преломление (и поглощение). Такие попытки делались неоднократно. Ниже мы выскажем наше отношение к ним.

Мы уже указывали на то, что гравитация обязана своей природе необратимым процессам, происходящим при взаимодействиях различных «частиц». Выясним несколько более детально связь между энтропией и гравитационным полем. Сначала рассмотрим снова задачу Шварцшильда, учитывая общий фон гравитационного поля Метагалактики.

Напишем в общем виде уравнение гравитационного поля [см. ч. II, § 2, формулу (2.27)]

$$R_i^k - \frac{R}{2}\left(\delta_i^k - \frac{1}{3} A_i^k\right) = \varkappa\left(T_i^k - \frac{R}{3R_0} A_{il}^{km} T_{0m}^l\right). \qquad (10.1)$$

Свертывая (10.1), найдем

$$R\left(1 - \frac{A}{6}\right) = -\varkappa\left(T_{\text{л}} + T_0 - \frac{R}{3R_0} A_l^m T_{0m}^l\right), \qquad (10.2)$$

где $T_{\text{л}}$ — свернутый локальный тензор энергии-импульса материи.

Поскольку вблизи от материальных тел (например звезд) $A \ll 1$, то, рассматривая внешнюю шварцшильдовскую задачу и полагая во внешнем пространстве $T_{\text{л}} = 0$, найдем, что $R = -\varkappa T_0$ и, далее, что

$$R_i^k = \varkappa\left(T_{0i}^k - \frac{1}{2}\delta_i^k T_0\right). \qquad (10.3)$$

Так как

$$T_0 = p_0 - 3\varepsilon_0 \approx 0, \text{ то } R = 0 \text{ и } R_i^k \approx \varkappa T_{0i}^k. \qquad (10.4)$$

Поскольку

$$T_0^0 = -\varepsilon_0 \approx \frac{E_0}{V_0} = \frac{10^{77}}{10^{84}} = 10^{-7} \text{ эрг/см}^3,$$

$$T_\alpha^\alpha = p_0 \approx \frac{\varepsilon_0}{3} = \frac{1}{3} 10^{-7} \text{ эрг/см}^3,$$

то $R_i^k \approx \delta_i^k \cdot 10^{-56}$ *см*$^{-2} \approx 0$.

Как мы видим, поправки к задаче Шварцшильда при учете гравитационного поля Метагалактики будут незначительными. Эти поправки лучше определить следующим образом.

Плотность гравитационной энергии внешнего локального поля

$$\varepsilon_{\text{л}} \approx \frac{GM_{\text{л}}^2}{r^4}.$$

Отношение

$$\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_{\text{л}}} \approx \left(\frac{m_0 r^2}{a^2 M_{\text{л}}}\right)^2. \qquad (10.5)$$

Например, на расстоянии 10^{14} *см* от Солнца ($M_л = 10^{33}$ *г*)

$$\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_л} \approx \left(\frac{10^{28}}{10^{33}}\right)^2 \approx 10^{-10}.$$

Скорость движения по круговой орбите определяется соотношением $\frac{u^2}{c^2} \approx \frac{Gm_л}{c^2 r}$, что для $r = 10^{14}$ *см* дает $\frac{u^2}{c^2} = 10^{-9}$, т. е. обычная шварцшильдовская поправка на порядок больше, чем влияние фона.

Для Земли, Венеры и Меркурия поправки за счет общего фона будут еще меньше. Зато для более далеких планет и комет влияние обычного фона может быть замечено на расстоянии $r^3 \lessapprox r_g a^2$.

Учет гравитационного поля Метагалактики принципиален; он, в частности, показывает, что в полости, вырезанной внутри сферически-симметрично распределенной массы (в вакуоле), пространство уже не будет квазиевклидовым. Евклидовость пространства—времени внутри вакуоли следует из условия, что в центре вакуоли поле не было бесконечно большим, а, следовательно, при определении ν и λ в задаче Шварцшильда, когда $e^\nu = e^{-\lambda} = 1 - \frac{\text{const}}{r}$, надо положить $\text{const} = 0$.

При учете внешнего поля метрика полости определяется метрикой этого поля, для которого $g_{ik} \neq \text{const}$, что делает понятие вакуоли, как абсолютно пустого пространства, когда $R_{ilkm} = 0$, физически неоправданным понятием, противоречащим самому смыслу общей теории относительности. Даже одно тело, создавая внешнее поле, должно обладать и внутренним полем, которое индуцировано этим внешним полем: экран от тяготения не возможен. В противном случае геометрическая интерпретация гравитации, что составляет суть общей теории относительности, была бы невозможна.

Напишем уравнения движения $T^k_{i,k} = 0$ в виде

$$\frac{d(wu_i)}{ds} + \frac{\partial w}{\partial x^i} = \frac{w}{2} u^k u^l \frac{\partial g_{kl}}{\partial x_i} + T^\circ \frac{\partial \sigma}{\partial x^i}, \tag{10.6}$$

где $dw = T^\circ d\sigma + v dp$, σ — энтропия, T° — температура. В случае движения материальной точки $w = c^2$, $\sigma = \text{const}$ и (10.6) принимает вид

$$\frac{du_i}{ds} = \frac{u^k u^l}{2} \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i}. \tag{10.7}$$

Допустим теперь, что движение «точки» происходит в Евклидовом пространстве и сопровождается необратимыми излучениями гравитационного поля. Тогда $g_{kl} = \text{const}$, но $\sigma = \sigma_g \neq \text{const}$, и мы будем иметь

$$\frac{du_i}{ds} = \frac{T^\circ}{c^2} \frac{\partial \sigma_g}{\partial x^i}. \tag{10.8}$$

Сравнивая (10.7) и (10.8), найдем

$$T^\circ \frac{\partial \sigma_g}{\partial x^i} = \frac{c^2}{2} u^k u^l \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i},$$

или в более общем безразмерном виде

$$u^k u^l \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i} = \frac{\sigma_0 T^\circ}{w} \frac{\partial \sigma_g^*}{\partial x^i}, \tag{10.9}$$

где σ_0 — некоторая константа, имеющая размерность энтропии, $\sigma_g^* = \sigma_g/\sigma_0$ — безразмерная энтропия. Умножая (10.9) скалярно на u^i, найдем

$$u^k u^l \delta g_{kl} = \frac{\sigma_0 T^\circ}{w} \delta g_g^*. \tag{10.10}$$

Естественно, что изменение энтропии связано с метрикой через скорость, поскольку в зависимости от скоростей движения будет меняться и гравитационное взаимодействие.

Вспомним теперь, что в случае фридмановских пространств метрику можно было написать в виде

$$ds^2 = f(r^*, \tau^*) \{c^2 d\tau^{*2} - [dr^{*2} + r^{*2} (\sin^2 \theta \, d\varphi^2 + d\theta^2)]\},$$

а это значит, что в «прямом» пространстве (пространстве Минковского) можно, вводя «коэффициент преломления» для гравитационных взаимодействий, получить все эффекты общей теории относительности, справедливые для «кривого» — Риманова пространства.

Может быть, именно промежуточная модель, когда $f = f(\tau^*)$, т. е. квазиевклидова модель нашей Вселенной, более справедлива, чем эллиптическая (закрытая) и гиперболическая (открытая) модели.

Обычно, когда поясняют кривизну 4-х пространства—времени, приводят пример с 3-х пространством-временем, говоря, что пространство имеет вид криволинейной поверхности. Эта двумерная поверхность «искривляется» в 3-х пространстве.

По аналогии надо представить, что в реальном случае кривого 4-х пространства—времени объемное 3-х пространство искривляется в 4-х пространстве. Но не проще ли говорить о кривизне 3-х пространства, как о свойстве обычного евклидова 3-х пространства, в котором происходит диссипация энергии, воспринимаемая как кривизна? Эта диссипация приводит и к искривлению времени. Такая точка зрения вполне естественна. Различные материальные процессы и характер диссипации энергии связаны между собой, а процесс диссипации (необратимость) воспринимается как течение времени и происходит по-разному, в зависимости не только от внутренних, но и от внешних условий. (Внешние флуктуации изменяются, например, со скоростью движения.) При такой точке зрения можно говорить о том, что метрика Римановой геометрии, столь мощно и изящно использованная Эйнштейном для описания гравитационного поля, связана со статистическими процессами, происходящими с материей. Аппарат Римановой геометрии, таким образом, описывает общие диссипативные процессы излучения гравитационного поля и, разумеется, всегда будет использоваться как простой и точный аппарат, более выгодный, чем уравнения квантовой статистической физики. Не изменится и точка зрения на относительность процессов в 4-х пространстве—времени. Однако если считать образование объектов нашей Вселенной результатом столкновения двух ультрарелятивистских частиц (или «взрыва начального атома»), то вряд ли можно считать пространство (точнее говоря, распределение материи в нем) однородным и изотропным. Видимо, здесь правы те ученые, в частности Зельманов, которые считают, что распределение материи в пространстве неоднородно.

Однако при этом надо учесть, что G, $\hbar$, m, e будут уже не скалярами, изменяющимися с мировым временем, а должны представляться матрицами с переменными коэффициентами. В этом случае можно найти центр разлета, поскольку распределение плотности материи должно быть таково, что к периферии от центра плотность должна падать. По распределению плотности галактик, может быть, в будущем удастся определить и наше место в Метагалактике. Но в целом в бесконечной материальной Вселенной будет справедливым принцип относительности нашего местоположения.

