О. Штейнман

Метод возмущений в аксиоматической теории поля

издательство
«Мир»

LECTURE NOTES IN PHYSICS
VOL. 11

Othmar Steinmann
Schweizerisches Institut für Nuclearforschung,
Zürich

PERTURBATION EXPANSIONS IN AXIOMATIC FIELD THEORY

SPRINGER-VERLAG
Berlin · Heidelberg · New York 1971

О. Штейнман

Метод возмущений в аксиоматической теории поля

Перевод с английского
А. Д. СУХАНОВА

Под редакцией
М. К. ПОЛИВАНОВА

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»
Москва 1974

УДК 530.145.7

Книга известного физика-теоретика О. Штейнмана посвящена формулировке метода возмущений в аксиоматической теории поля. Ее достоинством является сочетание математической строгости изложения с ясным пониманием физического существа проблемы. Многие результаты принадлежат самому автору.

В основе математического аппарата монографии лежит система уравнений Глазера — Лемана — Циммермана для запаздывающих функций Грина. Главная ее часть посвящена исследованию свойств разложений этих функций по константе связи. Особое внимание уделяется описанию поведения полученных решений на малых расстояниях. Завершается монография анализом проблемы перенормируемости теории поля, играющей важную роль в физике элементарных частиц.

Книга представляет интерес для физиков-теоретиков — научных работников, студентов и аспирантов, а также для математиков, интересующихся математическими проблемами квантовой теории поля.

Редакция литературы по физике

Ш $\frac{20402-061}{041(01)-74}$ 61—74

ПРЕДИСЛОВИЕ К РУССКОМУ ИЗДАНИЮ

Книга посвящена методу возмущений в аксиоматической квантовой теории поля. Однако мы хотели бы с самого начала уточнить ее содержание. Дело в том, что первый последовательный вариант теории возмущений — тот, который изложен в книге Н. Н. Боголюбова и Д. В. Ширкова [5],— уже опирался по существу не на каноническую формулировку квантовой теории поля, а на аксиоматическую теорию S-матрицы с условием причинности. В теории возмущений Боголюбова знаменитые «бесконечности» были возведены к своему источнику — перемножению обобщенных функций. Теория R-операции Боголюбова — Парасюка не использовала «внешних» рецептурных требований, но опиралась только на внутренний произвол коэффициентных функций S-матрицы при совпадении аргументов. Тот факт, что для перенормируемых теорий — в частности, для электродинамики — этот произвол «собирается» в переопределение физических массы и заряда и оператора поля, с чисто аксиоматической точки зрения является лишь удачной случайностью, а с более общей — подтверждает адекватность математического формализма физической задаче. Таким образом, принципиальное построение аксиоматической теории поля в рамках теории возмущений было осуществлено уже к 1957 г.

Однако это не значит, разумеется, что здесь не осталось нерешенных задач. Не касаясь попыток выхода за рамки теории возмущений, даже и в этой теории первоначальный подход Боголюбова опирался на такие нефизические понятия, как «голые» невзаимодействующие поля и т. п., а с другой стороны, сталкивался с серьезнейшими трудностями при попытках сформулировать уравнения движения для взаимодействующих гейзенберговых операторов.

Поэтому не удивительно, что за прошедшие пятнадцать лет было сделано много попыток, исходя из несколько иных аксиоматических формулировок, ближе подойти к динамическому описанию, обойти ряд технических и принципиальных трудностей выше описанного подхода и, так сказать, расширить сферу, в которой может эффективно действовать квантовая теория поля (в различных формулировках). В разных направлениях были достигнуты совершенно определенные успехи, но в нашу задачу не входит их перечислять. Мы будем дальше говорить только о том круге проблем, к которому примыкает книга Штейнмана.

Центральную роль в этой книге играют уравнения Глазера — Лемана — Циммермана для запаздывающих функций. Сама по себе идея формулировки теории квантованных полей в терминах полной системы функций Грина высказывалась не раз. Нам кажется, что наиболее последовательный способ перехода к такой формулировке состоит во введении производящего функционала для запаздывающих или других, T-упорядоченных, функций Грина. Здесь мы опять возвращаемся к теории S-матрицы с условием причинности, потому что именно такая S-матрица, в которую введена зависимость от вспомогательной классической функции, оказывается благодаря условию причинности производящим функционалом для функций Грина. При этом, если в качестве вспомогательной функции выбирается внешний ток-источник, то получается аксиоматическая формулировка, очень близкая к формулировке Лемана — Симанзика — Циммермана, которая является исходной во всех построениях Штейнмана.

Б. В. Медведев и авторы настоящего предисловия [38*, 39*] разрабатывают иной подход, восходящий к системе «дисперсионных» аксиом Боголюбова [35*], в которой роль функционального аргумента играет расширенное асимптотическое поле. Этот подход обладает рядом преимуществ. В частности, нам кажется уместным для ясности подчеркнуть здесь, что так называемые «полностью ампутированные» функции Грина, к которым переходит Штейнман для конкретной работы, в нашем подходе получаются сразу такими благодаря выбору функционального аргумента. Иначе говоря, полностью ампутированные функции Грина гейзенберговых полей — это обычные функции Грина токов. Естественность такого выбора, кроме прочего, связана с тем, что именно в нем разложения операторов и, в частности, S-матрицы по функциональному аргументу оказываются на энергетической поверхности так называемыми разложениями Хаага по нормальным произведениям асимптотических полей.

Заметим, что, работая с функциями Грина и с асимптотическими полями, мы можем избежать нефизических понятий «голых» частиц и состояний. В этом подходе можно попытаться формулировать и уравнения движения. Частные успехи в близком направлении получены в работах Циммермана и его сотрудников [4], упоминаемых в книге Штейнмана.

Хотелось бы специально отметить роль условия причинности Боголюбова во всем этом направлении. В упомянутых выше работах Боголюбова и его школы как по теории возмущений, так и по «дисперсионному» подходу центральная роль этого условия всегда подчеркивается. Штейнман явно им не пользуется, заменяя его на уровне аксиом требованием локальной коммутативности (исчезновение коммутатора вне конуса), которое следует из условия причинности, но его не исчерпывает. Однако дальше он дополняет это условие естественными требованиями на носитель запаздывающих функций. Можно считать, что условие причинности есть просто операторная запись этих требований на носитель, и если оно отсутствует, то легко построить примеры таких «запаздывающих» функций, которые, не нарушая требования локальной коммутативности, имеют совсем другой носитель.

Аксиоматический метод исследования функций Грина оказался очень плодотворным в ряде направлений. В частности, в области сильных взаимодействий, где прямолинейная теория возмущений неприменима,— это почти единственный последовательный полевой метод исследования. Однако до сих пор ему недостает разработанности и динамической полноты, которыми обладает стандартная теория возмущений. Поэтому дальнейшее продвижение в эотм направлении затормаживается и оказывается, что для понимания структуры функций Грина и для сравнения этого метода с другими полезно развить ту же теорию возмущений, но уже внутри этого подхода. Такая теория возмущений, конечно, и принципиально и по форме должна сильно отличаться от обычной, начинающей со свободных полей и лагранжиана взаимодействия, и должна быть последовательно построена на своих собственных основаниях. Этому вопросу посвящено много журнальных статей, но книга Штейнмана — первый пример подробной монографии на эту тему.

Разумеется, материал, представленный в этой книге, не следует рассматривать как окончательную формулировку теории возмущений для аксиоматически определяемых функций Грина (автор на это и не претендует). Остается еще много открытых вопросов и, в частности, вопросы об установлении связей этой теории с близкими направлениями, представленными уже упоминавшимися работами Циммермана, работами Глазера [16, 17] и другими. Для установления этого соответствия в первую очередь недостает такого кардинального звена, как какой-либо аналог R-операции вне рамок теории возмущений. Но книга Штейнмана содержит множество очень полезных для всякой такой работы методов, технических лемм, частных промежуточных результатов. Написанная на необходимом уровне математической культуры и содержащая глубокое понимание физической сути проблемы, эта книга, как мы надеемся, окажется полезной читателям и стимулирует дальнейшую работу в этом очень актуальном и плодотворном направлении.

М. К. Поливанов
А. Д. Суханов

Глава 1

ВВЕДЕНИЕ

Ввиду того что в квантовой теории поля по-прежнему отсутствуют нетривиальные точные модели, приближенные схемы приобретают интерес, выходящий за пределы их возможной пользы для численных расчетов. Подробное изучение таких схем может привести к открытию каких-то черт, справедливых и в точной теории, и дать нам в руки ключи для поисков таких точных моделей.

Среди различных приближенных методов, развивавшихся до сих пор, теория возмущений бесспорно изучена наиболее детально. Ее отличительная черта — возможность уточнения до сколь угодно высокой степени: она дает бесконечную последовательность приближений все возрастающей сложности. Можно надеяться, что эта возрастающая сложность соответствует все более тесному приближению к действительности. К сожалению, это не обязательно сопровождается возрастанием численной точности. Небольшое число указаний, которыми мы располагаем, по-видимому, говорит о том, что цепочка последовательных приближений в методе возмущений расходится, так что теория возмущений вряд ли позволит доказать теорему существования для нетривиальных моделей. Тем не менее изучение теории возмущений представляет интерес по причинам, упомянутым выше, независимо даже от вычислительных успехов, достигнутых с ее помощью в электродинамике и в меньшей мере в теории слабых взаимодействий. В частности, она может оказаться полезной в качестве пробного камня для проверки различных предположений о свойствах теоретико-полевых величин. Принято считать, что свойства, не справедливые в теории возмущений, не имеют места также в точной теории. (Излишне говорить, что этим критерием следует пользоваться с некоторой осторожностью[1].)

---

[1]) Более того, для целого класса теорий это заведомо не так.— *Прим. перев.*

По традиции теорию возмущений развивают в рамках канонической теории поля, которая возникла как простое обобщение правил нерелятивистской квантовой механики на системы с бесконечным числом степеней свободы [1]). В ней постулируются гамильтониан или лагранжиан как определенная функция полей, и соответствующие уравнения движения решаются путем разложения всех входящих в них величин в степенные ряды по константе связи. К сожалению, многие коэффициенты разложения оказываются расходящимися. Их можно сделать конечными с помощью так называемой процедуры «перенормировки» ценой включения в уравнения движения и гамильтониан компенсирующих членов с бесконечными коэффициентами. Короче говоря, исходные уравнения не имеют решений, а уравнения, имеющие решения, на первый взгляд кажутся бессмысленными. Обычный метод придания им хоть какого-то смысла состоит в том, что бесконечные коэффициенты определяют как пределы конечных величин, предварительно вводя то или иное обрезание, устраняемое на заключительном этапе. В последние годы Брандт, Вильсон и Циммерман (см. [3, 4] и цитированные там оригинальные работы) разработали более сложный метод, предложенный впервые Валатином [2]. Авторы этого метода подчеркивают, что расходимости в уравнениях движения обусловлены наличием пресловутых неопределенностей в произведениях полей в одной точке, и предлагают определить эти произведения как пределы произведений операторов в различных точках. Оба метода имеют тот недостаток, что они лишают канонический формализм его простоты и интуитивной привлекательности.

В школе Боголюбова [5] принята другая точка зрения. Ее последователи выводят правила теории возмущений, включая перенормировку, идейно более удовлетворительным способом, отказываясь придавать слишком большое значение каноническому формализму. Лагранжиан используется просто для того, чтобы задать теорию в первом

---

[1]) Подробное обсуждение проблем и результатов канонической теории возмущений читатель найдет в парижских лекциях Хеппа [1]. Более формальное изложение можно найти в любой из известных монографий по квантовой теории поля.

порядке по константе связи, когда расходимости еще не возникают. Высшие порядки теории затем вычисляются не из уравнений движения, а за счет широкого использования требований причинности и унитарности S-матрицы.

Эта точка зрения близка к той точке зрения, которой мы будем придерживаться в данной книге. Мы совсем отказываемся от рассмотрения лагранжиана и канонических перестановочных соотношений для взаимодействующих полей и будем исследовать задачу в рамках аксиоматической теории поля.

Леман, Симанзик и Циммерман уже в первой своей работе [6], в которой было сформулировано то, что затем стало называться формализмом ЛСЦ, отметили, что их подход к теории поля открывает новые возможности введения динамики и, в частности, получения рядов теории возмущений [1]). Они показали, что теорию поля можно полностью характеризовать ее функциями Грина (хронологическими функциями), т. е. набором обобщенных функций $\tau(x_1, \ldots, x_n)$, $n = 2, 3, \ldots$, удовлетворяющих определенным условиям и, в частности, бесконечному набору квадратичных интегральных уравнений. Они предположили. что всякая конкретная модель может быть описана заданием определенных граничных условий для τ-функций, и показали, как эта идея может быть реализована в низших порядках теории возмущений. Позднее они показали, что вместо τ-функций можно использовать запаздывающие функции $r(x_1, \ldots, x_n)$ [7, 8].

Эти идеи получили дальнейшее развитие [9—11]. Было показано, что на этом пути можно обойти ультрафиолетовые расходимости, причем вместо этого возникает неоднозначность решений соответствующих уравнений. Однако не было показано, что ультрафиолетовые трудности не заменяются просто другими проблемами равной сложности. Проблемы существования решений, не связанные с вопросом об ультрафиолетовых расходимостях, полностью игнорировались. Другими словами, формализм был создан, но не было доказано, что он может работать.

---

[1]) Другой подход к аксиоматической теории поля развили Боголюбов и его сотрудники [35*]. Подробное изложение различных методов построения аксиоматической теории поля можно найти в книге Боголюбова, Логунова и Тодорова [36*].— *Прим. перев.*

Здесь мы намерены дать такое доказательство, основанное на идеях, предварительный вариант которых был изложен в двух более ранних работах автора [12]. Будет развит аппарат теории возмущений, который позволит вычислять запаздывающие функции r в любом порядке по константе связи путем решения методом последовательных приближений уравнений условия унитарности с определенными граничными условиями. Будет строго доказано, что этот формализм приводит к конечным результатам во всех конечных порядках теории возмущений. Однако о важнейшем вопросе сходимости рядов теории возмущений мы не получим никаких сведений. Таким образом, всюду в дальнейшем любое утверждение типа «A справедливо в теории возмущений» следует понимать: «A справедливо в любом конечном порядке теории возмущений».

Мы предполагаем, что читатель знаком с основными идеями и наиболее важными результатами аксиоматической теории поля Вайтмана, изложенными в книгах Стритера и Вайтмана [13] и Йоста [14], а также с формализмом Лемана — Симанзика — Циммермана (ЛСЦ) [6—8] [1]. Все необходимые для дальнейшего изложения определения и результаты приведены в гл. 2, но без каких-либо обоснований или доказательств.

Мы будем рассматривать только простейший случай одного скалярного эрмитова поля $A(x)$, ассоциируемого с бесспиновыми частицами массы $m > 0$. Обобщение на случай любого числа полей с произвольным спином можно осуществить непосредственно. (Правда, мои друзья, занимающиеся феноменологией, сообщили мне, что это далеко *не* тривиально.) Более серьезно ограничение массивными частицами. Формализм ЛСЦ в его существующей форме неприменим к безмассовым частицам, и не очевидно, как его можно обобщить. Отсюда вытекает печальное следствие: квантовая электродинамика — теория, в которой метод возмущений привел к наибольшим успехам,— не может быть рассмотрена в нашем формализме.

По поводу соотношения между развиваемым здесь формализмом и канонической теорией поля можно сказать

[1]) По этим проблемам следует также рекомендовать книгу [36*].— *Прим. перев.*

следующее: r-функции, вычисленные каноническим способом, удовлетворяют всем требованиям, используемым нами здесь для построения r-функций [1] [1]). По этой причине канонические теории (с полиномиальными лагранжианами) определенно принадлежат к числу рассматриваемых здесь моделей. Установив это обстоятельство, легко получить одно-однозначное соответствие между этими двумя категориями моделей (гл. 4): два формализма эквивалентны. Однако подробное сопоставление двух формализмов не было осуществлено. Вероятно, такое сравнение легче выполнить с помощью еще одной, в каком-то смысле промежуточной, формулировки теории возмущений, предложенной недавно Эпштейном и Глазером [16, 17]. Эти авторы взяли из канонической теории некоторые формальные выражения типа разложений Гелл-Манна — Лоу, которые позволяют выразить искомые запаздывающие и хронологические произведения соответственно через запаздывающие и хронологические произведения некоторых полиномов Вика по свободным полям. Они показали, что эти произведения можно определить строго, так что получаемые из них r (или τ)-функции будут удовлетворять всем аксиоматическим требованиям. Другими словами, они имели дело с той же проблемой, что и мы, но решали ее, используя канонические выражения и показывая, что они обладают правильными свойствами, в то время как мы используем постулированные свойства прямо для построения требуемых решений.

Главное преимущество нашего метода перед каноническим состоит в его логической простоте и непосредственности. С самого начала мы имеем дело с реальной проблемой во всей ее сложности. Не возникает необходимости ни временно калечить теорию, вводя «обрезание», ни заниматься формальным жонглированием с расходящимися величинами. В частности, мы с самого начала находимся в адиабатическом пределе, так что вопрос о существовании этого предела никогда явно не возникает. В то же время данный метод не приспособлен для вычислений. С этой точки зрения метод графов Фейнмана в традиционной форму-

---

[1]) Одна из основных здесь проблем — проблема существования адиабатического предела — была недавно решена Хеппом [15]. Я благодарен проф. Хеппу за это сообщение.

лировке гораздо лучше. Конечно, поскольку эти два формализма эквивалентны, можно сформулировать правила Фейнмана в рамках нашего метода. Однако до сих пор это никем не сделано.

Наконец, следует заметить, что аналогичный формализм можно развить, используя вместо запаздывающих хронологические произведения [9, 17]. Некоторые стороны нашего формализма можно упростить, если шире пользоваться обобщенными запаздывающими произведениями [16]. Однако обычные запаздывающие функции более непосредственно связаны с физическим содержанием теории, поскольку они служат коэффициентами в разложении Хаага для взаимодействующего поля (гл. 2). По этой причине мы предпочитаем основывать наш формализм только на таких функциях и прибегать к обобщенным произведениям только в качестве вспомогательных величин в некоторых доказательствах.

Замечание об обозначениях. Будут полезны следующие обозначения. Мы будем часто иметь дело с функциями нескольких переменных одного и того же характера, выступающих в теории симметрично. Условимся, что такие переменные будут обозначаться одними и теми же строчными латинскими или греческим буквами с различными индексами, например, $(u_1, \ldots, u_n)$ или $(\xi_1, \ldots, \xi_m)$ и т. д. Все переменные в таких совокупностях относятся к одному типу: они все либо скаляры, либо 4-векторы и т. д. Мы будем обозначать такие совокупности просто соответствующими прописными буквами:

$$U = \{u_1, \ldots, u_n\}, \quad \Xi = \{\xi_1, \ldots, \xi_m\} \tag{1.1}$$

и записывать зависимость обычной или обобщенной функции f от совокупности переменных в виде

$$f(u_1, \ldots, u_n) = f(U), \; f(u_1, \ldots, u_n, \xi_1, \ldots, \xi_m) = \\ = f(U, \Xi) \tag{1.2}$$

и т. д. Кроме того, мы определим операции умножения

$$\alpha U = \{\alpha u_1, \ldots, \alpha u_n\} \tag{1.3}$$

(α — любое комплексное число),

$$|U|^2 = \sum_{i=1}^{n} |u_i|^2, \tag{1.4}$$

$$dU = \prod_{i=1}^{n} du_i. \tag{1.5}$$

Если переменная u_i — 4-вектор, то $|u_i|$ — его евклидова длина, т. е. $|u_i|^2 = u_{i0}^2 + \mathbf{u}_i^2$. В случае 3- и 4-векторов du_i служит сокращенным обозначением для d^3u_i и d^4u_i соответственно.

Глава 2

ФОРМАЛИЗМ ЛЕМАНА — СИМАНЗИКА — ЦИММЕРМАНА

В этой главе мы приведем перечень тех предположений, определений и теорем формализма ЛСЦ, которые нам понадобятся. Это позволит напомнить основные черты формализма и ввести необходимые обозначения и условия. Доказательства и подробные объяснения, вообще говоря, приводиться не будут. При изложении мы будем в основном следовать работе [18], исключив лишь ряд ошибок в знаках.

Рассмотрим теорию скалярного эрмитова поля $A(x)$, удовлетворяющего аксиомам Вайтмана в специальной форме для бесспиновых частиц массы $m > 0$. Для формулировки этой теории будем исходить из следующих постулатов.

Постулат I (квантовая механика). Чистые состояния теории представляются векторами в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$; наблюдаемые и другие физические величины представляются линейными операторами в $\mathcal{H}$.

Постулат II (релятивистская инвариантность). На $\mathcal{H}$ определено сильно непрерывное унитарное представление $U(\Lambda, a)$ связной группы Пуанкаре $\mathfrak{P}_+^\uparrow$. Здесь Λ — однородная часть, a — трансляционная часть преобразования Пуанкаре (Λ, a).

Постулат III (спектр). Пусть

$$P_\mu = \int p_\mu \, dE(p) \tag{2.1}$$

— инфинитезимальные генераторы представления $T(a) = U(1, a)$ группы трансляций

$$T(a) = \exp\{iP_\mu a^\mu\}. \tag{2.2}$$

Тогда носитель спектральной меры $dE(p)$ содержит изолированную точку $p = 0$, одночастичный гиперболоид

$p^2 = m^2$, $p_0 > 0$, и континуум с $p^2 > 4m^2$, $p_0 > 0$. Пусть $\mathscr{H}_0$ и $\mathscr{H}_1$ — пространства собственных векторов оператора квадрата массы $M^2 = P_0^2 - \mathbf{P}^2$, отвечающие собственным значениям 0 и m^2 соответственно. Пространство $\mathscr{H}_0$ одномерно. Оно растягивается одним нормируемым вектором, «вакуумом», который мы будем обозначать либо Ω, либо $|0\rangle$. Сужение $U(\Lambda, a)$ на пространство $\mathscr{H}_1$ образует неприводимое представление группы Пуанкаре с массой m и спином 0.

Постулат IV (теория поля). В $\mathscr{H}$ определена операторно-значная обобщенная функция умеренного роста со следующими свойствами:

а) Каждой основной функции умеренного роста $\varphi(x_1, \ldots, x_n) \in \mathscr{S}$ [19], где n произвольно, соответствует замыкаемый оператор

$$A^n(\varphi) = \int dX A(x_1) \ldots A(x_n) \varphi(X), \tag{2.3}$$

называемый *полевым мономом*. Отметим, что $A^1(\varphi) = A(\varphi)$. Все полевые мономы определены на Ω, и векторно-значный функционал $V(\varphi) = A^n(\varphi)\Omega$ непрерывен по φ в сильной топологии пространства $\mathscr{H}$. Линейное пространство $\mathscr{D}$, растягиваемое векторами $A^n(\varphi)\Omega$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, плотно в $\mathscr{H}$. Отметим, что эти предположения означают, что оператор $A^n(\varphi)$ определен на $\mathscr{D}$.

б) Оператор $A(\varphi)$ эрмитов при вещественных φ.

в) $A(x)$ преобразуется группой $\mathfrak{P}_+^\uparrow$ как скаляр:

$$A(\Lambda x + a) = U(\Lambda, a) A(x) U^*(\Lambda, a). \tag{2.4}$$

г) $A(x)$ локален:

$$[A(x), A(y)] = 0, \text{ если } (x - y)^2 < 0 \tag{2.5}$$

(мы пользуемся метрикой, в которой квадраты времениподобных векторов положительны).

д) $A(x)$ имеет отличные от нуля матричные элементы между Ω и векторами из $\mathscr{H}_1$. Он может быть нормирован так, чтобы эти матричные элементы были равны соответствующим элементам для свободного поля. Вакуумное среднее оператора $A(x)$ должно обращаться в нуль:

$$\langle 0 | A(x) | 0 \rangle = 0. \tag{2.6}$$

Это условие никоим образом не ограничивает общности теории, поскольку ему можно всегда удовлетворить, добавив к $A(x)$ постоянное c-число.

Пусть

$$\tilde{A}(p) = (2\pi)^{-5/2} \int dx e^{ipx} A(x) \tag{2.7}$$

— фурье-образ оператора $A(x)$. Заметим, что (несобственному) вектору $\tilde{A}(p)\,\Omega$ соответствует импульс $-p$, тогда как вектору $\tilde{A}^*(p)\,\Omega$ соответствует импульс p. Это несколько неожиданное условие, а также странная степень (2π) в формуле (2.7) вызваны нашим желанием придерживаться тех нормировок, которые обычно приняты в теории свободного поля. Нормировка п. «д» означает, что для двухточечной функции справедливо следующее представление Челлена — Лемана:

$$\langle 0 \mid \tilde{A}(p)\, \tilde{A}(q) \mid 0 \rangle = \delta^4(p+q)\, \{\delta_+(p) + \theta(p_0)\, \sigma(p^2)\}, \tag{2.8}$$

где

$$\delta_\pm(p) = \theta(\pm p_0)\, \delta(p^2 - m^2), \tag{2.9}$$

а σ — мера умеренного роста с носителем в $p^2 \geqslant 4m^2$.

В этих предположениях можно доказать следующие асимптотические условия.

Пусть $\mathcal{G} \subset \mathcal{S}$ — пространство основных функций $\tilde{f}(p)$ с носителем, содержащимся в

$$G = \{p\colon\ 0 \leqslant p^2 \leqslant 4m^2,\quad p_0 \geqslant 0\}. \tag{2.10}$$

С основной функцией $\tilde{f} \in \mathcal{G}$ мы связываем операторно-значную функцию

$$A_f(t) = \int dp e^{-itp^-} \tilde{f}^*(p)\, \tilde{A}(p), \tag{2.11}$$

где

$$p^\pm = p_0 \pm \omega(\mathbf{p}), \quad \omega(\mathbf{p}) = +(\mathbf{p}^2 + m^2)^{1/2}. \tag{2.12}$$

Пусть $A^{\text{ex}}(x)$ — скалярное эрмитово свободное поле массы m. Его фурье-образ $\tilde{A}^{\text{ex}}(p)$, определенный формулой (2.7), имеет вид

$$\tilde{A}^{\text{ex}}(p) = \delta_+(p)\, \hat{A}^{\text{ex}}(\mathbf{p}) + \delta_-(p)\, \hat{A}^{\text{ex}*}(-\mathbf{p}), \tag{2.13}$$

причем

$$[\hat{A}^{\text{ex}}(\mathbf{p}),\ \hat{A}^{\text{ex}}(\mathbf{q})]=0,$$
$$[\hat{A}^{\text{ex}}(\mathbf{p}),\ \hat{A}^{\text{ex}*}(\mathbf{q})]=2\omega(\mathbf{p})\,\delta^3(\mathbf{p}-\mathbf{q}). \tag{2.14}$$

Каждой функции $\hat{f}(\mathbf{p})\in\mathcal{S}$ сопоставим оператор уничтожения

$$A^{\text{ex}}_{\hat{f}}=\int\frac{d^3p}{2\omega(\mathbf{p})}\hat{f}^*(\mathbf{p})\,\hat{A}^{\text{ex}}(\mathbf{p}). \tag{2.15}$$

Асимптотические условия формулируются следующим образом. Существуют два свободных поля A^{in} и A^{out}, действующих в $\mathcal{H}$, таких, что оператор $A_f(t)$ сходится при $t\to\pm\infty$ к оператору $A^{\text{out}}_{\hat{f}}$ или $A^{\text{in}}_{\hat{f}}$ соответственно, где

$$\hat{f}(\mathbf{p})=\tilde{f}(\omega(\mathbf{p}),\ \mathbf{p}), \tag{2.16}$$

в одном из указанных ниже двух смыслов.

Асимптотическое условие Хаага — Рюэля. Вектор

$$\Phi(t)=A^{(*)}_{f_1}(t)\ \dots\ A^{(*)}_{f_n}(t)\,\Omega \tag{2.17}$$

сходится сильно к вектору

$$\Phi^{\text{ex}}=A^{\text{ex}(*)}_{\hat{f}_1}\ \dots\ A^{\text{ex}(*)}_{\hat{f}_n}\Omega, \tag{2.18}$$

$$\operatorname*{st-lim}_{t\to\pm\infty}\Phi(t)=\Phi^{\text{ex}}, \tag{2.19}$$

где индекс «ex» заменяется на «in» при $t\to-\infty$ и на «out» при $t\to+\infty$. Символ $^{(*)}$ означает, что звездочка над оператором или есть, или ее нет. Если звездочки имеются, то они будут у одних и тех же операторов в (2.17) и (2.18).

Асимптотическое условие ЛСЦ. Состояние Φ^{ex} вида (2.18) называется «неперекрывающимся», если носители волновых функций $\hat{f}_i$ взаимно разделены. Пусть $\mathcal{L}^{\text{ex}}_0$ — линейная оболочка всех неперекрывающихся ex-состояний. Тогда оператор $A^{(*)}_f(t)$ определен на $\mathcal{L}^{\text{ex}}_0$ и сходится слабо к операторам $A^{\text{ex}(*)}_{\hat{f}}$ при $t\to\pm\infty$:

$$\operatorname*{w-lim}_{t\to\pm\infty}A^{(*)}_f(t)\,\Phi^{\text{ex}}=A^{\text{ex}(*)}_{\hat{f}}\Phi^{\text{ex}} \tag{2.20}$$

для векторов $\Phi^{\text{ex}}\in\mathcal{L}^{\text{ex}}_0$. Здесь опять символ «ex» служит вместо «in» или «out». Ограничение неперекрывающимися состояниями удается снять в теории возмущений. Там операторы $A_f^{(*)}(t)$ определены на всех состояниях вида (2.18) независимо от того, каковы носители у функций $\tilde{f}_i$, и удовлетворяют предельному условию (2.20). В дальнейшем мы будем обсуждать только такую ситуацию.

Пусть $\mathscr{H}^{ex}$ — фоково пространство операторов A^{ex}, т. е. гильбертово пространство, натянутое на векторы Φ^{ex} вида (2.18) при $n = 0, 1, 2, \ldots$. Мы потребуем, чтобы выполнялся

Постулат V (асимптотическая полнота)

$$\mathscr{H}^{in} = \mathscr{H}^{out} = \mathscr{H}. \tag{2.21}$$

Важнейшим инструментом в формализме ЛСЦ служат *запаздывающие произведения* $R(x_1, \ldots, x_n)$, которые определяются следующими условиями:

1) Запаздывающее произведение $R(x_1, \ldots, x_n)$ является операторно-значной обобщенной функцией умеренного роста. Его значение $R(\varphi)$ на основной функции $\varphi(x_1, \ldots, x_n) \in \mathscr{S}$ обладает свойствами полевого монома, устанавливаемыми постулатом IV,a. Иначе говоря, это замыкаемый оператор, определенный на пространстве $\mathscr{D}$ и отображающий $\mathscr{D}$ в себя.

2) Произведение $R(\varphi)$ эрмитово при вещественных φ.

3) $R(x_1) = A(x_1)$.

4) Произведение $R(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ инвариантно относительно перестановок аргументов $x_2, \ldots, x_n$.

5) Произведение R удовлетворяет тождествам

$$R(x, y, x_1, \ldots, x_n) - R(y, x, x_1, \ldots, x_n) = \\ = -i\sum [R(x, X_L), R(y, X_R)], \tag{2.22}$$

где суммирование производится по всем разбиениям совокупности переменных $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ на две взаимно дополнительные подсовокупности X_L и X_R, причем одна из них может быть пустой.

6) Носитель $R(x_1, \ldots, x_n)$ содержится в множестве

$$\mathbf{T}_n = \{(x_1, \ldots, x_n) : (x_1 - x_i) \in \overline{V}_+ \text{ для } \\ i = 2, \ldots, n\}, \tag{2.23}$$

где $\overline{V}_+$ — замкнутый конус будущего.

7) Произведение R ковариантно:

$$R(\Lambda x_1 + a, \ldots, \Lambda x_n + a) = U(\Lambda, a) R(x_1, \ldots, x_n) U^*(\Lambda, a). \qquad (2.24)$$

Объекты, удовлетворяющие этим условиям, называются «резкими» запаздывающими произведениями. Всегда ли они существуют в теории Вайтмана, удовлетворяющей постулатам I—V, в настоящее время неизвестно. До сих пор в столь общих предположениях удалось доказать существование лишь «гладких» запаздывающих произведений. Последние отличаются от «резких» произведений тем, что их носитель лежит в ε-окрестности $\mathbf{T}_n$. Кроме того, условие ковариантности (2.24) справедливо только для трансляций, а не для собственных преобразований Лоренца. Однако в теории возмущений «резкие» произведения R существуют, так что не следует проявлять беспокойства по этому поводу.

Условия 1—7 не определяют произведения R однозначно. Но это несущественно. Для дальнейшего пригоден любой набор операторов R, удовлетворяющих условиям 1—7.

Вакуумное среднее оператора R называется *запаздывающей функцией* и обозначается через r:

$$r(X) = \langle 0 \mid R(X) \mid 0 \rangle. \qquad (2.25)$$

Определим фурье-образ $\tilde{r}$ функции r равенством

$$\tilde{r}(p_1, \ldots, p_n) = (2\pi)^{-5n/2} \int dX \exp\left\{ i \sum p_j x_j \right\} \times r(x_1, \ldots, x_n). \qquad (2.26)$$

Фурье-образ $\tilde{R}$ оператора R определяется аналогично. Функция $\tilde{r}$ имеет вид

$$\tilde{r}(p_1, \ldots, p_n) = \delta^4\left(\sum p_j\right) \hat{r}(p_1, \ldots, p_n). \qquad (2.27)$$

Здесь δ-функция выражает закон сохранения энергии-импульса. Функция $\hat{r}$ определена только на многообразии $\sum p_j = 0$, так что одна из переменных в ней выражается через остальные.

«Ампутация» функции $\tilde{r}$ по переменной p_i означает умножение ее на $(p_i^2 - m^2)$. В x-пространстве это соответствует применению оператора Клейна — Гордона

$-(\Box_{x_i}+m^2)$. Определим функцию

$$\widetilde{r}^{\,\mathrm{amp}}(p_1, \ldots, p_n; q_1, \ldots, q_l)= \\ =\prod_{i=1}^{l}(q_i^2-m^2)\widetilde{r}(p_1, \ldots, q_l), \tag{2.28}$$

такую, что переменные, стоящие справа ст точки с запятой, «ампутированы».

Рассмотрим функцию $\widetilde{r}^{\,\mathrm{amp}}(p_1, \ldots, p_n; q_1, \ldots, q_\alpha, q'_1, \ldots, q'_\beta)$ в окрестности значений $q_i^-=0$, $q_i'^+=0$, т. е. для значений переменных q_i вблизи положительной энергетической поверхности, и значений переменных q'_i вблизи отрицательной энергетической поверхности. Переменные q_i^- и $q_i'^+$ можно рассматривать в качестве новых переменных, заменяющих q_{i0} и q'_{i0}. Такую обобщенную функцию мы по-прежнему будем называть $\widetilde{r}^{\,\mathrm{amp}}$, несколько злоупотребляя этим обозначением. Пусть $\varphi(P)$, $f(\mathbf{Q})$, $g(\mathbf{Q}')$ — основные функции умеренного роста. Определим функцию

$$\rho(Q^-, Q'^+)=\int dP\, d\mathbf{Q}\, d\mathbf{Q}'\varphi(\mathbf{P}) f(\mathbf{Q}) g(\mathbf{Q}')\times \\ \times\widetilde{r}^{\,\mathrm{amp}}(P; Q^-, \mathbf{Q}, Q'^+, \mathbf{Q}'). \tag{2.29}$$

Предположим, что функция ρ непрерывна в окрестности начала координат. Последнее справедливо в теории возмущений. В общем случае было лишь доказано, что оно следует из постулатов I—IV, если произведение fg обращается в нуль вместе со всеми своими производными в точках, где либо две переменные $\mathbf{q}_i$, либо две переменные $\mathbf{q}'_i$, либо одна из $\mathbf{q}_i$ и одна из $-\mathbf{q}'_j$ совпадают [20].

Пусть

$$\Phi^{\mathrm{in}}=A_{\hat{f}_1}^{\mathrm{in}*}\ldots A_{\hat{f}_n}^{\mathrm{in}*}\Omega, \quad \Psi^{\mathrm{in}}=A_{\hat{g}_1}^{\mathrm{in}*}\ldots A_{\hat{g}_m}^{\mathrm{in}*}\Omega \tag{2.30}$$

— два состояния вида (2.18). Матричный элемент

$$M=(\Phi^{\mathrm{in}}, \widetilde{R}(p_1, \ldots, p_l)\Psi^{\mathrm{in}}) \tag{2.31}$$

можно выразить через функцию $\widetilde{r}^{\,\mathrm{amp}}$ с помощью *редукционной формулы*

$$M=\sum_{\nu=0}^{\min(n,m)}\sum_{(\alpha_i,\beta_i)}\prod_{i=1}^{\nu}(\hat{f}_{\alpha_i}, \hat{g}_{\beta_i})(\Phi^{\mathrm{in}}(\alpha_i), \widetilde{R}(P)\Psi^{\mathrm{in}}(\beta_i))^{\mathrm{Trunc}}. \tag{2.32}$$

Здесь вторая сумма берется по всем возможным способам спаривания ν индексов α_i, $1 \leqslant \alpha_i \leqslant n$, с ν индексами β_i, $1 \leqslant \beta_i \leqslant m$. Состояния $\Phi^{\text{in}}(\alpha_i)$ и $\Psi^{\text{in}}(\beta_i)$ получаются из состояния Φ^{in} и Ψ^{in} соответственно, если в последних опустить те операторы рождения, волновые функции которых $\hat{f}_j$ и $\hat{g}_h$ входят в один из множителей $(\hat{f}_{\alpha_i}, \hat{g}_{\beta_i})$. Эти множители имеют вид

$$(\hat{f}, \hat{g}) = \int \frac{d^3p}{2\omega(\mathbf{p})} \hat{f}^*(\mathbf{p})\, \hat{g}(\mathbf{p}). \tag{2.33}$$

Наконец,

$$(\Phi^{\text{in}}, \widetilde{R}(P)\, \Psi^{\text{in}})^{\text{Trunc}} =$$
$$= (2\pi)^{n+m} \int \prod_{j=1}^{n} [dq_j \delta_+(q_j)\, \hat{f}_j^*(\mathbf{q}_j)] \times$$
$$\times \prod_{h=1}^{m} [dq'_h \delta_+(q'_h)\, \hat{g}_h(\mathbf{q}'_h)]\, \widetilde{r}^{\text{amp}}(P;\ Q,\ -Q'). \tag{2.34}$$

Согласно предположению (2.29), этот интеграл существует как обобщенная функция переменных P.

