ИЗДАТЕЛЬСТВО
«МИР»

Shlomo Sternberg

Associate Professor of Mathematics,
Harvard University

LECTURES ON DIFFERENTIAL GEOMETRY

Prentice Hall, Inc. Englewood Cliffs, N.J.
1964

С. Стернберг

ЛЕКЦИИ ПО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ

Перевод с английского
Д. В. АЛЕКСЕЕВСКОГО

Под редакцией
А. Л. ОНИЩИКА

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»
Москва 1970

Книга известного американского математика содержит современное изложение основ теории дифференцируемых многообразий, вариационного исчисления, дифференциальной геометрии, а также теории групп Ли.

Для чтения ее достаточно знаний начального университетского курса. Книга заинтересует математиков самых различных специальностей.

Редакция литературы по математическим наукам

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА ПЕРЕВОДА

Как пишет сам автор в предисловии, эта книга не является ни «основами», ни обзором современной дифференциальной геометрии. Первые три ее главы следует рассматривать как введение в дифференциальную геометрию, а остальные четыре дают далеко продвинутое и подробное изложение отдельных вопросов, а именно вариационного исчисления на многообразиях, теории групп Ли, дифференциальной геометрии евклидова пространства и геометрии G-структур (вместе с теорией связностей).

Особенностью книги является то, что в ней сочетается изложение некоторых замечательных результатов «классической» дифференциальной геометрии (например, результаты Гаусса по теории поверхностей и новые исследования в этом направлении) с «современным» аспектом этой науки, который принято рассматривать как изучение так называемых «инфинитезимальных структур» на многообразиях. При этом показывается, как классическая теория кривых и поверхностей в евклидовом пространстве может быть выведена из общих фактов теории групп Ли и расслоенных пространств.

Большой интерес представляет последняя глава книги, в которой изложены идеи и результаты Э. Картана по проблеме эквивалентности G-структур. Читатель получает полное представление о той роли, которую играет в дифференциальной геометрии понятие расслоенного пространства [1]. В частности, касательное и кокасательное расслоения служат в гл. IV естественными рамками

[1] Как пишет Н. Бурбаки в своих «Очерках по истории математики» (ИЛ, М., 1963, стр. 133), «дифференциальной геометрии после ее блестящего расцвета... стала угрожать опасность впасть... в склеротическое состояние, пока современные исследования (берущие свое начало особенно от идей Э. Картана) расслоенных пространств и «глобальных» проблем не вернули ей жизнеспособность».

для вариационного исчисления (в том числе вариационных принципов классической механики).

При переводе были исправлены некоторые неточности и опечатки оригинала.

Книга написана активно работающим математиком, широко известным своими исследованиями в теории псевдогрупп Ли и других вопросах дифференциальной геометрии, и несет на себе печать его индивидуальности. Она, несомненно, будет с интересом встречена советскими читателями.

А. Л. Онищик

ИЗ ПРЕДИСЛОВИЯ АВТОРА

Эта книга основана на лекциях, прочитанных в Гарварде в течение 1960—61 учебного года. Она предполагает знакомство читателя с элементами современной алгебры (группы, векторные пространства и т. п.), теоретико-множественной топологии, а также с некоторыми элементарными понятиями анализа. В остальном изложение замкнуто в себе. Однако по охвату материала эту книгу нельзя считать полной. Я не преследую цели дать «основы» с изложением всех фундаментальных сведений о предмете или «обзор», затрагивающий любую тему. Скорее я излагаю интересующие меня избранные вопросы дифференциальной геометрии с точки зрения, которую, я надеюсь, читатель сочтет достаточно последовательной.

Тот, кто хочет изучить дифференциальную геометрию, должен прочесть также и другие книги, чтобы, с одной стороны, познакомиться с иным подходом к изложенному здесь материалу, а с другой — найти изложение не рассмотренных здесь вопросов. В анализе содержания книги по главам, следующем ниже, я дам несколько советов по поводу дальнейшего чтения. Для общих справок я рекомендую четыре книги. Это «Введение в теорию дифференцируемых многообразий» Ленга [9], где содержится ясное изложение основ теории дифференцируемых многообразий, и «Группы Ли и дифференциальная геометрия» Номидзу [13], содержащая теорию связностей. Бóльшая часть материала этих двух книг приводится в той или иной форме и у нас, однако читателю поучительно было бы ознакомиться с изложением этих вопросов, которое не связано с другими рассматриваемыми нами темами. Изложение теорем де Рама и Ходжа и связанных с ними фактов римановой геометрии читатель найдет в книге де Рама «Дифференцируемые многообразия». Наконец, читатель должен изучить какую-нибудь книгу по классической дифференциальной геометрии; здесь я не могу отдать предпочтение ни одной из них.

Несколько слов о характере изложения. Местами оно сжато, а местами подробно. В основном я старался быть кратким там, где материал является «стандартным» (как, например, при изложении теории связностей в § 1 гл. VII). Кроме того, книга писалась более двух лет, так что мой стиль менялся в зависимости от погоды, настроения и т. п. На протяжении всей книги приводятся упражнения. Их надо рассматривать как составную часть текста. Лишь немногие из них являются трудными. По большей части эти упражнения содержат дополнительные сведения, которые я счел более уместным и поучительным представить в такой форме. Часто доказательство теоремы опирается на предыдущее упражнение.

Надеюсь, что в книге нет серьезных логических ошибок. Однако я не питаю подобных надежд относительно знаков, множителей 2π и тому подобных вещей. Забота о том, чтобы все формулы были в порядке, стоила мне немало сил, но, несмотря на все мои старания, в текст, без сомнения, вкралось немало ошибок подобного сорта. Единственное, что я могу посоветовать,— тщательно проверяйте все формулы. Чем сложнее формула или уравнение, тем более восприимчива она к ошибке...

Теперь я дам более подробный анализ содержания. В гл. I собран алгебраический аппарат, который используется на протяжении всей книги. Весь материал является стандартным. Справки — в книге Бурбаки «Полилинейная алгебра». Наши обозначения достаточно близки к обозначениям Бурбаки.

В гл. II приведены основные сведения о дифференцируемых многообразиях и отображениях. Другая трактовка большей части этого материала (за исключением теоремы Сарда и аппроксимационных теорем) дана в упомянутой выше книге Ленга. Я включил теорему Сарда по двум причинам. Во-первых, она имеет большой самостоятельный интерес и находит многочисленные применения (а вместе с тем отыскать ее доказательство в литературе довольно трудно). Во-вторых, эта весьма нетривиальная теорема элементарна в том смысле, что в ней используется только понятие дифференцируемого отображения. Как-то я обнаружил, что мне трудно усвоить последовательность определений, если они не подкреплены действительно серьезной теоремой, связывающей их воедино. Для читателей с теми же склонностями я привожу теорему Сарда и различные аппроксимационные теоремы даже до того, как дано определение касательного пространства.

Моя трактовка «величин», состоящая в рассмотрении в качестве первичного объекта расслоения реперов (или корепероов), вероятно, не является самой прозрачной (см. снова книгу Ленга). Я стремился мотивировать этим понятие главного расслоения, а также показать, что тензоры и им подобные объекты являются «объектами первого порядка» и что существуют аналогичные объекты «высших порядков», хотя последние и не рассматриваются в этой книге.

Глава III содержит стандартные сведения относительно интегрирования на многообразиях. Другой подход, а также доказательство теоремы де Рама и теория гармонических форм содержатся в книге де Рама «Дифференцируемые многообразия» [15]. Дальнейшее обсуждение материала § 4 и 5 с многочисленными красивыми применениями читатель найдет в книге Э. Картана «Интегральные инварианты» [6]. Эта книга, подобно всем работам Э. Картана, богата геометрическими идеями. Она становится вполне доступной, как только читатель привыкнет к языку бесконечно малых. Что касается § 6, то существует много хороших изложений теории преобразований в механике. Мне больше всего нравятся последние две главы книги Леви-Чивита и Амальди «Курс теоретической механики». Современное изложение см. в книге Голдстейна «Классическая механика» [1]).

В главе IV мы рассматриваем вариационное исчисление как изучение некоторых геометрических структур. Наша точка зрения в некотором смысле является промежуточной между точкой зрения Картана, изложенной им в его «Интегральных инвариантах», и точкой зрения Каратеодори в его «Variationsrechnung» [5]. Влияние Каратеодори особенно сказывается в нашей трактовке достаточных условий. Упор, который мы делаем на рассмотрение геометрических объектов, связанных внутренним образом с касательным и кокасательным расслоениями, приводит к тому, что некоторые идеи собственно вариационного исчисления остаются в тени. В частности, мы не даем достаточно ясного изложения второй вариации и не приводим теорему Морса об индексе и вообще теорию Морса. Хорошее изложение теории Морса читатель найдет в записях лекций Ботта, прочитанных им в Боннском университете (1960 г.), и принстонских лекций Милнора (1961 г.) [2]).

Глава V содержит стандартные сведения из теории групп Ли. Классическим руководством здесь является книга Шевалле «Теория групп Ли».

Глава VI — наименее связная часть этой книги. В ней я попытался применить результаты предыдущих глав к дифференциальной геометрии евклидова пространства, в частности, показать, что структурные уравнения группы евклидовых движений играют решающую роль в этой теории. Я также стараюсь здесь мотивировать понятие связности, которое вводится в гл. VII. Из гл. VI читатель получит исключительно однобокое представление об евклидовой геометрии. Он должен дополнить его чтением учебника по классической дифференциальной геометрии. Хорошим

---

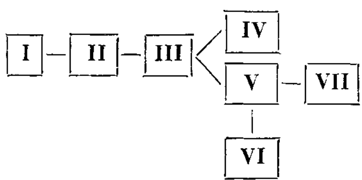
[1]) См. также книгу Ф. Р. Гантмахера «Лекции по аналитической механике» (М., 1966).— *Прим. ред.*

[2]) Bott R., Morse theory and its application to homotopy theory, Lecture notes by A. van de Ven (mimeographed), University of Bonn, 1960; Милнор Дж., Теория Морса, «Мир», М., 1965.

справочником с многочисленными ссылками является, по-видимому, книга Бляшке «Введение в дифференциальную геометрию», обозначения которой близки к нашим.

В гл. VII излагается теория G-структур. § 1 посвящен теории связностей. Хорошим руководством здесь является упомянутая выше книга Номидзу. В остальной части главы рассматривается то, что Картан назвал общей проблемой эквивалентности. Значительная часть собрания работ Картана (все еще не вполне оцененных) посвящена этому вопросу. Я попытался изложить несколько его основных идей и методов. Данная здесь трактовка почти полностью основана на совместной с И. М. Сингером работе по бесконечным группам Ли[1]). § 4 перекликается с толкованием Гийемина, приведенным в его диссертации (Гарвард, 1964). Другой подход к теории G-структур дал Бернар [3].

Не все главы зависят от всего предыдущего материала. Вот примерная схема зависимости глав:



Писать эту книгу было долгим и трудным делом, и многие мне помогли в этом. Прежде всего я обязан моим учителям: влияние покойного профессора Уинтнера сказывается прежде всего в сильном тяготении к классической механике. Моим первым знакомством с работами Эли Картана и, конечно, с современной дифференциальной геометрией я обязан профессору Чжэню.

По рассматриваемым в книге вопросам я имел много полезных бесед с профессорами Боттом, Глисоном, Херманом, Ленгом, Макки и Пале. Я обязан профессорам Номидзу и Смейлу, указавшим мне ошибки, вкравшиеся в черновик книги. Как уже упоминалось, большая часть гл. VII основана на совместной работе с профессором Сингером. Особую признательность я выражаю доктору Хан Са за многостороннюю помощь при подготовке этой книги — от упрощения доказательств и изложения до неблагодарной работы исправления типографских опечаток.

С. Стернберг

---

[1]) Первая часть этой работы опубликована в *J. Analyse Math.*, 15 (1965), 1—114.

Глава I

ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ АЛГЕБРЫ

Основная идея дифференциальной геометрии состоит в применении аппарата анализа к решению геометрических задач. Важнейший метод анализа предлагает для изучения объектов исследовать их «инфинитезимальные (бесконечно малые) части». Так, для изучения кривой исследуются ее касательные, для изучения функции — ее дифференциалы и т. д. Основное преимущество перехода к «бесконечно малым» заключается в том, что при этом все объекты становятся линейными. Так, каждая кривая «инфинитезимально» есть прямая линия (в том смысле, что мы можем заменить ее касательной), каждое дифференцируемое отображение «инфинитезимально» является линейным (заменяется своей матрицей Якоби). Поскольку нас будут интересовать в дальнейшем кривые, поверхности и вообще «дифференцируемые объекты» высших размерностей, мы прежде всего изучим их «инфинитезимальные» аналоги. Это приводит к рассмотрению ряда алгебраических вопросов, которые объединяются в раздел, известный под названием «полилинейная алгебра».

В этой главе собраны необходимые для дальнейшего алгебраические сведения (главным образом, из тензорной алгебры) и уточняется терминология. Большая часть этого материала общеизвестна, поэтому изложение здесь более краткое, чем обычно. Подробности читатель найдет в учебниках по линейной алгебре.

Мы предполагаем, что читатель свободно владеет понятиями векторного пространства, дуального пространства, линейного преобразования, группы и т. п. [В большей части этой главы не важно, над каким основным полем определены рассматриваемые векторные пространства. В некоторых случаях поле характеристики 2 может вызвать обычные трудности. Однако нас будет интересовать только поле вещественных чисел.]

§ 1. ТЕНЗОРНЫЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ ВЕКТОРНЫХ ПРОСТРАНСТВ

Пусть V и W — векторные пространства размерностей m и n соответственно. Отображение f прямого произведения $V \times W$ в векторное пространство Z называется *билинейным*, если оно линейно по каждому переменному в отдельности, т. е. если

$$f(a_1v_1 + a_2v_2,\ b_1w_1 + b_2w_2) = \\ = a_1b_1f(v_1, w_1) + a_1b_2f(v_1, w_2) + a_2b_1f(v_2, w_1) + a_2b_2f(v_2, w_2)$$

для всех векторов v_1, v_2 из V, w_1, w_2 из W и любых чисел a_1, a_2, b_1, b_2. Заметим, что если $v_1, \ldots, v_m$ — базис пространства V, а $w_1, \ldots, w_n$ — базис пространства W, то любое билинейное отображение f однозначно определяется значениями $f(v_i, w_j)$.

Упражнение 1.1. Пусть $f : V \times W \to Z$ — билинейное отображение и $g : Z \to Y$ — линейное отображение векторного пространства Z в векторное пространство Y. Показать, что $g \circ f$: $V \times W \to Y$ есть билинейное отображение.

Обозначим через $\mathrm{Hom}\,(V, W)$ множество линейных отображений пространства V в пространство W. Напомним, что $\mathrm{Hom}\,(V, W)$ есть векторное пространство размерности mn. Обозначим через V^* пространство всех линейных функций на V, т. е. дуальное к V пространство. Определим отображение φ: $V \times W \to \mathrm{Hom}\,(V^*, W)$ следующим образом: каждой паре (v, w) сопоставим линейное отображение $\varphi\,(v, w)$ пространства V^* в W, задаваемое формулой

$$\varphi\,(v, w)\, v^* = \langle v, v^* \rangle\, w$$

[где $v^* \in V^*$, а $\langle v, v^* \rangle$ — значение линейной функции v^* на векторе v; следовательно, $\langle v, v^* \rangle$ есть число].

Упражнение 1.2. Показать, что φ: $V \times W \to \mathrm{Hom}\,(V^*, W)$ есть билинейное отображение.

Упражнение 1.3. Пусть $v_1, \ldots, v_m$ — базис пространства V, а $w_1, \ldots, w_n$ — базис пространства W. Показать, что

$$\{\varphi\,(v_i, w_j)\}, \qquad i = 1, \ldots, m; \quad j = 1, \ldots, n,$$

есть базис пространства $\mathrm{Hom}\,(V^*, W)$.

Пусть f: $V \times W \to Z$ — билинейное отображение. Определим *линейное* отображение g_f: $\mathrm{Hom}\,(V^*, W) \to Z$. Положим

$$g_f\,(\varphi\,(v_i, w_j)) = f\,(v_i, w_j),$$

где $v_1, \ldots, v_m$ — базис пространства V, а $w_1, \ldots, w_n$ — базис пространства W. Это определяет отображение g_f на базисе $\{\varphi\,(v_i, w_j)\}$ пространства $\mathrm{Hom}\,(V^*, W)$. На все пространство $\mathrm{Hom}\,(V^*, W)$ отображение g_f продолжается по линейности.

Упражнение 1.4. Показать, что для любых $v \in V$ и $w \in W$ мы имеем $g_f\,(\varphi\,(v, w)) = f\,(v, w)$. Вывести отсюда, что отображение g_f не зависит от выбора базисов $v_1, \ldots, v_m$ и $w_1, \ldots, w_n$.

Итак, мы сопоставили каждому билинейному отображению f: $V \times W \to Z$ такое линейное отображение g_f: $\mathrm{Hom}\,(V^*, W) \to Z$, что

$$f = g_f \circ \varphi. \tag{1.1}$$

Ясно, что f немедленно определяется по g_f.

Упражнение 1.5. Показать, что g_f однозначно определяется формулой (1.1), т. е. если $h \circ \varphi = h' \circ \varphi$, то $h = h'$.

Более общо, пусть $V_1, \ldots, V_k$ — конечномерные векторные пространства. Отображение $f\colon V_1 \times \ldots \times V_k \to W$ называется *полилинейным*, если оно линейно по каждому переменному в отдельности, т. е. если

$$f(u_1, \ldots, au_i + bv_i, u_{i+1}, \ldots, u_k) = \\ = af(u_1, \ldots, u_i, \ldots, u_k) + bf(u_1, \ldots, v_i, \ldots, u_k).$$

Мы хотим найти векторное пространство, универсальное относительно полилинейных отображений произведения $V_1 \times \ldots \times V_k$, т. е. построить векторное пространство U и такое полилинейное отображение $\varphi\colon V_1 \times \ldots \times V_k \to U$, что для любого полилинейного отображения $f\colon V_1 \times \ldots \times V_k \to W$ существует единственное линейное отображение $g\colon U \to W$, для которого $f = g \circ \varphi$:

$$\begin{tikzcd} V_1 \times \ldots \times V_k \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "f"'] & U \arrow[d, "g"] \\ & W \end{tikzcd}$$

Короче говоря, мы хотим, чтобы каждое f можно было пропустить через φ. Прежде всего ясно, что векторное пространство U и отображение φ определяются с точностью до изоморфизма. Действительно, если заданы два таких пространства U_1 и U_2 и отображения φ_1 и φ_2, то мы можем пропустить φ_1 через φ_2:

$$\begin{tikzcd} V_1 \times \ldots \times V_k \arrow[r, "\varphi_2"] \arrow[dr, "\varphi_1"'] & U_2 \arrow[d, "g_1^2"] \\ & U_1 \end{tikzcd}$$

т. е. $\varphi_1 = g_1^2 \circ \varphi_2$, где g_1^2 однозначно определено. Аналогично, $\varphi_2 = g_2^1 \circ \varphi_1$, откуда $\varphi_1 = g_1^2 \circ g_2^1 \circ \varphi_1$. По условию единственности $g_1^2 \circ g_2^1 = \mathrm{id}$, и, значит, g_1^2 осуществляет изоморфизм между U_2 и U_1.

Установим теперь существование пространства U. Пусть $\overline{U}$ обозначает свободное векторное пространство, образующими которого являются элементы из $V_1 \times \ldots \times V_k$. Таким образом, $\overline{U}$ есть множество всех конечных линейных комбинаций символов вида $(v_1, \ldots, v_k)$, где $v_j \in V_j$. Пусть $\overline{R}$ — подпространство в $\overline{U}$, порожденное элементами вида

$$a(v_1, \ldots, v_k) - (v_1, \ldots, av_i, v_{i+1}, \ldots, v_k),$$

$$(v_1, \ldots, v_i + w_i, \ldots, v_k) - (v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_k) - \\ - (v_1, \ldots, w_i, \ldots, v_k).$$

Тогда пространство $U = \overline{U}/\overline{R}$ обозначается символом $V_1 \otimes \ldots \otimes V_k$ и называется *тензорным произведением пространств* V_i. Определим полилинейное отображение $\varphi\colon V_1 \times \ldots \times V_k \to V_1 \otimes \ldots \otimes V_k$, ставя в соответствие вектору $(v_1, \ldots, v_k) \in V_1 \times \ldots \times V_k \subset \overline{U}$ его класс смежности по модулю $\overline{R}$. Мы будем писать

$$\varphi(v_1, \ldots, v_k) = v_1 \otimes \ldots \otimes v_k.$$

Пространство $V_1 \otimes \ldots \otimes V_k$ вместе с отображением φ универсально относительно полилинейных отображений. Действительно, пусть

$$f\colon V_1 \times \ldots \times V_k \to Z$$

— полилинейное отображение. Определим отображение $\overline{g}\colon \overline{U} \to Z$, полагая $\overline{g}(v_1, \ldots, v_k) = f(v_1, \ldots, v_k)$ и продолжая $\overline{g}$ по линейности. Так как f полилинейно, $\overline{g}$ аннулирует $\overline{R}$ и, значит, определяет такое отображение $g\colon V_1 \otimes \ldots \otimes V_k \to Z$, что $f = g \circ \varphi$. Поскольку φ отображает $V_1 \times \ldots \times V_k$ на множество образующих пространства $V_1 \otimes \ldots \otimes V_k$, из равенства $h \circ \varphi = 0$ следует, что $h = 0$. Это доказывает единственность отображения g. Итак, справедлива следующая

Теорема 1.1. *Пусть $V_1, \ldots, V_k$ — векторные пространства. Тогда существуют векторное пространство $V_1 \otimes \ldots \otimes V_k$ и полилинейное отображение*

$$\varphi\colon V_1 \times \ldots \times V_k \to V_1 \otimes \ldots \otimes V_k,$$

универсальные относительно полилинейных отображений. Любое другое универсальное пространство U канонически изоморфно $V_1 \otimes \ldots \otimes V_k$. Положим $\varphi(v_1, \ldots, v_k) = v_1 \otimes \ldots \otimes v_k$, и пусть $\{e_{i_r, r}\}$ — базис пространства V_r $(1 \leqslant i_r \leqslant \dim V_r)$. Тогда $\{e_{i_1, 1} \otimes \ldots \otimes e_{i_k, k}\}$ — базис пространства $V_1 \otimes \ldots \otimes V_k$.

Доказательство последнего утверждения — единственного непроверенного еще утверждения теоремы — мы оставляем читателю в качестве упражнения.

Упражнение 1.6. Показать, что существует канонический изоморфизм пространства $(V_1 \otimes \ldots \otimes V_l) \otimes (V_{l+1} \otimes \ldots \otimes V_k)$ на $V_1 \otimes \ldots \otimes V_k$. Мы будем обозначать этот изоморфизм через As (по первым буквам слова associative).

Упражнение 1.7. Показать, что существует канонический изоморфизм пространства $V_1 \otimes V_2$ на $V_2 \otimes V_1$.

Упражнение 1.8. Показать, что $K \otimes V = V$, если K — основное поле.

Пусть $T_i\colon V_i \to W_i$ $(i = 1, \ldots, k)$ — линейные отображения векторных пространств. Тогда отображение $\psi\colon V_1 \times \ldots \times V_k \to W_1 \otimes \ldots \otimes W_k$, переводящее вектор $(v_1, \ldots, v_k)$ в вектор $(T_1v_1) \otimes \ldots \otimes (T_kv_k)$, очевидно, полилинейно и, значит, определяет линейное отображение

$$T_1 \otimes \ldots \otimes T_k\colon V_1 \otimes \ldots \otimes V_k \to W_1 \otimes \ldots \otimes W_k.$$

Если $S_i\colon U_i \to V_i$ $(i = 1, \ldots, k)$ — линейные отображения векторных пространств, то

$$(T_1 \otimes \ldots \otimes T_k) \circ (S_1 \otimes \ldots \otimes S_k) = \\ = (T_1 \circ S_1) \otimes \ldots \otimes (T_k \circ S_k).$$

В частности, если ρ_i — представление [1]) группы G_i в векторном пространстве V_i $(i = 1, \ldots, k)$, то мы можем построить представление $\rho_1 \otimes \ldots \otimes \rho_k$ группы $G_1 \times \ldots \times G_k$ в пространстве $V_1 \otimes \ldots \otimes V_k$, полагая

$$(\rho_1 \otimes \ldots \otimes \rho_k)(g_1, \ldots, g_k) = \rho_1(g_1) \otimes \ldots \otimes \rho_k(g_k).$$

Пусть $G_1 = \ldots = G_k = G$. Рассматривая композицию диагонального отображения $G \to G \times \ldots \times G$, заданного формулой $g \to (g, \ldots, g)$, с отображением $\rho_1 \otimes \ldots \otimes \rho_k$, мы получим представление группы G в пространстве $V_1 \otimes \ldots \otimes V_k$, которое переводит g в $\rho_1(g) \otimes \ldots \otimes \rho_k(g)$. Это представление называется *тензорным произведением представлений* $\rho_1, \ldots, \rho_k$.

Упражнение 1.9. Пусть $S\colon V \to V$ и $T\colon W \to W$, причем матрица линейного преобразования S в базисе $\{e_1, \ldots, e_m\}$ пространства V равна (s_{ij}), а матрица линейного преобразования T в базисе $\{f_1, \ldots, f_n\}$ пространства W равна (t_{kl}). Какова матрица преобразования $S \otimes T$ в базисе $\{e_i \otimes f_k\}$ пространства $V \otimes W$?

§ 2. ТЕНЗОРНАЯ АЛГЕБРА ВЕКТОРНОГО ПРОСТРАНСТВА

Пусть V — конечномерное векторное пространство, а V^* — пространство линейных форм на V. Если $v \in V$ и $w^* \in V^*$, то значение формы w^* на векторе v обозначим $\langle v, w^* \rangle$. Особый интерес представляют тензорные произведения нескольких экземпляров пространств V и V^*. Например, пространство $V \otimes V^*$ может быть отождествлено с пространством всех линейных преобразований пространства V (см. упражнение 1.4). Действительно, формула $(f \otimes g^*)(v) = \langle v, g^* \rangle f$ позволяет отождествить любой элемент

---

[1]) Напомним, что *представление* группы G в векторном пространстве V есть гомоморфизм ρ группы G в группу всех линейных преобразований пространства V. Таким образом, $\rho(g)$ есть линейное преобразование и $\rho(g_1g_2) = \rho(g_1) \circ \rho(g_2)$.

вида $f \otimes g^*$ из $V \otimes V^*$ с некоторым линейным преобразованием. Это отождествление продолжается по линейности на все $V \otimes V^*$. С другой стороны, пусть $\{e_1, \ldots, e_n\}$ — базис пространства V, а $\{e^{1*}, \ldots, e^{n*}\}$ — дуальный базис пространства V^*, так что

$$\langle e_i, e^{j*}\rangle = \delta_i^j = \begin{cases} 1, & \text{если } i = j, \\ 0, & \text{если } i \neq j. \end{cases}$$

Тогда линейное преобразование, имеющее в базисе $\{e_1, \ldots, e_n\}$ матрицу (a_j^i), отождествляется с $\sum a_j^i e_i \otimes e^{j*} \in V \otimes V^*$. Подобным же образом легко устанавливается, что пространство $V^* \otimes V^*$ можно рассматривать как пространство билинейных форм на V.

Мы будем изучать пространства вида $V_1 \otimes \ldots \otimes V_k$, где каждое V_i есть или V, или V^*. Если пространство состоит из r экземпляров пространства V и s экземпляров пространства V^*, то оно называется *пространством тензоров типа* (r, s); число r называется *контравариантной*, а число s — *ковариантной степенью*. Конечно, числа r, s не определяют пространство. Играет роль также порядок расположения сомножителей: мы различаем пространства $V \otimes V^*$ и $V^* \otimes V$. Если даны два пространства тензоров $U = V_1 \otimes \ldots \otimes V_k$ типа (r, s) и $U' = V_1' \otimes \ldots \otimes V_{k'}'$ типа (r', s'), то ассоциативность тензорного произведения позволяет определить билинейное отображение произведения $U \times U'$ в пространство $V_1 \otimes \ldots \otimes V_k \otimes V_1' \otimes \ldots \otimes V_{k'}'$ тензоров типа $(r + r', s + s')$. Это отображение определяет мультипликативную структуру на (слабой) прямой сумме всех тензорных произведений пространств V и V^*. Мы обозначим это пространство через $T(V)$:

$$T(V) = K + V + V^* + V \otimes V + V \otimes V^* + \\ + V^* \otimes V + V^* \otimes V^* + \ldots .$$

Рассматриваемое вместе с мультипликативной структурой, оно называется *тензорной алгеброй векторного пространства* V.

Существует другая важная операция — свертка, отображающая пространство тензоров типа (r, s) в пространство тензоров типа $(r - 1, s - 1)$ (если $r, s \geqslant 1$). Она определяется следующим образом. Пусть $U = V_1 \otimes \ldots \otimes V_k$, где $V_i = V$, $V_j = V^*$ $(1 \leqslant i \leqslant k, 1 \leqslant j \leqslant k)$. Пусть U' — тензорное произведение всех сомножителей тензорного произведения U (в том же порядке), за исключением V_i и V_j. Отображение $V_1 \times \ldots \times V_k \to U'$, определенное формулой

$$(v_1, \ldots, v_k) \to \langle v_i, v_j\rangle\, v_1 \otimes \ldots \otimes v_k$$

(тензорное произведение справа не содержит v_i и v_j), как легко видеть, полилинейно. Оно определяет отображение $U \to U'$, называемое *сверткой* по индексам i и j.

Для произвольного линейного преобразования S пространства V обозначим через S^* преобразование пространства V^*, определяемое формулой

$$\langle v, S^*w^* \rangle = \langle Sv, w^* \rangle \quad \text{для всех} \quad v \in V, \ w^* \in V^*.$$

Пусть $\{e_1, \ldots, e_n\}$ — базис V и $\{e^{1*}, \ldots, e^{n*}\}$ — дуальный базис V^*. Невырожденное линейное преобразование A пространства V переводит базис $\{e_i\}$ в базис $\{f_i\}$, где $f_i = Ae_i$. Для дуального базиса $\{f^{i*}\}$ имеем $f^{i*} = (A^{-1})^* e^{i*}$. Предположим, что базисы $\{e_i\}$ и $\{f_j\}$ связаны между собой следующим образом:

$$e_i = \sum \alpha_i^j f_j, \qquad f_i = \sum \beta_i^j e_j,$$

так что

$$\sum \alpha_k^j \beta_i^k = \delta_i^j.$$

Тогда

$$f^{j*} = \sum \alpha_i^j e^{i*}, \qquad e^{j*} = \sum \beta_i^j f^{i*}.$$

Таким образом, если $v \in V$, $v = \sum v^i e_i = \sum w^i f_i$, то

$$w^i = \sum \alpha_j^i v^j,$$

а если $v^* \in V^*$, $v^* = \sum x_i e^{i*} = \sum y_i f^{i*}$, то

$$y_i = \sum \beta_i^j x_j.$$

Согласно теореме 1.1, базис $\{e_1, \ldots, e_n\}$ вместе с дуальным определяет базис в любом пространстве тензоров. Например, базис пространства $V \otimes V^* \otimes V \otimes V$, соответствующий базису $\{e_1, \ldots, e_n\}$, состоит из тензоров $\{e_{i_1} \otimes e^{i_2*} \otimes e_{i_3} \otimes e_{i_4}\}$, $1 \leqslant i_1, \ i_2, \ i_3, \ i_4 \leqslant n$.

Любой тензор $t \in V \otimes V^* \otimes V \otimes V$ может быть записан в виде

$$t = \sum_{i_1, i_2, i_3, i_4} t^{i_1}{}_{i_2}{}^{i_3 i_4} e_{i_1} \otimes e^{i_2*} \otimes e_{i_3} \otimes e_{i_4}. \tag{2.1}$$

Если t разлагается по базису, соответствующему другому базису $\{f_1, \ldots, f_n\}$:

$$t = \sum s^{j_1}{}_{j_2}{}^{j_3 j_4} f_{j_1} \otimes f^{j_2*} \otimes f_{j_3} \otimes f_{j_4},$$

то связь коэффициентов разложений дается формулой

$$s^{j_1}{}_{j_2}{}^{j_3 j_4} = \sum \alpha_{i_1}^{j_1} \beta_{j_2}^{i_2} \alpha_{i_3}^{j_3} \alpha_{i_4}^{j_4} t^{i_1}{}_{i_2}{}^{i_3 i_4}. \tag{2.2}$$

Тензорное произведение тензора t на тензор $r = \sum r^{i_1}{}_{i_2}{}^{i_3} e_{i_1} \otimes e^{i_2*} \otimes e_{i_3}$ дается формулой

$$t \otimes r = \sum t^{i_1}{}_{i_2}{}^{i_3 i_4} r^{i_5}{}_{i_6}{}^{i_7} e_{i_1} \otimes e^{i_2*} \otimes e_{i_3} \otimes e_{i_4} \otimes e_{i_5} \otimes e^{i_6*} \otimes e_{i_7}.$$

Так как положение индексов указывает, какое тензорное произведение базисных векторов рассматривается, мы будем иногда писать

$$t = (t^{i_1}{}_{i_2}{}^{i_3 i_4}) \tag{2.1*}$$

вместо более длинного выражения (2.1). Таким образом, вышеприведенное равенство может быть переписано в виде

$$(t^{i_1}{}_{i_2}{}^{i_3 i_4}) \otimes (r^{j_1}{}_{j_2}{}^{j_3}) = (t^{i_1}{}_{i_2}{}^{i_3 i_4} r^{i_5}{}_{i_6}{}^{i_7}).$$

Аналогично в терминах координат может быть выражена свертка тензоров.

Упражнение 2.1. Показать, что свертка тензора $(t^{i_1}{}_{i_2}{}^{i_3 i_4})$ по первым двум индексам дает $\left(\sum\limits_i t^i{}_i{}^{i_3 i_4}\right)$.

Обозначение, введенное при замене формулы (2.1) на (2.1*), можно рассмотреть с несколько другой точки зрения. Пусть $\mathscr{F}(V)$ — множество всех реперов (т. е. базисов) пространства V. Пусть $GL(n)$ (полная линейная группа от n переменных) есть группа всех невырожденных матриц порядка n, причем произведение матриц (α_j^i) и $(\alpha_j'^i)$ задается формулой $\left(\sum\limits_k \alpha_k^i \alpha_j'^k\right)$.

Любая матрица $A = (\alpha_j^i) \in GL(n)$ определяет отображение множества $\mathscr{F}(V)$ на себя: если $\underline{e} = (e_1, \ldots, e_n) \in \mathscr{F}(V)$, то $\underline{e}A = \underline{f} = (f_1, \ldots, f_n)$, где

$$f_j = \sum \alpha_j^i e_i. \tag{2.3}$$

Если $A' = (\alpha_j'^i)$ и $\underline{f}A' = \underline{g}$, то

$$g_i = \sum \alpha_j'^k f_k = \sum_i \left(\sum_k \alpha_j'^k \alpha_k^i\right) e_i. \tag{2.4}$$

Но $\left(\sum \alpha_j'^k \alpha_k^i\right) = AA'$. Таким образом, мы можем переписать (2.4) в виде

$$\underline{e}(AA') = (\underline{e}A)A'. \tag{2.5}$$

Именно поэтому действие A на репер $\underline{e}$ мы записываем как $\underline{e}A$ вместо того, чтобы, как обычно, писать функцию слева от аргумента. Формула (2.5) показывает, что $GL(n)$ действует справа как группа преобразований множества $\mathscr{F}(V)$. Заметим, что она действует *свободно*: две различные матрицы переводят произвольный репер в два различных репера, и, кроме того, *транзитивно*: произвольный репер может быть переведен в любой другой репер с помощью подходящей матрицы. Пусть теперь Q — произвольное пространство, на котором $GL(n)$ действует слева, т. е.

$$(AA')q = A(A'q). \tag{2.6}$$

На пространстве $\mathcal{F}(V) \times Q$ введем следующее отношение эквивалентности:

$$(\underline{e}, p) \sim (\underline{f}, q),$$

если существует такая матрица $A \in GL(n)$, что

$$\underline{f} = \underline{e}A \quad \text{и} \quad p = Aq.$$

Нетрудно проверить, что это действительно отношение эквивалентности. Классы эквивалентных элементов пространства $\mathcal{F}(V) \times Q$ называются *величинами типа* Q (над V). Приведем несколько примеров.

1. Пусть $Q_V = R^n$ — пространство всех наборов n чисел $X = (x^1, \ldots, x^n)$. Если $A = (\alpha^i_j)$, то положим $A(x^1, \ldots, x^n) = (y^1, \ldots, y^n)$, где $y^i = \sum \alpha^i_j x^j$. Построим отображение φ: $\mathcal{F}(V) \times Q \to V$, полагая $\varphi(\underline{e}, x) = \sum x^j e_j$. Тогда

$$\varphi(\underline{e}A, A^{-1}X) = \sum_{i,\, j,\, k} (\beta^i_j x^j)(\alpha^k_i e_k) = \sum x^j e_j.$$

Таким образом, φ постоянно на классах эквивалентных элементов пространства $\mathcal{F}(V) \times Q_V$. Следовательно, оно отображает величины типа Q_V в V. С другой стороны, отображение, которое ставит в соответствие любым $v \in V$, $\underline{e} \in \mathcal{F}(V)$ координаты вектора v в базисе $\underline{e}$, и правило замены координат позволяют сопоставить каждому $v \in V$ единственную величину типа Q_V.

2. Пусть $Q_{V^*} = R^n$ — пространство всех наборов n чисел $(x_1, \ldots, x_n)$, а группа $GL(n)$ действует на Q_{V^*} следующим образом:

$$A(x_1, \ldots, x_n) = (y_1, \ldots, y_n), \qquad y_i = \sum \beta^j_i x_j,$$

где $A = (\alpha^i_j)$ и $\sum \alpha^i_j \beta^j_k = \delta^i_k$. Определим отображение φ: $\mathcal{F}(V) \times Q_{V^*} \to V^*$, полагая

$$\varphi(\underline{e}, (x_1, \ldots, x_n)) = \sum x_i e^{i*}.$$

Как и выше, это отображение постоянно на классах эквивалентных элементов и поэтому позволяет отождествить величины типа Q_{V^*} с V^*.

3. Если мы выберем в качестве Q тензорное произведение нескольких различных пространств Q_V и Q_{V^*}, то полученное пространство можно отождествить с соответствующим тензорным произведением пространств V и V^*. Именно это кроется за символизмом формулы (2.1*). Такая точка зрения удобна, поскольку часто на практике мы встречаемся с наборами n^k чисел (координат), заданных для каждого репера, и законом преобразования

этих координат при замене репера, т. е. с величинами определенного типа. Если координаты меняются по закону, определяемому тензорным произведением представлений группы $GL(n)$ на Q_V и Q_{V^*}, то соответствующая величина может быть отождествлена с тензором.

4. Пусть $Q_{\delta_p} = R$ и $Ax = |\alpha^i_j|^p x$. Величины этого типа называются (*скалярными*) плотностями веса p.

5. Пусть $Q_\rho = R^k$ и группа $GL(n)$ действует на Q_ρ согласно k-мерному *линейному* представлению ρ этой группы. Величины типа Q_ρ называются *линейными величинами*. Все величины четырех предыдущих примеров линейны. Важность линейных величин заключается в том, что *любая* линейная величина может быть получена из своих неприводимых компонент при помощи простейших операций (т. е. тензорного произведения и прямой суммы).

Упражнение 2.2. Предположим, что для каждого репера $(e_1, \ldots, e_n)$ задано множество чисел ${}_et^{i_1, \ldots, i_k}$. Показать, что эти числа определяют тензор тогда и только тогда, когда для любого тензора ${}_es_{i_1 i_2 i_3}$ выражение

$$\sum_{i_1, i_2, i_3} {}_et^{i_1, \ldots, i_k}\, {}_es_{i_1 i_2 i_3}$$

определяет тензор. [Число и положение индексов, по которым производится суммирование, не играют в критерии никакой роли.]

§ 3. КОНТРАВАРИАНТНАЯ И СИММЕТРИЧЕСКАЯ АЛГЕБРЫ

С тензорной алгеброй связаны некоторые другие алгебры, представляющие значительный интерес. Прежде всего множество $C(V)$ всех тензоров ковариантной степени нуль является, очевидно, подалгеброй алгебры $T(V)$:

$$\begin{aligned} C(V) &= K + V + V \otimes V + \ldots = \\ &= C^0(V) + C^1(V) + C^2(V) + \ldots, \end{aligned}$$

где $C^p(V) = V \otimes \ldots \otimes V$ (p раз). Она называется *алгеброй контравариантных тензоров*.

Упражнение 3.1. Показать, что алгебра $C(V)$ обладает следующим свойством «универсальности»: для любого отображения f пространства V в ассоциативную алгебру A существует единственный гомоморфизм $\varphi: C(V) \to A$, такой, что $f = \varphi \circ i$, где i — вложение V в $C(V)$.

Всякое линейное отображение $f: V \to W$ индуцирует линейное отображение $f \otimes \ldots \otimes f: V \otimes \ldots \otimes V \to W \otimes \ldots \otimes W$ (которое обозначается символом $C^p(f)$) и тем самым гомоморфизм $C(f)$: $C(V) \to C(W)$ [1]). Ясно, что $C(f \circ g) = C(f) \circ C(g)$.

Определим спаривание [2]) пространств $C(V)$ и $C(V^*)$ в K следующим образом:

$$\langle x, y^* \rangle = 0, \quad \text{если} \quad x \in C^p(V), \qquad y^* \in C^q(V^*), \qquad p \neq q,$$

и $\langle x, y^* \rangle$ есть полная свертка тензора $x \otimes y^*$ по всем индексам по порядку, если $x \in C^p(V)$, $y^* \in C^p(V^*)$. В терминах координат, если $x = (x^{i_1, \ldots, i_p})$, а $y^* = (y_{i_1, \ldots, i_p})$, то

$$\langle x, y^* \rangle = \sum_{i_1, \ldots, i_p} x^{i_1, \ldots, i_p} y_{i_1, \ldots, i_p}.$$

Легко видеть, что это спаривание позволяет отождествить $C^p(V^*)$ с $(C^p(V))^*$. Более того, это отождествление естественно в следующем смысле: для любого отображения $f: V \to W$ и элементов $x \in C(V)$, $y^* \in C(W^*)$

$$\langle C(f)\, x, y^* \rangle = \langle x, C(f^*)\, y^* \rangle, \tag{3.1}$$

где $f^*: W^* \to V^*$ — дуальное отображение [3]). Поэтому мы будем отождествлять $C^p(V^*)$ с $(C^p(V))^*$.

Упражнение 3.2. Показать, что

$$\langle x_1 \otimes \ldots \otimes x_p,\ y^{1*} \otimes \ldots \otimes y^{p*} \rangle = \langle x_1, y^{1*} \rangle \ldots \langle x_p, y^{p*} \rangle.$$

В пространстве $C^p(V)$ действует группа π_p подстановок из p элементов: пусть заданы подстановка $\sigma \in \pi_p$ и тензор вида $x_1 \otimes \ldots \otimes x_p$; мы полагаем

$$\sigma(x_1 \otimes \ldots \otimes x_p) = x_{\sigma(1)} \otimes \ldots \otimes x_{\sigma(p)}$$

и продолжаем отображение σ по линейности на все $C^p(V)$. В терминах координат

$$\sigma(t^{i_1, \ldots, i_p}) = (t^{i_{\sigma^{-1}(1)}, \ldots, i_{\sigma^{-1}(p)}}).$$

Таким образом, мы имеем представление группы π_p в пространстве $C^p(V)$. Легко видеть, что это представление коммутирует с тензорным произведением представлений группы $GL(n)$, т. е. для

---

[1]) Таким образом, правило, которое сопоставляет каждому векторному пространству V алгебру $C(V)$, является ковариантным функтором, и только в силу несчастной исторической случайности алгебра $C(V)$ называется контравариантной.

[2]) То есть билинейное отображение произведения $C(V) \times C(V^*)$ в K. — *Прим. перев.*

[3]) Оно определяется формулой $f^*(w^*)(v) = \langle w^*, f(v) \rangle$, $v \in V$, $w^* \in W^*$. — *Прим. перев.*

любых $t \in C^p(V)$, $\sigma \in \pi_p$ и $g \in GL(n)$ мы имеем

$$g\sigma t = \sigma g t, \tag{3.2}$$

где $gt = (g \otimes \ldots \otimes g)\, t$ (p сомножителей).

Из (3.2) следует, что любой общий собственный вектор представления группы π_p, т. е. любой тензор, удовлетворяющий условию

$$\sigma t = \rho(\sigma)\, t, \tag{3.3}$$

где ρ — некоторая числовая функция на π_p, переводится преобразованием g в тензор, удовлетворяющий тому же уравнению

$$\sigma g t = g \sigma t = g \rho(\sigma)\, t = \rho(\sigma)\, g t.$$

Два важных частных случая соответствуют функциям

$$\rho(\sigma) = 1$$

и

$$\rho(\sigma) = \operatorname{sgn}\sigma = \begin{cases} +1, & \text{если } \sigma \text{ четно}, \\ -1, & \text{если } \sigma \text{ нечетно}. \end{cases}$$

Подпространство пространства $C^p(V)$, состоящее из тензоров, удовлетворяющих равенству $\sigma t = t$, будет обозначаться $S^p(V)$ и называться *пространством симметрических* (*контравариантных*) *тензоров степени* p. Существует естественная проекция $\mathscr{S}$ пространства $C^p(V)$ на $S^p(V)$. Она задается формулой

$$\mathscr{S}(t) = \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in \pi_p} \sigma t.$$

Легко проверить, что $\mathscr{S}^2 = \mathscr{S}$ и что $\mathscr{S}(C^p(V)) = S^p(V)$. Пусть

$$S(V) = K + S^1(V) + S^2(V) + \ldots .$$

Определим в $S(V)$ произведение, полагая

$$a \circledcirc b = \mathscr{S}(a \otimes b).$$

Упражнение 3.3. Показать, что $S(V)$ — коммутативная ассоциативная алгебра.

Упражнение 3.4. Показать, что алгебра $S(V)$ универсальна по отношению к отображениям пространства V в коммутативные алгебры, т. е. если $f\colon V \to A$, то существует единственный гомоморфизм $\varphi\colon S(V) \to A$, такой, что $f = \varphi \circ i$, где i — вложение V в $S(V)$.

Упражнение 3.5. Показать, что $S(V^*)$ можно отождествить с кольцом полиноминальных функций на пространстве V.

Упражнение 3.6. Определим действие V на $S(V^*)$, полагая

$$v[x] = 0, \quad \text{если} \quad x \in S^0(V^*),$$

и $v[x]$ — тензор $pv \otimes x$, свернутый по любым двум индексам, если $x \in S^p(V^*)$. Показать, что $v[s \circledcirc t] = v[s] \circledcirc t + s \circledcirc v[t]$ и, значит, v есть дифференцирование алгебры $S(V^*)$. Показать, что при отождествлении, указанном в упражнении 3.5, этому действию соответствует дифференцирование в направлении v.

Упражнение 3.7. Пусть $f\colon V \to W$. Показать, что $\mathcal{S} \circ C^p(f) = C^p(f) \circ \mathcal{S}$, так что f индуцирует отображение $S^p(f)\colon S^p(V) \to S^p(W)$ и гомоморфизм $S(f)\colon S(V) \to S(W)$.

Упражнение 3.8. Показать, что если $x \in C^p(V)$ и $y^* \in C^p(V^*)$, то $\langle \mathcal{S}x, y^* \rangle = \langle x, \mathcal{S}y^* \rangle$. Вывести из этого, что можно отождествить $S^p(V^*)$ с $(S^p(V))^*$ и что это отождествление естественно.

Пространство $S^2(V^*)$ есть пространство всех симметрических билинейных форм на V. Форму $b \in S^2(V^*)$ называют иногда *индефинитной метрикой на* V. Она сопоставляет каждому $v \in V$ «длину» $b(v, v)$. Благодаря изоморфизму пространства $V^* \otimes V^*$ с $\mathrm{Hom}(V, V^*)$ форма b индуцирует линейное отображение $V \to V^*$. Это отображение является изоморфизмом тогда и только тогда, когда при любом фиксированном $v \neq 0$ линейная функция $b(v, \cdot)$ не равна тождественно нулю. Метрика b, обладающая этим свойством, называется *невырожденной*. Выбор невырожденной метрики (которая индуцирует изоморфизм V на V^*, а следовательно, и V^* на V) позволяет отображать тензоры контравариантного типа в тензоры ковариантного типа, и обратно. Пусть в некотором базисе невырожденная метрика b задается матрицей (g_{ij}), а тензор из $V \otimes V$, определяющий изоморфизм $V^* \to V$, обратный к индуцированному метрикой b, — матрицей (g^{ij}) [1]. Тогда, например, мы имеем изоморфизм $V \otimes V^* \otimes V \to V \otimes V \otimes V^*$, определяемый формулой

$$(t^{i_1}{}_{i_2}{}^{i_3}) \to \left(\sum g^{i_2 j_2} g_{i_3 j_3} t^{i_1}{}_{j_2}{}^{j_3}\right).$$

Операции умножения на (g^{ij}) или (g_{ij}) с последующей сверткой иногда называют *подниманием* (или *опусканием*) *индексов*. По известной теореме алгебры каждая метрика над полем вещественных чисел R в подходящей системе координат имеет вид

$$b(v, v) = \sum_{i=1}^{k} (v^i)^2 - \sum_{i=k+1}^{r} (v^i)^2, \quad \text{где} \quad v = (v^i).$$

Целые числа k и r являются инвариантами метрики b. Если $r = n$, то b невырожденна, и обратно. Если $k = n$, то $b(v, v) > 0$ для всех $v \neq 0$, и метрика называется *положительно определенной*, или *евклидовой*. Если $k = n - 1$, то метрика называется *лоренцевой*.

---

[1] Таким образом, матрицы (g_{ij}) и (g^{ij}) взаимно обратны. — *Прим. перев.*

§ 4. ВНЕШНЯЯ АЛГЕБРА

Теперь мы рассмотрим подпространство пространства $C^p(V)$, соответствующее второму собственному значению $\rho(\sigma)$ в (3.3), т. е. пространство антисимметрических тензоров $\bigwedge^p(V)$. Как и для пространства симметрических тензоров, существует очевидная проекция $C^p(V)$ на $\bigwedge^p(V)$, задаваемая формулой

$$\mathscr{A}t = \frac{1}{p!}\sum_{\sigma}(\operatorname{sgn}\sigma)\,\sigma(t),$$

где $\operatorname{sgn}\sigma = \pm 1$ в соответствии с тем, четна σ или нечетна. Как и раньше, мы вводим умножение в

$$\bigwedge(V) = \bigwedge^0(V) + \bigwedge^1(V) + \bigwedge^2(V) + \ldots$$

(где $\bigwedge^0(V) = K$, $\bigwedge^1(V) = V$), полагая

$$s \wedge t = \mathscr{A}(s \otimes t), \quad s \in \bigwedge^p(V), \quad t \in \bigwedge^q(V)$$

Таким образом, $s \wedge t \in \bigwedge^{p+q}(V)$. Знак подстановки из $p+q$ элементов, передвигающей первые p элементов за последние q элементов, равен $(-1)^{pq}$ (подстановка получается, если переставить каждый из первых p элементов, начиная с p-го, с последними q элементами, т. е. в результате pq транспозиций соседних элементов). Следовательно, $\mathscr{A}(t \otimes s) = (-1)^{pq}\mathscr{A}(s \otimes t)$ или

$$s \wedge t = (-1)^{pq}\, t \wedge s. \tag{4.1}$$

Упражнение 4.1. Показать, что $\bigwedge(V)$ — ассоциативная алгебра.

Упражнение 4.2. Охарактеризовать $\bigwedge^p(V)$ и $\bigwedge(V)$ свойствами универсальности.

Теорема 4.1. *Размерность внешней алгебры $\bigwedge(V)$ n-мерного векторного пространства V равна 2^n. Если $e_1, \ldots, e_n$ — базис V, то базис пространства $\bigwedge(V)$ образуют элементы* 1 *и*

$$e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_r}, \quad 1 \leqslant i_1 < \ldots < i_r \leqslant n, \quad r = 1, \ldots, n. \tag{4.2}$$

Доказательство. Элементы $\mathscr{A}(e_{j_1} \otimes \ldots \otimes e_{j_r}) = e_{j_1} \wedge \ldots \wedge e_{j_r}$, очевидно, порождают $\bigwedge^r(V)$. Из соотношений антикоммутативности (4.1) следует, что $e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_r}$, где $i_1 < \ldots < i_r$, порождают $\bigwedge^r(V)$ и что $\bigwedge^r(V) = 0$ при $r > n$. Осталось показать, что элементы (4.2) линейно независимы. Можно считать число r фиксированным, так как члены, соответствующие различным значениям r, очевидно, независимы. Далее, при $r = n$

$$e_1 \wedge \ldots \wedge e_n = \mathscr{A}(e_1 \otimes \ldots \otimes e_n) \neq 0,$$

так как различные члены вида $e_{i_1} \otimes \ldots \otimes e_{i_n}$ независимы. Предположим, что при $r < n$ существует линейное соотношение вида

$$\sum a^{i_1, \ldots, i_r} e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_r} = 0. \tag{4.3}$$

Пусть $j_{r+1}, \ldots, j_n$ — множество индексов, дополнительное к фиксированному множеству индексов $i_1, \ldots, i_r$. Умножим равенство (4.3) на $e_{j_{r+1}} \wedge \ldots \wedge e_{j_n}$. Все члены произведения, за исключением члена с $e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_r}$, содержат два одинаковых сомножителя и, следовательно, равны нулю ввиду антикоммутативности. Поэтому $a^{i_1, \ldots, i_r} e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_r} \wedge e_{j_{r+1}} \wedge \ldots \wedge e_{j_n} = \pm a^{i_1, \ldots, i_r} e_1 \wedge \ldots \wedge e_n = 0$, откуда $a^{i_1, \ldots, i_r} = 0$ и теорема доказана.

В зависимости от ситуации мы будем либо выражать антисимметрические тензоры в виде разложения по базисам (4.2), либо задавать их координатами. Так, мы будем писать

$$t = \sum_{i_1 < \ldots < i_r} t^{i_1, \ldots, i_r} e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_r} \quad \text{или} \quad t = (t^{i_1, \ldots, i_r}).$$

Рассмотрим теперь некоторые геометрические применения внешней алгебры.

Теорема 4.2. *Необходимое и достаточное условие линейной зависимости векторов $x_1, \ldots, x_r$ состоит в том, что*

$$x_1 \wedge \ldots \wedge x_r = 0. \tag{4.4}$$

Доказательство. Если эти векторы зависимы, то мы можем выразить один из них через другие, скажем

$$x_r = \sum_{k=1}^{r-1} a_k x_k.$$

Тогда

$$x_1 \wedge \ldots \wedge x_r = x_1 \wedge \ldots \wedge \left(\sum a_k x_k\right) = \\ = \sum a_k x_1 \wedge \ldots \wedge x_{r-1} \wedge x_k = 0,$$

так как каждый член последней суммы содержит одинаковые сомножители. С другой стороны, если векторы $x_1, \ldots, x_r$ линейно независимы, то мы можем всегда найти такие векторы $x_{r+1}, \ldots, x_n$, что $x_1, \ldots, x_n$ образуют базис V. Тогда $x_1 \wedge \ldots \wedge x_n \neq 0$, и тем более $x_1 \wedge \ldots \wedge x_r \neq 0$.

Элементы из $\bigwedge^r(V)$ иногда называют *r-векторами*. Те r-векторы, которые могут быть записаны как внешнее произведение векторов из V (всякий r-вектор представим в виде линейной комбинации таких r-векторов), называют *разложимыми* r-векторами. Справедлива следующая

Теорема 4.3. *Каждому r-мерному линейному подпространству W в V соответствует разложимый r-вектор $w \neq 0$, определенный с точностью до (ненулевого) скалярного множителя, причем*

$$x \in W \text{ тогда и только тогда, когда } x \wedge w = 0.$$

Пусть W_1 и W_2 — подпространства размерности r_1 и r_2, а w_1 и w_2 — соответствующие r_1-вектор и r_2-вектор. Для того чтобы $W_1 \subset W_2$, необходимо и достаточно существование такого $(r_2 - r_1)$-вектора v, что $w_2 = w_1 \wedge v$. Для выполнения условия $W_1 \cap W_2 = \{0\}$ необходимо и достаточно, чтобы $w_1 \wedge w_2 \neq 0$, причем в этом случае $w_1 \wedge w_2$ есть $(r_1 + r_2)$-вектор, соответствующий $W_1 + W_2$.

Доказательство. Пусть $x_1, \ldots, x_r$ — базис W; положим $w = x_1 \wedge \ldots \wedge x_r$. Если $y_1, \ldots, y_r$ — любой другой базис и

$$y_i = \sum a_{ij} x_j,$$

то

$$y_1 \wedge \ldots \wedge y_r = \det(a_{ij})\, x_1 \wedge \ldots \wedge x_r,$$

так что r-вектор w определен с точностью до скалярного множителя. В силу предыдущей теоремы вектор x является линейной комбинацией векторов $x_1, \ldots, x_r$ тогда и только тогда, когда $x_1 \wedge \ldots \wedge x_r \wedge x = w \wedge x = 0$.

Необходимое и достаточное условие того, что W_1 содержится в W_2, состоит в том, что любой базис $x_1, \ldots, x_{r_1}$ подпространства W_1 может быть продолжен до базиса $x_1, \ldots, x_{r_1}, x_{r_1+1}, \ldots, x_{r_2}$ подпространства W_2. Тогда $w_1 = x_1 \wedge \ldots \wedge x_{r_1}$, $w_2 = x_1 \wedge \ldots \wedge x_{r_2}$ и $v = x_{r_1+1} \wedge \ldots \wedge x_{r_2}$. Необходимое и достаточное условие того, что $W_1 \cap W_2 = \{0\}$, состоит в линейной независимости векторов $x_1, \ldots, x_{r_1}, y_1, \ldots, y_{r_2}$, где $y_1, \ldots, y_{r_2}$ — базис W_2. Но если $w_1 = x_1 \wedge \ldots \wedge x_{r_1}$, $w_2 = y_1 \wedge \ldots \wedge y_{r_2}$, то это условие эквивалентно тому, что $w_1 \wedge w_2 \neq 0$. Если $w_1 \wedge w_2 \neq 0$, то $w_1 \wedge w_2 = x_1 \wedge \ldots \wedge x_{r_1} \wedge y_1 \wedge \ldots \wedge y_{r_2}$ есть, очевидно, r-вектор, соответствующий $W_1 + W_2$. Теорема доказана.

Можно перефразировать результаты теоремы 4.3, сказав, что p-мерные подпространства соответствуют классам эквивалентных разложимых p-векторов, если два p-вектора считать эквивалентными, когда они отличаются ненулевым множителем. Это, конечно, многомерный аналог того утверждения, что прямая, проходящая через начало координат, определяет лежащий на ней вектор с точностью до ненулевого множителя. В элементарной геометрии изучается также понятие «направленной» прямой. Каждая прямая имеет два направления. Не существует, конечно, способа выбора предпочтительного направления, но можно сказать, что эти два направления различаются «знаком». Для точной формулировки этих понятий введем более сильное отношение эквивалентности между векторами: будем считать два вектора эквивалентными, если они отличаются *положительным* множителем. Направленная прямая — класс эквивалентности по этому отношению. Ясно, что каждому старому классу эквивалентности (прямой линии) соответствуют два новых, и становится прозрачным источник различия в знаке. Аналогично, в высших размерностях мы можем говорить об ориентированных p-мерных пространствах. Это классы эквивалентности p-векторов с более сильным отношением эквивалентности: два p-вектора эквивалентны, если они отличаются положительным множителем. Снова каждое p-мерное пространство имеет две ориентации. [В двумерном случае, например, ориентация определяется заданием направления вращения: по или против часовой стрелки. В трехмерном случае мы различаем правило правой и левой руки, как показано на рис. 1.]

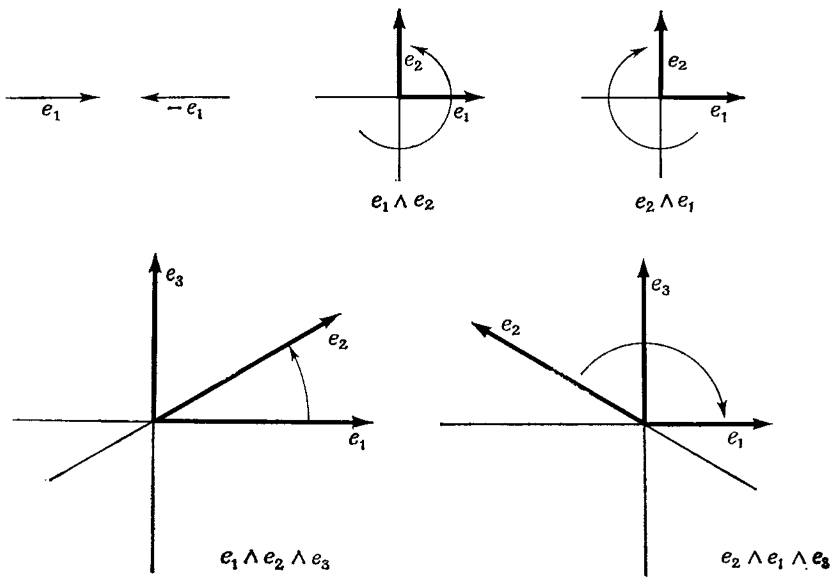


Рис. 1.

Выбор p-вектора означает больше, чем выбор ориентированной p-мерной плоскости. Два различных p-вектора, определяющих одну и ту же ориентированную p-мерную плоскость, отличаются постоянным множителем. Этот множитель есть инвариант полной линейной группы. При этом мы имеем в виду, что если $x_1 \wedge \ldots \wedge x_p = k y_1 \wedge \ldots \wedge y_p$, то

$$\bigwedge^p (T)(x_1 \wedge \ldots \wedge x_p) = k \bigwedge^p (T)(y_1 \wedge \ldots \wedge y_p)$$

для любого $T \in GL(n)$ [1]. Таким образом (в том же интуитивном смысле, что и предыдущее утверждение о знаке), p-вектор определяет, кроме ориентированной p-мерной плоскости, нечто еще; два различных p-вектора, соответствующих одной и той же p-мерной плоскости, отличаются некоторым корректно определенным скаляром. В случае $p = 1$ это означает просто, что

[1]) Здесь $\bigwedge^p (T)$ — ограничение отображения $C^p(T)$ на $\bigwedge^p (V)$.— *Прим. перев.*

вектор определяет нечто большее, чем направленную прямую; два вектора x и y, лежащие на одной и той же направленной прямой, имеют корректно определенное положительное отношение k, где $x = ky$. Нельзя говорить о *длине* вектора, пока не задана метрика. Если задана евклидова метрика, то вектор x может быть определен на ориентированной прямой указанием его длины $\| x \|$ (метрика фиксирует произвольный масштаб). Тогда множитель k есть отношение длины вектора x к длине вектора y. Интересно, что, хотя длина вектора зависит от выбора метрики, отношение длин (двух векторов, *лежащих на одной и той же прямой*) от него не зависит. Позднее мы увидим, что выбор евклидовой метрики на V индуцирует метрику на $\bigwedge^p (V)$ и, значит, сопоставляет каждому p-вектору $x_1 \wedge \ldots \wedge x_p$ его величину $\| x_1 \wedge \ldots \wedge x_p \|$. Эта величина есть объем параллелепипеда, натянутого на $x_1, \ldots, x_p$. Снова, в то время как объем $\| x_1 \wedge \ldots \wedge x_p \|$ зависит от выбора метрики, отношение двух объемов от него не зависит. В любом случае при фиксированной евклидовой метрике выбор p-вектора $x_1 \wedge \ldots \wedge x_p$ равнозначен выбору p-мерной плоскости, ориентации этой p-мерной плоскости и объема. Конечно, выбор $x_1 \wedge \ldots \wedge x_p$ включает в себя меньше, чем выбор векторов $x_1, \ldots, x_p$. Задание векторов $x_1, \ldots, x_p$ определяет дополнительно сам параллелепипед с объемом $\| x_1 \wedge \ldots \wedge x_p \|$ и порядок его ребер.

Пока мы занимаемся вопросами линейной независимости, сформулируем одну элементарную теорему, важные применения которой будут даны позднее.

Теорема 4.4 (лемма Картана). *Пусть векторы $x_1, \ldots, x_p$ линейно независимы и*

$$x_1 \wedge y_1 + \ldots + x_p \wedge y_p = 0. \tag{4.5}$$

Тогда

$$y_i = \sum_{j=1}^{p} A_{ij} x_j, \text{ где } A_{ij} = A_{ji}.$$

Доказательство. Выберем $x_{p+1}, \ldots, x_n$ так, чтобы векторы $x_1, \ldots, x_p, x_{p+1}, \ldots, x_n$ составляли базис V. Тогда мы можем написать

$$y_i = \sum_{j=1}^{p} A_{ij} x_j + \sum_{j=p+1}^{n} B_{ij} x_j.$$

Подставляя это выражение в (4.5), получим

$$\sum_{i<j\leq p} (A_{ij} - A_{ji}) x_i \wedge x_j + \sum_{i\leq p,\, j>p} B_{ij} x_i \wedge x_j = 0. \tag{4.6}$$

Произведения $x_i \wedge x_j$ $(i < j)$ линейно независимы по теореме 4.1. Значит, $B_{ij} = 0$, $A_{ij} = A_{ji}$, ч. т. д.

Пусть $f\colon V \to W$ — линейное отображение. Тогда для любого $\sigma \in \pi_p$ мы имеем $\sigma C^p(f) = C^p(f)\sigma$, так что

$$\mathcal{A} C^p(f) = C^p(f) \mathcal{A}. \tag{4.7}$$

Поэтому $C^p(f)$ отображает $\bigwedge^p(V)$ в $\bigwedge^p(W)$. Мы будем обозначать ограничение $C^p(f)$ на $\bigwedge^p(V)$ через $\bigwedge^p(f)$. Равенство (4.7) показывает также, что если мы обозначим через $\bigwedge(f)$ отображение $\bigwedge(V) \to \bigwedge(W)$, совпадающее на $\bigwedge^p(V)$ с $\bigwedge^p(f)$, то $\bigwedge(f)$ будет гомоморфизмом $\bigwedge(V)$ в $\bigwedge(W)$. Далее, для $x \in C^p(V)$, $y^* \in C^p(V^*)$ и $\sigma \in \pi_p$ имеем

$$\langle \sigma(x), y^* \rangle = \langle x, \sigma^{-1}(y^*) \rangle.$$

Поэтому

$$\langle \mathcal{A}x, y^* \rangle = \langle x, \mathcal{A}y^* \rangle.$$

Если теперь $x \in \bigwedge^p(V)$, то $x = \mathcal{A}x$ и

$$\langle x, y^* \rangle = \langle x, \mathcal{A}y^* \rangle. \tag{4.8}$$

Принимая во внимание предыдущее отождествление $(C^p(V))^*$ с $C^p(V^*)$, мы можем естественным образом отождествить $\left(\bigwedge^p(V)\right)^*$ с $\bigwedge^p(V^*)$, используя спаривание $\langle\ ,\ \rangle$, ограниченное на $\bigwedge^p(V)$ и $\bigwedge^p(V^*)$. Однако удобнее использовать спаривание $\langle\ |\ \rangle$ (мы заменили запятую на $|$), определяемое формулой

$$\langle x \mid y^* \rangle = p!\, \langle x, y^* \rangle \tag{4.9}$$

для $x \in \bigwedge^p(V)$, $y^* \in \bigwedge^p(V^*)$. Это спаривание, конечно, тоже естественно (т. е. ведет себя должным образом при отображениях).

Чтобы сделать эту двойственность между $\bigwedge^p(V)$ и $\bigwedge^p(V^*)$ более ясной, вычислим $\langle x \mid y^* \rangle$ для разложимых p-векторов. Если $x = x_1 \wedge \ldots \wedge x_p = \mathcal{A}(x_1 \otimes \ldots \otimes x_p)$ и $y = y^{1*} \wedge \ldots \wedge y^{p*} = \mathcal{A}(y^{1*} \otimes \ldots \otimes y^{p*})$, то, согласно упражнению 3.2, уравнению (4.9) и равенству $\mathcal{A}^2 = \mathcal{A}$, имеем

$$\begin{aligned}
\langle x \mid y^* \rangle &= p!\, \langle \mathcal{A}(x_1 \otimes \ldots \otimes x_p),\ \mathcal{A}(y^{1*} \otimes \ldots \otimes y^{p*}) \rangle = \\
&= p!\, \langle \mathcal{A}(x_1 \otimes \ldots \otimes x_p),\ y^{1*} \otimes \ldots \otimes y^{p*} \rangle = \\
&= \sum_{\sigma \in \pi_p} \operatorname{sgn} \sigma\, \langle x_{\sigma(1)} \otimes \ldots \otimes x_{\sigma(p)},\ y^{1*} \otimes \ldots \otimes y^{p*} \rangle = \\
&= \sum_{\sigma \in \pi_p} \operatorname{sgn} \sigma\, \langle x_{\sigma(1)}, y^{1*} \rangle \ldots \langle x_{\sigma(p)}, y^{p*} \rangle,
\end{aligned}$$

или

$$\langle x \mid y^* \rangle = \det \langle x_i, y^{j*} \rangle. \tag{4.10}$$

Векторное пространство $\bigwedge^p(V^*) = \left(\bigwedge^p(V)\right)^*$ называется *пространством внешних p-форм над V*. Алгебра $\bigwedge(V^*)$ называется *алгеброй внешних форм над V*.

Определим спаривание $\langle\,|\,\rangle$ пространства $\bigwedge(V)$ с $\bigwedge(V^*)$ формулой

$$\langle x\,|\,y^*\rangle=0, \text{ если } x\in\bigwedge^p(V),\ y^*\in\bigwedge^q(V^*),\ p\neq q,$$

и формулой (4.9), если $p=q$.

Упражнение 4.3. Пусть $e_1, \ldots, e_n$ — базис V и $e^{1*}, \ldots, e^{n*}$ — дуальный базис V^*. Показать, что относительно спаривания $\langle\,|\,\rangle$ дуальным к базису

$$\{e_{i_1}\wedge\ldots\wedge e_{i_r}\}\quad (1<i_1<\ldots<i_r,\ r=0, \ldots, n)$$

является базис

$$\{e^{i_1*}\wedge\ldots\wedge e^{i_r*}\}.$$

Это спаривание пространств $\bigwedge(V)$ и $\bigwedge(V^*)$ позволяет для любого линейного оператора на $\bigwedge(V)$ определить сопряженный оператор как линейный оператор на $\bigwedge(V^*)$. В частности, мы можем определить оператор, сопряженный к оператору (левого) внешнего умножения. Он называется оператором (правого) внутреннего умножения. Более точно, для любого $u\in\bigwedge(V)$ мы определяем линейный оператор $u\,\lrcorner\,\cdot$ на $\bigwedge(V^*)$, полагая

$$\langle x\,|\,u\,\lrcorner\,y^*\rangle=\langle u\wedge x\,|\,y^*\rangle \text{ для всех } x\in\bigwedge(V). \tag{4.11}$$

Упражнение 4.4. Показать, что $u_1\,\lrcorner\,(u_2\,\lrcorner\,y^*)=(u_2\wedge u_1)\,\lrcorner\,y^*$.

Из формулы (4.11) ясно, что если $u\in\bigwedge^p(V)$ и $y\in\bigwedge^r(V^*)$, то $u\,\lrcorner\,y^*\in\bigwedge^{r-p}(V^*)$ при $r\geqslant p$ и $=0$ при $r<p$. В частности, если $r=p$, то $u\,\lrcorner\,y^*=\langle u\,|\,y^*\rangle$. Таким образом,

$$e_{i_1}\wedge\ldots\wedge e_{i_p}\,\lrcorner\,e^{j_1*}\wedge\ldots\wedge e^{j_r*}=$$
$$=\begin{cases}0, \text{ если } \{i_1, \ldots, i_p\}\not\subset\{j_1, \ldots, j_r\},\\ \pm e^{\alpha_1*}\wedge\ldots\wedge e^{\alpha_{r-p}*},\end{cases} \tag{4.12}$$

где $\alpha_1, \ldots, \alpha_{r-p}$ — множество индексов, дополнительное к $i_1, \ldots, i_p$ в $j_1, \ldots, j_r$, а знак есть знак подстановки $(j_1, \ldots, j_r)\to(i_1, \ldots, i_p, \alpha_1, \ldots, \alpha_{r-p})$. В частности,

$$e_i\,\lrcorner\,e^{j_1*}\wedge\ldots\wedge e^{j_r*}=$$
$$=\begin{cases}0, \text{ если } i\neq j_k \text{ для любого } k,\\ (-1)^{k-1}e^{j_1*}\wedge\ldots\wedge e^{j_{k-1}*}\wedge e^{j_{k+1}*}\ldots\wedge e^{j_r*}, \text{ если } i=j_k.\end{cases} \tag{4.13}$$

Формула (4.13) показывает, что внутреннее умножение на e_i во внешней алгебре можно рассматривать как аналог частного дифференцирования по i-й переменной. Как и следовало ожидать, последовательные «частные производные» зависят от порядка: из упражнения 4.4 следует, что $e_i \lrcorner (e_j \lrcorner y^*) = - e_j \lrcorner (e_i \lrcorner y^*)$. Кроме того, если мы умножим (4.13) на e_i и просуммируем по i, то получим (сначала для базисных векторов, а затем по линейности) для любого $y^* \in \bigwedge^r (V^*)$ аналог теоремы Эйлера об однородных функциях:

$$\sum_{i=1}^{n} e_i^* \wedge (e_i \lrcorner y^*) = ry^*. \tag{4.14}$$

Упражнение 4.5. Показать, что внутреннее умножение на $x \in V$ на самом деле есть антидифференцирование алгебры $\bigwedge (V^*)$, т. е. что для любых $x \in V$, $y_1^* \in \bigwedge^p (V^*)$ и $y_2^* \in \bigwedge^q (V^*)$

$$x \lrcorner (y_1^* \wedge y_2^*) = (x \lrcorner y_1^*) \wedge y_2^* + (-1)^p y_1^* \wedge (x \lrcorner y_2^*).$$

Внутреннее умножение часто используется для того, чтобы следующим образом связать алгебру $\bigwedge (V)$ с $\bigwedge (V^*)$:

Теорема 4.5. *Пусть e и e^* — дуальные базисы (одномерных) пространств $\bigwedge^n (V)$ и $\bigwedge^n (V^*)$ соответственно. Линейное отображение ${}_e\bot \colon \bigwedge^r (V) \to \bigwedge^{n-r} (V^*)$, определенное формулой*

$${}_e\bot\, (x) = x \lrcorner e^*,$$

является изоморфизмом $\bigwedge^r (V)$ на $\bigwedge^{n-r} (V^*)$, переводящим разложимые элементы в разложимые. Если $w \neq 0$ есть разложимый r-вектор, соответствующий линейному подпространству W, то ${}_e\bot\, w$ соответствует подпространству W^0 (состоящему из всех линейных функций, равных нулю на W).

Доказательство. Если мы выберем такие дуальные базисы, что $e_1 \wedge \ldots \wedge e_n = e$ и $e^{1*} \wedge \ldots \wedge e^{n*} = e^*$, то формула (4.13) показывает, что отображение есть изоморфизм. Разложимые элементы степени n отображаются в $\bigwedge^0 (V^*)$, так что здесь доказывать нечего. Любой разложимый элемент степени $r < n$ записывается в виде $e_1 \wedge \ldots \wedge e_r$, причем мы можем дополнить векторы $\{e_1, \ldots, e_r\}$ до базиса $\{e_1, \ldots, e_n\}$ так, чтобы $e_1 \wedge \ldots \wedge e_n = e$. Тогда формула (4.13) показывает, что

$${}_e\bot\, (e_1 \wedge \ldots \wedge e_r) = \pm e^{(r+1)*} \wedge \ldots \wedge e^{n*}.$$

Но элемент справа разложим и соответствует пространству, порожденному $n - r$ линейно независимыми формами $e^{(r+1)*}, \ldots, e^{n*}$, которые обращаются в нуль на W. Теорема доказана.

Упражнение 4.6. Показать, что всякий $(n-1)$-вектор разложим.

Мы можем ввести правое внутреннее умножение в $\bigwedge(V)$ на элементы из $\bigwedge(V^*)$ по формуле

$$\langle x \llcorner u^* \mid y^* \rangle = \langle x \mid u^* \wedge y^* \rangle. \tag{4.15}$$

Для $\llcorner$ справедливы аналоги вышеприведенных утверждений относительно $\lrcorner$. Предположим, что V снабжено евклидовой метрикой, т. е. на V определено скалярное произведение $(\ ,\ )$, удовлетворяющее условиям

1) $(x, y) = (y, x)$,

2) $(a_1x_1 + a_2x_2, y) = a_1(x_1, y) + a_2(x_2, y)$,

3) $(x, x) > 0$, если $x \neq 0$.

Тогда мы можем отождествить вектор $y \in V$ с вектором $y^* \in V^*$, для которого $\langle x, y^* \rangle = (x, y)$. Определим теперь скалярное произведение в $C^p(V)$, полагая

$$(x_1 \otimes \ldots \otimes x_r, y_1 \otimes \ldots \otimes y_r) = (x_1, y_1) \ldots (x_r, y_r)$$

для разложимых элементов и продолжая по линейности. Если мы будем считать, что $C^p(V)$ ортогонально $C^q(V)$, когда $p \neq q$, то получим скалярное произведение в $C(V)$. Заметим, что $\mathcal{S}$ и $\mathcal{A}$ — самосопряженные операторы относительно этого скалярного произведения.

Если мы ограничим скалярное произведение $(\ ,\ )$ на $S(V)$ или $\bigwedge(V)$, то получим скалярное произведение в этих пространствах. Как и раньше, определим скалярное произведение $(\ \mid\ )$ в $\bigwedge^p(V)$, умножая $(\ ,\ )$ на дополнительный множитель:

$$(x \mid y) = p!\,(x, y) \quad \text{для} \quad x, y \in \bigwedge^p(V). \tag{4.16}$$

Тогда

$$(x_1 \wedge \ldots \wedge x_p \mid y_1 \wedge \ldots \wedge y_p) = (\det(x_i, y_j)); \tag{4.17}$$

в частности,

$$\begin{aligned} \| x_1 \wedge \ldots \wedge x_p \| &= (x_1 \wedge \ldots \wedge x_p \mid x_1 \wedge \ldots \wedge x_p)^{1/2} = \\ &= (\det(x_i, x_j))^{1/2} \end{aligned} \tag{4.18}$$

есть объем параллелепипеда, натянутого на $x_1, \ldots, x_p$.

Поскольку пространство $\bigwedge^n(V)$ одномерно, в нем имеется ровно два элемента e и $-e$, для которых $\|e\| = 1$. Выбор одного из них определяет ориентацию в V.

По теореме 4.5 выбор (скажем) e определяет изоморфизм $\varphi\colon \bigwedge^r(V) \to \bigwedge^{n-r}(V^*)$. С другой стороны, скалярное произведение определяет изоморфизм $\bigwedge^{n-r}(V^*)$ на $\bigwedge^{n-r}(V)$. Комбинируя эти изоморфизмы, мы получим изоморфизм

$$*: \bigwedge^r(V) \to \bigwedge^{n-r}(V). \tag{4.19}$$

Упражнение 4.7. Пусть $e_1, \ldots, e_n$ — ортонормированный базис в V относительно $(\,|\,)$. Показать, что $\{e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_p}\}$ образуют ортонормированный базис в $\bigwedge(V)$ относительно $(\,|\,)$.

Упражнение 4.8. Найти разложение по этому базису тензора $*(e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_p})$.

Упражнение 4.9. Показать, что $x \wedge *x = e$.

Упражнение 4.10. Показать, что $**x = (-1)^{r(n-r)}x$, если $x \in \bigwedge^r(V)$.

Упражнение 4.11. Показать, что если x и y — векторы трехмерного евклидова пространства, то $*(x \wedge y)$ есть «векторное произведение» x и y.

Упражнение 4.12. Показать, что $*$ есть изометрия, т. е. $(*x \mid *y) = (x \mid y)$.

Упражнение 4.13. Показать, что $x \wedge *y = (x \mid y)\,e$ для $x, y \in \bigwedge^p(V)$.

§ 5. ВНЕШНИЕ УРАВНЕНИЯ

Прежде всего установим нормальный вид внешней 2-формы, аналогичный (диагональному) каноническому виду симметрической квадратичной формы.

Теорема 5.1. *Для любой формы $q^* \in \bigwedge^2(V^*)$ существует базис $\{f^{1*}, \ldots, f^{n*}\}$ пространства V^*, в котором*

$$q^* = f^{1*} \wedge f^{2*} + \ldots + f^{(2p-1)*} \wedge f^{2p*}. \tag{5.1}$$

Целое число p зависит только от q^*.

Доказательство. Предположим, что в базисе $\{e^{i*}\}$ форма q^* имеет вид

$$q^* = \sum_{i<j} a_{ij} e^{i*} \wedge e^{j*}.$$

Если $q^* \neq 0$, то мы можем (перенумеровав базис, если понадобится) считать, что $a_{12} \neq 0$. Тогда

$$q^* = \left(e^{1*} - \frac{a_{23}}{a_{12}} e^{3*} - \ldots - \frac{a_{2n}}{a_{12}} e^{n*}\right) \wedge$$
$$\wedge \left(a_{12}e^{2*} + a_{13}e^{3*} + \ldots + a_{1n}e^{n*}\right) + q^{1*},$$

где форма q^{1*} не содержит e^{1*} и e^{2*}. Положим

$$f_1 = e^{1*} - \frac{a_{23}}{a_{12}} e^{3*} - \ldots - \frac{a_{2n}}{a_{12}} e^{n*},$$
$$f_2 = a_{12}e^{2*} + a_{13}e^{3*} + \ldots + a_{1n}e^{n*};$$

тогда f^{1*}, f^{2*}, e^{3*}, ..., e^{n*} линейно независимы и

$$q^* = f^{1*} \wedge f^{2*} + q^{1*}.$$

Если $q^{1*} = 0$, то все доказано. В противном случае мы продолжаем процесс, пока не получим требуемый нормальный вид.

Целое число p может быть описано внутренним образом. Действительно, рассмотрим линейное подпространство $E(q^*) \subset V^*$, порожденное элементами вида

$$x \lrcorner q^* \tag{5.2}$$

для всех $x \in V$. Это подпространство (называемое *ассоциированной системой формы* q^*), очевидно, порождается также элементами

$$g_i \lrcorner q^*, \tag{5.3}$$

где $g_1, \ldots, g_n$ — базис V. Если взять $g_i = f_i$, где $\{f_1, \ldots, f_n\}$ — базис, дуальный к базису $\{f^{1*}, \ldots, f^{n*}\}$, то формы (5.3) равны $f^{1*}, f^{2*}, \ldots, f^{2p*}$. Значит, $2p = \dim E(q^*)$, и теорема доказана.

Ассоциированная система может быть определена для $q^* \in \bigwedge^p(V^*)$ при любом $p \geqslant 1$. Говорят, что подпространство $W^* \subset V^*$ *обертывает* форму q^*, если $q^* \in \bigwedge^p(W^*) \subset \bigwedge^p(V^*)$. Покажем прежде всего, что W^* обертывает q^* тогда и только тогда, когда

$$x \lrcorner q^* \in W^* \text{ для всех } x \in \bigwedge^{p-1}(V). \tag{5.4}$$

Для этого выберем базис $e^{1*}, \ldots, e^{s*}$ подпространства W^* и продолжим его до базиса пространства V^*. Пусть $e_1, \ldots, e_n$ — дуальный базис V. Как и раньше, выражение «для всех $x \in \bigwedge^{p-1}(V)$» в (5.4) можно заменить выражением «для всех базисных элементов из $\bigwedge^{p-1}(V)$». Если $q^* \in \bigwedge^p(V)$, то

$$q^* = \sum_{i_1 < \ldots < i_p} a_{i_1, \ldots, i_p} e^{i_1*} \wedge \ldots \wedge e^{i_p*}.$$

Форма q^* лежит в $\bigwedge^p(W^*)$ тогда и только тогда, когда $a_{i_1, \ldots, i_p} = 0$ для $i_p > s$, что эквивалентно условию (5.4).

Условие (5.4) показывает также, что существует минимальное подпространство $E(q^*)$, обертывающее q^*, а именно пространство, порождаемое формами $x \lrcorner q^*$ для всех $x \in \bigwedge^{p-1}(V)$. Размерность пространства $E(q^*)$ называется *рангом формы* q^*. Если форма q^* разложима, $q^* = y^{1*} \wedge \ldots \wedge y^{p*}$, то $E(q^*)$ порождается элементами $y^{1*}, \ldots, y^{p*}$. Отсюда следует

Теорема 5.2. *p-форма разложима тогда и только тогда, когда ее ранг равен p.*

Упражнение 5.1. Показать, что 2-форма $\sum a_{ij}e^{i*} \wedge e^{j*}$ разложима тогда и только тогда, когда

$$a_{ij}a_{kn}-a_{ik}a_{jn}+a_{in}a_{jk}=0.$$

Упражнение 5.2. Показать, что 3-форма разложима тогда и только тогда, когда

$$a_{ijk}a_{nlm}-a_{ijn}a_{klm}+a_{ijl}a_{knm}-a_{ijm}a_{knl}=0.$$

Какова общая теорема?

Следует заметить, что $(E(q^*))^0$ (множество векторов, на которых все формы из $E(q^*)$ обращаются в нуль) допускает простую характеризацию. Действительно, если $x \in (E(q^*))^0$, то

$$x \lrcorner q^* = 0. \tag{5.5}$$

С другой стороны, размерность пространства решений уравнения (5.5) не может превышать $n - r$ (где r — ранг q^*), иначе q^* можно было бы выразить меньше, чем через r, линейно независимых векторов. Таким образом,

$$x \in (E(q^*))^0 \quad \textit{тогда и только тогда, когда} \quad x \lrcorner q^* = 0. \tag{5.6}$$

Пусть W — подпространство пространства V. Пусть i обозначает вложение $W \to V$; дуальное отображение i^*: $V^* \to W^*$ индуцирует отображение $\bigwedge(i^*)$: $\bigwedge(V^*) \to \bigwedge(W^*)$. Если $y^* \in \in \bigwedge(V^*)$, то форма $\bigwedge(i^*)\,y^* \in \bigwedge(W^*)$ называется *ограничением* формы y^* на W. Говорят, что подпространство W *аннулирует* y^*, если $\bigwedge(i^*)\,y^* = 0$. Для линейных форм y^* это совпадает с обычной терминологией.

Основная проблема теории внешних уравнений состоит в следующем. Дано множество форм $\{\Omega_\alpha\}$; требуется найти подпространства, аннулирующие эти формы. Сделаем несколько предварительных замечаний. Прежде всего $\bigwedge(i^*)$ есть гомоморфизм, поэтому если $\bigwedge(i^*)$ переводит форму y^* в нуль, то в нуль перейдет и любая кратная y^* форма. Значит, если $\bigwedge(i^*)$ аннулирует $\{\Omega_\alpha\}$, то оно аннулирует и идеал, порожденный $\{\Omega_\alpha\}$. Этот идеал однороден, т. е. порождается однородными элементами. Поэтому мы можем считать, что множество $\{\Omega_\alpha\}$ образует идеал. Далее, предположим, что y^* есть p-форма и

$$y^* = \sum a_{i_1, \ldots, i_p} e^{i_1*, \ldots, i_p*} \tag{5.7}$$

в некотором базисе $\{e_1, \ldots, e_n\}$. Если $y^* \neq 0$, то можно считать, что $a_{1, 2, \ldots, p} \neq 0$. Рассмотрим p-мерную плоскость W, порожденную векторами $e_1, \ldots, e_p$; ограничение формы y^* на W равно

$a_{1,2,\ldots,p}e^{1*}\wedge\ldots\wedge e^{p*}\neq 0$. Поэтому для данной ненулевой p-формы всегда существует по крайней мере одна p-мерная плоскость, которая не аннулирует ее. Другими словами, p-форма, аннулируемая всеми p-мерными плоскостями, равна нулю. Если $W_1\subset W\subset V$, то ограничение некоторой формы на W_1 может быть получено ограничением сначала на W и затем с W на W_1. Применяя предыдущие замечания, мы можем сделать следующее утверждение:

Пусть задано p-мерное подпространство W, $i\colon W\to V$; q-форма y^* $(q\leqslant p)$ аннулируется подпространством W тогда и только тогда, когда форма $\bigwedge(i^*)\,y^*$ аннулируется любым q-мерным подпространством пространства W.

Справедлива следующая

Теорема 5.3. *Пусть $\mathcal{J}$ — однородный*[1]) *идеал в $\bigwedge(V^*)$; p-мерное подпространство $W\subset V$ аннулирует $\mathcal{J}$ тогда и только тогда, когда*

$$\langle w\,|\,y^*\rangle=0 \text{ для всех } y^*\in\mathcal{J}\cap{\textstyle\bigwedge}^p(V^*), \tag{5.8}$$

где w есть p-вектор, соответствующий W.

Доказательство. Поскольку p-мерное подпространство аннулирует любую форму степени большей, чем p, достаточно рассматривать формы степени $\leqslant p$. Выберем такой базис $e_1, \ldots, e_n$, чтобы $w=e_1\wedge\ldots\wedge e_p$. Для любой p-формы, заданной формулой (5.7), имеем

$$\begin{aligned}\textstyle\bigwedge(i^*)\,y^*&=a_{1,2,\ldots,p}\,e^{1*}\wedge\ldots\wedge e^{p*}=\\&=\langle w\,|\,y^*\rangle\,e^{1*}\wedge\ldots\wedge e^{p*}.\end{aligned} \tag{5.9}$$

Поэтому $\bigwedge(i^*)\,y^*=0$ тогда и только тогда, когда $\langle w\,|\,y^*\rangle=0$. Мы доказали необходимость условия (5.8). Из условия (5.8), как мы знаем, следует, что подпространство W аннулирует все p-формы из $\mathcal{J}$. А как обстоит дело с q-формами при $q\leqslant p$? Если форма $y^*=$ $=\sum\limits_{i_1<\ldots<i_q}a_{i_1,\ldots,i_q}\,e^{i_1*,\ldots,i_q*}$ такова, что $\bigwedge(i^*)\,y^*\neq 0$, то $a_{i_1,\ldots,i_q}\neq 0$ для некоторого множества индексов, причем $i_q\leqslant p$. Перенумеровав, если понадобится, базис, можно считать, что $a_{1,2,\ldots,q}\neq 0$. Тогда $z^*=y^*\wedge e^{(q+1)*}\wedge\ldots\wedge e^{p*}$ есть p-форма и $\langle w\,|\,z^*\rangle\neq 0$. Если $y^*\in\mathcal{J}$, то $z^*\in\mathcal{J}$, так как $\mathcal{J}$ есть идеал. Поэтому, если (5.8) имеет место, то $\bigwedge(i^*)\,y^*=0$ для всех $y^*\in\mathcal{J}$, и теорема доказана.

---

[1]) Однородность означает, что $\mathcal{J}=\sum\limits_p\mathcal{J}\cap{\textstyle\bigwedge}^p(V^*)$.

Условие (5.8) представляет собой систему линейных уравнений в $\bigwedge^p(V)$. На первый взгляд может показаться, что мы свели проблему решения внешних уравнений к простой задаче решения линейных уравнений. Однако это не так, поскольку мы должны добавить к (5.8) условия, выражающие разложимость тензора w. Эти условия не линейны, а квадратичны по координатам в W (см. упражнения 5.1 и 5.2).

В одном случае проблема становится тривиальной — если идеал $\mathcal{J}$ порождается своими элементами степени один. В этом случае подпространство W аннулирует идеал $\mathcal{J}$ тогда и только тогда, когда $W \subset (\mathcal{J} \cap \bigwedge^1(V^*))^0$.

Упражнение 5.3. Примером усложнений, вызванных квадратичностью условий разложимости внешних форм, является тот факт, что множество форм, аннулируемых всеми теми подпространствами, которые аннулируют идеал $\mathcal{J}$, может быть больше, чем $\mathcal{J}$. Например, пусть идеал $\mathcal{J}$ порожден формами $e^{1*} \wedge e^{3*}$, $e^{1*} \wedge e^{4*}$ и $e^{1*} \wedge e^{2*} - e^{3*} \wedge e^{4*}$. Показать, что $e^{1*} \wedge e^{2*}$ аннулируется каждым подпространством, аннулирующим $\mathcal{J}$, хотя $e^{1*} \wedge e^{2*} \notin \mathcal{J}$.

Сделаем несколько упрощений. Предположим, что $\mathcal{J}$ имеет систему образующих, принадлежащих $\bigwedge(U^*)$ для некоторого подпространства $U^* \subset V^*$. Тогда $(U^*)^0$, очевидно, аннулирует $\mathcal{J}$. Кроме того, если некоторое подпространство W аннулирует $\mathcal{J}$, то это же верно и для $W + (U^*)^0$. Как и в случае форм, желательно найти минимальное подпространство U^*, для которого $\bigwedge(U^*)$ содержит множество образующих идеала $\mathcal{J}$. Мы можем найти такое подпространство благодаря следующему утверждению:

Пусть $\mathcal{J}$ — однородный идеал в $\bigwedge(V^*)$ и U — подпространство пространства V. Идеал $\mathcal{J}$ обладает системой образующих, лежащих в $\bigwedge(U^0)$, тогда и только тогда, когда

$$x \lrcorner y^* \subset \mathcal{J} \text{ для всех } y^* \in \mathcal{J} \text{ и всех } x \in U. \tag{5.10}$$

Доказательство. Если образующие $\{y^*_\alpha\}$ идеала $\mathcal{J}$ лежат в $\bigwedge(U^0)$, то $x \lrcorner y^*_\alpha = 0$ для всех $x \in U$. Поэтому

$$x \lrcorner (z^* \wedge y^*_\alpha) = (x \lrcorner z^*) \wedge y^*_\alpha \in \mathcal{J}$$

для произвольной формы $z^* \in \bigwedge(V^*)$. Поскольку каждый элемент из $\mathcal{J}$ есть сумма членов вида $z^* \wedge y^*_\alpha$, условие (5.10) выполнено.

Для доказательства обратного утверждения достаточно проверить, что элементы из $\bigwedge(U^0)$ порождают пространства $\mathcal{J} \cap \bigwedge^i(V^*)$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Если $y^* \in \mathcal{J} \cap \bigwedge^1(V^*)$, то, согласно условию (5.10), $x \lrcorner y^* = 0$ для всех $x \in U$ и, значит, $y^* \in U^0$. Пусть $e_1, \ldots, e_p$ —

базис U, а $e_1, \ldots, e_p, \ldots, e_n$ — базис V. Тогда $e^{(p+1)*}, \ldots, e^{n*}$ — базис U^0. Если $y^* \in \mathcal{J} \cap \bigwedge^2 (V^*)$, то

$$y^* = \sum_{i<j} a_{ij} e^{i*} \wedge e^{j*}$$

и, согласно условию (5.10), $e_1 \lrcorner\, y^* \in \mathcal{J}$ и элемент $y_1^* = y^* - e^{1*} \wedge (e_1 \lrcorner\, y^*)$ не содержит e^{1*}. Далее, элемент $y_2^* = y^* - e^{2*} \wedge (e_2 \lrcorner\, y_1^*) \in \mathcal{J}$ и не содержит e^{1*} и e^{2*}. Продолжая подобным образом, мы получим разложение $y^* = y_p^* - w^*$, где $y_p^* \in \bigwedge (U^0)$, а w^* есть сумма, все слагаемые которой кратны элементам из $\mathcal{J} \cap \bigwedge^1 (V^*) \subset U^0$.

Дальше рассуждаем по индукции. Предположим, что все пространства $\mathcal{J} \cap \bigwedge^1 (V^*), \ldots, \mathcal{J} \cap \bigwedge^{q-1} (V^*)$ порождены элементами из $\bigwedge (U^0)$. Для любого $y^* \in \mathcal{J} \cap \bigwedge^q (V^*)$ элемент $y^* - e^{1*} \wedge (e_1 \lrcorner\, y^*) \in \mathcal{J}$ и не содержит e^{1*}. Продолжая, как раньше, мы получим систему образующих для $\mathcal{J} \cap \bigwedge^q (V^*)$, лежащую в $\bigwedge (U^0)$.

Если нам нужно получить минимальное пространство U^0, то мы возьмем максимальное U. Таким образом, имеет место

Теорема 5.4. *Пусть $\mathcal{J}$ — однородный идеал в $\bigwedge (V^*)$. Существует единственное минимальное подпространство $U^* \subset V^*$, называемое присоединенной системой идеала $\mathcal{J}$, такое, что в $\bigwedge (U^*)$ содержится некоторая система образующих идеала $\mathcal{J}$. Пространство $(U^*)^0$ состоит из всех $x \in V$, удовлетворяющих условию* (5.10).

Заметим, что если $\mathcal{J}$ порождается одной формой y^*, то условие (5.10) сводится к условию (5.5).

В случае когда ассоциированная система U не совпадает с V^* (система нетривиальна), иногда бывает удобно исключить «лишние переменные». Пусть U' — подпространство пространства V, дополнительное к U, так что $U + U' = V$, $U \cap U' = \{0\}$. Если подпространство W аннулирует $\mathcal{J}$, то и $W + U$ аннулирует $\mathcal{J}$. Но $W + U = W' + U$, где $W' = (W + U) \cap U'$. Таким образом, каждому решению W соответствует решение $W' \subset U'$. Если мы ограничимся рассмотрением максимальных решений (т. е. подпространств, аннулирующих $\mathcal{J}$ и не содержащихся в бо́льших подпространствах, аннулирующих $\mathcal{J}$), то это соответствие будет взаимно однозначным: каждому максимальному решению W отвечает единственное решение $W' = W \cap U'$, лежащее в U'. Далее, подпространство из U' будет решением тогда и только тогда, когда оно аннулирует идеал $\bigwedge (i^*)\, \mathcal{J}$, где $i\colon U' \to V$ — вложение. Это так, поскольку i^* есть изоморфизм пространства U^0 на $(U')^*$ и потому не отображает ни одной образующей идеала $\mathcal{J}$ в нуль. Таким образом, мы всегда можем свести внешнюю систему к случаю, когда ассоциированная система тривиальна.

Решения внешней системы строятся по индукции. Сначала мы ищем прямые, являющиеся решениями. Прямая l будет решением, если она есть решение системы линейных уравнений

$$\langle \cdot | y^* \rangle = 0, \qquad y^* \in \bigwedge\nolimits^1 (V^*) \cap \mathcal{J}. \tag{5.11}$$

Обозначим через s_0 число линейно независимых уравнений из (5.11), т. е. размерность пространства $\bigwedge^1 (V) \cap \mathcal{J}$. Пусть l_1 есть решение системы (5.11) и v_1 — вектор на l_1. Прямая l_2 порождает вместе с l_1 двумерное решение, если l_2 есть решение системы уравнений

$$\langle \cdot | v_1 \lrcorner\, y^* \rangle = 0, \qquad y^* \in \bigwedge\nolimits^2 (V^*) \cap \mathcal{J}. \tag{5.12}$$

Пусть идеал $\mathcal{J}$ порождается элементами $\{y^*_{j\alpha}\}$, где $y^*_{j\alpha} \in \bigwedge^j (V^*)$. Тогда уравнения (5.12) эквивалентны системе (5.11) вместе с новой системой уравнений

$$\langle \cdot | v_1 \lrcorner\, y^*_{2\alpha} \rangle = 0. \tag{5.13}$$

Таким образом, прямая l_2, порождающая вместе с l_1 двумерное решение, должна удовлетворять условиям (5.11) и множеству условий (5.13), которые зависят от выбора l_1. Значит, размерность системы (5.12) можно записать в виде $s_0 + s_1 (l_1)$. Число линейно независимых уравнений системы (5.12) равно рангу соответствующей матрицы, элементы которой зависят (линейно) от коэффициентов прямой l_1. Поэтому если $s_1 = \max s_1 (l_1)$, то множество прямых l_1, для которых $s_1 (l_1) < s_1$, определяется множеством нулей некоторого семейства ненулевых полиномов. Прямые l_1, для которых $s_1 (l_1) = s_1$, называются *регулярными*; если $s_1 (l_1) < s_1$, то прямая l_1 называется *сингулярной*. Если $s_0 + s_1 (l_1) = n - 1$, то единственным решением уравнений (5.12) является сама l_1, так что не существует двумерных решений, содержащих l_1. Если $s_0 + s_1 (l_1) < n - 1$, то существуют двумерные решения, содержащие l_1. Мы можем продолжить этот процесс. Если W есть p-мерное решение с p-вектором $w = w_1 \wedge \ldots \wedge w_p$, то прямая l_{p+1} порождает вместе с W решение в том и только в том случае, когда l_{p+1} есть решение системы уравнений

$$\langle \bullet | w \lrcorner\, y^* \rangle = 0 \quad \text{для} \quad y^* \in \bigwedge\nolimits^{p+1} (V^*) \cap \mathcal{J}. \tag{5.14}$$

Эта система уравнений называется *полярной системой p-вектора w*. Система (5.14) может быть получена добавлением к предыдущим уравнениям, используемым для определения W, следующей системы уравнений:

$$\langle \cdot | w_{i_1} \lrcorner\, y^*_{2\alpha} \rangle = 0, \qquad \langle \cdot | w_{i_1} \wedge w_{i_2} \lrcorner\, y^*_{3\alpha} \rangle = 0, \ \ldots,$$
$$\langle \cdot | w_1 \wedge \ldots \wedge w_p \lrcorner\, y^*_{(p+1)\,\alpha} \rangle = 0 \qquad (0 < i_1 < \ldots < p). \tag{5.15}$$

Снова число уравнений системы (5.15), которые независимы от предыдущих, есть функция $s_p (w)$ от w. Положим $s_p = \max s_p (w)$ и назовем p-плоскость W регулярной, если она содержит регулярную $(p - 1)$-плоскость и $s_p (w) = s_p$. Так как W есть решение системы (5.8), то

$$s_0 + s_1 + \ldots + s_p \leqslant n - p. \tag{5.16}$$

Если имеет место равенство, то не существует $(p + 1)$-мерного решения, содержащего регулярную p-плоскость. Мы стремимся подобрать решение W такой размерности p, для которой достигается равенство. Такое число p называется *родом* рассматриваемой системы.

Глава II

ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫЕ МНОГООБРАЗИЯ

Предметом дифференциальной геометрии является изучение геометрических задач, допускающих использование анализа. Поэтому объектами изучения должны быть пространства, в которых имеют смысл такие понятия, как дифференцирование и интегрирование. В этой главе мы введем такой класс пространств, называемых *дифференцируемыми многообразиями*, и изучим их простейшие свойства. Прежде чем давать точные определения, поучительно рассмотреть один элементарный пример и выяснить, какие могут встретиться трудности. Предположим, что мы хотим изучать окружность. Естественный вопрос состоит в том, как описать (т. е. задать или параметризовать) отдельные точки окружности. Если окружность определена как множество точек, удовлетворяющих уравнению

$$x^2 + y^2 = 1 \qquad (1)$$

в плоскости x, y, то каждая точка может быть задана указанием ее координат x и y. Однако такое описание неудовлетворительно по двум причинам. Прежде всего излишне задавать обе координаты x и y. Если x задано, то, решая уравнение (1), мы получим для y (самое большее) два значения. Далее, как только мы отойдем от «плохих» точек $x = \pm 1$, выбор значения y_0 при данном x_0 (т. е. выбор между $\pm\sqrt{1 - x_0^2}$) однозначно определит y в окрестности x_0 по непрерывности. Короче говоря, окружность есть «одномерный» объект и для ее описания не требуются два параметра. Второе возражение состоит в том, что эти координаты зависят от положения окружности на плоскости. Если мы хотим изучать окружность саму по себе, а не как множество точек на плоскости, мы должны найти ее инвариантное описание. После минутного размышления мы придем к выводу, что преодолеть первую из этих трудностей невозможно. Один-единственный параметр не может удовлетворительным образом описывать всю окружность. Возможно, наилучшая попытка заключается в использовании полярного угла. Но в этом случае нулевой угол ведет себя плохо: функция, сопоставляющая каждой точке соответствующий угол, не непрерывна в нуле. Выход из положения — отказаться от попытки построения единого параметра, описывающего всю окружность, и довольствоваться несколькими параметрами для разных кусков. Мы хотим, чтобы эти параметры были согласованы с топологией окружности (определенной, скажем, как факторпространство вещественных чисел по целым). Эта топология позволяет узнать, какие функции на открытых подмножествах окружности непрерывны. Заданное представление окружности в виде факторпространства позволяет также решить, какие функции дифференцируемы. Фактически на любом собственном открытом подмножестве окружности мы *можем* пользоваться вещественным (угловым) параметром. Функция f называется дифференцируемой на таком подмножестве, если она дифференцируема как функция этого параметра. Легко видеть, что это определение не зависит от аддитивной константы, входящей в выбор углового параметра. Поэтому требование определенной гладкости позволяет выделить некоторый класс функций: например, мы можем говорить о классе функций с непрерывными производными всех порядков. На открытом интервале окружности мы можем использовать в качестве параметра любую функцию класса C^∞ при условии, что ее производная по угловому параметру не обращается в нуль. Таким образом, окружность покрывается интервалами, в каждом из которых имеется свой параметр или координата. Если два интервала пересекаются, то замена координат определяется функцией класса C^∞ с не обращающейся в нуль производной. Итак, абстрактная окружность S^1 есть топологическое пространство вместе с некоторым классом функций и координатными интервалами, координаты в которых надлежащим образом согласованы. Единичную окружность (1) в плоскости x, y мы рассматриваем как S^1 вместе с отображением окружности S^1 в плоскость x, y, заданным формулой $x(\cdot) = \cos(\cdot), y(\cdot) = \sin(\cdot)$. Теперь мы перейдем к общим определениям.

§ 1. ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Мы хотим изучать топологические пространства, которые локально ведут себя как евклидовы пространства.

Определение 1.1. Хаусдорфово пространство M со счетной базой называется *n-мерным многообразием*, если оно локально гомеоморфно n-мерному евклидову пространству R^n [1]).

Под локальной гомеоморфностью мы подразумеваем, что каждая точка $x \in M$ обладает окрестностью, гомеоморфной R^n (или открытому подмножеству в R^n). Теперь мы присоединим к топологии в M специальный класс функций.

Определение 1.2. *Дифференцируемая структура класса C^k (аналитическая структура)* на n-мерном многообразии M есть набор $\mathscr{F}$ вещественных функций, каждая из которых определена на открытом подмножестве в M, причем выполнены следующие условия:

1) если $U \subset V$ и функция $f \in \mathscr{F}$ определена на V, то ограничение f на U принадлежит $\mathscr{F}$ $(f \mid U \in \mathscr{F})$;

2) если $U = \bigcup U_\alpha$, f определена на U и $f \mid U_\alpha \in \mathscr{F}$ для всех α, то $f \in \mathscr{F}$;

3) для каждой точки $p \in M$ имеются ее окрестность U и такой гомеоморфизм h окрестности U на открытое множество в R^n, что функция f, определенная на открытом подмножестве в U, принадлежит $\mathscr{F}$ тогда и только тогда, когда $f \circ h^{-1}$ как функция n вещественных переменных есть функция класса C^k (аналитическая функция).

---

[1]) Через R^n всюду обозначается n-мерное арифметическое векторное пространство над полем вещественных чисел R, а через E^n — то же пространство, снабженное стандартной евклидовой метрикой.— *Прим. ред.*

Функции из $\mathscr{F}$ называются функциями класса C^k (аналитическими функциями) на многообразии. До конца этой главы мы будем пользоваться словом «дифференцируемое» вместо «класса C^k» или «аналитическое» (в соответствии с рассматриваемым случаем) в тех ситуациях, где доказательство одинаково проходит для любых условий дифференцируемости. Первые два условия требуют, чтобы ограничения и объединения функций из $\mathscr{F}$ являлись допустимыми операциями. Третье условие требует, чтобы любая функция $f \in \mathscr{F}$ была дифференцируемой в некоторой «системе координат». Уточним это понятие. Предположим, что гомеоморфизм h из условия 3) задается n вещественными функциями $x^1(\cdot), \ldots, x^n(\cdot)$, определенными на U [1]). Если f — функция, определенная на U, то $f \circ h^{-1}$ можно записать в виде

$$f \circ h^{-1} = f(x^1, \ldots, x^n). \tag{1.1}$$

Условие 3) означает, что $f \in \mathscr{F}$ тогда и только тогда, когда правая часть в (1.1) есть дифференцируемая функция своих аргументов. В частности, $x^i(\cdot) \in \mathscr{F}$. Пусть U' — другая окрестность точки p и h' — ее гомеоморфизм на R^n. Положим $V = U \cap U'$ и обозначим, допуская некоторую небрежность, ограничения функций h и h' на V теми же буквами. Тогда $h' \circ h^{-1}$ есть гомеоморфизм $h(V)$ на $h'(V)$, задаваемый формулой

$$x'^i = x'^i(x^1, \ldots, x^n), \tag{1.2}$$

причем функции в (1.2) дифференцируемы. Для $f \in \mathscr{F}$ мы можем написать

$$f \circ h'^{-1} = f(x'^1, \ldots, x'^n). \tag{1.3}$$

Подставляя (1.2) в (1.3), получаем

$$f(x^1, \ldots, x^n) = f'(x'^1(x^1, \ldots, x^n), \ldots, x'^n(x^1, \ldots, x^n)). \tag{1.4}$$

Формула (1.4) устанавливает связь между «представлениями» функции f в двух системах координат. В частности, мы можем выразить функции $x^i \circ h'^{-1}$ в виде

$$x^i \circ h'^{-1} = x^i(x'^1, \ldots, x'^n) \tag{1.5}$$

и, подставив их в (1.4), получить тождество

$$x^i = x^i(x'^1(x^1, \ldots, x^n), \ldots, x'^n(x^1, \ldots, x^n)). \tag{1.6}$$

---

[1]) Здесь $x^1, \ldots, x^n$ — стандартные координатные функции на R^n. Таким образом, для $p \in U$ мы имеем $h(p) = x^1(h(p)), \ldots, x^n(h(p))$. Поэтому мы должны были бы писать $x^1(h(\cdot))$ вместо $x^1(\cdot)$. Мы предпочитаем опускать h, если невозможны недоразумения.

Если мы возьмем матрицы Якоби от обеих частей тождества (1.5), то получим

$$\left(\frac{\partial x^i}{\partial x'^j}\right)\left(\frac{\partial x'^j}{\partial x^k}\right) = (\delta^i_k). \tag{1.7}$$

Отсюда

$$\left|\left(\frac{\partial x'^i}{\partial x^j}\right)\right| \neq 0. \tag{1.8}$$

С другой стороны, предположим, что задано множество дифференцируемых функций (1.2), удовлетворяющих условию (1.8) в точке $x^1(p), \ldots, x^n(p)$. Теорема о неявной функции (см. приложение 1) гарантирует тогда существование n дифференцируемых функций (1.5), удовлетворяющих (1.6) в некоторой окрестности W точки $x^1(p), \ldots, x^n(p)$. Сравнивая эти функции с h, мы получим гомеоморфизм h', отображающий $W = h^{-1}(W)$ на открытое подмножество из R^n, причем h' обладает свойствами, требуемыми в условии 3) определения 1.2.

Определение 1.3. Открытое множество W и гомеоморфизм h, удовлетворяющий условию 3) определения 1.2 (относительно дифференцируемой структуры $\mathcal{F}$), называются соответственно *координатной окрестностью* и *координатным отображением*. Если $h(p) = (x^1(p), \ldots, x^n(p))$, то функции $x^i(\cdot)$ называются *локальными координатами*.

В соответствии с определением 1.2 каждая точка многообразия M обладает координатной окрестностью U с координатным отображением h. Множества $\{U\}$ образуют открытое покрытие многообразия M. Благодаря предположению о счетности мы можем выбрать счетное подпокрытие $\{U_i\}$ с координатными отображениями $\{h_i\}$. Предыдущие рассуждения (примененные к $p \in U_i \cap U_j$, $V = U_i \cap U_j$) показывают, что отображение $h_i \circ h_j^{-1}$ задается n дифференцируемыми функциями с не обращающимся в нуль якобианом.

Мы можем использовать координаты для определения дифференцируемой структуры. Предположим, что заданы счетное покрытие $\{U_j\}$ многообразия M и такой гомеоморфизм h_j каждого U_j в n-мерное евклидово пространство, что отображения $h_i \circ h_j^{-1}$ задаются n дифференцируемыми функциями с не обращающимся в нуль якобианом. Мы можем тогда рассмотреть набор $\mathcal{G}$ всех функций f, определенных на открытых подмножествах любых U_j и таких, что функции $f \circ h_j^{-1}$ дифференцируемы. Если f определена на подмножестве из $U_i \cap U_j$ и функция $f \circ h_j^{-1}$ дифференцируема, то и функция

$$f \circ h_i^{-1} = f \circ h_j^{-1} \circ h_j \circ h_i^{-1}$$

дифференцируема, поскольку $h_j \circ h_i^{-1}$ — дифференцируемое преобразование. Набор $\mathcal{G}$ удовлетворяет условию 3) определения 1.2. Любая дифференцируемая структура, содержащая $\mathcal{G}$, должна по условию 1) содержать всякую функцию f, ограничения которой на все U_j принадлежат $\mathcal{G}$. Пусть $\mathcal{F}$ есть набор всех таких функций. Очевидно, $\mathcal{F}$ — минимальная дифференцируемая структура, содержащая $\mathcal{G}$. Итог нашим рассуждениям подводит

Теорема 1.1. *Пусть M есть n-мерное многообразие и $\mathcal{F}$ — дифференцируемая структура на M. Тогда существуют счетное открытое покрытие $\{U_j\}$ многообразия M и множество таких гомеоморфизмов h_j окрестностей U_j на открытые подмножества пространства R^n, что отображения $h_i \circ h_j^{-1}$ задаются n дифференцируемыми функциями с не обращающимся в нуль якобианом. Обратно, если задано такое открытое покрытие и такие отображения h_j, то существует единственная минимальная дифференцируемая структура $\mathcal{F}$, для которой U_j являются координатными окрестностями, а h_j — координатными отображениями.*

Определение 1.4. Многообразие M вместе с дифференцируемой структурой $\mathcal{F}$ называется *дифференцируемым многообразием.*

В тех случаях, когда невозможны недоразумения, мы будем опускать $\mathcal{F}$ и обозначать дифференцируемое многообразие одной буквой M.

Определение 1.5. Пусть U — открытое подмножество многообразия M, и пусть h — взаимно однозначное отображение множества U в R^n. Пара (U, h) называется *координатной картой* [1]), если $h_i \circ h^{-1}$ есть дифференцируемое отображение множества $h(U \cap U_i)$ на $h_i(U \cap U_i)$, якобиан которого нигде не обращается в нуль. [Здесь h_i и U_i те же, что в теореме 1.1.]

Условие, что (U, h) есть карта, очевидно, не зависит от набора (U_i, h_i), а зависит только от дифференцируемой структуры многообразия M.

Функции $x^i \circ h$ (где $(x^1, \ldots, x^n)$ — координаты в R^n) называются *координатами* карты (U, h). Если нет опасности путаницы, мы будем обозначать эти функции через x^i и писать $h = (x^1, \ldots, x^n)$, чтобы показать, что $h(p) = (x^1(p), \ldots, x^n(p)) \in R^n$ для всех $p \in U$.

Определение 1.6. Набор карт (U_i, h_i), такой, что $M = \bigcup U_i$, называется *атласом* многообразия M.

---

[1]) А также *локальной системой координат.— Прим. перев.*

Упражнение 1.1. Пусть $\mathscr{F}^k$ — дифференцируемая структура класса C^k на многообразии M. Показать, что для $l<k$ существует единственная минимальная структура $\mathscr{F}^l$ класса C^l, такая, что $\mathscr{F}^l \supset \mathscr{F}^k$. [Верно также обратное утверждение: если задана структура $\mathscr{F}^l$ класса C^l, то для $k>l$ существует такая структура $\mathscr{F}^k$ класса C^k, что $\mathscr{F}^l$ есть единственная минимальная структура, содержащая $\mathscr{F}^k$. В этом утверждении можно даже положить $k=\infty$. Этот результат принадлежит Уитни [19]. Он опирается на теорему вложения, часть которой мы докажем позднее, см. теорему 4.1.]

Если M_1 и M_2 — многообразия размерности соответственно n_1 и n_2, то $M_1 \times M_2$ есть многообразие. Действительно, если $U_1 \subset M_1$ и $U_2 \subset M_2$ гомеоморфны открытым подмножествам в R^{n_1} и R^{n_2}, то $U_1 \times U_2$ гомеоморфно открытому подмножеству в $R^{n_1+n_2}$. Предположим, что $\mathscr{F}_1$ и $\mathscr{F}_2$ — дифференцируемые структуры на M_1 и M_2. Пусть $\{U_{1j}\}$ и $\{U_{2j}\}$ — покрытия M_1 и M_2 координатными окрестностями с координатными отображениями h_{1j} и h_{2j}. Тогда множества $\{U_{1i} \times U_{2j}\}$ образуют открытое покрытие многообразия $M_1 \times M_2$. Отображение $h_{ij}\colon U_{1i} \times U_{2j} \to R^{n_1+n_2}$, определенное формулой

$$h_{ij}(p, q) = h_{1i}(p) \times h_{2j}(q),$$

является гомеоморфизмом. Кроме того, $h_{ij} \circ h_{kl}^{-1} = h_{1i} \circ h_{1k}^{-1} \times h_{2j} \circ h_{2l}^{-1}$ есть, очевидно, дифференцируемое отображение с ненулевым якобианом. Поэтому система окрестностей $\{U_{1i} \times U_{2j}\}$ и отображений h_{ij} определяет дифференцируемую структуру на $M_1 \times M_2$. Эта структура называется произведением структур $\mathscr{F}_1$ и $\mathscr{F}_2$. Многообразие $M_1 \times M_2$ с этой дифференцируемой структурой называется *произведением дифференцируемых многообразий* M_1 и M_2.

Примеры дифференцируемых многообразий

1. Евклидово пространство R^n (или любое его открытое подмножество), очевидно, является дифференцируемым многообразием. Оно покрыто единственной координатной окрестностью.

2. Пусть S^n (n-мерная сфера) — множество всех точек из R^{n+1}, удовлетворяющих условию

$$(x^1)^2 + \ldots + (x^{n+1})^2 = 1.$$

Пусть U_i^+ обозначает подмножество в S^n, где $x^i > 0$, а U_i^- — подмножество, где $x^i < 0$. Возьмем в качестве координат на $U_i^\pm$ остальные x^j. Легко проверить, что $U_i^\pm$ покрывают S^n и координатные отображения удовлетворяют требуемым условиям.

3. Пусть $T^n = S^1 \times S^1 \times \ldots \times S^1$ (n раз). Многообразие T^n называется *n-мерным тором*.

4. Пусть $T(m, n)$ — пространство всех $(m \times n)$-матриц. Тогда $T(m, n)$ можно рассматривать как R^{mn} и, следовательно, считать

аналитическим многообразием. Пусть $T(m, n; k)$ обозначает пространство всех $(m \times n)$-матриц ранга k (где $0 < k \leqslant \min(m, n)$) с индуцированной топологией. Тогда $T(m, n; k)$ есть аналитическое многообразие размерности $k(m+n-k)$. Действительно, пусть $X_0 \in T(m, n)$. Если ранг $X_0 \geqslant k$, то существуют такие матрицы подстановок координат P и Q, что

$$PX_0Q = \begin{pmatrix} A_0 & B_0 \\ C_0 & D_0 \end{pmatrix},$$

где A_0 — невырожденная матрица порядка k. Далее, существует такое $\varepsilon > 0$, что если все элементы матрицы $A - A_0$ меньше ε, то матрица A невырожденна. Пусть U^* — множество тех $X \in T(m, n)$, для которых

$$PXQ = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}, \tag{1.9}$$

где все элементы матрицы $A - A_0$ по модулю меньше ε. Тогда U^* — открытое множество в $T(m, n)$. Если $X \in U^*$, то $X \in T(m, n; k)$ тогда и только тогда, когда $D = CA^{-1}B$. Чтобы убедиться в этом, заметим, что матрица

$$\begin{pmatrix} I_k & 0 \\ -CA^{-1} & I_{m-k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & -CA^{-1}B + D \end{pmatrix} \tag{1.10}$$

(где I_j — единичная матрица порядка j) имеет тот же ранг, что и матрица $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$, поскольку матрица $\begin{pmatrix} I_k & 0 \\ -CA^{-1} & I_{m-k} \end{pmatrix}$ невырожденна; но матрица в правой части (1.10) имеет ранг k тогда и только тогда, когда $D = CA^{-1}B$. Возьмем в качестве координатной окрестности точки $X_0 \in T(m, n; k)$ множество $U = U^* \cap \cap T(m, n; k)$, открытое в индуцированной топологии. Определим координатное отображение h, полагая

$$h(X) = \begin{pmatrix} A & B \\ C & 0 \end{pmatrix}, \tag{1.11}$$

где мы рассматриваем евклидово пространство $R^{k^2+k(m-k)+k(n-k)} = R^{k(m+n-k)}$ как пространство всех матриц вида $\begin{pmatrix} A & B \\ C & 0 \end{pmatrix}$. Отображение h^{-1} задается формулой

$$h^{-1}\begin{pmatrix} A & B \\ C & 0 \end{pmatrix} = P^{-1}\begin{pmatrix} A & B \\ C & CA^{-1}B \end{pmatrix} Q^{-1}. \tag{1.12}$$

Функции перехода $h' \circ h^{-1}$ для двух перекрывающихся окрестностей U и U' задаются формулой

$$h' \circ h^{-1} \begin{pmatrix} A & B \\ C & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & 0 \end{pmatrix}, \tag{1.13}$$

где

$$P'P^{-1} \begin{pmatrix} A & B \\ C & CA^{-1}B \end{pmatrix} Q^{-1}Q' = \begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix}. \tag{1.14}$$

Поскольку все матрицы, входящие в (1.13), являются аналитическими (и даже рациональными) функциями своих аргументов (так как A невырожденна), координатные окрестности и отображения определяют на $T(m, n; k)$ аналитическую структуру размерности $k(m+n-k)$.

5. Пусть $\mathcal{F}(m, V)$ — множество всех упорядоченных наборов m линейно независимых векторов в вещественном n-мерном векторном пространстве V [$\mathcal{F}(m, V)$ называется *пространством m-реперов* пространства V]. Тогда $\mathcal{F}(m, V)$ есть дифференцируемое многообразие размерности mn. Действительно, выбор базиса пространства V позволяет отождествить $\mathcal{F}(m, V)$ с $T(m, n; m)$.