То, что при взрыве «атома» или ударе двух частиц распределение материи может быть неоднородным, довольно очевидно. Никакой взрыв не может быть изотропным, а, кроме того, при сближении двух частиц сначала сближались поля или образования, в которых до «главного удара» уже должны были рождаться частицы нашей материи. При этом распределение материи должно иметь ось симметрии. Возможно, что детализация наших знаний о Метагалактике и «элементарных» частицах поможет выяснить предысторию ее рождения.

Укажем теперь, что поскольку в нашей Вселенной может существовать определенная иерархия частиц, то ей должна соответствовать и определенная иерархия взаимодействий. Минимальной длиной является r_g, а минимальным временем $\tau_g = \frac{r_g}{c}$.

Наиболее сильные взаимодействия (мезонные) характеризуются отношением $\frac{g^2}{\hbar c} \approx 10$, где g^2 аналогично квадрату заряда электрона (нуклона). Электромагнитные взаимодействия характеризуются отношением $\frac{e^2}{\hbar c} = \frac{1}{137}$, причем отношение $\frac{g^2}{e^2} \sim \frac{m_p}{m_e}$ и слабые взаимодействия (электроны, нейтрино) имеют соответствующее отношение $\frac{f^2}{\hbar c} = 10^{-5}$, если считать, что размеры области взаимодействия соответствуют радиусу электрона; если же полагать размеры области взаимодействия $r = 10^{-9}$ *см*, то $\frac{f^2}{\hbar c} = 10^{-13}$. При $r = 10^{-16}$ *см* $\frac{f^2}{\hbar c} = 1$.

Характерное время сильных взаимодействий $\tau = 10^{-23}$ *сек*, электромагнитных $\tau = 10^{-16} \div 10^{-18}$ *сек* и слабых $\tau = 10^{-8} \div 10^{-10}$ *сек*. Если для сильных взаимодействий выполняются все законы сохранения (сильные законы, т. е. обычные законы сохранения энергии-импульса и моментов, и слабые законы, как-то: сохранение изотопического спина, четности, барионного и лептонного зарядов, странности), то для электромагнитных взаимодействий изотопический спин перестает быть точным квантовым числом, а для слабых взаимодействий нарушаются уже законы сохранения четности и странности. Последнее, видимо, связано с тем, что, как следует из нашей концепции, при трансмутациях энергии могут рождаться легкие частицы и античастицы с большой вероятностью.

По-видимому, все указанные виды взаимодействий можно получить или из сильных взаимодействий, или из электромагнитных, считая, что сильные взаимодействия — это нелинейные (ударно-волновые) электромагнитные взаимодействия в нуклонной плазме. Слабые же взаимодействия — это некоторые волны разряжения в этой же плазме. При фиксированном объеме (объеме нуклона) для сильных взаимодействий характерной массой (энергией) является сам нуклон, для электромагнитных — электрон и для слабых — нейтрино. Далее по степени слабости взаимодействий идут гравитационные взаимодействия, для которых $\frac{GM_p^2}{\hbar c} \approx 10^{-39}$.

В случае слабых взаимодействий пространство не теряет свойств симметрии, но его степень однородности меньше, чем в случае более сильных взаимодействий. В случае же гравитационных взаимодействий в обычной общей теории относительности пространство оказывается полностью неоднородным, о чем свидетельствует отсутствие какой-либо группы преобразования уравнений гравитационного поля

$$R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R = \varkappa T_{ik}.$$

В этом случае гравитационное взаимодействие становится не только универсальным, но и минимально возможным.

Однако, когда в развиваемой нами концепции полагается, что $\varkappa \neq \text{const}$, уравнение поля обладает группой (масштабной или автомодельной), поэтому гравитационное взаимодействие уже не является минимальным, поскольку пространство R не полностью неоднородно. Действительно, частицы классов $n > 0$ нашей иерархии обладают более слабыми видами взаимодействий. Любопытно, что электромагнитные взаимодействия частиц класса $n+1$ имеют ту же энергию, что и гравитационные взаимодействия класса n. Это видно из того, что $E_{gn} = \frac{E_{\text{эп}}}{\sqrt{N_n}}$, а

$$E_{\text{э,пн}} = \frac{e^2_{n+1}}{r_n} = M_{gn}c^2 = E_{gn}.$$

Заметим, кстати, что имеет место интересное соотношение $r_{gp}a = r_p^2$, где $r_{gp} = \frac{2Gm_p}{c^2}$ — гравитационный радиус протона. Аналогичные соотношения справедливы и для других частиц. Минимальным взаимодействием будут обладать частицы класса $E_\infty = \frac{E_p}{N_0} = \frac{E_p}{T_m^4}$, где N_0 — полное число частиц. Однако при заданной кривизне величина G одинакова для частиц всех классов.

Любопытно также отметить, что при рождении неустойчивых частиц (гиперонов, мезонов и т. д.) могут играть роль старые частицы классов $n > 0$, однако «странные» частицы, обладая энергией, не соответствующей средней энергии данной ячейки пространства-времени, должны быть неустойчивыми и распадаться, что действительно и наблюдается. Очевидно также, что благодаря влиянию маховского фона роль гравитационного поля в целом ряде «ядерных» реакций гораздо больше, чем предполагалось до сих пор.

Таким образом, мы свели все взаимодействия к взаимодействиям типа электромагнитных (вихревых), природу которых еще надлежит уточнить.

В заключение подтвердим наш взгляд на интерпретацию кривизны пространства как следствие необратимых процессов — флуктуации объема и энергии элементарных частиц. Вычислим объем пространства, занимаемого одним нуклоном, с учетом его собственного поля тяжести.

Применяя внутреннюю метрику Шварцшильда, будем иметь

$$v \simeq 4\pi \int_0^{r_0} r^2 dr \left(1 + \frac{\bar{r}_g}{r}\right), \text{ где } \bar{r}_g = \frac{2GM(r)}{c^2}.$$

Очевидно, что $v = v_0 \left(1 + \frac{3\alpha}{2} \frac{r_g}{r}\right)$, где $v_0 = \frac{4}{3}\pi r_0^3$ — невозмущенный объем нуклона, $\alpha = \frac{1}{M_p r_0^2} \int_0^{r_0} M r dr$.

Если $M = Ar^n$, то $\alpha = \frac{1}{n+2}$; в частности, при $\rho = \mathrm{const}$ $n = 3$, $\alpha = \frac{1}{5}$. Так как плотность резко растет к центру нуклона, то можно в пределе принять $a < n < 1$, или просто $n = 0$; тогда $\alpha = \frac{1}{2}$. Итак, положим $\alpha = \frac{1}{2}$, при этом $v = v_0 \times \left(1 + \frac{3}{4} \frac{r_g}{r_0}\right)$. Поскольку $\frac{r_g}{r_0} = \frac{2GM_p}{c^2 r_0}$, то $\frac{\Delta v}{v_0} = \frac{3}{4} \frac{r_g}{r_0} = \frac{3}{2} \frac{GM_p}{r_0 c^2} \simeq \frac{1}{\sqrt{N}} = \frac{1}{T_m} \approx 10^{-40}$ — изменение объема, вносимое «кривизной» пространства и являющееся следствием гравитационного фона. Оно действительно равно изменению объема за счет флуктуаций. Так как $\frac{\Delta v}{v_0} = \frac{\sqrt{\overline{\Delta v^2}}}{v_0}$, то это изменение всегда положительно, что соответствует притяжению и возрастанию энтропии

$$\frac{\Delta \sigma}{c_v} = \frac{\Delta v}{3v_0} \approx \frac{1}{T_m} = 10^{-40}.$$

Далее очевидно, что

$$\frac{\Delta r}{r_0}=\frac{r_g}{r_0}=10^{-40},\ \frac{u}{c}=\frac{\Delta r/t^*}{r_0/t^*}=\frac{1}{T_m}\simeq 10^{-40},$$

где t^* — время одной пульсации.

Исходя из уравнения Гамильтона — Якоби для Метагалактики, которое напишем в виде

$$\left(\frac{\partial S}{\partial \chi}\right)^2-\left(\frac{\partial S}{\partial \eta}\right)^2+m^2c^2a^2(\eta)=0,$$

можно прийти к результату, что $\frac{\partial S}{\partial \chi}=Ia=\text{const}$, где I — импульс. Это выражение немедленно дает $M_0cr_0=M_0ua$, или $\frac{u}{c}=\frac{r_0}{a}=\frac{1}{T_m}=10^{-40}$, что вновь подтверждает только что полученный результат. Таким образом, снова можно говорить о пульсациях скоростей в Метагалактике как о флуктуации скорости нуклона.

Теперь проведем рассуждения, противоположные только что сделанным. Допуская, что нуклоны (и электроны) радиально пульсируют, и зная, что

$$\frac{1}{3}\frac{\Delta v}{v_0}=\frac{\Delta r}{r}\simeq\frac{1}{\sqrt{N}}=\frac{1}{T_m}=\frac{r_g}{r_0},$$

для любого произвольного расстояния $r\geqslant r_0$ будем иметь $\frac{1}{3}\frac{\Delta v}{v}=\frac{\Delta r}{r}$. Теперь нетрудно найти, что пространственная часть интервала должна иметь вид $-\left[\frac{dr^2}{1-\frac{\Delta r}{r}}+r^2(\sin^2\theta d\varphi^2+d\theta^2)\right]$.