Образуя вакуумные средние тождеств (2.22), суммируя в правой части по полному набору промежуточных in-состояний и пользуясь редукционной формулой, мы получаем *уравнения полноты*, или уравнения Глазера — Лемана — Циммермана (ГЛЦ), [8]

$$\widetilde{r}(p,\ q,\ P) - \widetilde{r}(q,\ p,\ P) = -i \sum_{L,\,R} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(2\pi)^{2l}}{l!} \int \prod_{1}^{l} dk_i \times$$
$$\times \left\{ \prod_{1}^{l} \delta_+(k_i) - \prod_{1}^{l} \delta_-(k_i) \right\} \widetilde{r}^{\text{amp}}(p,\ P_L; -K)\, \widetilde{r}^{\text{amp}}(q,\ P_R;\ K). \tag{2.35}$$

Здесь P обозначает совокупность переменных $\{p_1,\ \ldots,\ p_n\}$, а суммирование $\sum\limits_{L,\,R}$ производится по всем разбиениям P на две взаимно дополнительные подсовокупности P_L и P_R.

В x-пространстве эти уравнения принимают вид

$$r(x, y, X) - r(y, x, X) = -i \sum_{L, R} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{i^l}{l!} \int \prod_{1}^{l} [du_i \, dv_i] \times$$
$$\times K^l (U - V) \, r^{\text{amp}} (x, X_L; U) \, r^{\text{amp}} (y, X_R; V), \tag{2.36}$$

где $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$, $U = \{u_1, \ldots, u_l\}$ и т. д.,

$$K^l (U - V) = \prod_{1}^{l} \Delta_+ (u_i - v_i) - \prod_{1}^{l} \Delta_+ (v_i - u_i), \tag{2.37}$$

$$\Delta_+ (\xi) = -\frac{i}{(2\pi)^3} \int d^4 p \delta_+ (p) \, e^{-ip\xi}. \tag{2.38}$$

Центральным звеном нашего подхода в теории возмущений является теорема Глазера — Лемана — Циммермана (ГЛЦ) [8, 18]. В ней утверждается, что описанная выше теория поля полностью характеризуется своими запаздывающими функциями, и формулируются условия, при выполнении которых заданный набор запаздывающих функций определяет некую теорию поля. Мы приведем такой вариант этой теоремы, который специально приспособлен к потребностям теории возмущений. Предположения, которые формулируются ниже, сильнее, чем необходимо, но они выполняются в теории возмущений и обладают тем преимуществом, что позволяют значительно упростить формулировку теоремы ГЛЦ.

Прежде чем сформулировать эту теорему, мы введем некоторые новые понятия и обозначения.

а) Функция $f(u_1, \ldots, u_n)$ называется непрерывной в смысле Гёльдера с индексом ε, $\varepsilon > 0$, если величина

$$\frac{f(u_1 + a_1, \ldots, u_n + a_n) - f(u_1, \ldots, u_n)}{|A|^{\varepsilon}}, \quad |A|^2 = \sum a_i^2,$$

остается ограниченной при $|A| \to 0$ для всех u_i. Введем пространство H_ε функций, непрерывных в смысле Гёльдера и быстро убывающих на бесконечности. Его элементами являются функции $f(U)$, для которых справедливо условие

$$\| f \|_N = \operatorname*{Sup}_{U, |A| \leqslant A_0} \left\{ (1 + U^2)^N \left[|f(U)| + \frac{|f(U + A) - f(U)|}{|A|^{\varepsilon}} \right\} < \right.$$
$$< \infty \quad (2.39$$

для произвольного конечного A_0 и всех положительных целых степеней N [1]).

б) В формуле (2.15) мы предполагаем, что волновая функция f — основная функция умеренного роста. Фактически операторы A_f^{ex}, образованные из операторов свободного поля A^{ex}, существуют на более широком классе волновых функций, а именно на всех функциях $\hat{f}$, для которых

$$\int \frac{d^3p}{2\omega(\mathbf{p})} |\hat{f}(\mathbf{p})|^2 < \infty.$$

Это пространство содержит, в частности, функции $\hat{f}(\mathbf{p}) \in \in H_\varepsilon$, $\varepsilon > 0$. Более того, для функций $\hat{f}(\mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_n) \in H_\varepsilon$ существует вектор

$$\Phi_{\hat{f}}^{ex} = \int \frac{d^3p_1}{2\omega(\mathbf{p}_1)} \cdots \frac{d^3p_n}{2\omega(\mathbf{p}_n)} \hat{f}(\mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_n) \times$$
$$\times \hat{A}^{ex*}(\mathbf{p}_1) \ldots \hat{A}^{ex*}(\mathbf{p}_n)\,\Omega. \qquad (2.40)$$

Линейное пространство, натянутое на все векторы такого вида, мы будем обозначать $\mathscr{L}_\varepsilon^{ex}$.

в) Введем вспомогательную функцию $\chi(p)$ 4-вектора p со следующими свойствами: χ принадлежит к классу C^∞, $\chi = 1$ для $p_0 = \omega(\mathbf{p})$ и

$$\operatorname{supp} \chi \subset \{p\colon p_0 > 0, \quad 0 < A \leqslant p^2 \leqslant B < 4m^2\}, \qquad (2.41)$$

где A и B выбраны так, что $(p+q) \notin \operatorname{supp} \chi$, если $p, q \in \in \operatorname{supp} \chi$. Функцию χ можно выбрать в виде

$$\chi(p) = \theta(p_0)\,\bar{\chi}(p^2), \qquad (2.42)$$

где $\bar{\chi}(m^2) = 1$ и $\operatorname{supp} \bar{\chi} \subset \{A \leqslant p^2 \leqslant B\}$.

Теперь мы можем сформулировать наш вариант теоремы ГЛЦ.

Теорема 2.1.

Пусть $r(x_1, \ldots, x_n)$, $n = 2, 3, \ldots$ — обобщенные функции умеренного роста со следующими свойствами:

---

[1]) Волновые функции, непрерывные в смысле Гёльдера, введены Шнейдером [21]. Свойства функций, непрерывных в смысле Гёльдера, описаны в этой работе, а также в работах [22, 23].

А. Функция $r(X)$ вещественна, инвариантна относительно преобразований из группы $\mathfrak{P}_+^\uparrow$ и инвариантна относительно перестановок переменных $x_2, \ldots$ $\ldots, x_n$.

Б. Носитель функции $r(X)$ содержится в области $\mathbf{T}_n$, определенной условием (2.23).

В. Пусть $0 < \varepsilon < 1/2$ и $f(p_1^-, \mathbf{p}_1, \ldots, p_\beta^-, \mathbf{p}_\beta, q_1, \ldots, q_\gamma) \in H_\varepsilon$, $\varphi(k_1, \ldots, k_\alpha) \in \mathscr{S}$. Тогда функция

$$F(P^-, Q) = \prod_i^\gamma \chi(-q_h) \int dK\, d\mathbf{P} \prod_j^\beta \chi(p_j)\, \varphi(K) \times$$
$$\times f(P^-, \mathbf{P}, Q)\, \tilde{r}^{\text{amp}}(K; P^-, \mathbf{P}, Q) \qquad (2.43)$$

существует и принадлежит пространству $H_{\varepsilon'}$ для любого $\varepsilon' < \varepsilon$. Отметим, что аргументами всех функций в подынтегральном выражении (2.43) следует выбирать P^-, $\mathbf{P}$, а не P_0, $\mathbf{P}$. Случай $\alpha = 0$, $\beta + \gamma = 2$ исключается.

Г. Функции r удовлетворяют уравнениям полноты (2.36).

При выполнении этих предположений разложение Хаага

$$A(x) = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l!} \int du_1 \ldots du_l r^{\text{amp}}(x; u_1, \ldots, u_l) \times$$
$$\times :A^{\text{in}}(u_1) \ldots A^{\text{in}}(u_l): \qquad (2.44)$$

сходится сильно на пространстве $\mathscr{L}_\varepsilon^{\text{in}}$ и определяет поле Вайтмана, удовлетворяющее постулатам I—V, причем заданные здесь r-функции — это запаздывающие функции самого поля $A(x)$. Более точно: заданные функции r представляют собой возможный набор запаздывающих функций поля $A(x)$. (Это уточнение необходимо ввиду неединственности определения функций r.)

Условие В в этой теореме гарантирует существование интегралов, входящих в условие полноты (2.36). Условие Г помимо всего содержит предположение, что сумма в формуле (2.36) сходится. Точнее, предполагается, что сумма по l сходится по отдельности для каждого разбиения (L, R).

Двоеточие в формуле (2.44) обозначает виково (нормальное) произведение.

Разложение (2.44) можно обобщить:

$$R(x_1, \ldots, x_n) = r(x_1, \ldots, x_n) + \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l!} \int du_1 \ldots du_l \times$$

$$\times r^{\text{amp}}(x_1, \ldots, x_n; u_1, \ldots, u_l) : A^{\text{in}}(u_1) \ldots A^{\text{in}}(u_l):. \quad (2.45)$$

Доказательство этого варианта теоремы ГЛЦ можно без труда получить из доказательства более общего варианта этой теоремы, приведенного в работе [18]. Сильная форма предположения В, которой мы воспользовались, избавляет от необходимости при формулировке теоремы вводить обобщенные запаздывающие функции, хотя они все же удобны при ее доказательстве. Можно доказать, что при сделанных предположениях эти функции существуют и обладают надлежащими свойствами.

Поскольку комбинаторная часть доказательства теоремы изложена довольно кратко и в работе [18], и в оригинальной работе [8], мы изложим здесь еще раз главный раздел доказательства: докажем, что запаздывающие операторы вида (2.45) удовлетворяют тождествам (2.22). Это доказательство может также служить моделью аналогичных выкладок, которые потребуются нам ниже, но не будут приводиться явно.

Для простоты ограничимся двухточечным случаем

$$R(x, y) - R(y, x) = -i[A(x), A(y)]. \quad (2.46)$$

Обобщение на произвольный случай проводится непосредственно.

Преобразуем правую часть формулы (2.46), подставив в нее разложение (2.44):

Правая часть $= -i[A(x), A(y)] =$

$$= -i\left\{\sum_{l=0}^{\infty} \sum_{l'=0}^{\infty} \frac{1}{l!} \frac{1}{l'!} \int \prod_{1}^{l} du_i \prod_{1}^{l'} dv_i r^{\text{amp}}(x; U)\, r^{\text{amp}}(y; V) \times\right.$$

$$\left.\times :A^{\text{in}}(u_1) \ldots A^{\text{in}}(u_l): :A^{\text{in}}(v_1) \ldots A^{\text{in}}(v_{l'}): - (x \leftrightarrow y)\right\}. \quad (2.47)$$

Согласно теореме Вика, имеем

$$:A^{\text{in}}(u_1)\ \dots\ A^{\text{in}}(u_l):\ :A^{\text{in}}(v_1)\ \dots\ A^{\text{in}}(v_{l'}):=\sum_{k=0}^{\min(l,\,l')} i^k\times$$

$$\times\sum_{(i_\nu,\,j_\nu)}\Delta_+(u_{i_1}-v_{j_1})\ \dots\ \Delta_+(u_{i_k}-v_{j_k}):\ \overline{A^{\text{in}}(u_1)\ \dots\ A^{\text{in}}(v_{l'})}:. \tag{2.48}$$

Вторая сумма берется по всем возможным спариваниям k переменных u_i и k переменных v_j. Черта над нормальным произведением означает, что в нем опущены те операторы A^{in}, аргументы которых входят в один из множителей Δ_+. Заметим, что в силу симметрии функций r все члены в формуле (2.48) с фиксированным числом k дают один и тот же вклад в выражение (2.47). Поэтому достаточно вычислить вклад только одного члена, а затем умножить его на полное число $\binom{l}{k}\binom{l'}{k}k!$ таких членов:

$$\text{Правая часть}=-i\left\{\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{l'=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\min(l,\,l')} i^k\frac{1}{k!}\frac{1}{(l-k)!}\frac{1}{(l'-k)!}\times\right.$$

$$\times\int\prod_1^l du_i\prod_1^{l'} dv_j\prod_{\nu=1}^{k}\Delta_+(u_\nu-v_\nu)\,r^{\text{amp}}(x;\,U)\,r^{\text{amp}}(y;\,V)\times$$

$$\left.\times:A^{\text{in}}(u_{k+1})\ \dots\ A^{\text{in}}(u_l)\,A^{\text{in}}(v_{k+1})\ \dots\ A^{\text{in}}(v_{l'}):\ -(x\leftrightarrow y)\right\}.$$

Заменим обозначение переменных:

$$(u_{k+1},\ \dots,\ u_l,\ v_{k+1},\ \dots,\ v_{l'})\to$$

$$\to(w_1,\ \dots,\ w_a,\ w_{a+1},\ \dots,\ w_{a+b}),\qquad a=l-k,\ \ b=l'-k$$

и изменим порядок суммирования (можно показать, что это допустимо в том контексте, в каком будет использован этот расчет). В результате получим

$$\text{Правая часть}=-i\left\{\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{a=0}^{\infty}\sum_{b=0}^{\infty} i^k\frac{1}{k!}\frac{1}{a!}\frac{1}{b!}\int\prod_1^{a+b}dw_i\times\right.$$

$$\times\ :A^{\text{in}}(w_1)\ \dots\ A^{\text{in}}(w_{a+b}):\ \prod_1^k\left[du_i\,dv_i\Delta_+(u_i-v_i)\right]\times$$

$$\times r^{\text{amp}}(x;\ w_1,\ \ldots,\ w_a,\ u_1,\ \ldots,\ u_k)\times$$

$$\times r^{\text{amp}}(y;\ w_{a+1},\ \ldots,\ w_{a+b},\ v_1,\ \ldots,\ v_k)-(x\leftrightarrow y)\Big\}=$$

$$=-i\left\{\sum_{\alpha=0}^{\infty}\frac{1}{\alpha!}\sum_{a=0}^{\alpha}\binom{\alpha}{a}\int\prod_1^a dw_i:A^{\text{in}}(w_1)\ \ldots\ A^{\text{in}}(w_\alpha):\times\right.$$

$$\times\sum_{k=0}^{\infty}\frac{i^k}{k!}\int\prod_1^k[du_i\,dv_i\Delta_+(u_i-v_i)]\times$$

$$\times r^{\text{amp}}(x;\ w_1,\ \ldots,\ w_a,\ u_1,\ \ldots,\ u_k)\times$$

$$\left.\times r^{\text{amp}}(y;\ w_{a+1},\ \ldots,\ w_\alpha,\ v_1,\ \ldots,\ v_k)-(x\leftrightarrow y)\right\}.$$

Вследствие симметрии нормального произведения сумму $\sum\limits_{\alpha=0}^{\alpha}\binom{\alpha}{a}$ можно заменить на сумму $\sum\limits_{L,\,R}$, где суммирование проводится по всем возможным разбиениям совокупности переменных $W=\{w_1,\ \ldots,\ w_\alpha\}$ на две взаимно дополнительные подсовокупности W_L и W_R:

$$\text{Правая часть}=-i\sum_{\alpha=0}^{\infty}\frac{1}{\alpha!}\int dW:A^{\text{in}}(w_1)\ \ldots\ A^{\text{in}}(w_\alpha):\times$$

$$\times\left\{\sum_{k=0}^{\infty}\frac{i^k}{k!}\sum_{L,\,R}\int\prod_1^k[du_i\,dv_i\Delta_+(u_i-v_i)]\,r^{\text{amp}}(x;\ W_L,\ U)\times\right.$$

$$\left.\times r^{\text{amp}}(y;\ W_R,\ V)-(x\leftrightarrow y)\right\}.$$

Сравнивая этот результат с формулой (2.36), получаем

$$\text{Правая часть}=-\sum_{\alpha=0}^{\infty}\frac{1}{\alpha!}\int\prod_1^\alpha dw_i:A^{\text{in}}(w_1)\ \ldots\ A^{\text{in}}(w_\alpha):\times$$

$$\times\{r^{\text{amp}}(x,\ y;\ W)-r^{\text{amp}}(y,\ x;\ W)\}=R(x,\ y)-R(y,\ x),$$

что и требовалось доказать.

Теорема ГЛЦ в том виде, в каком она сформулирована нами (см. теорему 2.1), все еще не обладает той формой, в которой мы будем ее использовать. Необходимо переформулировать ее в терминах полностью ампутированных r-функций. Мы определим функции

$$r^{\mathrm{Amp}}(x_1, \ldots, x_n) = (-1)^n \prod_1^n (\Box_{x_i} + m^2)\, r(x_1, \ldots, x_n),$$
$$\tag{2.49}$$
$$\widetilde{r}^{\mathrm{Amp}}(p_1, \ldots, p_n) = \prod_1^n (p_i^2 - m^2)\, \widetilde{r}(p_1, \ldots, p_n).$$

Эти функции r^{Amp} — обобщенные функции умеренного роста с теми же инвариантными свойствами и теми же носителями, что и сами функции r. Исходные функции r можно выразить через r^{Amp} в виде

$$r(x_1, \ldots, x_n) = \int dy_1 \ldots dy_n \Delta_R(x_1 - y_1)\, \Delta_R(y_2 - x_2) \ldots$$
$$\ldots \Delta_R(y_n - x_n)\, r^{\mathrm{Amp}}(y_1, \ldots, y_n),$$

$$\widetilde{r}(p_1, \ldots, p_n) = (p_1^2 - m^2 + i\varepsilon p_{10})^{-1} \times$$
$$\times \prod_{i=2}^n (p_i^2 - m^2 - i\varepsilon p_{i0})^{-1}\, \widetilde{r}^{\mathrm{Amp}}(p_1, \ldots, p_n), \tag{2.50}$$

где

$$\Delta_R(\xi) = (2\pi)^{-4} \int dp \frac{e^{-ip\xi}}{p^2 - m^2 + i\varepsilon p_0}. \tag{2.51}$$

Свертка в x-пространстве вида (2.50) существует и имеет должного носителя и соответствующие инвариантные свойства, если они имеют место для функций r^{Amp}.

Уравнения полноты для ампутированных функций можно получить, подействовав операторами Клейна — Гордона по переменным x, y, x_1, ..., x_n на обе части равенства (2.36). Все сводится просто к замене функций r и r^{amp} на функции r^{Amp} и точек с запятой в аргументах функций r^{amp} на запятые. Конечно, тот же результат имеет место и для формулы (2.35) в p-пространстве. Существенная особенность этих уравнений ГЛЦ для ампутированных функций связана с тем, что в их правой части исчезает двухточечная функция. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим случай $n = 0$ в формуле (2.35) в области $p^2 < 4m^2$:

$$\tilde{r}(p, q) - \tilde{r}(q, p) = \\ = -i(2\pi)^2 \int dk \{\delta_+(k) - \delta_-(k)\} \tilde{r}^{\mathrm{amp}}(p; -k) \times \\ \times \tilde{r}^{\mathrm{amp}}(q; k). \quad (2.52)$$

Члены с $l > 1$ в этой области не дают вклада вследствие свойств носителя функции δ_+ и того, что для носителя функции $\tilde{r}^{\mathrm{amp}}(q; k_1, \ldots, k_l)$ справедливо равенство $q + \sum k_i = 0$. Используем соотношение (2.27) и определим

$$\bar{r}(q) = \bar{r}(-q, q). \quad (2.53)$$

Тогда формула (2.52) принимает вид

$$\bar{r}(q) - \bar{r}(-q) = -i(2\pi)^2 \times \\ \times \{\delta_-(q) - \delta_+(q)\} \bar{r}^{\mathrm{amp}}(q) \bar{r}^{\mathrm{amp}}(-q), \quad (2.54)$$

где

$$\bar{r}^{\mathrm{amp}}(q) = (q^2 - m^2) \bar{r}(q). \quad (2.55)$$

Здесь $\bar{r}(q)$ — фурье-образ функции $r(\xi, 0)$:

$$\bar{r}(q) = (2\pi)^{-1} \int d\xi e^{-iq\xi} r(\xi, 0). \quad (2.56)$$

В силу свойств носителя функции $r(\xi, 0)$ ее фурье-образ $\bar{r}(q)$ есть граничное значение функции, аналитичной в области $\mathrm{Im} q \in V_-$. Из этого факта, а также из формулы (2.54) (если воспользоваться обычной техникой, основанной на теореме «об острие клина» [1]), см., например, [13], стр. 106) следует, что

$$\bar{r}(q) = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{q^2 - m^2 - i\varepsilon q_0} + F(q), \quad (2.57)$$

где функция $F(q)$ аналитична в области $q^2 < 4m^2$. Отсюда получаем

$$\tilde{r}^{\mathrm{Amp}}(p, q) = \delta^4(p + q) \left\{ \frac{1}{2\pi}(q^2 - m^2) + (q^2 - m^2)^2 F(q) \right\}. \quad (2.58)$$

---

[1]) Теорему «об острие клина» впервые доказал Боголюбов (см., например, [35*]). Подробное обсуждение всех математических тонкостей этой теоремы можно найти в монографии Владимирова [37*].— *Прим. перев.*

Возьмем теперь соотношение (2.35) для ампутированных функций и рассмотрим в его правой части члены, содержащие двухточечные функции. Это члены с $l = 1$, в которых либо $P_R = \varnothing$, либо $P_L = \varnothing$, где $\varnothing$ — пустое множество.

Подынтегральные выражения в этих членах содержат множители $\delta_\pm(k)\,\delta^4(p-k)\,(p^2-m^2)$ или $\delta_\pm(k)\,\delta^4(q+ k)\times(q^2-m^2)$ и в силу этого обращаются в нуль.

Отметим попутно, что вследствие соотношения (2.27) и свойства (2.57) член разложения Хаага (2.44) для поля $A(x)$ с $l = 1$ равен просто $A^{\text{in}}(x)$.

Теперь мы можем сформулировать «ампутированный» вариант теоремы ГЛЦ.

Теорема 2.2.

Пусть $r^{\text{Amp}}(x_1 \ldots, x_n)$ — обобщенные функции умеренного роста, обладающие свойствами А, Б и В теоремы 2.1 и удовлетворяющие ампутированным уравнениям полноты ГЛЦ. Двухточечная функция $\widetilde{r}^{\text{Amp}}(p, q)$ имеет вид (2.58).

В этом случае функции $r(x_1, \ldots, x_n)$, определяемые формулой (2.50), удовлетворяют предположениям теоремы 2.1.

Доказательство. Мы уже отмечали, что интегралы (2.50) существуют. Легко убедиться в том, что условия А, Б и В теоремы 2.1 выполняются. Единственная нетривиальная задача состоит в том, чтобы показать эквивалентность ампутированных уравнений ГЛЦ совместно с нормировочным условием (2.58) первоначальным уравнениям ГЛЦ.

Чтобы убедиться в этом, разделим ампутированные уравнения вида (2.35) на $(p^2 - m^2 + i\varepsilon p_0)(q^2 - m^2 + i\varepsilon q_0)\prod\limits_{i=1}^{n}(p_j^2 - m^2 - i\varepsilon p_{j0})$. Тогда все члены в правой части (2.35) в соответствии с (2.50) перейдут в подходящие неампутированные выражения. Таким образом, мы получим все члены в правой части уравнения (2.35), кроме членов, содержащих двухточечные функции. Рассмотрим член $\widetilde{r}^{\text{Amp}}(p, q, P)$ в левой части уравнения. Он переходит в выражение

$$\tilde{r}^{\mathrm{Amp}}(p,\ q,\ P)\{(p^2-m^2+i\varepsilon p_0)(q^2-m^2+i\varepsilon q_0)\times$$
$$\times\prod_{j=1}^{n}(p_j^2-m^2-i\varepsilon p_{j0})\}^{-1}=$$
$$=\tilde{r}(p,\ q,\ P)-2\pi i\,\{\delta_+(q)-\delta_-(q)\}\,\tilde{r}^{\mathrm{amp}}(p,\ P;\ q).$$

Первый член в этом выражении — как раз то, что мы хотели бы иметь в левой части. Второй же член можно перенести в правую часть, и с учетом (2.58) он принимает вид

$$-2\pi i\int dk\,\{\delta_+(k)-\delta_-(k)\}\,\tilde{r}^{\mathrm{amp}}(p,\ P;\ -k)\,\tilde{r}^{\mathrm{amp}}(q;\ k).$$

Это в точности недостающий член, в котором в качестве второго множителя находится двухточечная функция. Аналогично член $\tilde{r}^{\mathrm{Amp}}(q,\ p,\ P)$ приводит к появлению в левой части уравнения члена $\tilde{r}(q,\ p,\ P)$, а в правой части — члена, содержащего в качестве первого множителя двухточечную функцию.

Начиная с этого момента мы будем иметь дело исключительно с функциями r^{Amp} [1]). Поэтому мы можем опустить индекс «Amp», имея в виду, что отныне функции $\tilde{r}$ и r будут обозначать полностью ампутированные запаздывающие функции. В свою очередь операторы R и $\tilde{R}$ теперь будут обозначать полностью ампутированные запаздывающие произведения, в частности

$$R(x)=-(\square+m^2)\,A(x). \tag{2.59}$$

Кроме обычных запаздывающих произведений, введенных выше, мы будем пользоваться также во вспомогательных целях *обобщенными запаздывающими произведениями* (о. з. п.); дадим теперь их определение и рассмотрим интересующие нас свойства [18, 24—27].

---

[1]) Это очень важный пункт в развиваемой автором схеме. Фактически он переходит от гейзенберговых полей $A(x)$ к гейзенберговым токам-источникам $j(x)=(-K_x)\,A(x)$. Это приведет в дальнейшем к тому, что полученные им результаты будут справедливы не в формализме ЛСЦ, а в более широкой схеме Боголюбова, Медведева, Поливанова [35*, 38*], в которой в роли условия причинности используется условие Боголюбова.— *Прим. перев.*

Пусть S — множество индексов $\{1, \ldots, n\}$.

Назовем *n-ячейкой* в множестве S знаковую функцию $\sigma_I = +$ или $-$, определенную на собственных подмножествах I множества S, так что (с CI, определенным как $CI = S - I$)

$$\sigma_I \neq \sigma_{CI},$$

$$\sigma_{I' \cup I''} = \sigma_{I'}, \text{ если } I' \cap I'' = \emptyset \text{ и } \sigma_{I'} = \sigma_{I''}. \quad (2.60)$$

Две n-ячейки называются *смежными*, если в них все функции σ_I, за исключением двух, совпадают. Различающиеся знаки принадлежат к взаимно дополнительным подмножествам I_0, $CI_0 = S - I_0$, которые называются «границами» между этими двумя ячейками.

Каждой n-ячейке C_μ мы сопоставляем о. з. п. $G_\mu(x_1, \ldots, x_n)$, такие, что выполняются следующие два условия.

1. Пусть C_μ, C_ν — смежные n-ячейки с границей $I_0 = \{i_1, \ldots, i_k\}$. Пусть σ_{I_0} отрицательна в n-ячейке C_μ и положительна в n-ячейке C_ν. Определим k-ячейку C_α в I_0, приписав каждому собственному подмножеству в I_0 тот же знак, который это подмножество имеет в C_μ. Также определяется $(n-k)$-ячейка C_β в CI_0. Потребуем затем

$$G_\mu(X) - G_\nu(X) = -i\,[G_\alpha(x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}), \\ G_\beta(x_{i_{k+1}}, \ldots, x_{i_n})]. \quad (2.61)$$

2. Частная n-ячейка задается $\sigma_i = +$ для $i = 2, \ldots, n$, где σ_i — знак, сопоставляемый одноэлементному множеству $\{x_i\}$. Соответствующее о. з. п. будет обычным запаздывающим произведением $R(X)$.

Эти два условия определяют о. з. п. G_μ единственным образом. Эти о. з. п. суть ковариантные, эрмитовы операторно-значные обобщенные функции, т. е. они удовлетворяют условиям 1, 2 и 7 определения произведений R. Вспомним, что R — полностью ампутированное запаздывающее произведение. Поэтому и G_μ также полностью ампутированное произведение.

Любые две n-ячейки C_μ, C_ν можно связать цепочкой n-ячеек $C_\mu, C_{\mu_1}, \ldots, C_{\mu_r}, C_\nu$, в которой соседние ячейки всегда смежны. Тогда уравнение (2.61) можно обобщить в виде

$$G_\mu(X) - G_\nu(X) = -i \sum_{\alpha,\beta} c^{\mu\nu}_{\alpha\beta} [G_\alpha(X_\alpha),\ G_\beta(X_\beta)]. \qquad (2.62)$$

Суммирование $\sum\limits_{\alpha,\beta}$ производится здесь по конечному числу членов, X_α и X_β — взаимно дополнительные подсовокупности переменных $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$, а $c^{\mu\nu}_{\alpha\beta}$ — вещественные числа. Уравнение (2.62) позволяет выразить разность двух о. з. п. одного и того же порядка через коммутаторы о. з. п. низших порядков. Это представление не единственно, поскольку, вообще говоря, существует несколько цепочек $C_\mu, \ldots, C_\nu$ требуемого типа.

В частности, в качестве G_ν можно выбрать обычное запаздывающее произведение $R(X)$:

$$G_\mu(X) = R(X) - i \sum_{\alpha,\beta} c^{\mu}_{\alpha\beta} [G_\alpha(X_\alpha),\ G_\beta(X_\beta)]. \qquad (2.63)$$

Итерируя это соотношение, можно получить представление G_μ через мультикоммутаторы обычных запаздывающих произведений:

$$G_\mu(X) = R(X) + \sum i^{l-1} c^{\mu}_{\alpha_1, \ldots, \alpha_l} [\ldots [R(X_{\alpha_1}),\ R(X_{\alpha_2})], \ldots \\ \ldots, R(X_{\alpha_l})]. \qquad (2.64)$$

Суммирование производится по разбиениям совокупности переменных X на $2 \leqslant l \leqslant n$ неперекрывающихся подсовокупностей. Коэффициенты $c^{\mu}_{\alpha_1, \ldots, \alpha_l}$ вещественны. Некоторые из них могут, разумеется, быть нулями.

Пусть C_μ — некоторая n-ячейка. Определим две $(n+1)$-ячейки $C^{\pm}_\mu$ следующими правилами: функция σ_I для собственных подсовокупностей I совокупности $\{1, \ldots, n\}$ будет такой же, как в C_μ, а функция σ_{n+1} положительна в C^{+}_μ и отрицательна в C^{-}_μ. Соответствующее о. з. п. обозначим $G^{\pm}_\mu(x_1, \ldots, x_n; x_{n+1})$. Многократное применение такой процедуры приводит к равенству

$$G^{\pm}_\mu(x_1, \ldots, x_n;\ x_{n+1}, \ldots, x_{n+m}) = \\ = G^{\pm \cdots \pm}_\mu(x_1, \ldots, x_n;\ x_{n+1};\ \ldots;\ x_{n+m}), \qquad (2.65)$$

в котором все знаки должны совпадать (либо все положительны, либо все отрицательны). $G^{\pm}_\mu(\ldots;\ \ldots)$ инвариантно относительно перестановок переменных, стоящих справа от точки с запятой. Для обычных запаздывающих произведений

$$R^+(X, Y) = R(X, Y). \tag{2.66}$$

Вакуумное среднее $g_\mu(X)$ о. з. п. $G_\mu(X)$ называется *обобщенной запаздывающей функцией* (о. з. ф.).

Для о. з. п. справедлива редукционная формула, аналогичная формуле для произведения R. Матричный элемент

$$M = (\Phi^{\text{in}}, \tilde{G}_\mu(p_1, \ldots, p_n)\,\Psi^{\text{in}}) \tag{2.67}$$

[см. (2.31)] задается формулами (2.32) — (2.34), где вместо $\tilde{R}$ в (2.32) следует подставить $\tilde{G}_\mu$, а вместо $\tilde{r}^{\text{amp}}(\ldots)$ в (2.34) следует подставить $\tilde{g}_\mu^+(P; Q, -Q')$. В использовании индекса «amp» более нет нужды, поскольку мы теперь имеем дело с полностью ампутированными выражениями.

Редукционные формулы остаются справедливыми при одновременной замене состояний «in» на состояния «out» и функций $\tilde{g}_\mu^+$ на функции $\tilde{g}_\mu^-$.

Образуя вакуумное среднее от (2.64) и суммируя в ее правой части по полным наборам промежуточных in-состояний, мы получим выражение для функции $\tilde{g}_\mu$ через интегралы от произведений функций $\tilde{r}$. Предполагая, что для функции $\tilde{r}$ справедливо свойство В теоремы 2.1, с помощью полученного выражения можно установить, что функция $\tilde{g}_\mu$ также обладает свойством В.

Из формулы (2.61) мы получаем уравнения полноты (обобщенные уравнения ГЛЦ)

$$g_\mu(X) - g_\nu(X) = -i \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l!} \int \prod_{i=1}^{l} \{du_i\, dv_i\} \times$$

$$\times K^l(U - V)\, g_\alpha^+(X_L; U)\, g_\beta^+(X_R; V), \tag{2.68}$$

где $X_L = \{x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}\}$, $X_R = \{x_{i_{k+1}}, \ldots, x_{i_n}\}$. Определение функции K^l дано в (2.37). Уравнение (2.68) остается справедливым и в том случае, если в его правой части два множителя g^+ заменяются на соответствующие множители

g^-. Наконец, обобщая далее разложение (2.45), получаем

$$G_\mu(X) = g_\mu(X) + \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l!} \int du_1 \ldots du_l g_\mu^+(X;\, U) : A^{\text{in}}(u_1) \ldots$$
$$\ldots A^{\text{in}}(u_l):. \qquad (2.69)$$

В нашем формализме *хронологическое произведение* не будет использоваться. Тем не менее мы дадим его определение и основные свойства, поскольку оно, будучи тесно связанным с S-матрицей, существенно с точки зрения приложений.

Хронологическое произведение, или T-произведение [1]), $T(x_1, \ldots, x_n)$ полей $A(x_1), \ldots, A(x_n)$ можно определить рекуррентно по формуле

$$R(X) = T(X) + i \sum_{L,\, R} T^*(X_L)\, T(x_1, X_R). \qquad (2.70)$$

Суммирование здесь проводится по всем разбиениям совокупности $\{x_2, \ldots, x_n\}$ на две взаимно дополнительные подсовокупности X_L и X_R, где X_R может быть пустой, а X_L — нет [2]). Произведение $T(X)$ также является операторно-значной обобщенной функцией умеренного роста, обладающей свойствами 1, 2 и 7, входящими в определение R-произведения. Вакуумное среднее $\tau(x_1, \ldots, x_n)$ произведения $T(x_1, \ldots, x_n)$ называется *хронологической функцией*, или *функцией Грина*. Функцию $\tau(X)$ можно разложить в сумму по «пучкам»

$$\tau(x_1, \ldots, x_n) = \sum \tau^{\text{Trunc}}(x_1, \ldots, x_i) \ldots$$
$$\ldots \tau^{\text{Trunc}}(x_i, \ldots, x_n), \qquad (2.71)$$

где суммирование проводится по всем разбиениям совокупности $\{x_1, \ldots, x_n\}$ на любое число подсовокупностей, в которые входят по крайней мере два элемента. *Усеченные функции Грина* тесно связаны с запаздывающими функция-

---

[1]) Здесь имеется в виду дайсоново T-произведение. Обсуждение отличия его от викова T-произведения и особенностей использования каждого из них в аксиоматической теории поля можно найти в обзоре [39*].— *Прим. перев.*

[2]) Это определение T-произведения выглядит несколько косвенным. Другой подход, в котором *сначала* естественным образом определяется T-произведение, а *затем* через него определяются R- и G-произведения, изложен в работе [17].

ми: их можно получить из функций r аналитическим продолжением в p-пространстве. При сделанных выше предположениях отнссительно функций r можно доказать, что функция Грина $\tilde{\tau}^{\mathrm{Trunc}}(p_n^-, \mathbf{p}_1, \ldots, p_n^-, \mathbf{p}_n; \mathbf{q}_1^+, \mathbf{q}_1, \ldots \ldots, q_m^+, \mathbf{q}_m)$, будучи проинтегрированной с основной функцией по переменным $\mathbf{P}$, $\mathbf{Q}$, непрерывна по переменным P^-, Q^+, т. е. в окрестности энергетической поверхности $p_i^- = q_j^+ = 0$. Ее значение на энергетической поверхности с точностью до численного множителя представляет собой связную часть элемента S-матрицы для процесса, в котором участвуют m падающих и n уходящих частиц.

Наконец, рассмотрим кратко свойства объектов нашей теории по отношению к *преобразованиям CPT*. Поскольку в нашей теории оператор зарядового сопряжения C совпадает с тождественным оператором, операция CPT превращается просто в PT. Согласно CPT-теореме [13, 14], в пространстве $\mathscr{H}$ существует антиунитарный оператор Θ со следующими свойствами:

$$\Theta^2 = 1, \tag{2.72}$$

$$\Theta\Omega = \Omega, \tag{2.73}$$

$$\Theta A(x)\,\Theta = A(-x), \tag{2.74}$$

$$\Theta A^{\mathrm{in}}(x)\,\Theta = A^{\mathrm{out}}(-x). \tag{2.75}$$

Пусть $\overline{C}_\mu$ — n-ячейка, полученная из n-ячейки C_μ переменой всех знаков σ_l, а $\overline{C}_\mu$ — соответствующее о. з. п. Тогда

$$\Theta G_\mu(x_1, \ldots, x_n)\,\Theta = \overline{G}_\mu(-x_1, \ldots, -x_n). \tag{2.76}$$

В частности, под действием оператора Θ запаздывающее произведение $R(X)$ превращается в опережающее произведение $\overline{R}(-X)$.

Наконец,

$$\Theta T(x_1, \ldots, x_n)\,\Theta = T^*(-x_1, \ldots, -x_n). \tag{2.77}$$

Для вакуумных средних G_μ и T мы имеем следующие соотношения, вытекающие из CPT-симметрии:

$$g_\mu(x_1, \ldots, x_n) = \overline{g}_\mu(-x_1, \ldots, -x_n), \tag{2.78}$$

$$\tau(x_1, \ldots, x_n) = \tau^*(-x_1, \ldots, -x_n). \tag{2.79}$$

Глава 3

ТЕОРИЯ ВОЗМУЩЕНИЙ: ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ

Рассмотрим теорию семейства полей $A(x, g)$, зависящих от параметра g, называемого *константой связи*. Пусть для фиксированного параметра g поле $A(x) = A(x, g)$ обладает всеми свойствами полей, описанными в гл. 2. Поле $A(x, 0)$ будет свободным полем массы m. (Случай, когда поле A зависит от нескольких констант связи, можно рассматривать аналогично.) Предположим, что любая величина $\mathcal{Q}$, встречающаяся в теории (операторы поля, R-операторы, r-функции и т. д.), может быть разложена в степенной ряд по g:

$$\mathcal{Q}(g) = \sum_{\sigma=0}^{\infty} \mathcal{Q}_\sigma g^\sigma, \tag{3.1}$$

где $\mathcal{Q}_0$ — значение соответствующей величины в теории свободного поля. Мы не будем касаться проблемы сходимости рядов (3.1), поскольку по этому поводу мы можем сказать ровно столько, сколько известно в каноническом подходе, т. е. ничего. Мы будем рассматривать только проблемы существования и вычисления коэффициентов разложения $\mathcal{Q}_\sigma$ в произвольном конечном порядке σ. В дальнейшем разложение (3.1) будет трактоваться как формальный степенной ряд. Можно надеяться, что он представляет собой по крайней мере асимптотическое разложение в пределе $g \to 0$.