6. Пусть V есть n-мерное векторное пространство и $\mathcal{G}(p, V)$ — множество p-мерных подпространств из V. Мы утверждаем, что $\mathcal{G}(p, V)$ можно превратить в аналитическое многообразие (грассманово многообразие пространства V) размерности $p(n-p)$. В самом деле, пусть $v^{1*}, \ldots, v^{n*}$ — базис V^*. Если $v^* \in V^*$ и $E \in \mathcal{G}(p, V)$, то через v_E^* мы будем обозначать ограничение v^* на E. Обозначим через $U^{i_1, \ldots, i_p}$ $(1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_p \leqslant n)$ множество тех p-плоскостей E, для которых векторы $v_E^{i_1*}, \ldots, v_E^{i_p*}$ линейно независимы. Пусть $(j_1, \ldots, j_{n-p})$ — множество индексов, дополнительное к $(i_1, \ldots, i_p)$, причем $j_1 < \ldots < j_{n-p}$. Тогда

$$v_E^{j_k*} = \sum_1^p h_l^k v_E^{i_l*},$$

если $E \in U^{i_1, \ldots, i_p}$. Пусть $\Phi^{i_1, \ldots, i_p}\colon U^{i_1, \ldots, i_p} \to R^{p(n-p)}$ — отображение, сопоставляющее каждому подпространству E коэффициенты (h_l^k). Отображения $\Phi^{i_1, \ldots, i_p}$ взаимно однозначны. Они определяют на $\mathcal{G}(p, V)$ структуру аналитического многообразия. Доказательство этих фактов мы оставляем читателю в качестве упражнения.

§ 2. ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ

Пусть φ — некоторое отображение $M_1 \to M_2$. Для любой функции f, определенной на подмножестве $W \subset M_2$, определим функцию $\varphi^*(f)$ на $\varphi^{-1}(W)$, полагая

$$\varphi^*(f)(\cdot) = f \circ \varphi(\cdot). \tag{2.1}$$

Таким образом, φ^* отображает пространство функций, определенных на подмножествах из M_2, в пространство функций, определенных на подмножествах из M_1.

Определение 2.1. Пусть $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F}_2$ — дифференцируемые структуры класса C^k (аналитические), определенные на многообразиях M_1 и M_2. Непрерывное отображение $\varphi\colon M_1 \to M_2$ называется *дифференцируемым класса* C^k (*аналитическим*), если

$$\varphi^*(\mathcal{F}_2) \subset \mathcal{F}_1. \tag{2.2}$$

Пусть $\psi\colon M_2 \to M_3$. Из (2.1) следует, что $(\psi \circ \varphi)^* = \varphi^* \circ \psi^*$. Поэтому мы можем утверждать, что если $\varphi\colon M_1 \to M_2$ и $\psi\colon M_2 \to M_3$ *дифференцируемы, то дифференцируемо и* $\psi \circ \varphi\colon M_1 \to M_3$.

Пусть размерность M_i равна n_i, и пусть (U, h) — координатная карта вблизи точки $\varphi(p)$, где $p \in M_1$. Ее координаты задаются n_2 дифференцируемыми функциями $y^i(\,\cdot\,)$ на U. Если отображение $\varphi\colon M_1 \to M_2$ дифференцируемо, то $y^i \circ \varphi$ — дифференцируемые функции на M_1. В терминах координатной карты (V, g), $g = (x^1, \ldots, x^{n_1})$, вблизи точки p отображение φ (или, точнее, $h \circ \varphi \circ g^{-1}$) задается формулой

$$y^i = \varphi^i(x^1, \ldots, x^{n_1}) \qquad (i = 1, \ldots, n_2), \tag{2.3}$$

где φ^i — дифференцируемые функции. Обратно, предположим, что задано непрерывное отображение φ, которое во всех парах карт имеет вид (2.3). Функция f на M_2 дифференцируема тогда и только тогда, когда ее ограничение на любую координатную окрестность дифференцируемо по координатам. Но в терминах карты (V, g)

$$(\varphi^* f) \circ g^{-1}(x^1, \ldots, x^{n_1}) = f(y^1(x^1, \ldots, x^{n_1}), \ldots, y^{n_2}(x^1, \ldots, x^{n_1})). \tag{2.4}$$

Поэтому функция $\varphi^* f$ дифференцируема в терминах любой карты, и, значит, отображение φ дифференцируемо.

Вид (2.3) отображения $h \circ \varphi \circ g^{-1}$ зависит от выбора локальных карт h в M_2 и g в M_1. Чтобы получить выражение для φ в любой другой паре карт, следует выполнить невырожденные преобразования переменных y и x. Поэтому нас интересуют те выражения, полученные из (2.3), которые инвариантны относительно таких преобразований. Одним из таких объектов является ранг [1]) якобиевой $(n_1 \times n_2)$-матрицы

$$\left(\frac{\partial \varphi^i}{\partial x^j}\right)_{(x^1, \ldots, x^{n_1})}. \tag{2.5}$$

---

[1]) Он называется рангом отображения φ в точке $p = g^{-1}(x^1, \ldots, x^{n_1})$. *Прим. ред.*

Предположим, что матрица (2.5) имеет ранг k в точке $p \in M_1$. Можно считать, перенумеровав, если понадобится, координаты, что

$$\left|\left(\frac{\partial\varphi^\alpha}{\partial x^\beta}\right)\right| \neq 0 \qquad (\alpha, \beta = 1, \ldots, k) \tag{2.6}$$

в точке p. Рассмотрим функции u^i, определенные в окрестности точки p равенствами

$$\begin{aligned} &u^\alpha(x^1, \ldots, x^{n_1}) = \varphi^\alpha(x^1, \ldots, x^{n_1}) && (\alpha = 1, \ldots, k), \\ &u^r = x^r && (r = k+1, \ldots, n_1). \end{aligned} \tag{2.7}$$

Согласно (2.6), якобиан $|(\partial u^i/\partial x^j)|$ отличен от нуля в точке p. Поэтому формула (2.7) определяет координатную карту вблизи p. В терминах этой карты отображение φ задается функциями $\psi^1, \ldots, \psi^{n_2}$, где

$$\psi^\alpha(u^1, \ldots, u^{n_1}) = u^\alpha \qquad (\alpha = 1, \ldots, k). \tag{2.8}$$

Поскольку ранг φ в точке p равен k, он должен быть $\geqslant k$ в некоторой окрестности точки p. Если он равен k в некоторой окрестности точки p, то мы можем сказать несколько больше. Из уравнения (2.8) следует, что $\partial\psi^r/\partial u^s \equiv 0$ для $r, s > k$. Действительно, матрица Якоби имеет вид

$$\begin{array}{cl} & \quad\overbrace{\hphantom{1\quad 0\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot}}^{k} \\ k\left\{\vphantom{\begin{array}{c}1\\1\\1\\1\\1\end{array}}\right. & \left(\begin{array}{ccccc|cccc} 1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & 0 & \cdot & \cdot & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & 0 & 1 & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ \hline & & & & & \frac{\partial\psi^{k+1}}{\partial u^{k+1}} & & & \vdots \\ & & & & & \vdots & & & \frac{\partial\psi^{n_2}}{\partial u^{n_1}} \end{array}\right). \end{array}$$

Если какой-нибудь элемент в правом нижнем углу отличен от нуля, то ранг будет больше k. Мы можем поэтому написать $\psi^r = \psi^r(u^1, \ldots, u^k)$. Введем новые функции $z^1, \ldots, z^{n_2}$, определенные в некоторой окрестности точки $\varphi(p)$ формулами

$$\begin{aligned} &z^\alpha = y^\alpha && (\alpha = 1, \ldots, k), \\ &z^r = y^r - \psi^r(y^1, \ldots, y^k) && (r = k+1, \ldots, n_2). \end{aligned} \tag{2.9}$$

Непосредственная проверка показывает, что формула (2.9) определяет замену координат вблизи $\varphi(p)$ и в терминах новых координат отображение φ задается формулой $z^i = \eta^i(u^1, \ldots, u^{n_1})$, где

$$\begin{aligned} &\eta^\alpha(u^1, \ldots, u^{n_1}) = u^\alpha \qquad (\alpha = 1, \ldots, k), \\ &\eta^r(u^1, \ldots, u^{n_1}) = 0 \qquad (r > k). \end{aligned} \tag{2.10}$$

Таким образом, *если ранг дифференцируемого отображения* φ *в точке* p *равен* k, *то мы можем найти такие карты* (V, g), $g = (x^1, \ldots, x^{n_1})$, *вблизи* p *и* (U, h), $h = (y^1, \ldots, y^{n_2})$, *вблизи* $\varphi(p)$, *что* $y^i \circ \varphi = (\varphi^1, \ldots, \varphi^{n_2})$, *где*

$$\varphi^\alpha(x^1, \ldots, x^{n_1}) = x^\alpha \qquad (\alpha = 1, \ldots, k). \tag{2.11}$$

Если ранг φ *равен* k *в некоторой окрестности точки* p, *то можно добиться, чтобы*

$$\varphi^r(x^1, \ldots, x^{n_1}) = 0 \quad \textit{для} \quad r > k. \tag{2.12}$$

Особый интерес для нас представляют некоторые специальные виды отображений.

Определение 2.2. Дифференцируемое отображение $\varphi: M_1 \to M_2$ называется *погружением*, если ранг φ равен размерности M_1 во всех точках многообразия M_1.

Заметим, что погружение взаимно однозначно локально, но не обязательно глобально.

Определение 2.3. Погружение φ называется *вложением*, если оно является гомеоморфизмом на свой образ (в индуцированной топологии).

Таким образом, вложение есть взаимно однозначное погружение, но не всякое взаимно однозначное погружение есть вложение. На рис. 2 $M_1 = E^1$ — прямая линия, а $M_2 = E^2$ — плоскость. Тогда (*a*) не является погружением (из-за острия), (*b*) есть не взаимно однозначное погружение, (*c*) есть взаимно однозначное погружение, но не вложение, (*d*) — вложение.

Определение 2.4. Отображение φ называется *собственным*, если $\varphi^{-1}(K)$ компактно для любого компактного $K \subset M_2$. Вложение, которое является собственным отображением, называется *собственным вложением*.

Ни одно из отображений рис. 2 не является собственным. Если M_1 компактно, то любое дифференцируемое отображение является собственным.

Упражнение 2.1. Показать, что собственное взаимно однозначное погружение является собственным вложением.

В соответствии с различными типами отображений мы введем различные типы подмногообразий.

Определение 2.5. Пусть M — дифференцируемое многообразие и N — подмножество в M, снабженное структурой дифференцируемого многообразия. Пусть $\iota\colon N \to M$ — вложение (ограничение на N тождественного отображения $M \to M$). Тогда

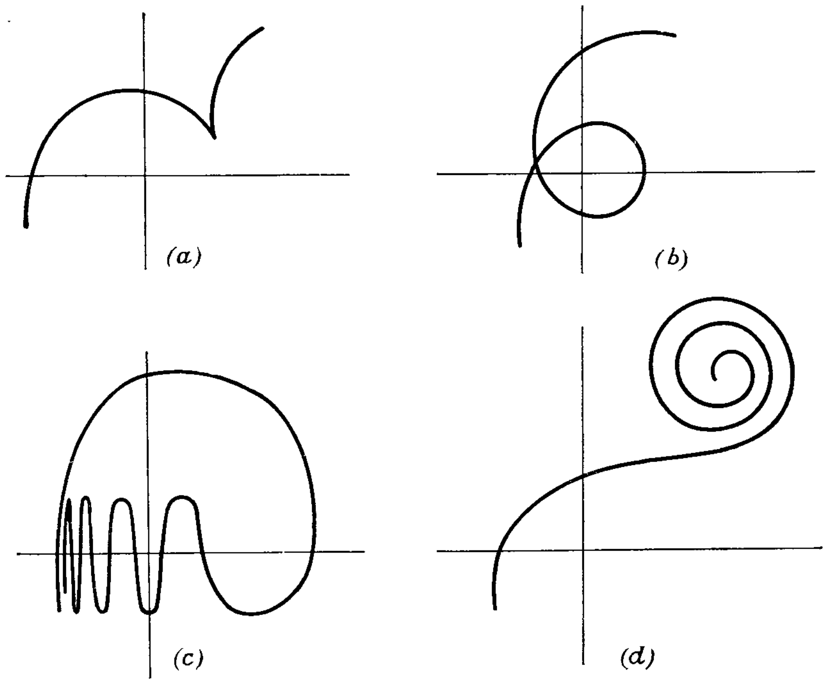


Рис. 2.

N называется *погруженным подмногообразием*, если ι — погружение; N называется *подмногообразием*, если ι — вложение; N называется *замкнутым подмногообразием*, если ι — собственное вложение[1]).

Заметим, что для погруженного подмногообразия N индуцированная на N топология не обязана совпадать с топологией N как дифференцируемого многообразия.

[1]) Легко видеть, что N замкнутом в M в топологическом смысле тогда и только тогда, когда ι — собственное отображение.— *Прим. ред.*

Определение 2.6. Дифференцируемое отображение многообразия M_1 на M_2 называется *диффеоморфизмом*, если оно само и обратное к нему отображение являются вложениями. Два многообразия M_1 и M_2 называются *диффеоморфными*, если существует диффеоморфизм M_1 на M_2.

Упражнение 2.2. Пусть M_1 — вещественная прямая с дифференцируемой структурой, состоящей из всех функций вида $f(x^3)$, где f — функция класса C^∞. Пусть M_2 — вещественная прямая с обычной структурой класса C^∞. Показать, что тождественное отображение $E^1 \to E^1$ есть гомеоморфизм $M_2 \to M_1$ класса C^∞, не являющийся диффеоморфизмом.

Упражнение 2.3. Пусть $\overline{N}$ — погруженное подмногообразие дифференцируемого многообразия M. Показать, что каждая точка из N обладает такой окрестностью [1]) U, что множество дифференцируемых функций многообразия N, определенных на U, совпадает с множеством ограничений на U дифференцируемых функций многообразия M. Таким образом, дифференцируемая структура погруженного подмногообразия определяется дифференцируемой структурой многообразия M.

Упражнение 2.4. Пусть N — подмножество в M. Показать, что $\overline{N}$ есть множество точек некоторого подмногообразия тогда и только тогда, когда любая точка $p \in \overline{N}$ обладает такой окрестностью U в M с координатами $x^1, \ldots, x^n$, что $\overline{N} \cap U$ совпадает с множеством точек, для которых $x^p = x^{p+1} = \ldots = x^n = 0$.

Упражнение 2.5. Пусть $N \subset M$. Показать, что необходимое и достаточное условие того, что N есть замкнутое подмногообразие в M, состоит в существовании покрытия M такими координатными окрестностями $\{U_\alpha\}$, что $p \in N \cap U_\alpha$ тогда и только тогда, когда $x_\alpha^1(p) = \ldots = x_\alpha^k(p) = 0$, где $x_\alpha^1, \ldots, x_\alpha^n$ — локальные координаты в U_α.

Упражнение 2.6. Показать, что $T(m, n; k)$ есть подмногообразие в $T(m, n)$ (где $T(m, n; k)$ определено в упражнении 1.4).

Упражнение 2.7. Показать, что отображение $\pi\colon \mathcal{F}(m, V) \to \mathcal{G}(m, V)$, сопоставляющее каждому набору $(v_1, \ldots, v_n)$ подпространство, порожденное векторами $v_1, \ldots, v_n$, дифференцируемо.

Упражнение 2.8. Показать, что отображение $T(m, n) \times T(n, p) \to T(m, p)$, определяемое умножением матриц, дифференцируемо

Для построения дифференцируемых многообразий полезна следующая

Теорема 2.1. *Пусть M — некоторое множество, $\{U_i\}$ — его счетное покрытие, $\{\varphi_i\}$ — набор взаимно однозначных отображений множеств U_i на дифференцируемые многообразия M_i, причем*

---

[1]) В топологии N как дифференцируемого многообразия.— *Прим. перев.*

1) *для любой пары точек* $p, q \in M$ *либо* q *и* p *содержатся в некотором* U_i, *либо существуют такие множества* U_i *и* U_j, *что* $U_i \cap U_j = \varnothing$, $p \in U_i$, $q \in U_j$;

2) $\varphi_i(U_i \cap U_j)$ — *открытое подмножество в* M_i *для всех* i, j;

3) $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}$ *есть диффеоморфизм многообразия* $\varphi_i(U_i \cap U_j)$ *на* $\varphi_j(U_i \cap U_j)$ *для всех* i, j.

Тогда существует единственная (топология и) дифференцируемая структура на M, *для которой* U_i *открыты, а* φ_i — *диффеоморфизмы окрестностей* U_i *на* M_i.

Доказательство. База топологии M состоит из множеств вида $\varphi_i^{-1}(V)$, где V — открытое подмножество в M_i. Условия 2) и 3) гарантируют, что такие множества действительно образуют базис некоторой топологии. Поскольку топология M_i обладает счетным базисом, то же верно и для топологии M. Условие 1) обеспечивает хаусдорфовость топологии M. Действительно, если $p \neq q \in U_i$, то $\varphi_i(p)$ и $\varphi_i(q)$ имеют непересекающиеся окрестности V_p и V_q; тогда $\varphi_i^{-1}(V_p)$ и $\varphi_i^{-1}(V_q)$ — непересекающиеся окрестности точек p и q. Если $p \in U_i$, $q \in U_j$ и $U_j \cap U_i = \varnothing$, то U_i и U_j — непересекающиеся окрестности точек p и q. Если $p \in U_i$, выберем координатную окрестность V точки $\varphi_i(p)$. Тогда $\varphi_i^{-1}(V)$ есть окрестность точки p, гомеоморфная открытому подмножеству в E^n. Таким образом, M есть многообразие. Назовем функцию f на M дифференцируемой, если $f \circ \varphi_i^{-1}$ — дифференцируемые функции на M_i для всех i. Класс $\mathscr{F}$ всех таких функций определяет (снова благодаря 2) и 3)) дифференцируемую структуру. Отображения φ_i дифференцируемы: если f — дифференцируемая функция на M_i, то $f \circ \varphi_i \circ \varphi_j^{-1}$ есть дифференцируемая функция на M_j, согласно 2). Отображения φ_i^{-1} дифференцируемы по определению. Единственность топологии и дифференцируемой структуры ясна из предыдущего.

§ 3. ТЕОРЕМА САРДА

Пусть задано дифференцируемое отображение $\varphi\colon M^{n_1} \to M^{n_2}$. Ранг отображения φ не может превосходить минимум из чисел n_1 и n_2. Если $n_1 < n_2$, то мы можем ожидать, что образ многообразия M^{n_1} в M^{n_2} будет объектом «меньшей размерности»; точка «общего положения» из M^{n_2} не лежит в $\varphi(M^{n_1})$. Оказывается, что независимо от того, каковы числа n_1 и n_2, точки общего положения из M^{n_2} не являются образами точек из M^{n_1}, если только ранг φ меньше, чем n_2. Чтобы сформулировать понятие «общего положения», введем определение множества меры нуль.

Определение 3.1. Множество $A \subset E^n$ называется *множеством меры нуль* (обозначается $\operatorname{mes} A = 0$), если для любого

$\varepsilon > 0$ существует такая последовательность шаров B_r^ε, что

$$1) \qquad A \subset \bigcup_{r=1}^{\infty} B_r^\varepsilon,$$

$$2) \qquad \sum \operatorname{vol} B_r^\varepsilon < \varepsilon.$$

[Шар есть множество точек вида $\{x \mid \| x - y \| < \delta\}$ для некоторых y и δ, где $\| \|$ — евклидово расстояние. Под $\operatorname{vol} B_r^\varepsilon$ мы понимаем обыкновенный евклидов объем.] Сделаем несколько очевидных замечаний.

$$\text{Если} \quad A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \quad \text{и} \quad \operatorname{mes} A_k = 0, \quad \text{то} \quad \operatorname{mes} A = 0. \qquad (3.1)$$

Действительно, для любого $\varepsilon > 0$ выберем шары $B_{k,r}$, покрывающие A_k и такие, что $\sum_r \operatorname{vol} B_{k,r} \leqslant \varepsilon/2^k$. Тогда $B_{k,r}$ образуют счетное покрытие множества A и $\sum_{k,r} \operatorname{vol} B_{k,r} < \varepsilon$.

Если φ есть отображение класса C^1 окрестности множества A в E^n и $\operatorname{mes} A = 0$, то $\operatorname{mes} \varphi(A) = 0$. (3.2)

Для доказательства мы можем считать, что A содержится в некотором компактном множестве. Действительно, если это не так, мы можем представить A в виде счетного объединения компактов (скажем $A \cap \{x \mid \| x \| < n\}$) и применить (3.1). Для таких A отображение φ удовлетворяет равномерному условию Липшица

$$\| \varphi(x) - \varphi(y) \| < \mu \| x - y \|. \qquad (3.3)$$

Для любого $\varepsilon > 0$ покроем A такими шарами B_k, что $\sum \operatorname{vol} B_k < \varepsilon/\mu^n$. Согласно (3.3), $\varphi(B_k)$ лежит в некотором шаре C_k, радиус которого в μ раз больше радиуса B_k. Значит, $\varphi(A) \subset \bigcup C_k$ и $\sum \operatorname{vol} C_k < \varepsilon$.

Упражнение 3.1. Всякое счетное множество имеет меру нуль.

Упражнение 3.2. Показать, что в определении множества меры нуль мы могли использовать покрытие любыми открытыми множествами, не обязательно шарами, т. е. это определение можно сформулировать так: если для любого $\varepsilon > 0$ множество A может быть покрыто последовательностью таких открытых U_i, что $\sum \operatorname{vol} U_i < \varepsilon$, то $\operatorname{mes} A = 0$.

Определение 3.2. Говорят, что подмножество A дифференцируемого многообразия *имеет меру нуль* ($\operatorname{mes} A = 0$), если $A = \bigcup A_n$, где каждое A_n лежит в некоторой координатной окрестности U_n с координатным отображением φ_n и $\varphi_n(A_n)$ имеет меру нуль.

Согласно (3.1) и (3.2), это определение не зависит от выбора разложения множества A на A_n и от выбора U_n, так как для любой координатной окрестности V и координатного отображения ψ множество $\psi(V \cap A)$ имеет меру нуль. Кроме того, из (3.2) и определения 3.2 следует такое утверждение:

$$\begin{array}{l}\text{\textit{Если} } \varphi\colon M_1^n \to M_2^n \text{ — \textit{отображение класса} } C^1, \\ \text{\textit{то} } \operatorname{mes}\varphi(A) = 0 \text{ \textit{всякий раз, когда} } \operatorname{mes} A = 0.\end{array} \tag{3.4}$$

Если $A \subset \bigcup A_n$ и $\operatorname{mes} A_n = 0$, то $\operatorname{mes} A = 0$. Из этого замечания следует

Лемма 3.1. *Пусть A — подмножество многообразия M. Если каждая точка $p \in M$ обладает такой окрестностью U_p, что* $\operatorname{mes}(U_p \cap A) = 0$, *то* $\operatorname{mes} A = 0$.

Действительно, поскольку топология в M имеет счетную базу, мы можем заменить множества $\{U_p\}$ счетным набором $\{U_i\}$. Тогда $A = \bigcup (A \cap U_i)$ и $\operatorname{mes}(A \cap U_i) = 0$.

Упражнение 3.3. Показать, что множество точек из E^n, для которых $x^{k+1} = \ldots = x^n = 0$, имеет меру нуль (если $k < n$).

Упражнение 3.4. Пусть $f\colon M_1 \to M_2$ — отображение класса C^1. Предположим, что ранг $f = k < \dim M_2$. Тогда $\operatorname{mes} f(M_1) = 0$. [Использовать (2.12) и упражнение 3.3.]

Определение 3.3. Пусть $f\colon M_1 \to M_2$ — отображение класса C^1 и $\dim(M_i) = n_i$. Точки из M_1, в которых ранг $f < n_2$, называются *критическими точками* f. Остальные точки из M_1 называются *регулярными*. Точка $q \in M_2$, для которой $f^{-1}(q)$ содержит по меньшей мере одну критическую точку, называется *критическим значением*. Остальные точки из M_2 называются *регулярными значениями*.

Замечания. Если $\dim M_1 < \dim M_2$, то все точки из M_1 критические. Заметим также, что если точка $x \in M_2$ не лежит в $f(M_1)$, то x — регулярное значение, т. е. в нашей терминологии точки, не являющиеся значениями, всегда будут регулярными значениями.

Упражнение 3.5. Показать, что если y — регулярное значение из M_2, то либо $f^{-1}(y)$ есть подмногообразие размерности $n_1 - n_2$ в M_2, либо $f^{-1}(y)$ пусто.

Сформулируем теперь теорему Сарда.

Теорема 3.1 [1]. *Пусть M_1 и M_2 — многообразия класса C^k размерностей соответственно n_1 и n_2 и f: $M_1 \to M_2$ — отображение класса C^k. Критические значения отображения f образуют множество меры нуль, если*

$$k - 1 \geqslant \max(n_1 - n_2, 0). \tag{3.5}$$

Замечания. (a) Если $n_1 < n_2$, теорема тривиальна (см. упражнение 3.4). (b) Хотя теорема сформулирована для произвольных дифференцируемых многообразий, из определения 3.2 ясно, что доказательство достаточно провести для случая, когда M_2 — евклидово пространство, M_1 — подмножество единичного куба

$$C = \{x \in E^{n_1} \mid 0 \leqslant x^i \leqslant 1\},$$

а f — отображение класса C^k некоторой окрестности куба C в E^{n_2}. В случае $n_1 = n_2$ теорема легко доказывается. Разберем его в первую очередь:

Лемма 3.2. *Пусть $\varphi = (\varphi^1, \ldots, \varphi^n)$ — отображение куба $C \subset E^n$ в E^n, причем каждая функция φ^i определена и принадлежит классу C^1 в некоторой окрестности куба C. Тогда множество критических значений отображения φ имеет меру нуль.*

Доказательство. Для любых двух точек $x = (x^1, \ldots, x^n)$ и $y = (y^1, \ldots, y^n)$ из C имеем, согласно теореме о среднем,

$$\varphi^i(y) - \varphi^i(x) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \varphi^i}{\partial x^j}(z^i)(y^j - x^j), \tag{3.6}$$

где z^i — некоторая точка отрезка, соединяющего x с y. Мы выведем отсюда два следствия. Во-первых, поскольку $\partial\varphi^i/\partial x^j$ ограничены в C, мы можем найти равномерную константу Липшица a, для которой

$$\|\varphi(y) - \varphi(x)\| < a\|x - y\|. \tag{3.7}$$

Во-вторых, пусть T_x обозначает аффинное отображение, касательное к φ в x, т. е.

$$T_x(y) = (T_x^1(y), \ldots, T_x^n(y)),$$

---

[1] Для многих приложений достаточен частный случай теоремы Сарда, когда $n_1 = n_2$, т. е. лемма 3.2. При первом чтении читатель может опустить «трудную» часть ($n_1 > n_2$) теоремы Сарда и приступить прямо к § 4. В этой книге теорема Сарда для $n_1 > n_2$ будет использована только для теорем 4.5 и 4.6.

где

$$T_x^i(y) = \varphi^i(x) + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \varphi^i}{\partial x^j}(x)\,(y^j - x^j). \tag{3.8}$$

Из (3.6) следует, что

$$\varphi^i(y) - T_x^i(y) = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial \varphi^i}{\partial x^j}(z^i) - \frac{\partial \varphi^i}{\partial x^j}(x^i)\right)(y^j - x^j). \tag{3.9}$$

Поскольку $\varphi \in C^1$, функции $\partial\varphi^i/\partial x^j$ непрерывны и, следовательно, равномерно непрерывны в C. Поэтому мы можем найти такую функцию $b(\varepsilon)$, что $b(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$ и

$$\|\varphi(y) - T_x(y)\| \leqslant b(\|x - y\|)\,\|x - y\|. \tag{3.10}$$

Если x — критическая точка, то определитель преобразования T_x обращается в нуль, и, значит, T_x отображает E^n в некоторую $(n-1)$-мерную плоскость P_x. Если $\|y - x\| < \varepsilon$, то, согласно (3.7), $\|\varphi(x) - \varphi(y)\| < a\varepsilon$ и, согласно (3.10), расстояние от $\varphi(y)$ до P_x меньше, чем $\varepsilon b(\varepsilon)$. Поэтому $\varphi(y)$ лежит в пересечении любого куба с ребром $a\varepsilon$ и центром в $\varphi(x)$ с областью, заключенной между двумя параллельными плоскостями, проходящими на расстоянии $\varepsilon b(\varepsilon)$ от P_x. Выбирая куб так, чтобы одна из его граней была параллельна P_x, мы заключаем, что объем этого пересечения равен $2^n a^{n-1}\varepsilon b(\varepsilon)$.

Разделим теперь C на p^n кубов с длиной ребра $1/p$. Любой куб, содержащий критическую точку x, содержится в шаре радиуса $\sqrt{n}/p$ с центром в x. Образ этого шара имеет объем $\leqslant 2^n a^n \times (\sqrt{n}/p)^n\, b(\sqrt{n}/p)$. Образы всех кубов, содержащих по крайней мере одну критическую точку, покрывают множество всех критических значений отображения φ. Поскольку существует самое большее p^n таких кубов, полный объем этих образов не превосходит

$$p^n 2^n a^n (\sqrt{n}/p)^n\, b(\sqrt{n}/p) = 2^n a^n n^{n/2} b(\sqrt{n}/p). \tag{3.11}$$

Это выражение стремится к нулю при $p \to \infty$, что и доказывает лемму 3.2.

Посмотрим теперь, что произойдет, когда $n_1 > n_2$. Все, что мы говорили, останется в силе, кроме последней оценки (3.11), которая заменится на

$$p^{n_1} 2^{n_2} a^{n_2} (\sqrt{n_1}/p)^{n_2}\, b(\sqrt{n_1}/p) = 2^{n_2} a^{n_2} n_1^{n_2/2} p^{n_1 - n_2} b(\sqrt{n_1}/p), \tag{3.12}$$

поскольку мы теперь имеем p^{n_1} кубов с ребром $1/p$ в C. Теперь мы не знаем, да это в общем случае и не верно, что $b(\varepsilon)/\varepsilon^{n_1 - n_2} \to 0$

при $\varepsilon \to 0$. Доказательство основывается на более тщательной оценке, чем та, которую дает теорема о среднем. Мы хотим показать, что функция имеет нули достаточно высокого порядка на своем множестве нулей. Это устанавливает следующая лемма, принадлежащая Морсу [11].

Лемма 3.3. *Пусть A — некоторое подмножество в E^n и $q \geqslant 0$ — целое число. Тогда $A \subset \bigcup_{i=0}^{\infty} A_i$, где A_0 счетно, а A_i $(i \geqslant 1)$ обладают следующим свойством:*

Пусть f — такая функция класса C^q, определенная в окрестности множества A, что все точки из A являются критическими для f. Тогда существуют такие функции $b_i(\varepsilon)$ (зависящие от f), что $b_i(\varepsilon)$ монотонно убывают, $b_i(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$ и для любых точек $x, y \in A_i$

$$| f(x) - f(y) | < b_i(\| x - y \|) \| x - y \|^q. \tag{3.13}$$

Для $n = 1$ лемма очевидна. Действительно, множество A критических точек функции f есть множество, где $f'(x) = 0$. Пусть A_0 — множество дискретных точек из A. Для любой другой точки $x \in A$, $x \notin A_0$ имеем $f'(x) = f^{(2)}(x) = \ldots = f^{(q)}(x) = 0$, поскольку x есть предел последовательности точек x_i с $f'(x_i) = 0$. Итак, $f^{(q)}(x) = 0$ для $x \in A - A_0$ и (3.13) следует из формулы Тейлора. [В качестве A_i надо взять $A \cap K_i$, где K_i образуют последовательность компактных множеств, покрывающих A.]

Для размерности $n > 1$ доказательство несколько сложнее, поскольку не все частные производные высших порядков обращаются в нуль в предельных точках множества A. Однако если некоторая частная производная высшего порядка не обращается в нуль в точке x, то мы можем использовать теорему о неявной функции и найти такую окрестность N_x, что $N_x \cap A$ лежит на подмногообразии меньшей размерности. Это позволит нам доказать лемму при помощи двойной индукции по q и n.

Во всяком случае, прежде чем дать полное доказательство леммы 3.3, мы используем ее для доказательства теоремы 3.1. Сначала докажем следующее утверждение:

Лемма 3.4. *Пусть $\varphi = (\varphi^1, \ldots, \varphi^{n_2})$ — отображение куба $C = \{x \in E^{n_1} \mid 0 \leqslant x^i \leqslant 1\}$ в E^{n_2}, причем φ^i — функции класса C^q, определенные в некоторой окрестности куба C. Пусть A — множество точек из C, в которых ранг φ равен нулю. Тогда $\varphi(A)$ имеет меру нуль, если $q \geqslant n_1/n_2$.*

Доказательство. Разложим A в соответствии с леммой 3.3: $A \subset \bigcup A_r$. Достаточно доказать, что $\varphi(A_r)$ имеет меру нуль. Для $r=0$ это тривиально ввиду счетности A_0; рассмотрим случай $r \geqslant 1$. Отображение φ имеет в точке x ранг нуль тогда и только тогда, когда x — критическая точка для всех функций φ^i. Согласно (3.13), если x и $y \in A_r$ и $\|x-y\| < \varepsilon$, то

$$|\varphi^i(x) - \varphi^i(y)| < b(\varepsilon)\,\varepsilon^q,$$

или

$$\|\varphi(x) - \varphi(y)\| < \sqrt{n_2}\, b(\varepsilon)\,\varepsilon^q. \tag{3.14}$$

Поступим теперь, как при доказательстве леммы 3.2. Разделим C на p^{n_1} кубов C_α со стороной $1/p$. Согласно (3.14), множество $\varphi(A_r \cap C_\alpha)$ лежит в шаре радиуса

$$\sqrt{n_1 n_2}\cdot b\left(\frac{\sqrt{n_1}}{p}\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{n_1}}{p}\right)^q.$$

Поэтому полный объем множества $\varphi(A_r)$ меньше, чем

$$Kb\left(\frac{\sqrt{n_1}}{p}\right)^{n_2} p^{n_1 - qn_2}, \tag{3.15}$$

где $K = \sqrt{n_1 n_2}\,(\sqrt{n_1})^{qn_2}\,\omega_{n_2}$ [ω_{n_2} — объем единичного шара в E^{n_2}]. При условии $q \geqslant n_1/n_2$ мы можем сделать величину (3.15) сколь угодно малой, выбирая число p достаточно большим. Это доказывает лемму 3.4.

Лемма 3.5. *Пусть φ — такое же, как в лемме 3.4, и пусть A — множество точек, где φ имеет ранг r. Тогда $\varphi(A)$ имеет меру нуль, если $q > (n_1 - r)/(n_2 - r)$ $(0 \leqslant r < n_2)$.*

Доказательство. Для $r=0$ это лемма 3.4. В силу леммы 3.1 достаточно доказать, что всякая точка из A обладает такой окрестностью N, что $\varphi(N \cap A)$ имеет меру нуль. Пусть $x_0 \in A$. Согласно (2.11), мы можем найти окрестность $N \ni x_0$, координаты $u^1, \ldots, u^{n_1}$ вблизи x_0 и $y^1, \ldots, y^{n_2}$ вблизи $\varphi(x_0)$, такие, что функции $y^i \circ \varphi = y^i(u^1, \ldots, u^n)$ имеют вид

$$\begin{aligned} &y^\alpha(u^1, \ldots, u^{n_1}) = u^\alpha && (\alpha = 1, \ldots, r), \\ &y^\beta(u^1, \ldots, u^{n_1}) = F^\beta(u^1, \ldots, u^{n_1}) && (\beta = r+1, \ldots, n_2). \end{aligned} \tag{3.16}$$

Для любых фиксированных значений $u^1, \ldots, u^r$ отображение $\eta\colon E^{n_1-r} \to E^{n_2-r}$, определяемое формулой

$$\eta(u^{r+1}, \ldots, u^{n_1}) = F(u^1, \ldots, u^r, u^{r+1}, \ldots, u^{n_1}), \tag{3.17}$$

имеет ранг нуль, если $(u^1, \ldots, u^{n_1}) \in N \cap A$, поскольку φ имеет ранг r. По лемме 3.4 множество $\varphi(N \cap A) \cap P_{(u^1, \ldots, u^r)}$ имеет меру нуль в $P_{(u^1, \ldots, u^r)}$, где $P_{(u^1, \ldots, u^r)}$ есть $(n_2 - r)$-мерная плоскость в E^{n_2}, задаваемая уравнениями $y^\alpha = u^\alpha$, $\alpha = 1, \ldots, r$.

Таким образом, мы доказали, что пересечение множества $\varphi(N \cap A)$ с любой плоскостью $P_{(u^1, \ldots, u^r)}$ имеет меру нуль. Для читателей, немного знакомых с теорией меры, тот факт, что $\varphi(N \cap A)$ имеет меру нуль, следует теперь немедленно из теоремы Фубини. Мы дадим, однако, прямое доказательство этого факта. Заметим прежде всего, что можно считать N компактной окрестностью. Поскольку A замкнуто, множество $N \cap A$ компактно. Поскольку φ непрерывно, $\varphi(N \cap A)$ компактно. Поэтому достаточно доказать следующее утверждение:

Пусть B — компактное подмножество в E^n, пересечение которого с любой плоскостью $P_{(u^1, \ldots, u^r)}$ имеет меру нуль в $P_{(u^1, \ldots, u^r)}$. Тогда B имеет меру нуль в E^n.

Ясно, что, воспользовавшись индукцией, можно свести утверждение к случаю $r = n - 1$ [1]).

Мы предпошлем доказательству следующее замечание. Пусть $[a, b]$ — отрезок вещественной прямой. Мы знаем, что из каждого его открытого покрытия можно выбрать конечное подпокрытие. Мы хотим доказать более сильное утверждение:

Из любого покрытия отрезка $[a, b]$ интервалами можно выбрать подпокрытие, состоящее из интервалов суммарной длины $\leqslant 2\,|b - a|$.

Выберем *минимальное* конечное подпокрытие, т. е. выберем такие интервалы $I_1, \ldots, I_p$ из данного покрытия, что $[a, b] \subset \subset \bigcup_{j=1}^{p} I_j$, но

$$[a, b] \not\subset \bigcup_{i=1,\, i \neq q}^{p} I_i \qquad (1 \leqslant q \leqslant p).$$

[Это можно сделать, взяв некоторое конечное подпокрытие и исключив избыточные интервалы.] Занумеруем интервалы в соответствии с порядком их левых границ, т. е. $I_i = (a_i, b_i)$, $I_j = (a_j, b_j)$, $i < j$, если $a_i < a_j$ (если $a_i = a_j$, покрытие не минимально). Тогда $a_i < a_{i+1} < b_i < b_{i+1}$ и полная длина перекрывающихся интервалов не превосходит длины $[a, b]$. Поэтому суммарная длина всех интервалов не больше $2\,|b - a|$.

[1]) Приведенным ниже доказательством я обязан проф. Х. Фурстенбергу.

Предположим теперь, что $B \subset E^{n-1} \times [a, b]$ и $\operatorname{mes}(B \cap P_{u^n}) = 0$. Для любого $\varepsilon > 0$ мы можем найти покрытие множества $B \cap P_{u^n}$ открытыми множествами $R^i_{u^n} \subset P_{u^n}$ полного объема $< \varepsilon$. Для достаточно малого α множества $R^i_{u^n} \times I^{u^n}_\alpha$ покрывают

$$B \cap \bigcup_{z^n \in I^{u^n}} P_{z^n},$$

где $I^{u^n}_\alpha$ — интервал длины α с центром в u^n. (Это следует из компактности B.) Множества $I^{u^n}_\alpha$ образуют покрытие отрезка $[a, b]$, из которого мы можем извлечь конечное подпокрытие $\{I_j\}$ длины $\leqslant 2|b-a|$. Пусть R^i_j обозначает множество $R^i_{u^n}$, если $I_j = I^{u^n}_\alpha$. Тогда $R^i_j \times I_j$ образуют покрытие множества B, полный объем которого $\leqslant 2|b-a|\varepsilon$. Поскольку мы можем сделать эту величину сколь угодно малой, B имеет меру нуль. Это доказывает лемму 3.5.

Теорема 3.1 следует теперь из леммы 3.5. Если A — множество критических точек отображения f, то $A = \bigcup_{r=0}^{n_2-1} A_r$, где A_r — множество точек, в которых f имеет ранг r. Множество критических значений содержится в $\bigcup_{r=0}^{n_2-1} f(A_r)$. Если $q > n_1 - n_2 + 1$, то $q > (n_1 - r)/(n_2 - r)$ $(0 \leqslant r < n_2)$; поэтому каждое из множеств $f(A_r)$ имеет меру нуль.

Приступим теперь к доказательству леммы 3.3. Мы уже упоминали, что доказательство будет проводиться индукцией по n и q. Чтобы формализовать доказательство, сформулируем лемму:

Лемма 3.6. *Пусть A — подмножество в E^n и $k > 0$ — целое число. Тогда существует такая последовательность множеств A_i $(i \geqslant 0)$ и отображений φ_i $(i \geqslant 1)$, что A_0 счетно, $A \subset \bigcup_{r=0}^{\infty} A_r$ и для всех $i \geqslant 1$*

φ_i есть гомеоморфизм класса C^k шара $B^{m_i}_{\varepsilon_i}$ в E^n, причем $A_i \subset \varphi_i(B^{m_i}_{\varepsilon_i})$ (где B^m_ε — множество тех $x \in E^m$, для которых $\|x\| < \varepsilon$); (3.18)

$$\|\varphi_i(x) - \varphi_i(y)\| \geqslant \|x - y\|; \qquad (3.19)$$

$$\begin{gathered}
\text{для любой функции } f \in C^k, \text{ равной нулю на } A, \\
\text{существуют такие монотонные функции } b_i(\varepsilon), \\
\text{что } \lim_{\varepsilon\to 0} b_i(\varepsilon) = 0 \text{ и} \\
|f(\varphi_i(x))| < b_i(\|x-y\|)\,\|x-y\|^k, \\
\text{если } x, y \in B^{m_i}_{\varepsilon_i}, \ \varphi_i(y) \in A_i.
\end{gathered} \tag{3.20}$$

Для $k = 0$ лемма тривиальна. В этом случае полагаем $A_i = A \cap K_i$, где K_i — множество замкнутых шаров, составляющих базис E^n. В качестве φ_i возьмем перенос шара с центром в нуле в K_i. Тогда (3.20) означает просто равномерную непрерывность. Рассуждения на стр. 58 фактически доказывают лемму для $n = 1$. Приступим к индукции по $n+k$. Предположение индукции состоит в том, что лемма 3.6 верна для $n+k < p$.

Пусть $n+k = p$, $n > 1$, $k > 0$, и пусть $A \subset E^n$. Обозначим через A^1 множество таких $x \in A$, что

$$\sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x^j}\right)^2 (x) = 0 \tag{3.21}$$

для *всех* $f \in C^k$, обращающихся в нуль на A; пусть $A^2 = A - A^1$.

Согласно предположению индукции, существуют такое разложение $A^1 = \bigcup A^1_r$ и такие отображения φ^1_r шаров $B^{m_r}_\varepsilon$, что $A^1_r \subset \varphi^1_r(B^{m_r}_\varepsilon)$, имеет место (3.19) и

$$|g(\varphi^1_r(x))| < b^1_r(\|x-y\|)\,\|x-y\|^{k-1} \tag{3.22}$$

для всех $g \in C^{k-1}$, обращающихся в нуль на A^1. В частности, (3.22) справедливо для $g = \partial f/\partial x^i$, если $f \in C^k$ и равна нулю на A. Покажем теперь, что множества A^1_r и отображения φ^1_r в действительности удовлетворяют условию (3.20). Это вытекает из следующей леммы:

Лемма 3.7. *Пусть φ: $B^m \to E^n$ есть отображение класса C^1, удовлетворяющее условию* (3.19). *Если $f \in C^k$ $(k \geq 1)$ и*

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x^j}(\varphi(x))\right| < b_j(\|x-y\|)\,\|x-y\|^{k-1},$$

причем функции $b_j(\varepsilon)$ монотонны и $\lim_{\varepsilon\to 0} b_j(\varepsilon) = 0$ $(j = 1, \ldots, n)$, то

$$|f(\varphi(x)) - f(\varphi(y))| < Kb(\|x-y\|)\,\|x-y\|^k,$$

где K зависит только от φ.

Доказательство. Положим $F(t) = f(\varphi[y+(x-y)t])$. Тогда $f(\varphi(x)) = F(1)$ и $F(0) = f(\varphi(y))$. По теореме о среднем

$f(\varphi(x)) - f(\varphi(y)) = F'(t)$ для некоторого t, $0 < t < 1$. Но

$$F'(t) = \sum_{j,\,\alpha} \frac{\partial f}{\partial \varphi^j}(\varphi(y + (x-y)t)) \cdot \frac{\partial \varphi^j}{\partial x^\alpha} \cdot (x^\alpha - y^\alpha),$$

если $\varphi = (\varphi^1, \ldots, \varphi^n)$. Поэтому

$$|F'(t)| < K_1 \|x-y\| \left\{ \sum \left| \frac{\partial f}{\partial \varphi^j}(\varphi(y+(x-y)t)) \right| \right\},$$

где $K_1 = n \max \left| \frac{\partial \varphi^j}{\partial x^\alpha} \right|$. Следовательно,

$$|F'(t)| < K_1 n b(\|x-y\|)\|x-y\|^k,$$

что доказывает лемму с константой $K = nK_1$.

Применяя лемму 3.7 к функции f, равной нулю на A (для которой, следовательно, $f(\varphi(y)) = 0$), получаем (3.20).

Вернемся к лемме 3.6. Мы нашли множества A_r^1 и отображения φ_r^1, которые удовлетворяют условиям (3.18), (3.19) и (3.20) и покрывают A^1. Теперь мы хотим сделать то же самое для A^2. Пусть $p \in A^2$. Это означает, что существует такая функция g, равная нулю на A, для которой какая-нибудь производная $\partial g / \partial x^i(p) \neq 0$. Можно считать, что $\partial g / \partial x^n (p) \neq 0$. По теореме о неявной функции мы можем найти окрестность $N \ni p$ и такую функцию $\varphi^n(x^1, \ldots, x^{n-1}) \in C^k$, определенную в некотором шаре B_ε^{n-1}, что любое решение уравнения

$$g(x^1, \ldots, x^n) = 0$$

в N имеет вид $(x^1, \ldots, x^{n-1}, \varphi^n(x^1, \ldots, x^{n-1}))$. Если мы теперь рассмотрим отображение $\varphi\colon B_\varepsilon^{n-1} \to E^n$, задаваемое формулой $\varphi = (\varphi^1, \ldots, \varphi^n)$, где

$$\varphi^\alpha(x^1, \ldots, x^{n-1}) = x^\alpha, \qquad 1 \leqslant \alpha \leqslant n-1,$$
$$\varphi^n(x^1, \ldots, x^{n-1}) = \varphi^n,$$

то $\varphi \in C^k$, $\|\varphi(x) - \varphi(y)\| > \|x-y\|$ и $N \cap A \subset \varphi(B_\varepsilon^{n-1})$. Применим предположение индукции для $n-1$ к $\varphi^{-1}(N \cap A)$. Мы можем написать $\varphi^{-1}(N \cap A) = \bigcup D_r$, где D_0 счетно, и найти отображения ψ_r, удовлетворяющие условиям (3.18), (3.19) и такие, что

$$|h(\psi_r(x))| < b_r(\|x-y\|)\|x-y\|^k,$$

если $\psi_r(y) \in \varphi^{-1}(N \cap A)$, для любой функции $h \in C^k$, обращающейся в нуль на $\varphi^{-1}(N \cap A)$. Но если функция $f \in C^k$ равна нулю на A, то функция $h = f \circ \varphi$ равна нулю на $\varphi^{-1}(N \cap A)$. Полагая $\varphi_r = \varphi \circ \psi_r$, мы получим разложение множества $N \cap A$, как того требует лемма 3.5. Покроем все множество A_2 окрестностями N и выберем счетное подпокрытие. Соединяя все разложения (и обозначая объединение счетных множеств через A_0), мы завершим доказательство леммы 3.6.

Лемма 3.3 следует теперь из леммы 3.6. Действительно, мы просто используем лемму 3.7, поскольку все производные функции обращаются в нуль на множестве ее неизолированных критических точек. Это завершает доказательство теоремы Сарда.

Заметим, что условие гладкости $k-1 \geqslant \max(n_1 - n_2, 0)$ в теореме 3.1 необходимо. Контрпример для случая, когда это неравенство нарушается, построен Уитни [18].

§ 4. РАЗБИЕНИЕ ЕДИНИЦЫ, АППРОКСИМАЦИОННЫЕ ТЕОРЕМЫ

В этом параграфе мы получим несколько аппроксимационных теорем, которые будут использованы в дальнейшем. Доказательство каждой из них делится на две части: «локальный» результат, основанный обычно на теореме Сарда, и метод соединения локальной информации.

Прежде всего напомним некоторые результаты из топологии.

Определение 4.1. Семейство множеств $\{U_\alpha\}$ топологического пространства X называется *локально конечным*, если любая точка $p \in X$ обладает окрестностью N_p, которая пересекается только с конечным числом U_α, т. е. $N_p \cap U_\alpha = \varnothing$ для всех α, кроме конечного числа. Атлас $\{U_\alpha, h_\alpha\}$ дифференцируемого многообразия M называется *локально конечным*, если покрытие $\{U_\alpha\}$ локально конечно.

Определение 4.2. Покрытие $\{V_\beta\}$ называется *вписанным* в покрытие $\{U_\alpha\}$, если для каждого β существует (по крайней мере одно) такое α, что $V_\beta \subset U_\alpha$. Пространство X называется *паракомпактным*, если оно хаусдорфово и в любое его покрытие можно вписать локально конечное покрытие.

Лемма 4.1. *Если X локально компактно* [1]*, имеет счетную базу и хаусдорфово, то X паракомпактно. В частности, любое многообразие паракомпактно.*

Доказательство. Пусть $\{U_i\}$ — такая база топологии пространства X, что $\bar{U}_i$ компактны. Определим по индукции последовательность компактных множеств A_i. Пусть $A_1 = \bar{U}_1$; предполо-

[1]) То есть каждая точка обладает окрестностью с компактным замыканием — *Прим. перев.*

жим, что A_i определено, и пусть j — наименьшее число $>i$, такое, что $A_i \subset U_1 \cup \ldots \cup U_j = V_j$. Положим $A_{i+1} = \overline{V}_j$. Тогда A_i компактны, $A_i \subset \operatorname{Int} A_{i+1}$ [1]) и $\bigcup\limits_{i=0}^{\infty} A_i = X$. Пусть теперь $\{W_\alpha\}$—открытое покрытие пространства X. Для каждого i рассмотрим открытые множества $(\operatorname{Int} A_{i+2} - A_{i-1}) \cap W_\alpha$. Эти множества покрывают компактное множество $A_{i+1} - \operatorname{Int} A_i$. Поэтому мы можем выбрать конечное подпокрытие $V_1^i, \ldots, V_{p(i)}^i$. Набор всех множеств V_j^i покрывает X, поскольку множества $A_{i+1} - \operatorname{Int} A_i$ покрывают X. Покрытие $\{V_k^i\}$ вписано в покрытие $\{W_\alpha\}$. Множество $\operatorname{Int} A_{i+1}$ является окрестностью множества A_i и не пересекается с V_k^j при $j > i+1$. Следовательно, покрытие $\{V_k^i\}$ локально конечно.

Для дифференцируемых многообразий мы можем усилить предыдущую лемму, вписывая покрытие, состоящее из координатных окрестностей:

Лемма 4.2. *Пусть M есть n-мерное дифференцируемое многообразие и $\{W_\alpha\}$ — его открытое покрытие. Тогда существует такой атлас $\{V_i, h_i\}$, что*

1) *$\{V_i\}$ — локально конечное покрытие, вписанное в $\{W_\alpha\}$;*
2) *$h_i(V_i) = B_3^n$ $(=\{x \in E^n \mid \|x\| < 3\})$;*
3) *множества $O_i = h_i^{-1}(B_1^n)$ покрывают M.*

Чтобы убедиться в этом, вернемся к доказательству леммы 4.1 и выберем покрытие множества $A_{i+1} - \operatorname{Int} A_i$ немного более тщательно. Каждая точка p открытого множества $(\operatorname{Int} A_{i+2} - A_{i-1}) \cap W_\alpha$ обладает такой координатной окрестностью $N_{p,\alpha}$ и отображением $h_{p,\alpha}$, что

$$N_{p,\alpha} \subset (\operatorname{Int} A_{i+2} - A_{i-1}) \cap W_\alpha \qquad \text{и} \qquad h_{p,\alpha}(N_{p,\alpha}) \supset B_3^n.$$

Положим $V_{p,\alpha} = h_{p,\alpha}^{-1}(B_3^n)$ и $O_{p,\alpha} = h_{p,\alpha}^{-1}(B_1^n)$. Затем выберем конечное число окрестностей $O_{p,\alpha}$, покрывающих $A_{i+1} - \operatorname{Int} A_i$, и закончим доказательство так же, как и раньше.

Лемма 4.3. *Существует такая функция φ класса C^∞, определенная на E^n, что $\varphi(x) \geqslant 0$ и*

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 & \textit{для} \quad \|x\| \leqslant 3/2, \\ 0 & \textit{для} \quad \|x\| \geqslant 2. \end{cases}$$

---

[1]) $\operatorname{Int} A$ — множество внутренних точек множества A.— *Прим. перев.*

Доказательство. Положим

$$f(r) = \begin{cases} e^{-1/r^2}, & r > 0, \\ 0, & r \leqslant 0. \end{cases}$$

Тогда f — функция класса C^∞. Функция

$$g(r) = \frac{f(2-r)}{f(2-r) + f(r-3/2)}$$

есть функция класса C^∞, равная нулю при $r > 2$ и единице при $r \leqslant 3/2$. Функция $\varphi(x) = g(\|x\|)$ удовлетворяет требованиям леммы.

Определение 4.3. Если на пространстве X задана функция ψ, то *носителем* ψ (обозначается $\operatorname{supp} \psi$) называется замыкание множества точек p, в которых $\psi(p) \neq 0$.

Определение 4.4. *Разбиением единицы класса* C^k на дифференцируемом многообразии M называется набор таких функций $\varphi_i \geqslant 0$ класса C^k, что

1) набор $\{\operatorname{supp} \varphi_i\}$ локально конечен;
2) множества $\operatorname{supp} \varphi_i$ компактны;
3) $\sum\limits_{1}^{\infty} \varphi_i(p) = 1$ для всех $p \in M$.

Заметим, что ввиду условия 1) сумма в 3) имеет при любом фиксированном p только конечное число ненулевых членов.

Определение 4.5. Говорят, что разбиение единицы $\{\varphi_i\}$ *подчинено открытому покрытию* $\{W_\alpha\}$, если для всякого i существует такое α, что $\operatorname{supp} \varphi_i \subset W_\alpha$.

Теорема 4.1. *Пусть $\{W_\alpha\}$ — покрытие дифференцируемого многообразия M класса C^k. Тогда существует разбиение единицы $\{\varphi_i\}$ класса C^k, подчиненное $\{W_\alpha\}$.*

Доказательство. Впишем в $\{W_\alpha\}$ покрытие $\{V_i\}$, как в лемме 4.2. Пусть $\psi_i = \varphi \circ h_i$, где φ — функция из леммы 4.3. Тогда ψ_i — функции класса C^k, причем $\operatorname{supp} \psi_i \subset V_i$ и $\psi_i(p) = 1$ для $p \in O_i$. Поскольку покрытие $\{V_i\}$ локально конечно, набор $\{\operatorname{supp} \psi_i\}$ тоже локально конечен. Положим

$$\varphi_i(p) = \frac{\psi_i(p)}{\sum\limits_{j=1}^{\infty} \psi_j(p)}. \tag{4.1}$$

Поскольку функции ψ_j неотрицательны, $\psi_j(p) = 1$ по крайней мере для одного j (множества O_j покрывают M) и все функции ψ_j, кроме конечного числа, обращаются в нуль в точке p, выражение (4.1) имеет смысл. Набор $\{\varphi_j\}$ образует разбиение единицы. Поскольку $\operatorname{supp} \varphi_i = \operatorname{supp} \psi_i$, это разбиение единицы подчинено $\{W_\alpha\}$.

Теперь мы используем предыдущие результаты, чтобы получить аппроксимационные теоремы для отображений класса C^k. Прежде чем сформулировать эти теоремы, мы должны решить, как измерять близость отображений. Другими словами, мы хотим задать топологию в пространстве отображений $M_1 \to M_2$ класса C^k, где M_i — дифференцируемые многообразия. В случае, когда M_1 и M_2 — евклидовы пространства, каждое отображение задается n_2 функциями $f^1, \ldots, f^{n_2}$ от n_1 переменных $x^1, \ldots, x^{n_1}$. В пространстве функций класса C^k существует очевидная метрика, метрика равномерной сходимости:

$$\| f-g \|_k = \sum \sup_{x \in E^n} \left| \frac{\partial^\alpha f(x)}{(\partial x^1)^{\alpha_1} \ldots (\partial x^n)^{\alpha_n}} - \frac{\partial^\alpha g(x)}{(\partial x^1)^{\alpha_1} \ldots (\partial x^n)^{\alpha_n}} \right|,$$

где сумма распространяется на все частные производные порядка $\leqslant k$. Это означает, что функция f близка к функции g, если все частные производные функции f равномерно близки к соответствующим производным g (включая производную нулевого порядка) вплоть до порядка k. Эта метрика очевидным образом распространяется на наборы n функций, а именно

$$\| f-g \|_k = \sup_i \| f^i - g^i \|_k.$$

В случае многообразий, однако, отображение задается функциями только локально и только после того, как выбраны локальные координаты в M_1 и M_2. Кроме того, частные производные также имеют смысл только в случае, когда заданы локальные координаты. Поэтому нам придется определить близость в терминах фиксированных координат в M_1 и M_2.

Определение 4.6. Пусть $f\colon M_1 \to M_2$ — отображение класса C^k. Пусть $Z = \{Z_i, H_i\}$ — локально конечный атлас на M_2, где $H_i = (z_i^1(\cdot), \ldots, z_i^{n_2}(\cdot))$. Пусть $W = \{W_i, h_i\}$ — такой локально конечный атлас на M_1 с $h_i = (w_i^1, \ldots, w_i^{n_1})$, что $\overline{W}_i$ компактно и $f(\overline{W}_i) \subset Z_{j(i)}$ для некоторого $j(i)$. [Для данного атласа Z всегда можно найти такой атлас W, согласно лемме 4.2.] Пусть $\varepsilon(\cdot)$ — положительная функция на M_1 и k — неотрицательное целое число. Тогда символом $\mathcal{N}_{(W, Z, \varepsilon, k)} f$ обозначается множество всех отображений $g\colon M_1 \to M_2$ класса C^k, для которых выполнены следующие два условия:

$$g(\overline{W}_i) \subset Z_j \text{ для всех таких } i, j, \text{ что } f(\overline{W}_i) \subset Z_j. \tag{4.2}$$

Для этих значений i и j пусть отображение $H_j \circ f \circ h_i^{-1}$ задается функциями $(f_{ij}^1, \ldots, f_{ij}^{n_2})$, а отображение $H_j \circ g \circ h_i^{-1}$ — функциями $(g_{ij}^1, \ldots, g_{ij}^{n_2})$. Тогда

$$|Df_{ij}^r(w) - Dg_{ij}^r(w)| < \varepsilon(h_i^{-1}(w)) \tag{4.3}$$

для всех $w \in h_i(W_i)$ и $r = 1, \ldots, n_2$, где D — любой дифференциальный оператор $\partial^\alpha/(\partial w^1)^{\alpha_1} \ldots (\partial w^{n_1})^{\alpha_{n_1}}$, такой, что $\alpha_1 + \ldots + \alpha_{n_1} \leqslant k$ (включая случай $\alpha = 0$).

Ввиду локальной конечности атласов условия (4.2) и (4.3) сводятся к конечному числу условий «близости» в каждой точке многообразия M_1. Мы оставляем читателю проверку того факта, что множества $\mathcal{N}_{(W, Z, \varepsilon, k)} f$ образуют систему окрестностей отображения f для некоторой топологии в пространстве отображений $M_1 \to M_2$ класса C^k.

Сформулируем теперь первую из наших аппроксимационных теорем.

Теорема 4.2. *Пусть f — отображение класса C^k n_1-мерного многообразия M_1 в n_2-мерное многообразие M_2 и $k \geqslant 2$. Если $n_2 \geqslant 2n_1$, то для любого набора (W, Z, ε, k) существует отображение $g \in \mathcal{N}_{(W, Z, \varepsilon, k)} f$, являющееся погружением. Если ранг $f = n_1$ на замкнутом множестве K, то мы можем выбрать отображение g так, чтобы $g(x) = f(x)$ для $x \in K$.*

Доказательство разбито на три части. Сначала мы докажем локальный аналог теоремы, т. е. что любое отображение локально может быть аппроксимировано погружением. Затем мы покажем, что отображение, близкое к погружению, есть погружение. Наконец, мы воспользуемся леммой 4.2, чтобы составить из локальных аппроксимаций глобальную.

Лемма 4.4. *Пусть F — отображение класса C^2 открытого множества $U \subset E^{n_1}$ в E^{n_2}, причем $n_2 \geqslant 2n_1$. Для любого $\delta > 0$ существует такая $(n_1 \times n_2)$-матрица $A = (a_j^i)$, что*

$$|a_j^i| < \delta \tag{4.4}$$

и отображение

$$x \to F(x) + Ax \tag{4.5}$$

является погружением.

[Символом Ax здесь обозначено произведение матрицы A на матрицу $x = (x^1, \ldots, x^{n_1})$.]

Доказательство. Пусть $J(x)$ — матрица Якоби отображения F в точке x. Тогда матрица Якоби отображения (4.5) в точке x равна $J(x) + A$. Мы хотим выбрать A так, чтобы эта матрица при любом x имела ранг n_1. Иначе говоря, мы хотим найти матрицу A, не представимую в виде $B - J(x)$, где B — матрица ранга $k < n_1$, а $x \in U$. Чтобы сделать это, мы изучим множество матриц вида $B - J(x)$, где ранг $B = k < n_1$, а $x \in U$.

Пусть $T(n_1, n_2; k)$ — многообразие всех $(n_1 \times n_2)$-матриц ранга k (см. пример 4 из § 1). Рассмотрим отображение G_k: $U \times T(n_1, n_2; k) \to T(n_1, n_2)$, заданное формулой

$$G_k(x, B) = B - J(x).$$

Ясно, что G_k есть отображение класса C^1. Многообразие $U \times T(n_1, n_2; k)$ имеет размерность $n_1 + k(n_1 + n_2 - k)$. Производная по t функции $n_1 + t(n_1 + n_2 - t)$ равна $n_1 + n_2 - 2t$. Она положительна, если $t < n_1 < n_2$. Значит, функция $n_1 + k(n_1 + n_2 - k)$ монотонно возрастает по k, если $k < n_1$, т. е. $n_1 + k(n_1 + n_2 - k) \leqslant n_1 + (n_1 - 1)(n_1 + n_2 - n_1 + 1) = n_1 n_2 - (n_2 - 2n_1) - 1$, что меньше, чем $n_1 n_2$, если $n_2 \geqslant 2n_1$. Поскольку размерность пространства $T(n_1, n_2)$ равна $n_1 n_2$, из (тривиального случая) теоремы Сарда следует, что образ отображения G_k в $T(n_1, n_2)$ имеет меру нуль. Значит, в сколь угодно малой окрестности нулевой матрицы мы можем найти матрицу $A \in T(n_1, n_2)$, которая не принадлежит образам отображений G_k $(k = 0, 1, \ldots, n - 1)$. Это доказывает лемму 4.4.

Лемма 4.5. *Пусть F — отображение класса C^1 подмножества $U \subset E^{n_1}$ в E^{n_2}. Пусть F имеет ранг n_1 на компактном подмножестве $K \subset U$. Тогда существует такое $\varepsilon > 0$, что любое отображение G: $U \to E^{n_2}$, для которого $\| G - F \|_1 < \varepsilon$, имеет ранг n_1 на K* [1]).

Пусть $\delta(x)$ — максимум абсолютных значений миноров порядка n_1 матрицы Якоби отображения F в точке x. Тогда δ — непрерывная функция, положительная на компакте K. Значит, $\delta(x) > \delta > 0$ на K. Поэтому мы можем найти такое ε, что изменение элементов матрицы $J(x)$ меньше, чем на ε, изменяет все рассматриваемые миноры меньше, чем на $\delta/2$. Это ε, очевидно, удовлетворяет требованиям леммы.

Приступим к доказательству теоремы 4.2. Нам задано локально конечное покрытие $\{W_i\}$. Каждая точка p имеет окрестность N_p, пересекающуюся только с конечным числом W_i. Поскольку мно-

---

[1]) Напомним, что $\| F \|_1 = \sup\limits_{i, x} | f^i(x) | + \sup\limits_{i, j, x} \left| \dfrac{\partial f^i}{\partial x^j}(x) \right|$.

жество, где ранг $f=n_1$, открыто, мы можем найти такое открытое множество $W \supset K$, что ранг $f=n_1$ на W. Пусть $N_p^1=N_p \cap W$ и $N_p^2=N_p \cap (M_1-K)$. Множества $\{N_p^1, N_p^2\}$ $(p \in M_1)$ образуют открытое покрытие многообразия M_1. Впишем в него счетное локально конечное покрытие, состоящее из координатных окрестностей V_i, удовлетворяющих условиям 1), 2) и 3) леммы 4.2. По определению покрытия $\{N_p^\alpha\}$ каждое V_i содержится либо в W, либо в M_1-K. Перенумеруем V_i положительными и отрицательными числами так, чтобы $V_i \subset W$ тогда и только тогда, когда $i \leqslant 0$.

В соответствии с леммой 4.2 множества $O_i=h_i^{-1}(B_1^n)$ покрывают M_1. Пусть $P_i=h_i^{-1}(B_2^n)$, так что $O_i \subset P_i \subset V_i$ и P_i компактны. Мы будем строить по индукции последовательность таких отображений $\{f_s\}$ $(s>0)$ класса C^k, что

(i) $f_0=f$;

(ii) $f_s \in \mathcal{N}_{(W,\, Z,\, \varepsilon/2^s,\, k)}\, f_{s-1}$;

(iii) f_s имеет ранг n_1 на $\bigcup\limits_{i \leqslant s} \overline{O}_i=Q_s$;

(iv) $f_s(x)=f_{s-1}(x)$ для $x \in M_1-V_s$.

Как только мы построим такую последовательность, теорема будет доказана. Действительно, из (iv) (и локальной конечности покрытия $\{V_i\}$) следует, что $f_s(x)=f_{s+1}(x)$ для достаточно больших s и всех x из окрестности любой фиксированной точки $p \in M_1$. Таким образом, последовательность $\{f_s(x)\}$ сходится к отображению $g(x)$ класса C^k, которое имеет всюду ранг n_1 благодаря условию (iii) и удовлетворяет условиям (4.2) и (4.3), согласно (i) и (ii).

Приступим теперь к построению последовательности $\{f_s\}$. Положим $f_0=f$ и допустим, что мы построили f_{s-1}. Нужно найти отображение f_s, удовлетворяющее (ii), (iii) и (iv). Условие (iv) определяет f_s вне V_s. Мы должны определить f_s на V_s так, чтобы оно удовлетворяло (ii), (iii) и гладко «соединялось» с f_{s-1} вне V_s. Гладкое «соединение» будет гарантировано, если мы положим $f_s=f_{s-1}$ в V_s-P_s. Осталось определить f_s в координатной окрестности V_s, так что мы можем перейти в евклидово пространство. Пусть $g_{s-1}=H_\rho \circ f_{s-1} \circ h_s^{-1}$, где (Z_ρ, H_ρ) — карта атласа Z с $f_{s-1}(V_s) \subset Z_\rho$. Пусть $R_{s-1}=h_s(Q_{s-1} \cap V_s)$. Мы хотим найти такое отображение $g_s\colon B_3^{n_1} \to H_\rho(Z_\rho) \subset E^{n_2}$, чтобы отображение f_s, равное $H_\rho^{-1} \circ g_s \circ h_s$ на V_s и равное f_{s-1} на M_1-V_s, удовлетворяло условиям (ii) и (iii). Определим g_s формулой

$$g_s(x)=g_{s-1}(x)+\varphi(x)Ax, \tag{4.6}$$

где φ — функция леммы 4.3, а A есть $(n_1 \times n_2)$-матрица, выбором которой мы сейчас займемся. Посмотрим, какие ограничения налагают условия (ii), (iii) на выбор g_s, т. е. на A. Прежде всего рассмотрим условие (ii). Существует конечное число окрестностей W_i, содержащих окрестность V_s, и конечное число окрестностей Z_j, содержащих $f_{s-1}(\overline{W}_i)$ для $W_i \supset V_s$. Образ окрестности V_s при отображении f_s должен лежать в каждой из таких окрестностей Z_j. Пользуясь координатным отображением h_i окрестности W_i и координатным отображением H_j окрестности Z_j, мы можем перенести условие (ii) на отображение g_s: положим $\Phi_j = H_j \circ H_\rho^{-1}$ и $\varphi_i = h_s \circ h_i^{-1}$; тогда отображения $\Phi_j \circ g_{s-1} \circ \varphi_i$ переводят $B_3^{n_1}$ в компактные подмножества открытых множеств $H_j(Z_j)$. Первое требование условия (ii) состоит в том, что $\Phi_j \circ g_s \circ \varphi_i$ должно делать то же самое. Этого можно достичь, выбрав все элементы матрицы A достаточно малыми. Помимо этого условие (ii) требует еще близости всех частных производных до порядка k функций $\Phi_j \circ g_s \circ \varphi_i$ и $\Phi_j \circ g_{s-1} \circ \varphi_i$. Поскольку существует только конечное число i и j и функция φ, а значит, и ее производные выбраны заранее, это условие тоже будет удовлетворено, если элементы матрицы A достаточно малы.

Рассмотрим теперь условие (iii). Оно требует, чтобы g_s было погружением на $\overline{B}_1^{n_1} \cup R_{s-1}$, когда g_{s-1} — погружение на R_{s-1}. Поскольку $\varphi = 0$ вне $B_{3/2}^{n_1}$, отображение g_s имеет ранг n_1 всюду на $R_{s-1} - R_{s-1} \cap \overline{B}_2^{n_1}$ независимо от выбора матрицы A. С другой стороны, лемма 4.5 утверждает, что отображение g_s имеет ранг n_1 на $R_{s-1} \cap B_2^{n_1}$, если матрица A достаточно мала. Согласно лемме 4.4, мы можем выбрать матрицу A, удовлетворяющую всем этим требованиям, так, чтобы отображение $x \to g_{s-1}(x) + Ax$ имело на $B_3^{n_1}$ ранг n_1. Поскольку $\varphi(x) \equiv 1$ на $B_{3/2}^{n_1}$, отображение g_s совпадает на $B_{3/2}^{n_1}$ с этим отображением. Следовательно, g_s имеет ранг n_1 всюду на $\overline{B}_1^{n_1} \cup R_{s-1}$. Таким образом, мы построили требуемую последовательность $\{f_s\}$ и доказали теорему 4.2.

Мы показали, что любое дифференцируемое отображение $M_1 \to M_2$ можно аппроксимировать погружением, если $n_2 \geqslant 2n_1$. В качестве следствия мы получаем:

Любое многообразие класса C^k $(k > 1)$ размерности n_1 может быть погружено в E^{2n_1}.

Действительно, достаточно применить теорему 4.2 к любому отображению f: $M_1 \to E^{n_2}$ класса C^k. Теперь мы покажем, что любое погружение можно аппроксимировать взаимно однозначным погружением, если $n_2 > 2n_1$.

Теорема 4.3. *Пусть f — погружение класса C^k $(k \geqslant 1)$ n_1-мерного многообразия M в E^{n_2}. Пусть Z есть E^{n_2} с обычной системой координат, а $\{W_i\}$ — то же, что и в определении 4.6. Тогда, если $n_2 > 2n_1$, то для любых $\varepsilon(x)$ и $k \geqslant 0$ существует взаимно однозначное погружение g: $M \to E^{n_2}$, принадлежащее $\mathcal{N}(W, \varepsilon, Z, k)\, f$. Если отображение f взаимно однозначно в окрестности W замкнутого множества K, то можно выбрать g так, чтобы $g(x) = f(x)$ для всех $x \in K$.*

Доказательство. Доказательство проводим так же, как раньше. В настоящем случае локальное утверждение тривиально: по теореме о неявной функции любая точка p обладает окрестностью N_p, на которой отображение f взаимно однозначно. Пусть

$$N_p^1 = W \cap N_p, \qquad N_p^2 = M - K \cap N_p.$$

Выберем разбиение единицы $\{\varphi_i\}$, подчиненное этому покрытию. Занумеруем φ_i положительными и отрицательными числами так, чтобы $\operatorname{supp} \varphi_i \subset W$ тогда и только тогда, когда $i \leqslant 0$. Мы получим отображение g в виде

$$g = f + \sum_1^\infty b_i \varphi_i, \tag{4.7}$$

где коэффициенты $b_i = (b_i^1, \ldots, b_i^{n_2})$ будут выбраны по индукции. Предположим, что $b_1, \ldots, b_m$ определены так, что

$$f_m = f + \sum_1^m b_i \varphi_i$$

есть погружение и отображение f_s удовлетворяет условию (ii) на стр. 70 при $s \leqslant m$. Мы можем добиться того, чтобы (ii) выполнялось и для $s = m+1$, выбрав $\| b_{m+1} \|$ достаточно малым. Требование, чтобы $f_m + b_{m+1}\varphi_{m+1}$ было погружением. также удовлетворяется, если $\| b_{m+1} \|$ мало, согласно лемме 4.5. Наконец, пусть D_{m+1} — открытое подмножество в $M \times M$, состоящее из таких пар (y_1, y_2), что $\varphi_{m+1}(y_1) \neq \varphi_{m+1}(y_2)$. Пусть G_{m+1}: $D_{m+1} \to E^{n_2}$ — отображение, определяемое формулой

$$G_{m+1}(y_1, y_2) = \frac{f_m(y_2) - f_m(y_1)}{\varphi_{m+1}(y_1) - \varphi_{m+1}(y_2)}. \tag{4.8}$$

Поскольку G_{m+1} дифференцируемо и размерность D_{m+1} равна $2n_1$, множество $G_{m+1}(D_{m+1})$ имеет меру нуль. Поэтому мы можем выбрать b_{m+1} произвольно малым так, чтобы при этом $b_{m+1} \notin G_{m+1}(D_{m+1})$. Тогда из равенства $f_{m+1}(y_1) = f_{m+1}(y_2)$ следует, что

$$f_m(y_1) + b_{m+1}\varphi_{m+1}(y_1) = f_m(y_2) + b_{m+1}\varphi_{m+1}(y_2),$$

или

$$b_{m+1}(\varphi_{m+1}(y_1)-\varphi_{m+1}(y_2))=f_m(y_2)-f_m(y_1).$$

Поскольку $b_{m+1}\notin G_{m+1}(D_{m+1})$, это возможно только в том случае, если

$$\varphi_{m+1}(y_1)=\varphi_{m+1}(y_2) \qquad \text{и} \qquad f_m(y_2)=f_m(y_1).$$

Определим теперь отображение g формулой (4.7). Из определения видно, что g есть погружение, аппроксимирующее f, т. е. $g\in\mathcal{N}(W, Z, \varepsilon, k)f$. Покажем, что оно взаимно однозначно. Предположим, что $g(y_1)=g(y_2)$. Поскольку $\{\varphi_i\}$ — разбиение единицы, $\varphi_i(y_1)=\varphi_i(y_2)=0$ для всех i, больших некоторого числа r. Следовательно, $g(y_1)=f_r(y_1)=f_r(y_2)=g(y_2)$. В соответствии с выбором b_r это означает, что $\varphi_r(y_1)=\varphi_r(y_2)$ и $f_{r-1}(y_1)=f_{r-1}(y_2)$. Продолжая подобным образом, мы получим, что $f(y_1)=f(y_2)$ и

$$\varphi_i(y_1)-\varphi_i(y_2)=0 \qquad \text{для всех } i>0. \tag{4.9}$$

Равенство (4.9) показывает, что точки y_1 и y_2 лежат в окрестности W, в которой отображение f взаимно однозначно. Значит, $y_1=y_2$.

Комбинируя теоремы 4.2 и 4.3, получаем теорему Уитни:

Теорема 4.4. *Любое многообразие M класса C^k $(k\geqslant 2)$ размерности n допускает собственное вложение класса C^k в E^{2n+1}.*

Доказательство. Любое отображение класса C^k многообразия M в E^{2n+1} может быть аппроксимировано погружением (теорема 4.2), а это погружение может быть аппроксимировано взаимно однозначным погружением (теорема 4.3). Таким образом, исходя из любого отображения f класса C^k (например, из постоянного отображения), мы получаем взаимно однозначное погружение g. Из упражнения 2.1 мы знаем, что взаимно однозначное погружение g является вложением, если $g^{-1}(Q)$ компактно для любого компактного $Q\subset E^{2n+1}$ или, что эквивалентно,

$$g^{-1}(\bar{B}_p^n) \text{ компактно для всех } p. \tag{4.10}$$

Мы хотим выбрать f так, чтобы g удовлетворяло условию (4.10). Выберем разбиение единицы $\{\varphi_i\}$ и положим

$$f(x)=\sum k\varphi_k(x) \tag{4.11}$$

(что корректно, поскольку семейство $\{\operatorname{supp}\varphi_i\}$ локально конечно). Полагая $\varepsilon(x)=1/2$ и применяя к отображению f теоремы 4.2 и 4.3, мы получим такое взаимно однозначное погружение g, что $\|g(x)-f(x)\|<1$. Если $\|g(x)\|\leqslant p$, то $\|f(x)\|\leqslant p+1$

и, значит, x принадлежит компактному множеству $\bigcup\limits_{i=1}^{p+1} \operatorname{supp} \varphi_i$. Таким образом, условие (4.10) выполнено, и g есть вложение M в E^{2n+1}.

Замечания. a) Уитни доказал в [19] более сильную теорему. Он показал, что многообразие M класса C^1 допускает такое вложение f класса C^1 в E^{2n+1}, что $f(M)$ есть вещественно аналитическое подмногообразие в E^{2n+1}. Это показывает, что любое многообразие класса C^1 может быть снабжено вещественно аналитической структурой.

b) Существуют многообразия размерности n, не допускающие вложения в E^{2n-1} (например, проективные пространства подходящей размерности).

c) Если наложить на многообразие M топологические ограничения, то оно может быть вложено в евклидово пространство размерности $< 2n$. Эти условия можно выразить как условия обращения в нуль различных гомотопических групп (см. [21]).

d) Для вещественно аналитических многообразий аналогичная теорема о существовании вещественно аналитического вложения представляет собой намного более глубокий результат. Она доказана [1]) Морри [10].

Наши последние аппроксимационные теоремы посвящены регулярным пересечениям двух подмногообразий. Например, если даны две кривые на плоскости, то мы можем ожидать, что в случае общего положения они не касаются одна другой в точках пересечения. Сформулируем условие регулярности пересечения следующим образом:

Определение 4.7. Пусть f — дифференцируемое отображение n_1-мерного многообразия M_1 в n_2-мерное многообразие M_2. Пусть N есть (n_2-p)-мерное подмногообразие в M_2. Говорят, что отображение f *трансверсально регулярно* (*ТР*) *к* N *в точке* x_0, если либо $f(x_0) \notin N$, либо существуют координаты $x^1, \ldots, x^{n_1}$ вблизи x_0 и координаты $y^1, \ldots, y^{n_2}$ вблизи $f(x_0)$, такие, что

1) в некоторой окрестности $U \ni f(x_0)$ пересечение $N \cap U$ задается уравнениями $y^1 = \ldots = y^p = 0$;

2) матрица $\left(\dfrac{\partial y^i}{\partial x^j}\right)_{j=1, \ldots, n_1}^{i=1, \ldots, p}$ имеет в точке x_0 ранг p.

Заметим, что условие 2) может иметь место только в случае, если $p \leqslant n_1$. Если $n_1 < p$, то трансверсальная регулярность

[1]) Морри доказал эту теорему только для компактных многообразий. Для произвольных многообразий она доказана Грауэртом, см. сб. *Математика*, 4 : 3 (1960), 29—41.— *Прим. перев.*

означает, что $f(x_0) \notin N$. Так, на рис. 3 ($n_2 = 2$, $n_1 = p = 1$) (a) есть TP-пересечение, а (b) — нет.

Определение 4.8. Говорят, что отображение f *трансверсально регулярно к* N, если оно трансверсально регулярно к N в любой точке $x \in M_1$.

Определение 4.9. Пусть f — погружение многообразия M_1 в M_2. Пусть x_1 и x_2 — точки из M_1, для которых $f(x_1) = f(x_2)$. Мы можем найти такие непересекающиеся окрестности U_1 и U_2

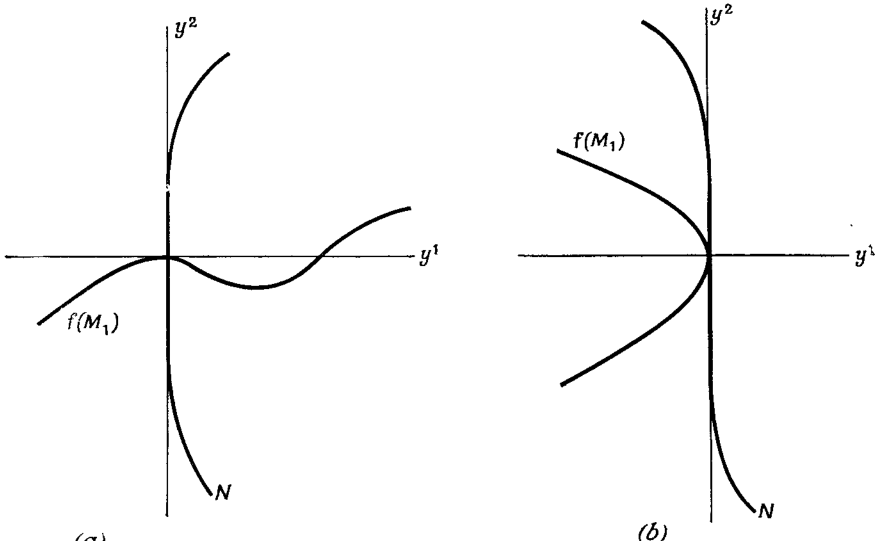


Рис. 3.

точек x_1 и x_2, что $f \mid U_1$ и $f \mid U_2$ — вложения. Погружение f называется *регулярным в* (x_1, x_2), если $f \mid U_1$ трансверсально регулярно к $f(U_2)$ в точке x_1. Погружение f называется *регулярным*, если оно трансверсально регулярно во всех (x_1, x_2), для которых $f(x_1) = f(x_2)$.

Упражнение 4.1. Показать, что если f регулярно в (x_1, x_2), то оно регулярно в (x_2, x_1).

Теорема 4.5 (Том[1]). *Пусть* f: $M_1 \to M_2$ — *отображение класса* C^k, *и пусть* N — *замкнутое подмногообразие в* M_2. *Для*

[1]) Доказательство этой теоремы использует «трудную» часть теоремы Сарда. Оно может быть опущено при первом чтении, так как теоремы 4.5 и 4.6 не будут по существу применяться в остальной части книги. Читатель может сразу перейти к § 5.

любых (W, Z, ε, k) *существует отображение* $g \in \mathcal{N}(W, Z, \varepsilon, k) f$, *трансверсально регулярное к* N. *Кроме того, если* A *— такое замкнутое множество из* M_1, *что* f *трансверсально регулярно для всех* $x \in A$, *то можно выбрать* g *таким образом, чтобы* $g(x) = f(x)$ *для* $x \in A$.

Прежде чем приступать к доказательству теоремы 4.5, переформулируем условие 2) определения 4.7. Пусть (U, h) — карта вблизи $f(x_0)$, и пусть отображение π: $E^m \to E^p$ определено равенством

$$\pi(y^1, \ldots, y^m) = (y^1, \ldots, y^p). \tag{4.12}$$

Тогда условие 2) означает, что начало координат $(0, \ldots, 0)$ есть регулярное значение отображения $\pi \circ h \circ f$, ограниченного на некоторую окрестность точки x_0.

Сформулируем теперь аналог леммы 4.5.

Лемма 4.6. *Пусть* f *— отображение класса* C^1 *открытого множества* $U \subset E^{n_1}$ *в* E^{n_2}. *Предположим, что* f *трансверсально регулярно к плоскости* $P = \{y \mid y^1 = \ldots = y^p = 0\}$ *во всех точках некоторого компактного множества* $K \subset U$. *Тогда существует такое* $\varepsilon > 0$, *что любое отображение* g, *для которого* $\| f - g \|_1 < \varepsilon$, *также трансверсально регулярно к* P *на* K.

Как мы заметили, трансверсальная регулярность на K эквивалентна тому, что отображение $\pi \circ f$ не имеет критических точек x на K, для которых $\pi \circ f(x) = (0, \ldots, 0) = 0$. Если $n_1 < p$, то это означает, что $0 \notin \pi \circ f(K)$. Поскольку K компактно, 0 находится на положительном расстоянии ε от $\pi \circ f(K)$. Поэтому если $\| g - f \|_1 < \varepsilon$, то $0 \notin \pi \circ g(K)$. Если $n_1 \geqslant p$, то условие трансверсальной регулярности означает, что $(\pi \circ f)^{-1}(0)$ есть конечное множество и что матрица Якоби отображения $\pi \circ f$ в каждой точке $x_i \in (\pi \circ f)^{-1}(0)$ имеет ранг p. Поэтому мы можем найти такие открытые окрестности U_i каждой из этих точек, что некоторый минор порядка p матрицы Якоби по абсолютному значению $> \delta > 0$ для всех $x \in \bigcup U_i$. Поскольку множество $K' = K - \bigcup U_i$ компактно и $0 \notin \pi \circ f(K')$, прообраз нуля $g^{-1}(0)$ при отображении g, достаточно близком к f, принадлежит множеству $\bigcup U_i$. Но тогда для отображения g, достаточно близкого к f, соответствующий минор порядка p матрицы Якоби отображения $\pi \circ g$ отличен от нуля в каждой точке из $(\pi \circ g)^{-1}(0)$.

Доказательство теоремы 4.5. Выберем такой атлас $\{Y_\alpha, H_\alpha\}$ многообразия M_2 с $H_\alpha = (y_\alpha^1, \ldots, y_\alpha^{n_2})$, что либо $N \cap Y_\alpha = \varnothing$, либо $N \cap Y_\alpha$ задается уравнениями $y_\alpha^1 = \ldots = y_\alpha^p = 0$. Пусть $\{X_i\}$ — локально конечное покрытие, вписанное в $\{Y_\alpha\}$. Множества $f^{-1}(X_i)$

образуют покрытие многообразия M_1. Пусть W — открытое множество, содержащее A, на котором f трансверсально регулярно к N. Если дано покрытие $\{W_i\}$, то множества

$$\{W \cap f^{-1}(X_i) \cap W_j,\ M_1 - \overline{A \cap f^{-1}(X_i) \cap W_j}\}$$

образуют покрытие многообразия M_1. Впишем в него покрытие $\{V_s\}$, о котором говорилось в лемме 4.2, перенумерованное так, что $V_i \subset W$ тогда и только тогда, когда $i \leqslant 0$.

Построим последовательность отображений, удовлетворяющую условиям (i), (ii) и (iv) на стр. 70 и (вместо (iii)) условиям

(v) f_s трансверсально регулярно к N на $Q_s = \bigcup\limits_{i \leqslant s} \overline{O}_i$;

(vi) для каждого i существует такое $\jmath(i)$, что $f_s(P_i) \subset X_{j(i)}$ для всех s.

Из существования такой последовательности немедленно следует доказываемая теорема.

Воспользуемся, как и раньше, индукцией. Предположим, что f_{s-1} определено и удовлетворяет условиям (ii), (iv), (v) и (vi). Положим $f_s = f_{s-1}$ на $V_s - P_s$. По предположению индукции $f_{s-1}(P_s) \subset X_{j(s)}$. Пусть H — координатное отображение окрестности $X_{j(s)}$. Мы хотим выбрать f_s так, чтобы отображение $\pi \circ H \circ f_s$ не имело критических точек на $Q_s \cap V_s$, переходящих в начало координат. По теореме Сарда множество критических значений имеет меру нуль в E^p. Поэтому мы можем выбрать $a \in E^{n_2}$ сколь угодно близко к началу координат так, чтобы $\pi(a)$ было регулярным значением отображения $\pi \circ H \circ f_{s-1}$. Определим теперь f_s на V_s, полагая [1])

$$f_s(x) = H^{-1} \circ [H \circ f_{s-1}(x) - a\varphi(h_s(x))]. \tag{4.13}$$

Для $x \in \overline{O}_s$ имеем $\pi \circ H \circ f_s(x) = \pi \circ H \circ f_{s-1}(x) - a$. Поскольку a — регулярное значение отображения $\pi \circ H \circ f_{s-1}$, начало координат есть регулярное значение отображения $\pi \circ H \circ f_{s-1} - a$, так что не существует критических точек $x \in \overline{O}_s$, для которых $\pi \circ H \circ f_s(x) = 0$. Для $x \in Q_s \cap P_s$ мы можем, выбрав a достаточно малым, применить лемму 4.6. Все остальные условия также будут удовлетворены, если a достаточно мало. Для условия (ii) это очевидно. Что касается условия (vi), то его фактически надо проверить только для конечного числа P_i (тех, для которых $P_i \cap V_s \neq \varnothing$). Для всех других $f_s = f_{s-1}$. Таким образом, мы имеем конечное число компактных множеств $P_i \subset M_1$ и таких открытых множеств $X_{j(i)} \subset M_2$, что $f_{s-1}(P_i) \subset X_{j(i)}$. Ясно, что если f_s достаточно близко к f_{s-1} (т. е. если a мало), то $f_s(P_i) \subset$ $\subset Y_{j(i)}$. Это доказывает теорему 4.5.

---

[1]) Где φ — функция из леммы 4.3.— *Прим. перев.*

Теорема 4.6. *Пусть f — погружение класса C^k многообразия M_1 в M_2. Для любых (W, Z, ε, k) существует регулярное погружение g: $M_1 \to M_2$, принадлежащее $\mathcal{N}_{(W, Z, \varepsilon, k)f}$.*

Заметим, что теорема 4.6 есть обобщение теоремы 4.2. Если $\dim M_2 > 2 \dim M_1$, то регулярность означает взаимную однозначность.

Пусть $\{V_i\}$ — вписанное в $\{W_j\}$ покрытие, определенное в лемме 4.2 и такое, что f взаимно однозначно на каждой окрестности V_i. Мы хотим построить последовательность отображений $\{f_s\}$, удовлетворяющую условиям (i), (ii) и (iv) на стр. 70, а также условиям

(vii) f_s регулярно во всех $(x_1, x_2) \in Q_s \times Q_s$;

(viii) f_s есть погружение, взаимно однозначное на каждом P_i.

Построим последовательность f_s по индукции, полагая $f_s = f_{s-1}$ на $V_s - P_s$. Пусть Z — координатная окрестность в M_2, содержащая $f_{s-1}(V_s)$, и H — соответствующее координатное отображение. Пусть $N_i = H(f_{s-1}(V_i) \cap Z)$, $i = 1, \ldots, s-1$. По предположению индукции отображение $g_{s-1} = H \circ f_{s-1} \circ h_s^{-1}$: $B_3^{n_1} \to E^{n_2}$ есть взаимно однозначное погружение. Построим g_s, являющееся взаимно однозначным погружением $B_3^{n_1} \to E^{n_2}$ и совпадающее на $\bar{B}_3^{n_1} - B_2^{n_1}$ с отображением g_{s-1}, которое трансверсально регулярно к N_i. Прежде всего видно, что отображение g_s будет взаимно однозначным, если оно достаточно близко к g_{s-1}. Действительно, пусть

$$m = \min \frac{\| g_{s-1}(x) - g_{s-1}(y) \|}{\| x - y \|} \qquad \text{для } x, y \in \bar{P}_s.$$

Сделаем так, чтобы функция $d_s = g_s - g_{s-1}$ имела столь малые производные, что $\| d_s(x) - d_s(y) \| < m \| x - y \|$. Тогда

$$\| g_s(x) - g_s(y) \| = \| d_s(x) - d_s(y) - (g_{s-1}(x) - g_{s-1}(y)) \| \geqslant$$
$$\geqslant m \| x - y \| - \| d_s(x) - d_s(y) \| > 0.$$

Это гарантирует взаимную однозначность отображения f_s на P_s. Отображение f_s будет взаимно однозначным на всех P_i, если обеспечить его взаимную однозначность только на конечном числе P_i, для которых $P_i \cap V_s \neq \varnothing$. Но этого можно добиться, выбрав f_s достаточно близким к f_{s-1} на каждой соответствующей окрестности V_i, т. е. это условие сводится к конечному числу условий малости для разности $g_s - g_{s-1}$.

Заметим далее, что лемма 4.6 (точнее, ее небольшая модификация) утверждает, что если дано отображение $\overset{k}{g_s}$, трансверсально регулярное к $N_1, N_2, \ldots, N_k$ на компактном множестве A, то любое отображение, достаточно близкое к $\overset{k}{g_s}$, также трансверсально регулярно к этим подмногообразиям на A.

По предположению g_{s-1} трансверсально регулярно к $N_1, \ldots, N_{s-1}$ на $h(Q_{s-1})$. По теореме 4.5 мы можем выбрать трансверсально регулярное к N_1 отображение G_s^1: $B_3^{n_1} \to E^{n_2}$, столь близкое к g_{s-1}, что отображение g_s^1:

$$g_s^1(x) = G_s^1(x) + \varphi(x)\,(g_{s-1}(x) - G_s^1(x))$$

трансверсально регулярно ко всем N_i на $h(Q_s \cap V_s)$. Выберем далее отображение G_s^2: $B_3^{n_1} \to E^{n_2}$ трансверсально регулярным к N_2 на $B_3^{n_1}$ и столь близким к g_s^1, чтобы отображение g_s^2:

$$g_s^2(x) = G_s^2(x) + \varphi(x)\,(G_s^2(x) - g_s^1(x))$$

было трансверсально регулярным ко всем N_i на $h(Q_s \cap V_s)$ и к N_1 на $\overline{B}_1^{n_1}$. Продолжая по индукции подобным образом, мы получим отображение $g_s = g_s^s$, трансверсально регулярное к $N_1, \ldots, N_k$ на $h(Q_s \cap V_s) \cup \overline{B}_1^{n_1}$. При этом разность $g_s(x) - g_{s-1}(x)$ может быть сделана сколь угодно малой, если на каждом шаге налагать дополнительные условия «близости». Положим $f_s = H^{-1} \circ g_s \circ h$. Проверим, что отображение f_s удовлетворяет условиям (ii), (iv), (vii) и (viii). Условия (ii), (iv) и (viii), очевидно, выполняются. Рассмотрим условие (vii). Пусть $(x_1, x_2) \in Q_s \times Q_s$. Если $x_1 \in V_s$ и $x_2 \in V_s$, то условие тривиальным образом выполнено, поскольку отображение f_s взаимно однозначно на V_s. Если $x_1 \in V_s$, а $x_2 \notin V_s$, то $f_s(x) = f_{s-1}(x)$ для некоторой окрестности точки x_2. По построению f_s трансверсально регулярно к $f_{s-1}(V_i)$ во всех точках $x \in Q_s \cap V_s$. Если $x_1 \notin V_s$ и $x_2 \notin V_s$, то $f_s(x) = f_{s-1}(x)$ для всех x из некоторых окрестностей точек x_1, x_2, так что (vii) выполняется по предположению индукции.

Отображение $g = \lim f_s$ является аппроксимацией, удовлетворяющей требованиям теоремы 4.6.

§ 5. КАСАТЕЛЬНОЕ ПРОСТРАНСТВО

При изучении дифференцируемых многообразий полезно рассматривать различные «инфинитезимальные» объекты. Мы дадим последовательное изложение теории таких объектов в следующем параграфе. Чтобы обосновать их изучение, мы сначала рассмотрим понятие касательного вектора на многообразии. В классическом векторном анализе понятие касательного вектора к кривой определяется непосредственным образом.

Если $\varphi(t) = (\varphi^1(t), \ldots, \varphi^n(t))$ есть кривая в R^n, причем $\varphi(0) = p$, то касательный вектор к кривой φ в точке p имеет вид $(\varphi^{1\prime}(0), \ldots, \varphi^{n\prime}(0))$. Две кривые φ и ψ имеют один и тот же касательный вектор, если $\varphi^{i\prime}(0) = \psi^{i\prime}(0)$ для всех i. Однако на многообразии мы не можем записать любую кривую как набор n функций одной переменной, пока не выбрана локальная система координат. Тем не менее мы можем определить касательный вектор в точке p более абстрактным образом как класс эквивалентных кривых, проходящих через точку p, причем две кривые считаются эквивалентными, если в точке p они имеют одинаковые производные в одной, а значит, и во всех системах координат, заданных вблизи p.

Более точно, пусть $\mathrm{Cu}\,(M)$ есть множество всех пар (p, φ), где $p \in M$, а φ — такое дифференцируемое отображение интервала $(-\varepsilon, \varepsilon)$ в M, что $\varphi(0) = p$. Таким образом, $\mathrm{Cu}\,(M)$ есть пространство всех кривых на M. Существует очевидное отображение π: $\mathrm{Cu}\,(M) \to M$, определяемое формулой $\pi(p, \varphi) = p$. Введем в пространстве $\mathrm{Cu}\,(M)$ следующее отношение эквивалентности:

$$(p, \varphi) \sim (p', \varphi'), \quad \text{если} \quad p = p' \quad \text{и} \quad \left.\frac{d(x^i \circ \varphi)}{dt}\right|_{t=0} = \left.\frac{d(x^i \circ \varphi')}{dt}\right|_{t=0},$$

где $(x^1, \ldots, x^n)$ — некоторая система координат вблизи p.

Заметим, что если функции $y^i = y^i(x^1, \ldots, x^n)$ определяют другую систему координат вблизи p, то

$$\frac{d(y^i \circ \varphi)}{dt} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial y^i}{\partial x^j} \frac{d(x^j \circ \varphi)}{dt}. \tag{5.1}$$

Поэтому введенное отношение эквивалентности не зависит от системы координат. Обозначим пространство классов эквивалентности пространства $\mathrm{Cu}\,(M)$ через $T(M)$. Элемент X из $T(M)$ (т. е. класс эквивалентности пространства $\mathrm{Cu}\,(M)$) называется *касательным вектором*. Говорят, что элемент $(p, \varphi) \in X$ касается вектора X [1]). Очевидно, что отображение π постоянно на классах эквивалентности и, значит, индуцирует отображение, которое мы снова будем обозначать через π, пространства $T(M)$ в M. Если $X \in T(M)$ и $\pi(X) = p$, то мы говорим, что X есть касательный вектор в точке p. Множество $\pi^{-1}(p)$ обозначается $T_p(M)$ и называется *касательным пространством многообразия M в точке p*. Заметим, что выбор системы координат вблизи p индуцирует отображение $T_p(M) \to R^n$. Действительно, пусть $h = (x^1, \ldots, x^n)$ — координаты вблизи p и $X \in T_p(M)$. Пусть (p, φ) касается вектора X. Положим

$$\bar{h}(X) = (X^1, \ldots, X^n), \qquad X^i = \left.\frac{dx^i \circ \varphi}{dt}\right|_{t=0}. \tag{5.2}$$

---

[1]) Или, иначе, X есть касательный вектор кривой φ в точке p.— *Прим. перев.*

Ясно, что (5.2) не зависит от выбора φ. Отображение $\bar{h}: T_p(M) \to R^n$, очевидно, взаимно однозначно. Покажем, что $\bar{h}(T_p(M)) = R^n$. Действительно, если $(X^1, \ldots, X^n) \in R^n$, то определим кривую $\varphi(t)$, полагая

$$\varphi(t) = h^{-1}(h(p) + t(X^1, \ldots, X^n)).$$

Непосредственное вычисление показывает, что $\bar{h}(Y) = (X^1, \ldots, X^n)$, где Y — вектор, которого касается пара (p, φ). Если $h' = (y^1, \ldots, y^n)$ — другая система координат и отображение $h' \circ h^{-1}$ задается функциями $y^1(x^1, \ldots, x^n), \ldots, y^n(x^1, \ldots, x^n)$, то $\overline{h'}(Y) = (Y^1, \ldots, Y^n)$, где

$$Y^i = \sum \frac{\partial y^i}{\partial x^j} X^j \tag{5.3}$$

(частные производные берутся в точке $h(p)$). Таким образом, $\overline{h'} \circ \bar{h}^{-1}$ есть линейное отображение пространства R^n на R^n. Это означает, что мы имеем на $T_p(M)$ *каноническую структуру векторного пространства*. Действительно, если a и b — вещественные числа, а $X, Y \in T_p(M)$, то положим

$$aY + bX = \bar{h}^{-1}(a\bar{h}(Y) + b\bar{h}(X)). \tag{5.4}$$

Поскольку отображение $\overline{h'} \circ \bar{h}^{-1}$ линейно, структура векторного пространства, определенная на $T_p(M)$ формулой (5.4), не зависит от выбора h. Отображение $\bar{h}$ является изоморфизмом векторного пространства $T_p(M)$ на R^n.

Пусть $\mathcal{F}_U$ обозначает (линейное) пространство всех дифференцируемых функций, определенных на $U \subset M$.

Введем понятие производной функции f по направлению касательного вектора X_p в точке p.

Теорема 5.1. *Каждому касательному вектору X_p на многообразии M соответствует единственная линейная функция L_{X_p}, определенная на $\mathcal{F}_U$ для любого открытого множества U, содержащего p. Эта линейная функция удовлетворяет условию*

$$L_{X_p}(fg) = f(p) L_{X_p}(g) + g(p) L_{X_p}(f) \tag{5.5}$$

для всех $f, g \in \mathcal{F}_U$. Если $L_{X_p} = L_{Y_p}$, то $X_p = Y_p$. Кроме того, $L_{aX_p + bY_p} = aL_{X_p} + bL_{Y_p}$. Если M — аналитическое или класса C^∞ многообразие, а L — линейный функционал, определенный на $\mathcal{F}_U$ и удовлетворяющий условию (5.5) для некоторой координатной окрестности U точки p, то существует единственный вектор $X_p \in T_p(M)$, такой, что $L = L_{X_p}$.

Доказательство. Пусть (p, φ) касается вектора X_p. Определим L_{X_p} формулой

$$L_{X_p}(f) = \left.\frac{df[\varphi(t)]}{dt}\right|_{t=0}. \tag{5.6}$$

Немедленно проверяется, что L_{X_p} удовлетворяет условию (5.5). Если $(p, \varphi) \sim (p, \psi)$, то

$$\left.\frac{df[\varphi(t)]}{dt}\right|_{t=0} = \left.\frac{df[\psi(t)]}{dt}\right|_{t=0} \tag{5.7}$$

для всех f, так что L_{X_p} не зависит от выбора пары (p, φ). Если имеет место равенство (5.7), то, полагая $f = x^i$, находим, что $(p, \varphi) \sim (p, \psi)$. Таким образом, из равенства $L_{X_p} = L_{Y_p}$ следует, что $X_p = Y_p$. Ясно также, что отображение $X_p \to L_{X_p}$ линейно.

Предположим теперь, что многообразие M — класса C^∞ или аналитическое. Пусть L — линейный функционал на $\mathscr{F}_U$, удовлетворяющий условию (5.6), и (U, h) — система координат, $h = (x^1, \ldots, x^n)$, $h(p) = (0, \ldots, 0)$. Из формулы (5.5) следует, что $L(1) = 2L(1) = 0$ (где 1 — функция, принимающая постоянное значение 1). Значит, L обращается в нуль на константах. Для любой функции $f \in \mathscr{F}_U$ имеем

$$f \circ h^{-1}(x^1, \ldots, x^n) = f(p) + \sum a_i x^i + \sum x^i x^j f_{ij}(x^1, \ldots, x^n),$$

где f_{ij} — функции класса C^∞ или аналитические. [Заметим, что если f — функция класса C^k, то f_{ij} — функции класса C^{k-2} и доказательство не проходит.] Тогда $L(f) = \sum a_i L(x^i)$, так как

$$\begin{aligned} L(x^i x^j f_{ij}) &= x^i(p) L(x^j) f_{ij} \circ h(p) + \\ &+ x^j(p) L(x^i) f_{ij} \circ h(p) + x^i(p) x^j(p) L(f_{ij} \circ h) = \\ &= 0 + 0 + 0 = 0. \end{aligned}$$

Поэтому

$$L(f) = \left.\frac{df[\varphi(t)]}{dt}\right|_{t=0}, \quad \text{где } h \circ \varphi(t) = (tL(x^1), \ldots, tL(x^n)).$$

Значит, $L = L_{X_p}$, где X_p — вектор, которого касается пара (p, φ). В любом случае, независимо от класса дифференцируемости многообразия M, любой линейный функционал вида (5.6) может быть отождествлен с вектором, которого касается пара (p, φ). Так, если φ^i — кривая, определенная равенством

$$x^j(\varphi^i(t)) = \delta_i^j t, \tag{5.8}$$

то вектор, которого касается пара (p, φ^i), может быть отождествлен с линейным функционалом $\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p$, где $\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p(f) = \left.\frac{\partial f}{\partial x^i}\right|_p$.

Из определений следует, что $\overline{h}(\partial/\partial x^i)_p = (\delta_i^1, \ldots, \delta_i^n)$, так что векторы $(\partial/\partial x^i)_p$ образуют базис пространства $T_p(M)$.

Пусть f — дифференцируемая функция, определенная в точке p. Функция f определяет по формуле (5.6) линейную функцию на $T_p(M)$. Обозначим ее $(df)_p$. Таким образом,

$$\langle X_p, (df)_p\rangle = L_{X_p}(f). \tag{5.9}$$

Согласно определениям, имеем

$$\left\langle \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p, \quad (dx^j)_p \right\rangle = \delta_i^j \tag{5.10}$$

для любых локальных координат $(x^1, \ldots, x^n)$. Таким образом, линейные функции $(dx^i)_p$ образуют базис пространства $(T_p(M))^*$, дуальный к базису $(\partial/\partial x^i)_p$. Обозначим $(T_p(M))^*$ через $T_p^*(M)$ и положим $T^*(M) = \bigcup_{p \in M} T_p^*(M)$. Элементы из $T_p^*(M)$ называются кокасательными векторами в точке p. Если f — дифференцируемая функция, то из (5.9) и (5.10) следует, что

$$df_p = \sum \left(\frac{\partial f}{\partial x^i}\right)_p dx_p^i. \tag{5.11}$$

Дифференцируемое отображение $g\colon M_1 \longrightarrow M_2$ индуцирует очевидным образом отображение $g_*\colon \mathrm{Cu}(M_1) \longrightarrow \mathrm{Cu}(M_2)$. Действительно, если $(p, \varphi) \in \mathrm{Cu}(M_1)$, то

$$g_*(p, \varphi) = (g(p), g \circ \varphi) \in \mathrm{Cu}(M_2). \tag{5.12}$$

Ясно, что если $(p, \varphi) \sim (p', \varphi')$, то $g_*(p, \varphi) \sim g_*(p', \varphi')$. Значит, g_* индуцирует отображение $T(M_1) \longrightarrow T(M_2)$, которое мы будем обозначать тем же символом g_*. Пусть $h = (x^1, \ldots, x^{n_1})$ — локальные координаты вблизи точки $p \in M_1$, $H = (y^1, \ldots, y^{n_2})$ — локальные координаты вблизи $g(p)$ и в этих координатах отображение g задается функциями $y^i(x^1, \ldots, x^{n_1})$. Тогда, если φ^i — кривая, определяемая формулой (5.8), то кривая $g^i \circ \varphi^i$ имеет в локальных координатах вид $y^1(\delta_1^i t, \ldots, \delta_{n_1}^i t), \ldots, y^{n_2}(\delta_1^i t, \ldots, \delta_{n_1}^i t)$, так что

$$g_*\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p = \sum \frac{\partial y^j}{\partial x^i}\left(\frac{\partial}{\partial y^j}\right)_{g(p)}. \tag{5.13}$$

Из формулы (5.13) видно, что отображение g_* линейно на каждом $T_p(M)$.

Упражнение 5.1. Показать, что g есть погружение тогда и только тогда, когда g_* взаимно однозначно на каждом $T_p(M)$.

В следующем параграфе мы увидим, что $T(M)$ и $T^*(M)$ могут быть превращены в дифференцируемые многообразия таким образом, что отображение g_* будет дифференцируемым. Проверим это сейчас для случая, когда M есть векторное пространство, скажем R^n. В R^n имеется каноническая система координат. Относительно этой системы координат касательный вектор задается набором n чисел, который можно рассматривать как элемент пространства

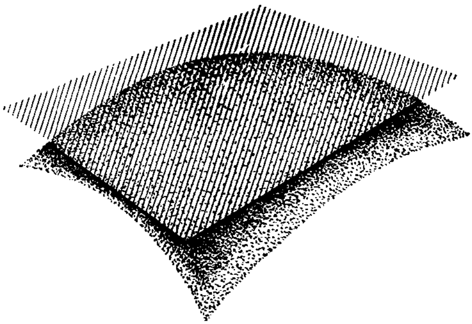


Рис. 4.

R^n. Таким образом, мы имеем отображение l: $T_p(R^n) \to R^n$. С помощью l мы можем отождествить $T(R^n)$ с $R^n \times R^n$.

Упражнение 5.2. Пусть g_a: $R^n \to R^n$ — сдвиг на вектор a, т. е. $g_a(x) = x + a$. Показать, что для любого $t \in T(R^n)$

$$l((g_a)_* t) = l(t).$$

Упражнение 5.3. Пусть $t \in T_p(R^n)$ и f — дифференцируемая функция, определенная в точке $p \in R^n$. Показать, что

$$L_t(f) = \lim_{s \to 0} \frac{1}{s}(f(p + sl(t)) - f(p)).$$

Это то самое отождествление, которое подразумевается, когда в классическом анализе говорят о векторе в точке пространства R^n. Если g есть погружение многообразия M в R^n, то $l(g_*(T_p(M)))$ $(p \in M)$ — подпространство в R^n. Рассмотрим плоскость, проходящую через точку p параллельно этому подпространству. Она «касается» подмногообразия $g(M)$ в очевидном смысле (рис. 4).

§ 6. ГЛАВНОЕ РАССЛОЕНИЕ

При изучении дифференцируемых многообразий полезно ввести «геометрические объекты», аналогичные величинам из § 2 гл. I. Аналогом базиса векторного пространства V здесь служит карта (U, h) многообразия M. Геометрический объект представляет собой элемент $q\ (U, h)$ некоторого пространства Q, который сопоставлен каждой локальной системе координат (U, h), вместе с правилом преобразования элемента q при замене локальных координат. Примером такого объекта служит касательный вектор: для каждой локальной системы координат касательный вектор определяет элемент пространства R^n; при замене координат этот элемент изменяется по формуле (5.3). Чтобы сделать это определение точным, мы должны найти некоторый аналог группы $GL\ (n)$ и изучить его действие на множестве всех локальных координат. Такая программа может быть выполнена (см., например, [12]). Однако в большинстве случаев, встречающихся на практике (как, например, для касательных и кокасательных векторов), закон преобразования величин q зависит только от матрицы Якоби преобразования координат. Это значительно упрощает дело и позволяет дать определения, вполне аналогичные определениям § 2 гл. I. Если закон преобразования рассматриваемых объектов зависит только от линейных частей функций перехода локальных координат, то естественно отождествить две системы координат в точке, когда они имеют одинаковые «линейные части». Руководствуясь этим, приступим к определениям.

Пусть M есть n-мерное дифференцируемое многообразие. Обозначим через $\underline{U}\ (M)$ пространство всех пар $(p, (U, h))$, где $p \in M$, а (U, h) — карта в окрестности точки p. Группа $GL\ (n)$ действует на $\underline{U}\ (M)$ следующим образом: если $A \in GL\ (n)$ и $h = (x^1, \ldots, x^n)$, то $(p, (U, h))\, A = (p, (U, g))$, где $g = (y^1, \ldots, y^n)$, причем

$$y^i = \sum \beta^i_j x^j, \qquad A^{-1} = (\beta^i_j). \tag{6.1}$$

Очевидно, что $(p, (U, h))\, (AA') = ((p, (U, h))\, A)\, A'$. Пусть π — проекция $\underline{U}\ (M)$ на M, отображающая $(p, (U, h))$ в p. Тогда $\pi\,(\underline{u}A) = \pi\,(\underline{u})$ для $\underline{u} \in \underline{U}\ (M)$.

Определим на $\underline{U}\ (M)$ отношение эквивалентности $\sim$, полагая

$$(p, (U, h)) \sim (p', (U', h')), \quad \text{если } p = p' \text{ и } J_{h(p)}\,(h' \circ h^{-1}) = I$$

(символом $J_x\,(\varphi)$ мы обозначаем матрицу Якоби в точке $x \in U$ отображения φ открытого множества $U \subset R^n$ в R^n; I — единичная матрица). Из закона умножения матриц Якоби немедленно следует, что $\sim$ есть отношение эквивалентности. Обозначим через $\mathscr{F}^*\,(M)$ пространство классов эквивалентных элементов пространства $\underline{U}\ (M)$ по этому отношению. Если $\underline{u_1} \sim \underline{u_2}$, то $\pi\,(\underline{u_1}) = \pi\,(\underline{u_2})$, так что проекция π индуцирует отображение π: $\mathscr{F}^*\,(M) \to M$.

Упражнение 6.1. Мы можем дать другое описание пространства $\mathscr{F}^*\,(M)$ в терминах пространства $T^*\,(M)$. Действительно, любая система координат $(x^1, \ldots, x^n)$ вблизи p определяет базис $dx^1_p, \ldots, dx^n_p$ пространства $T^*_p(M)$. Показать, что если $(p, (U, h)) \sim (p', (U', h'))$, то соответствующие системы координат определяют один и тот же базис пространства $T^*_p(M)$. Обратно, показать, что всякий базис пространства $T^*_p(M)$ имеет вид $dx^1_p, \ldots, dx^n_p$ для некоторой системы координат $(x^1, \ldots, x^n)$. Таким образом, $\mathscr{F}^*(M)$ может быть отождествлено с множеством всех реперов (т. е. базисов) всех пространств $T^*_p(M)$ для $p \in M$.

Если $\underline{u_1} \sim \underline{u_2}$, то $\underline{u_1 A} \sim \underline{u_2 A}$, так что корректно определено действие группы $GL(n)$ на $\mathscr{F}^*(M)$. Очевидно, что $\pi(zA) = \pi(z)$ для $z \in \mathscr{F}^*(M)$. Справедливо более сильное утверждение:

Лемма 6.1. *Если $zA = z$ для $z \in \mathscr{F}^*(M)$, $A \in GL(n)$, то $A = I$. Если $z_1 A = z_2$ для некоторого $A \in GL(n)$, то $\pi(z_1) = \pi(z_2)$. Обратно, если $\pi(z_1) = \pi(z_2)$, то найдется такое $A \in GL(n)$, что $z_1 A = z_2$.*

Первые два утверждения следуют непосредственно из определения действия группы $GL(n)$ на $\mathscr{F}^*(M)$. Докажем последнее утверждение. Пусть $(p, (U_1, h_1))$ и $(p, (U_2, h_2))$ — элементы из z_1 и z_2. Тогда $z_1 A = z_2$, где $A = J_{h_2(p)}(h_1 \circ h_2^{-1})$.

Превратим теперь $\mathscr{F}^*(M)$ в дифференцируемое многообразие (класса C^{k-1}, если M — класса C^k, и аналитическое, если M — аналитическое).

Пусть $\{(U_i, h_i)\}$ — такое счетное семейство карт, что U_i образуют базу топологии M. Определим отображение $\psi_i \colon \pi^{-1}(U_i) \to GL(n)$ следующим образом: пусть $z \in \pi^{-1}(U_i)$ и $(\pi(z), (U', h'))$ — карта из класса эквивалентности z. Положим $\psi_i(z) = J_{h_i(\pi(z))}(h' \circ h_i^{-1})$. Это отображение определено корректно, поскольку отношение эквивалентности, определяющее $\mathscr{F}^*(M)$, гарантирует, что $J_{h_i(\pi(z))}(h' \circ h_i^{-1})$ зависит только от z. Прямое вычисление показывает, что

$$\psi_i(zA) = A^{-1}\psi_i(z). \tag{6.2}$$

На $U_i \cap U_j$ мы имеем

$$\psi_i(z) = \psi_j(z)\, J_{h_i(\pi(z))}(h_j \circ h_i^{-1}). \tag{6.3}$$

Определим теперь отображение $\varphi_i \colon \pi^{-1}(U_i) \to U_i \times GL(n)$, полагая

$$\varphi_i(z) = (\pi(z), \psi_i(z)). \tag{6.4}$$

По лемме 6.1 φ_i есть взаимно однозначное отображение на. Далее, $GL(n) = T(n, n; n)$ есть дифференцируемое многообразие. Кроме того, $\varphi_i(\pi^{-1}(U_j)) = U_i \cap U_j \times GL(n)$ и

$$\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}(x, A) = (x, AJ_{h_i(x)}(h_j \circ h_i^{-1})), \tag{6.5}$$

согласно (6.3). Таким образом, $\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}$ есть диффеоморфизм (класса C^{k-1}, если M — многообразие класса C^k, или аналитический, если M аналитическое). Наконец, множества $\pi^{-1}(U_i)$ удовлетворяют условию 1) теоремы 2.1. Действительно, если $\pi(z_1) = \pi(z_2) = p$, то z_1 и z_2 лежат в $\pi^{-1}(U_i)$ для любого $U_i \ni p$. Если $\pi(z_1) = p \neq q = \pi(z_2)$, то, поскольку $\{U_i\}$ образуют базу (хаусдорфовой) топологии M, мы можем найти такие i и j, что $p \in U_i$, $q \in U_j$, $U_i \cap U_j = \varnothing$. Тогда по теореме 2.1 на $\mathscr{F}^*(M)$ существует единственная дифференцируемая структура, в которой отображения φ_i являются диффеоморфизмами.

Упражнение 6.2. Показать, что эта дифференцируемая структура не зависит от выбора атласа $\{(U_i, h_i)\}$.

Определение 6.1. Пространство $\mathscr{F}^*(M)$ с определенной выше топологией и дифференцируемой структурой называется *расслоением корсперов* многообразия M.

Поскольку отображения φ_i являются диффеоморфизмами, отображение π дифференцируемо. Действительно, в $\pi^{-1}(U_i)$ мы имеем $\pi = p_1 \circ \varphi_i$, где $p_1(x, A) = x$. Мы будем называть π проекцией многообразия $\mathscr{F}^*(M)$ на M. Группа $GL(n)$ корректно действует на $\mathscr{F}^*(M)$. Из формулы (6.1) видно, что отображение $z \to zA$ есть диффеоморфизм. Можно сказать и несколько больше:

Определение 6.2. Пусть Q — дифференцируемое многообразие. Говорят, что группа $GL(n)$ действует *дифференцируемо на Q справа* (или *слева*), если задано такое дифференцируемое отображение φ: $GL(n) \times Q \to Q$, что $\varphi(\varphi(x, A), B) = \varphi(x, AB)$ (или $= \varphi(x, BA)$) и $\varphi(x, I) = x$, где I — единица группы $GL(n)$.

Из определений следует, что группа $GL(n)$ действует дифференцируемо справа на $\mathscr{F}^*(M)$. Действительно, в терминах локальных координат отображение $GL(n) \times \pi^{-1}(U_i) \to \pi^{-1}(U_i)$ задается формулой

$$\varphi_i^{-1} \circ (L \times \mathrm{id}) \circ (\mathrm{id} \times \varphi_i), \tag{6.6}$$

где отображение L: $GL(n) \times GL(n) \to GL(n)$ определяется формулой $L(A, B) = A^{-1}B$. [В формуле (6.6) $\mathrm{id} \times \varphi_i$ отображает $GL(n) \times \pi^{-1}(U_i)$ в $GL(n) \times GL(n) \times U_i$, а $L \times \mathrm{id}$ отображает $GL(n) \times GL(n) \times U_i$ в $GL(n) \times U_i$.] Согласно упражнению 2.8, отображение L (групповое умножение) дифференцируемо, а значит, таким же будет и отображение (6.6).

Теперь мы в состоянии определить дифференциально-геометрические величины, аналогичные величинам § 2 гл. I. Пусть Q — дифференцируемое многообразие, на котором $GL(n)$ действует дифференцируемо слева. Обозначим это действие через

$\varphi(A, q) = \rho(A) q$, так что $\rho(AB) x = \rho(A)(\rho(B) x)$. Введем в пространстве $\mathcal{F}^*(M) \times Q$ отношение эквивалентности:

$$(z, q) \sim (z', q'), \text{ если найдется такое } A \in GL(n),$$
$$\text{что } z' = zA \quad \text{и } q = \rho(A) q'.$$

Пусть $E(M, Q)$ — факторпространство пространства $\mathcal{F}^*(M) \times Q$ по этому отношению. На $E(M, Q)$ можно ввести дифференцируемую структуру. Действительно, рассмотрим отображение Φ_i^{-1} множества $U_i \times Q$ на множество классов эквивалентности пространства $\pi^{-1}(U_i) \times Q$, задаваемое формулой

$$\Phi_i^{-1}(x, q) = \{\varphi_i^{-1}(x, I), q\}, \tag{6.7}$$

где $\{z, q\}$ обозначает класс эквивалентности элемента $(z, q) \in \mathcal{F}^*(M) \times Q$, а I есть единица группы $GL(n)$. Легко проверить, что Φ_i^{-1} есть взаимно однозначное отображение на. Пусть Φ_i — отображение, обратное к Φ_i^{-1}. Тогда

$$\Phi_i \circ \Phi_j^{-1}(x, q) = (x, q'),$$

где q' определено равенством

$$\{\varphi_i^{-1}(x, I), q'\} = \{\varphi_j^{-1}(x, I), q\}.$$

Далее,

$$\varphi_j^{-1}(x, I) = \varphi_i^{-1}(x, J_{h_i(x)}(h_j \circ h_i^{-1})) =$$
$$\text{[согласно (6.5)]}$$
$$= \varphi_i^{-1}(x, I)(J_{h_i(x)}(h_j \circ h_i^{-1}))^{-1},$$
$$\text{[согласно (6.2) и (6.4)]}$$

откуда

$$q' = \rho((J_{h_i(x)}(h_j \circ h_i^{-1}))^{-1}) q = \rho(J_{h_j(x)}(h_i \circ h_j^{-1})) q.$$

Другими словами,

$$\Phi_i \circ \Phi_j^{-1}(x, q) = (x, \rho(J_{h_j(x)}(h_i \circ h_j^{-1})) q). \tag{6.8}$$

Отображение множества $h_j(U_i \cap U_j)$ в $GL(n)$, переводящее x в $J_{h_j(x)}(h_i \circ h_j^{-1})$, дифференцируемо, так же как и отображение $GL(n) \times Q \to Q$, задаваемое формулой $(A, q) \to \rho(A) q$. Их композиция, которая встречается в формуле (6.8), дифференцируема и, значит, отображение $\Phi_i \circ \Phi_j^{-1}$ тоже дифференцируемо. Отсюда немедленно следует, что условия теоремы 2.1 выполнены. Как в упражнении 6.2, легко проверить, что дифференцируемая структура, доставляемая этой теоремой, не зависит от выбора U_i. Если мы определим отображение $\bar{\pi}_Q : \mathcal{F}^*(M) \times Q \to M$, полагая

$\bar{\pi}_Q(z, q) = \pi(z)$, то $\bar{\pi}_Q$ будет постоянно на классах эквивалентности и определит отображение π_Q многообразия $E(M, Q)$ на M. Легко проверить, что отображение π_Q дифференцируемо. Мы будем называть его проекцией пространства $E(M, Q)$ на M и иногда, если невозможны недоразумения, будем опускать индекс Q и писать π вместо π_Q.