Далее квадрат частоты пульсаций нуклона, поскольку при увеличении размеров нуклона частота должна уменьшаться, должен определяться выражением $\omega^2=\omega_0^2\left(1-\frac{\Delta r}{r_0}\right)$ (линейная скорость пульсации, соответствующая скорости света, должна оставаться постоянной или, во всяком случае, не увеличиваться).

Таким образом, за единицу времени будут происходить пульсации, и, следовательно, — необратимые процессы диссипации энергии, сопровождающиеся увеличением энтропии. Поэтому временная часть интервала должна иметь вид $c^2dt^2\left(1-\frac{\Delta r}{r_0}\right)=c^2d\bar{t}^2$, где $d\bar{t}$ и dt — изменение времени в гравитационном поле и вне его соответственно.

Поскольку для нуклона при $\frac{\Delta r}{r} = 1$ $d\bar{t} \equiv 0$, а это должно иметь место при $r = r_g$, то $\Delta r = r_g$ и выведенный нами из элементарной теории флуктуаций интервал будет иметь шварцшильдовский вид.

Таким образом, флуктуации энергии и объема действительно приводят к эйнштейновскому закону тяготения.

Очевидно, имея не только радиальные, но и произвольные флуктуации объема, мы сможем аналогичным образом получить выражение для более сложных интервалов, описывающих не центрально-симметричное поле (вычисляя флуктуации в криволинейных координатах). Если написать интервал поля Шварцшильда с евклидовой пространственной частью, тогда возникает член $2\sqrt{\frac{r_g}{r}}c dt\, dr$, что указывает на неравноценность обоих направлений времени и может привести к необратимым процессам в евклидовом пространстве.

Теперь следует отметить, что рассмотренные здесь соображения помогают выяснить причину замедления процессов в гравитационном поле и для движущихся тел. Реакция излучения с внешним полем Метагалактики (и с самим собой) замедляет пульсации и необратимые процессы излучения энергии — старение частиц.

§ 11. Электродинамика в римановом пространстве

Представляет значительный интерес подробно исследовать уравнения электродинамики в римановом пространстве, учитывая общую кривизну фридмановских моделей нашей Вселенной.

Основные результаты в этом направлении получил в свое время Эддингтон, который заметил, что скорость света в «кривом» пространстве в локально-инерциальной системе несколько меньше, чем фундаментальная скорость света.

Сейчас имеет смысл более основательно проанализировать эти результаты Эддингтона, а также Синга, который, проделав аналогичные вычисления, учитывал только локальную кривизну пространства, создаваемую самим электромагнитным полем (она незначительна), и не учитывал общую кривизну пространства, что более существенно.

Уравнения Максвелла имеют вид

$$F^{ik}_{;k} = \frac{\partial(\sqrt{-g}F^{ik})}{\sqrt{-g}\partial x^k} = \frac{4\pi}{c} j^i,$$

$$\frac{\partial F_{ik}}{\partial x^l}+\frac{\partial F_{li}}{\partial x^k}+\frac{\partial F_{kl}}{\partial x^i}=0, \tag{11.1}$$

$$F^{ik}=g^{ia}g^{kb}F_{ab}; \tag{11.2}$$

$$F_{ab}=\frac{\partial A_b}{\partial x^a}-\frac{\partial A_a}{\partial x^b}=\begin{vmatrix} 0 & H_z & -H_y & E_x \\ -H_z & 0 & H_x & E_y \\ H_y & -H_x & 0 & E_z \\ -E_x & -E_y & -E_z & 0 \end{vmatrix}. \tag{11.3}$$

Напишем условия Лоренца в виде

$$g^{ik}A_{i;\,k}=0. \tag{11.4}$$

Оператор Деламбера введем следующим образом:

$$\Box A_a=\tilde{\Box} A_a=g^{ik}A_{a;\,ik}. \tag{11.5}$$

Прежде всего докажем, что имеет место соотношение

$$\tilde{\Box} A_a-g^{ik}A_{i;\,ak}+\frac{4\pi}{c}j_a=0. \tag{11.6}$$

Поскольку

$$A_{a;\,i}=\frac{\partial A_a}{\partial x^i}-\Gamma^k_{ai}A_k,\quad A_{i;\,a}=\frac{\partial A_i}{\partial x^a}-\Gamma^k_{ai}A_k,$$

$$A_{a;\,ik}=\frac{\partial}{\partial x^k}\left(\frac{\partial A_a}{\partial x^i}-\Gamma^m_{ai}A_m\right)-\left[\Gamma^m_{ak}\left(\frac{\partial A_m}{\partial x^i}-\Gamma^l_{mi}A_l\right)+\right.$$
$$\left.+\Gamma^m_{ik}\left(\frac{\partial A_a}{\partial x^m}-\Gamma^l_{am}A_l\right)\right],$$

$$A_{i;\,ak}=\frac{\partial}{\partial x^k}\left(\frac{\partial A_i}{\partial x^a}-\Gamma^m_{ai}A_m\right)-\left[\Gamma^m_{ik}\left(\frac{\partial A_m}{\partial x^a}-\Gamma^l_{ma}A_l\right)+\right.$$
$$\left.+\Gamma^m_{ak}\left(\frac{\partial A_i}{\partial x^m}-\Gamma^l_{im}A_l\right)\right],$$

то

$$A_{a;\,ik}-A_{i;\,ak}=\frac{\partial F_{ia}}{\partial x^k}-(\Gamma^m_{ak}F_{im}+\Gamma^m_{ik}F_{ma})=F_{ia;\,k},$$

$$g^{ik}(A_{a;\,ik}-A_{i;\,ak})=\tilde{\Box} A_a-g^{ik}A_{i;\,ak}=(g^{ik}F_{ia})_{;\,k}=F^k_{a;\,k}.$$

Так как

$$-F^{ik}_{;\,k}=(F^k_b g^{ib})_{;\,k}=g^{ib}F^k_{b;\,k}=-\frac{4\pi}{c}j^i,$$

то

$$g_{ia}g^{ib}F^k_{b;\,k}=F^k_{a;\,k}=-\frac{4\pi}{c}j_a,$$

что окончательно дает:

$$\tilde{\Box} A_a-g^{ik}A_{i;\,ak}+\frac{4\pi}{c}j_a=0. \tag{11.7}$$

Вычислим далее

$$A_{i;\,ak} - A_{i;\,ka} = A_m \left(\frac{\partial \Gamma^m_{ik}}{\partial x^a} - \frac{\partial \Gamma^m_{ia}}{\partial x^k} + \Gamma^l_{ik}\Gamma^m_{la} - \Gamma^l_{ia}\Gamma^m_{lk} \right) = A_m R^m_{iak}. \tag{11.8}$$

Умножая (11.8) на g^{ik}, найдем

$$g^{ik}(A_{i;\,ak} - A_{i;\,ka}) = A_m g^{ik} R^m_{iak} = A_m R^m_a. \tag{11.9}$$

Поскольку имеет место условие (11.4), то

$$g^{ik} A_{i;\,ak} = A_m R^m_a; \tag{11.10}$$

подставляя (11.10) в (11.7), окончательно придем к уравнению

$$\tilde{\Box} A_a - A_m R^m_a + \frac{4\pi}{c} j_a = 0. \tag{11.11}$$

Уравнение (11.11) удобно написать в виде

$$(\tilde{\Box}\delta^k_i - R^k_i) A_k = -\frac{4\pi}{c} j_i. \tag{11.12}$$

Для свободного поля, когда $j_i = 0$, будем иметь

$$(\tilde{\Box}\delta^k_i - R^k_i) A_k = 0. \tag{11.13}$$

В случае внешнего шварцшильдовского поля

$$R^k_i = 0, \qquad \tilde{\Box} A_i = 0. \tag{11.14}$$

В случае общего фридмановского поля (поле Метагалактики), если его рассчитывать по обычным соотношениям в собственной системе отсчета, мы придем к таким результатам:

$$R^0_0 = \frac{3a\ddot{a}}{c^2a^2}, \qquad R^\beta_\alpha = \frac{2\delta^\beta_\alpha}{a^2}\left(\beta_1 + \frac{\dot{a}^2}{c^2} + \frac{a\ddot{a}}{2c^2}\right), \tag{11.15}$$

где $\beta_1 = 1, 0, -1$ для трех типов пространств (сферического, квазиевклидова, гиперболического); $\dot{a} = \frac{da}{d\tau}$, $\ddot{a} = \frac{d^2a}{d\tau^2}$, a — кривизна, τ — собственное время.

Таким образом,

$$\left(\tilde{\Box} - \frac{3a\ddot{a}}{c^2a^2}\right) A_0 = 0, \qquad \left[\tilde{\Box} - \frac{2}{a^2}\left(\beta_1 + \frac{\dot{a}^2}{c^2} + \frac{a\ddot{a}}{2c^2}\right)\right] A_\alpha = 0. \tag{11.16}$$

Поскольку в обычных фридмановских моделях — $R^0_0 = R^{\alpha=\beta}_\alpha$, то, полагая

$$\frac{2}{a^2}\left(\beta_1+\frac{\dot a^2}{c^2}+\frac{a\ddot a}{2c^2}\right)=-\frac{3a\ddot a}{c^2a^2}=\xi_0^2=\frac{R}{2},$$

найдем, что

$$(\tilde{\Box}-\xi_0^2)\,A_\alpha=0,\quad (\tilde{\Box}+\xi_0^2)\,A_0=0,$$

где ξ_0 можно интерпретировать как массу покоя фотона.