Оператор $A_0(x)$ — это свободное поле, удовлетворяющее условиям, сформулированным в гл. 2 для оператора A^{ex}. Поэтому имеем

$$A_0^{\mathrm{in}}(x) = A_0^{\mathrm{out}}(x) = A_0(x). \tag{3.2}$$

Запаздывающие функции в теории свободного поля имеют вид

$$r_0(x, y) = -(\Box_y + m^2)\,\delta^4(x-y), \tag{3.3}$$

$$\widetilde{r}_0(p, q) = \frac{1}{2\pi}(q^2 - m^2)\,\delta^4(p+q), \tag{3.3}$$

$$r_0(x_1, \ldots, x_n) = 0 \text{ при } n > 2 \tag{3.4}$$

и

$$g_{\mu 0}(x_1, \ldots, x_n) = r_0(x_1, \ldots, x_n) \tag{3.5}$$

для всех μ.

Чтобы найти поля $A_\sigma(x)$, мы воспользуемся теоремой ГЛЦ. Попытаемся получить решения ампутированных уравнений ГЛЦ, удовлетворяющие дополнительным условиям, содержащимся в теоремах 2.1 и 2.2.

Введем следующие сокращенные обозначения:

$$J_{\sigma L}(x, y, X) = \int \prod_{i=1}^{l} \{du_i\, dv_i \Delta_+ (u_i - v_i)\} \times \\ \times r(x, X_L, U)\, r(y, X_R, V), \tag{3.6}$$

где $U = \{u_1, \ldots, u_l\}$, $V = \{v_1, \ldots, v_l\}$, $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$, а X_L, X_R определены так же, как в (2.36), и

$$I(x, y, X) = -i \sum_{L,\, R} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{i^l}{l!} [J_{lL}(x, y, X) - J_{lL}(y, x, X)], \tag{3.7}$$

что представляет собой правую часть уравнений (2.36). Тогда уравнения ГЛЦ запишутся в виде

$$r(x, y, X) - r(y, x, X) = I(x, y, X). \tag{3.8}$$

Эти уравнения мы должны решить с помощью теории возмущений, учитывая упомянутые выше дополнительные условия, а также граничные условия, конкретизирующие динамику, которые будут сформулированы ниже. Подставим разложение (3.1) для функции r в уравнение (3.8) и приравняем в обеих его частях члены одного и того же порядка по g^σ:

$$r_\sigma(x, y, X) - r_\sigma(y, x, X) = I_\sigma(x, y, X), \tag{3.9}$$

$$I_\sigma(x, y, X) = -i \sum_{L,\, R} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{i^l}{l!} [J_{lL\sigma}(x, y, X) - J_{lL\sigma}(y, x, X)], \tag{3.10}$$

$$J_{lL\sigma}(x, y, X) = \sum_{\tau=1}^{\sigma-1} \int \prod_{i=1}^{l} \{du_i\, dv_i \Delta_+ (u_i - v_i)\} \times \\ \times r_\tau(x, X_L, U)\, r_{\sigma-\tau}(y, X_R, V). \tag{3.11}$$

В сумме (3.11) отсутствуют члены с $\tau = 0$ и $\tau = \sigma$, что связано со свойством (3.4) и с тем, что функция I_σ не содержит двухточечную функцию (см. замечания, предшествующие теореме 2.2). В этом заключается преимущество ампутированных уравнений ГЛЦ по сравнению с неампутированной их формой. И это немедленно подсказывает следующую процедуру последовательных приближений.

Пусть функции r_τ с $\tau < \sigma$ известны. Тогда I_σ можно вычислить простым интегрированием и функцию r_σ можно найти, решив линейное уравнение (3.9) с известной правой частью. Именно эту задачу мы и будем решать, причем полное ее решение можно разделить на два этапа.

Этап 1: формальное решение. Псстроим последовательными приближениями формальное решение уравнения (3.9), удовлетворяющее условиям А и Б теоремы 2.1 и нормировочному условию (2.58), не заботясь пока о проблеме его существования. На этом этапе мы не рассматриваем условие В теоремы 2.1.

Этап 2: существование решения. Докажем существование формальных выражений, полученных на этапе 1. Здесь условие В становится существенным.

Слово «формальное», употребленное выше, не следует понимать слишком наивно. На первый взгляд может показаться, что проблема решения уравнения (3.9) вообще тривиальна. Действительно, функция $r_\sigma(x, y, X)$ имеет носитель в области $(x - y) \in \overline{V}_+$, а функция $r_\sigma(y, x, X)$ — в области $(y - x) \in \overline{V}_+$. Эти два носителя перекрываются только в точках $x = y$. Поэтому выражение

$$r_\sigma(x, y, X) = \theta(x - y)\, I_\sigma(x, y, X)$$

кажется очевидным решением уравнения (3.9). На самом деле все далеко не так просто. Усложнения возникают из-за того, что I_σ — это обобщенная, а не обычная функция, и мы ищем такие решения r_σ, которые также являются обобщенными функциями. Это означает, во-первых, что произведение θI_σ, вообще говоря, не определено и, во-вторых, что многообразие $x = y$ не следует игнорировать, несмотря на его меньшую размерность.

Главы 4—6 будут посвящены этапу 1, а гл. 7 — этапу 2.

Глава 4

УРАВНЕНИЕ $r_\sigma(x, y, X) - r_\sigma(y, x, X) = I_\sigma(x, y, X)$

В этой главе мы займемся решениями уравнения (3.9), удовлетворяющими условиям А и Б теоремы 2.1. Мы начнем с проблемы единственности.

ПРОБЛЕМА ЕДИНСТВЕННОСТИ

Уравнение (3.9) линейно. Поэтому его решения единственны с точностью до решений соответствующего однородного уравнения

$$h(x, y, x_1, \ldots, x_n) - h(y, x, x_1, \ldots, x_n) = 0, \quad (4.1)$$

где функция h должна удовлетворять тем же условиям инвариантности и условиям на носитель, что и функция r_σ [1]).

Наиболее общее решение уравнения (4.1), если не учитывать дополнительные условия,— это некоторая обобщенная функция умеренного роста, симметричная по первым двум аргументам x и y. Условие А симметрии совокупности переменных $\{y, x_1, \ldots, x_n\}$ означает, что функция h инвариантна относительно перестановок всех своих аргументов. В силу условия для носителя Б он должен принадлежать области $(x - y) \in \overline{V}_+$. Однако с учетом симметрии по (x, y) он должен принадлежать также области $(y - x) \in \overline{V}_+$, так что в итоге он сводится к многообразию $x = y$. В силу только что установленной симметрии по всем аргументам мы имеем

$$\operatorname{supp} h \subset \{x = y = x_1, \ldots = x_n\}. \quad (4.2)$$

Вследствие требования трансляционной инвариантности функция h может зависеть только от разностей переменных

---

[1]) Это требование, естественное на первый взгляд, является на самом деле дополнительным предположением, не вытекающим из исходных постулатов.— *Прим. перев.*

$\xi = x - y$, $\xi_i = x - x_i$ и имеет носитель в точке $\xi = \xi_i = 0$. Наиболее общая обобщенная функция с таким носителем есть (см. [19], стр. 100)

$$D\delta^4(\xi)\prod_{i=1}^{n}\delta^4(\xi_i),$$

где D — произвольный дифференциальный оператор, обладающий должной симметрией. Наконец, вследствие остальных требований условия А оператор D должен быть вещественным и лоренц-инвариантным. В результате мы получаем следующую теорему.

Теорема 4.1.

Наиболее общее решение уравнения (4.1), удовлетворяющее условиям А и Б теоремы 2.1, есть

$$h(x, y, x_1, \ldots, x_n) = \\ = D\delta^4(x-y)\prod_{i=1}^{n}\delta^4(x-x_i), \qquad (4.3)$$

где D — дифференциальный оператор по переменным x, y, X с постоянными вещественными коэффициентами, лоренц-инвариантный и полностью симметричный по переменным x, y, X. В p-пространстве это решение принимает вид

$$\tilde{h}(p, q, p_1, \ldots, p_n) = \\ = \delta^4\left(p + q + \sum_i p_i\right)\mathcal{P}(p, q, p_1, \ldots, p_n), \qquad (4.4)$$

где $\mathcal{P}$ — инвариантный, вещественный, полностью симметричный полином.

В качестве важного приложения этой теоремы рассмотрим уравнение (3.9) в первом порядке по g ($\sigma = 1$). Очевидно,

$$I_1(x, y, X) = 0, \qquad (4.5)$$

так что функция r_1 должна иметь вид (4.3). В пределах ограничений, перечисленных в теореме 4.1, мы можем свободно выбирать дифференциальные операторы D. *Именно выбор операторов D позволяет конкретизировать взаимо-*

действие. Иначе говоря, выбор операторов D соответствует выбору лагранжиана (или гамильтониана) взаимодействия в канонической теории поля.

Для простоты выберем все операторы D, кроме одного, равными нулю, так что отличной от нуля будет только одна функция r_1. Пусть она будет μ-точечной функцией с $\mu > 2$ [1]):

$$r_1(x_1, \ldots, x_n) = 0 \text{ для } n \neq \mu,$$
$$r_1(x_1, \ldots, x_\mu) = D \prod_{i=1}^{\mu} \delta^4(x_1 - x_i). \tag{4.6}$$

Пусть далее D есть однородный дифференциальный оператор порядка ν, так что полином $\mathcal{P}$ в формуле (4.4) представляет собой форму степени ν. Такую теорию мы будем называть *теорией типа* (μ, ν).

Лагранжиан взаимодействия, соответствующий выбору (4.6), имеет вид

$$L_{\text{int}} = \frac{g}{\mu!} \int dx_1 \ldots dx_\mu r_1(x_1, \ldots, x_\mu) :A^{\text{in}}(x_1) \ldots A^{\text{in}}(x_\mu): . \tag{4.7}$$

Иначе говоря, функция r_1, вычисленная из такого лагранжиана L_{int} с помощью канонической процедуры, обладает свойствами (4.6). Лагранжиан L_{int} есть полином степени μ по полям с производными порядка ν. Отметим, что высокие производные в функции r_1 приводят к высоким производным в L_{int}, а в этом случае канонический формализм сталкивается с хорошо известными трудностями. Напротив, развиваемый здесь формализм не сталкивается с трудностями в этом пункте и может включать произвольно высокие производные [2]).

---

[1]) Выбор $\mu = 2$ с оператором D порядка 0 или 2 нарушил бы нормировочное условие (2.58): он соответствовал бы перенормировке массы или волновой функции. Операторы D более высоких порядков (все еще для $\mu = 2$) не представляют интереса вследствие ограниченной роли, которую играет двухточечная функция в нашем формализме.

[2]) Понятое буквально, это утверждение автора может вызвать недоумение. Дело в том, что с чисто аксиоматической точки зрения квазилокальный произвол в r-функциях действительно может включать в себя полиномы по производным от δ-функций произ-

Теории типа (3, 0) и (4, 0) соответствуют двум так называемым перенормируемым теориям канонического формализма, т. е. теориям A^3 и A^4 соответственно. Смысл понятия перенормируемости в нашем формализме мы обсудим в гл. 8.

Конечно, выбор функции r_1 не фиксирует единственным образом теорию, поскольку неопределенности вида (4.3) возникают в каждом порядке. В гл. 5 мы покажем, как следует поступать с этими неопределенностями в порядках $\sigma \geqslant 2$.

ПРОБЛЕМА СУЩЕСТВОВАНИЯ

Докажем следующую теорему.

Теорема 4.2.

Чтобы уравнение (3.9)

$$r_\sigma(x, y, x_1, \ldots, x_n) - r_\sigma(y, x, x_1, \ldots, x_n) = I_\sigma(x, y, x_1, \ldots, x_n)$$

имело решение $r_\sigma(x, y, X)$, удовлетворяющее условиям А и Б теоремы 2.1, необходимо и достаточно, чтобы $I_\sigma(x, y, X)$ была обобщенной функцией умеренного роста со следующими свойствами:

а) $\operatorname{supp} I_\sigma(x, y, X) = \{(x-y)^2 \geqslant 0;\ (x - x_i) \in \overline{V}_+$ или $(y - x_i) \in \overline{V}_+$ для всех $i = 1, \ldots, n\}$; (4.8)

б) I_σ удовлетворяет тождествам

$$I_\sigma(x, y, X) + I_\sigma(y, x, X) = 0, \quad (4.9)$$

$$I_\sigma(x, y, z, X) + I_\sigma(y, z, x, X) + I_\sigma(z, x, y, X) = 0; \quad (4.10)$$

в) I_σ вещественна;

г) I_σ инвариантна относительно преобразований из связной группы Пуанкаре $\mathfrak{P}_+^\uparrow$;

д) $I_\sigma(x, y, X)$ симметрична по аргументам $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$.

вольно высокой степени. В то же время в аксиоматической теории возмущений, как это демонстрирует и сам автор в гл. 8, существуют весьма жесткие ограничения и по числу полей (μ), и по числу производных (ν) в лагранжиане взаимодействия, так что в этом пункте развиваемый в книге метод не дает решающих преимуществ.— *Прим. перев.*

В двухточечном случае условия (4.10) и «д» отсутствуют.

Убедиться в необходимости сформулированных условий не составляет труда. Сделаем только одно замечание относительно условия «а», накладываемого на носитель. Из условий на носитель r_σ в качестве необходимого условия разрешимости уравнения (3.9) мы находим, что I_σ отлична от нуля только тогда, когда все x_i оказываются запаздывающими относительно x или все x_i — запаздывающие относительно y. На первый взгляд это условие кажется более сильным, чем вторая часть условия (4.8), где мы требуем лишь, чтобы каждый x_i в зависимости от значения индекса i был запаздывающим либо относительно x, либо относительно y. Однако вместе с условием $(x - y)^2 \geqslant 0$ это приводит как раз к только что описанному более сильному требованию. Если $(x - y) \in \overline{V}_+$, то все x_i, запаздывающие относительно y, оказываются запаздывающими и относительно x; если же $(y - x) \in \overline{V}_+$, то все x_i, запаздывающие относительно x или y, оказываются запаздывающими и относительно y.

Достаточность условий «а»—«д» будет установлена ниже явным построением решения. Мы хотим, чтобы функция r_σ была обобщенной функцией умеренного роста, т. е. непрерывной линейной формой над пространством $\mathscr{S}$ быстро убывающих основных функций [19], и так и будем строить решение. Построение будет выполнено в несколько шагов, причем на каждом из них будет расширяться пространство основных функций, на которых определена обобщенная функция r_σ. Приступая к построению, введем новые обозначения. Будем говорить, что основная функция $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ «обращается в нуль сильно» в точке $(a_1, \ldots, a_n)$, и записывать это как $\varphi(a_1, \ldots, a_n) \equiv 0$, если φ в этой точке обращается в нуль вместе со всеми своими производными.

Первый шаг. Пусть основная функция $\varphi(x, y, x_1, \ldots, x_n) \in \mathscr{S}$ и $\varphi \equiv 0$ в точке $x = y$. Введем вспомогательную функцию $\vartheta(\xi)$ 4-вектора ξ со следующими свойствами:

α) $\vartheta(\xi)$ вещественна;

β) $\vartheta(\xi)$ масштабно инвариантна, т. е.

$$\vartheta(\lambda\xi) = \vartheta(\xi) \text{ при } \lambda > 0; \tag{4.11}$$

γ) $\vartheta(\xi)$ принадлежит классу C^∞ всюду, кроме точки $\xi = 0$;

б)

$$\vartheta(\xi) = \begin{cases} 1 \text{ при } \xi \in V_+, \\ 0 \text{ при } \xi \in V_-. \end{cases} \tag{4.12}$$

При этих условиях

$$|D\vartheta(\xi)| < c_D |\xi|^{-|D|}, \tag{4.13}$$

где D — любая производная порядка $|D|$, $|\xi|$ — евклидова длина 4-вектора ξ, а c_D — надлежащая положительная постоянная. Сильное обращение в нуль функции φ в точке $x = y$ означает, что существуют постоянные C_M^D, $M = 0, 1, 2, \ldots$, такие, что

$$|D\varphi| < C_M^D |x - y|^M. \tag{4.14}$$

Тем самым произведение $\vartheta(x - y)\,\varphi(x, y, X)$ определено в пространстве $\mathscr{S}$, а сингулярнсость функции ϑ в точке $x = y$ подавляется за счет обращения в этой точке в нуль функции φ.

Определим [1])

$$\langle r_\sigma | \varphi \rangle = \langle I_\sigma | \vartheta\varphi \rangle. \tag{4.15}$$

Это выражение существует и действительно является решением уравнения (3.9):

$$\begin{aligned} &\langle r_\sigma(x, y, X) - r_\sigma(y, x, X) \,|\, \varphi(x, y, X) \rangle = \\ &= \langle I_\sigma(x, y, X) \,|\, \vartheta(x - y)\,\varphi(x, y, X) \rangle - \\ &\qquad - \langle I_\sigma(y, x, X) \,|\, \vartheta(y - x)\,\varphi(x, y, X) \rangle = \\ &\qquad\qquad = \langle I_\sigma(x, y, X) \,|\, \varphi(x, y, X) \rangle. \end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались формулой (4.9), а также учли тот факт, что $\vartheta(x - y) + \vartheta(y - x) = 1$ в области $\operatorname{supp} I_\sigma$. Неопределенность этой суммы при $x = y$ несущественна, поскольку φ в этой точке обращается в нуль.

Определение (4.15) не зависит от выбора функции ϑ, так как свобода выбора существует только в области $(x - y)^2 < 0$, а там функция I_σ равна нулю.

---

[1]) Для значения обобщениой функции T на основной функции φ мы пользуемся в равиой мере обозначениямн $\langle T | \varphi \rangle$, $\langle T(X) | \varphi(X) \rangle$ и $\int dXT(X)\,\varphi(X)$. Приносим за это извинение читателям.

Нетрудно убедиться в том, что определяемая формулой (4.15) обобщенная функция r_σ имеет правильный носитель: она обращается в нуль на тех основных функциях φ, которые равны нулю в области $(x - y) \in \overline{V}_+$, $(x - x_i) \in \overline{V}_+$ для всех i.

Второй шаг. Выберем произвольную переменную x_i и обозначим ее через z. Пусть функция $\varphi(x, y, \ldots, z, \ldots) \in \in \mathscr{S}$ обращается сильно в нуль при $x = z$. В силу требований симметрии для r_σ получим из (4.15)

$$\langle r_\sigma(x, y, \ldots, z, \ldots) | \varphi(x, y, \ldots, z, \ldots) \rangle = \\ = \langle I_\sigma(x, z, y, \ldots) | \vartheta(x - z) \varphi(x, y, \ldots, z, \ldots) \rangle. \tag{4.16}$$

Мы должны показать, что это определение согласуется с формулой (4.15) на основных функциях φ, обращающихся сильно в нуль как при $x = y$, так и при $x = z$. При обсуждении этого вопроса переменные x_i, отличные от z, не играют никакой роли. Поэтому для упрощения обозначений мы рассмотрим только трехточечный случай. Обобщение на случай произвольного n производится непосредственно. Пусть $\varphi(x, y, z)$ — такая основная функция, что $\varphi \equiv 0$ при $x = y$ и при $x = z$. Рассмотрим величину

$$A = \langle I_\sigma(x, y, z) | \vartheta(x - y) \varphi(x, y, z) \rangle.$$

Функция $\vartheta(x - y)$ по определению обращается в нуль при $(x - y) \in V_-$. Поэтому в силу условия (4.8) вклад в A дают только точки $(x - y) \in \overline{V}_+$. Вторая часть условия (4.8) приводит к дополнительному требованию $(x - z) \in \overline{V}_+$. Но в этой области $\vartheta(x - z) = 1$, так что величину A можно представить в виде

$$A = \langle I_\sigma(x, y, z) | \vartheta(x - y) \vartheta(x - z) \varphi(x, y, z) \rangle.$$

Учитывая условие (4.10), получаем

$$A = - \langle I_\sigma(y, z, x) | \vartheta(x - y) \vartheta(x - z) \varphi(x, y, z) \rangle - \\ - \langle I_\sigma(z, x, y) | \vartheta(x - y) \vartheta(x - z) \varphi(x, y, z) \rangle.$$

Первый член обращается в нуль, поскольку носители двух множителей в нем не перекрываются; $\operatorname{supp} I_\sigma(y, z, x)$ содержит точки пространства, удовлетворяющие требованиям $(y - x) \in \overline{V}_+$ или $(z - x) \in \overline{V}_+$, так что в любом случае одна из функций ϑ обращается в нуль. Второй член последней формулы мы можем дополнить выражением

$$-\langle I_\sigma(z, x, y) \mid \vartheta(y-x)\, \vartheta(x-z)\, \varphi(x, y, z)\rangle,$$

которое обращается в нуль по тем же причинам [условия $(x-z) \in \overline{V}_+$ и $(z-y) \in \overline{V}_+$ или $(x-y) \in \overline{V}_+$ приводят к тому, что $(x-y) \in \overline{V}_+$]. Поэтому, пользуясь еще условием (4.9), окончательно получаем

$$A = \langle I_\sigma(x, z, y) \mid \vartheta(x-z)\, \varphi(x, y, z)\rangle,$$

т. е. искомое условие самосогласованности.

Третий шаг. Пусть $\mathscr{S}_0 \subset \mathscr{S}$ — пространство основных функций $\varphi(x, x_1, \ldots, x_n)$, которые обращаются сильно в нуль в точках $x = x_1 = \ldots = x_n$.

Пусть $f(u)$ — вещественная функция из класса C^∞, которая обращается сильно в нуль при $u = 0$ (u — скалярная переменная) и строго положительна при $u \neq 0$. Определим функцию

$$F(u_1, \ldots, u_n) = \sum_{i=1}^{n} f(u_i).$$

Она относится к классу C^∞ и строго положительна всюду, кроме начала координат, в частности на единичной сфере

$$\sum u_i^2 = 1. \text{ Пусть } \xi_i = x - x_i, \quad |\xi_i|^2 = (\xi_i^0)^2 + \xi_i^2,$$

$$|\Xi|^2 = \sum_{i=1}^{n} |\xi_i|^2 \text{ и } u_i = |\xi_i| / |\Xi|.$$

Введем вспомогательные функции

$$f_i(x, x_1, \ldots, x_n) = \frac{f(u_i)}{F(u_1, \ldots, u_n)}. \tag{4.17}$$

Они вещественны, относятся к классу C^∞ всюду, кроме точки $x = x_1 = \ldots = x_n$, инвариантны относительно трансляций и растяжений и обращаются сильно в нуль при $x = x_1$. Кроме того,

$$\sum_{i=1}^{n} f_i(x, \ldots, x_n) = 1. \tag{4.18}$$

Вследствие масштабной инвариантности функций f_i по аналогии с условием (4.13) имеем

$$|Df_i| \leqslant C_D |\Xi|^{-|D|}. \tag{4.19}$$

Тогда по аналогии с условием (4.14) для функций $\varphi \in \mathscr{S}_0$ получаем

$$|D\varphi| \leqslant C_M^D |\Xi|^M, \tag{4.20}$$

так что произведение $\varphi_i = f_i\varphi$ принадлежит пространству $\mathscr{S}_0$. Более того, функция φ_i обращается сильно в нуль при $x = x_i$, так что значение обобщенной функции r_σ на функциях φ_i определяется результатами второго шага. Поскольку

$$\varphi(x, X) = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(x, X), \tag{4.21}$$

мы получим

$$\langle r_\sigma(x, X) | \varphi(x, X)\rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle I_{i\sigma}(x, X) | \zeta_i(x, X)\varphi(x, X)\rangle, \tag{4.22}$$

где

$$I_{i\sigma}(x, x_1, \ldots, x_n) = I_\sigma(x, x_i, \ldots, x_{i-1}x_{i+1}, \ldots, x_n), \tag{4.23}$$

$$\zeta_i(x, X) = \vartheta(x - x_i) f_i(x, X). \tag{4.24}$$

Выражение (4.22) существует и не зависит от специального выбора функции f, в чем можно просто убедиться, повторив ход рассуждений второго шага. Это выражение определяет функцию r_σ на пространстве $\mathscr{S}_0$, обладающую нужными свойствами. Действительно, условия симметрии относительно аргументов x_i, вещественности и трансляционной инвариантности выполняются тривиально. Принадлежность носителя к области $(x - x_i) \in \overline{V}_+$ следует из свойств носителей функций ϑ и I_σ (наша процедура так специально и строилась, чтобы условия на носитель выполнялись). Единственное условие, которое еще нуждается в проверке,— это требование лоренц-инвариантности. Пусть Λ — преобразование из собственной группы Лоренца. Очевидно, что функции $\vartheta(\Lambda\xi)$ и $f_i(\Lambda x, \Lambda X)$ обладают всеми необходимыми свойствами вспомогательных функций ϑ и f_i, и поэтому замена одних функций другими в формуле (4.22) не изменит результата. Иными словами,

$$\langle r_\sigma(x, X) \,|\, \varphi(\Lambda x, \Lambda X)\rangle = \sum_i \langle I_{i\sigma}(x, X) \,|\, \zeta_i(x, X)\, \varphi(\Lambda x, \Lambda X)\rangle =$$
$$= \sum_i \langle I_{i\sigma}(x, X) \,|\, \zeta_i(\Lambda x, \Lambda X)\, \varphi(\Lambda x, \Lambda X)\rangle =$$
$$= \sum_i \langle I_{i\sigma}(\Lambda^{-1}x, \Lambda^{-1}X) \,|\, \zeta_i(x, X)\, \varphi(x, X)\rangle =$$
$$= \sum_i \langle I_{i\sigma}(x, X) \,|\, \zeta_i(x, X)\, \varphi(x, X)\rangle = \langle r_\sigma(x, X) \,|\, \varphi(x, X)\rangle,$$

что и требовалось доказать. Здесь мы воспользовались инвариантностью функции I_σ и соотношением

$$\langle T(X) \,|\, \varphi(X)\rangle = \langle T(\Lambda X) \,|\, \varphi(\Lambda X)\rangle,$$

справедливым для любой обобщенной функции T. Фактически оно определяет действие преобразования Λ на функцию T.

Четвертый шаг. Нам предстоит еще расширить определение функции r_σ, заданной на пространстве $\mathscr{S}_0$, на все пространство $\mathscr{S}$. Мы сделаем это, расширив его даже на более широкое пространство основных функций.

Пусть $\mathscr{S}^N$ — пространство функций $\varphi(x, x_1, \ldots, x_n)$, непрерывных вместе со своими производными до N-го порядка, для которых имеет место условие

$$\sup_{x,\, X} |(1 + |x|^2 + |X|^2)^\alpha D\varphi(x, X)| < \infty \tag{4.25}$$

для всех неотрицательных целых α и всех производных D порядка $|\quad| \leqslant N$. Топология пространства $\mathscr{S}^N$ определяется полунормами (4.25). Пространство $\mathscr{S}$ плотно в $\mathscr{S}^N$. Согласно хорошо известной теореме (см. [19], стр. 239), для заданной функции I_σ существует положительное целое число N, такое, что функция I_σ определена на $\mathscr{S}^N$. Функцию r_σ будем определять на том же пространстве $\mathscr{S}^N$.

Пусть $\mathscr{S}_0^N$ — подпространство пространства $\mathscr{S}^N$, состоящее из основных функций, обращающихся в нуль вместе со всеми своими производными до порядка N в точках $x = x_1 = \ldots = x_n$. Нетрудно видеть, что вся аргументация шагов 1—3 остается справедливой, если определить сильное обращение в нуль функции φ в некоторой точке в этом новом ограниченном смысле. Определение (4.22) можно немедленно распространить на пространство $\mathscr{S}_0^N$.

Напомним, что в силу трансляционной инвариантности $I_\sigma(x, X)$ и $r_\sigma(x, X)$ могут считаться обобщенными функциями разностей переменных $\xi_i = x - x_i$, $i = 1, \ldots, n$ (см. [13], стр. 60—62). Согласно предыдущему обсуждению, функция $r_\sigma(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ определена на пространстве $\mathscr{S}_0^N(\Xi)$ N-кратно дифференцируемых основных функций $\varphi(\Xi)$, которые сильно обращаются в нуль в точке $\xi_1 = \ldots = \xi_n = 0$. Мы должны распространить это определение на пространство $\mathscr{S}^N(\Xi)$.

Пусть D обозначает дифференциальный оператор

$$D = \prod_{i=1}^{n} \prod_{\nu=0}^{3} \frac{\partial^{\alpha_{i\nu}}}{(\partial \xi_i^\nu)^{\alpha_{i\nu}}}, \tag{4.26}$$

причем $|D| = \sum_{i,\nu} \alpha_{i\nu}$ — его порядок. Определим величину

$$\Xi^D = \prod_{i,\nu} \frac{(\xi_i^\nu)^{\alpha_{i\nu}}}{\alpha_{i\nu}!}. \tag{4.27}$$

Пусть $\gamma(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ — произвольная, но фиксированная вещественная функция из класса C^∞ с компактным носителем, причем выбранная так, что $\gamma \equiv 1$ в окрестности начала координат и $\gamma(x - x_1, \ldots, x - x_n)$ инвариантна относительно перестановок аргументов $x, x_1, \ldots, x_n$. Такие функции существуют. Например, можно образовать функцию

$$\gamma(\Xi) = \prod_{i=1}^{i} \bar{\gamma}(x - x_i) \prod_{i<j} \bar{\gamma}(x_i - x_j),$$

где $\bar{\gamma}(\xi)$ обладает компактным носителем и тождественно равна 1 в окрестности точки $\xi = 0$. Разности в аргументах функций $\bar{\gamma}$ следует выразить через ξ_i.

Определим функцию

$$\gamma^D(\Xi) = \Xi^D \gamma(\Xi) \tag{4.28}$$

для всех D, для которых $|D| \leqslant N$. Если D и D' — два дифференциальных оператора вида (4.26), то мы имеем

$$D' \gamma^D \big|_{\xi_1 = \ldots = \xi_n = 0} = \delta_{DD'}, \tag{4.29}$$

где равенство двух дифференциальных операторов определено как равенство всех степеней $\alpha_{i\nu}$.

Пусть функция $\varphi(\Xi) \in \mathscr{S}^N$. Ее можно разложить в ряд

$$\varphi(\Xi) = \sum_{\substack{D \\ |D| \leq N}} \varphi_D \gamma^D(\Xi) + \varphi'(\Xi), \tag{4.30}$$

где

$$\varphi_D = D\varphi(\Xi)|_{\xi_1 = \ldots = \xi_n = 0} \tag{4.31}$$

и $\varphi'(\Xi) \in \mathscr{S}_0^N$. Тогда

$$\langle r_\sigma(\Xi) | \varphi(\Xi)\rangle = \langle r_\sigma(\Xi) | \varphi'(\Xi)\rangle + \sum_D \varphi_D \langle r_\sigma(\Xi) | \gamma^D(\Xi)\rangle. \tag{4.32}$$

Первый член в правой части здесь определен рассуждениями третьего шага. Мы должны определить конечное число постоянных $\langle r_\sigma | \gamma^D\rangle$ таким образом, чтобы функция r_σ удовлетворяла всем необходимым требованиям.

Функцию $\varphi(\Xi)$ можно записать как трансляционно-инвариантную функцию переменных x, X, произведя замену $\xi_i = x - x_i$ в аргументах. Тогда условия на функцию r_σ формулируются следующим образом.

1. Вещественность: это условие удовлетворяется, когда вещественны $\langle r_\sigma | \gamma^D\rangle$.

2. Носитель: условие на носитель автоматически удовлетворяется разложением (4.32), поскольку всякая функция φ, обращающаяся в нуль в области $\mathbf{T}_n$, имеет коэффициенты разложения φ_D, также обращающиеся в нуль.

3. Симметрия по аргументам X: если

$$\varphi(x, \ldots, x_i, \ldots, x_j, \ldots) = \\ = -\varphi(x, \ldots, x_j, \ldots, x_i, \ldots)$$

для любой пары (i, j), то

$$\langle r_\sigma | \varphi\rangle = 0. \tag{4.33}$$

4. Должно удовлетворяться уравнение (3.9): если

$$\varphi(x, x_1, \ldots) = -\varphi(x_1, x, \ldots),$$

то [1])

$$2\langle r_\sigma(x, x_1, \ldots) | \varphi(x, x_1, \ldots)\rangle = \\ = \langle r_\sigma(x, x_1, \ldots) | \varphi(x, x_1, \ldots)\rangle - \\ - \langle r_\sigma(x_1, x, \ldots) | \varphi(x, x_1, \ldots)\rangle = \\ = \langle I_\sigma(x, x_1, \ldots) | \varphi(x, x_1, \ldots)\rangle. \tag{4.34}$$

[1]) Выражение $\langle r_\sigma(x, \ldots, x_n) | \varphi(x, \ldots, x_n)\rangle$ в данном случае следует понимать как $\langle r_\sigma(\xi_1, \ldots, \xi_n) | \varphi(\xi_1, \ldots, \xi_n)\rangle$, поскольку $\varphi(x, \ldots, x_n)$ не является основной функцией.

Нетрудно убедиться, что для функций φ, антисимметричных по двум своим аргументам, определения (4.33) и (4.34) совпадают. Предположим, например, что $\varphi(x, y, z) = -\varphi(y, x, z) = -\varphi(x, z, y)$, так что функция φ инвариантна относительно циклической перестановки всех трех переменных. Тогда в силу условия (4.10)

$$\frac{1}{2}\langle I_\sigma(x, y, z) \,|\, \varphi(x, y, z)\rangle = \frac{1}{6}\langle I_\sigma(x, y, z) \,|\, \varphi(x, y, z) + \varphi(y, z, x) + \varphi(z, x, y)\rangle = \frac{1}{6}\langle I_\sigma(x, y, z) + \text{цикл. перестан.} \,|\, \varphi(x, y, z)\rangle = 0.$$

Поэтому определения (4.33) и (4.34) приводят к одинаковому результату.

Введем конечномерное векторное пространство Γ, натянутое на функции γ^D, интерпретируемые как функции переменных $x, x_1, \ldots, x_n$. В этом пространстве перестановки переменных x, x_i очевидным образом определяют линейное представление группы γ_{n+1} перестановок $(n+1)$ объекта. Это (приводимое) представление можно преобразовать с помощью схемы Юнга [1]; в результате мы получим

$$\Gamma = \Gamma_s \oplus \Gamma_a, \tag{4.35}$$

где Γ_s состоит из полностью симметричных функций, а любую функцию в Γ_a можно представить в виде суммы членов, каждый из которых антисимметричен по крайней мере по одной паре переменных. Соотношения (4.33) и (4 34) определяют функцию r_σ на подпространстве Γ_a, но не на Γ_s.

Перепишем сумму в (4.30) в виде

$$\sum_D \varphi_D \gamma^D(\Xi) = \gamma_s(\varphi;\ \Xi) + \gamma_a(\varphi;\ \Xi), \tag{4.36}$$

где $\gamma_s \in \Gamma_s$ и $\gamma_a \in \Gamma_a$ как функции переменных x, X. Функции γ_s и γ_a зависят от функции φ только через константы φ_D, где $|D| \leqslant N$. Величина $\langle r_\sigma \,|\, \gamma_a\rangle$ полностью фиксирована, а величина $\langle r_\sigma \,|\, \gamma_s\rangle$ все еще произвольна.

---

[1]) Определение схемы Юнга см. в любой из многочисленных книг по применению теории групп в квантовой механике.

Следует позаботиться еще о выполнении пятого требования — лоренц-инвариантности. Это потребует довольно длинного рассмотрения [1]).

Функция $r_\sigma(x - x_1, \ldots, x - x_n)$ инвариантна относительно связной группы Лоренца, если она инвариантна относительно бесконечно малых преобразований этой группы. Поэтому достаточно установить, что выполняются условия

$$M_{\mu\nu} r_\sigma(x - x_1, \ldots, x - x_n) = 0, \tag{4.37}$$

где

$$M_{\mu\nu} = \left(x^\mu \frac{\partial}{\partial x^\nu} \pm x^\nu \frac{\partial}{\partial x^\mu}\right) + \sum_{i=1}^{n} \left(x_i^\mu \frac{\partial}{\partial x_i^\nu} \pm x_i^\nu \frac{\partial}{\partial x_i^\mu}\right) \tag{4.38}$$

для $\mu, \nu = 0, \ldots, 3$, $\mu < \nu$. Верхние знаки следует выбирать при $\mu = 0$, нижние знаки — во всех других случаях.

Действие оператора $M_{\mu\nu}$ на функции $\varphi(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ определяется посредством замены переменных $\xi_i = x - x_i$. Оператор $M_{\mu\nu}$ отображает пространство $\mathscr{S}^{N+1}$ в пространство $\mathscr{S}^N$. На языке обобщенных функций условие (4.37) означает, что функция $r_\sigma(\Xi)$ обращается в нуль на всех основных функциях вида $M_{\mu\nu}\psi(\Xi)$, где $\psi \in \mathscr{S}^{N+1}$.

Пусть $\mathscr{W}_M$ — конечномерное векторное пространство всех форм степени M по переменным ξ_i. Векторы Ξ^D вида (4.27) с $|D| = M$ образуют базис в пространстве $\mathscr{W}_M$. Представление группы перестановок γ_{n+1} определяется на пространстве $\mathscr{W}_M$ так же, как оно определялось на пространстве Γ. Поэтому мы можем опять представить пространство $\mathscr{W}_M$ в виде

$$\mathscr{W}_M = \overset{s}{\mathscr{W}}_M \oplus \overset{a}{\mathscr{W}}_M, \tag{4.39}$$

где $\overset{s}{\mathscr{W}}_M$ содержит только полностью симметричные формы, а $\overset{a}{\mathscr{W}}_M$ — все остальные формы.

Оператор $M_{\mu\nu}$ на пространстве $\mathscr{W}_M$ действует как линейный оператор. Благодаря его симметрии относительно перестановок он отображает подпространство $\overset{s}{\mathscr{W}}_M$ в $\overset{s}{\mathscr{W}}_M$,

---

[1]) Более простое решение проблемы инвариантности, основанное на аналитических свойствах о. з. ф. в p-пространстве, было дано Эпштейном и Глазером [16, 17] в связи с формулировкой нового подхода к теории возмущений.