Упражнение 6.2. Показать, что для любого $x \in M$ множество $\pi_Q^{-1}(x)$ есть подмногообразие в $E(M, Q)$, диффеоморфное Q. Диффеоморфизм зависит от выбора координат вблизи x. Показать, что любые два таких диффеоморфизма отличаются на диффеоморфизм вида $\rho(g)$: $Q \to Q$, где $g \in GL(n)$.

Определение 6.3. Дифференцируемое многообразие $E(M, Q)$ называется *пространством величин типа* Q. Дифференцируемое отображение s: $M \to E(M, Q)$, удовлетворяющее условию

$$\pi_Q \circ s = \mathrm{id}, \tag{6.9}$$

называется *полем величин типа* Q *на* M. Это поле называется *полем класса* C^k (*аналитическим*), если отображение s класса C^k (аналитическое).

Для любой карты (U, h), которую мы можем взять в качестве (U_i, h_i), отображение $s|U_i$ индуцирует отображение s_i: $U_i \to Q$, определяемое равенством

$$(x, s_i(x)) = \Phi_i(s(x)). \tag{6.10}$$

В $U_i \cap U_j$ имеем $(x, s_i(x)) = \Phi_i \circ \Phi_j^{-1}(x, s_j(x))$, или, ввиду формулы (6.8),

$$s_i(x) = \rho(J_{h_j(x)}(h_i \circ h_j^{-1}))\, s_j(x). \tag{6.11}$$

Обратно, пусть $\{(U_i, h_i)\}$ — атлас многообразия M. Предположим, что для каждой карты (U_i, h_i) задано такое отображение s_i: $U_i \to Q$, что на пересечении $U_i \cap U_j$ выполнено условие (6.11). Тогда

$$\Phi_i^{-1}(x, s_i(x)) = \Phi_j^{-1}(x, s_j(x))$$

на $U_i \cap U_j$, так что совокупность отображений $x \to \Phi_i^{-1}(x, s_i(x))$ корректным образом определяет дифференцируемое поле s: $M \to E(M, Q)$. Пусть U — открытое подмножество в M. Тогда пространство $E(U, Q)$ можно очевидным образом рассматривать как открытое подмногообразие в $E(M, Q)$. Если s — поле величин типа Q на U, то иногда, допуская вольность речи, мы будем говорить, что s есть поле типа Q (на многообразии M), определенное на U. Предположим, что s_i $(i = 1, 2, \ldots)$ — поле типа Q, определенное на открытых множествах $U_i \subset M$, причем $s_i = s_j$ на

$U_i \cap U_j$. Тогда из предыдущих рассуждений следует, что существует единственное поле на $\bigcup U_i$, совпадающее на U_i с s_i.

Прежде чем продолжать дальше, приведем несколько примеров.

1. Пусть Q — дифференцируемое многообразие, на котором $GL(n)$ действует тривиально, т. е. $\rho(A)\,q = q$ для всех A и q. Тогда $\Phi_i \circ \Phi_j^{-1} = \mathrm{id}$, согласно (6.8), и $E(M, Q)$ может быть отождествлено с $M \times Q$. Поле типа Q есть тогда просто отображение $M \to Q$. В специальном случае, когда Q есть вещественная прямая, мы обозначим пространство $E(M, Q)$ через $R(M)$.

2. Пусть $Q_T = R^n$ — пространство всех наборов n чисел $X = (X^1, \ldots, X^n)$. Для $A = (\alpha_j^i)$ положим $\rho(A)\,X = Y = (Y^1, \ldots, Y^n)$, где $Y^i = \sum \alpha_j^i X^j$. Пространство $E(M, Q_T)$ можно отождествить с $T(M)$, как это следует из рассуждений относительно формулы (5.3). *Благодаря этому отождествлению мы можем ввести в $T(M)$ дифференцируемую структуру.* Пространство $T(M)$ вместе с этой дифференцируемой структурой называется *касательным расслоением* многообразия M. Поле типа Q_T называется (*контравариантным*) *векторным полем.* В локальной системе координат (U, h), где $h = (x^1, \ldots, x^n)$, векторное поле задается дифференцируемым отображением U в Q_T, т. е. n функциями $X^1(\cdot), \ldots, X^n(\cdot)$. Согласно рассуждениям § 5, векторное поле на U, соответствующее постоянным функциям $(\delta_i^1, \ldots, \delta_i^n)$, сопоставляет каждой точке $p \in U$ касательный вектор $(\partial/\partial x^i)_p$. Обозначим это векторное поле также через $\partial/\partial x^i$. В силу линейности векторное поле, определяемое функциями $(X^1, \ldots, X^n)$, может быть записано в виде $\sum_{i=1}^{n} X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$. Если $y^1, \ldots, y^n$ — другая система координат, то в соответствии с формулой (5.3) имеем

$$\sum Y^i \frac{\partial}{\partial y^i} = \sum \frac{\partial y^i}{\partial x^j} X^j \frac{\partial}{\partial y^i} = \sum X^j \frac{\partial}{\partial x^j}, \tag{6.12}$$

или

$$\frac{\partial}{\partial x^j} = \sum \frac{\partial y^i}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial y^i}. \tag{6.13}$$

Таким образом, векторные поля преобразуются как дифференциальные операторы.

3. Пусть Q_{T^*} — пространство всех наборов n чисел $X = (X_1, \ldots, X_n)$. Если $A = (\alpha_j^i)$ и $A^{-1} = (\beta_j^i)$, то положим $\rho(A)\,X = Y = (Y_1, \ldots, Y_n)$, где $Y_j = \sum \beta_j^i X_i$. Пространство $E(M, Q_{T^*})$ может быть отождествлено, аналогично предыдущему, с $T^*(M)$. Пространство $T^*(M)$ с приобретенной таким образом

дифференцируемой структурой называется *кокасательным расслоением*. Поле, соответствующее функциям $(\delta^i_1, \ldots, \delta^i_n)$ в системе координат $(x^1, \ldots, x^n)$, обозначается dx^i. Таким образом, $dx^i(p) = dx^i_p$. Поле типа Q_{T^*} называется *ковариантным векторным полем*, или (*линейной*) *дифференциальной формой*. Так, самая общая линейная дифференциальная форма может быть записана в системе координат $(x^1, \ldots, x^n)$ в виде $\sum X_i\, dx^i$, где X_i — дифференцируемые функции. Если f — дифференцируемая функция, то, согласно (5.11), отображение $p \to (df)_p$ есть дифференциальная форма, которую мы будем обозначать df. Итак, в локальной системе координат

$$df = \sum \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i.$$

4. Более общо, пусть Q — конечномерное вещественное векторное пространство и ρ — линейное представление группы $GL(n)$ в Q. Ясно, что $GL(n)$ действует дифференцируемо на Q. Таким образом, мы можем говорить о линейных величинах. В частности, если ρ — тензорное представление группы $GL(n)$, то мы будем называть пространство $E(M, Q)$ пространством тензоров типа ρ [1]. Поле таких величин называется *тензорным полем*. Например, тензорное поле типа ${}^1{}_{23}$ задается в системе координат (U, h) набором n^3 функций $s^{j_1}{}_{j_2j_3}$. Если $t^{i_1}{}_{i_2i_3}$ — функции, соответствующие тому же полю в системе (V, h'), то

$$t^{i_1}{}_{i_2i_3}(p) = \sum \left(\frac{\partial y^{i_1}}{\partial x^{j_1}}\right)_{h(p)} \left(\frac{\partial x^{j_2}}{\partial y^{i_2}}\right)_{h'(p)} \left(\frac{\partial x^{j_3}}{\partial y^{i_3}}\right)_{h'(p)} s^{j_1}{}_{j_2j_3}(p).$$

Упражнение 6.3. Пусть $\mathcal{F}(M)$ — множество всех пар$(p; X_1, \ldots, X_n)$, состоящих из точки $p \in M$ и базиса $X_1, \ldots, X_n$ пространства $T_p(M)$. Показать, что $\mathcal{F}(M)$ обладает естественной дифференцируемой структурой. (Что является пространством Q в этом случае?) Пространство $\mathcal{F}(M)$ с этой структурой называется *расслоением реперов* многообразия M.

Если $Q_1, \ldots, Q_k$ — пространства, на которых группа $GL(n)$ действует дифференцируемо, то мы можем определить действие $GL(n)$ на $Q_1 \times \ldots \times Q_k$, полагая

$$\rho(A)(q_1, \ldots, q_k) = (\rho_1(A)\, q_1, \ldots, \rho_k(A)\, q_k).$$

Чтобы убедиться в том, что это дифференцируемое действие, заметим, что отображение $GL(n) \times Q_1 \times \ldots \times Q_k \to Q_1 \times \ldots \times Q_k$ явля-

---

[1]) Или тензорным расслоением типа Q, см § 7.— *Прим. перев.*

ется композицией отображения

$$\overbrace{GL(n)\times\ldots\times GL(n)}^{k\text{ раз}}\times Q_1\times\ldots\times Q_k\to Q_1\times\ldots\times Q_k,$$

переводящего $(A_1, \ldots, A_k, q_1, \ldots, q_k)$ в $(\rho_1(A_1)q_1, \ldots, \rho_k(A_k)q_k)$, и диагонального отображения $A\to(A, \ldots, A)$. Оба эти отображения дифференцируемы. Таким образом, мы можем определить пространство $E(M, Q_1\times\ldots\times Q_k)$. Пусть $s^1, \ldots, s^k$ — поля типа $Q_1, \ldots, Q_k$, которые, согласно формуле (6.10), определяют отображения s_i^r: $U_i\to Q_r$. Отображения s_i: $U_i\to Q_1\times\ldots\times Q_k$, задаваемые формулой

$$s_i(x)=(s_i^1(x), \ldots, s_i^k(x)),$$

определяют поле s типа $Q_1\times\ldots\times Q_k$ на M. Чтобы доказать это, мы должны проверить условия (6.11), т. е.

$$\begin{aligned}s_i(x)&=(s_i^1(x), \ldots, s_i^k(x))=\rho\left(J_{h_j(x)}(h_i\circ h_j^{-1})\right)s_j(x)=\\&=\left(\rho_1\left(J_{h_j(x)}(h_i\circ h_j^{-1})\right)s_j^1(x), \ldots, \rho_k\left(J_{h_j(x)}(h_i\circ h_j^{-1})\right)s_j^k(x)\right).\end{aligned}$$

Но это так, поскольку s^r — поле типа Q_r $(r=1, \ldots, k)$. Поле s называется произведением полей $s^1, \ldots, s^k$ и обозначается символом $(s^1, \ldots, s^k)$.

Пусть Q_1 и Q_2 — пространства, на которых дифференцируемо действует группа $GL(n)$. Говорят, что отображение f: $Q_1\to Q_2$ эквивариантно, если $f(\rho_1(A)q)=\rho_2(A)f(q)$ для всех $A\in GL(n)$ (где ρ_1, ρ_2 — действия группы $GL(n)$ на Q_1 и Q_2). Например, если $Q_1=Q\times Q$ и $Q_2=Q$, где Q есть пространство некоторого *линейного* представления группы $GL(n)$, то отображение Q_1 в Q_2, переводящее (a, b) в $a+b$, очевидно, эквивариантно. Если отображение f: $Q_1\to Q_2$ эквивариантно, то отображение

$$\mathrm{id}\times f\colon \mathcal{F}^*(M)\times Q_1\to\mathcal{F}^*(M)\times Q_2$$

переводит классы эквивалентности в классы эквивалентности и, значит, определяет отображение $f_{\#}$: $E(M, Q_1)\to E(M, Q_2)$. В терминах карты (U_i, h_i) отображение $f_{\#}$, ограниченное на $\pi^{-1}(U_i)$, задается формулой

$$\Phi_{2i}^{-1}\circ(\mathrm{id}\times f)\circ\Phi_{1i},$$

где Φ_{1i} и Φ_{2i} — координатные отображения (6.7) пространств $E(M, Q_1)$ и $E(M, Q_2)$ соответственно. Поэтому если f дифференцируемо, то таким же будет и $f_{\#}$.

Упражнение 6.4. Пусть f — эквивариантное отображение Q_1 в Q_2 и s — поле типа Q_1, задаваемое в локальных координатах отображениями s_i: $U_i\to Q_1$. Показать, что $f_{\#}\circ s$ есть поле типа Q_2, задаваемое в локальных координатах отображениями $f\circ s_i$.

Предыдущие замечания можно использовать для определения алгебраических операций на полях линейных величин, в частности, на тензорных полях. Например, если f: $Q \times Q \to Q$ — эквивариантное отображение, определяющее сложение в векторном пространстве Q, то $f_{\#}(s^1, s^2)$ — поле типа Q для любых полей s^1 и s^2 типа Q. Обозначим это поле через $s^1 + s^2$. Пусть R — вещественная прямая с тривиальным действием группы $GL(n)$, и пусть f: $R \times Q \to Q$ — отображение, переводящее (λ, v) в λv. Тогда $f_{\#}(u, s)$ есть поле типа Q, если u — дифференцируемая функция (т. е. поле типа R), а s — поле типа Q. Обозначим это поле через us. Легко убедиться в том, что эти операции превращают множество полей типа Q в модуль над кольцом дифференцируемых функций. Для этого мы должны проверить, что $s^1 + s^2 = s^2 + s^1$, $u(s^1 + s^2) = us^1 + us^2$ и т. д. Доказательство всех этих равенств основано на следующем замечании: если f_1 и f_2 — эквивариантные отображения, то таким же будет и $f_1 \circ f_2$, причем $(f_1 \circ f_2)_{\#} = (f_1)_{\#} \circ (f_2)_{\#}$.

Докажем, например, что $s^1 + s^2 = s^2 + s^1$. Для этого рассмотрим отображение f_1: $Q \times Q \to Q \times Q$, переводящее (v_1, v_2) в (v_2, v_1), и отображение f_2: $Q \times Q \to Q$, переводящее (v_1, v_2) в $v_1 + v_2$. Тогда $(f_1)_{\#}(s^1, s^2) = (s^2, s^1)$ и $(f_2)_{\#}(s^1, s^2) = s^1 + s^2$. Ввиду коммутативности сложения в Q имеем $f_2 \circ f_1 = f_1$. Значит, $(f_2)_{\#} \circ (f_1)_{\#} = (f_1)_{\#}$, т. е. $s^2 + s^1 = s^1 + s^2$.

Если $Q_1, \ldots, Q_k$ — тензорные пространства, то отображение $(Q_1, \ldots, Q_k) \to Q_1 \otimes \ldots \otimes Q_k$ эквивариантно и, следовательно, позволяет определить тензорное произведение $s^1 \otimes \ldots \otimes s^k$ тензорных полей $s^1, \ldots, s^k$. Аналогично, симметризация и антисимметризация являются эквивариантными отображениями, так же как и внешнее умножение, внутреннее умножение и т. д. Короче говоря, все алгебраические операции гл. I индуцируют соответствующие алгебраические операции на тензорных полях. Так, любое тензорное поле может быть записано (локально) как сумма членов, представляющих собой произведение функции на тензорное произведение различных $\partial/\partial x^i$ и dx^j. Пусть, например, $Q_{\wedge^p T^*}$ есть p-я внешняя степень пространства Q_{T^*} (вместе с соответствующим представлением группы $GL(n)$). Поле типа $Q_{\wedge^p T^*}$ называется *внешней дифференциальной формой степени* p. Если ω — внешняя дифференциальная форма степени p, то в локальных координатах мы можем написать

$$\omega = \sum_{i_1 < \ldots < i_p} a_{i_1, \ldots, i_p}\, dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p}$$

(где $a_{i_1, \ldots, i_p}$ — дифференцируемые функции).

Прежде чем приступать к более детальному изучению тензорных расслоений и полей, мы рассмотрим поведение расслоения кореперов при диффеоморфизмах. Пусть g — диффеоморфизм многообразия M_1 на открытое подмножество из M_2. Тогда существует отображение g^* подмножества $\pi^{-1}(g(M_1)) \subset \mathcal{F}^*(M_2)$ на $\mathcal{F}^*(M_1)$, определяемое следующим образом: если $(y, (U, h)) \in \underline{U}(M_2)$ и $y \in g(M_1)$, то $(g^{-1}(U), h \circ g)$ есть карта вблизи $g^{-1}(y)$. Рассмотрим отображение $\underline{g}$: $\pi^{-1}(g(M_1)) \subset \underline{U}(M_2) \to \underline{U}(M_1)$, задаваемое формулой $\underline{g}((y, (U, h)) = (g^{-1}(y), g^{-1}(U), h \circ g)$. Легко проверить, что если $z_1 \sim z_2$, то $\underline{g}(z_1) \sim \underline{g}(z_2)$. Индуцированное отображение классов эквивалентности и обозначается символом g^*. Пусть (U_i^2, h_i^2) — карта на M_2, (U_j^1, h_j^1) — карта на M_1, а φ_i^2 и φ_j^1 — соответствующие отображения $\pi^{-1}(U_i^2) \to U_i^2 \times GL(n)$ и $\pi^{-1}(U_j^1) \to U_j^1 \times GL(n)$. Тогда отображение g^* на $\pi^{-1}(U_i^2 \cap g(U_j^1))$ задается формулой

$$g^*(z) = (\varphi_j^1)^{-1}(g^{-1}(q), J_{h_j^1(g^{-1}(q))}(h \circ g \circ (h_j^1)^{-1})), \tag{6.14}$$

где $z \in \{(q, (U, h))\}$. Поэтому отображение g^* дифференцируемо (и класс дифференцируемости его на единицу ниже, чем для g). Прямая проверка показывает, что отображение g^* обладает еще двумя свойствами:

$$\pi = g \circ \pi \circ g^*, \tag{6.15}$$

$$g^*(zA) = g^*(z)A. \tag{6.16}$$

Конечно, проекция π в формуле (6.15) и умножение на A в формуле (6.16) имеют разный смысл в разных частях равенств. Слева они относятся к расслоению $\mathcal{F}^*(M_2)$, а справа — к $\mathcal{F}^*(M_1)$.

Упражнение 6.5. Пусть g_1 — диффеоморфизм многообразия M_1 на открытое подмножество из M_2 и g_2 — диффеоморфизм многообразия M_2 на открытое подмножество из M_3. Показать, что $(g_2 \circ g_1)^* = g_1^* \circ g_2^*$.

Пусть Q — пространство, на котором дифференцируемо действует группа $GL(n)$. Отображение $g^* \times \mathrm{id}$ пространства $\pi^{-1}(g(M_1)) \times Q \subset \mathcal{F}^*(M_2) \times Q_2$ в $\mathcal{F}^*(M_1) \times Q$ переводит, согласно формуле (6.15), классы эквивалентности в классы эквивалентности. Поэтому оно определяет отображение (которое мы снова обозначим через g^*) множества $\pi_Q^{-1}(g(M_1)) \subset E(M_2, Q)$ в $E(M_1, Q)$. В терминах карт для $x \in U_i^2 \cap g(U_j^1)$ имеем

$$\Phi_j^1 \circ g^* \circ (\Phi_i^2)^{-1}(x, q) = (g^{-1}(x), q^1),$$

где

$$\{(\varphi_j^1)^{-1}(g^{-1}(x), I), q^1\} = \{g^* \circ (\varphi_j^2)^{-1}(x, I), q\}.$$

Но

$$g^* \circ (\varphi_i^2)^{-1}(x, I) = (\varphi_j^1)^{-1}(g^{-1}(x),\ J_{h_j^1(g^{-1}(x))}(h_i^2 \circ g \circ (h_j^1)^{-1})) =$$

[согласно (6.14)]

$$= (\varphi_j^1)^{-1}((g^{-1}(x), I);\ J_{h_j^1(g^{-1}(x))}(h_i^2 \circ g \circ (h_j^1)^{-1}))^{-1}).$$

[согласно (6.1)]

Таким образом,

$$q^1 = \rho(J_{h_j^1(g^{-1}(x))}(g \circ (h_j^1)^{-1}))\, q^{-1} =$$
$$= \rho(J_{h_i^2(x)}(h_j^1 \circ g^{-1} \circ (h_i^2)^{-1}))\, q,$$

или иначе

$$\Phi_j^1 \circ g^* \circ (\Phi_i^2)^{-1}(x, q) = (g^{-1}(x),\ \rho(J_{h_i^2(x)}(h_j^1 \circ g^{-1} \circ (h_i^2)^{-1}))\, q). \quad (6.17)$$

Поэтому отображение g^* дифференцируемо. Из определений следует, что равенство (6.15) справедливо и для отображения g^*, определенного на $E(M_2, Q)$. Пусть f — эквивариантное отображение пространства Q_1 в Q_2. Тогда

$$g^* f_{\#} = f_{\#} g^*. \quad (6.18)$$

Если s: $M_2 \to E(M_2, Q)$ — поле типа Q на M_2, то из (6.15) следует, что отображение $g^* \circ s \circ g$: $M_1 \to E(M_1, Q)$ есть поле типа Q на M_1. Действительно, $\pi \circ g^* \circ s \circ g = g^{-1} \circ \pi \circ s \circ g = \mathrm{id}$. Мы получаем, следовательно, отображение полей типа Q на M_2 в поля типа Q на M_1. Мы будем обозначать это отображение также через g^*. Таким образом,

$$g^*(s) = g^* \circ s \circ g. \quad (6.19)$$

Пусть $s^1, \ldots, s^k$ — поля типа $Q_1, \ldots, Q_k$ соответственно. Мы оставляем читателю проверку того, что

$$g^*((s^1, \ldots, s^k)) = (g^*(s^1), \ldots, g^*(s^k)) \quad (6.20)$$

и

$$g^*(f_{\#}(s)) = f_{\#}(g^*(s)). \quad (6.21)$$

Суммируем часть полученных результатов в виде следующей теоремы:

Теорема 6.1. *Пространство всех тензорных полей на дифференцируемом многообразии имеет структуру алгебры с операцией свертки. На пространствах симметрических и антисимметрических контравариантных (и ковариантных) тензорных полей определены также обычные алгебраические структуры.*

Диффеоморфизм g многообразия M_1 на открытое множество из M_2 индуцирует отображение g^* тензорных полей на M_2 в тензорные поля на M_1, сохраняющее все алгебраические операции. Если g_1: $M_1 \to M_2$ и g_2: $M_2 \to M_3$, то

$$(g_2 \circ g_1)^* = g_1^* \circ g_2^*. \tag{6.22}$$

§ 7. ТЕНЗОРНЫЕ РАССЛОЕНИЯ

В § 6 мы видели, что касательное расслоение (т. е. пространство величин типа Q_T) как множество можно считать объединением $\bigcup T_p(M)$. При этом подмногообразие $\pi^{-1}(p)$ можно рассматривать как векторное пространство, а именно, как касательное пространство, определенное в § 5. Кроме того, эта структура векторного пространства на $\pi^{-1}(p)$ согласована с алгебраической структурой касательного пространства, т. е. если X, Y — векторные поля, то

$$(X+Y)(p) = X(p) + Y(p)$$

[где плюс слева обозначает сложение векторных полей, а справа — сложение векторов в $T_p(M)$]. В этом можно убедиться, выразив обе части равенства в локальных координатах. Подобные утверждения, конечно, справедливы для любого пространства *линейных* величин $E(M, Q)$. Действительно, согласно упражнению 6.3, $\pi^{-1}(p)$ диффеоморфно Q и два различных диффеоморфизма отличаются на линейное преобразование пространства Q. Если X_p и Y_p — элементы из $\pi^{-1}(p)$, то можно положить $aX_p + bY_p = h^{-1}(ah(X_p) + bh(Y_p))$, где h — любой из диффеоморфизмов упражнения 6.2. Если h' — другой такой диффеоморфизм, то мы можем написать $h' = L \circ h$, где L — линейное преобразование пространства Q. Тогда

$$(h')^{-1}(ah'(X_p) + bh'(Y_p)) = h^{-1}L^{-1}(aLh(X_p) + bLh(Y_p)) = \\ = h^{-1}(ah(X_p) + bh(Y_p)).$$

Поэтому линейная комбинация $aX_p + bY_p$ корректно определена независимо от выбора h. Легко проверяется также, что возникающая таким образом структура векторного пространства согласована с векторной структурой, определенной на полях типа Q.

Для тензорных величин мы можем сделать дальнейшее отождествление. Пусть Q — пространство тензорного представления группы $GL(n)$. Пространство Q определяется следующим образом: берется тензорное произведение нескольких экземпляров пространств Q_T и Q_{T^*} и к нему применяются такие операции, как симметризация, антисимметризация, прямая сумма и т. п. Короче говоря, пространство Q получается путем применения к Q_T и Q_{T^*}

некоторой последовательности операций; обозначим эту последовательность операций через $\mathfrak{G}$. Рассмотрим касательное и кокасательное пространства $T_p(M)$ и $T_p^*(M)$. Каждая карта (U, h) вблизи точки p определяет изоморфизм $\bar{h}$ пространств $T_p(M)$ и $T_p^*(M)$ на Q_T и Q_{T^*} соответственно. Этот изоморфизм индуцирует изоморфизм пространства $\mathfrak{G}(T_p(M), T_p^*(M))$ на $\mathfrak{G}(Q_T, Q_{T^*}) = Q$, зависящий от h. Если (U', h') — другая карта и $(U', h') \sim (U, h)$, то, очевидно, $\bar{h'} = \bar{h}$, так что этот изоморфизм зависит только от класса эквивалентности $z \in \mathscr{F}^*(M)$ карты (U, h). Таким образом, каждому $z \in \pi^{-1}(p) \subset \mathscr{F}^*(M)$ соответствует изоморфизм $\bar{z}$: $\mathfrak{G}(T_p(M), T_p^*(M)) \xrightarrow[\text{на}]{} Q$. Если z' — другой элемент из $\pi^{-1}(p)$ и $z' = zA$, то из определения тензорного произведения и уже установленных фактов относительно касательных и кокасательных расслоений следует, что $\bar{z'} = \rho(A) \circ \bar{z}$, где $\rho(A)$: $Q \to Q$ — оператор представления ρ группы $GL(n)$ на Q. Таким образом, каждому $t \in \mathfrak{G}(T_p(M), T_p^*(M))$ мы можем сопоставить класс эквивалентности $\{z, \bar{z}(t)\} \in E(M, Q)$. Обратно, каждому классу $\{z, q\}$ мы можем сопоставить единственный элемент $\bar{z}^{-1}(q) \in \mathfrak{G}(T_p(M), T_p^*(M))$.

Итак, *мы можем отождествить* $\mathfrak{G}(T_p(M), T_p^*(M))$ *с* $\pi^{-1}(p) \subset E(M, Q)$.

Рассмотрим в качестве иллюстрации пространство $Q = Q_{T^*} \otimes Q_{T^*}$. Тогда $E(M, Q)$ можно отождествить с $\bigcup_{p \in M} T_p^*(M) \otimes T_p^*(M)$. Поле типа Q сопоставляет каждой точке p элемент из $T_p^*(M) \otimes T_p^*(M)$, т. е. метрику на $T_p(M)$. В локальных координатах такое поле имеет вид $\sum g_{ij}\, dx^i \otimes dx^j$.

Определение 7.1. Поле типа $Q_{T^*} \otimes Q_{T^*}$ называется *римановой метрикой на* M, если оно индуцирует положительно определенную метрику на каждом $T_p(M)$. Если в локальных координатах поле имеет вид $\sum g_{ij}\, dx^i \otimes dx^j$, то это равносильно тому, что матрица (g_{ij}) положительно определена. Многообразие M вместе с римановой метрикой называется *римановым многообразием*.

В римановом многообразии имеет смысл говорить о длине касательного вектора. Поскольку касательный вектор есть «инфинитезимальная кривая», естественно ожидать, что мы сможем говорить о длине кривой на M, «проинтегрировав» ее бесконечно малые части. Дальше в этом параграфе мы увидим, как это сделать.

Пусть Q — тензорное пространство, полученное применением операции $\mathfrak{G}$ только к пространству Q_T (без привлечения пространства Q_{T^*}). Тогда Q называется *контравариантным тензорным пространством*, а пространство $E(M, Q)$ величин типа Q обозначается символом $\mathfrak{G}T(M)$ и называется *контравариантным тен-*

зорным расслоением. Аналогично, если Q получено операцией $\otimes$ из Q_{T^*}, то пространство $E(M, Q)$ называется *ковариантным тензорным расслоением* и обозначается $\otimes T^*(M)$. Важное различие между контравариантными и ковариантными тензорами проявляется в их поведении при отображениях.

Пусть g — дифференцируемое отображение многообразия M_1 в многообразие M_2. В § 5 мы видели, что g индуцирует отображение g_*: $T(M_1) \to T(M_2)$, задаваемое формулой (5.13) в локальных системах координат (U, h) на M_1 и (V, H) на M_2. Ввиду отождествления $E(M, Q_T)$ с $T(M)$ из формулы (5.13) следует, что g_* есть дифференцируемое отображение $T(M_1) \to T(M_2)$. Поскольку ограничение g_* на каждое пространство $T_p(M_1)$ является линейным отображением $T_p(M_1) \to T_{g(p)}(M_2)$, отображение g_* индуцирует линейное отображение любого контравариантного тензорного пространства над $T_p(M_1)$ в пространство того же типа над $T_{g(p)}(M_2)$. Таким образом, мы имеем отображение $\otimes T(M_1) \to \otimes T(M_2)$ для любой (контравариантной) операции тензорных умножений $\otimes$; мы обозначим это отображение также через g_*. Легко проверить, что g_* — дифференцируемое отображение. Итак, справедлива

Теорема 7.1. *Пусть g: $M_1 \to M_2$ — дифференцируемое отображение (класса по меньшей мере C^2). Тогда для любой (контравариантной) операции $\otimes$ определено дифференцируемое отображение g_*: $\otimes T(M_1) \to \otimes T(M_2)$. В частности, отображение g_*: $T(M_1) \to T(M_2)$ имеет в локальных координатах вид* (5.13). *Если g_1: $M_1 \to M_2$ и g_2: $M_2 \to M_3$, то*

$$(g_2 \circ g_1)_* = g_{2*} \circ g_{1*}. \tag{7.1}$$

Единственное, что мы еще не доказали,— это равенство (7.1), но оно сразу следует из определения отображения g_*: $\mathrm{Cu}(M_1) \to \mathrm{Cu}(M_2)$ на пространстве $\mathrm{Cu}(M_1)$.

Отображение g_* в отличие от отображения g^*, определенного для диффеоморфизмов в § 6, не переводит векторные поля в векторные поля. Пусть задано векторное поле X: $M_1 \to T(M_1)$. Единственным подходящим кандидатом для поля $g_*(X)$ может быть только «отображение» $M_2 \to T(M_2)$, переводящее $g(x)$ в $g_*(X(x))$. Но оно не корректно определено по двум причинам. Во-первых, если g не взаимно однозначно, то может случиться, что $y = g(x_1) = g(x_2)$, в то время как $g_*(X(x_1)) \neq g_*(X(x_2))$. Во-вторых, даже если g взаимно однозначно, наше «отображение» $M_2 \to T(M_2)$ определено только на $g(M_1)$, а не на всем M_2. На самом деле g_* определяет отображение векторных полей в векторные поля только в том случае, когда g есть диффеоморфизм многообразия M_1 на M_2. Это вытекает из следующего упражнения:

Упражнение 7.1. Пусть g — диффеоморфизм многообразия M_1 на M_2. Показать, что для любого контравариантного тензорного пространства Q отображение g_*: $E(M_1, Q) \to E(M_2, Q)$ совпадает с отображением $(g^{-1})^*$ (определенным в § 6).

Поскольку $(g_*)_x$ есть линейное отображение $T_x(M_1) \to T_{g(x)}(M_2)$, оно индуцирует линейное отображение $(g_*)_x^*$ пространства $(T_{g(x)}(M_2))^*$ в $(T_x(M_1))^*$. Если $\mathfrak{Q}$ — ковариантная операция, то $(g_*)_x^*$ индуцирует отображение $\mathfrak{Q}(T_{g(x)}(M_2))$ в $\mathfrak{Q}(T_x(M_1))$. Мы не можем сразу определить $(g_*)^*$ как отображение $E(M_2, Q) \to E(M_1, Q)$ по той же причине, что и раньше: правило, сопоставляющее точку x каждой точке $g(x)$, не является корректно определенным отображением на всем M_2. С другой стороны, s: $M_2 \to E(M_2, Q)$ есть поле типа Q. Тогда отображение $g^*(s)$: $M_1 \to E(M, Q)$, определенное равенством

$$g^*(s)(x) = (g_*)^* \circ s \circ (g(x)),$$

удовлетворяет условию $\pi \circ g^*(s) = \mathrm{id}$.

Упражнение 7.2. Показать, что $g^*(s)$ есть дифференцируемое отображение $M_1 \to E(M_1, Q)$.

Упражнение 7.3. Пусть Q — пространство с тривиальным действием группы $GL(n)$. Согласно примеру 1 § 6, сечение s расслоения $E(M_2, Q)$ можно рассматривать как отображение s: $M_2 \to Q$. Показать, что $g^*(s) = s \circ g$.

Согласно упражнению 7.2, $g^*(s)$ есть поле типа Q на M_1, где $\mathfrak{Q}T^*(M_1) = E(M_1, Q)$. В самом деле, справедлива

Теорема 7.2. *Пусть g: $M_1 \to M_2$ — дифференцируемое отображение. Для любой ковариантной тензорной операции $\mathfrak{Q}$ определено отображение g^* тензорных полей из $\mathfrak{Q}T^*(M_2)$ в тензорные поля из $\mathfrak{Q}T^*(M_1)$. Отображение g^* сохраняет все алгебраические операции на тензорных полях. В частности, если ω — поле из $T^*(M_2)$, т. е. линейная дифференциальная форма, имеющая в локальных координатах вид $\omega = \sum Y_i\, dy^i$, и если локально отображение g задается функциями $y^i(x^1, \ldots, x^{n_1})$, то*

$$g^*(\omega) = \sum_{i,\,j} Y_i \frac{\partial y^i}{\partial x^j}\, dx^j. \tag{7.2}$$

Если g_1: $M_1 \to M_2$ и g_2: $M_2 \to M_3$, то

$$(g_2 \circ g_1)^* = g_1^* \circ g_2^*. \tag{7.3}$$

Мы оставим эти еще не вполне доказанные утверждения читателю в качестве упражнения.

Упражнение 7.4. Показать, что если g — диффеоморфизм $M_1 \to M_2$, то отображение g^*, определенное здесь, совпадает с отображением g^*, определенным в § 6.

В качестве иллюстрации вычислим $g^*(\underline{b})$, где $\underline{b}$ — симметрическая билинейная форма, имеющая в локальных координатах вид

$$\underline{b} = \sum g_{ij}\, dy^i \circledcirc dy^j. \tag{7.4}$$

Имеем

$$g^*(\underline{b}) = \sum_{i,\, j,\, k,\, l} [g_{ij} \circ g] \left(\frac{\partial y^i}{\partial x^k} dx^k\right) \circledcirc \left(\frac{\partial y^j}{\partial x^l} dx^l\right) =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i,\, j,\, k,\, l} [g_{ij} \circ g] \left(\frac{\partial y^i}{\partial x^k}\frac{\partial y^j}{\partial x^l} + \frac{\partial y^i}{\partial x^l}\frac{\partial y^j}{\partial x^k}\right) dx^k \circledcirc dx^l. \tag{7.5}$$

Пусть, в частности, C: $[a, b] \to M$ — кривая в M, где M — риманово многообразие с римановой метрикой $\underline{b}$. Предположим для простоты, что C есть дифференцируемое отображение, которое может быть продолжено на некоторую окрестность отрезка $[a, b]$, и пусть t — координата на $[a, b]$. Тогда $C^*(\underline{b})$ есть риманова метрика на (a, b). Предположим на минуту, что $\overline{C}([a, b])$ содержится в координатной окрестности U, где $\underline{b}$ имеет вид (7.4). Тогда $C^*(\underline{b})$, согласно (7.5), может быть записана в виде

$$C^*(\underline{b}) = \sum [g_{ij} \circ C] \left(\frac{\partial y^i}{\partial t}\frac{\partial y^j}{\partial t}\right) dt \circledcirc dt. \tag{7.6}$$

Определим теперь длину $L(C)$ кривой C, полагая

$$L(C) = \int_a^b \sqrt{\sum (g_{ij} \circ C) \frac{\partial y^i}{\partial t}\frac{\partial y^j}{\partial t}}\, dt. \tag{7.7}$$

Эта длина не зависит от параметризации кривой C. Точнее, пусть φ — монотонное дифференцируемое отображение отрезка $[c, d]$ на отрезок $[a, b]$ и s — координата на $[c, d]$. Тогда $C \circ \varphi$ — также кривая, лежащая в U (как говорят, «та же кривая с другой параметризацией»). Ввиду (7.3) имеем

$$(C \circ \varphi)^* \underline{b} = \varphi^*(C^*(\underline{b})) = \sum [g_{ij} \circ C \circ \varphi] \left(\frac{\partial y^i}{\partial t} \circ \varphi\right) \left(\frac{\partial y^j}{\partial t} \circ \varphi\right) \varphi^*(dt \circledcirc dt) =$$

$$= \sum [g_{ij} \circ C \circ \varphi] \left(\frac{\partial y^i}{\partial t} \circ \varphi\right) \left(\frac{\partial y^j}{\partial t} \circ \varphi\right) \left(\frac{dt}{ds}\right)^2 ds \circledcirc ds.$$

Согласно (7.7), длина $L(C \circ \varphi)$ равна

$$\int_c^d \sqrt{\sum (g_{ij} \circ C \circ \varphi) \left(\frac{\partial y^i}{\partial t} \circ \varphi\right) \left(\frac{\partial y^j}{\partial t} \circ \varphi\right)} \left|\frac{dt}{ds}\right| ds,$$

что совпадает с $L(C)$ в силу формулы замены переменных в определенном интеграле. Подобные же рассуждения показывают, что определение (7.7) не зависит от выбора координат $(y^1, \ldots, y^n)$.

Упражнение 7.5. Пусть $a < a' < b$, и пусть C_1 — ограничение кривой C на $[a, a']$, а C_2 — ограничение C на $[a', b]$. Показать, что $L(C) = L(C_1) + L(C_2)$.

Если кривая C не лежит целиком в одной координатной окрестности, мы можем разбить интервал $[a, b]$ на конечное число подинтервалов, образы которых (при отображении C) попадают в координатные окрестности. Тогда мы можем определить длину кривой C как сумму длин этих подинтервалов. Из предыдущих рассуждений и упражнения 7.5 следует, что это определение не зависит от разбиения, выбора координат и параметризации кривой C.

§ 8. ВЕКТОРНЫЕ ПОЛЯ И ПРОИЗВОДНЫЕ ЛИ

В этом параграфе мы покажем, что векторные поля можно рассматривать как «инфинитезимальные преобразования», и изучим их свойства.

Определение 8.1. Семейство $\varphi_t\colon M \to M$ диффеоморфизмов называется *однопараметрической группой дифференцируемых преобразований многообразия*[1]) M, если отображение $\varphi\colon R \times M \to M$, переводящее (t, p) в $\varphi_t(p)$, есть дифференцируемое действие аддитивной группы вещественных чисел на M, т. е. если

1) отображение φ дифференцируемо,
2) $\varphi_{t+s} = \varphi_t \circ \varphi_s$ для всех t и s,
3) φ_0 есть тождественный диффеоморфизм.

Однопараметрическая группа φ_t индуцирует векторное поле на M. Действительно, для любой точки $p \in M$ отображение $t \to \varphi_t(p)$ является кривой, проходящей через p. Определим X_p как касательный вектор этой кривой. Из определения следует, что для любой дифференцируемой на M функции f мы имеем

$$\langle X_p, (df)_p\rangle = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \left(f(\varphi_t(p)) - f(p)\right). \tag{8.1}$$

Беря в качестве f координатные функции $x^1, \ldots, x^n$ локальной системы координат, находим, что

$$X_p = \sum \lim \frac{1}{t} \left(x^i(\varphi_t(p)) - x^i(p)\right) \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

Поскольку отображение φ дифференцируемо, отображение $p \to X_p$ определяет векторное поле X на M. Векторное поле X называется *инфинитезимальной образующей однопараметрической группы* φ_t.

[1]) Или, более кратко, *потоком на многообразии* M.— *Прим. перев.*

Обратное утверждение не вполне верно. Не всякое векторное поле на M порождает однопараметрическое семейство преобразований многообразия M. Однако локально это так. Более точно, имеет место

Теорема 8.1. *Пусть X — векторное поле на M. Для любого $p \in M$ существуют окрестность $U \ni p$, $\varepsilon > 0$ и единственное семейство дифференцируемых отображений φ_t: $U \to M$, определенное при $-\varepsilon < t < \varepsilon$, такие, что*

1) *отображение φ: $(-\varepsilon, \varepsilon) \times U \to M$, переводящее (t, p) в $\varphi_t(p)$, дифференцируемо;*

2) *если $|t|$, $|s|$, $|t+s|$ все меньше ε и $q \in U$, $\varphi_t(q) \in U$, то*

$$\varphi_{s+t}(q) = \varphi_s \circ \varphi_t(q);$$

3) *X_q есть касательный вектор кривой (q, φ_q) для $q \in U$, где φ_q — кривая $t \to \varphi_t(q)$.*

Доказательство. Пусть (V, h) — карта вблизи точки p. Тогда в окрестности V мы можем написать

$$X = \sum X^i \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

Рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{d\varphi^i}{dt} = X^i(\varphi^1, \ldots, \varphi^n). \tag{8.2}$$

По теореме существования решений для обыкновенных дифференциальных уравнений (см. приложение I) существуют такие δ_1 и $\varepsilon_1 > 0$, что система (8.2) имеет единственное решение $\varphi^i(t; x^1, \ldots, x^n)$, определенное при $|t| < \varepsilon_1$ и удовлетворяющее условию

$$\varphi^i(0; x^1, \ldots, x^n) = x^i, \qquad \text{где } (x^1, \ldots, x^n) \in B^n_{\delta_1}. \tag{8.3}$$

Если мы выберем достаточно малые $\varepsilon \leqslant \varepsilon_1$ и $\delta \leqslant \delta_1$, то

$$\varphi^i(t; x^1, \ldots, x^n) \in h(V) \qquad \text{для } |t| < \varepsilon, \quad (x^1, \ldots, x^n) \in B^n_\delta.$$

Пусть $U = h^{-1}(B^n_\delta)$. Отображение φ_t: $U \to M$, определенное в локальных координатах формулой

$$\varphi^i_t(x^1, \ldots, x^n) = \varphi^i(t; x^1, \ldots, x^n),$$

является, очевидно, дифференцируемым отображением $(-\varepsilon, \varepsilon) \times \times U \to M$. Далее, функции $\psi^i(t; x^1, \ldots, x^n) = \varphi^i(s+t; x^1, \ldots, x^n)$ образуют решение системы (8.2), удовлетворяющее начальным условиям

$$\psi^i(0; x^1, \ldots, x^n) = \varphi^i(s; x^1, \ldots, x^n).$$

В силу единственности имеем

$$\varphi^i(s+t;\ x^1, \ldots, x^n) = \varphi^i(t;\ \varphi^1(s;\ x^1, \ldots, x^n), \ldots, \varphi^n(s;\ x^1, \ldots, x^n)).$$

Таким образом, условие 2) теоремы выполнено. Условие 3) выполнено по построению.

Мы не можем определить φ_t для всех t и на всем M, поскольку теорема существования решений дифференциальных уравнений гарантирует существование только локального решения. Даже в евклидовом пространстве есть примеры векторных полей, не порождающих однопараметрическую группу во всем пространстве. Однако нетрудно показать, что любое векторное поле на компактном многообразии порождает однопараметрическую группу. Мы не станем здесь доказывать этот результат.

Пусть X — векторное поле на M, а φ_t — соответствующее семейство отображений окрестности $U \subset M$, доставляемое теоремой 8.1. Если η — поле типа Q, где Q — *линейная* величина, то $\varphi_t^*(\eta)$ есть поле типа Q на U. Мы можем, следовательно, рассмотреть производную

$$\mathscr{L}_X(\eta)_p = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(\varphi_t^*(\eta)_p - \eta_p). \tag{8.4}$$

В силу единственности φ_t левая часть формулы (8.4) не зависит от выбора окрестности U. Предоставим читателю самому проверить, что для любого поля η типа Q отображение $p \to \mathscr{L}_X(\eta)_p$ является полем типа Q. Обозначим его символом $\mathscr{L}_X(\eta)$ и назовем *производной Ли* поля η по направлению векторного поля X. Мы довольствуемся проверкой того, что $\mathscr{L}_X(\eta)$ есть тензорное поле, когда η — тензорное поле. Заметим прежде всего, что, поскольку φ_t^* линейно,

$$\mathscr{L}_X(a\eta + b\xi) = a\mathscr{L}_X(\eta) + b\mathscr{L}_X(\xi), \tag{8.5}$$

где a и b — константы. Далее, если $f\colon Q_1 \to Q_2$ — *линейное* эквивариантное отображение (например, свертка тензора), то, согласно (6.21), $\varphi_t^* f_\#(\eta) = f_\# \varphi_t^*(\eta)$ для любого поля η типа Q_1. Поэтому

$$f_\# \mathscr{L}_X(\eta) = \mathscr{L}_X(f_\# \eta). \tag{8.6}$$

Формула (8.6) показывает, например, что производная Ли свертки тензорного поля есть свертка производной Ли. Пусть теперь $f\colon Q_1 \times Q_2 \to Q_3$ — *билинейное* эквивариантное отображение. Тогда снова $\varphi_t^* \circ f_\# = f_\# \circ \varphi_t^*$ и, значит,

$$\begin{aligned}\varphi_t^* f_\#(\eta, \xi) - f_\#(\eta, \xi) &= f_\#(\varphi_t^*\eta, \varphi_t^*\xi) - f_\#(\eta, \xi) = \\ &= f_\#(\varphi_t^*\eta, \varphi_t^*\xi) - f_\#(\varphi_t^*\eta, \xi) + f_\#(\varphi_t^*\eta, \xi) - f_\#(\eta, \xi).\end{aligned}$$

Деля на t и устремляя t к нулю, получим (поскольку f перестановочно с предельным переходом)

$$\mathscr{L}_X(f_\#(\eta, \xi)) = f_\#(\mathscr{L}_X(\eta), \xi) + f_\#(\eta, \mathscr{L}_X(\xi)). \tag{8.7}$$

В качестве $f_{\#}$ мы можем брать различные операции тензорного произведения, внешнего произведения и т. д. Это показывает, что для получения формулы производной Ли тензорного поля достаточно знать производную Ли 1) функций, 2) линейных дифференциальных форм и 3) векторных полей. Тогда производная Ли произвольного тензорного поля находится с помощью формул (8.5) — (8.7).

1) *Функции*. Если u — дифференцируемая функция на M, то

$$\varphi_t^* u = u \circ \varphi_t; \qquad \mathscr{L}_X(u)_p = \lim \frac{1}{t}\left(u(\varphi_t(p)) - u(p)\right).$$

В локальных координатах

$$u = u(x^1, \ldots, x^n),$$
$$\varphi_t^* u = u(\varphi_t^1(x^1, \ldots, x^n), \ldots, \varphi_t^n(x^1, \ldots, x^n)),$$

так что

$$\mathscr{L}_X(u) = \sum \frac{\partial u}{\partial x^i}\frac{d\varphi^i}{dt} = \sum X^i \frac{\partial u}{\partial x^i}.$$

Таким образом, если $X = \sum X^i(\partial/\partial x^i)$, то

$$\mathscr{L}_X(u) = \sum X^i \frac{\partial u}{\partial x^i} = \langle X, du\rangle. \tag{8.8}$$

Поскольку $\mathscr{L}_X(u)$ совпадает с результатом применения дифференциального оператора $X = \sum X^i(\partial/\partial x^i)$ к функции u, мы обычно будем писать

$$\mathscr{L}_X(u) = X(u) = \langle X \mid du\rangle. \tag{8.9}$$

2) *Линейные дифференциальные формы*. Согласно формуле (7.2), для $\varphi_t^*(dx^i)$ мы имеем

$$\varphi_t^*(dx^i) = d(\varphi_t^* x^i) = d(\varphi_t^i) = \sum \frac{\partial \varphi_t^i}{\partial x^j} dx^j.$$

Далее, $\partial\varphi_0^i/\partial x^j = \delta_j^i$, так что

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left(\frac{\partial\varphi_t^i}{\partial x^j} - \delta_j^i\right) = \frac{d}{dt}\frac{\partial\varphi_t^i}{\partial x^j}\bigg|_{t=0} = \frac{\partial X^i}{\partial x^j}.$$

Значит,

$$\mathscr{L}_X(dx^i) = \sum \frac{\partial X^i}{\partial x^j} dx^j. \tag{8.10}$$

Если a_i — функции на U, то в соответствии с формулой (8.7)

$$\mathscr{L}_X(a_i\, dx^i) = \mathscr{L}_X(a^i)\, dx^i + a_i \mathscr{L}_X(dx^i) =$$
$$= \sum X^j \frac{\partial a_i}{\partial x^j} dx^i + \sum a_i \frac{\partial X^i}{\partial x^j} dx^j.$$

Суммируя это равенство по i, получим

$$\mathcal{L}_X\left(\sum a_i\,dx^i\right)=\sum_{i,j}\left(X^j\frac{\partial a_i}{\partial x^j}+a_j\frac{\partial X^j}{\partial x^i}\right)dx^i. \tag{8.11}$$

3) *Векторные поля*. Мы могли бы поступить, как в 2), и воспользоваться формулой (7.2). Удобнее, однако, сделать следующее. Если Y — векторное поле, а ω — дифференциальная форма, то отображение $(Y,\ \omega)\to\langle Y,\ \omega\rangle$ билинейно. Мы можем, следовательно, применить формулу (8.7). Положим $Y=\partial/\partial x^j$ и $\omega=dx^i$. Тогда

$$\left\langle\mathcal{L}_X\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right),\ dx^i\right\rangle+\left\langle\frac{\partial}{\partial x^j},\ \mathcal{L}_X dx^i\right\rangle=\mathcal{L}_X(\delta_i^j)=0.$$

Пользуясь формулой (8.10), находим

$$\mathcal{L}_X\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)=-\sum\frac{\partial X^i}{\partial x^j}\frac{\partial}{\partial x^i}.$$

Если Y^j — функции на U, то, согласно формуле (8.7),

$$\mathcal{L}_X\left(Y^j\frac{\partial}{\partial x^j}\right)=\mathcal{L}_X(Y^j)\frac{\partial}{\partial x^j}+Y^j\mathcal{L}_X\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)=$$
$$=\sum_i\frac{\partial Y^j}{\partial x^i}X^i\frac{\partial}{\partial x^j}-\sum_i Y^j\frac{\partial X^i}{\partial x^j}\frac{\partial}{\partial x^i}$$

Если $Y=\sum Y^j(\partial/\partial x^j)$ — векторное поле, то, суммируя последнее равенство по j, получим

$$\mathcal{L}_X(Y)=\sum\left(\sum_i\left(\frac{\partial Y^j}{\partial x^i}X^i-\frac{\partial X^j}{\partial x^i}Y^i\right)\frac{\partial}{\partial x^j}\right). \tag{8.12}$$

Из формул (8.8), (8.11) и (8.12) следует, что если X — векторное поле класса C^k, то производная Ли дифференцируемой функции, дифференциальной формы или векторного поля класса C^k есть функция, форма или векторное поле класса C^{k-1}. Ввиду формулы (8.7) это верно и для произвольного тензорного поля.

Следуя общепринятым обозначениям, положим

$$[Y,\ X]=\mathcal{L}_X(Y). \tag{8.13}$$

Левая часть формулы (8.13) называется *скобкой Ли векторных полей Y и X*[1]). Из формулы (8.12) немедленно вытекает, что

$$[X,\ Y]=-[Y,\ X]. \tag{8.14}$$

Упражнение 8.1. Показать, что $X(Y(u))-Y(X(u))=[X,\ Y]u$ для любой функции u.

[1]) Или *коммутатором* полей Y и X.— *Прим. перев.*

Пусть Z — третье векторное поле. Тогда, пользуясь упражнением 8.1, имеем для любой функции u

$$[X, [Y, Z]](u) = XYZ(u) - XZY(u) - YZX(u) + ZYX(u),$$
$$[Z, [X, Y]](u) = ZXY(u) - ZYX(u) - XYZ(u) + YXZ(u),$$
$$[Y, [Z, X]](u) = YZX(u) - YXZ(u) - ZXY(u) + XZY(u).$$

Складывая эти три равенства, получаем

$$([X, [Y, Z]] + [Z, [X, Y]] + [Y, [Z, X]])(u) = 0$$

для любой функции u. Единственное векторное поле, переводящее всякую функцию в нуль, — это нулевое векторное поле. Следовательно,

$$[X, [Y, Z]] + [Z, [X, Y]] + [Y, [Z, X]] = 0 \tag{8.15}$$

(тождество Якоби).

Определение 8.2. Антикоммутативная (неассоциативная) алгебра, в которой выполнено тождество Якоби, называется *алгеброй Ли*.

Все сказанное можно подытожить следующей теоремой:

Теорема 8.2. *Пространство всех векторных полей класса C^∞ (аналитических) на многообразии класса C^∞ (аналитическом) станет алгеброй Ли, если в качестве умножения взять скобку Ли.*

Упражнение 8.2. Пусть A — ассоциативная алгебра. Определим алгебру $L(A)$ как пространство A с новым умножением, задаваемым формулой $[a, b] = ab - ba$. Показать, что $L(A)$ есть алгебра Ли.

Упражнение 8.3. Показать, что

$$[uX, vY] = uv[X, Y] + vY(u)X - uX(v)Y, \tag{8.16}$$

если u, v — функции, а X, Y — векторные поля.

Следующие результаты будут использованы позднее, в гл. V.

Пусть M_1 и M_2 — дифференцируемые многообразия и f — дифференцируемое отображение $M_1 \to M_2$. Как мы уже видели, вообще говоря, с помощью f нельзя построить отображение векторных полей на M_1 в векторные поля на M_2. Однако удобно ввести следующее

Определение 8.3. Пусть X — векторное поле на M_1, а Y — на M_2. Мы скажем, что X и Y *f-связаны*, если $Y_{f(p)} = f_*(X_p)$ для всех $p \in M_1$.

Теорема 8.3. *Предположим, что векторные поля X_1 и Y_1, а также X_2 и Y_2 f-связаны. Тогда поля $[X_1, X_2]$ и $[Y_1, Y_2]$ также f-связаны.*

Доказательство. Пусть X — векторное поле на M_1, а Y — на M_2. Тогда f-связанность полей X и Y означает, что для любой дифференцируемой функции g на открытом множестве $U \subset M_2$ мы имеем

$$(X (g \circ f))_p = Y (g)_{f(p)}$$

для всех $p \in f^{-1}(U)$. Если X_i и Y_i f-связаны ($i = 1, 2$), то для любой функции g

$$Y_2 (Y_1 g)_{f(p)} = (X_2 (Y_1 g \circ f))_p = (X_2 X_1 (g \circ f))_p.$$

Поэтому $([Y_1, Y_2] g)_{f(p)} = ([X_1, X_2] (g \circ f))_p$ и, значит, $[X_1, X_2]$ и $[Y_1, Y_2]$ f-связаны.

Теорема 8.4. *Пусть f: $M_1 \to M_2$ — дифференцируемое отображение. Если f отображает многообразие M_1 на M_2, то для данного векторного поля X на M_1 существует самое большее одно поле Y на M_2, такое, что X и Y f-связаны. Если f — погружение $M_1 \to M_2$, то для любого поля Y на M_2 существует самое большее одно поле X на M_1, такое, что X и Y f-связаны. В последнем случае такое поле X существует тогда и только тогда, когда $Y_{f(p)} \in f_* (T_p (M_1))$ для всех $p \in M_1$.*

Доказательство мы оставляем читателю в качестве упражнения.

Упражнение 8.4. Пусть φ_{1t} — однопараметрическая группа преобразований многообразия M_1 с инфинитезимальной образующей X, а φ_{2t} — однопараметрическая группа преобразований многообразия M_2 с образующей Y. Пусть отображение f: $M_1 \to M_2$ удовлетворяет условию $f \circ \varphi_{1t} = \varphi_{2t} \circ f$ для всех t. Показать, что X и Y f-связаны. Сформулировать и доказать обратное утверждение.

Для иллюстрации понятия f-связанности рассмотрим какое-нибудь пространство величин $\mathfrak{Q} (M)$ на многообразии M. Любой диффеоморфизм α: $M \to M$ индуцирует диффеоморфизм α_*: $\mathfrak{Q} (M) \to \mathfrak{Q} (M)$. Далее, $\pi \circ \alpha_* = \alpha$, где π есть проекция пространства $\mathfrak{Q} (M)$ на M. Если α_t — однопараметрическая группа преобразований многообразия M, то α_{t*} — однопараметрическая группа преобразований пространства $\mathfrak{Q} (M)$ и $\pi \circ \alpha_{t*} = \alpha_t$. Таким образом, если X есть векторное поле на M, то мы получаем векторное поле на $\mathfrak{Q} (M)$, которое обозначим $\mathfrak{Q} (X)$. Согласно упражнению 8.4, поля X и $\mathfrak{Q} (X)$ π-связаны. Наибольший интерес представляет эта конструкция в случае, когда $\mathfrak{Q} (M) = T (M)$. Для любого векторного поля X на M мы получаем векторное поле $T (X)$ на $T (M)$. Векторное поле $T (X)$ известно как *вариационное векторное поле*, или «уравнения в вариациях» поля X. Оно описывает, как поток, порожденный полем X, действует на касательные векторы. Как будет показано в гл. IV, поле $T (X)$ играет важную роль в вариационном исчислении.

Глава III

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ НА МНОГООБРАЗИЯХ

В этой главе мы продолжим изучение дифференцируемых многообразий методами анализа. В первую очередь мы займемся теорией интегрирования. Чтобы определить интеграл, мы должны иметь нечто, играющее роль «подинтегрального выражения», и нечто, играющее роль «области интегрирования». Для выяснения того, что они должны собой представлять, рассмотрим классическую теорию криволинейных интегралов на плоскости. Криволинейный интеграл обычно записывается в виде

$$\text{(i)} \qquad \int_C P\,dx+Q\,dy,$$

где C — кривая, а P и Q — непрерывные функции на плоскости. Если кривая C разбита на конечное число кусков C_i, каждый из которых задается дифференцируемым отображением C_i: $t \to (x_i(t), y_i(t))$ отрезка $[0, 1]$ в E^2, то значение интеграла (i) находится по формуле

$$\text{(ii)} \qquad \int_C P\,dx+Q\,dy=\sum \int_0^1 \left(P\frac{dx_i}{dt}+Q\frac{dy_i}{dt}\right)dt,$$

которая принимается за определение интеграла (i). Если C — простая замкнутая кривая, ограничивающая область D, то по теореме Грина

$$\text{(iii)} \qquad \int_C P\,dx+Q\,dy=\iint_D \left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)dx\,dy,$$

где кривая C обходится против часовой стрелки.

Переведем это на наш язык. Выражения вида $P\,dx+Q\,dy$ имеют для нас самостоятельный смысл. Это просто линейные дифференциальные формы. Если C_i — отображение отрезка $[0, 1]$ в E^2, то

$$C_i^*(P\,dx+Q\,dy)=\left(P\frac{dx}{dt}+Q\frac{dy}{dt}\right)dt.$$

Поэтому если $\omega=P\,dx+Q\,dy$, то мы можем переписать формулу (ii) символически в виде

$$\text{(iv)} \qquad \int_C \omega=\sum_i \int_0^1 C_i^*(\omega).$$

В этом случае «подинтегральным выражением» служит линейная дифференциальная форма, а «областью интегрирования» — конечное объединение отображений отрезка $[0, 1]$ в E^2. Все эти понятия непосредственно обобщаются на многообразия. «Подинтегральными выражениями» p-мерной теории интегрирования на многообразии M будут внешние дифференциальные формы, а «областями интегрирования» — линейные комбинации отображений стандартного p-мерного объекта в M.

Прежде чем говорить об обобщениях, заметим, что форма равенства (iii) не вполне удовлетворительна. Для того чтобы это равенство имело место, кривая C должна быть ориентирована против часовой стрелки. Поменяем местами x и y; более точно, рассмотрим отображение φ: $x \longrightarrow v$, $y \longrightarrow u$ плоскости (x, y) в плоскость (u, v). Если $P'(u, v) = Q(x, y)$ и $Q'(u, v) = P(x, y)$, то $\varphi^*(P'\,du + Q'\,dv) = P\,dx + Q\,dy$. Пусть $\varphi(C)$ — образ кривой C в плоскости (u, v). Формулы (iv) и (ii) показывают, что

$$\int\limits_{\varphi(C)} P'\,du + Q'\,dv = \int\limits_{C} P\,dx + Q\,dy.$$

Далее,

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q'}{\partial u}, \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P'}{\partial v}, \qquad du\,dv = dx\,dy.$$

Значит,

$$\int\limits_{D} \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) dx\,dy = \int\limits_{\varphi(D)} \left(\frac{\partial Q'}{\partial u} - \frac{\partial P'}{\partial v}\right) du\,dv = -\int\limits_{\varphi(D)} \left(\frac{\partial P'}{\partial v} - \frac{\partial Q'}{\partial u}\right) du\,dv.$$

Короче говоря, в то время как левая часть формулы (iii) инвариантна относительно смены осей, правая часть меняет знак. Конечно, причина кроется в том, что направление обхода кривой C при этом меняется на противоположное. Однако требование определенной ориентации не фигурирует в формуле явным образом. Мы можем исправить положение, заменив $dx\,dy$ на $dx \wedge dy$. Тогда $du \wedge dv = -dx \wedge dy$ и обе части формулы (iii) инвариантны. Теперь

(v) $$\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) dx \wedge dy = dP \wedge dx + dQ \wedge dy.$$

Если мы обозначим 2-форму, определенную формулой (v), через $d\omega$, то формула (iii) примет простой вид

$$\int\limits_{C} \omega = \int\limits_{D} d\omega.$$

Мы хотим и в общем случае иметь равенство вида

(vi) $$\int\limits_{\partial D} \omega = \int\limits_{D} d\omega,$$

где d — некоторый оператор, переводящий p-формы в $(p+1)$-формы, а ∂ сопоставляет $(p+1)$-мерной «области интегрирования» ее «границу», являющуюся p-мерной «областью интегрирования» [1]).

---

[1]) Необходимо отметить, что для функций (т. е. форм степени нуль) формула (vi) сводится к фундаментальной теореме анализа. В этом случае D есть кривая, ∂D — ее концы (с соответствующими знаками), а формула (vi) принимает вид

$$\int\limits_{D} df = f(D(1)) - f(D(0)).$$

В § 1 мы определяем оператор d и изучаем его свойства. В § 2 мы вводим дифференцируемые цепи, определяем интегрирование и устанавливаем справедливость формулы (vi). Остальная часть главы посвящается изучению различных полезных теорем анализа на многообразиях.

§ 1. ОПЕРАТОР d

Теорема 1.1. *Пусть M — дифференцируемое многообразие. Существует одно и только одно отображение d внешней алгебры форм класса C^k в алгебру форм класса C^{k-1}, обладающее такими свойствами:*

1) $d(\omega_1 + \omega_2) = d\omega_1 + d\omega_2$;

2) *если* ω_1 — *форма степени* r, *то*

$$d(\omega_1 \wedge \omega_2) = d\omega_1 \wedge \omega_2 + (-1)^r \omega_1 \wedge d\omega_2; \tag{1.1}$$

3) *если* f — *функция, то* df — *форма, описанная в примере* 3 § 6 *гл.* II;

4) $d(df) = 0$ [1]).

Доказательство. Заметим, что достаточно доказать теорему в одной системе координат. Действительно, если мы докажем существование и единственность $d\omega \mid U$ для каждого ограничения $\omega \mid U$ формы ω на координатную окрестность U, то в силу единственности $(d\omega \mid U) \mid U \cap V = (d\omega \mid V) \mid U \cap V = d\omega \mid U \cap V$, так что локальные формы $d\omega \mid U$ согласованы на пересечении $U \cap V$ и, следовательно, определяют глобальную дифференциальную форму.

В системе координат любая внешняя форма может быть записана как линейная комбинация (с постоянными коэффициентами) форм вида

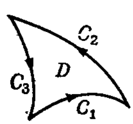
$$f\,dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p}.$$

Ввиду условий 2), 3) и 4)

$$d(f\,dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p}) = df \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p},$$

---

[1]) Для обоснования условия 4) рассмотрим любую «двумерную область интегрирования», скажем треугольник



Если (vi) справедливо, то $\int\limits_D d(df) = \int\limits_{\partial D} df = f(C_1(1)) - f(C_1(0)) + f(C_2(1)) - f(C_2(0)) + f(C_3(1)) - f(C_3(0)) = 0$. Итак, интеграл от $d(df)$ по любой области равен нулю, поэтому $d(df) = 0$.

что доказывает единственность. Если

$$\omega = \sum_{i_1<\ldots<i_p} a_{i_1, \ldots, i_p} dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p},$$

то

$$d\omega = \sum da_{i_1, \ldots, i_p} \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p}. \tag{1.2}$$

Например, если $\omega = \sum a_i dx^i$, то

$$d\omega = \sum_{i<j} \left(\frac{\partial a_i}{\partial x^j} - \frac{\partial a_j}{\partial x^i}\right) dx^i \wedge dx^j. \tag{1.3}$$

Для доказательства существования определим оператор d формулой (1.2). Мы должны проверить выполнение условий 1)—4). Условия 1) и 3) следуют немедленно из определения. Условие 4) также легко проверяется: если f — функция, то $df = \sum \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i$ и ввиду (1.3) условие 4) эквивалентно тому, что $\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i}$. Осталось проверить условие 2). Поскольку как внешнее умножение, так и оператор d, определенный формулой (1.2), линейны, достаточно проверить 2) в случае, когда

$$\omega_1 = f\, dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_r}, \qquad \omega_2 = g\, dx^{j_1} \wedge \ldots \wedge dx^{j_s}.$$

Но тогда

$$\begin{aligned} d(\omega_1 \wedge \omega_2) &= d(fg) \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_r} \wedge dx^{j_1} \wedge \ldots \wedge dx^{j_s} = \\ &= (f\, dg + g\, df) \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_r} \wedge dx^{j_1} \wedge \ldots \wedge dx^{j_s} = \\ &= (df \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_r}) \wedge (g\, dx^{j_1} \wedge \ldots \wedge dx^{j_s}) + \\ &+ (-1)^r (f\, dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_r}) \wedge (dg \wedge dx^{j_1} \wedge \ldots \wedge dx^{j_s}) = \\ &= d\omega_1 \wedge \omega_2 + (-1)^r \omega_1 \wedge d\omega_2. \end{aligned}$$

Это доказывает теорему 1.1.

Определение 1.1. Оператор d, фигурирующий в теореме 1.1, называется *внешним дифференцированием*.

Теорема 1.2. *Для любой формы* ω *имеем*

$$d(d\omega) = 0. \tag{1.4}$$

Достаточно проверить равенство (1.4) в произвольной локальной системе координат, причем (ввиду условия 1) теоремы 1.1) только для форм вида $\omega = f\, dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p}$. Имеем

$d_1(d\omega) = d(df \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p}) = (d\,df) \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p} + \sum_{r=1}^{p} df \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge d(dx^{i_r}) \wedge \ldots \wedge dx^{i_p} = 0$. [Мы воспользовались здесь условиями 1), 2) и 4).]

Обратная теорема в общем случае не верна: из $d\omega = 0$ не следует, что $\omega = d\omega'$. Например, если M есть окружность S^1, то, поскольку в S^1 нет ненулевых форм степени 2, для любой формы ω степени 1 мы имеем $d\omega = 0$. Далее, форма $d\theta$ [1]) корректно определена, но не существует функции θ, определенной на всей окружности. Эти вопросы мы обсудим далее в §§ 2 и 3.

Теорема 1.3. *Пусть* $\varphi: M_1 \to M_2$ — *дифференцируемое отображение* [2]) *многообразий. Тогда*

$$d\varphi^*(\omega) = \varphi^*(d\omega). \tag{1.5}$$

Снова достаточно доказать (1.5) для координатных окрестностей в M_1 и M_2 и в случае, когда $\omega = f\,dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p}$. Доказываем с помощью индукции. Если $\omega = f\,dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p}$, то

$$\begin{aligned}
d\varphi^*(\omega) &= d\varphi^*(f\,dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p}) = \\
&= d\varphi^*((f\,dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_{p-1}}) \wedge dx^{i_p}) = \\
&= d(\varphi^*(f\,dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_{p-1}}) \wedge \varphi^*(dx^{i_p})) = \\
&= \varphi^*(df \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_{p-1}}) \wedge \varphi^*(dx^{i_p}) + 0 = \\
&\qquad\qquad\qquad [\text{согласно } (1.1)] \\
&= \varphi^*(df \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_{p-1}} \wedge dx^{i_p}) = \\
&= \varphi^*(d\omega).
\end{aligned}$$

Итак, мы убедились в том, что оператор d инвариантен относительно дифференцируемых отображений.

Как простое следствие теоремы 1.3 и определения производной Ли мы получаем, что *для любого векторного поля* X *и формы* ω

$$d\mathscr{L}_X\omega = \mathscr{L}_X(d\omega). \tag{1.6}$$

Существуют и другие важные соотношения между производной Ли и внешней производной. Согласно теореме 1.1, d есть антидифференцирование алгебры дифференциальных форм, т. е. линейное отображение θ этой алгебры в себя, удовлетворяющее тождеству

$$\theta(\omega_1 \wedge \omega_2) = \theta(\omega_1) \wedge \omega_2 + (-1)^k \omega_1 \wedge \theta(\omega_2), \tag{1.7}$$

[1]) θ — центральный угол.— *Прим. перев.*

[2]) По крайней мере класса C^2.

если ω_1 — форма степени k. Другим примером антидифференцирования является внутреннее умножение на векторное поле (см. упражнение 4.5 гл. I): если $\theta(\omega) = X \lrcorner \omega$, то θ также удовлетворяет тождеству (1.7). С другой стороны, $\mathscr{L}_X$ является, согласно [II, (8.7)], дифференцированием, т. е.

$$\theta(\omega_1 \wedge \omega_2) = \theta(\omega_1) \wedge \omega_2 + \omega_1 \wedge \theta(\omega_2). \tag{1.8}$$

Из этих примеров можно сделать следующий важный вывод: дифференцирования и антидифференцирования полностью определяются своим действием на функциях и линейных дифференциальных формах. Доказательство очевидно (и не отличается от доказательства предыдущих утверждений этого параграфа). Если θ_1, θ_2 — такие антидифференцирования, что [1]) $\deg \theta_i(\omega) = \deg \omega + r_i$, причем числа r_i $(i = 1, 2)$ нечетны, то $\theta_1\theta_2 + \theta_2\theta_1$ есть дифференцирование. Действительно,

$$\begin{aligned}\theta_1\theta_2(\omega_1 \wedge \omega_2) = \theta_1\theta_2\omega_1 \wedge \omega_2 + (-1)^k \theta_1\omega_1 \wedge \theta_2\omega_2 + \\ + (-1)^k \omega_1 \wedge \theta_1\theta_2\omega_2 + (-1)^{k+r_1}\theta_2\omega_1 \wedge \theta_1\omega_2, \\ \theta_2\theta_1(\omega_1 \wedge \omega_2) = \theta_2\theta_1\omega_1 \wedge \omega_2 + (-1)^k \theta_2\omega_1 \wedge \theta_1\omega_2 + \\ + (-1)^k \omega_1 \wedge \theta_2\theta_1\omega_2 + (-1)^{k+r_2}\theta_1\omega_1 \wedge \theta_2\omega_2.\end{aligned}$$

Поскольку r_1 и r_2 нечетны,

$$(\theta_1\theta_2 + \theta_2\theta_1)(\omega_1 \wedge \omega_2) = ((\theta_1\theta_2 + \theta_2\theta_1)\omega_1) \wedge \omega_2 + \omega_1 \wedge (\theta_1\theta_2 + \theta_2\theta_1)\omega_2,$$

т. е. $\theta_1\theta_2 + \theta_2\theta_1$ есть дифференцирование. Воспользуемся этими замечаниями для доказательства тождества

$$\mathscr{L}_X\omega = X \lrcorner (d\omega) + d(X \lrcorner \omega). \tag{1.9}$$

Левое внутреннее умножение на X есть антидифференцирование, так же как и d. Поэтому оператор $\omega \to X \lrcorner (d\omega) + d(X \lrcorner \omega)$ есть дифференцирование, так же как и $\mathscr{L}_X$. Поскольку в обеих частях равенства (1.9) стоят операторы дифференцирования, достаточно проверить его для функций и линейных форм. Но $X \lrcorner f = 0$, так что для функций (1.9) сводится к формуле [II, (8.8)]. Если $\omega = df$ для некоторой функции f, то (1.9) сводится к равенству $\mathscr{L}_X(df) = d(X \lrcorner df)$. Но, согласно [II, (8.8)], $X \lrcorner df = \mathscr{L}_X f$, так что (1.9) следует из (1.6). Поскольку каждая линейная форма представима в виде линейной комбинации форм вида fdg, локально равенство (1.9) можно считать доказанным. Но отсюда следует равенство (1.9) в целом.

Выполним внутреннее умножение обеих частей равенства (1.9) на векторное поле Y. Мы получим

$$Y \lrcorner \mathscr{L}_X(\omega) = Y \lrcorner (X \lrcorner d\omega) + Y \lrcorner d(X \lrcorner \omega).$$

[1]) Символом deg обозначается степень формы.— *Прим. перев.*

Но

$$Y \lrcorner (X \lrcorner d\omega) = (X \wedge Y) \lrcorner d\omega$$

и

$$\mathscr{L}_X (Y \lrcorner \omega) = \mathscr{L}_X Y \lrcorner \omega + Y \lrcorner \mathscr{L}_X \omega = [Y, X] \lrcorner \omega + Y \lrcorner \mathscr{L}_X \omega.$$

Отсюда

$$(X \wedge Y) \lrcorner d\omega = \mathscr{L}_X (Y \lrcorner \omega) - Y \lrcorner d(X \lrcorner \omega) - [Y, X] \lrcorner \omega.$$

Если в качестве ω взять линейную форму, то

$$(X \wedge Y) \lrcorner d\omega = \langle X \wedge Y \mid d\omega \rangle, \qquad \mathscr{L}_X (Y \lrcorner \omega) = X \langle Y \mid \omega \rangle,$$
$$Y \lrcorner d(X \lrcorner \omega) = Y \langle X \mid \omega \rangle,$$

и мы получаем

$$\langle X \wedge Y \mid d\omega \rangle = X \langle Y \mid \omega \rangle - Y \langle X \mid \omega \rangle - \langle [X, Y] \mid \omega \rangle. \qquad (1.10)$$

Равенство (1.10), которым мы будем часто пользоваться в дальнейшем, является в некотором смысле инфинитезимальным аналогом теоремы Стокса.

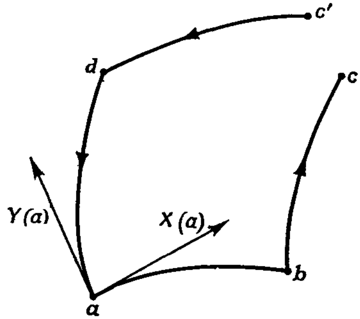


Рис. 5.

Действительно, рассмотрим «инфинитезимальный параллелограмм» со сторонами, параллельными X и Y. Более точно, пусть $\varphi_p(s)$ есть интегральная кривая [1]) поля X, проходящая через p, а $\psi_p(s)$ — интегральная кривая поля Y. Рассмотрим «прямоугольник» $abcd$ (рис. 5), где ab — кривая $\varphi_a(s)$ $(0 \leqslant s \leqslant \varepsilon)$ и $b = \varphi_a(\varepsilon)$; bc — кривая $\psi_b(s)$ $(0 \leqslant s \leqslant \varepsilon)$, $c = \psi_b(\varepsilon)$. Пусть ad есть кривая $\psi_a(s)$ $(0 \leqslant s \leqslant \varepsilon)$ и dc' — кривая $\varphi_d(s)$ $(0 \leqslant s \leqslant \varepsilon)$.

Если ε мало, то мы можем считать «значение» формы ω на кривой «приблизительно равным» значению ω на касательных векторах кривой. Тогда инфинитезимальное значение формы ω вдоль «параллелограмма» определяется правой частью формулы (1.10). Первый член измеряет $\omega(bc) + \omega(da)$, второй измеряет $\omega(ab) + \omega(dc)$, а третий член вносит поправку на то, что даже инфинитезимально «параллелограмм» не обязан быть замкнутым, т. е. $c \neq c'$. Таким образом, значение формы $d\omega$ на инфинитезимальном параллелограмме равно значению формы ω на его границе.

[1]) То есть траектория соответствующей локальной однопараметрической группы преобразований, см. § 8 гл. II. *Прим. перев.*

Упражнение 1.1. Найти формулу, обобщающую формулу (1.10) на случай, когда ω — дифференциальная форма степени k, а $X_1, \ldots, X_{k+1}$ — векторные поля.

Важность оператора d определяется той ролью, которую он играет в теории интегрирования, и тем, что этот дифференциальный оператор определяется одной только дифференцируемой структурой дифференцируемого многообразия и инвариантен относительно дифференцируемых отображений (теорема 1.3). Благодаря этому свойству инвариантности многие уравнения физики и геометрии, выраженные в терминах оператора d, принимают особенно простой вид. Мы познакомимся с некоторыми из них в дальнейшем.

§ 2. ЦЕПИ И ИНТЕГРИРОВАНИЕ[1])

В этом параграфе мы приведем первую из двух теорий интегрирования дифференциальных форм. Можно показать, что эти теории по существу эквивалентны.

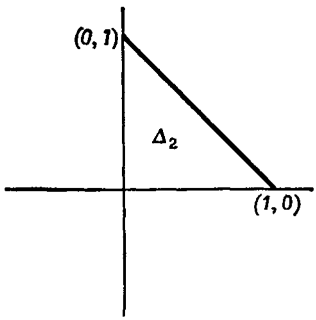


Рис. 6.

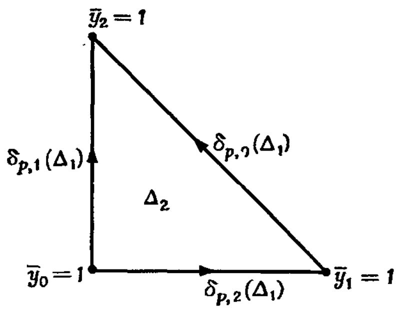


Рис. 7.

Сначала мы выберем стандартный p-мерный объект.

Определение 2.1. Мы будем обозначать через Δ_p *симплекс* в E^p, определенный неравенствами $0 \leqslant x^i \leqslant 1$, $\sum_{i=1}^{p} x^i \leqslant 1$.

Так, Δ_0 — точка, Δ_1 — единичный отрезок, Δ_2 — треугольник (рис. 6) и т. д. Удобно ввести в симплексе Δ_p так называемые барицентрические «координаты», которые определяются форму-

[1]) За исключением определений 2.5 и 2.7, результаты этого параграфа не будут использоваться нигде в этой книге.

лами

$$y^0=1-\sum_{i=1}^{p} x^i, \qquad y^i=x^i \quad \text{для} \quad i=1, \ldots, p, \tag{2.1}$$

откуда $y^0+\ldots+y^p=1$, $0 \leqslant y^i \leqslant 1$ $(i=0, \ldots, p)$.

Определение 2.2. *Отображение* $\delta_{p,i}$ $(i=0, \ldots, p+1)$ *симплекса* Δ_p *в* Δ_{p+1} определяется формулой

$$\bar{y}^j[\delta_{p,i}(y^0, \ldots, y^p)]=\begin{cases} y^j, & \text{если } j<i, \\ 0, & \text{если } j=i, \\ y^{j-1}, & \text{если } j>i, \end{cases} \tag{2.2}$$

где $\bar{y}^j$ — барицентрические координаты в Δ_{p+1}.

Поскольку $\sum_0^{p+1} \bar{y}^j(\delta_{p,i})=\sum_0^p y^j=1$, формула (2.2) действительно определяет отображение $\Delta_p \to \Delta_{p+1}$. Это отображение очевидным образом продолжается до дифференцируемого отображения окрестности симплекса Δ_p в пространстве E^p в пространство E^{p+1}. На рис. 7 показаны образы симплекса Δ_1 в симплексе Δ_2 при отображениях $\delta_{p,0}$, $\delta_{p,1}$, $\delta_{p,2}$.

Сравним отображения $\delta_{p+1,i}\circ\delta_{p,l}$ и $\delta_{p+1,l}\circ\delta_{p,i}$. Если $\bar{\bar{y}}^k$ — барицентрические координаты в Δ_{p+2}, то

$$\bar{\bar{y}}^k\circ\delta_{p+1,i}\circ\delta_{p,l}(y^0, \ldots, y^p)=\begin{cases} \bar{y}^k\circ\delta_{p,l}(y^0, \ldots, y^p), & \text{если } k<i, \\ 0, & \text{если } k=i, \\ \bar{y}^{k-1}\circ\delta_{p,l}(y^0, \ldots, y^p), & \text{если } k>i. \end{cases}$$

Если $l \leqslant i$, то мы можем переписать это в виде

$$\bar{\bar{y}}^k\circ\delta_{p+1,i}\delta_{p,l}(y^0, \ldots, y^p)=\begin{cases} y^k, & \text{если } k<l, \\ 0, & \text{если } k=l, \\ y^{k-1}, & \text{если } l<k<i, \\ 0, & \text{если } k=i, \\ y^{k-2}, & \text{если } k>i. \end{cases}$$

С другой стороны,

$$\bar{\bar{y}}^k\circ\delta_{p+1,l}\circ\delta_{p,i}=\left\{\begin{array}{ll} \bar{y}^k\circ\delta_{p,i}(y^0, \ldots, y^p), & \text{если } k<l, \\ 0, & \text{если } k=l, \\ \bar{y}^{k-1}\circ\delta_{p,i}(y^0, \ldots, y^p), & \text{если } k>l, \end{array}\right\}=$$

$$= \begin{cases} y^k, & \text{если} \quad k < l, \\ 0, & \text{если} \quad k = l, \\ y^{k-1}, & \text{если} \quad l < k < i+1, \\ 0, & \text{если} \quad l = i+1, \\ y^{k-2}, & \text{если} \quad l > i+i. \end{cases}$$

Отсюда

$$\delta_{p+1,\, i} \circ \delta_{p,\, l} = \delta_{p+1,\, l} \circ \delta_{p,\, i+1}, \qquad \text{если } l \leqslant i. \tag{2.3}$$

Определение 2.3. *Дифференцируемым сингулярным p-симплексом на многообразии M* называется отображение $\Delta_p \to M$, которое может быть продолжено до дифференцируемого отображения некоторой окрестности симплекса Δ_p в E^p в многообразие M. *Дифференцируемой p-цепью* называется формальная конечная линейная комбинация (с вещественными коэффициентами) сингулярных p-симплексов. *Бесконечной дифференцируемой p-цепью* называется такая бесконечная формальная сумма (т. е. такое отображение $s \to c_s$ множества дифференцируемых сингулярных p-симплексов в вещественную прямую), что множество $\{s_\alpha(\Delta_p)\}$ (где $\{s_\alpha\}$ — множество тех s, для которых $c_s \neq 0$) локально конечно.

Замечания. На компактном многообразии бесконечная сингулярная цепь имеет не более конечного числа ненулевых коэффициентов, так что два введенных понятия совпадают. В этой главе все цепи будут дифференцируемыми, поэтому для краткости мы будем их называть просто цепями.

Множество всех p-цепей (соответственно бесконечных p-цепей) образует, очевидно, векторное пространство; мы будем обозначать его $C_p(M)$ (соответственно $IC_p(M)$). Если f есть дифференцируемое отображение M_1 в M_2, то, полагая

$$f_*(s) = f \circ s \tag{2.4}$$

для симплексов и продолжая отображение по линейности, мы получим линейное отображение $f_*\colon C_p(M_1) \to C_p(M_2)$. В случае бесконечных цепей мы должны быть более осторожными. Отображение f называется *собственным* [1]), если $f^{-1}(K)$ компактно для любого компактного $K \subset M_2$. Пусть f — собственное отображение и $s \to c_s$ есть p-цепь на M_1. Положим $f_*(s) = d_t$, где

$$d_t = \sum_{t = f_*(s)} c_s, \tag{2.5}$$

---

[1]) См. определение 2.4 гл. II.— *Прим. перев.*

причем $d_t=0$, если $t \neq f_*(s)$ ни для какого s. Поскольку f — собственное отображение, сумма в (2.5) конечна и множество симплексов t, для которых $d_t \neq 0$, локально конечно. Поэтому формула (2.5) определяет бесконечную p-цепь на M_2.

Если s есть p-симплекс, то $s \circ \delta_{p-1,i}$ есть $(p-1)$-симплекс. Определим границу симплекса s формулой

$$\partial s = \sum_{i=0}^{p} (-1)^i s \circ \delta_{p-1,i}. \tag{2.6}$$

Так, на рис. 8 s есть сингулярный 2-симплекс, а ∂s — его граница.

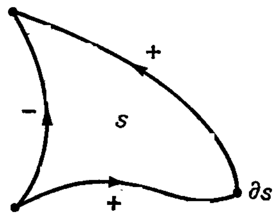


Рис. 8.

Продолжим ∂ по линейности до отображения $\partial: C_p(M) \to C_{p-1}(M)$. Для бесконечных цепей отображение определяется аналогично[1]):

$$\partial(c_s) = \sum_{i=0}^{p} (-1)^i d_{t,i}, \qquad d_{t,i} = \sum_{s \mid t = s \circ \delta_{p-1,i}} c_s. \tag{2.7}$$

Заметим, что благодаря условию локальной конечности эта сумма всегда конечна.

В обоих случаях имеет место важное соотношение

$$\partial \circ \partial = 0. \tag{2.8}$$

Докажем, что $\partial(\partial s)=0$ для симплексов. Тогда это будет верно и для любых цепей.

Пусть s есть q-мерный симплекс. Если $q \leqslant 1$, то доказывать нечего. Если $q \geqslant 2$, то

$$\partial(\partial s) = \sum_{i=0}^{q} \sum_{j=0}^{q-1} (-1)^i (-1)^j s \circ \delta_{q-1,i} \circ \delta_{q-2,j} =$$

$$= \sum_{0 \leqslant j \leqslant i \leqslant q} (-1)^{i+j} s \circ \delta_{q-1,i} \circ \delta_{q-2,j} + \sum_{0 \leqslant i < j \leqslant q} (-1)^{i+j} s \circ \delta_{q-1,i} \circ \delta_{q-2,j}.$$

[1]) То есть для каждой p-цепи c новая $(p-1)$-цепь ∂c сопоставляет $(p-1)$-мерному сингулярному симплексу t число $(\partial c)_t = \sum_{i=0}^{p} (-1)^i d_{t,i}$ — *Прим. перев.*

Согласно (2.3), $s \circ \delta_{q-1,\,i} \circ \delta_{q-2,\,j} = s \circ \delta_{q-1,\,j} \circ \delta_{q-2,\,i+1}$, если $j \leqslant i$. Поэтому первую сумму можно переписать в виде

$$\sum_{0 \leqslant j \leqslant i \leqslant q} (-1)^{i+j} s \circ \delta_{q-1,\,j} \circ \delta_{q-2,\,i+1}.$$

Если положить $k = i + 1$, $l = j$, то эта сумма приобретет вид

$$\sum_{0 \leqslant l < k \leqslant q} (-1)^{k+l-1} s \circ \delta_{q-1,\,l} \circ \delta_{q-2,\,k}$$

и сократится со второй суммой, что доказывает равенство (2.8).

Определение 2.4. p-цепь c, удовлетворяющая условию $\partial c = 0$, называется *циклом*; p-цепь вида $c = \partial d$, где d — некоторая $(p+1)$-цепь, называется *границей*. Равенство (2.8) говорит о том, что пространство границ есть подпространство пространства циклов. Соответствующее факторпространство называется *p-мерной группой гомологий* и обозначается символом $H_p(M)$. Те же определения для бесконечных цепей дают группу $IH_p(M)$[1].

Из определения следует, что если $g\colon M_1 \to M_2$, то отображение g_* перестановочно с ∂: $\partial \circ g_* = g_* \circ \partial$. Поэтому g_* переводит циклы в циклы и границы в границы и, значит, индуцирует отображение $H_p(M_1) \to H_p(M_2)$, которое по-прежнему будет обозначаться через g_*.

Заметим, что формула (2.8) аналогична формуле (1.4).

Определение 2.5. Дифференциальная форма ω называется *замкнутой*, если $d\omega = 0$, и *точной*, если $\omega = d\Omega$. Мы будем иногда называть замкнутые формы *коциклами*, а точные — *кограницами*. Факторпространство замкнутых p-форм по точным p-формам называется *p-мерной группой когомологий* (*де Рама*) многообразия M и обозначается символом $H^p(M)$.

Связь между гомологиями и когомологиями устанавливает теория интегрирования.

Определение 2.6. Пусть s — сингулярный p-симплекс, а ω — дифференциальная форма степени p. Форма $s^*(\omega)$ определена в некоторой окрестности евклидова p-симплекса Δ_p. Допустим, что $s^*(\omega) = \sum a_{i_1, \ldots, i_p} dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p}$, где $x^1, \ldots, x^n$ — стан-

---

[1]) Мы могли бы рассматривать непрерывные сингулярные цепи и непрерывные отображения вместо дифференцируемых. Нетрудно показать, что полученные таким образом группы гомологий совпадают с соответствующими группами $H_p(M)$, $IH_p(M)$. Таким образом, группы $H_p(M)$ и $IH_p(M)$ зависят только от топологии многообразия M и не зависят от его дифференцируемой структуры.

дартные координаты в E^n. Положим по определению

$$\int_s \omega = \sum_{i_1<\ldots<i_p} \int \ldots \int_{\Delta_p} a_{i_1,\ldots,i_p} dx^{i_1} \ldots dx^{i_p}, \tag{2.9}$$

где справа стоит сумма обычных кратных интегралов.

Продолжим (2.9) на любую конечную p-цепь по линейности. В общем случае мы не можем интегрировать произвольную p-форму по бесконечной p-цепи, поскольку это может привести к расходящемуся бесконечному ряду. Ограничим поэтому класс форм, которые мы будем интегрировать.

Определение 2.7. *Носителем формы* ω называется наименьшее замкнутое множество, вне которого она равна нулю. Факторпространство замкнутых p-форм с компактным носителем по пространству форм вида $d\Omega$, где Ω есть $(p+1)$-форма с компактным носителем, обозначается $H_c^p(M)$.

Если ω — форма с компактным носителем, то для любой бесконечной цепи c_s сумма

$$\int_{c_s} \omega = \sum_s c_s \int_s \omega \tag{2.10}$$

имеет только конечное число ненулевых членов и поэтому определена.

Если $g: M_1 \to M_2$ — собственное дифференцируемое отображение, то из определений немедленно следует, что

$$\int_{g^*(c)} \omega = \int_c g^*(\omega). \tag{2.11}$$

Справедлива следующая важная

Теорема 2.1 (первый вариант теоремы Стокса). *Для любой p-цепи c и $(p-1)$-формы ω (соответственно бесконечной p-цепи c и $(p-1)$-формы ω с компактным носителем) справедливо равенство*

$$\int_c d\omega = \int_{\partial c} \omega. \tag{2.12}$$

Благодаря линейности (по c) обеих частей формулы (2.12) достаточно рассмотреть случай $c = s$, где $s: \Delta_p \to M$ — сингулярный p-симплекс. В этом случае равенство (2.12) сводится к равенству

$$\int_{\Delta_p} d\Omega = \sum (-1)^i \int_{\delta_{p-1,\, i}} \Omega, \tag{2.13}$$

где $\Omega = s^*(\omega)$, а $\delta_{p-1,\,i}\colon \Delta_{p-1} \longrightarrow \Delta_p$ рассматривается как сингулярный $(p-1)$-симплекс в E^p. Далее, $\Omega = \sum a_{i_1, \ldots, i_{p-1}} (x^1, \ldots, x^p) \times \times dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_{p-1}}$. Достаточно доказать равенство (2.13) для каждого члена этой суммы. Таким образом, задача сводится к проверке равенства[1])

$$(-1)^{j-1} \int\limits_{\Delta_p} \frac{\partial a}{\partial x^j} dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^p = \sum_{i=0}^{p} (-1)^i \int\limits_{\delta_{p-1,\,i}} a\, dx^1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx^j} \wedge \ldots \wedge dx^p. \quad (2.14)$$

Поскольку $\delta^*_{p-1,\,i}(x^i) = 0$, в правой части останутся только члены с $i = 0$ и $i = j$. Пусть $z^1, \ldots, z^{p-1}$ — евклидовы координаты в Δ_{p-1}. Тогда

$$\delta^*_{p-1,\,j}(a\, dx^1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx^j} \wedge \ldots \wedge dx^p) = a \circ \delta_{p-1,\,j}(z^1, \ldots, z^{p-1})\, dz^1 \wedge \ldots \wedge dz^{p-1}$$

и

$$\begin{aligned}\delta^*_{p-1,\,0}(a\, dx^1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx^j} \wedge \ldots \wedge dx^p) &= \\ = (a \circ \delta_{p-1,\,0}(z^1, \ldots, z^{p-1}))\, d(1 - z^1 - \ldots - z^{p-1}) \wedge dz^1 \wedge \ldots \\ \ldots \wedge \widehat{dz^j} \wedge \ldots \wedge dz^{p-1} &= \\ = (-1)^{j-1} a \circ \delta_{p-1,\,0}(z^1, \ldots, z^{p-1})\, dz^1 \wedge \ldots \wedge dz^{p-1}.\end{aligned}$$

В соответствии с определениями равенство (2.14) сводится к равенству

$$\begin{aligned}\int\limits_{\Delta_p} \frac{\partial a}{\partial x^j} dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^p &= \\ = \int a\Big(x^1, \ldots, x^{j-1}, 1 - \sum_{i \neq j} x^i, \ldots, x^p\Big) dx^1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx^j} \wedge \ldots \wedge dx^p - \\ - \int a\,(x^1, \ldots, x^{j-1}, 0, \ldots, x^p)\, dx^1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx^j} \wedge \ldots \wedge dx^p,\end{aligned}$$

которое проверяется интегрированием по частям. Теорема 2.1 доказана.

---

[1]) Символ $\widehat{\ }$ означает, что соответствующий член должен быть пропущен.— *Прим. перев.*

Из равенства (2.12) следует, что интегралы точной формы по циклу и замкнутой формы по границе равны нулю. Таким образом, интеграл замкнутой формы по циклу зависит только от класса когомологий этой формы и класса гомологий этого цикла. Получаем

Следствие 2.1. *Билинейное отображение*[1] $C_p(M) \times \times \bigwedge^p(M) \to R$, *определяемое интегралом* $\int\limits_c \omega$, *индуцирует билинейное отображение* $H_p(M) \times H^p(M) \to R$.

Следствие 2.2. *Билинейное отображение*[1] $IC_p(M) \times \times \bigwedge_c^p(M) \to R$, *определяемое интегралом* $\int\limits_c \omega$, *индуцирует билинейное отображение* $IH_p(M) \times H_c^p \to R$.

Важная теорема алгебраической топологии (теорема де Рама) утверждает, что это билинейное отображение невырожденно и, следовательно, мы можем рассматривать $H^p(M)$ как пространство, дуальное к $H_p(M)$; см. де Рам [15]. В частности, пространства H^p и IH^p, которые были определены в терминах дифференциальных форм и казались зависящими от дифференцируемой структуры, в действительности являются топологическими инвариантами.

§ 3. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ПЛОТНОСТЕЙ

Хотя приведенная выше теория интегрирования, использующая сингулярные цепи, весьма удобна для дифференциальной топологии, она не позволяет эффективно вычислять интегралы. Поэтому мы используем другой подход, более применимый к геометрии, который позволит нам сразу сделать некоторые выводы без привлечения сложного алгебраического аппарата. Из теоремы де Рама следует, что эти две теории интегрирования по существу эквивалентны.

Мы хотим определить на многообразии M объекты, которые можно было бы интегрировать по подходящему набору областей из M. Мы знаем, как можно приемлемым образом интегрировать достаточно хорошую функцию в евклидовом пространстве. На многообразии мы не можем придать никакой смысл интегрированию функций. Даже в евклидовом пространстве форма подинтегрального выражения изменяется при замене координат: если $x^1, \ldots$

---

[1] Где $\bigwedge^p(M)$ ($\bigwedge_c^p(M)$) — пространство p-форм (соответственно p-форм с компактным носителем) на многообразии M. — *Прим. перев.*

..., x^n — декартовы координаты в E^n, а $y^1, \ldots, y^n$ — другая система координат, то для любой функции f (см. приложение II)

$$\int\limits_{E^n} f(x^1, \ldots, x^n)\, dx^1 \ldots dx^n =$$

$$= \int\limits_{E^n} f(x^1(y^1, \ldots, y^n), \ldots, x^n(y^1, \ldots, y^n)) \left|\det\left(\frac{\partial x^i}{\partial y^j}\right)\right| dy^1 \ldots dy^n.$$

Таким образом, в координатах y^i мы интегрируем не f, а $f\left|\det\left(\frac{\partial x^i}{\partial y^j}\right)\right|$. Это наводит на мысль рассмотреть на многообразии объект ρ, описываемый следующим образом: для любой карты (U_i, h_i) атласа $\{(U_i, h_i)\}$ задается функция ρ_i на U_i, причем

$$\rho_i(x) = \rho_j(x)\,|\det J_{h_i(x)}(h_j \circ h_i^{-1})|. \tag{3.1}$$

Сравнивая это с равенством [II, (6.11)], мы видим, что ρ есть поле типа Q, где Q — одномерное векторное пространство, и

$$\rho(A)\, q = |\det A|^{-1} q \text{ для любого } A \in GL(n). \tag{3.2}$$

[Таким образом, Q есть пространство плотностей, ср. с примером 4, § 2, гл. I.]

Определение 3.1. Пусть Q — вещественная прямая, на которой действует группа $GL(n)$ по формуле (3.2). Поле типа Q на многообразии M называется *плотностью*.

В терминах атласа $\{(U_i, h_i)\}$ плотность ρ задается набором функций ρ_i (на U_i), связанных между собой соотношением (3.1).

Упражнение 3.1. Пусть M — риманово многообразие. Определим для любой карты (U_i, h_i), где $h_i = (x^1, \ldots, x^n)$, функцию ρ_i, полагая $\rho_i(x)$ равным объему параллелепипеда, натянутого на векторы $\left.\frac{\partial}{\partial x^1}\right|_x, \ldots$
$\ldots, \left.\frac{\partial}{\partial x^n}\right|_x$. [Поскольку в рассматриваемом случае пространство $T_p(M)$ обладает метрикой, т. е. является евклидовым пространством, мы можем говорить об объеме.] Показать, что функции ρ_i определяют плотность на M. Она называется *объемной плотностью* римановой метрики.

Ясно, что пространство плотностей есть векторное пространство и даже модуль над кольцом дифференцируемых функций, т. е. мы можем складывать плотности и умножать плотность на функцию. Значение плотности в точке не имеет смысла, поскольку плотность не является функцией. Однако имеет смысл говорить о том, равна ли плотность в данной точке нулю или нет (а также о знаке плотности в точке), поскольку это не зависит от выбора карты, в которой плотность изображается функцией.

Определение 3.2. *Носителем плотности* ρ (обозначается $\operatorname{supp} \rho$) называется замыкание множества точек, где $\rho \neq 0$.

Аналогично, можно говорить о том, непрерывна или нет плотность в данной точке.

Определение 3.3. Плотность ρ называется *локально ограниченной*, если для любой карты (U_i, h_i) и любого компакта $K \subset U_i$ функция ρ_i ограничена на K.

[Здесь ρ_i — функция, изображающая плотность ρ в карте (U_i, h_i).]

Легко проверить, что из ограниченности ρ_i на всех компактах $K \subset U_i$, где $\{(U_i, h_i)\}$ есть атлас, следует локальная ограниченность плотности ρ.

Обратимся теперь к определению областей интегрирования. Напомним [1]), что множество $B \subset E^n$ называется *множеством наполнения нуль*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует конечное число таких прямоугольников $\square_1, \ldots, \square_k$, что

$$B \subset \bigcup \square_i \quad \text{и} \quad \sum \operatorname{vol}(\square_i) < \varepsilon.$$

Определение 3.4. Говорят, что подмножество B многообразия M *имеет наполнение нуль*, если для некоторого атласа $\{(U_i, h_i)\}$ существует конечное число компактных множеств B_i, таких, что $B \subset \bigcup B_i$, $B_i \subset U_i$ и множества $h_i(B_i)$ имеют наполнение нуль в E^n.

Мы предоставляем читателю проверить, что объединение конечного числа множеств наполнения нуль имеет наполнение нуль.

Определение 3.5. Множество $D \subset M$ называют *наполнимым*, если

1) D компактно,

2) граница D имеет наполнение нуль.

Мы обозначим множество всех наполнимых областей через $\mathscr{D}$.

Предоставляем читателю проверить, что множество наполнимых областей замкнуто относительно пересечения и конечного объединения.

Определение 3.6. Плотность ρ называют *почти непрерывной*, если она непрерывна всюду, кроме множества наполнения нуль. Мы обозначим пространство локально ограниченных почти непрерывных плотностей через P.

---

[1]) См. приложение II, где дан обзор римановой теории интегрирования в E^n.

Упражнение 3.2. Показать, что P есть векторное пространство. Назовем функцию почти непрерывной, если она непрерывна всюду, кроме множества наполнения нуль. Показать, что множество почти непрерывных функций образует кольцо и P есть модуль над этим кольцом.

Упражнение 3.3. Для любого множества $D \subset M$ обозначим через φ_D характеристическую функцию множества D, т. е. $\varphi_D(x) = 1$, если $x \in D$, и $\varphi_D(x) = 0$, если $x \notin D$. Показать, что $D \in \mathscr{D}$ тогда и только тогда, когда множество $\operatorname{supp} \varphi_D$ компактно, а функция φ_D почти непрерывна.

Теперь мы в состоянии изложить нашу теорию интегрирования.

Теорема 3.1. *Существует единственное правило* $\int$, *сопоставляющее любым* $D \in \mathscr{D}$ *и* $\rho \in P$ *число* $\int\limits_D \rho$ (*называемое интегралом плотности* ρ *по области* D) *так, что выполняются следующие условия:*

1) *для каждой фиксированной области* D *отображение* $\rho \to \int\limits_D \rho$ *является линейным функционалом на* P;

2) *если* $D_1 \cap D_2 = \varnothing$, *то* $\int\limits_{D_1 \cup D_2} \rho = \int\limits_{D_1} \rho + \int\limits_{D_2} \rho$;

3) *если* $\operatorname{supp} \rho \subset U$, *где* (U, h) — *некоторая карта, а* f — *функция, изображающая плотность* ρ *в карте* (U, h), *то*

$$\int\limits_D \rho = \int\limits_{h(U)} (\varphi_D \circ h^{-1})(f \circ h^{-1})\, dx^1 \ldots dx^n.$$

Заметим, что можно так переформулировать теорему 3.1, чтобы избежать явного упоминания области интегрирования. Действительно, пусть P_c — пространство плотностей с компактными носителями. Справедлива

Теорема 3.2. *Существует единственный линейный функционал* $\int$ *на* P_c, *такой, что если* $\operatorname{supp} \rho \subset U$ *и* (U, h) — *некоторая карта, то*

$$\int \rho = \int\limits_{h(U)} (f \circ h^{-1})\, dx^1 \ldots dx^n, \tag{3.3}$$

где f — *функция, изображающая плотность* ρ *в карте* (U, h).

Полагая для $D \in \mathscr{D}$ и $\rho \in P$

$$\int\limits_D \rho = \int \varphi_D \rho, \tag{3.4}$$

мы убеждаемся в том, что теоремы 3.2 и 3.1 эквивалентны; надо только проверить условие 2) теоремы 3.1. Но если $D_1 \cap D_2 = \varnothing$, то $\varphi_{D_1 \cup D_2} = \varphi_{D_1} + \varphi_{D_2}$, так что условие 2) выполняется в силу линейности операции $\int$.

Приступим теперь к доказательству теоремы 3.2. Пусть φ_i — разбиение единицы, подчиненное некоторому атласу, и пусть (U_i, h_i) — карта, содержащая $\operatorname{supp} \varphi_i$, где $h_i = (x_i^1, \ldots, x_i^n)$. Для любой плотности $\rho \in \mathrm{P_c}$ только конечное число плотностей $\varphi_i \rho$ отличны от нуля, поэтому

$$\int \rho = \sum \int \varphi_i \rho = \sum \int (\varphi_i \circ h_i^{-1})(f_i \circ h_i^{-1}) dx^1 \ldots dx^n, \qquad (3.5)$$

где f_i — функция, изображающая ρ в карте (U_i, h_i). Это доказывает единственность. Чтобы доказать существование, мы должны проверить, что операция $\int$, определенная формулой (3.5), удовлетворяет равенству (3.3). Для этого достаточно проверить равенство (3.3) для каждого слагаемого $\varphi_i \rho$, т. е. доказать, что

$$\int\limits_{h(U)} \varphi_i (f \circ h^{-1}) \, dx^1 \ldots dx^n = \int\limits_{h_i(U_i)} \varphi_i (f_i \circ h_i^{-1}) \, dx_i^1 \ldots dx_i^n.$$

Учитывая связь, существующую между функциями f и f_i, мы убеждаемся в том, что это есть в точности формула замены переменных в кратном интеграле.

Упражнение 3.4. Определим объем области $D \in \mathscr{D}$ риманова многообразия M как интеграл от объемной плотности по области D. Вычислить объем n-мерной сферы в метрике, индуцированной ее стандартным вложением в E^{n+1}.

Упражнение 3.5. Пусть φ_1 и φ_2 — два погружения многообразия M в риманово многообразие N, а g_1, g_2 — индуцированные ими римановы метрики на M. Пусть объем многообразия M в этих метриках равен соответственно V_1 и V_2. Показать, что для любого $\eta > 0$ существует такой набор $(W, Z, \varepsilon, 1)$, что если $\varphi_1 \in \mathscr{N}(W, Z, \varepsilon, 1)\varphi_2$, то $| V_1 - V_2 | < \eta$.

Упражнение 3.6. Показать, что вышеприведенное определение объема множества из E^n, рассматриваемого как риманово пространство, совпадает с обычным определением.

Упражнение 3.7. Пусть φ — погружение компактного многообразия M в E^n, и пусть V — объем многообразия M в индуцированной римановой метрике. Используя упражнения 3.5 и 3.6, показать, что $V = \lim\limits_{i \to \infty} S(P_i)$, где P_i — последовательность полиэдров, аппроксимирующих $\varphi(M)$ по положению и направлению, а $S(P_i)$ — объем (или площадь) поверхности полиэдра P_i.

Если ω — внешняя n-форма на n-мерном многообразии, то для любой карты (U, h), где $h = (x^1, \ldots, x^n)$, мы можем написать $\omega = f dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n$. Если (V, g), где $g = (y^1, \ldots, y^n)$, — другая карта и $\omega = g dy^1 \wedge \ldots \wedge dy^n$, то

$$f = g\,(\det J\,(g \circ h^{-1})).$$

Эта формула напоминает формулу (3.1), только теперь вместо $|\det J\,(g \circ h^{-1})|$ мы имеем $\det J\,(g \circ h^{-1})$. Мы сможем связать с каждой n-формой плотность и обратно, если нам удастся выбрать атлас, для которого все якобианы функций перехода положительны.

Определение 3.7. n-мерное дифференцируемое многообразие M называется *ориентируемым*, если на нем существует внешняя дифференциальная форма ω степени n, всюду отличная от нуля, т. е. такая, что $\omega_p \neq 0$ для всех $p \in M$. Говорят, что две такие формы *определяют одну и ту же ориентацию*, если они отличаются на всюду положительный множитель. Многообразие вместе с выбранной ориентацией называется *ориентированным*.

Любые две n-формы отличаются на множитель, являющийся (дифференцируемой) функцией, поскольку пространство $\bigwedge^n (T_p^*)$ одномерно. Поэтому на связном ориентируемом многообразии существуют ровно две ориентации.

Пусть ω — форма, задающая некоторую ориентацию многообразия M. Любая другая n-форма Ω, определенная на открытом множестве $U \subset M$, может быть представлена в виде $\Omega = f\omega$, где f — функция. Мы скажем, что $\Omega > 0$ $(\Omega < 0)$, если $f > 0$ (соответственно $f < 0$). Это определение зависит не от самой формы ω, а только от задаваемой ею ориентации. Если (x^i) — система координат на U, то $dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n \neq 0$ на U. Поэтому либо $dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n > 0$, либо $dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n < 0$. В последнем случае функции $-x^1, x^2, \ldots, x^n$ определяют новую систему координат, для которой верно первое неравенство. Следовательно, покрыв M координатными окрестностями, мы всегда можем в каждой окрестности выбрать координаты так, что $dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n > 0$. Тогда в пересечении двух систем координат (x^i) и (y^i) мы будем иметь

$$dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n = f\, dy^1 \wedge \ldots \wedge dy^n, \quad \text{причем } f > 0, \tag{3.6}$$

т. е.

$$\det\left(\frac{\partial x^i}{\partial y^j}\right) > 0. \tag{3.7}$$

Обратно, предположим, что мы можем покрыть многообразие M счетным числом координатных окрестностей U_i так, что выполняется условие (3.7). Положим $\omega_i = dx_i^1 \wedge \ldots \wedge dx_i^n$, где $(x_i^1, \ldots$ $\ldots, x_i^n)$ — координаты в U_i. Пусть $\{\varphi_i\}$ — разбиение единицы, подчиненное покрытию $\{U_i\}$. Тогда форма $\omega = \sum \varphi_i \omega_i$ везде отлична от нуля, поскольку $\omega_i \neq 0$ в U_i и $\varphi_i \geqslant 0$. Таким образом, имеет место

Теорема 3.3. *Необходимое и достаточное условие ориентируемости многообразия состоит в существовании атласа, в пересечении любых двух карт которого выполнено условие* (3.7). *Выбор ориентации выделяет предпочтительные карты, которые мы назовем положительными относительно данной ориентации.*

Определение 3.8. Пусть M — дифференцируемое многообразие. Подмножество D из M называется *областью с регулярной границей* (для краткости *областью*), если любая точка $p \in \overline{D}$

1) либо имеет окрестность, лежащую в D,

2) либо имеет такую окрестность U с координатами $x^1, \ldots, x^n$, причем $x^n(p) = 0$, что $U \cap \overline{D}$ есть множество всех точек из U, для которых $x^n \geqslant 0$ [1]).

Эти два свойства, очевидно, исключают друг друга. Точки, обладающие свойством 1), называются *внутренними точками*, а свойством 2),— *граничными*. Из упражнения 2.5 гл. II следует, что множество граничных точек области D можно рассматривать как подмногообразие ∂D многообразия M. Если многообразие M ориентируемо, то многообразие ∂D — тоже.

Действительно, пусть $\{U_i\}$ — счетное покрытие множества ∂D координатными окрестностями U_i с координатами $x_i^1, \ldots, x_i^n$, которые удовлетворяют условию 2) определения 3.8. При этом можно считать, что $dx_i^1 \wedge \ldots \wedge dx_i^n > 0$ относительно фиксированной ориентации многообразия M. [Этого всегда можно добиться, если $n > 1$. Случай $n = 1$ можно не рассматривать, поскольку в этом случае ∂D представляет собой набор точек, который тривиальным образом ориентируем.] Если U — одна из окрестностей U_i, а $x^1, \ldots, x^n$ — соответствующая система координат в U, то функции $x^1, \ldots, x^{n-1}$ образуют систему координат в $U \cap \partial D$. Если $y^1, \ldots, y^n$ — другая подобная система координат, то $y^n = 0$ на ∂D, так что $\partial y^n / \partial x^k = 0$ $(k = 1, \ldots$ $\ldots, n-1)$ всюду на ∂D. Поскольку $y^n > 0$, когда $x^n > 0$,

---

[1]) Так, само многообразие M есть область с регулярной границей.

имеем $\partial y^n/\partial x^n \geqslant 0$. Таким образом,

$$\left.\frac{\partial(y^1, \ldots, y^n)}{\partial(x^1, \ldots, x^n)}\right|_{\partial D} = \frac{\partial(y^1, \ldots, y^{n-1})}{\partial(x^1, \ldots, x^{n-1})} \frac{\partial y^n}{\partial x^n} > 0$$ [1]).

Значит, $\partial(y^1, \ldots, y^{n-1})/\partial(x^1, \ldots, x^{n-1}) > 0$ и многообразие ∂D ориентируемо. В действительности мы имеем на ∂D определенную ориентацию, индуцированную ориентацией многообразия M. Мы будем считать, что форма $dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^{n-1}$, соответствующая положительной системе координат $x^1, \ldots, x^n$ многообразия M, удовлетворяющей условию 2) определения 3.8, имеет знак $(-1)^n$.

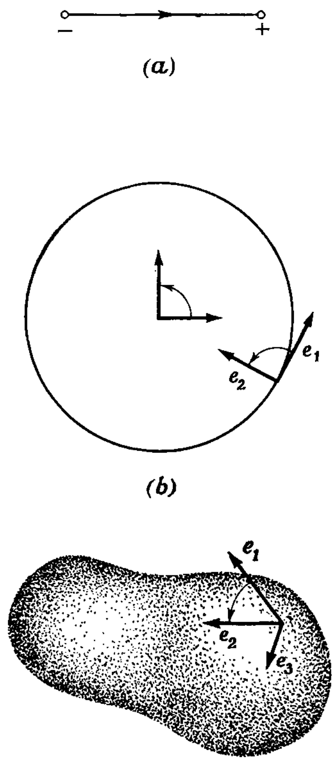
Индуцированные ориентации для одномерного, двумерного и трехмерного многообразий показаны на рис. 9.

Теорема 3.4. *Пусть M — ориентированное n-мерное многообразие и D — область в M. Существует единственный функционал, сопоставляющий каждой n-форме ω с компактным носителем вещественное число, называемое ее интегралом по D и обозначаемое $\int_D \omega$, такой, что*

1) $\int\limits_D (\omega_1 + \omega_2) = \int\limits_D \omega_1 + \int\limits_D \omega_2$;

2) *если носитель формы ω лежит в координатной окрестности U и $h = (x^1, \ldots, x^n)$ — система координат в U, причем $dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n > 0$ и $\omega = f dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n$, то*

$$\int\limits_D \omega = \int \varphi f(x^1, \ldots, x^n)\, dx^1 \ldots dx^n, \quad (3.8)$$



(a) (b) (c)

Рис. 9.

где φ — характеристическая функция области D ($\varphi(x) = 1$ для $x \in D$, $\varphi(x) = 0$ для $x \notin D$) и в правой части стоит обыкновенный интеграл Римана.

---

[1]) Где $\frac{\partial(y^1, \ldots, y^n)}{\partial(x^1, \ldots, x^n)} = \det\left(\frac{\partial y^i}{\partial x^j}\right)$ — якобиан набора n функций от n переменных. — *Прим. перев.*

Доказательство следует немедленно из теоремы 3.1.

Пусть M — ориентированное многообразие и D_i — конечное число непересекающихся областей в M. Для любой n-формы ω имеем

$$\int\limits_{\bigcup D_i} \omega = \sum \int\limits_{D_i} \omega. \tag{3.9}$$

Теорема 3.5 (второй вариант теоремы Стокса). *Пусть ω — форма степени $n-1$ с компактным носителем на ориентированном многообразии M. Тогда для любой области D в M*

$$\int\limits_D d\omega = \int\limits_{\partial D} i^*(\omega), \tag{3.10}$$

где ∂D рассматривается как ориентированное многообразие с ориентацией, индуцированной ориентацией M, а i — вложение $\partial D \to M$.

Выберем такой счетный атлас $\{(U_i, h_i)\}$ на M, что либо $U_i \cap \partial D = \varnothing$, либо U_i — координатная окрестность, удовлетворяющая условию 2) определения 3.8. Пусть $\{\varphi_j\}$ — разбиение единицы, подчиненное покрытию $\{U_i\}$. Тогда

$$\int\limits_{\partial D} i^*(\omega) = \sum \int\limits_{\partial D} i^*(\varphi_j\omega),$$

$$\int\limits_D d\omega = \sum \int\limits_D d(\varphi_j\omega).$$

Поэтому достаточно проверить равенство (3.10) для каждой из форм $\varphi_j\omega$, т. е. в случае, когда $\operatorname{supp}\omega \subset U_i$ для некоторого i. Пусть $x^1, \ldots, x^n$ — такие координаты в U_i, что $dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n > 0$, и пусть

$$\omega = \sum (-1)^{j-1} a_j\, dx^1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx^j} \wedge \ldots \wedge dx^n.$$

Тогда

$$d\omega = \left(\sum \frac{\partial a_j}{\partial x^j}\right) dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n.$$

Предположим, что $U_i \cap \partial D = \varnothing$. Тогда $\int\limits_{\partial D} i^*(\varphi_i\omega) = 0$. С другой стороны, характеристическая функция φ области D либо $\equiv 0$, либо $\equiv 1$ в U_i. В первом случае все доказано. Во втором случае мы должны вычислить

$$\int\limits_{h_i(U_i)} \left(\sum \frac{\partial a_j}{\partial x^j}\right) dx^1 \ldots dx^n,$$

где (не совсем аккуратно) мы обозначили функции $a_j \circ h_i^{-1}$ через a_j. Поскольку $\operatorname{supp}(a_j) \subset h_i(U_i)$, мы можем продолжить функции a_j на все пространство E^n, полагая $a_j = 0$ вне $h_i(U_i)$. Пусть R — столь большое число, что $|x^j| < R$, если $(x^1, \ldots, x^n) \in h_i(U_i)$, и пусть B — куб в E^n, задаваемый неравенствами $|x_j| < R$. Тогда

$$\int\limits_{h_i(U_i)} \left(\sum \frac{\partial a_j}{\partial x^j}\right) dx^1 \ldots dx^n = \sum_j \int\limits_B \frac{\partial a_j}{\partial x^j} dx^1 \ldots dx^n.$$

Интегрирование по частям дает

$$\int\limits_B \frac{\partial a_j}{\partial x^j} dx^1 \ldots dx^n = \pm \int \{a_j(x^1, \ldots, x^{j-1}, R, x^{j+1}, \ldots, x^n) -$$

$$- a_j(x^1, \ldots, x^{j-1}, -R, x^{j+1}, \ldots, x^n)\} dx^1 \ldots \widehat{dx^j} \ldots dx^n = 0.$$

Таким образом, (3.10) выполнено для формы ω в случае $\operatorname{supp} \omega \subset U_i$, если $U_i \cap \partial D = \varnothing$.

Предположим теперь, что $U_i \cap \partial D \neq \varnothing$ и $x^1, \ldots, x^n$ — координаты в U_i, описанные в условии 2) определения 3.8. Тогда для $\omega = \sum (-1)^{j-1} a_j dx^1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx^j} \wedge \ldots \wedge dx^n$ мы имеем $i^*(\omega) = (-1)^{n-1} a_n i^*(dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^{n-1})$ и

$$\int\limits_{\partial D} i^*(\omega) = (-1)^{n-1} \int a_n dx^1 \ldots dx^{n-1}.$$

Продолжая функции a_j, как раньше, имеем

$$\int\limits_D d\omega = \sum \int\limits_B \varphi \frac{\partial a_j}{\partial x^j} dx^1 \ldots dx^n,$$

где $\varphi = 1$ для $x_n \geqslant 0$ и $\varphi = 0$ для $x_n < 0$. Интегрирование по частям дает

$$\int\limits_B \varphi \frac{\partial a_j}{\partial x^j} dx^1 \ldots dx^n = 0 \quad \text{для} \quad j < n,$$

$$\int\limits_B \varphi \frac{\partial a_n}{\partial x^n} dx^1 \ldots dx^n = (-1)^{n-1} \int\limits_{E^{n-1}} a_n dx^1 \ldots dx^{n-1},$$

что и доказывает теорему.

§ 4. НУЛЬМЕРНЫЕ И n-МЕРНЫЕ КОГОМОЛОГИИ; СТЕПЕНЬ

Не касаясь общей техники вычисления различных групп гомологий и когомологий, рассмотрим некоторые частные случаи.

Согласно определению, не существует нульмерных кограниц. Поэтому нульмерная группа когомологий совпадает с группой коциклов. Но 0-форма есть просто функция, а 0-коцикл есть такая функция f, что $df \equiv 0$, т. е. локально постоянная функция. Таким образом, $H^0(M)$ является пространством всех локально постоянных вещественных функций на M. Поскольку любая локально постоянная функция постоянна на связных компонентах многообразия M, мы можем написать $H^0(M) \cong R^{\mathrm{Co}(M)}$, где $\mathrm{Co}(M)$ есть множество компонент в M. В частности, если M связно, то $H^0(M) \cong R$.

Функция f является компактным коциклом, если она локально постоянна и $\operatorname{supp} f$ компактен. Это означает, что $f \equiv 0$ на некомпактных компонентах многообразия M. Поэтому $H_c^0(M) \cong R^{\mathrm{cCo}(M)}$, где $\mathrm{cCo}(M)$ есть множество компактных компонент многообразия M. В частности, если M связно, то $H_c^0(M) \cong R$ для компактного многообразия M и $H_c^0(M) = 0$ для некомпактного M.

Мы можем также вычислить[1]) $H^p(B_r^n)$ для всех p. Именно, справедлива

Теорема 4.1 (лемма Пуанкаре). *Пусть* ω — *форма степени* $k \geqslant 1$, *определенная на* B_r^n, *и пусть* $d\omega = 0$. *Тогда существует такая форма* Ω, *определенная на* B_r^n, *что* $d\Omega = \omega$.

Мы докажем теорему индукцией по размерности n. Для $n = 1$ можно считать $k = 1$; все другие случаи тривиальны. Если $\omega = f(x)\,dx$, то достаточно положить $\Omega = g$, где $g(x) = \int\limits_0^x f(t)\,dt$.

Сделаем теперь следующее замечание:

Лемма 4.1. *Если* $\partial/\partial x^n \lrcorner\, \omega = 0$ *и* $d\omega = 0$, *то* $\omega = \sum a_{i_1, \ldots, i_k} dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}$, *где* $i_k < n$ *и* $\partial a_{i_1, \ldots, i_k}/\partial x^n = 0$.

Действительно,

$$d\omega = (-1)^k \sum \frac{\partial a_{i_1, \ldots, i_k}}{\partial x^n} dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k} \wedge dx^n + \ldots,$$

где остальные члены не содержат dx^n.

Перейдем к доказательству теоремы. Пусть $y^1, \ldots, y^{n-1}$ — декартовы координаты в B_r^{n-1}, и пусть $i\colon B_r^{n-1} \to B_r^n$ — отображение, задаваемое формулами

$$x^j(y^1, \ldots, y^{n-1}) = y^j, \qquad 1 \leqslant j \leqslant n-1,$$
$$x^n(y^1, \ldots, y^{n-1}) = 0,$$

---

[1]) Напомним, что B_r^n есть шар радиуса r в E^n.