Полагая, что $\varkappa\sim a\approx c\tau$, мы получим

$$\ddot a=0,\ R_0^0=0,\quad R_\alpha^\alpha=\frac{2}{a^2}\left(\beta_1+\frac{1}{\chi_0^2}\right),$$

где $\frac{1}{\chi_0}=\frac{\dot a}{c}$,

$$\xi_0^2=\frac{2}{a^2}\left(\beta_1+\frac{1}{\chi_0^2}\right)=\frac{R}{3}\ \text{при}\ i=1,2,3\ \text{и}\ \xi_0^2=0\ \text{при}\ i=0.$$

Исходя из того, что мы должны получить уравнение

$$(\tilde{\Box}-\xi_0^2)\,A_i=0, \tag{11.17}$$

одинаковые для всех четырех компонент A_i, то необходимо допустить поляризацию пространства и возникновение тока. В сопутствующей системе отсчета будем иметь (например, для $\varkappa$ пропорционального a)

$$j_\alpha=0,\quad -j_0=\frac{c}{4\pi}R_\alpha^{\alpha=\beta}A_0=\frac{cA_0}{2\pi a^2}\left(\beta_1+\frac{1}{\chi_0^2}\right)=-\frac{\delta c}{\sqrt{-g}}g_{00},$$

откуда плотность зарядов, индуцированных изменением $\varkappa$, определяется выражением

$$\delta=\delta_\varkappa=\frac{\sqrt{-g}A_0}{2\pi a^2 g_{00}}\left(\beta_1+\frac{1}{\chi_0^2}\right)=\frac{e}{2\pi r_0^2 a}\left(\beta_1+\frac{1}{\chi_0^2}\right)=\frac{\delta_0}{\sqrt{N}}, \tag{11.18}$$

где $\delta_0\cong e/r^3{}_0$.

В уравнении (11.17) будем интерпретировать величину ξ_0^{-1} как длину волны де Бройля $\lambda=\frac{\hbar}{m_0c}$.

Таким образом, полагая

$$\xi_0=\frac{\beta_0}{a}=\frac{1}{\lambda},\ \text{где}\ \beta_0=\left[2\left(\beta_1+\frac{1}{\chi_0^2}\right)\right]^{1/2},$$

придем к результату, что масса покоя фотона во фридмановском пространстве определяется выражением

$$m_0=\frac{\beta_0\hbar}{ac}. \tag{11.19}$$

При этом, полагая $\beta_0 \approx 2$, $a \approx 3 \cdot 10^{28}$ *см*, найдем, что $m_0 = 10^{-66}$ *г*, $m_0 c^2 = 10^{-45}$ *эрг*, что соответствует энергии гравитонов

$$m_g = \frac{\sqrt{6}\hbar}{ac} \approx 10^{-66} \text{ г}.$$

В некоторых случаях, как это показал Захаров, уравнения сильного гравитационного поля имеют вид

$$\left(\tilde{\Box} - \frac{\sqrt{3}}{2}\overline{R}\right) R_{lmrt} = 0, \tag{11.20}$$

где

$$\Box R_{lmrt} = g^{ik} R_{lmrt, ik}, \quad \overline{R}^2 = R_{abcd} R^{abcd}.$$

Поскольку $\overline{R} \approx R \approx \frac{\text{const}}{a^2}$, то масса покоя гравитонов будет соответствовать только что вычисленной выше величине.

Определим теперь m_0 следующим образом:

$$m_0 = \frac{\hbar}{cr_0} \frac{r_0}{a} \beta_0 = m_p \frac{r_0 \beta_0}{a}, \tag{11.21}$$

где $m_p = \frac{\hbar}{cr_0}$ — масса нуклона, r_0 — его радиус. Так как $\frac{r_0}{a} \approx \frac{1}{\sqrt{N}} = 10^{-41}$, то $\frac{m_0}{m_p} = \frac{1}{\sqrt{N}} = 10^{-41}$, что снова дает $m_0 \approx 10^{-65}$ *г* (N — число частиц в Метагалактике).

На основе сказанного можно сделать фундаментальный вывод о том, что в римановом пространстве масса покоя квантов электромагнитного и гравитационного полей отлична от нуля. С увеличением a она уменьшается и при $a \to \infty$, когда пространство становится Евклидовым, масса покоя фотонов и гравитонов стремится к нулю.

В случае квазиевклидова пространства ($\beta_1 = 0$) под a нужно понимать просто радиус сферического пространства.

Поскольку в среднем энергия фотонов порядка 10^{-10} *эрг*, а энергия массы покоя порядка 10^{-45} *эрг*, то эта энергия составляет всего 10^{-35} от полной энергии фотона.

Для квантования волнового уравнения

$$(\tilde{\Box} - \xi_0^2) A_i = 0$$

целесообразно перейти к локально-геодезической системе координат. При этом будем предполагать оператор $\tilde{\Box} = \Box$ ортогональным, а R_i^k считать тензором, имеющим лишь ортогональные члены, которые являются функциями мирового времени. Тогда это уравнение (полагая $c = 1$ и принимая, что в настоящее время $\hbar = 1$) может быть представлено в виде

$$(\Box - m_0^2) A_i = 0, \quad m_0 = \xi_0. \tag{11.22}$$

В процессе квантования будем считать m_0 постоянными величинами или, в крайнем случае, слабо зависящими от мирового времени T (так же как и $\hbar$).

Уравнение (11.22) имеет формальное сходство с уравнением для векторного поля.

Перестановочные соотношения могут быть получены по аналогии с квантованным векторным полем

$$[A_l^* (x);\ A_n (y)] = \frac{1}{i}\left(\delta_{ln} - \frac{1}{m_0^2} \frac{\partial^2}{\partial x^l \partial x^n}\right) D (x - y), \tag{11.23}$$

где $D(x - y)$ есть обобщение функции Паули — Иордана

$$D (x) = \frac{1}{(2\pi)^3 i} \int e^{ikx} \delta (k^2 + m_n^2)\, \varepsilon (k^0)\, dk, \tag{11.24}$$

причем

$$k^0 = \pm \sqrt{\bar{k}^2 + m_0^2}, \tag{11.25}$$

где $\bar{k}$ — импульс $k^2 = \bar{k}^2 - k^{02}$.

Эти соотношения сразу показывают, что инфракрасная катастрофа автоматически ликвидируется, поскольку минимальная энергия, соответствующая массе покоя m_0, определяет максимальную длину волны, причем эта максимально возможная длина не может превысить размеры системы (Метагалактики).

Ликвидируется и ультрафиолетовая катастрофа. Исходя из уравнения неопределенности $\hbar \approx m^* r^* c$ и учитывая гравитационное поле, полагая $r^* = \frac{Gm^*}{c^2}$, можно вычислить

$$r^* = \sqrt{\frac{G\hbar}{c^3}} \approx 10^{-33}\ \text{см}, \quad m^* = \sqrt{\frac{c\hbar}{G}} \approx 10^{-5}\ \text{г},$$

$$E^* = \sqrt{\frac{\hbar c^5}{G}} \approx 10^{16}\ \text{э}.$$

Здесь $E^* = m^* c^2$ — максимально возможная энергия фронта, r^* — гравитационный радиус, соответствующий этой энергии.

Поскольку последнее соотношение можно написать в виде

$$\frac{Gm^{*2}}{\hbar c} = \bar{\alpha} \frac{Gm^{*2}}{e^2} = \frac{1}{137} \frac{Gm^{*2}}{e^2} = 1,$$

то очевидно, что при $r = r^*$, $m = m^*$ энергия гравитационного поля фотона соответствует энергии сильных взаимодействий, что должно привести не только к гравитационно-электромагнитным трансмутациям, но и к трансмутациям, связанным также и с возможным образованием мезонов и других более тяжелых частиц. Длина порядка $r^* \approx 10^{-33}$ *см* и времена порядка $\tau^* \approx \frac{r^*}{c} \approx 10^{-43}$ *сек* характерны для описания флуктуаций гравитационного поля и, как теперь очевидно, оказываются минимально возможными длиной и временем в квантовой теории поля; эти величины также могут характеризовать квантовые свойства пространства: — времени.

Обычная квантовая теория поля не учитывает взаимодействие полей с гравитационным полем, что является ее существенным недостатком. Учет гравитационного поля при очень малых и очень больших расстояниях, когда энергия гравитационного поля сравнима с энергией частиц или с энергией полей, по-видимому, позволит ликвидировать некоторые расходимости обычной квантовой теории поля. При этом как бы объединяются две точки зрения на возможность в принципе ликвидировать расходимости — учет гравитационного поля и квантование пространства — времени, поскольку последнее является следствием учета гравитационных взаимодействий.

Мы видим, что предельная масса покоя фотонов и энергия гравитонов изменяются (уменьшаются) со временем при изменении R_i^k пропорционально T_m^{-3}, находясь все время в равновесии с плотностью энергии системы (Метагалактики), $p_0 \approx \frac{GM_0^2}{a^4} \approx T_m^{-3}$. Совершенно естественно полагать, что и масса покоя элементарных частиц (и любых других частиц класса $n > 1$) также должна находиться в предельном термодинамическом равновесии с энергией Метагалактики, а следовательно, уменьшаться со временем, поскольку давление метагалактического гравитационного поля также уменьшается со временем. В этом формализме мы можем интерпретировать R_i^k как некоторые величины, пропорциональные «затравочной тензорной» массе покоя фотонов (и вообще любых частиц), поэтому и уравнение поля можно интерпретировать как уравнение для некоторых масс (энергий), имеющих тензорный характер и входящих органически в энергию любых частиц и их образований. Таким образом, кривизну пространства действительно можно интерпретировать энергетически.