а $\mathscr{W}^{\cdot a}_M$ — в $\mathscr{W}^{a}_M$. Определим скалярное произведение в пространстве $\mathscr{W}_M$, потребовав, чтобы базис

$$e_D = \prod_{i,\,\nu} \sqrt{\alpha_{i\nu}!}\,\Xi^D \tag{4.40}$$

был ортонормированным [см. (4.27)]. В этом базисе операторы M_{0k}, $k = 1, 2, 3$, представляются симметричными матрицами, а операторы M_{ik}, $i, k = 1, 2, 3$,— антисимметричными матрицами. Оператор Казимира

$$C = \sum_{k=1}^{3} M_{0k}^2 - \sum_{1 \leq i < k \leq 3} M_{ik}^2 \tag{4.41}$$

эрмитов, положителен и может быть диагонализован. Его собственные векторы v_i, отвечающие собственному значению 0, под действием оператора $M_{\mu\nu}$ обращаются в нуль:

$$(v_i,\ Cv_i) = 0 \Rightarrow \sum_{\mu<\nu} (M_{\mu\nu}v_i,\ M_{\mu\nu}v_i) = 0 \Rightarrow M_{\mu\nu}v_i = 0,$$

поскольку все члены в сумме $\sum\limits_{\mu<\nu}$ неотрицательны. Благодаря полной симметрии оператора $M_{\mu\nu}$ существует базис (необязательно ортогональный) собственных векторов оператора C, такой, что все базисные векторы лежат либо в подпространстве $\mathscr{W}^{s}_M$, либо в подпространстве $\mathscr{W}^{s}_M$. Пусть $\mathscr{W}^{s0}_M$ — подпространство в пространстве $\mathscr{W}^{s}_M$, натянутое на собственные векторы оператора C с нулевым собственным значением, а $\mathscr{W}^{\cdot s1}_M$ — его ортогональное дополнение в пространстве $\mathscr{W}^{s}_M$, натянутое на собственные векторы оператора C с ненулевыми собственными значениями. Определим аналогичным образом подпространства $\mathscr{W}^{\cdot a0}_M$, $\mathscr{W}^{\cdot a1}_M$ и введем подпространства $\mathscr{W}^{\cdot 0}_M = \mathscr{W}^{s0}_M + \mathscr{W}^{\cdot a0}_M$, $\mathscr{W}^{1}_M = \mathscr{W}^{s1}_M + \mathscr{W}^{\cdot a1}_M$. В результате получим

$$\mathscr{W}^{s}_M = \mathscr{W}^{\cdot s0}_M \oplus \mathscr{W}^{\cdot s1}_M, \qquad \mathscr{W}^{\cdot a}_M = \mathscr{W}^{\cdot a0}_M \oplus \mathscr{W}^{\cdot a1}_M \tag{4.42}$$

и

$$M_{\mu\nu}\mathscr{W}^{s0}_M = 0, \qquad M_{\mu\nu}\mathscr{W}^{\cdot a0}_M = 0, \tag{4.43}$$

$$C\mathscr{W}^{s1}_M = \mathscr{W}^{s1}_M, \qquad C\mathscr{W}^{a1}_M = \mathscr{W}^{a1}_M. \tag{4.44}$$

Иначе говоря, оператор C индуцирует автоморфизмы подпространства $\mathscr{W}^{\cdot s1}_M$, $\mathscr{W}^{\cdot a1}_M$ и тем самым подпространства $\mathscr{W}^{\cdot 1}_M$. Обратный оператор C^{-1} существует как автоморфизм на этих трех подпространствах.

С помощью этих результатов мы можем переписать разложение (4.30) в форме, более приспособленной к обсуждению интересующей нас проблемы. Пусть опять $\varphi(\Xi) \in \in \mathscr{S}^N$. Можно найти такие формы $F_M(\Xi) \in \mathscr{W}^{\cdot}_M$, $M \leqslant N$, что в окрестности начала координат будет справедливо разложение

$$\varphi(\Xi) = \sum_{M=0}^{N} F_M(\Xi) + R(\Xi), \tag{4.45}$$

где $R(\Xi)$ обращается сильно в нуль при $\xi_i = 0$ (т. е. вместе со всеми своими производными, вплоть до порядка N). Коэффициенты F_M зависят от коэффициентов φ_D, $|D| = M$ линейно. Разделим F_M на две части:

$$F_M(\Xi) = F^0_M(\Xi) + F^1_M(\Xi), \quad F^\alpha_M \in \mathscr{W}^{\cdot\alpha}_M, \tag{4.46}$$

и преобразуем разложение для $\varphi(\Xi)$:

$$\varphi(\Xi) = \sum_{M=0}^{N} F^0_M(\Xi)\,\gamma(\Xi) + \\ + \sum_{M=0}^{N} C[\gamma(\Xi)\,C^{-1}F^1_M(\Xi)] + \varphi''(\Xi). \tag{4.47}$$

Оператор C определяется формулой (4.41), где теперь $M_{\mu\nu}$ — дифференциальные операторы вида (4.38). Однако в последней формуле C^{-1} все еще является матрицей в подпространстве W^1_M. В окрестности точки, в которой $\gamma \equiv 1$, второй член правой части разложения (4.47) равен $\sum F^1_M(\Xi)$, так что $\varphi'' \in \mathscr{S}^N_0$. Благодаря условию (4.37) обобщенная функция r_σ обращается в нуль на функциях второй суммы в формуле (4.47). Форму F^0_M можно далее разбить следующим образом:

$$F^0_M(\Xi) = F^{s0}_M(\Xi) + F^{a0}_M(\Xi), \quad F^{a0}_M \in \mathscr{W}^{\cdot a0}_M, \tag{4.48}$$

и мы получаем окончательно

$$r_\sigma|\varphi\rangle = \langle r_\sigma|\varphi''\rangle + \sum_{M=0}^{N} \langle r_\sigma|F^{a0}_M\gamma\rangle + \sum_{M=0}^{N} \langle r_\sigma|F^{s0}_M\gamma\rangle. \tag{4.49}$$

В этом выражении первый член (член с φ'') был определен на третьем шаге, второй — на четвертом шаге, так как $F_M^{a0}\gamma \in \Gamma_a$. Однако третий член остается неопределенным. Его можно фиксировать произвольным образом с тем ограничением, что для вещественных φ он должен быть вещественным. Например, можно по определению положить его равным нулю. Эта свобода выбора отвечает возможности добавления решения однородного уравнения. Действительно, зависимость $\langle r_\sigma \mid F_M^{s0}\gamma\rangle$ от φ имеет в точности тот вид, который предписывался теоремой 4.1.

Нетрудно проверить, что функция r_σ, определенная формулой (4.49), действительно удовлетворяет уравнению (3.9), вещественна и симметрична по совокупности переменных X. Для большей надежности мы хотели бы непосредственно убедиться в ее инвариантности, несмотря на то что последняя следует из построения. Пусть $\varphi = M_{\mu\nu}\psi$, $\psi \in \mathscr{S}^{N+1}$. Построим соответствующие функции F_M. Из формул (4.43) следует, что $F_M^0 = 0$. Пусть $\overline{F}_M^0$, $\overline{F}_M^1$ и т. д. будут формами, входящими в разложение (4.45) для функции ψ. Заметим, что $M_{\mu\nu}\overline{F}_M^0 = 0$. Тогда получаем

$$\varphi' = M_{\mu\nu}\psi - \sum_{M=1}^{N} C\,[\gamma C^{-1}M_{\mu\nu}\overline{F}_M^1] =$$
$$= M_{\mu\nu}\Big(\psi - \sum_M \overline{F}_M\gamma\Big) + \sum_M \{M_{\mu\nu}(\overline{F}_M^1\gamma) - C\,[\gamma C^{-1}M_{\mu\nu}\overline{F}_M^1]\}.$$

Функция $\left(\psi - \sum_1^N \overline{F}_M\gamma\right)$ имеет производные, обращающиеся в начале координат в нуль вплоть до производной порядка N. Вследствие того, что $M_{\mu\nu}\mathscr{W}_M \in \mathscr{W}_M$, первый член $M_{\mu\nu}(\psi - \ldots)$ принадлежит пространству $\mathscr{S}_0^N$ и обращается в нуль на r_σ (см. конец третьего шага). Поскольку $\varphi'' \in \mathscr{S}_0^N$, второй член в предыдущей формуле

$$T_2 = \sum_M \{M_{\mu\nu}(\overline{F}_M^{\pm}\gamma) - C\,[\gamma C^{-1}M_{\mu\nu}\overline{F}_M^1]\}$$

также принадлежит пространству $\mathscr{S}_0^N$. Оператор $M_{\mu\nu}$ коммутирует с операторами C и C^{-1}, так что

$$T_2 = \sum_M \{M_{\mu\nu}(\overline{F}_M^1\gamma) - M_{\mu\nu}C\,[\gamma C^{-1}\overline{F}_M^1] + C\,[(M_{\mu\nu}\gamma)(C^{-1}\overline{F}_M^1)]\} =$$
$$= \sum_M M_{\mu\nu}\{\overline{F}_M^1\gamma - C\,[\gamma C^{-1}\overline{F}_M^1]\} + \sum_M C\,\{(M_{\mu\nu}\gamma)(C^{-1}\overline{F}_M^1)\}.$$

Здесь обе фигурные скобки принадлежат $\mathcal{S}_0^N \cap C^\infty$, откуда опять в силу результатов третьего шага следует, что $\langle r_\sigma \mid T_2 \rangle = 0$. Этим завершается доказательство инвариантности.

Использовав явную зависимость функции φ_D от F_M, можно придать разложению (4.47) форму, аналогичную (4.30):

$$\varphi(\Xi) = \sum_{|D| \leqslant N} \varphi_D \overline{\gamma}^D(\Xi) + \varphi''(\Xi), \tag{4.50}$$

где $\overline{\gamma}^D \in D$ и $\overline{\gamma}^D = \gamma^D$ в окрестности начала координат. Тогда обобщенная функция r_σ определена на $\varphi \in \mathcal{S}^N$ равенством

$$\langle r_\sigma(x, X) \mid \varphi(x, X) \rangle =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \langle I_{i\sigma}(x, X) \mid \zeta_i(x, X)\, \varphi''(x, X) \rangle + \sum_{|D| \leqslant N} r_\sigma^D \varphi_D, \tag{4.51}$$

где постоянные $r_\sigma^D = \langle r_\sigma \mid \overline{\gamma}^D \rangle$ определяются так, как описано выше.

Неудобство определения (4.51) состоит в том, что в него столь существенным образом входит основная функция φ. Было бы гораздо предпочтительнее выразить обобщенную функцию r_σ непосредственно через обобщенные функции $I_{i\sigma}$, без явного упоминания основных функций. Такое выражение мы сейчас получим.

Рассмотрим вспомогательные функции $\zeta_i(x, X)$, определенные формулой (4.24). Они относятся к классу C^∞ всюду, кроме точки $x = x_1 = \ldots = x_n$. Выберем функцию $\overline{\rho}(\xi)$ из D, такую, что $\overline{\rho} \equiv 1$ в окрестности $\xi = 0$ и $\overline{\rho}(-\xi) = \overline{\rho}(\xi)$. Определим

$$\rho(x, X) = 1 - \prod_{i=1}^{n} \overline{\rho}(x - x_i) \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \overline{\rho}(x_i - x_j). \tag{4.52}$$

Функция ρ принадлежит классу C^∞, обращается в нуль в окрестности $x = \ldots = x_n$ и тождественно равна 1 вне более широкой окрестности того же многообразия. Определим функцию

$$\rho_\varkappa(x, X) = \rho(\varkappa x, \varkappa X), \qquad 0 < \varkappa < \infty. \tag{4.53}$$

Функция $\rho_\varkappa$ обладает теми же свойствами, что и функция ρ, причем две ее существенные окрестнсссти зависят от $\varkappa$. Функция

$$\zeta_{i\varkappa}(x,\ X) = \rho_\varkappa(x,\ X)\ \zeta_i(x,\ X) \tag{4.54}$$

принадлежит классу C^∞. Функция $\zeta_{i\varkappa}$ и ее производные при $\varkappa \to \infty$ сходятся равномерно соответственно к функции ζ_i и се производным на всех замкнутых множествах, не пересекающих критического многообразия $x = x_1 = \ldots$ $\ldots = x_n$. Более тщательный анализ показывает, что для функции $\varphi(x,\ X) \in \mathscr{S}_0^N$ последовательность функций $\zeta_{i\varkappa}\varphi$ принадлежит пространству $\mathscr{S}_0^N$ и сходится при $\varkappa \to \infty$ к функции $\zeta_i\varphi$ в топологии пространства $\mathscr{S}^N$. Поэтому определение (4.51) можно записать как

$$\langle r_\sigma | \varphi\rangle = \sum_i \lim_{\varkappa\leftarrow\infty} \langle I_{i\sigma} | \zeta_{i\varkappa}[\varphi - \sum_D \varphi_D \overline{\gamma}^D]\rangle + \sum_D r_\sigma^D \varphi_D.$$

Но $\zeta_{i\varkappa}\varphi \in \mathscr{S}^N$ и $\zeta_{i\varkappa}\overline{\gamma}^D \in \mathscr{S}^N$, так что при конечных $\varkappa$ два члена в квадратной скобке дают вклады, каждый из которых существует по отдельности:

$$\langle r_\sigma | \varphi\rangle = \lim_{\varkappa\to\infty} \{\sum_i \langle I_{i\sigma} | \zeta_{i\varkappa}\varphi\rangle - \\ - \sum_D \varphi_D [\sum_i \langle I_{i\sigma} | \zeta_{i\varkappa}\overline{\gamma}^D\rangle - r_\sigma^D]\}. \tag{4.55}$$

Определяя

$$R_{\sigma\varkappa}^D = \sum_{i=1}^n \langle I_{i\sigma}\zeta_{i\varkappa} | \overline{\gamma}^D\rangle - r_\sigma^D \tag{4.56}$$

и вспоминая, что

$$\varphi_D = D\varphi(\Xi)|_{\xi_i=0} = (-1)^{|D|} \int d\Xi\varphi(\Xi) D \prod_i \delta^4(\xi_i), \tag{4.57}$$

получаем наш окончательный результат:

$$\boxed{r_\sigma(x,\ X) = \lim_{\varkappa\to\infty} \{\sum_{i=1}^n \zeta_{i\varkappa}(x,\ X) I_{i\sigma}(x,\ X) - \\ - \sum_{|D|\leqslant N} R_{\sigma\varkappa}^D D \prod_{i=1}^n \delta^4(x - x_i)\}.} \tag{4.58}$$

В p-пространстве он записывается в виде

$$r_{\sigma l}(p, P) = \lim_{\varkappa \to \infty} \{(2\pi)^{n+1} \tilde{\zeta}_{i\varkappa}(p, P) * \tilde{I}_{i\sigma}(p, P) - \\ - \delta^4 (p + \sum p_i) \sum_D R^D_{\sigma\varkappa} \mathcal{P}_D(P)\}, \qquad (4.59)$$

где

$$\tilde{\zeta}_{i\varkappa}(p, P) = (2\pi)^{-5(n+1)/2} \int dx\, dX \times \\ \times \exp\left\{i \left(px + \sum p_j x_j\right)\right\} \zeta_{i\varkappa}(x, X) \qquad (4.60)$$

и

$$\mathcal{P}_D(P) = (2\pi)^{4-5(n+1)/2} (-1)^{|D|} D \exp\{-i \sum p_j \xi_j\} |_{\xi_j = 0} \qquad (4.61)$$

Здесь $\mathcal{P}_D$ — форма степени $|D|$. Символ $*$ обозначает свертку:

$$A(P) * B(P) = \int dQ A(P - Q) B(Q).$$

Не вдаваясь в детали, подчеркнем лишь, что постоянные $R^D_{\sigma\varkappa}$ тесно связаны с константами вычитания (перенормировочными константами) канонического формализма. Неопределенность в части F^{s0}_M констант $R^D_{\sigma\varkappa}$ [см. (4.49)] соответствует произволу в выборе этих констант вычитания. Подробное исследование этой связи пока не проведено.

Наконец, следует сделать замечание о специальном случае двухточечной функции. При ее рассмотрении мы должны учесть дополнительное условие (2.58), которое до сих пор не обсуждалось. Функция $\tilde{r}_0(p, q)$, определяемая формулой (3.3), удовлетворяет условию (2.58), так что в старших порядках $\sigma > 1$ оно принимает вид

$$\tilde{r}_\sigma(p, q) = \delta^4(p + q)(q^2 - m^2)^2 F_\sigma(q), \qquad (4.62)$$

где функция F_σ аналитична при $q^2 < 4m^2$. Чтобы учесть это новое условие, изменим теорему 4.2 для случая $n = 0$ следующим образом.

Теорема 4.3.

Чтобы уравнение

$$r_\sigma(x, y) - r_\sigma(y, x) = I_\sigma(x, y) \qquad (4.63)$$

имело решение, удовлетворяющее условиям А и Б теоремы 2.1 и условию (4.62), необходимо и достаточно, чтобы $I_\sigma(x, y)$ была обобщенной функцией умеренного роста со следующими свойствами:

а) $\operatorname{supp} I_\sigma(x, y) \subset \{(x-y)^2 \leqslant 0\}$;

б) I_σ антисимметрична:

$$I_\sigma(x, y) + I_\sigma(y, x) = 0; \tag{4.64}$$

в) I_σ вещественна;

г) I_σ инвариантна относительно преобразований группы $\mathfrak{P}_+^\uparrow$;

д) фурье-образ $\tilde{I}_\sigma(p, q) = \delta^4(p+q)\bar{I}_\sigma(q)$ при $q^2 < 4m^2$ обращается в нуль.

Условия «а» — «г» те же, что и в теореме 4.2, откуда следует их необходимость. Используем условия (2.27) и (2.53):

$$\tilde{r}_\sigma(p, q) = \delta^4(p+q)\bar{r}_\sigma(q), \quad \tilde{r}_\sigma(q, p) = \\ = \delta^4(p+q)\bar{r}_\sigma(-q). \tag{4.65}$$

Те же рассуждения, которые были использованы для функции $\bar{r}$ после формулы (2.56), могут быть применены и к $\bar{r}_\sigma$. Из них следует, что $\bar{r}_\sigma(q) = \bar{r}_\sigma(-q)$ при $q^2 < 4m^2$. Это доказывает необходимость условия «д».

Доказательство достаточности вновь сводится к построению явного решения. Из доказательства теоремы 4.2 мы знаем, что выражение (4.59) в частном случае $n = 1$ представляет собой решение уравнения (4.63), удовлетворяющее всем требованиям, за исключением, возможно, условия (4.62). Пусть

$$\tilde{r}'_\sigma(p, q) = \delta^4(p+q)\bar{r}'_\sigma(q)$$

есть решение вида (4.59). Поскольку носитель функции $r'_\sigma(x, y)$ лежит в области $(x-y) \in \bar{V}_+$, функция $\bar{r}'_\sigma(q)$ аналитична в $(\operatorname{Im} q) \in V_-$, а функция $\bar{r}'_\sigma(-q)$ аналитична в $(\operatorname{Im} q) \in V_+$. Условия «д» и (4.63) дают

$$\bar{r}'_\sigma(q) = \bar{r}'_\sigma(-q) \text{ для } q^2 < 4m^2,$$

так что, согласно теореме «об острие клина», функция $\overline{r}'_\sigma(q)$ аналитична для вещественных q при $q^2 < 4m^2$. В силу своей лоренц-инвариантности аналитическая функция $\overline{r}'_\sigma$ зависит только от q^2, так что ее можно разложить в окрестности $q^2 = m^2$ в ряд:

$$\overline{r}'_\sigma(q) = A + B(q^2 - m^2) + (q^2 - m^2)^2 F_\sigma(q^2). \qquad (4.66)$$

Однако полином $A + B(q^2 - m^2)$ есть решение однородного уравнения

$$h(q) - h(-q) = 0,$$

обладающее всеми необходимыми дополнительными свойствами. Поэтому функция

$$\overline{r}_\sigma(q) = (q^2 - m^2)^2 F_\sigma(q) \qquad (4.67)$$

представляет собой искомое решение $\tilde{r}_\sigma$ уравнения (4.63), удовлетворяющее условию (4.62).

Глава 5

ПОВЕДЕНИЕ НА МАЛЫХ РАССТОЯНИЯХ

Вернемся к вопросу о произволе в решении уравнения (3.9) для функции r_σ. При обсуждении теоремы 4.1 мы говорили, что выбор функции r_1 фиксирует взаимодействие. Это утверждение пока не представляется слишком содержательным, поскольку неопределенности вида (4.3) возникают в любом порядке σ. Чтобы избавиться от них хотя бы отчасти, следует наложить на функцию r_σ дополнительное условие. В качестве такового мы рассмотрим естественное предположение о поведении r_σ на малых расстояниях [1]).

Прежде чем сформулировать это условие, сделаем короткое математическое отступление. Рассмотрим пространство $\mathscr{S}(u_1, \ldots, u_l)$ основных функций умеренного роста l переменных. Линейное отображение

$$\varphi(U) \to \varphi_\lambda(U) = \varphi(\lambda U), \quad 0 < \lambda < \infty, \tag{5.1}$$

$\mathscr{S}$ на $\mathscr{S}$ непрерывно в топологии $\mathscr{S}$. Определим дуальное отображение $T(U) \to T_\lambda(U)$, $T \in \mathscr{S}'(U)$, так, что

$$\langle T_\lambda \mid \varphi \rangle = \lambda^l \langle T \mid \varphi_\lambda \rangle. \tag{5.2}$$

Это отображение $\mathscr{S}'$ на $\mathscr{S}'$ также линейно и непрерывно. Семейство обобщенных функций T_λ, порожденное $T \in \mathscr{S}'$, непрерывно зависит от λ в пределах $0 < \lambda < \infty$.

Формулу (5.2) можно представить в удобной интегральной записи:

$$\int dU T_\lambda(U) \varphi(U) = \lambda^l \int dU T(U) \varphi_\lambda(U) = \\ = \int dV T(\lambda^{-1} V) \varphi(V), \tag{5.3}$$

---

[1]) Вместо этого можно было бы ввести ограничения на поведение фурье-образа $\tilde{r}_\sigma$ при высоких энергиях. Мы отдаем предпочтение условию в x-пространстве, поскольку проведенное в гл. 4 построение было осуществлено в x-пространстве.

где мы произвели замену переменных $\lambda u_i = v_i$. Символически можно записать

$$T_\lambda(u_1, \ldots, u_l) = T\left(\frac{u_1}{\lambda}, \ldots, \frac{u_l}{\lambda}\right). \tag{5.4}$$

Очевидно, что предел $\lambda \to \infty$ для T должен в какой-то мере характеризовать поведение T при малых u_i. Для фурье-образов формула (5.4) принимает вид

$$\tilde{T}_\lambda(w_1, \ldots, w_l) = \lambda^l \tilde{T}(\lambda w_1, \ldots, \lambda w_l). \tag{5.5}$$

Эта формула, по-видимому, показывает, что предел $\lambda \to \infty$ для T_λ определяется поведением фурье-образа $\tilde{T}$ при больших значениях его аргументов. Заметим, что подобное «очевидное» заключение может оказаться обманчивым: поведение фурье-образа $\tilde{T} = D\delta^l(W)$ при $\lambda \to \infty$ очень сильно зависит от порядка производной D, несмотря на то, что все фурье-образы $\tilde{T}$ при больших w_i обращаются в нуль.

Докажем следующую лемму.

Лемма 5.1.

Для любой обобщенной функции $T(u_1, \ldots, u_l)$ существует вещественная константа $d > -\infty$, такая, что

$$\lim_{\lambda \to \infty} \lambda^\beta T_\lambda = 0 \tag{5.6}$$

для $\beta < d$, но не для $\beta > d$. Предел в формуле (5.6) следует понимать в смысле сходимости в $\mathcal{S}'$. Значение $d = +\infty$ допустимо.

Доказательство. Очевидно, что формула (5.6) имеет место для β, если она имеет место для $\beta' > \beta$. Таким образом, условие (5.6) определяет сечение вещественных чисел. Согласно теореме Шварца ([19], стр. 239), обобщенную функцию T можно рассматривать как производную конечного порядка от непрерывной функции, медленно убывающей на бесконечности. Иными словами, существуют производная D по U конечного порядка $|D|$, неотрицательное целое число N и положительная постоянная C, такие, что

$$T(U) = Df(U), \tag{5.7}$$

где f — непрерывная функция, удовлетворяющая условию

$$|f(U)| \leqslant C[1+|U|]. \tag{5.8}$$

Отсюда для функций $\varphi \in \mathscr{S}$ имеем

$$\langle T|\varphi\rangle = (-1)^{|D|}\int dU \frac{f(U)}{1+|U|^{N+l+1}}[1+|U|^{N+l+1}]D\varphi(U),$$

$$|\langle T|\varphi\rangle| \leqslant \|\varphi\|_{D,N+l+1}\cdot J, \tag{5.9}$$

где

$$J=\int dU[1+|U|^{N+l+1}]^{-1}|f(U)|<\infty$$

и

$$\|\varphi\|_{D,M}=\operatorname*{Sup}_U|[1+|U|^M]D\varphi|. \tag{5.10}$$

Для функции φ_λ имеем

$$\|\varphi_\lambda\|_{D,M} = \operatorname{Sup}|[1+|U|^M]D\varphi(\lambda U)| \leqslant$$
$$\leqslant \operatorname{Sup}|D\varphi(\lambda U)| + \operatorname{Sup}||U|^M D\varphi(\lambda U)| \leqslant$$
$$\leqslant \lambda^{|D|}\operatorname{Sup}|D\varphi(U)| + \lambda^{|D|-M}\operatorname{Sup}||U|^M D\varphi(U)|, \tag{5.11}$$

откуда следует, что

$$|\langle T_\lambda|\varphi\rangle| = \lambda^l|\langle T|\varphi_\lambda\rangle| \leqslant J\lambda^l\{\lambda^{|D|}\|\varphi\|_{D,0}+$$
$$+\lambda^{|D|-M}\|\varphi\|_{D,M}\}, \tag{5.12}$$

т. е. $\lambda^\beta\langle T_\lambda|\varphi\rangle \to 0$ для $\beta<-l-|D|$. Этот предел достигается равномерно на ограниченных множествах из $\mathscr{S}$, причем ограниченное множество определяется требованием, чтобы все $\|\varphi\|_{D,M}$ были ограничены некоторыми заданными конечными значениями ([19], стр. 235). Это доказывает лемму и показывает, что $d>-l-|D|>-\infty$.

Значение d, определяемое леммой 5.1, назовем *масштабной степенью* [1]), или короче *s-степенью* обобщенной функции T. Сокращенно мы будем обозначать ее $SD(T)$.

---

[1]) Мы предпочитаем это название термину «размерность», который приобрел популярность для обозначения данной величины в другом контексте. Мы считаем, что за термином «размерность» следует сохранить его освещенный временем смысл, фиксирующий положение функции T в специальной системе единиц.

Примеры.

1. Форма

$$T(U) = \sum_{\sum \alpha_i = A} C_{\alpha_i} u_i^{\alpha_i}$$

степени A имеет s-степень A. Этот результат не меняется при умножении T на логарифмический множитель ($\ln |u_i|$ или аналогичный), т. е. при таком определении s-степени логарифмические сингулярности оцениваются так же, как и ограниченные функции. Это оказывается существенным в приложениях, использующих теорию возмущений.

2. Производная

$$D \prod_{i=1}^{l} \delta(u_i)$$

от δ-функции D порядка $|D|$ имеет s-степень $-l - |D|$.

3. Всякая обобщенная функция, носитель которой не содержит начало координат, имеет s-степень, равную ∞.

4. Пусть $T_1, T_2 \in \mathcal{S}'$ имеют s-степени d_1 и d_2. Если $d_1 < d_2$, то s-степень d функции $T_1 + T_2$ есть $d = d_1$. Если же $d_1 = d_2$, то $d \geqslant d_1$, поскольку члены с максимальной s-степенью в T_1 и T_2 могут сократиться.

Теперь мы можем сформулировать обещанное выше дополнительное условие на функцию r_σ. *Потребуем, чтобы решение r_σ уравнения* (3.9) *для $\sigma \geqslant 2$ всегда выбиралось максимальной возможной s-степени.* С точки зрения приведенных выше примеров это означает, что мы требуем столь гладкого поведения решения на малых расстояниях, сколь это только возможно. Такое условие выглядит естественным и часто используется в аналогичной форме и вне теории возмущений [1]).

Простейшее применение этого принципа в нашем контексте таково: если функция $I_\sigma(x_1, \ldots, x_n) = 0$ (и это справедливо для любого фиксированного порядка σ для всех n, исключая конечное их число), то в качестве решения следует выбрать $r_\sigma = 0$. Какова максимальная возможная

---

[1]) См., например, определение «индекса роста» в работе [38*] или требование «минимальной сингулярности» Файнберга [40*].— *Прим. перев.*

s-степень в том случае, когда $I_\sigma \neq 0$, мы можем вывести из расширенного варианта теоремы 4.2.

Теорема 5.2.

Пусть $I_\sigma(x, y, x_1, \ldots, x_n)$ имеет s-степень d и удовлетворяет условиям «а» — «д» теоремы 4.2. Тогда существует решение r_σ уравнения (3.9), имеющее s-степень d и удовлетворяющее условиям А и Б теоремы 2.1. Решений r_σ с s-степенью больше d не существует.

Вторая часть теоремы 5.2 очевидна ввиду четвертого из приведенных выше примеров. Из условия $SD(r_\sigma) > d$ следует, что $SD(I_\sigma) > d$, а это находится в противоречии с исходным предположением теоремы.

Доказательство существования решения с s-степенью d несколько более сложно. Мы воспользуемся здесь понятиями и обозначениями гл. 4.

Следует заметить, что если s-степень обобщенной функции $I_\sigma(x, x_1, \ldots, x_n)$ равна d, то s-степень той же функции $I_\sigma(\xi_1, \ldots, \xi_n)$, выраженной через разности переменных $\xi_i = x - x_i$, также равна d. Это следует из свойства (5.4).

Пусть $\varphi(\Xi) \in \mathscr{S}_0^N$. Тогда $\varphi_\lambda(\Xi) \in \mathscr{S}_0^N$ и $\langle r_\sigma \mid \varphi_\lambda\rangle$ задается формулой (4.22):

$$\langle r_\sigma \mid \varphi_\lambda\rangle = \sum_i \langle I_{i\sigma} \mid \zeta_i \varphi_\lambda\rangle. \tag{5.13}$$

Но функция ζ_i масштабно инвариантна, так что $\zeta_i\varphi_\lambda = (\zeta_i\varphi)_\lambda$, и в силу принятого предположения относительно $SD(I_\sigma)$

$$\lambda^{\beta+4n}\langle r_\sigma \mid \varphi_\lambda\rangle = \sum_i \lambda^{\beta+4n}\langle I_{i\sigma} \mid (\zeta_i\varphi)_\lambda\rangle \to 0 \quad \text{при} \quad \lambda \to \infty, \quad \beta < d. \tag{5.14}$$

Рассмотрим теперь случай $\varphi \in \mathscr{S}^N$; это означает, что и $\varphi_\lambda \in \mathscr{S}^N$. Очевидно, что

$$(\varphi_\lambda)_D = \lambda^{|D|}\varphi_D \tag{5.15}$$

и

$$\bar{\gamma}_\lambda^D = \lambda^{|D|}\bar{\gamma}^D \tag{5.16}$$

в окрестности точки $\xi_i = 0$, так что величины $\lambda^{-|D|}\bar{\gamma}_\lambda^D(\Xi)$ должны обладать такими же общими свойствами, что и сами $\bar{\gamma}^D$. Согласно результатам гл. 4, можно написать

$$\langle r_\sigma | \varphi_\lambda \rangle = \sum_i \langle \zeta_i I_{i\sigma} | \varphi_\lambda - \sum_D \varphi_D \bar{\gamma}_\lambda^D \rangle + \sum_D \varphi_D \langle r_\sigma | \bar{\gamma}_\lambda^D \rangle. \quad (5.17)$$

Первый член здесь имеет форму (5.13); поэтому он обладает должным асимптотическим поведением при $\lambda \to \infty$. Второй член также имеет правильные свойства всюду, где он определен единственным образом: на $C[\gamma C^{-1} F_M^1]$ он обращается в нуль, а на $F_M^{a0}\gamma$ функция r_σ совпадает с I_σ. В обоих этих случаях s-степень больше или равна d. Теперь следует показать, что неопределенные члены в функции r_σ всегда можно выбрать так, чтобы r_σ в целом имела s-степень d. Это означает, что должно существовать такое решение r_σ, что

$$\lim_{\lambda \to \infty} \lambda^{\beta + 4n} \langle r_\sigma | \gamma_\lambda^D \rangle = 0 \quad \text{при} \quad \beta < d. \quad (5.18)$$

Пусть r'_σ — решение, построенное так, как это делалось в гл. 4, но не обязательно имеющее желаемую s-степень. На пространстве $\mathcal{S}_0^N$ имеем $r_\sigma = r'_\sigma$.

Выберем две константы τ', τ'', удовлетворяющие условию $0 < \tau' < \tau'' < \infty$. Функции $\tau^{-|D|}\bar{\gamma}_\tau^D - \bar{\gamma}^D$, где порядок D фиксирован, а τ изменяется на отрезке $[\tau', \tau'']$, образуют ограниченное множество в пространстве $\mathcal{S}_0^N$. Для $\beta < d$ можно найти такую константу $c_\beta > 0$, что

$$\lambda^{\beta+4n} | \langle r'_\sigma | \tau^{-|D|}\bar{\gamma}_{\tau\lambda}^D - \bar{\gamma}_\lambda^D \rangle | < c_\beta \quad \text{при} \quad 1 < \lambda < \infty. \quad (5.19)$$

Определим

$$R_\lambda = \lambda^{-|D|} \langle r_\sigma | \bar{\gamma}_\lambda^D \rangle \quad (5.20)$$

так, что формула (5.19) принимает вид

$$|R_{\tau\lambda} - R_\lambda| < c_\beta \lambda^{-\beta'}, \quad \beta' = \beta + 4n + |D|. \quad (5.21)$$

Выберем константы τ', τ'' так, чтобы они удовлетворяли условию $1 < \tau' < \tau'^2 < \tau'' < \infty$, и положительную константу $\mu > 1$ такой, чтобы было $1 - 1/\mu \geqslant \tau'^{-\beta'}$. Докажем, что существует вещественная константа a, для которой

$$| R_\lambda - a | \leqslant c_\beta \mu \lambda^{-\beta'} \quad (5.22)$$

при всех $\lambda > 1$.

Для достаточно малой величины b можно найти константу $\lambda_1 > 1$, для которой

$$R_{\lambda_1} > b + c_\beta \mu \lambda_1^{-\beta'}, \tag{5.23}$$

а для достаточно большой b можно найти константу $\lambda_2 > 1$, для которой

$$R_{\lambda_2} < b - c_\beta \mu \lambda_2^{-\beta'}. \tag{5.24}$$

Если константы a, удовлетворяющей условию (5.22), не существует, то это эквивалентно тому, что существует три константы b, λ_1, λ_2, для которых одновременно выполняются условия (5.23) и (5.24). Условие (5.23) может выполняться для b, заданной на открытой слева полуоси, а условие (5.24) — для b, заданной на открытой справа полуоси. Если эти две полуоси не перекрываются, то для константы a в области между ними выполняется условие (5.22). Теперь мы покажем, что эти полуоси действительно не перекрываются. Предположим противное, а именно что существует подходящая тройка чисел b, λ_1, λ_2. Для области $\tau' < \tau < \tau''$ с помощью формул (5.21) и (5.23) можно получить оценку

$$R_{\tau\lambda_1} = R_{\tau\lambda_1} - R_{\lambda_1} + R_{\lambda_1} \geqslant -c_\beta \lambda_1^{-\beta'} + b + c_\beta \mu \lambda_1^{-\beta'} \geqslant \\ \geqslant b + c_\beta \mu (\tau\lambda_1)^{-\beta'},$$

где $R_{\tau\lambda_1}$ опять удовлетворяет условию (5.23). Итерация этой процедуры позволяет установить, что

$$R_\lambda \geqslant b + c_\beta \mu \lambda^{-\beta'} \tag{5.25}$$

во всех случаях, когда отношение λ/λ_1 может быть представлено в виде произведения множителей τ_i, лежащих на отрезке $[\tau', \tau'']$. С учетом сделанного выше предположения $\tau'' > \tau'^2$ такая факторизация существует для всех $\lambda > \tau'\lambda_1$.

Аналогичным образом из (5.24) получаем

$$R_{\tau\lambda_2} = R_{\tau\lambda_2} - R_{\lambda_2} + R_{\lambda_2} \leqslant c_\beta \lambda_2^{-\beta'} + b - c_\beta \mu (\tau\lambda_2)^{-\beta'}$$

для $\tau' < \tau < \tau''$ и, итерируя, приходим к неравенству

$$R_\lambda \leqslant b - c_\beta \mu \lambda^{-\beta'} \tag{5.26}$$

для $\lambda > \tau'\lambda_2$. Комбинируя неравенства (5.25) и (5.26), нетрудно убедиться в том, что для достаточно больших λ

$$b + c_\beta \mu \lambda^{-\beta'} \leqslant R_\lambda \leqslant b - c_\beta \mu \lambda^{-\beta'},$$

т. е. мы пришли к противоречию. Тем самым доказано существование константы a, удовлетворяющей условию (5.22). Очевидно, что эта константа a фиксирована единственным образом и не зависит от β при $\beta > 0$. Последнее возможно в случае, когда $d + 4n + |D| > 0$. Тогда имеем

$$\lambda^{4n+\beta} |\langle r'_\sigma | \overline{\gamma}_\lambda^D \rangle - a\lambda^{|D|}| \leqslant c_\beta \mu.$$

Определим обобщенную функцию

$$h_\sigma^D = (-1)^{|D|} a D \prod_i \delta^4(\xi_i) \tag{5.27}$$

и получим

$$\lambda^{4n+\beta} |\langle r'_\sigma - h_\sigma^D | \overline{\gamma}_\lambda^D \rangle| \, c_\beta \mu. \tag{5.28}$$

(Отметим, что константа a зависит от D и σ, хотя эта зависимость и не выражена явно.) Выше мы подчеркивали, что асимптотическое поведение функции r'_σ относится к желаемому типу, при котором r_σ определяется единственным образом. Отсюда следует, что функция

$$h_\sigma^{|D|} = \sum_{\substack{D \\ D=\mathrm{const}}} h_\sigma^D \tag{5.29}$$

представляет собой решение однородного уравнения (4.1), удовлетворяющее всем дополнительным условиям. Таким образом, замена $\langle r'_\sigma | \overline{\gamma}^D \rangle$ на

$$\langle r_\sigma | \overline{\gamma}^D \rangle = \langle r'_\sigma - h_\sigma^D | \overline{\gamma}^D \rangle \tag{5.30}$$

приводит к решению, обладающему требуемым свойством (5.18). Если же $d + 4n + |D| \leqslant 0$, то *всякое* решение r_σ, в частности первоначально выбранная функция r'_σ, будет удовлетворять условию (5.18). Действительно, из неравенства

$$|R_\lambda - a| \leqslant c_\beta \mu \lambda^{-\beta'}$$

получаем

$$|\langle r_\sigma | \overline{\gamma}_\lambda^D \rangle| \leqslant a\lambda^{|D|} + c_\beta \mu \lambda^{-\beta-4n},$$

откуда автоматически следует справедливость условия (5.18), поскольку из условия $\beta' < 0$ следует $\beta + 4n < -|D|$.