где $x^1, \ldots, x^n$ — декартовы координаты в B_r^n. Тогда $i^*(\partial x^j) = dy^j$ для $1 \leqslant j \leqslant n-1$ и $i^*(dx^n) = 0$. Пусть p — отображение шара B_r^n на B_r^{n-1}, определяемое формулой

$$y^i(x^1, \ldots, x^n) = x^i \quad \text{для} \quad 1 \leqslant i \leqslant n-1.$$

Имеем $d(i^*(\omega)) = i^*(d\omega) = 0$. По предположению индукции $i^*(\omega) = d(\Omega')$ для некоторой формы Ω' на B_r^{n-1}. Положим $\omega = \omega_1 + dx^n \wedge \omega_2$, где ω_1 и ω_2 — формы от $dx^1, \ldots, dx^{n-1}$. Определим форму Ω следующими условиями:

1) $i^*(\Omega) = \Omega'$,

2) $\frac{\partial}{\partial x^n} \lrcorner\, \Omega = 0$,

3) $\frac{\partial}{\partial x^n} \lrcorner\, d\Omega = \omega_2$.

В терминах координат $(x^1, \ldots, x^n)$ условие 2) означает, что форма Ω может быть записана в виде

$$\Omega = \sum_{i_1 < \ldots < i_{k-1}} a_{i_1, \ldots, i_{k-1}} dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_{k-1}}, \qquad i_{k-1} \leqslant n-1.$$

Условие 1) означает, что

$$\sum a_{i_1, \ldots, i_{k-1}} (y^1, \ldots, y^{n-1}, 0)\, dy^{i_1} \wedge \ldots \wedge dy^{i_{k-1}} = \Omega'.$$

Условие 3) означает, что

$$\frac{\partial a_{i_1, \ldots, i_{k-1}}}{\partial x^n} = b_{i_1, \ldots, i_{k-1}},$$

если $\omega_2 = \sum b_{i_1, \ldots, i_{k-1}} dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_{k-1}}$. Отсюда видно, что существует единственная форма Ω, удовлетворяющая условиям 1), 2), 3), которая может быть найдена с помощью интегрирования по x^n. Мы утверждаем, что $d\Omega = \omega$. Действительно, $d\Omega - \omega = d\Omega - dx^n \wedge \omega_2 - \omega_1$. Но

$$d\Omega - dx^n \wedge \left(\frac{\partial}{\partial x^n} \lrcorner\, d\Omega\right)$$

есть дифференциальная форма, не содержащая dx^n. Поэтому

$$d\Omega - \omega = dx^n \wedge \left(\frac{\partial}{\partial x^n} \lrcorner\, d\Omega\right) - dx^n \wedge \omega_2 + \Omega_1 = \Omega_1,$$

где Ω_1 не зависит от dx^n. Поскольку $d(d\Omega - \omega) = 0$, мы можем применить лемму 4.1. Таким образом,

$$d\Omega - \omega = \sum d_{i_1, \ldots, i_k} dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k},$$

где $i_k \leqslant n-1$ и $\partial d_{i_1, \ldots, i_k}/\partial x^n = 0$. С другой стороны,

$$\sum d_{i_1, \ldots, i_k}(y^1, \ldots, y^{n-1}, 0)\, dy^{i_1} \wedge \ldots \wedge dy^{i_k} = i^*(d\Omega - \omega) = \\ = d(i^*(\Omega)) - \omega = d\Omega' - \omega = 0$$

Значит,

$$d_{i_1, \ldots, i_k}(x^1, \ldots, x^{n-1}, 0) = 0$$

и $d_{i_1, \ldots, i_k}(x^1, \ldots, x^n) = 0$. Другими словами, $d\Omega - \omega = 0$, что и доказывает теорему 3.1.

Следствие 4.1. *$H^p(B_r^n) = 0$ для $p \geqslant 1$.*

В доказательстве теоремы 3.1 коэффициенты формы Ω получаются из коэффициентов формы ω интегрированием. Поэтому если коэффициенты формы ω дифференцируемо зависят от некоторых дополнительных параметров, то форма Ω также дифференцируемо зависит от этих параметров.

Следствие 4.2. *Если в теореме 3.1 форма ω дифференцируемо зависит от некоторых параметров, т. е.*

$$\omega = \sum a_{i_1, \ldots, i_k}(x^1, \ldots, x^n;\ z^1, \ldots, z^l)\, dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k},$$

где $a_{i_1, \ldots, i_k}$ — дифференцируемые функции от $x^1, \ldots, x^n, z^1, \ldots, z^l$ и $d\omega = 0$ (оператор d берется по x^i), то $\omega = d\Omega$, где

$$\Omega = \sum b_{i_1, \ldots, i_{k-1}}(x^1, \ldots, x^n;\ z^1, \ldots, z^l)\, dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_{k-1}},$$

причем $b_{i_1, \ldots, i_{k-1}}$ — дифференцируемые функции всех $n+l$ переменных.

Мы хотим теперь вычислить $H_c^n(M)$ для любого многообразия M.

Лемма 4.2. *Пусть ω — такая n-форма, определенная на E^n, что*

1) $\operatorname{supp} \omega \subset D_r^n$, *где D_r^n — куб* $\{x \mid |x_i| < r\}$,
2) $\int_{E^n} \omega = 0$.

Тогда мы можем найти такую $(n-1)$-форму Ω, что

3) $\operatorname{supp} \Omega \subset D_r^n$,
4) $d\Omega = \omega$.

Доказательство проведем с помощью индукции. Для этого мы должны несколько усилить индуктивное предположение. Для любой k-формы π, выраженной через $dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}$, обозначим символом $|\pi|_r^n$ максимум абсолютных значений ее коэффициентов в D_r^n. Мы будем говорить, что семейство форм π_t дифференцируемо зависит от t, если каждый коэффициент есть дифференцируемая функция от $x^1, \ldots, x^n, t$. Здесь t обозначает s-мерный параметр, $t = (t_1, \ldots, t_s)$. Наше индуктивное предположение состоит в следующем:

Пусть ω_t — семейство форм на E^n, дифференцируемо зависящее от t. Предположим, что для каждого значения t форма ω_t удовлетворяет условиям 1) и 2). Тогда существует такое дифференцируемое семейство форм Ω_t, удовлетворяющих условию 3), что $d\Omega_t = \omega_t$ и

5) $|\Omega_t|_r^n < K_r^n |\omega_t|_r^n$,

где K_r^n зависит только от n и r.

Для $n=1$ мы можем написать $\omega_t = f_t(\cdot)\, dx^1$. Определим функцию Ω_t равенством

$$\Omega_t(x) = \int_{-r}^{x} f_t(y^1)\, dy^1.$$

Очевидно, что Ω_t есть дифференцируемое семейство 0-форм, удовлетворяющих условиям 3), 4) и 5).

Допустим, что предположение индукции выполнено для $n-1$. Пусть

$$\omega_t = f_t\, dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n,$$

и пусть

$$\pi = \varphi(y^1, \ldots, y^{n-1})\, dy^1 \wedge \ldots \wedge dy^{n-1}$$

есть положительная форма на E^{n-1}, такая, что $\operatorname{supp}\pi \subset D_r^{n-1}$ и $\int_{E^{n-1}} \pi = 1$. Рассмотрим формы $\pi_{x^n, t}$ на E^{n-1} (зависящие от параметров x^n, t), определяемые формулой

$$\begin{aligned}\pi_{x^n, t} &= f_t(\ldots, x^n)\, dy^1 \wedge \ldots \wedge dy^{n-1} - \\ &- \left(\int_{E^{n-1}} f_t(y^1, \ldots, y^{n-1}, x^n)\, dy^1 \ldots dy^{n-1}\right)\pi = \\ &= \left[f_t(\cdot, x^n) - \left(\int_{E^{n-1}} f(y^1, \ldots, y^{n-1}, x^n)\, dy^1 \ldots dy^{n-1}\right)\varphi\right] \times \\ &\times dy^1 \wedge \ldots \wedge dy^{n-1}. \qquad (4.1)\end{aligned}$$

Они образуют дифференцируемое семейство $(n-1)$-форм, удовлетворяющее предположению индукции. Кроме того, $\pi_{x^n, t} = 0$, если $|x^n| > r$. Поэтому мы можем написать

$$\pi_{x^n,\, t} = d\Omega_{x^n,\, t}. \tag{4.2}$$

Пусть

$$\Omega_{x^n,\, t} = \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i g_t(\cdot,\, x^n)\, dy^1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dy^i} \wedge \ldots \wedge dy^{n-1},$$

где $g_t(\cdot,\ \cdot)$ — дифференцируемые функции на E^n. Определим форму Ω_t' равенством

$$\Omega_t' = \sum (-1)^i g_{t,\, i}\, dx^1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \ldots \wedge dx^{n-1},$$

так что $\iota_{x^n}^* \Omega_t' = \Omega_{t,\, x^n}$, где $\iota_{x_0^n}^*$ есть вложение $E^{n-1} \to E^n$, заданное формулами

$$x^i = y^i, \qquad i \leqslant n-1,$$
$$x^n = x_0^n.$$

При вычислении формы $d\Omega_t'$ встретятся два типа членов: содержащие частные производные по x^i $(i \leqslant n-1)$ и содержащие частную производную по x^n. Умножением на dx^n мы избавимся от членов, содержащих dx^n, и, значит, для каждого значения x^n будем иметь

$$d(\Omega_t' \wedge dx^n) = (p^* d\Omega_{x^n,\, t}) \wedge dx^n = (p^* \pi_{x^n,\, t}) \wedge dx^n,$$

где p есть проекция $E^n \to E^{n-1}$ вдоль x^n. Положим

$$F(x^n) = \int_{-r}^{x^n} \left(\int_{E^{n-1}} f_t(y^1,\ \ldots,\ y^{n-1},\ z)\, dy \right) dz.$$

Тогда

$$dF(x^n) = \left(\int_{E^{n-1}} f_t(y^1,\ \ldots,\ y^{n-1},\ x^n)\, dy \right) dx^n.$$

Положим

$$\Omega_t = \Omega_t' \wedge dx^n + (-1)^n F p^*(\pi). \tag{4.3}$$

Имеем

$$d\Omega_t = d(\Omega_t' \wedge dx^n) + (-1)^{n-1} dF \wedge p^*(\pi) + F p^*(d\pi).$$

Но $d\pi = 0$, поскольку π есть $(n-1)$-форма на E^{n-1}. Поэтому

$$d\Omega_t = d(\Omega_t' \wedge dx^n) + (-1)^{n-1} dF \wedge p^*(\pi) =$$
$$= p^*(\pi_{x^n,\, t}) \wedge dx^n + p^*(\pi) \wedge \left(\int_{E^{n-1}} f_t(y^1, \ldots, y^{n-1}, x^n)\, dy \right) dx^n. \tag{4.4}$$

Далее, формы π и $\Omega_{x^n,\, t}$, а значит, и форма Ω_t обращаются в нуль при $|x^i| > r$ $(i = 1,\ \ldots,\ n-1)$. Если $x^n < -r$ или $x^n > r$, то последний интеграл также обращается в нуль, поскольку

$$\int_{-r}^{r}\int_{E^n} f_{t_1,\ldots,t_s}(y^1,\ldots,y^{n-1},z)\,dy^1\ldots dy^{n-1}\,dz=\int_{E^n}\omega_{t_1,\ldots,t_s}=0.$$

Форма $\Omega_{x^n,t}$ обращается в нуль, если $|x^n|>r$, так как по индуктивному предположению 5)

$$|\Omega_{x^n,t}|_r^{n-1}\leqslant K\,|f_{t_1,\ldots,t_s}(\ldots,x^n)|_r^{n-1}=0 \quad \text{при} \quad |x^n|>r.$$

Наконец, формы, встречающиеся в правой части формулы (4.3), очевидно, образуют дифференцируемое семейство форм и удовлетворяют оценке 5), где K_r^n зависят от K_r^{n-1} и от выбора φ. Лемма доказана. С помощью леммы 4.2 доказывается

Лемма 4.3. *Если M — связное n-мерное многообразие, то $H_c^n(M)$ есть либо R, либо $\{0\}$ (т. е. $H_c^n(M)$ не более чем одномерно).*

Пусть $\{(U_i,h_i)\}$ — такой атлас на M, что каждая окрестность U_i имеет вид $h_i^{-1}(D_1^n)$. Пусть Ω — такая n-форма, что $\operatorname{supp}\Omega\subset U_1$ и $\int_{E^n} h_1^*(\Omega)\neq 0$. Лемма будет доказана, если для любой n-формы ω с компактным носителем мы найдем такое вещественное число c, что

$$\omega-c\Omega=d\omega^*, \tag{4.5}$$

где ω^* есть $(n-1)$-форма с компактным носителем. Пусть $\{\varphi_i\}$ — разбиение единицы, подчиненное покрытию $\{U_i\}$. Тогда $\omega=\sum\varphi_i\omega$ — конечная сумма, и достаточно провести доказательство для каждого слагаемого в отдельности. Поэтому можно считать, что $\operatorname{supp}\omega\subset U_j$ для некоторого j. Пусть p — точка из U_1, а q — из U_j. Пусть $C(t)$ — такая кривая, что $C(0)=p$ и $C(1)=q$. Покроем $C(t)$ конечным числом окрестностей U_i. Изменив, если потребуется, их нумерацию, мы можем считать, что это окрестности $U_1,\ldots,U_j$, причем $U_i\cap U_{i-1}\neq\varnothing$. Пусть ω_i $(i=1,\ldots,j-1)$ — такие формы, что

$$\operatorname{supp}\omega_i\subset U_i\cap U_{i-1},$$
$$\int_{E^n} h_i^*(\omega_{i-1})\neq 0.$$

Положим $\Omega=\omega_0$, $\omega=\omega_j$. Рассмотрим формы $h_i^*(\omega_i)$ и $h_i^*(\omega_{i-1})$ на E^n с носителями в D_1^n. Поскольку $\int_{E^n} h_i^*(\omega_{i-1})\neq 0$, существуют константы

$$c_i = -\left(\int\limits_{E^n} h_i^*(\omega_i) \Big/ \int\limits_{E^n} h_i^*(\omega_{i-1})\right)$$

такие, что

$$\int\limits_{E^n} h_i^*(\omega_i - c_i\omega_{i-1}) = 0.$$

По лемме 4.2

$$h_i^*(\omega_i - c_i\omega_{i-1}) = d\omega_i^{**}, \tag{4.6}$$

причем $\operatorname{supp}(\omega_i^{**}) \subset D_1^n$. Форма $(h_i^{-1})^*\omega_i^{**}$ определена в U_i и имеет носитель в U_i. Определим на M форму ω_i^*, полагая $\omega_i^* = 0$ вне U_i и $\omega_i^* = (h_i^{-1})^*\omega_i^{**}$ на U_i. Тогда равенство (4.6) можно переписать в виде

$$\omega_i - c_i\omega_{i-1} = d\omega_i^*. \tag{4.7}$$

Складывая с подходящими весами равенства (4.7) при $i = 1, \ldots, j$, мы получим равенство (4.5), где

$$c = c_j + c_jc_{j-1} + \ldots + c_j \ldots c_0,$$
$$\omega^* = \omega_j^* + c_{j-1}\omega_{j-1}^* + \ldots + c_{j-1} \ldots c_0\omega_0^*.$$

Теорема 4.2. *Если M — связное ориентированное n-мерное многообразие, то $H_c^n(M) \cong R$. Пусть M_1 и M_2 — связные ориентированные n-мерные многообразия и f — собственное дифференцируемое отображение $M_1 \to M_2$. Существует такое целое число, называемое степенью отображения f и обозначаемое* $\deg f$, *что*

$$\int\limits_{M_1} f^*\omega = \deg f \int\limits_{M_2} \omega \tag{4.8}$$

для любой n-формы ω с компактным носителем на M_2. Для любого регулярного значения $y \in M_2$ имеем

$$\deg f = \sum_{x \in f^{-1}(y)} \operatorname{sign} J_x(f) \qquad [= 0, \quad \text{если} \quad f^{-1}(y) = \varnothing], \tag{4.9}$$

где $\operatorname{sign} J_x(f)$ *есть знак якобиана отображения f относительно положительных (в смысле заданных ориентаций) систем координат вблизи точек x и y.*

Доказательство. Согласно лемме 4.3, пространство $H_c^n(M)$ либо одномерно, либо нульмерно. По теореме 3.5 отображение $\omega \to \int\limits_M \omega$ переводит точные формы в нуль и, значит, индуцирует гомоморфизм пространства $H_c^n(M)$ в вещественную прямую. Поскольку $\int\limits_M \omega > 0$ для положительной формы ω, этот гомоморфизм нетривиален и, следовательно, является изоморфизмом.

Отображение $f^*\colon \bigwedge^n(M_2) \to \bigwedge^n(M_1)$ есть гомоморфизм, переводящий точные формы в точные. Поэтому отображение $\omega \to \to \int\limits_{M_1} f^*(\omega)$ является гомоморфизмом пространства $H_c^n(M_2)$ в вещественную прямую. Поскольку $H_c^n(M_2)$ одномерно, этот гомоморфизм кратен изоморфизму $\omega \to \int\limits_{M_2} \omega$. Таким образом, мы доказали формулу (4.8), но пока не знаем, что $\deg f$ — целое число. Мы покажем, что это так, проверив равенство (4.9). Заметим, что сумма в формуле (4.9) конечна: отображение f собственное, так что множество $f^{-1}(y)$ компактно. С другой стороны, $f^{-1}(y)$ не содержит критических точек и, значит, дискретно. Регулярные значения существуют, поскольку по теореме Сарда множество критических значений имеет меру нуль. Пусть y — регулярное значение и W — компактная окрестность точки y. Для каждого $x \in f^{-1}(y)$ выберем такую открытую окрестность $U_x \subset f^{-1}(W)$ точки x, что f регулярно во всех точках U_x и $U_{x_1} \cap U_{x_2} = \varnothing$ (это можно сделать, поскольку функция f непрерывна и множество регулярных точек открыто). Множество

$$V = f^{-1}(W) - \bigcup_{x \in f^{-1}(y)} U_x$$

компактно, причем $f(V) \subset W$ и $y \notin f(V)$. Поскольку образ компактного множества при непрерывном отображении компактен, $f(V)$ — компактное подмножество в W. Пусть $U \subset W - f(V)$ — координатная окрестность точки y. Имеем

$$f^{-1}(U) \subset \bigcup U_x \qquad (f^{-1}(U) = \varnothing, \qquad \text{если } f^{-1}(y) = \varnothing).$$

Рассмотрим положительную форму ω на M_2, такую, что $\operatorname{supp}\omega \subset U$. Тогда $\operatorname{supp} f^*(\omega) \subset \bigcup U_x$. Поэтому мы имеем

$$\int\limits_{M_1} f^*(\omega) = \sum_{x \in f^{-1}(y)} \int\limits_{U_x} f^*(\omega). \tag{4.10}$$

Если теперь $y^1, \ldots, y^n$ — положительная система координат на U, то $y^1 \circ f, \ldots, y^n \circ f$ — положительная или отрицательная система координат на $f^{-1}(U) \cap U_x$ в зависимости от знака якобиана отображения f в точке x. Поэтому

$$\int\limits_{f^{-1}(U) \cap U_x} f^*(\omega) = \operatorname{sign} J_x(f) \int\limits_U \omega. \tag{4.11}$$

Из формул (4.10) и (4.11) следует формула (4.9), и теорема доказана.

Понятие степени очень полезно для получения различной информации об отображениях. Мы проиллюстрируем его применение на некоторых теоремах, которые нам понадобятся позднее.

Теорема 4.3. *Пусть M_1 и M_2 — ориентированные n-мерные многообразия, причем M_2 связно. Пусть f — собственное дифференцируемое отображение $M_1 \to M_2$. Предположим, что*

$$J_x(f) \geqslant 0 \text{ для всех } x \in M_1. \tag{4.12}$$

Тогда либо $J_x(f) \equiv 0$, либо $f(M_1) = M_2$.

Заметим, что (4.12) имеет смысл. Значение якобиана $J_x(f)$ зависит от выбора локальных координат на M_1 и M_2, однако его знак зависит только от ориентации M_1 и M_2. При доказательстве теоремы мы можем считать многообразие M_1 связным. В противном случае мы просто можем доказывать теорему для каждой связной компоненты многообразия M_1: либо $J_x(f) \equiv 0$ на всех компонентах, т. е. на M_1, либо $f(M) = M_2$ для некоторой компоненты $M \subset M_1$. Далее, если M_1 связно, мы можем применить теорему 4.2. Если $f(M_1) \neq M_2$, то $\deg f = 0$, согласно формуле (4.9) [написанной для точки $y \notin f(M_1)$]. Но если $\deg f = 0$, то $J_x(f) \equiv 0$. Действительно, в противном случае $J_x(f) > 0$ в некоторой открытой окрестности $U \subset M_1$. Тогда $f(U)$ содержит открытое множество $V \subset M_2$. По теореме Сарда V имеет регулярную точку y. Но тогда $\deg f > 0$, согласно (4.9). Теорема доказана.

Упражнение 4.1. Пусть $z \to \rho(z)$ — полиномиальное отображение поля комплексных чисел в себя. Показать, что это отображение, рассматриваемое как отображение $E^2 \to E^2$, является собственным и удовлетворяет условию (4.12). Вывести из этого основную теорему алгебры: всякий непостоянный многочлен имеет корень. Показать, что степень этого отображения совпадает со степенью многочлена.

Сформулируем теперь слегка измененный вариант теоремы 4.3 для «относительных многообразий».

Теорема 4.4. *Пусть M_1 и M_2 — ориентированные n-мерные многообразия, а M — связное открытое подмногообразие в M_1, причем $\overline{M}$ компактно. Пусть f — дифференцируемое отображение $M \to M_2$, удовлетворяющее условию (4.12), которое продолжается до непрерывного отображения $\bar{f}\colon \overline{M} \to M_2$. Пусть $M' = \overline{M} - M$. Тогда если*

$$f(M) \cap \bar{f}(M') = \varnothing, \tag{4.13}$$

то либо

$$\text{граница } f(M) \text{ содержится в } \bar{f}(M'), \tag{4.14}$$

либо

$$J_x(f) \equiv 0 \quad в \quad M.$$

Доказательство. Согласно условию (4.13), f отображает M в открытое подмногообразие $M_2 - \bar{f}(M')$ многообразия M_2. Поскольку M связно, f отображает M в связную компоненту, скажем M_2^*, многообразия $M_2 - \bar{f}(M')$. Пусть $K \subset M_2^*$ — компактное подмножество. Тогда $\bar{f}^{-1}(K)$ — замкнутое подмножество из $\bar{M}$ и, значит, тоже компактно. Так как $\bar{f}^{-1}(K) \cap M' = \varnothing$, то $f^{-1}(K)$ есть компактное подмножество в M. Значит, f — собственное отображение $M \to M_2^*$. Согласно теореме 4.3, если $J_x(f) \not\equiv 0$, то $f(M) = M_2^*$. Но тогда $\overline{f(M)} - f(M) = \overline{M_2^*} - M_2^* \subset \subset \bar{f}(M')$.

Упражнение 4.2. На n-мерном торе T^n формы $d\theta^1, \ldots, d\theta^n$ (где $\theta^1, \ldots, \theta^n$ — угловые координаты, определенные по модулю 2π) корректно определены и независимы. Поэтому любая k-форма представима в виде

$$\sum a_{i_1, \ldots, i_k} d\theta^{i_1} \wedge \ldots \wedge d\theta^{i_k},$$

где $a_{i_1, \ldots, i_k}$ — функции от $\theta^1, \ldots, \theta^n$, периодические с периодом 2π по всем переменным. Пользуясь этим, показать, что классы когомологий форм $d\theta^{i_1} \wedge \ldots \wedge d\theta^{i_r}$ образуют базис пространства $H^r(T^n)$.

§ 5. ТЕОРЕМА ФРОБЕНИУСА

Как мы уже видели в главе II, векторное поле X на многообразии M определяет, по крайней мере локально, некоторый поток, т. е. однопараметрическую группу преобразований. Если мы заменим X на fX, где f — дифференцируемая функция, то новый поток будет иметь те же траектории, что и старый; изменится только его «скорость» вдоль каждой траектории. Таким образом, траектория определяется скорее полем «прямых», чем полем векторов. Мы можем рассмотреть более общий объект — поле «p-мерных подпространств».

Чтобы дать точное определение этого понятия, заметим, что группа $GL(n)$ действует слева на многообразии $\mathcal{G}(p, E^n)$, где $\mathcal{G}(p, E^n)$ — множество всех p-мерных подпространств из E^n [см. пример 6 § 1 гл. II]. Обозначим многообразие величин типа $\mathcal{G}(p, E^n)$ над M через $\mathcal{G}^p(M)$. Так же, как в гл. II, мы можем отождествить $\mathcal{G}^p(M)$ с множеством всех p-мерных подпространств векторных пространств $T_x(M)$, $x \in M$. Поэтому поле типа

$\mathcal{G}(p, E^n)$ можно рассматривать как поле p-мерных подпространств. Мы назовем такое поле *дифференциальной системой размерности* p.

Определение 5.1. Пусть $\mathcal{D}$ — дифференциальная система размерности p на M. Подмногообразие $N \subset M$ называется *интегральным многообразием системы* $\mathcal{D}$, если

$$\iota_*(T_x(N)) \subset \mathcal{D}[\iota(x)] \tag{5.1}$$

для всех $x \in N$, где ι — вложение $N \to M$.

Заметим, что $\mathcal{D}[\iota(x)]$ есть подпространство в $T_{\iota(x)}(M)$, так же как $\iota_*(T_x(N))$, поэтому формула (5.1) имеет смысл. Следовательно, интегральное многообразие не более чем p-мерно.

Определение 5.2. Дифференциальная система $\mathcal{D}$ размерности p называется *вполне интегрируемой*, если в окрестности каждой точки $x \in M$ существует такая карта (U, h), $h = (x^1, \ldots, x^n)$, что все подмногообразия из U, задаваемые уравнениями

$$x^{p+1} = \text{const}, \qquad x^{p+2} = \text{const}, \ldots, x^n = \text{const},$$

являются интегральными многообразиями системы $\mathcal{D}$.

Упражнение 5.1. Пусть $\mathcal{D}$ — вполне интегрируемая система и U — окрестность, фигурирующая в определении 5.2. Показать, что любое связное интегральное многообразие системы $\mathcal{D}$, лежащее в U, является подмногообразием одного из многообразий определения 5.2.

Следующее упражнение будет использовано в дальнейшем.

Упражнение 5.2. Пусть $\mathcal{D}$ — вполне интегрируемая дифференциальная система размерности p на многообразии M. Пусть N есть p-мерное интегральное многообразие системы $\mathcal{D}$. Предположим, что φ — дифференцируемое отображение связного многообразия K в M, причем $\varphi(K) \subset N$. Показать, что φ есть дифференцируемое отображение многообразия K в N.

Цель настоящего параграфа — сформулировать критерий полной интегрируемости дифференциальной системы. Прежде чем это сделать, заметим, что дифференциальную систему можно задавать различными способами. Если $X_1, \ldots, X_p$ — набор p векторных полей, линейно независимых в каждой точке $x \in M$, то, как легко проверить, отображение $x \to \{a_1 (X_1)_x + \ldots + a_p (X_p)_x \mid a_1, \ldots, a_p \in R\}$ является дифференциальной системой. Аналогично, если $\omega^{p+1}, \ldots, \omega^n$ — набор $n-p$ линейных дифференциальных форм, линейно независимых в каждой точке $x \in M$, то отображение $x \to \{X_x \in T_x(M) \mid \langle \omega^i_x, X_x \rangle = 0\}$ является дифференциальной системой. На практике большинство дифференциальных систем задается одним из этих способов. Локально каждая дифференциальная система может быть задана любым из этих способов.

Действительно, пусть $\mathscr{D}$ — дифференциальная система размерности p. Выберем вблизи точки x координаты $x^1, \ldots, x^n$ так, чтобы векторы $(\partial/\partial x^1)_x, \ldots, (\partial/\partial x^p)_x$ порождали пространство $\mathscr{D}(x)$. [Это всегда можно сделать: достаточно взять произвольную систему координат и применить к ней подходящее линейное преобразование.] Тогда ограничение формы $(dx^1)_x \wedge \ldots \wedge (dx^p)_x$ на $\mathscr{D}(x)$ отлично от нуля. По непрерывности из этого следует, что $(dx^1)_y \wedge \ldots \wedge (dx^p)_y \mid \bigwedge^p \mathscr{D}(y) \neq 0$, если точка y достаточно близка к x. В такой окрестности линейные формы $(dx^1)_y \mid \mathscr{D}(y), \ldots, (dx^p)_y \mid \mathscr{D}(y)$ линейно независимы. Поэтому существуют функции a^α_β (дифференцируемые, поскольку система $\mathscr{D}$ дифференцируема), такие, что

$$(dx^\alpha)_y \mid \mathscr{D}(y) = \sum_{\beta=1}^{p} a^\alpha_\beta (dx^\beta)_y \mid \mathscr{D}(y), \qquad \alpha = p+1, \ldots, n.$$

Таким образом, $n-p$ линейно независимых форм

$$dx^\alpha - \sum a^\alpha_\beta \, dx^\beta$$

обращаются в нуль на $\mathscr{D}(y)$ и тем самым определяют подпространство $\mathscr{D}(y)$. Эти формы аннулируют p векторных полей

$$\frac{\partial}{\partial x^\beta} + \sum_{\alpha=p+1}^{n} a^\alpha_\beta \frac{\partial}{\partial x^\alpha},$$

которые линейно независимы и, значит, в свою очередь, порождают систему $\mathscr{D}$[1]). Таким образом, система $\mathscr{D}$ локально может быть задана любым из указанных способов.

Определение 5.3. Пусть $\mathscr{D}$ — дифференциальная система. Через $\mathscr{V}(\mathscr{D})$ мы обозначим множество всех таких векторных полей X, что $X(y) \in \mathscr{D}(y)$ для всех $y \in M$. Если $X \in \mathscr{V}(\mathscr{D})$, то мы будем говорить, что *поле X принадлежит системе $\mathscr{D}$*. Через $\mathscr{J}(\mathscr{D})$ мы обозначим множество таких дифференциальных форм Ω, что Ω_y обращается в нуль на $\mathscr{D}(y)$ для всех $y \in M$.

Для любого линейного пространства V векторных полей мы можем рассмотреть подпространство $\mathscr{D}(y) = \{X(y) \mid X \in V\}$ при каж-

[1]) То есть для каждой точки y некоторой окрестности точки x векторы $\left(\frac{\partial}{\partial x^\beta} + \sum_{\alpha=p+1}^{n} a^\alpha_\beta \frac{\partial}{\partial x^\alpha}\right)$, $\beta = 1, \ldots, p$, порождают подпространство $\mathscr{D}(y)$. — *Прим. перев.*

дом $y \in M$. Если $\dim \mathscr{D}(y) = \mathrm{const}$, то мы получим дифференциальную систему $\mathscr{D}$, причем $V \subset \mathscr{V}(\mathscr{D})$. Предыдущие рассуждения показывают, что любая система $\mathscr{D}$ получается из пространства $V = \mathscr{V}(\mathscr{D})$ подобным образом. Поэтому мы можем выразить наши условия полной интегрируемости в терминах пространства $\mathscr{V}(\mathscr{D})$. Предположим, что $\mathscr{D}$ есть p-мерная система, а $X_1, \ldots, X_p$ — векторные поля, определенные на открытом множестве U. Мы скажем, что поля X_i порождают $\mathscr{V}(\mathscr{D})$ на U, если $X_i \in \mathscr{V}(\mathscr{D})$ и любое поле $X \in \mathscr{V}(\mathscr{D})$ представимо на U в виде $X = \sum_{i=1}^{p} f_i X_i$, где f_i — дифференцируемые функции.

Теорема 5.1 (теорема Фробениуса, первый вариант). *Пусть $\mathscr{D}$ — дифференциальная система размерности p на n-мерном многообразии M. Система $\mathscr{D}$ вполне интегрируема тогда и только тогда, когда $\mathscr{V}(\mathscr{D})$ есть алгебра Ли, т. е. $[X, Y] \in \mathscr{V}(\mathscr{D})$, если $X \in \mathscr{V}(\mathscr{D})$ и $Y \in \mathscr{V}(\mathscr{D})$. Так, если $X_1, \ldots, X_p$ порождают $\mathscr{V}(\mathscr{D})$ на U, то система вполне интегрируема тогда и только тогда, когда существуют такие функции C^i_{jk} на U, что*

$$[X_j, X_k] = \sum_{i=1}^{p} C^i_{jk} X_i. \tag{5.2}$$

Необходимость почти очевидна. Действительно, заметим сначала, что функции C^i_{jk} определены формулой (5.2) однозначно, поскольку поля X_i линейно независимы в каждой точке. Поэтому достаточно доказать их существование в окрестности каждой точки из U. Если система $\mathscr{D}$ вполне интегрируема, то любая точка x покрывается картой, описанной в определении 5.2, и в терминах этой карты система $\mathscr{D}$ порождается на всем U полями $\partial/\partial x^1, \ldots, \partial/\partial x^p$. Поэтому мы можем найти такие функции a_{ik} и b_{il}, что

$$X_i = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} \frac{\partial}{\partial x^k} \quad \text{и} \quad \frac{\partial}{\partial x^i} = \sum b_{il} X_l.$$

Тогда

$$[X_i, X_j] = \left[\sum_l a_{il} \frac{\partial}{\partial x^l}, \sum_m a_{jm} \frac{\partial}{\partial x^m} \right] =$$

$$= \sum_{h, m} \left(\frac{\partial a_{ih}}{\partial x^m} a_{jm} - \frac{\partial a_{jh}}{\partial x^m} a_{im} \right) \frac{\partial}{\partial x^h} =$$

$$= \sum_{h, k, m} b_{hk} \left(\frac{\partial a_{ih}}{\partial x^m} a_{jm} - \frac{\partial a_{jh}}{\partial x^m} a_{im} \right) X_k,$$

что доказывает существование функций C^i_{jk}.

При доказательстве достаточности мы снова можем ограничиться локальным рассмотрением. Для $p = 1$ теорема сводится к теореме существования решений обыкновенных дифференциальных уравнений. Действительно, для данного векторного поля X, согласно этой теореме существования, мы всегда можем ввести локальные координаты $y^1, \ldots, y^n$, в которых поле X имеет вид $\partial/\partial y^1$. Мы докажем теорему 5.1 индукцией по p. Пусть $x \in M$ и $X_1, \ldots, X_p$ — векторные поля, определенные в некоторой окрестности $V \ni x$, удовлетворяющие условию (5.2) и порождающие $\mathscr{V}(\mathscr{D})$. Введем координаты $y^1, \ldots, y^n$, в которых $X_1 = \partial/\partial y^1$ и $y^1(x) = 0$. Положим $f_i = X_i y^1$ и

$$Y_1 = X_1, \qquad Y_i = X_i - f_i X_1, \qquad i = 2, \ldots, p.$$

Векторные поля Y_i линейно независимы и, значит, порождают $\mathscr{V}(\mathscr{D})$. Кроме того,

$$Y_i y^1 = 0 \quad \text{для} \quad i > 1. \tag{5.3}$$

Рассмотрим подмногообразие $W \subset V$, определяемое уравнением $y^1 = 0$. Из (5.3) следует, что векторные поля Y_i касательны к W, т. е. $Y_j(z) = \iota_*(Z_j(z))$ для всех $z \in W$, где Z_j $(j = 2, \ldots, p)$ — некоторые векторные поля на W. Действительно, пусть $z^2, \ldots, z^n$ — координаты на W, определенные формулой $z^j = y^j \mid W$. Тогда $\iota_*((\partial/\partial z^j)(z)) = (\partial/\partial y^j)(z)$, и если $Y_j = \sum\limits_2^n Y_j^k \partial/\partial y^k$, то поля Z_j определяются формулой $Z_j = \sum\limits_2^n Z_j^k \partial/\partial z^k$, где Z_j^k — ограничение функции Y_j^k на W.

Векторные поля Z_j удовлетворяют условию (5.2) (*где p заменено на p — 1*). Действительно, если бы вектор $[Z_i, Z_j](z)$ не лежал в пространстве, порожденном векторами $Z_2(z), \ldots, Z_p(z)$, то вектор $[Y_i, Y_j](z)$ не лежал бы в пространстве, порожденном $Y_j(z)$ $(j = 2, \ldots, n)$, поскольку у всех векторов Y_j $(j = 2, \ldots, n)$ коэффициент при $\partial/\partial y^1$ равен нулю. Таким образом, по предположению индукции мы можем найти такие координаты $w^2, \ldots, w^n$ в некоторой окрестности точки x на W, что многообразия $w^{p+1} = \text{const}, \ldots, w^n = \text{const}$ являются интегральными многообразиями дифференциальной системы, порожденной полями $Z_2, \ldots, Z_p$. Определим теперь координаты $x^1, \ldots, x^n$ вблизи x, полагая $x^1 = y^1$, $x^j(y^1, \ldots, y^n) = w^j(y^2, \ldots, y^n)$. Якобиан x по y отличен от нуля в точке x, поэтому x^i действительно образуют систему координат вблизи x. Кроме того, поскольку $\partial x^j/\partial y^1 = 0$ для $j \geqslant 2$, мы имеем $Y_1 = \partial/\partial y^1 = \partial/\partial x^1$. Далее,

$$Y_1 x^{p+r} = 0, \tag{5.4}$$

так что

$$\frac{\partial}{\partial x^1}(Y_i x^{p+r}) = Y_1(Y_i x^{p+r}) =$$
$$= Y_1(Y_i x^{p+r}) - Y_i(Y_1 x^{p+r}) =$$
$$= -[Y_i, Y_1]\, x^{p+r}.$$

Но поля Y_i удовлетворяют условию (5.2), т. е. существуют такие функции C^i_{jk}, что

$$[Y_i, Y_1] = C^1_{i1} Y_1 + \sum_{j=2}^{p} C^j_{i1} Y_j.$$

Учитывая (5.4), получаем

$$\frac{\partial}{\partial x^1}(Y_i x^{p+r}) = \sum_{j=2}^{p} C^j_{i1}(Y_j x^{p+r}), \qquad i = 2, \ldots, p. \tag{5.5}$$

При фиксированном r мы можем рассматривать (5.5) как однородную линейную систему $p-1$ дифференциальных уравнений относительно неизвестных функций $Y_i x^{p+r}$ от независимой переменной x^1. При $x^1 = 0$ мы имеем $Y_i x^{p+r} = Z_i w^{p+r} = 0$, т. е. система имеет нулевые начальные данные и, значит, по теореме единственности функции $Y_i x^{p+r}$ тождественно равны нулю. Поэтому векторные поля $Y_1, \ldots, Y_p$ выражаются через $\partial/\partial x^1, \ldots, \partial/\partial x^p$. Таким образом, $\partial/\partial x^1, \ldots, \partial/\partial x^p$ порождают $\mathscr{V}(\mathscr{D})$, т. е. система $\mathscr{D}$ вполне интегрируема.

Упражнение 5.3. Пусть $X_1, \ldots, X_p$ — всюду линейно независимые на M векторные поля. Показать, что если $[X_i, X_j] = 0$, то в окрестности каждой точки $x \in M$ существует локальная система координат $x^1, \ldots, x^n$, в которой $X_i = \partial/\partial x^i$ $(i = 1, \ldots, p)$.

Полезно сформулировать теорему 5.1 для случая, когда дифференциальная система задается не векторными полями, а дифференциальными формами. Ясно, что в определении 5.3 множество $\mathscr{J}(\mathscr{D})$ является идеалом в кольце дифференциальных форм и порождается формами степени единица.

Теорема 5.2 (теорема Фробениуса, второй вариант). *Пусть $\mathscr{D}$ — дифференциальная система размерности p на n-мерном многообразии M. Система $\mathscr{D}$ вполне интегрируема в том и только в том случае, когда $d\mathscr{J}(\mathscr{D}) \subset \mathscr{J}(\mathscr{D})$, т. е. когда $d\omega \in \mathscr{J}(\mathscr{D})$, если $\omega \in \mathscr{J}(\mathscr{D})$. Пусть $\omega^{p+1}, \ldots, \omega^n$ — линейные формы на открытом множестве U, порождающие $\mathscr{J}(\mathscr{D})$. Тогда предыдущее утверждение можно перефразировать, сказав, что система $\mathscr{D}$ вполне интегрируема тогда и только тогда, когда существуют такие* *функции* c^i_{jk}, *что*

$$d\omega^i = \sum_{j<k,\ p<k} c^i_{jk}\omega^j \wedge \omega^k. \tag{5.6}$$

Доказательство. Снова, поскольку утверждение локально, мы можем ограничиться рассмотрением окрестности, на которой существуют линейно независимые формы $\omega^1, \ldots, \omega^n$, последние $n-p$ из которых $\omega^{p+1}, \ldots, \omega^n$ порождают идеал $\mathcal{J}(\mathcal{D})$. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — векторные поля, определяющие в каждой точке y базис, дуальный базису $\omega^1_y, \ldots, \omega^n_y$. Поля $X_1, \ldots, X_p$ порождают систему $\mathcal{D}$, и по теореме 5.1 полная интегрируемость системы $\mathcal{D}$ эквивалентна выполнению условий (5.2). Но

$$\langle X_i \wedge X_j \mid d\omega^\alpha\rangle = X_i \langle X_j \mid \omega^\alpha\rangle - X_j \langle X_i \mid \omega^\alpha\rangle - \langle [X_i,\ X_j] \mid \omega^\alpha\rangle.$$

Для $i \leqslant p$, $j \leqslant p$, $\alpha > p$ первые два члена справа обращаются в нуль. Поэтому левая часть обращается в нуль тогда и только тогда, когда поле $[X_i,\ X_j]$ разлагается по $X_1, \ldots, X_p$, т. е. когда справедливо равенство (5.2). Но обращение в нуль выражений $\langle X_i \wedge X_j \mid d\omega^\alpha \rangle$ в точности эквивалентно равенству (5.6), что и доказывает теорему 5.2.

Предположим, что нам задан однородный идеал $\mathcal{J}$ кольца дифференциальных форм на дифференцируемом многообразии M, который не обязательно порождается линейными формами. Для каждой точки $x \in M$ идеал $\mathcal{J}$ определяет идеал $\mathcal{J}_x$ внешней алгебры $\bigwedge T^*_x(M)$. Согласно теореме 5.4 гл. I, каждому идеалу $\mathcal{J}_x \subset \bigwedge T^*_x(M)$ корректным образом сопоставляется подпространство пространства $T_x(M)$. Таким образом, исходя из идеала $\mathcal{J}$, мы можем сопоставить каждой точке $x \in M$ подпространство $\mathcal{D}(x)$ пространства $T_x(M)$. Оно порождается множеством векторов $X_x \in T_x(M)$, для которых $X \lrcorner \mathcal{J} \subset \mathcal{J}$. Однако при этом не всегда получается дифференциальная система: размерность пространства $\mathcal{D}(x)$ может изменяться от точки к точке. Мы назовем идеал $\mathcal{J}$ невырожденным, если отображение $x \to \mathcal{D}(x)$ является дифференциальной системой. Если идеал $\mathcal{J}$ невырожден, то мы назовем эту дифференциальную систему *характеристической системой* идеала $\mathcal{J}$.

Теорема 5.3 (Картан). *Пусть* $\mathcal{J}$ — *невырожденный идеал и* $d\mathcal{J} \subset \mathcal{J}$. *Тогда его характеристическая система вполне интегрируема.*

Пусть $X_1, \ldots, X_p$ — векторные поля, порождающие характеристическую систему идеала $\mathcal{J}$. Тогда $X_i \lrcorner \mathcal{J} \subset \mathcal{J}$. Если $\omega \in \mathcal{J}$, то из формулы (1.10) следует, что

$$[X_i,\ X_j] \lrcorner \omega = X_i \lrcorner (X_j \lrcorner d\omega) - X_i \lrcorner d(X_j \lrcorner \omega) - X_j \lrcorner d(X_i \lrcorner \omega).$$

Поскольку $d\mathcal{J} \subset \mathcal{J}$, все три члена правой части лежат в $\mathcal{J}$. Поэтому $[X_i, X_j] \lrcorner \mathcal{J} \subset \mathcal{J}$ и, значит, $[X_i, X_j]$ есть линейная комбинация полей $X_1, \ldots, X_p$, т. е. выполняется условие (5.2). Теорема 5.3 следует теперь из теоремы 5.1.

Первые три теоремы этого параграфа представляют собой чисто локальные теоремы существования. Обратимся теперь к проблеме нахождения глобальных решений. Пусть $\mathcal{D}$ — вполне интегрируемая дифференциальная система размерности p на многообразии M. Тогда существует покрытие многообразия M такими координатными окрестностями U_α, что p-мерные интегральные многообразия задаются в U_α равенствами $x_\alpha^{p+1} = \text{const}, \ldots$ $\ldots, x_\alpha^n = \text{const}$.

Предположим, что N есть связное интегральное многообразие в M. Более точно, N есть связное многообразие вместе с отображением $f\colon N \to M$, таким, что $f_* (T_x(N)) = \mathcal{D}(f(x))$ для всех $x \in N$. Любая точка $x \in N$ обладает такой окрестностью V, что $f(V) \subset U_\alpha$ для некоторого α. Тогда $f(V)$ содержится в подмножестве из U_α, выделяемом уравнениями $x_\alpha^{p+1} = \text{const}, \ldots, x_\alpha^n = \text{const}$. Пусть y — другая точка из N. Кривую C, соединяющую x с y, мы можем покрыть конечным числом окрестностей типа V. Таким образом, *x и y можно соединить конечной последовательностью кривых C_i* (причем $C_i(1) = C_{i+1}(0)$), *таких, что $f \circ C_i$ — одномерные интегральные многообразия системы $\mathcal{D}$.*

Теперь мы видим, как построить *максимальное* интегральное многообразие системы $\mathcal{D}$. Пусть x — точка из M, и пусть K — множество таких точек $y \in M$, для которых существует конечное число кривых $C_i\colon [0, 1] \to M$, удовлетворяющих условиям $C_1(0) = x$, $C_n(1) = y$, $C_{i+1}(0) = C_i(1)$ и являющихся одномерными интегральными многообразиями системы $\mathcal{D}$. Превратим K в дифференцируемое многообразие. Пусть $y \in K$. Тогда $y \in U_\alpha$ для некоторого α и множество точек $z \in U_\alpha$, удовлетворяющих уравнениям

$$x_\alpha^{p+1}(z) = x_\alpha^{p+1}(y), \quad \ldots, \quad x_\alpha^n(z) = x_\alpha^n(y),$$

также принадлежит K. Примем это множество за координатную окрестность точки y с координатами $x_\alpha^1, \ldots, x_\alpha^p$. [Мы предоставляем читателю в качестве упражнения проверить, что тем самым на K действительно определена структура дифференцируемого многообразия; в частности, необходимо проверить аксиому Хаусдорфа и аксиому счетности.] Из предыдущих рассуждений ясно, что любое связное интегральное многообразие системы $\mathcal{D}$, проходящее через точку x, отображается в некоторое подмножество из K. Таким образом, справедлива

Теорема 5.4. *Пусть $\mathscr{D}$ — вполне интегрируемая дифференциальная система на M. Через каждую точку $x \in M$ проходит максимальное связное интегральное многообразие K_x. Любое другое связное интегральное многообразие, проходящее через x, является подмногообразием многообразия K_x.*

Замечание. Многообразие K_x не является в общем случае вложенным подмногообразием многообразия M. Например, если M — двумерный тор (рассматриваемый как плоскость по модулю единичной решетки) и система $\mathscr{D}$ задается постоянным векторным полем с иррациональным углом, то любое максимальное интегральное многообразие, очевидно, всюду плотно на этом торе.

§ 6. ТЕОРЕМА ДАРБУ[1]

В этом параграфе мы рассмотрим проблему нахождения нормального вида линейной дифференциальной формы. Сделаем предварительно несколько замечаний.

Пусть M_1 и M_2 — дифференцируемые многообразия. Между парами векторных полей на M_1 и M_2 и векторными полями на $M_1 \times M_2$ существует связь, которую мы сейчас изучим. Пусть π_1: $M_1 \times M_2 \to M_1$ и π_2: $M_1 \times M_2 \to M_2$ — естественные проекции. Дифференциальная система, задаваемая всеми формами из $\pi_2^* \left(\bigwedge^1 (M_2)\right)$, очевидно, вполне интегрируема, так же как и система, задаваемая формами из $\pi_1^* \left(\bigwedge^1 (M_1)\right)$. Действительно, в соответствии с определением многообразия $M_1 \times M_2$ существует покрытие этого многообразия окрестностями вида $U_1 \times U_2$ с координатами $(x^1, \ldots, x^{n_1}, y^1, \ldots, y^{n_2})$, где $x^1, \ldots, x^{n_1}$ — координаты на M_1, а $y^1, \ldots, y^{n_2}$ — координаты на M_2. Ясно, что подмногообразие $y^1 = \mathrm{const}, \ldots, y^{n_2} = \mathrm{const}$ является интегральным многообразием системы, соответствующей пространству $\pi_2^* \left(\bigwedge^1 (M_2)\right)$, а подмногообразие $x^1 = \mathrm{const}, \ldots, x^{n_1} = \mathrm{const}$ — системы, соответствующей $\pi_1^* \left(\bigwedge^1 (M_1)\right)$.

Если ω_1 — дифференциальная форма на M_1, а ω_2 — на M_2, то $\pi_1^* (\omega_1) + \pi_2^* (\omega_2)$ есть дифференциальная форма на $M_1 \times M_2$. С другой стороны, если X — векторное поле на M_1, а Y — на M_2, то мы можем определить векторное поле (X, Y) на $M_1 \times M_2$. Если $X = (X^1, \ldots, X^{n_1})$ относительно системы координат $x^1, \ldots, x^{n_1}$, а $Y = (Y^1, \ldots, Y^{n_2})$ относительно $y^1, \ldots, y^{n_2}$, то положим $(X, Y) = (X^1, \ldots, X^{n_1}, Y^1, \ldots, Y^{n_2})$ относительно $x_1, \ldots, x^{n_1}, y^1, \ldots, y^{n_2}$. Из закона преобразования координат видно, что тем самым мы действительно определили векторное поле на $M_1 \times M_2$. Ясно

[1] Основной результат этого параграфа (теорема 6.2) дальше в книге нигде не используется

также, что

$$(X, Y) \lrcorner (\pi_1^* (\omega_1) + \pi_2^* (\omega_2)) = \pi_1^* (X \lrcorner \omega_1) + \pi_2^* (Y \lrcorner \omega_2). \qquad (6.1)$$

Более общо, если s и t — контравариантные тензоры данного типа на M_1 и M_2, то мы можем определить тензор (s, t) того же типа на $M_1 \times M_2$. С алгебраической точки зрения доказательство сводится к замечанию, что для каждой точки $(x, y) \in M_1 \times M_2$ существуют отображения $\iota_{1*}: T_x(M_1) \to T_{(x, y)}(M_1 \times M_2)$ и $\iota_{2*}: T_y(M_2) \to T_{(x, y)}(M_1 \times M_2)$, такие, что $\pi_{1*} \circ \iota_{1*} = \mathrm{id}$, $\pi_{2*} \circ \iota_{2*} = \mathrm{id}$. Другими словами, касательное пространство в каждой точке из $M_1 \times M_2$ распадается в прямую сумму пространства, «касательного» к M_1, и пространства, «касательного» к M_2. Если X_1 и X_2 — векторные поля на M_1, а Y_1 и Y_2 — векторные поля на M_2, то прямая проверка (скажем, в терминах локальных координат) показывает, что

$$[(X_1, Y_1), (X_2, Y_2)] = ([X_1, X_2], [Y_1, Y_2]). \qquad (6.2)$$

Если $\mathscr{E}_1$ — дифференциальная система на M_1, а $\mathscr{E}_2$ — на M_2, то, полагая $\mathscr{E}(x, y) = \iota_{1*}\mathscr{E}_1(x) + \iota_{2*}\mathscr{E}_2(x)$, мы получим дифференциальную систему $\mathscr{E}$ на $M_1 \times M_2$. Из формулы (6.2) и теоремы 5.2 следует, что *если системы $\mathscr{E}_1$ и $\mathscr{E}_2$ вполне интегрируемы, то такой же будет и система $\mathscr{E}$*.

Мы можем сформулировать полезное обобщение этого замечания. Пусть $\mathscr{E}$ — дифференциальная система на $M_1 \times M_2$, согласованная с разложением касательного пространства в прямую сумму, т. .

$$\mathscr{E}(x, y) = \iota_{1*}\pi_{1*}\mathscr{E}(x, y) + \iota_{2*}\pi_{2*}\mathscr{E}(x, y) \qquad (6.3)$$

для всех $(x, y) \in M_1 \times M_2$. Для каждого $y \in M_2$ дифференциальная система $\mathscr{E}$ индуцирует дифференциальную систему $\mathscr{E}_y$ на M_1, а именно, система $\mathscr{E}_y$ определяется формулой $\mathscr{E}_y(x) = \pi_{1*}\mathscr{E}(x, y)$; аналогично, система $\mathscr{E}_x$ определяется формулой $\mathscr{E}_x(y) = \pi_{2*}\mathscr{E}(x, y)$. Для проверки того, что это действительно дифференциальные системы, введем в окрестности точки (x, y) локальные координаты $(x^1, \ldots, x^{n_1}, y^1, \ldots, y^{n_2})$. Мы можем найти линейные формы $\omega^1, \ldots, \omega^k$, задающие систему $\mathscr{E}$ в окрестности точки (x, y). Напишем каждую из этих форм:

$$\omega^i = \sum_{j=1}^{n_1} a_j^i \, dx^j + \sum_{j=1}^{n_2} b_j^i \, dy^j = \omega_1^i + \omega_2^i.$$

Из условия (6.3) следует [поскольку формы ω_1^i обращаются в 0 на $\iota_{1*}T_x(M)$, а формы ω_2^i — на $\iota_{2*}T_y(M)$], что формы ω_1^i и ω_2^i обращаются в 0 на подпространстве $\mathscr{E}(x, y)$. Поэтому мы можем выбрать формы $\omega^1, \ldots, \omega^l, \omega^{l+1}, \ldots, \omega^k$ так, чтобы

$$\omega^i = \sum a_j^i \, dx^j, \qquad \text{если } i \leqslant l,$$

$$\omega^i = \sum b_j^i \, dy^j, \qquad \text{если } i > l$$

(где a^i_j, b^i_j — функции всех переменных и формы ω^i линейно независимы). Тогда дифференциальная система $\mathscr{E}_y$ определяется формами $\sum a^i_j(x^1, \ldots, x^{n_1}, y^1, \ldots, y^{n_2})\,dx^j$, а $\mathscr{E}_x$ — формами $\sum b^i_j(x^1, \ldots, x^{n_1}, y^1, \ldots, y^{n_2})\,dy^j$. Теперь мы можем доказать следующее утверждение:

Лемма 6.1. *Пусть $\mathscr{E}$ — дифференциальная система на $M_1 \times M_2$, удовлетворяющая условию* (6.3). *Если система $\mathscr{E}_y$ вполне интегрируема при любом $y \in M_2$, а $\mathscr{E}_x = \{0\}$ для всех $x \in M_1$, то система $\mathscr{E}$ вполне интегрируема.*

Доказательство. По условию $\mathscr{E}_x$ есть тривиальная дифференциальная система, сопоставляющая каждому $y \in M_2$ нулевое подпространство. Поэтому локально идеал $\mathscr{J}(\mathscr{E})$ порождается формами $\omega^1, \ldots, \omega^l$ и $dy^1, \ldots, dy^{n_2}$, где

$$\omega^i = \sum a^i_j(x^1, \ldots, x^{n_1}, y^1, \ldots, y^{n_2})\,dx^j.$$

Тогда система $\mathscr{E}_y$ задается формами $\iota_y^*(\omega^i)$, где вложение $\iota_y\colon M_1 \to M_1 \times M_2$ переводит x в (x, y). Поскольку система $\mathscr{E}_y$ вполне интегрируема, формы $d(\iota_y^*(\omega^i))$ являются линейными комбинациями форм $\iota_y^*(\omega^j) \wedge \iota_y^*(\omega^k)$. Но форма $\pi_1^*(d\iota_y^*(\omega^j))$ отличается от $d\omega^j$ только членами, содержащими dy^j. Поэтому дифференциальная система, порожденная формами $\omega^1, \ldots, \omega^l, dy^1, \ldots, dy^{n_2}$, вполне интегрируема.

Упражнение 6.1. Показать на примере, что система $\mathscr{E}$ не обязательно будет вполне интегрируемой, если системы $\mathscr{E}_x$ и $\mathscr{E}_y$ вполне интегрируемы для всех $x \in M_1$ и $y \in M_2$.

Применим теперь предыдущие замечания к задаче нахождения нормального вида линейной дифференциальной формы. Пусть ω — линейная дифференциальная форма. Тогда $d\omega$ — внешняя дифференциальная форма степени 2 и идеал $\mathscr{J}$, порожденный формой $d\omega$, замкнут относительно d. Характеристическая система этого идеала совпадает поэтому с отображением, сопоставляющим каждому $x \in M$ ассоциированную систему формы $(d\omega)_x$, в нашем случае — подпространство размерности $n - 2p$, где $2p$ есть ранг формы $(d\omega)_x$, см. теорему 5.1 гл. I. Предположим, что этот ранг постоянен на M. По теореме Картана (теорема 5.3) характеристическая система идеала $\mathscr{J}$ вполне интегрируема. Значит, для каждой точки $x \in M$ существует координатная окрестность U с координатами $u^1, \ldots, u^{n-1}, y^1$, в которых характеристическая система идеала $\mathscr{J}$ задается уравнениями

$$du^{n-2p+1} = \ldots = du^{n-1} = dy^1 = 0.$$

Согласно теореме 5.1 гл. I, это означает, что форма $d\omega$ выражается через $du^{n-2p+1}, \ldots, du^{n-1}, dy^1$. Рассмотрим окрестность U как произведение $U=U_1\times U_2$, где $u^1, \ldots, u^{n-1}$ — координаты в U_1, а y^1 — координата в U_2. Для каждого фиксированного значения y^1 ограничение формы $d\omega$ на подмногообразие $U_1\times y^1$ представляет собой замкнутую 2-форму $\iota_{y^1}^*(d\omega)$ ранга $2p-2$.

По лемме 6.1 характеристическая система идеала, порожденного формами $\iota_{y^1}^*(d\omega)$ и dy^1, является вполне интегрируемой дифференциальной системой. Поэтому мы можем найти такие координаты $u^1, \ldots, u^{n-2p}, w^{n-2p+1}, \ldots, w^{n-2}, y^2, y^1$, в которых эта дифференциальная система задается уравнениями $dw^{n-2p+2}= \ldots$ $\ldots =dy^2=dy^1=0$. В этой системе координат формы $\iota_{y^1}^*(d\omega)$ выражаются через $dw^{n-2p+2}, \ldots, dy^2$. Теперь мы можем представить U в виде произведения $U=U_3\times U_4$, где координатами в окрестности U_4 служат функции y^1, y^2, и рассмотреть характеристическую систему идеала, порожденного формами $\iota_{y^1,y^2}^*(d\omega)$, dy^1, dy^2.

Продолжая процесс подобным образом, мы придем наконец к такой системе координат $z^1, \ldots, z^{n-p}, y^1, \ldots, y^p$, что $\iota_{y^1,\ldots,y^p}^*(d\omega)=0$, где $\iota_{y^1,\ldots,y^p}$ есть вложение

$$(z^1, \ldots, z^{n-p}) \to (z^1, \ldots, z^{n-p}, y^1, \ldots, y^p).$$

Согласно лемме Пуанкаре (теорема 4.1), мы можем написать $\iota_{y^1,\ldots,y^p}^*(\omega)=dS_{y^1,\ldots,y^p}$, где $S_{y^1,\ldots,y^p}$ — дифференцируемая функция от $z^1, \ldots, z^{n-p}$, дифференцируемым образом зависящая от параметров $y^1, \ldots, y^p$. Поэтому она определяет некоторую функцию S на U. Кроме того, форма $\omega-dS$ обладает тем свойством, что $\iota_{y^1,\ldots,y^p}^*(\omega-dS)=0$ при любых $y^1, \ldots, y^p$. Поэтому мы можем написать

$$\omega-dS=f_1\,dy^1+\ldots+f_p\,dy^p.$$

Значит, $d\omega=df_1\wedge dy^1+\ldots+df_p\wedge dy^p$. Так как ранг формы $d\omega$ равен $2p$, то $d\omega\wedge\ldots\wedge d\omega\neq 0$ (p сомножителей). Поэтому $df_1\wedge\ldots\wedge df_p\wedge dy^1\wedge\ldots\wedge dy^p\neq 0$, и мы можем дополнить функции $f_1, \ldots, f_p, y^1, \ldots, y^p$ до системы координат $x^1, \ldots, x^{n-p}, y^1, \ldots, y^p$ ($x^i=f_i$, $1\leqslant i\leqslant p$). В терминах этой системы координат

$$\omega=dS+x^1\,dy^1+\ldots+x^p\,dy^p. \tag{6.4}$$

Предположим, что нам задана замкнутая 2-форма Ω ранга $2p$, т. е. такая форма, что $\Omega\wedge\ldots\wedge\Omega\neq 0$ (p сомножителей) в любой точке $x\in M$, но $\Omega\wedge\ldots\wedge\Omega\equiv 0$ ($p+1$ сомножителей). В соответствии с леммой Пуанкаре вблизи каждой точки $x\in M$ мы можем найти линейную дифференциальную форму ω, для которой $d\omega=\Omega$. Из предыдущих рассуждений видно, что можно выбрать координаты $x^1, \ldots, x^{n-p}, y^1, \ldots, y^p$, в которых форма ω имеет вид (6.4). Применяя внешнее дифференцирование, получаем следующее утверждение:

Теорема 6.1. *Пусть Ω — замкнутая 2-форма на n-мерном многообразии M, имеющая всюду ранг $2p$. Вблизи каждой точки из M можно ввести такие координаты $x^1, \ldots, x^{n-p}, y^1, \ldots, y^p$, что*

$$\Omega = dx^1 \wedge dy^1 + \ldots + dx^p \wedge dy^p. \tag{6.5}$$

Возвратимся к проблеме нахождения нормального вида линейной дифференциальной формы. В формуле (6.4) не известно, является ли форма dS линейной комбинацией форм dx^i и dy^i $(i \leqslant p)$. Рассмотрим два случая:

1) форма dS всюду является линейной комбинацией форм dx^i и dy^i $(i = 1, \ldots, p)$;

2) формы dS, dx^i, dy^i $(i = 1, \ldots, p)$ линейно независимы.

Эти два случая различаются следующим образом: по предположению $\bar{\omega} = d\omega \wedge \ldots \wedge d\omega$ (p раз) есть ненулевая $2p$-форма. В локальных координатах

$$\omega \wedge \bar{\omega} = dS \wedge dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^p \wedge dy^1 \wedge \ldots \wedge dy^p.$$

Если $(\omega \wedge \bar{\omega})_x = 0$, то dS является линейной комбинацией форм dx^i и dy^i в точке x; в противном случае формы dS, dx^i, dy^i линейно независимы. Наши два случая соответствуют поэтому условиям $\omega \wedge \bar{\omega} \equiv 0$ или $\omega \wedge \bar{\omega} \neq 0$ для всех x. Во втором случае мы можем дополнить функции $S, x^1, \ldots, x^p, y^1, \ldots, y^p$ до системы координат. В этой системе координат $\omega = x^1\,dy^1 + x^2\,dy^2 + \ldots \ldots + x^p\,dy^p + dx^{p+1}$.

В первом случае мы предоставляем читателю в качестве (нетривиального!) упражнения[1]) проверить, что если $\omega \neq 0$, то можно найти координаты, в которых $\omega = x^1\,dy^1 + \ldots + x^p\,dy^p$. Таким образом, имеет место

Теорема 6.2 (Дарбу). *Пусть ω — линейная дифференциальная форма, причем ранг формы $d\omega$ всюду равен $2p$. Если $\omega \neq 0$, но*

$$\omega \wedge \overbrace{d\omega \wedge \ldots \wedge d\omega}^{p \text{ раз}} \equiv 0,$$

то в окрестности каждой точки можно найти координаты $x^1, \ldots, x^{n-p}, y^1, \ldots, y^p$, в которых

$$\omega = x^1\,dy^1 + \ldots + x^p\,dy^p. \tag{6.6}$$

[1]) *Указание.* Рассмотреть дифференциальную систему, порожденную всеми векторными полями X, для которых $\langle X \mid \omega \rangle = 0$ и $X \lrcorner (\omega \wedge d\omega) = 0$. Показать, что это действительно дифференциальная система, причем вполне интегрируемая. Затем поступить, как выше.

Если форма $\omega \wedge \overbrace{d\omega \wedge \ldots \wedge d\omega}^{p \text{ раз}}$ *всюду отлична от нуля, то вблизи каждой точки можно ввести координаты* $x^1, \ldots, x^{n-p}, y^1, \ldots, y^p$, *в которых*

$$\omega = x^1\,dy^1 + \ldots + x^p\,dy^p + dx^{p+1}. \tag{6.7}$$

§ 7. ГАМИЛЬТОНОВЫ СТРУКТУРЫ

Важным геометрическим объектом, возникающим при изучении римановой геометрии и классической механики, является дифференцируемое многообразие, снабженное специальной внешней 2-формой.

Определение 7.1. Пусть M есть $2n$-мерное дифференцируемое многообразие. Мы назовем M *гамильтоновым многообразием* (или будем говорить, что многообразие M *снабжено гамильтоновой структурой*), если задана замкнутая 2-форма Ω ранга $2n$, определенная всюду на M.

На гамильтоновом многообразии мы имеем взаимно однозначное соответствие между пространством векторных полей и пространством линейных дифференциальных форм. Действительно, для векторного поля X определим форму ω_X формулой

$$\omega_X = X \lrcorner\, \Omega. \tag{7.1}$$

Отображение $X \to \omega_X$ есть взаимно однозначное отображение на. Действительно, в каждой точке $x \in M$ формула (7.1) задает отображение $T_x(M)$ на $T_x^*(M)$, определяемое невырожденной билинейной формой Ω_x. Обозначим обратное отображение через $\omega \to X_\omega$. Таким образом,

$$\omega = X_\omega \lrcorner\, \Omega. \tag{7.2}$$

Теперь мы можем перенести операцию, определяемую для векторных полей скобкой Ли, на дифференциальные формы. Эта операция также обозначается символом [,] и называется *скобкой Пуассона*. Таким образом, для двух линейных дифференциальных форм ω_1 и ω_2 мы имеем

$$[\omega_1, \omega_2] = [X_{\omega_1}, X_{\omega_2}] \lrcorner\, \Omega. \tag{7.3}$$

Предположим, что форма ω_2 замкнута. Тогда

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{X_{\omega_2}}\omega_1 &= \mathcal{L}_{X_{\omega_2}}(X_{\omega_1} \lrcorner\, \Omega) = \\
&= (\mathcal{L}_{X_{\omega_2}} X_{\omega_1}) \lrcorner\, \Omega + X_{\omega_1} \lrcorner\, (\mathcal{L}_{X_{\omega_2}}\Omega) = \\
&= [X_{\omega_1}, X_{\omega_2}] \lrcorner\, \Omega + X_{\omega_1} \lrcorner\, (X_{\omega_2} \lrcorner\, d\Omega + d\omega_2) = \\
&= [\omega_1, \omega_2].
\end{aligned}$$

Значит, если формы ω_1 и ω_2 замкнуты, то

$$[\omega_1, \omega_2] = \mathcal{L}_{X_{\omega_2}}\omega_1 = -\mathcal{L}_{X_{\omega_1}}\omega_2. \tag{7.4}$$

Если ω — произвольная замкнутая форма, а X — векторное поле, то $\mathcal{L}_X\omega = d(X \lrcorner\, \omega)$. Поэтому производная Ли любой замкнутой формы есть точная форма. В частности, *скобка Пуассона двух замкнутых форм есть точная форма.*

Предположим, что формы ω_1 и ω_2 точны: $\omega_1 = df$, $\omega_2 = dg$. Тогда

$$[df, dg] = \mathcal{L}_{X_{df}}(dg) = d(X_{df}g). \tag{7.5}$$

Положим

$$[f, g] = X_{df}g = -X_{dg}f, \tag{7.6}$$

так что

$$[df, dg] = d[f, g].$$

В частности, если $[f, g] = 0$, то функция f постоянна на орбитах поля X_{dg}, и обратно. Таким образом, функция f постоянна на орбитах поля X_{dg} тогда и только тогда, когда функция g постоянна на орбитах поля X_{df}.

Согласно теореме 6.1, вблизи каждой точки можно ввести координаты $x^1, \ldots, x^n, y^1, \ldots, y^n$, в которых

$$\Omega = dy^1 \wedge dx^1 + \ldots + dy^n \wedge dx^n. \tag{7.7}$$

[Для удобства мы поменяли местами x и y в формуле (6.5).] Вычислим в этих координатах X_ω и ω_X. Предположим, что векторное поле X имеет вид

$$X = \sum_{i=1}^{n} \left(a^i \frac{\partial}{\partial x^i} + b^i \frac{\partial}{\partial y^i}\right).$$

Тогда

$$\omega_X = \sum (b^i\, dx^i - a^i\, dy^i). \tag{7.8}$$

Если ω есть дифференциальная форма

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} (c^i\, dx^i + d^i\, dy^i),$$

то формула (7.7) дает

$$X_\omega = \sum_{i=1}^{n} \left((-d^i)\frac{\partial}{\partial x^i} + c^i \frac{\partial}{\partial y^i}\right). \tag{7.9}$$

В частности, для любой функции f имеем

$$X_{df} = \sum \left(-\frac{\partial f}{\partial y^i}\frac{\partial}{\partial x^i} + \frac{\partial f}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial y^i}\right).$$

Отсюда

$$[f, g] = \sum \left(\frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial g}{\partial y^i} - \frac{\partial f}{\partial y^i} \frac{\partial g}{\partial x^i} \right). \tag{7.10}$$

Особый интерес представляют инфинитезимальные автоморфизмы гамильтоновой структуры, т. е. образующие однопараметрических групп, сохраняющих форму Ω.

Определение 7.2. Векторное поле X называется *гамильтоновым*, если

$$\mathscr{L}_X \Omega = 0. \tag{7.11}$$

Поскольку $\mathscr{L}_X \Omega = d(X \lrcorner \Omega) + X \lrcorner d\Omega$ и $d\Omega = 0$, получаем следующее утверждение:

Векторное поле X гамильтоново тогда и только тогда, когда форма ω_X замкнута.

Из приведенных выше рассуждений следует, что скобка Ли двух гамильтоновых векторных полей есть гамильтоново поле. Таким образом, *множество всех гамильтоновых векторных полей на гамильтоновом многообразии класса C^∞ есть алгебра Ли.*

Существует чрезвычайно важный способ получения гамильтоновых многообразий, который мы сейчас изучим.

Теорема 7.1. *Пусть M — дифференцируемое многообразие. На кокасательном расслоении $T^*(M)$ существует каноническая линейная форма θ, называемая фундаментальной формой расслоения $T^*(M)$, которая определяется следующим образом: для любого касательного вектора X_u в точке $u \in T^*(M)$*

$$\langle X_u, \theta_u \rangle = \langle \pi_* X_u, u \rangle, \tag{7.12}$$

где π — проекция $T^*(M) \to M$. Форма $d\theta$ имеет ранг $2n$ и, значит, определяет на $T^*(M)$ гамильтонову структуру.

Заметим, что $\pi_* X_u$ есть касательный вектор в точке $\pi(u)$, а u — линейная функция на $T_{\pi(u)}(M)$. Поэтому формула (7.12) имеет смысл. Проверим остальную часть теоремы. Пусть $x^1, \ldots, x^n$ — система координат на открытом множестве U из M. Мы можем ввести в $\pi^{-1}(U)$ координаты $(x^1, \ldots, x^n, y^1, \ldots, y^n)$ следующим образом. Формы $dx^1, \ldots, dx^n$ порождают пространство форм на U. Поэтому для всякой формы $u \in \pi^{-1}(U)$ мы имеем

$$u = \sum y^i(u)\, dx^i_{\pi(u)}. \tag{7.13}$$

Значит, $x^1(\pi(u)), \ldots, x^n(\pi(u)), y^1(u), \ldots, y^n(u)$ образуют систему координат в $\pi^{-1}(U)$. Любой касательный вектор X_u записывается в виде

$$X_u = \sum \left(X_u^i \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_u + Y_u^i \left(\frac{\partial}{\partial y^i} \right)_{\pi(u)} \right).$$

Следовательно,

$$\pi_* X_u = \sum X_u^i \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_{\pi(u)},$$

и формула (7.12) принимает вид

$$\langle X_u, \theta_u \rangle = \sum y^i (u) X_u^i.$$

Таким образом,

$$\theta_u = \sum y^i (u) (dx^i)_u$$

или

$$\theta = \sum y^i dx^i, \tag{7.14}$$

откуда видно, что θ есть линейная дифференциальная форма, а форма $d\theta = \sum dy^i \wedge dx^i$ имеет всюду ранг $2n$, что доказывает теорему.

Отметим, что в классической механике в случае, когда многообразие M есть «конфигурационное пространство», многообразие $T^*(M)$ называется «фазовым пространством». В классической механике частиц в качестве многообразия M рассматривают конфигурационное пространство n частиц. Таким образом, $M = E^{3n}$. Если мы запретим двум частицам находиться в одной точке пространства, то M состоит из точек $(x_1, y_1, z_1, \ldots, x_n, y_n, z_n)$ пространства E^{3n}, удовлетворяющих условию

$$(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2 \neq 0$$

для всех пар $i, j, i \neq j$. В законах движения предполагается, что существуют n положительных чисел $m_1, \ldots, m_n$ (где m_i называется массой i-й частицы) и такая функция V на M (называемая *потенциальной энергией*), что уравнения движения имеют вид

$$\begin{aligned} m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} &= -\frac{\partial V}{\partial x_i}, \\ m_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} &= -\frac{\partial V}{\partial y_i}, \\ m_i \frac{d^2 z_i}{dt^2} &= -\frac{\partial V}{\partial z_i}. \end{aligned} \tag{7.15}$$

Для упрощения обозначений положим

$$x_1 = q_1, \quad y_1 = q_2, \quad z_1 = q_3, \quad x_2 = q_4, \quad \ldots, \quad z_n = q_{3n}$$

и

$$M_1 = M_2 = M_3 = m_1, \qquad M_4 = M_5 = M_6 = m_2 \text{ и т. д.}$$

Тогда уравнения (7.15) приобретут вид

$$M_i \frac{d^2 q_i}{dt^2} = -\frac{\partial V}{\partial q_i}. \tag{7.16}$$

Рассмотрим риманову метрику, задаваемую формулой $(v, v) = \sum M_i \dot{q}_i^2$, где $v = \sum \dot{q}_i (\partial/\partial q_i)$. Каждая риманова метрика определяет диффеоморфизм λ: $T(M) \to T^*(M)$. Для рассматриваемой метрики, как легко видеть,

$$\lambda \left(\sum \dot{q}_i \frac{\partial}{\partial q_i} \right) = \sum p_i \, dq_i,$$

где $p_i = M_i \dot{q}_i$. Координаты p_i называются *импульсами, сопряженными с координатами* q_i. [Заметим, что, согласно формуле (7.14), на любом многообразии, как только мы выбрали координаты $q_1, \ldots, q_n$, определены сопряженные импульсы [1]), *независимо* от выбора римановой метрики. Что касается римановой метрики (т. е. выбора масс), то она дает правило перехода от скоростей к импульсам.]

Уравнения (7.16) теперь можно записать в виде

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{p_i}{M_i}, \qquad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial V}{\partial q_i}.$$

Таким образом, на многообразии $T^*(M)$ возникает поток, определяемый векторным полем

$$X = -\sum \left(\frac{p_i}{M_i} \frac{\partial}{\partial q_i} + \frac{\partial V}{\partial q_i} \frac{\partial}{\partial p_i} \right).$$

Мы имеем $p_i/M_i = \partial T/\partial p_i$, где $T = \frac{1}{2} \sum p_i^2/M_i$ — кинетическая энергия. Поэтому

$$X \lrcorner \, d\theta = -dH, \tag{7.17}$$

где $H = T + V$ есть полная энергия. Далее,

$$XH = \langle X \mid dH \rangle = -\langle X \mid X \lrcorner \, \Omega \rangle = 0 \text{ [2])}.$$

Таким образом, функция H постоянна вдоль траекторий поля X. Этот факт известен как *закон сохранения энергии*. Более общо, пусть f — любая такая функция, что $X_{df} H = 0$. Тогда

$$\begin{aligned} Xf &= \langle X \mid df \rangle = \langle X \mid X_{df} \lrcorner \, \Omega \rangle = \\ &= -\langle X_{df} \mid X \lrcorner \, \Omega \rangle = \langle X_{df} \mid dH \rangle = X_{df} H = 0. \end{aligned}$$

---

[1]) Как координаты линейной формы в базисе $dq_1, \ldots, dq_n$. — *Прим. перев.*

[2]) Где $\Omega = d\theta$. — *Прим. перев.*

Таким образом,

из равенства $X_{df}H = 0$ следует, что *функция f постоянна вдоль траекторий поля X.* (7.18)

Существует способ перехода от векторных полей на M к функциям на $T^*(M)$. Действительно, любая однопараметрическая функция g_t диффеоморфизмов многообразия M определяет однопараметрическую группу g_t^* диффеоморфизмов многообразия $T^*(M)$, причем $\pi \circ g_t^* = g_t \circ \pi$. В самом деле, для любой точки $(p, v^*) \in T^*(M)$ положим

$$g_t^*(p, v^*) = (g_t(p), (g_{-t})^*_{g_t(p)} v^*).$$

Ясно, что таким образом мы определили однопараметрическую группу диффеоморфизмов многообразия $T^*(M)$. Далее,

$$(g_t^*)^* \theta = \theta.$$

Действительно, для любого вектора $X \in T_{(p, v^*)}(T^*(M))$ имеем

$$\begin{aligned}
\langle X, (g_t^*)^* \theta\rangle &= \langle (g_t^*)_* X, \theta_{g_t^*(p, v^*)}\rangle = \\
&= \langle \pi_* \circ (g_t^*)_* X, (g_{-t})^* v^*\rangle = && \text{(по определению } \theta) \\
&= \langle g_t^* \circ \pi_* X, (g_{-t})^* v^*\rangle = && \text{(так как } \pi \circ g_t^* = g_t \circ \pi) \\
&= \langle \pi_* X, v^*\rangle = \\
&= \langle X, \theta\rangle.
\end{aligned}$$

Таким образом, любое векторное поле Y на M поднимается до векторного поля $\widetilde{Y}$ на $T^*(M)$, причем $\pi_{*u}\widetilde{Y}_u = Y_{\pi(u)}$ для любого $u \in T^*(M)$ и $\mathcal{L}_{\widetilde{Y}}\theta = 0$. Но

$$\mathcal{L}_{\widetilde{Y}}\theta = \widetilde{Y} \lrcorner\, d\theta + d\langle \widetilde{Y} \mid \theta\rangle.$$

Значит, $\widetilde{Y} \lrcorner\, d\theta = -d\langle \widetilde{Y} \mid \theta\rangle$. Легко вычислить функцию $\langle \widetilde{Y} \mid \theta\rangle$. Действительно, в любой точке $u = (p, v^*)$ имеем

$$\langle \widetilde{Y}_u, \theta_u\rangle = \langle \pi_* \widetilde{Y}_u, \theta_u\rangle = \langle Y, v^*\rangle.$$

В механике, например, если $Y = \partial/\partial q_i$, то $\langle \widetilde{Y} \mid \theta\rangle = p_i$. Таким образом, импульс (или линейный момент) частицы в данном направлении соответствует однопараметрической группе сдвигов частицы в этом направлении. Аналогично, угловой момент соответствует однопараметрической группе вращений. Если в механике Y есть векторное поле на M, причем $\widetilde{Y}H = 0$, то, согласно (7.18), поток, порождаемый полем X, сохраняет функцию $\langle \widetilde{Y} \mid \theta\rangle$.

Чтобы привести пример такого векторного поля, предположим, что потенциальная энергия V зависит только от расстояния между частицами. Тогда евклидово движение всех частиц с сохранением расстояний не изменяет функций V и T и, значит, индуцирует преобразование многообразия $T^*(M)$, которое оставляет H инвариантной. Так, векторное поле Y, соответствующее однопараметрической группе сдвигов или вращений всех частиц, определяет функции, инвариантные относительно потока, порожденного полем X. Эти утверждения известны как *законы сохранения полного импульса и полного углового момента*.

Глава IV

ВАРИАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

В этой главе мы будем заниматься вариационным исчислением на многообразиях. Вариационное исчисление изучает вопросы следующего типа: задана некоторая функция I в пространстве дифференцируемых кривых на многообразии M; среди всех кривых, удовлетворяющих некоторым дополнительным условиям, найти кривые, на которых функция I достигает минимума. Например, предположим, что M — риманово многообразие с римановой метрикой g. Обозначим через $I[C]$ длину произвольной дифференцируемой кривой C: $[a, b] \to M$, т. е.

$$I[C] = \int_a^b \sqrt{g\left(C_*\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_t, C_*\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_t\right)}\, dt. \tag{1}$$

Мы можем искать «кратчайшую» кривую, соединяющую две фиксированные точки p и q многообразия M, т. е. кривую, для которой интеграл (1) принимает минимальное значение, среди всех кривых C, удовлетворяющих условию $C(a) = p$, $C(b) = q$. Аналогично, мы можем искать кратчайшую кривую, соединяющую два подмногообразия N_1 и N_2. Тогда дополнительные условия состоят в том, что $C(a) \in N_1$, $C(b) \in N_2$.

Нашей основной целью при изучении вариационного исчисления является как раз решение задачи о длине кривой на римановом многообразии. Удобно, однако, немного схитрить. Подинтегральное выражение интеграла (1) представляет собой длину касательного вектора кривой C (т. е. «скорость», с которой частица движется вдоль кривой C). Длина касательного вектора не является, к сожалению, дифференцируемой функцией вектора; она плохо ведет себя на векторах длины нуль. Другой недостаток интеграла (1) связан с тем, что длина не зависит от параметризации. Это влечет за собой неединственность решения задачи минимизации, поскольку другая параметризация кривой, являющейся решением, снова будет решением. С другой стороны, длина дуги кривой служит на ней естественным параметром, который должен как-то получиться из самой задачи минимизации.

Оказывается, что вместо рассмотрения интеграла (1) удобнее иметь дело с интегралом (кинетической) энергии

$$\frac{1}{2}\int_a^b g\left(C_*\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_t, C_*\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_t\right) dt. \tag{2}$$

Здесь подинтегральное выражение есть квадрат длины касательного вектора, и, следовательно, гладкая функция. Кроме того, этот интеграл зависит от параметризации. Важное замечание (которое будет окончательно обосновано в § 6) заключается в том, что задачи минимизации интегралов (1) и (2) по существу эквивалентны (*принцип наименьшего действия Мопертюи*). Кроме того, параметризация кривой, минимизирующей интеграл (2), автоматически пропорциональна длине дуги. [Это частный случай закона сохранения энергии, который будет доказан в § 3.] В §§ 1—4 мы приведем некоторые основные теоремы вариационного исчисления. Советуем читателю во всех рассуждениях иметь в виду частный случай кинетической энергии, поскольку для этого случая выполняются все (постепенно возрастающие) ограничения, которые мы будем налагать.

Так как основной интерес для нас представляет задача минимизации кинетической энергии, то при изложении общей теории мы сделаем два упрощающих предположения. Первое состоит в том, что все рассматриваемые объекты (функции, формы, отображения и т. п.) всюду определены. Конечно, для многих встречающихся в природе вариационных задач это не так. Мы примем это предположение, чтобы не загромождать геометрические идеи заботами об областях определения. Эти заботы на самом деле не являются серьезными, и вдумчивый читатель без труда обобщит полученные результаты на случай, когда нужно учитывать области определения. Второе упрощающее предположение, которое мы постоянно делаем на протяжении этой книги, состоит в том, чтобы не заботиться об условиях гладкости.

Прежде чем приступить к изложению, упростим обозначения для случая длины дуги и кинетической энергии. Если M — риманово многообразие с римановой метрикой g, то для любых векторов $v_1 \in T_x(M)$ и $v_2 \in T_x(M)$ положим

$$(v_1, v_2) = g_x(v_1, v_2), \tag{3}$$

причем левая часть формулы (3) не определена, если v_1 и v_2 не являются касательными векторами в одной и той же точке. Для любого касательного вектора v положим

$$\|v\| = \sqrt{(v, v)} = \sqrt{g_x(v, v)}. \tag{4}$$

Для любой кривой C: $[a, b] \to M$ положим

$$C'(t) = C_*\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_t. \tag{5}$$

Тогда интегралы (1) и (2) принимают вид

$$L[C] = \int_a^b \|C'(t)\|\, dt,$$

$$E[C] = \frac{1}{2}\int_a^b \|C'(t)\|^2\, dt.$$

§ 1. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛЕЖАНДРА

Пусть V — векторное пространство и ω — линейная дифференциальная форма на V. Форма ω задает отображение $\mathcal{L}$: $V \to V^*$. Оно определяется следующим образом. Если $v \in V$, то ω_v есть линейная форма на $T_v(V)$. Согласно рассуждениям, приведенным в конце § 5 гл. II, существует естественное отождествление

$l\colon T_v(V) \to V$ (зависящее только от структуры векторного пространства на V). Значит, $\omega_v \circ l^{-1}$ есть линейная функция на V, т. е. некоторый элемент пространства V^*; мы обозначим его символом $\mathscr{L}(v)$. Предположим, что отображение $\mathscr{L}\colon v \to \mathscr{L}(v)$ есть диффеоморфизм пространства V на V^*. Тогда обратное отображение $\mathscr{L}^{-1}$ также определяется некоторой формой ω^* на V^*. Действительно, если $v^* \in V^*$, то $\mathscr{L}^{-1}(v^*) \in V$ есть линейная форма на V^*, которую ввиду отождествления $T_{v^*}(V^*)$ с V^* можно рассматривать как линейную форму на $T_{v^*}(V^*)$. Таким образом, для каждого $v^* \in V^*$ вектор $\mathscr{L}^{-1}(v^*)$ определяет элемент пространства $T^*_{v^*}(V^*)$, т. е. отображение $\mathscr{L}^{-1}$ определяет некоторую дифференциальную форму ω^* на V^*. Из определений видно, что отображение $V \to V^*$, задаваемое формой ω^*, совпадает с $\mathscr{L}^{-1}$.

Если $d\omega = 0$, то $d\omega^* = 0$. Действительно, пусть $e_1, \ldots, e_n$ — базис в V, а $e_1^*, \ldots, e_n^*$ — дуальный базис в V^*. Пусть $\dot{x}^1, \ldots, \dot{x}^n$ — координаты в пространстве V относительно базиса $e_1, \ldots, e_n$, а $y^1, \ldots, y^n$ — координаты в пространстве V^* относительно $e_1^*, \ldots, e_n^*$. Если $\omega = \sum w_i\, d\dot{x}^i$, то отображение $\mathscr{L}$ задается формулой

$$\mathscr{L}\left(\sum \dot{x}^i e_i\right) = \sum w_i(\dot{x}^1, \ldots, \dot{x}^n)\, e_i^*.$$

Значит, если $\omega = dL$, то $\mathscr{L}$ имеет вид

$$\mathscr{L}(\dot{x}^1, \ldots, \dot{x}^n) = \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^1}(\dot{x}^1, \ldots, \dot{x}^n), \ \ldots, \ \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^n}(\dot{x}^1, \ldots, \dot{x}^n)\right). \tag{1.1}$$

Пусть теперь H — функция на V^*, определяемая формулой

$$\begin{aligned} &H(y) = \langle \mathscr{L}^{-1}(y), y\rangle - L \circ \mathscr{L}^{-1}(y) \\ \text{или}\quad &H(y^1, \ldots, y^n) = \sum \dot{x}^i y^i - L(\dot{x}^1, \ldots, \dot{x}^n), \end{aligned} \tag{1.2}$$

где $\dot{x}^i$ рассматриваются как функции от y^j, задающие отображение $\mathscr{L}^{-1}$. Тогда

$$dH = \sum \dot{x}^i\, dy^i + \sum y^i\, d\dot{x}^i - \sum \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}\, d\dot{x}^i.$$

Согласно формуле (1.1), $\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}(\dot{x}^1, \ldots, \dot{x}^n) = y^i(\dot{x}^1, \ldots, \dot{x}^n)$. Если мы будем по-прежнему считать $\dot{x}^i$ функциями от y^j, задающими отображение $\mathscr{L}^{-1}$, то два последних члена последнего уравнения сократятся. Значит, $dH = \sum \dot{x}^i\, dy^i$, так что $\omega^* = dH$.

Рассмотрим частный случай (кинетической энергии), когда $L(v) = \frac{1}{2}(v, v)$, где $(\ ,\ )$ — некоторое скалярное произведение. В координатах имеем $L(\dot{x}^1, \ldots, \dot{x}^n) = \frac{1}{2}\sum a_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j$. Тогда $\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} = \sum a_{ij}\dot{x}^j$. Поэтому, если $v = \sum \dot{x}^i e_i$ и $w = \sum \dot{z}^i e_i$, то $\langle w, \mathscr{L}(v)\rangle = \sum a_{ij}\dot{z}^i\dot{x}^j = (w, v)$. Другими словами, $\mathscr{L}$ есть стандартное отображение $V \to V^*$, индуцированное скалярным произведением (,). Оно линейно и является диффеоморфизмом пространства V на V^*, если только скалярное произведение (,) невырожденно. Вычислим функцию H в этом случае. В соответствии с формулой (1.2) имеем

$$H(w^*) = \langle \mathscr{L}^{-1}(w^*), w^*\rangle - \frac{1}{2}(\mathscr{L}^{-1}(w^*), \mathscr{L}^{-1}(w^*)); \tag{1.3}$$

если $w^* = \mathscr{L}(v)$, то

$$H(\mathscr{L}(v)) = \langle v, \mathscr{L}(v)\rangle - \frac{1}{2}(v, v) = (v, v) - \frac{1}{2}(v, v) = L(v),$$

т. е. $H(\mathscr{L}(v)) = L(v)$. Мы можем также описать функцию H, заметив, что, согласно формуле (1.3), $H(w^*) = \frac{1}{2}(w^*, w^*)$, где (,) — скалярное произведение в пространстве V^*, индуцированное скалярным произведением в пространстве V.

Замечания. 1. В общем случае функции L и H определяются равенствами $\omega = dL$, $\omega^* = dH$ с точностью до аддитивной константы. На практике, однако, функция L обычно бывает задана. Мы можем тогда определить функцию H формулой (1.2), заметив, что это определение не зависит от выбора базиса $e_1, \ldots, e_n$. Аддитивная константа в H фиксируется равенством (1.2), так как

$$H(0, \ldots, 0) = L \circ \mathscr{L}^{-1}(0, \ldots, 0).$$

2. Если форма ω задана только на открытом множестве $U \subset V$, то приведенная выше конструкция определяет отображение $\mathscr{L}\colon U \to V^*$. Применим это замечание к $\mathscr{L}^{-1}$. Предположим, что форма $\omega = dL$ (где функция L определена, скажем, на всем V) индуцирует отображение $\mathscr{L}\colon V \to V^*$, которое является погружением. Это означает, что отображение $\mathscr{L}$ локально взаимно однозначно и взаимно дифференцируемо, хотя может и не быть ни взаимно однозначным отображением, ни отображением на. Тогда для любой точки $\dot{x} \in V$ форма $\omega^* = dH$, задаваемая формулой (1.2), в окрестности точки $y = \mathscr{L}(\dot{x})$ определяет отображение $\mathscr{L}^{-1}$. Как $\mathscr{L}^{-1}$, так и ω^* определены вблизи точки y некорректно — они зависят от выбора точки $\dot{x} \in \mathscr{L}^{-1}(y)$. Однако форма $\sigma = \mathscr{L}^*(\omega^*)$ корректно определена в точке $\dot{x}$, значит, и всюду на V. Аналогично, функция $E = H \circ \mathscr{L}$ корректно определена

на V, и мы имеем $\sigma = dE$. Заметим, что σ полностью определяется формой ω, в то время как E зависит от выбора произвольной постоянной, которая у нас зафиксирована формулой (1.2). Функция E называется *энергией*, ассоциированной с функцией Лагранжа L. Так, в случае кинетической энергии, т. е. $L = \frac{1}{2}(v, v)$, из формулы (1.3) следует, что $E = L$.

3. Если функция L зависит от дополнительных параметров, т. е. если L есть функция на $N \times V$ [1]), то она индуцирует дифференцируемое отображение $N \times V \to N \times V^*$ (тождественное на сомножителе N). Если для каждого $n \in N$ отображение $n \times V \to n \times V^*$ является диффеоморфизмом, то функция H, определенная формулой (1.2), индуцирует диффеоморфизм $N \times V^* \underset{\text{на}}{\to} N \times V$, обратный к тому, который индуцирован функцией L.

Пусть M — дифференцируемое многообразие, а L — дифференцируемая функция на $T(M) \times R$. При фиксированных $q \in M$ и $t_0 \in R$ подмногообразие $T_q(M) \times t_0$ многообразия $T(M) \times R$ является векторным пространством. Поэтому функция L (точнее, ее ограничение на $T_q(M) \times t_0$) индуцирует отображение $T_q(M) \times t_0 \to T_q^*(M) \times t_0$. Таким образом, мы имеем отображение $\mathcal{L}$: $T(M) \times R \to T^*(M) \times R$. Оно называется *преобразованием Лежандра* (соответствующим функции L).

Если $x^1, \ldots, x^n$ — локальные координаты в окрестности $U \subset M$, то мы можем ввести координаты $(x^1, \ldots, x^n, \dot{x}^1, \ldots, \dot{x}^n, t)$ в $\pi^{-1}(U) \times R \subset T(M) \times R$. Они задаются формулами $x^i(v) = x^i(\pi(v))$ и $v = \sum \dot{x}^i(v)(\partial/\partial x^i)_{\pi(v)}$. Аналогично, на $T^*(M) \times R$ мы имеем локальные координаты $(x^1, \ldots, x^n, y^1, \ldots, y^n, t)$, где y^i определяются равенством $w^* = \sum y^i(w^*)\, dx^i_{\pi(w^*)}$, если $w^* \in T^*(M)$ и $\pi(w^*) \in U$. В этих координатах отображение $\mathcal{L}$ определяется формулами

$$x^i \circ \mathcal{L} = x^i, \qquad t \circ \mathcal{L} = t, \qquad y^i \circ \mathcal{L} = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}, \tag{1.4}$$

где $L = L(x^1, \ldots, x^n, \dot{x}^1, \ldots, \dot{x}^n, t)$.

Если $\mathcal{L}$ — погружение, то функция L называется *регулярной функцией Лагранжа* (или *регулярным лагранжианом*). В этом случае для любых $(v, t) \in T(M) \times R$ отображение $\mathcal{L}^{-1}$, определенное в окрестности точки $\mathcal{L}(v, t)$, индуцировано функцией H. Функция H, задаваемая формулой (1.2), определена вблизи точки $\mathcal{L}(v, t)$ и зависит, вообще говоря, от выбора (v, t). Функция же $E = H \circ \mathcal{L}$ корректно определена на $T(M) \times R$. Она называется *энергией*, соответствующей лагранжиану L.

---

[1]) Где N — некоторое дифференцируемое многообразие.— *Прим. ред.*

Упражнение 1.1. В случае классической механики задана риманова метрика на M и функция V на M (называемая *потенциальной энергией*). В качестве L берут функцию $L = T - V \circ \pi$, где $T(v) = \frac{1}{2}(v, v)$ — кинетическая энергия. Показать, что в этом случае $E = T + V \circ \pi$.

Сформулируем полученные результаты:

Теорема 1.1. *Пусть L — дифференцируемая функция на $T(M) \times R$. Тогда L индуцирует дифференцируемое отображение $\mathcal{L}\colon T(M) \times R \to T^*(M) \times R$, называемое преобразованием Лежандра и определяемое в локальных координатах формулой* (1.4). *Если это отображение является погружением, то L называется регулярной функцией Лагранжа, или регулярным лагранжианом. В этом случае отображение $\mathcal{L}^{-1}$ локально получается таким же образом из функции H на $T^*(M) \times R$, называемой гамильтонианом. Функция $E = H \circ \mathcal{L}$ глобально определена на $T(M) \times R$. Если M — риманово многообразие и $L(v, v) = \frac{1}{2}\|v\|^2$, то L является регулярным лагранжианом и отображение $\mathcal{L}$ совпадает на каждом касательном пространстве с отображением $T_q(M) \to T_q^*(M)$, которое индуцируется скалярным произведением. Кроме того, в этом случае*

$$E = H \circ \mathcal{L} = L. \tag{1.5}$$

§ 2. НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ

Основная задача вариационного исчисления (для одной независимой переменной) состоит в следующем. Пусть M есть n-мерное дифференцируемое многообразие и L — дифференцируемая функция на $T(M) \times R$. Каждая кривая $C\colon [a, b] \to M$ на M определяет кривую $\tilde{C}$ на $T(M) \times R$ по формуле

$$\tilde{C}(t) = (C'(t), t), \qquad t \in [a, b]. \tag{2.1}$$

Поэтому мы можем рассмотреть интеграл

$$I(C) = \int_a^b L(\tilde{C}(t))\, dt.$$

Задача состоит в нахождении кривых C, доставляющих «локальный» минимум для I, т. е. удовлетворяющих неравенству $I(C) \leqslant I(C^1)$ для всех «близких» кривых C^1. Для уточнения задачи мы должны определить, что мы подразумеваем под «близостью». Прежде всего заметим, что интеграл $I(C)$ имеет смысл для «кусочно дифференцируемых» кривых. Непрерывное отображение $C\colon [a, b] \to M$ называется кусочно дифференцируемым, если отрезок $[a, b]$ можно разбить на отрезки, на каждом из которых отображение C дифференцируемо. Более точно,

Определение 2.1. Непрерывное отображение $C\colon [a, b] \to M$ называется *кусочно дифференцируемой кривой*, если можно найти такие точки $t_0 = a < t_1 < \ldots < t_k = b$, что ограничение отображения C на каждый отрезок $[t_i, t_{i+1}]$ совпадает с ограничением некоторого дифференцируемого отображения

$$C_i\colon (t_i - \varepsilon, t_{i+1} + \varepsilon) \to M.$$

Для кусочно дифференцируемой кривой C положим

$$I_a^b(C) = \sum \int_{t_i}^{t_{i+1}} L(\widetilde{C}(t))\, dt. \tag{2.2}$$

Определение 2.2. Кривая C называется *кривой сильного локального минимума*, если существует такая окрестность[1]) $\mathcal{N}(W, Z, \varepsilon, 0)C$ кривой C, что для всякой кусочно дифференцируемой кривой $C^1 \in \mathcal{N}(W, Z, \varepsilon, 0)C$, удовлетворяющей условиям

$$C^1(a) = C(a), \qquad C^1(b) = C(b), \tag{2.3}$$

справедливо неравенство

$$I(C) \leqslant I(C^1). \tag{2.4}$$

Кривая C называется *кривой строгого сильного локального минимума*, если для всех таких кривых $C^1 \in \mathcal{N}(W, Z, \varepsilon, 0)C$, отличных от C, выполняется строгое неравенство

$$I(C) < I(C^1). \tag{2.5}$$

Таким образом, C является кривой сильного локального минимума, если неравенство (2.4) справедливо для всех кривых, удовлетворяющих условию (2.3) и поточечно равномерно близких к C, включая и кривые, касательные к которым далеки от касательных к кривой C. Ввиду компактности отрезка $[a, b]$ мы можем взять в качестве Z в определении 2.2 какую-нибудь координату на отрезке $[a, b]$.

Определение 2.3. Кривая C называется *кривой слабого локального минимума*, если существуют такие W, Z и ε, что неравенство (2.4) имеет место для всех кусочно дифференци-

---

[1]) См. определение 4.6 гл. II.— *Прим. перев.*

руемых кривых C^1, удовлетворяющих условию (2.3), для которых $C^1_j \in \mathcal{N}(W, Z, \varepsilon, 1)C_j$. Здесь C^1_j и C_j — ограничения соответственно кривых C^1 и C на отрезок $[s_j, s_{j+1}]$, где $a = s_0 < \ldots < s_r = b$ есть множество точек, в которых кривые C, C^1 могут не быть дифференцируемыми. Кривая C называется *кривой строгого слабого локального минимума*, если (2.4) заменено на (2.5).

Таким образом, C есть кривая слабого локального минимума, если неравенство (2.4) имеет место для всех кривых C^1, удовлетворяющих условию (2.3), которые равномерно близки вместе с их первыми производными к кривой C в тех точках, где эти производные существуют.

Наша задача заключается в нахождении необходимых и достаточных условий того, чтобы кривая C являлась кривой (сильного или слабого) локального минимума. Для ее решения удобно перейти от многообразия $T(M) \times R$ к $T^*(M) \times R$.

Допуская некоторую небрежность, примем следующее соглашение. Если L — регулярный лагранжиан, то, как легко видеть, отображение $\mathcal{L}$ есть диффеоморфизм некоторого открытого множества $U \subset T(M) \times R$, содержащего образ $\widetilde{C}[a, b]$ кривой $\widetilde{C}$, на открытое подмножество из $T^*(M) \times R$. Все рассмотрения этого параграфа относятся к этой окрестности множества $\widetilde{C}[a, b]$. Но вместо того, чтобы загромождать обозначения введением множества U, его образа и т. п., мы будем считать, что отображение $\mathcal{L}$ является диффеоморфизмом многообразия $T(M) \times R$ на $T^*(M) \times R$. Однако во всех рассуждениях будет использоваться только то, что $\mathcal{L}$ — локальный диффеоморфизм.

Пусть $\mathcal{L}\colon T(M) \times R \to T^*(M) \times R$ есть преобразование Лежандра, индуцированное функцией L. [Отметим, что отображение $\mathcal{L}$ коммутирует с естественными проекциями многообразий $T(M) \times R$ и $T^*(M) \times R$ на $M \times R$.] Важность перехода к кокасательному расслоению видна из следующего. Пусть ρ — проекция $T^*(M) \times R \to T^*(M)$, и пусть $\overline{\theta} = \rho^*(\theta)$, где θ — фундаментальная 1-форма на $T^*(M)$, см. § 7, гл. III. Тогда справедлива

Лемма 2.1. *Пусть C: $[a, b] \to M$ — дифференцируемое отображение. Положим $\overline{C} = \mathcal{L} \circ \widetilde{C}$ (где $\widetilde{C}$ определяется формулой (2.1)). Тогда*

$$\int_a^b L(\widetilde{C}(s))\, ds = \int_{[a, b]} \overline{C}^* \omega, \tag{2.6}$$

где $\omega = \overline{\theta} - H\, dt$.

Для большей наглядности напишем следующую диаграмму:

$$\begin{tikzcd}
 & T(M)\times R \arrow[r, "\mathscr{L}"] \arrow[d, "\pi_1"] & T^*(M)\times R \arrow[d, "\pi_2"] \\
{[a,b]} \arrow[ur, "\tilde{c}"] \arrow[urr, bend left, "\bar{c}"] \arrow[r, "c"'] & M \arrow[r, "\mathrm{id}"'] & M
\end{tikzcd}$$

Для доказательства леммы 2.1 заметим, что обе части формулы (2.6) при разбиении отрезка $[a, b]$ распадаются в соответствующие суммы. Поэтому (воспользовавшись подходящим разбиением и изменив обозначения) мы можем считать, что $C[a, b]$ лежит в некоторой координатной окрестности $U \subset M$. Пусть $x^1, \ldots, x^n$ — система координат в U. Тогда на $\pi_1^{-1}(U) \subset T(M)\times R$ мы имеем координаты $x^1, \ldots, x^n, \dot{x}^1, \ldots, \dot{x}^n, t$. Предположим, что в этих координатах кривая $\tilde{C}$ задается функциями $x^1(t), \ldots, x^n(t), \dot{x}^1(t), \ldots, \dot{x}^n(t), t$. Тогда левая часть формулы (2.6) равна

$$\int_a^b L(x^1(t), \ldots, x^n(t), \dot{x}^1(t), \ldots, \dot{x}^n(t), t)\,dt.$$

Отображение $\mathscr{L}$ задается в этих координатах формулой

$$\mathscr{L}(x^1, \ldots, x^n, \dot{x}^1, \ldots, \dot{x}^n, t) = \left(x^1, \ldots, x^n, \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^1}, \ldots, \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^n}, t\right),$$

а форма ω — формулой

$$\omega = \sum y^i\,dx^i - H\,dt.$$

Поэтому правая часть формулы (2.6) равна

$$\int_a^b \left(\sum y^i(t)\frac{dx^i}{dt} - H(x^1(t), \ldots, x^n(t), y^1(t), \ldots, y^n(t), t)\right)dt =$$

$$= \int_a^b \left(\sum \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}\frac{dx^i}{dt} - H\right)dt.$$

Согласно определению кривой $\tilde{C}$, имеем $(dx^i/dt)(t) = \dot{x}^i(t)$, и ввиду формулы (1.2) последний интеграл принимает вид

$$\int_a^b \left(\sum \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}\dot{x}^i - \sum \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}\dot{x}^i + L\right)dt = \int_a^b L\,dt,$$

что доказывает равенство (2.6). Положим $\sigma = \mathcal{L}^*(\omega)$; тогда форма σ будет корректно определена на $T(M) \times R$ и мы сможем переписать равенство (2.6) в виде

$$I(C) = \int_a^b L(\tilde{C}(t))\,dt = \int_{\tilde{C}} \sigma = \int_{[a,\, b]} \tilde{C}^*\sigma. \tag{2.7}$$

Теперь мы в состоянии дать «эвристический» набросок программы, которой мы будем придерживаться в нескольких следующих параграфах [1]). Рассмотрим множество всех кусочно дифференцируемых кривых, соединяющих две точки p и q, как «бесконечномерное многообразие», а функцию I — как дифференцируемую функцию на этом многообразии. Обозначим пространство всех кусочно дифференцируемых кривых, соединяющих точки p и q, через Ω_{pq}. Тогда минимизирующая кривая есть точка бесконечномерного многообразия Ω_{pq}, в которой функция I достигает минимума. Напомним соответствующие результаты относительно минимума дифференцируемой функции на (конечномерном) многообразии.

Пусть N — дифференцируемое многообразие и f — дифференцируемая функция на N. Если $p \in N$ есть точка локального минимума функции f, то $df_p = 0$. Действительно, в локальных координатах это означает, что все частные производные функции f равны в точке p нулю. Но это и есть в точности условие минимума, доказываемое в элементарном анализе. [Иначе говоря, p должна быть критической точкой для f (где f рассматривается как отображение $N \to R$) в смысле § 3 гл. II.] Это условие необходимо, но не достаточно. Чтобы получить больше информации, мы должны рассмотреть «вторые производные» функции f в точке p. Пусть X_p и Y_p — два касательных вектора в точке p, а X, Y — их продолжения до векторных полей на некоторой окрестности точки p. Рассмотрим выражение $X_p\langle Y, df\rangle$. Ясно, что оно линейно по X_p. С другой стороны, мы имеем

$$X_p\langle Y, df\rangle = (\mathcal{L}_X\langle Y, df\rangle)_p = \\ = \langle \mathcal{L}_X Y, df\rangle_p + \langle Y, \mathcal{L}_X\, df\rangle_p.$$

Первый член обращается в нуль, поскольку $df_p = 0$. Второй член можно переписать в виде

$$\langle Y, d(\mathcal{L}_X f)\rangle_p = \langle Y, d\langle X, df\rangle\rangle_p = Y_p\langle X, df\rangle.$$

---

[1]) Рассуждения, начинающиеся здесь и кончающиеся на стр. 174, следует рассматривать лишь как мотивировку для того, что последует дальше. Действительные результаты, которые нам понадобятся, не опираются на эти рассуждения.

Итак,

$$X_p \langle Y, df \rangle = Y_p \langle X, df \rangle.$$

Отсюда мы видим, что выражение $X_p \langle Y, df \rangle$ зависит только от Y_p (но не от продолжения Y) и линейно по Y_p. Таким образом, мы получаем симметрическую билинейную форму $H_{f,p}$ на касательном пространстве:

$$H_{f,p}(X_p, Y_p) = X_p \langle Y, df \rangle = Y_p \langle X, df \rangle.$$

Эта билинейная форма называется *гессианом* функции f в точке p. Если в некоторой системе координат $X_p = \sum \xi^i (\partial/\partial x^i)_p$, то

$$H_{f,p}(X_p, X_p) = \sum \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} \right)_p \xi^i \xi^j.$$

Как известно из анализа, для того, чтобы точка p являлась точкой минимума функции f, необходима положительная полуопределенность гессиана и достаточна его положительная определенность. Попробуем теперь сформулировать аналогичные утверждения для «бесконечномерного многообразия» всех кривых, соединяющих точки p и q.

Прежде всего мы должны определить понятие «касательного вектора» в точке этого бесконечномерного многообразия. Кривая на Ω_{pq} есть семейство $C_t(\cdot)$ кривых с $C_t(a) \equiv p$, $C_t(b) \equiv q$. Отсюда ясно, что касательный вектор на Ω_{pq} в точке C должен представлять собой векторное поле вдоль кривой C, обращающееся в нуль в точках p и q, т. е. такое кусочно дифференцируемое семейство векторов $X_s \in T_{C(s)}(M)$, что $X_a = X_b = 0$.

Расшифруем теперь условие минимума $dI_C = 0$. Пусть X_C $(=X)$ —«касательный вектор» в точке C. Предположим, что X_C можно продолжить до векторного поля X, определенного в некоторой окрестности $U \subset M$ множества $C[a, b]$; таким образом, $X_s = X_{C(s)}$. [Заметим, что в общем случае это сделать нельзя. Например, кривая C может иметь самопересечение, так что $C(s_1) = C(s_2)$, хотя $X_{s_1} \neq X_{s_2}$. В наших эвристических рассуждениях мы будем игнорировать эту возможность. Простой выход из этих затруднений состоит в рассмотрении достаточно малых кусков кривой C. Если кривая C минимизирует I, то то же верно для любого ее куска.] Векторное поле X порождает векторное поле $\widetilde{X}$ в окрестности кривой $\widetilde{C}$ в $T(M) \times R$. Действительно, пусть $T(X)$ есть вариационное векторное поле поля X (определенное в конце гл. II). Положим $\widetilde{X} = (T(X), 0)$. Читатель должен проверить, что значения поля $\widetilde{X}$ вдоль кривой $\widetilde{C}$ зависят только от поля X_C, но не от его продолжения X. Пусть α_s — локальная однопараметрическая группа, порожденная полем X, и пусть

$C_s = \alpha_s \circ C$. Тогда $\widetilde{C}_s = \widetilde{\alpha}_s \circ \widetilde{C}$, где $\widetilde{\alpha}_s$ — группа, порожденная $\widetilde{X}_s$. В соответствии с формулой (2.7) получаем

$$I(C_s) = \int\limits_{\widetilde{C}_s} \sigma = \int\limits_{\widetilde{\alpha}_s \circ \widetilde{C}} \sigma = \int\limits_{\widetilde{C}} \widetilde{\alpha}_s^* \sigma.$$

Если C есть кривая минимума, то мы должны иметь

$$\left.\frac{dI(C_s)}{ds}\right|_{s=0} = 0.$$

Но

$$\lim_{s \to 0} \frac{\widetilde{\alpha}_s^* \sigma - \sigma}{s} = \mathscr{L}_{\widetilde{X}} \sigma.$$

Значит,

$$\int\limits_{\widetilde{C}} \mathscr{L}_{\widetilde{X}} \sigma = 0.$$

Поскольку

$$\mathscr{L}_{\widetilde{X}} \sigma = \widetilde{X} \lrcorner d\sigma + d\langle \widetilde{X}, \sigma \rangle,$$

получаем

$$\int\limits_{\widetilde{C}} \widetilde{X} \lrcorner d\sigma + \int\limits_{\widetilde{C}} d\langle \widetilde{X}, \sigma \rangle = 0.$$

Но

$$\int\limits_{\widetilde{C}} d\langle \widetilde{X}, \sigma \rangle = \langle \widetilde{X}, \sigma \rangle_{\widetilde{C}(b)} - \langle \widetilde{X}, \sigma \rangle_{\widetilde{C}(a)}.$$

Вычислим теперь $\langle \widetilde{X}, \sigma \rangle$. Из определения формы σ следует, что $\langle \widetilde{X}, \sigma \rangle = \langle \mathscr{L}_* \widetilde{X}, \omega \rangle = \langle \mathscr{L}_* \widetilde{X}, \bar{\theta} - H\,dt \rangle$. Далее, $\langle \mathscr{L}_* \widetilde{X}, dt \rangle = 0$, поскольку $\langle \widetilde{X}, dt \rangle = 0$. Из определения формы $\bar{\theta}$ получаем $\langle \mathscr{L}_* \widetilde{X}, \bar{\theta} \rangle = \langle \rho_* (\mathscr{L}_* \widetilde{X}), \theta \rangle$. Пусть (v^*, t) — точка из $T^*(M) \times R$. Тогда из определения формы θ (см. § 7 гл. III) следует, что $\langle \mathscr{L}_* \widetilde{X}, \bar{\theta} \rangle = \langle X_{\pi(v^*)}, v^* \rangle$. Полагая $(v^*, t) = \mathscr{L}(\widetilde{C}(a))$, получаем

$$\langle \widetilde{X}, \sigma \rangle_{\widetilde{C}(a)} = \langle X_a, v^* \rangle = 0.$$

Аналогичное равенство справедливо для b. Поэтому $\int d\langle \widetilde{X}, \sigma \rangle = 0$, и мы получаем, что

$$\int\limits_{\widetilde{C}} \widetilde{X} \lrcorner d\sigma = 0$$

для всех X Далее,

$$\int_{\widetilde{C}} \widetilde{X} \lrcorner\, d\sigma = \int_a^b \langle \widetilde{X}_t \wedge \widetilde{C}'(t) \,|\, d\sigma\rangle\, dt.$$

Подинтегральное выражение может быть записано в виде

$$\langle \widetilde{X}_t \wedge \widetilde{C}'(t) \,|\, d\sigma\rangle = -\langle \widetilde{X}(t), \widetilde{C}'(t) \lrcorner\, d\sigma\rangle$$

Если бы $\widetilde{X}$ было произвольным векторным полем на $T(M) \times R$, то из тождества $\int_a^b \langle \widetilde{X}_t, \widetilde{C}'(t) \lrcorner\, d\sigma\rangle\, dt \equiv 0$ немедленно следовало бы, что $\widetilde{C}'(t) \lrcorner\, d\sigma \equiv 0$. Однако векторное поле $\widetilde{X}$ не вполне произвольно. [Оно должно получаться из векторного поля X на M, обращающегося в нуль в точках p и q.] Тем не менее, оказывается, что, пользуясь определением формы σ, можно вывести равенство

$$\widetilde{C}'(t) \lrcorner\, d\sigma = 0.$$

Форма $d\sigma$ на $T(M) \times R$ имеет ранг $2n$. Поэтому на $T(M) \times R$ существует единственное векторное поле Y, для которого

$$Y \lrcorner\, d\sigma = 0 \text{ и } \langle Y, dt\rangle \equiv 1.$$

Поле Y известно как *эйлерово* векторное поле. [Соответствующее дифференциальное уравнение в терминах локальных координат называется *дифференциальным уравнением Эйлера*.] Таким образом, мы видим, что если C — кривая локального минимума, то кривая $\widetilde{C}$ является интегральной кривой эйлерова векторного поля. Детали этого доказательства будут приведены в настоящем параграфе.

Попробуем теперь сформулировать квадратичные условия, содержащие гессиан. Пусть X_C и Y_C — два «касательных вектора» в точке C, и пусть X и Y — продолжающие их векторные поля на M. Мы уже видели, что если $C_s = \alpha_s \circ C$, где α_s — группа, порожденная полем X, то

$$\frac{dI(C_s)}{ds} = \int_{\widetilde{C}_s} \mathcal{L}_{\widetilde{X}}\sigma.$$

Если мы возьмем производную в точке C по направлению «касательного вектора» Y_C, то получим выражение

$$\int_{\widetilde{C}} \mathcal{L}_{\widetilde{Y}} (\mathcal{L}_{\widetilde{X}}\sigma).$$

Ясно, что это выражение линейно по $\widetilde{Y}$ вдоль $\widetilde{C}$, и, значит, линейно по Y_C. С другой стороны,

$$\int_{\widetilde{C}} \mathscr{L}_{\widetilde{Y}}(\mathscr{L}_{\widetilde{X}}\sigma) = \int_{\widetilde{C}} \mathscr{L}_{[\widetilde{X}, \widetilde{Y}]}\sigma + \int_{\widetilde{C}} \mathscr{L}_{\widetilde{X}}(\mathscr{L}_{\widetilde{Y}}\sigma).$$

Но $[\widetilde{X}, \widetilde{Y}] = \widetilde{[X, Y]}$, так что

$$\int_{\widetilde{C}} \mathscr{L}_{[\widetilde{X}, \widetilde{Y}]}\sigma = \int_{\widetilde{C}} \mathscr{L}_{\widetilde{[X, Y]}}\sigma = 0,$$

согласно уравнению Эйлера. Таким образом,

$$\int_{\widetilde{C}} \mathscr{L}_{\widetilde{Y}}(\mathscr{L}_{\widetilde{X}}\sigma) = \int_{\widetilde{C}} \mathscr{L}_{\widetilde{X}}(\mathscr{L}_{\widetilde{Y}}\sigma)$$

есть симметрическая билинейная форма от X_C и Y_C. Она называется *второй вариацией*.

Наши условия «второго порядка» связаны с положительной определенностью второй вариации. В § 4 мы сделаем предположение относительно L, гарантирующее положительную определенность второй вариации в случае, когда кривая C достаточно коротка. Оказывается, что если длина кривой C превосходит некоторую критическую длину, то вторая вариация перестает быть положительно определенной, а C — кривой минимума. Подробности будут приведены в § 5.

Перейдем [1] к получению необходимых условий слабого локального минимума. Прежде всего заметим, что если C есть кривая слабого локального минимума для L [2] на отрезке $[a, b]$, то ограничение кривой C на любой подотрезок $[d, e]$ также является кривой слабого локального минимума. Действительно, если C^* — кусочно дифференцируемая кривая, определенная на $[d, e]$ и такая, что $C^*(d) = C(d)$, $C^*(e) = C(e)$, то мы можем продолжить C^* на $[a, b]$, полагая $C^*(t) = C(t)$ для $a \leqslant t \leqslant d$ и $e \leqslant t \leqslant b$. Тогда из $I_d^e(C^*) < I_d^e(C)$ следует, что $I_a^b(C^*) < I_a^b(C)$. Таким образом, если C есть кривая локального минимума на $[a, b]$, то она является кривой локального минимума и на $[d, e]$.

При выводе необходимых условий ограничимся сначала рассмотрением подотрезка $[d, e]$, на котором кривая C дифференцируема и образ которого при отображении C лежит в координатной окрестности многообразия M. Если C — кривая минимума, то мы можем ожидать, что $\frac{d}{ds} I(C_s)\,|_{s=0} = 0$ для любого «диффферен-

[1] С этого места начинаются наши законные рассуждения.

[2] Точнее, слабого локального минимума интеграла (2.2), определяемого лагранжианом L.— *Прим. перев.*

цируемого» однопараметрического семейства кривых C_s, где $C_0 = C$. Такое однопараметрическое семейство кривых мы будем рассматривать как прямоугольник и применим к нему теорему Стокса. Пусть D_ε — прямоугольник в плоскости t, s, определяемый неравенствами $-\varepsilon \leqslant s \leqslant \varepsilon$, $d \leqslant t \leqslant e$, и пусть D_ε^+ — подмножество в D_ε, где $s \geqslant 0$, а D_ε^- — подмножество, где $s \leqslant 0$ (рис. 10).

Пусть K — дифференцируемое отображение (некоторой окрестности) прямоугольника D_ε в M, удовлетворяющее условиям

$$K(t, 0) = C(t), \qquad d \leqslant t \leqslant e, \tag{2.8}$$

$$K(d, s) = C(d), \qquad K(e, s) = C(e), \quad -\varepsilon \leqslant s \leqslant \varepsilon. \tag{2.9}$$

Отображение $K(\cdot, s)$ есть дифференцируемая кривая на M при каждом фиксированном s. Она определяет кривые $\tilde{K}(\cdot, s)$

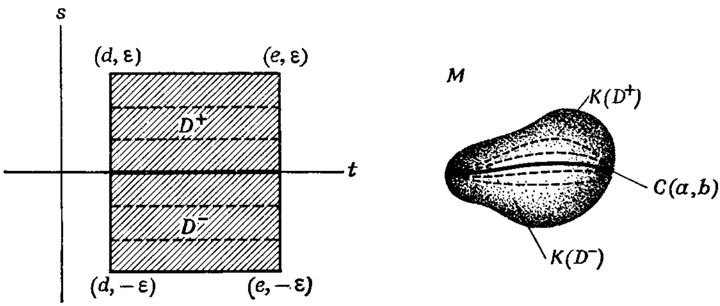


Рис. 10.

на $T(M) \times R$ и $\bar{K}(\cdot, s)$ на $T^*(M) \times R$. Таким образом, мы имеем отображения $\tilde{K}\colon D_\varepsilon \to T(M) \times R$ и $\bar{K}\colon D_\varepsilon \to T^*(M) \times R$. Прямая проверка в терминах локальных координат показывает, что эти отображения дифференцируемы. Если C — кривая слабого локального минимума, то при достаточно малом $|s|$ мы должны иметь

$$\begin{gathered} I_d^e(C) \leqslant I_d^e(K(\cdot, s)), \text{ или} \\ \int\limits_{[d,\, e]} \bar{C}^*(\omega) \leqslant \int\limits_{[d,\, e]} \bar{K}(\cdot, s)^*(\omega). \end{gathered} \tag{2.10}$$

Другими словами,

$$\int\limits_{[d,\, e]} \bar{K}^*(\cdot, 0)(\omega) - \int\limits_{[d,\, e]} \bar{K}^*(\cdot, s)(\omega) \leqslant 0.$$

Согласно условию (2.9), форма $\bar{K}^*\omega$ обращается в нуль на вертикальных сторонах прямоугольника D_ε. Следовательно, неравенство (2.10) можно записать в виде

$$\int_{\partial D_\varepsilon^+} \bar{K}^*(\omega) \leqslant 0.$$

По теореме Стокса

$$\int_{D_\varepsilon^+} \bar{K}^*(d\omega) \leqslant 0. \tag{2.11}$$

Но

$$\int_{D_\varepsilon^+} \bar{K}^*(d\omega) = \int_0^\varepsilon \int_a^b \left\langle \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_{(t,\, s)} \wedge \left(\frac{\partial}{\partial s}\right)_{(t,\, s)} \middle| \bar{K}^*(d\omega) \right\rangle dt\, ds.$$

Поскольку это верно для всех достаточно малых ε, имеем

$$\int_d^e \left\langle \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_{(t,\, 0)} \wedge \left(\frac{\partial}{\partial s}\right)_{(t,\, 0)} \middle| \bar{K}^*(d\omega) \right\rangle dt \leqslant 0.$$

Аналогично,

$$\int_{\partial(D_\varepsilon^-)} \bar{K}^*(\omega) \geqslant 0,$$

так что

$$\int_d^e \left\langle \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_{(t,\, 0)} \wedge \left(\frac{\partial}{\partial s}\right)_{(t,\, 0)} \middle| \bar{K}^*(d\omega) \right\rangle dt \geqslant 0.$$

Сравнивая неравенства, получаем

$$\int_d^e \left\langle \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_{(t,\, 0)} \wedge \left(\frac{\partial}{\partial s}\right)_{(t,\, 0)} \middle| (\bar{K}^*(d\omega))_{(t,\, 0)} \right\rangle dt = 0.$$

Но

$$\left\langle \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_{(t,\, 0)} \wedge \left(\frac{\partial}{\partial s}\right)_{(t,\, 0)} \middle| (\bar{K}^*(d\omega))_{(t,\, 0)} \right\rangle =$$
$$= \left\langle \bar{K}_*\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_{(t,\, 0)} \wedge \bar{K}_*\left(\frac{\partial}{\partial s}\right)_{(t,\, 0)} \middle| d\omega_{K(t,\, 0)} \right\rangle =$$
$$= \left\langle \bar{K}_*\left(\frac{\partial}{\partial s}\right)_{(t,\, 0)} \middle| \bar{K}_*\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_{(t,\, 0)} \lrcorner\, d\omega_{K(t,\, 0)} \right\rangle.$$

Значит,

$$\int_d^e \left\langle \bar{K}_*\left(\frac{\partial}{\partial s}\right)_{(t,\, 0)} \middle| \bar{C}_*\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) \lrcorner\, d\omega_{C(t)} \right\rangle dt = 0. \tag{2.12}$$

Равенство (2.12) имеет место для всех K, удовлетворяющих условиям (2.8) и (2.9). Сейчас мы выведем из него несколько следствий.