По существу этот подход совершенно противоположен чисто геометрическому подходу Эйнштейна, хотя формально они выражаются совершенно одинаковыми соотношениями.

§ 12. Проблемы термодинамики космического пространства

Будем полагать, что Вселенная бесконечна, а не просто безгранична и что она обладает бесконечным запасом энергии (материи). Разобьем бесконечную Вселенную на счетное множество конечных областей. Очевидно, в каждой конечной области находится конечное число элементарных частиц материи. Для того чтобы учесть взаимодействие материи с порожденными ею полями (электромагнитными и гравитационными), допустим на основе квантовой теории материи, что в конечной области Вселенной находится и конечное число квантов. Можно даже для общности рассуждений положить, что некоторые элементарные кванты могут быть сколь угодно малыми, но не в смысле того, что квант — энергетически «точка», а в том смысле, что счетное множество таких квантов занимает конечный объем и несет конечную энергию.

Итак, в каком-либо конечном объеме пространства может быть даже не конечное, а счетное множество элементарных частиц. Тогда во всем пространстве также будет счетное множество элементарных частиц.

Очевидно, что множество взаимодействий между частицами в каждом конечном объеме пространства за конечный интервал времени будет счетным, если частицы составляют счетное множество, и конечным, если частицы составляют конечное множество. При любом из этих предположений во всем бесконечном пространстве за конечный интервал времени произойдет счетное множество взаимодействий (под взаимодействием мы будем понимать некоторый процесс между двумя частицами, приводящий к изменению их массы или энергии).

Поскольку любой бесконечный интервал времени можно разбить на счетное множество конечных интервалов, то в течение бесконечного интервала времени во всей Вселенной произойдет также счетное множество взаимодействий.

Основным пороком применения классической статистики к бесконечной Вселенной является предположение о том, что Вселенная состоит из частиц одного класса (молекул), что совершенно неправдоподобно. Надо также заметить, что не все теоремы классической статистики, изучающей счетные множества частиц конечного числа классов, применимы к бесконечным континуальным множествам комбинаций частиц. Экстраполяция этих теорем статистики на бесконечные множества классов частиц вряд ли может быть разумной.

Можно высказать предположение, что если бы Вселенная состояла из счетного множества частиц одного класса (например, молекул), причем даже тогда, когда каждая из частиц могла бы последовательно находиться в любом из k уровней энергии (состояний), то во Вселенной после счетного числа взаимодействий между частицами (любых, не только попарных) наступило бы состояние равновесия. В случае конечного числа уровней это очевидно, поскольку множество независимых расположений частиц по уровням будет порядка $\frac{n^{k-1}}{(k-1)!}$, где n — число частиц; для счетного множества частиц это множество будет также счетным.

Таким образом, можно предположить, что в течение некоторого конечного или бесконечного интервала времени $t \leqslant \infty$ Вселенная, состоящая из частиц одного класса (молекул) без учета их собственного поля тяжести, придет к состоянию равновесия (в случае счетного множества уровней энергии равновесие также будет достигнуто при $t \leqslant \infty$, поскольку величина энергии любой частицы ограниченна).

В качестве постулата введем предположение о том, что во Вселенной всегда находится счетное множество ($\Omega_i \to \infty$) классов различных «частиц», причем каждая «частица» класса Ω_i может включать в себя частицы низших классов Ω_{i-1}, Ω_{i-E}. Под частицей можно подразумевать любое автономное образование например фотон, молекулу, звезду, системы звезд и т. д. Можно, полагать, что бесконечное разнообразие классов различных частиц является следствием взаимодействия материи с порожденными ею полями. Каждая из частиц может присутствовать во Вселенной в любом (очевидно, бесконечном) числе экземпляров. Вследствие взаимодействия из счетного множества частиц различных классов могут образовываться как частицы тех же классов, так, может быть, и частицы новых классов. Различные соотношения между частицами различных классов при принятом постулате неисчерпаемы и имеют мощность континуума. Формы существования материи при этом также будут неисчерпаемы.

Множество независимых распределений различных частиц по уровням энергии и состояниям будет порядка $\left(\frac{n^{k-1}}{(k-1)!}\right)^i$, где $i \to \infty$ есть множество классов частиц, $n^{i(k-1)} \sim 2^i$ есть множество мощности континуума.

Далее можно показать, что взаимодействия частиц более высокого класса выводят из состояния равновесия частицы низших классов. А поскольку порядок класса ничем не ограничен, то можно утверждать, что частицы разных классов всегда находятся в неравновесном состоянии и что поэтому вся Вселенная всегда находится в неравновесном состоянии. Тем самым показана несостоятельность пресловутой гипотезы о «тепловой смерти» Вселенной, основанной на недоразумении в том смысле, что бесконечно разной Вселенной навязывалось «унылое», однообразное строение, считая, что вся Вселенная состоит из частиц одного класса. Возрастание энтропии в видимой части Вселенной не фактор, свидетельствующий о стремлении Вселенной к состоянию равновесия, а следствие поступательного развития материи, когда одни формы и качества материи «отживают» и им на смену «возникают» новые.

Допущение о самопроизвольных колебаниях энтропии каждого класса частиц было бы свидетельством допущения о «круговом» тавтологическом развитии материи, противоречащем смене низших форм существования материи ее высшими формами. Множество форм существования и качеств материи в процессе ее развития неисчерпаемо.

Казалось бы, что нет необходимости объяснять вечную неравновесность Вселенной ее структурностью. Формально, рассуждая с точки зрения только теории множеств, множество всех микросостояний, обеспечивающих любое данное макросостояние в случае частиц (молекул) одного класса, есть множество подмножеств данного счетного множества, т. е. есть множество мощности континуума. Кажется на первый взгляд, что раз мощность множеств микросостояний любых макросостояний одинакова, то и вероятность их одинакова. Это значит, что в бесконечной Вселенной нет более или менее вероятных состояний, все состояния имеют одинаковую вероятность, а, следовательно, для такой Вселенной нет понятия равновесного состояния или в ней отсутствует равновесное состояние. Такой вывод одно время делал автор и позднее — Плоткин.

Однако этот вывод ошибочен. Ошибка может быть показана двояким путем. Прежде всего укажем, что в случае бесконечных множеств вероятность состояния не может быть определена мощностью множества состояний. Приведем простой пример. Мощность множества точек в бесконечной Вселенной и в любом заданном ее конечном объеме одинакова — континуум. Вероятность нахождения любого объекта во всей Вселенной есть единица, вероятность его нахождения в любом заданном конечном объеме есть нуль. В случае бесконечных множеств вероятность нужно определять не мощностью множества микросостояний, а фазовым объемом, который занимают микросостояния данного макросостояния. Условие одинаковой мощности есть условие необходимое, но недостаточное. В случае конечного множества частиц фазовый объем пространства пропорционален числу (множеству) частиц, и понятие и сама величина вероятности, определенные по числу частиц и объему, совпадают.

Когда мы имеем частицы одного класса, то после счетного множества взаимодействий (при $T \to \infty$) вероятность нахождения в фазовом объеме, содержащем микросостояния равновесных макросостояний (v_0), будет порядка единицы. Напротив, отношение фазовых объемов, содержащих все неравновесные микросостояния, к объему v_0 при $T \to \infty$ будет стремиться к нулю.

Это согласуется с тем, что множество независимых расположений частиц по уровням энергии (по состояниям) только счетно. Каждая точка в фазовом пространстве характеризует состояние системы. При обобщении квантования частиц и полей с различными $\hbar$ множество уровней энергии всех видов квантования всегда будет счетным.

В случае частиц одного класса траектория состояний системы, проведенная через счетное множество точек, попадает в фазовый объем, содержащий континуум равновесных состояний системы.

Итак, можно утверждать, что если бесконечная Вселенная состоит из частиц одного класса и этих частиц счетное множество, то действительно множество всех подмножеств данного множества будет иметь мощность континуума. Однако это множество не будет всюду компактным, лишь его подмножество, имеющее мощность континуума и занимающее фазовый объем вблизи точки «равновесия», будет компактным, остальная «часть» множества будет счетной.

В случае частного множества частиц различных классов множество мощности континуума будет всюду компактным, что обеспечивает абсолютную неисчерпаемость этого множества.

Итак, множество независимых расположений частиц по различным состояниям или уровням энергии в случае частиц одного класса будет все же только счетно. После счетного множества взаимодействий Вселенная, состоящая из частиц одного класса, попадает в состояние, сколь угодно близкое к равновесному, а весь остальной континуум невыполненных состояний и переходов будет находиться вблизи области равновесия, и ссылка на него не спасет, даже мысленно, такую Вселенную от состояния равновесия, т. е. от тепловой смерти. В этом можно легко убедиться, если рассмотреть теплопроводность или диффузию в неограниченном пространстве. Градиенты температур или концентраций выравниваются за актуальную бесконечность в бесконечном пространстве. (Время релаксации пропорционально квадрату радиуса мысленной сферы.) Только структурность Вселенной, только развитие и бесконечное разнообразие материи делают невозможным ее стремление к равновесию.