С учетом этих результатов мы можем теперь выписать решение r_σ, отвечающее s-степени d, существование которого провозглашалось в теореме 5.2. Определим для $\varphi \in \mathscr{S}^N$ основную функцию

$$\varphi'_\lambda = \varphi - \sum_{\substack{D \\ -d-4n<|D|\leqslant N}} \varphi_D \lambda^{-|D|} \bar{\gamma}_\lambda^D - \sum_{\substack{D \\ |D|\leqslant -d-4n}} \varphi_D \bar{\gamma}^D \quad (5.31)$$

и обобщенную функцию

$$\langle r_\sigma | \varphi \rangle = \langle r_\sigma | \varphi'_\lambda \rangle + \sum_{\substack{D \\ -d-4n<|D|\leqslant N}} \varphi_D \lambda^{-|D|} \langle r_\sigma | \bar{\gamma}_\lambda^D \rangle + \sum_{\substack{D \\ |D|\leqslant -d-4n}} r_\sigma^D \varphi_D. \quad (5.32)$$

Первый член в этом разложении определен в силу того, что $\varphi'_\lambda \in \mathscr{S}_0^N$. Функции r_σ^D совпадают с теми, которые входят в равенство (4.51). Члены с $|D| > -d-4n$, определенные формулой (5.30), в пределе $\lambda \to \infty$ обращаются в нуль. В результате вся правая часть равенства не зависит от λ, так что

$$\langle r_\sigma | \varphi \rangle = \lim_{\lambda\to\infty} \langle r_\sigma | \varphi'_\lambda \rangle + \sum_{|D|\leqslant -d-4n} r_\sigma^D \varphi_D \quad (5.33)$$

и этот предел существует. Явную зависимость от φ можно исключить из этого выражения, так же как и при выводе формулы (4.51). Используя определение

$$R_{\sigma\varkappa\lambda}^D = \lambda^{-|D|} \sum_i \langle I_{i\sigma} \zeta_{i\varkappa} | \bar{\gamma}_\lambda^D \rangle, \quad (5.34)$$

получаем окончательный результат, аналогичный (4.58),

$$\boxed{\begin{aligned} r_\sigma(x, X) = \lim_{\lambda\to\infty} \lim_{\varkappa\to\infty} \Big\{ & \sum_i \zeta_{i\varkappa}(x, X)\, I_{i\sigma}(x, X) - \\ & - \sum_{\substack{D \\ -d-4n<|D|\leqslant N}} R_{\sigma\varkappa\lambda}^D D \prod_{j=1} \delta^4(x - x_j) - \\ & - \sum_{\substack{D \\ |D|\leqslant d-4n}} R_{\sigma\varkappa}^D D \prod_j \delta^4(x - x_j) \Big\}. \end{aligned}} \quad (5.35)$$

Мы получили решение, отвечающее требованию максимальности $SD(r_\sigma)$. Если $d \leqslant 4n$, то это решение все еще не единственное, но содержит неопределенность, связанную с выбором функции r_σ^D при $|D| \leqslant -4n-d$. Это эквивалентно возможности добавить к ответу произвольное однородное решение вида (4.3) с $|D| \leqslant -d-4n$. Такие однородные члены имеют s-степень $-|D|-4n \geqslant d$, поэтому их добавление не уменьшает s-степени функции r_σ. Получаемая неопределенность не специфична для развиваемого здесь формализма. Она проявляется и в каноническом формализме в виде неопределенности в коэффициентах контрчленов, необходимых для уничтожения бесконечностей. В гл. 8 мы покажем, что на самом деле для так называемых перенормируемых теорий никаких иных неопределенностей, кроме известных из канонического формализма, в аксиоматической теории возмущений не возникает.

Для двухточечной функции оптимальное решение (5.35) не удовлетворяет, вообще говоря, условию (4.62), по крайней мере при $d > -6$. При $d \leqslant -6$ условию (4.62) можно всегда удовлетворить, добавив, как в теореме 4.3, к функции $\bar{r}_\sigma(q)$ полином второй степени, что не приводит к увеличению s-степени $SD(r_\sigma)$. В случае $d > -6$ такой полином, вообще говоря, также можно добавить, но эта операция уменьшит s-степень $SD(r_\sigma)$ до -6 (или, может быть, до -4). Таким образом, при $d > -6$ s-степень функции $r_\sigma(x, y)$, удовлетворяющей условию гладкости на малых расстояниях, равна, вообще говоря, -6, а не d. Тем не менее это решение единственно. Неопределенности возникают только при $d < -6$. Они дают вклад в функцию $\bar{r}_\sigma(q)$ вида

$$\sum_{2 \leqslant k \leqslant -\frac{d+4}{2}} c_k (q^2 - m^2)^k. \tag{5.36}$$

Глава 6

СВОЙСТВА ФУНКЦИИ I_σ

Программа последовательных приближений, описанная в гл. 3, может считаться реализованной в гл. 4 и 5, если функция I_σ, вычисленная по формулам (3.10) и (3.11), удовлетворяет предположениям теорем 4.2 и 4.3. Теперь мы займемся тем, что докажем это. Допустим пока, что интегралы в формуле (3.11) существуют, и рассмотрим их свойство. Существование этих интегралов будет доказано в следующей главе.

Пусть функции $r_\tau(x, x_1, \ldots, x_n)$, $\tau < \sigma$, известны и удовлетворяют условиям теоремы 4.3 в теории возмущений. Вычислим функции $J_{lL\sigma}$ и I_σ по формулам (3.11) и (3.10). Мы должны показать, что полученные выражения для функции I_σ удовлетворяют условиям «а» — «д» теорем 4.2 и 4.3 соответственно.

Очевидно, что условия «г», «д» и (4.9) удовлетворяются. Условие вещественности «в» нетрудно получить из требования $[\Delta_+(\xi)]^* = -\Delta_+(-\xi)$, что дает

$$J^*_{lL\sigma}(x, y, X) = (-1)^l J_{lR\sigma}(y, x, X). \qquad (6.1)$$

В числе менее тривиальных условий обсудим сначала вопрос о тождествах (4.10), напоминающих тождества Якоби. Для упрощения обозначений ограничимся рассмотрением только случая трехточечной функции. Доказательство для общего случая можно получить из последнего простой подстановкой в надлежащие места аргументов x_i.

Определим

$$\begin{aligned} [xz, y] &= -i \sum_{l=1}^{\infty} \frac{i^l}{l!} J_{lz\sigma}(x, y, z), \\ [x, yz] &= -i \sum_{l=1}^{\infty} \frac{i^l}{l!} J_{l\rho\sigma}(x, y, z). \end{aligned} \qquad (6.2)$$

Иначе говоря, комбинация $[xz, y]$ содержит только те функции $J\ldots$, в которых переменная z входит в первый множитель r (вместе с переменной x), а комбинация $[x, yz]$ содержит только те из них, в которых переменная z входит в тот же множитель r, что и переменная y. Тогда имеет место разложение

$$I_\sigma(x, y, z) = [xz, y] + [x, yz] - [yz, x] - [y, xz]. \tag{6.3}$$

Мы хотим доказать, что комбинация

$$\begin{aligned} L = I_\sigma(x, y, z) + I_\sigma(y, z, x) + I_\sigma(z, x, y) &= \\ = ([xz, y] - [zx, y]) + ([x, yz] - [x, zy]) &+ \\ + ([zy, x] - [yz, x]) + ([y, zx] - [y, xz]) &+ \\ + ([yx, z] - [xy, z]) + ([z, xy] - [z, yx]) & \end{aligned} \tag{6.4}$$

обращается в нуль. Здесь введены круглые скобки, чтобы показать, что все члены в L можно разбить на пары одинаковой структуры. Выберем одну такую пару, например

$$[xz, y] - [zx, y] = -i \sum_l \frac{i^l}{l!} \sum_{\tau=1}^{\sigma-1} \int \prod_{i=1}^{l} \{du_i\, dv_i \Delta_+(u_i - v_i)\} \times \\ \times \{r_\tau(x, z, U) - r_\tau(z, x, U)\}\, r_{\sigma-\tau}(y, V).$$

Предполагается, что уравнение (3.9) с индексом σ, замененным на τ, справедливо при $\tau < \sigma$. Поэтому вторая фигурная скобка в предыдущем выражении равна $I_\tau(x, z, U)$. Подставляя явное выражение для I_τ, получаем

$$[xz, y] - [zx, y] = [[x, z], y] - [[z, x], y], \tag{6.5}$$

где

$$[[x, z], y] = -\sum_{\tau+\rho=\sigma} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{i^l}{l!} \sum_{\tau'+\tau''=\tau} \sum_{\alpha, \beta} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{i^k}{k!} \times \\ \times \int dU\, dV\, dU'\, dV'\, r_{\tau'}(x, U_\alpha, U') \prod_1^k \Delta_+(u'_j - v'_j)\, r_{\tau''}(z, U_\beta, V') \times \\ \times \prod_1^l \Delta_+(u_i - v_i)\, r_\rho(y, V). \tag{6.6}$$

Здесь совокупности U и V содержат по l, а совокупности U' и V' — по k переменных. Суммирование производится по всем возможным разбиениям совокупности U на две взаимно дополнительные подсовокупности U_α и U_β. Суммы по l и k содержат только конечное число ненулевых членов, так что перемена порядка суммирования допустима.

Аналогично можно получить

$$[x, yz] - [x, zy] = [x, [y, z]] - [x, [z, y]], \tag{6.7}$$

где

$$[x, [y, z]] = -\sum_{\tau+\rho=\sigma}\sum_{l=1}^{\infty}\frac{i^l}{l!}\sum_{\rho'+\rho''=\rho}\sum_{\alpha,\beta}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{i^k}{k!}\times$$
$$\times\int dU\,dV\,dU'\,dV' r_\tau(x, U)\prod_1^l \Delta_+(u_i - v_i)\times$$
$$\times r_{\rho'}(y, V_\alpha, U')\prod_1^k \Delta_+(u_j' - v_j')\, r_{\rho''}(z, V_\beta, V'); \tag{6.8}$$

здесь использованы такие же обозначения, как в формуле (6.6).

Благодаря симметрии функции $r_\rho(y, V)$ относительно совокупности переменных V нетрудно убедиться в том, что в сумме по (α, β) в формуле (6.6) все члены с одинаковым числом элементов в подсовокупности U_α дают один и тот же вклад. Поэтому сумму $\sum_{\alpha,\beta}$ можно заменить на $\sum_{l'=0}^{l}\binom{l}{l'}$ с $U_\alpha = (u_1, \ldots, u_{l'})$ и $U_\beta = (u_{l'+1}, \ldots, u_l)$. Переименуем переменные следующим образом:

$$\begin{aligned}
&u_1, \ldots, u_{l'} \to u_1, \ldots, u_{l'},\\
&v_1, \ldots, v_{l'} \to u_1', \ldots, u_{l'}',\\
&u_{l'+1}, \ldots, u_l \to v_1, \ldots, v_{l''}, \quad l'' = l - l',\\
&v_{l'+1}, \ldots, v_l \to v_1', \ldots, v_{l''}',\\
&u_1', \ldots, u_k' \to w_1, \ldots, w_k,\\
&v_1', \ldots, v_k' \to w_1', \ldots, w_k'
\end{aligned}$$

и перестроим суммы в (6.6):

$$[[x, z], y] =$$

$$= -\sum_{\tau+\rho+\omega=\sigma}\sum_{l'=1}^{\infty}\sum_{l''=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{i^{l'+l''+k}}{l'!\,l''!\,k!}\int dU\,dU'\,dV\,dV'\,dW\,dW'\times$$

$$\times r_\tau(x, U, W)\, r_\rho(z, V, W')\, r_\omega(y, U', V')\prod_1^{l'}\Delta_+(u_i-u_i')\times$$

$$\times\prod_1^{l''}\Delta_+(v_i-v_i')\prod_1^{k}\Delta_+(w_i-w_i').$$

Аналогичная процедура, примененная к величине $[x, [z, y]]$, приводит к тому же результату, т. е.

$$[x, z], y] = [x, [z, y]],$$

откуда немедленно следует, что $L = 0$.

Избавимся теперь от условия «е» теоремы 4.3. В p-пространстве для $n = 0$ формула (3.11) принимает вид

$$J_{lL\sigma}(p, q) = \sum_{\tau=1}^{\sigma-1}\int\prod_1^{l}\{dk_i\delta_+(k_i)\}\tilde{r}_\tau(p, -K)\,\tilde{r}_{\sigma-\tau}(q, K). \quad (6.9)$$

Вследствие наличия множителя $\delta^4(q + \Sigma k_i)$ в функции $\tilde{r}_{\sigma-\tau}$ подынтегральная часть в формуле (6.9) отлична от нуля только при $q = -\Sigma k_i$. Но векторы k_i благодаря множителям $\delta_+(k_i)$ должны лежать на положительной энергетической поверхности $k_i^2 = m^2$, $k_{i0} > 0$. Отсюда следует, что $\tilde{J}_{lL\sigma} = 0$ всюду, где $q^2 < (lm)^2$. Но в силу (3.3) и (4.62) $\tilde{J}_{1l\sigma} = 0$ и наинизший член в $\tilde{J}_{lL\sigma}$, не обращающийся в нуль, отвечает $l = 2$. Отсюда следует, что $\tilde{I}_\sigma(p, q) = 0$ при $q^2 < 4m^2$, что и требовалось доказать.

Остается доказать, что для функции $I_\sigma(x, y, x_1, \ldots, x_n)$ выполнено условие на носитель «а» теоремы 4.3. То обстоятельство, что $(x - x_i) \in \overline{V}_+$ или $(y - x_i) \in \overline{V}_+$ для всех i, следует непосредственно из (3.11) и из вида носителя функции r_τ. Осталось лишь убедиться в том, что $I_\sigma = 0$ для $(x - y)^2 < 0$.

Из соотношений (4.9) и (4.10) получаем

$$I_\sigma(x, y, z, \ldots) = I_\sigma(z, y, x, \ldots) + \\ + I_\sigma(x, z, y, \ldots). \quad (6.10)$$

Предположим, что $(x-y)^2 < 0$. Левая часть равенства (6.10), согласно той части условия на носитель, которая уже доказана, отлична от нуля только в том случае, если $(x-z) \in \overline{V}_+$ или $(y-z) \in \overline{V}_+$. Для определенности будем считать, что $(y-z) \in \overline{V}_+$ (другой случай доказывается совершенно так же). Тогда мы имеем $(z-x) \notin \overline{V}_+$, поскольку из условий $(z-x) \in \overline{V}_+$ и $(y-z) \in \overline{V}_+$ следует, что $(y-x) \in \overline{V}_+$, а этот случай необходимо исключить по предположению. Поэтому $I_\sigma(z, y, x, \ldots) = 0$, так как условия $(z-x) \in \overline{V}_+$ или $(y-x) \in \overline{V}_+$ не имеют места. Аналогичным образом $I_\sigma(x, z, y, \ldots) = 0$, поскольку ни $(x-y) \in \overline{V}_+$, ни $(z-y) \in \overline{V}_+$ не имеют места всюду, *за исключением совокупности* $y = z$ [в случае $(x-z) \in \overline{V}_+$ соответственно совокупности $x = z$].

Из этого рассмотрения следует вывод, что $I_\sigma(x, y, z, \ldots) = 0$ при $(x-y)^2 < 0$, за возможным исключением точек $x = z$ или $y = z$. При этом в качестве переменной z мы могли бы выбрать любую переменную x_i в функции $I_\sigma(x, y, x_1, \ldots, x_n)$. Таким образом, мы приходим к выводу: $I_\sigma(x, y, X) = 0$ для $(x-y)^2 < 0$, *за возможным исключением тех точек, в которых какая-либо из переменных x_i совпадает либо с x, либо с y.* Надо еще исключить эту возможность, но эта маленькая задача оказывается исключительно трудной.

Пусть X_L и X_R — две взаимно дополнительные подсовокупности переменных из совокупности $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Рассмотрим точки, в которых все $x_i \in X_L$ совпадают с x, а все $x_i \in X_R$ совпадают с y, причем $(x-y)^2 < 0$. Вполне возможно, что функция $I_\sigma(x, y, X)$ в этих точках не равна нулю. Однако свойства носителя r_τ, $\tau < \sigma$, таковы, что ненулевые вклады в функцию I_σ могут давать только члены

$$I_{L\sigma}(x, y, X) = -i \sum_{l=1}^{\infty} \frac{i^l}{l!} [J_{lL\sigma}(x, y, X) - J_{lR\sigma}(y, x, X)]. \quad (6.11)$$

Пусть $\mathscr{S}_S(x, y, X)$ — линейное подпространство пространства $\mathscr{S}(x, y, X)$, состоящее из основных функций $\varphi(x, y, X)$ с носителем в области $(x-y)^2 \leqslant 0$. Мы хотим доказать, что функция $I_{L\sigma}$ обращается в нуль на $\mathscr{S}_S$ Обозначим через $S(x, y, X)$ сужение функции $I_{L\sigma}(x, y, X)$ на подпространство $\mathscr{S}_S$. Оно представляет собой непрерывную линейную форму на $\mathscr{S}_S$, т. е. является элементом дуального по отношению к $\mathscr{S}_S$ пространства $\mathscr{S}'_S$. Большинство хорошо известных теорем относительно пространства $\mathscr{S}'$ справедливо также и для пространства $\mathscr{S}'_S$, быть может, с некоторыми очевидными изменениями. Соответствующие доказательства можно заимствовать из обсуждения случая пространства $\mathscr{S}'$. В частности, остается справедливой теорема о структуре обобщенных функций с носителем на некотором подпространстве ([19], стр. 101, теорема 36). Будучи примененной к нашей задаче, эта теорема позволяет установить, что S имеет вид

$$S(x, y, X) = \sum_D T_D(x-y)\, D \prod_{X_L} \delta^4(x-x_i) \prod_{X_R} \delta^4(y-x_i). \tag{6.12}$$

Здесь D — комбинация производных по x_i порядка $|D|$, $T(x-y) \in \mathscr{S}'_S(x, y)$, а суммирование содержит лишь конечное число членов. Обозначив $\partial_{i\mu} = \partial/\partial x_i^\mu$, формулу (6.12) можно переписать в более явном виде:

$$\begin{gathered} S(x, y, X) = \sum_\alpha T_\alpha^{\mu_1^1 \ldots \mu_{\alpha_1}^1 \mu_1^2 \ldots \mu_{\alpha_2}^2 \ldots \mu_{\alpha_n}^n}(x-y) \times \\ \times \partial_{1\mu_1^1} \ldots \partial_{n\mu_{\alpha_n}^n} \prod_{X_L} \delta^4(x-x_i) \prod_{X_R} \delta^4(y-x_i), \end{gathered} \tag{6.13}$$

где α — комбинация индексов $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$. Величина $T_\alpha^{\mu_1^1 \ldots}$ симметрична по индексам при фиксированном значении i:

$$T_\alpha^{\ldots \mu_\rho^i \ldots \mu_\sigma^i \ldots} = T_\alpha^{\ldots \mu_\sigma^i \ldots \mu_\rho^i \ldots}.$$

Функция S инвариантна относительно ограниченной группы Лоренца. Это значит, что при фиксированном α величина $T_\alpha^{\cdots}(\xi)$ образует контравариантный тензор. Докажем, что такая тензорная обобщенная функция может быть представлена в форме произведения ковариантного полинома по ξ на инвариантную обобщенную функцию.

Лемма 6.

Пусть $T^{\mu_1 \ldots \mu_N}(\xi) \in \mathscr{S}'_S$ преобразуется при преобразованиях Лоренца $\Lambda \in L_+^\uparrow$ по закону

$$T^{\mu_1 \ldots \mu_N}(\Lambda\xi) = \prod_{i=1}^{N} \Lambda^{\mu_i}_{\nu_i} T^{\nu_1 \ldots \nu_N}(\xi). \tag{6.14}$$

Тогда

$$T^{\mu_1 \ldots \mu_N}(\xi) = \xi^{\mu_1} \ldots \xi^{\mu_N} T(\xi), \tag{6.15}$$

где $T(\xi) \in \mathscr{S}'_S$ и

$$T(\Lambda\xi) = T(\xi). \tag{6.16}$$

Докажем эту лемму сначала для $N = 1$. В этом случае бесконечно малые преобразования (6.14) имеют вид

$$M^{\mu}_{\nu} T^{\nu}(\xi) = T^{\mu}(\xi) \quad \text{(суммирования по } \nu \text{ нет, } \mu \neq \nu\text{)}, \tag{6.17}$$

где

$$M^{\mu}_{\nu} = \xi^{\mu}\partial_{\nu} - \partial^{\mu}\xi_{\nu}, \tag{6.18}$$

$$\xi_{\mu} = g_{\mu\nu}\xi^{\nu}, \qquad \partial^{\mu} = g^{\mu\nu}\partial_{\nu}, \tag{6.19}$$

а $g_{\mu\nu}$, $g^{\mu\nu}$ — тензор Минковского. Заметим, что тензор M^{μ}_{ν} определен и для равных индексов, причем

$$M^{\nu}_{\nu} = -1 \quad \text{(суммирования нет)}, \tag{6.20}$$

так что

$$M^{\mu}_{\mu} T_{\mu}(\xi) = -T^{\mu}(\xi) \quad \text{(суммирования нет)}. \tag{6.21}$$

Из формул (6.17) и (6.21) получаем

$$T^{\mu}(\xi) = \frac{1}{2} M^{\mu}_{\nu} T^{\nu}(\xi), \tag{6.22}$$

где вновь используется обычное условие суммирования. Подставляя выражение (6.18), получаем

$$T^{\mu}(\xi) = \frac{1}{2}\xi^{\mu} T_1(\xi) + \frac{1}{2}\partial^{\mu} T_2(\xi), \tag{6.23}$$

где

$$T_1(\xi) = \partial_{\nu} T^{\nu}(\xi)$$

и

$$T_2(\xi) = -\xi_{\nu} T^{\nu}(\xi) \tag{6.24}$$

— инвариантные обобщенные функции.

До сих пор доказательство относилось в той же мере к пространству $\mathscr{S}'$, как и к пространству $\mathscr{S}'_S$. Начиная с этого момента, мы будем пользоваться тем, что имеем дело с обобщенными функциями из пространства $\mathscr{S}'_S$. Любая инвариантная обобщенная функция $T(\xi) \in \mathscr{S}'_S$ может быть представлена как обобщенная функция инварианта ξ^2 с помощью следующей процедуры [28, 29]. Пусть основная функция $\varphi(\xi) \in \mathscr{S}_S$. Определим

$$\bar{\varphi}(\tau) = \int d^4\xi\delta(\xi^2+\tau)\varphi(\xi). \tag{6.25}$$

Функция $\bar{\varphi}(\tau)$ принадлежит пространству $\mathscr{S}$ и имеет носитель в области $\tau \leqslant 0$. Обозначим пространство таких основных функций через $\mathscr{S}_S(\tau)$. Пусть $\gamma(\xi)$ — функция из класса C^∞, причем $\bar{\gamma}(\tau) \equiv 1$. Такие функции существуют. Обобщенную функцию $\bar{T}(\tau)$ на пространстве $\mathscr{S}_S(\tau)$ можно определить следующим образом:

$$\langle \bar{T}(\tau) \mid \varphi(\tau) \rangle = \langle T(\xi) \mid \gamma(\xi)\,\bar{\varphi}(\xi^2) \rangle. \tag{6.26}$$

Функция $\gamma(\xi)\,\bar{\varphi}(\xi^2)$ принадлежит $\mathscr{S}_S(\xi)$. С учетом определения (6.26) имеем

$$\langle T(\xi) \mid \varphi(\xi) \rangle = \langle \bar{T}(\tau) \mid \bar{\varphi}(\tau) \rangle. \tag{6.27}$$

Черту над функцией $\bar{T}$ можно теперь опустить и переписать это равенство хотя и в некорректном, но в понятном виде:

$$T(\xi) = T(\xi^2). \tag{6.28}$$

Из формулы (6.25) получаем

$$\begin{aligned}\overline{\partial_\mu\varphi}(\tau) &= \int d^4\xi\delta(\tau+\xi^2)\,\partial_\mu\varphi(\xi) = \\ &= -\int d^4\xi\varphi(\xi)\,\partial_\mu\delta(\tau+\xi^2) = \\ &= 2\int d^4\xi\delta'(\tau+\xi^2)\,\xi_n\varphi(\xi).\end{aligned}$$

Эта функция принадлежит $\mathscr{S}_S(\tau)$, если $\varphi \in \mathscr{S}_S(\xi)$. Отсюда следует в наших некорректных обозначениях

$$\partial_\mu T(\xi^2) = 2\xi_\mu T'(\xi^2), \tag{6.29}$$

где функция $T'(\tau) \in \mathcal{S}'_S$ является производной функции $\overline{T}(\tau) \in \mathcal{S}'_S$.

Применяя этот результат к T_2, получаем из (6.23)

$$T^{\mu}(\xi) = \xi^{\mu} T(\xi), \tag{6.30}$$

где

$$T(\xi) = \frac{1}{2} T_1(\xi) + T'_2(\xi^2) = T(\xi^2) \tag{6.31}$$

— инвариантная обобщенная функция в пространстве $\mathcal{S}'_S$. Тем самым лемма 6.1 для случая $N = 1$ доказана.

Для общего случая лемма доказывается индукцией по N. Предположим, что эта лемма справедлива для рангов $1, \ldots, N-1$. Пусть $a^{(1)}, \ldots, a^{(N-1)}$ — произвольные 4-векторы с ковариантными компонентами $a^{(i)}_{\mu}$. Тогда

$$T^{\mu_N}(\xi) = a^{(1)}_{\mu_1} \ldots a^{(N-1)}_{\mu_{N-1}} T^{\mu_1 \ldots \mu_N}(\xi)$$

— контравариантный вектор, и поэтому его можно представить в форме (6.30). Отсюда следует, что

$$a^{(1)}_{\mu_1} \ldots a^{(N-1)}_{\mu_{N-1}} \frac{T^{\mu_1 \ldots \mu_N}(\xi)}{\xi^{\mu_N}} \quad \text{(суммирования по } \mu_N \text{ нет)}$$

— инвариантная обобщенная функция, не зависящая от μ_N. (Деление обобщенных функций из пространства $\mathcal{S}'_S(\xi)$ на степени ξ не представляет трудности, поскольку основные функции из $\mathcal{S}_S$ обращаются сильно в нуль в точке $\xi = 0$.) Но в этом случае

$$\frac{T^{\mu_1 \ldots \mu_N}(\xi)}{\xi^{\mu_N}} = T^{\mu_1 \ldots \mu_{N-1}}(\xi) \tag{6.32}$$

— контравариантный тензор ранга $(N-1)$ [30], который, учитывая гипотезу индукции, может быть записан в виде

$$T^{\mu_1 \ldots \mu_{N-1}}(\xi) = \xi^{\mu_1} \ldots \xi^{\mu_{N-1}} T(\xi^2). \tag{6.33}$$

Из (6.32) и (6.33) немедленно следует представление (6.15).

Из равенства $T(\xi) = T(\xi^2)$ легко вывести

$$T(\xi) = T(-\xi), \tag{6.34}$$

т. е. всякая обобщенная функция $T(\xi) \in \mathcal{S}'_S(\xi)$, инвариантная относительно преобразований группы $L^{\uparrow}_{+}$, автоматически инвариантна и относительно PT-операции $\xi \to -\xi$ [28, 29]. Имея это в виду, получаем из (6.15)

$$T^{\mu_1 \dots \mu_N}(-\xi) = (-1)^N T^{\mu_1 \dots \mu_N}(\xi). \tag{6.35}$$

Применяя этот результат к выражению (6.13), видим

$$S(-x, -y, -X) = S(x, y, X). \tag{6.36}$$

Оставшуюся часть этой главы мы посвятим доказательству соотношения CPT-инвариантности

$$S(-x, -y, -X) = -S(x, y, X). \tag{6.37}$$

Сравнение (6.36) и (6.37) приведет тогда к желаемому результату

$$S(x, y, X) = 0. \tag{6.38}$$

Доказательство соотношения (6.37) нельзя провести обычным образом, исходя только из свойств c-числовых обобщенных функций r_σ и I_σ. Необходимо проделать порядочный обходный путь через гильбертово пространство $\mathcal{H}$. В награду за этот труд мы получим, помимо соотношения (6.37), общее доказательство CPT-инвариантности развиваемого здесь формализма.

Нам потребуются обобщенные запаздывающие функции g_μ, поэтому следует кратко рассмотреть, каким образом коэффициенты их разложения $g_{\mu,\sigma}$ можно вычислить исходя из функций r_σ. Уравнение полноты (2.68) в теории возмущений имеет вид

$$g_{\mu,\sigma}(X) - g_{\nu,\sigma}(X) = -i \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l!} \sum_{\tau=1}^{\sigma-1} \int \prod_{1}^{l} \{du_i dv_i\} K^l(U-V) \times$$
$$\times g^{+}_{\alpha,\tau}(X_L; U)\, g^{+}_{\beta,\sigma-\tau}(X_R, V). \tag{6.39}$$

Предположим, что во всех порядках $\tau < \sigma$ все функции $g_{\mu,\tau}$ известны. Тогда с помощью (6.39) можно вычислить величину $g_{\mu,\sigma}$, если нам известна величина $g_{\nu,\sigma}$. Начиная с известной функции r_σ, таким путем можно последовательно вычислить все величины $g_{\mu,\sigma}$ [см. соображения, приводящие к формуле (2.63)], которые равны сумме функции r_σ и нескольких членов правой части формулы (6.39). Существование интегралов в (6.39) будет доказано в гл. 7.

Величины $g_{\mu,\,\sigma}$ оказываются вещественными. Тогда с помощью разложения (2.69) мы можем определить о. з. ф.:

$$G_{\mu,\sigma}(X)=g_{\mu,\sigma}(X)+\sum_{l=1}^{\infty}\frac{1}{l!}\int du_1\ldots$$
$$\ldots du_l g^{+}_{\mu,\sigma}(X;U):A^{\mathrm{in}}(u_1)\ldots A^{\mathrm{in}}(u_l):. \tag{6.40}$$

Заметим, что в любом конечном порядке σ отлично от нуля только конечное число величин $g^{+}_{\mu,\,\sigma}$, так что сумма по l фактически содержит только конечное число членов.

В гл. 2 [формула (2.40)] мы ввели пространство $\mathcal{L}^{\mathrm{in}}_{\varepsilon}$ in-состояний конечного числа частиц, волновые функции которых — это функции из пространства H_ε, непрерывные в смысле Гёльдера. В следующей главе мы покажем, что величины $\tilde{g}^{+}_{\mu,\,\sigma}$ удовлетворяют свойству B теоремы 2.1. Отсюда следует, что функция $G_{\mu,\,\sigma}$ определена на пространстве $\mathcal{L}^{in}_{\varepsilon}$ и ее интеграл с основной функцией $\varphi(X)$ отображает пространство $\mathcal{L}^{\mathrm{in}}_{\varepsilon}$ в $\mathcal{L}^{\mathrm{in}}_{\varepsilon'}$ с $\varepsilon'<\varepsilon$.

Из формул (2.44) и (2.50) мы получим следующее представление для коэффициентов разложения поля A в теории возмущений

$$A_\sigma(x)=\sum_{l=1}^{\infty}\int\frac{1}{l!}du_1\ldots du_l\,dy\,\times$$
$$\times\,\Delta_R(x-y)\,r_\sigma(y,U):A^{\mathrm{in}}(u_1)\ldots A^{\mathrm{in}}(u_l):. \tag{6.41}$$

Докажем следующую теорему.

Теорема 6.2.

Справедливы следующие утверждения:

1. $$\sum_{\tau=0}^{\sigma}[A_\tau(x),A_{\sigma-\tau}(y)]=0 \text{ при } (x-y)^2<0, \tag{6.42}$$

$$\sum_{\tau=0}^{\sigma}[G_{\mu,\tau}(X),\ G_{\nu,\sigma-\tau}(y)]=0, \text{ если } (x_i-y_j)^2<0 \text{ для всех } x_i\in X,\ y_j\in Y. \tag{6.43}$$

2. Существуют антилинейные операторы Θ_τ, определенные на пространстве $\mathscr{L}_\varepsilon^{\text{in}}$, отражающие $\mathscr{L}_\varepsilon^{\text{in}}$ в себя и удовлетворяющие условиям

$$\sum_{\tau=0}^{\sigma} \Theta_\tau \Theta_{\sigma-\tau} = \begin{cases} 1 & \text{при } \sigma = 0, \\ 0 & \text{при } \sigma > 0, \end{cases} \tag{6.44}$$

$$\sum_{\tau=0}^{\sigma} (\Theta_\tau \Phi, \Theta_{\sigma-\tau} \Psi) = \begin{cases} (\Phi, \Psi)^* & \text{при } \sigma = 0, \\ 0 & \text{при } \sigma > 0, \end{cases} \quad \Phi, \Psi \in \mathscr{L}_\varepsilon^{\text{in}}, \tag{6.45}$$

$$\sum_{\tau'+\tau''+\tau'''=\sigma} \Theta_{\tau'} G_{\mu, \tau''}(x_1, \ldots, x_n) \Theta_{\tau'''} = \bar{G}_{\mu, \sigma}(-x_1, \ldots, -x_n), \tag{6.46}$$

$$\Theta_\sigma \Omega = \begin{cases} \Omega & \text{при } \sigma = 0, \\ 0 & \text{при } \sigma > 0. \end{cases} \tag{6.47}$$

Определение $\bar{G}_\mu$ можно найти в гл. 2.

Первое утверждение теоремы устанавливает локальность поля $A(x)$ и ампутированных о. з. п. Второе утверждение устанавливает CPT-инвариантность теории. Операторы Θ_τ — это коэффициенты разложения CPT-оператора Θ, введенного в гл. 2. Формулы (6.44), (6.46) и (6.47) являются аналогами в теории возмущений общих формул (2.72), (2.76) и (2.73) соответственно, а формула (6.45) устанавливает антиунитарность оператора Θ.

Докажем эту теорему по индукции относительно номера σ. Очевидно, что она выполняется в нулевом порядке, когда

$$A_0(x) = A^{\text{in}}(x), \tag{6.48}$$

а Θ_0 — CPT-оператор свободного поля $A^{\text{in}}(x)$, причем

$$\Theta_0 A_0(x) \Theta_0 = A_0(-x), \tag{6.49}$$

$$\Theta_0^2 = 1, \tag{6.50}$$

$$\Theta_0 \Omega = \Omega. \tag{6.51}$$

Предположим теперь, что теорема 6.2 справедлива во всех порядках $\tau < \sigma$. Из условий (6.46) и (6.47) получим

$$\bar{g}_{\mu, \tau}(X) = g_{\mu, \tau}(-X). \tag{6.52}$$

Другое следствие предполагаемой справедливости теоремы в низших порядках состоит в том, что

$$A_\tau^{\text{out}}(x) = \sum_{\tau'=0}^{\tau} \Theta_{\tau'} A^{\text{in}}(-x)\,\Theta_{\tau-\tau'} \tag{6.53}$$

представляет собой коэффициенты разложения свободного поля, т. е.

$$\sum_{\tau'=0}^{\tau} [A_{\tau'}^{\text{out}}(x),\ A_{\tau-\tau'}^{\text{out}}(y)] = \begin{cases} i\Delta(x-y) & \text{при } \tau=0 \\ 0 & \text{при } 0<\tau<\sigma. \end{cases} \tag{6.54}$$

Функцию $G_{\mu,\tau}$, $\tau<\sigma$, можно разложить в ряд по полям A^{out}. Будем исходить из разложения (6.40) для функции $\bar{G}_{\mu,\tau}$:

$$\bar{G}_{\mu,\tau}(-X) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!} \int dU \bar{g}_{\mu,\tau}^{+}(-X, U) :\ A^{\text{in}}(u_1) \ldots A^{\text{in}}(u_l):.$$

Отсюда, пользуясь вещественностью функций $\bar{g}_{\mu,\tau}^{+}$, получим

$$\sum_{\tau'+\tau''+\tau'''=\tau} \Theta_{\tau'} \bar{G}_{\mu,\tau''}(-X)\,\Theta_{\tau'''} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!} \sum_{\tau'+\tau''+\tau'''=\tau} \int dU \times$$
$$\times\, \bar{g}_{\mu,\tau'}^{+}(-X, U)\,\Theta_{\tau''} :\ \ldots\ A^{\text{in}}(u_i) \ldots :\Theta_{\tau'''}.$$

Применяя последовательно к преобразованию предыдущей формулы соотношения (6.46), (6.44), (6.53) и (6.52), получаем из нее разложение

$$G_{\mu,\tau}(X) = \sum_{l} \frac{1}{l!} \sum_{\tau'+\tau''=\tau} \int dU \bar{g}_{\mu,\tau'}^{+}(-X; U) \times$$
$$\times \Big(: \prod_{1}^{l} A^{\text{out}}(-u_i) : \Big)_{\tau''} =$$
$$= \sum_{l} \frac{1}{l!} \sum_{\tau'+\tau''=\tau} \int dU g_{\mu,\tau'}^{-}(X; U) \Big(: \prod_{1}^{l} A^{\text{out}}(u_i) :\Big)_{\tau''}. \tag{6.55}$$

Рассмотрим выражение

$$H_{\mu\nu,\sigma}(X, Y) = \sum_{\tau=1}^{\sigma-1} [G_{\mu,\tau}(X),\ G_{\nu,\sigma-\tau}(Y)], \tag{6.56}$$

где $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$, $Y = \{y_1, \ldots, y_m\}$, в точках, где совокупность переменных X полностью пространственноподобна совокупности Y, т. е. все переменные x_i пространственноподобны всем переменным y_j. При $\tau = 0$ члены с индексом σ в этой формуле не появляются, поскольку функция $G_{\nu,0}(Y)$ обращается в нуль при $m \neq 2$ и является c-числом при $m = 2$ в силу формулы (3.5). Пусть функции $G_{\mu'}(X)$, $G_{\mu''}(X)$ принадлежат двум смежным n-ячейкам $C_{\mu'}$, $C_{\mu''}$, так что

$$G_{\mu'}(X) - G_{\mu''}(X) = -i\,[G_\alpha(X_L),\ G_\beta(X_R)],$$

где X_L и X_R — две взаимно дополнительные подсовокупности из совокупности переменных X. С помощью тождеств Якоби можно получить

$$H_{\mu'\nu,\sigma} - H_{\mu''\nu,\sigma} = i \sum_{\tau=1}^{\sigma-1} \sum_{\tau=1}^{\tau-1} \{[[G_{\beta,\tau-\tau'}(X_R),\ G_{\nu,\sigma-\tau}(Y)] \times$$
$$\times G_{\alpha,\tau'}(X_L)] + [[G_{\nu,\sigma-\tau}(Y),\ G_{\alpha,\tau-\tau'}(X_L)],\ G_{\beta,\tau'}(X_R)]\}.$$

Но $\sigma - \tau' < \sigma$, так что внутренние коммутаторы обращаются в нуль по гипотезе индукции. Поэтому

$$H_{\mu'\nu,\sigma}(X, Y) = H_{\mu''\nu,\sigma}(X, Y) \tag{6.57}$$

для совокупности X, которая полностью пространственноподобна совокупности Y. Поскольку любые две n-ячейки $C_{\mu'}$ и $C_{\mu''}$ можно связать друг с другом цепочкой смежных n-ячеек, то можно показать, что функция $H_{\mu\nu,\sigma}(X, Y)$ в этих точках не зависит от частного выбора о. з. п. G_μ. Аналогичное утверждение справедливо и для второго множителя G_ν, так что

$$H_{\mu\nu,\sigma}(X, Y) = \sum_{\tau=1}^{\sigma-1} [R_\tau(X),\ R_{\sigma-\tau}(y)] = \sum_{\tau=1}^{\sigma-1} [\bar{R}_\tau(X),\ \bar{R}_{\sigma-\tau}(Y)]. \tag{6.58}$$

Но функция $R_\tau(x_1, \ldots, x_n)$, $\tau < \sigma$, имеет носитель в области $(x_1 - x_2) \in \bar{V}_+, \ldots, (x_1 - x_n) \in \bar{V}_+$, а функция $\bar{R}_\tau$ имеет носитель в области $(x_1 - x_2) \in \bar{V}_-, \ldots, (x_1 - x_n) \in \bar{V}_-$, так что носитель функции $H_{\mu\nu, \sigma}$ сосредоточен в области $x_1 = \ldots = x_n$ и аналогично в области $y_1 = \ldots = y_m$. Это обобщение полученного ранее результата о носителе функции $I_{L\sigma}$.