Пусть Y_q — касательный вектор в точке $q \in T^*(M) \times R$. В выбранных локальных координатах мы можем написать

$$Y_q = \sum_{i=1}^{n} X^i \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_q + \sum_{i=1}^{n} Y^i \left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right)_q + T \frac{\partial}{\partial t}.$$

Форма $d\omega$ имеет вид

$$d\omega = \sum dy^i \wedge dx^i - dH \wedge dt.$$

Следовательно,

$$Y_q \lrcorner\, d\omega_q = \sum_{i=1}^{n} \left(Y^i + T \frac{\partial H}{\partial x^i}\right) dx^i - \sum_{i=1}^{n} \left(X^i - T \frac{\partial H}{\partial y^i}\right) dy^i - {}$$
$$- \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial H}{\partial x^i} X^i + \frac{\partial H}{\partial y^i} Y^i\right) dt. \qquad (2.13)$$

Если Y_q — касательный вектор кривой, поднятой с M, т. е. если $Y_q = \bar{C}'(t)$, то $T = 1$, $X^i = \frac{dx^i}{dt} = \dot{x}^i = \frac{dH}{\partial y^i}$. В этом случае вторая сумма в (2.13) обращается в нуль.

По определению t-компонента точки $\bar{K}(s, t)$ равна в точности t. Значит, $\langle K_* (\partial/\partial s)_{(t,\,0)} \,|\, dt \rangle = 0$. Пусть $X_q(t)$ обозначает вектор $\bar{C}_* (\partial/\partial t)_t$ и $\bar{X}_q(t) = \bar{K}_* (\partial/\partial s)_{(t,\,0)}$. Тогда из (2.13) и (2.12) следует, что

$$\sum \int_d^e \left(Y^i + \frac{\partial H}{\partial x^i}\right) \bar{X}^i \, dt = 0. \qquad (2.14)$$

Единственное ограничение на дифференцируемые функции $\bar{X}^i$ состоит в том, что они обращаются в нуль при $t = d$ и $t = e$. Действительно, пусть $\bar{X}^i$ — это n функций, обращающихся в нуль на концах отрезка $[d, e]$. Определим отображение $K(t, s)$, полагая (в локальных координатах)

$$x^i \circ K(t, s) = x^i \circ C(t) + s\bar{X}^i(t). \qquad (2.15)$$

Формула (2.15) определяет $K(t, s)$ как дифференцируемое отображение, которое, очевидно, удовлетворяет условиям (2.8) и (2.9). Кроме того, $K_* \left(\frac{\partial}{\partial s}\right)_{(t,\,0)} = \bar{X}^i(t)$.

Таким образом, равенство (2.14) должно выполняться для всех функций $\overline{X}^i$ от t, обращающихся в нуль в концевых точках d и e. Полагая $\overline{X}^j=0$ для всех j, кроме $j=i$, имеем

$$\int_d^e \left(Y^i+\frac{\partial H}{\partial x^i}\right)\overline{X}^i\,dt=0$$

для произвольной функции $\overline{X}^i$, обращающейся в нуль в концевых точках. Это может быть только в случае, когда $Y^i+\partial H/\partial x^i=0$ для всех $t\in[d, e]$. Действительно, если $(Y^i+\partial H/dx^i)(t_0)>0$ для некоторого $t_0\in[d, e]$, то эта функция должна быть положительной и в некоторой окрестности точки t_0. Поэтому, выбирая функцию $\overline{X}^i$ положительной в точке t_0 и равной нулю вне малой окрестности точки t_0, мы получили бы, что $\int_d^e (Y^i+\partial H/\partial x^i)\,\overline{X}^i\,dt>0$.

Итак, если $Y_q(t)=\overline{C}'(t)$, то

$$X^i=\frac{\partial H}{\partial y^i},\qquad Y^i=-\frac{\partial H}{\partial x^i}\tag{2.16}$$

для всех t. Учитывая формулу (2.13), мы можем следующим образом резюмировать предыдущие рассуждения:

Лемма 2.2. *Пусть C — кривая слабого локального минимума для L. Тогда в каждой точке t, в которой кривая C дифференцируема, касательный вектор $Y_q=\overline{C}'(t)$ удовлетворяет уравнению*

$$Y_q\,\lrcorner\,d\omega_q=0.\tag{2.17}$$

Исследуем теперь точки, в которых кривая C может не быть дифференцируемой. Пусть $\bar{t}$ — такая точка, и пусть $[t_1, t_2]$ — малый отрезок, содержащий $\bar{t}$, во всех точках которого, кроме, быть может, $\bar{t}$, кривая C дифференцируема. Тогда кривую C можно рассматривать как ограничение на $[t_1, \bar{t}]$ дифференцируемого отображения отрезка $[t_1, \bar{t}+\varepsilon]$ плюс ограничение на $[\bar{t}, t_2]$ дифференцируемого отображения отрезка $[\bar{t}-\varepsilon, t_2]$. Выбирая точки t_1 и t_2 достаточно близкими, мы можем считать, что $C[t_1, t_2]$ лежит в координатной окрестности и что существуют такие дифференцируемые отображения C_1 и C_2 отрезка $[t_1, t_2]$ в M, что $C(t)=C_1(t)$ для $t_1\leqslant t\leqslant\bar{t}$ и $C(t)=C_2(t)$ для $\bar{t}\leqslant t\leqslant t_2$.

Пусть $\overline{X}^i$ — дифференцируемые функции на $[t_1, t_2]$, равные нулю в точках t_1 и t_2. Пользуясь формулой (2.15), определим три отображения K, K_1 и K_2 прямоугольника $-\varepsilon\leqslant s\leqslant\varepsilon$,

$t_1 \leqslant t \leqslant t_2$ в M, соответствующие кривым C, C_1 и C_2. Отображения K_1 и K_2 дифференцируемы, а отображение $K(\cdot, s)$ при каждом s является кусочно дифференцируемой кривой (дифферен-

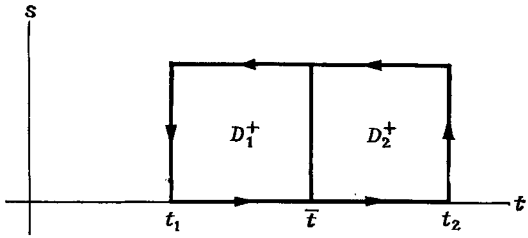


Рис. 11.

цируемой всюду, кроме точки $\bar{t}$). Действительно, $K(t, s) = K_1(t, s)$ для $t \leqslant \bar{t}$ и $K(t, s) = K_2(t, s)$ для $t \geqslant \bar{t}$.

Для достаточно малых s мы должны иметь $I_{t_1}^{t_2}(C) \leqslant$ $\leqslant I_{t_1}^{t_2}(K(\cdot, s))$, или

$$\int_{[t_1, \bar{t}]} \bar{C}^*(\omega) + \int_{[\bar{t}, t_2]} \bar{C}^*(\omega) \leqslant$$

$$\leqslant \int_{[t_1, \bar{t}]} \bar{K}(\cdot, s)^* \omega + \int_{[\bar{t}, t_2]} \bar{K}(\cdot, s)^* \omega. \qquad (2.18)$$

Добавим члены

$$\int_{[0, \varepsilon]} K_1(\bar{t}, \cdot)^* \omega \quad \text{и} \quad -\int_{[0, \varepsilon]} K_2(\bar{t}, \cdot)^* \omega.$$

Тогда мы получим (рис. 11)

$$\int_{[t_1, \bar{t}]} \bar{C}_1^*(\omega) + \int_{[0, \varepsilon]} K_1(\bar{t}, \cdot)^* \omega - \int_{[t_1, \bar{t}]} \bar{K}^*(\cdot, s)\, \omega = \int_{D_1^+} K_1^*\, d\omega,$$

$$\int_{[\bar{t}, t_2]} \bar{C}_2^*(\omega) - \int_{[0, \varepsilon]} K_2(\bar{t}, \cdot)^* \omega - \int_{[\bar{t}, t_2]} \bar{K}^*(0, s)\, \omega = \int_{D_2^+} K_2^*\, d\omega.$$

Согласно неравенству (2.18), имеем

$$\int_{[0, \varepsilon]} K_1(\bar{t}, \cdot)^* \omega - \int_{[0, \varepsilon]} K_2(\bar{t}, \cdot)^* \omega \geqslant \int_{D_1^+} K_1^*\, d\omega + \int_{D_2^+} K_2^*\, d\omega. \qquad (2.19)$$

Правую часть можно переписать в виде

$$\int_0^{\varepsilon}\int_{t_1}^{t_2}\left\langle K_*\left(\frac{\partial}{\partial s}\right)_{(t,\,s)}\middle| K_*\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_{(t,\,s)} \lrcorner\, d\omega\right\rangle dt\,ds.$$

Согласно лемме 2.2, внутренний интеграл равен нулю при $s=0$, поскольку значение подинтегрального выражения в одной точке не влияет на значение интеграла. Поэтому, разделив обе части неравенства (2.19) на ε и устремив ε к нулю, получим

$$\left\langle \bar{K}_1(t,\,\cdot)_*\left(\frac{\partial}{\partial s}\right)_{(\bar{t},\,0)}\middle|\omega_{\bar{K}_1(t,\,0)}\right\rangle-\left\langle \bar{K}_2(t,\,\cdot)_*\left(\frac{\partial}{\partial s}\right)_{(\bar{t},\,0)}\middle|\omega_{\bar{K}_2(t,\,0)}\right\rangle\geqslant 0.$$

Если рассуждать с отрицательным, а не с положительным ε, то $\geqslant 0$ заменится на $\leqslant 0$. Следовательно, имеет место равенство. Если координаты точки $\bar{K}_1(\bar{t},\,0)$ равны $\bar{x}^1,\,\ldots,\,\bar{x}^n,\,\bar{y}^1_-,\,\ldots,\,\bar{y}^n_-,\,\bar{t}$, а координаты точки $\bar{K}_2(\bar{t},\,0)$ равны $\bar{x}^1,\,\ldots,\,\bar{x}^n,\,\bar{y}^1_+,\,\ldots,\,\bar{y}^n_+,\,\bar{t}$, то полученное равенство можно записать в виде

$$\sum(\bar{y}^i_+-\bar{y}^i_-)\,\bar{X}^i(\bar{t})=0,$$

где $\bar{X}^i$ — произвольные функции. Но это означает, что

$$\bar{y}^i_+=\bar{y}^i_-. \tag{2.20}$$

Иначе говоря, $\bar{C}_1(\bar{t})=\bar{C}_2(\bar{t})$. Обе кривые $\bar{C}_1$ и $\bar{C}_2$ удовлетворяют одному и тому же дифференциальному уравнению (2.16), причем $\bar{C}_1$ при $t_1\leqslant t\leqslant\bar{t}$, а $\bar{C}_2$ — при $\bar{t}\leqslant t\leqslant t_2$. Из теоремы единственности для дифференциальных уравнений следует тогда, что $\bar{C}_1$ и $\bar{C}_2$ согласованы в точке $\bar{t}$, образуя дифференцируемую кривую. Итак, справедлива

Лемма 2.3 (Гильберт). *Если C — кривая слабого локального минимума, то C дифференцируема.*

Систематизируем полученные результаты.

Исследуем условие (2.17), где вектор Y_q задается формулой

$$Y_q=\sum X^i\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_q+\sum Y^i\left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right)_q+T\frac{\partial}{\partial t}.$$

При $T=0$ из формулы (2.13) следует, что (2.17) имеет место только для $Y_q=0$. Значит, для ненулевого вектора Y_q, удовлетворяющего условию (2.17), мы должны иметь $\langle Y_q\,|\,dt_q\rangle\neq 0$. [Это показывает, что $d\omega$ есть форма ранга $2n$ на $(2n+1)$-мерном многообразии $T^*(M)\times R$.] Форма ω не определена однозначно на $T^*(M)\times R$. Однако форма $\sigma=\mathcal{L}^*\omega$ корректно определена на $T(M)\times R$. Вектор $Y_q=\bar{C}'=\mathcal{L}_*\bar{C}'$ удовлетворяет уравнению (2.17).

Значит,

$$\widetilde{C}' \lrcorner\, d\sigma = 0, \qquad \langle \widetilde{C}', dt\rangle = 1.$$

Поскольку форма $d\omega$ имеет ранг $2n$ на $T^*(M)\times R$, форма $d\sigma$ имеет ранг $2n$ на $T(M)\times R$. Поэтому существует единственное векторное поле X на $T(M)\times R$, называемое *эйлеровым векторным полем*, для которого

$$X \lrcorner\, d\sigma = 0, \qquad \langle X, dt\rangle = 1. \tag{2.21}$$

Если C — кривая локального минимума, то C дифференцируема и $\widetilde{C}$ есть интегральная кривая поля X. Исследуем вид поля X. Предположим, что в локальных координатах

$$X = \sum X^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum \dot{X}^i \frac{\partial}{\partial \dot{x}^i} + T\frac{\partial}{\partial t}.$$

Тогда

$$\mathscr{L}_* X = \sum X^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum Y^i \frac{\partial}{\partial y^i} + \frac{\partial}{\partial t},$$

где функции X^i и Y^i задаются формулой (2.16). Из определения $\mathscr{L}^{-1}$ следует, что $\dot{x}^i = \dfrac{\partial H}{\partial y^i}$, откуда

$$X^i = \dot{x}^i, \qquad T = 1. \tag{2.22}$$

Перепишем условия (2.22) более инвариантным образом. Пусть π — проекция $T(M)\times R \to M$. Тогда условие (2.22) можно переписать в виде

$$\pi_* X_{(v,\,t)} = v, \qquad \langle X, dt\rangle = 1. \tag{2.23}$$

Векторное поле X на $T(M)\times R$, удовлетворяющее условию (2.23), называется *дифференциальным уравнением второго порядка* на M. Таким образом, эйлерово векторное поле есть дифференциальное уравнение второго порядка.

Упражнение 2.1. Показать, что интегральная кривая дифференциального уравнения второго порядка всегда имеет вид $\widetilde{C}$, где C — некоторая кривая на M.

Определение 2.4. Уравнения (2.21) называются *уравнениями Эйлера*. Записанные локально в виде (2.17), они называются *уравнениями Эйлера в форме Гамильтона*. Векторное поле X, определяемое условиями (2.21), называется *эйлеровым векторным полем*. Дифференцируемая кривая C на M называется *экстремалью*, если $\widetilde{C}$ есть интегральная кривая поля X. В случае кинетической энергии риманова многообразия экстремали называются *геодезическими*.

Таким образом, доказана

Теорема 2.1 (Эйлер). *Пусть L определяет регулярную задачу вариационного исчисления*[1]*. Необходимое условие того, что кусочно дифференцируемая кривая C является кривой слабого локального минимума для L, состоит в том, что C дифференцируема, а кривая $\tilde{C}$ является интегральной кривой поля X, определенного условиями* (2.21).

Если C — экстремаль, то кривая $\overline{C}$ в локальных координатах задается функциями $x^1(t), \ldots, x^n(t), y^1(t), \ldots, y^n(t), t$. Из уравнений Эйлера получаем

$$\frac{dx^i}{dt}=\frac{\partial H}{\partial y^i}=\dot{x}^i, \qquad \frac{dy^i}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial x^i}.$$

Но, согласно формуле (1.2),

$$\frac{\partial H}{\partial x^i}=\frac{\partial}{\partial x^i}\left\{\sum(\dot{x}^i\circ\mathscr{L}^{-1})\,y^i-L\circ\mathscr{L}^{-1}\right\}=$$

$$=\sum\frac{\partial(\dot{x}^i\circ\mathscr{L}^{-1})}{\partial x^i}y^i-\frac{\partial L\circ\mathscr{L}^{-1}}{\partial x^i}-\frac{\partial L\circ\mathscr{L}^{-1}}{\partial\dot{x}^i}\,\frac{\partial\dot{x}^i\circ\mathscr{L}}{\partial x^i}=$$

$$=-\frac{\partial L\circ\mathscr{L}^{-1}}{\partial x^i}.$$

Поскольку $y^i=\dfrac{dL}{\partial\dot{x}^i}$, мы можем записать уравнения Эйлера локально как систему дифференциальных уравнений второго порядка

$$\frac{dx^i}{dt}=\dot{x}^i, \qquad \frac{d\left(\dfrac{\partial L}{\partial\dot{x}^i}\right)}{dt}=\frac{\partial L}{\partial x^i}. \tag{2.24}$$

Пусть L — энергия, ассоциированная с римановой метрикой: $L=\frac{1}{2}\sum g_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j$. Тогда $\dfrac{\partial L}{\partial\dot{x}^i}=\sum g_{ij}\dot{x}^j$ и уравнения (2.24) принимают вид

$$\frac{d}{dt}\left(\sum g_{ij}\dot{x}^j\right)=\frac{1}{2}\sum_{k,\,l}\frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i}\dot{x}^k\dot{x}^l,$$

или

$$\sum g_{ij}\frac{d^2x^j}{dt^2}+\sum\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\frac{dx^k}{dt}\frac{dx^j}{dt}=\frac{1}{2}\sum\frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i}\frac{dx^k}{dt}\frac{dx^l}{dt}.$$

Но

$$\sum\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l}\dot{x}^k\dot{x}^l=\sum\frac{\partial g_{il}}{\partial x^k}\dot{x}^k\dot{x}^l.$$

[1] То есть L есть регулярный лагранжиан.— *Прим. перев.*

Поэтому мы можем написать

$$\sum g_{ij}\frac{d^2x^j}{dt^2}=\frac{1}{2}\sum_{k,\,l}\left(\frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i}-\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l}-\frac{\partial g_{il}}{\partial x^k}\right)\frac{dx^k}{dt}\frac{dx^l}{dt}.$$

Пусть (g^{ij}) — матрица, обратная к (g_{ij}). Положим

$$\Gamma^j_{kl}=\frac{1}{2}\sum_i g^{ij}\left(\frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i}-\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l}-\frac{\partial g_{il}}{\partial x^k}\right). \tag{2.25}$$

Тогда уравнения (2.24) для геодезических приобретают вид

$$\frac{d^2x^j}{dt^2}=\sum\Gamma^j_{kl}\frac{dx^k}{dt}\frac{dx^l}{dt}. \tag{2.26}$$

Упражнение 2.2. Пусть Ω — линейная дифференциальная форма на многообразии M. Предположим, что $C\colon [a, b]\to M$ — такая кривая, что

$$\int_{[a,\,b]} C^*\Omega\leqslant\int_{[c,\,d]} C^{1*}\Omega$$

для всех «близких» кривых, определенных на близком к $[a, b]$ отрезке $[c, d]$, для которых $C^1(c) = C(a)$, $C^1(d) = C(b)$. Показать, что все касательные векторы кривой C удовлетворяют условию $Y \lrcorner\, d\Omega = 0$. Поэтому равенства (2.17) или (2.21) служат необходимым условием того, чтобы кривая $\widetilde{C}$ являлась решением «вариационной задачи» на многообразии $T(M)\times R$, а именно, задачи минимизации $\int\sigma$ среди всех близких кривых на многообразии $T(M)\times R$.

Рассмотрим теперь случай «подвижных концов». Пусть N_1 и N_2 — подмногообразия в M. Кривая C называется кривой слабого (соответственно сильного) минимума для L относительно пары (N_1, N_2), если она удовлетворяет требованиям определения 2.3 (соответственно 2.2), где условие (2.3) заменено условием

$$C^1(a)\in N_1,\qquad C^1(b)\in N_2. \tag{2.27}$$

В то время как в определениях 2.2 и 2.3 мы требуем, чтобы сравниваемые кривые имели те же концы, что и C, теперь мы допускаем, чтобы концы менялись, оставаясь на многообразиях N_1 и N_2.

Теорема 2.2. *Пусть C — кривая слабого минимума относительно пары (N_1, N_2). Тогда C является экстремалью для L и, кроме того,*

$$\langle v_1, \overline{C}(a)\rangle=\langle v_2, \overline{C}(b)\rangle=0 \tag{2.28}$$

для всех $v_1\in T_{C(a)}(N_1)$ и $v_2\in T_{C(b)}(N_2)$.

Первая часть теоремы 2.2 очевидна: если C есть кривая слабого минимума относительно пары (N_1, N_2), то она будет и кривой слабого минимума в смысле определения 2.3. Из теоремы 2.1 следует тогда, что C — экстремаль. Достаточно доказать одно из равенств (2.28). Пусть $h=(x^1, \ldots, x^n)$ — такая система координат в окрестности U точки $C(b)$, что $N_2 \cap U$ есть множество точек, для которых $x^{k+1}=\ldots=x^n=0$. Пусть $v_2=a_1(\partial/\partial x^1)_{C(b)}+\ldots$ $\ldots+a_k(\partial/\partial x^k)_{C(b)}$. Выберем t_0 столь близким к b, чтобы $C(t)\in U$ для $t_0 \leqslant t \leqslant b$. Пусть $\overline{X}^1(t), \ldots, \overline{X}^n(t)$ — дифференцируемые функции, причем $\overline{X}^i(t)=0$ для $t \leqslant t_0$, $\overline{X}^i(b)=a_i$ $(i=1, \ldots, k)$ и $\overline{X}^i(b)=0$ для $i>k$. Выберем ε столь малым, чтобы $(x^1(t)+s\overline{X}^1(t), \ldots$ $\ldots, x^n(t)+s\overline{X}^n(t))\in h(U)$ для $t_0 \leqslant t \leqslant b$ и $|s| \leqslant \varepsilon$, где $(x^1(t), \ldots, x^n(t))=$ $=h \circ C(t)$.

Пусть K — отображение прямоугольника $D=\{|s| \leqslant \varepsilon,\ a \leqslant t \leqslant b\}$ в M, определяемое формулами $K(s, t)=C(t)$ для $a \leqslant t \leqslant t_0$ и $x^i \circ K(s, t)=x^i(t)+s\overline{X}^i(t)$ для $t_0 \leqslant t \leqslant b$. Тогда, как и раньше, мы имеем $\int\limits_{[a, b]} \overline{C}^*(\omega) \leqslant \int \overline{K}(s, \cdot)^* \omega$ при достаточно малом $|s|$. Как и при доказательстве леммы 2.2, отсюда следует для $s>0$ неравенство

$$\int\limits_{[0, s]} \overline{K}^*(\cdot, t)\, \omega \geqslant \int\limits_{D+} \overline{K}^*\, d\omega.$$

Деля его на s, устремляя s к нулю и учитывая, что C — экстремаль, получаем $\langle \overline{K}_*(\cdot, t)\,(\partial/\partial s)_{(0, b)} \,|\, \omega_{\overline{C}(b)} \rangle \geqslant 0$. Поступая так же для отрицательных s, получаем $\langle K_*(\cdot, t)\,(\partial/\partial s)_{(0, b)} \,|\, \omega_{\overline{C}(b)} \rangle \leqslant 0$. Значит,

$$\left\langle \overline{K}_*(\cdot, t)\left(\frac{\partial}{\partial s}\right)_{(0, b)} \middle|\, \omega_{\overline{C}(b)} \right\rangle = 0.$$

Но

$$\overline{K}_*(\cdot, t)\left(\frac{\partial}{\partial s}\right)_{(0, b)} = a_1 \frac{\partial}{\partial x^1} + \ldots + a_k \frac{\partial}{\partial x^k}$$

и

$$\omega_{\overline{C}(b)} = \sum y^i(b)\, dx^i_b - H\, dt, \quad \text{где} \quad \overline{C}(b) = \left(\sum y^i(b)\, dx^i_b,\ b\right).$$

Поэтому

$$\left\langle \overline{K}_*(\cdot, t)\left(\frac{\partial}{\partial s}\right)_{(0, b)} \middle|\, \omega_{\overline{C}(b)} \right\rangle = \sum_{i=1}^{k} y^i(b)\, a_i = \langle v_2 \,|\, \overline{C}(b) \rangle = 0,$$

что и доказывает теорему 2.2.

Упражнение 2.3. Показать, что если L — кинетическая энергия, ассоциированная с римановой метрикой g, то условия (2.28) означают, что вектор $C'(a)$ ортогонален к $T_{C(a)}(N_1)$ в смысле скалярного произведения на $T_{C(a)}(M)$, определяемого метрикой g, а $C'(b)$ ортогонален к $T_{C(b)}(N_2)$, т. е.

$$(v, C'(a)) = 0 \quad \text{для} \quad v \in T_{C(a)}(N_1),$$
$$(v, C'(b)) = 0 \quad \text{для} \quad v \in T_{C(b)}(N_2).$$

§ 3. ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ

Согласно § 2, каждый регулярный лагранжиан порождает векторное поле X на $T(M) \times R$, определяемое условиями (2.21). Для удобства в рассуждениях в этом параграфе мы будем снова предполагать, что $\mathcal{L}$ есть диффеоморфизм многообразия $T(M) \times R$ на $T^*(M) \times R$. Тогда форма ω корректно определена на $T^*(M) \times R$. Векторное поле $Y = \mathcal{L}_* X$ также корректно определено на $T^*(M) \times R$ и однозначно характеризуется условиями

$$Y \lrcorner\, d\omega = 0 \qquad \text{и} \qquad \langle Y, dt \rangle = 1.$$

Это векторное поле индуцирует локальный поток α на $T^*(M) \times R$, т. е. у каждой точки $p \in T^*(M) \times R$ имеется окрестность U, на которой определены отображения α_s: $U \to T^*(M) \times R$ для $s \in [-\varepsilon, \varepsilon]$. Из равенства (2.21) следует, что этот поток оставляет форму $d\omega$ инвариантной. Действительно,

$$\mathcal{L}_Y\, d\omega = Y \lrcorner\, d(d\omega) + d(Y \lrcorner\, d\omega).$$

Значит,

$$\mathcal{L}_Y\, d\omega = 0, \tag{3.1}$$

или

$$\alpha_s^*\, d\omega = d\omega. \tag{3.2}$$

Поскольку $\langle Y \mid dt \rangle = 1$, поток α переводит изохронные[1]) точки в изохронные. Более точно, $t(\alpha_s(p)) = t(p) + s$ для любой точки $p \in T^*(M) \times R$ и тех s, для которых определено $\alpha_s(p)$. Поэтому α_s определяет (локально) семейство преобразований β_s: $T^*(M) \to T^*(M)$ по формуле

$$\beta_s(q) = (\rho \circ \alpha_s(q, 0)) \tag{3.3}$$

[где ρ — проекция $T^*(M) \times R \to T^*(M)$]. [Преобразования β_s определены только локально: для любой точки $q \in T^*(M)$ существуют окрестность $U \ni q$ и отрезок $[-\varepsilon, \varepsilon]$ значений параметра s, для которых формула (3.3) имеет смысл.] Семейство β_s не обязательно является однопараметрической группой: в общем случае $\beta_{s_1+s_2} \neq \beta_{s_2}\beta_{s_1}$, поскольку поле Y может зависеть от t. Далее, форма $d\omega$ имеет вид $d\omega = \rho^* d\theta - dH \wedge dt$, так что

$$\alpha_s^*\, d\omega = \alpha_s^* \rho^* d\theta - \alpha_s^*(dH \wedge dt)$$

[1]) В оригинале simultaneous.— *Прим. перев.*

(поскольку $\alpha_s^* dt = dt$). Пусть ι_t — отображение $T^*(M) \to T^*(M) \times R$, переводящее q в (q, t), так что $\iota_t^* d\omega = d\theta$. Мы можем тогда переписать формулу (3.3) в виде $\beta_s = \rho \circ \alpha_s \circ \iota_0$. Но $\iota_s^* d\omega = d\theta$. Поэтому из (3.1) следует, что

$$d\theta = \iota_0^* \alpha_s^* d\omega = \iota_0^* (\alpha_s^* \rho^* d\theta - \alpha_s^* (dH \wedge dt)) = \iota_0^* \alpha_s^* \rho^* d\theta,$$

так как $\iota_s^* dt = 0$. Иначе говоря,

$$\beta_s^* d\theta = d\theta. \tag{3.4}$$

Это утверждение составляет теорему, впервые доказанную Пуанкаре. Используя (3.4) для формы $\Omega = d\theta \wedge \ldots \wedge d\theta$ [формы Лиувилля на $T^*(M)$], получаем

$$\beta_s^* \Omega = \Omega, \tag{3.5}$$

т. е. «мера», определяемая формой Ω, инвариантна. Это впервые обнаружил Лиувилль.

Рассмотрим теперь случай, когда L (а, значит, и H) не зависит от t.

Теорема 3.1. *Если H не зависит от t, то векторное поле Y на $T^*(M) \times R$ имеет вид $Y = (V, \partial/\partial t)$, где V есть векторное поле на $T^*(M)$, определяемое равенством*

$$V \lrcorner\, d\theta = -dH. \tag{3.6}$$

Действительно, в терминах локальных координат условие (3.6) эквивалентно условию (2.21). Но если

$$V = \sum X^i \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right) + \sum Y^i \left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right),$$

то, согласно (3.6),

$$V \lrcorner\, d\theta = \sum Y^i dx^i - \sum X^i dy^i = -dH.$$

По теореме 6.1 гл. II формула (3.6) однозначно определяет V. Далее, $\mathcal{L}_V H = V \lrcorner\, dH = -V \lrcorner\, V \lrcorner\, d\theta = 0$, и мы получаем

Следствие 3.1 (закон сохранения энергии). *В предположениях теоремы* 3.1

$$\mathcal{L}_V H = 0 \qquad (\textit{и } \mathcal{L}_X H = 0), \tag{3.7}$$

так что подмногообразия $H = \mathrm{const}$ на $T^*(M)$ [или на $T^*(M) \times R$] инвариантны относительно (локального) потока, порожденного полем V (или X).

Пусть h — некоторая константа, так что уравнение $H = h$ определяет подмногообразие W_h в $T^*(M)$. Следствие 3.1 показывает, что векторное поле V касательно к W_h (т. е. $V_x \in T_x(W_h)$ для всех $x \in W_h$). Пусть θ_h — ограничение формы θ на W_h. Тогда

поле V индуцирует векторное поле V_h на W_h, причем

$$V_h \lrcorner\, d\theta_h = 0. \tag{3.8}$$

В соответствии с упражнением 2.2 интегральные кривые поля V_h могут быть получены как экстремали вариационной задачи на W_h, а именно, задачи минимизации интеграла $\int \theta$ среди всех кривых на W_h. Само по себе это не очень интересно, поскольку нас интересуют кривые на M, а не на W_h. Однако в некоторых случаях уравнение (3.8) соответствует некоторой новой вариационной задаче на M. Например, пусть g — риманова метрика на M и лагранжиан L определен на $T(M) \times R$ равенством $L(v, t) = \frac{1}{2} g_x(v, v)$ для $v \in T_x(M)$. Отображение $\mathscr{L}$ на каждом касательном пространстве $T_x(M)$ совпадает с отображением $T_x(M) \to T_x^*(M)$, индуцированным невырожденной метрикой g. Кроме того, $H \circ \mathscr{L} = L$. Если C — экстремаль для L, то из закона сохранения энергии следует, что функция $\| C'(t) \|^2$, а значит, и функция $\| C'(t) \|$ постоянна. Кроме того, подмногообразие W_1 можно описать, указав, что $\mathscr{L}^{-1}(W_1)$ есть множество векторов единичной длины в $T(M)$. Если C — кривая на M и $\rho(\overline{C})$ лежит в W_1, то

$$\int (\rho\overline{C})^*\theta = \int (\rho\overline{C})^* \sum y^i\, dx^i = \frac{1}{2}\int_a^b \left(\sum \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}\frac{dx^i}{dt}\right) dt = \int_a^b \| C'(t) \|^2\, dt.$$

Поскольку $\| C'(t) \|^2 = 1$ есть константа, этот интеграл равен $\int_a^b \| C'(t) \|\, dt$, т. е. длине кривой C. Таким образом, если кривая C минимизирует длину дуги среди всех кривых, параметризованных пропорционально длине дуги, то, как показывает упражнение 2.2, C есть экстремаль кинетической энергии L, т. е. геодезическая.

Оказывается, что если кривая C минимизирует длину дуги, то после подходящей «перепараметризации» пропорционально длине дуги она станет экстремалью для L.

Упражнение 3.1 (принцип наименьшего действия). Доказать последнее утверждение в случае, когда C — дифференцируемая кривая, все касательные векторы которой отличны от нуля.

Ввиду технических трудностей, возникающих, если допускать кривые с обращающимся в нуль касательным вектором, мы отложим доказательство этого утверждения до § 7.

В заключение этого параграфа мы обсудим вопрос, при каких условиях поток α_s определен глобально для случая энергии риманова многообразия. В соответствии с теоремой существования для дифференциальных уравнений, если значения $\alpha_s(p)$ определены для $0 \leqslant s \leqslant s_0$ и лежат в некотором компактном подмножестве K из $T^*(M) \times R$, то $\alpha_s(p)$ определено и для $0 \leqslant s \leqslant s_0 + \varepsilon$ при достаточно малом ε. [Аналогичное утверждение верно для $s_0 < 0$.] Поэтому, если поток α_s не может быть определен глобально, то должны существовать такие $p \in T^*(M) \times R$ и $s_0 \in R$, что $\alpha_s(p)$ определены для $0 \leqslant s < s_0$ (или $0 \geqslant s > s_0$), но последовательность $\alpha_s(p)$ не имеет предела при $s \to s_0$. Это может случиться. Чтобы убедиться в этом, заметим, что если $\alpha_s(p)$ имеет предел, то это же верно для $\pi(\alpha_s(p))$. Но $\pi(\alpha_s(p))$ есть геодезическая на M. Если M' — подмногообразие в M, полученное выбрасыванием некоторой точки этой геодезической, т. е. $M' = M - q$, где $q = \pi(\alpha_{s_0}(p))$, то $\pi(\alpha_s(p))$ не имеет предела в M' при $s \to s_0$. Другими словами, если M — многообразие, для которого поток α_s определен глобально, то многообразие $M - q$ при любом $q \in M$ уже не обладает этим свойством. Интуитивно ясно, что поток α_s не определен глобально на $T^*(M - q) \times R$ потому, что $M - q$ «не полно». И действительно, мы покажем сейчас, что любое риманово многообразие M снабжается естественным образом структурой метрического пространства и что в случае, когда это метрическое пространство полно, поток α_s определен глобально. [Необходимо отметить, что вопрос о глобальном существовании потока α зависит от римановой метрики, а не только от дифференцируемой структуры многообразия M. Например, если M есть сфера со сферической метрикой, то поток α_s не определен глобально для многообразия $M - q$. Но $M - q$ диффеоморфно евклидовой плоскости, для которой поток α_s определен глобально.]

Теорема 3.2. *Пусть M — риманово многообразие. Положим*

$$d(x_1, x_2) = \inf \int_a^b \|C'(t)\| \, dt$$

для всех кусочно дифференцируемых кривых C, таких, что $C(a) = x_1$ и $C(b) = x_2$. Тогда d — метрика на M. Если многообразие M является полным метрическим пространством в этой метрике, то поток α_s определен глобально на $T^*(M) \times R$.

Прежде всего проверим, что d — метрика. Очевидно, что $d(x_1, x_2) = d(x_2, x_1)$. Далее, если $C(a) = x_1$, $C(b) = x_2$ и

$D(b) = x_2$, $D(c) = x_3$, то кривые C и D вместе образуют кусочно дифференцируемую кривую, соединяющую x_1 с x_3. Значит,

$$d(x_1, x_3) \leqslant \int_a^b \|C'(t)\| \, dt + \int_b^c \|D'(t)\| \, dt,$$

или

$$d(x_1, x_3) \leqslant d(x_1, x_2) + d(x_2, x_3).$$

Остается проверить, что из $d(x_1, x_2) = 0$ следует $x_1 = x_2$. Пусть U — такая координатная окрестность точки x_1 с координатами $x^1, \ldots, x^n$, что[1] $U = h^{-1}(B_2^n)$ и $x_1 = h^{-1}(0)$. Для любой точки $y \in h^{-1}(B_1^n)$ билинейная форма g_y положительно определена. Поскольку $h^{-1}(\overline{B_1^n})$ компактно, мы можем найти столь малое ε, что

$$\|v_y\|^2 > \varepsilon (\langle v_y \mid dx_y^1 \rangle^2 + \ldots + \langle v_y \mid dx_y^n \rangle^2)$$

для всех $y \in h^{-1}(B_1^n)$, $0 \neq v_y \in T_y(M)$.

Пусть C — любая кривая, соединяющая x_1 с x_2, т. е. $C(a) = x_1$, $C(b) = x_2$. Пусть t_1 есть точная верхняя грань тех t_0, для которых $a \leqslant t_0 \leqslant b$ и $C(t) \in h^{-1}(U)$ для всех t, таких, что $a \leqslant t < t_0$. Тогда

$$\int_a^b \|C'(t)\| \, dt > \int_a^{t_2} \|C'(t)\| \, dt$$

для любых $t_2 \leqslant t_1$. Но для всех i

$$\int_a^{t_2} \|C'(t)\| \, dt > \varepsilon \int_a^{t_2} |\langle C'(t), dx^i_{C(t)} \rangle| \, dt >$$

$$> \varepsilon \left| \int_a^{t_2} \langle C'(t), dx^i_{C(t)} \rangle \, dt \right| = \varepsilon \, |x^i(t_2)|.$$

Если $x_1 \neq x_2$, то любая кривая, соединяющая x_1 с x_2, либо должна покинуть $h^{-1}(B_1^n)$ [в этом случае $|x^i(t_2)|$ не меньше 1/2 для некоторого i], либо точка x_2 лежит в $h^{-1}(B_1^n)$ и $|x^i(t_2)| > |x^i(t_1)|$ для некоторого i. В любом случае $d(x_1, x_2) > 0$.

Теперь, когда мы знаем, что d — метрика, мы приступим к доказательству второй половины теоремы 3.2. Предположим, что M полно (т. е. полно в метрике d). Пусть точка $p \in T^*(M) \times R$ такова, что $\alpha_s(p)$ определено при $0 \leqslant s < s_0$. Мы утверждаем, что последовательность $\pi(\alpha_s(p))$ сходится при $s \to s_0$.

---

[1] Напомним, что B_r^n — шар радиуса r в E^n.— *Прим. перев.*

Действительно, s есть параметр на $\pi(\alpha_s(p))$, пропорциональный длине дуги. Значит, $d(\pi(\alpha_s(p)), \pi(\alpha_{s'}(p))) \leqslant k \mid s - s' \mid$, если $0 \leqslant s, s' < s_0$. Из полноты следует, что $\pi(\alpha_s(p))$ стремится к некоторой точке $q \in M$. Если разность $s - s_0$ достаточно мала, то $\pi(\alpha_s(p))$ будет лежать в некоторой координатной окрестности U (с компактным замыканием) точки q. Если $x^1, \ldots, x^n$ — координаты в U, то для достаточно большого k мы имеем

$$k \| v \|^2 > (\langle v \mid dx_y^1 \rangle^2 + \ldots + \langle v \mid dx_y^n \rangle^2), \qquad \pi(v) = y.$$

Пусть теперь v — касательный вектор кривой $\pi(\alpha_s(p))$. Тогда v имеет постоянную длину, так что $|\langle v | dx^i \rangle| < K$ для некоторого большого K. Значит, все точки $\alpha_s(p)$ для $s < s_0$ (и близких к s_0) принадлежат компактной окрестности в многообразии $T^*(M) \times R$. Следовательно, поток α_s может быть продолжен за точку $s_0 \in R$. Теорема 3.2 доказана.

В § 7 мы увидим, что верно и обратное утверждение: если поток α_s определен глобально, то M полно.

§ 4. ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ

В § 2 мы получили необходимые условия того, чтобы кривая была кривой минимума (теорема 2.1). В этом параграфе мы найдем достаточные условия того, чтобы экстремаль была кривой минимума. Сделаем сначала несколько простых замечаний. Пусть U — открытое подмножество в M, I — отрезок в R, а $\varphi\colon U \times I \to T(M) \times R$ — такое отображение, что $(\pi \times \mathrm{id}) \circ \varphi(x, t) = (x, t)$ для $x \in U$ и $t \in I$. При любом фиксированном t отображение $\varphi(\cdot, t)$ задает векторное поле на U; таким образом, φ определяет «систему дифференциальных уравнений» на U. Предположим далее, что

$$L \circ \varphi = 0 \quad \text{и} \quad L > 0 \quad \text{в} \quad (\pi \times \mathrm{id})^{-1}(U \times I) - \varphi(U \times I). \tag{4.1}$$

Л е м м а 4.1. *Пусть U, I, L и φ определены, как выше, причем выполняется условие* (4.1), $[a, b] \subset I$ *и* $C\colon [a, b] \to M$ — *интегральная кривая для* φ, *лежащая в* U, *т. е.*

a) $C([a, b]) \in U$,

b) $\tilde{C}(t) = \varphi(C(t), t)$.

Тогда C есть кривая минимума для L. Более точно, если $D\colon [a, b] \to U$ — любая кусочно дифференцируемая кривая, такая, что $D(a) = C(a)$, то

$$I(C) < I(D) \quad \textit{при условии, что} \quad C \neq D. \tag{4.2}$$

Доказательство вполне тривиально. Действительно, согласно условию (a) и (4.1), имеем $I(C) = 0$. Если $D \neq C$, то существует хотя бы одно $t \in [a, b]$, для которого $\tilde{D}(t) \neq \tilde{C}(t)$. Тогда $\tilde{D}(t) \in (\pi \times \mathrm{id})^{-1}(U \times I) - \varphi(U \times I)$, так что $L(\tilde{D}(t)) > 0$ и, значит, $I(D) > 0$.

Лемма 4.2. *Заменим в лемме* 4.1 *вторую часть условия* (4.1) *следующим условием*:

$$L > 0 \quad \text{в} \quad W - \varphi(U \times I),$$

где W — некоторая окрестность множества $\varphi(U \times I)$ в $(\pi \times \mathrm{id})^{-1}(U \times I)$. Тогда неравенство (4.2) *имеет место для всех D: $[a, b] \to U$, таких, что $D(a) = C(a)$, для которых $\tilde{D}(t) \in W$ (когда $\tilde{D}$ определено).*

Доказательство остается тем же самым.

Условия, налагаемые на L в этих двух леммах, вообще говоря, выполняются только в тривиальных случаях. Например, если L — энергия риманова многообразия, то единственное отображение φ, удовлетворяющее условию (4.1), сопоставляет каждому $x \in U$ нулевой касательный вектор в точке x. В этом случае интегральными кривыми будут постоянные отображения. Хотя они, без сомнения, удовлетворяют неравенству (4.2), это мало воодушевляет. Тем не менее, леммы 1 и 2 дадут нам полезную информацию. Чтобы убедиться в этом, сделаем следующее замечание: пусть S — функция на $U \times I$. Определим функцию $\tilde{S}$ на $\pi^{-1}(U \times I)$, полагая

$$\tilde{S}(v, t) = v(S) + \frac{\partial S}{\partial t}, \tag{4.3}$$

или в локальных координатах

$$\tilde{S}(x^1, \ldots, x^n, \dot{x}^1, \ldots, \dot{x}^n, t) = \sum \frac{\partial S}{\partial x^i} \dot{x}^i + \frac{\partial S}{\partial t}. \tag{4.4}$$

Тогда

$$\int_a^b \tilde{S}(\tilde{D}(t))\, dt = S(D(b), b) - S(D(a), a) \tag{4.5}$$

для любой дифференцируемой (а значит, и для любой кусочно дифференцируемой) кривой D: $[a, b] \to U$. Поэтому мы можем утверждать, что справедлива следующая

Лемма 4.3. *Пусть φ: $U \times I \to T(M) \times R$ — отображение, для которого $(\pi \times \mathrm{id}) \circ \varphi = \mathrm{id}$, и C — кривая, удовлетворяющая условиям* (a) *и* (b) *леммы* 4.1. *Предположим, что на $U \times I$*

существует такая функция S, что

$$(L-\tilde{S})\circ\varphi=0, \tag{4.6}$$

$$(L-\tilde{S})(p)>0 \text{ для всех } p\in(\pi\times\mathrm{id})^{-1}(U\times I)-\varphi(U\times I). \tag{4.7}$$

Тогда для любой кривой D: $[a, b]\to U$ (где $[a, b]=I$), для которой $D(a)=C(a)$, справедливо неравенство

$$I(C)<I(D)-S(D(b), b)+S(C(b), b), \tag{4.8}$$

если только $D\neq C$. Если условие (4.7) выполняется только для всех $p\in W-\varphi(U\times I)$, где W — окрестность множества $\varphi(U\times I)$ в $(\pi\times\mathrm{id})^{-1}(U\times I)$, то неравенство (4.8) имеет место для тех кривых D, для которых $\tilde{D}(t)\in W$ при $t\in[a, b]$.

Доказательство проводится точно так же, как доказательство леммы 4.1, если учесть формулу (4.5).

Если $D(b)=C(b)$ и $D(a)=C(a)$, то неравенство (4.8) сводится к (4.2). Это означает, что C есть кривая строгого локального минимума вариационной задачи с закрепленными концами. [Этот минимум будет сильным или слабым в зависимости от того, справедливо ли условие (4.7) для всех точек $p\in(\pi\times\mathrm{id})^{-1}(U\times I)-\varphi(U\times I)$ или только для тех, которые лежат в W.] Таким образом, для того, чтобы доказать, что данная экстремаль C будет кривой минимума, достаточно найти отображение φ, для которого C является интегральной кривой, и функцию S, такие, что выполнены условия (4.6) и (4.7). Прежде чем выяснять, когда такие φ и S существуют, сделаем одно дополнительное замечание.

Мы будем говорить, что лагранжиан L положительно определен, если для всех $p\in T(M)\times R$ матрица

$$(L_{\dot{x}^i\dot{x}^j})(p)=\frac{\partial^2 L}{\partial\dot{x}^i\,\partial\dot{x}^j}(p)$$

положительно определена. Матрица $(L_{\dot{x}^i\dot{x}^j})(p)$ зависит от выбора локальных координат $x^1, \ldots, x^n$ вблизи $\pi(p)$. Однако условие положительной определенности не зависит от выбора координат.

Это можно было бы доказать непосредственно, рассматривая формулу замены координат. Мы докажем это, дав инвариантное определение квадратичной формы $\sum L_{\dot{x}^i\dot{x}^j}\dot{x}^i\dot{x}^j$. Для этого заметим, что $\dot{x}^1, \ldots, \dot{x}^n$ — это *линейные* координаты в векторном пространстве $T_{\pi(p)}(M)$. Пусть f — функция на векторном пространстве V и $\dot{x}^1, \ldots, \dot{x}^n$ — координаты в V относительно некоторого базиса $e_1, \ldots, e_n$. Мы хотим придать инвариантный смысл квадратичной форме, которая в этом базисе имеет матрицу $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial\dot{x}^i\,\partial\dot{x}^j}\right)$.

Заметим, что любой вектор v_1 индуцирует векторное поле $l^{-1}(v_1)$ на V (сопоставляющее каждому $v \in V$ касательный вектор $l_v^{-1}(v_1)$)[1]. Если $v_1 = \sum \xi_1^i e_i$, то $l^{-1}(v_1) = \sum \xi_1^i (\partial/\partial \dot{x}^i)$. Для $p \in V$ определим билинейную форму $B_p(f)$, полагая $B_p(f)(v_1, v_2) = l_p^{-1}(v_2) \langle l^{-1}(v_1) \mid df \rangle$. В координатах имеем $\langle l^{-1}(v_1) \mid df \rangle = \sum (\partial f/\partial \dot{x}^i) \xi_1^i$. Если $v_2 = \sum \xi_2^i e_i$, то

$$l_p^{-1}(v_2) \langle l^{-1}(v_1) \mid df \rangle = \sum \frac{\partial^2 f}{\partial \dot{x}^i \partial \dot{x}^j} \xi_1^i \xi_2^j .$$

Таким образом, билинейная форма $B_p(f)$ симметрична и ее матрица имеет вид $(\partial^2 f(p)/\partial \dot{x}^i \partial \dot{x}^j)$. Это доказывает, что положительная определенность матрицы $(L_{\dot{x}^i \dot{x}^j})(p)$ не зависит от выбора локальных координат.

Лемма 4.4. *Если лагранжиан L положительно определен, то условия* (4.6) *и*

$$\frac{\partial}{\partial \dot{x}^i} (L - \widetilde{S}) \circ \varphi = 0 \tag{4.9}$$

влекут за собой выполнение условия (4.7) *для всех p из некоторой окрестности W множества $\varphi(U \times I)$. Если L — энергия, соответствующая римановой метрике*[2], *то из условия* (4.9) *следует* (4.7). [*Условие* (4.9), *хотя и выражено в терминах локальных координат, но, как легко видеть, от них не зависит. Действительно, оно означает, что если v — вектор, касательный к $T_x(M)$* (*точнее, к* $(\pi \times \mathrm{id})^{-1}(x, t)$) *в точке $\varphi(x, t)$, то $v(L - \widetilde{S}) = 0$.*]

В самом деле, функция $\widetilde{S}$ зависит от $\dot{x}^i$ линейно, так что $\partial^2 \widetilde{S}/\partial \dot{x}^i \partial \dot{x}^j = 0$. Поэтому в точке $p = \varphi(x, t)$ функция $L - \widetilde{S}$ обладает тем свойством, что $\partial(L - \widetilde{S})/\partial \dot{x}^i (p) = 0$ и матрица

$$\frac{\partial^2}{\partial \dot{x}^i \partial \dot{x}^j} (L - \widetilde{S})(p) = (L_{\dot{x}^i \dot{x}^j})(p)$$

положительно определена. Это означает, что $L - \widetilde{S}$ как функция от $\dot{x}^i$ имеет в точке p строгий минимум. Согласно условию (4.6), соответствующее минимальное значение равно нулю. Другими словами, для значений $\dot{x}^i$, достаточно близких к $\dot{x}^i(p)$, мы имеем $(L - \widetilde{S}) > 0$. Применяя это замечание ко всем точкам $p \in \varphi(U \times I)$, мы получим первую часть леммы 4.4.

---

[1] См. рассуждения перед упражнением 5.2 гл. II.— *Прим. перев.*

[2] Более общо, если L — квадратичная (не обязательно однородная) функция от $\dot{x}^i$.

Если L — энергия, ассоциированная с римановой метрикой, то она, очевидно, положительно определена. Кроме того, $L - \widetilde{S}$ при фиксированных $x \in U$ и $t \in I$ является квадратичной функцией на $T_x(M)$. Из разложения Тейлора функции $L - \widetilde{S}$ в точке $\varphi(x, t)$ видно, что условия (4.6) и (4.9) влекут за собой условие (4.7).

Итак, в случае, когда лагранжиан L положительно определен, мы должны искать отображение φ, для которого существует функция S, удовлетворяющая условиям (4.6) и (4.9). При этом удобно применить ко всем рассматриваемым объектам преобразование Лежандра, другими словами, перейти к многообразию $T^*(M) \times R$[1]. Если φ — отображение $U \times I \to T(M) \times R$, то $\psi = \mathscr{L} \circ \varphi$ отображает $U \times I$ в $T^*(M) \times R$. Таким образом, мы имеем следующую диаграмму:

$$\begin{tikzcd}
T(M)\times R \arrow[r, "\mathscr{L}"] \arrow[d, "\pi\times\mathrm{id}"] & T^*(M)\times R \arrow[d, "\pi\times\mathrm{id}"] \\
M\times R \arrow[r, "\mathrm{id}"'] \arrow[d, "\text{включение}"] & M\times R \arrow[d, "\text{включение}"] \\
U\times I \arrow[r, "\mathrm{id}"'] \arrow[uu, bend left, "\varphi"] & U\times I \arrow[uu, bend right, "\psi"']
\end{tikzcd}$$

Отображение φ определяет ψ, и обратно. Как выразить условия (4.6) и (4.9) в терминах отображения ψ? Пусть $x^1, \ldots, x^n$, $\dot{x}^1, \ldots, \dot{x}^n$, t — локальные координаты в $T(M) \times R$, а $x^1, \ldots, x^n$, $y^1, \ldots, y^n$, t — соответствующие локальные координаты в $T^*(M) \times R$. Положим

$$\dot{x}^i(x, t) = \dot{x}^i \circ \varphi(x, t), \qquad y^i(x, t) = y^i \circ \psi(x, t),$$

так что

$$y^i(x, t) = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}(\varphi(x, t)).$$

Тогда, согласно формуле (4.4),

$$\frac{\partial(L - \widetilde{S})}{\partial \dot{x}^i} \circ \varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} \circ \varphi - \frac{\partial S}{\partial x^i}.$$

---

[1]) Поскольку нас интересует только окрестность кривой $\widetilde{C}$, мы можем считать, что $\mathscr{L}$ — диффеоморфизм.

Поэтому условие (4.9) принимает вид

$$y^i(x, t) = \frac{\partial S}{\partial x^i}. \tag{4.10}$$

Далее,

$$L - \widetilde{S} = L - \sum \frac{\partial S}{\partial x^i}\dot{x}^i - \frac{\partial S}{\partial t} = L - \sum y^i \dot{x}^i - \frac{\partial S}{\partial t}.$$

Но $L - \sum y^i x^i = -H$, так что условие (4.6) приобретает вид

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H \circ \psi = 0. \tag{4.11}$$

Мы можем рассматривать (4.10) и (4.11) как одно дифференциальное уравнение в частных производных

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(x^1, \ldots, x^n, \frac{\partial S}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial S}{\partial x^n}, t\right) = 0. \tag{4.12}$$

Это уравнение известно как уравнение Гамильтона — Якоби. Вместо того чтобы прямо искать решение S этого уравнения и затем определять функции $y^i(x, t)$ по формуле (4.10), удобнее поступить иначе. Заметим, что уравнения (4.10) и (4.11) более сжато можно записать в виде

$$\psi^*\omega = dS. \tag{4.13}$$

Действительно, $\psi^*\omega = \sum y^i(x, t)\,dx^i - (H \circ \psi)\,dt$ и

$$dS = \sum \frac{\partial S}{\partial x^i}dx^i + \frac{\partial S}{\partial t}dt.$$

Сравнивая коэффициенты при dx^i и dt, получаем (4.10) и (4.11). Поэтому мы должны искать отображение ψ, для которого существует такая функция S, что $\psi^*\omega = dS$. Такая функция S заведомо существует, если $\psi^*d\omega = 0$ и $H^1(U \times I) = 0$. Другими словами, справедлива

Лемма 4.5. *Пусть лагранжиан L положительно определен. Пусть $H^1(U \times I) = 0$ и $\psi\colon U \times I \to (\pi \times \mathrm{id})^{-1}(U \times I)$ — такое отображение, что $(\pi \times \mathrm{id})\psi = \mathrm{id}$ и*

$$\psi^*d\omega = 0. \tag{4.14}$$

Тогда, если функция S задана уравнением (4.13), а $\varphi = \mathscr{L}^{-1}\circ\psi$, то φ и S удовлетворяют условиям (4.6) и (4.7) для всех p из некоторой окрестности множества $\varphi(U \times I)$. Если L — энергия, соответствующая римановой метрике, то условие (4.7) выполняется для всех $p \in (\pi \times \mathrm{id})^{-1}(U \times I)$.

Поиски отображения ψ, удовлетворяющего условию (4.13), мы разобьем на две части:

(i) нахождение такого подмногообразия $N \subset T^*(M) \times R$, что $\iota^*(\omega) = dS^*$, где ι — вложение $N \to T^*(M) \times R$, а S^* — подходящая функция на N;

(ii) нахождение подмногообразия N, удовлетворяющего (i) и такого, что ограничение $\pi \times \mathrm{id}$ на N есть диффеоморфизм многообразия N на $U \times I$ (для подходящих $U \subset M$ и $I \subset R$).

Рассмотрим сначала задачу (i). Ввиду (ii) нас интересуют $(n+1)$-мерные подмногообразия N.

Лемма 4.6. *Пусть N_0 есть n-мерное подмногообразие из $T^*(M) \times R$. Предположим, что эйлерово поле $Y = \mathscr{L}_* X$ нигде не касается N_0 и что $\iota_0^*(d\omega) = 0$, где ι_0: $N_0 \to T^*(M) \times R$ — вложение. Пусть N — подмногообразие, полученное (локально)*

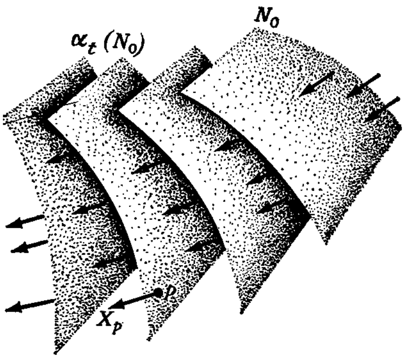


Рис. 12.

разнесением подмногообразия N_0 с помощью потока α, порожденного полем Y (рис. 12). *Тогда $\iota^*(d\omega) = 0$, где ι — вложение $N \to T^*(M) \times R$.*

Мы должны показать, что для любой пары векторов Z_1 и Z_2 из $T_p(N)$, где $p \in N$, справедливо равенство $\langle Z_1 \wedge Z_2 \mid d\omega_p\rangle = 0$. Касательное пространство $T_p(N)$ порождается вектором Y_p и подпространством $\alpha_{t*}(T_{\alpha_{-t}(p)}(N_0))$, где $\alpha_{-t}(p) \in N_0$. Если Z_1 и Z_2 лежат в $\alpha_{t*}(T_{\alpha_{-t}(p)}(N_0))$, то, поскольку $\alpha_t^* d\omega = d\omega$, имеем

$$\langle Z_1 \wedge Z_2 \mid d\omega_p\rangle = \langle \alpha_{t*}Z_1' \wedge \alpha_{t*}Z_2' \mid d\omega_p\rangle = \langle Z_1' \wedge Z_2' \mid d\omega_{\alpha_{-t}(p)}\rangle = 0,$$

$$\text{где } Z_i' = \alpha_{(-t)*}Z_i \in T_{\alpha_{-t}(p)}(N_0), \quad i = 1,2.$$

В силу линейности остается рассмотреть выражение $\langle Y_p \wedge Z_1 \mid d\omega_p\rangle = \langle Z_1 \mid Y_p \lrcorner\, d\omega\rangle$, которое равно нулю ввиду (2.17). Тем самым лемма 4.6 доказана.

Отметим, что, поскольку $\langle Y \mid dt \rangle = 1$, *поле Y нигде не касается изохронных подмногообразий, т. е. подмногообразий, на которых* $t = \mathrm{const}$.

Расмотрим пример подмногообразия N_0, удовлетворяющего условиям леммы 4.6. Пусть $x^1, \ldots, x^n$ — система координат в окрестности U точки p, и пусть $v^* = \sum y_0^i dx_p^i \in T_p^*(M)$. Пусть N_0 — подмногообразие в $T_p^*(M) \times R$, состоящее из всех точек, имеющих в локальных координатах вид

$$(x^1, \ldots, x^n, y_0^1, \ldots, y_0^n, t_0),$$

т. е. определяемое уравнениями $y^i = y_0^i$, $t = t_0$. Тогда $\iota_0^*(d\omega) = \iota_0^*\left(\sum dy^i \wedge dx^i - dH \wedge dt\right) = 0$, поскольку $\iota_0^*(dy^i) = \iota_0^*(dt) = 0$. Предположим, что окрестность U диффеоморфна пространству E^n. Тогда $N = N_0 \times I$ диффеоморфно пространству E^{n+1} и, значит, $H^1(N) = 0$. Согласно лемме 4.6, имеем $\iota^*(d\omega) = 0$, откуда $\iota^*(\omega) = dS^*$, где S^* — некоторая функция на N. Кроме того, $\pi \times \mathrm{id}$ есть диффеоморфизм некоторой окрестности точки $(q, t_0) \in \iota^{-1} \circ (\pi \times \mathrm{id})(p, t_0)$ на некоторую окрестность точки $(p, t_0) \in M \times R$. Чтобы это доказать, достаточно проверить, что линейное отображение $(\pi \times \mathrm{id})_* \circ \iota_*$ пространства $T_{(q, t_0)}(N) = T_q(N_0) + T_{t_0}(R)$ в $T_{(p, t_0)}(M \times R)$ невырожденно. Но π есть диффеоморфизм многообразия N_0 на U и $\iota_*(\partial/\partial t)_{(q, t_0)} = X_{\iota(q, t_0)}$, так что $(\pi \times \mathrm{id})_* \iota_* (\partial/\partial t)_{(q, t_0)}$ имеет ненулевой коэффициент при $\partial/\partial t$. Отсюда следует, что $(\pi \times \mathrm{id})_* \circ \iota_*$ невырожденно. Таким образом, N удовлетворяет требованиям (i) и (ii). Поэтому, если мы положим $\psi = \iota \circ \eta$, где η — отображение, обратное к $(\pi \times \mathrm{id}) \circ \iota$: $N \to M$, и $S = \psi^* S^*$, то ψ и S удовлетворяют предположениям леммы 4.5. Поскольку v^* произвольно, получаем следующее утверждение:

Теорема 4.1. *Пусть L — положительно определенный лагранжиан и C — его экстремаль, причем $C(t_0) = p$. Тогда существуют достаточно малая окрестность U точки p, отрезок $I \ni t_0$ и функция S, определенная на $U \times I$, такие, что любая кривая $B \neq C$ из достаточно малой C^1-окрестности кривой C, для которой $B(t) \in U$ при всех $t \in I$ и*

$$B(t_0) = p, \tag{4.15}$$

удовлетворяет условию

$$I(C) < I(B) + S(C(t), t) - S(B(t), t). \tag{4.16}$$

В частности, C является кривой строгого слабого локального минимума на любом отрезке $[t_0, t]$, где $t \in I$. Если L — энергия риманова многообразия [1]), *то неравенство* (4.16) *имеет место для всех*

[1]) См. примечание 2 на стр. 193.

кривых B, для которых $B(t) \in U$ при любых $t \in I$, так что C есть кривая строгого сильного локального минимума для L на $[t_0, t]$.

Действительно, поскольку вектор v^*, встречающийся в рассуждениях, предшествующих теореме, произволен, мы можем считать, что $v^* = \bar{C}(t_0)$. Определив затем φ равенством $\varphi = \mathscr{L}^{-1} \circ \psi$, мы заключим из предыдущих рассуждений, что выполнены все предположения леммы 4.3. Это доказывает теорему 4.1. Более тщательный выбор координат позволяет получить следующее утверждение:

Теорема 4.2. *Пусть L — положительно определенный лагранжиан и C — его экстремаль, причем $C(t_0) = p \in K$ и $\langle v, \bar{C}(t_0) \rangle = 0$ для всех $v \in T(K)$, где K — некоторое подмногообразие в M. Тогда существует такой отрезок I, содержащий t_0, что C есть кривая локального минимума относительно пары (N_1, N_2), где $N_1 = K$, а $N_2 = C(t)$ для любого $t \in I$.*

Действительно, выберем координаты $x^1, \ldots, x^n$ так, чтобы подмногообразие K задавалось уравнениями $x^{k+1} = \ldots = x^n = 0$. Тогда точка $v^* = \bar{C}(t_0)$ будет иметь координаты $(x_0^1, \ldots, x_0^n, 0, \ldots, 0, y_0^{k+1}, \ldots, y_0^n, t_0)$. В частности, множество $\psi((K \cap U) \times t_0)$ состоит из всех точек вида $(x^1, \ldots, x^k, 0, \ldots, 0, y_0^{k+1}, \ldots, y_0^n, t_0)$. Поэтому если j — вложение $K \cap U \to M$, то $j^* \psi^* (\omega) = 0$. Значит, функция S *постоянна на* $j(K \cap U)$. Теорема 4.2, как и предыдущая, следует теперь из леммы 4.3, если взять $a = t$ и $b = t_0$.

§ 5. СОПРЯЖЕННЫЕ И ФОКАЛЬНЫЕ ТОЧКИ, УСЛОВИЯ ЯКОБИ

В предыдущем параграфе мы показали, что для положительно определенного лагранжиана L экстремаль «локально» является кривой минимума. Это означает, что если K — подмногообразие в M, а C — такая экстремаль, что $C(t_0) \in K$ и $\langle v, \bar{C}(t_0) \rangle = 0$ для всех $v \in T(K)$, то ограничение кривой C на достаточно малый отрезок $[t_0, t]$ является кривой минимума. Однако данное нами доказательство ничего не говорит о величине отрезка, на котором C в действительности является кривой минимума. Может случиться, что C будет кривой минимума на отрезке $[t_0, t_1]$, но не будет ею ни на каком большем отрезке. Цель этого параграфа — описать точку t_1.

Введем для этого некоторые обозначения. Пусть K — подмногообразие в M; обозначим через $T^0(K)$ подмногообразие в $T^*(M)$, состоящее из точек $v^* \in T^*(M)$, таких, что $\pi(v^*) \in K$ и $\langle v \mid v^* \rangle = 0$ для всех $v \in T_{\pi(v^*)}(K)$. Легко видеть, что $T^0(K)$ действительно является подмногообразием и имеет размерность n. Если K сводится к точке, скажем p, то $T^0(K)$ есть просто $T_p^*(M)$. Пусть K задается в локальных координатах уравнениями $x^{k+1} = \ldots = x^n = 0$. Тогда $T^0(K)$ задается уравнениями $x^{k+1} = \ldots = x^n = y^1 = \ldots = y^k = 0$. Поэтому если ι_0: $T^0(K) \to T^*(M) \times R$ есть отображение, переводящее v^* в (v^*, t_0), то $\iota_0^* \omega = 0$. Следовательно, мы можем взять $T^0(K)$ в качестве N_0 в лемме 4.6. Единственная неприятность состоит в том, что проекция π сильно вырожденна на многообразии $T^0(K)$, которое она отображает в K с понижением размерности на $n-k$. Однако верна следующая

Лемма 5.1. *Пусть K — подмногообразие в M, и пусть* γ: $T^0(K) \times R \to T^*(M) \times R$ — *отображение, определяемое формулой*

$$\gamma(v^*, t) = \alpha_t(v^*, 0).$$

Тогда для каждого $v^* \in T^0(K)$ существует такое $\varepsilon > 0$, что отображение $(\pi \times \mathrm{id})_* \circ \gamma_*$ невырожденно при $0 < |t| < \varepsilon$.

Определение 5.1. Точки $t \neq 0$, для которых отображение $(\pi \times \mathrm{id})_* \circ \gamma_*$ вырожденно в точке (v^*, t), называются *фокальными точками для K вдоль C*, где C — такая экстремаль, что $\bar{C}(0) = v^*$. Если K — точка, то фокальные точки называются *сопряженными* с K.

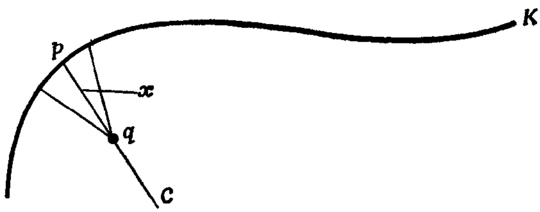


Рис. 13.

Лемма 5.1 утверждает, что при малом $|t|$ точка t не является фокальной. Грубо говоря, фокальные точки — это те точки, где пересекаются «две инфинитезимально близкие трансверсальные к K экстремали». Например, если K — кривая на плоскости, а L — энергия, ассоциированная с евклидовой метрикой, то такими экстремалями будут прямые линии, перпендикулярные к K. Две такие «инфинитезимально близкие» прямые «встретятся» в так называемом центре кривизны q кривой K. Таким образом, q есть фокальная точка для K вдоль C. На рис. 13 видно (и мы довольно скоро это докажем), что C локально минимизирует расстояние от точки $x \in C$ до K, если x лежит на интервале (p, q), и не минимизирует это расстояние даже локально, если x лежит за точкой q.

На плоскости нет сопряженных точек, поскольку экстремали, выходящие из одной точки, расходятся. Рассмотрим, однако, (единичную) сферу. Здесь экстремалями служат большие круги. Если P — северный полюс, то все экстремали, выходящие из P, встречаются в южном полюсе. Снова большие круги минимизируют расстояние, пока они не пройдут через южный полюс. Но как

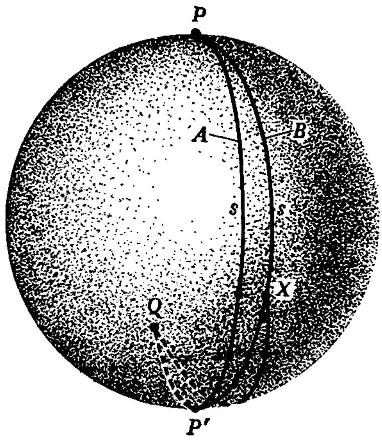


Рис. 14.

только они пройдут через южный полюс, они перестанут минимизировать расстояние даже локально. Читатель может это доказать, пользуясь рис. 14.

Прежде чем доказывать лемму 5.1, изучим так называемое «уравнение в вариациях» системы дифференциальных уравнений, введенное в конце гл. II.

Пусть N — дифференцируемое многообразие и Z — векторное поле на N. Тогда Z индуцирует векторное поле $T(Z)$ на $T(N)$. Оно определяется следующим образом: пусть α_t — локальная однопараметрическая группа диффеоморфизмов многообразия N, порожденная полем Z. Это означает, что для каждой точки $p \in N$ существуют такие окрестность $U \ni p$ и интервал $I \subset R$, содержащий нуль, что для каждого $t \in I$ определен диффеоморфизм α_t: $U \to N$ (см. § 8 гл. II). Диффеоморфизмы α_t индуцируют отображения α_{t*}: $T(U) \to T(N)$. Легко проверить, что отображения α_{t*} определяют локальную однопараметрическую группу преобразований многообразия $T(N)$ и тем самым векторное поле, которое мы обозначаем $T(Z)$. По определению $\pi \circ \alpha_{t*} = \alpha_t$, так что $\pi_*(T(Z)_v) = Z_{\pi(v)}$ для любого $v \in T(N)$ и, значит, интегральные кривые поля $T(Z)$ проектируются на интегральные кривые поля Z.

Упражнение 5.1. Векторное поле $T(Z)$ описывает поведение «инфинитезимально близких» интегральных кривых поля Z. Более точно, пусть K — отображение прямоугольника $0 < \alpha < \varepsilon$, $a < t < b$ в N, причем для любого α кривая $K(\alpha, \cdot)$ является интегральной кривой поля Z. Показать, что кривые C_α: $[a, b] \to T(N)$, где $C_\alpha(t) = K_*(\partial/\partial\alpha)_{(\alpha, t)}$, являются интегральными кривыми поля $T(Z)$.

Предположим, что в локальных координатах $z^1, \ldots, z^n$ на N поток α_t задается формулой

$$z^i \circ \alpha_t = \varphi^i(z^1, \ldots, z^n, t).$$

Тогда поток α_{t*} задается формулой

$$\alpha_{t*}\left(\frac{\partial}{\partial z^j}\right)_p = \sum_i \frac{\partial \varphi^i}{\partial z^j}\left(\frac{\partial}{\partial z^i}\right)_{\alpha_t(p)}.$$

Поэтому в соответствующих локальных координатах $z^1, \ldots, z^n$, $\dot z^1, \ldots, \dot z^n$ на $T(N)$ отображение α_{t*} имеет вид

$$z^i \circ \alpha_{t*} = \varphi^i(z^1, \ldots, z^n, t),$$

$$\dot z^i \circ \alpha_{t*} = \sum_j \dot z^j \frac{\partial \varphi^i}{\partial z^j}.$$

Взяв производную по t при $t = 0$ от обеих частей этих равенств, получим

$$\frac{\partial z^i}{\partial t} = Z^i, \qquad \frac{d\dot z^i}{dt} = \sum \dot z^j \frac{\partial Z^i}{\partial z^j}, \tag{5.1}$$

если $Z = \sum Z^i(\partial/\partial z^i)$. Иначе говоря, векторное поле $T(Z)$ имеет вид

$$T(Z) = \sum Z^i \frac{\partial}{\partial z^i} + \sum \left(\sum \dot z^j \frac{\partial Z^i}{\partial z^j}\right)\frac{\partial}{\partial \dot z^i}. \tag{5.2}$$

Применим предыдущие рассуждения к интересующему нас случаю, когда $N = T^*(M) \times R$, а $Z = Y = \mathcal{L}_* X$ — эйлерово векторное поле. Мы получим векторное поле $T(Y)$ на $T(T^*(M) \times R)$, которое будем называть *якобиевым векторным полем*. Пусть $x^1, \ldots, x^n$ — локальные координаты на M. Пусть $x^1, \ldots, x^n$, $y^1, \ldots, y^n$, t — соответствующие координаты на $T^*(M) \times R$, а $x^1, \ldots, x^n$, $y^1, \ldots, y^n$, t, $\dot x^1, \ldots, \dot x^n$, $\dot y^1, \ldots \dot y^n$, $\dot t$ — координаты на $T(T^*(M)\times R)$. Тогда поле $T(Y)$ имеет вид

$$T(Y)=\sum \frac{\partial H}{\partial y^i}\frac{\partial}{\partial x^i}-\sum \frac{\partial H}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial y^i}+\frac{\partial}{\partial t}+$$
$$+\sum\left(\sum \frac{\partial^2 H}{\partial y^i\partial x^j}\dot{x}^j+\frac{\partial^2 H}{\partial y^i\partial y^j}\dot{y}^j+\frac{\partial^2 H}{\partial y^i\partial t}\right)\frac{\partial}{\partial \dot{x}^i}-$$
$$-\sum\left(\sum \frac{\partial^2 H}{\partial x^i\partial x^j}\dot{x}^j+\frac{\partial^2 H}{\partial y^j\partial x^i}\dot{y}^j+\frac{\partial^2 H}{\partial x^i\partial t}\right)\frac{\partial}{\partial \dot{y}^i}. \tag{5.3}$$

Рассмотрим касательный вектор $V\in T_u(T^*(M)\times R)$ в точке $(u,0)\in T^*(M)\times R$, задаваемый формулой

$$V=\sum \xi_0^i\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_{(u,0)}+\sum \eta_0^i\left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right)_{(u,0)}+\tau_0\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_{(u,0)}.$$

Тогда компоненты векторов

$$\alpha_{s*}(V)=\sum \xi^i(s)\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_{\alpha_s(u,0)}+\sum \eta^i(s)\left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right)_{\alpha_s(u,0)}+$$
$$+\tau(s)\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_{\alpha_s(u,0)}$$

удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$\begin{aligned}\frac{d\xi^i}{ds}&=\sum\left(H_{y^ix^j}\xi^j+H_{y^iy^j}\eta^j+H_{y^i_t}\tau\right),\\ \frac{d\eta^i}{ds}&=-\sum\left(H_{x^ix^j}\xi^j+H_{x^iy^j}\eta^j+H_{x^i_t}\tau\right),\\ \frac{d\tau}{ds}&=0,\end{aligned}\tag{5.4}$$

где, например, $H_{y^ix^j}$ есть функция от s, определяемая формулой

$$H_{y^ix^j}(s)=\frac{\partial^2 H}{\partial y^i\partial x^j}(x^1(s),\ \ldots,\ x^n(s),\ y^1(s),\ \ldots,\ y^n(s),\ t(s))=$$
$$=\frac{\partial^2 H}{\partial y^i\partial x^j}\circ\overline{C}(s);$$

C — экстремаль, такая, что $\overline{C}(0)=(u,0)$. Аналогичный смысл имеют другие функции $H_{x^ix^j}$, $H_{y^iy^j}$, $H_{y^i_t}$, $H_{x^i_t}$, встречающиеся в правой части формулы (5.4). Из (5.4) следует, что $\tau=0$, если $\tau_0=0$. Поэтому если вектор V касается изохронного многообразия (для которого $\tau_0=0$), то это же верно и для $\alpha_{s*}(V)$, и компоненты векторов $\alpha_{s*}(V)$ удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$\begin{aligned}\frac{d\xi^i}{dt}&=\sum\left(H_{y^ix^j}\xi^j+H_{y^iy^j}\eta^j\right),\\ \frac{d\eta^i}{dt}&=-\sum\left(H_{x^ix^j}\xi^j+H_{x^iy^j}\eta^j\right).\end{aligned}\tag{5.5}$$

Заметим, что (5.5) — это *линейные* дифференциальные уравнения, которые могут быть записаны в виде

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}\xi^1\\ \vdots\\ \xi^n\\ \eta^1\\ \vdots\\ \eta^n\end{pmatrix}=\left(\begin{array}{c|c} A & B\\ \hline C & A^t\end{array}\right)\begin{pmatrix}\xi^1\\ \vdots\\ \xi^n\\ \eta^1\\ \vdots\\ \eta^n\end{pmatrix}, \tag{5.5'}$$

где A, B, C — матрицы порядка n, элементы которых определяются из (5.5). Уравнения (5.5) или (5.5′) называются дифференциальными уравнениями Якоби. Для нас особенно важно то, что B — положительно определенная симметрическая матрица. В самом деле, $(\partial^2 H/\partial y^i\, \partial y^j)$ есть просто матрица Якоби отображения $\mathcal{L}^{-1}$ (ограниченного на фиксированное пространство $T_p^*(M)\times t_0$), т. е. матрица, обратная к положительно определенной матрице $(L_{\dot{x}^i\dot{x}^j})$.

Теперь мы в состоянии доказать лемму 5.1. Чтобы показать, что отображение $(\pi\times\mathrm{id})_*\circ\gamma_{t*}$ невырожденно, достаточно проверить, что $\pi_*\circ\gamma_{t*}$ не переводит никакого ненулевого вектора $V_0\in T_u(T^0(K))$ в нуль. Если $\xi^1, \ldots, \xi^n, \eta^1, \ldots, \eta^n$ — компоненты вектора V, то $\pi_*(V)=\sum \xi^i(\partial/\partial x^i)$. Таким образом, утверждение, которое мы хотим доказать, формулируется так:

Существует такое $\varepsilon>0$, *что для любого* $t\in R$, *для которого* $0<|t|<\varepsilon$, *и любого вектора* $V_0\in T_u(T^0(K))$ *вида* $V_0=\sum \xi_0^i(\partial/\partial x^i)+$ $+\sum \eta_0^i(\partial/\partial y^i)$ *выполняется условие*

$$\pi_*\gamma_{t*}(V_0)=\sum \xi^i(t)\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)\neq 0,$$

где функции $\xi^i(t)$ *(вместе с некоторыми функциями* $\eta^i(t)$*) являются решениями системы дифференциальных уравнений* (5.5) *с начальными условиями* $(\xi^i(0), \eta^i(0))=(\xi_0^i, \eta_0^i)$.

Рассмотрим прежде всего случай, когда K есть точка p. Тогда $T^0(K)=T_p^*(M)$ и начальные условия требуют, чтобы вектор V_0 касался $T_p^*(M)$, т. е. чтобы $\pi_*V_0=0$ или $\xi_0^1=\ldots=\xi_0^n=0$. Таким образом, мы имеем семейство линейных преобразований Q_t, сопоставляющее каждому вектор-столбцу $(\eta_0^1, \ldots, \eta_0^n)$ вектор-столбец $(\xi^1(t), \ldots, \xi^n(t))$, компоненты которого являются решениями системы (5.4) при начальных условиях $\xi^i(0)=0$, $\eta^i(0)=\eta_0$.

Мы хотим показать, что при малых t преобразования Q_t невырожденны. По теореме о среднем

$$\xi^i(t) = t\frac{d\xi^i}{dt}(0) + O(t^2),$$

так что

$$\xi^i(t) = t\sum H_{y^i y^j}\eta_0^j + O(t^2).$$

Другими словами, преобразования Q_t отличаются от tP членами порядка t^2, где P — линейное преобразование, определяемое формулой

$$\xi^i = \sum H_{y^i y^j}\eta_0^j.$$

Далее, преобразование Q_t невырожденно тогда и только тогда, когда невырожденны преобразования $(1/t)\,Q_t$ (для ненулевых t). Но преобразования $(1/t)\,Q_t$ близки к невырожденному преобразованию P. Поскольку множество невырожденных преобразований открыто, отсюда следует, что при достаточно малых $t \neq 0$ преобразования Q_t невырожденны.

В более общем случае, когда K — подмногообразие, выберем координаты так, чтобы K задавалось уравнениями $x^{k+1} = \ldots = x^n = 0$. Тогда условие $V_0 \in T^0(K)$ имеет вид

$$\xi_0^{k+1} = \ldots = \xi_0^n = \eta_0^1 = \ldots = \eta_0^k = 0.$$

Снова мы имеем преобразования Q_t, сопоставляющие каждому вектору $(\xi_0^1, \ldots, \xi_0^k, \eta_0^{k+1}, \ldots, \eta_0^n)$ вектор $(\xi^1(t), \ldots, \xi^n(t))$, где ξ^i — решение системы (5.4), для которого

$$\xi^i(0) = \xi_0^i \quad \text{при} \quad i \leqslant k, \qquad \xi^i(0) = 0 \quad \text{при} \quad i > k,$$
$$\frac{d\xi^i}{dt}(0) = 0 \quad \text{при} \quad i \leqslant k, \qquad \frac{d\xi^i}{dt}(0) = \eta_0^i \quad \text{при} \quad i > k.$$

По теореме о среднем

$$\begin{aligned} \xi^i(t) &= \xi_0^i + t\sum_{j=1}^{k} H_{y^i x^j}\xi_0^j + t\sum_{j=k+1}^{n} H_{y^i y^j}\eta_0^j + O(t^2), \quad i \leqslant k,\\ \xi^i(t) &= t\sum_{j=1}^{k} H_{y^i x^j}\xi_0^j + t\sum_{j=k+1}^{n} H_{y^i y^j}\eta_0^j + O(t^2), \quad i > k. \end{aligned} \tag{5.6}$$

Пусть P_t есть линейное преобразование, переводящее $(\xi_0^1, \ldots, \xi_0^k, \eta_0^{k+1}, \ldots, \eta_0^n)$ в $(\xi^1(t), \ldots, \xi^n(t))$, где

$$\xi^i(t) = \xi_0^i + t\sum_{j=1}^{k} H_{y^i x^j}\xi_0^j + t\sum_{j=k+1}^{n} H_{y^i y^j}\eta_0^j, \qquad i \leqslant k,$$

$$\xi^i(t) = \sum_{j=1}^{k} H_{y^i x^j}\xi_0^j + \sum_{j=k+1}^{n} H_{y^i y^j}\eta_0^j, \qquad i > k$$

(заметим, что во второй формуле t отсутствует). Тогда (5.6) означает, что $L_tQ_t = P_t + O(t)$, где матрица преобразования L_t имеет вид

$$k\left\{\begin{array}{c}\\ \\ \\ \\ \\ \end{array}\right.\!\!\left(\begin{array}{c|c} \overbrace{\begin{matrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{matrix}}^{k} & 0 \\ \hline 0 & \begin{matrix} t^{-1} & & \\ & \ddots & \\ & & t^{-1} \end{matrix} \end{array}\right).$$

Поскольку преобразование L_t невырожденно, $L_tQ_t \to P$ и множество невырожденных преобразований открыто, достаточно доказать, что преобразование $P = \lim\limits_{t\to 0} P_t$ невырожденно. Но матрица преобразования P имеет вид

$$\left(\begin{array}{c|c} \begin{matrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{matrix} & 0 \\ \hline & \begin{matrix} H_{y^{k+1}y^{k+1}} & \ldots & H_{y^{k+1}y^n} \\ \vdots & & \vdots \\ H_{y^ny^{k+1}} & \ldots & H_{y^ny^n} \end{matrix} \end{array}\right).$$

Следовательно, ее определитель равен

$$\begin{vmatrix} H_{y^{k+1}y^{k+1}} & \ldots & H_{y^{k+1}y^n} \\ H_{y^ny^{k+1}} & \ldots & H_{y^ny^n} \end{vmatrix}.$$

Он положителен, поскольку матрица $(H_{y^iy^j})$ положительно определена[1]. Тем самым лемма 5.1 доказана.

Теперь мы в состоянии доказать, что экстремаль является кривой минимума вплоть до первой фокальной точки. Более точно, справедлива

Т е о р е м а 5.1. *Пусть L — положительно определенный лагранжиан на $T(M) \times R$. Пусть K — подмногообразие в M*

---

[1]) Напомним, что если матрица (A_{ij}) $(i, j = 1, \ldots, n)$ положительно определена, то такой же будет и ее подматрица порядка $n-k$, соответствующая $i, j = k+1, \ldots, n$. Действительно, эта подматрица соответствует ограничению квадратичной формы, ассоциированной с (A_{ij}), на подпространство, состоящее из векторов, у которых первые k координат равны нулю. Но ограничение положительно определенной формы есть положительно определенная форма.

и C — экстремаль, такая, что $C(t_0) \in K$ и $\overline{C}(t_0) \in T^0(K)$. Пусть t_1 — первая фокальная точка для K вдоль C и $t_0 < \bar{t} < t_1$. Тогда C есть кривая слабого локального минимума на отрезке $[t_0, \bar{t}]$ для задачи с подвижными концами, определяемой парой $\{K, C(t)\}$. Если L — квадратичная функция (например, L — кинетическая энергия, соответствующая римановой метрике), то C есть кривая сильного минимума на этом отрезке.

Мы хотим выбрать «начальное» многообразие N_0 леммы 4.6 так, чтобы $\overline{C}(t_0) \in N_0$ и проекция $\pi_* \circ \alpha_{s*}(T_{\overline{C}(t_0)}(N_0))$ была невырожденной при $0 \leqslant s \leqslant \bar{t} - t_0$. Для простоты обозначений положим $t_0 = 0$ и $s = t$. Мы уже знаем, что если взять $N_0 = T^0(K)$, то проекция будет невырожденной при $0 < t < t_1$. К сожалению, она сильно вырожденна при $t = 0$. Оказывается, однако, что можно немного пошевелить подмногообразие $N_0 = T^0(K)$ так, чтобы проекция, оставаясь невырожденной при $0 < t \leqslant \bar{t}$, стала бы невырожденной и при $t = 0$.

В действительности для любого отрезка $[\delta, t]$ из интервала $0 < t < t_1$ проекция будет невырожденной, если N_0 достаточно близко к $T^0(K)$.

В самом деле, поскольку мы по существу изучаем решения уравнений Якоби, это следует из непрерывной зависимости решений дифференциального уравнения от начальных данных.

Введем координаты $x^1, \ldots, x^n$ вблизи $C(0)$ так, чтобы K задавалось уравнениями $x^{k+1} = \ldots = x^n = 0$. Пусть (G_{ij}) — матрица порядка $n-k$, определяемая формулой

$$G_{ij} = H_{y^i y^j}(\overline{C}(0)), \qquad i, j = k+1, \ldots, n.$$

Если точка $\overline{C}(0)$ имеет координаты $(x_0^1, \ldots, x_0^n, 0, \ldots, 0, y_0^{k+1}, \ldots, y_0^n)$, то определим подмногообразия $N_0^\varepsilon \subset T^*(M)$ формулами

$$\begin{aligned}
x^i &= x_0^i + u^i, & i &= 1, \ldots, k,\\
x^i &= \varepsilon \sum_{j=k+1}^{n} G_{ij} u^j, & i &= k+1, \ldots, n,\\
y^i &= 0, & i &= 1, \ldots, k,\\
y^i &= u^i, & i &= k+1, \ldots, n.
\end{aligned}$$

Для $\varepsilon = 0$ подмногообразие N_0^ε совпадает с $T^0(K)$. При любом ε точка $u^i = 0$ есть $\overline{C}(0)$. В касательном пространстве $T_{\overline{C}(0)}(N_0^\varepsilon)$ введем координаты $v^1, \ldots, v^n$, соответствующие базису $\partial/\partial u^1, \ldots$

$\ldots, \partial/\partial u^n$. Переходя к координатам v^i, имеем

$$\begin{aligned}
&\xi_0^i = v^i, && i = 1, \ldots, k,\\
&\xi_0^i = \varepsilon \sum_{j=1}^{n} G_{ij} v^j, && i = k+1, \ldots, n,\\
&\eta_0^i = 0, && i = 1, \ldots, k,\\
&\eta_0^i = v^i, && i = k+1, \ldots, n.
\end{aligned}$$

Пусть $\xi^i(t)$, $\eta^i(t)$ — решение системы (5.5) с этими начальными условиями. Тогда мы получаем линейное отображение Q_t^ε, переводящее $(v^1, \ldots, v^n)$ в $(\xi^1(t), \ldots, \xi^n(t))$. Мы хотим найти такое ε, чтобы линейные преобразования Q_t^ε были невырожденными при $0 \leqslant t \leqslant \bar{t}$. По теореме о среднем преобразования Q_t^ε можно записать в виде

$$\xi^i(t) = v^i + t \sum_{i=1}^{k} H_{y^i x^j}(0) v^i + \varepsilon t \sum_{j,\, l=k+1}^{n} H_{y^i x^j} G_{jl} v^l + {}$$
$$+ t \sum_{j=k+1}^{n} H_{y^i y^j}(0) v^j + O(t^2) \qquad (i \leqslant k),$$

$$\xi^i(t) = \varepsilon \sum_{j=k+1}^{n} G_{ij} v^j + t \sum_{j=k+1}^{n} G_{ij} v^j + t \sum_{j=1}^{k} H_{y^i x^j} v^j + {}$$
$$+ \varepsilon t \sum_{j,\, l=k+1}^{n} H_{y^i x^j} G_{jl} v^l + O(t^2) \quad (i = k+1, \ldots, n).$$

Поэтому матрица линейного преобразования Q_t^ε (которую мы будем обозначать тем же символом) имеет вид

$$\left(\begin{array}{c|c} I + tA & \varepsilon t B + tC \\ \hline tD + \varepsilon t E & (\varepsilon + t) G \end{array}\right) + O(t^2).$$

Пусть $P_{\varepsilon+t}$ есть матрица

$$\left(\begin{array}{c|c} \begin{matrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{matrix} & 0 \\ \hline 0 & \begin{matrix} \varepsilon + t & & \\ & \ddots & \\ & & \varepsilon + t \end{matrix} \end{array}\right).$$

Для любого ε из отрезка $[0, \varepsilon_0]$ предел при $t \to +0$ матриц $P_{\varepsilon+t}^{-1} Q_t^\varepsilon$ есть невырожденная матрица

$$\left(\begin{array}{c|c} I & 0 \\ \hline 0 & G \end{array}\right).$$

Поскольку множество невырожденных матриц открыто, мы можем найти такое $\delta > 0$, что матрицы $P_{\varepsilon+t}^{-1}Q_t$, а значит, и Q_t^ε невырожденны при $0 \leqslant \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$ и $0 < t < 2\delta$. Выберем теперь $\varepsilon > 0$ столь малым, чтобы Q_t^ε были невырожденными при $\delta \leqslant t \leqslant \bar{t}$. Тогда они невырожденны при $0 < t < \bar{t}$. Но Q_0^ε есть невырожденная матрица

$$\left(\begin{array}{c|c} I & 0 \\ \hline 0 & \varepsilon G \end{array}\right).$$

Итак, матрицы Q_t^ε невырожденны при $0 \leqslant t \leqslant \bar{t}$, что и доказывает теорему 5.1.

Мы показали, что экстремаль минимизирует интеграл вплоть до первой фокальной точки. Теперь мы докажем следующую теорему, принадлежащую Якоби.

Теорема 5.2. *Экстремаль не минимизирует интеграл I после первой фокальной точки. Более точно, пусть K — подмногообразие в M и C — экстремаль, такая, что $C(t_0) \in K$ и $\bar{C}(t_0) \in T^0(K) \times t_0$. Если $\bar{t}$ есть фокальная точка для K вдоль C, то C не является кривой слабого минимума ни на каком интервале (t_0, t_1), где $t_0 < \bar{t} < t_1$ (или $t_0 > \bar{t} > t_1$).*

Идея доказательства, грубо говоря, состоит в следующем. В фокальной точке $\bar{t}$ сходятся две «инфинитезимально близкие» экстремали. Предположим, что в точке $\bar{t}$ сходятся две сколь угодно

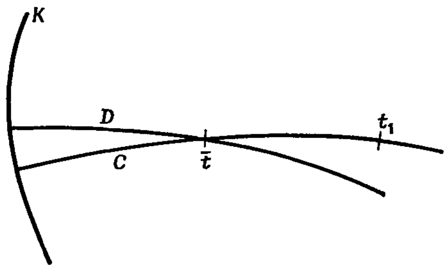


Рис. 15.

близкие *минимизирующие* экстремали C и D (рис. 15). Тогда интеграл I принимает на них одно и то же значение (поскольку обе они минимизируют I и находятся в окрестностях одна другой). Экстремали C и D не могут касаться в точке $\bar{t}$, ибо тогда они совпали бы. Поэтому кусочно дифференцируемая кривая B, равная D на $(t_0, \bar{t})$ и C на $(\bar{t}, t_1)$, не дифференцируема в точке $\bar{t}$, причем $I_{t_0}^{t_1}(B) = I_{t_0}^{t_1}(C)$. Если C — кривая минимума, то тем же свойством обладает B. Но это противоречит теореме 2.1, так как B не дифференцируема в $\bar{t}$.

Это доказательство не вполне удовлетворительно главным образом потому, что, согласно определению фокальной точки, в ней не обязательно сходятся сколь угодно близкие экстремали, а только «инфинитезимально близкие». Однако его можно исправить, дав «инфинитезимальный аналог» предыдущих рассуждений. Для этого удобно иметь единую систему координат вдоль всей кривой C [1]). Существование ее устанавливает следующая

Лемма 5.2. *Пусть C: $(t_0, t_1) \to M$ — дифференцируемая кривая. Тогда $C = F \circ B$, где F — дифференцируемое отображение*

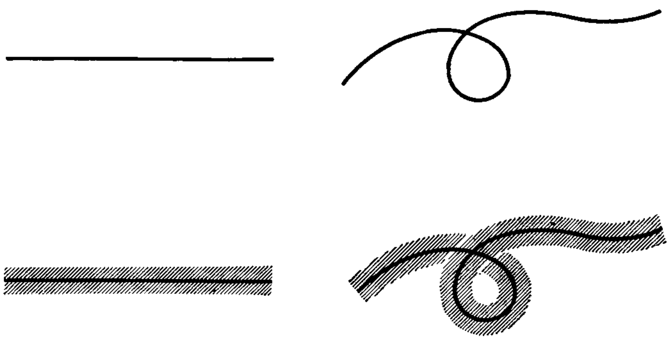


Рис. 16.

открытого множества $U \subset E^n$ в M, локально являющееся диффеоморфизмом, а B: $(t_0, t_1) \to M$ — дифференцируемая кривая в U.

Таким образом, лемма 5.2 утверждает, что всякая кривая может быть «утолщена» (см. рис. 16).

[1]) Идея доказательства состоит в том, чтобы рассматривать уравнения Якоби [уравнения (5.5)] как «уравнения Эйлера» второй вариации (см. рассуждение в § 2). Как уравнения Якоби, так и вторая вариация определены внутренним образом. Однако вторая вариация определена для векторных полей X_t вдоль кривой C. Поскольку $X_t \in T_{C(t)}(M)$, векторы X_t при разных t лежат в разных пространствах. Мы не можем рассматривать X_t как кривую в некотором фиксированном векторном пространстве, пока мы не имеем способа отождествить все касательные пространства вдоль кривой C. Это можно сделать, например, введя на M так называемую линейную связность, см. гл. VII. Наш подход будет состоять в погружении окрестности кривой C в евклидово пространство, где существует стандартное отождествление касательных пространств. В римановом случае существует каноническая связность, так что доказательство может быть проведено более инвариантным образом.

Мы отложим доказательство леммы 5.2 до следующего параграфа [1]), где мы будем располагать аппаратом, позволяющим дать простое доказательство. Воспользуемся леммой 5.2 для доказательства следующей леммы:

Лемма 5.3. *Достаточно доказать теорему* 5.2 *в случае, когда M есть открытое подмножество в E^n.*

Действительно, применяя лемму 5.2, мы можем написать $C = F \circ B$. Поскольку отображение $F\colon U \to M$ является локальным диффеоморфизмом, индуцированные отображения $F_*\colon T(U) \to T(M)$ и $F_* \times \mathrm{id}\colon T(U) \times R \to T(M) \times R$ также будут локальными диффеоморфизмами. Поэтому функция $L \circ (F_* \times \mathrm{id})$ является регулярным положительно определенным лагранжианом на U, и для любой кривой D на U интеграл $I(D)$ относительно лагранжиана $L \circ (F_* \times \mathrm{id})$ совпадает с интегралом $I(F \circ D)$ относительно L.

Если $D(0) \in F^{-1}(K \cap F(U))$, то $F(D(0)) \in K$. Поэтому если B не является кривой минимума для $L \circ (F_* \times \mathrm{id})$, то кривая $C = F \circ B$ не будет кривой минимума для L. С другой стороны, отображение $(F_* \times \mathrm{id}) \circ \mathcal{L}_U$ является локальным диффеоморфизмом $T^*(U) \times R \to T^*(M) \times R$, где $\mathcal{L}_U$ — преобразование Лежандра, соответствующее $L \circ (F_* \times \mathrm{id})$. Кроме того, $\alpha_t \circ (F_* \times \mathrm{id}) \circ \mathcal{L}_U = (F_* \times \mathrm{id}) \circ \mathcal{L}_U \alpha_{Ut}$, где α_{Ut} — поток на $T^*(U) \times R$. Отсюда следует, что если $\bar{t}$ не есть фокальная точка для $F^{-1}(K)$ вдоль B, то $\bar{t}$ не будет фокальной точкой и для K вдоль C, т. е. если $\bar{t}$ — фокальная точка для K вдоль C, то $\bar{t}$ будет также фокальной точкой для $F^{-1}(K)$ вдоль B. Поэтому если кривая B не минимизирует I за фокальной точкой, то это же верно для соответствующей кривой C. Это доказывает лемму 5.3.

До конца этого параграфа мы будем предполагать, что M — *открытое подмножество в* E^n.

Имея теперь дело с евклидовым пространством, мы можем пользоваться глобальными координатами $x^1, \ldots, x^n$, $y^1, \ldots, y^n$ и т. п., причем мы можем ввести глобальные координаты, совместимые с уравнениями (5.5)—(5.5′). Другими словами, на подмногообразии многообразия $T(T^*(M) \times R)$, состоящем из изохронных векторов пространств $T_{\bar{C}(t)}(T^*(M) \times R)$, т. е. из векторов вида $\sum \xi^i (\partial/\partial x^i)_{\bar{C}(t)} + \sum \eta^i (\partial/\partial y^i)_{\bar{C}(t)}$, мы вводим координаты $\xi^1, \ldots, \xi^n, \eta^1, \ldots, \eta^n$.

---

[1]) См. упражнение **6.3**.

Обратившись к уравнениям (5.5), мы обнаружим, что они имеют гамильтонову форму, т. е. их можно записать в виде

$$\frac{d\xi^i}{dt}=\frac{\partial\mathscr{H}}{\partial\eta^i}, \qquad \frac{d\eta^i}{dt}=-\frac{\partial\mathscr{H}}{\partial\xi^i}, \tag{5.7}$$

где

$$\mathscr{H}=\frac{1}{2}\sum_{i,\,j=1}^{n}(H_{x^ix^j}\xi^i\xi^j+2H_{x^iy^j}\xi^i\eta^j+H_{y^iy^j}\eta^i\eta^j). \tag{5.8}$$

Таким образом, если мы будем рассматривать $\xi^1, \ldots, \xi^n$ как координаты векторного пространства V относительно некоторого базиса, а $\eta^1, \ldots, \eta^n$ — как ассоциированные координаты на $T^*(V)$, то мы сможем рассматривать $\mathscr{H}$ как гамильтониан регулярной вариационной задачи, а уравнения (5.5) [или (5.7)] — как соответствующие уравнения Эйлера. Согласно теореме 1.1, мы можем это делать, если матрица $(\partial^2\mathscr{H}/\partial\eta^i\,\partial\eta^j)$ невырожденна. Но $(\partial^2\mathscr{H}/\partial\eta^i\,\partial\eta^j)=(H_{y^iy^j})$, а последняя матрица невырожденна, поскольку L — регулярный лагранжиан. Таким образом, мы получаем регулярный лагранжиан Λ на $T(V)\times R$ и преобразование Лежандра $\mathscr{L}\colon T(V)\times R\to T^*(V)\times R$, такие, что

$$\Lambda=-\mathscr{H}\circ\mathscr{L}+\sum\dot{\xi}^i\eta^i, \tag{5.9}$$

$$\dot{\xi}^i=\frac{\partial\mathscr{H}}{\partial\eta^i}=\sum_k(H_{x^ky^i}\xi^k+H_{y^iy^k}\eta^k). \tag{5.10}$$

Подставляя (5.10) в (5.9), мы получим

$$\Lambda\circ\mathscr{L}^{-1}=\frac{1}{2}\sum(-H_{x^ix^j}\xi^i\xi^j+H_{y^iy^j}\eta^i\eta^j). \tag{5.11}$$

Справедлива также

Лемма 5.4. *Если* $\Gamma(t)$ — *экстремаль для* Λ, *то*

$$I_{\Lambda t_1}^{t_2}(\Gamma)=\frac{1}{2}\sum_i(\xi^i(t_2)\,\eta^i(t_2)-\xi^i(t_1)\,\eta^i(t_1)), \tag{5.12}$$

где $\Gamma(t)=(\xi^1(t), \ldots, \xi^n(t))$.

Действительно, поскольку $\mathscr{H}$ — однородная функция степени 2 по ξ^i и η^i, имеем

$$\mathscr{H}=\frac{1}{2}\sum\left(\xi^i\frac{\partial\mathscr{H}}{\partial\xi^i}+\eta^i\frac{\partial\mathscr{H}}{\partial\eta^i}\right).$$

Если $\xi^i(t)$, $\eta^i(t)$ — решение уравнения (5.7), то отсюда следует, что

$$\mathscr{H} \circ \Gamma = \frac{1}{2} \sum (-\xi^i \dot{\eta}^i + \eta^i \dot{\xi}^i).$$

Ввиду (5.9) это влечет за собой равенство

$$\Lambda \circ \widetilde{\Gamma} = \Lambda \circ \mathcal{L}^{-1} \widetilde{\Gamma} = \frac{1}{2} \sum (\xi^i \dot{\eta}^i + \eta^i \dot{\xi}^i) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \sum (\xi^i(t) \eta^i(t)),$$

откуда и следует формула (5.12).

Нам все же хотелось бы установить более явную связь между Λ и L. Ее описывает

Лемма 5.5. *Пусть* C: $t \to (x^1(t), \ldots, x^n(t))$ — *экстремаль в* M *для* L *и* Γ: $(t_0, t_1) \to V$ — *дифференцируемая кривая в* V, $\Gamma(t) = (\xi^1(t), \ldots, \xi^n(t))$. *Определим дифференцируемое отображение* K_Γ: $(-\varepsilon, \varepsilon) \times (t_0, t_1) \to M$ *формулой*

$$x^i \circ K_\Gamma(s, t) = x^i(t) + s\xi^i(t).$$

Тогда

$$\frac{\partial}{\partial s} \int_{t_0}^{t_1} L \circ \widetilde{K}_\Gamma(0, t)\, dt = \sum_{i=1}^{n} [y^i(t_1) \xi^i(t_1) - y^i(t_0) \xi^i(t_0)], \qquad (5.13)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial s^2} \int_{t_0}^{t_1} L \circ \widetilde{K}_\Gamma(0, t)\, dt = 2 \int_{t_0}^{t_1} \Lambda \circ \Gamma(t)\, dt. \qquad (5.14)$$

Таким образом, Λ измеряет вторую производную или «вторую вариацию» лагранжиана L по «направлению» Γ.

Доказательство. Обозначим $x^i \circ K(s, t)$ через $x^i(s, t)$. Тогда $\mathscr{L}$ определяет $y^i(s, t)$ по формуле

$$y^i(s, t) = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}\left(x^i(s, t), \frac{\partial x^i}{\partial t}(s, t), t\right) \qquad (5.15)$$

и

$$L\left(x^1(s, t), \ldots, x^n(s, t), \frac{\partial x^1}{\partial t}(s, t), \ldots, \frac{\partial x^n}{\partial t}(s, t), t\right) =$$
$$= -H(x^1(s, t), \ldots, x^n(s, t), y^1(s, t), \ldots, y^n(s, t)) +$$
$$+ \sum y^i(s, t) \frac{\partial x^i}{\partial t}(s, t). \qquad (5.16)$$

Дифференцируя равенство (5.16) по s, получим

$$\frac{\partial L}{\partial s} = -\sum \frac{\partial H}{\partial x^i} \frac{\partial x^i}{\partial s} - \sum \frac{\partial H}{\partial y^i} \frac{\partial y^i}{\partial s} + \sum \frac{\partial y^i}{\partial s} \frac{\partial x^i}{\partial t} + \sum y^i \frac{\partial^2 x^i}{\partial s\, \partial t}.$$

Согласно формуле (5.15), два средних члена сокращаются, поскольку $\partial H/\partial y^i = \partial x^i/\partial t$; кроме того, $\partial x^i/\partial s = \xi^i$. Поэтому уравнение принимает вид

$$\frac{\partial L}{\partial s} = -\sum \frac{\partial H}{\partial x^i}\xi^i + \sum y^i\dot{\xi}^i. \tag{5.17}$$

Добавляя и вычитая $\sum (\partial y^i/\partial t)\,\xi^i$, получим

$$\frac{\partial L}{\partial s} = -\sum \left(\frac{\partial H}{\partial x^i} + \frac{\partial y^i}{\partial t}\right)\xi^i + \frac{\partial}{\partial t}\left(\sum y^i\xi^i\right). \tag{5.18}$$

Полагая $s=0$, находим, что $\partial H/\partial x^i + \partial y^i/\partial t = H_{x^i} + \dot{y}^i = 0$, так как C — экстремаль. Таким образом,

$$\left.\frac{\partial L}{\partial s}\right|_{s=0} = \frac{d}{dt}\left(\sum y^i\xi^i\right),$$

что доказывает формулу (5.13).

Дифференцируя равенство (5.17) по s, получим

$$\frac{\partial^2 L}{\partial s^2} = -\sum_{i,\,j}\frac{\partial^2 H}{\partial x^i\,\partial x^j}\xi^i\xi^j - \sum_{i,\,j}\frac{\partial^2 H}{\partial x^i\,\partial y^j}\xi^i\frac{\partial y^j}{\partial s} + \sum_j \frac{\partial y^j}{\partial s}\dot{\xi}^j. \tag{5.19}$$

Далее, $\partial x^i/\partial t = \partial H/\partial y^i$, так что дифференцирование по s дает

$$\dot{\xi}^i = \sum \frac{\partial^2 H}{\partial x^j\,\partial y^i}\xi^j + \sum \frac{\partial^2 H}{\partial y^i\,\partial y^j}\frac{\partial y^j}{\partial s}. \tag{5.20}$$

Умножая равенство (5.20) на $\partial y^i/\partial s$ и суммируя по i, находим

$$\sum \dot{\xi}^i\frac{\partial y^i}{\partial s} = \sum \frac{\partial^2 H}{\partial x^i\,\partial y^j}\xi^i\frac{\partial y^j}{\partial s} + \sum \frac{\partial^2 H}{\partial y^i\,\partial y^j}\frac{\partial y^i}{\partial s}\frac{\partial y^j}{\partial s}.$$

Подставляя это в (5.19), получим

$$\frac{\partial^2 L}{\partial s^2} = -\sum \frac{\partial^2 H}{\partial x^i\,\partial x^j}\xi^i\xi^j + \sum \frac{\partial^2 H}{\partial y^i\,\partial y^j}\frac{\partial y^i}{\partial s}\frac{\partial y^j}{\partial s}. \tag{5.21}$$

С другой стороны, из равенства (5.20) при $s=0$ следует, что

$$\dot{\xi}^i = \sum_j \left(H_{x^j y^i}\xi^j + H_{y^i y^j}\left.\frac{\partial y^j}{\partial s}\right|_{s=0}\right).$$

Сравнивая это с (5.10) и учитывая взаимную однозначность отображения $\mathcal{L}^{-1}$, заключаем, что

$$\left.\frac{\partial y^i}{\partial s}\right|_{s=0} = \eta^i.$$

Подстановка этого выражения в (5.21) дает

$$\left.\frac{\partial^2 L}{\partial s^2}\right|_{s=0} = -\sum H_{x^i x^j}\xi^i\xi^j + \sum H_{y^i y^j}\eta^i\eta^j. \tag{5.22}$$

Сравнение (5.22) с (5.11) завершает доказательство леммы 5.5.

Теперь мы в состоянии доказать теорему 5.2. Введем в E^n координаты, в которых подмногообразие K задается [в некоторой окрестности точки $C(t_0)$] уравнениями $x^{k+1} = \ldots = x^n = 0$. Если C есть кривая слабого минимума вариационной задачи с условиями $B(t_0) \in K$, $B(t_1) = C(t_1)$, то при достаточно малых s мы должны иметь

$$I_{t_0}^{t_1}(K_\Gamma(s, \cdot)) \geqslant I_{t_0}^{t_1}(C),$$

где Γ — кривая $\Gamma(t) = (\xi^1(t), \ldots, \xi^n(t))$, удовлетворяющая условиям $\xi^{k+1}(t_0) = \ldots = \xi^n(t_0) = 0$ и $\xi^1(t_1) = \ldots = \xi^n(t_1) = 0$. Очевидно, что $K_\Gamma(s, \cdot)$ — близкая к C кривая, удовлетворяющая тем же концевым условиям. Поскольку $C = K_\Gamma(0, \cdot)$, для всех таких Γ

$$\frac{\partial}{\partial s} I_{t_0}^{t_1}(K_\Gamma(0, \cdot)) = 0, \tag{5.23}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial s^2} I_{t_0}^{t_1}(K_\Gamma(0, \cdot)) \geqslant 0. \tag{5.24}$$

Уравнение (5.13) показывает, что равенство (5.23) имеет место для всех Γ, подчиненных нашим условиям. Действительно, условия на $\overline{C}(t_0)$ состоят в том, что $y^i(t_0) = 0$ при $i \leqslant k$, так что $\sum y^i(t_0)\,\xi^i(t_0) = 0 = \sum y^i(t_1)\,\xi^i(t_1)$. [На самом деле уравнение (5.23) эквивалентно уравнениям Эйлера и дает другое доказательство теоремы 2.1.]

Из условия (5.24) следует, согласно лемме 5.5, что

$$\int_{t_0}^{t_1} \Lambda \circ \widetilde{\Gamma}(t)\,dt \geqslant 0 \tag{5.25}$$

для всех кривых Γ, подчиненных нашим условиям. Но кривая $\Gamma(t) \equiv 0$, без сомнения, удовлетворяет всем нашим условиям и доставляет интегралу (5.25) нулевое значение. Поэтому, согласно неравенству (5.25), *минимальное значение интеграла* (5.25) *на множестве всех кривых, удовлетворяющих нашим концевым условиям, равно нулю.*

Предположим теперь, что $\bar{t}$ — фокальная точка и $t_0 < \bar{t} < t_1$ (рис. 17). По определению фокальной точки существует такой ненулевой вектор $V = (\xi_0^1, \ldots, \xi_0^k, 0, \ldots, 0; 0, \ldots, 0, \eta_0^{k+1}, \ldots, \eta_0^n)$, что решение Γ уравнений (5.5), определяемое функциями $\xi^i(t)$, $\eta^i(t)$, такими, что $\xi^i(t_0) = \xi_0^i$, $\eta^i(t_0) = \eta_0^i$, удовлетворяет условию $\xi^i(\bar{t}) = 0$ при всех i. Поскольку Γ есть решение уравнений (5.5) или (5.7), мы имеем, согласно лемме 5.4,

$$\int_{t_0}^{t_1} L \circ \widetilde{\Gamma}(t)\,dt = \sum (\xi^i(\bar{t})\,\eta^i(\bar{t}) - \xi^i(t_0)\,\eta^i(t_0)) = 0. \tag{5.26}$$

Рассмотрим кривую $\underline{\Gamma}$, совпадающую с Γ при $t_0 \leqslant t \leqslant \bar{t}$ и с 0 при $\bar{t} \leqslant t \leqslant t_1$. Она доставляет нулевое значение интегралу $\int\limits_{t_0}^{t_1} \Lambda \circ \underline{\Gamma}\, dt$ и, следовательно, является кривой минимума, а, значит, и экстремалью для Λ. С другой стороны, $\underline{\Gamma}$ *не дифференцируема* в точке $\bar{t}$,

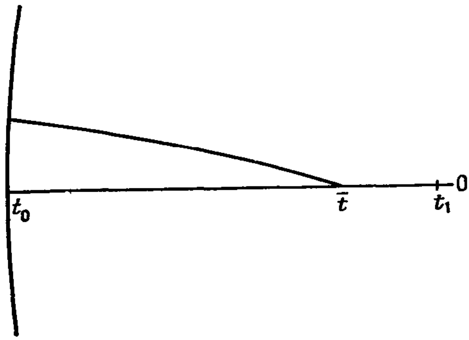


Рис. 17.

ибо в противном случае, согласно теореме единственности решения, примененной к уравнению (5.5), она бы тождественно обращалась в нуль. Это противоречит теореме 2.1 (примененной к Λ) и доказывает теорему 5.2.

§ 6. РИМАНОВ СЛУЧАЙ

Поскольку лагранжиан $L = \frac{1}{2} \| \;\|^2$ не зависит от t, в соответствии с теоремой 3.1 существует такое векторное поле V на $T^*(M)$, что $Y = (V, \partial/\partial t)$. Так как отображение $\mathcal{L}$ индуцирует диффеоморфизм многообразия $T(M)$ на $T^*(M)$, поле V определяет некоторое векторное поле Z на $T(M)$. Фактически мы уже встречались с полем Z, записанным в локальных координатах (см. конец § 2). Локальный поток δ_t, порожденный полем Z, называется *геодезическим потоком на* $T(M)$. Как мы уже видели в § 3, в случае, когда M полно, поток δ_t определен глобально. Мы хотим теперь более детально изучить поток δ_t и векторное поле Z. Прежде всего, если $v \in T(M)$, то $\pi_*(Z_v) = v \in T_{\pi(v)}(M)$. На самом деле это верно для всех векторных полей на $T(M)$, которые соответствуют «дифференциальным уравнениям второго порядка» на M. Далее, примем во внимание поведение поля Z при «растяжениях». Мультипликативная группа вещественных чисел R^* (т. е. все $t \neq 0$) действует как группа преобразований многообразия

$T(M)$ для любого многообразия M: действительно, положим $\mu_t(v) = tv$ для $v \in T(M)$ и $t \in R^*$. Легко видеть, что эта формула определяет дифференцируемое действие группы R^* на $T(M)$: $\mu_{t_1} \circ \mu_{t_2} = \mu_{t_1 t_2}$ и $\pi \circ \mu_t = \pi$.

В координатах имеем $x^i \circ \mu_t = x^i$, $\dot{x}^i \circ \mu_t = t\dot{x}^i$. Значит, $\mu_{t*}(\partial/\partial\dot{x}^i)_v = t(\partial/\partial\dot{x}^i)_{tv}$. Поэтому из формулы (2.26) (или просто из определений) следует, что $\mu_t^* Z = (1/t) Z$[1]).

Определение 6.1. Пусть M — дифференцируемое многообразие. Векторное поле W на $T(M)$, удовлетворяющее условиям

$$\pi_*(W_v) = v \quad \text{для} \quad \text{всех } v \in T(M), \tag{6.1}$$

$$\mu_t^* W = \frac{1}{t} W, \tag{6.2}$$

называется *пульверизацией*. Пульверизация называется *полной*, если порожденный ею поток определен глобально.

Резюмируя предыдущие замечания, можно сказать, что если M — риманово многообразие, то векторное поле Z является пульверизацией. Мы назовем Z *геодезической пульверизацией* риманова многообразия M.

Предположим, что W — векторное поле на касательном расслоении многообразия M и p — точка из M. Тогда для достаточно малой окрестности V нуля в $T_p(M)$ и отрезка I, содержащего нуль, в R, поле W индуцирует отображение $V \times I \to M$. Действительно, пусть δ_t — поток, порожденный полем W. Выберем V и I так, чтобы $\delta_t(v)$ было определено для $v \in V$, $t \in I$. Тогда отображение σ, задаваемое формулой $\sigma(v, t) = \pi \circ \delta_t(v)$, будет дифференцируемым отображением $V \times I \to M$. Предположим, что поле W удовлетворяет условию (6.1). Для $v \in V$ определим кривую C_v, полагая $C_v(t) = \pi \circ \delta_t(v)$. Из условия (6.1) следует, что $C_v'(t) = \delta_t(v)$. Предположим, что W удовлетворяет также и условию (6.2). Тогда мы имеем

$$\mu_t \circ \delta_s = \delta_{s/t} \circ \mu_t. \tag{6.3}$$

Действительно, из упражнения 8.4 гл. II мы знаем, что $\mu_t \circ \delta_s = \lambda_s \circ \mu_t$, где λ — поток, порожденный полем $\mu_t^* W$. Но $\mu_t^* W = (1/t) W$, так что $\lambda_s = \delta_{s/t}$, откуда следует формула (6.3). Поэтому в случае пульверизации отображение σ удовлетворяет условию

$$\sigma(tv, s) = \sigma(v, ts). \tag{6.4}$$

---

[1]) Напомним, что для любого векторного поля Z векторное поле $\mu_t^* Z$ определяется формулой $(\mu_t^* Z)_v = \mu_{-t_*}(Z_{\mu_t(v)})$.

Следовательно, существует такая окрестность нуля $U \subset T_p(M)$, что отображение $\sigma(v, t)$ определено при всех $v \in U$ и $|t| \leqslant 2$, $t \in R$. Определим отображение exp: $U \to M$, полагая

$$\exp(v) = \sigma(v, 1). \tag{6.5}$$

[Если W — полная пульверизация, то exp и σ определены для всех $v \in T_p(M)$.] Изучим отображение $\exp_*$: $T_0(T_p(M)) \to T_p(M)$. Прямая tv, согласно формуле (6.4), переходит при отображении exp в кривую $C_v(t)$. Значит, $\exp_*$ переводит касательный вектор прямой tv в точке нуль в касательный вектор кривой $C_v(t)$ при $t = 0$. Но касательный вектор кривой $C_v(t)$ при $t = 0$ равен v. Таким образом, $\exp_*$ переводит касательный вектор прямой tv в v. Но это не что иное, как отображение отождествления l_0: $T_0(T_p(M)) \to T_p(M)$, описанное в § 5 гл. II. Другими словами, отображение $\exp_*$: $T_0(T_p(M)) \to T_p(M)$ совпадает с l_0. Итак, нами доказана

Теорема 6.1. *Пусть W — пульверизация, а δ — порожденный ею поток. Для любой точки $p \in M$ и любого отрезка $I \subset R$ существует такая окрестность V нуля в $T_p(M)$, что формула $\sigma(v, t) = \pi\delta_t(v)$ определяет отображение σ: $V \times I \to M$ и это отображение удовлетворяет условию* (6.4). *Если определить отображение* exp *формулой* (6.5), *то оно будет переводить прямые, проходящие через начало координат, в интегральные кривые поля W, а отображение* $\exp_*$ *будет совпадать в начале координат с отображением l_0.*

Поскольку отображение $\exp_*$ невырожденно в начале координат, оно определяет диффеоморфизм некоторой окрестности начала координат в $T_p(M)$ на окрестность U точки p из M. Назовем окрестность U вместе с отображением $\exp^{-1}$ *нормальной картой* вокруг p, а саму окрестность U — *нормальной окрестностью* точки p. Если мы выберем некоторый базис пространства $T_p(M)$, то соответствующие (линейные) координаты в $T_p(M)$ определят систему координат в U, которую мы назовем *нормальной системой координат в точке* p. Если $x^1, \ldots, x^n$ — нормальная система координат в точке p, то $x^i(p) = 0$ и интегральные кривые поля W, проходящие через p, задаются уравнениями $x^i(t) = tx_0^i$.

Применим предыдущие рассмотрения к случаю, когда M — риманово многообразие, а $W = Z$ — геодезическая пульверизация. В этом случае мы можем связать геодезический поток δ с потоком α на $T^*(M) \times R$. Действительно, из определений немедленно следует, что $\alpha_s(v^*, t) = (\mathscr{L} \circ \delta_s \circ \mathscr{L}^{-1}v^*, t + s)$. Значит, $(\pi \times \mathrm{id}) \circ \alpha_s(v^*, 0) = \pi\sigma(v, s) \times s$. В частности, если U — нормальная окрестность точки p, то отображение $(\pi \times \mathrm{id}) \circ \alpha_s$ является диффеоморфизмом множества $\mathscr{L} \circ \mu_{1/s}(\exp^{-1} U)$ на $U \times s$.

Мы знаем также из теоремы 4.1, что если C — геодезическая риманова многообразия M и $C(0) = p$, то C есть кривая сильного локального минимума энергии (вариационной задачи с закрепленными концами) вплоть до первой сопряженной с p точки.

Заметим, далее, что для любого компактного множества $U \subset T_p(M)$ существует положительное число $\rho(U)$, такое, что любая точка t, сопряженная с p вдоль некоторой геодезической C, для которой $C(0) = p$ и $C'(0) \in U$, удовлетворяет неравенству $|t| > \rho(U)$. [Это следует очевидным образом из соображений непрерывности.]

Лемма 6.1 (лемма Гаусса). *Пусть S_r — сфера радиуса r в $T_p(M)$, т. е. $S_r = \{v \mid \|v\| = r\}$. Пусть C — геодезическая,*

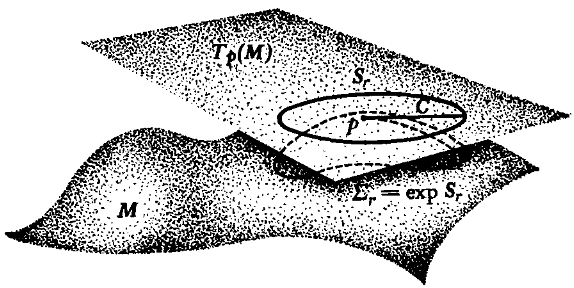


Рис. 18.