Схема строения Вселенной из частиц одного сорта противоречит тому, что наблюдается в действительности. Еще раз следует подчеркнуть, что лишь бесконечное разнообразие материи и взаимные превращения ее отдельных форм и делают возможным развитие без стремления к какому-либо «равновесному состоянию».

Поскольку каждый класс частиц имеет свою энтропию и общий запас энергии бесконечен, то бессмысленно говорить об изменении энтропии всей Вселенной. В каждом конечном объеме энергия может как возрастать, так и уменьшаться, но в большем объеме энтропия будет все же возрастать.

Даже в случае конечной (эйнштейновской) Вселенной допущение о бесконечной иерархии частиц в сторону уменьшения их энергии (исключая, конечно, частицы нулевой полной энергии) приводит к схеме всегда неравновесной Вселенной.

Итак, можно сделать самый общий вывод о том, что материя развивается необратимо без стремления прийти в состояние равновесия. Частичная обратимость, конечно, может иметь место.

Процесс развития Вселенной, который мы здесь рассмотрели, является одним из частных случаев развития материи вообще.

Столкновения и взаимодействия различных частиц разных классов имеют мощность неисчерпаемого континуума, поскольку разнообразие частиц, находящихся в равновесии с полями, в пространстве счетно. В обычной стандартной общей теории относительности было также показано (Толман), что, поскольку законы сохранения 4-х импульса приобретают характер тождеств, энтропия монотонно возрастает, не стремясь к максимуму, что и делает Вселенную всегда неравновесной.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

(Основные результаты исследования моделей вселенной при $\varkappa \neq \text{const}$

Подведем очень кратко итоги нашего изучения частиц и нашей Вселенной при $\varkappa \neq \text{const}$.

Мы показали, что если использовать старые уравнения общей теории относительности

$$R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R = \varkappa T_{ik}$$

для построения космологических моделей, то нельзя найти решения, одновременно удовлетворяющие и этим уравнениям, и условию постоянства скорости движения лидирующих частиц при постулировании постоянства фундаментальной скорости света. Если же допустить, как это иногда делается, что фундаментальная скорость света переменна, то тогда модели Вселенной Фридмана могут иметь определенный смысл. Однако допущение о переменности скорости света приводит к нарушению законов сохранения (см. конец § 6, II).

Мы подробно рассмотрели схемы однородной и изотропной Вселенной, для которых должно выполняться условие постоянства скорости разлета лидирующих частиц. При $\varkappa = \text{const}$ таких схем, удовлетворяющих законам сохранения, не существует. Исключение составляет схема для совершенно пустой Вселенной. Это также достаточно бессмысленно. Обычные уравнения поля Эйнштейна не удовлетворяют условиям прямолинейности первой характеристики в различных системах отсчета, что должно быть при $c = \text{const}$, т. е. нестрого подчиняются граничным условиям задачи Коши. Лишь при допущении, что $\varkappa = \frac{8\pi G}{c^4} \sim T_m \sim a$, можно найти модели закрытой, квазиевклидовой и открытой Вселенной (являющейся обобщением моделей Фридмана), удовлетворяющие обобщенным уравнениям поля и постоянству скорости расширения.

Мы не обобщаем наши результаты на схемы неоднородной Вселенной, когда $\varkappa$ является некоторой матрицей, считая это преждевременным, хотя и развили фундаментальный аппарат, позволяющий это сделать. При этом мы добились вывода основных уравнений поля и сохранения, не прибегая к вариации двух лагранжианов — поля и материи, как это обычно делали, а воспользовались далеко идущей идеей Эддингтона, позволяющей из вариации одного лишь лагранжиана поля (скалярной кривизны) найти уравнение поля и закон сохранения. Этот недуалистический вывод (а старый вывод не нравился и самому Эйнштейну, и он считал уравнения поля, в которых линейно через размерную константу $\varkappa$ связывались геометрические и материальные понятия, лишь приближенными к действительным) позволил по-новому интерпретировать основные уравнения теории гравитационного поля.

В гипотезе Дирака $\varkappa \backsim T_m^{-1}$ и при этом светимость звезд меняется как $T_m^{-0} \backsim \varkappa^6$. Отсюда следует вывод, что несколько миллиардов лет тому назад температуры звезд и освещаемых ими планет были гораздо больше. На земле температура могла превышать 100° С, что не согласуется с данными геологии.

В развиваемой нами теории, когда $\varkappa \backsim T_m$ и меняются остальные «константы», светимость звезд оказывается пропорциональной $T_m^{\frac{2(9-7k)}{3k-4}}$.

При $k = {}^9/_7$, что близко к действительности, светимость вообще не меняется. Кроме того, для более массивных частиц «прошлых» времен соответственно требовалось больше энергии для достижения ими соответствующей температуры. Видимо также орбиты планет имели раньше бо́льшие размеры, поскольку планеты обладали бо́льшими моментами, которые уменьшались со временем, передаваясь общему гравитационному полю. Все это заставляет прийти к выводу, что вряд ли температура планет, и в частности Земли, могла существенно измениться за последние несколько миллиардов лет из-за возможного изменения гравитационной «постоянной».

Все это, конечно, подлежит дальнейшему изучению и уточнению, поскольку еще не очень ясен до конца энергетический балланс звезд и реакции, происходящие внутри них даже при постоянном $\varkappa$.

При $\varkappa = \text{const}$, решая задачу Шварцшильда и рассматривая удаление или падение частицы на центр притяжения со скоростью света, мы пришли к выводу, что эта скорость всюду сохраняется, С другой стороны, рассматривая задачу Фридмана для частицы. находящейся на поверхности сферы для квазиевклидовой модели (что эквивалентно задаче Шварцшильда), мы пришли к выводу, что скорость движения этой частицы (граница сферы) переменна в сопутствующей системе отсчета. Лишь для резко неоднородных моделей нашей Вселенной можно в центральной системе отсчета «сделать» скорость границы постоянной, но подобная неоднородность, по-видимому, противоречит наблюдательным данным, так как в этом случае средняя плотность даже в видимой части Вселенной должна меняться и притом монотонно на несколько порядков, что говорит не в пользу гипотезы $\varkappa=\text{const}$, поскольку этого не наблюдается. Но окончательный ответ, конечно, за более тщательными будущими наблюдениями, проведенными для большей области Метагалактики.

При $\varkappa \sim a$ обе задачи дают одинаково правильный результат: постоянство скорости движения, равной скорости света во всех системах отсчета.

При $T_i^k = 0$ наши новые уравнения гравитации и уравнения Эйнштейна совпадают. При $T_i^k \neq 0$ наши уравнения дают правильный результат в отличие от уравнений Эйнштейна и поэтому являются более «надежными», чем старые уравнения Эйнштейна. В нашем решении задачи Фридмана при $\varkappa \sim a$ первая характеристика совпадает с траекторией движения первой «лагранжевой» частицы, в старых моделях Фридмана (при $\varkappa = \text{const}$) траектория первой лагранжевой частицы не совпадает с первой прямолинейной (световой) характеристикой. Классические уравнения Эйнштейна несовместимы с условиями на первой характеристике для частного фридмановского решения. Для фридмановских решений уравнений, установленных нами, напротив, эти условия совместности выполняются.

Следует отметить, что все же уравнение пустого поля $R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik}R = 0$ не имеет точного смысла, поскольку в нелинейном поле сами гравитационные волны порождают новое поле и частицы, что должно давать в правой части некоторое отличное от нуля выражение.

Далее оказалось возможным при $\varkappa \neq \text{const}$ построить конкретную модель гравитационных взаимодействий. Эта модель связана с флуктуациями энергии в пространстве, приводящими к выбросу весьма малой части энергии виртуального мезонного облака, «вращающегося» около керна нуклона, или энергии поля электрона. При этом величина флуктуации энергии совпадает с гравитационной энергией элементарных частиц. Длина волны де Бройля (Комптона) при этом оказывается равной размерам пространства, поэтому элементарную порцию выбрасываемой энергии (квант тяготения — гравитон) относительно нашей Вселенной можно считать также виртуальной, а относительно нуклона (или электрона) — «реально» существующей и наблюдаемой.

Взаимодействие этих порций энергии (гравитонов) приводит к силам притяжения (в первом приближении — ньютоновым). Эта часть теории развита в квазиклассическом приближении, поскольку «строгое квантование» гравитационных излучений давало бы лишь иллюзорную точность.

В конкретных моделях однородного и изотропного пространства оказалось, что $\varkappa \sim T_m$, $e^2 \sim \hbar \sim M_p \sim T_m^{-2}$ при постулировании законов сохранения и введении характерной постоянной длины порядка размеров нуклона или электрона; при этом оказалось, что $c = \text{const}$. Поскольку изменение всех величин автомодельно, то это не влечет за собой изменения уравнения состояния любой среды и вообще термодинамических соотношений, что весьма существенно не изменяются также «боровские» условия квантования.