Введем величину

$$h_{\mu\nu, \sigma}(X, Y) = \langle 0 \mid H_{\mu\nu, \sigma}(X, Y) \mid 0 \rangle. \qquad (6.59)$$

На время будем считать, что группы переменных X и Y не являются взаимно пространственноподобными, и вычислим величину $h_{\mu\nu, \sigma}(X, Y)$, подставляя в нее разложение (6.40) по in-полям для функций $G_{\mu, \tau}$ и $G_{\nu, \sigma-\tau}$. Согласно теореме Вика, обычные произведения нормальных произведений : . . . : можно представить в виде суммы нормальных произведений. В результате возникают обычные соотношения полноты, подобные тем, что входят в правую часть формулы (6.39). (Отметим, что сами функции $g_{\mu, \sigma}$ построены так, что последнее всегда должно иметь место.) Окончательно получаем

$$h_{\mu\nu, \sigma}(X, Y) = -i \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l!} \sum_{\tau=1}^{\sigma-1} \int dU\, dV K^l (U - V)\, g^+_{\mu, \tau}(X; U) \times \\ \times g^+_{\nu, \sigma-\tau}(Y; V). \qquad (6.60)$$

Если бы мы исходили из разложения (6.55) по out-полям, то получили бы аналогичную формулу

$$h_{\mu\nu, \sigma}(X : Y) = \\ = -i \sum_{l} \frac{1}{l!} \sum_{\tau=1}^{\sigma-1} \int dU\, dV K^l (U - V)\, g^-_{\mu, \tau}(X; U)\, \bar{g}_{\nu, \sigma-\tau}(Y; V).$$

Пользуясь условием (6.52) и антисимметрией величины K^l:

$$K^l (U - V) = -K^l (-U + V),$$

получаем

$$h_{\mu\nu, \sigma}(X, Y) = i \sum_{l} \frac{1}{l!} \sum_{\tau=1}^{\sigma-1} \int dU\, dV \times \\ \times K^l (U - V)\, \bar{g}^+_{\mu, \tau}(-X; U)\, \bar{g}^+_{\nu, \sigma-\tau}(-Y; V),$$

что, согласно соотношению (6.60), есть не что иное, как

$$h_{\mu\nu,\sigma}(X;Y)=$$
$$=-\sum_{\tau=1}^{\sigma-1}\langle 0|[\overline{G}_{\mu,\tau}(-X),\quad \overline{G}_{\nu,\sigma-\tau}(-Y)]|0\rangle. \qquad (6.61)$$

Если же теперь вновь потребовать, чтобы группы переменных X и Y были пространственноподобны, то, пользуясь выражением (6.58), получим соотношение

$$\sum_{\tau}\langle 0|[R_\tau(X),\ R_{\sigma-\tau}(Y)]|0\rangle=$$
$$=-\sum_{\tau}\langle 0|[R_\tau(-X),\ R_{\sigma-\tau}(-Y)]|0\rangle. \qquad (6.62)$$

Будучи представлено в форме (6.60), оно является искомым соотношением (6.37).

Таким образом, мы нашли недостающее звено для построения функции r_σ — доказательство справедливости условия на носитель «а» теоремы 4.2. Поэтому функцию r_σ можно теперь вычислить, как предлагалось, и она будет обладать всеми необходимыми свойствами и, в частности, правильным носителем. В этом случае $G_{\mu,\sigma}$ и A_σ можно сосчитать исходя из разложений (6.40) и (6.41). Функция $R_\sigma(x_1, \ldots, x_n)$, определенная в (6.40), имеет носитель $(x_1-x_i)\in\overline{V}_+$, $i=2, \ldots, n$ и удовлетворяет соотношению

$$R_\sigma(x,y,X)-R_\sigma(y,x,X)=$$
$$=-i\sum_{L,R}\sum_{\tau=1}^{\sigma-1}[R_\tau(x,X_L),\quad R_{\sigma-\tau}(y,X_R)]. \qquad (6.63)$$

Последнее утверждение можно доказать тем же путем, каким была доказана формула (2.46). Здесь, как обычно, X_L и X_R — две взаимно дополнительные подсовокупности из совокупности переменных $X=\{x_1, \ldots, x_n\}$.

Рассмотрим соотношение (6.63) в тех точках, в которых для частного разбиения $X=X_L\cup X_R$ две совокупности переменных $\{x, X_L\}$ и $\{y, X_R\}$ полностью пространственноподобны. В этом случае все члены в правой части формулы (6.63) обращаются в нуль, за исключением, быть может, члена, отвечающего этому частному разбиению [выражение (6.58)]. Но левая часть (6.63) обращается в нуль в силу свойств носителя функции R_σ, так что и этот критический член также обращается в нуль. Отсюда следует, что соотношение (6.43) доказано для частного случая $G_\mu = R$, $G_\nu = R$, а в силу (6.58) оно справедливо и для общего случая.

Как уже отмечалось при обсуждении формул (2.50), «деампутация» функции r (а также функции R) не меняет носителя. Поэтому из свойств носителя $R_\sigma(x, y)$ и тождества

$$[A(x), A(y)]_\sigma = R_\sigma^{\text{deamp}}(x, y) - R_\sigma^{\text{deamp}}(y, x) \tag{6.64}$$

следует соотношение (6.42).

Обратимся теперь к CPT-части теоремы 6.2. Представление вида (2.64) можно, в частности, получить и для функции $\bar{R}(x, y, x_1, \ldots, x_n)$. После некоторых простых преобразований оно принимает вид

$$\bar{R}(x, y, X) = R(y, x, X) + \sum\nolimits_i^{l-1} c_{\alpha_1 \ldots \alpha_l} \times$$
$$\times [\ldots[R(y, x, X_{\alpha_1}), R(X_{\alpha_2})], \ldots, R(X_{\alpha_l})]. \tag{6.65}$$

Так же как и все аналогичные алгебраические соотношения, (6.65) справедливо в порядке σ теории возмущений. Из известных свойств носителя функции R_τ следует, что $\bar{R}_\sigma$ обращается в нуль вне области $(x - y) \in \bar{V}_-$. Вследствие симметрии $\bar{R}_\sigma(x, x_1, \ldots, x_n)$ относительно переменных $x_1, \ldots, x_n$ (которая опять-таки следует из справедливости тех же алгебраических соотношений) носитель функции $\bar{R}_\sigma(x, X)$ и тем самым носитель функции $\bar{r}_\sigma(x, X)$ принадлежит области $(x - x_i) \in \bar{V}_-$ для всех i.

Частный случай формулы (2.62) дает

$$\bar{R}_\sigma(X) = R_\sigma(X) + i \sum_{\alpha, \beta} c_{\alpha\beta} \sum_{\tau=1}^{\sigma-1} [G_{\alpha, \tau}(X_\alpha), G_{\beta, \sigma-\tau}(X_\beta)] =$$
$$= R_\sigma(X) + i \sum_{\alpha, \beta} c_{\alpha\beta} \sum_{\tau=1}^{\sigma-1} [G_{\alpha, \tau}(X_\alpha), G_{\beta, \sigma-\tau}(X_\beta)] \tag{6.66}$$

с вещественными коэффициентами $c_{\alpha\beta}$. Образуя вакуумные средние и пользуясь известными свойствами операторов

Θ_τ, $\tau < \sigma$ [формулы (6.44) — (6.47)], получаем

$$\bar{r}_\sigma(-X) = r_\sigma(-X) + i\sum_{\alpha,\beta} c_{\alpha\beta}\sum_\tau \langle 0 | [G_{\alpha\tau}(-X_\alpha),\ G_{\beta,\sigma-\tau}(-X_\beta)] | 0\rangle = r_\sigma(-X) - i\sum_{\alpha,\beta} c_{\alpha\beta}\times$$
$$\times\sum_\tau \langle 0 | [\bar{G}_{\alpha\tau}(X_\alpha),\ \bar{G}_{\beta,\sigma-\tau}(X_\beta)] | 0\rangle =$$
$$= r_\sigma(-X) + r_\sigma(X) - \bar{r}_\sigma(X),$$

откуда

$$M(X) = r_\sigma(X) - \bar{r}_\sigma(-X) = -r_\sigma(-X) + \bar{r}_\sigma(X) =$$
$$= -M(-X). \qquad (6.67)$$

Функция $M(X)$ имеет носитель в области $(x_1 - x_i) \in \bar{V}_+$, $i = 2, \ldots, n$, так что условие (6.67) ограничивает носитель M точками $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$. Кроме того, функция M инвариантна относительно преобразований из группы Пуанкаре, так что

$$M(X) = D\prod_{i=2}^{n}\delta^4(x_1 - x_i),$$

где D — инвариантный дифференциальный оператор. Но это означает, что $M(X) = M(-X)$. Последнее равенство противоречит условию (6.67), за исключением случая, когда $M(X)$ равно нулю. Поэтому

$$r_\sigma(X) = \bar{r}_\sigma(-X). \qquad (6.68)$$

Из равенства (6.68), выражения (2.63) в теории возмущений

$$G_{\mu\sigma}(X) = R_\sigma(X) - i\sum_{\alpha,\beta} c^\mu_{\alpha\beta}[G_\alpha(X_\alpha),\ G_\beta(X_\beta)]_\sigma \qquad (6.69)$$

и того же выражения после действия CPT-оператора

$$\bar{G}_{\mu\sigma}(X) = \bar{R}_\sigma(X) + i\sum_{\alpha,\beta} c^\mu_{\alpha\beta}[\bar{G}_\alpha(X_\alpha),\ \bar{G}_\beta(X_\beta)]_\sigma \qquad (6.70)$$

получаем с помощью (6.61) более общее соотношение

$$g_{\mu,\sigma}(X) = \bar{g}_{\mu,\sigma}(-X),$$

т. е. условие (6.52) в порядке σ.

Наконец, докажем существование оператора Θ_σ. Определим действие оператора Θ_σ на вектор Ω согласно (6.47):

$$\Theta_\sigma \Omega = 0. \tag{6.71}$$

В более общем случае мы определим

$$\begin{aligned}\Theta_\sigma A_0(x_1) \ldots A_0(x_n)\Omega = \\ &= \sum_{\sum\sigma_i=\sigma} A_{\tau_1}(-x_1) \ldots A_{\tau_n}(-x_n)\Omega - \\ &- \sum_{\tau=1} \sum_{\sum\tau_i=\tau} \Theta_{\sigma-\tau} A_{\tau_1}(x_1) \ldots A_{\tau_n}(x_n)\Omega. \end{aligned}\tag{6.72}$$

Это определение построено так, что

$$\begin{aligned}[\Xi A(x_1) \ldots A(x_n)\Theta]_\sigma \Omega = \\ &= [A(-x_1) \ldots A(-x_n)]_\sigma \Omega. \end{aligned}\tag{6.73}$$

Введем обозначение

$$A_\tau(X) = \sum_{\sum\tau_i=\tau} A_{\tau_1}(x_1) \ldots A_{\tau_n}(x_n) \tag{6.74}$$

и вычислим с помощью (6.50) и гипотезы индукции $\sum_{\tau'=0}^{\tau} \Theta_{\tau'}\Theta_{\tau-\tau'} = 0$ выражение для $0 < \tau < \sigma$

$$\begin{aligned}\sum_{\tau=0}^{\sigma} \Theta_{\sigma-\tau}\Theta_\tau A_0(X)\Omega = \sum_{\tau=1}^{\sigma} \Theta_{\sigma-\tau} A_\tau(-X)\Omega - \\ - \sum_{\tau=1}^{\sigma}\sum_{\tau'=1}^{\tau} \Theta_{\sigma-\tau}\Theta_{\tau-\tau'} A_{\tau'}(X)\Omega = A_\sigma(X)\Omega - \\ - \sum_{\tau'>0} \sum_{\tau_1+\tau_2=\sigma-\tau'} \Omega_{\tau_1}\Theta_{\tau_2} A_{\tau'}(X)\Omega = A_\sigma(X)\Omega - A_\sigma(X)\Omega = 0;\end{aligned}$$

тем самым доказано (6.44) в порядке σ.

Пусть $B_\tau(Y)$ имеет вид (6.74)

$$B_\tau(Y) = \sum_{\sum\tau_i=\tau} A_{\tau_1}(y_1) \ldots A_{\tau_m}(y_m). \tag{6.75}$$

Как нам уже известно, условие локальной коммутативности в порядке σ выполняется. Поэтому функции Вайтмана

$$W_\sigma(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n) = \sum_{\tau=0}^{\sigma} \langle 0 | A_\tau(X) B_{\sigma-\tau}(Y) | 0 \rangle \quad (6.76)$$

локальны. Кроме того, они лоренц-инвариантны и обладают должными спектральными свойствами. Поэтому справедлива CPT-теорема Йоста [13, 14]

$$W_\sigma(X, Y) = W_\sigma(-\overleftarrow{Y}, -\overleftarrow{X}). \quad (6.77)$$

(Совокупности $\overleftarrow{X}$, $\overleftarrow{Y}$ содержат переменные совокупностей X, Y в обратном порядке.) Из формул (6.77) и (6.73) следует

$$(A(X)\Omega, B(Y)\Omega)_\sigma = (B(-\overleftarrow{Y})\Omega, A(-\overleftarrow{X})\Omega)_\sigma =$$

$$= (\Theta B(\overleftarrow{Y})\Omega, \Theta A(\overleftarrow{X})\Omega)_\sigma = \sum_{\sum \tau_i = \sigma} (\Theta_{\tau_1} B_{\tau_2}(\overleftarrow{Y})\Omega, \Theta_{\tau_3} A_{\tau_4}(\overleftarrow{X})\Omega).$$

Для $\tau_2 + \tau_4 \neq 0$ с помощью предположения (6.45) здесь можно просуммировать по τ_1 и τ_3 и получить

$$\sum_\tau (\Theta_\tau B_0(\overleftarrow{Y})\Omega, \Theta_{\sigma-\tau} A_0(\overleftarrow{X})\Omega) + \sum_\tau (A_\tau(X)\Omega, B_{\sigma-\tau}(Y)\Omega) =$$

$$= \sum_\tau (A_\tau(X)\Omega, B_{\sigma-\tau}(Y)\Omega),$$

или

$$\sum_\tau (\Theta_\tau B_0(\overleftarrow{Y})\Omega, \Theta_{\sigma-\tau} A_0(\overleftarrow{X})\Omega) = 0;$$

Тем самым доказано (6.45) в порядке σ.

Полученных результатов достаточно для доказательства соотношений (6.54) и (6.55) в порядке σ. Поэтому, пользуясь формулой (6.52) (справедливость ее в порядке σ уже доказана, имеем

$$[\Theta G_\mu(X)\Theta]_\sigma = \sum_l \frac{1}{l!} \sum_{\tau'+\tau''+\tau'''=\sigma} \int dU g^+_{\mu,\tau'}(X;\ U)\,\Theta_{\tau''} \times$$

$$\times :\prod_{i=1}^{l} A^{\mathrm{in}}(u_i) : \Theta_{\tau'''} = \sum_l \frac{1}{l!} \sum_{\tau'+\tau''=\sigma} \int dU g^+_{\mu,\tau'}(X;\ -U) \times$$

$$\times \left[: \prod_1^l A^{\mathrm{out}}(u_i) : \right]_{\tau''} =$$

$$= \sum_l \frac{1}{l!} \sum_{\tau'+\tau''=\sigma} \int dU \overline{g^-_{\mu,\tau'}}(-X;\ U) \left[: \prod_1^l A^{\mathrm{out}}(u_i) : \right]_{\tau''} =$$

$$= \overline{G_{\mu,\sigma}}(-X);$$

тем самым доказано (6.46) в порядке σ. Таким образом, доказательство теоремы 6.2 завершено.

Глава 7

СУЩЕСТВОВАНИЕ РЕШЕНИЙ

Нам предстоит рассмотреть еще одну проблему, решение которой мы долго откладывали,— проблему существования функции I_σ. Для этого необходимо доказать, что решения r_σ, построенные в предыдущих главах, удовлетворяют условию В теоремы 2.1. Но мы докажем даже более сильное утверждение.

Вернемся к определению пространства H_ε, данному в гл. 2, и слегка его обобщим. Пусть функции $f(u_1, \ldots, u_n, v_1, \ldots, v_m)$ непрерывны в смысле Гёльдера с индексом ε по всем переменным. Будем говорить, что функции f сильно убывают по переменным из совокупности U и медленно возрастают по переменным из совокупности V, если для всех неотрицательных целых чисел N существует величина

$$S_N(f \mid V) = \operatorname*{Sup}_{\substack{U \\ |A| \leqslant A_0}} \left\{ (1+|U|^2)^N \left[|f(u_1, \ldots, v_m)| + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \frac{\begin{array}{c}|f(u_1+a_1, \ldots, u_n+a_n, v_1+a_{n+1}, \ldots, v_m+a_{n+m}) - \\ - f(u_1, \ldots, v_m)|\end{array}}{|A|^\varepsilon} \right] \right\} \quad (7.1)$$

и она полиномиально ограничена по переменным из совокупности V. Здесь A_0 — произвольная, но фиксированная положительная постоянная. Напомним, что $|A|^2 = \sum |a_i|^2$. Пространство функций, удовлетворяющих этому условию, будем обозначать $H_\varepsilon(U; V)$. При $V = \emptyset$ это просто исходное пространство $H_\varepsilon(U)$.

Главный результат этой главы можно сформулировать следующим образом.

Теорема 7.1.

Функции $\tilde{g}_{\mu, \sigma}$, построенные в гл. 3—6, существуют как обобщенные функции умеренного роста. Кроме того, если

$$f(k_1, \ldots, k_\alpha, p_1, \ldots, p_\beta, q_1, \ldots, q_\gamma, u_1, \ldots, u_\delta, v_1, \ldots \\ \ldots, v_\zeta) \in H_\varepsilon(K, \mathbf{P}, U; P^-, Q, V), \quad \varepsilon \leqslant \frac{1}{2},$$

то функция

$$\bar{f}(P^-, Q, U, V) = \prod_{i=1}^{\gamma} \chi(-q_i) \int dK\, d\mathbf{P} \prod_{i=1}^{\beta} \chi(p_i) \times \\ \times \tilde{g}_{\mu,\sigma}(K, P, Q) f(K, P, Q, U, V) \quad (7.2)$$

существует и принадлежит пространству $H_{\varepsilon'}(P^-, Q, U; V)$ для любых $\varepsilon' < \varepsilon$. Случай $\alpha = 0$, $\beta + \gamma = 2$ из рассмотрения исключается.

Определение функции χ дано в гл. 2 [формулы (2.41) и (2.42)]. Зависимость от переменных p_i во всех множителях подынтегральной части формулы (7.2) следует понимать в смысле зависимости от $\mathbf{p}_i$ и $p_i^- = p_{i0} - \omega(\mathbf{p}_i)$, а не как зависимость от $\mathbf{p}_i$ и p_{i0}. Другими словами, интегрирование по $\mathbf{p}_i$ следует фактически выполнять по p_i^-, оставляя аргументы p_{i0} постоянными. Величина P^- в (7.2) обозначает совокупность переменных $(p_1^-, \ldots, p_\beta^-)$. Порядок перечисления различных аргументов в функции $\tilde{g}_{\mu,\sigma}$ не существен, в частности переменные k_i необязательно писать впереди и т. п. Теорема справедлива и в том случае, когда совокупности переменных P и Q поменяются ролями, так что интегрирование производится по переменным, лежащим вблизи отрицательной массовой поверхности.

Мы докажем теорему методом индукции по σ. В качестве первого шага такого доказательства установим основание индукции: докажем теорему *в первом порядке*.

Все функции $g_{\mu,1}(x_1, \ldots, x_n)$ с одним и тем же числом аргументов n одинаковы и определяются формулой (4.6). В теории типа (μ, ν) отличны от нуля только μ-точечные функции, которые в p-пространстве имеют вид

$$\tilde{g}_{\mu 1}(p_1, \ldots, p_\mu) = \delta^4(p_1 + \ldots + p_\mu)\, \mathcal{P}(p_1, \ldots, p_\mu), \quad (7.3)$$

где $\mathcal{P}$ — полностью симметричная инвариантная форма степени ν. Нужно доказать, что эта обобщенная функция обладает свойством, сформулированным в теореме 7.1.

Будем различать два случая.

Первый случай: $\alpha > 0$. Четырехмерная δ-функция в формуле (7.2) позволяет провести интегрирование по переменной k_1. В результате получаем

$$\bar{f}(P^-, Q, U, V) = \int d\hat{K}\, d\mathbf{P} f_0(\hat{K}, P, Q, U, V), \tag{7.4}$$

где $\hat{K} = \{k_2, \ldots, k_\alpha\}$ и

$$f_0(\hat{K}, P, Q, U, V) = \prod_Q \chi(-q_i) \prod_P \chi(p_j)\, \mathcal{F}(K, P, Q) \times$$
$$\times f(K, P, Q, U, V)\Big|_{k_1 = -\sum\limits_2^\alpha k_i - \sum\limits_1^\beta p_j - \sum\limits_1^\gamma q_h}. \tag{7.5}$$

Из свойств носителя функции χ следует, что $f_0 \in H_\varepsilon(\hat{K}, P^-, \mathbf{P}, Q, U; V)$. Поэтому функция $\bar{f}$ существует, всюду непрерывна и при фиксированных переменных из совокупности V быстро убывает по всем остальным переменным. Определим величину

$$h^2 = \sum_j |\Delta p_j|^2 + \sum_j |\Delta q_j|^2 + \sum_j |\Delta u_j|^2 + \sum_j |\Delta v_j|^2$$

и произведем оценку

$$|\bar{f}(P^- + \Delta P^-, Q + \Delta Q, U + \Delta U, V + \Delta V) - \bar{f}(P^-, Q, U, V)| \leqslant$$
$$\leqslant \int d\hat{K}\, d\mathbf{P}\, | f_0(\hat{K}, \mathbf{P}, P^- + \Delta P^-, Q + \Delta Q, U + \Delta U, V + \Delta V) -$$
$$- f_0(\hat{K}, \ldots, V)| \leqslant h^\varepsilon S_{N+M}(f_0 | V)(1 + |P^-|^2 + |Q|^2 + |U|^2)^{-N} \times$$
$$\times \int d\hat{K}\, d\mathbf{P}(1 + |\hat{K}|^2 + |\mathbf{P}|^2)^{-M}.$$

Последний интеграл существует для достаточно больших M. Отсюда следует, что $\bar{f} \in H_\varepsilon(P^-, Q, U; V)$, что и требовалось доказать.

Второй случай: $\alpha = 0$. В этом случае теорема 7.1 не содержит никаких утверждений относительно двухточечной функции. Трехточечная функция обращается в нуль в силу свойств (2.41) носителя функции χ. Это относится также ко всем многоточечным функциям, за исключением функций, для которых $\beta \geqslant 2$ и $\gamma \geqslant 2$. Тогда формулу (7.2) можно переписать в виде

$$\bar{f}(P^-, Q, U, V) = \int d\mathbf{p}_1 d\mathbf{p}_2 d\hat{\mathbf{P}} f_0(\mathbf{P}, P^-, Q, U, V) \times$$
$$\times \delta^3\left(\sum_1^\beta \mathbf{p}_i + \sum_1^\gamma \mathbf{q}_i\right) \delta\left(\sum_1^\beta p_i^- + \sum_1^\beta \omega(\mathbf{p}_i) + \sum_1^\gamma q_{i0}\right) =$$
$$= \int d\mathbf{p}_2 d\hat{\mathbf{P}} f_0(\mathbf{P}, P^-, Q, U, V)\, \delta(\Omega + \omega(\mathbf{p}_1) + \omega(\mathbf{p}_2)), \quad (7.6)$$

где $\hat{P} = \{p_3, \ldots, p_\beta\}$,

$$f_0(\mathbf{P}, \ldots, V) = \prod_1^\gamma \chi(-q_i) \prod_1^\beta \chi(p_i)\, \mathcal{P}(\mathbf{P}, P^-, Q) \times$$
$$\times f(\mathbf{P}, P^-, Q, U, V), \quad (7.7)$$

$$\mathbf{p}_1 = -\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}, \quad \mathbf{p} = \sum_3^\beta \mathbf{p}_i + \sum_1^\gamma \mathbf{q}_i, \quad (7.8)$$

$$\Omega = \sum_1^\beta p_i^- + \sum_3^\beta \omega(\mathbf{p}_i) + \sum_1^\gamma q_{i0}. \quad (7.9)$$

Интегрирование по $\mathbf{p}_2$ легко выполняется в частном случае $\mathbf{p} = 0$, когда $\omega(\mathbf{p}_1) = \omega(\mathbf{p}_2)$. Интегрирование функции f_0 по углам вектора $\mathbf{p}_2$ приводит к функции $F(\omega_2, \hat{\mathbf{P}}, P^-, Q, U, V)$, принадлежащей пространству H_ε. Интеграл по $|\mathbf{p}_2|$ можно преобразовать в $\int\limits_{\omega_2 \geqslant m} \omega_2 \sqrt{\omega_2^2 - m^2}\, d\omega_2$ и взять последний с помощью оставшейся δ-функции. В результате получим

$$-\frac{\Omega}{4}\, \Theta(\Omega^2 - 4m^2) \sqrt{\Omega^2 - 4m^2}\, F\left(-\frac{\Omega}{2}, \hat{\mathbf{P}}, P^-, Q, U, V\right). \quad (7.10)$$

В предположении $\varepsilon \leqslant 1/2$ эта функция принадлежит пространству $H_\varepsilon(\hat{\mathbf{P}}, P^-, Q, U; V)$, поскольку произведение двух функций, непрерывных в смысле Гёльдера с индексом ε, есть опять функция, непрерывная по Гёльдеру, с тем же индексом.

Такое поведение сохраняется при произвольных $\mathbf{p}$. В этом случае при $\mathbf{p}_2 = -\mathbf{p}/2$ сумма $\omega(\mathbf{p}_1) + \omega(\mathbf{p}_2)$ стационарна. Для переменной Ω, не соответствующей этому критическому значению, интегрирование по $\mathbf{p}_2$ не приводит к каким-либо новым сингулярностям, кроме тех, которые уже имеются в функции f. Если же Ω находится в окрестности критической точки $\overline{\Omega}(\mathbf{p}) = -2\omega(\mathbf{p}/2)$, то эту сумму можно представить в виде

$$\omega(\mathbf{p}_1)+\omega(\mathbf{p}_2) = -\overline{\Omega}(\mathbf{p})+A_2\left(\mathbf{p},\ \mathbf{p}_2+\frac{\mathbf{p}}{2}\right)+$$
$$+\text{члены высших порядков по}\left(\mathbf{p}_2+\frac{\mathbf{p}}{2}\right), \qquad (7.11)$$

где

$$A_2(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = 2(\mathbf{p}^2+4m^2)^{-3/2}\{(\mathbf{p}^2+4m^2)q^2-(\mathbf{p}, \mathbf{q})^2\}. \qquad (7.12)$$

Здесь A_2 при фиксированном $\mathbf{p}$ представляет собой положительно определенную квадратичную форму относительно $\mathbf{q} = \mathbf{p}_2 + \mathbf{p}/2$. Чтобы произвести интегрирование по $\mathbf{p}_2$, фиксируем систему координат так, чтобы вектор $\mathbf{p}$ был направлен по оси z. После замены переменных

$$\begin{aligned} q_1 &= t_1(\mathbf{p}^2+4m^2)^{1/4},\\ q_2 &= t_2(\mathbf{p}^2+4m^2)^{1/4},\\ q_3 &= t_3\frac{(\mathbf{p}^2+4m^2)^{3/4}}{2m} \end{aligned} \qquad (7.13)$$

получаем для интеграла по $\mathbf{p}_2$ в (7.6) выражение

$$\frac{(\mathbf{p}^2+4m^2)^{5/4}}{2m}\int d^3t\,\delta(\Omega-\overline{\Omega}+2t^2+$$
$$+\text{члены высших порядков по } t)\, f'(t, \hat{\mathbf{P}}, P^-, Q, U, V), \qquad (7.14)$$

где $f' \in H_\varepsilon(\ldots; V)$. Старшие члены разложения в аргументе δ-функции не оказывают влияния на природу сингулярности в точке $\Omega = \overline{\Omega}$ и их можно опустить [1]). Интегрирование здесь также выполняется сначала по углам вектора $\mathbf{t}$, а затем по $|\mathbf{t}|$. В результате получаем

$$\Theta\left(\overline{\Omega}-\Omega,\ \sqrt{\overline{\Omega}-\Omega}\,\frac{(\mathbf{p}^2+4m^2)^{5/4}}{2m}F(\Omega, \hat{\mathbf{P}}, P^-, Q, U, V), \qquad (7.15)\right.$$

[1]) Более подробное обсуждение этого вопроса можно найти в работе [31].

где F — интеграл по углам от функции f', который, следовательно, также принадлежит пространству $H_\varepsilon(\ldots; V)$[1]. При $\mathbf{p}=0$ мы получим формулу (7.10). [Конечно, функции F в формулах (7.10) и (7.15) разные.] Случай $\mathbf{p}=0$ мы рассмотрели отдельно не потому, что это было необходимо, а просто в качестве примера, на котором может быть явно продемонстрирована существенная роль сингулярности в точке $\Omega=\overline{\Omega}$.

Оставшиеся в формуле (7.6) интегралы по $\hat{\mathbf{P}}$ не нарушают принадлежности подынтегрального выражения пространству H_ε, как это нетрудно показать, используя оценки того же типа, что и в первом случае.

Перейдем теперь к *высшим порядкам* $\sigma>1$. Предположим, что теорема справедлива во всех порядках $\tau<\sigma$, и докажем ее справедливость в порядке σ.

Прежде всего докажем существование интегралов

$$J(K, P, Q)=\int dW \prod_{1}^{l} \delta_+(w_i)\, \tilde{g}^+_{\mu\tau}(K_L, P_L, Q_L; -W)\times$$
$$\times \tilde{g}^+_{\nu,\,\sigma-\tau}(K_R, P_R, Q_R; W) \quad (7.16)$$

при $1\leqslant\tau\leqslant\sigma-1$ и покажем, что все они обладают свойствами, сформулированными в теореме 7.1 для функций $\tilde{g}_{\mu,\,\sigma}$. Как обычно, $K_L\cup K_R=K$, $K_L\cap K_R=\emptyset$ и т. д. Определим функцию $f(K, \ldots, V)$ так же, как в теореме 7.1. Рассмотрим

$$J_1(K_R, \mathbf{P}_R, P^-, Q, U, V, W)=\prod_{Q_L}\chi(-q_i)\prod_{1}^{l}\chi(w_i)\times$$
$$\times\int dK_L\, d\mathbf{P}_L \prod_{P_L}\chi(p_i)\,\tilde{g}^+_{\mu,\,\tau}(K_L, P_L, Q_L; -W)\times$$
$$\times f(K, \mathbf{P}, P^-, Q, U, V). \quad (7.17)$$

По гипотезе индукции функция J_1 существует и принадле-

[1]) Случай $\mathbf{p}\neq0$ можно также свести к более простому случаю $\mathbf{p}=0$, используя соображения инвариантности [21].

жит пространству $H_{\varepsilon''}(K_R, P_R, P^-, Q_L, U, W; Q_R, V)$, $\varepsilon'' < \varepsilon$. Далее образуем функцию

$$J_2(W^-, P^-, Q, U, V) = \prod_{Q_R} \chi(-q_i) \int dK_R d\mathbf{P}_R \prod_{P_R} \chi(p_i)\, d\mathbf{W} \times$$

$$\times \prod_1^l \frac{\chi(\mathbf{w}_i)}{2\omega(\mathbf{w}_i)} \tilde{g}^+_{\mu,\,\sigma-\tau}(K_R, P_R, Q_R; W) \times$$

$$\times J_1(K_R, \mathbf{P}_R, W, P^-, Q, U, V). \qquad (7.18)$$

Множитель $\prod[2\omega(\mathbf{w}_i)]^{-1}$ можно отнести к функции J_1, не изменив ее свойств. Тогда по гипотезе индукции получаем, что функция J_2 принадлежит пространству $H_{\varepsilon'}(W^-, P^-, Q, U; V)$, $\varepsilon' < \varepsilon''$. Это, в частности, означает, что существует сужение функции J_2 на энергетическую поверхность $w_i^- = 0$ и оно принадлежит $H_{\varepsilon'}(P^-, Q, U; V)$. Иначе говоря, существует функция

$$J_3(P^-, Q, U, V) = \int dW^- \prod_1^l \delta(\mathbf{w}_i^-) J_2(W^-, P^-, Q, U, V) =$$

$$= \int dK\, d\mathbf{P} J(K, P, Q) f(K, P, Q, U, V), \qquad (7.19)$$

принадлежащая $H_{\varepsilon'}(P^-, Q, U; V)$. Отметим, что указанное свойство функции J означает, что она — обобщенная функция умеренного роста.

Итак, мы доказали, что правые части уравнений полноты (3.9) и (6.39) существуют как обобщенные функции умеренного роста, так что построение функций r_σ и $g_{\mu,\,\sigma}$, произведенное в гл. 3—6, имеет смысл: r_σ и $g_{\mu,\,\sigma}$ существуют как обобщенные функции умеренного роста. Нам предстоит еще доказать, что они удовлетворяют теореме 7.1. Поскольку функция $\tilde{g}_{\mu,\,\sigma}(P)$ равна функции $\tilde{r}_\sigma(P)$ плюс сумма членов вида (7.16), для этого достаточно доказать, что теореме 7.1 удовлетворяет функция $\tilde{r}_\sigma$.

Начнем доказательство с рассмотрения выражения (4.58) для функции r_σ, несколько приспособив его к нашим нынешним целям. Определим функцию

$$\zeta_{i\varkappa\omega}(x_1, \ldots, x_n) = \zeta_{i\varkappa}(x_1^0, \omega\mathbf{x}_1, \ldots, x_n^0, \omega\mathbf{x}_n), \qquad (7.20)$$

где $0 < \omega \leqslant 1$. Повторяя рассуждения гл. 4, нетрудно убедиться в том, что можно произвести замену переменных $\mathbf{x}_i \to \omega \mathbf{x}_i$ во всех вспомогательных функциях ϑ, f_i, $\rho_\varkappa$ без нарушения каких-либо их существенных свойств. Это означает, что выражение (4.58) остается справедливым и тогда, когда функция $\zeta_{i\varkappa}$ заменена на функцию $\zeta_{i\varkappa\omega}$. В этом случае коэффициенты $R^D_{\sigma\varkappa}$ будут зависеть также, конечно, от ω, т. е. $R^D_{\sigma\varkappa} \to R^D_{\sigma\varkappa\omega}$. В пределе $\omega \to 0$ функция $\varepsilon_{i\varkappa\omega}$ превращается в функцию

$$\eta_{i\varkappa}(x_1^0, \ldots, x_n^0) = \zeta_{i\varkappa}(x_1^0, \mathbf{0}, \ldots, x_n^0, \mathbf{0}), \tag{7.21}$$

которая зависит только от временны́х компонент x_i. Функция $\eta_{i\varkappa}$ принадлежит пространству $\mathcal{O}_M$ (т. е. относится к классу C^∞ и полиномиально ограничена), так что произведение $\eta_{i\varkappa} I_{i\sigma}$ существует. Поскольку предел $\omega \to 0$ первого члена в правой части формулы (4.58) существует, а левая часть этой формулы вообще не зависит от ω, то предел $\overline{R}^D_{\sigma\varkappa} = \lim\limits_{\omega \to 0} R^D_{\sigma\varkappa\omega}$ также существует. В итоге получаем

$$r_\sigma(x_1, \ldots, x_n) = \lim_{\varkappa \to \infty} \Big\{ \sum_{i=2}^{n} \eta_{i\varkappa}(x_1^0, \ldots, x_n^0) I_{i\sigma}(x_1, \ldots, x_n) - \\ - \sum_{|D| \leqslant N} \overline{R}^D_{\sigma\varkappa} D \prod_2 \delta^4(x_1 - x_i) \Big\}, \tag{7.22}$$

или в p-пространстве

$$\widetilde{r}_\sigma(p_1, \ldots, p_n) = \lim_{\varkappa \to \infty} \Big\{ \sum_{i=2}^{n} \widetilde{r}_{i\sigma\varkappa}(P) - \delta^4\Big(\sum_1^n p_i\Big) \sum_D \overline{R}^D_{\sigma\varkappa} \mathcal{P}_D(P) \Big\}, \tag{7.23}$$

где $\mathcal{P}_D$ — форма степени $|D|$ и

$$\widetilde{r}_{i\sigma\varkappa}(p_1, \ldots, p_n) = \int dq_{10} \ldots dq_{n0} \times \\ \times \widetilde{I}_{i\sigma}(p_{10} - q_{10}, \mathbf{p}_1, \ldots, p_{n0} - q_{n0}, \mathbf{p}_n) \widetilde{\eta}_{i\varkappa}(q_{10}, \ldots, q_{n0}), \tag{7.24}$$

$$\widetilde{\eta}_{i\varkappa}(Q_0) = \int dX^0 \exp\Big[i \sum_1^n x_j^0 q_{j0}\Big] \eta_{i\varkappa}(X^0).$$

Функцию $\eta_{i\varkappa}$ можно записать как функцию только разностей переменных $\xi_i = x_1 - x_i$, $i = 2, \ldots, n$:

$$\eta_{i\varkappa}(x_1^0, \ldots, x_n^0) = \eta'_{i\varkappa}(\xi_2^0, \ldots, \xi_n^0). \tag{7.25}$$

В силу свойств носителя функции $|1 - \rho_\varkappa|$ [см. (4.53)] существует компактная окрестность точки $\xi_2 = \ldots = \xi_n = 0$, вне которой $\eta'_{i\varkappa}$ не зависит от $\varkappa$. Учитывая носитель функции $I_{i\sigma}$, мы можем отсюда заключить, что для произвольного фиксированного конечного значения $\varkappa$ разность

$$\Delta(\xi_2, \ldots, \xi_n) = \Delta(x_1, \ldots, x_n) = r_\sigma(X) - \sum_i r_{i\sigma\varkappa}(X) \tag{7.26}$$

имеет компактный носитель в переменных ξ_i. В этом случае функцию $\Delta(\Xi)$ можно представить в виде (см. [19], теорема 26)

$$\Delta(\Xi) = \sum_D DF_D(\Xi), \tag{7.27}$$

где D — совокупность конечного числа дифференциальных операторов, а F_D — непрерывные функции с компактным носителем. Поэтому фурье-образ $\Delta(X)$ имеет вид

$$\widetilde{\Delta}(p_1, \ldots, p_n) = \delta^4\left(\sum_1^n p_i\right) G(p_2, \ldots, p_n), \tag{7.28}$$

где G — целая функция, полиномиально ограниченная для вещественных значений аргументов p_i. Таким образом, функция $\widetilde{\Delta}$ в сущности совпадает с выражением (7.3). Доказательство, аналогичное доказательству, приведенному в связи с (7.3), показывает, что функция $\widetilde{\Delta}$ удовлетворяет теореме 7.1. Следовательно, теорема 7.1 справедлива для функции $\widetilde{r}_\sigma$, если она справедлива для функции $\widetilde{r}_{i\sigma\varkappa}$. Заметим, что по той же самой причине λ-предел, введенный в формуле (5.35), не разрушает наше доказательство, поскольку он влияет только на члены с компактным носителем по переменным Ξ.