$C(0) = p$, параметризованная длиной дуги. [Заметим, что при достаточно малых r множество $\exp S_r$ является подмногообразием в M; мы обозначим его Σ_r. Ясно, что $C(r) \in \Sigma_r$ при любом r.] *Тогда при достаточно малых r вектор $C'(r)$ ортогонален к Σ_r* (рис. 18).

[Очевидно, что лучи, выходящие из начала координат в $T_p(M)$, ортогональны в евклидовой метрике сферам с центром в начале координат. Лемма 6.1 утверждает, что их образы при отображении $\exp$ остаются ортогональными в римановой метрике многообразия M.]

Доказательство. Выберем r меньшим, чем минимальное расстояние до сопряженных точек, т. е. $r < \rho(S_1)$. Тогда все геодезические C, для которых $C'(0) \in S_1$, минимизируют энергию на отрезке $[0, r]$ в вариационной задаче с закрепленными концами. С другой стороны, минимальное значение этой энергии равно r. Более точно, r есть минимальное значение интеграла энергии на множестве всех кривых B: $[0, r] \to M$, для которых $B(0) = p$ и $B(r) \in \Sigma_r$. Но тогда по теореме 2.2 кривая C ортогональна к Σ_r.

Переформулируем этот последний результат. Функция r $[r(v) = \|v\| = \sqrt{(v, v)}$ для $v \in T_p(M)]$ однозначно определена на $T_p(M)$ и дифференцируема всюду, кроме начала координат. Функция $\tau = r \circ \exp^{-1}$ определена в любой нормальной окрестности U точки p и дифференцируема в U всюду, кроме точки p. Пусть C — геодезическая, выходящая из p и параметризованная длиной дуги, причем $C(t) = q$. Тогда $\langle C'(t), d\tau_q \rangle = \langle l(t), dr \rangle = 1$ [где $l(t)$ — прямая в $T_p(M)$, проходящая через начало координат и имеющая единичный касательный вектор]. Лемма 6.1 утверждает, что если t достаточно мало, то гиперплоскость в $T_q(M)$, определяемая уравнением $d\tau_q = 0$, ортогональна к единичному вектору $C'(t)$. Дополнив $C'(t)$ до ортонормированного базиса $C'(t), e_2, \ldots, e_n$ пространства $T_q(M)$, получаем $\langle C'(t), d\tau_q \rangle = 1$, $\langle e_j, d\tau_q \rangle = 0$ для $j \geqslant 2$. Значит, дуальным к базису $C'(t), e_2, \ldots, e_n$ будет базис $d\tau_q, e_2^*, \ldots, e_n^*$. Поэтому если g_q есть метрика в точке q, то $g_q = d\tau_q^2 + (e_2^*)^2 + \ldots + (e_n^*)^2$. Другими словами, доказана

Лемма 6.2. *Пусть g — риманова метрика на M и $p \in M$. Тогда существует достаточно малая нормальная окрестность W точки p, такая, что*

$$g = d\tau^2 + h \tag{6.6}$$

во всех точках из $W - p$, где h — положительно полуопределенная симметрическая дифференциальная форма. Кроме того, из $\langle v_q \circledcirc v_q, h_q \rangle = 0$ следует, что v_q есть касательный вектор (единственной) лежащей в W геодезической C, соединяющей точку p с точкой q.

Для доказательства достаточно положить $h_q = (e_2^*)^2 + \ldots + (e_n^*)^2$. Из леммы 6.2 следует

Лемма 6.3. *Пусть p и W — такие, как в лемме 6.2. Для любой точки $q \in W$ геодезическая C, соединяющая p с q, доставляет абсолютный минимум длине дуги, т. е. величине $\int \|C'(t)\| dt = d(p, q)$. Любая кривая B длины $d(p, q)$, соединяющая p с q, имеет вид $B(t) = C(\alpha(t))$, где α — некоторая монотонная функция.*

Действительно, пусть $q \in \Sigma_r$. Тогда $\int_0^r \|C'(t)\| dt = r$. Пусть B — любая кривая, такая, что $B(0) = p$, $B(a) = q$, и пусть t_1 — первая точка, для которой $B(t_1) \in \Sigma_r$ [т. е. $t_1 = \min t$ по всем $t \in [0, a]$, для которых $B(t) \in \Sigma_r$]. Тогда

$$\int_0^a \| B'(t) \| \, dt \geqslant$$

$$\geqslant \int_0^{t_1} \| B'(t) \| \, dt = \int_0^{t_1} \sqrt{\langle B'(t) \circledcirc B'(t), d\tau^2 \rangle + \langle B'(t) \circledcirc B'(t), h \rangle} \, dt \geqslant$$

$$\geqslant \int_0^{t_1} (\langle B'(t) \circledcirc B'(t), d\tau^2 \rangle)^{1/2} \, dt = \int_0^{t_1} (\langle B'(t), d\tau \rangle^2)^{1/2} \, dt \geqslant$$

$$\geqslant \int_0^{t_1} \langle B'(t), d\tau \rangle \, dt = \tau(t_1) - \tau(0) = r,$$

откуда $r = d(p, q)$. Кроме того, если B имеет длину r, то все эти неравенства должны перейти в равенства. Тогда первое из них дает

$$\int_{t_1}^a \| B'(t) \| \, dt = 0,$$

откуда $a = t_1$, т. е. B не выходит за пределы Σ_r. Второе влечет за собой тождество $\langle B'(t) \circledcirc B'(t), h \rangle \equiv 0$, так что $B'(t)$ всегда касается некоторой фиксированной геодезической, выходящей из p. Это означает, что кривая $B(t)$ сама является геодезической — единственной существующей геодезической, соединяющей точки p и q. Из третьего следует, что $\langle B'(t), d\tau \rangle \geqslant 0$, так что $B(t) = C(\alpha(t))$ для некоторой монотонной неубывающей функции α.

Из леммы 6.3 видно, что

топология многообразия M, определяемая метрикой d, совпадает с топологией, определяемой структурой многообразия.

Действительно, если $d(p_i, p) \to 0$, то с некоторого момента точки p_i лежат в W, а d совпадает с радиальным расстоянием в $\exp^{-1}(W)$. Поэтому из $d(p_i, p) \to 0$ следует, что $p_i \to p$. Обратное утверждение тривиально.

Лемма 6.4. *Пусть C — кусочно дифференцируемая кривая, соединяющая две произвольные точки p и q из M. Предположим, что $L[C] = d(p, q)$. Тогда (с точностью до монотонной перепараметризации) C является геодезической, соединяющей p с q. Более кратко, если C — такая кривая, что $C(0) = p$, $C(1) = q$ и $E[C] = d^2(p, q)$, то C есть геодезическая.*

Действительно, если C не является геодезической, то найдутся точка $r = C(t_0)$ и некоторая ее нормальная окрестность W, такие, что $C[t_0, t_1] \subset W$, где t_1 — близкая к t_0 точка, и кривая C не является геодезической на отрезке $[t_0, t_1]$. Соединим точки $C(t_0)$ и $C(t_1)$ геодезической γ и заменим C новой кривой B, кото-

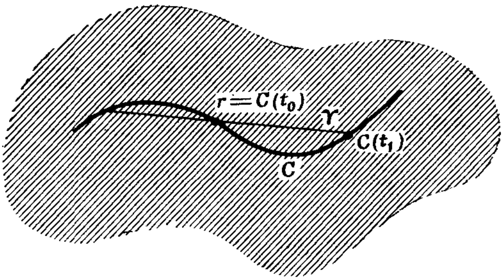


Рис. 19.

рая совпадает с C вне отрезка $[t_0, t_1]$ и совпадает с γ на отрезке $[t_0, t_1]$ (рис. 19). Из леммы 6.3 следует, что $L[B] < L[C]$, что противоречит равенству $L[C] = d(p, q)$.

Вторая часть леммы следует из неравенства Коши

$$\left(\int_0^1 \|C'(t)\| \, dt\right)^2 \leqslant \int_0^1 \|C'(t)\|^2 \, dt,$$

где равенство имеет место только в случае, когда $\|C'(t)\| = \text{const}$. Поэтому если $E[C] \leqslant d^2(p, q)$, то $L[C] \leqslant d(p, q)$ и C есть геодезическая, параметризованная пропорционально длине дуги.

Для $p \in M$ обозначим символом $\mathrm{B}_r(p)$ множество $\exp B_r$; при малых r мы имеем $\mathrm{B}_r(p) = \{q \mid d(p, q) < r\}$. Мы сейчас покажем, что при достаточно малых r шар B_r является «выпуклым».

Лемма 6.5. *Для каждой точки $p \in M$ можно найти такое $\varepsilon > 0$, что при всех $r \leqslant \varepsilon$ сферы Σ_r выпуклы. Точнее, если C есть геодезическая, причем $C(0) \in \Sigma_r$ и $C'(0)$ касается Σ_r, то при достаточно малых $t \neq 0$ геодезическая $C(t)$ лежит вне $\overline{\mathrm{B}}_r$.*

Доказательство. Выберем прежде всего ε столь малым, чтобы все рассуждения можно было проводить в нормальной окрестности точки p. Пусть $x^1, \ldots, x^n$ — нормальные координаты, так что Σ_r задается уравнением $(x^1)^2 + \ldots + (x^n)^2 = r^2$. Положим $F(x^1, \ldots, x^n) = (x^1)^2 + \ldots + (x^n)^2$ и $x^i \circ C(t) = x^i(t)$.

Поскольку $C(0) \in \Sigma_r$, имеем $F(x^1(0), \ldots, x^n(0)) = r^2$; так как кривая C касается сферы Σ_r в нуле, имеем $\langle C'(0), dF \rangle = 0$, или

$$\left.\frac{dF \circ C}{dt}\right|_{t=0} = 2 \sum x^i \left.\frac{dx^i}{dt}\right|_{t=0} = 0.$$

Далее,

$$\frac{d^2F \circ C}{dt^2} = 2\left(\sum \frac{dx^i}{dt}\frac{dx^i}{dt} + \sum x^i \frac{d^2x^i}{dt^2}\right).$$

Но C — геодезическая, поэтому, согласно (2.26),

$$\frac{d^2x^i}{dt^2} = -\sum_{j,\,k} \Gamma^i_{jk} \frac{dx^j}{dt}\frac{dx^k}{dt}.$$

Таким образом, мы можем написать

$$\frac{d^2F \circ C}{dt^2} = 2\left(\sum_i \frac{dx^i}{dt}\frac{dx^i}{dt} - \sum_{j,\,k} x^i\Gamma^i_{jk}\frac{dx^j}{dt}\frac{dx^k}{dt}\right) = $$
$$= 2\sum\left(\delta^j_i - \sum_k x^k\Gamma^k_{ij}\right)\frac{dx^i}{dt}\frac{dx^j}{dt}.$$

Ввиду того что функции Γ^k_{ij} ограничены, для достаточно малых x^k матрица $\delta^j_i - \sum x^k\Gamma^k_{ij}$ положительно определена. Итак, при достаточно малом ε

$$\left.\frac{dF \circ C}{dt}\right|_{t=0} = 0, \qquad \frac{d^2F \circ C}{dt^2} > 0.$$

Другими словами, точка 0 является точкой строгого минимума функции $F \circ C$, так что $F \circ C(t) > r^2$ при достаточно малых $t \neq 0$. Лемма 6.5 доказана.

Теорема 6.2. *Для каждой точки $p \in M$ существует такое $\delta > 0$, что множество $B_\delta(p)$ геодезически выпукло. Другими словами, для любых точек q_1, $q_2 \in B_\delta$ существует единственная (с точностью до параметризации) геодезическая C, соединяющая q_1 с q_2 и лежащая в B_δ. Кроме того, $L[C] = d(p, q)$ и C однозначно (с точностью до параметризации) определяется этим свойством.*

Прежде всего заметим, что для каждой точки $q \in M$ существует такое число $\rho(q)$, что $B_{\rho(q)}$ есть нормальная окрестность точки q, удовлетворяющая заключениям леммы 6.3 относительно q. При этом можно считать, что ρ непрерывно зависит от q. [Действительно, в качестве ρ можно взять минимум расстояний до сопряженных точек.] Существует такое $K > 0$, что $\rho(q) > K$ для $q \in B_\varepsilon(p)$. Пусть $\varkappa = K/2$. Тогда для любого $q \in B_\varkappa(p)$ имеем $B_\varkappa(q) \subset B_K(p)$

В частности, для любых q_1, $q_2 \in B_\varkappa(p)$ имеем $q_1 \in B_K(q_2)$. Поэтому, согласно лемме 6.3,

для любых q_1, $q_2 \in B_\varkappa(p)$ существует единственная геодезическая длины $d(q_1, q_2)$, соединяющая q_1 с q_2.

Мы хотим выбрать δ столь малым, чтобы геодезическая длины $d(q_1, q_2)$, соединяющая точки q_1 и q_2, лежащие в $B_\delta(p)$, тоже лежала в $B_\delta(p)$. Для этого возьмем $\delta < \varkappa$ и $\delta < (1/4)\varepsilon$ (для ε, фигурирующего в лемме 6.5).

Предположим, что q_1, $q_2 \in B_\delta(p)$, и пусть C — геодезическая, соединяющая q_1 с q_2. Тогда

$$d(q_1, q_2) \leqslant d(p, q_1) + d(p, q_2) \leqslant 2\delta < \frac{1}{2}\varepsilon.$$

Если q — любая точка на C, то

$$d(p, q) \leqslant d(q, q_1) + d(q_1, p) \leqslant d(q_1, q_2) + d(q_1, p) < \frac{3}{4}\varepsilon.$$

Пусть $r = \max d(p, q)$ для $q \in C$. Достаточно показать, что $r \leqslant \max(d(p, q_1), d(p, q_2))$. Если $r > \max(d(p, q_1), d(p, q_2))$, то значение r должно достигаться в некоторой внутренней точке t_0 кривой C. Но тогда вектор $C'(t_0)$ касался бы Σ_r. Поскольку $r < \frac{3}{4}\varepsilon$, из леммы 6.5 следовало бы, что $C(t)$ лежит вне B_r при малых $t - t_0 \neq 0$. Но это противоречит тому, что $r = \max d(p, q)$. Теорема 6.2 доказана.

Экспоненциальное отображение, которое мы до сих пор изучали, было отображением $T_p(M) \to M$. Как мы видели, для любого подмногообразия K подмногообразие $T^0(K) \subset T^*(M)$ служит естественным обобщением пространства $T_p^*(M)$. В римановом случае удобнее рассматривать $T^\perp(K)$ — подмногообразие в $T(M)$, состоящее из касательных векторов v, для которых $\pi(v) \in K$ и $(w, v) = 0$ при всех $w \in T_{\pi(v)}(K)$. [Подмногообразие $T^\perp(K)$ есть не что иное, как образ пространства $T^0(K)$ при отображении $\mathscr{L}^{-1}$.]

Более точно, пусть f — погружение $K \to M$. Определим $T_f^\perp(K)$ как многообразие, состоящее из таких пар (p, v), где $p \in K$, а $v \in T(M)$, что $\pi(v) \in T_{f(p)}(M)$ и $(w, v) = 0$ для всех $w \in f_* T_p(K)$. Удобно рассматривать K как подмногообразие в $T^\perp(K)$, состоящее из точек вида $(p, 0)$. Многие результаты настоящего параграфа обобщаются на этот случай. Важнейшие из них мы сформулируем в виде упражнений.

Упражнение 6.1. Определим отображение $\exp\colon T_f^\perp(K) \to M$ следующим образом: положим $\exp(p, v) = C(1)$, где C — геодезическая, для которой $C(0) = p$, $C'(0) = v$. Показать, что отображение $\exp$ однозначно определено и дифференцируемо в некоторой окрестности подмногообразия K в $T_f^{\perp}(M)$. Если M — полное многообразие, то exp определено и дифференцируемо на всем $T_f^{\perp}(K)$.

Упражнение 6.2. Показать, что существует окрестность W подмногообразия K, на которой exp является погружением.

Упражнение 6.3. Показать, что если $K = R$ [т. е. (K, f) — кривая], то $T_f^{\perp}(K)$ диффеоморфно R^n (вместе с упражнением 6.2 это доказывает лемму 5.2).

Упражнение 6.4. Пусть f — собственное вложение $K \to M$. Показать, что существует такая окрестность W подмногообразия K в $T_f^{\perp}(K)$, что для $(p, v) \in W$ расстояние от exp (p, v) до $f(K)$ равно $\|v\|$.

Мы знаем из теоремы 5.1, что геодезическая минимизирует энергию вплоть до первой фокальной (сопряженной) точки, но не дальше. Теперь мы в состоянии доказать аналогичные утверждения относительно длины.

Теорема 6.3. *Пусть K — подмногообразие в M и C — геодезическая, параметризованная длиной дуги, причем $C(0) \in K$, $C'(0) \in T^{\perp}(K)$. Пусть $t_1 > 0$ — первая фокальная точка для K вдоль C. Если $t_2 > t_1$, то существует близкая к C кривая B, удовлетворяющая условиям $B(0) \in K$, $B(t_2) = C(t_2)$, для которой $L[B] < L[C]$. В частности, геодезическая не минимизирует длину после первой сопряженной точки. Если же $t_2 < t_1$, то геодезическая C минимизирует длину дуги на отрезке $[0, t_2]$.*

Действительно, $E[C] = L[C] = t_2$. Существует кривая B, для которой $E[B] < E[C]$. По неравенству Коши $(L[B])^2 \leqslant E[B]\, t_2 < t_2^2$, откуда $L[B] < t_2 = L[C]$. Это доказывает первую часть теоремы. Вторую часть мы оставляем читателю в качестве упражнения.

§ 7. ПОЛНОТА

В этом параграфе мы продолжим изучение геодезических на римановом многообразии. В частности, мы рассмотрим геометрические свойства метрики d. Основная цель параграфа — доказать два следующих утверждения:

1) полнота геодезического потока эквивалентна полноте метрического пространства (M, d) (обращение последнего утверждения теоремы 3.2);

2) любые две точки полного риманова многообразия можно соединить геодезической.

Сделаем прежде всего несколько замечаний относительно метрических пространств.

Определение 7.1. Пусть M — метрическое пространство. *Дугой* мы будем называть непрерывное отображение отрезка $a \leqslant t \leqslant b$ в M. *Путем* называется непрерывное отображение интервала $a \leqslant t < b$ в M. Дуга C называется *сегментом*, если

$$d(C(t_1), C(t_2)) + d(C(t_2), C(t_3)) = d(C(t_1), C(t_3)) \quad (7.1)$$

для любых $a \leqslant t_1 \leqslant t_2 \leqslant t_3 \leqslant b$.

Таким образом, сегменты играют роль «прямых линий». Ясно, что если $a \leqslant c \leqslant d \leqslant b$ и C есть сегмент на $[a, b]$, то ограничение дуги C на $[c, d]$ также будет сегментом.

Заметим, что если M — риманово многообразие с соответствующей метрикой d и C — сегмент, соединяющий p с q, то C (с точностью до перепараметризации) является минимизирующей геодезической, соединяющей p с q. Действительно, мы можем ограничиться рассмотрением малого куска сегмента C, т. е. можем считать, что образ C лежит в окрестности U, обладающей свойствами, описанными в теореме 6.2. Тогда из равенства $d(r_1, r) + d(r, r_2) = d(r_1, r_2)$ следует, что все точки r лежат на единственной геодезической в U, соединяющей r_1 с r_2. Итак, C локально, а значит, и глобально, является геодезической. Если $C(0) = p$ и $C(a) = q$, то мы можем выбрать разбиение $0 = r_1 < \ldots < r_k = a$ так, чтобы ограничение C на каждый отрезок $[r_i, r_{i+1}]$ являлось минимизирующей геодезической. Тогда, поскольку C — сегмент,

$$L[C] = \sum d(C(r_i), C(r_{i+1})) = d(p, q).$$

Обратно, если C — минимизирующая геодезическая, то ограничение кривой C на любой подотрезок тоже будет минимизирующей геодезической. Следовательно, C — сегмент.

Определение 7.2. Путь C: $a \leqslant t < b \to M$ называется *лучом*, если образ пути C замкнут и ограничение пути C на отрезок $a \leqslant t \leqslant c$ является сегментом при всех c, $a \leqslant c < b$.

Так, в евклидовой плоскости лучи — это прямые линии, простирающиеся в одном направлении до бесконечности. На плоскости с выколотыми точками можно построить лучи конечной длины. На полном римановом многообразии все лучи имеют бесконечную длину (упражнение!).

Лемма 7.1. *Пусть $t_1 < t_2 < \ldots < t_{m+1}$ — вещественные числа. Предположим, что на каждом отрезке $t_i \leqslant t \leqslant t_{i+1}$ опре-*

делен сегмент C_i, причем

$$C_i(t_i) = C_{i-1}(t_i) = a_i \qquad (i = 2, \ldots, m).$$

Положим $a_1 = C_1(t_1)$, $a_{m+1} = C_m(t_{m+1})$. *Тогда, если*

$$d(a_1, a_2) + \ldots + d(a_m, a_{m+1}) = d(a_1, a_{m+1}), \tag{7.2}$$

то отображение $C: t_1 \leqslant t \leqslant t_{m+1} \to M$, *определяемое формулой* $C(t) = C_i(t)$ *для* $t_i \leqslant t \leqslant t_{i+1}$, *является сегментом.*

Доказательство. С помощью индукции доказательство сводится к случаю, когда $m = 2$. Для любых $t_1 \leqslant x \leqslant y \leqslant t_3$ положим $d(x, y) = d(C(x), C(y))$. Мы хотим проверить, что для любых трех чисел x, y, z, для которых $t_1 \leqslant x \leqslant y \leqslant z \leqslant t_3$, справедливо равенство

$$d(x, y) + d(y, z) = d(x, z). \tag{7.3}$$

Если $t_1 \leqslant x \leqslant y \leqslant z \leqslant t_2$ или $t_2 \leqslant x \leqslant y \leqslant z \leqslant t_3$, то доказывать нечего, поскольку C_1 и C_2 — сегменты. Предположим, что $t_1 \leqslant x \leqslant t_2 \leqslant y \leqslant z \leqslant t_3$. Так как C_1 и C_2 — сегменты, имеем

$$d(a_1, x) + d(x, a_2) = d(a_1, a_2),$$
$$d(a_2, y) + d(y, z) = d(a_2, z),$$
$$d(a_2, z) + d(z, a_3) = d(a_2, a_3).$$

Складывая и используя равенство (7.2), получаем

$$d(a_1, x) + d(x, a_2) + d(a_2, y) + d(y, z) + d(z, a_3) = \\ = d(a_1, a_3).$$

Согласно неравенству треугольника, $d(x, a_2) + d(a_2, y) \geqslant \geqslant d(x, y)$, откуда

$$d(a_1, x) + d(x, y) + d(y, z) + d(z, a_3) \leqslant d(a_1, a_3).$$

Из неравенства треугольника следует также, что

$$d(a_1, x) + d(x, z) + d(z, a_3) \geqslant d(a_1, a_3).$$

Сравнивая последние неравенства, получаем

$$d(x, z) \geqslant d(x, y) + d(y, z),$$

откуда

$$d(x, y) + d(y, z) = d(x, z),$$

что и доказывает лемму.

Лемма 7.2. *Пусть M — связное риманово многообразие и d — соответствующая метрика. Для каждой точки $p \in M$ найдется такое число $\rho > 0$, что для любой точки $q \in M$*

1) *если* $d(p, q) \leqslant \rho$, *то существует сегмент* C, *определенный на отрезке* $0 \leqslant t \leqslant d(p, q)$, *для которого* $C(0) = p$ *и* $C(d(p, q)) = q$;

2) *если* $d(p, q) > \rho$, *то существует такая точка* $x \in M$, *что* $d(p, x) + d(x, q) = d(p, q)$ *и* $d(x, p) = \rho$.

Доказательство. Возьмем число ρ меньшим, чем радиус нормальной окрестности точки p. Тогда условие 1), очевидно, удовлетворяется (см. упражнение 7.1). Докажем 2). Выберем такую последовательность $\{C_i\}$ кривых, соединяющих p с q, что $\lim L[C_i] = d(p, q)$. Пусть x_i — точка из $\Sigma_\rho \cap \operatorname{Im} C_i$. Тогда $d(x_i, q) \leqslant L[C_i] - \rho$. Поскольку Σ_ρ компактно, из последовательности $\{x_i\}$ можно выбрать сходящуюся подпоследовательность. Пусть x — ее предел. Тогда $d(x, q) \leqslant d(p, q) - \rho$ и $d(p, x) + d(x, q) = d(p, q)$.

Теорема 7.1. *Пусть* M — *связное риманово многообразие с соответствующей метрикой* d. *Для любых двух точек* p, q *существует либо сегмент, соединяющий* p *с* q, *либо такой луч* C, *что* $C(0) = p$ *и* $d(p, x) + d(x, q) = d(p, q)$ *для любой точки* $x \in \operatorname{Im} C$.

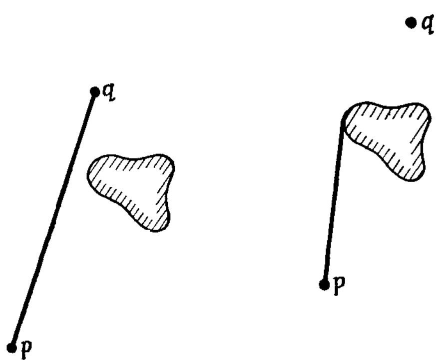


Рис. 20.

Эти два случая показаны на рис. 20.

Доказательство. Предположим, что не существует сегмента, соединяющего p с q. Мы построим последовательность точек a_i, чисел t_i и сегментов C_i, такую, что $a_1 = p$ и

(i) $d(a_1, a_2) + \ldots + d(a_{k-1}, a_k) + d(a_k, q) = d(a_1, q)$ для всех k;

(ii) $t_{i+1} - t_i = d(a_i, a_{i+1})$, $\quad i = 1, \ldots, k-1$;

(iii) C_i определено на интервале $(t_i,\ t_{i+1})$, причем $C_i\ (t_i) = a_i$, $C_i\ (t_{i+1}) = a_{i+1}$ $\quad (i = 1,\ \ldots,\ k - 1)$.

Мы будем строить эту последовательность по индукции. Для $k = 1$ утверждение тривиально. Предположим, что мы определили $a_1,\ \ldots,\ a_k,\ t_1,\ \ldots,\ t_k$. Тогда $d(a_1,\ a_k) + d\ (a_k,\ q) \leqslant d(a_1,\ a_2) + \ldots$ $\ldots + d\ (a_{k-1},\ a_k) + d\ (a_k,\ q) = d\ (a_1,\ q)$. Значит,

$$d(a_1,\ a_k) + d\ (a_k,\ q) = d\ (a_1,\ q), \tag{7.4}$$

$$d\ (a_1,\ a_2) + \ldots + d\ (a_{k-1},\ a_k) = d\ (a_1,\ a_k). \tag{7.5}$$

Не существует сегмента, соединяющего a_k с q, ибо в противном случае по лемме 7.1 существовал бы сегмент, соединяющий p с q. Следовательно, по лемме 7.2 существуют точка x, такая, что $d\ (a_k,\ x) > 0$, $d\ (a_k,\ x) + d\ (x,\ q) = d\ (a_k,\ q)$, и сегмент, соединяющий x с a_k. Рассмотрим множество S_k всех таких точек x, и пусть $d_k = \sup\limits_{x \in S_k} d\ (a_k,\ x)$. Выберем $a_{k+1} \in S_k$ так, чтобы

$$d(a_k,\ a_{k+1}) > \frac{1}{2} d_k. \tag{7.6}$$

Из равенств (7.4) и (7.5) следует, что

$$d\ (a_1,\ a_2) + \ldots + d\ (a_k,\ a_{k+1}) + d\ (a_{k+1},\ q) = d\ (a_1,\ q).$$

Положим $t_{k+1} = t_k + d\ (a_k,\ a_{k+1})$ и определим C_k на $(t_k,\ t_{k+1})$ как геодезическую, соединяющую a_k с a_{k+1} и параметризованную длиной дуги. Тогда условия (i), (ii) и (iii) выполнены.

Пусть $\bar{t} = \lim t_i = \sum (t_k - t_{k-1}) < d(p,\ q)$. Определим путь C на $0 \leqslant t \leqslant \bar{t}$, полагая $C(t) = C_i(t)$, если $t_i \leqslant t \leqslant t_{i+1}$. Согласно лемме 7.1, ограничение пути C на любой подотрезок будет сегментом. Мы хотим показать, что образ C замкнут. Достаточно проверить, что для любой последовательности $s_i \to \bar{t}$ соответствующая последовательность $C(s_i)$ не имеет предела в M. Но для любого данного $\varepsilon > 0$ мы можем найти такое $\delta > 0$, что $d(C(s),\ C(t)) < \varepsilon$, если $s,\ t > \bar{t} - \delta$, поскольку по построению $d(C(s),\ C(t)) = |s - t|$. Поэтому если $z = \lim\limits_{s_i \to \bar{t}} C(s_i)$, то мы можем продолжить C до сегмента на отрезке $0 \leqslant t \leqslant \bar{t}$, полагая $C(\bar{t}) = z$. Но тогда $\lim\limits_{k \to \infty} d(a_k,\ z) = 0$ и, согласно равенству (7.4),

$$d\ (a_1,\ z) + d\ (z,\ q) = d\ (a_1,\ q).$$

Точка z не может совпасть с q, поскольку не существует сегмента, соединяющего p с q. Следовательно, согласно лемме 7.2, существуют точка x, такая, что $d\ (z,\ x) + d\ (x,\ q) = d\ (z,\ q)$, $d\ (z,\ x) > 0$, и сегмент, соединяющий x с z. Для этой точки x мы имеем

$$d(a_k, z) + d(z, x) + d(x, q) = d(a_k, z) + d(z, q) = d(a_k, q),$$

откуда

$$d(a_k, z) + d(z, x) = d(a_k, x).$$

По лемме 7.2 существует сегмент, соединяющий a_k с x. Таким образом, для всех k

$$d_k > d(z, x) > 0. \tag{7.7}$$

С другой стороны, из условия (7.6) следует, что $d_k < 2d(a_k, a_{k+1})$; значит, $d_k \to 0$, и мы получаем противоречие. Следовательно, не существует предельной точки z, т. е. C — луч. Теорема доказана.

Заметим, что в этом рассуждении $\{a_i\}$ является фундаментальной последовательностью, не имеющей предельных точек. Этого не может быть, если M полно. Поэтому справедлива

Теорема 7.2. *В полном связном римановом многообразии любые две точки p и q можно соединить геодезической длины $d(p, q)$.*

Иначе говоря, для любой точки $p \in M$ отображение exp отображает T_p на M.

Мы убедились в том, что если M полно, то геодезический поток является полным. Теперь мы можем доказать обратное утверждение. Предположим, что геодезический поток является полным. Это означает, что любая геодезическая может быть продолжена на $(-\infty, \infty)$, т. е. не существует луча конечной длины. Мы хотим вывести отсюда, что M полно. Достаточно показать, что всякая фундаментальная последовательность имеет предел. Пусть $\{x_i\}$ — некоторая фундаментальная последовательность. Из теоремы 7.1 (и из того, что в M не существует лучей конечной длины) следует существование минимизирующей геодезической C_i, соединяющей x_1 с x_i. Поскольку $\{x_i\}$ — фундаментальная последовательность, $d(x_1, x_i)$ сходится к некоторому числу d. С другой стороны, векторы $C_i'(0) \in T_{x_1}(M)$ лежат на единичной сфере. Выберем сходящуюся подпоследовательность $\{C_{i_j}'(0)\}$, стремящуюся к вектору v. Пусть $x = C(d)$, где C — геодезическая, для которой $C'(0) = v$. Тогда из полноты геодезического потока следует, что $x_{i_j} \to x$. Таким образом, доказана

Теорема 7.3. *Пусть M — связное риманово многообразие; M полно (как метрическое пространство с метрикой d) тогда и только тогда, когда геодезический поток полон.*

В заключение этого параграфа мы покажем, что любое многообразие обладает полной римановой метрикой. Прежде всего докажем следующее утверждение:

Лемма 7.3. *Пусть M_1 и M_2 — связные римановы многообразия и f — изометрия $M_1 \to M_2$, т. е. $\| f_* (v) \| = \| v \|$ для всех $v \in T(M_1)$. Тогда для любых $p, q \in M_1$ мы имеем $d(f(p), f(q)) \leqslant d(p, q)$.*

Доказательство. Если C — кривая в M_1, соединяющая p с q, то $f \circ C$ соединяет $f(p)$ с $f(q)$. Но $L[C] = L[f \circ C]$. Значит, $d(p, q) = \inf L[C] = \inf L[f \circ C] \geqslant \inf L[B]$, где B пробегает все кривые, соединяющие $f(p)$ с $f(q)$.

Теорема 7.4. *Пусть M — дифференцируемое многообразие. Тогда на M существует полная риманова метрика.*

Доказательство. Пусть f — собственное вложение многообразия M в евклидово пространство E^N (см. теорему 4.4 гл. II). Пусть $g = f^*(ds^2)$, где $ds^2 = dx_1^2 + \ldots + dx_N^2$ — евклидова метрика в E^N. По лемме 7.3 фундаментальная последовательность $\{x_i\}$ в M отображается в фундаментальную последовательность в E^N. Поскольку E^N полно, а f — собственное отображение, последовательность $\{x_i\}$ сходится.

§ 8. ИЗОМЕТРИИ

Пусть M — риманово многообразие и $\tau: M \to M$ — изометрия, т. е. диффеоморфизм многообразия M на себя, сохраняющий риманову метрику. Изометрия τ будет, очевидно, сохранять и различные геометрические объекты, определяемые метрикой. Например, если $\tau_*: T(M) \to T(M)$ — индуцированное отображение касательного расслоения $T(M)$, то τ_* должно оставлять инвариантной геодезическую пульверизацию, т. е. $(\tau_*)^* X = X$ и $\tau_* \circ \delta_t = \delta_t \circ \tau_*$, где X —геодезическая пульверизация, а δ — геодезический поток.

Теорема 8.1. *Пусть T — семейство изометрий риманова многообразия M и S — множество неподвижных точек семейства отображений T (т. е. $x \in S$ в том и только в том случае, когда $\tau x = x$ для всех $\tau \in \mathrm{T}$). Тогда $S = \bigcup N_i$, где каждое N_i является подмногообразием в M. Кроме того, каждая точка $p \in S$ обладает окрестностью U в M с такими координатами $x^1, \ldots, x^n$, в которых любое отображение $\tau \in \mathrm{T}$ линейно.*

Пусть $p \in S$ и U — нормальная окрестность точки p. Если $\tau \in \mathrm{T}$, то $\tau \circ \exp(v) = \exp \circ \tau_*(v)$ для всех $v \in \exp^{-1} U$, поскольку τ — изометрия. Так как отображение $\tau_*\colon T(M) \to T(M)$ линейно, это означает, что τ линейно в нормальной системе координат. Множество неподвижных точек семейства линейных преобразований векторного пространства является линейным подпространством. Поэтому $S \cap U$ будет подмногообразием в U. Это доказывает, что S есть объединение подмногообразий.

Отметим, что если S связно, то оно само будет подмногообразием, а если S содержит кусок геодезической, то оно содержит и всю геодезическую целиком.

Теорема 8.2. *Пусть* T — *конечная*[1]) *группа диффеоморфизмов многообразия* M *и* S — *множество неподвижных точек относительно группы* T. *Тогда* S *есть объединение подмногообразий и любая точка* $p \in S$ *обладает окрестностью* U *с координатами* $x^1, \ldots, x^n$, *в которых любое отображение* $\tau \in \mathrm{T}$ *линейно.*

Достаточно показать, что T есть множество изометрий для некоторой римановой метрики. Пусть g — любая риманова метрика на M (она существует по теореме 7.4). Тогда $a = \sum_{\tau \in \mathrm{T}} \tau^* g$ есть риманова метрика (так как сумма положительно определенных билинейных форм положительно определена). Кроме того,

$$\beta^* a = \sum_{\tau \in \mathrm{T}} (\beta\tau)^* g = \sum_{\tau \in \mathrm{T}} \tau^* g = a \quad \text{для} \quad \beta \in \mathrm{T},$$

так что все $\tau \in \mathrm{T}$ являются изометриями.

---

[1]) Читатели, знакомые с мерой Хаара, могут заменить конечность компактностью, а сумму — интегралом.

Глава V

ГРУППЫ ЛИ

Центральную роль в геометрии играют группы автоморфизмов различных структур. Часто эти группы обладают дифференцируемой структурой. В этой главе мы изучим связь между алгебраическими и дифференциальными свойствами таких групп.

§ 1. ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Сейчас мы дадим основное определение.

Определение 1.1. *Группа Ли* есть дифференцируемое многообразие G вместе с дифференцируемым отображением φ: $G \times G \to G$, которое превращает G в группу. Иначе говоря, φ удовлетворяет следующим условиям:

1) $\varphi(a, \varphi(b, c)) = \varphi(\varphi(a, b), c)$;

2) существует такое $e \in G$, что $\varphi(e, b) = b$ для всех $b \in G$;

3) существует дифференцируемое отображение $G \to G$, переводящее a в a^{-1}, которое удовлетворяет тождеству $\varphi(a, a^{-1}) = e$.

Мы будем обозначать $\varphi(a, b)$ через ab.

Более сжато: группа Ли есть группа, наделенная такой структурой дифференцируемого многообразия, в которой отображение $G \times G \to G$, определяемое формулой $(x, y) \to xy^{-1}$, дифференцируемо. Действительно, отображение $x \to x^{-1}$ можно переписать в виде $(e, x) \to ex^{-1}$, так что условие 3) выполняется, а $(x, y) \to xy$ есть композиция двух дифференцируемых отображений $(x, y) \to (x, y^{-1})$ и $(x, y^{-1}) \to xy$. Справедливо и несколько более сильное утверждение:

Лемма 1.1. *Пусть G — одновременно группа и многообразие, причем отображение $G \times G \to G$, задаваемое формулой $(x, y) \to xy$, дифференцируемо. Тогда G есть группа Ли.*

Мы должны показать, что если отображение $(x, y) \to xy$ дифференцируемо, то и отображение $x \to x^{-1}$ дифференцируемо. Заметим прежде всего, что достаточно доказать дифференцируемость отображения $x \to x^{-1}$ в некоторой окрестности N единицы e группы G. Действительно, для любого $a \in G$ отображение $x \to xa$ (которое мы обозначим R_a) и отображение $x \to ax$ (которое мы обозначим L_a) дифференцируемы. Но $x^{-1} = a\,(xa)^{-1}$, так что отображение $x \to x^{-1}$ можно представить в виде композиции: $x \to R_a x \to (R_a x)^{-1} \to L_a\,(R_a x)^{-1}$. Поэтому, выбирая a так, чтобы $xa \in N$, мы докажем дифференцируемость отображения $x \to x^{-1}$ в точке x.

Установим теперь существование указанной выше окрестности $N \ni e$. Отображения L_x для всех x являются диффеоморфизмами многообразия G на себя. В любой координатной окрестности единицы e отображение L_x дифференцируемо зависит от x (в терминах локальных координат). Поэтому из теоремы о неявной функции следует существование такой окрестности N единицы e, что $(L_x)^{-1}y$ дифференцируемо зависит от x при всех x, $y \in N$. В частности, $(L_x)^{-1}\,e = x^{-1}$ дифференцируемо зависит от x, т. е. отображение $x \to x^{-1}$ дифференцируемо.

Теорема 1.1. *Пусть G — группа Ли, M — дифференцируемое многообразие, f — такое взаимно однозначное погружение $M \to G$, что*

$$f(x)\,f(y) \in f(M) \quad \text{и} \quad (f(x))^{-1} \in f(M) \tag{1.1}$$

для всех x, $y \in M$. Определим на M умножение, полагая $xy = f^{-1}(f(x)\,f(y))$. Предположим, что это отображение непрерывно. Тогда многообразие M с этим умножением является группой Ли.

Действительно, условие (1.1) означает, что $f(M)$ есть подгруппа в G. Следовательно, отображение $\tilde{\varphi}$: $M \times M \to G$, определенное формулой $(x, y) \to f(x)\,f(y)$, дифференцируемо. Положим $z(x, y) = f^{-1}(f(x)\,f(y))$. Мы хотим показать, что отображение φ: $M \times M \to M$, переводящее (x, y) в $z(x, y)$, дифференцируемо. Поскольку φ непрерывно, достаточно доказать существование такой окрестности U точки $z(x, y)$, что для любой дифференцируемой на U функции g функция $g \circ \varphi$ дифференцируема в точке (x, y). Так как f — погружение, мы можем найти окрестность V точки $f(z)$ с координатами $v^1, \ldots, v^n$ и окрестность U точки z, такие, что $f(U)$ состоит из тех точек окрестности V, для которых $v^{p+1} = \ldots = v^n = 0$, а функции[1] $v^1, \ldots, v^p$ служат координатами в U. Поэтому любую функцию g на U можно продолжить до функции $\tilde{g}$ на V, где $\tilde{g}(v^1, \ldots, v^n) = g(v^1, \ldots, v^p, 0, \ldots, 0)$. Следовательно, функция $g \circ \varphi = \tilde{g} \circ \tilde{\varphi}$ дифференцируема, как композиция дифференцируемых функций $\tilde{g}$ и $\tilde{\varphi}$.

Оказывается, что предположение о непрерывности φ излишне, см. § 3 ниже. Поэтому мы дадим следующее определение:

Определение 1.2. Пусть G_1 и G_2 — группы Ли, а f — гомоморфизм $G_1 \to G_2$, являющийся взаимно однозначным погру-

[1]) Точнее, $v^1 \circ f, \ldots, v^p \circ f$.— *Прим. перев.*

жением. Мы будем называть пару (G_1, f) *подгруппой Ли* группы Ли G_2. В общем случае дифференцируемое отображение $G_1 \to G_2$, которое является групповым гомоморфизмом, называется *гомоморфизмом Ли*.

Таким образом, подгруппа Ли группы Ли есть подгруппа в теоретико-групповом смысле и одновременно погруженное подмногообразие. Заметим, что, как мы скоро увидим на примерах, она не обязательно является вложенным подмногообразием.

Примеры.

1) Векторное n-мерное пространство V, рассматриваемое как группа по сложению, является, очевидно, группой Ли.

2) Прямое произведение любого числа групп Ли, снабженное структурой прямого произведения групп и многообразий, является группой Ли.

3) Тор T^n, будучи прямым произведением n окружностей S^1, является группой Ли. Введем на T^n угловые «координаты» $(\theta_1, \ldots, \theta_n)$ (где θ_i определяются по модулю 1), так что $\theta_i(p+q) = \theta_i(p) + \theta_i(q)$. (Поскольку умножение в T^n коммутативно, удобно обозначать его символом $+$.) Для любых чисел (λ_1, λ_2) отображение $f\colon R \to T^2$, определяемое равенством $f(t) = (\lambda_1 t, \lambda_2 t)$, является, очевидно, погружением и гомоморфизмом. Если $(\lambda_1 t, \lambda_2 t) = (\lambda_1 s, \lambda_2 s)$, то $\lambda_1(s-t) = m$, $\lambda_2(s-t) = n$ для некоторых целых чисел m и n, т. е. $\lambda_1/\lambda_2 = m/n$ — рациональное число. Поэтому, если число λ_1/λ_2 иррационально, то (R, f) есть подгруппа Ли в T^2. Легко видеть, что в этом случае $f(R)$ всюду плотно в T^2 и тем более f не является вложением.

4) Группа $GL(n)$ является группой Ли.

5) Группа $O(n)$ ортогональных матриц порядка n является группой Ли. Действительно, $A \in O(n)$ тогда и только тогда, когда $A \in GL(n)$ и $AA^t = I$ (где A^t — транспонированная матрица), т. е. $A = (A^t)^{-1}$. Рассмотрим преобразование $\tau\colon GL(n) \to GL(n)$, определяемое формулой $\tau(B) = (B^t)^{-1}$. Очевидно, что отображение τ дифференцируемо и $\tau^2(B) = (((B^t)^{-1})^t)^{-1} = B$. Поэтому тождественное отображение вместе с τ образуют конечную группу диффеоморфизмов многообразия $GL(n)$. Согласно теореме 8.2 гл. IV, множество неподвижных точек преобразования τ, т. е. $O(n)$, является объединением подмногообразий из $GL(n)$. Элементарные рассуждения показывают, что $O(n)$ имеет две связные компоненты, $O(n)^+$ и $O(n)^-$, состоящие из матриц с определителем $+1$, соответственно -1. Поскольку $O(n)^+ = O(n)^- \cdot A$ для подходящей матрицы A, компоненты $O(n)^+$ и $O(n)^-$ имеют одинаковую размерность и, значит, $O(n)$ — вложенное подмногообразие в $GL(n)$.

§ 2. ИНВАРИАНТНЫЕ ФОРМЫ И АЛГЕБРА ЛИ

Пусть G — группа Ли. Мы будем говорить, что дифференциальная форма Ω, определенная на G, левоинвариантна, если $L_a^*\Omega = \Omega$ для всех $a \in G$; аналогично, форма Ω называется правоинвариантной, если $R_a^*\Omega = \Omega$ для всех $a \in G$. Если ω_1 и ω_2 — лево(право)инвариантные формы, то такими же будут формы $\omega_1 \wedge \omega_2$ и $b\omega_1 + c\omega_2$ для любых констант b и c. Далее, $L_a^* d\omega = dL_a^*\omega$, так что вместе с ω будет левоинвариантна и форма $d\omega$. Другими словами, пространство лево(право)инвариантных форм есть подалгебра алгебры всех форм на G, замкнутая относительно оператора d. Мы обозначим эти подалгебры символами $\mathcal{J}_l(G)$ (левоинвариантную) и $\mathcal{J}_r(G)$ (правоинвариантную).

Теорема 2.1. *Пусть G — группа Ли и e — единица группы G. Отображение $\omega \to \omega_e$ является изоморфизмом алгебры $\mathcal{J}_l(G)$ на $\bigwedge(T_e^*(G))$.*

Это отображение ограничения, очевидно, является гомоморфизмом. Мы хотим показать, что оно взаимно однозначно и является отображением на. Прежде всего проверим взаимную однозначность. Мы должны показать, что если $\omega, \omega' \in \mathcal{J}_l(G)$ и $\omega_e = \omega'_e$, то $\omega_a = \omega'_a$ для всех $a \in G$. Но $(L_a^*\omega)_e = \omega_a \circ \bigwedge(L_{a*})$ и $(L_a^*\omega')_e = \omega'_a \circ \bigwedge(L_{a*})$.

Поскольку формы ω и ω' левоинвариантны, $(L_a^*\omega)_e = \omega_e = \omega'_e = (L_a^*\omega')_e$, откуда $\omega_a \circ \bigwedge(L_{a*}) = \omega'_a \circ \bigwedge(L_{a*})$. Но L_{a*} есть взаимно однозначное отображение пространства $T_e(G)$ на $T_a(G)$. Следовательно, $\omega_a = \omega'_a$.

Покажем теперь, что рассматриваемое отображение является отображением на. Пусть $\alpha \in \bigwedge T_e(G)$. Определим форму ω, полагая $\omega_a = \alpha \circ \bigwedge(L_{a^{-1}*})$. Мы предоставим читателю проверить, что так определенная форма ω будет дифференцируемой. Далее, $\omega_e = \alpha$ и

$$(L_b^*\omega)_a = \omega_{ba} \circ \left(\bigwedge L_{b*}\right) = \alpha \circ \bigwedge(L_{(ba)^{-1}*}) \circ \bigwedge(L_{b*}) =$$
$$= \alpha \circ \bigwedge(L_{a^{-1}*}) = \omega_a,$$

т. е. форма ω левоинвариантна. Теорема доказана.

Согласно теореме 2.1, пространство левоинвариантных линейных дифференциальных форм n-мерно (где n — размерность группы G). Пусть $\omega^1, \ldots, \omega^n$ — базис этого пространства. Тогда

$$d\omega^i = \sum_{1 \leqslant j < k \leqslant n} C^i_{jk}\omega^j \wedge \omega^k, \tag{2.1}$$

поскольку формы $d\omega^i$ левоинвариантны. Применяя L_a^* к обеим частям равенства (2.1), мы получим, что $C^i_{jk} \circ L_a = C^i_{jk}$, т. е. C^i_{jk} — константы.

Эти константы называются структурными константами группы G. Уравнения (2.1) называются *уравнениями Маурера — Картана*.

Пусть X — векторное поле на G. Мы скажем, что поле X лево(право)инвариантно, если $L_a^*X = X$ для всех $a \in G$ (соответственно $R_a^*X = X$). Если поля X и Y левоинвариантны, то и поля $X + Y$ и $[X, Y]$ левоинвариантны. Поэтому *левоинвариантные векторные поля образуют алгебру Ли*. Пусть X — левоинвариантное векторное поле и T_t — порожденная им локальная однопараметрическая группа преобразований. В частности, $T_t x$ определено для всех x из некоторой окрестности U единицы e и всех t из некоторого интервала I, содержащего нуль. Если точки x и y достаточно близки к e, а число t достаточно мало, то $T_t L_y x$ и $L_y T_t x$ определены и совпадают: $T_t(yx) = y(T_t x)$. Полагая $x = e$, получим

$$T_t y = y T_t e. \tag{2.2}$$

Равенство (2.2) имеет место для всех y, близких к e, и t, близких к нулю. Мы можем доопределить преобразование T_t так, чтобы это равенство стало справедливым для всех t и y. Действительно, для любого $t \in R$ выберем такое n, чтобы равенство (2.2) имело место для t/n, и определим $T_t y$ как $y(T_{t/n}e)^n$. Из единственности решений дифференциальных уравнений следует, что это определение корректно. Далее, определим $T_t z$ для любого $z \in G$, полагая $T_t z = z(T_t e)$. Поскольку поле X левоинвариантно, оно является инфинитезимальной образующей определенной таким образом однопараметрической группы преобразований. Отображение $R \to G$, задаваемое формулой $t \to T_t e$, определяет однопараметрическую подгруппу. Действительно, $T_{t+s}e = T_t(T_s e) = (T_s e)(T_t e)$. Итак, справедлива следующая

Т е о р е м а 2.2. *Пространство левоинвариантных векторных полей на G образует n-мерную алгебру Ли, которую мы будем обозначать g. Любое $X \in g$ порождает глобально определенную однопараметрическую группу T_t преобразований многообразия G. Кривая $T_t e$ является подгруппой Ли группы G, и для любого $y \in G$ выполняется равенство* (2.2).

Мы не проверили только утверждение, что $\dim g = n$. Это следует из того, что отображение $g \to T_e(G)$, переводящее X в X_e, взаимно однозначно и является отображением на. (Доказательство такое же, как для инвариантных форм.) Мы будем иногда отождествлять g с $T_e(G)$. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — базис пространства g. Пусть $\alpha^1, \ldots, \alpha^n$ —базис пространства $T_e^*(G)$, дуальный базису $X_{1e}, \ldots, X_{ne}$, и пусть $\omega^1, \ldots, \omega^n$ —левоинвариантные формы, соответствующие формам $\alpha^1, \ldots, \alpha^n$. Тогда

$$\langle X_i \mid \omega^j \rangle = \delta_i^j.$$

Согласно равенству (1.10) гл. III,

$$\langle X_j \wedge X_k \mid d\omega^i \rangle = X_j \langle X_k \mid \omega^i \rangle - X_k \langle X_j \mid \omega^i \rangle - \langle [X_j, X_k], \omega^i \rangle.$$

Первые два члена правой части обращаются в нуль (как производные Ли от констант), и мы получаем равенство

$$\langle X_j \wedge X_k \mid d\omega^i \rangle = -\langle [X_j, X_k], \omega^i \rangle.$$

С другой стороны, согласно формуле (2.1),

$$\langle X_j \wedge X_k \mid d\omega^i \rangle = \langle X_j \wedge X_k \mid \sum C^i_{lm} \omega^l \wedge \omega^m \rangle = C^i_{jk}.$$

Поэтому при $j < k$ имеем $\langle [X_k, X_j], \omega^i \rangle = C^i_{jk}$ или

$$[X_k, X_j] = \sum C^i_{jk} X_i. \tag{2.3}$$

[Удобно определить C^i_{jk} для всех j, k, потребовав, чтобы $C^i_{jk} = -C^i_{kj}$. Тогда (2.3) будет иметь место для всех j, k.]

Пусть G, H — группы Ли, а f: $H \to G$ — гомоморфизм Ли. Отображение f_{*e}: $T_e(H) \to T_e(G)$ можно рассматривать как линейное отображение f_* алгебры Ли h группы H в алгебру Ли g группы G. Если $x \in H$, то $L_{f(x)} \circ f = f \circ L_x$. Поэтому

$$L_{f(x)*} f_{*e}(T_e(H)) = f_{*x}(T_x(H)). \tag{2.4}$$

Равенство (2.4) означает, что любое поле $X \in h$ f-связано с $f_*(X)$ (см. § 8 гл. II). Поэтому, согласно теореме 8.4 гл. II, для любых X, $Y \in h$ справедливо равенство $f_*([X, Y]) = [f_*(X), f_*(Y)]$, т. е. f_*: $h \to g$ есть *гомоморфизм алгебр Ли*. В частности, $f_*(h)$ — подалгебра алгебры Ли g.

Если гомоморфизм f взаимно однозначен, то ввиду формулы (2.2) всякое левоинвариантное поле, касательное к подмногообразию $f(H)$ в точке e, касается $f(H)$ во всех точках $x \in f(H)$. Следовательно, $f(H)$ есть интегральное многообразие дифференциальной системы, порожденной пространством $f_*(h) \subset g$ векторных полей на G.

Теперь мы в состоянии показать, как избавиться от предположения о непрерывности φ в теореме 1.1. Мы хотим доказать, что отображение φ: $M \times M \to M$ дифференцируемо. Пусть g_1 — касательное пространство подмногообразия $f(M)$ в точке e. Оно порождает подпространство левоинвариантных векторных полей, которое мы будем также обозначать g_1. Предположим, что нам удалось доказать, что g_1 — подалгебра. Тогда дифференциальная система, порожденная g_1, будет вполне интегрируемой. Из условия (1.1) следует, что $f(M)$ есть максимальное интегральное многообразие этой дифференциальной системы. Согласно условию (1.1), дифференцируемое отображение $M \times M \to G$ фактически является отображением в $f(M)$. Требуемый результат следует теперь из упражнения 5.2 гл. III. То, что g_1 является подалгеброй, вытекает также из условия (1.1), как мы увидим в § 3.

Пусть g_1 — подалгебра в g. Она определяет вполне интегрируемую дифференциальную систему. Пусть G_1 — максимальное интегральное многообразие этой системы, проходящее через e. Для любого $y \in G$ преобразование L_y оставляет дифференциальную систему g_1 инвариантной и, следовательно, переводит любое максимальное интегральное многообразие системы g_1 в максимальное интегральное многообразие. Если $y \in G_1$, то $L_{y^{-1}} y = e$, так что $L_{y^{-1}}$ переводит G_1 в интегральное многообразие, проходящее через e, т. е. в себя. Таким образом, если x, $y \in G_1$, то и $y^{-1}x \in G_1$. Согласно теореме 1.1, отсюда следует, что G_1 есть подгруппа Ли группы G.

Любое максимальное интегральное многообразие K этой вполне интегрируемой системы есть класс смежности по подгруппе G_1. Действительно, поскольку система инвариантна относительно левых сдвигов, любой левый сдвиг многообразия K снова будет максимальным интегральным многообразием. Но, сдвигая K с помощью элемента, обратного к некоторому элементу из K, мы получим максимальное интегральное многообразие, проходящее через e. Значит, K есть класс смежности группы G по подгруппе G_1.

Теорема 2.3. *Пусть f_1 и f_2 — два дифференцируемых отображения связного многообразия M в группу Ли G, причем*

$$f_1^* (\omega^i) = f_2^* (\omega^i), \tag{2.5}$$

где $\{\omega^i\}$ — базис пространства левоинвариантных линейных форм на G. Тогда отображения f_1 и f_2 отличаются левым сдвигом, т. е. существует такой элемент $x \in G$, что $f_2 = L_x \circ f_1$.

Доказательство. Рассмотрим прямое произведение $G \times G$. Пусть π_1 и π_2 — проекции группы $G \times G$ на первый и второй сомножители. Формы $\pi_1^* (\omega^i)$ и $\pi_2^* (\omega^i)$ являются линейно независимыми левоинвариантными формами на $G \times G$. Формы $\pi_1^* (\omega^i) - \pi_2^* (\omega^i)$ определяют, очевидно, вполне интегрируемую систему $\mathscr{D}$, которая соответствует диагональной подгруппе, состоящей из всех элементов вида (x, x). Рассмотрим отображение h: $M \to G \times G$, задаваемое формулой $h(y) = (f_1(y), f_2(y))$ для всех $y \in M$. Согласно условию (2.5), $h^* (\pi_1^* (\omega^i) - \pi_2^* (\omega^i)) = 0$. Следовательно, поскольку M связно, h отображает M в максимальное связное интегральное многообразие системы $\mathscr{D}$, т. е. в класс смежности по диагонали. Поэтому существуют такие x_1 и $x_2 \in G$, что $x_1 f_1(y) = x_2 f_2(y)$ для всех $y \in M$. Таким образом, f_1 и f_2 отличаются сдвигом.

Следствие. *Пусть G — связная группа Ли, а f — диффеоморфизм группы G на себя, сохраняющий левоинвариантные формы. Тогда f есть левый сдвиг.*

Достаточно взять $M = G$.

Теорема 2.4. *Пусть G — группа Ли с левоинвариантными формами $\omega^1, \ldots, \omega^n$ и структурными константами c^i_{jk}. Пусть M — дифференцируемое многообразие и $\theta_1, \ldots, \theta_n$ — линейно независимые формы на M, причем*

$$d\theta^i = \sum c^i_{jk}\theta^j \wedge \theta^k. \tag{2.6}$$

Тогда для любой точки $y \in M$ существуют ее окрестность U и диффеоморфизм $f\colon U \to G$, такие, что

$$\omega^i = f^*(\theta^i). \tag{2.7}$$

Два таких диффеоморфизма отличаются левым сдвигом. Если M и G односвязны, то M диффеоморфно группе G.

Вторая часть теоремы немедленно следует из первой и теоремы 2.3. Последнее утверждение вытекает из стандартных фактов об односвязных пространствах. Поэтому нам остается доказать только первую часть.

Вместо того чтобы строить само отображение $M \to G$, мы построим его график. График любого отображения $M \to G$ представляет собой подмногообразие в $M \times G$, проекция которого на первый сомножитель является диффеоморфизмом. Пусть π_1 и π_2 — проекции многообразия $M \times G$ соответственно на M и G. Положим $\bar\theta^i = \pi_1^*\theta^i$ и $\bar\omega^i = \pi_2^*\omega^i$. Проекция π_1 некоторого n-мерного подмногообразия $K \subset M \times G$ на M будет локальным диффеоморфизмом, если формы $\bar\theta^1, \ldots, \bar\theta^n$ линейно независимы на K. В этом случае K будет (локально) графиком некоторого отображения $M \to G$. Это отображение является (локальным) диффеоморфизмом, если проекция π_2 подмногообразия K на G есть (локальный) диффеоморфизм, что имеет место, если формы $\bar\omega^1, \ldots, \bar\omega^n$ линейно независимы на K. Условие (2.7) принимает вид

$$\bar\theta^i - \bar\omega^i = 0 \text{ на } K, \qquad i = 1, \ldots, n. \tag{2.8}$$

Уравнения (2.8) определяют дифференциальную систему на $M \times G$. Эта система вполне интегрируема. Действительно,

$$d(\bar\theta^i - \bar\omega^i) = \sum c^i_{jk}(\bar\theta^j \wedge \bar\theta^k - \bar\omega^j \wedge \bar\omega^k) = \quad \text{по} \quad (2.6)$$
$$= \sum c^i_{jk}(\bar\theta^j \wedge (\bar\theta^k - \bar\omega^k) + (\bar\theta^j - \bar\omega^j) \wedge \bar\omega^k).$$

Следовательно, через каждую точку $(y, x) \in M \times G$ проходит n-мерное интегральное многообразие K системы (2.8). Поскольку формы $\bar\theta^1, \ldots, \bar\theta^n, \bar\omega^1, \ldots, \bar\omega^n$ линейно независимы, для каждой точки $z \in M \times G$ формы $\bar\theta^1_z, \ldots, \bar\theta^n_z$, а также формы $\bar\omega^1_z, \ldots, \bar\omega^n_z$, линейно независимы на подпространстве пространства $T_z(M \times G)$, задаваемом уравнениями $\overline{\theta}^i_z - \overline{\omega}^i_z = 0$. Следовательно, многообразие K определяет диффеоморфизм окрестности точки $y \in M$ на окрестность точки $x \in G$, удовлетворяющий условию (2.7).

Таким образом, мы видим, что константы c^i_{jk} действительно определяют структуру группы G. Теоремы 2.3 и 2.4 можно рассматривать как теоремы единственности: группа G (если она односвязна) определяется своими структурными константами. Естественно возникает вопрос о соответствующей теореме существования: существует ли группа Ли с наперед заданными структурными константами c^i_{jk}? Заметим, что константы c^i_{jk} должны удовлетворять определенным соотношениям. Они должны быть антисимметричны по j, k. Далее, применив к равенству (2.1) внешнее дифференцирование, получим

$$0 = \sum c^i_{jk} (d\omega^j \wedge \omega^k - \omega^j \wedge d\omega^k) =$$
$$= \sum_{j<k} c^i_{jk} \Big(\sum_{l<m} c^j_{lm} \omega^l \wedge \omega^m \wedge \omega^k - \sum_{l<m} c^k_{lm} \omega^j \wedge \omega^l \wedge \omega^m \Big),$$

откуда

$$\sum_r (c^r_{jk} c^s_{rl} + c^r_{kl} c^s_{rj} + c^r_{lj} c^s_{rk}) = 0. \tag{2.9}$$

Мы предлагаем читателю проверить, что соотношения (2.9) можно также рассматривать как необходимые и достаточные условия того, чтобы умножение, задаваемое формулой (2.3), определяло алгебру Ли; это как раз тождество Якоби.

Следовательно, вопрос надо сформулировать так: даны константы c^i_{jk}, антисимметричные по j и k и удовлетворяющие соотношениям (2.9); существует ли группа Ли, имеющая c^i_{jk} своими структурными константами? Ответ на этот вопрос положителен. Мы не будем это доказывать, поскольку это потребовало бы довольно тонких алгебраических рассмотрений, выходящих за рамки этой книги.

§ 3. НОРМАЛЬНЫЕ КООРДИНАТЫ, ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ

Пусть G — группа Ли. Построим на G некоторую пульверизацию. Мы должны определить векторное поле Z на $T(G)$. Для каждого $v \in T(G)$ существует единственное поле $X \in g$, такое, что $X_{\pi(v)} = v$ (другими словами, каждый касательный вектор в любой точке G однозначно продолжается до левоинвариантного векторного поля на G). Тогда $T(X)$ (вариационное поле) есть векторное поле на $T(G)$. Положим $Z_v = T(X)_v$. Мы предоставляем читателю проверить, что отображение $v \to Z_v$ дифференцируемо и, следовательно, определяет дифференцируемое векторное поле. Из определения вариационного поля $T(X)$ немедленно следует, что $\pi_* Z_v = v$ и $\mu_{t*}(Z_v) = (1/t) Z_{\mu_t v}$, если $0 \neq t \in R$. Следовательно, поле Z является пульверизацией; мы назовем ее левоинвариантной пульверизацией. Нормальные координаты этой пульверизации в точке e (определяемые экспоненциальным отображением) называются *нормальными координатами группы* G.

Пусть X — левоинвариантное векторное поле и C — интегральная кривая поля X. Кривая C' в $T(G)$ является тогда интегральной кривой поля $T(X)$. Для любого $t \in R$ имеем $C'(t) = T(X)$ и $\pi(C'(t)) = X_{C(t)}$, так что $C''(t) = Z_{C'(t)}$. Другими словами, C' есть интегральная кривая поля Z, т. е. C — геодезическая [1]) пульверизации Z.

Рассмотрим экспоненциальное отображение пульверизации Z в точке e. Это дифференцируемое отображение пространства $T_e(G)$ в G. Его можно рассматривать как отображение пространства g в G. Если $X \in g$, то кривая $\exp tX$ определяется как геодезическая пульверизации Z, проходящая через точку e, с касательным вектором X_e. С другой стороны, согласно предыдущим замечаниям, $T_t e$ есть также геодезическая пульверизации Z, имеющая в точке e касательный вектор X_e (где T_t — однопараметрическая группа преобразований, порожденная полем X). В силу единственности имеем $\exp t X = T_t e$. Учитывая теорему 6.1 гл. IV, получаем следующее утверждение:

Теорема 3.1. *Дифференцируемое отображение* $\exp\colon g \to G$ *является диффеоморфизмом некоторой окрестности нуля в* g *на окрестность единицы в* G. *Для каждого* $X \in g$ *отображение* $t \to \exp tX$ *определяет однопараметрическую подгруппу Ли группы* G, *и все гомоморфизмы Ли* $R \to G$ *имеют такой вид.*

Остается доказать только последнее утверждение теоремы. Пусть $f\colon R \to G$ гомоморфизм Ли. Определим однопараметрическое семейство T_t диффеоморфизмов многообразия G на себя, полагая $T_t x = xf(t)$. Тогда $T_{t+s}x = xf(t+s) = xf(t)f(s) = T_s(T_t x)$, так что T_t — однопараметрическая подгруппа. Кроме того, $yT_t x = y(xf(t)) = yxf(t)$, откуда $L_y T_t = T_t L_y$. Следовательно, инфинитезимальная образующая X подгруппы T_t принадлежит g. Таким образом, $f(t) = T_t e = \exp tX$.

Пусть $f\colon G_1 \to G_2$ — некоторый гомоморфизм Ли. Любое поле $X \in g_1$ f-связано с $f_*(X) \in g_2$. Поэтому, если T_{1t} — однопараметрическая группа преобразований многообразия G_1, порожденная

[1]) Кривая C на G называется геодезической пульверизации Z, если C' есть интегральная кривая поля Z. — *Прим. перев.*

полем X, а T_{2t} — однопараметрическая группа преобразований многообразия G_2, порожденная полем $f_*(X)$, то $f \circ T_{1t} = T_{2t} \circ f$. Применяя это равенство к точке e, получаем

$$\exp \circ f_* = f \circ \exp. \tag{3.1}$$

Из формулы (3.1) вытекают разнообразные следствия.

Следствие 3.1. *Любой взаимно однозначный гомоморфизм Ли $G_1 \to G_2$ является погружением.*

Действительно, если $f_{*p}(v) = 0$ для некоторого $0 \neq v \in T_p(G_1)$, то $f_*(X) = 0$, где $X_e = L_{p^{-1}*}(v) \neq 0$. Но тогда $\exp \circ f_*(tX) = e = f(\exp tX)$. Так как $X \neq 0$, то $\exp tX \neq e$, и отображение f не является взаимно однозначным.

Следствие 3.2. *Любой непрерывный гомоморфизм* φ: $R \to G$ *дифференцируем.*

Ясно, что достаточно доказать дифференцируемость отображения φ вблизи нуля. Пусть U — нормальная окрестность единицы e и $x^1, \ldots, x^n$ — нормальная система координат. Если $q = \exp X \in U$ и $q^m = \exp mX \in U$ для $1 \leqslant m \leqslant k$, то $x^i(q^m) = mx^i(q)$, поскольку $x^i(\exp tX) = tx^i(\exp X)$. Выберем $\varepsilon > 0$ столь малым, чтобы $\varphi(t) \in U$ при всех $|t| < \varepsilon$. Для любых $0 < t_0 < \varepsilon$ и $0 < |m| \leqslant n$ имеем $x^i \circ \varphi(mt_0/n) = mx^i \circ \varphi(t_0/n)$ и $x^i \circ \varphi(t_0/n) = (1/n)\, x^i \circ \varphi(t_0)$. Значит, $x^i \circ \varphi(mt_0/n) = (m/n)\, x^i \circ \varphi(t_0)$. По непрерывности $x^i \circ \varphi(rt_0) = rx^i \circ \varphi(t_0)$ для всех $|r| \leqslant 1$. Таким образом, отображение φ линейно в терминах нормальных координат и, следовательно, дифференцируемо.

Посмотрим теперь, как выглядит умножение в нормальных координатах. Пусть U — нормальная окрестность единицы, $X_1, \ldots, X_n$ — базис пространства $\mathfrak{g}$, а $x^1, \ldots, x^n$ — соответствующие нормальные координаты. Пусть $V \subset U$ — такая окрестность точки e, что $ab \in U$ для всех $a, b \in V$; другими словами, отображение $G \times G \to G$ переводит $V \times V$ в U. Определим функции y^i и z^i на $V \times V$ формулами $y^i = x^i \circ \pi_1$, $z^i = x^i \circ \pi_2$, где π_1 и π_2 — проекции множества $V \times V$ на первый и второй сомножители. Тогда $y^1, \ldots, y^n, z^1, \ldots, z^n$ образуют систему координат на $V \times V$ и в терминах этих координат умножение задается формулами

$$x^i = f^i(y^1, \ldots, y^n; z^1, \ldots, z^n),$$

т. е. для любых $a, b \in V$

$$x^i(ab) = f^i(x^1(a), \ldots, x^n(a); x^1(b), \ldots, x^n(b)).$$

Найдем первые члены разложения Тейлора функций f^i. Поскольку $ea = ae = e$, имеем

$$f^i(0, \ldots, 0; z^1, \ldots, z^n) = z^i,$$
$$f^i(y^1, \ldots, y^n; 0, \ldots, 0) = y^i.$$

Поэтому

$$f^i(y^1, \ldots, y^n; z^1, \ldots, z^n) = y^i + z^i + (\text{члены второго порядка}). \tag{3.2}$$

Это означает, что для $Y, Z \in g$

$$\exp t(Y+Z) = \exp tY \exp tZ + O(t^2). \tag{3.3}$$

Вычислим теперь члены второго порядка. Пусть $Y = \sum y^i X_i$ и $Z = \sum z^i X_i$. При любом фиксированном s для любой функции ψ на G имеем

$$\frac{d}{dt}\psi(\exp sY \exp tZ) =$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}[\psi(\exp sY \exp tZ \exp hZ) - \psi(\exp sY \exp tZ)] =$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}[\psi(T_h \exp sY \exp tZ) - \psi(\exp sY \exp tZ)],$$

где T_h — однопараметрическая подгруппа, порожденная полем Z. Следовательно,

$$\frac{d}{dt}\psi(\exp sY \exp tZ) = Z\psi(\exp sY \exp tZ),$$

поскольку поле Z левоинвариантно. Итерируя это уравнение, получаем

$$\frac{d^r}{dt^r}\psi(\exp sY \exp tZ) = Z^r\psi(\exp sY \exp tZ).$$

В частности, по формуле Тейлора,

$$x^i(\exp sY \exp tZ) = x^i(\exp sY) + t(Zx^i)(\exp sY) +$$
$$+ t^2(Z^2x^i)(\exp sY) + O(t^3).$$

Аналогично, для любой функции ψ имеем

$$\frac{d}{ds}\psi(\exp sY) = (Y\psi)(\exp sY).$$

Применяя эту формулу к правой части приведенного выше равенства, получаем

$$x^i(\exp sY \exp tZ) = s(Yx^i)(e) + t(Zx^i)(e) +$$
$$+ s^2(Y^2x^i)(e) + st(YZx^i)(e) + t^2(Z^2x^i)(e) +$$
$$+ (\text{члены третьего порядка}). \tag{3.4}$$

Итак,

$$f^i(y^1, \ldots, y^n; z^1, \ldots, z^n) = y^i + z^i + Y^2x^i(e) +$$
$$+ YZx^i(e) + Z^2x^i(e) + (\text{члены третьего порядка}). \tag{3.5}$$

В частности,

$$f^i(y^1, \ldots, y^n; z^1, \ldots, z^n) - f^i(z^1, \ldots, z^n; y^1, \ldots, y^n) = \\ = [Y, Z]\, x^i(e) + (\text{члены третьего порядка}). \qquad (3.6)$$

Формула (3.3) означает, что $x^i(\exp Y \exp Z) = x^i(\exp Y) + x^i(\exp Z) +$ $+$ (члены второго порядка). Поэтому для $(a, b) \in V \times V$ имеем

$$x^i(ab) - x^i(a) - x^i(b) = \sum g_{ijk}(a, b)\, x^j(a)\, x^k(b), \qquad (3.7)$$

где g_{ijk} — дифференцируемые функции на $V \times V$. Полагая в формуле (3.7) $a = cd$ и $b = d^{-1}c^{-1}dc$, получаем

$$x^i(dc) - x^i(cd) - x^i(d^{-1}c^{-1}dc) = \sum g_{ijk}(cd, d^{-1}c^{-1}dc)\, x^j(cd)\, x^k(d^{-1}c^{-1}dc).$$

Но член $x^i(d^{-1}c^{-1}dc)$ равен нулю, если либо d, либо c равно e, и, следовательно, является членом не ниже второго порядка. Таким образом,

$$x^i(d^{-1}c^{-1}dc) = x^i(cd) - x^i(dc) + (\text{члены третьего порядка}).$$

Полагая в формуле (3.6) $c = \exp Y$ и $d = \exp Z$, получаем[1])

$$x^i((\exp Z)^{-1}(\exp Y)^{-1}(\exp Z)(\exp Y)) = \\ = x^i(\exp[Y, Z]) + (\text{члены третьего порядка}). \qquad (3.8)$$

Далее, $d(d^{-1}c^{-1}dc) = c^{-1}dc$. Полагая в формуле (3.7) $a = d$, $b = d^{-1}c^{-1}dc$ и замечая, что $x^i(d^{-1}c^{-1}dc)$ есть член не ниже второго порядка, мы получаем

$$x^i(c^{-1}dc) = x^i(d) + x^i(d^{-1}c^{-1}dc) + (\text{члены третьего порядка}).$$

Полагая $c = \exp Y$, $d = \exp Z$ и используя формулу (3.6), находим

$$x^i((\exp Y)^{-1} \exp Z \exp Y) = \\ = x^i(Z) + x^i(\exp[Y, Z]) + (\text{члены третьего порядка}). \qquad (3.9)$$

Для любого $x \in G$ обозначим символом $A(x)$ внутренний автоморфизм, соответствующий элементу x. Таким образом, $A(x): G \to G$ есть изоморфизм Ли, определяемый формулой

$$A(x)\, y = x^{-1}yx. \qquad (3.10)$$

Тогда равенство (3.9) можно переписать в виде

$$x^i[A(\exp Y) \exp Z] = \\ = x^i(Z) + x^i(\exp[Y, Z]) + (\text{члены третьего порядка}). \qquad (3.11)$$

Выведем теперь из равенств (3.2) — (3.11) несколько следствий.

---

[1]) Напомним, что по определению $x^i(\exp W) = (Wx^i)(e)$ для любого поля $W \in g$.

Лемма 3.1. *Пусть* $g = V_1 + \ldots + V_k$ — *разложение алгебры* g *в прямую сумму векторных пространств. Для любого* $X \in g$, *где* $X = X_1 + \ldots + X_k$ $(X_i \in V_i)$, *положим*

$$\varphi(X) = \exp X_1 \exp X_2 \ldots \exp X_k. \tag{3.12}$$

Определенное так отображение $\varphi\colon g \to G$ *является диффеоморфизмом некоторой окрестности нуля в* g *на окрестность единицы в* G.

Очевидно, что φ — дифференцируемое отображение. Согласно формуле (3.2), $\varphi(X) = \exp(X_1 + \ldots + X_k) +$ (члены второго порядка). Следовательно, отображение $\varphi_*\colon T_0(g) \to T_e(G)$ совпадает с отображением l_0 (теорема 6.1 гл. IV), т. е. φ — локальный диффеоморфизм.

Теорема 3.2. *Любой непрерывный гомоморфизм* f *группы Ли* G_1 *в группу Ли* G_2 *является дифференцируемым.*

Используя сдвиги, достаточно доказать, что отображение f дифференцируемо в окрестности единицы e. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — базис алгебры Ли g_1 группы Ли G_1, и пусть f — гомоморфизм $G_1 \to G_2$. Тогда отображение $t \to f(\exp tX_i)$ является непрерывным гомоморфизмом $R \to G_2$ и, значит, дифференцируемо (согласно следствию 3.2). Поэтому в алгебре Ли g_2 группы G_2 существуют такие элементы Y_i, что $f(\exp t X_i) = \exp tY_i$. Поскольку f — гомоморфизм, имеем

$$f((\exp t_1X_1)(\exp t_2X_2)\ldots(\exp t_nX_n)) = \\ = (\exp t_1Y_1)\ldots(\exp t_nY_n). \tag{3.13}$$

Отображение $F\colon g_1 \to G_2$, переводящее $X = t_1X_1 + \ldots + t_nX_n$ в $(\exp t_1Y_1)\ldots(\exp t_nY_n)$, очевидно, дифференцируемо. Равенство (3.13) показывает, что $F = f \circ \varphi$ (где φ — отображение, задаваемое формулой (3.12) и соответствующее разложению $g = \{X_1\} + \ldots + \{X_n\}$). Согласно лемме 3.1, отображение φ вблизи нуля является диффеоморфизмом. Поэтому в некоторой окрестности единицы $f = F \circ \varphi^{-1}$, и, значит, отображение f дифференцируемо.

Из теоремы 3.2 следует, что топология группы Ли определяет ее дифференцируемую структуру: если G_1 и G_2 — группы Ли и f — гомеоморфизм и гомоморфизм группы G_1 на G_2, то f является диффеоморфизмом.

Рассмотрим более подробно равенства (3.10) и (3.11). Для любого $x \in G$ преобразование $A(x)$ оставляет точку e неподвижной и, значит, индуцирует преобразование $A(x)_*\colon T_e(G) \to T_e(G)$. Если $x, y \in G$, то $A(xy) = A(x)A(y)$, и, следовательно

$A(xy)_* = A(x)_* A(y)_*$. Следовательно, $x \to A(x)_*$ есть представление группы G линейными преобразованиями пространства $\mathfrak{g}$.

Определение 3.1. Линейное представление $x \to A(x)_*$ называется *присоединенным представлением*. Линейное преобразование $A(x)_*$ мы будем обозначать символом $\mathrm{Ad}\, x$.

Пусть X и Y — элементы из $\mathfrak{g}$. Согласно (3.11), кривая $\exp(sX)$ переходит при отображении $A(\exp tY)$ в $\exp(sX + st[Y, X])$ с точностью до членов третьего порядка по s и t. Таким образом,

$$\frac{d}{dt} \mathrm{Ad}(\exp tY) X|_{t=0} = [Y, X]. \tag{3.14}$$

Определение 3.2. Представление алгебры Ли $\mathfrak{g}$ линейными преобразованиями пространства $\mathfrak{g}$, определяемое левым умножением, называется *присоединенным представлением* алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Таким образом,

$$(\mathrm{Ad}\, Y) X = [Y, X].$$

Согласно сделанным замечаниям, имеем

$$\mathrm{Ad}(\exp Y) X = \exp(\mathrm{Ad}\, Y) X. \tag{3.15}$$

4. ЗАМКНУТЫЕ ПОДГРУППЫ

Используя результаты предыдущего параграфа, мы докажем следующую теорему:

Теорема 4.1. *Пусть G — группа Ли и H — замкнутое подмножество в G, являющееся (алгебраически) подгруппой. Тогда H есть подгруппа Ли в G. [Короче, любая замкнутая подгруппа группы Ли есть подгруппа Ли.]*

Согласно теореме 1.1, для того, чтобы доказать, что H есть группа Ли, достаточно проверить, что H есть подмногообразие в G. Для этого достаточно показать (согласно упражнению 2.4 гл. II), что любая точка $p \in G$ обладает такой окрестностью U, что $U \cap H$ есть подмногообразие в U. Если $p \notin H$, то ввиду замкнутости подгруппы H существует такая окрестность U, что $U \cap H = \varnothing$. Если $p \in H$, то, воспользовавшись тем, что H — подгруппа, и умножив все слева на p^{-1}, мы сведем задачу к случаю, когда $e \in H$. Итак, достаточно доказать, что

существует такая окрестность U единицы e в G, что $U \cap H$ есть подмногообразие в U.

Мы возьмем в качестве U достаточно малую нормальную окрестность. Если H действительно есть замкнутая подгруппа Ли, то мы можем ожидать, что пересечение $U \cap H$ имеет вид

$\exp(V \cap h)$, где V — окрестность нуля в g, а h — алгебра Ли группы Ли H. Построим прежде всего алгебру Ли группы H.

Лемма 4.1. *Пусть H — замкнутая подгруппа в G и h — множество всех $X \in g$, для которых $\exp tX \in H$ при всех $t \in R$. Тогда h — подалгебра алгебры Ли g.*

Ясно, что если $X \in h$, то $sX \in h$, поскольку $\exp t(sX) = \exp tsX$. Чтобы доказать замкнутость множества h относительно сложения и умножения Ли, удобно воспользоваться следующей леммой:

Лемма 4.2. *Пусть $\{X_i\}$ — последовательность элементов из g, причем $X_i \to X$, и пусть $t_i \to 0$ — последовательность отличных от нуля вещественных чисел. Если $\exp t_iX_i \in H$ для всех i, то $\exp tX \in H$ для всех t, т. е. $X \in h$.*

Заметим, что, поскольку $\exp(-t_iX_i) = (\exp t_iX_i)^{-1} \in H$, можно считать, что $t_i > 0$. Точно так же, достаточно доказать, что $\exp tX \in H$ только для $t > 0$. Для каждого $t > 0$ положим $k_i(t) = \left[\frac{t}{t_i}\right]$ $\left(\text{наибольшее целое число, не превосходящее } \frac{t}{t_i}\right)$. Тогда

$$\frac{t}{t_i} - 1 < k_i(t) \leqslant \frac{t}{t_i},$$

откуда

$$\lim_{i\to\infty} t_ik_i(t) = t.$$

Так как $\exp t_iX_i \in H$, то $\exp k_i(t)\, t_iX_i = (\exp t_iX_i)^{k_i(t)} \in H$. Но $\lim\limits_{i\to\infty} k_i(t)\, t_iX_i = tX$, и ввиду замкнутости подгруппы H и непрерывности отображения $\exp$ имеем $\exp tX \in H$, что и доказывает лемму 4.2.

Докажем теперь лемму 4.1. Пусть $X, Y \in h$. Тогда $\exp tX \exp tY \in H$. С другой стороны,

$$\exp tX \exp tY = \exp(t(X + Y) + tZ_t),$$

где $Z_t \to 0$ при $t \to 0$. Выберем последовательность t_i положительных чисел, сходящуюся к нулю, и положим $X_i = X + Y + Z_{t_i}$. Применяя лемму 4.2, заключаем, что $X + Y \in h$. Аналогично,

$$(\exp tX)(\exp tY)(\exp tX)^{-1}(\exp tY)^{-1} = \exp(t^2[X, Y] + t^2Z_t),$$

откуда $[X, Y] \in h$. Это доказывает лемму 4.1.

Теперь мы хотим доказать существование такой окрестности U единицы e, что $U \cap H = \exp h \cap U$. Для этого выберем подпространство, скажем h', дополнительное к h в g, т. е. $g = h + h'$.

Лемма 4.3. *Существует такая окрестность V' нуля в h', что из $0 \neq X' \in V'$ следует, что* $\exp X' \notin H$.

Выберем в h' евклидову метрику. Пусть K — множество всех $X' \in h'$, для которых $1 \leqslant \| X' \| \leqslant 2$. Если лемма 4.3 не верна, то существует последовательность $Y_i \to 0$, $Y_i \in h'$, $\exp Y_i \in H$. Ясно, что можно выбрать целые числа n_i так, чтобы $X_i = n_i Y_i \in K$. Поскольку K компактно, можно считать (переходя в случае надобности к подпоследовательности), что $X_i \to X \neq 0$. Кроме того, $(1/n_i) \to 0$ и $\exp(1/n_i) X_i \in H$. Из леммы 4.2 следует тогда, что $X \in h$, что противоречит определению подпространства h'.

Пусть теперь W — окрестность нуля в g, для которой отображение φ: $g \to G$, определяемое формулой φ: $(X + X') = \exp X' \exp X$ $(X' \in h',\ X \in h)$, является диффеоморфизмом (см. лемму 3.1). Можно считать, что W имеет вид $W' \times W''$, где $W'' \subset h$ и $W' \subset V'$. Положим $U = \varphi(W)$. Если $x \in U$, то $x = \exp X' \exp X$, где $X \in h$, $X' \in h'$. Если $x \in U \cap H$, то $\exp X' \exp X \in H$, откуда $\exp X' \in H$, поскольку $\exp X \in H$ и H — группа. Значит, $X' = 0$. Другими словами, $U \cap H = U \cap \exp h$, что и доказывает теорему 4.1.

Заметим, что в ходе доказательства мы установили, что не только H, но и G/H обладает дифференцируемой структурой. Точнее, справедлива

Теорема 4.2. *Пусть G — группа Ли и H — замкнутая подгруппа. Тогда G/H обладает единственной дифференцируемой структурой, в которой*

(i) *проекция* π: $G \to G/H$ *дифференцируема*;

(ii) *для любой точки $p \in G/H$ существуют окрестность $W \ni p$ и дифференцируемое отображение φ: $W \to G$, такие, что* $\pi \circ \varphi = \mathrm{id}$.

Левые сдвиги на элементы из G являются диффеоморфизмами многообразия G/H.

Заметим сначала, что последнее утверждение теоремы справедливо для любой дифференцируемой структуры на G/H, удовлетворяющей условиям (i) и (ii). Действительно, левый сдвиг на z^{-1} является обратным отображением к левому сдвигу на z, так что достаточно доказать, что левые сдвиги дифференцируемы. Пусть $p \in G/H$, а W, ψ — такие, как в условии (ii). По определению $zq = \pi(z\psi(q))$ для любого $q \in W$. Таким образом, левый сдвиг на z представим в окрестности W в виде композиции $\pi \circ L_z \circ \psi$ дифференцируемых отображений, и, следовательно, дифференцируем.

Из этого замечания следует также, что достаточно доказать существование и единственность дифференцируемой структуры в одной точке $p \in G/H$. Действительно, если существует система координат в окрестности U точки p, то, применяя левые сдвиги, мы получим систему координат в окрестности любой точки. Из (i) и (ii) (на U) следует тогда, что таким образом на G/H определяется (единственная) дифференцируемая структура.

Поэтому мы будем доказывать существование и единственность такой структуры в окрестности класса смежности единицы eH. В качестве окрестности W возьмем проекцию окрестности U точки e, построенной при доказательстве леммы 4.3. Каждая точка $x \in U$ однозначным образом записывается в виде $x = \exp X' \exp X$. Другими словами, существует корректно определенное отображение σ: $W \to \mathfrak{h}'$, переводящее xH в X'. Поэтому выбор системы координат на $\mathfrak{h}'$ определяет координаты на W. Кроме того, отображение $\psi = \exp \circ \sigma$: $W \to U$, очевидно, дифференцируемо и удовлетворяет условию (ii). Отображение φ: $\mathfrak{g} \to G$, переводящее $X + X'$ в $(\exp X')(\exp X)$, является диффеоморфизмом некоторой окрестности нуля на U. Следовательно, отображение ρ: $U \to \mathfrak{h}'$, переводящее $x = (\exp X')(\exp X)$ в X', дифференцируемо. Но $\pi = \sigma^{-1} \circ \rho$, и так как σ определяет дифференцируемую структуру на W, проекция π дифференцируема. Это доказывает существование дифференцируемой структуры на G/H, удовлетворяющей условиям (i) и (ii).

Для доказательства единственности предположим, что W имеет две дифференцируемые структуры с координатными отображениями σ_1 и σ_2 и отображениями ψ_1 и ψ_2 в G. Мы хотим показать, что отображение $\sigma_1\sigma_2^{-1}$ дифференцируемо. Но $\sigma_1\sigma_2^{-1} = \sigma_1\pi\psi_2\sigma_2^{-1}$. Поскольку $\sigma_1\pi$ есть дифференцируемое отображение группы G в E^k (согласно (i)), а отображение $\psi_2\sigma_2^{-1}$ дифференцируемо (согласно (ii)), отображение $\sigma_1\sigma_2^{-1}$ дифференцируемо, что и доказывает теорему 4.2.

В дальнейшем нам понадобится следующая

Лемма 4.4. *Пусть G — группа Ли, H — топологическая группа* [1]*, f — непрерывный гомоморфизм $H \to G$. Тогда существует единственная наименьшая алгебра Ли $\mathfrak{h}$, такая, что если V — любая окрестность нуля в $\mathfrak{h}$, то $f(U) \subset \exp V$ для всех достаточно малых окрестностей U точки e в H.*

Ясно, что в качестве $\mathfrak{h}$ можно взять пересечение всех подалгебр, обладающих указанным свойством (поскольку пересечение подпространств конечномерного пространства сводится к конечному пересечению).

---

[1] Топологической группой называется группа H, снабженная структурой топологического пространства, в которой групповые операции непрерывны, т. е. отображение $H \times H \to H$, переводящее (x, y) в xy^{-1}, непрерывно.

Можно дать алгебре h более геометрическую характеристику:

Упражнение 4.1. Показать, что $X \in h$ тогда и только тогда, когда существуют последовательность $h_i \to e$ в H и последовательность чисел $n_i \to \infty$, такие, что $X = \lim n_i \exp^{-1} f(h_i)$. Таким образом, h есть пространство «предельных направлений» подгруппы $f(H)$. [Доказательство аналогично доказательству леммы 4.1.]

§ 5. ИНВАРИАНТНЫЕ МЕТРИКИ

Прямые евклидова пространства E^n можно охарактеризовать двумя способами. С одной стороны, они служат геодезическими, т. е. минимизируют длину. С другой стороны, они являются классами смежности однопараметрических подгрупп группы Ли E^n. Оказывается, что это не случайно, а следует из того, что правые и левые сдвиги являются изометриями для евклидовой метрики. Сейчас мы установим этот результат в общем случае.

Определение 5.1. Пусть G — группа Ли. Риманова метрика **a** на G называется *биинвариантной*, если L_x и R_x являются изометриями относительно **a** для всех $x \in G$.

Заметим, что если **a** — биинвариантная метрика на G, то $A(x)$ есть изометрия при любом $x \in G$. Действительно, $A(x) = R_{x^{-1}} L_x$. Отображение $G \to G$, переводящее x в x^{-1}, также является изометрией. В самом деле, это отображение переводит каждый вектор в точке e в противоположный и, следовательно, сохраняет длину в $T_e(G)$. Покажем, что оно является изометрией в любой точке $y \in G$. Для этого представим отображение $x \to x^{-1}$ в виде $x \to xy^{-1} \to (xy^{-1})^{-1} = yx^{-1} \to y^{-1}yx^{-1} = x^{-1}$. Поскольку $L_{y^{-1}}$ и $R_{y^{-1}}$ — изометрии, достаточно проверить, что $xy^{-1} \to (xy^{-1})^{-1}$ есть изометрия в точке $x = y$, что мы уже сделали.

Теорема 5.1. *Пусть* **a** *— биинвариантная риманова метрика на группе Ли G. Тогда каждая геодезическая получается левым сдвигом из некоторой однопараметрической подгруппы, и обратно.*

При доказательстве теоремы 5.1 достаточно (учитывая возможность применения левых сдвигов) ограничиться рассмотрением окрестности точки e. Мы хотим показать, что любая геодезическая, проходящая через e, является однопараметрической подгруппой, и обратно. Для этого сформулируем следующую лемму.

Лемма 5.1. *Пусть σ — изометрия риманова многообразия M, причем $\sigma^2 = \mathrm{id}$. Пусть x — изолированная неподвижная точка изометрии σ. Пусть U — окрестность точки x с однозначными* *геодезическими*[1]), *не содержащая других неподвижных точек. Если $y \in U$ и $\sigma(y) \in U$, то геодезическая, соединяющая y с $\sigma(y)$, проходит через x.*

Пусть γ — геодезическая, соединяющая y с $\sigma(y)$. Так как $\sigma^2 = 1$, то $\sigma(\gamma)$ есть геодезическая, соединяющая $\sigma(y)$ с y. Значит, σ отображает γ на себя, обращая направление. Поэтому на γ должна существовать неподвижная точка, и этой неподвижной точкой может быть только x.

Применим лемму 5.1 к следующей ситуации: пусть $z \in G$ — точка, близкая к e, и пусть $z(t)$ — (единственная) однопараметрическая группа, соединяющая e с z, для которой $z(1) = z$. Положим $x = z(1/2)$ и определим отображение σ формулой $\sigma(y) = xy^{-1}x$. Тогда $\sigma^2(y) = x(xy^{-1}x)^{-1}x = y$, так что $\sigma^2 = \mathrm{id}$ и σ есть изометрия. Если $\sigma(y) = y$, то $xy^{-1}x = y$ и $(y^{-1}x)^2 = 1$. Но если точки y и x достаточно близки (в частности, если они обе близки к e), то отсюда следует, что $y = x$. Поэтому x — изолированная неподвижная точка изометрии σ.

Далее, $\sigma(z) = x^2z^{-1} = e$. Следовательно, геодезическая, соединяющая e с z, проходит через x. Повторяя эти рассуждения для обеих половинок кривой $z(t)$, мы докажем, что геодезическая, соединяющая e с z, содержит $z(r)$ при любом $r = p/2^n$. По непрерывности отсюда следует, что $z(t)$ — геодезическая.

Итак, любая однопараметрическая подгруппа является геодезической. Но это означает, что экспоненциальное отображение геодезической пульверизации метрики **a** в точке e совпадает с экспоненциальным отображением exp левоинвариантной пульверизации на группе G, что и доказывает теорему 5.1.

Рассмотрим теперь вопрос о существовании биинвариантной метрики на группе Ли. Задав произвольное скалярное произведение (v, w) в $g = T_e(G)$, мы можем продолжить его левыми сдвигами до римановой метрики на G, т. е. для любых $v, w \in T_x(G)$ определить $(v, w)_x$ по формуле $(v, w)_x = (L_{x^{-1}*}v, L_{x^{-1}*}w)$. Ясно, что эта метрика инвариантна относительно левых сдвигов. Как обстоит дело с правыми сдвигами? Для инвариантности мы должны иметь $(R_{x*}v, R_{x*}w)_x = (v, w)$ для всех $v, w \in g$ и $x \in G$. Но $(R_{x*}v, R_{x*}w)_x = (L_{x^{-1}*}R_{x*}v, L_{x^{-1}*}R_{x*}w)$ и $R_{x*}L_{x^{-1}*} = \mathrm{Ad}\, x$. Таким образом, мы должны иметь

$$((\mathrm{Ad}\, x)\, v, (\mathrm{Ad}\, x)\, w) = (v, w). \tag{5.1}$$

Обратно, если условие (5.1) выполняется для всех $x \in G$, то скалярное произведение (v, w) продолжается до биинвариантной метрики на G. Итак, доказана

[1]) То есть любые две различные точки из U соединяются единственной геодезической, лежащей в U.— *Прим. перев.*

Лемма 5.2. *Пусть (,) — скалярное произведение на $\mathfrak{g}$. Для того чтобы оно продолжалось* (*с помощью левых сдвигов*) *до биинвариантной метрики на* G, *необходимо и достаточно, чтобы оно было инвариантно относительно присоединенного представления, т. е. чтобы выполнялось условие* (5.1).

Таким образом, мы столкнулись со следующей задачей: дано представление ρ группы Ли G (в частности, присоединенное представление) в векторном пространстве V; в каком случае на V существует инвариантное скалярное произведение? Другими словами, когда на V существует (положительно определенное) скалярное произведение (,), для которого

$$(\rho(x)v,\ \rho(x)w) = (v,\ w) \tag{5.2}$$

при всех $x \in G$ и $v,\ w \in V$?

Заметим, что ортогональная группа компактна (упражнение!). Если $\rho(G)$ сохраняет (,), то $\rho(G)$ есть подгруппа ортогональной группы, определяемой скалярным произведением (,), и, следовательно, $\overline{\rho(G)}$ компактно.

Обратно, предположим, что $\overline{\rho(G)} = H$ есть компактная подгруппа группы всех невырожденных линейных преобразований пространства V. Тогда, согласно теореме 4.1, H — группа Ли. Мы хотим найти такое скалярное произведение (,) на V, что $(hv,\ hw) = (v,\ w)$ для всех $v,\ w \in V,\ h \in H$. Для этого рассмотрим форму $\Omega = \omega_1 \wedge \ldots \wedge \omega_k$, где $\omega_1, \ldots, \omega_k$ — базис пространства левоинвариантных линейных форм на H $(k = \dim H)$. Поскольку форма Ω нигде не обращается в нуль, она определяет ориентацию на H. Поэтому для любой непрерывной функции f на H мы можем рассмотреть интеграл $\int_H f\Omega$. Пусть $(\ ,\ )_0$ — любое положительно определенное скалярное произведение на V. Положим

$$(v,\ w) = \int_{x \in G} (xv,\ xw)_0\, \Omega. \tag{5.3}$$

Мы оставляем читателю проверку того, что (,) есть инвариантное положительно определенное скалярное произведение на V. Итак, доказана

Теорема 5.2. *Пусть ρ — линейное представление группы Ли G в векторном пространстве V. Для того чтобы V обладало инвариантным относительно G скалярным произведением, необходимо и достаточно, чтобы $\overline{\rho(G)}$ было компактно. В частности, если G компактна, то для любого представления ρ всегда существует инвариантное скалярное произведение.*

Упражнение 5.1. Показать, что любое представление компактной группы Ли вполне приводимо.

Упражнение 5.2. Пусть G — компактная группа Ли, действующая дифференцируемым образом на многообразии M. Показать, что на M существует риманова метрика, для которой G — группа изометрий (и, таким образом, мы можем применять теорему 8.2 гл. IV).

Из леммы 5.2 вытекает

Теорема 5.3. *Пусть G — группа Ли. Для того чтобы G обладала бинвариантной римановой метрикой, необходимо и достаточно, чтобы $\overline{\mathrm{Ad}(G)}$ было компактно. В частности, любая компактная группа Ли обладает бинвариантной метрикой.*

В качестве следствия получаем

Упражнение 5.3. Пусть G — компактная связная группа Ли. Тогда каждая точка $x \in G$ принадлежит некоторой однопараметрической подгруппе. [Для некомпактных групп Ли это, вообще говоря, *не верно.*]

§ 6. ФОРМЫ СО ЗНАЧЕНИЯМИ В ВЕКТОРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Удобно распространить теорию дифференциальных форм на формы, принимающие значения в векторном пространстве. До сих пор мы рассматривали только такие линейные дифференциальные формы на M, которые определяют на каждом касательном пространстве $T_x(M)$ вещественный линейный функционал (дифференцируемо зависящий от точки x). Теперь мы хотим рассматривать линейные отображения каждого касательного пространства в фиксированное векторное пространство W. Так, например, в случае, когда G есть группа Ли, мы определили левоинвариантные формы $\omega_1, \ldots, \omega_n$, соответствующие некоторому выбору базиса алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Эти формы неудобны тем, что они зависят от выбора базиса. Однако существует корректно определенная векторнозначная форма ω, которая сопоставляет каждому касательному вектору $v \in T_p(G)$ элемент из $\mathfrak{g}$ (рассматриваемый как левоинвариантное векторное поле), принимающий в точке p значение v. Естественно ожидать, что структурные уравнения группы G в терминах формы ω примут особенно простой вид, и это действительно так. Разовьем сначала необходимый формализм.

Пусть M — многообразие и W — конечномерное векторное пространство. Под W-значной дифференциальной формой степени q мы будем понимать элемент пространства $W \otimes \bigwedge^q(M)$. Другими словами, W-значная дифференциальная форма Ω есть линейное отображение $\bigwedge^q T_x(M) \longrightarrow W$, определенное при каждом $x \in M$ (и дифференцируемо зависящее от x), т. е. элемент из $W \otimes \bigwedge^q T_x^*(M)$

для каждого $x \in M$. Множество всех W-значных дифференциальных q-форм образует векторное пространство и, более того, модуль над кольцом дифференцируемых функций на M. Мы будем обозначать это пространство через $\bigwedge_W^q(M)$, а пространство всех W-значных дифференциальных форм — через $\bigwedge_W(M)$. Таким образом, $\bigwedge_W(M) = \bigwedge_W^0(M) + \ldots + \bigwedge_W^n(M)$.

Пусть дано векторное поле X на M. Мы можем определить очевидным образом линейные отображения $\mathcal{L}_X$: $\bigwedge_W^q(M) \longrightarrow \bigwedge_W^q(M)$ и внутреннее умножение на X, отображающее $\bigwedge_W^q(M)$ в $\bigwedge_W^{q-1}(M)$. Кроме того, мы имеем оператор d: $\bigwedge_W^q(M) \longrightarrow \bigwedge_W^{q+1}(M)$, который удовлетворяет соответствующим соотношениям § 1 гл. III. Всякое отображение φ: $M_1 \longrightarrow M_2$ индуцирует линейное отображение φ^*: $\bigwedge_W(M_2) \longrightarrow \bigwedge_W(M_1)$ и т. п. Все эти определения и утверждения можно аккуратно сформулировать, выбрав базис $e_1, \ldots, e_k$ пространства W. Тогда любая форма $\Omega \in \bigwedge_W(M)$ может быть записана в виде $\Omega = \sum \Omega_i \otimes e_i$, где Ω_i — (вещественнозначные) внешние дифференциальные формы. Положим, например, $d\Omega = \sum d\Omega_i \otimes e_i$. Непосредственная проверка показывает, что это определение не зависит от выбора базиса $e_1, \ldots, e_k$. Точно так же можно поступить с остальными утверждениями.

Пусть W_1 и W_2 — векторные пространства и l — линейное отображение $W_1 \longrightarrow W_2$. Тогда существует очевидное линейное отображение $l_\#$: $\bigwedge_{W_1}(M) \longrightarrow \bigwedge_{W_2}(M)$. Ясно, что $l_\#$ коммутирует со всеми уже упоминавшимися операциями. Так, $l_\# d\Omega = dl_\#\Omega$, $l_\#\mathcal{L}_X\Omega = \mathcal{L}_X l_\#\Omega$ и т. д.

Пусть W_1, W_2 и W_3 — три векторных пространства и ρ — билинейное отображение $W_1 \times W_2 \longrightarrow W_3$. Определим билинейное отображение $\rho_\#$: $\bigwedge_{W_1}(M) \times \bigwedge_{W_2}(M) \longrightarrow \bigwedge_{W_3}(M)$ следующим образом. Пусть $e_1, \ldots, e_k$ — базис в W_1, а $f_1, \ldots, f_l$ — базис в W_2. Предположим, что $\omega = \sum \omega_i e_i \in \bigwedge_{W_1}(M)$, а $\Omega = \sum \Omega_i f_i \in \bigwedge_{W_2}(M)$. Положим

$$\rho_\#(\omega, \Omega) = \sum \omega_i \wedge \Omega_j \otimes \rho(e_i, f_j). \tag{6.1}$$

Легко проверить, что определение (6.1) не зависит от выбора координат. Из (6.1) следует, что

$$d\rho_\#(\omega, \Omega) = \rho_\#(d\omega, \Omega) + (-1)^q \rho_\#(\omega, d\Omega), \tag{6.2}$$

если ω — форма степени q. Кроме того,

$$\mathcal{L}_X\rho_\#(\omega, \Omega) = \rho_\#(\mathcal{L}_X\omega, \Omega) + \rho_\#(\omega, \mathcal{L}_X\Omega) \tag{6.3}$$

для любого векторного поля X на M. Если $\varphi\colon N \to M$ — отображение многообразий, то мы имеем

$$\varphi^*\rho_\#(\omega, \Omega) = \rho_\#(\varphi^*\omega, \varphi^*\Omega). \tag{6.4}$$

В дальнейшем мы будем часто иметь дело с двумя важными частными случаями, поэтому введем для них специальные обозначения. Пусть $W = W_1 = W_2 = W_3$ — алгебра Ли и ρ — скобка Ли. В этом случае мы будем обозначать $\rho_\#(\omega_1, \omega_2)$ символом $[\omega_1 \wedge \omega_2]$. Если ω_1 и ω_2 — формы степени соответственно p и q, то

$$[\omega_1 \wedge \omega_2] = (-1)^{pq+1} [\omega_2 \wedge \omega_1]. \tag{6.5}$$

[Множитель $(-1)^{pq}$ возникает из закона умножения в $\bigwedge(M)$, а (-1) — из антикоммутативности скобки Ли.] Если ω_1, ω_2 и ω_3 — формы степени p, q и r, то тождество Якоби принимает вид

$$(-1)^{pr} [\omega_1 \wedge [\omega_2 \wedge \omega_3]] + (-1)^{pq} [\omega_2 \wedge [\omega_3 \wedge \omega_1]] + \\ + (-1)^{rq} [\omega_3 \wedge [\omega_2 \wedge \omega_1]] = 0.$$

Другой важный для нас случай — когда $W_2 = W_3 = V$ — векторное пространство, а W_1 — некоторое векторное пространство линейных преобразований пространства V. Таким образом, W_1 есть подпространство пространства $V \otimes V^*$. В этом случае мы будем обозначать $\rho_\#(\omega_1, \omega_2)$ просто через $\omega_1 \wedge \omega_2$.

Вернемся к группе Ли G и ее фундаментальной g-значной форме ω. Пусть $e_1, \ldots, e_n$ — базис алгебры g, так что $\omega = \omega^1 \otimes e_1 + \ldots + \omega^n \otimes e_n$, где ω^i — базис пространства левоинвариантных форм. Согласно формуле (2.1),

$$d\omega^i = \sum_{j<k} C^i_{jk} \omega^j \wedge \omega^k,$$

так что

$$d\omega = \sum C^i_{jk} \omega^j \wedge \omega^k \otimes e_i.$$

С другой стороны, формула (2.3) дает $[e_k, e_j] = \sum C^i_{jk} e_i$. Значит, в соответствии с формулой (6.1)

$$[\omega \wedge \omega] = \sum_{i,j,k} \omega^k \wedge \omega^j \otimes C^i_{jk} e_i.$$

Сравнивая эти два выражения (заметим, что j и k меняются местами и что первая сумма берется по $j < k$, а вторая — по всем j, k), получаем структурные уравнения группы G в следующем виде:

$$d\omega = -\frac{1}{2} [\omega \wedge \omega]. \tag{6.6}$$

Глава VI

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ ЕВКЛИДОВА ПРОСТРАНСТВА

В этой главе мы будем изучать дифференциальную геометрию подмногообразий евклидова пространства и, в частности, двумерные поверхности в E^3. Естественно ожидать, что много информации может дать изучение группы евклидовых движений $\mathscr{E}(n)$. И действительно, большинство уравнений классической дифференциальной геометрии оказываются прямыми следствиями структурных уравнений группы $\mathscr{E}(n)$. Поэтому мы начнем с изучения этой группы.

§ 1. СТРУКТУРНЫЕ УРАВНЕНИЯ ЕВКЛИДОВА ПРОСТРАНСТВА

Любое евклидово движение является произведением сдвига и евклидова движения, оставляющего неподвижной данную точку. Если взять в качестве неподвижной точки начало координат в E^n, то любое евклидово движение имеет вид rt, где t — сдвиг, а r — ортогональное преобразование, т. е. $r \in O(n)$. Пусть $\mathscr{T}$ — подгруппа сдвигов. Это коммутативная группа, которую можно отождествить с E^n, сопоставляя каждому вектору сдвиг на этот вектор. Группа $\mathscr{T}$ является нормальным делителем в $\mathscr{E}(n)$. Действительно, пусть $r \in O(n)$ и t_v — сдвиг на вектор v. Тогда t_v есть преобразование пространства E^n, переводящее x в $x+v$. Рассмотрим преобразование $r^{-1}t_vr$. Оно переводит $x \to rx \to rx + v \to x + r^{-1}v$. Таким образом, $A(r)\,t_v = r^{-1}t_vr = t_{r^{-1}v}$. Другими словами, если мы отождествим $\mathscr{T}$ с E^n, то *действие преобразования $A(r)$ на $\mathscr{T}$ отождествится с обычным действием преобразования r^{-1} на E^n для всех $r \in O(n)$.*

Далее, алгебра Ли группы $\mathscr{E}(n)$ распадается *как векторное пространство* в прямую сумму алгебр Ли групп $\mathscr{T}$ и $O(n)$. Учитывая наше отождествление группы $\mathscr{T}$ с E^n, мы можем отождествить с E^n и алгебру Ли группы $\mathscr{T}$. Таким образом, алгебру Ли группы $\mathscr{E}(n)$ можно рассматривать как прямую сумму $E^n + o(n)$ (где $o(n)$ — алгебра Ли группы $O(n)$). Исследуем скобку Ли в $\mathscr{E}(n)$ в терминах этих отождествлений. Поскольку группа $\mathscr{T}$ коммутативна, имеем

$$[v_1, v_2] = 0 \qquad \text{для} \qquad v_1, v_2 \in E^n.$$

Поскольку $O(n)$ — подгруппа, скобка $[X_1, X_2]$ для $X_1, X_2 \in \in o(n)$ совпадает со скобкой в $o(n)$. Рассмотрим теперь скобку $[X, v]$ для $X \in o(n)$, $v \in E^n$. Согласно сделанному выше замечанию,

$$A(\exp tX)\, v = \exp(-tX)\, v, \tag{1.1}$$

где в правой части к вектору v применяется ортогональное преобразование $\exp(-tX)$. Из формулы (1.1) следует, что

$$[X, v] = -Xv. \tag{1.2}$$

Рассмотрим теперь структурные уравнения группы $\mathscr{E}(n)$. Для этого запишем фундаментальную линейную дифференциальную форму группы $\mathscr{E}(n)$ в виде $\omega + \Omega$, соответствующем разложению алгебры Ли группы $\mathscr{E}(n)$ в сумму $E^n + o(n)$. Таким образом, ω есть векторнозначная форма со значениями в E^n, а Ω — форма со значениями в $o(n)$. Структурные уравнения приобретают вид

$$d\omega + d\Omega = -\frac{1}{2}[(\omega+\Omega)\wedge(\omega+\Omega)].$$

Развертывая правую часть, имеем

$$-\frac{1}{2}[(\omega+\Omega)\wedge(\omega+\Omega)] = -\frac{1}{2}[\omega\wedge\omega] - [\Omega\wedge\omega] - \frac{1}{2}[\Omega\wedge\Omega].$$

Но $[\omega\wedge\omega] = 0$, так как группа $\mathscr{T}$ коммутативна. Следовательно,

$$d\omega + d\Omega = -[\Omega\wedge\omega] - \frac{1}{2}[\Omega\wedge\Omega].$$

В обеих частях этого равенства стоит сумма двух форм: одной — со значениями в E^n, другой — со значениями в $o(n)$. Обе формы каждого типа должны быть равны. Учитывая (1.2), имеем

$$d\omega = \Omega\wedge\omega, \tag{1.3}$$

$$d\Omega = -\frac{1}{2}[\Omega\wedge\Omega]. \tag{1.4}$$

Эти уравнения известны как *структурные уравнения евклидова пространства*. Запишем уравнения (1.3) и (1.4) в координатах пространств E^n и $o(n)$. В стандартном базисе $e_1, \ldots, e_n$ пространства E^n форма ω имеет вид

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} \omega^i \otimes e_i. \tag{1.5}$$

Пусть $\{E_{ij}\}_{i<j}$ — базис алгебры $o(n)$, где E_{ij} — линейные преобразования, определяемые формулами

$$\begin{aligned} &E_{ij}e_j = e_i, \\ &E_{ij}e_i = -e_j, \\ &E_{ij}e_k = 0 \qquad \text{при } k \neq i,\ k \neq j. \end{aligned} \tag{1.6}$$

Скобка базисных элементов имеет вид

$$[E_{ij},\ E_{pq}] = -\delta_j^p E_{iq} + \delta_i^p E_{jq} + \delta_i^q E_{pj} - \delta_j^q E_{pi}, \tag{1.7}$$

что проверяется простым вычислением. [Здесь $E_{lm} = -E_{ml}$ для $l > m$.] В терминах этого базиса мы можем написать

$$\Omega = \sum_{i<j} \Omega^{ij} E_{ij}. \tag{1.8}$$

Тогда

$$\Omega \wedge \omega = \Bigl(\sum_{i<j} \Omega^{ij} \otimes E_{ij}\Bigr) \wedge \Bigl(\sum_{k=1}^{n} \omega^k \otimes e_k\Bigr) =$$

$$= \sum_{i<j,\, k=1,\, \ldots,\, n} (\Omega^{ij} \wedge \omega^k) \otimes (E_{ij} e_k) =$$

$$= \sum_{i<j} [(\Omega^{ij} \wedge \omega^j) \otimes e_i - (\Omega^{ij} \wedge \omega^i) \otimes e_j] =$$

$$= \Bigl(\sum_{l<j} \Omega^{lj} \wedge \omega^j - \sum_{i<l} \Omega^{il} \wedge \omega^i\Bigr) \otimes e_j.$$

Мы можем упростить последнее выражение, положив $\Omega^{ij} = -{}^{ji}$ для $i > j$. Тогда

$$\Omega \wedge \omega = \sum_{j=1}^{n} (\Omega^{lj} \wedge \omega^j) \otimes e_l.$$

Сравнивая коэффициенты при e_l в обеих частях равенства (1.3), получим

$$d\omega^l = \sum \Omega^{jl} \wedge \omega^j. \tag{1.9}$$

Вычислим теперь $[\Omega \wedge \Omega]$. Мы имеем

$$[\Omega \wedge \Omega] = \Bigl[\Bigl(\sum_{i<j} \Omega^{ij} \otimes E_{ij}\Bigr) \wedge \Bigl(\sum_{p<q} \Omega^{pq} \otimes E_{pq}\Bigr)\Bigr] =$$

$$= \sum_{\substack{i<j\\ p<q}} (\Omega^{ij} \wedge \Omega^{pq}) \otimes [E_{ij},\ E_{pq}] =$$

$$= \sum_{\substack{i<j\\ p<q}} (\Omega^{ij} \wedge \Omega^{pq}) \otimes (-\delta_j^p E_{iq} + \delta_i^p E_{jq} + \delta_i^q E_{pj} - \delta_j^q E_{pi}).$$

Приводя подобные члены, получим

$$\sum_{l,\, m} \Bigl[-\sum_{\substack{l<p\\ p<m}} \Omega^{lp} \wedge \Omega^{pm} + \sum_{\substack{p<l\\ p<m}} \Omega^{pl} \wedge \Omega^{pm} + \sum_{\substack{p<m\\ l<m}} \Omega^{pm} \wedge \Omega^{lp} -$$

$$- \sum_{\substack{m<p\\ l<p}} \Omega^{mp} \wedge \Omega^{lp}\Bigr] \otimes E_{lm} =$$

$$= -\sum_{l,\, m,\, p} (\Omega^{lp} \wedge \Omega^{pm}) \otimes E_{lm} = -2 \sum_{\substack{<m\\ p}} (\Omega^{lp} \wedge \Omega^{pm}) \otimes E_{lm}.$$

Сравнивая коэффициенты при E_{lm} в (1.4), находим

$$d\Omega^{lm} = \sum \Omega^{lp} \wedge \Omega^{pm}. \tag{1.10}$$

Дадим теперь другую интерпретацию структурных уравнений (1.3) и (1.4) [или (1.9) и (1.10)], которая будет играть важную роль в дальнейшем.

Заметим прежде всего, что мы можем отождествить группу $\mathscr{E}(n)$ с множеством всех ортогональных реперов пространства E^n. Под ортогональным репером мы подразумеваем пару, состоящую из точки и множества n ортонормированных векторов. Таким образом, репер есть набор $(v;\ f_1,\ \ldots,\ f_n)$, где $v \in E^n$, а $f_1,\ \ldots,\ f_n$ — ортонормированный базис.

Пусть $\mathcal{O}(n)$ — множество всех ортонормированных реперов пространства E^n. Определим отображение $\varphi\colon \mathscr{E}(n) \to \mathcal{O}(n)$, полагая $\varphi(t_v r) = (v;\ re_1,\ \ldots,\ re_n)$ (где $e_1,\ \ldots,\ e_n$ — стандартный базис в E^n). Отображение φ сопоставляет каждому евклидову движению репер, полученный применением этого движения к стандартному реперу. Легко видеть, что φ есть взаимно однозначное отображение группы $\mathscr{E}(n)$ на $\mathcal{O}(n)$. Превратим $\mathcal{O}(n)$ в дифференцируемое многообразие, потребовав, чтобы отображение φ являлось диффеоморфизмом. Тогда мы можем перенести формы ω и Ω на $\mathcal{O}(n)$. Мы хотим дать им геометрическую интерпретацию. Для этого изучим сначала левоинвариантные векторные поля.

Лемма 1.1. *Пусть π — проекция многообразия $\mathcal{O}(n)$ на E^n, определяемая формулой $\pi(v;\ f_1,\ \ldots,\ f_n) = v$. Тогда отображение π дифференцируемо. Обозначим через $\underline{e}_i$ левоинвариантные векторные поля на $\mathscr{E}(n)$, соответствующие стандартным базисным элементам e_i из E^n (при отождествлении пространства E^n с алгеброй Ли группы сдвигов). Тогда*

$$l_v\left(\pi_*\varphi_*(\underline{e}_i)_{(v;\ f_1,\ \ldots,\ f_n)}\right) = f_i. \tag{1.11}$$

[Напомним, что l_v — каноническое отождествление касательного пространства к векторному пространству с самим этим векторным пространством.]

Первая часть леммы тривиальна. Проверим (1.11). Векторное поле $\underline{e}_i$ служит инфинитезимальной образующей однопараметрической группы преобразований группы $\mathscr{E}(n)$, а именно группы *правых* сдвигов на $\exp(se_i)$, $s \in R$. Такой сдвиг переводит $t_v r$ в $t_v r t_{se_i}$. Но $rt_{se_i} = t_{sre_i} r$, так что $t_v r \to t_{v+sre_i} r$. Поэтому $\varphi_*(\underline{e}_i)$ является инфинитезимальной образующей однопараметрической группы преобразований многообразия $\mathcal{O}(n)$, которая отображает $(v;\ f_1,\ \ldots,\ f_n)$ в $(v+sf_i;\ f_1,\ \ldots,\ f_n)$. Отсюда следует формула (1.11). Те же рассуждения показывают, что $\pi_*\varphi_*(E_{ij}) = 0$ для $E_{ij} \in o(n)$.

Пусть X — касательный вектор в точке $z=(v;\ f_1,\ \ldots,\ f_n)\in\mathcal{O}(n)$. Мы можем написать $l_v\pi_*(X)=\sum X_if_i$.

Левоинвариантное векторное поле $\sum X_i\bar{e}_i$ обладает тем свойством, что $\varphi_*(\sum X_i\bar{e}_i)_z$ отличается от X на линейную комбинацию векторов $\varphi_*(\bar{E}_{ij})$. Таким образом,

$$\langle X,\ ((\varphi^{-1})_*\,\omega)_z\rangle=\sum X_ie_i. \tag{1.12}$$

Условимся для простоты опускать букву φ при отождествлении многообразия $\mathcal{O}(n)$ с $\mathcal{E}(n)$. Тогда формула (1.12) запишется в виде

$$\langle X,\ \omega_z\rangle=\sum X_ie_i.$$

Мы будем также опускать символ l_v, если ясно, что делается соответствующее отождествление. Тогда можно описать форму ω следующим образом.

Пусть X — касательный вектор многообразия $\mathcal{O}(n)$ в точке $z=(v;\ f_1,\ \ldots,\ f_n)$, и пусть $\pi_*(X)=\sum X_if_i$. Тогда $\langle X,\ \omega_z\rangle=\sum X_ie_i$. В частности,

$$\langle X,\ \omega_z^i\rangle=(\pi_*(X),\ f_i). \tag{1.13}$$

Итак, формы ω^i имеют следующий простой геометрический смысл: величина $\langle X,\ \omega_z^i\rangle$ показывает, насколько передвинулось начало v репера $z=(v;\ f_1,\ \ldots,\ f_n)$ в направлении f_i при «инфинитезимальном перемещении» этого репера на вектор X.

Запишем формулу (1.13) в несколько более удобном виде. Отображение π можно рассматривать как векторнозначную функцию на $\mathcal{O}(n)$. Что представляет собой $d\pi$? Непосредственная проверка показывает, что $\langle X_z,\ d\pi_z\rangle=l_v\pi_*(X)$, что мы условились записывать просто как $\pi_*(X)$. Отображение, сопоставляющее реперу $(v;\ f_1,\ \ldots,\ f_n)$ вектор f_i, также является векторнозначной функцией на $\mathcal{O}(n)$, которую мы снова будем обозначать через f_i. Далее, скалярное произведение $(\ ,\ )$ есть билинейное отображение $E^n\times E^n\to R$, так что имеет смысл говорить о скалярном произведении форм со значениями в E^n.

Учитывая эти замечания, мы можем переписать формулу (1.13) в виде

$$\omega^i=(d\pi,\ f_i). \tag{1.14}$$

А что такое $(df_i,\ f_j)$? Это линейная дифференциальная форма на $\mathcal{O}(n)$, измеряющая величину поворота репера при инфинитезимальном перемещении в $\mathcal{O}(n)$. Поучительным упражнением для читателя было бы проверить непосредственно, что $(df_i,\ f_j)=\Omega^{ij}$. Впрочем, мы скоро это докажем. Обозначим пока $(df_i,\ f_j)$ через Ω'^{ij}

и установим несколько свойств этих форм. Поскольку $(f_i,\ f_j)=\delta_i^j=\mathrm{const}$, с помощью внешнего дифференцирования получаем

$$(df_i,\ f_j)+(f_i,\ df_j)=0,$$

или

$$\Omega'^{ij}=-\Omega'^{ji}.$$

Применим теперь к равенству (1.14) оператор d. Имеем

$$d\omega^i=(d\,d\pi,\ f_i)-(d\pi,\ df_i)=-(d\pi,\ df_i)=$$
$$=-(d\pi,\ \sum\Omega'^{ij}\otimes f_j)=\qquad (\text{поскольку } df_i=\sum\Omega'^{ij}\otimes f_j)$$
$$=\sum\Omega'^{ji}\wedge(d\pi,\ f_j)=\sum\Omega'^{ji}\wedge\omega^j.$$

Из сравнения этого последнего уравнения с уравнением (1.9) следует, что $\Omega'^{ij}=\Omega^{ij}$. Действительно, мы имеем

$$\sum\Omega'^{ij}\wedge\omega^j=\sum\Omega^{ij}\wedge\omega^j,$$

или

$$\sum(\Omega'^{ij}-\Omega^{ij})\wedge\omega^j=0.$$

По лемме Картана (теорема 4.4 гл. I) мы заключаем, что для каждого j

$$(\Omega'^{ij}-\Omega^{ij})=\sum a_{ij}^k\omega^k,$$

где функции a_{ij}^k симметричны по i и k. С другой стороны, как Ω'^{ij}, так и Ω^{ij}, антисимметричны по i и j. Поэтому мы можем применить следующую лемму, которая нам еще не раз понадобится.