Существенно, что изменение $\varkappa$ и других величин зависит от изменения общего поля Метагалактики (от R_0), несмотря на то, что локальная плотность энергии $p_{\text{л}} = \frac{Gm_{\text{л}}^2}{r^4}$ может значительно превышать среднюю метагалактическую плотность энергии $p_0 = \frac{GM_0^2}{a^4}$. Но при этом $\frac{\varphi_0}{c^2} \approx 1$ $\left(\text{где } \varphi_0 = \frac{GM_0}{a}\right.$ — потенциал поля Метагалактики) для Метагалактики и $\frac{\varphi_{\text{л}}}{c^2} \ll 1$ $\left(\text{где } \varphi_{\text{л}} = \frac{Gm_{\text{л}}}{r}\right.$ — потенциал локального поля$\Big)$ для локальных полей. Таким образом, на изменение «констант» влияет потенциал, а не средняя объемная плотность энергии.

При возможных сжатиях «звезд» до гравитационного радиуса (при так называемом коллапсе) возможны, видимо, также процессы, которые приведут к изменению «констант» и числа частиц, но в направлении, противоположном по сравнению с их изменением при расширении Метагалактики. Число частиц должно уменьшаться, масса и заряд их расти, $\hbar$ расти, а G уменьшаться.

В данной точке пространства в данный момент времени свойства частиц определяются общей кривизной a. Если в другом месте кривизна иная и «к нам» приходят частицы с другими массами, то они «приспосабливаются» к нашей кривизне, сбрасывая лишнюю энергию или приобретая недостающую из общего фона.

Как мы показали в § 2 части II, в случае локальных неоднородностей величина $\varkappa$ уменьшается при приближении к ним. Этот эффект может быть понят при условии, что величина $\varkappa \sim T_m \sim a$. В местах локальных неоднородностей плотность энергии гравитационного поля возрастает по сравнению со средней, что как бы соответствует более ранним временам расширения Метагалактики. В концепции Дирака и других ученых $\varkappa \sim T_m^{-1}$, что находится в противоречии с принципом Маха — Беркли.

Различные характерные длины переменны: радиус нашей Вселенной растет, как cT_m/ω_0, гравитационный радиус падает пропорционально $\sim r_0/T_m$, радиус флуктуаций поля падает, как $r/\sqrt{T_m}$. В начальный момент времени все характерные размеры совпадали с начальными размерами r_0 — радиусом нуклона.

Таким образом, модель флуктуации энергии, приводящая к убыли энергии элементарных частиц (и античастиц), согласуется с моделями, получаемыми из обобщенной общей теории относительности.

Исходя из других соображений (обобщенного принципа действия), на возможность необратимых излучений элементарных частиц указал Иосифьян *. Теперь у нас нет оснований называть теорию гравитационного поля, точнее говоря вообще теорию полей и частиц, общей теорией относительности. Принцип эквивалентности, правда с точностью до излучения гравитационных волн ($\sim c^{-5}$), выполняется в малом. Все же, уничтожив ускорение тел, движущихся под действием гравитационного поля в локально-инерциальной системе, нельзя уничтожить энергию поля (так как в псевдотензор энергии-импульса поля входят вторые производные g_{ik}), и поэтому падение малого тела, например, на Землю нельзя интерпретировать, как падение Земли на тело.

---

* А. Г. Иосифьян. Вопросы единой теории электромагнитного и гравитационно-инерциального полей. Ереван, Изд-во АН Арм.ССР, 1959.

Только в случае одинаковых объектов ускоренное движение будет относительно в полном смысле этого слова.

Из нашего вывода уравнений гравитационного поля, основанного на вариации одного лагранжиана, следует, что уравнения поля в пустоте (правая часть $\equiv 0$) не имеют точного смысла, поскольку само «тяготение» есть материя и она должна давать вклад в правую часть уравнения поля.

Само же понятие энергии гравитационного поля оказалось двойственным. С одной стороны, мы определяем энергию ($\overline{E}_g$) гравитационного и инерциального полей с помощью псевдотензора энергии-импульса t_i^k, причем часть этой энергии меняется в зависимости от выбора системы отсчета, а часть остается неизменной. Эта энергия отрицательная (притяжение). С другой стороны, имеется энергия (E_g) частиц гравитационного поля, энергия гравитационного Бозе-газа. Эта энергия положительная (давление) и описывается тензором энергии-импульса T_{gi}^k, причем $\overline{E}_g = -t_0^0 \approx T_{g0}^0 = -E_g$.

Далее, здесь снова подтвержден существенный вывод теории Фридмана о расширении материи в нашей области Вселенной и сделана попытка понять, как это может происходить и какие процессы при этом должны наблюдаться. Созданы элементы теории множественного рождения и взаимодействия частиц различных классов, возникших в результате «взрыва», или столкновения двух «начальных» частиц материи, которое могло иметь место около 10 миллиардов лет тому назад.

Если подобный процесс мог произойти в уже заполненном плотной материей пространстве, то около старых «звезд» теперь могут образоваться более молодые звезды и процесс взаимодействия материи оказывается еще более многообразным.

Во Вселенной происходят различные взаимодействия, и только благодаря обмену энергиями между частицами одних классов возможны взаимодействия частиц других классов. Для этого необходим необратимый обмен «информацией» между частицами.

Гравитационные взаимодействия в старой теории являлись универсальными и минимальными, наличие «диссипативных» гравитационных волн показывает, что это всегда так. Несмотря на то что есть еще более слабые энергетические взаимодействия, свойственные более малым частицам, гравитационная «постоянная» универсальна для всех частиц.

Вследствие кажущейся универсальности гравитационных взаимодействий (практически гравитация универсальна) их можно было описать как кривизну пространства, поскольку и тому и другому соответствуют уравнения, не обладающие никакими группами преобразований. Теперь кажутся недостаточными попытки Эйнштейна описать все виды частиц и полей геометрически — кривизной пространства и особыми точками в нем; различные взаимодействия описываются разными группами преобразований и разными видами пространств. Поэтому попытка создания геометризованной единой теории поля (в одном пространстве) привела к неудачам. Сам Эйнштейн не только не был удовлетворен достигнутыми результатами в этой области, но не был удовлетворен и своими основными уравнениями теории гравитационного поля.

«Содержание изложенной выше общей теории относительности формально выражается уравнением

$$R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R = \varkappa T_{ik}.$$

Левая сторона этого уравнения зависит только от симметричного тензора g_{ik}, описывающего как метрические свойства пространства, так и гравитационное поле. Правая сторона уравнения феноменологически описывает все источники гравитационного поля. Тензор T_{ik} представляет энергию, которая создает гравитационное поле, но сама не имеет гравитационного характера, как, например, энергия электромагнитного поля, энергия плотности и т. д. При составлении тензора T_{ik} были использованы представления дорелятивистской физики, которые только a posteriori были согласованы с общим принципом относительности.

Такой дуалистической трактовки единого поля нельзя было избежать на первой стадии развития теории относительности. Было, однако, очевидно, что это является только предварительным подходом к проблеме» *.

Нам кажется, что описание общих свойств материи может быть проведено лишь с помощью самых общих методов математического мышления — теории групп и теории множеств, а уточнения и конкретизации аппарата возможны только при установлении наблюдаемых объективных данных для каждого вида материи и взаимодействия. Например, дипольность электромагнитного из-

* А. Эйнштейн. Сущность теории относительности. ИЛ, 1955, стр. 119.

лучения приводит к описанию этих взаимодействий в «векторном» квазиевклидовом пространстве, а квадрупольность гравитационных излучений приводит к описанию гравитации с помощью «тензорного» кривого риманова пространства (чем меньше кванты энергии, тем менее однородно пространство, в котором описываются взаимодействия этих квантов). Существенно также, что «геометрическая» концепция гравитации при ее развитии и феноменологические схемы, рассматривающие «механизм» гравитации, дают одинаковые результаты и дополняют друг друга. При этом появилась возможность экспериментальной проверки некоторых основных идей, изложенных здесь как при исследовании элементарных частиц и атомов, так и в космологии.

ЛИТЕРАТУРА

А. ОСНОВНЫЕ МОНОГРАФИИ

Бергман П. Г. Введение в теорию относительности. ИЛ, 1947.

Бете Г., Гофман Ф. Мезоны и поля. ИЛ, 1957.

Бете Г., Моррисон Ф. Элементарные теории поля. ИЛ, 1958.

Блохинцев Д. И. Основы квантовой механики. Изд. 3. Изд-во «Высшая школа», 1961.

Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В. Введение в теорию квантовых полей. Гостехиздат, 1957.

Вебер Дж. Общая теория относительности и гравитационные волны. ИЛ, 1962.

Дрелл С., Захариазен. Электромагнитная структура нуклонов, ИЛ, 1962.

Зоммерфельд А. Электродинамика. ИЛ, 1958.

Инсфельд Л., Плебаньский Е. Движение и релятивизм. ИЛ, 1962.

Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория поля. Изд. 3. Физматгиз, 1960.

Ландау Л., Лифшиц Е. Статистическая физика. Гостехиздат, 1951.

Ландау Л., Лифшиц Е. Квантовая механика, I. Гостехиздат, 1948.

Мак-Витти Г. К. Общая теория относительности и космология. ИЛ, 1961.

Маляров В. В. Основы теории атомного ядра. Физматгиз, 1959.

Мари-Антуанетт Тонела. Основы электромагнетизма и теории относительности. ИЛ, 1962.

Над чем думают физики. Вып. 1, 2. Физматгиз, 1962, 1963.

Новейшие проблемы гравитации. Сборник статей. ИЛ, 1961.

Паули В. Теория относительности. Гостехиздат, 1947.