Для обсуждения свойств функции $\widetilde{r}_{i\sigma\varkappa}$ необходимо иметь некоторую информацию о сингулярностях функции $\widetilde{\eta}'_{i\varkappa}$. Определим функцию

$$\eta'_i(\xi_2^0, \ldots, \xi_n^0) = \eta_i(x_1^0, \ldots, x_n^0) = \zeta_i(x_1^0, 0, \ldots, x_n^0, 0). \tag{7.29}$$

Разность $\eta'_i(\Xi^0) - \eta'_{i\varkappa}(\Xi^0)$ обладает компактным носителем. Исходя из этого и из масштабной инвариантности функции η'_i, получаем

$$D\eta'_{i\varkappa}(\Xi^0) = \mathcal{O}(|\Xi|^{-[|D|}), \qquad (7.30)$$

где $(\Xi^0)^2 = \sum_{i=1}^{n} (\xi_i^0)^2 \to \infty$, D — дифференциальный оператор порядка $|D|$. Следовательно, функция $D\eta'_{i\varkappa}$ является интегрируемой, если $|D| > (n-1)$. Это значит, что функция

$$\tilde{t}_N(Q_0)\tilde{\eta}'_{i\varkappa}(Q_0),$$

где $\hat{Q}_0 = \{q_{20}, \ldots, q_{n0}\}$, равномерно ограничена и $(N-n)$-кратно непрерывно дифференцируема для любой формы $\tilde{t}_N$ степени $N \geqslant n$. В частности, функция $|\hat{Q}_0|^{2N}\tilde{\eta}'_{i\varkappa}(\hat{Q}_0)$ будет $(2N-n)$-кратно дифференцируемой, так что сама функция $\tilde{\eta}'_{i\varkappa}$ относится к классу C^∞ всюду, за исключением начала координат, а все производные $\hat{\eta}'_{i\varkappa}$ на бесконечности быстро убывают.

Разность $\tilde{\eta}'_i - \tilde{\eta}'_{i\varkappa}$ есть целая функция, так что характер сингулярностей функции $\tilde{\eta}'_{i\varkappa}$ в начале координат будет таким же, что и у функции $\tilde{\eta}'_i$. Требование масштабной инвариантности функции $\tilde{\eta}'_i$ означает, что в p-пространстве

$$\tilde{\eta}'_i(\lambda\hat{Q}_0) = \lambda^{-n+1}\tilde{\eta}'_i(\hat{Q}_0) \qquad (7.31)$$

при $0 < \lambda < \infty$. Таким образом, функция $\tilde{\eta}'_i$, а значит, и функция $\tilde{\eta}'_{i\varkappa}$ расходится в начале координат как $\lambda^{-(n-1)}$. Поэтому функция $\tilde{t}_{n-1}\tilde{\eta}'_{i\varkappa}$ в начале координат все еще равномерно ограничена, но уже не обязательно непрерывна.

Отметим также, что функция $\tilde{\eta}'_{i\varkappa}$, будучи фурье-образом обобщенной функции умеренного роста $\eta'_{i\varkappa}$, сама является обобщенной функцией умеренного роста. Это значит, что существуют хорошо определенные правила интегрирования ее сингулярностей в начале координат. В явном виде нам эти правила не потребуются. Фактически функция $\tilde{\eta}'_{i\varkappa}$ определена не только на пространстве $\mathcal{S}$, но даже на пространстве H_ε. Пусть $\tilde{\varphi}(Q_0) \in H_\varepsilon$ и введем произвольную функцию $\tilde{\psi}(\hat{Q}_0) \in \mathcal{S}$, причем $\tilde{\psi} \equiv 1$ в окрестности начала координат.

Тогда

$$\int d\hat{Q}_0 \tilde{\eta}'_{i\varkappa}(\hat{Q}_0)\,\tilde{\varphi}(\hat{Q}_0) = \tilde{\varphi}(0)\int d\hat{Q}_0 \tilde{\eta}'_{i\varkappa}(\hat{Q}_0)\,\tilde{\psi}(\hat{Q}_0) + \\ + \int d\hat{Q}_0 \tilde{\eta}'_{i\varkappa}(\hat{Q}_0)\,[\tilde{\varphi}(\hat{Q}_0) - \tilde{\varphi}(0)\,\tilde{\psi}(\hat{Q}_0)].$$

Здесь первый член в правой части существует, поскольку $\tilde{\eta}'_{i\varkappa} \in \mathscr{S}$. Вследствие непрерывности функции $\tilde{\varphi}$ в смысле Гёльдера получаем, что в окрестности начала координат

$$|\tilde{\varphi}(\hat{Q}_0) - \tilde{\varphi}(0)\,\tilde{\psi}(\hat{Q}_0)| \leqslant c\,|\hat{Q}_0|^{\varepsilon}.$$

Это означает, что подынтегральная часть во втором члене расходится как $x^{-(n-1-\varepsilon)}$, а такая особенность интегрируема.

Функция $\tilde{\eta}_{i\varkappa}$ имеет вид

$$\tilde{\eta}_{i\varkappa}(q_{10}, \ldots, q_{n0}) = \delta\left(\sum_1^n q_{j0}\right)\hat{\eta}(q_{10}, \ldots, q_{n0}). \qquad (7.32)$$

Входящая в это выражение функция $\hat{\eta}$ определена на многообразии $\sum q_{j0} = 0$ и может быть представлена в виде

$$\hat{\eta}(q_{10}, \ldots, q_{n0}) = 2\pi\tilde{\eta}'_{i\varkappa}(-q_{20}, \ldots, -q_{n0}). \qquad (7.33)$$

Поэтому интеграл от функции $\tilde{\eta}_{i\varkappa}$ опять определен на функциях из пространства H_ε.

Вернемся теперь к обсуждению функции $\tilde{r}_{i\sigma\varkappa}$. Пусть $f(K, \ldots, V)$ — функция, введенная при формулировке теоремы 7.1. Рассмотрим величину

$$\bar{f}(P^-, Q, U, V) = \prod_Q \chi(-q_i)\int dK\,d\mathbf{P}\prod_P \chi(p_i)\,dK'_0\,dP'_0\,dQ'_0 \times \\ \times \tilde{\eta}_{i\varkappa}(K_0 - K'_0,\ P_0 - P'_0,\ Q_0 - Q'_0)\,\tilde{T}_{i\sigma}(K'_0, \mathbf{K}, P'_0, \mathbf{P}, Q'_0, \mathbf{Q}) \times \\ \times f(K, P, Q, U, V), \qquad (7.34)$$

где всюду следует произвести подстановку $p_{j0} = p_j^- + \omega(\mathbf{p}_j)$. Если вместо p'_{i0} ввести в качестве новых переменных интегрирования переменные $p_i'^- = p_{i0}' - \omega(\mathbf{p}_i)$, то выражение (7.34) примет вид

$$\overline{f}(P^-, \ldots, V) = \prod \chi(-q_i) \int dK\, d\mathbf{P} \prod \chi(p_i)\, dK_0'\, dP'^- dQ_0' \times$$
$$\times \tilde{\eta}_{i\varkappa}(K_0 - K_0', P^- - P'^-, Q_0 - Q_0') \tilde{l}_{i\sigma}(K_0', \mathbf{K}, \mathbf{P}'^-, \mathbf{P}, Q_0', \mathbf{Q}) \times$$
$$\times f(K, \mathbf{P}, P^-, Q, U, V). \qquad (7.35)$$

Пусть $\chi^0(p)$ — функция, обладающая свойствами функции $\chi(p)$ (гл. 2), но имеющая более обширный носитель. Он по-прежнему удовлетворяет условию (2.41), но, кроме того, $\chi^0(p) \equiv 1$ в открытой окрестности supp $\chi(p)$. Определим новую функцию $\overline{f}_1(P^-, Q, U, V)$ выражением типа (7.35), введя в подынтегральную часть дополнительный множитель

$$\Phi(P'^-, \mathbf{P}, Q_0', \mathbf{Q}) = \prod_1^{\nu} \chi^0(-q_{j0}', -\mathbf{q}_j) \prod_1^{\beta} \chi^0(p_j'^- + \omega(\mathbf{p}_j), \mathbf{p}_j). \qquad (7.36)$$

Еще одна функция $\overline{f}_2(P^-, Q, U, V)$ определяется равенством

$$\overline{f} = \overline{f}_1 + \overline{f}_2. \qquad (7.37)$$

Покажем, что обе функции $\overline{f}_1$ и $\overline{f}_2$ обладают необходимым свойством непрерывности по Гёльдеру. Начнем с более простого случая функции $\overline{f}_2$. Произведение

$$\prod \chi(-q_j) \prod \chi(p_j) [1 - \Phi(P'^-, \mathbf{P}, Q_0', \mathbf{Q})] \qquad (7.38)$$

в окрестности $P'^- = P^-$, $Q_0' = Q_0$ обращается в нуль. Это справедливо, в частности, в сингулярной точке функции $\hat{\eta}$, которая, таким образом, оказывается несущественной: не изменяя значения функции $\overline{f}_2$, можно заменить функцию $\hat{\eta}$ функцией $\hat{\eta}^0$ из класса C^∞, совпадающей с функцией $\hat{\eta}$ в носителе функции (7.38). Функция $\hat{\eta}^0$ быстро убывает по переменным K'_0, $\mathbf{P}'^-$, Q'_0, когда переменные K_0, Q_0, P^- фиксированы. Следовательно,

$$\int dK'_0\, dP'^-\, dQ'_0\, \tilde{\eta}^0_{i\varkappa}(K_0-K'_0,\, P^- - P'^-,\, Q_0-Q'_0) \times$$
$$\times \tilde{T}_{i\sigma}(K'_0, \mathbf{K}, P'^-, \mathbf{P}, Q'_0, Q)\,[1-\Phi(P'^-, \mathbf{P}, Q'_0, \mathbf{Q})] =$$
$$= \delta^4\left(\sum k_j + \sum p_j + \sum q_j\right) g(K, P, Q),$$

где g — полиномиально ограниченная C^∞-функция. Функция $\tilde{\eta}^0_{i\varkappa}$ определяется через функцию $\hat{\eta}_0$ по аналогии с формулой (7.32). Оставшийся интеграл

$$\bar{f}_2 = \prod \chi(-q_j) \int dK\, d\mathbf{P} \prod \chi(p_j)\, \delta^4\left(\sum k_j + \sum p_j + \sum q_j\right) \times$$
$$\times g(K, \mathbf{P}, P^-, Q)\, f(K, \mathbf{P}, P^-, Q, U, V)$$

существует и обладает ожидаемыми свойствами, в чем можно убедиться с помощью тех же аргументов, которые были использованы выше в случае $\sigma = 1$, так как произведение gf обладает теми же свойствами, что и сама функция f.

Переходим к функции $\bar{f}_1$. После замены переменных $K_0 \to K'_0 - K_0$ функция $\bar{f}_1$ принимает вид

$$\bar{f}_1 = \prod \chi(-q_i) \int dK_0\, d\mathbf{K}\, dK'_0\, d\mathbf{P}\, dP'^-\, dQ'_0 \prod \chi(p_i) \times$$
$$\times \prod \chi^0(p'^-_i + \omega(\mathbf{p}_i), \mathbf{p}_i) \prod \chi^0(-q'_{i0}, -q_i) \times$$
$$\times \tilde{\eta}_{i\varkappa}(-K_0,\, P^- - P'^-,\, Q_0 - Q'_0)\, \tilde{T}_{i\sigma}(K'_0, \mathbf{K}, P'^-, \mathbf{P}, Q'_0, \mathbf{Q}) \times$$
$$\times f(K'_0 - K_0, \mathbf{K}, \mathbf{P}, P^-, Q, U, V). \qquad (7.39)$$

Имеем

$$\prod \chi(p_i)\, f(K'_0 - K_0, \mathbf{K}, P, Q, U, V) \in$$
$$\in H_\varepsilon(K'_0, \mathbf{K}, P, U;\, Q, K_0, P'^-, Q'_0, V).$$

Отсюда, согласно полученному ранее результату, доказывающему существование функции $\tilde{T}_{i\sigma}$, частичный интеграл

$$J_1(K_0, P'^-, Q'_0, P^-, Q, U, V) = \prod_i \chi^0(-q'_{i0}, -\mathbf{q}_i) \times$$
$$\times \int dK'_0 d\mathbf{K}\, d\mathbf{P} \prod_i \chi(p_i) \prod_i \chi^0(p'^-_i + \omega(\mathbf{p}_i), \mathbf{p}_i) \times$$
$$\times \tilde{T}_{i\sigma}(K'_0, \mathbf{K}, P'^-, \mathbf{P}, Q'_0, Q) f(K'_0 - K_0, \mathbf{K}, P, Q, U, V)$$

принадлежит $H_\varepsilon(P'^-, Q'_0, P^-, \mathbf{Q}, U; K_0, Q_0, V)$. Умножение функции J_1 на $\Pi\chi(-q_i)$ приводит к функции

$$J_2(K_0, \ldots, V) \in H_\varepsilon(P'^-, Q'_0, P^-, Q, U; K_0, V).$$

Таким образом, остается исследовать выражение

$$\bar{f}_1 = \int dK_0\, dP'^-\, dQ'_0 \tilde{\eta}_{i\varkappa}(-K_0, P^- - P'^-, Q_0 - Q'_0) \times$$
$$\times J_2(K_0, P'^-, Q'_0, P^-, Q, U, V). \tag{7.40}$$

Заметим, что при фиксированных переменных V подынтегральное выражение в (7.40) быстро убывает по всем направлениям. Поэтому поведение функции $\bar{f}_1$ при бесконечных значениях аргументов не представляет никаких проблем, и мы можем сосредоточиться на доказательстве ее непрерывности в смысле Гёльдера [1]).

Мы уже отмечали, что обобщенная функция $\tilde{\eta}_{i\varkappa}$ определена на основных функциях, непрерывных в смысле Гёльдера, так что функция $\bar{f}_1$ определена для всех значений своих аргументов.

Входящей в функцию $\tilde{\eta}_{i\varkappa}$ в виде множителя δ-функцией можно воспользоваться для того, чтобы выполнить одно из интегрирований: интегрирование по k_{10} при $\alpha > 0$ или

---

[1]) Мы впредь не будем рассматривать поведение функций на бесконечности, так как подобное рассмотрение легко провести во всех необходимых случаях и оно всегда приводит к желаемому результату.

интегрирование по q'_{10} при $\alpha = 0$, β, $\gamma \geqslant 2$. В любом случае мы получаем выражение следующей структуры:

$$\begin{aligned}\overline{F}(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) = \\ = \int dz_1 \ldots dz_n dw_1 \ldots dw_s\, H(x_1 - z_1, \ldots, x_n - z_n, \\ w_1, \ldots, w_s) \times \\ \times F(x_1, \ldots, x_n, z_1, \ldots, z_n, w_1, \ldots, w_s, y_1, \ldots, y_m).\end{aligned} \tag{7.41}$$

Здесь $x_i, \ldots$ — первоначальные переменные $p_{\bar{i}}$, $q_{i\mu}$ и т. д., переобозначенные соответствующим образом; H — функция $\widetilde{\eta}'_{i\varkappa}$, выраженная через соответствующие переменные, причем эта функция $\widetilde{\eta}'_{i\varkappa}$ обладает свойствами, рассмотренными выше. Функция F непрерывна по Гёльдеру с индексом ε по всем переменным и быстро убывает в соответствующих направлениях, так что интеграл (7.41) на бесконечности существует. Мы хотим доказать, что функция F непрерывна по Гёльдеру с индексом $\varepsilon' < \varepsilon$. Доказательство является обобщением доказательства теоремы Племельи — Привалова, приведенного в монографии [22] (разделы 9 и 10).

Пусть функция $\psi(X, W) \in D$ (т. е. C^∞ и с компактным носителем), причем $\psi \equiv 1$ в окрестности начала координат. Представим функцию $\overline{F}$ в виде суммы

$$\overline{F} = \overline{F}_1 + \overline{F}_2, \tag{7.42}$$

где

$$\overline{F}_1(X, Y) = \int dZ\, dW H(X - Z, W) \times \\ \times \psi(X - Z, W)\, \hat{F}(X, Y), \tag{7.43}$$

$$\overline{F}_2(X, Y) = \\ = \int dZ\, dW H(X - Z, W)\, G(X, Z, W, Y), \tag{7.44}$$

причем

$$\hat{F}(X, Y) = F(X, Z, W, Y)\,|_{Z=X, W=0}, \tag{7.45}$$

$$G(X, Z, W, Y) = \\ = F(X, Z, W, Y) - \psi(X - Z, W)\, \hat{F}(X, Y). \tag{7.46}$$

В функции $\overline{F}_1$ вместо z_i введем переменные интегрирования $x_i - z_i$. Тогда

$$\overline{F}_1(X, Y) = \hat{F}(X, Y) \int dZ\, dW H(Z, W)\, \psi(Z, W).$$

Интеграл существует и не зависит от переменных X и Y. Функция $\hat{F}(X, Y)$, очевидно, непрерывна по Гёльдеру с индексом ε, а значит, то же самое справедливо для функции $\overline{F}_1$.

Обратимся теперь к функции $\overline{F}_2$ и рассмотрим

$$\begin{aligned} D(X, Y, \Delta X, \Delta Y) &= \\ &= \overline{F}_2(X + \Delta X, Y + \Delta Y) - \overline{F}_2(X, Y) = \\ &= \int dZ\, dW\, \{H(X - Z + \Delta X, W)\, G(X + \Delta X, Z, W, Y + \\ &\quad + \Delta Y) - H(X - Z, W)\, G(X, Z, W, Y)\}. \end{aligned} \tag{7.47}$$

Введем величину $A^2 = |\Delta X|^2 + |\Delta Y|^2$. Разобьем функцию D на две части: $D = D_1 + D_2$, где D_1 — интеграл вида (7.47), взятый по области $R^2 = |X - Z|^2 + |W|^2 \leqslant 4A^2$, а D_2 — тот же интеграл, взятый по области $R^2 \geqslant 4A^2$. Рассмотрим сначала функцию

$$D_1 = -D_{11} + D_{12},$$

где

$$D_{11}(X, Y) = \int\limits_{R \leqslant 2A} dZ\, dW H(X - Z, W)\, G(X, Z, W, Y),$$

а функция D_{12} имеет аналогичный вид с заменой переменных X, Y на $X + \Delta X$, $Y + \Delta Y$ в подынтегральном выражении, но не в пределах интегрирования. Поскольку $G(X, X, 0, Y) = 0$ и функция G непрерывна в смысле Гёльдера, имеем

$$\begin{aligned} |G(X, Z, W, Y)| &\leqslant M(X, Z, W, Y) \times \\ &\times (|X - Z^2| + |W|^2)^{\varepsilon/2}, \end{aligned} \tag{7.48}$$

где функция M положительно определенная, непрерывная и хорошо себя ведет на бесконечности. Функция H при $X = Z$, $W = 0$ имеет сингулярность порядка $(n + s)$:

$$H = (|X - Z|^2 + |W|^2)^{-(n+s)/2}\, \hat{H}(X - Z, W), \tag{7.49}$$

где функция $\hat{H}$ всюду ограничена и непрерывна везде, кроме начала координат. С учетом этих свойств получаем неравенство

$$|D_{11}| \leqslant \int\limits_{R \leqslant 2A} dZ\,dW\,|\hat{H}|\,M\,(|X-Z|^2+|W|^2)^{(n+s-\varepsilon)/2} \leqslant$$
$$\leqslant G(X,\ V)\,A^{\varepsilon}$$

при $A \to 0$, где C — положительно определенная непрерывная функция. Аналогичную оценку можно провести для функции D_{12}, так что функция D_1 оказывается удовлетворяющей ожидаемому неравенству с индексом ε.

Функцию D_2 мы разобьем на две функции по-другому:

$$D_2 = D_{21} + D_{22},$$

где

$$D_{21} = \int\limits_{R \geqslant 2A} dZ\,dW H\,(X-Z,\ W) \times$$
$$\times \{G\,(X+\Delta X,\ Z,\ W,\ Y+\Delta Y) - G\,(X,\ Z,\ W,\ Y)\},$$
$$D_{22} = \int\limits_{R \geqslant 2A} dZ\,dW\,\{H\,(X-Z+\Delta X,\ W) - H\,(X-Z,\ W)\} \times$$
$$\times G\,(X+\Delta X,\ Z,\ W,\ Y+\Delta Y).$$

Для D_{21} мы воспользуемся формулой (7.49) и неравенством

$$|G\,(X+\Delta X,\ Z,\ W,\ Y+\Delta Y) -$$
$$- G\,(X,\ Z,\ W,\ Y)\,| \leqslant A^{\varepsilon} M'\,(X,\ Z,\ W,\ Y), \qquad (7.50)$$

где M' — непрерывная функция. В результате получим неравенство

$$|D_{21}| \leqslant A^{\varepsilon} \int\limits_{R \geqslant 2A} dZ\,dW \frac{|\hat{H}|\,M'}{(|X-Z|^2+|W|^2)^{(n+s)/2}} \leqslant$$
$$\leqslant C'\,(X,\ Y)\,A_{\varepsilon}\,|\log A\,|,$$

в котором интеграл при $A \to 0$ расходится логарифмически, а функция C' непрерывна. Однако произведение $A^{\varepsilon}\ |\log A\ |$ при малых A можно мажорировать с помощью $A^{\varepsilon'}$ при любом $\varepsilon' < \varepsilon$. Поэтому функция D_{21} дает в F_2 вклад, непрерывный по Гёльдеру с индексом ε'.

Исследуя функцию D_{22}, заметим, что если переменные Z, W изменяются в области интегрирования, то функция H на интервале $[(X-Z+\Delta X,\ W),\ (X-Z,\ W)]$ отнсситея к классу C^∞. Применим теперь теорему о среднем

$$H(X-Z+\Delta X,\ W)-H(X-Z,\ W)=$$
$$=\Delta X\cdot \mathrm{grad}_X\ H(\bar{X}-Z,\ W),$$

где $\bar{X}$ лежит между X и $X+\Delta X$. Функция $\partial_{x_i}H(X-Z,\ W)$ принадлежит классу C^∞ всюду, кроме точки $X=Z$, $W=0$, в которой она обладает сингулярностью порядка $(n+s+1)$:

$$\partial_{x_i}H(X-Z,\ W)=R^{-n-s-1}\hat{H}_i(X-Z,\ W). \qquad (7.51)$$

Здесь функция $\hat{H}_i$ всюду ограничена и непрерывна везде, кроме точки $X=Z$, $W=0$. В сбласти интегрирования имеем

$$|\bar{X}-Z|\geqslant|X-Z|-|X-\bar{X}|\geqslant|X-Z|-A\geqslant$$
$$\geqslant|X-Z|-\frac{1}{2}|X-Z|=\frac{1}{2}|X-Z|,$$

и с помощью этого неравенства получаем из формулы (7.51)

$$|\partial_{x_i}H(\bar{X}-Z,\ W)|<2^{n+s}R^{-n-s-1}|\hat{H}_i(\bar{X}-Z,\ W)|.$$

Это неравенство вместе с оценкой (7.48) приводит к условию

$$D_{22}|\leqslant A\,2^{n+s}\int\limits_{R\geqslant 2A}dZ\,dW R^{-n-s-1+\varepsilon}\sum_i|H_i(X-Z,\ W)|\times$$
$$\times M(X,\ Z,\ W,\ Y)\leqslant C''(X,\ Y)A^\varepsilon$$

при $A\to 0$, где C'' — непрерывная функция.

Полученный результат завершает доказательство теоремы 7.1. Как уже отмечалось в ходе этого доказательства, следствием данной теоремы является существование интегралов (3.11) и (6.39). Кроме того, условие B теоремы 2.1 также, очевидно, следует из теоремы 7.1. Остается убедиться в том, что выражение $\int dXG_{\mu,\,\sigma}(X)\,\varphi(X)$, $\varphi\in\mathcal{S}$, определенное в (6.40), определено на $\mathcal{L}_\varepsilon^{\text{in}}$ и отображает эту область в $\mathcal{L}_{\varepsilon'}^{\text{in}}$.

Пусть

$$\varphi = \int \prod_{i=1}^{a} \frac{d\mathbf{p}_i}{2\omega(\mathbf{p}_i)} \hat{f}(\mathbf{P}) \hat{A}^{\text{in}*}(\mathbf{p}_1) \ldots \hat{A}^{\text{in}*}(\mathbf{p}_a)\Omega, \quad (7.52)$$

причем $\hat{f} \in H_\varepsilon$.

В p-пространстве уравнение (6.40) принимает вид

$$\int dK \widetilde{G}_{\mu,\sigma}(K) \widetilde{\varphi}(K) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(2\pi)^l}{l!} \int dK\, dP \widetilde{\varphi}(K) \times$$
$$\times \widetilde{g}^{+}_{\mu,\sigma}(K;\ -P)\colon \widetilde{A}^{\text{in}}(p_1) \ldots \widetilde{A}^{\text{in}}(p_l). \quad (7.53)$$

Этот ряд обрывается начиная с некоторого конечного номера. Поэтому достаточно рассмотреть какой-нибудь один член ряда; l-й член ряда, действуя на φ, порождает вектор с компонентами, содержащими $a-l$, $a-l+2$, ..., $a+l$ in-частиц. Соответствующие волновые функции представляют собой суммы членов вида

$$\widetilde{g}(\mathbf{q}_1, \ldots, \mathbf{q}_\alpha, q'_1, \ldots, q'_\beta) = \text{const} \int dK\, dP\, dQ^- \times$$
$$\times \prod_{1}^{\gamma} \delta_+(p_j) \prod_{1}^{\alpha} \delta(q_j^-) \widetilde{g}^{+}_{\mu,\sigma}(K;\ -P,\ Q) \widetilde{\varphi}(K) \hat{f}(\mathbf{P},\ \mathbf{Q}'). \quad (7.54)$$

Очевидно, что $\widetilde{\varphi}\hat{f} \in H_\varepsilon(K, \mathbf{P}, \mathbf{Q}', P^-, Q)$, откуда с помощью теоремы 7.1 можно получить, что $\hat{g} \in H_{\varepsilon'}$, $\varepsilon' < \varepsilon$, что и требовалось доказать.

В случае разложения (6.41) для поля $\widetilde{A}_\sigma(k)$ подынтегральные выражения в формуле (7.53) содержат еще «деампутирующий» множитель $(k^2 - m^2 - ik_0\varepsilon)^{-1}$. Мы можем представить его в виде

$$\frac{1}{k^2 - m^2 - ik_0\varepsilon} = \frac{\chi(k)}{k^2 - m^2 - i\varepsilon} +$$
$$+ \frac{\chi(-k)}{k^2 - m^2 + i\varepsilon} + C^\infty\text{-функция}. \quad (7.55)$$

Последний член, очевидно, не приводит к каким-либо трудностям. Остальные два члена сконцентрированы в окрестности массовой поверхности. Рассмотрим, например, первый член и его вклад в интеграл типа (7.54). Интегрирование по всем переменным, кроме k^-, приводит в силу теоремы 7.1 к функции переменной k^-, непрерывной по Гёльдеру, а интеграл от такой функции с $(k^- - i\varepsilon)^{-1}$ существует. Аналогичное рассуждение применимо ко второму члену.

Глава 8

ПЕРЕНОРМИРУЕМЫЕ ТЕОРИИ

Вернемся теперь к обсуждению тех неопределенностей, которые остаются даже после применения требования локальной регулярности, введенного в гл. 5. Очевидно, интересно знать, какова точно неопределенность в данной конкретной теории, т. е. в теории данного типа (μ, ν) [1].

Согласно результатам гл. 5, неопределенность в функции $r_\sigma(x_1, \ldots, x_n)$ численно определяется ее s-степенью $SD(r_\sigma) = d(n, \sigma)$. Исследуем теперь эти s-степени.

Теория типа (μ, ν) характеризуется обращением в нуль всех функций первого порядка $r_1(x_1, \ldots, x_n)$, кроме μ-точечной функции. Поэтому

$$d(n, 1) = \infty \quad \text{при} \quad n \neq \mu. \tag{8.1}$$

Функция $\tilde{r}_1(p_1, \ldots, p_\mu)$ имеет вид

$$\tilde{r}_1(p_1, \ldots, p_\mu) = \delta^4\left(\sum p_i\right)\mathscr{P}(P), \tag{8.2}$$

где $\mathscr{P}$ — форма степени ν, так что

$$\tilde{r}_1(\lambda P) = \lambda^{-4+\nu}\tilde{r}_1(P). \tag{8.3}$$

Пользуясь определением (5.5) в p-пространстве, получаем

$$d(\mu, 1) = -4(\mu - 1) - \nu. \tag{8.4}$$

Для рассмотрения высших порядков полезно показать, что поведение функции $\tilde{r}_\sigma(\lambda p_1, \ldots, \lambda p_n)$ при $\lambda \to \infty$ тесно связано с поведением функции $\tilde{r}_\sigma(p_1, \ldots, p_n)$ при $m \to \infty$, т. е. с проблемой инфракрасных расходимостей. Для этого докажем следующую лемму.

---

[1] Определение типа теории см. в гл. 4, формула (4.6)

Лемма 8.1.

Пусть $r(x_1, \ldots, x_n)$ — обобщенные функции, удовлетворяющие предположениям теоремы 2.2. Тогда функции

$$\mathbf{r}^\lambda (x_1, \ldots, x_n) = \\ = \lambda^{-3n} r(\lambda^{-1}x_1, \ldots, \lambda^{-1}x_n), \quad 0 < \lambda < \infty, \qquad (8.5)$$

также удовлетворяют предположениям теоремы 2.2, но с заменой массы m на $m\lambda^{-1}$.

Соотношение (8.5) в p-пространстве имеет вид

$$\widetilde{\mathbf{r}}^\lambda (p_1, \ldots, p_n) = \lambda^n \widetilde{r}(\lambda p_1, \ldots, \lambda p_n). \qquad (8.6)$$

Очевидно, что функции $\mathbf{r}^\lambda$ удовлетворяют условиям А, Б и В теоремы 2.1, причем условие В, конечно, следует формулировать для новой массовой оболочки $p^2 = m^2/\lambda^2$. Чтобы убедиться в том, что функции $\mathbf{r}^\lambda$ являются решениями уравнений полноты с массой m/λ, используем форму (2.35) этих уравнений в p-пространстве и отметим, что

$$\delta_+(\lambda k;\ m) = \theta(k_0)\,\delta(\lambda^2 k^2 - m^2) = \\ = \lambda^{-2}\theta(k_0)\,\delta\left(k^2 - \frac{m^2}{\lambda^2}\right) = \lambda^{-2}\delta_+\left(k;\ \frac{m}{\lambda}\right). \qquad (8.7)$$

Остальные вычисления совершенно тривиальны.

Условие нормировки (2.58) после применения преобразования (8.6) остается выполненным:

$$\widetilde{\mathbf{r}}^\lambda (p,\ q) = \lambda^2\delta^4(\lambda p + \lambda q)\left\{\frac{1}{2\pi}(\lambda^2 q^2 - m^2) + \right. \\ \left. + (\lambda^2 q^2 - m^2)^2 F(\lambda q\right\} = \\ = \delta^4(p+q)\left\{\frac{1}{2\pi}\left(q^2 - \frac{m^2}{\lambda^2}\right) + \left(q^2 - \frac{m^2}{\lambda^2}\right)^2 F^\lambda(q)\right\}, \qquad (8.8)$$

где функция $F^\lambda(q) = \lambda^2 F(\lambda g)$ аналитична в области $q^2 < 4m^2/\lambda^2$.

Применим эту лемму к теории типа (μ, ν). Из формулы (8.2) получаем

$$\widetilde{\mathbf{r}}_1^\lambda (p_1, \ldots, p_\mu) = \lambda^{\nu+\mu-4}\delta^4\left(\sum p_i\right)\mathscr{F}(P). \qquad (8.9)$$

Напомним, что в разложении теории возмущений (3.1) для функции r член r_1 входит с множителем, равным константе связи g. Определим

$$g_\lambda = g\lambda^{\nu+\mu-4}, \tag{8.10}$$

так что

$$g\widetilde{r}_1^\lambda(p_1, \ldots, p_\mu) = g_\lambda \delta^4\left(\sum p_i\right) \mathscr{P}(p_1, \ldots, p_\mu) = \\ = g_\lambda \widetilde{r}_1(p_1, \ldots, p_\mu). \tag{8.11}$$

Построения предыдущих глав мы можем осуществить для массы m/λ вместо m и параметра разложения g_λ вместо g, причем функция $\widetilde{r}_1$ вида (8.2) останется той же самой. Полученную на этом пути функцию типа $\widetilde{r}_\sigma$ мы обозначим через $\widetilde{r}_\sigma^\lambda(P)$. Аналогичным образом определим $\widetilde{T}_\sigma^\lambda$, $\widetilde{J}_{lL\sigma}^{\lambda}$ и т. д. По определению, функция

$$\widetilde{r}_1^\lambda(P) = \widetilde{r}_1(P) \tag{8.12}$$

не зависит от λ. Из формулы (8.10) и леммы 8.1 получим в качестве возможного решения в высших порядках

$$\widetilde{r}_\sigma^\lambda(p_1, \ldots, p_n) = \lambda^{n-\sigma(\mu+\nu-4)} \widetilde{r}_\sigma(\lambda p_1, \ldots, \lambda p_n). \tag{8.13}$$

Чтобы определить s-степень функции r_σ, следует выяснить характер поведения функции $\lambda^{4n}\widetilde{r}_\sigma(\lambda P)$ при больших λ. Вследствие (8.13) это эквивалентно исследованию предела при $\lambda \to \infty$ выражения

$$\lambda^{3n+\sigma(\mu+\nu-4)} \widetilde{r}_\sigma^\lambda(p_1, \ldots, p_n).$$

Нетрудно видеть, что

$$d(n, \sigma) \geqslant -3n - \sigma(\mu + \nu - 4) \tag{8.14}$$

при условии, что произведение $\lambda^{-\varepsilon}\widetilde{r}_\sigma^\lambda(P)$ остается ограниченным при переходе к пределу $\lambda \to \infty$ для любого $\delta > 0$. Если функция $\widetilde{r}_\sigma^\lambda$ расходится при $\lambda \to \infty$ как λ в некоторой степени или более сильно, то оценку (8.14) следует соответствующим образом изменить.

Очевидно, что вопрос о сходимости или расходимости $\lim\limits_{\lambda\to\infty} \lambda^{-\varepsilon}\widetilde{r}_\sigma^\lambda$ связан с проблемой инфракрасных расходимостей, возникающих, когда масса m/λ стремится к нулю.

Эту проблему мы рассмотрим в дальнейшем. Мы покажем, что в пространстве $\mathcal{S}'$ при любом $\varepsilon > 0$

$$\lim_{\lambda\to\infty} \lambda^{-\varepsilon} \tilde{r}_\sigma^\lambda (p_1, \ldots, p_n) = 0. \tag{8.15}$$

Чтобы это осуществить, необходимо несколько улучшить оценки, приведенные в гл. 7. Мы будем пользоваться определениями и обозначениями, введенными в этой главе.

Семейство функций $f_\lambda(U, V) \in H_\varepsilon(U; V)$, $1 \leqslant \lambda < \infty$ будем называть *ограниченным*, если неравенство

$$S_N(f_\lambda \mid V) \leqslant S_N(V) \tag{8.16}$$

имеет место равномерно по λ для всех N, причем функции S_N полиномиально ограничены по переменным V. В применениях этого понятия некоторые из переменных u_i имеют вид

$$p_{i\lambda}^- = p_{i0} - \omega_\lambda(\mathbf{p}_i), \quad \omega_\lambda(\mathbf{p}_i) = \sqrt{\mathbf{p}_i^2 + \frac{m^2}{\lambda^2}}, \tag{8.17}$$

т. е. сами зависят от параметра λ. Однако предел

$$\lim_{\lambda\to\infty} p_{i\lambda}^- = p_{i0} - |\mathbf{p}_i|$$

существует и непрерывен в смысле Гёльдера с индексом 1, так что эта зависимость от λ переменных u_i не создает трудностей.

Пусть $f_\lambda(K, P, Q, U, V) \in H_\varepsilon(K, \mathbf{P}, U; P_\lambda^-, Q, V)$ — такое ограниченное семейство функций того же типа, что и функции, рассматривавшиеся в теореме 7.1. Справедливо следующее утверждение.

Теорема 8.2.

Пусть функции $\tilde{r}_\sigma(K, \mathbf{P}, P_\lambda^-, Q)$, $f_\lambda(K, P, Q, U, V)$ определены, как указано выше, и

$$\bar{f}_\lambda(P_\lambda^-, Q, U, V) = \prod_1^\gamma \chi(-\lambda q_j) \int dK\, d\mathbf{P} \prod_1^\beta \frac{\chi(\lambda p_j)}{\omega_\lambda(\mathbf{p}_j)} \times$$
$$\times \tilde{r}_\sigma^\lambda(K, \mathbf{P}, P_\lambda^-, Q) f_\lambda(K, \mathbf{P}, P_\lambda^-, Q, U, V). \tag{8.18}$$

Тогда существует такая не зависящая от ε положительная константа c_σ, что функции $\lambda^{-c_\sigma \varepsilon} \bar{f}_\lambda(P_\lambda^-, \ldots, V)$

представляют собой ограниченное семейство в пространстве $H_{\varepsilon'}(P_\lambda^-,\ Q,\ U;\ V)$ при $\varepsilon' < \varepsilon$.