Лемма 1.2. *Пусть величины a_{ij}^k симметричны по j и k и антисимметричны по i и j. Тогда $a_{ij}^k=0$.*

Действительно, $a_{jk}^i=-a_{ik}^j=-a_{ki}^j=a_{ji}^k$ и $a_{jk}^i=a_{kj}^i=-a_{ji}^k$, откуда $a_{jk}^i=a_{ji}^k=-a_{ji}^k=0$.

Итак, мы доказали, что $\Omega'^{ij}=\Omega^{ij}$, т. е. что

$$\Omega^{ij}=(df_i,\ f_j). \tag{1.15}$$

Мы можем теперь дать другое доказательство уравнения (1.10):

$$d\Omega^{ij}=(df_i,\ df_j)=\Big(\sum_k\Omega^{ik}\otimes f_k,\ \sum_l\Omega^{jl}\otimes f_l\Big)=$$
$$=\sum_{k,l}\Omega^{ik}\wedge\Omega^{jl}(f_k,\ f_l)=\sum_k\Omega^{ik}\wedge\Omega^{kj}.$$

Итак, мы имеем следующие формулы:

$$\omega^i=(d\pi,\ f_i), \tag{1.14}$$
$$\Omega^{ij}=(df_i,\ f_j), \tag{1.15}$$

$$d\omega^i = \sum \Omega^{ji} \wedge \omega^j, \qquad (1.9)$$

$$d\Omega^{ij} = \sum \Omega^{ik} \wedge \Omega^{kj}. \qquad (1.10)$$

В заключение параграфа заметим, что, поскольку формы ω^i и Ω^{ij} соответствуют левоинвариантным формам на $\mathscr{E}(n)$, мы можем применить теоремы 2.3 и 2.4 гл. V. В частности, *любое преобразование многообразия $\mathscr{O}(n)$, сохраняющее ω и Ω, является евклидовым движением* (следствие теоремы 2.3). Кроме того, справедливо

Предложение 1.1. *Пусть M — многообразие размерности $n+n(n-1)/2$, и пусть θ^i, Θ^{ij} — формы на M, причем*

$$d\theta^i = \sum \Theta^{ji} \wedge \theta^j,$$

$$d\Theta^{ij} = \sum \Theta^{ik} \wedge \Theta^{kj}.$$

Тогда существует (локально) диффеоморфизм $f\colon M \to \mathscr{O}(n)$, такой, что $f^*(\omega^i) = \theta^i$ и $f^*(\Omega^{ij}) = \Theta^{ij}$.

§ 2. СТРУКТУРНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПОДМНОГООБРАЗИЯ

Одним из основных объектов изучения в этой главе является геометрия подмногообразий евклидова пространства. Метод, который мы будем применять, — так называемый «метод подвижного репера» — принадлежит Дарбу и наиболее полно использовался Э. Картаном. Идея его состоит в том, чтобы выбрать реперы, «касательные» к рассматриваемому подмногообразию, и выяснить, что означают для них структурные уравнения.

Определение 2.1. Пусть φ — погружение k-мерного многообразия M в E^n. Через $\mathscr{O}_\varphi(M)$ мы будем обозначать множество

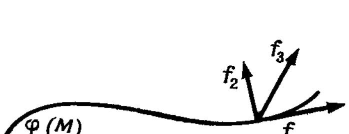


Рис. 21

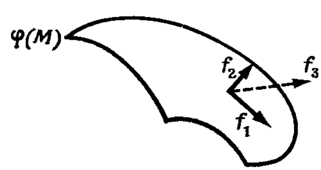


Рис. 22.

всех пар $(x; f_1, \ldots, f_n)$, где $x \in M$, а $f_1, \ldots, f_n$ — такой ортонормированный базис пространства E^n, что

$$f_1, \ldots, f_k \in l_{\varphi(x)}(\varphi_* T_x(M)). \qquad (2.1)$$

Грубо говоря, $\mathscr{O}_\varphi(M)$ есть множество таких реперов пространства E^n, у которых первые k векторов касаются $\varphi(M)$, а оставшиеся $n-k$ векторов ортогональны к $\varphi(M)$. Так, при $n=3$ и $k=1$ или 2 реперы из $\mathcal{O}_\varphi(M)$ имеют вид, указанный на рис. 21 и 22.

Легко видеть, что $\mathcal{O}_\varphi(M)$ обладает естественной дифференцируемой структурой и существует дифференцируемая проекция многообразия $\mathcal{O}_\varphi(M)$ на M, которую мы будем обозначать π_φ.

Определение 2.2. Пусть φ и M — такие же, как в определении 2.1. Обозначим через $\hat{\varphi}$ отображение $\mathcal{O}_\varphi(M)\to\mathcal{O}(n)$, задаваемое формулой

$$\hat{\varphi}(x;\ f_1,\ \ldots,\ f_n)=(\varphi(x);\ f_1,\ \ldots,\ f_n). \tag{2.2}$$

Легко проверить, что $\hat{\varphi}$ есть погружение многообразия $\mathcal{O}_\varphi(M)$ в $\mathcal{O}(n)$ и что $\pi\circ\hat{\varphi}=\varphi\circ\pi_\varphi$. Таким образом, мы имеем коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}_\varphi(M) \arrow[r, "\hat{\varphi}"'] \arrow[d, "\pi_\varphi"'] & \mathcal{O}(n) \arrow[d, "\pi"] \\
M \arrow[r, "\varphi"'] & E^n
\end{tikzcd}$$

Мы можем рассмотреть формы $\hat{\varphi}^*(\omega)$ и $\hat{\varphi}^*(\Omega)$ на $\mathcal{O}_\varphi(M)$.

Определение 2.3. Определим формы θ, Θ, θ^i и Θ^{ij} формулами

$$\theta=\hat{\varphi}^*(\omega), \tag{2.3}$$

$$\Theta=\hat{\varphi}^*(\Omega), \tag{2.4}$$

$$\theta^i=\hat{\varphi}^*(\omega^i), \tag{2.5}$$

$$\Theta^{ij}=\hat{\varphi}^*(\Omega^{ij}). \tag{2.6}$$

Иногда, желая подчеркнуть зависимость этих форм от φ, мы будем обозначать их θ_φ, Θ_φ и т. д.

Применяя к структурным уравнениям евклидова пространства отображение $\hat{\varphi}^*$, получаем

$$d\theta=\Theta\wedge\theta, \tag{2.7}$$

$$d\Theta=-\frac{1}{2}[\Theta\wedge\Theta], \tag{2.8}$$

или

$$d\theta^i=\sum_j\Theta^{ji}\wedge\theta^j, \tag{2.9}$$

$$d\Theta^{ij}=\sum\Theta^{ip}\wedge\Theta^{pj}. \tag{2.10}$$

Эти уравнения известны как *структурные уравнения подмногообразия* (M, φ).

Прежде чем приступать к детальному изучению этих уравнений, сделаем одно важное замечание. При изучении евклидовой геометрии мы считаем два объекта эквивалентными, если они отличаются на евклидово движение. В частности, мы считаем два отображения φ_1 и φ_2: $M \to E^n$ эквивалентными, если $\varphi_1 = \alpha \circ \varphi_2$, где α — евклидово движение. Многообразие $\mathcal{O}_\varphi(M)$ и формы θ и Θ играют важную роль, как показывает следующая

Теорема 2.1. *Пусть φ_1 и φ_2 — два отображения многообразия M в E^n. Равенство $\varphi_1 = \alpha \circ \varphi_2$, где α — евклидово движение пространства E^n, имеет место тогда и только тогда, когда существует такой диффеоморфизм ψ: $\mathcal{O}_{\varphi_1}(M) \xrightarrow[\text{на}]{} \mathcal{O}_{\varphi_2}(M)$, что $\theta_{\varphi_1} = \psi^*(\theta_{\varphi_2})$ и $\Theta_{\varphi_1} = \psi^*(\Theta_{\varphi_2})$. Другими словами, многообразие $\mathcal{O}_\varphi(M)$ и формы θ_φ и Θ_φ определяют φ с точностью до евклидова движения.*

Из определений следует, что $\varphi_1 = \alpha \circ \varphi_2$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{O}_{\varphi_1}(M) = \alpha(\mathcal{O}_{\varphi_2}(M))$ и $\hat{\varphi}_1 = \alpha \circ \hat{\varphi}_2 \circ \psi$ [где преобразование многообразия $\mathcal{O}(n)$, индуцированное движением α, также обозначено через α]. Если рассматривать $\mathcal{O}(n)$ как группу всех евклидовых движений, то ω^i и Ω^{ij} будут левоинвариантными формами, и теорема 2.1 следует непосредственно из теоремы 2.3 гл. V.

Вернемся к изучению форм θ^i и Θ^{ij}. Напомним, что форма ω^i на $\mathcal{O}(n)$ измеряет «инфинитезимальный сдвиг» начала репера по направлению i-го базисного вектора этого репера. Когда мы с помощью отображения $\hat{\varphi}^*$ переходим к $\mathcal{O}_\varphi(M)$, мы рассматриваем только реперы с началом на $\varphi(M)$. Поэтому «инфинитезимальный сдвиг» начала репера не должен иметь компонент, ортогональных к касательному пространству подмногообразия $\varphi(M)$.

С другой стороны, согласно (2.1), мы рассматриваем только те реперы, у которых первые k векторов касательны, а последние $n-k$ векторов нормальны к $\varphi(M)$. Следовательно, последние $n-k$ компонент формы θ должны обратиться в нуль, т. е.

$$\theta^i = 0 \quad \text{при} \quad i = k+1, \ldots, n. \tag{2.11}$$

Дадим формальное доказательство этого факта. Для форм θ^i и Θ^{ij} можно дать простое выражение, из которого следует равенство (2.11). Пусть E^i — функция на $\mathcal{O}_\varphi(n)$, сопоставляющая каждому реперу его i-ю компоненту, т. е. $E^i(p; f^1, \ldots, f^n) = f^i$. Тогда функции $\varphi \circ \pi_\varphi$ и $E^1, \ldots, E^n$ являются дифференцируемыми векторнозначными функциями на $\mathcal{O}_\varphi(M)$. Из определений немедленно следует, что

$$\theta^i = (d(\varphi \circ \pi_\varphi),\ E^i), \tag{2.12}$$

$$\Theta^{ij} = (dE^i,\ E^j). \tag{2.13}$$

Поэтому для касательного вектора $X \in T_u(\mathcal{O}_\varphi(M))$ мы имеем[1]

$$\langle X,\ \theta^i\rangle = (\langle X,\ d(\varphi \circ \pi_\varphi)\rangle,\ E^i(u)) = \\ = (\varphi_* \circ \pi_* X,\ E^i(u)) = 0,$$

если $i > k$. Таким образом, (2.11) следует из (2.12) и определений. Более подробно это будет обсуждаться в следующем параграфе.

§ 3. СТРУКТУРНЫЕ УРАВНЕНИЯ РИМАНОВА МНОГООБРАЗИЯ

Рассуждая, как при доказательстве равенства (2.11), мы можем установить нечто большее, а именно, что при $i,\ j \leqslant k$ формы θ^i и Θ^{ij} зависят только от римановой метрики, индуцированной на M погружением φ, но не от самого погружения. Поясним это различие.

Отображение φ индуцирует на M риманову метрику (получающуюся применением φ^* к евклидовой метрике пространства E^n). Два различных отображения (т. е. отображения, отличающиеся не только евклидовым движением) могут индуцировать на M одну и ту же метрику. Например, любые два римановых многообразия размерности 1 локально изометричны. Действительно, выбор в качестве локального параметра длины дуги $s(t) = \int_{t_0}^{t} \| \partial/\partial t \|\, dt$ определяет локальную изометрию такого многообразия на евклидову прямую. С другой стороны, геометрически очевидно, что не всякая кривая получается из любой другой евклидовым движением. Для этого надо учесть еще «изогнутость» кривой в пространстве, т. е. нечто внешнее, не описываемое целиком в терминах римановой геометрии (которая в этом случае тривиальна). Эта «изогнутость» (как мы увидим) измеряется формами Θ^{ij}, где $j > k$.

В качестве второго примера рассмотрим два отображения куска плоскости в E^3, задаваемые формулами:

$$\varphi_1\colon \begin{array}{l} x \circ \varphi_1(u,\ v) = u, \\ y \circ \varphi_1(u,\ v) = v, \\ z \circ \varphi_1(u,\ v) = 0, \end{array} \qquad \varphi_2\colon \begin{array}{l} x \circ \varphi_1(u,\ v) = u, \\ y \circ \varphi_1(u,\ v) = \sin v, \\ z \circ \varphi_1(u,\ v) = \cos v. \end{array}$$

[1] Как обычно, мы опустили символ l_v. Строго говоря, вместо $\langle X,\ d(\varphi \circ \pi_*)\rangle = \varphi_* \circ \pi_* X$ мы должны были бы написать $\langle X,\ d(\varphi \circ \pi_*)\rangle = l_{\varphi \circ \pi(u)} \circ \varphi_* \circ \pi_* X$.

Поскольку φ_1 отображает все в плоскость, а φ_2 — в цилиндр, они отличаются больше, чем на евклидово движение. Однако в обоих случаях евклидова метрика на E^3 индуцирует метрику $du^2 + dv^2$. Тот факт, что цилиндр «изогнут», а плоскость — нет, описывается снова формами Θ^{13} и Θ^{23}.

Чтобы установить (2.11) и доказать, что θ зависит только от римановой структуры, мы построим аналог формы θ для любого риманова многообразия.

Пусть M есть k-мерное риманово многообразие. Обозначим через $\mathcal{O}(M)$ множество пар $(p;\ X_1, \ldots, X_k)$, где $p \in M$, а $X_1, \ldots, X_k$ — ортонормированный базис пространства $T_p(M)$. Превратим $\mathcal{O}(M)$ в дифференцируемое многообразие. Пусть π — проекция множества $\mathcal{O}(M)$ на M, отображающая $(p;\ X_1, \ldots, X_k)$ в p. Пусть U — координатная окрестность в M, а $Y_1, \ldots, Y_k$ — векторные поля на U, образующие в каждой точке ортонормированный базис. Тогда для каждой точки $(p;\ X_1, \ldots, X_k) \in \pi^{-1}(U) \subset \mathcal{O}(M)$ существует единственная матрица $A = (a_{ij}) \in O(k)$, для которой $X_i = \sum a_{ij} Y_j$. Тем самым определяется взаимно однозначное отображение множества $\pi^{-1}(U)$ на $U \times O(k)$, зависящее только от $Y_1, \ldots, Y_k$.

Мы можем выбрать $Y_1, \ldots, Y_k$ следующим образом. Пусть $x^1, \ldots, x^k$ — система координат в U. Векторные поля $\partial/\partial x^1, \ldots, \partial/\partial x^k$ линейно независимы всюду на U. Применяя к ним процесс ортогонализации Грама — Шмидта, мы получим ортонормированные векторные поля $Y_1, \ldots, Y_k$. Таким способом мы можем построить отображения для каждой координатной окрестности U. Читатель легко проверит, что условия теоремы 2.1 гл. II выполнены, и, значит, $\mathcal{O}(M)$ превращается в дифференцируемое многообразие, а π становится дифференцируемым отображением. [Сравнение с § 6 гл. II показывает, что мы можем рассматривать $\mathcal{O}(M)$ как подмногообразие расслоения реперов $\mathcal{F}(M)$, состоящее из ортонормированных реперов.] Многообразие $\mathcal{O}(M)$ называется *расслоением ортонормированных реперов многообразия* M.

Определим теперь на $\mathcal{O}(M)$ фундаментальную дифференциальную форму ω_M. Пусть Z — касательный вектор многообразия $\mathcal{O}(M)$ в точке $z = (p;\ X_1, \ldots, X_k)$. Тогда $\pi_*(Z)$ есть касательный вектор многообразия M в точке p. Обозначим через $\langle Z, \omega_M^i\rangle$ компоненту вектора $\pi_*(Z)$ относительно X_i, т. е.

$$\langle Z, \omega_M^i\rangle = (\pi_*(Z),\ X_i) \qquad \text{(скалярное произведение).} \qquad (3.1)$$

Это определяет ω_M^i как линейные дифференциальные формы на $\mathcal{O}(M)$. Положим $\omega_M = (\omega_M^1, \ldots, \omega_M^k)$. Тогда ω_M есть линейная дифференциальная форма со значениями в E^k. [Заметим, что если M есть E^k с евклидовой метрикой и если сделать стандартные отождествления, то $\mathcal{O}(M)=\mathcal{O}(k)$ и $\omega_M=\omega$.]

Формы ω^i_M позволяют дать простое выражение для римановой метрики. Действительно, если обозначить риманову метрику через ds^2, то

$$\pi^*(ds^2)=(\omega_M,\ \omega_M)=(\omega^1_M)^2+\ldots+(\omega^k_M)^2 \tag{3.2}$$

[где под $(\omega^i_M)^2$ мы понимаем симметрическое произведение $\omega^i_M \circledcirc \omega^i_M$]. Проверим (3.2). Пусть Z — касательный вектор в точке $z=(p;\ X_1,\ \ldots,\ X_k)$. Тогда

$$\begin{aligned}\langle Z,\ \pi^*(ds^2)\rangle &= \langle \pi_*(Z),\ ds^2\rangle = \\ &= (\pi_*(Z),\ \pi_*(Z)) = \\ &= \sum (\pi_*(Z),\ X_i)^2 = \qquad \text{(так как } X_i \text{ — ортонормированный базис)} \\ &= \sum \langle Z,\ \omega^i_M\rangle^2 \qquad \text{(согласно 3.1).}\end{aligned}$$

Полезно указать также формулу для объема. Напомним, что форма объема определяет в одномерном пространстве $\bigwedge^k(T_p(M))$ при каждом $p\in M$ скалярное произведение[1]). Обозначим соответствующую квадратичную форму dV^2. Тогда

$$\pi^*(dV^2)=(\omega^1_M\wedge\ldots\wedge\omega^k_M)\circledcirc(\omega^1_M\wedge\ldots\wedge\omega^k_M). \tag{3.3}$$

Если M — ориентированное риманово многообразие, то существует единственная k-форма Ω, такая, что $\Omega>0$ и $\Omega\circledcirc\Omega=dV^2$. Допуская некоторую неточность, мы обозначим эту форму dV и назовем ее элементом объема многообразия M. Обозначим через $\mathcal{O}^+(M)$ подмногообразие в $\mathcal{O}(M)$, состоящее из всех положительно ориентированных реперов, т. е. из таких реперов $(p;\ X_1,\ \ldots,\ X_k)$, для которых $\langle X_1\wedge\ldots\wedge X_k,\ dV\rangle=+1$. Условимся ограничения отображения π и форм ω^i_M на $\mathcal{O}^+(M)$ обозначать теми же символами. Тогда на $\mathcal{O}^+(M)$ мы имеем

$$\pi^*(dV)=\omega^1_M\wedge\ldots\wedge\omega^k_M. \tag{3.4}$$

Доказательство формул (3.3) и (3.4) мы оставляем читателю в качестве упражнения.

Пусть теперь φ — погружение k-мерного многообразия M в E^n. Снабдим M индуцированной римановой метрикой. Тогда для любой точки $p\in M$ отображение φ_* пространства $T_p(M)$ в пространство $T_{\varphi(p)}(E^n)$ (отождествляемое с E^n) является изометрией

[1]) См. формулу (4.18) гл. I.—*Прим. ред.*

и, следовательно, переводит ортонормированный базис $X_1, \ldots, X_k$ пространства $T_p(M)$ в ортонормированный базис $e_1, \ldots, e_k$ подпространства $\varphi_*(T_p(M)) \subset E^n$. Обратно, всякому ортонормированному базису $e_1, \ldots, e_k$ подпространства $\varphi_*(T_p(M)) \subset E^n$ соответствует единственный ортонормированный базис $X_1, \ldots, X_k$ пространства $T_p(M)$, для которого $\varphi_* X_i = e_i$. Итак, мы имеем отображение $\rho\colon \mathcal{O}_\varphi(M) \to \mathcal{O}(M)$, переводящее $(p;\ e_1, \ldots, e_n)$ в $(p;\ X_1, \ldots, X_k)$, где $\varphi_*(X_i) = e_i$.

Легко видеть, что отображение ρ дифференцируемо и что $\pi_\varphi = \pi \circ \rho$, так что мы имеем следующую диаграмму:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}_\varphi(M) \arrow[rr, "\hat{\varphi}"] \arrow[d, "\rho"'] \arrow[dd, bend left, "\pi_\varphi"] & & \mathcal{O}(n) \arrow[dd, "\pi"] \\
\mathcal{O}(M) \arrow[d, "\pi"'] & & \\
M \arrow[rr, "\varphi"] & & E^n
\end{tikzcd}$$

Легко проверить также (мы предоставляем это читателю), что
$$\theta = \rho^*(\omega_M), \tag{3.5}$$
или
$$\begin{aligned} \theta^i &= \rho^*(\omega_M^i) && \text{для } i \leqslant k, \\ \theta^i &= 0 && \text{для } i > k. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Формы Θ^{ij} при $i, j \leqslant k$ также индуцируются некоторыми формами на $\mathcal{O}(M)$. Точнее говоря, существуют однозначно определенные формы Ω_M^{ij} $(i, j = 1, \ldots, k)$ на $\mathcal{O}(M)$ (зависящие только от римановой структуры многообразия M), такие, что
$$\Theta^{ij} = \rho^*(\Omega_M^{ij}). \tag{3.7}$$

Формы Ω_M^{ij} антисимметричны по i, j и удовлетворяют уравнениям
$$d\omega_M^i = \sum_{j=1}^{k} \Omega_M^{ji} \wedge \omega_M^j. \tag{3.8}$$

Заметим, что уравнения (3.8) вместе со свойством антисимметричности однозначно определяют формы Ω_M^{ij}. Действительно, формы $\omega_M^1, \ldots, \omega_M^k$ линейно независимы, поэтому мы можем рассуждать точно так же, как в § 1. Отсюда следует, что формы Ω_M^{ij}, удовлетворяющие уравнению (3.8), зависят только от римановой структуры многообразия M, индуцированной погружением φ [1]).

Заметим также, что формы Ω_M^{ij} однозначно определяются формулой (3.7): если $\rho^*(\Omega_M^{ij}) = \rho^*(\Omega_M'^{ij})$, то $\rho^*(\Omega_M^{ij} - \Omega'^{ij}_M) = 0$. Поскольку ρ — отображение на, отсюда следует, что $\Omega_M^{ij} = \Omega_M'^{ij}$. Этот факт позволяет нам строить формы Ω_M^{ij} локально на малых окрестностях в многообразии $\mathcal{O}(M)$, исходя из форм Θ^{ij}. В силу единственности построенные формы будут тогда согласованы на пересечении окрестностей.

Для построения форм Ω_M^{ij} на окрестности $U \subset \mathcal{O}(M)$ достаточно найти отображение σ: $U \to \mathcal{O}_\varphi(M)$, для которого $\rho \circ \sigma = \mathrm{id}$, и затем положить $\Omega_M^{ij} = \sigma^*(\Theta^{ij})$. Действительно, $\Theta^{ij} = \hat{\varphi}^*(de_i, e_j)$. Если две точки из $\mathcal{O}_\varphi$ лежат над одной и той же точкой из $\mathcal{O}(M)$, то первые k элементов их реперов совпадают. Следовательно, $\rho^* \circ \sigma^* \circ \hat{\varphi}^*(e_i) = \hat{\varphi}^* e_i$, или $\rho^*(\Omega_M^{ij}) = \rho^* \circ \sigma^* \Theta^{ij} = \Theta^{ij}$. Мы хотим построить такое отображение σ. Это будет сделано, если мы сможем найти $n-k$ таких векторнозначных функций $e_{k+1}, \ldots, e_n$ на M, что векторы $e_{k+1}(p), \ldots, e_n(p)$ ортонормированы и ортогональны к $\varphi_*(T_p(M))$. Тогда для каждого репера $z = (p; x_1, \ldots, x_k)$ из $\mathcal{O}(M)$ мы положим

$$\sigma(z) = (p; \varphi_*(x_1), \ldots, \varphi_*(x_k), e_{k+1}(p), \ldots, e_n(p)).$$

Мы хотим определить функции $e_{k+1}, \ldots, e_n$ в окрестности точки $q \in M$. Поступим следующим образом. Пусть W — подпространство в E^n размерности $n-k$, дополнительное к $\varphi_*(T_q(M))$. Тогда W дополнительно к $\varphi_*(T_p(M))$ для всех p из некоторой окрестности U точки q. Для таких точек p ортогональная проекция пространства W на $[\varphi_*(T_q(M))]^\perp$ невырожденна. Если мы зафиксируем базис $v_{k+1}, \ldots, v_n$ пространства W, то тем самым определится некоторый базис $v_{k+1}(p), \ldots, v_n(p)$ пространства $[\varphi_*(T_p(M))]^\perp$ при каждом $p \in U$. Применяя к нему процесс ортогонализации Грама — Шмидта, мы получим требуемые функции $e_{k+1}, \ldots, e_n$.

Итак, мы установили существование форм Ω_M^{ij} на любом расслоении $\mathcal{O}(M)$ при условии, что риманова метрика индуцирована погружением многообразия M в E^n. Чрезвычайно глубокая теорема, принадлежащая Нэшу, утверждает, что любая риманова метрика может быть получена таким образом. Это доказывает существование форм Ω_M^{ij} для любого риманова многообразия.

[1]) Действительно, расслоение ортонормированных реперов $\mathcal{O}(M)$ и формы ω_M^i на $\mathcal{O}(M)$, а значит, и уравнение (3.8) полностью определяются римановой метрикой.— *Прим. перев.*

Однако можно дать прямое доказательство существования форм Ω_M^{ij}, основанное на очень простой локальной конструкции. Мы предпочли отложить это доказательство до гл. VII, где мы рассмотрим эту задачу при более общих условиях (стр. 356). В следующих параграфах будет выяснено, какая геометрическая информация содержится в этих формах.

Для удобства ссылок соберем вместе различные формулы, полученные нами для погруженных подмногообразий евклидова пространства.

Теорема 3.1. *Пусть φ — погружение некоторого k-мерного многообразия в E^n. Многообразие $\mathcal{O}_\varphi(M)$ состоит из всех пар $(p; f_1, \ldots, f_n)$, где $p \in M$, а $f_1, \ldots, f_n$ — такой ортонормированный базис пространства E^n, что векторы $f_1, \ldots, f_k$ касаются $\varphi(M)$ в точке $\varphi(p)$, а векторы $f_{k+1}, \ldots, f_n$ ортогональны к $\varphi(M)$ в точке $\varphi(p)$. Далее, f_i можно рассматривать как векторнозначные функции на $\mathcal{O}_\varphi(M)$, так же как и $\varphi \circ \pi_\varphi$. Тогда формы θ^i и Θ^{ij} на $\mathcal{O}_\varphi(M)$, определяемые формулами*

$$\theta^i = (d(\varphi \circ \pi_\varphi),\ f_i), \tag{3.9}$$

$$\Theta^{ij} = (df_i,\ f_j), \tag{3.10}$$

удовлетворяют соотношениям

$$\theta^i = 0, \qquad i = k+1, \ldots, n, \tag{2.11}$$

$$d\theta^i = \sum_{j=1}^{n} \Theta^{ij} \wedge \theta^j, \tag{2.9}$$

$$d\Theta^{ij} = \sum \Theta^{ip} \wedge \Theta^{pj}. \tag{2.10}$$

Кроме того, формы Θ^{ij} $(i < j \leqslant k)$ зависят только от римановой структуры многообразия M, индуцированной погружением φ.

Возвратимся на минуту к формам Ω_M^{ij}, удовлетворяющим условиям (3.7) и (3.8). Предположим, что формы Ω_M^{ij} удовлетворяют уравнениям

$$d\Omega_M^{ij} = \sum \Omega_M^{ik} \wedge \Omega_M^{kj}. \tag{3.11}$$

Тогда, согласно предложению 1.1, существует (локально) такой диффеоморфизм φ: $\mathcal{O}(M) \to \mathcal{O}(k)$, что $\varphi^*(\omega^i) = \overset{i}{\omega}_M$. Значит,

$$\varphi^*((\omega^1)^2 + \ldots + (\omega^k)^2) = (\omega_M^1)^2 + \ldots + (\omega_M^k)^2,$$

т. е. φ — локальная изометрия многообразия M на E^k. Получаем

Предложение 3.1. *Пусть M — риманово многообразие с формами Ω_M^{ij}, удовлетворяющими уравнениям* (3.8) *и* (3.11). *Тогда M локально изометрично евклидову пространству.*

§ 4. КРИВЫЕ В ЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

В этом параграфе мы применим результаты § 2 к изучению дифференциальной геометрии кривых в евклидовом пространстве. Все наши рассмотрения легко обобщаются на кривые в n-мерном пространстве, но для простоты мы ограничимся изучением кривых в трехмерном пространстве. Пусть C — кривая, т. е. погружение интервала I в E^3. Тогда многообразие $\mathcal{O}_C(I)$ двумерно: две степени свободы соответствуют движению вдоль кривой и вращению двух векторов f_2 и f_3 репера $(p;\ f_1,\ f_2,\ f_3) \in \mathcal{O}_C(I)$ вокруг f_1, см. рис. 21 на стр. 262.

На $\mathcal{O}_C(I)$ формы θ^2 и θ^3 обращаются в нуль, а формы θ^1 и Θ^{ij} определяются равенствами [1])

$$\begin{aligned} d\hat{C} &= \theta^1 f_1, \\ df_1 &= \Theta^{12} f_2 + \Theta^{13} f_3, \\ df_2 &= \Theta^{21} f_1 + \Theta^{23} f_3, \\ df_3 &= \Theta^{31} f_1 + \Theta^{32} f_2. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Квадратичная форма $(\theta^1)^2 = \pi^* (ds)^2$ есть просто элемент длины дуги кривой, поднятый на $\mathcal{O}_C(I)$. Заметим, что в каждой точке кривой существует ровно две возможности для выбора вектора f_1; они соответствуют двум ориентациям этой кривой. В частности, квадратичная форма $(df_1,\ df_1)$ зависит только от точки на кривой и, следовательно, может быть представлена в виде

$$(df_1,\ df_1) = \pi^* (K^2 ds^2),$$

где $K \geqslant 0$ — некоторая функция на I. Функция K называется *абсолютной кривизной* кривой C. Ясно, что она инвариантна относительно евклидовых движений кривой C.

Мы будем теперь предполагать, что выбрана некоторая ориентация кривой, так что вектор f_1 выбирается в каждой точке однозначно; таким образом, мы переходим к подмногообразию многообразия $\mathcal{O}(I)$, которое, допуская некоторую неточность, будем по-прежнему обозначать $\mathcal{O}(I)$. Поскольку теперь и dC, и f_1 — векторнозначные формы на I, мы можем переписать уравнение (4.1) в виде $\theta^1 = (d\hat{C},\ f_1) = \pi^* (dC,\ f_1)$. Определим форму ds, полагая $ds = (dC,\ f_1)$, так что $\theta^1 = \pi^* (ds)$. [Это согласуется со старыми обозначениями, поскольку $ds^2 = (ds)^2$.] Очень часто в классической дифференциальной геометрии задается больше,

[1]) См. определения 2.1 — 2.3 и теорему 3.1 — *Прим. перев.*

чем кривая, а именно, в каждой точке кривой задается вектор f_2 (и, следовательно, f_3). Например, если кривая целиком лежит на некоторой поверхности S, то при ее изучении естественно потребовать, чтобы вектор f_2 касался S. Дадим поэтому такое

Определение 4.1. Пусть $C\colon I \to E^3$ — некоторая кривая. *Лентой над C* называется такое дифференцируемое отображение $\mathfrak{n}\colon I \to \mathcal{O}_C(I)$, что $\pi(\mathfrak{n}) = C$. Таким образом, лента определяется (дифференцируемым) выбором нормального вектора в каждой точке кривой C.

С помощью отображения $\mathfrak{n}$ формы Θ^{ij} переносятся на I. В частности, мы можем написать

$$\begin{aligned} \mathfrak{n}^*(\Theta^{12}) &= k\,ds, \\ \mathfrak{n}^*(\Theta^{23}) &= \tau\,ds, \\ \mathfrak{n}^*(\Theta^{13}) &= w\,ds. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Функция k называется *кривизной* ленты, функция τ — *кручением*, а функция w — *верчением*. Эти три функции, очевидно, являются инвариантами ленты относительно евклидовых движений. Обратно, пусть R_1 и R_2 — две ленты над кривыми C_1 и C_2, определенными на интервале I. Существует очевидный диффеоморфизм $\psi\colon \mathcal{O}_{C_1}(I) \to \mathcal{O}_{C_2}(I)$. Действительно, любой репер из $\mathcal{O}_{C_1}(I)$ получается из репера ленты R_1 с началом в той же точке вращением на определенный угол, и то же самое верно для $\mathcal{O}_{C_2}(I)$. Поэтому очевидное отображение ψ, переводящее R_1 в R_2, продолжается до диффеоморфизма $\mathcal{O}_{C_1}(I)$ на $\mathcal{O}_{C_2}(I)$. Простое вычисление (которое мы оставим читателю в качестве упражнения) показывает, что *если функции k, τ и w одинаковы для R_1 и R_2, то $\psi^*\Theta_2^{ij} = \Theta_1^{ij}$. Тогда по теореме 2.1 ψ есть конгруэнция.*

Пусть C — кривая, абсолютная кривизна которой всюду строго положительна. Тогда с кривой C ассоциируется естественная лента, называемая *лентой Френе* и определяемая следующим образом. Поскольку кривизна не обращается в нуль, мы имеем [1] $de_1/dt \neq 0$. Определим e_2 как единственный единичный вектор, для которого

$$\frac{de_1}{dt} = Ke_2. \tag{4.3}$$

Выберем затем e_3 так, чтобы $e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 > 0$ (относительно естественной ориентации в E^3). Вектор e_2 называется *главной нормалью*, а вектор e_3 — *бинормалью* рассматриваемой кривой. Репер e_1, e_2, e_3 называется *трехгранником Френе* данной кривой. Сравнивая (4.3) с (4.1), мы видим, что $\theta^{13} \equiv 0$, т. е. лента Френе

[1] Где $e_1\,(=f_1)$ — единичный касательный вектор к C. — *Прим. перев.*

не имеет верчения. Уравнения (4.1) записываются теперь в виде

$$\begin{aligned} \frac{de_1}{ds} &= Ke_2, \\ \frac{de_2}{ds} &= -Ke_1 - \mathrm{T}e_3, \\ \frac{de_3}{ds} &= \mathrm{T}e_2. \end{aligned} \tag{4.4}$$

Функция Т в этом случае называется *кручением* кривой. Кривизна K кривой показывает, насколько кривая отклоняется от прямой линии. [Кривая, для которой $K \equiv 0$, есть прямая линия.] Кручение показывает, насколько кривая отклоняется от того, чтобы лежать в одной плоскости. [Кривая с нулевым кручением есть плоская кривая.] Применяя предыдущие замечания, мы видим, что *две кривые с необращающейся в нуль кривизной конгруэнтны тогда и только тогда, когда они имеют одинаковые кривизну и кручение.*

Существует простая, но важная геометрическая операция, которую можно применять к лентам. Интуитивно она состоит в получении плоской кривой путем разглаживания ленты на плоскость. На точном языке это означает следующее. Пусть R — некоторая лента. Тогда мы имеем функции $e_1(s)$, $e_2(s)$, $e_3(s)$, удовлетворяющие уравнениям

$$\begin{aligned} \frac{de_1}{ds} &= ke_2 - we_3, \\ \frac{de_2}{ds} &= -ke_1 - \tau e_3, \\ \frac{de_3}{ds} &= -we_1 + \tau e_2. \end{aligned}$$

Определим кривую $D(R)$ в E^2 уравнением

$$\frac{dD(R)(s)}{ds} = f_1(s), \tag{4.5}$$

где $f_1(s)$ — единичный касательный вектор, удовлетворяющий вместе с ортогональным к нему единичным вектором f_2, для которого $f_1 \wedge f_2 > 0$, уравнению

$$\frac{df_1(s)}{ds} = k(s) f_2(s). \tag{4.6}$$

Уравнение (4.6) можно рассматривать как систему двух линейных однородных уравнений первой степени. Следовательно, при заданном начальном условии $f_1(s_0)$ оно имеет единственное решение. Таким образом, кривая $D(R)$ определяется начальным положением и направлением. Зафиксируем раз и навсегда начальные условия для $D(R)$: скажем, $D(R(0)) = 0$ и $D(R)'(0) = \partial/\partial x^1$. Отображение $R \to D(R)$, сопоставляющее ленте R кривую $D(R)$, называется «развертыванием ленты на плоскость». Уравнение (4.6) выражает тот факт, что мы получаем при этом плоскую кривую и ленту без верчения и кручения над ней. Функция $k(s)$, помимо всего прочего, описывает касательную к ленте компоненту изменения вектора e_1.

Упражнение 4.1. Показать, что развертывание любой ленты над прямой дает прямую линию.

Упражнение 4.2. Пусть C — плоская кривая, т. е. $C(s)$ лежит в фиксированной плоскости P. Пусть R — лента над C, определяемая тем, что e_2 лежит в P. Показать, что если отождествить P с E^2, то $D(C)$ отличается от C на евклидово движение плоскости. Вывести отсюда, что кривая C лежит в плоскости тогда и только тогда, когда над C существует лента без кручения.

Упражнение 4.3. Пусть C — кривая, лежащая в плоскости P. Пусть R — такая лента над C, что e_2 всегда нормален к P. Показать, что $D(R)$ есть прямая линия.

Упражнение 4.4. Пусть C — некоторая кривая. Показать, что существует лента R над C, для которой $D(R)$ есть прямая линия. Кроме того, такая лента R единственна, если кривизна кривой C всюду отлична от нуля.

Упражнение 4.5. Пусть C — кривая, кривизна которой всюду отлична от нуля, и R — ее лента Френе. Показать, что кривые $D(R)$ и C имеют одинаковую кривизну.

Как мы уже видели, с плоской кривой естественным образом ассоциируется лента, а именно, мы определяем e_2 как единичный нормальный вектор, лежащий в той же плоскости, для которого произведение $e_1 \wedge e_2$ задает положительную ориентацию плоскости, и определяем e_3 как нормаль к этой плоскости. Тогда уравнения (4.4) приобретают вид

$$\begin{aligned} \frac{de_3}{ds} &= 0, \\ \frac{de_1}{ds} &= K(s)\, e_2, \\ \frac{de_2}{ds} &= -K(s)\, e_1. \end{aligned} \tag{4.7}$$

Из теоремы 2.1 немедленно следует, что две такие кривые с одинаковыми кривизнами отличаются на евклидово движение. Кривизна показывает, «каким образом» и насколько поворачивается кривая в плоскости. Знак кривизны зависит от направления, в котором мы двигаемся по кривой.

Если $K(s) > 0$, то вблизи s кривая C остается по одну сторону от касательной. Чтобы убедиться в этом, предположим, что $s = 0$, $C(0) = (0, 0)$ и $e_1 = (1, 0)$, так что касательная совпадает с осью x_1. [Этого всегда можно добиться, выбрав новую параметризацию кривой C и применив подходящее евклидово движение.]. Тогда из (4.7) следует, что

$$C(0) = (0, 0), \qquad C'(0) = (1, 0) \quad \text{и} \quad C''(0) = (0, K(0)).$$

Поэтому, если мы положим $C(t) = (x_1(t), x_2(t))$, то $x_2(t) = {}^1/_2 K(0) t^2 +$ (члены высших порядков). Значит, если $K(0) > 0$, то $x_2(t)$ положительно при достаточно малых ненулевых значениях t.

Уравнение (4.7) подсказывает другую интерпретацию кривизны K. Если функцию e_1 рассматривать как отображение в единичную окружность, то $e_2(s)$ есть единичный касательный вектор к этой окружности в точке $e_1(s)$. Формула (4.7) показывает тогда, что K есть якобиан этого отображения, если и кривая C, и единичная окружность параметризованы длиной дуги. Но на единичной окружности длиной дуги измеряются центральные углы. Поэтому если $\tau(s)$ есть угол (определенный по модулю 2π) между $e_1(s)$ и, скажем, осью x_1, то

$$K(s) = \frac{d\tau}{ds}. \tag{4.8}$$

Рассмотрим теперь замкнутые кривые на плоскости, т. е. погружения C окружности S^1 в E^2. Мы снова можем взять в качестве локального параметра длину дуги и изучать такие понятия, как кривизна и т. п. В частности, мы можем рассмотреть касательное отображение, переводящее каждую точку $x \in S^1$ в единичный вектор, касательный к C в x. Это отображение можно понимать как отображение окружности S^1 в единичную окружность из E^2 или, если угодно, как отображение окружности S^1 в себя. Следовательно, мы можем рассмотреть степень этого отображения. Это целое число играет важную роль ввиду следующего утверждения. Назовем семейство кривых C_u, зависящее от вещественного параметра u, *гладким семейством*, если оно непрерывно в C^1-топологии, т. е. если для любой окрестности $\mathcal{N}(W, Z, \varepsilon, 1)\, C_{u_0} \ni C_{u_0}$ (см. определение 4.6 гл. II) существует такое $\delta > 0$, что $C_u \in \mathcal{N}(W, Z, \varepsilon, 1)\, C_{u_0}$, когда $|u - u_0| < \delta$. Таким образом, кривая C_u близка к кривой C_{u_0} в смысле C^1-топологии, если u близко к u_0. Назовем две кривые C_0 и C_1 *гладко гомотопными*, если существует гладкое семейство кривых C_u, определенное при $0 \leqslant u \leqslant 1$, совпадающее с C_0 при $u = 0$ и с C_1 при $u = 1$ [1]). Тогда справедлива

Теорема 4.1 (Уитни). *Пусть C_0 и C_1 — две кривые на плоскости. Пусть n_0 — степень касательного отображения кривой*

---

[1]) Напомним, что при каждом u отображение C_u является *погружением*, т. е. $C'_u(t) \neq 0$ при всех t.

C_0, а n_1 — кривой C_1. Тогда C_0 гладко гомотопна C_1 в том и только в том случае, когда $n_0 = n_1$.

Прежде чем приступить к доказательству теоремы 4.1, познакомимся ближе с понятием степени отображения окружности S^1 в себя. Введем на окружности S^1 угловую координату τ, определенную по модулю 2π. Хотя функция τ глобально не определена, форма $\omega = d\tau$ определена глобально. [Действительно, S^1 есть группа Ли. Если выбрать подходящий базис (одномерной) алгебры Ли группы S^1, то ω окажется фундаментальной 1-формой на S^1.] Интегрируя ω по S^1, получаем $\int\limits_{S^1} \omega = 2\pi$. Если $S^{1\prime}$ — второй экземпляр этой окружности с угловой координатой τ' и формой ω', а f — дифференцируемое отображение $S^1 \to S^{1\prime}$, то $\deg f$ задается формулой

$$\deg f = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{S^1} f^*(\omega'). \tag{4.9}$$

Соблазнительно записать (4.9) в виде

$$\deg f = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \left(\frac{d\tau'}{d\tau}\right) d\tau. \tag{4.10}$$

Мы должны быть, конечно, осторожны, поскольку τ' определено только по модулю 2π. Формула (4.10) подсказывает, однако, что степень отображения f измеряет, сколько раз это отображение наматывает S^1 на $S^{1\prime}$. Это действительно так, причем таким образом мы можем определить степень для любого непрерывного (не обязательно дифференцируемого) отображения $S^1 \to S^{1\prime}$.

Чтобы это сделать, заметим сначала, что угловые координаты позволяют рассматривать окружность как вещественную прямую по модулю 2π. Говоря точнее, существует естественная проекция $p\colon R^1 \to S^1$, локально являющаяся гомеоморфизмом. Любому отображению f окружности S^1 в любое пространство X мы можем сопоставить отображение $\hat f\colon R^1 \to X$, полагая $\hat f = f \circ p$:

$$\begin{tikzcd} R^1 \arrow[d, "p"'] \arrow[dr, "\hat f"] & \\ S^1 \arrow[r, "f"] & X \end{tikzcd}$$

Функция $\hat f$ удовлетворяет уравнению $\hat f(x+2\pi=)\hat f(x)$. Обратно, пусть дано отображение $\hat f\colon R^1 \to X$, причем $\hat f(x+2\pi) = \hat f(x)$. Тогда существует такое отображение $f\colon S^1 \to X$, что $\hat f = f \circ p$. Аналогичные утверждения верны для полосы $R^1 \times I$ и цилиндра $S^1 \times I$, где I — единичный отрезок. Предположим теперь, что $X = S^1$ и что задано отображение F: $S^1 \times I \to S^1$. Поднимем F до отображения $\hat{F}$: $R^1 \times I \to S^1$, удовлетворяющего условию $\hat{F}(x + 2\pi, s) = \hat{F}(x, s)$. Поскольку $\hat{F}$ равномерно непрерывно, мы можем разбить $R^1 \times I$ на столь мелкие прямоугольники, что образ каждого из них

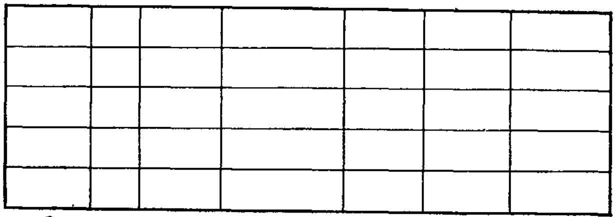


Рис. 23.

содержится в дуге окружности S^1 длины $\pi/4$ (рис. 23). Выберем теперь такую точку $y_0 \in R^1$, что $p(y_0) = \hat{F}(0, 0)$. Поскольку p есть локальный гомеоморфизм и мы выбрали наше разбиение достаточно мелким, существует единственное отображение F^* прямоугольника, содержащего $(0, 0)$, в R^1, для которого $pF^* = \hat{F}$ и $F^*(0, 0) = y_0$. Далее мы можем однозначно продолжить отображение F^* на лежащий выше прямоугольник так, чтобы оно было непрерывно и удовлетворяло условию $pF^* = \hat{F}$. Продолжая подобным образом, мы определим F^* на первой вертикальной полосе. Затем мы можем начать со следующего нижнего прямоугольника и продолжать процесс, пока функция F^* не будет определена на прямоугольнике $0 \leqslant s \leqslant 1$, $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$.

Заметим, что отображение F^* характеризуется свойствами $pF^* = \hat{F}$ и $F^*(0, 0) = y_0$. [Отсюда следует, что если бы мы начали с точки $y_0' = y_0 + 2\pi k$, то новое отображение $F^{*\prime}$ удовлетворяло бы равенству $F^{*\prime} - F^* = 2\pi k$.] Так как $\hat{F}(x + 2\pi, s) = \hat{F}(x, s)$, то $F^*(2\pi, s) - F^*(0, s) = 2\pi n$ для некоторого целого n. Ввиду замечания, приведенного выше в скобках, это число n не зависит от выбора y_0. Если задано отображение f: $S^1 \to S^1$, то положим $F(x, s) = f(x)$. Тогда целое число n, которое мы получим описанным выше способом, называется *степенью отображения* f.

Ясно, что когда f дифференцируемо, это определение степени совпадает с предыдущим и придает смысл формуле (4.10). Степень показывает, сколько раз отображение f накручивает окружность на себя. Из предыдущих рассуждений ясно, что *два гомотопных* *отображения имеют одну и ту же степень.* С другой стороны, *два отображения $S^1 \to S^1$ одинаковой степени гомотопны.* Для доказательства заметим, что если f имеет степень n, то описанная выше конструкция определяет отображение f^*: $R^1 \to R^1$, причем $pf^* = fp$ и $f^*(x+2\pi) = f^*(x) + 2\pi n$. Положим $F^*(x, s) = (1-s) f^* + sg(x)$, где $g(x) = 2\pi n x$. Тогда $F^*(x+2\pi, s) = F^*(x, s) + 2\pi n$ и, значит, отображение $pF^*(x, s)$ осуществляет гомотопию между f и отображением $\bar{g}$, определяемым функцией g. Поэтому все отображения степени n гомотопны $\bar{g}$.

Сравнивая (4.8) с (4.10), мы видим, что степень касательного отображения кривой C равна $\left(\frac{1}{2}\pi\right) \int\limits_0^L K(s)\,ds$ (где L — длина кривой C). Чтобы не вводить длину дуги, удобнее ввести линейную дифференциальную форму $K\,ds$ и писать

$$\text{степень касательного отображения} = \frac{1}{2\pi} \int\limits_C K\,ds. \tag{4.11}$$

Докажем теперь теорему 4.1. Если кривая C_0 гладко гомотопна C_1, то касательное отображение кривой C_0 гомотопно касательному отображение кривой C_1, так что $n_0 = n_1$. Прежде чем доказывать обратное утверждение, заметим, что если C — кривая, то формула $C_u(s) = uC(s)$ (умножение вектора $C(s)$ на вещественное число $u \neq 0$) определяет гладкое семейство кривых. Длина кривой C_u равна uL, где L — длина кривой C. Поэтому можно считать (заменив в случае необходимости рассматриваемые кривые гладко гомотопными), что длина кривых C_0 и C_1 равна 2π.

Пусть h есть E^2-значная функция на S^1, нигде не обращающаяся в нуль. Предположим, что в терминах угловой координаты $h = h(\tau)$. Тогда $C(\tau) = \int\limits_0^\tau h(t)\,dt$ есть дифференцируемая кривая при условии, что $C(2\pi) = C(0)$, т. е. $\int\limits_0^{2\pi} h(t)\,dt = 0$. Пусть $h(\cdot, 0)$ — касательное отображение кривой C_0, а $h(\cdot, 1)$ — касательное отображение кривой C_1. Они гомотопны, так как имеют одинаковые степени. Значит, существует непрерывное отображение $(\tau, u) \to h(\tau, u)$, переводящее $S^1 \times I$ в S^1. [Мы рассматриваем здесь S^1 как единичную окружность, так что $h(\tau, u) \in E^2$ есть единичный вектор.] Положим

$$C_u(\tau) = \int\limits_0^\tau h(t, u)\,dt - \frac{\tau}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} h(t, u)\,du.$$

Эта формула определяет гладкую гомотопию, если касательный вектор $C'_u(\tau)$ нигде не обращается в нуль. Но

$$C'_u(\tau) = h(\tau, u) - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} h(t, u)\,dt.$$

Если $h(t, u)$ не постоянно по t ни при каком фиксированном u, то

$$\left\| \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} h(t, u)\,du \right\| < 1 = \| h(t, u) \|.$$

Если $n_0 = n_1 \neq 0$, то отображение $h(\cdot, u)$ не является постоянным. Поэтому остается только показать, что между любыми двумя непостоянными отображениями h_0 и h_1 степени 0 окружности S^1

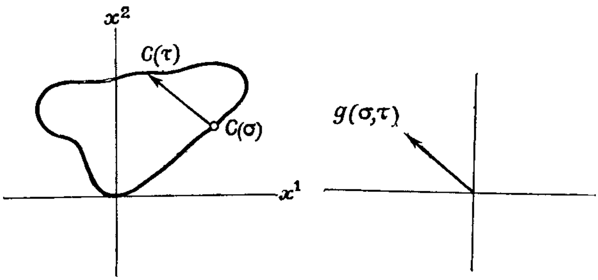


Рис. 24.

в себя существует гомотопия, состоящая из непостоянных кривых. Для этого поднимем отображения h_0 и h_1 до отображений h_0^*, h_1^*: $R^1 \to R^1$. Можно считать, что $h_0^*(0) = h_1^*(0)$ и $\sup h_1^*(x) > 0$, $\sup h_2^*(x) > 0$. Тогда формула $sh_1^* + (1-s)h_0^*$ определяет требуемую гомотопию.

Мы еще не исследовали вопрос, как для данной кривой вычислить степень касательного отображения. Сейчас мы вычислим ее для *простой кривой*, т. е. для кривой без самопересечений.

Пусть C — простая кривая. Введем в качестве параметра на S^1 длину дуги $0 \leqslant \tau \leqslant 2\pi$. Тогда из равенства $C(\tau) = C(\tau')$ следует, что $\tau = \tau'$ или $\tau = 0$, $\tau' = 2\pi$. Применяя подходящее евклидово движение, можно считать, что $C(S^1)$ лежит в верхней полуплоскости, причем $C(0) = (0, 0)$ и $C'(0)$ лежит на оси x_1.

Определим теперь отображение g треугольника $0 \leqslant \sigma \leqslant \tau \leqslant 2\pi$ в S^1, полагая (см. рис. 24, 25)

$$g(\sigma, \tau) = \frac{C(\tau) - C(\sigma)}{\| C(\tau) - C(\sigma) \|}, \qquad \text{если } 0 \leqslant \sigma < \tau < 2\pi$$

$$\text{или } 0 < \sigma < \tau \leqslant 2\pi,$$

$$g(\sigma, \tau) = C'(\tau), \qquad \text{если } \sigma = \tau,$$
$$g(\sigma, 2\pi) = -C'(0).$$

Отображение g определено корректно, поскольку из $C(\sigma) = C(\tau)$ следует, что $\sigma = \tau$ или $\sigma = 0$, $\tau = 2\pi$. Ясно также, что

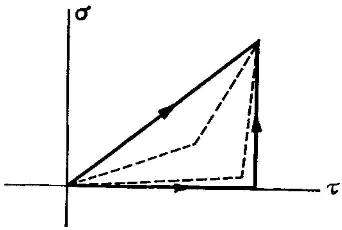


Рис. 25.

g непрерывно. Далее, отображение $\tau \to g(\tau, \tau)$ есть как раз касательное отображение. Оно гомотопно отображению G, определяемому формулой

$$G(\tau) = \begin{cases} g(2\tau, 0), & \text{если } 0 \leqslant \tau \leqslant \pi, \\ g(2\pi, 2(\tau - \pi)), & \text{если } \pi \leqslant \tau \leqslant 2\pi. \end{cases}$$

Поэтому достаточно вычислить степень отображения G. По построению вектор $G(\tau)$ лежит в верхней полуплоскости, если $0 \leqslant \tau \leqslant \pi$, и в нижней полуплоскости, если $\pi \leqslant \tau \leqslant 2\pi$. Кроме того, $G(\pi) = -G(0)$. Это показывает, что степень отображения G равна ± 1. Итак, имеет место

Теорема 4.2. *Степень касательного отображения простой кривой C равна ± 1. Таким образом,*

$$\int_C K\,ds = \pm 2\pi. \tag{4.12}$$

Упражнение 4.6. Показать, как вычислить степень, когда кривая имеет конечное число трансверсально регулярных самопересечений.

Полезно обобщить формулу (4.12) на случай кривой с углами, т. е. на случай, когда C есть кусочно дифференцируемое отображение $S^1 \to E^2$. Напомним, что кривая C называется кусочно дифференцируемой, если она непрерывна и если на S^1 существует конечное число таких точек $x_1, \ldots, x_n$, что ограничение отображения C на каждую из дуг $x_1x_2, x_2x_3, \ldots, x_{n-1}x_n, x_nx_1$ дифференцируемо и, более того, совпадает с ограничением на эту дугу некоторого дифференцируемого отображения, определенного на несколько большей дуге. Обозначим ограничение кривой C на $x_i x_{i+1}$ $(i < n)$ через C_i, а ограничение C на $x_n x_1$ — через C_n.

Имеет смысл говорить о касательном векторе кривой C_i в точках x_i и x_{i+1}. Обозначим через α_i внешний угол в точке x_i, т. е. угол между касательным вектором кривой C_{i-1} в точке x_i и касательным вектором кривой C_i в точке x_i [а для $i = 1$ — угол между

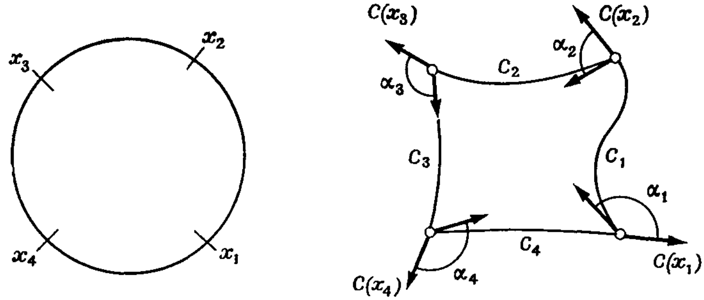


Рис. 26.

$C'_n(x_1)$ и $C'_1(x_1)$] (рис. 26). Как и раньше, назовем кривую C простой, если она не имеет самопересечений. Тогда обобщением формулы (4.12) служит формула

$$\sum_i \int_{C_i} K\,ds + \sum_i \alpha_i = \pm 2\pi. \tag{4.13}$$

Формулу (4.13) можно получить из (4.12), если воспользоваться простым предельным процессом. Достаточно исследовать углы

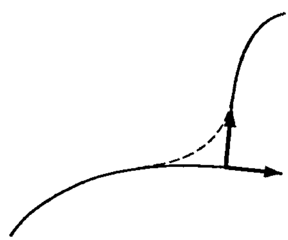


Рис. 27.

и посмотреть, что получается при их сглаживании (см. рис. 27). Подробности мы оставим читателю в качестве упражнения.

Кривая C называется выпуклой, если ее образ $C(S^1)$ целиком лежит по одну сторону от каждой своей касательной. Из теоремы 4.2 немедленно следует

Теорема 4.3. *Пусть C — простая замкнутая кривая. Тогда C выпукла в том и только в том случае, когда ее кривизна не меняет знака, т. е. когда либо всюду $K \geqslant 0$, либо всюду $K \leqslant 0$.*

Доказательство. Если кривизна K не меняет знака, то (согласно (4.8)) касательное отображение монотонно (не возрастает или не убывает), и обратно. Поскольку степень равна ± 1, отсюда следует, что любое значение на единичной окружности принимается либо один раз, либо для всех точек некоторой связной дуги из S^1. Предположим, что кривая C не выпукла. Тогда существует такая точка y, что по обе стороны от касательной прямой l в точке y имеются точки из C (S^1). Пусть n — вектор, нормальный к l, так что $l = \{v \in E^2 \mid (n, v) = a\}$, где a — некоторая

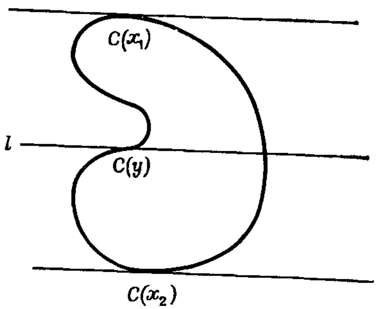


Рис. 28.

константа. Если образ C (S^1) лежит по обе стороны от l, то существуют точки $x \in S^1$, для которых $(C(x), n) > a$, и точки, для которых $(C(x), n) < a$. Касательные прямые к C (S^1) в точках x_1 и x_2, в которых $(C(x), n)$ принимает максимальное и минимальное значения, параллельны l (см. рис. 28). Поэтому два из трех касательных векторов в точках y, x_1 и x_2 должны быть равны. Тогда на одной из дуг, соединяющих эти точки, касательный вектор должен быть постоянным. Но это невозможно, поскольку отсюда следовало бы, что эти две точки лежат на прямой, параллельной l.

В качестве приложения понятия степени отображения $S^1 \to S^1$ введем понятие индекса векторного поля. Пусть X — векторное поле на E^2, обращающееся в нуль в начале координат, т. е. $X = f(\partial/\partial x_1) + g(\partial/\partial x_2)$, где x_1 и x_2 — евклидовы координаты в E^2, и $f(0, 0) = g(0, 0) = 0$. Предположим, что X не обращается в нуль в других точках вблизи начала координат, т. е. что для некоторого $\varepsilon > 0$ из $f(x_1, x_2) = g(x_1, x_2) = 0$ и $x_1^2 + x_2^2 < \varepsilon^2$ следует, что $x_1 = x_2 = 0$. Для любой окружности C_r радиуса

$r < \varepsilon$ с центром в начале координат определим отображение в единичную окружность по формуле

$$C_r \ni p \to \frac{X_p}{\| X_p \|}.$$

[Здесь $X_p \in T_p(E^2)$ — значение векторного поля X в точке p. Как обычно, мы отождествляем $T_p(E^2)$ с E^2 и, таким образом, рассматриваем X_p как вектор из E^2.]

Легко видеть, что это дифференцируемое отображение.

Упражнение 4.7. Показать, что степень этого отображения не зависит от r при $r < \varepsilon$. Она называется *индексом* поля X в начале координат.

Упражнение 4.8. Найти индекс векторного поля $x_1(\partial/\partial x_1) + x_2(\partial/\partial x_2)$.

Упражнение 4.9. Найти индекс поля $x_1(\partial/\partial x_1) - x_2(\partial/\partial x_2)$.

Упражнение 4.10. Найти индекс поля $x_2(\partial/\partial x_1) - x_1(\partial/\partial x_2)$.

Упражнение 4.11. Показать, что индекс поля $-X$ равен индексу поля X.

Упражнение 4.12. Индекс векторного поля в изолированном нуле можно определить на любом ориентированном двумерном многообразии, выбрав подходящую карту в окрестности этого нуля. Показать, что это определение не зависит от выбора карты.

Сделаем в заключение одно замечание относительно кривизны плоской кривой. Мы получили кривизну плоской кривой как частный случай кривизны пространственной кривой. Таким образом, мы воспользовались только тем, что рассматриваемое подмногообразие одномерно. В случае кривой на плоскости мы можем воспользоваться также тем, что это подмногообразие имеет коразмерность 1. Это тоже позволяет определить понятие кривизны и обобщить его на высшие размерности. Действительно, для ориентированной плоской кривой C корректно определен единичный нормальный вектор $e_2(s)$. Мы можем рассматривать e_2 как отображение в единичную окружность. В соответствии с формулой (4.7) якобиан этого отображения (относительно параметризации единичной окружности и кривой C длиной дуги) равен $-K(s)$. Теперь мы перейдем к обобщению этой конструкции на n-мерное подмногообразие $(n+1)$-мерного евклидова пространства.

§ 5. ВТОРАЯ ФУНДАМЕНТАЛЬНАЯ ФОРМА

Пусть φ — погружение n-мерного многообразия M в E^N. Мы можем считать φ векторнозначной функцией и рассмотреть векторнозначную форму $d\varphi$. Как мы уже видели, квадратичная дифференциальная форма $(d\varphi, d\varphi)$ есть не что иное, как риманова метрика на M, индуцированная погружением φ. В классической литературе форма $(d\varphi, d\varphi)$ называется *первой фундаментальной формой*.

Предположим теперь, что M — *ориентированное* многообразие и что $N = n + 1$. Если $p \in M$, то $\varphi_* (T_p (M))$ можно рассматривать как n-мерное подпространство пространства E^{n+1}. Поскольку M ориентировано, $\varphi_* (T_p (M))$ имеет выделенную ориентацию. Таким образом, существует единственный единичный вектор $e_{n+1} (p)$, ортогональный к $\varphi_* (T_p (M))$, который вместе с ориентацией пространства $\varphi_* (T_p (M))$ определяет положительную ориентацию в E^{n+1}. Более точно, существует единственный единичный вектор $e_{n+1} (p) \in E^{n+1}$, такой, что $\varphi_* (X_1 \wedge \ldots \wedge X_n) \wedge \wedge e_{n+1} (p) > 0$, где $X_l \in T_p (M)$ и $X_1 \wedge \ldots \wedge X_n > 0$. [Здесь E^{n+1} рассматривается со стандартной ориентацией.] Итак, мы имеем отображение $e_{n+1}\colon M \to E^{n+1}$. На самом деле оно отображает M в единичную сферу пространства E^{n+1}, и называется поэтому *сферическим отображением, соответствующим погружению* φ.

Можно рассматривать e_{n+1} как векторнозначную функцию на M. Следовательно, можно построить квадратичную дифференциальную форму[1] $(d\varphi, de_{n+1})$, которая называется *второй фундаментальной формой* погружения φ. Мы будем обозначать значение этой формы на векторах $X, Y \in T_p (M)$ через $(X, Y)_{\text{II}}$.

Важность первой и второй фундаментальных форм заключается в том, что вместе взятые они определяют отображение φ. Точнее, справедлива

Теорема 5.1. *Пусть φ_1 и φ_2 — два погружения ориентированного n-мерного многообразия M в E^{n+1}. Если они индуцируют одну и ту же риманову метрику и одну и ту же вторую фундаментальную форму, то они отличаются на евклидово движение.*

Доказательство. Мы хотим применить теорему 2.1. Для этого заметим прежде всего, что между $\mathcal{O}_{\varphi_1}(M)$ и $\mathcal{O}_{\varphi_2}(M)$ существует очевидный диффеоморфизм. Действительно, в рассматриваемом случае (когда M ориентировано, а φ_i отображает M в евклидово пространство на единицу большей размерности) $\mathcal{O}_\varphi(M)$ представляет собой двулистное накрытие над $\mathcal{O}(M)$. Именно, каждая точка из $\mathcal{O}(M)$ определяет две точки из $\mathcal{O}_\varphi(M)$, а ориентация позволяет выбрать одну из них (таким же образом,

---

[1] Напомним, что $(d\varphi, de)$ есть симметрическое произведение форм, т. е.

$$\langle X, Y, (d\varphi, de)\rangle = \frac{1}{2}[\langle X, d\varphi\rangle \langle Y, de\rangle + \langle Y, d\varphi\rangle \langle X, de\rangle].$$

как мы выбирали e_{n+1}). Другими словами, $\mathcal{O}_\varphi(M)$ однозначно определяется расслоением $\mathcal{O}(M)$, которое в свою очередь зависит только от римановой метрики. Поскольку мы предполагаем, что φ_1 и φ_2 индуцируют одну и ту же риманову метрику, мы можем отождествить $\mathcal{O}_{\varphi_1}(M)$ с $\mathcal{O}_{\varphi_2}(M)$. Для применения теоремы 2.1 мы должны показать, что

$$\theta_1^i = \theta_2^i \quad \text{и} \quad \Theta_1^{ij} = \Theta_2^{ij} \text{ для всех } i,\ j. \tag{5.1}$$

Но по теореме 3.1 формы θ^i и Θ^{ij} $(i < j \leqslant n)$ определяются римановой метрикой. Поэтому нам осталось показать только, что

$$\Theta_1^{i,\,n+1} = \Theta_2^{i,\,n+1}. \tag{5.2}$$

Для этого достаточно проверить, что вторая фундаментальная форма определяет линейные дифференциальные формы $\Theta^{n+1,\,i}$ на $\mathcal{O}_\varphi(M)$. Имеем

$$\pi_\varphi^*(d\varphi,\ de_{n+1}) = (d(\varphi \circ \pi_\varphi),\ df_{n+1}).$$

Формулы (3.9) и (3.10) показывают, что

$$\begin{aligned} d(\varphi \circ \pi_\varphi) &= \sum_i \theta^i f_i, \\ d(f_{n+1}) &= \sum_{n=1} \Theta^{n+1,\,i} f_i. \end{aligned} \tag{5.3}$$

Значит,

$$\pi_\varphi^*(d\varphi,\ de_{n+1}) = \sum \theta^i \circledcirc \Theta^{n+1,\,i}. \tag{5.4}$$

Поскольку формы θ^i всюду линейно независимы, эта формула показывает, что формы $\Theta^{n+1,\,i}$ определяются второй фундаментальной формой. Таким образом, равенство (5.2) справедливо, и теорема доказана.

Поскольку первая и вторая фундаментальные формы определяют погружение с точностью до евклидова движения, полезно изучить их свойства и дать им геометрическую интерпретацию. Первая фундаментальная форма есть просто риманова метрика. Вторая фундаментальная форма показывает, как многообразие погружено в E^{n+1}, и определяет «члены второго порядка» этого погружения в каждой точке. Точнее, если $C(t)$ — кривая на M, то [обозначая $\varphi \circ C(t)$ через $X(t)$] имеем

$$(e_n \circ C(t),\ X'(t)) \equiv 0,$$

и, дифференцируя, получаем

$$\left(\frac{de_{n+1} \circ C(t)}{dt},\ X'(t)\right) + \left(e_{n+1},\ \frac{d^2X(t)}{dt^2}\right) = 0.$$

Первое слагаемое есть как раз значение второй фундаментальной формы на паре $(C',\ C')$. Поэтому можно выбрать ортонормированные координаты $x^1, \ldots, x^{n+1}$ на E^{n+1} и координаты $u^1, \ldots$ $\ldots, u^m$ на M вокруг точки p так, чтобы $e_{n+1}(p) = (0, \ldots, 0, 1)$ и чтобы погружение φ в этих координатах определялось формулами

$$x^i = u^i + \sum a^i_{jk} u^j u^k + \ldots, \qquad i = 1, \ldots, n,$$
$$x^{n+1} = \sum A_{jk} u^j u^k + \ldots,$$

где

$$A_{jk} = \left(\frac{\partial}{\partial u^j}\bigg|_p, \; \frac{\partial}{\partial u^k}\bigg|_p \right)_{\text{II}}.$$

Поэтому если форма $(\ ,\ )_{\text{II}}$ (положительно или отрицательно) определена в точке p, то подмногообразие $\varphi(M)$ лежит локально по одну сторону от своей касательной плоскости.

Мы можем также определить кривизну ориентированного n-мерного подмногообразия M в E^{n+1}. Рассмотрим отображение e_{n+1}: $M \to S^n$. Оно индуцирует линейное отображение $e_{n+1*} : T_p(M) \to T_{e_{n+1}(p)}(S^n)$, а значит, и отображение

$$\bigwedge\nolimits^n (e_{n+1*}) \colon \bigwedge\nolimits^n (T_p(M)) \to \bigwedge\nolimits^n (T_{e_{n+1}(p)}(S^n)).$$

Оба этих (одномерных) векторных пространства имеют выделенный базис, поскольку S^n и M — ориентированные римановы многообразия. Относительно этих базисов линейное преобразование $\bigwedge^n (e_{n+1*})$ задается скаляром $K(p)$, который мы будем называть *гауссовой кривизной* погружения φ в точке p. Грубо говоря, K есть отношение объема образа $e_{n+1}(U)$ малой окрестности $U \subset M$ к объему самой окрестности U.

Зная первую и вторую фундаментальные формы, мы можем вычислить гауссову кривизну. Действительно, рассмотрим уравнение

$$0 = d\theta^{n+1} = \sum \Theta^{n+1, i} \wedge \theta^i$$

(см. теорему 3.1). По лемме Картана (теорема 4.4 гл. I) из этого уравнения следует, что существуют однозначно определенные функции A_{ij}, такие, что $A_{ij} = A_{ji}$ и

$$\Theta^{n+1, i} = \sum A_{ij} \theta^j. \qquad (5.5)$$

Тогда, согласно формуле (5.4),

$$\pi^*(d\varphi, de_{n+1}) = \sum A_{ij} \theta^i \circledcirc \theta^j. \qquad (5.6)$$

Пусть теперь $X_1, \ldots, X_n$ — ортонормированный базис пространства $T_p(M)$ и $(p; f_1, \ldots, f_{n+1})$ — соответствующая точка из $\mathcal{O}_\varphi(M)$.

Тогда

$$de_{n+1*}(X_i) = \langle X_i,\ de_{n+1}\rangle = \langle \overline{X}_i,\ df_{n+1}\rangle,$$

где $\overline{X}_i$ — касательный вектор в точке $(p;\ f_1, \ldots, f_{n+1})$, для которого $\pi_*\overline{X}_i = X_i$. Но

$$\langle \overline{X}_i,\ df_{n+1}\rangle = \sum \langle \overline{X}_i,\ \Theta^{n+1,\,j}\rangle f_j.$$

Используя формулу (5.5) и условия $\langle \overline{X}_i,\ \theta^j\rangle = 0$ при $i \neq j$, $\langle \overline{X}_i,\ \theta^i\rangle = 1$, получаем

$$e_{n+1*}(X_i) = \sum A_{ij} f_j.$$

В частности, гауссова кривизна находится по формуле

$$K = \det(A_{ij}). \tag{5.7}$$

Равенство (5.6) позволяет понять, что представляет собой матрица (A_{ij}). Действительно, поскольку вторая фундаментальная форма симметрична, а первая — положительно определена, существует единственное линейное преобразование A_p, такое, что

$$(A_pX,\ Y)_{\mathrm{I}} = (X,\ A_pY)_{\mathrm{I}} = (X,\ Y)_{\mathrm{II}} \tag{5.8}$$

для любых $X,\ Y \in T_p(M)$.

Уравнение (5.6) показывает, что $(-A_{ij})$ есть матрица этого линейного преобразования в базисе, который определяется точкой из $\mathcal{O}_\varphi(M)$. Таким образом, (5.7) можно переписать в виде

$$K(p) = (-1)^n \det A_p. \tag{5.9}$$

Поскольку линейное преобразование A_p полностью определяет вторую фундаментальную форму, мы можем утверждать, что риманова метрика, индуцированная погружением φ, вместе с линейными преобразованиями A_p (при всех $p \in M$) однозначно определяют φ с точностью до евклидова движения.

Подставим теперь равенства (5.5) в (2.10). Мы получим

$$d\Theta^{ij} = \sum_{p=1}^{n+1} \Theta^{ip} \wedge \Theta^{pj} = \sum_{p=1}^{n} \Theta^{ip} \wedge \Theta^{pj} + \Theta^{i,\,n+1} \wedge \Theta^{n+1,\,j} =$$
$$= \sum_{p=1}^{n} \Theta^{ip} \wedge \Theta^{pj} - \sum_{k,\,l} A_{ik}\theta^k \wedge A_{jl}\theta^l. \tag{5.10}$$

При $i,\ j \leqslant n$ члены $d\Theta^{ij}$ и $\Theta^{ip} \wedge \Theta^{pj}$ зависят только от римановой метрики. Поэтому *выражение* $\sum A_{ik}\theta^k \wedge A_{jl}\theta^l$ *также зависит только от римановой метрики*. Но $\sum A_{ik}\theta^k \wedge A_{jl}\theta^l$ есть как раз матрица преобразования $\bigwedge^2(A_p)$. Таким образом, справедлива

Теорема 5.2 (гауссова теорема «эгрегиум»). *Пусть φ — погружение n-мерного многообразия M в E^{n+1}. Пусть A_p (для каждого $p \in M$) есть линейное преобразование пространства $T_p(M)$, определяемое формулой (5.8). Тогда $\bigwedge^2(A_p)$ зависит только от римановой метрики, индуцированной погружением φ.*

Из теоремы 5.2 немедленно получаем

Следствие 5.1. *Если n четно, то гауссова кривизна погружения φ зависит только от римановой метрики, индуцированной погружением φ.*

Действительно, гауссова кривизна равна определителю отображения A, который полностью определяется отображением $\bigwedge^n(A)$. Если $n = 2m$, то

$$\bigwedge^n(A)(e_1 \wedge \ldots \wedge e_n) = (Ae_1 \wedge Ae_2) \wedge (Ae_3 \wedge Ae_4) \wedge \ldots \\ \ldots \wedge (Ae_{n-1} \wedge Ae_n),$$

и, значит, $\bigwedge^n(A)$ выражается через отображение $\bigwedge^2(A)$, которое зависит только от римановой метрики.

В случае $n = 1$ (т. е. для кривой на плоскости) все кривые изометричны, но кривизна может принимать любые значения. Поэтому для $n = 1$ следствие не верно. Оно не верно при любых нечетных n, как показывает

Следствие 5.2. *Пусть φ_1 и φ_2 — два погружения n-мерного многообразия M в E^{n+1}, индуцирующие одну и ту же риманову метрику. Если n нечетно, а погружения φ_1 и φ_2 имеют в каждой точке одинаковую ненулевую гауссову кривизну, то эти погружения отличаются на евклидово движение.*

Следствие 5.2 можно сформулировать короче, сказав, что при нечетном n риманова метрика вместе с гауссовой кривизной (в случае, когда последняя отлична от нуля) определяют погружение с точностью до евклидова движения. Поскольку можно построить погружения, индуцирующие одинаковую метрику, имеющие ненулевую гауссову кривизну, но отличающиеся больше, чем на евклидово движение, мы заключаем, что следствие 5.1 не имеет места ни при каком нечетном n.

Для доказательства следствия 5.2 достаточно проверить, что погружения φ_1 и φ_2 индуцируют одно и то же преобразование A. Поскольку они индуцируют одну и ту же риманову метрику, они индуцируют одно и то же преобразование $\bigwedge^2(A)$, а значит, и $\bigwedge^{n-1}(A)$, так как n нечетно. Если они, к тому же, индуцируют одинаковые преобразования $\bigwedge^n(A)$ (т. е. имеют одинаковую гауссову кривизну) и $\bigwedge^n(A)$ нигде не равно нулю, то они индуцируют одно и то же преобразование A, поскольку (по правилу Крамера) $\bigwedge^n(A)$ и $\bigwedge^{n-1}(A)$ определяют A при условии, что $\bigwedge^n(A) \neq 0$.

Мы можем теперь дать интерпретацию условию $\bigwedge^2(A)=0$. Действительно, уравнение (5.10) сводится тогда к структурным уравнениям евклидова пространства. Согласно предложению 1.1, мы можем утверждать, что существует локальный диффеоморфизм многообразия $\Theta(M)$ на $\Theta(n)$, переводящий формы θ^i и Θ^{ij} $(i,\ j \leqslant n)$ в формы ω^i и Ω^{ij}. Поскольку $\pi^* ds^2 = (\theta^1)^2 + \ldots + (\theta^n)^2$, это означает, что риманова метрика, индуцированная на M погружением φ, локально эквивалентна (изометрична) римановой метрике пространства E^n, т. е. что многообразие M локально евклидово. Это не означает, что $\varphi(M)$ есть n-мерное подпространство в E^{n+1}. Например, если отображение φ вкладывает M в E^{n+1} как цилиндр, то индуцированная метрика также будет локально евклидовой. Сейчас мы увидим, что это по существу единственный случай, когда $\bigwedge^2(A) \equiv 0$.

Оставшаяся часть этого параграфа посвящается доказательству следующих двух теорем:

Теорема 5.3 (Хартман — Ниренберг). *Пусть φ — погружение односвязного*[1] *n-мерного многообразия M в E^{n+1}. Предположим, что M полно в римановой метрике, индуцированной погружением φ, и что $\bigwedge^2(A)=0$. Тогда M изометрично пространству E^n и φ погружает M в виде цилиндра, т. е. на M существует такая евклидова система координат $y^1, \ldots, y^n$, что погружение φ задается формулой*

$$\varphi(y^1, \ldots, y^n) = \sum_{j=1}^{n-1} a_j y^j + b(y^n),$$

где $a_1, \ldots, a_n$ — постоянные векторы в E^{n+1}, а b — векторнозначная функция одной переменной.

Теорема интуитивно понятна: если $\bigwedge^2(A) = 0$, то ранг отображения A не превосходит единицы. Это означает, грубо говоря, что гиперповерхность $\varphi(M)$ изгибается в каждой точке не более, чем в одном направлении. Теорема 5.3 утверждает, что из этих направлений можно составить кривую.

С другой стороны, справедливо следующее обобщение теоремы 4.3:

[1] Для полноты мы даем глобальные теоремы, предполагая известными стандартные факты относительно односвязности, которые можно найти в любом элементарном учебнике топологии. Читатель, не знакомый с этими фактами, может, слегка изменив доказательства, получить соответствующие локальные теоремы.

Теорема 5.4 (Чжэнь — Лашоф). *Пусть* φ — *погружение компактного ориентированного* n-*мерного многообразия* M *в* E^{n+1}. *Тогда следующие два утверждения эквивалентны*:

1) *степень сферического отображения равна* ± 1 *и гауссова кривизна не меняет знака (т. е. всюду* $\geqslant 0$ *или* $\leqslant 0$*)*;

2) $\varphi(M)$ *есть выпуклая гиперповерхность (т. е.* $\varphi(M)$ *целиком лежит по одну сторону от любой своей касательной гиперплоскости)*.

Из теоремы 5.4 следует

Теорема 5.5 (Адамар). *Пусть* φ — *погружение компактного ориентированного* n-*мерного многообразия в* E^{n+1} $(n \geqslant 2)$ *со всюду положительной гауссовой кривизной. Тогда* $\varphi(M)$ *есть выпуклая гиперповерхность.*

Действительно, в этом случае сферическое отображение будет локальным диффеоморфизмом многообразия M в единичную сферу S^n, поскольку его якобиан всюду положителен. Более того, согласно теореме 4.3 гл. III, оно отображает M *на* S^n и, значит, так как M компактно, является накрывающим отображением [1]). Из односвязности сферы при $n \geqslant 2$ следует, что степень этого отображения равна $+1$. Таким образом, выполнено условие 1) теоремы 5.4, что и доказывает теорему 5.5.

Обратимся теперь к доказательству теорем 5.3 и 5.4. Для этого нам придется вернуться к преобразованиям Лежандра, введенным в § 1 гл. IV. Там мы рассматривали невырожденные преобразования Лежандра. Теперь нас будут особенно интересовать вырожденные преобразования Лежандра. Точнее, пусть заданы связное открытое подмножество D n-мерного векторного пространства V и дифференцируемая функция f, определенная на D. Как описано в § 1 гл. IV, форма df определяет отображение $\mathscr{L}\colon D \to V^*$. Если $x^1, \ldots, x^n$ — система координат на V, соответствующая некоторому базису пространства V, а $y^1, \ldots, y^n$ — система координат на V^*, соответствующая дуальному базису, то это отображение задается формулой

$$y^i = \frac{\partial f}{\partial x^i}.$$

Поскольку нас интересует случай, когда отображение $\mathscr{L}$ вырожденно, мы хотели бы знать ранг $\mathscr{L}$. Пусть r есть функция, задаю-

---

[1]) См. предыдущее примечание. Не считая доказательства теоремы 5.3, это единственное место, где мы используем некоторые сведения о накрывающих пространствах.

щая этот ранг: $r(x) =$ ранг $\mathcal{L}$ в точке x. Определим функцию r^*, полагая

$$r^*(x) = \min_{U \ni x} [\sup_{z \in U} r(z)].$$

Таким образом, $r^*(x)$ есть максимальный ранг $\mathcal{L}$ для всех близких к x точек из D. Ясно, что $r(x) \leqslant r^*(x)$. Для любого целого числа k обозначим через D_k множество всех таких $x \in D$, что $r^*(x) \leqslant k$. Ясно, что множество D_k открыто. Нам необходимо еще одно определение. Пусть H есть k-мерная гиперплоскость из V (т. е. H есть класс смежности пространства V по k-мерному подпространству из V). Тогда $H \cap D$ есть открытое подмножество из H (в k-мерной топологии пространства H). Каждая связная компонента множества $H \cap D$ называется *k-плоским сечением* множества D. Так, k-плоское сечение, проходящее через точку $x \in D$, есть содержащая x связная компонента множества $H \cap D$, где H — это k-мерная гиперплоскость, проходящая через x. Сформулируем теперь основную лемму.

Лемма 5.1 (Чжэнь — Лашоф — Хартман — Ниренберг). *Пусть f — функция, определенная на открытом связном подмножестве D n-мерного векторного пространства V, причем ранг ее преобразования Лежандра $\mathcal{L}$ меньше n во всех точках из D. Пусть точка $x_0 \in D$ такова, что $r(x_0) = r^*(x_0) = k$. Тогда отображение $\mathcal{L}$ постоянно на некотором $(n-k)$-плоском сечении π_{n-k} множества D_k, проходящем через x_0, и $r(x) = r^*(x) = k$ для всех $x \in \pi_{n-k}$ и $r(x) \geqslant k$ для $x \in \bar{\pi}_{n-k}$. Кроме того, существует окрестность U точки x_0, в которой из равенства $\mathcal{L}(x) = \mathcal{L}(x_0)$ $(x \in U)$ следует, что $x \in \pi_{n-k}$.*

Прежде чем приступать к доказательству леммы 5.1, сделаем несколько замечаний. Если $r^*(x_0) = k$ [но $r(x_0)$ не обязательно равно k], то мы можем найти такую последовательность $x_i \to x_0$, что $r^*(x_i) = r(x_i) = k$. Для каждой из точек этой последовательности лемма 5.1 дает $(n-k)$-плоское сечение, проходящее через эту точку. Переходя в случае надобности к подпоследовательности, мы можем считать, что эти сечения сходятся к $(n-k)$-плоскому сечению, проходящему через x_0. Так как отображение $\mathcal{L}$ постоянно на сечениях, проходящих через x_i, то оно постоянно и на предельном сечении. Таким образом (в предположении, что справедлива лемма 5.1) нами доказана

Лемма 5.2. *Если $r^*(x_0) = k$, то $\mathcal{L}$ постоянно на $(n-k)$-плоском сечении множества D_k, проходящем через x_0, которое является пределом $(n-k)$-плоских сечений, описанных в лемме 5.1.*

В случае $k = 1$ имеет место

Лемма 5.3. *Если $r^*(x_0) = 1$, то существует единственное $(n-1)$-плоское сечение, проходящее через x_0, на котором $\mathcal{L}$ постоянно, и на этом сечении $r^* \equiv 1$.*

Действительно, поскольку мы находимся в n-мерном пространстве, любые две непараллельные $(n-1)$-мерные гиперплоскости пересекаются. Пусть $\pi_{n-1}(x_0)$ — сечение, указанное в лемме 5.2. Предположим, что через x_0 проходит другое $(n-1)$-плоское сечение π'_{n-1}, на котором $\mathcal{L}$ постоянно. Пусть $\{x_i\}$ — последовательность, фигурирующая в доказательстве леммы 5.2. Если точка x_i достаточно близка к x_0, то сечения $\pi_{n-1}(x_i)$ и π'_{n-1} пересекаются (и пересечение содержит точку $\bar{x}_i$, произвольно близкую к x_0). Поскольку $\bar{x}_i \in \pi_{n-1}(x_i)$ и $r(\bar{x}_i) = r^*(\bar{x}_i) = 1$, через точку $\bar{x}_i$ (согласно лемме 5.1) проходит единственное плоское сечение, на котором $\mathcal{L}$ постоянно. Значит, $\pi_n(\bar{x}_i) = \pi_n(x_i) = \pi'_{n-1}$. Получаем противоречие. Оставшаяся часть леммы 5.3 очевидна.

Докажем теперь лемму 5.1. Покажем прежде всего, что *существуют такие окрестность U точки x_0 и $(n-k)$-мерная гиперплоскость H, что $U \cap H$ есть множество точек x из U, для которых $\mathcal{L}(x) = \mathcal{L}(x_0)$*. Поскольку $r(x_0) = r^*(x_0) = k$, ранг отображения $\mathcal{L}$ равен k в некоторой окрестности точки x_0. Далее, матрица Якоби отображения $\mathcal{L}$ имеет вид $(\partial^2 f/\partial x^i \partial x^j)$. Если заменить базис $e_1, \ldots, e_n$ пространства V базисом $f_1, \ldots, f_n$ и сделать соответствующую замену дуальных базисов в V^*, то в новой линейной системе координат матрица Якоби отображения $\mathcal{L}$ будет иметь вид $T^*(\partial^2 f/\partial x^i \partial x^j)\, T$, где T — матрица перехода к новой системе координат. Поскольку матрица $(\partial^2 f/\partial x^i \partial x^j)$ симметрична, мы можем выбрать T так, чтобы левая верхняя подматрица порядка k матрицы $T^*(\partial^2 f/\partial x^i \partial x^j)$ была невырожденной. Переходя к соответствующим линейным координатам (и снова обозначая их через $x^1, \ldots, x^n$), мы можем считать, что матрица $(\partial^2 f/\partial x^i \partial x^j)$ $(i, j = 1, \ldots, k)$ невырожденна в точке x_0, а значит, и в некоторой окрестности этой точки. Определим функции $y^1, \ldots, y^k$, полагая

$$y^i = \frac{\partial f}{\partial x^i}, \qquad i = 1, \ldots, k; \qquad y^i = x^i \text{ при } i > k. \tag{5.11}$$

Функции y^i можно использовать в качестве координат в некоторой окрестности U точки x_0. Положим $g_i = \partial f/\partial x^i$ $(i = 1, \ldots, n)$. Тогда матрица $(\partial g_i/\partial y^j)$ имеет ранг k. Поскольку $g_i = y^i$ для $i = 1, \ldots, k$, мы можем утверждать, что $\partial g_i/\partial y^j \equiv 0$ при $i > k$ и $j > k$. Следовательно, при $i > k$ функции g_i зависят только от $y^1, \ldots, y^k$. Далее,

$$df = \sum \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i = \sum g_i\, dx^i,$$

откуда

$$\sum_{i=1}^{n} dg_i \wedge dx^i = 0.$$

Запишем это равенство в виде

$$\sum_{i=1}^{k} dy^i \wedge dx^i + \sum_{j=k+1}^{n} dg_j \wedge dy^j = 0.$$

Подставляя сюда выражения

$$dx^i = \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial x^i}{\partial y^\alpha} dy^\alpha, \qquad dg_j = \sum_{\beta=1}^{n} \frac{\partial g_j}{\partial y^\beta} dy^\beta,$$

мы получим

$$\sum_{i=1}^{k} \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial x^i}{\partial y^\alpha} dy^i \wedge dy^\alpha + \sum_{j=k+1}^{n} \sum_{\beta=1}^{n} \frac{\partial g_j}{\partial y^\beta} dy^\beta \wedge dy^j = 0.$$

Сравнивая коэффициенты при $dy^i \wedge dy^j$ $(i \leqslant k < j)$, находим

$$\frac{\partial x^i}{\partial y^j} + \frac{\partial g_j}{\partial y^i} = 0. \tag{5.12}$$

Поскольку функции g_j зависят только от $y^1, \ldots, y^k$, из (5.12) следует, что

$$\frac{\partial^2 x^i}{\partial y^j \partial y^l} = 0 \qquad \text{при } j,\ l > k.$$

Следовательно,

$$x^i = \sum_{j=k+1}^{n} \frac{\partial g_j}{\partial y^i} y^j + c^i, \qquad i = 1, \ldots, k, \tag{5.13}$$

где c^i — функции от $y^1, \ldots, y^k$.

Множество $\{x \mid \mathscr{L}(x) = \mathscr{L}(x_0)\}$ есть множество тех x, для которых $y^i(x) = y^i(x_0)$ $(i = 1, \ldots, k)$. Значит, функции $\partial g_j/\partial y^i$ и c^i в равенстве (5.13) — константы, и множество точек x, для которых $\mathscr{L}(x) = \mathscr{L}(x_0)$, является пересечением некоторой гиперплоскости H с U.

Равенство (5.13) позволяет написать формулу перехода от координат y^i к координатам x^j. Мы можем записать ее в виде

$$\begin{aligned} x^i &= \sum_{j=k+1}^{n} \frac{\partial g_j}{\partial y^i} y^j + c^i, && i = 1, \ldots, k, \\ x^j &= y^j, && j = k+1, \ldots, n. \end{aligned} \tag{5.14}$$

Умножая матрицу Якоби отображения (5.14) на матрицу Якоби отображения (5.11), мы должны получить единичную матрицу. Рассматривая элементы с индексами r, s, где r, $s \leqslant k$, получаем

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{\partial g_i}{\partial x^s} \left(\sum_{j=k+1}^{n} x^j \frac{\partial^2 g_j}{\partial y^i \partial y^s} + \frac{\partial c^r}{\partial y^i} \right) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad r = s, \\ 0, & \text{если} \quad r \neq s. \end{cases}$$

В частности,

$$1 = \det \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^r \partial x^s} \right)_{r,\, s=1,\, \ldots,\, k} \cdot \det \left(\sum_{j=k+1}^{n} x^j \frac{\partial^2 g_j}{\partial y^r \partial y^s} + \frac{\partial c^r}{\partial y^s} \right). \quad (5.15)$$

Рассмотрим теперь пересечение гиперплоскости H с D_k. Пусть π_{n-k} — связная компонента этого пересечения, содержащая x_0. Для завершения доказательства леммы мы должны проверить, что отображение $\mathscr{L}$ постоянно на π_{n-k} и что $r(x) = r^*(x) = k$ для $x \in \pi_{n-k}$. Так как $\pi_{n-k} \subset D_k$, мы знаем, что $r(x) \leqslant k$ на π_{n-k}. Мы докажем, что $r(x) = r^*(x) = k$, если установим, что $r(x) = k$, т. е. что определитель

$$J_k = \det \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^r \partial x^s} \right)_{r,s=1,\, \ldots,\, k} \neq 0 \qquad \text{для всех } x \in \pi_{n-k}.$$

Пусть $x(t)$ — кривая на π_{n-k}, определенная при $0 \leqslant t \leqslant 1$, причем $x(0) = x_0$. Мы хотим показать, что при любом t точка $x(t)$ удовлетворяет приведенным выше условиям. Пусть t_0 — точная верхняя грань множества всех t, для которых

$$\mathscr{L}(x(s)) = \mathscr{L}(x_0) \qquad \text{и} \qquad J_k(x(s)) \neq 0 \text{ при всех } 0 \leqslant s \leqslant t.$$

Тогда ясно, что $\mathscr{L}(x(t)) = \mathscr{L}(x(0))$. Мы покажем, что $J_k(x(t)) \neq 0$, если установим, что функция $J_k(x(s))$ отграничена от нуля, когда s стремится к t. Но, пока $J_k(x(s)) \neq 0$, формула (5.15) дает нам точное выражение для $J_k(x(s))$. Поскольку функции $\partial^2 g_j / \partial y^r \partial y^s$ и $\partial c^r / \partial y^s$ зависят только от $y^1, \ldots, y^k$, которые постоянны, так как образ $\mathscr{L}(x(s))$ состоит из одной точки, и поскольку координаты x^i ограничены, мы можем утверждать, что функция

$$\det \left(\sum_{j=k+1}^{n} x^j \frac{\partial^2 g_j}{\partial y^r \partial y^s} + \frac{\partial c^r}{\partial y^s} \right)$$

ограничена, а значит, J_k отграничена от нуля. Это доказывает лемму 5.1.

Докажем теперь теорему 5.3. Поскольку $\bigwedge^2 (A) \equiv 0$, риманово многообразие M локально изометрично пространству E^n. Это означает, что для любых $p \in E^n$ и $q \in M$ существует диффеоморфизм φ_p некоторой окрестности точки p на некоторую окрестность точки q, который является изометрией. Отображение φ можно продолжить вдоль любой дифференцируемой кривой C конечной длины, для которой $C(0) = p$. Действительно, если $\varphi(C(t))$ определено при $0 \leqslant t < t_0$, то кривая $\varphi \circ C$ в M на интервале $0 \leqslant t < t_0$ имеет конечную длину. Поскольку M полно, существует единственная точка q_{t_0}, такая, что формула $\varphi(C(t_0)) = q_{t_0}$ позволяет получить непрерывную кривую на отрезке $0 \leqslant t \leqslant t_0$. Локальная изометрия позволяет тогда продолжить отображение дальше. Таким образом, любая дифференцируемая кривая конечной длины на E^n определяет некоторое отображение в M. Поскольку E^n односвязно, эти отображения определяют диффеоморфизм φ: $E^n \to M$. Так как M связно и отображение φ является локальной изометрией, то $\varphi(E^n) = M$. Поскольку φ — изометрия, оно является накрывающим отображением. Но M односвязно. Значит, φ есть диффеоморфизм пространства E^n на M. Итак, первая часть теоремы 5.3 доказана.

Для доказательства второй части воспользуемся леммами 5.1 и 5.2. Предположим, что $\varphi(M)$ не является гиперплоскостью в E^{n+1}. Тогда существует по меньшей мере одна точка $x_0 \in M$, в которой ранг сферического отображения отличен от нуля. Поскольку этот ранг $\leqslant 1$ (так как $\bigwedge^2(A) \equiv 0$), он равен в точности единице в точке x_0. Выберем евклидовы координаты $x^1, \ldots, x^{n+1}$ и окрестность U точки $x_0 \in M$ так, чтобы проекция π поверхности $\varphi(U)$ на гиперплоскость $x^{n+1} = 0$ была невырожденной на $\varphi(U)$. Мы можем тогда считать функции $x^1, \ldots, x^n$ [1]) координатами на U. В этих координатах отображение φ имеет вид $\varphi(x^1, \ldots, x^n) = (x^1, \ldots, x^n, f(x^1, \ldots, x^n))$, где f — некоторая дифференцируемая функция. Вектор $\nu_f = (\partial f/\partial x^1, \ldots, \partial f/\partial x^n, -1)$ нормален к поверхности $\varphi(U)$ в каждой точке из $\varphi(U)$. Следовательно, единичный нормальный вектор равен

$$\frac{1}{\|\nu_f\|}\nu_f = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x^1}\right)^2+\ldots+\left(\frac{\partial f}{\partial x^n}\right)^2}}\left(\frac{\partial f}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x^n}, -1\right).$$

Во введенных координатах матрица сферического отображения π_* (рассматриваемого как отображение в E^{n+1}) имеет вид

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\|\nu_f\|}\frac{\partial^2 f}{\partial x^1 \partial x^1} - \frac{1}{\|\nu_f\|^2}\frac{\partial f}{\partial x^1}\frac{\partial \|\nu_f\|}{\partial x^1} & \ldots & \frac{1}{\|\nu_f\|}\frac{\partial^2 f}{\partial x^1 \partial x^n} - \frac{1}{\|\nu_f\|^2}\frac{\partial f}{\partial x^n}\frac{\partial \|\nu_f\|}{\partial x^1} & \frac{-1}{\|\nu_f\|^2}\frac{\partial \|\nu_f\|}{\partial x^1} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{\|\nu_f\|}\frac{\partial^2 f}{\partial x^n \partial x^1} - \frac{1}{\|\nu_f\|^2}\frac{\partial f}{\partial x^1}\frac{\partial \|\nu_f\|}{\partial x^n} & \ldots & \frac{1}{\|\nu_f\|}\frac{\partial^2 f}{\partial x^n \partial x^n} - \frac{1}{\|\nu_f\|^2}\frac{\partial f}{\partial x^n}\frac{\partial \|\nu_f\|}{\partial x^n} & \frac{-1}{\|\nu_f\|^2}\frac{\partial \|\nu_f\|}{\partial x^n} \end{pmatrix}$$

---

[1]) Точнее, $x^1 \circ \pi, \ldots, x^n \circ \pi$. —*Прим. перев.*

Ранг ее совпадает с рангом матрицы

$$\frac{1}{\|\nu_f\|}\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^1\,\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x^1\,\partial x^n} & \frac{-1}{\|\nu_f\|}\frac{\partial\|\nu_f\|}{\partial x^1} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^n\,\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x^n\,\partial x^n} & \frac{-1}{\|\nu_f\|}\frac{\partial\|\nu_f\|}{\partial x^n} \end{pmatrix},$$

а значит, и с рангом матрицы

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^i\,\partial x^j}\right)$$

порядка n, поскольку

$$\frac{\partial\|\nu_f\|}{\partial x^i}=\frac{1}{\|\nu_f\|}\sum\left(\frac{\partial f}{\partial x^k}\right)\frac{\partial^2 f}{\partial x^k\,\partial x^i}.$$

Итак, *ранг сферического отображения совпадает с рангом преобразования Лежандра, определяемого функцией f от $x^1, \ldots, x^n$.* В частности, согласно лемме 5.3, через $\pi\varphi(x_0)$ проходит единственное $(n-1)$-плоское сечение π_{n-1} множества $\pi\varphi(U)$, на котором $\mathscr{L}$ постоянно. Но

$$\mathscr{L}=\left(\frac{\partial f}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x^n}\right),$$

поэтому когда отображение $\mathscr{L}$ постоянно на π_{n-1}, нормальный вектор к поверхности $\varphi(U)$ постоянен вдоль σ_{n-1}, где $\sigma_{n-1} = (\pi\circ\varphi)^{-1}(\pi_{n-1})$. Значит, через $\varphi(x_0)$ проходит единственная $(n-1)$-мерная гиперплоскость P, такая, что ее проекция на $\pi(\varphi(U))$ совпадает с π_{n-1} и $\varphi(\sigma_{n-1})\subset P$. Поскольку φ — *изометрия* (и M может быть отождествлено с E^n), множество $\varphi^{-1}(\varphi(\pi_{n-1}))=\sigma_{n-1}$ представляет собой кусок некоторой гиперплоскости H (в евклидовой геометрии многообразия M), проходящей через x_0, причем отображение φ линейно на σ_{n-1}.

Далее, σ_{n-1} есть открытое подмножество в H и, согласно лемме 5.3, $r^*(x)=1$ на σ_{n-1}. Поэтому $r^*(x)=1$, если x — граничная точка для σ_{n-1} (в H). [Здесь r и r^* — ранги сферического отображения $\mathfrak{n}$.] Применяя приведенные выше рассуждения к точке x, мы убедимся в том, что через x проходит единственное $(n-1)$-плоское сечение σ'_{n-1}, образ которого при отображении φ лежит в гиперплоскости из E^{n+1}. Из единственности следует, что $(n-1)$-мерная гиперплоскость, содержащая σ'_{n-1}, совпадает с H.

Пусть S — множество точек x из H, обладающих окрестностью (в H), которую φ отображает в гиперплоскость. Тогда, как мы уже видели, множество S и открыто, и замкнуто в H. Мы заключаем отсюда, что ограничение отображения φ на H является линейным отображением гиперплоскости H на $(n-1)$-мерную гиперплоскость из E^{n+1}. Пусть z — точка, не лежащая на H, для которой $r^*(z)=1$. Тогда существует гиперплоскость H', проходящая через z и обладающая теми же свойствами. В силу единственности H и H' они не могут пересечься. Значит, они параллельны. Итак, мы показали, что *через каждую точку* $x \in M$ $(=E^n)$, *в которой* $r^*(x)=1$, *проходит единственная гиперплоскость* H_x, *на которой отображение* φ *линейно, и все такие гиперплоскости параллельны.*

Рассмотрим теперь точку z, в которой $r^*(z)=0$. Пусть H_z — гиперплоскость, проходящая через z и параллельная описанным выше гиперплоскостям H_x. Тогда $r^*\equiv 0$ на H_z. Действительно, в противном случае существует точка $y \in H_z$, в которой $r^*(y)=1$. Но тогда $r^* \equiv 1$ на H_y. Поскольку H_y и H_z должны совпадать, мы получаем противоречие. Итак, $r^*\equiv 0$ на H_z, т. е. $r\equiv 0$ в некоторой окрестности гиперплоскости H_z. Но это означает, что сферическое отображение постоянно в некоторой окрестности гиперплоскости H_z. Таким образом, φ линейно на H_z. Тем самым мы показали, что через каждую точку $q \in M$ проходит единственная гиперплоскость H_q, ограничение на которую отображения φ линейно, причем гиперплоскости, проходящие через разные точки, либо параллельны, либо совпадают. Если выбрать евклидовы координаты $y^1, \ldots, y^n$ так, чтобы эти гиперплоскости задавались уравнениями $y^n=\mathrm{const}$, то отображение φ примет требуемый вид, что и доказывает теорему 5.3.

Перейдем теперь к доказательству теоремы 5.4. Для этого удобно ввести абсолютную кривизну $|K|$. Грубо говоря, для любого множества $D \subset M$ интеграл $\int\limits_D |K|\,dA$ (где dA — элемент объема, определяемый римановой метрикой на M) измеряет объем множества $\mathfrak{n}(D)$ на S^n, причем точки на S^n считаются k раз, если они накрыты k раз сферическим отображением $\mathfrak{n}$. Точка $x \in M$ называется крайней точкой (относительно φ), если $\varphi(M)$ целиком лежит по одну сторону от касательной к $\varphi(M)$ гиперплоскости в точке x. Обозначим множество всех крайних точек из M через $\mathscr{E}$. Ясно, что $\mathscr{E}$ — наполнимое множество, так что мы можем рассмотреть $\int\limits_{\mathscr{E}} |K|\,dA$.

Лемма 5.4. *Пусть φ — погружение компактного n-мерного многообразия M в E^{n+1} и $\mathscr{E}$ — множество крайних точек из M.*

Тогда

$$\int\limits_{\mathscr{E}} |K|\, dA \geqslant \varkappa_n, \tag{5.15'}$$

где $\varkappa_n$ — объем единичной сферы S^n.

Доказательство. Для доказательства леммы 5.4 удобно рассмотреть вместо сферы S^n проективное пространство P^n. Напомним, что P^n есть множество всех одномерных подпространств из E^{n+1}. Существует естественное отображение $\rho\colon S^n \to P^n$, сопоставляющее каждому единичному вектору u порождаемое им одномерное подпространство. Если множество $D \subset P^n$ достаточно мало, то $\rho^{-1}(D)$ распадается в S^n на две компоненты $D_1 \cup D_2$, причем $\rho(D_1) = \rho(D_2) = D$. Определив объем множества D как объем любого из множеств D_1, D_2 (их объемы равны), мы получим объемную плотность в P^n. Полный объем многообразия P^n с этой плотностью равен $\varkappa_n/2$.

Заметим теперь, что ограничение на $\mathscr{E}$ отображения $\rho \circ \mathfrak{n}$ (где $\mathfrak{n}$ — сферическое отображение) накрывает каждую точку из P^n по крайней мере дважды. Действительно, пусть $u \in E^{n+1}$ — произвольный единичный вектор. Рассмотрим на M функцию (u, φ). Поскольку многообразие M компактно, она достигает максимума и минимума в точках x_1 и x_2. Эти две точки не могут совпадать, так как в противном случае гиперповерхность $\varphi(M)$ лежала бы в n-мерной гиперплоскости $(\varphi, u) = \mathrm{const}$, что невозможно, поскольку многообразие M компактно, а φ — погружение. В каждой из этих точек $d(u, \varphi) = (u, d\varphi) = 0$, так что u нормален к M в x_1 и x_2. Следовательно, $\rho(u) = \rho \circ \mathfrak{n}(x_1) = \rho \circ \mathfrak{n}(x_2)$ и $\rho(u)$ накрывается (по крайней мере) дважды.

Далее, $\int\limits_{\mathscr{E}} |K|\, dA = \int\limits_{\mathscr{E}'} |K|\, dA$, где $\mathscr{E}'$ — множество точек из $\mathscr{E}$, в которых $|K| > 0$. С другой стороны, $\int\limits_{\mathscr{E}'} |K|\, dA$ равен полному объему множества $\rho \circ \mathfrak{n}(\mathscr{E}')$ (с учетом кратности) и

$$\operatorname{vol}(\rho \circ \mathfrak{n}(\mathscr{E}')) \geqslant \operatorname{vol}(\rho \circ \mathfrak{n}(\mathscr{E})) - \operatorname{vol}(\rho \circ \mathfrak{n}(\mathscr{E}'')),$$

где $\mathscr{E}''$ — множество точек, в которых $|K| = 0$. Но $\operatorname{vol}(\rho \circ \mathfrak{n}(\mathscr{E}'')) = 0$ по теореме Сарда, поскольку K есть якобиан отображения $\mathfrak{n}$. Таким образом,

$$\int\limits_{\mathscr{E}} |K|\, dA \geqslant 2\left(\frac{1}{2}\varkappa_n\right) = \varkappa_n,$$

что и доказывает лемму 5.4. Читатель может в качестве упражнения проверить, что неравенство (5.15′) в действительности является равенством.

Из (5.15′) немедленно следует, что $\int\limits_M |K|\, dA \geqslant \varkappa_n$.

Теорема 5.6 (Чжэнь—Лашоф). *Пусть φ — погружение компактного n-мерного многообразия M в E^{n+1}. Если*

$$\int\limits_M |K|\, dA = \varkappa_n, \tag{5.16}$$

то $\varphi(M)$ есть выпуклая гиперповерхность, т. е. $\varphi(M)$ лежит по одну сторону от любой своей касательной гиперплоскости.

Доказательство. Можно переформулировать заключение теоремы, сказав, что любая точка из M является крайней, т. е. $\mathscr{E} = M$. Ввиду неравенства (5.15′) равенство (5.16) означает, что $\int\limits_{M-\mathscr{E}} |K|\, dA = 0$. Поскольку $\mathscr{E}$ — замкнутое подмножество в M и, значит, $M - \mathscr{E}$ открыто, для того чтобы интеграл $\int\limits_{M-\mathscr{E}} |K|\, dA$ обращался в нуль, необходимо, чтобы $|K| \equiv 0$ в $M - \mathscr{E}$. Условие $|K|(x) \neq 0$ означает, что $r(x) = n$, где r — ранг сферического отображения. Поэтому теорема 5.6 будет доказана, если мы установим, что неравенство $M - \mathscr{E} \neq \varnothing$ влечет за собой существование точки $x \in M - \mathscr{E}$, для которой $r(x) = n$. Таким образом, достаточно доказать следующее утверждение:

Лемма 5.5. *Если существует точка $x \in M - \mathscr{E}$, в которой $r(x) = k$ ($< n$), то существует точка $x'' \in M - \mathscr{E}$, в которой $r(x'') > k$.*

Тогда, предполагая, что $M - \mathscr{E} \neq \varnothing$, мы шаг за шагом построим точку $x \in M - \mathscr{E}$, в которой $r(x) = n$.

Для доказательства леммы 5.5 заметим, что если $r^*(x) > k$, то доказывать нечего. Действительно, поскольку $M - \mathscr{E}$ в этом случае открыто, существует точка $x' \in M - \mathscr{E}$, в которой $r(x') > k$. Поэтому достаточно рассматривать случай, когда $r(x) = r^*(x) = k$. Применим тогда лемму 5.1. Как и при доказательстве теоремы 5.3, можно выбрать малую окрестность точки x и подходящие евклидовы координаты в E^{n+1} так, чтобы ранг сферического отображения совпадал с рангом преобразования Лежандра $(\partial f/\partial x^1, \ldots, \partial f/\partial x^n)$. Из леммы 5.1 вытекает, что существует $(n-k)$-мерная гиперплоскость H_{n-k} в E^{n+1}, обладающая следующими свойствами:

1) $\varphi(x) \in H_{n-k} \subset H$, где H — гиперплоскость, касающаяся M в точке x;

2) $\varphi(M) \cap H_{n-k}$ содержит открытую окрестность U точки $\varphi(x)$ (в H_{n-k}), на которой $r = r^* \equiv k$;

3) $\mathfrak{n}(x) = \mathfrak{n}(x^*)$ для всех x^*, для которых $\varphi(x^*) \in U$, так что касательная гиперплоскость в точке x^* совпадает с H.

Пусть W — максимальное открытое подмножество из H_{n-k}, удовлетворяющее условиям 2) и 3). Мы знаем, что $W \neq H_{n-k}$, поскольку M компактно. Пусть y' — точка границы множества W. Тогда мы можем выбрать последовательность точек x_i, таких, что $\varphi(x_i) \in W$, сходящуюся к точке x', в которой $\varphi(x') = y'$. По непрерывности $\mathfrak{n}(x_i) \to \mathfrak{n}(x')$, и, значит, касательной гиперплоскостью в точке x' будет H. В частности, $x' \in M - \mathscr{E}$.

Покажем, что $r^*(x') > k$. Поскольку $x' = \lim x_i$, мы знаем, что $r^*(x') \geqslant k$. Если бы $r^*(x') = k$, то мы смогли бы выбрать окрестность точки x' и подходящие координаты в E^{n+1} и снова применить лемму 5.1. Поскольку $x' \in \overline{\pi}_{n-k}$ и $r(x') = k$, лемма 5.1, примененная к x', показала бы (вспомним единственность), что $y' \in W$. Мы приходим к противоречию. Следовательно, $r^*(x') > k$. Это означает, что в достаточно малой окрестности точки x' (и, следовательно, в $M - \mathscr{E}$) существует точка x'', в которой $r(x'') > k$. Тем самым лемма 5.5 и теорема 5.6 доказаны. Обращение теоремы 5.6 мы оставляем читателю в качестве упражнения.

Выведем теперь из теоремы 5.6 теорему 5.4. Очевидно, что из 2) следует 1). Покажем, что из 1) следует 2). Мы имеем

$$\int |K|\, dA = \pm \int K\, dA = 1 \cdot \varkappa_n,$$

согласно равенству (3.8) гл. III. Итак, теорема 5.4 следует непосредственно из теоремы 5.6.

§ 6. ПОВЕРХНОСТИ

Применим результаты предыдущего параграфа к изучению двумерных ориентированных римановых многообразий и погружений двумерных многообразий в E^3. Прежде всего мы выпишем для случая двумерных многообразий различные формулы, полученные в §§ 2 и 3. Группа $O^+(2)$ есть просто окружность, так что многообразие $\mathcal{O}(M)$ трехмерно. Локальные координаты на $\mathcal{O}(M)$ определяются выбором координатной карты (U, h) на M и дифференцируемым выбором реперов в каждой точке из U, т. е. заданием такого отображения ψ: $U \to \pi^{-1}(U)$, что $\pi \circ \psi = \mathrm{id}$. Напишем $\psi(x) = (x;\ f_1(x),\ f_2(x))$ (где f_1, f_2 — положительно ориентированный ортонормированный базис пространства $T_x(M)$). Любой другой положительно ориентированный ортонормированный базис e_1, e_2 пространства $T_x(M)$ имеет вид

$$\begin{aligned} e_1 &= (\cos\tau) f_1(x) + (\sin\tau) f_2(x), \\ e_2 &= -(\sin\tau) f_1(x) + (\cos\tau) f_2(x). \end{aligned} \tag{6.1}$$

Параметр τ определяется этими формулами только по модулю 2π. Если x^1, x^2 — локальные координаты на U, то x^1, x^2, τ — локальные координаты на $\pi^{-1}(U)$ (правда, τ не вполне законно). Формы θ^1, θ^2 определяются формулами

$$\begin{aligned} \langle X, \theta^1\rangle &= (\pi_* X, e_1), \\ \langle X, \theta^2\rangle &= (\pi_* X, e_2), \end{aligned} \tag{6.2}$$

где X — касательный вектор в точке $(x;\, e_1,\, e_2)$ [см. формулы (3.1) и (3.5), где ρ — тождественное отображение].

Мы имеем (см. (3.4))

$$\theta^1 \wedge \theta^2 = \pi^* dA, \tag{6.3}$$

где dA — ориентированный элемент площади многообразия M. Удобно выразить формы θ^1 и θ^2 в терминах локальных координат. Пусть U, x^1, x^2 и ψ — такие же, как выше. Тогда $\overline{\theta^1} = \psi^*(\theta^1)$ и $\overline{\theta^2} = \psi^*(\theta^2)$ — формы на U. При каждом $x \in U$ формы $\overline{\theta^1_x}$, $\overline{\theta^2_x}$ образуют дуальный базис к $f_1(x)$, $f_2(x)$. Действительно, для любого $Y \in T_x(M)$ имеем

$$\begin{aligned} \langle Y, \overline{\theta^1}\rangle &= \langle Y, \psi^*\theta^1\rangle = \\ &= \langle \psi_* Y, \theta^1_{(x;\, f_1,\, f_2)}\rangle = \\ &= (\pi_* \circ \psi_* Y, f_1) = \\ &= (Y, f_1), \text{ поскольку } \pi \circ \psi = \mathrm{id}. \end{aligned}$$

Итак, $\langle Y, \overline{\theta^1}\rangle = (Y, f_1)$ и $\langle Y, \overline{\theta^2}\rangle = (Y, f_2)$. Пусть $\alpha^1 = \pi^*\overline{\theta^1}$ и $\alpha^2 = \pi^*\overline{\theta^2}$. Для любого $X \in T_{(x;\, e_1,\, e_2)}(\mathcal{O}(M))$ имеем $\langle X, \alpha^1\rangle = (\pi_* X, f_1)$ и $\langle X, \alpha^2\rangle = (\pi_* X, f_2)$, в то время как $\langle X, \theta^1\rangle = (\pi_* X, e_1)$ и $\langle X, \theta^2\rangle = (\pi_* X, e_2)$. Сравнивая с (6.1) и (6.2), получаем

$$\begin{aligned} \theta^1 &= (\cos\tau)\,\alpha^1 + (\sin\tau)\,\alpha^2, \\ \theta^2 &= -(\sin\tau)\,\alpha^1 + (\cos\tau)\,\alpha^2. \end{aligned} \tag{6.4}$$

Если риманова метрика многообразия M индуцирована погружением его в евклидово пространство, то на $\mathcal{O}(M)$ существует единственная форма Θ^{12}, такая, что (см. стр. 268—269.—*Перев.*)

$$\begin{aligned} d\theta^1 &= \Theta^{12} \wedge \theta^2, \\ d\theta^2 &= -\Theta^{12} \wedge \theta^1. \end{aligned} \tag{6.5}$$

Сейчас мы дадим явное выражение формы Θ^{12} в терминах локальных координат. Построим локальные формы $\Theta^{12\prime}$, удовлетворяющие уравнениям $d\theta^1 = \Theta^{12\prime} \wedge \theta^2$ и $d\theta^2 = -\Theta^{12\prime} \wedge \theta^1$. Тогда можно утверждать, что $\Theta^{12\prime} = \Theta^{12}$, поскольку уравнение (6.5) определяет форму Θ^{12} однозначно. Эта локальная конструкция позволяет доказать существование формы Θ^{12} для любого двумерного риманова многообразия без предположения о том, что риманова метрика индуцирована погружением. Действительно, если мы построим Θ^{12} локально на $\pi^{-1}(U)$, то (в силу единственности) формы Θ^{12}, построенные над разными окрестностями U, будут согласованы и, следовательно, определят глобальную форму. Воспользуемся локальными выражениями (6.4) для форм θ^1 и θ^2, чтобы построить Θ^{12}. Определим для этого функции k_1 и k_2 на $\mathcal{O}(M)$, полагая

$$k_1 = \bar{k}_1 \circ \pi \quad \text{и} \quad k_2 = \bar{k}_2 \circ \pi, \tag{6.6}$$

где

$$d\overline{\theta^1} = \bar{k}_1 \overline{\theta^1} \wedge \overline{\theta^2} \quad \text{и} \quad d\overline{\theta^2} = \bar{k}_2 \overline{\theta^1} \wedge \overline{\theta^2}.$$

Тогда

$$d\alpha^1 = k_1 \alpha^1 \wedge \alpha^2, \qquad d\alpha^2 = k_2 \alpha^1 \wedge \alpha^2$$

и

$$d\theta^1 = -(\sin\tau)\, d\tau \wedge \alpha^1 + (\cos\tau)\, d\tau \wedge \alpha^2 + (k_1 \cos\tau + k_2 \sin\tau)\, \alpha^1 \wedge \alpha^2,$$

$$d\theta^2 = -(\cos\tau)\, d\tau \wedge \alpha^1 - (\sin\tau)\, d\tau \wedge \alpha^2 + (-k_1 \sin\tau + k_2 \cos\tau)\, \alpha^1 \wedge \alpha^2.$$

Поскольку $\alpha^1 \wedge \alpha^2 = \theta^1 \wedge \theta^2$, прямая проверка показывает, что форма

$$\begin{aligned}\Theta^{12} &= d\tau + k_1\alpha^1 + k_2\alpha^2 = \\ &= d\tau + (k_1 \cos\tau + k_2 \sin\tau)\, \theta^1 + (-k_1 \sin\tau + k_2 \cos\tau)\, \theta^2\end{aligned} \tag{6.7}$$

удовлетворяет уравнениям (6.5).

Форма Θ^{12} допускает простую геометрическую интерпретацию. Рассмотрим сначала случай, когда риманова метрика индуцирована погружением многообразия M в трехмерное евклидово пространство. Тогда мы имеем векторнозначные функции Φ, E^1, E^2, E^3, определенные на $\mathcal{O}(M)$ формулами

$$\begin{aligned}\Phi &= \varphi \circ \pi, \\ E_1(x, e_1, e_2) &= \varphi_{*x}(e_1), \\ E_2(x, e_1, e_2) &= \varphi_{*x}(e_2), \\ E_3(x, e_1, e_2) &= \mathrm{n}(x).\end{aligned}$$

Формы θ^i и Θ^{ij} задаются равенствами

$$\theta^i = (d\Phi, E^i), \quad \Theta^{ij} = (dE^i, E^j),$$

откуда

$$\begin{aligned}d\Phi &= \theta^1 E^1 + \theta^2 E^2, \\ dE^i &= \sum \Theta^{ij} E^j.\end{aligned}$$

Пусть γ — дифференцируемая кривая на M. Дифференцируемое семейство единичных векторов $e_1(\cdot)$ вдоль γ (где $e_1(s) \in T_{\gamma(s)}(M)$) можно рассматривать как кривую C в $\mathcal{O}(M)$, причем $\pi \circ C = \gamma$. [Именно, $C(s) = (\gamma(s); e_1(s), e_2(s))$.] Назовем семейство $e_1(s)$ *параллельным*, если приращение единичного вектора $e_1(s)$ при изменении s нормально к поверхности $\varphi(M)$ в E^3. Другими словами, семейство $e_1(s)$ параллельно, если вектор

$$\frac{d\varphi_{*\gamma(s)}(e_1(s))}{ds}$$

нормален к $\varphi(M)$ при всех s. Посмотрим, как можно записать это условие. Пусть X_s — касательный вектор кривой C в точке $C(s)$. Тогда по определению формы dE^1

$$\frac{d}{ds}\varphi_{*\gamma(s)}(e_1(s)) = \langle X_s, dE^1\rangle.$$

Заметим, что $(\langle X_s, dE^1\rangle, E^1(C(s))) = 0$ и $(\langle X_s, dE^1\rangle, E^2(C(s))) = \Theta^{12}$. Но значения функций E^1 и E^2 порождают касательное пространство к поверхности $\varphi(M)$. Поэтому условие ортогональности вектора $\langle X_s, dE^1\rangle$ к $\varphi(M)$ можно записать в виде $\langle X_s, \Theta^{12}\rangle = 0$. Итак, *семейство $e_1(s)$ параллельно вдоль γ тогда и только тогда, когда $\langle X_s, \Theta^{12}\rangle = 0$.*

По аналогии, семейство единичных векторов вдоль кривой γ на любом двумерном римановом многообразии мы будем называть параллельным, если $\langle X_s, \Theta^{12}\rangle = 0$. Пользуясь этим определением параллельного переноса [1]), мы можем доказать следующее утверждение:

Теорема 6.1. *Пусть γ — дифференцируемая кривая на M и e_1 — единичный вектор из $T_{\gamma(0)}(M)$. Тогда существует единственное параллельное семейство единичных векторов $e_1(s)$ вдоль γ, такое, что $e_1(0) = e_1$. Если e_1' — другой единичный вектор из $T_{\gamma(0)}(M)$, образующий с вектором e_1 угол σ, то вектор $e_1'(s)$ образует с вектором $e_1(s)$ тот же угол σ при каждом s.*

Ясно, что достаточно (разбив, если необходимо, кривую γ на малые куски) доказать теорему 6.1 для кривой γ, целиком лежащей в координатной окрестности. Тогда мы можем воспользоваться локальным выражением для Θ^{12}.