Петров А. З. Пространства Эйнштейна. Физматгиз, 1961.

Полак Л. С. Вариационные принципы механики, их развитие и применения в физике. Физматгиз, 1960.

Принцип относительно сти (Сборник работ классиков релятивизма). М.— Л., 1935.

Пуанкаре А. Последние мысли. Птг., Научное книгоиздательство, 1922.

Пуанкаре А. В кн. «Принципы относительности». ОНТИ, 1936.

Синг Дж. Общая теория относительности. ИЛ, 1963.

Уилер Дж. Гравитация, нейтрино и Вселенная. ИЛ, 1962.

Умадзава Х. Квантовая теория поля. ИЛ, 1958.

Философские проблемы физики элементарных частиц. Изд-во АН СССР, 1963.

Фок В. А. Теория пространства, времени и тяготения. Изд. 2. Физматгиз, 1961.

Хенли Э., Тирринг В. Элементарная квантовая теория поля. ИЛ, 1963.

Эддингтон А. С. Теория относительности. ГТТИ, 1934.

Эйнштейн А. Сущность теории относительности. ИЛ, 1955.

Элементарные частицы и компенсирующие поля. Сборник статей. Изд-во «Мир», 1964.

Б. ОСНОВНЫЕ ОРИГИНАЛЬНЫЕ СТАТЬИ

Александров Ю. А., Андреев В. Н., Бондаренко И. И., ЖЭТФ, 1958, 35, 1305.

Амбарцумян В. А., Иваненко Д. Д. Z. Phys., 1930, 64, 563.

Амбарцумян В. А. О природе и эволюции галактик.— В сб. «Земля во Вселенной». Изд-во «Мысль», 1964.

Блохинцев Д. И. Флуктуации пространственно-временной метрики.— Тезисы Первой советской гравитационной конференции. Изд-во МГУ, 1961.

Брагинский В. А., Рукман Г. И., Иваненко Д. Д. ЖЭТФ, 1960, 38, 1005.

Бронштейн М. П. ЖЭТФ, 1936, 6, 135.

Воронцов-Вельяминов Б. А. Просторы галактик. Изд-во «Знание», 1963.

Гелл-Манн и Розенбаум П. Е. Элементарные частицы.— В сб. «Над чем думают физики», № 2. Физматгиз, 1963.

Гольфанд Ю. А. ЖЭТФ, 1959, 37, 504.

Иваненко Д., Бродский А., Гинсбург Л. Докл. АН СССР, 1951, 80, 565.

Иваненко Д., Мицкевич Н. В. ЖЭТФ, 1959, 37, 868.

Мицкевич Н. В. Ann. Phys., 1958, 1, 319.

Мицкевич Н. В. ЖЭТФ, 1958, 34, № 6.

Оконов Э. О., Подгорецкий М. И., Хрусталев О. А Препринт ОИЯИ, Д-647, 1961.

Петров А. З. Докл. АН СССР, 1951, 81, 149.

Петров А. З. Уч. зап. Казанского гос. ун-та, 1954, 114, 55.

Савченко К. Н. Изв. Одесской астр. обс., 1949, 2, вып. 1.

Савченко К. Н. Изв. Одесской обс., 1950, 6.

Сапар А. Тезисы Первой советской гравитационной конференции. Изд-во МГУ, 1961.

Фок В. А., Иваненко Д. Д. Phys. Z., 1929, 30, 648.

Хофштадтер Р. Атомные ядра.— В сб. «Над чем думают физики», № 1. Физматгиз, 1962.

Шапиро И. С. Nucl. Phys., 1960, 21, 474.

Conide F. M. Il Nuovo Cimento, 1964, 30, N 2.

Dicke R. Science, 1959, 129, 621.

Dirac P. A. M. Nature, 1957, 139, 323; Proc. Roy. Soc., 1938, A165, 199.

Dirac P. A. M. Canad. J. Math., 1950, 2, 129.

Dirac P. A. M. Phys. Rev. Lett., 1959, 2, 368.

Jordan P. Naturwiss., 1937, 25, 513.

Jordan P. Naturwiss., 1938, 26, 417.

Mc. Vittie. Handbuch der Physic, 53. Berlin, 1959, S. 445.
Møller C. Ann. Phys., 1958, 4, 347.
Møller C. Ann. Phys., 1961, 12, 118.
Møller C. В сб. «Max-Planck Festschrift». Berlin, 1958, S. 139.
Segre E. Proc. Intern. Conf. on Mesons and Recently discovered particles. Padova — Venezia, 1957.

В. РАБОТЫ АВТОРА, ПОЛОЖЕННЫЕ В ОСНОВУ МОНОГРАФИИ

О возрастании энтропии в бесконечной Вселенной.— Докл. АН СССР, 1949, 69, № 6.
Некоторые стационарные релятивистские течения.— Докл. АН СССР, 1958, 119, № 2.
Взаимодействия двух тел, «излучающих» потоки газа.— Докл. АН СССР, 1958, 119, № 4.
Некоторые стационарные релятивистские движения газа в проводящей среде.— ЖЭТФ, 1958, 35, № 3 (9).
К вопросу о физической природе тяготения.— Бюлл. ВАГО АН СССР, 1959, № 24.
Цилиндрические и плоские магнитогидродинамические волны.— ЖЭТФ, 1959, 36, № 6.
К вопросу о термодинамике Вселенной.— Труды Шестого совещания по вопросам космогонии. Изд-во АН СССР, 1959.
Об излучении гравитационных волн «элементарными частицами».— Вестн. МГУ, 1961, № 5.
Гравитационные волны и элементарные частицы.— Тезисы Первой советской гравитационной конференции. 27—30 июня 1961 г. Изд-во МГУ, 1961.
Проблемы термодинамики космического пространства.— Тезисы докладов на Первой научно-методической конференции по термодинамике. Гостоптехиздат, 1962.
Релятивистское движение среды и переход в излучение.— Archiwum Mechaniki Stosowanaj, 3/4, 14. Warszawa, 1962.
Лагранжиан в релятивистской механике сплошных сред.— Докл. АН СССР, 1962, 145, № 1.
К вопросу о возможном изменении гравитационной постоянной.— Докл. АН СССР, 1962, 147, № 6.
Взаимодействие тел, излучающих гравитационные волны.— Вестн. МГУ, 1962, № 1.
Одно обобщение уравнений гравитации Эйнштейна.— Докл. АН СССР, 1963, 148, № 2.
Обобщение моделей Вселенной Фридмана.— Докл. АН СССР, 1963, 151, № 3.
Вариационный принцип в общей теории относительности.— Докл. АН СССР, 1963, 153, № 3.
Лагранжиан сплошной среды в Римановом пространстве.— Докл. АН СССР, 1964, 154, № 2.
Новый вариационный формализм в общей теории относительности.— Докл. АН СССР, 1964, 158, № 1.
Обобщенный вариационный формализм в общей теории относительности.— Вестн. МГУ, 1964, № 1.
Гравитация. Изд-во «Знание», 1964 (совм. с С. М. Колесниковым).

СОДЕРЖАНИЕ

Кирилл Петрович Станюкович

Гравитационное поле
и элементарные частицы

Редактор издательства *В. А. Лешковцев*
Художник *В. А. Назаров*
Технический редактор *С. Г. Тихомирова*

Сдано в набор 26/XII 1964 г.
Подписано к печати 19/IV 1965 г.
Формат $60 \times 90^1/_{16}$. Печ. л. 19,5.
Уч.-изд. л. 13,2 Тираж 7.600
Т-06113. Изд. № 3111/04. Тип. зак. № 1616
Темплан 1965 г. № 84

Цена 1 р. 12 к.

Издательство «Наука»
Москва, К-62, Подсосенский пер., 21

2-я тип. Издательства «Наука»
Москва, Г-99, Шубинский пер., 10

ИСПРАВЛЕНИЯ И ОПЕЧАТКИ

Страница	Строка	Напечатано	Должно быть
13	9, 10, 11 св. 5, 6 сн.	dS	ds
17	7 св.	$q_i^{(r)} = 1$	$q_i^{(r)}$ величины
22	10 св.	сверка	свертка
51	11 сн.	c^{-1}	c^{-2}
67	15 св., 1, 4 сн.	h	H
71	2 св.	δ_i^{ik}	δ_i^k
73	6 сн.	c_{P_0}	cP_0
	2 сн.	mn	mn^2
90	6 св.	$s_0\dot{b}_0$	$r_0\dot{b}_0$
	9 св.	(14. 15)	(14. 23)
151	12 св.	$G > a$	$G \sim a$
241	7 сн.	$\frac{2}{3} Q_0$	$-\frac{1}{3} Q_0$
	7 сн.	$g_{zz} - g_{tt}^0$	$g_{zz} - g_{zz}^0 \approx \frac{r_\Phi}{r_0} \approx T_m^{-1/2}$
242	4 св.	$T_{mi} \sqrt{N_g^*}$	$T_m; \sqrt{N_g^*}$
	5 сн.	$\tau =$	$\bar{\tau} =$
247	1 сн.	const	const $= n_0$
252	13 сн.	$nr_0^3n_0$	$\pi r_0^3 n_0$
253	11 св.	$r_0^2 m_0$	$r_0^2 M_0$
	17 св.	$R =$	$R^3 =$
272	9 сн.	T_{Hm}^6	T_{Hm}^3
273	3 св.	Mpe^2	Mpc^2

К. П. Станюкович