Доказательство этой теоремы очень близко к доказательству теоремы 7.1. Начнем опять с обсуждения случая $\sigma = 1$. Функция $\widetilde{r}_1^\lambda$ по определению не зависит от λ. Функция f_λ ограничена по λ. Поэтому выражение (8.18) почти совпадает с тем выражением, которое обсуждалось при доказательстве теоремы 7.1. Оно отличается от него дополнительными множителями $[\omega_\lambda(\mathbf{P}_i)]^{-1}$, масштабным множителем λ в функциях χ и, наконец, тем, что переменные P_λ^- зависят от λ.

Относительно функций χ следует заметить, что диаметр носителя функции $\chi(\lambda p)$ уменьшается с увеличением λ как $1/\lambda$, так что величина

$$\lambda^{-\varepsilon} \sup_{|a| \leqslant 1} \frac{|\chi(\lambda(p+a)) - \chi(\lambda p)|}{|a|^\varepsilon}$$

остается ограниченной. Следовательно, зависимость функций χ от λ находится в соответствии с требованиями теоремы 8.2, если выбрать $c_\sigma > 1$.

Труднее рассмотреть оставшуюся зависимость от λ. Заметим, что в пределе $\lambda \to \infty$ функция $[\omega_\lambda(\mathbf{p})]^{-1}$ становится сингулярной в точке $\mathbf{p} = 0$. В случае $\alpha > 0$, как нетрудно видеть, оценки, сделанные в гл. 7, не претерпевают никаких изменений. Сингулярности типа $|\mathbf{p}_j|^{-1}$ в функциях ω_λ^{-1} слишком слабы, чтобы нарушить существование интегралов по переменным $\mathbf{p}_j$. При $\alpha = 0$ рассмотрим сначала случай $\mathbf{p} \neq 0$. Будем исходить из формулы (7.14), которая теперь принимает вид

$$E = \frac{\lambda}{m}(\mathbf{p}^2 + 4m^2\lambda^{-2})^{5/4} d^3t\,\delta(\Omega_\lambda - \overline{\Omega}_\lambda + 2t^2 +$$

$$+ \text{члены высшего порядка}) \times \frac{f''_\lambda(\mathbf{q}, \ldots)}{\omega_\lambda\left(\frac{\mathbf{p}}{2} + \mathbf{q}\right)\omega_\lambda\left(\frac{\mathbf{p}}{2} - \mathbf{q}\right)}, \quad (8.19)$$

где вместо переменных $\mathbf{q}'$ следует подставить значения из (7.13), в которых m заменено на m/λ. Функция $f''_\lambda(\mathbf{q}, \hat{\mathbf{P}}, \ldots, V)$ ограничена в пространстве $H_\varepsilon(\mathbf{q}, \hat{\mathbf{P}}, \ldots, V)$[1].

[1]) Мы относим к функции f''_λ множитель $\lambda^{-\varepsilon}$ при χ-функциях.

При последующем рассмотрении переменные $P, \ldots, V$ мы будем опускать.

Оба множителя ω_λ^{-1} можно отнести к функции f''_λ. Их поведение при $\Omega_\lambda \neq \overline{\Omega}_\lambda$ недостаточно сингулярно, чтобы влиять на оценки. При $\Omega_\lambda = \overline{\Omega}_\lambda$ мы производим интегрирование только в окрестности $\mathbf{q} \sim 0$, где эти множители вообще не сингулярны (при $\mathbf{p} \neq 0$).

Определим

$$A_\lambda = \mathbf{p}^2 + 4m^2\lambda^{-2}.$$

Если пренебречь членами высшего порядка в δ, ввести сферические координаты $t_1 = r \sin\theta \cos\varphi$, $t_2 = r \sin\theta \sin\varphi$, $t_3 = r\cos\theta$ и проинтегрировать по φ и r, то мы получим

$$E = \frac{\lambda}{m} A_\lambda^{5/4} \sqrt{\Omega_\lambda - \overline{\Omega}_\lambda} \int_{-1}^{1} d(\cos\theta) \times$$
$$\times g_\lambda \left(A_\lambda^{1/4} \sqrt{\Omega_\lambda - \overline{\Omega}_\lambda} \sin\theta, \ -A_\lambda^{3/4} \frac{\lambda}{m} \sqrt{\Omega_\lambda - \overline{\Omega}_\lambda} \cos\theta \right),$$

где $g_\lambda(U, V) \in H_\varepsilon$. После подстановки $\psi = (\lambda/m) A_\lambda^{3/4} \times \times \sqrt{\Omega_\mu - \overline{\Omega}_\lambda} \cos\theta$ этот интеграл принимает вид

$$E = A_\lambda^{1/2} \int_{-\psi_0}^{\psi_0} d\psi g_\lambda (m\lambda^{-1} A_\lambda^{-1/2} [A_\lambda^{3/2} \lambda^2 m^{-2} (\Omega_\lambda - \overline{\Omega}_\lambda) - \psi^2]^{1/2}, \ \psi),$$

где $\psi_0 = A_\lambda^{3/4} \lambda m^{-1} \sqrt{\Omega_\lambda - \overline{\Omega}_\lambda}$. Вследствие быстрого убывания функции g_λ при $\psi \to \infty$ данный интеграл и его нормы в смысле Гёльдера остаются ограниченными при $\lambda \to \infty$. Это утверждение справедливо также и для множителя $A_\lambda^{1/2}$, так что при $\lambda \to \infty$ ничего плохого не происходит.

Эта оценка оказывается неверной при $\mathbf{p} \to 0$, поскольку сингулярности функций ω_λ^{-1} совпадают, а разложение (7.11) несправедливо, если $\mathbf{p}$ и m малы. Чтобы понять, что происходит в этом пределе, проинтегрируем точно по $\mathbf{p}_2$ при $\mathbf{p} = 0$. Вместо (7.10) мы получаем

$$(\Omega_\lambda^2 - 4m^2\lambda^2) \frac{\sqrt{\Omega_\lambda^2 - 4m^2\lambda^{-2}}}{\Omega_\lambda} F_\lambda \left(-\frac{\Omega_\lambda}{2}, \ \ldots \right), \quad (8.20)$$

где функция F_λ ограничена в соответствующем пространстве $H_\varepsilon(\ldots;\ \ldots)$ (множитель $\lambda^{-\varepsilon}$ мы опять отнесли к функции F_λ). Величина Ω_λ определена по аналогии с (7.9). Очевидно, что выражение (8.20) при $\lambda\to\infty$ ограничено. S_N-нормы функции F_λ также остаются ограниченными. Пусть

$$G_\lambda(\Omega_\lambda)=\theta(\Omega_\lambda^2-4m^2\lambda^{-2})\,\frac{\sqrt{\Omega_\lambda^2-4m^2\lambda^{-2}}}{\Omega_\lambda}\,.$$

При $\Omega_\lambda^2\geqslant 4m^2\lambda^{-2}$, $h\geqslant 0$ получаем оценку

$$\frac{1}{\lambda^3h^3}\sqrt{\Omega_\lambda^2-4m^2\lambda^{-2}}\left|\frac{1}{\Omega_\lambda+h}-\frac{1}{\Omega_\lambda}\right|=$$

$$=\frac{h^{1-\varepsilon}}{\lambda^\varepsilon}\sqrt{\Omega_\lambda^2-4m^2\lambda^{-2}}\,\frac{1}{\Omega_\lambda(\Omega_\lambda+h)}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{h^{1-\varepsilon}}{\lambda^\varepsilon}\,\frac{1}{\Omega_\lambda+h}\leqslant(2m)^{-\varepsilon}\,\frac{\Omega_\lambda^\varepsilon h^{1-\varepsilon}}{\Omega_\lambda+h}\leqslant 1,$$

которая в силу $\sqrt{|x|+|y|}\leqslant\sqrt{|x|}+\sqrt{|y|}$ принимает вид

$$\frac{1}{\lambda^3h^3}\,\frac{1}{\Omega_\lambda+h}\left|\sqrt{(\Omega_\lambda+h)^2-4m^2\lambda^{-2}}-\sqrt{\Omega_\lambda^2-4m^2\lambda^{-2}}\right|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{\lambda^3h^3}\,\frac{1}{\Omega_\lambda+h}\sqrt{h^2+2\Omega_\lambda h}\leqslant$$

$$\leqslant 2^{1/2-\varepsilon}m^{-\varepsilon}\,\frac{\Omega_\lambda^\varepsilon h^{1/2-\varepsilon}}{\sqrt{\Omega_\lambda+h}}\leqslant 2^{1/2-\varepsilon}m^{-\varepsilon}.$$

Поэтому функция

$$\lambda^{-\varepsilon}\,\frac{G_\lambda(\Omega_\lambda+h)-G_\lambda(\Omega_\lambda)}{h^\varepsilon}\tag{8.21}$$

ограничена при $1\leqslant\lambda<\infty$, $0\leqslant h$, $2m/\lambda\leqslant\Omega_\lambda$, так что $\lambda^{-\varepsilon}G_\lambda$ представляет собой ограниченное семейство в пространстве $H_\varepsilon(;\ \Omega_\lambda)$.

Таким образом, доказательство теоремы для случая $\sigma=1$ завершено. В качестве константы c_1 можно выбрать $c_1=2$, где одна единица возникает из (8.21), а вторая — из множителей χ.

Переходим к рассмотрению более высоких порядков $\sigma>1$. Предположим, что рассматриваемая теорема справедлива во всех низших порядках $\tau < \sigma$. По аналогии с (7.16) определим

$$J^\lambda(K, \mathbf{P}, P_\lambda^-, Q) =$$
$$= \int dW \prod_1^l \delta_+(\omega_i;\ m/\lambda)\, \tilde{\tau}_\tau^\lambda(K_L, \mathbf{P}_L, P_{\lambda L}^-, -W) \times$$
$$\times \tilde{r}_{\sigma-\tau}^\lambda(K_R, \mathbf{P}_R, P_{\lambda R}^-, W). \qquad (8.22)$$

Далее определим функцию J_1^λ так же, как в (7.17), но с подстановкой в нужных местах множителей λ и ω_λ. В частности, следует ввести множитель $\prod\limits_{P_L} [\omega_\lambda(\mathbf{p}_j)]^{-1}$. По гипотезе индукции функции $\lambda^{-c_\tau \varepsilon} J_1^\lambda$ представляют собой ограниченное семейство в пространстве

$$H_{\varepsilon_1}(K_R, \mathbf{P}_R, P_\lambda^{-1} Q_L, U, W;\ Q_R, V) \text{ при } \varepsilon_1 < \varepsilon.$$

Образуем теперь выражение $J_2^\lambda(W_\lambda^-, P_\lambda^-, Q, U, V)$, подставив в соответствующие места формулы (7.18) множители λ и ω_λ. Применив опять гипотезу индукции, найдем, что функции

$$\lambda^{-(c_{\sigma-\tau} + c_\tau)\varepsilon} J_2^\lambda$$

образуют ограниченное семейство в пространстве $H_{\varepsilon'}(W_\lambda^-, P_\lambda^-, Q, U;\ V)$ для $\varepsilon' < \varepsilon$. Сужение этого произведения на энергетическую поверхность $w_\lambda^- = 0$ существует и остается ограниченным при $\lambda \to \infty$. Отсюда непосредственно получаем, что произведение

$$\lambda^{-(c_{\sigma-\tau} + c_\tau)\varepsilon} J_3^\lambda(P_\lambda^-, Q, U, V)$$

ограничено в пространстве $H_\varepsilon(P_\lambda^-, Q, U;\ V)$, что и требовалось. Функция J_3^λ определяется формулой, аналогичной (7.19).

Поскольку функция $\tilde{T}_\sigma^\lambda$ представляет собой сумму членов вида (8 22), мы доказали, что она обладает свойствами, сформулированными в теореме 8.2 для функции $\tilde{r}_\sigma^\lambda$. Если выбрать специальный случай, когда совокупности переменных P, Q, U, V пусты, и заметить, что $\mathscr{S} \subset H_\varepsilon$, то нетрудно убедиться, что из этого свойства функции $\widetilde{I}_\sigma^\lambda$ следует

$$\lim_{\lambda\to\infty} \lambda^{-\varepsilon}\widetilde{I}_\sigma^\lambda(k_1, \ldots, k_n) = 0 \quad \text{в пространстве } \mathscr{S}' \tag{8.23}$$

для любого $\varepsilon > 0$. Сравнивая это с формулой (8.13), записанной для функции I_σ вместо r_σ, получаем

$$d(n, \sigma) = SD(I_\sigma) = SD(r_\sigma) \geqslant$$
$$\geqslant -3n - \sigma(\mu + \nu - 4). \tag{8.24}$$

Равенство $SD(I_\sigma)$ и $SD(r_\sigma)$ было установлено в гл. 5. Вновь воспользовавшись формулой (8.13), на этот раз для функции r_σ, мы получаем требуемое условие (8.15). Заметим, что последнее утверждение означает, что в пределе $m/\lambda \to \infty$ инфракрасных сингулярностей степенного типа не возникает. Однако логарифмические сингулярности такой оценкой не исключаются. Они действительно встречаются в теории возмущений, и их появление допускается в строгой теории, не связанной с теорией возмущений [32].

Следует еще показать, что функции $\widetilde{r}_\sigma^\lambda$ удовлетворяют теореме 7.2. Воспользуемся формой функции $\widetilde{r}_\sigma(P)$, заданной формулой (7.23). По аналогии с (7.24) определим

$$\widetilde{r}_{i\sigma\varkappa}^\lambda(P) = \int dQ_0 \widetilde{I}_{i\sigma}^\lambda(P_0 - Q_0, \mathbf{P})\, \widetilde{\eta}_{i\varkappa}(Q_0), \tag{8.25}$$

$$r_{i\sigma\varkappa}^\lambda(X) = \eta_{i\varkappa}(X^0)\, I_{i\sigma}^\lambda(X). \tag{8.26}$$

Компактный носитель в переменных Ξ функции

$$\Delta^\lambda(\xi_2, \ldots, \xi_n) = \Delta^\lambda(x_1, \ldots, x_n) = r_\sigma^\lambda(X) - \sum_i r_{i\sigma\varkappa}^\lambda(X) \tag{8.27}$$

не зависит от λ. Условие (8.23) означает, что $\lim\limits_{\lambda\to\infty} \lambda^{-\varepsilon} r_{i\sigma\varkappa}^\lambda = 0$, так что

$$\lim_{\lambda\to\infty} \lambda^{-\varepsilon}\Delta^\lambda(X) = 0 \tag{8.28}$$

для любого $\varepsilon > 0$. Представление (7.27) перепишем в виде

$$\Delta^\lambda(\Xi) = \sum_D DF_D^\lambda(\Xi). \tag{8.29}$$

Здесь F_D^λ — непрерывные функции с компактными носителями, не зависящими от λ. Более того, функции F_σ^λ непрерывно зависят от Δ^λ (см. обсуждение теоремы 26 в монографии Шварца [19]), так что

$$\lim_{\lambda\to\infty} \lambda^{-\varepsilon} F_D^\lambda(\Xi) = 0 \tag{8.30}$$

равномерно по Ξ. Фурье-образ функции $\Delta^\lambda(X)$ имеет вид

$$\widetilde{\Delta}_\lambda(p_1, \ldots, p_n) = \delta^4\Bigl(\sum_1^n p_i\Bigr) G^\lambda(p_2, \ldots, p_n). \tag{8.31}$$

Здесь G^λ — фурье-образ функции $\Delta^\lambda(\Xi)$, т. е. целая функция. Из (8.29) и (8.30) можно получить оценку

$$|G^\lambda(P)| \leqslant C_\lambda \mathscr{P}(P), \tag{8.32}$$

где $\mathscr{P}$ — положительно определенный полином, не зависящий от λ, и при $\varepsilon > 0$

$$\lim_{\lambda\to\infty} \lambda^{-\varepsilon} C_\lambda = 0.$$

Аналогичные оценки справедливы для производных от G^λ и, следовательно, также для ее гёльдеровых норм. С учетом этой информации можно доказать, что функция $\widetilde{\Delta}^\lambda$ удовлетворяет условиям теоремы 8.2. Доказательство аналогично доказательству, приведенному выше для функции $\widetilde{r}_1^\lambda$. В этом доказательстве независимость функции $\widetilde{r}_1^\lambda$ от λ не была существенной; достаточно было лишь свойства ограниченности типа (8.32). (Конечно, значение константы c_σ может быть больше ее значения в простейшем случае.)

Остается доказать, что функция $\widetilde{r}_{i\sigma\varkappa}^\lambda(P)$ удовлетворяет условиям теоремы. Тщательная поэтапная проверка показывает, что этого можно достичь дословным повторением доказательства того, что функция $\widetilde{r}_{i\sigma\varkappa}$ удовлетворяет теореме 7.1 со следующими изменениями. Все функции и обобщенные функции $\widetilde{T}_{i\sigma}$, f, $\overline{f}$ и т. д. приобретают индекс λ; то же относится и к переменным P^-, P'^- и т. д. Функции $\chi(p)$, $\chi^0(p)$ необходимо заменить на функции $\chi(\lambda p)$, $\chi^0(\lambda p)$, а также ввести множители $[\omega_\lambda(p_i)]^{-1}$. Любое утверждение типа «$f(V, U) \in H_\varepsilon(U; V)$» следует заменить утверждением «$\lambda^{-\bar{\varepsilon}} f_\lambda (U, V)$ является ограниченным семейством в пространстве $H_\varepsilon (U; V)$», где $\bar{\varepsilon}$ — положительное число, обращающееся в нуль вместе с ε.

В связи с формулой (8.24) уже отмечалось, что справедливо следующее следствие теоремы 8.2.

Теорема 8.3.

Масштабная степень $d(n, \sigma)$ функции $r_\sigma(x_1, \ldots, x_n)$ для теории типа (μ, ν) удовлетворяет неравенству

$$d(n, \sigma) \geqslant -3n - \sigma(\mu + \nu - 4). \tag{8.33}$$

Эта оценка представляет интерес только для функций $r_\sigma(X)$, не обращающихся в нуль. В любом порядке по σ только конечное число функций $r_\sigma \neq 0$, а для остальных функций $d(n, \sigma) = \infty$.

Отметим, что теорема 8.3 дает только нижнюю границу для $d(n, \sigma)$. Существуют теории, для которых условие (8.33) не оптимально. Например, если $\tilde{r}_1(p_1, \ldots, p_\mu) = \delta^4 \left(\sum p_i\right) \prod_1^\mu p_i^2$, то минимальное решение в высших порядках есть просто $\tilde{r}_\sigma(P) = \prod p_i^2 \tilde{r}_\sigma^0(P)$, где $\tilde{r}_\sigma^0$ — решение, соответствующее значению $\tilde{r}_1^0(p_1, \ldots, p_\mu) = \delta^4 \left(\sum p_i\right)$. Это приводит к значению $d(n, \sigma) = SD(r_\sigma^0) - 2\mu$ вместо значения $d(n, \sigma) = SD(r_\sigma^0) - 2\mu\sigma$, которое получилось бы, если бы (8.33) представляло собой равенство. Можно допустить также, что подлинное возрастание значения $d(n, \sigma)$ по сравнению со значением (8.33) происходит в результате сокращения различных членов в I_σ. Однако подобные сокращения членов никогда не наблюдались и маловероятно, чтобы они могли иметь место.

Как было показано в гл. 5, функции $r_\sigma(x_1, \ldots, x_n)$ определяются единственным образом, если

$$d(n, \sigma) > -4n + 4 \text{ при } n > 2, \tag{8.34}$$

$$d(2, \sigma) \geqslant -6.$$

Более общее утверждение гласит: число неоднозначностей тесно связано с разностью

$$\delta(n, \sigma) = -4n + 4 - d(n, \sigma). \tag{8.35}$$

Если $\delta(n, \sigma) < 0$ при $n > 2$, $\delta(2, \sigma) \leqslant 2$, то никаких неоднозначностей не существует. Число неоднозначностей растет с ростом δ. Из неравенства (8.33) следует

$$\delta(n, \sigma) \leqslant -n + 4 + \sigma(\mu + \nu - 4). \tag{8.36}$$

Теория называется *перенормируемой*, если для любого $n \geqslant 2$ существует конечное число $\delta(n)$, такое, что

$$\delta(n, \sigma) \leqslant \delta(n) \text{ для всех } \sigma \geqslant 1 \tag{8.37}$$

и

$$\delta(n) < 0 \tag{8.38}$$

для всех n, кроме конечного числа. Все остальные теории называются *неперенормируемыми.* В неперенормируемых теориях с ростом порядка σ число неопределенностей неограниченно возрастает.

Из соотношения (8.36) следует, что критерии перенормируемости (8.37), (8.38) выполняются для теорий типа (4, 0) и (3, 0). Они соответствуют в канонической теории поля теориям с лагранжианами взаимодействия A^4 и A^3, которые, как известно, перенормируемы в каноническом смысле слова. Если исключить некоторые маловероятные сокращения, только эти две теории являются перенормируемыми, отвлекаясь от тривиальных моделей типа тех, что упоминались при обсуждении теоремы 8.3. Напомним, что мы принимаем $\mu \geqslant 3$, и отметим, что ν должно быть четным числом, поскольку только полиномы четных степеней могут быть лоренц-инвариантными.

Конец этой главы мы посвятим краткому обсуждению двух перенормируемых теорий.

Теория типа (4, 0)

Отметим сначала, что все функции r_σ с нечетным числом аргументов обращаются в нуль:

$$\delta(n, \sigma) = -\infty \text{ для нечетных } n. \tag{8.39}$$

Оценка (8.36) при $\mu = 4$, $\nu = 0$ принимает вид

$$\delta(n, \sigma) \leqslant -n + 4, \tag{8.40}$$

откуда следует

$$\delta(n) = -n + 4. \tag{8.41}$$

Для $n > 4$ имеем $\delta(n) < 0$, так что *функции $r_\sigma(x_1, \ldots, x_n)$, $n > 4$, определены единственным образом во всех порядках σ функциями r_τ низших порядков. Поскольку $\delta(2) = 2$, то же имеет место для двухточечной функции.*

Случай

$$\delta(4, \sigma) = 0 \tag{8.42}$$

отвечает в точности граничному значению, начиная с которого появляются неоднозначности. В каждом порядке σ мы получим в функции $r_\sigma(x_1, \ldots, x_4)$ неоднозначность одного и того же вида

$$c_\sigma \delta^4(x_1 - x_2)\, \delta^4(x_1 - x_3)\, \delta^4(x_1 - x_4), \tag{8.43}$$

где c_σ — вещественная константа. Такой же вид имеет и функция $r_1(x_1, \ldots, x_4)$. Удобно выбрать $c_1 = (2\pi)^6$. Любой другой множитель c_1 можно включить в константу связи g.

Проблема фиксирования констант c_σ тесно связана с другой основной проблемой: как охарактеризовать взаимодействие критерием, сформулированным вне рамок теории возмущений. Предложенная выше процедура задания модели путем спецификации ее запаздывающих функций в первом порядке, очевидно, не вполне удовлетворительна. В данном случае можно предложить следующее. Четырехточечная функция $\tilde{r}(p_1, \ldots, p_4)$ в p-пространстве имеет вид (2.27):

$$\tilde{r}(p_1, \ldots, p_4) = \delta^4(p_1 + \ldots + p_4)\, \hat{r}(p_1, \ldots, p_4). \tag{8.44}$$

Функция $\hat{r}$ определена на плоскости $p_1 + \ldots + p_4 = 0$ и аналитична в окрестности начала координат [27]. Поэтому ее значение в начале координат

$$\bar{g} = \hat{r}(0, 0, 0, 0) \tag{8.45}$$

имеет смысл. Константа $\bar{g}$ вещественна в силу вещественности функции $r(X)$.

Определим теперь теорию типа (4, 0), предположив, что величина $\bar{g}$ имеет предписанное ненулевое значение, а все функции $r(x_1, \ldots, x_n)$ обладают максимальными допустимыми s-степенями, совместимыми с этим значением.

Применим этот критерий в теории возмущений. Пусть

$$R_\sigma = \hat{r}_\sigma(0, 0, 0, 0). \tag{8.46}$$

Потребуем, чтобы

$$\sum_\sigma R_\sigma g^\sigma = \bar{g}, \tag{8.47}$$

где константа $\bar{g}$ фиксирована. Здесь мы сталкиваемся с проблемой определения «константы связи» g, т. е. такого параметра разложения, который не определяется общей характеристикой теории, приведенной выше. Более естественным представляется выбор в качестве параметра разложения самой константы $\bar{g}$:

$$g = \bar{g}. \tag{8.48}$$

В этом случае из равенства (8.47) следует

$$R_1 = 1, \ R_\sigma = 0 \text{ при } \sigma > 1. \tag{8.49}$$

Тогда в первом порядке теории возмущений мы получим в точности функцию $\tilde{r}_1(p_1, \ldots, p_4)$, с которой и начнем построение теории. Все другие функции $\tilde{r}_1(P)$ обращаются в нуль, поскольку очевидно, что среди возможных решений нулевое решение отвечает максимальной s-степени. (Мы применяем требование максимальности по отдельности в каждом порядке, пренебрегая возможными сокращениями членов различных порядков.) Построение высших порядков происходит в точности по сформулированным выше правилам, а неоднозначности в четырехточечной функции фиксированы условием (8.49).

Однако выбор (8.48) не является единственно возможным. Его можно обобщить следующим образом:

$$\bar{g} = \bar{g}(g) = \sum_\sigma \bar{g}_\sigma g^\sigma, \qquad \bar{g}_0 = 0, \tag{8.50}$$

где $\bar{g}(g)$ — степенной ряд по g. Параметры $\bar{g}_\sigma$ могут быть фиксированы произвольно. В этом случае условие (8.49) заменяется условием

$$R_\sigma = \bar{g}_\sigma. \tag{8.51}$$

Соответствующее решение обозначим $r'_\sigma(x_1, \ldots, x_n)$. Тогда $\tilde{r}'_1(p_1, \ldots, p_n) = \bar{g}_1 \delta^4\left(\sum p_i\right)$, а в остальном будем строить теорию, как и прежде, используя для устранения всех неоднозначностей условие (8.51). Легко убедиться в том, что два решения

$$\sum_{\sigma} \bar{g}^{\sigma} r_{\sigma}(X) \tag{8.52}$$

и

$$\sum_{\sigma} g^{\sigma} r'_{\sigma}(X) \tag{8.53}$$

совпадают в смысле формальных степенных рядов. Действительно, если разложение (8.50) подставить в решение (8.52), а затем перестроить ряд по степеням g, то окажется, что коэффициенты результирующего разложения $r''_{\sigma}(X)$ обладают всеми нужными свойствами коэффициентов $r'_{\sigma}(X)$ и тем самым совпадают с ними.

Свобода выбора функции $\bar{g}(g)$ в формуле (8.50) есть частное проявление той свободы выбора, которая известна в канонической теории возмущений под названием «ренормализационной группы» (см. [5], гл. 8). Переход от $\bar{g}$ к g соответствует конечной перенормировке константы связи. Аналогичная свобода в принципе имеет место и при выборе массы m. Вместо того, чтобы рассматривать массу как фиксированный внешний параметр, мы могли бы так же, как в случае с $\bar{g}$, считать ее функцией константы связи: $m = m(g)$. Но это привело бы к значительному усложнению формализма, связанному с тем, что m явным образом (через посредство Δ^{+}-функции) входит в соотношения полноты (2.36). Очевидно, что вводить такое усложнение в рассматриваемую простую модель не имеет смысла. Однако это вовсе не так для моделей с частицами нескольких сортов, где зависимость от g *разностей* масс может иметь важное физическое значение. Подобная ситуация рассматривается в работе [33].

Теория типа (3, 0)

Эта теория соответствует лагранжиану взаимодействия A^3. Как известно, такая теория, строго говоря, не имеет смысла [34], поскольку в ней нарушается требование положительности энергии. Однако эта трудность в теории возмущений не проявляется. Поэтому такую теорию допустимо рассматривать в нашем контексте и это рассмотрение может представлять самостоятельный интерес, поскольку некоторые характерные отличия от теории типа (4, 0) могут быть важны в более реалистических теориях.

При $\mu = 3$, $\nu = 0$ оценка (8.36) принимает вид

$$\delta(n, \sigma) \leqslant -n + 4 - \sigma, \tag{8.54}$$

где справа стоит выражение, убывающее с ростом σ. Исключая очевидный случай $n = 3$, $\sigma = 1$, все значения $\delta(n, \sigma)$ удовлетворяют критерию единственности (8.34): теория типа (3, 0) оказывается фиксированной нашими правилами *однозначно*. Такие теории называются «сверхперенормируемыми» [1]). Каким образом этот результат согласуется со свободой, связанной с ренормализационной группой, которая должна была бы проявиться в данном случае так же, как и в теории типа (4, 0)? Посмотрим, что произойдет, если ввести новую константу связи g':

$$g = \sum_\sigma g_\sigma g'^\sigma, \quad g_0 = 0 \tag{8.55}$$

с фиксированными коэффициентами g_σ и подставить (8.55) в разложение

$$r(X) = \sum_\sigma g^\sigma r_\sigma(X). \tag{8.56}$$

После формальной перестройки рядов мы получаем следующее разложение по константе g':

$$r(X) = \sum_\sigma g'^\sigma r'_\sigma(X). \tag{8.57}$$

Функции r'_σ удовлетворяют уравнениям (3.9), включая дополнительные условия, а функция r'_1 характеризует тип (3, 0). Однако в высших порядках нарушается условие максимальности s-степени за счет добавления к максимально гладкой трехточечной функции членов вида

$$c_\sigma \delta^4(x_1 - x_2)\, \delta^4(x_1 - x_3). \tag{8.58}$$

Нет никаких серьезных оснований не рассматривать такую теорию, поскольку условие максимальности s-степени, кото-

[1]) В более общей формулировке теория называется сверхперенормируемой, если существует только конечное число значений $\delta(n, \sigma)$, превышающих критическое значение 0, начиная с которого появляются неоднозначности. (По поводу определения перенормируемых и сверхперенормируемых теорий см., например, [38*].— *Прим. перев.*)

рое в строгом смысле применяется по отдельности в каждом порядке теории возмущений, обосновать трудно. Выражение (8.57) можно рассматривать как разложение метода возмущений для теории типа (3, 0) в некоем обобщенном смысле. Именно в этом обобщенном смысле можно говорить о данной теории вне метода возмущений.

По аналогии с формулой (8.44) имеем

$$\tilde{r}(p_1, p_2, p_3) = \delta^4(p_1 + p_2 + p_3)\,\hat{r}(p_1, p_2, p_3), \tag{8.59}$$

где

$$\bar{g} = \hat{r}(0, 0, 0) \tag{8.60}$$

— конечное вещественное число. В этом случае теория типа (3, 0) определяется как теория с заданным значением $\bar{g} \neq 0$, при котором все функции $r(X)$ обладают максимальной возможной s-степенью.

При рассмотрении такой теории мы опять сталкиваемся со свободой выбора константы связи g типа

$$\bar{g} = \sum \bar{g}_\sigma g^\sigma, \tag{8.61}$$

т. е. мы можем свободно выбирать $\bar{g}_\sigma$, кроме ограничения $\bar{g}_0 = 0$, $\bar{g}_1 \neq 0$ (вводимого для упрощения). При любом выборе $\bar{g}_\sigma$ нашими методами мы получим ряды теории возмущений с дополнительным требованием

$$\hat{r}_\sigma(0, 0, 0) = \bar{g}_\sigma. \tag{8.62}$$

Условие максимальности s-степени применяется только к ограниченному классу решений r_σ, удовлетворяющих условию (8.62). Поэтому функции r_σ определяются единственным образом. Различные решения, отвечающие разным выборам $\bar{g}_\sigma$, согласуются между собой как формальные степенные ряды, если соответствующие константы связи правильно выражаются друг через друга по аналогии с (8.55). Среди многих возможностей существует одна возможность, отвечающая нашему более ограничительному рецепту, ведущему к условию (8.54). Именно, в этом случае следует положить $\bar{g}_1 = 1$, а для определения $\bar{g}_\sigma$ использовать условие (8.60), где функция $\hat{r}_\sigma(p_1, p_2, p_3)$ соответствует функции $\hat{r}_\sigma$ с максимальной s-степенью, которая была построена в гл. 5. Этот специальный выбор *не соответствует* естественному выбору $\bar{g} = g$.

ЛИТЕРАТУРА[1])

1. *Hepp K.*, Théorie de la renormalization. Lectures Notes in Physics, v. 2, Springer, Heidelberg, 1969 (готовится русский перевод: *Хепп К.* Теория перенормировок, изд-во «Наука», 1974).
2. *Valatin J.*, Proc. Roy. Soc., **A225**, 535; **A226**, 254 (1954).
3. *Brandt R. A.*, Fortschr. Phys., **18**, 249 (1970).
4. *Zimmermann W.*, in Lectures on elementary particles and quantum field theory, v. I, ed. S. Deser, M. Grisaru, H. Pendelton, MIT Press, 1971.
5. *Боголюбов Н. Н.*, *Ширков Д. В.*, Введение в теорию квантованных полей, Гостехиздат, М., 1957 (готовится 2-е издание: изд-во «Наука», 1974).
6. *Lehmann H.*, *Symanzik K.*, *Zimmermann W.*, Nuovo Cimento, **1**, 205 (1955).
7. *Lehmann H.*, *Symanzik K.*, *Zimmermann W.*, Nuovo Cimento, **6**, 319 (1957).
8. *Glaser V.*, *Lehmann H.*, *Zimmermann W.*, Nuovo Cimento, **6**, 1122 (1957).
9. *Nishijima K.*, Prog. Theor. Phys., **17**, 765 (1957); Phys. Rev., **119**, 485 (1960) ; *Muraskin M.*, *Nishijima K.*, Phys. Rev., **122**, 331 (1961).
10. *Fried H. M.*, Journ. Math. Phys., **3**, 1107 (1962).
11. *Rugh R. E.*, Ann. Phys. (N.Y.), **23**, 335 (1963).
12. *Steinmann O.*, Ann. Phys. (N.Y.), **29**, 76 (1964); **36**, 267 (1966).
13. *Streater R. F.*, *Wightman A. S.*, PCT, spin and statistics, and all that, Benjamin, New York, 1964 (см. перевод: *Стритер Р.*, *Вайтман А.*, PCT, спин и статистика и все такое, изд-во «Наука», М., 1966).
14. *Jost R.*, The General Theory of Quantized Fields, Am. Math. Soc., Providence RI, 1965 (см. перевод: *Йост Р.*, Общая теория квантованных полей, изд-во «Мир», М., 1967).
15. *Hepp K.*, Lectures, Les Houches summer school, 1970.
16. *Epstein H.*, *Glaser V.*, Informal Meeting on Renormalization Theory, August 1969, Trieste, Report IC 69 121, Int. Centre of Teor. Phys., Trieste.
17. *Epstein H.*, *Glaser V.*, Prépublications de la R.C.P. no. 25, vol. 11, Institut de mathematique, Université de Strasbourg, 1970; CERN preprint TH 1156, 1970.

---

[1]) Работы, отмеченные звездочкой (*), добавлены при подготовке русского издания.— *Прим. перев.*

18. *Steinmann O.*, Comm. Math. Phys., **10**, 245 (1968).
19. *Schwartz L.*, Théorie des distributions. Hermann, Paris, 1966.
20. *Hepp K.*, Comm. Math. Phys., **1**, 95 (1965).
21. *Schneider W.*, Helv. Phys. Acta, **39**, 81 (1966).
22. *Мусхелишвили Н. И.*, Сингулярные интегральные уравнения, изд-во «Наука», М., 1968.
23. *Фаддеев Л. Д.*, Математические вопросы квантовой теории рассеяния для системы трех частиц, Труды МИАН СССР, т. 69, Изд-во АН СССР, 1963.
24. *Steinmann O.*, Helv. Phys. Acta, **33**, 257; 347 (1960).
25. *Araki H.*, Journ. Math. Phys., **2**, 163 (1961).
26. *Ruelle D.*, Nuovo Cimento, **19**, 356 (1961).
27. *Epstein H.*, в книге Axiomatic Field Theory (Brandeis Summer School, 1965), Gordon and Breach, New York, 1966.
28. *Methée P. D.*, Comment. Math. Helv., **28**, 225 (1954).
29. *Garding L.*, Nuovo Cimento Suppl., **14**, 45 (1959).
30. *Lichnerowicz A.*, Algèbre et analyse linéaires, Masson et Cie., Paris, 1947, p. 123.
31. *Steinmann O.*, Comm. Math. Phys., **18**, 179 (1970).
32. *Symanzik K.*, Comm. Math. Phys., **18**, 227 (1970).
33. *Steinmann O.*, Comm. Math. Phys., **15**, 133 (1969).
34. *Osterwalder K.*, Fortschr. Phys., **19**, 43 (1971).
35*. *Боголюбов Н. Н., Медведев Б. В., Поливанов М. К.*, Вопросы теории дисперсионных соотношений, Физматгиз, М., 1958.
36*. *Боголюбов Н. Н., Логунов А. А., Тодоров И. Т.*, Основы аксиоматического подхода в квантовой теории поля, изд-во «Наука», М., 1969.
37*. *Владимиров В. С.*, Методы теории функций многих комплексных переменных, изд-во «Наука», М., 1964.
38*. *Медведев Б. В., Поливанов М. К.*, Лекции в Международной зимней школе теоретической физики, Дубна, 1964, том 1, стр. 77.
39*. *Медведев Б. В., Павлов В. П., Поливанов М. К., Суханов А. Д.*, ТМФ, **13**, 3 (1972); Доклад на Международной конференции по математическим вопросам квантовой теории поля и квантовой статистики, Москва, 1972.
40*. *Файнберг В. Я.*, Лекции в Международной зимней школе теоретической физики, Дубна, 1964, том 1, стр. 140.

ОГЛАВЛЕНИЕ

УВАЖАЕМЫЙ ЧИТАТЕЛЬ!

Ваши замечания о содержании книги, ее оформлении, качестве перевода и другие просим присылать по адресу: 129820, Москва, И-110, ГСП, 1-й Рижский пер., д. 2, изд-во «Мир».

О. Штейнман

МЕТОД ВОЗМУЩЕНИЙ
В АКСИОМАТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ

Редактор Н. Л. Телеснин
Художник Ф. Л. Лейн
Художественный редактор Ю. С. Урманчеев
Технический редактор Н. И. Манохина
Корректор Е. В. Кочегарова

Сдано в набор 28/I 1974 г.
Подписано к печати 3/VI 1974 г.
Бумага тип. № 1 $84\times108^1/_{32}$=2,13 бум. л.
7,14 усл. печ. л.
Уч.-изд. л. 6,35. Изд. № 2/6987
Цена 65 коп. Зак. 079

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»
Москва, 1-й Рижский пер., 2

Ордена Трудового Красного знамени Московская
типография № 7 «Искра революции»
Союзполиграфпрома при Государственном комитете
Совета Министров СССР по делам издательств,
полиграфии и книжной торговли
Москва, К-1, Трехпрудный пер., 9