Перепишем условие параллельного переноса вдоль $\gamma(s)$. В терминах локальных координат единичный вектор $e_1(s)$ определяет-

[1]) Параллельным переносом вектора $e_0 \in T_{\gamma(0)}(M)$ вдоль кривой γ в точку $\gamma(s)$ называется вектор $e(s) \in T_{\gamma(s)}(M)$ параллельного семейства векторов $e(s)$ вдоль кривой γ, для которого $e(0) = e_0$.— *Прим. перев.*

ся функцией $\tau(s)$, где

$$e_1(s) = \cos\tau(s)\, f_1(\gamma(s)) - \sin\tau(s)\, f_2(\gamma(s)).$$

Тогда

$$\begin{aligned}\langle X_s, \Theta^{12}\rangle &= \langle X_s, d\tau\rangle + \langle X_s, k_1\alpha^1 + k_2\alpha^2\rangle = \\ &= \frac{d\tau(s)}{ds} + \langle X_s, \pi^*(k_1\theta^1 + k_2\theta^2)\rangle = \\ &= \frac{d\tau(s)}{ds} - \langle \pi_* X_s, k_1\theta^1 + k_2\theta^2\rangle.\end{aligned}$$

Но $\pi_* X_s = Y_s$ есть касательный вектор кривой γ в точке $\gamma(s)$. Таким образом,

$$\langle X_s, \Theta^{12}\rangle = \frac{d\tau(s)}{ds} - F_\gamma(s),$$

где $F_\gamma(s) = \langle Y_s, \overline{k}_1\overline{\theta^1} + \overline{k}_2\overline{\theta^2}\rangle$ — функция, зависящая только от γ. В частности, семейство $e_1(s)$ параллельно тогда и только тогда, когда

$$\frac{d\tau(s)}{ds} = F_\gamma(s).$$

Из этого уравнения мы видим, что для заданного вектора $e_1(0)$ всегда существует единственное параллельное семейство $e_1(s)$, начинающееся с $e_1(0)$. Кроме того, если $e_1'(0)$ — другой единичный вектор в точке $\gamma(0)$, то угол между векторами $e_1(s)$ и $e_1'(s)$ равен углу между векторами $e_1(0)$ и $e_1'(0)$. Таким образом, параллельный перенос сохраняет углы, что и доказывает теорему 6.1.

Заметим, что если M (локально) изометрично евклидову пространству, то мы можем взять $f_1 = \partial/\partial x^1$ и $f_2 = \partial/\partial x^2$, так что $\overline{\theta}^1 = dx^1$ и $\overline{\theta}^2 = dx^2$. В этом случае $\overline{k}_1 = \overline{k}_2 = 0$, и τ есть угол, который образует вектор e_1 с $\partial/\partial x^1$, т. е. с осью x_1. Таким образом, $\Theta^{12} = -d\tau$. Поэтому условие параллельного переноса принимает в этом случае вид $d\tau/ds = 0$, что совпадает с обычным определением параллельности в евклидовой геометрии.

Пусть M — двумерное риманово многообразие. С любой кривой γ на M очевидным образом ассоциируется векторное поле вдоль γ: в качестве $e_1(s)$ берется единичный касательный вектор кривой γ в точке $\gamma(s)$. Таким образом, для любой кривой γ на M мы получаем кривую на $\mathcal{O}(M)$, которую мы обозначим $\widetilde{\gamma}$. [Здесь $\widetilde{\gamma}(s) = (\gamma(s);\ e_1(s),\ e_2(s))$, а $e_1(s)$ — касательный вектор к $\gamma(s)$.]

Мы назовем форму $\widetilde{\gamma}^*(\Theta^{12})$ *формой геодезической кривизны кривой* γ. [В евклидовом случае это есть в точности форма $\widetilde{\gamma}^*(d\tau)$, являющаяся обыкновенной кривизной, см. формулу (4.8).]

Рассмотрим кривые с нулевой геодезической кривизной, т. е. кривые, касательные векторы которых параллельны.

Теорема 6.2. *Касательные векторы $\gamma'(s)$ кривой γ на M (параметризованной длиной дуги) образуют параллельное семейство тогда и только тогда, когда кривая γ является геодезической.*

Доказательство. Прежде всего запишем условие того, что касательный вектор X к $\mathcal{O}(M)$ служит касательным вектором кривой $\tilde{\gamma}$. Поскольку $\pi \circ \tilde{\gamma}(s) = \gamma(s)$, мы имеем $\pi_* X = \gamma'(s)$. С другой стороны, $\tilde{\gamma}(s) = (\gamma(s);\ \gamma'(s),\ e_2(s))$, откуда $(\pi_* X, \gamma'(s)) = (\pi_* X, e_1(s)) = 1$ и $(\pi_* X, e_2(s)) = 0$. Таким образом, $\langle X, \theta^1 \rangle = 1$ и $\langle X, \theta^2 \rangle = 0$. Обратно, если $\langle X, \theta^2 \rangle = 0$, то, как легко видеть, X служит касательным вектором некоторой кривой $\tilde{\gamma}(s)$. Если вдобавок семейство $\gamma'(s)$ параллельно, то мы должны иметь $\langle X, \Theta^{12} \rangle = 0$. Итак, если вектор X служит касательным вектором кривой $\tilde{\gamma}$ и семейство $\gamma'(s)$ параллельно, то

$$\langle X, \theta^1 \rangle = 1, \qquad \langle X, \theta^2 \rangle = 0, \qquad \langle X, \Theta^{12} \rangle = 0. \tag{6.8}$$

Поскольку формы θ^1, θ^2 и Θ^{12} линейно независимы, уравнения (6.8) определяют векторное поле X на $\mathcal{O}(M)$. Для любой кривой γ семейство γ' будет параллельным тогда и только тогда, когда семейство $\tilde{\gamma}'$ удовлетворяет уравнениям (6.8).

Мы можем отождествить $\mathcal{O}(M)$ с множеством единичных касательных (или кокасательных) векторов многообразия M, поскольку e_2 определяется по e_1. Таким образом, мы имеем отображение $\iota\colon \mathcal{O}(M) \to T^*(M)$. Из определений очевидно, что $\iota^*\theta = \theta^1$, где θ — каноническая форма на $T^*(M)$ (см. теорему 7.1 гл. III). Множество единичных векторов есть поверхность постоянной энергии $H = 1$. Согласно принципу наименьшего действия (см. равенство (3.8) гл. IV), геодезическая пульверизация касается $\mathcal{O}(M)$ (где $\mathcal{O}(M)$ рассматривается как подмногообразие в $T^*(M)$) и определяется уравнениями $\langle X, \theta^1 \rangle = 1$ и $X \lrcorner\, \iota^* d\theta = X \lrcorner\, d\theta^1 = 0$. Но $d\theta^1 = \Theta^{12} \wedge \theta^2$, так что равенство $X \lrcorner\, d\theta^1 = 0$ эквивалентно равенствам $\langle X, \theta^2 \rangle = \langle X, \Theta^{12} \rangle = 0$. Таким образом, уравнения (6.8) эквивалентны уравнениям, определяющим геодезическую пульверизацию, что и доказывает теорему 6.2.

Согласно уравнению (5.10),

$$d\Theta^{12} = -(A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21})\, \theta^1 \wedge \theta^2.$$

Учитывая (5.9), мы можем написать

$$d\Theta^{12} = -\pi^*(K dA), \tag{6.9}$$

где K — гауссова кривизна.

Пусть D — область с регулярной границей в M, и пусть ψ — отображение некоторой окрестности замыкания $\bar{D}$ в $\mathcal{O}(M)$, причем $\pi \circ \psi = \mathrm{id}$. Тогда по теореме Стокса

$$\int_{\partial D} \psi^*(\Theta^{12}) = \int_D \psi^* \pi^* K\, dA = -\int_D K\, dA. \tag{6.10}$$

Применим формулу (6.10) к отображению ψ, которое строится следующим образом. Пусть Y — векторное поле на компактном многообразии M, обращающееся в нуль только в конечном числе точек $p_1, \ldots, p_k$. Если $Y_x \neq 0$ в точке $x \in M$, то положим $e_1(x) = Y_x/\|Y_x\|$ и $\psi(x) = (x;\, e_1(x),\, e_2(x))$. Вокруг каждой точки p_i выберем такую карту (U_i, h_i), $h_i(p_i) = (0, 0)$, что окрестность U_i не содержит других точек p_j $(j \neq i)$. Пусть C_r — окружность радиуса r на плоскости и $\gamma_{i,r} = h_i^{-1}(C_r)$. [Радиус r предполагается столь малым, что окружность C_r лежит в $h_i(U_i)$.] Положим $D = M - \tilde{U}_i$, где $\tilde{U}_i$ — внутренность окружности $\gamma_{i,r}$. Мы должны вычислить $\int\limits_{\gamma_{i,r}} \psi^*(\Theta^{12})$, причем кривая $\gamma_{i,r}$ проходится по, а не против часовой стрелки. Введем для этого вблизи точки p_i ортонормированные реперы, определяемые координатами x^1, x^2. Тогда мы имеем координаты x^1, x^2, τ в $\mathcal{O}(M)$, где $\tau(x, e_1, e_2)$ есть угол, образованный вектором $e_1(x)$ с вектором $\left.\frac{\partial}{\partial x^1}\right|_x$. Таким образом (ориентируя $\gamma_{i,r}$ по часовой стрелке), имеем

$$-\int_{\gamma_{i,r}} d\tau(e_1(s)) = 2\pi \cdot (\text{индекс поля } Y \text{ в точке } p_i).$$

Но $\psi^*\Theta^{12} = \psi^* d\tau + \psi^*(k_1\alpha^1 + k_2\alpha^2)$, откуда

$$-\int_{\gamma_{i,r}} \psi^*\Theta^{12} = 2\pi \cdot (\text{индекс поля } Y \text{ в точке } p_i) + \int_{\gamma_{i,r}} (\bar{k}_1\bar{\theta}^1 + \bar{k}_2\bar{\theta}^2).$$

При $r \to 0$ второй член справа тоже стремится к нулю, а в правой части равенства (6.10) $\int\limits_D \to \int\limits_M$. Итак, мы доказали следующее:

Пусть Y — векторное поле, обращающееся в нуль только в конечном числе точек $p_1, \ldots, p_k$. Тогда

$$\sum_i \mathrm{ind}_{p_i}(Y) = \frac{1}{2\pi} \int_M K\, dA. \tag{6.11}$$

В частности, сумма индексов векторного поля не зависит от векторного поля, а полный интеграл кривизны не зависит от римановой метрики.

Так, например, если $M = S^2$, то векторное поле, касательное к меридианам, обращается в нуль только на северном и южном полюсах, и индекс его в этих точках равен $+1$. Поэтому, согласно (6.11), сумма индексов *любого* векторного поля на S^2 равна двум. (В частности, на S^2 нельзя построить векторное поле, нигде не обращающееся в нуль.) Кроме того, формула (6.11) показывает, что независимо от выбора римановой метрики на S^2 мы имеем

$$\int_{S^2} K\,dA = 4\pi.$$

Аналогично, если M — тор, то мы можем построить на нем векторное поле, нигде не обращающееся в нуль. Значит, интеграл в (6.11) равен нулю.

Упражнение 6.1. Пусть M — тор с угловыми координатами φ_1 и φ_2 (определенными по модулю 2π). Обозначим через f погружение $M \to E^3$, определяемое формулами

$$x_1 = (2+\cos\varphi_1)\cos\varphi_2,$$
$$x_2 = (2+\cos\varphi_1)\sin\varphi_2,$$
$$x_3 = \sin\varphi_1.$$

1. Найти риманову метрику на M, индуцированную погружением f, т. е. вычислить $(\partial/\partial\varphi_1,\ \partial/\partial\varphi_1)_p$, $(\partial/\partial\varphi_1,\ \partial/\partial\varphi_2)_p$ и $(\partial/\partial\varphi_2,\ \partial/\partial\varphi_2)_p$ для всех $p \in M$. (Эти выражения могут быть заданы как функции от φ_1 и φ_2.) Пусть e_1, e_2 — векторные поля, полученные ортонормированием полей $\partial/\partial\varphi_1$, $\partial/\partial\varphi_2$. Найти явный вид полей e_1 и e_2.

2. Найти полную площадь тора в этой римановой метрике.

3. Пользуясь векторными полями e_1 и e_2, описанными в п. 1, мы можем ввести (угловые) координаты φ_1, φ_2 и τ на $\mathcal{O}(M)$. В терминах этих координат найти явные выражения для векторнозначных функций Φ, E^1, E^2, E^3 на $\mathcal{O}(M)$. (Каждая из этих векторнозначных функций должна быть задана в терминах стандартного базиса трехмерного евклидова пространства, т. е. в виде тройки функций от φ_1, φ_2 и τ.) Так, например,

$$\Phi(\varphi_1, \varphi_2, \tau) = ((2+\cos\varphi_1)\cos\varphi_2,\ (2+\cos\varphi_1)\sin\varphi_2,\ \sin\varphi_1).$$

Каковы соответствующие выражения для E^1, E^2 и E^3?

4. Найти явные выражения для форм θ^1, θ^2 и Θ^{12} на $\mathcal{O}(M)$ в терминах $d\varphi_1$, $d\varphi_2$ и $d\tau$.

5. Найти гауссову кривизну K многообразия M. (Снова K может быть задана как функция от φ_1 и φ_2.) В каких точках из M гауссова кривизна положительна, а в каких отрицательна?

6. На римановом многообразии линейные дифференциальные формы очевидным образом отождествляются с векторными полями [путем отождествления пространства $T_x^*(M)$ с $T_x(M)$, индуцированного скалярным произведением в $T_x(M)$]. Если g — функция, то векторное поле, ассоциированное

с формой dg, обозначается символом $\operatorname{grad} g$. Пусть M — тор с определенной выше римановой метрикой, и пусть, как и раньше, x_1 — функция, определенная формулой $x_1(\varphi_1, \varphi_2) = (2 + \cos\varphi_1)\cos\varphi_2$. Показать, что векторное поле $X = \operatorname{grad} x_1$ обращается в нуль ровно в четырех точках, и вычислить его индекс в каждой из этих точек.

Теперь мы дадим другой способ вычисления целого числа, фигурирующего в (6.11). Пусть C^1 и C^2 — две кривые на $\mathcal{O}(M)$, причем $\pi\circ C^1 = \pi\circ C^2$. Пусть $C^1(s) = (\gamma(s);\ e_1(s),\ e_2(s))$, а $C^2(s) = (\gamma(s);\ f_1(s),\ f_2(s))$. Предположим, что угол между $e_1(s)$ и $f_1(s)$ задается (локально) функцией $\sigma(s)$. В терминах локальной системы координат на $\mathcal{O}(M)$ мы имеем $\tau(C^1(s)) = \tau(C^2(s)) + \sigma(s)$. Если X_s^1 и X_s^2 — касательные векторы этих двух кривых, то

$$\langle X_s^1,\ \Theta^{12}\rangle = \langle X_s^2,\ \Theta^{12}\rangle + \frac{d\sigma(s)}{ds}. \qquad (6.12)$$

Применим это замечание к следующей ситуации. Пусть D — область, целиком лежащая в некоторой координатной окрестности U, причем границей ее служит простая замкнутая кривая γ. Пусть $\psi\colon U \to \mathcal{O}(M)$ — отображение, полученное ортонормированием полей $\partial/\partial x^1$, $\partial/\partial x^2$. Положим

$$C^1(s) = (\gamma(s);\ e_1(s),\ e_2(s)), \qquad C^2(s) = \psi(\gamma(s)),$$

где $e_1(s)$ — единичный касательный вектор к кривой $\gamma(s)$. Из уравнения (6.12) следует тогда, что

$$\int_\gamma \tilde{\gamma}^*(\Theta^{12}) = \int_\gamma \psi^*\Theta^{12} + \int_\gamma d\sigma,$$

где σ — угол между $\gamma'(s)$ и $\partial/\partial x^1$.

Интеграл $\int_\gamma d\sigma$ представляет собой полную кривизну кривой γ относительно евклидовой метрики, соответствующей координатам x^1, x^2. Согласно (4.12), этот интеграл равен 2π. Поэтому, используя (6.10), получаем

$$\int_\gamma \tilde{\gamma}^*\Theta^{12} = 2\pi - \int_D K\,dA. \qquad (6.13)$$

Равенство (6.13) обобщается, так же как и (4.13), на случай кусочно дифференцируемой кривой $\gamma(C_1, \ldots, C_n)$ (где C_i — дифференцируемые куски кривой γ). В этом случае равенство имеет вид

$$\sum \int_{C_i} \tilde{C}_i^*(\Theta^{12}) + \sum \alpha_i = 2\pi - \int_D K\,dA, \qquad (6.14)$$

где α_i — внешние углы в точках стыковки дифференцируемых кусков. Если все C_i являются геодезическими, то первый член слева обращается в нуль, и мы получаем

$$\sum \alpha_i = 2\pi - \int\limits_D K\,dA. \tag{6.15}$$

Например, если D — геодезический треугольник (рис. 29) и мы рассматриваем внутренние углы $\beta_i = \pi - \alpha_i$, то формула (6.15) дает

$$\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = \pi + \int K\,dA. \tag{6.16}$$

[В частности, для сферы $K \equiv 1$, и мы получаем стандартную формулу сферической тригонометрии.]

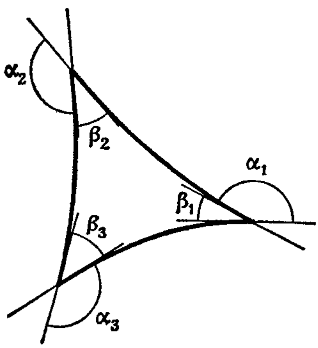


Рис. 29.

Приступим теперь к нахождению целого числа, фигурирующего в формуле (6.11).

Определение. *Связной замкнутой клеточной поверхностью* называется компактное дифференцируемое двумерное многообразие M вместе с конечным числом замкнутых подмножеств (называемых *клетками* или *гранями*) $F_1, \ldots, F_{\alpha_2}$, таких, что

$$M = \bigcup_{i=1}^{\alpha_2} F_i,$$

и удовлетворяющих следующим условиям:

1. Для каждого $i = 1, \ldots, \alpha_2$ существует взаимно однозначное взаимно дифференцируемое отображение f_i клетки F_i на многоугольник с n_i сторонами ($n_i \geqslant 3$).

2. Если $i \neq j$, то либо $F_i \cap F_j$ пусто, либо $f_i(F_i \cap F_j)$ есть сторона или вершина соответствующего многоугольника.

3. Для любых F_i и F_j ($i \neq j$) существует конечная последовательность таких клеток $F_{i_0}, \ldots, F_{i_s}$, что $F_{i_0} = F_i$, $F_{i_s} = F_j$ и $F_{i_k} \cap F_{i_{k+1}} \neq \varnothing$.

Различные точки из M, отображающиеся в вершины конечного числа многоугольников, обозначим $P_1, \ldots, P_{\alpha_0}$ (мы будем называть их тоже вершинами). Подмножеству из M, которое отображается на сторону многоугольника, мы сопоставим пару P_iP_j (выбрав определенное упорядочение вершин P_i), где P_i, P_j — точки, соответствующие вершинам — концам рассматриваемой стороны. Обозначим полное число таких множеств (которые мы также будем называть сторонами) через α_1, а сами множества символами $E_1, \ldots, E_{\alpha_1}$.

Для каждой клетки F_i, имеющей вершины $P_{i_1}, \ldots, P_{i_s}$, выберем определенный порядок этих вершин так, чтобы граница проходилась циклически. Таким образом, мы имеем следующие соответствия:

$$\begin{aligned} &F_i \leftrightarrow P_{i_1} \ldots P_{i_s}, && i = 1, \ldots, \alpha_2, \\ &E_i \leftrightarrow P_jP_k, && i = 1, \ldots, \alpha_1, \\ &P_i \leftrightarrow P_i, && i = 1, \ldots, \alpha_0. \end{aligned}$$

Рассмотрим следующие векторные пространства:

C_0 — вещественное пространство с базисом $P_1, \ldots, P_{\alpha_0}$,

C_1 — вещественное пространство с базисом $E_1, \ldots, E_{\alpha_1}$,

C_2 — вещественное пространство с базисом $F_1, \ldots, F_{\alpha_2}$.

Определим два линейных отображения $\partial_2\colon C_2 \to C_1$ и $\partial_1\colon C_1 \to C_0$, полагая

$$\partial_2 (P_{i_1} \ldots P_{i_s}) = P_{i_1}P_{i_2} + P_{i_2}P_{i_3} + \ldots + P_{i_s}P_{i_1},$$

где

$$P_{i_1}P_{i_2} = \begin{cases} E_i, & \text{если } E_i \leftrightarrow P_{i_1}P_{i_2}, \\ -E_i, & \text{если } E_i \leftrightarrow P_{i_2}P_{i_1}, \end{cases}$$

$$\partial_1 (P_{i_1}P_{i_2}) = P_{i_2} - P_{i_1}$$

и продолжая отображения по линейности.

Проверка на базисных векторах показывает, что $\partial_1 \circ \partial_2 = 0$. Значит, $\partial_2 (C_2) \subset \partial_1^{-1} (0)$. Оказывается, что [1])

$$\begin{aligned} H_2 (M) &= \partial_2^{-1} (0), \\ H_1 (M) &= \partial_1^{-1} (0)/\partial_2 (C_2), \\ H_0 (M) &= C_0/\partial_1 (C_1). \end{aligned}$$

Размерности векторных пространств $H_2 (M)$, $H_1 (M)$, $H_0 (M)$ называются *числами Бетти* многообразия M и обозначаются символами β_2, β_1, β_0.

---

[1]) Здесь $H_k (M)$ есть k-мерная группа гомологий многообразия M, см. определение 2.4 гл. III.— *Прим. перев.*

Определение 6.1. Число $\alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 = \chi(M)$ называется *характеристикой Эйлера — Пуанкаре.*

Легко доказать (однако мы это делать не будем), что

$$\chi(M) = \beta_0 - \beta_1 + \beta_2.$$

Данное определение характеристики $\chi(M)$ в высшей степени «неинвариантно», т. е. априори сильно зависит от разбиения на клетки. Мы покажем сейчас, что на самом деле это не так. Действительно, применим формулу (6.14) к случаю, когда D есть грань F_i. Пусть $n_{\text{г}}$, $n_{\text{с}}$ и $n_{\text{в}}$ соответственно число граней, сторон и вершин. Просуммировав равенства (6.14) по всем граням, получим

$$2\pi n_{\text{г}} - \int\limits_M K\,dA = \sum \alpha_i, \tag{6.15}$$

поскольку члены вида $\int K_\gamma(s)\,ds$ сокращаются, ввиду того что каждая сторона проходится в двух направлениях. Справа стоит сумма по всем внешним углам при всех вершинах. Но сумма всех внешних углов при каждой вершине равна, очевидно,

$$\pi\cdot(\text{число сторон при вершине}) - 2\pi.$$

Поскольку каждая сторона подходит ровно к двум вершинам, сумма в правой части равна $2\pi n_{\text{с}} - 2\pi n_{\text{в}}$. Таким образом, формула (6.15) превращается в формулу Гаусса — Бонне:

$$\chi(M) = n_{\text{г}} - n_{\text{с}} + n_{\text{в}} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_M K\,dA. \tag{6.16}$$

Как мы уже убедились, гауссова кривизна K играет двоякую роль: во-первых, она является якобианом сферического отображения, и, во-вторых, согласно (6.13), характеризует изменение вектора при параллельном обносе его вдоль малой замкнутой кривой. Сейчас мы увидим, что она входит также в формулу второй вариации длины дуги. Пусть γ — геодезическая на M. Напомним, что точка, сопряженная с точкой $\gamma(0)$ вдоль γ, определяется следующим образом. Рассмотрим отображение $\pi\circ\alpha_t$: $T_{\gamma(0)}(M)\to M$, где α_t — геодезический поток. Тогда первая точка, где индуцированное касательное отображение $\pi_*\circ\alpha_{t*}$: $T_0(T_{\gamma(0)}(M))\to$ $\to T_{\gamma(t)}(M)$ становится вырожденным, называется точкой, сопряженной с $\gamma(0)$ вдоль γ. Поскольку подмногообразие $\iota(\mathcal{O}(M))\subset$ $\subset T(M)$ инвариантно относительно геодезического потока, мы можем переформулировать это определение, оставаясь в рамках расслоения $\mathcal{O}(M)$. Заменим $T_{\gamma(0)}(M)$ множеством реперов из $T_{\gamma(0)}(M)$, т. е. рассмотрим множество единичных векторов из $T(M)$. Пусть $X_{12}\,(=\partial/\partial\tau)$ — поле единичных векторов, касательное ко всем слоям расслоения $\mathcal{O}(M)$, т. е. X_{12} есть векторное поле, определяемое уравнениями $\langle X_{12}, \theta^1\rangle = \langle X_{12}, \theta^2\rangle = 0$ и $\langle X_{12}, \Theta^{12}\rangle = 1$. Мы по-прежнему будем обозначать через α_t ограничение геодезического потока на $\mathcal{O}(M)$. Тогда сопряженная точка есть первая точка, где

$$\pi_* \circ \alpha_{t*} Y_0 = 0, \tag{6.17}$$

если $Y_0 = X_{12}(\gamma(0);\ \gamma'(0), e_2(0))$, т. е. Y_0 — единичный вектор, касательный к реперам с началом в точке $\gamma(0)$. Но уравнение (6.17) эквивалентно уравнениям $\langle \alpha_{t*} Y_0, \theta^1\rangle = \langle \alpha_{t*} Y_0, \theta^2\rangle = 0$, или

$$\langle Y_0, \alpha_t^* \theta^1\rangle = 0, \qquad \langle Y_0, \alpha_t^* \theta^2\rangle = 0. \tag{6.18}$$

Пусть X — инфинитезимальная образующая потока α, т. е. X есть векторное поле, задаваемое равенствами (6.8). Из (6.8) следует, что

$$\mathcal{L}_X \theta^1 = 0, \qquad \mathcal{L}_X \theta^2 = \Theta^{12}, \qquad \mathcal{L}_X \Theta^{12} = -K\theta^2. \tag{6.19}$$

Далее,

$$\frac{d}{dt}\langle Y_0, \alpha_t^* \theta^1\rangle = \langle Y_0, \alpha_t^* \mathcal{L}_X \theta^1\rangle = 0$$

и $\langle Y_0, \theta^1\rangle = 0$, так что первое из уравнений (6.18) тождественно удовлетворяется. Положим $\xi(t) = \langle Y_0, \alpha_t^* \theta^2\rangle$. Тогда

$$\frac{d}{dt}\xi(t) = \langle Y_0, \alpha_t^* \mathcal{L}_X \theta^2\rangle = \langle Y_0, \alpha_t^* \Theta^{12}\rangle$$

и, значит,

$$\frac{d^2}{dt^2}\xi(t) = \langle Y_0, \alpha_t^* \mathcal{L}_X \Theta^{12}\rangle = $$
$$= \langle Y_0, \alpha_t^*(-K\theta^2)\rangle = -K\xi(t).$$

Итак, функция ξ удовлетворяет следующему уравнению (уравнению Якоби):

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} + K\xi = 0. \tag{6.20}$$

Таким образом, *кривизна измеряет также вторую вариацию длины дуги*. Из уравнения (6.20) можно извлечь разнообразные следствия. Прежде всего сформулируем теорему Штурма относительно уравнений типа (6.20).

Лемма 6.1. *Пусть ξ — решение уравнения* (6.20), *а η — ненулевое решение уравнения*

$$\frac{d^2\eta}{dt^2} + K'\eta = 0, \tag{6.21}$$

где $K' < K$. Тогда между любыми двумя нулями функции η находится по крайней мере один нуль функции ξ.

Доказательство. Мы можем считать, что $\eta(a) = \eta(b) = 0$ и $\eta(t) > 0$, если $a < t < b$. Предположим, что

$\xi \neq 0$ на отрезке $a \leqslant t \leqslant b$, скажем, $\xi > 0$. Пусть m — минимум ξ. Умножая функцию η в случае надобности на ненулевую константу, мы можем считать, что $\max\limits_{a \leqslant t \leqslant b} \eta(t) = m$. Тогда $\xi - \eta \geqslant 0$ и $\xi(t_0) - \eta(t_0) = 0$ в некоторой точке t_0 интервала (a, b) (рис. 30). Поскольку функция $\xi - \eta$ в этой точке достигает минимума, мы должны иметь

$$\frac{d(\xi-\eta)}{dt} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{d^2(\xi-\eta)}{dt^2} \geqslant 0.$$

Но

$$\frac{d^2(\xi-\eta)}{dt^2} = -K\xi + K'\eta = (K'-K)\,\xi(t_0) < 0.$$

Полученное противоречие доказывает лемму 6.1.

Если положить $K' = C^2 = \text{const}$, то решением уравнения (6.21) будут $\cos Ct$ и $\sin Ct$. Следовательно, если $K > C^2$, то любое

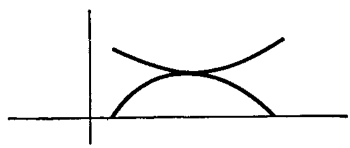


Рис. 30.

решение уравнения (6.20) обращается в нуль на каждом интервале длины π/C. Это означает, что на поверхности с кривизной $> C^2$ сопряженные точки вдоль геодезических отстоят друг от друга не больше, чем на π/C. Но геодезическая не минимизирует расстояние за сопряженной точкой. Поэтому расстояние между любыми двумя точками не больше, чем π/C. Таким образом, доказана

Теорема 6.3 (Бонне). *Пусть M — связное двумерное риманово многообразие, кривизна K которого удовлетворяет неравенству $K \geqslant C^2$. Тогда расстояние между любыми двумя точками из M не превосходит π/C. В частности, если многообразие M полно, то оно компактно.*

Доказательство следующей теоремы мы оставляем читателю в качестве упражнения:

Теорема 6.4. *Пусть M — связное двумерное риманово многообразие, кривизна K которого всюду $\leqslant 0$. Тогда ни на какой геодезической многообразия M не существует сопряженных точек. В частности, если многообразие M односвязно, то оно диффеоморфно E^2.*

Глава VII

ГЕОМЕТРИЯ G-СТРУКТУР

В главе II мы рассматривали расслоение кореперов $\mathcal{F}^*(M)$ и расслоение реперов $\mathcal{F}(M)$ многообразия M. В главе VI мы изучали расслоение ортонормированных реперов $\mathcal{O}(M)$ риманова многообразия M и расслоение $\mathcal{O}_\varphi(M)$, определяемое погружением n-мерного многообразия M в E^{n+k}. Все эти расслоения обладают некоторыми общими свойствами — они представляют собой дифференцируемые многообразия вместе с фиксированным отображением, которое мы обозначали через π, на M. Кроме того, на каждом из этих многообразий действует (справа) некоторая группа Ли. Так, на $\mathcal{F}(M)$ и $\mathcal{F}^*(M)$ действует группа $GL(n)$ (согласно формуле (6.1) и след. гл. II); группа $O(n)$ действует подобным же образом на $\mathcal{O}(M)$, а группа $O(n) \times \times O(k)$ (рассматриваемая как подгруппа группы $O(n+k)$) очевидным образом действует на $\mathcal{O}_\varphi(M)$. Наконец, во всех этих случаях для любых $y \in \pi^{-1}(x)$ и $z \in \pi^{-1}(x)$, где $x \in M$, существует единственный элемент A из соответствующей группы Ли, такой, что $z = yA$.

В этой главе мы будем изучать подобные объекты, называемые *главными расслоениями*, для любой группы Ли. При изучении главных расслоений важным геометрическим понятием является понятие параллельного переноса. В последнем параграфе гл. VI мы убедились, что в двумерном римановом многообразии M естественным образом определяется параллельный перенос реперов из $\mathcal{O}(M)$ вдоль кривой. В произвольном главном расслоении не существует естественного способа параллельного переноса вдоль кривой. Однако выбор такого способа определяет интересный геометрический объект (называемый *связностью*) и позволяет ввести понятие кривизны, обобщающее понятие гауссовой кривизны двумерного риманова многообразия. После изучения этих общих понятий мы займемся более специальным классом главных расслоений, представляющих особый интерес в дифференциальной геометрии.

§ 1. ГЛАВНЫЕ И АССОЦИИРОВАННЫЕ РАССЛОЕНИЯ; СВЯЗНОСТИ

Пусть G — группа Ли, а P — дифференцируемое многообразие. Говорят, что группа G дифференцируемо действует справа на P (см. § 6 гл. II для случая $G = GL(n)$), если задано такое дифференцируемое отображение φ: $P \times G \to P$, что для любого $a \in G$ отображение R_a: $P \to P$, определяемое формулой $p \to \varphi(p, a)$, является диффеоморфизмом многообразия P на себя и $\varphi(\varphi(p, a), b) = \varphi(p, ab)$, т. е. $R_{ab} = R_b \circ R_a$. Если e — единица группы G, то R_e — тождественное отображение. Для простоты мы будем обычно писать $R_a(p) = p \cdot a$, так что $p \cdot (ab) = = (p \cdot a) \cdot b$.

Определение 1.1. Пусть P и M — дифференцируемые многообразия, а π — дифференцируемое отображение многообразия P на M. Пусть G — группа Ли, дифференцируемо действующая справа на P. Тогда (P, M, π, G) называется *главным G-расслоением* (или, лучше, *главным расслоением над M со структурной группой G*), если

1) G действует на P свободно, т. е. из $p \cdot a = p$ для некоторого $p \in P$ следует, что $a = e$.

2) Пусть p_1 и p_2 — любые две точки из P. Тогда $\pi(p_1) = \pi(p_2)$ в том и только в том случае, когда существует такой элемент $a \in G$, что $p_1 \cdot a = p_2$. Другими словами, многообразие M можно рассматривать как «факторпространство» многообразия P относительно действия группы G.

3) Расслоение P локально тривиально над M, т. е. для любой точки $x \in M$ существуют ее окрестность U и диффеоморфизм $\psi\colon \pi^{-1}(U) \to U \times G$, такие, что $\psi(p) = (\pi(p), \eta(p))$, где $\eta(p) \in G$ и $\psi(p \cdot a) = (\pi(p), \eta(p)\, a)$.

Если M — точка, то P отождествляется с G. Для любого многообразия M, если $x \in M$, то $\pi^{-1}(x)$ есть дифференцируемое подмногообразие в P, диффеоморфное G, которое называется слоем над x. Таким образом, P — это набор экземпляров группы G, занумерованных точками из M. Поэтому в определенном смысле понятие главного расслоения является геометрическим обобщением понятия группы Ли. Определим понятие *гомоморфизма* одного главного расслоения в другое. Пусть ρ — гомоморфизм группы Ли G_1 в группу Ли G_2. Пусть P_1 — главное G_1-расслоение, а P_2 — главное G_2-расслоение над одним и тем же многообразием M. Мы будем говорить, что дифференцируемое отображение $f\colon P_1 \to P_2$ есть ρ-гомоморфизм, если $\pi f(p_1) = \pi(p_1)$ и $f(p_1 \cdot a) = f(p_1)\, \rho(a)$ для всех $p_1 \in P_1$ и $a \in G_1$. Диффеоморфизм, являющийся одновременно гомоморфизмом, называется *изоморфизмом*.

Рассмотрим случай, когда группа G_1 состоит из одной единицы. Тогда P_1 можно рассматривать как само M, а гомоморфизм f — как отображение $M \to P_2$, удовлетворяющее условию $\pi \circ f = \mathrm{id}$. В этом случае f называется *сечением* расслоения P_2. Если расслоение P допускает сечение f, то существует изоморфизм φ_f расслоения P на расслоение $M \times G$. Действительно, для любого $p \in P$, такого, что $\pi(p) = x$, существует единственный элемент $a \in G$, такой, что $f(x)\, a = p$. Положим $\varphi_f(p) = (x, a)$. Простая проверка показывает, что отображение φ_f дифференцируемо и, более того, является изоморфизмом расслоения P на $M \times G$.

Итак, мы показали, что любое главное расслоение, допускающее сечение, *тривиально*, т. е. изоморфно $M \times G$. Обратно, расслоение $M \times G$ допускает очевидное сечение f: $f(x) = (x, g(x))$, где g — любое дифференцируемое отображение $M \to G$.

Отвлекаясь немного в сторону, заметим, что вопрос о том, тривиально ли данное расслоение, часто представляет значительный геометрический интерес. Рассмотрим для иллюстрации расслоение $\mathcal{O}(M)$, где M — двумерное компактное ориентированное риманово многообразие. Тривиальность расслоения $\mathcal{O}(M)$, или, что то же самое, наличие у него сечения, означает существование ненулевого векторного поля на M. Это может быть только в том случае, когда M — тор. Более того, если M — не тор, то целое число $\chi(M)$ (равное сумме индексов произвольного векторного поля на M) показывает, в некотором смысле, насколько расслоение $\mathcal{O}(M)$ отличается от тривиального. Изучение «препятствий» к тривиальности главного расслоения — один из основных методов, используемых в теории расслоенных пространств. Полученные таким образом результаты играют ведущую роль в дифференциальной топологии. Развитие этих идей читатель найдет в книге Стинрода «Топология косых произведений» (ИЛ, М., 1953) и в принстонских лекциях Милнора: «Лекции о характеристических классах» [1]). В дальнейшем мы будем в основном заниматься геометрическими вопросами, связанными с главными расслоениями, поскольку соответствующие топологические проблемы выходят за рамки этой книги.

Заметим, что если P — главное G-расслоение над M, а U — открытое подмножество в M, то $\pi^{-1}(U)$ есть главное G-расслоение над U. Согласно условию 3) определения 1.1, каждая точка $p \in M$ должна иметь такую окрестность U, что расслоение $\pi^{-1}(U)$ тривиально.

Выберем покрытие $\{U_\alpha\}$ многообразия M, состоящее из таких окрестностей, и пусть $\varphi_\alpha\colon \pi^{-1}(U_\alpha) \to G$ — соответствующие отображения [2]). Над каждым пересечением $U_\alpha \cap U_\beta$ отображение $p \to \varphi_\beta(p)(\varphi_\alpha(p))^{-1}$ постоянно вдоль слоев и, следовательно, определяет отображение $\psi_{\beta\alpha}\colon U_\alpha \cap U_\beta \to G$. Отображения $\psi_{\beta\alpha}$ называются функциями перехода расслоения P относительно покрытия $\{U_\alpha\}$. Очевидно, что они удовлетворяют соотношению

$$\psi_{\gamma\beta} \cdot \psi_{\beta\alpha} = \psi_{\gamma\alpha}. \tag{1.1}$$

Обратно, если заданы открытое покрытие $\{U_\alpha\}$ многообразия M и множество дифференцируемых отображений $\psi_{\beta\alpha}\colon U_\alpha \cap U_\beta \to G$, удовлетворяющих условию (1.1), то мы можем построить главное расслоение, для которого $\psi_{\beta\alpha}$ будут функциями перехода. Доказательство основано на теореме 2.1 гл. II и проводится точно так же, как доказательство (для случая $\mathcal{F}^*(M)$), изложенное в § 6 гл. II. [Мы оставляем его читателю в качестве упражнения.]

Другим важным частным случаем гомоморфизма $P_1 \to P_2$ является случай, когда G — подгруппа группы G_2, а ρ — гомоморфизм вложения. В этом случае гомоморфизм $P_1 \to P_2$ назы-

---

[1]) Русский перевод см. в сб. *Математика*, 3: 4 (1959), 3—53, и 9: 4 (1965), 3—40.— *Прим. перев.*

[2]) То есть отображения, определяющие изоморфизмы $f_\alpha\colon p \to (\pi(p), \varphi_\alpha(p))$ расслоений $\pi^{-1}(U_\alpha)$ на $U_\alpha \times G$.— *Прим. перев.*

вается *редукцией* G_2-расслоения P_2 к G_1-расслоению P_1. Мы будем говорить, что G_2-расслоение *редуцируется к подгруппе* G_1, если существует его редукция к G_1-расслоению P_1. Так, если $G_1 = \{e\}$, то расслоение редуцируется к $\{e\}$ тогда и только тогда, когда оно тривиально. В качестве другого примера заметим, что над произвольным многообразием M $GL(n)$-расслоение $\mathscr{F}(M)$ всегда редуцируется к $O(n)$-расслоению. Действительно, введем на M риманову метрику и рассмотрим соответствующее $O(n)$-расслоение $\mathscr{O}(M)$. Оно является подмногообразием в $\mathscr{F}(M)$, и тождественное отображение, очевидно, является изоморфизмом $\mathscr{O}(M) \to \mathscr{F}(M)$. Аналогично, $\mathscr{F}(M)$ редуцируется к $SL(n)$-расслоению тогда и только тогда, когда многообразие M ориентируемо.

Пусть $f: P_1 \to P_2$ — редукция расслоения P_2 к P_1. Выберем покрытие $\{U_\alpha\}$ многообразия M и функции $\varphi^1_\alpha: \pi_1^{-1}(U_\alpha) \to G_1$, соответствующие расслоению P_1. Пусть $\psi_{\beta\alpha}$ — соответствующие функции перехода. Если π_2 — проекция $P_2 \to M$, то определим отображение $\varphi^2_\alpha: \pi_2^{-1}(U_\alpha) \to G_2$ следующим образом. Любую точку $p_2 \in \pi_2^{-1}(U_\alpha)$ можно записать в виде $f(p_1)a$, где $p_1 \in P_1$ и $a \in G_2$. Положим $\varphi^2_\alpha(p_2) = \varphi^1_\alpha(p_1)a$. Если мы выберем другое представление $p_2 = f(p_1')a'$, то $f(p_1')a'a^{-1} = f(p_1)$, так что $p_1'a'a^{-1} = p_1$. Следовательно, $\varphi^1_\alpha(p_1')a' = \varphi^1_\alpha(p_1)a$, и, значит, отображение φ^2_α определено корректно. Предлагаем читателю проверить, что оно определяет изоморфизм расслоения $\pi_2^{-1}(U_\alpha)$ на $U_\alpha \times G_2$.

Далее, $\varphi^2_\beta \cdot (\varphi^2_\alpha(p_2))^{-1} = \varphi^1_\beta \cdot (\varphi^1_\alpha(p_2))^{-1}$, если $p_2 = f(p_1)$, так что $\psi_{\beta\alpha}$ *служат также и функциями перехода расслоения* P_2. Итак, *функции перехода расслоения* P_2 *принимают значения в* G_1. Обратно, предположим, что нам удалось выбрать такое покрытие $\{U_\alpha\}$ многообразия M, что функции перехода расслоения P_2 принимают значения в подгруппе G_1. Согласно рассуждениям, приведенным на странице 237, отображения $\psi_{\beta\alpha}$ дифференцируемы и как отображения в G_1. Поскольку они удовлетворяют соотношениям (1.1), мы можем построить соответствующее расслоение P_1 и очевидное вложение $P_1 \to P_2$. Таким образом, доказана

Лемма 1.1. *Пусть P_2 — главное G_2-расслоение над M и G_1 — подгруппа группы G_2. Тогда расслоение P_2 редуцируется к G_1-расслоению в том и только в том случае, когда существует покрытие $\{U_\alpha\}$ многообразия M, для которого функции перехода $\psi_{\alpha\beta}$ принимают значения в G_1.*

Пусть P — главное расслоение со структурной группой G. Поскольку G действует на P, любую однопараметрическую подгруппу в G можно рассматривать как однопараметрическую группу диффеоморфизмов многообразия P. Поэтому любое левоинвариантное векторное поле X на G определяет векторное поле $\widetilde{X}$ на P. Легко видеть, что отображение $X \to \widetilde{X}$ является гомоморфизмом алгебры Ли g группы G в алгебру Ли векторных полей на P. Это отображение взаимно однозначно. Можно утверждать даже больше: если $\widetilde{X}_p = 0$ для некоторого $p \in P$, то $X = 0$. Действительно, если $\widetilde{X}_p = 0$, то p есть неподвижная точка однопараметрической группы преобразований, порожденной полем $\widetilde{X}$. Но преобразования этой группы представляют собой действия элементов $\exp tX \in G$ на P. Поэтому из условия 1) определения 1.1 следует, что $\exp tX = e$, откуда $X = 0$.

Заметим, что $p \cdot \exp tX$ всегда лежит в том же слое, что и p, так что поле $\widetilde{X}$ касательно к слоям. Отображение $g \to T_p(P)$, переводящее X в $\widetilde{X}_p$, является вложением в подпространство пространства $T_p(P)$, касательное к слою. Поскольку последнее имеет ту же размерность, что и g, для любого касательного к слою вектора $Y \in T_p(P)$ существует единственный вектор $X \in g$, такой, что $\widetilde{X}_p = Y$. Другими словами, касательные пространства слоев расслоения P каноническим образом отождествляются с алгеброй Ли g.

Пусть $a \in G$, $X \in g$, и пусть φ_{1t} — однопараметрическая группа диффеоморфизмов расслоения P, порожденная полем $R_a^* \widetilde{X}$, а φ_{2t} — однопараметрическая группа, порожденная полем $\widetilde{X}$. Векторные поля $\widetilde{Y} = R_a^* \widetilde{X}$ и $\widetilde{X}$ R_a-связаны. [Напомним, что $(R_a^*\widetilde{X})_p = (R_a)_*^{-1} \widetilde{X}_{pa}$, так что $R_{a*}\widetilde{Y}_p = \widetilde{X}_{pa}$ и, значит, $\widetilde{Y}$ и $\widetilde{X}$ R_a-связаны, см. определение 8.3 гл. II.] Согласно упражнению 8.4 гл. II, мы имеем $R_a \circ \varphi_{1t} = \varphi_{2t} \circ R_a$. Так как $\varphi_{2t} = R_{\exp tX}$, то $\varphi_{1t} = R_a^{-1} \circ R_{\exp tX} \circ R_a = R_{a^{-1}(\exp tX)a} = R_{A_{a^{-1}}(\exp tX)}$. Но однопараметрическая группа $A_{a^{-1}}(\exp tX)$ соответствует элементу $(\mathrm{Ad}\, a^{-1}) X \in g$. Следовательно,

$$R_a^* \widetilde{X} = (\widetilde{\mathrm{Ad}\, a^{-1} X}). \tag{1.2}$$

Рассмотрим теперь задачу об определении понятия параллельного переноса в главном расслоении P над n-мерным многообразием M. Как мы уже видели в случае двумерного риманова многообразия, мы должны задать способ переноса слоев вдоль любой дифференцируемой кривой C многообразия M. Более точно, мы должны указать однозначный способ сопоставления каждой точке $p \in \pi^{-1}C(0)$ некоторой точки $p_t \in \pi^{-1}C(t)$ при всех t. Кроме того, мы требуем, чтобы это сопоставление определяло движение слоя, т. е. чтобы $(p \cdot a)_t = p_t \cdot a$ для всех $a \in G$.

Итак, мы хотим иметь правило, сопоставляющее каждой дифференцируемой кривой C на M и каждой точке $p \in \pi^{-1}(C(0))$ кривую

γ_p на P, удовлетворяющую условиям i) $\pi(\gamma_p(t)) = C(t)$ и ii) $\gamma_{p\cdot a}(t) = \gamma_p(t)\cdot a$ для всех $a \in G$ и всех t из области определения кривой C. Мы потребуем также выполнения некоторых условий дифференциального характера: iii) касательный вектор $\gamma_p'(0)$ зависит только от $C'(0)$; тем самым мы получаем отображение $\sigma : T_x(M) \to T_p(P)$ для каждого $p \in \pi^{-1}(x)$.

Из условия i) следует, что $\pi_{*p}\circ\sigma_p = \mathrm{id}$. Наложим дополнительное условие: iv) отображение σ_p линейно. Тогда $H_p = \sigma_p(T_x(M))$ будет n-мерным подпространством в $T_p(P)$ и $\pi_{*p}H_p = T_x(M)$. Заметим, что выбор подпространства H_p определяет отображение σ_p, поскольку π_{*p} есть изоморфизм пространства H_p на $T_x(M)$. Поэтому вместо отображений σ_p мы можем задавать подпространства H_p, т. е. n-мерную дифференциальную систему $\mathscr{H}$ на P. Мы будем предполагать, что v) система $\mathscr{H}$ дифференцируема. Условие ii) показывает тогда, что $R_{a*}H_p = H_{p\cdot a}$. В соответствии с приведенными выше требованиями дадим следующее

Определение 1.2. Пусть P — главное расслоение со структурной группой G над n-мерным многообразием M. *Связностью* на P называется такая n-мерная дифференциальная система $\mathscr{H}$ на P, что

1) $\pi_*H_p = T_{\pi(p)}(M)$ (где $H_p = \mathscr{H}(p)$);
2) $R_{a*}H_p = H_{p\cdot a}$.

Подпространство H_p называется *горизонтальным пространством связности в точке* p.

Заметим, что в каждой точке p касательное пространство слоя вместе с H_p порождают $T_p(P)$. Поэтому задание подпространства H_p определяет проекцию (вдоль H_p) пространства $T_p(P)$ на касательное пространство слоя. Но мы отождествили касательные пространства слоев с алгеброй Ли g. Таким образом, мы получаем линейное отображение $T_p(P) \to g$, которое на любом касательном пространстве каждого слоя совпадает с упомянутым выше отождествлением. Короче говоря, мы получаем g-значную дифференциальную форму Ω, которая, как легко видеть, дифференцируема. Она называется *формой связности* [1]. Подпространство H_p есть в точности множество векторов X, для которых $\langle X, \Omega_p\rangle = 0$. Условие 2) определения 1.2 означает, что если X — вектор, касательный к слою, то $\langle R_{a*}X, \Omega_{p\cdot a}\rangle = \mathrm{Ad}a^{-1}\langle X, \Omega_p\rangle$. Значит, и для любого вектора $X \in T_p(P)$ мы имеем $\langle R_{a*}X, \Omega_{p\cdot a}\rangle = \mathrm{Ad}a^{-1}\langle X, \Omega_p\rangle$, т. е.

$$R_{a*}\Omega = \mathrm{Ad}\,a^{-1}\Omega. \tag{1.3}$$

[1]) Если P есть расслоение $\mathcal{O}(M)$ над двумерным римановым многообразием M, то форма Ω — это в точности форма Θ^{12} гл. VI. Группа $O(2)$ есть окружность, и ее алгебру Ли можно рассматривать как R — вот почему форма Θ^{12} оказывается вещественнозначной.

Обратно, предположим, что нам задана g-значная форма Ω на P, удовлетворяющая условию (1.3), причем $\langle \tilde{X}, \Omega \rangle = X$ для всех $X \in g$. Тогда, как легко видеть, дифференциальная система, порождаемая векторами, которые аннулируются формой Ω, является связностью.

Ясно, что связность на P индуцирует связность на $\pi^{-1}(U)$, где U — любое открытое подмножество в M.

Покажем теперь, как построить связность на любом главном расслоении. На тривиальном расслоении $U \times G$ существует очевидная связность, соответствующая разложению касательного пространства в каждой точке в прямую сумму. Пусть P — главное расслоение над M и $\{U_\alpha\}$ — такое покрытие многообразия M, что расслоения $\pi^{-1}(U_\alpha)$ тривиальны. Пусть Ω_α — форма связности на $\pi^{-1}(U_\alpha)$, и пусть $\{\varphi_\alpha\}$ — разбиение единицы, подчиненное покрытию $\{U_\alpha\}$. Положим $\Phi_\alpha = \varphi_\alpha \circ \pi$ и $\Omega = \sum \Phi_\alpha \Omega_\alpha$. Поскольку каждая форма Ω_α удовлетворяет условию (1.3) и функции Φ_α постоянны на слоях, форма Ω также удовлетворяет условию (1.3). Кроме того, для любого $X \in g$ мы имеем $\langle \tilde{X}, \Omega \rangle = \sum \Phi_\alpha \langle \tilde{X}, \Omega_\alpha \rangle = \sum \Phi_\alpha X = X$. Значит, Ω есть форма связности.

Пусть Y — векторное поле на M, а P — главное расслоение над M с заданной связностью $\mathscr{H}$. Тогда в каждой точке $p \in P$ существует единственный вектор $\hat{Y}_p \in H_p$, такой, что $\pi_{*p} \hat{Y}_p = Y_{\pi(p)}$. Таким образом, мы получаем векторное поле $\hat{Y}$ на P, которое π-связано с полем Y. В соответствии с теоремой 8.3 гл. II, если Y_1 и Y_2 — векторные поля на M, то $[\hat{Y}_1, \hat{Y}_2] = \widehat{[Y_1, Y_2]}$. Поэтому отображение $Y \to \hat{Y}$ является изоморфизмом векторных полей на M в векторные поля на P. Векторное поле вида $\hat{Y}$ на P называется *горизонтальным*.

Используя этот изоморфизм, мы можем определить параллельный перенос вдоль любой кривой C на M. А именно, мы сейчас покажем, что для любого $p \in \pi^{-1}(C(0))$ существует единственная горизонтальная кривая γ, $\gamma(0) = p$, для которой $\pi \circ \gamma = C$. Горизонтальной кривой мы называем кривую, все касательные векторы которой лежат в $\mathscr{H}$. Покрывая область определения кривой C конечным числом интервалов и доказывая для них существование и единственность горизонтальных кривых, мы тем самым докажем существование и единственность искомой горизонтальной кривой. Поэтому можно считать, что C целиком лежит в такой окрестности U, для которой $\pi^{-1}(U)$ изоморфно $U \times G$. Мы можем также считать, что кривая C задана на отрезке $[0, 1]$ и является интегральной кривой некоторого векторного поля X, определенного на окрестности U. Тогда ясно, что кривая γ должна быть интегральной кривой векторного поля $\hat{X}$, проходящей через точку p. Это доказывает единственность.

Для доказательства существования мы должны убедиться в том, что интегральная кривая поля $\hat{X}$, проходящая через p, определена при *всех* $t \in [0, 1]$[1]. Для этого, пользуясь отождествлением $\pi^{-1}(U) = U \times G$, представим поле $\hat{X}$ в виде $\hat{X} = X + Y^x$, где Y^x есть векторное поле на G при каждом $x \in U$. Согласно условию (1.3), поле Y^x на G для любого $x \in U$ правоинвариантно. Теперь мы можем искать интегральную кривую γ поля $\hat{X}$ в виде $\gamma(t) = (x(t), g(t))$. Мы должны иметь $x'(t) = X_{x(t)}$ и $g'(t) = Y^{x(t)}_{g(t)}$. Положив $x(t) = C(t)$, мы получим решение первого из этих уравнений. Остается решить систему обыкновенных дифференциальных уравнений $g'(t) = Y^{x(t)}_{g(t)}$ на G.

Пусть $\omega^1, \ldots, \omega^k$ — базис пространства линейных правоинвариантных форм на G. Положим $ds^2 = (\omega^1)^2 + \ldots + (\omega^k)^2$. Тогда в этой римановой метрике $\| Y^{x(t)}_{g(t)} \| < K$ для некоторого достаточно большого K. Отсюда следует, что кривая g, являющаяся решением уравнения $g'(t) = Y^{x(t)}_{g(t)}$, имеет длину $\leqslant Ka$ на любом отрезке $[0, a]$, на котором она определена. Следовательно, поскольку многообразие G полно в этой метрике, если кривая g определена для $0 \leqslant t < a$, то $g(t)$ имеет предел при $t \to a$. Применяя теорему существования и единственности для любых $a < 1$, мы заключаем, что кривая g определена при $0 \leqslant t < a + \varepsilon$, где ε достаточно мало. В частности, полагая

$$a = \sup \{ b \mid g(t) \text{ определена при } 0 \leqslant t \leqslant b \},$$

мы заключаем, что $a = 1$. Другими словами, кривая $g(t)$, а значит, и $\gamma(t)$ определена для всех $t \in [0, 1]$.

Из приведенной конструкции ясно, что определенный выше параллельный перенос удовлетворяет требованиям i) — iv). Ясно также, что если кривые C_1 и C_2 близки в C^1-топологии на M и точки $p_1 = \gamma_1(0)$ и $p_2 = \gamma_2(0)$ близки, то кривые γ_1 и γ_2 близки в C^1-топологии на P.

Это определение параллельного переноса очевидным образом распространяется на случай кусочно дифференцируемых кривых.

Пусть P — главное G-расслоение над M со связностью $\mathscr{H}$, и пусть $p \in P$ и $\pi(p) = x$. Пусть C — замкнутая кусочно дифференцируемая кривая с началом и концом в точке x. Параллельный перенос вдоль C можно рассматривать как диффеоморфизм τ_C

[1] Сразу мы не уверены в этом, поскольку стандартная теорема существования дает только *локальное* решение, которое, вообще говоря, может и не продолжаться на все t.

слоя $\pi^{-1}(x)$ на себя, причем

$$\tau_C(q \cdot a) = \tau_C(q)\, a \qquad \text{для всех } q \in \pi^{-1}(x) \text{ и } a \in G. \tag{1.4}$$

Пусть C_1 и C_2 — две кривые, определенные при $0 \leqslant t \leqslant 1$, причем $C_1(0) = C_1(1) = C_2(0) = C_2(1) = x$. Тогда мы можем определить кривую $C_3 = C_1C_2$, полагая $C_3(t) = C_1(2t)$, если $0 \leqslant t \leqslant {}^1/_2$, и $C_3(t) = C_2(2t-1)$, если ${}^1/_2 \leqslant t \leqslant 1$. Ясно, что $\tau_{C_1C_2} = \tau_{C_2} \circ \tau_{C_1}$, так что множество всех таких диффеоморфизмов образует группу, которая называется *группой голономии* в точке x и обозначается Φ_x. Группа Φ_x естественным образом превращается в топологическую группу: элемент $\tau \in \Phi_x$ считается близким к единице, если он имеет вид τ_C, где C — кривая, близкая к постоянной кривой в C^1-топологии.

Пусть y — другая точка из M. Предположим, что существует кривая D, соединяющая x с y. Тогда любая замкнутая кривая C с началом и концом в точке x определяет замкнутую кривую DCD^{-1} с началом и концом в точке y и, следовательно, изоморфизм α_D группы Φ_x на Φ_y. Поэтому если многообразие M связно, то имеет смысл говорить о группе голономии Φ связности $\mathscr{H}$ на расслоении P над M.

Рассмотрим теперь точку p из слоя над точкой x. Для любого $\tau \in \Phi_x$ мы имеем $\tau(p) = p \cdot a_\tau$, где a_τ — некоторый элемент из G. Кроме того,

$$\tau_1(\tau_2(p)) = \tau_1(p \cdot a_{\tau_2}) = p \cdot a_{\tau_1} \cdot a_{\tau_2},$$

согласно формуле (1.4). Таким образом, $a_{\tau_1\tau_2} = a_{\tau_1} \cdot a_{\tau_2}$. Другими словами, отображение $\beta_p : \tau \to a_\tau$ является изоморфизмом группы Φ_x в G. Легко видеть, что это отображение непрерывно относительно введенной нами топологии на Φ_x. Выберем теперь другую точку q из слоя над точкой $y \in M$. Если многообразие M связно, то мы можем соединить x с y некоторой кривой D. Пусть p' — точка из $\pi^{-1}(y)$, полученная параллельным переносом точки p вдоль D, и пусть $p' \cdot b = q$. Тогда точка $(\alpha_D\tau_C)\, p'$ получается, если сначала перенести параллельно точку p' вдоль кривой D назад в точку $p \in \pi^{-1}(x)$, затем, применив τ_C, получить точку $p \cdot a_{\tau_C}$ и, наконец, параллельно перенося ее вдоль D в слой $\pi^{-1}(y)$, получить $p' \cdot a_{\tau_C}$. Таким образом,

$$\beta_{p'} \circ \alpha_D = \beta_p.$$

В точке q мы имеем

$$\alpha_D(\tau)_q = \alpha_D(\tau)\, p' \cdot b = p' \cdot \beta_p(\tau) \cdot b =$$
$$= p' \cdot b \cdot b^{-1} \cdot \beta_p(\tau) \cdot b = q \cdot b^{-1} \cdot \beta_p(\tau) \cdot b.$$

Итак, на связном многообразии M точка из P определяет изоморфизм группы голономии в группу G, и любые два таких изоморфизма отличаются на внутренний автоморфизм группы G.

Поскольку β_p — непрерывный изоморфизм, мы можем (в соответствии с леммой 4.4 гл. V) ассоциировать с группой Φ_x некоторую подалгебру Ли ϕ_p алгебры Ли g. Если многообразие M связно, то ϕ_p и ϕ_q отличаются на внутренний автоморфизм Ad b и, следовательно, изоморфны. В этом случае мы можем говорить об алгебре голономии ϕ связности $\mathscr{H}$.

Рассмотрим случай, когда многообразие M односвязно, т. е. любая замкнутая кривая гомотопна постоянной кривой. Тогда, как легко видеть, любая кусочно дифференцируемая кривая может быть деформирована в кусочно C^1-топологии в постоянную кривую. Это означает, что любой элемент из Φ_x может быть соединен кривой с единицей, т. е. топологическая группа Φ_x линейно связна. В этом случае из упражнения 4.2 гл. V следует, что $\beta_p(\Phi_x) \subset \exp \phi_p$. Поэтому $\exp \phi_p$ есть наименьшая подгруппа Ли группы Ли G, содержащая $\beta_p(\Phi_x)$. На самом деле можно показать, что любая линейно связная подгруппа группы Ли сама является группой Ли, см. Ямабе [23]; в частности, в рассматриваемом случае $\beta_p(\Phi_x) = \exp \phi_p$.

Более общо, можно показать, что отображение β_p всегда позволяет отождествить Φ_x с некоторой подгруппой Ли группы Ли G, см. [1]) Амброз и Сингер [1]. Всюду в дальнейшем мы будем считать, что группа голономии есть группа Ли. Читатель может либо принять это без доказательства (или обратиться за доказательством к соответствующим статьям), либо ограничиться односвязными многообразиями и заменить группу голономии Φ группой Ли $\exp \phi_p$ во всех последующих теоремах.

Пусть P_1 — главное расслоение со структурной группой G_1, а P_2 — главное расслоение со структурной группой G_2 над многообразием M. Пусть f — гомоморфизм $P_1 \to P_2$, соответствующий гомоморфизму ρ: $G_1 \to G_2$. Пусть $\mathscr{H}_1$ — связность на P_1. Для $p \in P_1$ определим горизонтальное пространство в точке $f(p)$, полагая $H_{2f(p)} = f_{*p} H_{1p}$. Заметим, что если $f(p) = f(p')$, то $p = p' \cdot a$, причем $\rho(a) = e$, так что $f_{p*} \circ R_{a*} = f_{p'*}$. Поскольку $H_{1p} = R_{a*}(H_{1p'})$, имеем $f_{*p}(H_{1p}) = f_{*p} \circ R_{a*}(H_{1p'}) = f_{p'*}(H_{1p'})$. Это показывает, что определение подпространства $H_{2f(p)}$ не зависит от выбора точки $p \in f^{-1}(f(p))$. Кроме того, если $p = q \cdot a$, то $f(p) = f(q)\rho(a)$ и $H_{2f(p)} = R_{\rho(a)*} H_{2f(q)}$. Другими словами, соответствие $f(p) \to H_{2f(p)}$ удовлетворяет всем условиям связности, за исключением того, что оно определено только на $f(P_1)$. Это можно исправить

[1]) См. также Лихнерович А., Глобальная теория связностей и группы голономий, ИЛ, М., 1961.— *Прим. ред.*

следующим образом. Пусть $r \in P_2$. Представим r в виде $r = f(p)\cdot a$ и положим $H_{2r} = R_{a*}H_{2f(p)}$. Пространство H_{2r} не зависит от выбранного представления точки r. Поэтому дифференциальная система $\mathscr{H}_2$, сопоставляющая точке r пространство H_{2r}, корректно определена. Легко проверить, что она является связностью. Определенная таким образом связность $\mathscr{H}_2$ на P_2 называется образом связности $\mathscr{H}_1$ при гомоморфизме f.

Определение 1.3. Пусть P_2 есть G_2-расслоение над M, а G_1 — подгруппа группы G_2. Говорят, что связность $\mathscr{H}_2$ на P_2 *редуцируется к* G_1, если существуют изоморфизм f некоторого G_1-расслоения P_1 в P_2 и связность $\mathscr{H}_1$ на P_1, такие, что $\mathscr{H}_2$ есть образ связности $\mathscr{H}_1$ при изоморфизме f.

Упражнение 1.1. Пусть f — изоморфизм расслоения P_1 в P_2. Показать, что связность $\mathscr{H}_2$ на P_2 является образом некоторой связности на P_1 при изоморфизме f тогда и только тогда, когда $H_{2f(p)} \subset f_* T_p(P_1)$ для всех $p \in P_1$.

Теорема 1.1. *Пусть P — главное расслоение над связным многообразием со связностью $\mathscr{H}$, а Φ — группа голономии связности $\mathscr{H}$. Тогда $\mathscr{H}$ редуцируется к Φ.*

Доказательство. Выберем точку $p \in P$, $\pi(p) = x$, и рассмотрим группу Φ_p, которая является подгруппой Ли группы G. Прежде всего мы покажем, что расслоение P редуцируется к Φ_p-расслоению. Для этого мы найдем покрытие $\{U_\alpha\}$ многообразия M, функции перехода которого принимают значения в Φ_p.

Выберем такой атлас $\{U_\alpha, h_\alpha\}$ на M, что $h_\alpha(U_\alpha)$ — единичный шар и расслоение P тривиально над U_α. Пусть $x_\alpha = h_\alpha^{-1}(0, \ldots, 0) \in U_\alpha$ и D_α — кривая, соединяющая $x = \pi(p)$ с точкой x_α. Пусть p_α — точка из $\pi^{-1}(x_\alpha)$, полученная параллельным переносом точки p вдоль D_α. Для каждой точки $q \in \pi^{-1}(U_\alpha)$ параллельный перенос вдоль прямой (в смысле координат h_α) линии $l_{\alpha q}$, соединяющей $\pi(q)$ с x_α, дает точку $p_\alpha \cdot a \in \pi^{-1}(x_\alpha)$. Таким образом, мы получаем отображение $\pi^{-1}(U_\alpha) \to G$. Легко проверить, что оно дифференцируемо и определяет изоморфизм $q \to (\pi(q), \varphi_\alpha(q))$ расслоения $\pi^{-1}(U_\alpha)$ на $U_\alpha \times G$.

Найдем функции перехода. Предположим, что $q \in U_\alpha \cap U_\beta$, и рассмотрим $\varphi_\beta(q)\varphi_\alpha(q)^{-1}$. При параллельном переносе точки q вдоль $l_{\beta q}$ мы получим точку $p_\beta \varphi_\beta(q)$. Параллельно перенося q вдоль $l_{\beta q}$ и затем вдоль D_β до точки x, мы получим точку $p\varphi_\beta(q)$, а перенося q вдоль $l_{\alpha q}$ и D_α до точки x, — точку $p\varphi_\alpha(q)$. Таким образом, параллельный перенос точки p вдоль замкнутой кривой $D_\alpha l_{\alpha q}^{-1} l_{\beta q} D_\beta^{-1}$ переводит точку p в $p\varphi_\beta(q)\varphi_\alpha(q)^{-1}$ (рис. 31). Следовательно, $\varphi_\beta(q)\varphi_\alpha(q)^{-1} \in \Phi_p$, так что функции перехода принимают значения в Φ_p.

Согласно лемме 1.1, мы можем построить теперь Ф-расслоение P' и изоморфизм f: $P' \to P$. При доказательстве леммы 1.1 мы использовали локальное представление точек из P' в виде пары (x, a), где $x \in U_\alpha$ и $a \in \Phi$. Отображение f переводит такие точки в точки из $\pi^{-1}(U_\alpha)$, имеющие соответствующие представления. Но если точка q допускает в окрестности $\pi^{-1}(U_\alpha)$ представление в виде $(\pi(q), a)$, где $a \in \Phi$, то она может быть получена из точки p путем параллельного переноса вдоль некоторой кривой, и обратно.

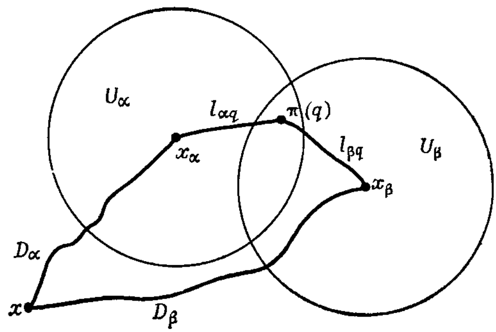


Рис. 31.

Действительно, согласно определению, параллельный перенос точки q вдоль прямой $l_{\alpha q}$ дает точку $p_\alpha \cdot a$. Поскольку $a \in \Phi_{p\alpha} = \Phi_p$, параллельный перенос вдоль некоторой кривой C с началом и концом в точке x переводит p в $p \cdot a$. Далее, параллельный перенос вдоль кривой D_α переводит $p \cdot a$ в $p_\alpha \cdot a$. Следовательно, параллельный перенос вдоль кривой $CD_\alpha l_{\alpha q}^{-1}$ переводит p в q. Итак, образ $f(P')$ состоит из всех точек $q \in P$, которые могут быть соединены с точкой p горизонтальной кривой. Поэтому любая горизонтальная кривая, выходящая из точки, принадлежащей $f(P')$, всегда остается в $f(P')$. В частности, любой горизонтальный касательный вектор в точке $f(q)$ для $q \in P'$ лежит в $f_{*q}(T_q(P'))$. Согласно упражнению 1.1, это означает, что $\mathscr{H}$ есть образ некоторой связности на P', что и доказывает теорему 1.1.

Найдем теперь инфинитезимальный аналог параллельного переноса вдоль замкнутой кривой. Мы хотим выяснить, что представляет собой перенос вдоль «инфинитезимального параллелограмма», порожденного двумя горизонтальными касательными векторами X и Y с началом в точке $p \in P$. Учитывая эвристические рассуждения на стр. 114, естественно ожидать, что эффект, возникающий при параллельном обносе вектора вдоль инфинитезимального параллелограмма, измеряется выражением $\langle X \wedge Y, d\Omega \rangle$, где Ω — форма связности. Сравнивая это выражение с формулой (6.9) гл. VI, естественно назвать его кривизной связности $\mathscr{H}$ в направлении $X \wedge Y$. Точнее, дадим следующее

Определение 1.4. Пусть $\mathscr{H}$ — связность на главном расслоении P с формой связности Ω. Пусть h — проекция пространства $T_p(P)$ на H_p для $p \in P$. [Так, $h(X)=0$, если X — вектор, касательный к слою, и $h(X)=X$ для горизонтального вектора X.] Для любой дифференциальной k-формы θ, определенной на P, форма $D\theta$, задаваемая равенством

$$\langle X_1 \wedge \ldots \wedge X_{k+1} \mid D\theta \rangle = \langle h(X_1) \wedge \ldots \wedge h(X_{k+1}) \mid d\theta \rangle, \quad (1.5)$$

называется *ковариантным дифференциалом* формы θ. В частности, форма $D\Omega$ называется *кривизной связности* $\mathscr{H}$.

Докажем теперь фундаментальное структурное уравнение

$$d\Omega = -\frac{1}{2}[\Omega \wedge \Omega] + D\Omega. \quad (1.6)$$

Для этого достаточно показать, что обе его части принимают одинаковые значения на любых внешних 2-векторах $X_p \wedge Y_p$ в любой точке $p \in P$. При этом достаточно рассматривать только следующие случаи: i) векторы X_p и Y_p горизонтальны; ii) вектор X_p горизонтален, а Y_p вертикален (является касательным к слою); iii) оба вектора X_p и Y_p вертикальны [поскольку элементы такого вида порождают все пространство $\bigwedge^2(T_p(P))$].

В случае i) имеем $\langle X_p, \Omega \rangle = \langle Y_p, \Omega \rangle = 0$, откуда

$$\langle X_p \wedge Y_p \mid [\Omega \wedge \Omega] \rangle = [\langle X_p, \Omega \rangle, \langle Y_p, \Omega \rangle] = 0,$$

и, поскольку $h(X_p) = X_p$ и $h(Y_p) = Y_p$, равенство (1.6) сводится к (1.5).

Рассмотрим теперь случай ii). Продолжим вектор X_p до векторного поля вида $\hat{Z}$, где Z — некоторое векторное поле на M. [Это всегда можно сделать — достаточно продолжить вектор $\pi_*(X)$ до векторного поля Z на M.] Продолжим также вектор Y_p до векторного поля $\tilde{A}$, где $A \in g$. Согласно равенству (1.10) гл. III (написанному для векторнозначных форм), мы имеем

$$\langle \tilde{A} \wedge \hat{Z} \mid d\Omega \rangle = \tilde{A} \langle \hat{Z}, \Omega \rangle - \hat{Z} \langle \tilde{A}, \Omega \rangle - \langle [\hat{Z}, \tilde{A}], \Omega \rangle.$$

Но $\langle \hat{Z}, \Omega \rangle \equiv 0$, поскольку поле $\hat{Z}$ горизонтально, и $\hat{Z} \langle \tilde{A}, \Omega \rangle = 0$, поскольку $\langle \tilde{A}, \Omega \rangle = A = \text{const}$. Поэтому первые два члена правой части обращаются в нуль. Последний член справа также обращается в нуль. Действительно,

$$0 = \mathscr{L}_{\tilde{A}} \langle \hat{Z}, \Omega \rangle = \langle \mathscr{L}_{\tilde{A}} \hat{Z}, \Omega \rangle + \langle \hat{Z}, \mathscr{L}_{\tilde{A}} \Omega \rangle.$$

Но $\mathscr{L}_{\tilde{A}}\Omega = -[A, \Omega]$, согласно инфинитезимальному аналогу формулы (1.2). Следовательно, $\langle \mathscr{L}_{\tilde{A}}\hat{Z}, \Omega\rangle = 0 = \langle [\hat{Z}, \tilde{A}], \Omega\rangle$. Итак, в случае ii) правая часть формулы (1.6) обращается в нуль. Но левая часть также обращается в нуль, поскольку $\langle \hat{Z}, \Omega\rangle = 0$ и $h(\tilde{A}) = 0$.

Осталось рассмотреть случай iii). Но в этом случае мы можем продолжить векторы X_p и Y_p до векторных полей $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$. Поскольку $\langle \tilde{A} \wedge \tilde{B} \mid D\Omega\rangle = 0$, уравнение (1.6) приобретает вид

$$\langle \tilde{A} \wedge \tilde{B} \mid d\Omega\rangle = -\frac{1}{2}([A, B] - [B, A]) = -[A, B].$$

С другой стороны, согласно уравнению (1.10) гл. III,

$$\langle \tilde{A} \wedge \tilde{B} \mid d\Omega\rangle = \tilde{A}\langle \tilde{B}, \Omega\rangle - \tilde{B}\langle \tilde{A}, \Omega\rangle - \langle [\tilde{A}, \tilde{B}], \Omega\rangle.$$

Но $\langle \tilde{B}, \Omega\rangle = B = \text{const}$, значит, $\tilde{A}\langle B, \Omega\rangle = 0$. Аналогично, $\tilde{B}\langle \tilde{A}, \Omega\rangle = 0$. Поскольку $\widetilde{[A, B]} = [\tilde{A}, \tilde{B}]$, имеем $\langle [\tilde{A}, \tilde{B}], \Omega\rangle = [A, B]$. Это доказывает равенство (1.6) в случае iii). Полезно заметить, что в случае iii) равенство (1.6) есть не что иное, как структурное уравнение группы Ли G (формула (6.6) гл. V), перенесенное на слой расслоения P.

Поучительным упражнением для читателя было бы сравнить равенство (1.6) с равенствами (2.10) и (3.11) гл. VI. Формы Ω_M^{ij}, введенные на расслоении $\mathcal{O}(M)$, конечно, определяют связность, а формы $d\Omega_M^{ij} - \sum_{r=1}^{k} \Omega_M^{ir} \wedge \Omega_M^{rj}$ являются формами кривизны этой связности. Равенство (2.10) представляет собой структурное уравнение этой специальной связности, поднятое на $\mathcal{O}_\varphi(M)$. Поэтому условие (3.11) означает просто, что кривизна этой связности равна нулю.

Сейчас мы установим связь между кривизной связности и алгеброй голономии.

Теорема 1.2 (Амброз — Сингер). *Пусть Ω — форма связности некоторой связности $\mathscr{H}$ на главном расслоении P. Алгебра голономии $\mathfrak{h}_p$ в точке $p \in P$ натянута на множество всех элементов алгебры Ли $\mathfrak{g}$ вида $\langle X \wedge Y, D\Omega\rangle_q$, где q — любая точка, которую можно получить из точки p параллельным переносом вдоль какой-нибудь кривой в M, а X и Y — горизонтальные касательные векторы в точке q.*

Доказательство. Заметим прежде всего, что при доказательстве теоремы 1.2 можно считать, что группа голономии совпадает с G. Действительно, по теореме 1.1 расслоение P редуцируется к расслоению P', структурная группа которого совпадает с группой голономии, причем связность на P является образом некоторой связности на P'. Если мы докажем теорему для редуцированного расслоения P', то она, очевидно, будет справедлива и для P.

Если группа голономии совпадает с G, то любая точка расслоения P может быть получена параллельным переносом из точки p и алгебра голономии совпадает с g. Любой горизонтальный вектор в точке q может быть представлен в виде $\hat{W}_q$, где W — векторное поле на M. Для двух таких векторных полей имеем

$$\begin{aligned}\langle \hat{W} \wedge \hat{Z} \mid D\Omega\rangle = \langle \hat{W} \wedge \hat{Z} \mid d\Omega\rangle = \\ = \hat{W}\langle \hat{Z}, \Omega\rangle - \hat{Z}\langle \hat{W}, \Omega\rangle - \langle [\hat{W}, \hat{Z}], \Omega\rangle = \\ = -\langle [\hat{W}, \hat{Z}], \Omega\rangle.\end{aligned}$$

Таким образом, достаточно показать, что алгебра Ли g порождается всеми элементами вида $\langle [\hat{W}, \hat{Z}], \Omega\rangle_q$, где q — произвольная точка из P, а W и Z — произвольные векторные поля на M. Пусть h — подалгебра алгебры g, порожденная всеми элементами такого вида. Рассмотрим соответствующую подалгебру $\widetilde{h}$ алгебры $\widetilde{g}$, состоящую из вертикальных векторных полей на P. Достаточно показать, что $\widetilde{g} = \widetilde{h}$. Для этого рассмотрим дифференциальную систему $\mathscr{D}$ на P, натянутую на все векторные поля вида $\hat{W} + \widetilde{A}$, где W — векторное поле на M, а $A \in h$. *Она вполне интегрируема.* Действительно, вертикальная компонента поля $[\hat{W}, \hat{Z}]$ лежит в $\widetilde{h}$ (согласно определению алгебры $\widetilde{h}$), а поле вида $[\widetilde{A}, \hat{W}]$ горизонтально. Кроме того, поле вида $[\widetilde{A}, \widetilde{B}] = \widetilde{[A, B]}$ принадлежит $\widetilde{h}$, так как h — подалгебра. Предположим, что h — собственная подалгебра в g. Тогда дифференциальная система $\mathscr{D}$ нетривиальна[1] и, значит, ее максимальное интегральное многообразие N_p, проходящее через точку $p \in P$, не совпадает с P. С другой стороны, горизонтальные кривые, проходящие через p, принадлежат N_p и любая точка из P может быть соединена с точкой p горизонтальной кривой. Полученное противоречие доказывает теорему 1.2.

Следует заметить, что практически теорема 1.2 используется главным образом для редуцирования расслоений. А именно, пользуясь теоремой 1.2, вычисляют алгебру голономии и затем применяют теорему 1.1.

Упражнение 1.2. Пусть P — главное расслоение над односвязным многообразием M. Предположим, что на P существует связность $\mathscr{H}$ с нулевой кривизной. Тогда P изоморфно тривиальному расслоению $M \times G$ и при этом изоморфизме $\mathscr{H}$ переходит в тривиальную связность на $M \times G$.

---

[1] То есть $\mathscr{D}(p) \neq 0$, $\mathscr{D}(p) \neq T_p(P)$ для $p \in P$. —*Прим. перев.*

Для любого главного расслоения можно определить аналог «величин» гл. I и § 6 гл. II. Для этого мы должны заменить полную линейную группу структурной группой расслоения. Точнее, дадим следующее

Определение 1.5. Пусть P — главное G-расслоение над многообразием M и Q — дифференцируемое многообразие, на котором группа G дифференцируемо действует слева. На $P \times Q$ группа G дифференцируемо действует справа по формуле $R_a(p, q) = (pa, a^{-1}q)$. Назовем две точки из $P \times Q$ *эквивалентными*, если они получаются одна из другой действием элементов из G. Множество классов эквивалентности многообразия $P \times Q$ называется *Q-ассоциированным расслоением* расслоения P и обозначается $Q(P)$.

Мы предоставляем читателю проверить, что $Q(P)$ есть дифференцируемое многообразие с естественной проекцией π_Q на M, а также сформулировать и доказать очевидные обобщения утверждений и результатов § 6 гл. II на случай произвольных главных расслоений. В частности, легко доказать, что каждая точка $p \in P$ ($\pi(p) = x$) определяет диффеоморфизм, обозначаемый также через p, многообразия Q на $\pi_Q^{-1}(x)$, причем

$$p \cdot a(q) = p(a \cdot q). \tag{1.7}$$

Укажем несколько примеров ассоциированных расслоений, которые встретятся в дальнейшем.

Если Q — векторное пространство, на котором группа G действует линейно, то $Q(P)$ называется векторным расслоением со структурной группой G.

Если $Q = G$ и группа G действует на себе левыми сдвигами, то $Q(P)$ можно отождествить с P. Действительно, в каждом классе эквивалентности многообразия $P \times Q = P \times G$ имеется ровно один элемент вида (p, e). Заметим, что группа G действует справа на $P \times G$, а именно, $(p, g_1)\, g_2 = (p, g_1 g_2)$. Это действие перестановочно с действием R_a группы G:

$$\begin{aligned}[R_a(p, g_1)]\, g_2 &= (pa, a^{-1}g_1)\, g_2 = \\ &= (pa, a^{-1}g_1 g_2) = R_a[(p, g_1)\, g_2].\end{aligned}$$

Поэтому G действует справа на $Q(P) = P$. Что это за действие? Не что иное, как стандартное действие G на P. [Читатель может в качестве упражнения это проверить.] Все эти утверждения выглядят совершенно очевидными. Однако небольшое их обобщение позволяет сделать важное (хотя тоже довольно очевидное) замечание. Предположим, что G_1 — подгруппа (Ли) группы G_2, а P_1 — главное G_1-рассслоение. Тогда G_1 действует левыми сдвигами на G_2, а G_2 — правыми сдвигами на $P_1 \times G_2$. Это действие перестановочно с действием R_a группы G_1 на $P_1 \times G_2$ [где $R_a(p, g) = (pa, a^{-1}g)$]. Значит, группа G_2 действует на G_2-ассоциированном расслоении $G_2(P_1)$. Читатель может проверить, что это действие превращает $G_2(P_1)$ в главное G_2-расслоение. Другими словами, *данное G_1-расслоение каноническим образом может быть расширено до G_2-расслоения.*

Пусть дана некоторая связность $\mathcal{H}$ на главном расслоении P, и пусть $Q(P)$ — некоторое ассоциированное расслоение. Предположим, что y — точка из $Q(P)$, причем $\pi_Q(y) = x$, и что $p_0 \in \pi^{-1}(x) \subset P$. Поскольку точка p_0 определяет диффеоморфизм многообразия Q на слой $\pi_Q^{-1}(x)$, существует единственная точка $q \in Q$, для которой $p_0(q) = y$. Точка q определяет отображение расслоения P в $Q(P)$: оно переводит $p \in P$ в $p(q)$. Обозначим его σ_{p_0}. Положим $\mathcal{D}_y = \sigma_{p_0}^*(\mathcal{H}_{p_0})$. Сейчас мы покажем, что подпространство $\mathcal{D}_y$ не зависит от выбора точки p_0. Если мы заменим точку p_0 точкой $p_0 \cdot a$, то, согласно (1.6), мы должны заменить q на $a^{-1}q$. Таким образом, $\sigma_{p_0 \cdot a}(p) = p(a^{-1}q) = (R_{a^{-1}}p)\,q$. Следовательно,

$$\sigma_{p_0 a} = \sigma_{p_0} \circ R_{a^{-1}},$$

$$\sigma_{p_0 a *}(\mathcal{H}_{p_0 a}) = \sigma_{p_0 *} \circ R_{a^{-1} *} \mathcal{H}_{p_0 a} = \sigma_{p_0 *} \mathcal{H}_{p_0},$$

так что $\mathcal{D}_y$ не зависит от p_0. Легко проверить, что соответствие $y \to \mathcal{D}_y$ определяет дифференциальную систему $\mathcal{D}$ на $Q(P)$ и что подпространство $\mathcal{D}_y$ есть дополнение к касательному пространству слоя в точке y. Далее, пусть C — кривая на M, причем $C(0) = x_0$ и $C(1) = x_1$, а $y_0 \in Q(P)$ — точка из $\pi_Q^{-1}(x_0)$. Выберем точку $p_0 \in \pi^{-1}(x_0)$ так же, как раньше, и пусть γ — горизонтальная кривая в P, лежащая над C, причем $\gamma(0) = p_0$. Тогда кривая $\sigma_{p_0} \circ \gamma$, очевидно, является интегральной кривой дифференциальной системы $\mathcal{D}$. Итак, мы доказали следующее утверждение:

Если задана связность $\mathcal{H}$ на P, то на $Q(P)$ определяется дифференциальная система $\mathcal{D}$, такая, что

1) *в любой точке $y \in Q(P)$ подпространство $\mathcal{D}_y$ является дополнительным к касательному пространству слоя в точке y;*

2) *для любой кривой C на M с $C(0) = x_0$ и $C(1) = x_1$ и для любой точки $y_0 \in \pi_Q^{-1}(x_0)$ существует единственная интегральная кривая γ дифференциальной системы $\mathcal{D}$, для которой $\gamma(0) = y_0$ и $\pi_Q \circ \gamma = C$.*

[Условие 2) показывает, что мы можем параллельно переносить слои расслоения $Q(P)$ вдоль любой кривой многообразия M.]

Дифференциальную систему $\mathcal{D}$ на $Q(P)$, удовлетворяющую условиям 1) и 2), мы будем называть связностью на $Q(P)$. Таким образом, *любая связность на P определяет некоторую связность на $Q(P)$*. Поскольку действие группы G на Q может быть тривиальным, ясно, что обратное утверждение неверно. Однако

Упражнение 1.3. Показать, что если G действует свободно на Q, то любая связность на $Q(P)$ получается из некоторой (единственной) связности на P.

§ 2. G-СТРУКТУРЫ

Среди всех расслоений некоторые (а именно редукции расслоения реперов) играют особенно важную роль в дифференциальной геометрии. Их изучению мы и посвятим оставшуюся часть книги. Прежде всего введем некоторые обозначения. Пусть M — дифференцируемое n-мерное многообразие, а $\mathcal{F}(M)$ — его расслоение реперов. Напомним, что $\mathcal{F}(M)$ есть главное $GL(n)$-расслоение над M. Точка p из $\mathcal{F}(M)$, такая, что $\pi(p)=x$, является базисом касательного пространства $T_x(M)$. Нам будет удобно несколько изменить точку зрения. Пусть V — фиксированное n-мерное векторное пространство с фиксированным базисом (например, мы можем взять в качестве V пространство R^n со стандартным базисом). Тогда базис p пространства $T_x(M)$ определяет изоморфизм пространства V на $T_x(M)$; мы обозначим этот изоморфизм также через p. Группу $GL(n)$ можно рассматривать как группу $GL(V)$ всех линейных преобразований пространства V. Таким образом, пользуясь языком § 1, можно сказать, что $\mathcal{F}(M)$ есть главное $GL(V)$-расслоение, а касательное расслоение $T(M)$ есть ассоциированное расслоение $V(\mathcal{F}(M))$. В частности, согласно равенству (1.7), если $p\in\mathcal{F}(M)$, $v\in V$ и $a\in GL(V)$, то

$$(p\cdot a)(v)=p(av). \tag{2.1}$$

На расслоении реперов существует каноническая V-значная линейная дифференциальная форма ω. Она определяется следующим образом. Пусть p — точка из $\mathcal{F}(M)$, причем $\pi(p)=x$, и пусть $X\in T_p(\mathcal{F}(M))$. Тогда $\pi_*X\in T_x(M)$. Положим

$$\langle X,\omega\rangle=p^{-1}(\pi_*(X)). \tag{2.2}$$

Читатель может проверить, что формула (2.2) определяет на $\mathcal{F}(M)$ дифференцируемую линейную дифференциальную форму. Посмотрим, как ведет себя форма ω при действии группы $GL(V)$. Пусть $X\in T_p(\mathcal{F}(M))$ и $a\in GL(V)$. Тогда $\pi_*(X)=\pi_*(R_{a*}X)$, так как π перестановочно с R_a. Следовательно, согласно (2.1),

$$\langle R_{a*}X,\omega\rangle=(p\cdot a)^{-1}(\pi_*X)=a^{-1}p^{-1}(\pi_*X)=a^{-1}\langle X,\omega\rangle.$$

Получаем формулу

$$R_a^*\omega=a^{-1}\omega. \tag{2.3}$$

Выражение $a^{-1}\omega$ есть результат применения линейного преобразования a^{-1} к V-значной линейной дифференциальной форме ω. Алгебра Ли $gl(V)$ группы Ли $GL(V)$ действует на V, и мы можем написать инфинитезимальный аналог формулы (2.3): для любого $A \in gl(V)$ мы имеем

$$\mathscr{L}_{\widetilde{A}}\omega = -A\omega. \tag{2.4}$$

Но $\pi_*\widetilde{A} = 0$, откуда $\langle\widetilde{A}, \omega\rangle = 0$. Поэтому, пользуясь равенством (1.9) гл. III, равенство (2.4) можно переписать в виде

$$\widetilde{A} \lrcorner\, d\omega = -A\omega. \tag{2.5}$$

Обратимся теперь к определению G-структуры.

Определение 2.1. Пусть G — подгруппа группы $GL(V)$; *G-структурой* на n-мерном многообразии M называется редукция расслоения $\mathscr{F}(M)$ к группе G. Таким образом, G-структура B_G на многообразии M есть подмногообразие в $\mathscr{F}(M)$, обладающее тем свойством, что для любой точки $p \in B_G$ и для любого элемента $a \in GL(V)$ точка $p \cdot a$ принадлежит B_G тогда и только тогда, когда $a \in G$.

Примеры G-структур.

1) $G = \{e\}$. В этом случае G-структура на M определяется заданием репера в каждой точке из M. Такая структура позволяет отождествить каждое касательное пространство к многообразию M с V. Таким образом, мы получаем возможность «параллельно переносить» касательные векторы из одной точки многообразия M в другую. [А именно, вектор $X \in T_x(M)$ отождествляется с вектором $p^{-1}(X) \in V$, который в свою очередь отождествляется с вектором $q(p^{-1}(X)) \in T_y(M)$, где p и q — заданные реперы с началом соответственно в точках x и y.] Поэтому $\{e\}$-структуру иногда называют также *абсолютным параллелизмом* на M. Наиболее важный частный случай абсолютного параллелизма — случай, когда M есть группа Ли. Как мы уже видели в гл. V, если M — группа Ли, то левоинвариантные векторные поля позволяют отождествить касательное пространство в каждой точке из M с алгеброй Ли группы Ли M.

2) Пусть V_1 есть k-мерное подпространство пространства V, а G — группа всех линейных преобразований, оставляющих подпространство V_1 инвариантным. Рассмотрим какую-нибудь G-структуру B_G с этой группой G. Пусть $p \in B_G$ и $x = \pi(p)$. Определим подпространство $\mathscr{D}(x) \subset T_x(M)$, полагая $\mathscr{D}(x) = p(V_1)$. Для любого $a \in G$ имеем $pa(V_1) = p(aV_1) = p(V_1)$, так что $\mathscr{D}(x)$ не зависит от выбора точки $p \in \pi^{-1}(x)$, лежащей в B_G. Таким образом, B_G определяет на M k-мерную дифференциальную систе-

му. Обратно, пусть $\mathscr{D}$ — дифференциальная система на M. Рассмотрим подмногообразие B_G многообразия $\mathscr{F}(M)$, состоящее из таких реперов p, для которых $p^{-1}(\mathscr{D}(x)) = V_1$ (где $x = \pi(p)$). Тогда, как легко видеть, B_G есть G-структура. Итак, в этом случае G-структура — это то же самое, что k-мерная дифференциальная система.

3) Пусть $(\ ,\ )$ — положительно определенное скалярное произведение на V, а G — множество линейных преобразований пространства V, сохраняющих это скалярное произведение. [Таким образом, $G = O(n)$.] В этом случае B_G есть в точности риманова метрика на M. Действительно, риманова метрика определяет расслоение ортогональных реперов $\mathcal{O}(M)$, представляющее собой $O(n)$-структуру. Обратно, задание в каждом касательном пространстве семейства реперов, отличающихся друг от друга на ортогональное преобразование, определяет в каждом касательном пространстве скалярное произведение и тем самым риманову метрику на M. Итак, задать $O(n)$-структуру — это все равно, что задать риманову метрику.

4) Пусть $(\ ,\ )$ — скалярное произведение на V, а G — конформная группа, определяемая этим скалярным произведением, т. е. $T \in GL(V)$ принадлежит G тогда и только тогда, когда $(Tu, Tv) = \lambda_T \cdot (u, v)$ для всех $u, v \in T$, где λ_T зависит только от T. Соответствующая этой группе G-структура называется *конформной структурой*. Если многообразие M обладает конформной структурой, то имеет смысл говорить об угле (точнее, о косинусе угла) между двумя касательными векторами с началом в одной и той же точке из M.

5) Пусть $(\ ,\ )$ — невырожденная антисимметрическая билинейная форма на V. [Тогда V — пространство четной размерности, скажем $2n$.] Пусть $G = Sp(n)$ — симплектическая группа, т. е. группа всех автоморфизмов формы $(\ ,\ )$. Таким образом, $T \in GL(V)$ принадлежит $Sp(n)$ тогда и только тогда, когда $(Tu, Tv) = (u, v)$ для всех $u, v \in V$. Если на многообразии M задана $Sp(n)$-структура $B_{Sp(n)}$, то на касательном пространстве в каждой точке из M мы можем определить невырожденную антисимметрическую билинейную форму. Действительно, пусть p — произвольная точка из $B_{Sp(n)}$ и $\pi(p) = x$. Для любых касательных векторов X и Y в точке x положим $(X, Y) = (p^{-1}(X), p^{-1}(Y))$. Для любой другой принадлежащей $B_{Sp(n)}$ точки $pT \in \pi^{-1}(x)$ имеем, согласно (2.1), $((pT)^{-1}(X), (pT)^{-1}(Y)) = (p^{-1}(X), p^{-1}(Y))$, так что это определение не зависит от выбора точки $p \in \pi^{-1}(x) \cap B_{Sp(n)}$.

Легко проверить, что верно и обратное — задание в каждом касательном пространстве многообразия M невырожденной антисимметрической билинейной формы (дифференцируемо изменяющейся от точки к точке), т. е. задание *внешней 2-формы максималь-*

ного ранга, определяет $Sp(n)$-структуру. Итак, задать $Sp(n)$-структуру на многообразии M — это то же самое, что задать на M внешнюю 2-форму Ω максимального ранга. По этой причине $B_{Sp(n)}$ называют иногда *почти гамильтоновой структурой.* Гамильтонова структура удовлетворяет дополнительному условию $d\Omega = 0$ (см. определение 7.1 гл. III).

6) Пусть V есть $2n$-мерное векторное пространство, и пусть J — такое линейное преобразование пространства V, что $J^2 = -\mathrm{id}$. Обозначим через $GL(n, C)$ подгруппу группы $GL(V)$, состоящую из таких линейных преобразований $T \in GL(V)$, для которых $TJ = JT$. Эта группа имеет следующий смысл. Пространство V есть векторное пространство над полем вещественных чисел. Линейное преобразование J позволяет нам превратить V в векторное пространство над полем комплексных чисел. Для этого надо определить умножение на i. Мы сделаем это, положив $iv = Jv$. Так как $J^2 = -\mathrm{id}$, то, как легко проверить, тем самым на V определяется структура комплексного векторного пространства. При этом не каждое линейное преобразование T пространства V, рассматриваемого как вещественное векторное пространство, является комплексным линейным преобразованием; для этого оно должно быть перестановочно с умножением на i. Это означает, что $TJ = JT$, т. е. $T \in GL(n, C)$. Назовем $GL(n, C)$-структуру на многообразии M *почти комплексной* структурой.

Задание почти комплексной структуры на многообразии M эквивалентно заданию в каждом касательном пространстве $T_x(M)$ линейного преобразования J_x (дифференцируемо зависящего от x), для которого $J_x^2 = -\mathrm{id}$. Действительно, пусть задана $GL(n, C)$-структура $B_{GL(n, C)}$. Если $p \in B_{GL(n, C)}$ и $\pi(p) = x$, то положим $J_x = pJp^{-1}$. Согласно равенству (2.1), имеем $(pT)J(pT)^{-1} = p(TJT^{-1})p^{-1} = pJp^{-1}$ для всех $T \in GL(n, C)$, так что преобразование J_x корректно определено. Обратно, задание в каждой точке x преобразования J_x определяет $GL(n, C)$-структуру (читателю нетрудно будет убедиться в этом). Если многообразие M обладает почти комплексной структурой, то все его касательные пространства превращаются в комплексные векторные пространства. Смысл слова «почти» состоит в том, что наиболее важным частным случаем такой структуры является *комплексная структура.* Она определяется следующим образом: говорят, что многообразие M обладает комплексной структурой, если задан атлас $\{(U_\alpha, h_\alpha)\}$, где $h_\alpha = (x_\alpha^1, \ldots, x_\alpha^n, y_\alpha^1, \ldots, y_\alpha^n)$, такой, что если положить $z_\alpha^1 = x_\alpha^1 + iy_\alpha^1, \ldots, z_\alpha^n = x_\alpha^n + iy_\alpha^n$ и записать функции перехода

$$x_\alpha^i = x_\alpha^i(x_\beta^1, \ldots, x_\beta^n, y_\beta^1, \ldots, y_\beta^n),$$
$$y_\alpha^i = y_\alpha^i(x_\beta^1, \ldots, x_\beta^n, y_\beta^1, \ldots, y_\beta^n)$$

в виде

$$z^i_\alpha = z^i_\alpha (x^1_\beta, \ldots, x^n_\beta, y^1_\beta, \ldots, y^n_\beta),$$

то функции z^i_α будут комплексно аналитическими функциями от z^j_β: $z^i_\alpha = z^i_\alpha (z^1_\beta, \ldots, z^n_\beta)$. Короче говоря, многообразие с комплексной структурой, или комплексное многообразие, есть такое многообразие, на котором можно ввести комплексные координаты так, чтобы функции перехода были комплексно аналитическими. Читатель без труда может убедиться в том, что комплексная структура определяет почти комплексную структуру. Однако не всякая почти комплексная структура получается из некоторой комплексной структуры.

7) Пусть V — (произвольное) n-мерное векторное пространство и $SL(V)$ — множество всех его линейных преобразований с определителем 1 (т. е. множество всех T, для которых $\bigwedge^n (T) = \mathrm{id}$). Предлагаем читателю проверить, что задать $SL(V)$-структуру на многообразии M — это то же самое, что задать внешнюю дифференциальную форму степени n на M (всюду отличную от нуля).

8) Пусть V — векторное пространство с выбранной ориентацией, а $GL(V)^+$ — подгруппа, состоящая из всех линейных преобразований, сохраняющих ориентацию. Читатель может проверить, что $GL(V)^+$-структура на M — это то же самое, что ориентация многообразия M.

Замечания.

a) Из приведенных выше примеров ясно, что любая «структура» на многообразии, зависящая только от свойств «первого порядка» (т. е. определяемая полем величин, описанных в § 6 гл. II), соответствует некоторой G-структуре. Большую часть развиваемой нами техники можно легко обобщить на структуры «высших порядков». Однако для простоты мы ограничимся структурами первого порядка.

b) Если заданы многообразие M и подгруппа G группы $GL(V)$, то на M может и не существовать G-структуры. Так, например, если многообразие M неориентируемо, то на нем не существует структур из примеров 8 и 7 (а также из примеров 1, 5 и 6). Как мы видели в последнем параграфе гл. VI, на сфере S^2 не существует не обращающегося в нуль векторного поля, и, значит, она не обладает структурой из примера 1. С другой стороны, мы доказали, что любое многообразие допускает риманову, а значит, и конформную, структуры. В общем случае вопрос о том, когда на многообразии существует та или иная G-структура, представляет собой тонкую топологическую проблему и выходит за рамки этой книги.

c) Если B_G есть G-структура на M, а U — открытое подмножество в M, то $\pi^{-1}(U)$ есть G-структура на U (где π — проекция $B_G \to$

$\to M$). Мы в основном сосредоточим внимание на локальных свойствах G-структур, и поэтому часто будем рассматривать ограничение G-структуры на все меньшую и меньшую окрестность $U \subset M$.

Пусть φ — диффеоморфизм многообразия M_1 на многообразие M_2. Так же как в § 6 гл. II, отображение φ индуцирует диффеоморфизм φ_* расслоения $\mathcal{F}(M_1)$ на $\mathcal{F}(M_2)$. Поэтому если B_G^1 и B_G^2 суть G-структуры на M_1 и M_2, то естественно возникает вопрос, в каком случае $\varphi_*(B_G^1) = B_G^2$

Определение 2.2. Пусть B_G^1 и B_G^2 суть G-структуры соответственно на M_1 и M_2. Диффеоморфизм φ: $M_1 \to M_2$ называется *изоморфизмом G-структуры B_G^1 на G-структуру B_G^2*, если $\varphi_*(B_G^1) = B_G^2$. Мы будем говорить, что B_G^1 и B_G^2 *изоморфны*, если существует изоморфизм G-структуры B_G^1 на B_G^2. Изоморфизм G-структуры B_G^1 на себя называется *автоморфизмом*.

Так, например, изоморфизм двух римановых структур есть изометрия; изоморфизм двух почти гамильтоновых структур на M_1 и M_2 есть такой диффеоморфизм φ, что $\varphi^*\Omega_2 = \Omega_1$ [где Ω_i — форма, определяющая рассматриваемую почти гамильтонову структуру на M_i $(i = 1, 2)$].

Определение 2.3. Пусть B_G^1 и B_G^2 суть G-структуры на M_1 и M_2. Пусть $x \in M_1$ и $y \in M_2$. Мы скажем, что B_G^1 и B_G^2 *локально эквивалентны в* (x, y), если существуют окрестность U точки x, окрестность V точки y и такой изоморфизм φ G-структуры $B_G^1|U$ на $B_G^2|V$, что $\varphi(x) = y$. [Здесь $B_G^1|U$ — ограничение структуры B_G^1 на открытое множество U, а $B_G^2|V$ — ограничение структуры B_G^2 на V.]

Общая проблема эквивалентности состоит в нахождении (для данной группы G) критерия того, что две G-структуры локально эквивалентны.

Заметим, что многие теоремы этой книги представляют собой решение проблемы эквивалентности для различных частных случаев. Например, теорема Фробениуса (теорема 5.1 гл. III) утверждает, что дифференциальная система (т. е. G-структура из примера 2) локально эквивалентна специальной дифференциальной системе особенно простого вида (определяемой касательными к кривым $x^{k+1} = \mathrm{const}, \ldots, x^n = \mathrm{const}$), если выполнены некоторые условия интегрируемости (равенства (5.2) гл. III). Теорема Дарбу (теорема 6.1 гл. III) утверждает, что любые две гамильтоновы структуры (т. е. $Sp(n)$-структуры из примера 5, удовлетворяющие дополнительному условию $d\Omega = 0$) локально эквивалентны. Предложение 3.1 гл. VI показывает, что риманово многообразие локально изоморфно E^n, если в расслоении ортонормированных реперов существуют формы Ω_M^{ij}, удовлетворяющие условиям (3.7) и (3.11). Теорема 2.4 гл. V утверждает, что любые две группы Ли (т. е. $\{e\}$-структуры определенного типа) локально эквивалентны, если они имеют одинаковые структурные константы [1]).

Между первыми тремя теоремами, упомянутыми выше, и последней имеется существенное различие. В первых трех теоремах содержатся необходимые и достаточные условия того, чтобы G-структура была локально эквивалентна G-структуре особенно простого вида. Дадим общее определение. Заметим, что для любой группы G векторное пространство V можно рассматривать как дифференцируемое многообразие, снабженное естественной G-структурой. Действительно, структура векторного пространства позволяет отождествить $T_v(V)$ с V для всех $v \in V$, т. е. определяет абсолютный параллелизм, или $\{e\}$-структуру, на V. Если мы рассмотрим в каждой точке $v \in V$ множество всех реперов, получаемых из стандартного репера действием элементов из G, то получим G-структуру на V. Эта G-структура называется (*стандартной*) *плоской G-структурой*. Так, например, плоская $O(n)$-структура есть евклидово пространство.

Определение 2.4. G-структура называется *локально плоской*, если она локально эквивалентна плоской G-структуре.

Первые три теоремы, упомянутые выше, дают необходимые и достаточные условия того, чтобы соответствующие G-структуры были локально плоскими. Теорема 2.4 гл. V является теоремой другого типа, поскольку плоская $\{e\}$-структура есть (коммутативная) группа Ли V, а произвольная (некоммутативная) группа Ли не является локально плоской.

Упражнение 2.1. Пусть B_G есть G-структура на M. Показать, что B_G является локально плоской тогда и только тогда, когда на M существует такой атлас $\{(U_\alpha, h_\alpha)\}$, где $h_\alpha = (x_\alpha^1, \ldots, x_\alpha^n)$, что при каждом $x \in U_\alpha$ репер $\left(\frac{\partial}{\partial x_\alpha^1}(x), \ldots, \frac{\partial}{\partial x_\alpha^n}(x)\right)$ принадлежит B_G.

---

[1]) Часто представляет интерес проблема, несколько отличная от проблемы эквивалентности, которую можно назвать проблемой *сопряженной* эквивалентности. Пусть G_1 и G_2 — сопряженные подгруппы в $GL(V)$. Назовем структуры $B_{G_1}(M)$ и $B_{G_2}(M)$ сопряженными, если существует такой элемент $a \in GL(V)$, что $R_a(B_{G_1}(M)) = B_{G_2}(M)$ (в частности, $a^{-1}G_1a = G_2$).

Проблема сопряженной эквивалентности состоит в том, чтобы решить, когда данная G-структура эквивалентна G-структуре, сопряженной с другой данной G-структурой. Например, для $\{e\}$-структур групп Ли локальный изоморфизм (являющийся сопряженной эквивалентностью) представляет больший интерес, чем просто эквивалентность (включающая в себя также выбор базисов алгебр Ли). По этому поводу см. статью Гийемина и Стернберга An algebraic model of transitive differential geometry, *Bull. Amer. Math. Soc.* **70** (1964), 16—47.

Приступим теперь к изучению методов, применяемых для решения общей проблемы эквивалентности. Заметим сначала, что, поскольку B_G есть подмногообразие в $\mathcal{F}(M)$, ограничение формы ω на B_G будет V-значной формой на B_G. Если это не вызовет недоразумений, мы будем обозначать ее той же буквой ω. [Это согласуется с обозначениями гл. V для $\{e\}$-структуры на группе Ли. В гл. VI мы обозначали соответствующую форму для римановой структуры на M через ω_M.] Равенства (2.1)—(2.5) остаются справедливыми для произвольной G-структуры, если только считать, что $a \in G$ в равенствах (2.1) и (2.3) и $A \in g$ в равенствах (2.4) и (2.5), где g — алгебра Ли группы Ли G (и, значит, подалгебра алгебры Ли $gl(V)$). Мы воспользуемся этими равенствами, чтобы построить некоторую (векторнозначную) функцию, определенную на B_G внутренним образом.

Пусть B_G есть G-структура на многообразии M и $p \in B_G$. Пусть $H_1 \subset T_p(B_G)$ — дополнение к вертикальному подпространству[1]) в точке p. Таким образом, H_1 есть n-мерное подпространство касательного пространства, порождающее вместе с касательным пространством слоя все пространство $T_p(B_G)$. [Например, если $\mathcal{H}$ — связность на B_G, то в качестве H_1 можно взять $\mathcal{H}(p)$.] Линейная форма ω отображает $T_p(B_G)$ на V, причем ядро этого отображения состоит из векторов X, для которых $\pi_* X = 0$, т. е. из векторов, касательных к слою. Следовательно, форма ω определяет изоморфизм пространства H_1 на V. Пусть H_2 — другое дополнение к вертикальному подпространству в точке p. Пусть v — вектор из V, а $X_1 \in H_1$ и $X_2 \in H_2$ — такие векторы, что $\langle X_1, \omega \rangle = v$ и $\langle X_2, \omega \rangle = v$. Тогда, согласно определению формы ω (см. (2.2)), имеем

$$p(v) = \pi_*(X_1) = \pi_*(X_2).$$

Следовательно, $\pi_*(X_2 - X_1) = 0$, т. е. вектор $X_2 - X_1$ вертикален. Пользуясь естественным отождествлением касательного пространства слоя с алгеброй Ли g, мы можем рассматривать $X_2 - X_1$ как элемент алгебры g. Итак,

пара дополнений H_1 и H_2 определяет отображение $S_{H_1, H_2}: V \to g$.

Легко проверить, что это отображение линейно, а также, что

при фиксированном H_1 подпространство H_2 однозначно определяется отображением S_{H_1, H_2}.

Наконец, легко видеть, что

для заданных дополнения H_1 и отображения $S \in \mathrm{Hom}(V, g)$ существует такое подпространство H_2, что $S = S_{H_1, H_2}$.

---

[1]) Вертикальным подпространством называется касательное пространство слоя.— *Прим. перев.*

Иначе говоря, если фиксировать одно дополнение H_1, то множество всех дополнений к вертикальному подпространству параметризуется элементами из $\operatorname{Hom}(V, g)$.

Рассмотрим теперь внешнюю дифференциальную форму $d\omega$. Для каждого $p \in B_G$ форма $d\omega$ определяет отображение $\bigwedge^2 (T_p(B_G)) \to V$. Пусть H — дополнение к вертикальному подпространству в точке p. Тогда $\bigwedge^2(H)$ есть подпространство в $\bigwedge^2(T_p(B_G))$, и, значит, ограничение формы $d\omega$ на $\bigwedge^2(H)$ определяет отображение $\bigwedge^2(H) \to V$. Поскольку $\bigwedge^2(H)$ отождествляется с $\bigwedge^2(V)$, мы получаем отображение $\bigwedge^2(V) \to V$; обозначим его c_H. По определению, если u и v — векторы из V, то

$$c_H(u \wedge v) = \langle X \wedge Y \mid d\omega \rangle, \tag{2.6}$$

где X и Y — такие векторы из H, что $\langle X, \omega \rangle = u$, $\langle Y, \omega \rangle = v$.

Таким образом, мы сопоставили каждому дополнению H к вертикальному подпространству в точке p некоторый элемент $c_H \in \operatorname{Hom}(V \wedge V, V)$. Выясним теперь, как c_H зависит от H. Для этого возьмем два дополнения H_1 и H_2 к вертикальному подпространству в точке p. Тогда

$$c_{H_2}(u \wedge v) - c_{H_1}(u \wedge v) = \langle X_2 \wedge Y_2 \mid d\omega \rangle - \langle X_1 \wedge Y_1 \mid d\omega \rangle,$$

где X_i и Y_i — такие векторы из H_i, что $\langle X_i, \omega \rangle = u$, $\langle Y_i, \omega \rangle = v$ $(i = 1, 2)$. Это равенство можно переписать в следующем виде:

$$\begin{aligned} c_{H_2}(u \wedge v) - c_{H_1}(u \wedge v) &= \\ &= \langle (X_2 - X_1) \wedge Y_2 \mid d\omega \rangle + \langle X_1 \wedge (Y_2 - Y_1) \mid d\omega \rangle = \\ &= \langle Y_2, (X_2 - X_1) \lrcorner\, d\omega \rangle - \langle X_1, (Y_2 - Y_1) \lrcorner\, d\omega \rangle. \end{aligned}$$

Но $X_2 - X_1$ есть вертикальный вектор, равный, согласно определениям, вектору $\widetilde{S_{H_1, H_2}}(u)_p$. [Напомним, что $S_{H_1, H_2}(u)$ есть элемент из g, а $\widetilde{S_{H_1, H_2}}(u)_p$ — значение соответствующего ему вертикального векторного поля в точке p.] По формуле (2.5) имеем $\widetilde{S_{H_1, H_2}}(u) \lrcorner\, d\omega = -S_{H_1, H_2}(u)\,\omega$. Применяя подобные рассуждения к вектору $Y_1 - Y_2$ и учитывая, что $\langle Y_2, \omega \rangle = v$, а $\langle X_1, \omega \rangle = u$, получаем

$$c_{H_2}(u \wedge v) - c_{H_1}(u \wedge v) = S_{H_1, H_2}(v)\, u - S_{H_1, H_2}(u)\, v. \tag{2.7}$$

[Напомним, что $S_{H_1, H_2}(v)$ есть элемент из g, а g действует на V, так что $S_{H_1, H_2}(v)\, u$ есть элемент из V.] Мы можем переписать равенство (2.7) в несколько другой форме. Рассмотрим пространство $\operatorname{Hom}(V, g)$. На этом пространстве действует оператор антисимметризации $\mathcal{A}\colon \operatorname{Hom}(V, g) \to \operatorname{Hom}(V, g)$, определяемый следующим образом: если $S \in \mathrm{Hom}(V, g)$, то

$$\mathcal{A}(S)(u)v = S(u)v - S(v)u.$$

[Поскольку g — подпространство в $\mathrm{Hom}(V, V)$, преобразование $\mathcal{A}(S)(u) \in g$ однозначно определяется заданием его действия $\mathcal{A}(S)(u)v$ на всех $v \in V$.] Ясно, что $\mathcal{A}(S)(u)v = -\mathcal{A}(S)(v)u$, так что $\mathcal{A}(S)$ есть антисимметрическое билинейное отображение $V \times V \to V$; его можно рассматривать как элемент пространства $\mathrm{Hom}(V \wedge V, V)$. Другими словами, $\mathcal{A}$ есть отображение пространства $\mathrm{Hom}(V, g)$ в $\mathrm{Hom}(V \wedge V, V)$. Равенство (2.7) мы можем переписать теперь в виде

$$c_{H_2} - c_{H_1} = -\mathcal{A}(S_{H_1, H_2}). \qquad (2.8)$$

Далее, $\mathcal{A}(\mathrm{Hom}(V, g))$ есть подпространство в $\mathrm{Hom}(V \wedge V, V)$. Пусть ρ — проекция пространства $\mathrm{Hom}(V \wedge V, V)$ на факторпространство

$$\mathrm{Hom}(V \wedge V, V)/\mathcal{A}(\mathrm{Hom}(V, g)).$$

Равенство (2.8) показывает, что $c_{H_1} - c_{H_2} \in \mathcal{A}(\mathrm{Hom}(V, g))$, т. е. что $\rho(c_{H_1}) = \rho(c_{H_2})$. Итак, $\rho(c_H)$ *не зависит от выбора дополнения H в точке p*. Таким образом, мы получили корректно определенную функцию c на B_G:

$$c\colon B_G \to \mathrm{Hom}(V \wedge V, V)/\mathcal{A}(\mathrm{Hom}(V, g)),$$

задаваемую формулой

$$c(p) = \rho(c_H), \qquad (2.9)$$

где H — произвольное дополнение к вертикальному подпространству в точке p. Эта функция называется *структурной функцией* (*первого порядка*) *для* B_G. Название объясняется тем, что c является обобщением структурных констант группы Ли. Действительно, если $G = \{e\}$, то $g = 0$ и c отображает $B_{\{e\}}$ в $\mathrm{Hom}(V \wedge V, V)$. [Впрочем, это сразу видно и так, поскольку в каждой точке $p \in B_{\{e\}}$ существует только одно H, так что $c(p) = c_H$.] Для $\{e\}$-структуры $B_{\{e\}}$, определяемой группой Ли, функция c постоянна. Поскольку в этом случае V есть алгебра Ли группы Ли, не удивительно, что определяемое функцией c отображение $V \wedge V \to V$ есть не что иное, как умножение Ли на V (рассматриваемое как антисимметрическое билинейное отображение). Весьма поучительным упражнением для читателя была бы проверка этих фактов.

Выясним теперь, как структурная функция меняется вдоль слоя. Для этого выберем дополнение H в точке p и рассмотрим пространство $R_{a*}H$, являющееся дополнением к вертикальному пространству в точке $p \cdot a$. Для $u, v \in V$ найдем такие $X, Y \in H$, что $\langle X, \omega \rangle = u$ и $\langle Y, \omega \rangle = v$. Согласно формуле (2.3), для любого

$a \in G$

$$\langle R_{a*}X, \omega\rangle = a^{-1}u \qquad \text{и} \qquad \langle R_{a*}Y, \omega\rangle = a^{-1}v.$$

С другой стороны,

$$\langle R_{a*}X \wedge R_{a*}Y \mid d\omega\rangle = \langle X \wedge Y \mid R_a^* \, d\omega\rangle = a^{-1} \langle X \wedge Y \mid d\omega\rangle.$$

Следовательно,

$$c_{R_{a*}H}(a^{-1}u \wedge a^{-1}v) = a^{-1}c_H(u \wedge v),$$

или

$$c_{R_{a*}H}(u \wedge v) = a^{-1}c_H(au \wedge av). \tag{2.10}$$

Группа G действует на V, а значит, и на $V \wedge V$. Поэтому G действует на $\mathrm{Hom}(V \wedge V, V)$ следующим образом: если $a \in G$ и $L \in \mathrm{Hom}(V \wedge V, V)$, то $\sigma(a)L$ задается формулой

$$(\sigma(a)L)(u \wedge v) = aL(a^{-1}u \wedge a^{-1}v).$$

Читатель легко проверит, что это есть представление группы G в пространстве $\mathrm{Hom}(V \wedge V, V)$. Равенство (2.10) можно теперь переписать в виде

$$c_{R_{a*}H} = \sigma(a^{-1})\, c_H.$$

Читатель также без труда проверит, что $\mathscr{A}(\mathrm{Hom}(V, g))$ есть инвариантное подпространство пространства $\mathrm{Hom}(V \wedge V, V)$ относительно действия σ группы G. Поэтому в факторпространстве индуцируется некоторое представление группы G, которое мы тоже будем обозначать через σ. Тогда из формул (2.9) и (2.10) получаем

$$c(p \cdot a) = \sigma(a)^{-1}c(p). \tag{2.11}$$

Структурная функция определена внутренним образом. Поэтому (как читатель может проверить, воспользовавшись определениями) справедлива

Теорема 2.1. *Пусть B_G^1 и B_G^2 суть G-структуры соответственно на M_1 и M_2. Если φ — изоморфизм структуры B_G^1 на B_G^2, то*

$$c^2 \circ \varphi_* = c^1,$$

где c^i — структурная функция для B_G^i $(i = 1, 2)$.

Важным следствием теоремы 2.1 является

Теорема 2.2. *Структурная функция локально плоской G-структуры тождественно равна нулю.*

Для доказательства теоремы 2.2 достаточно проверить, что структурная функция стандартной плоской G-структуры тождественно равна нулю. Из (2.11) следует, что если функция c обращается в нуль в какой-нибудь точке слоя, то она равна нулю на всем слое. Согласно (2.9), если $c_H = 0$ для некоторого дополнения H в точке p, то $c(p) = 0$. Плоская G-структура B_G по определению содержит в качестве подмногообразия стандартную $\{e\}$-структуру на V. Мы будем выбирать точки p так, чтобы они лежали на этом подмногообразии, а в качестве H возьмем касательное пространство к этому подмногообразию. Тогда достаточно доказать, что форма $d\omega$ тождественно равна нулю на стандартной $\{e\}$-структуре $B_{\{e\}}$. Проекция $\pi : B_{\{e\}} \to V$ является диффеоморфизмом, поскольку структурная группа равна $\{e\}$. Поэтому можно рассмотреть форму $(\pi^{-1})^* \omega$ на V. По определению $(\pi^{-1})^* \omega = d(\mathrm{id})$, где id — тождественное отображение пространства V на себя (рассматриваемое как векторнозначная функция). Следовательно, $d\omega = 0$, что и доказывает теорему 2.2.

В общем случае обратная теорема не верна. На самом деле, как мы увидим в конце этого параграфа, для многих важных групп G структурная функция первого порядка тождественно равна нулю для всех B_G. В этом случае структурная функция первого порядка не дает никакой информации, и мы должны обращаться к инвариантам высших порядков.

Однако для некоторых групп G теорема 2.2 допускает обращение. Приведем несколько примеров. Предположим, что группа G оставляет инвариантным некоторое подпространство $V_1 \subset V$. Существует очевидная проекция $\tau : \mathrm{Hom}(V \wedge V, V) \to \mathrm{Hom}(V_1 \wedge V_1, V/V_1)$, а именно, если $T \in \mathrm{Hom}(V \wedge V, V)$ и $v_1, v_2 \in V_1$, то положим $\tau(T)(v_1 \wedge v_2)$ равным образу вектора $T(v_1 \wedge v_2) \in V$ в V/V_1. Ядро проекции τ состоит из тех T, для которых $T(v_1 \wedge v_2) \in V_1$ при любых $v_1, v_2 \in V_1$. Так как алгебра Ли g оставляет инвариантным V_1, т. е. $Av_1 \in V_1$ для всех $v_1 \in V_1$ и $A \in g$, то для любого $S \in \mathrm{Hom}(V, g)$ имеем

$$\mathscr{A}(S)(v_1 \wedge v_2) = S(v_1)v_2 - S(v_2)v_1 \in V_1$$

при любых $v_1, v_2 \in V_1$. Таким образом, $\mathscr{A}(S) \subset \mathrm{Ker}\,\tau$. Следовательно, мы имеем проекцию

$$\eta\colon \mathrm{Hom}(V \wedge V, V)/\mathscr{A}(\mathrm{Hom}(V, g)) \to \mathrm{Hom}(V_1 \wedge V_1, V/V_1), \quad (2.12)$$

и $\eta(c)$ есть функция на B_G со значениями в $\mathrm{Hom}(V_1 \wedge V_1, V/V_1)$.

Упражнение 2.2. Проверить, что если G есть группа всех линейных преобразований, оставляющих подпространство V_1 инвариантным (и, значит, B_G есть G-структура из примера 2), то $\mathscr{A}(\mathrm{Hom}(V, g)) = \mathrm{Ker}\,\tau$ и η — изоморфизм. Показать, что в этом случае теорема 2.2 вместе с обратной теоремой в точности эквивалентны теореме Фробениуса.

Упражнение 2.3. Пусть B_G — почти гамильтонова структура, определяемая формой Ω на M. Показать, что структурная функция на B_G

тождественно равна нулю тогда и только тогда, когда $d\Omega = 0$. Таким образом, в этом случае теорема 2.2 вместе с обратной теоремой эквивалентны теореме Дарбу (теорема 6.1 гл. III).

Важным случаем, когда справедливо обращение теоремы 2.2, является также случай почти комплексной структуры. Утверждение состоит в том, что почти комплексная структура с тождественно равной нулю структурной функцией является комплексной. Это теорема Ньюлендера и Ниренберга [14]; доказательство ее основано на глубокой технике теории дифференциальных уравнений в частных производных.

Вернемся теперь к теореме 2.1. Она утверждает, что для установления изоморфизма между двумя G-структурами B_G^1 и B_G^2 мы должны уметь строить такое отображение $\varphi_*\colon B_G^1 \xrightarrow[\text{на}]{} B_G^2$, что $c^2 \circ \varphi_* = c^1$. Задачи такого рода в общем случае весьма сложны. Если заданы два многообразия и по функции на каждом из них, то установить, когда существует отображение многообразий, переводящее одну функцию в другую, очень трудно. Единственный простой (и тривиальный) случай, — когда одна из функций константа. Тогда другая функция также должна быть константой и, точнее, той же самой константой. Таким образом, мы можем сформулировать

Следствие 2.1. *Пусть B_G есть G-структура, структурная функция которой — константа. Тогда любая G-структура, локально эквивалентная B_G, имеет эту константу в качестве своей структурной функции.*

Упражнение 2.4. Назовем G-структуру B_G локально репер-транзитивной, если она обладает следующим свойством: для любой пары точек p и $q \in B_G$, таких, что $\pi(p) = x$ и $\pi(q) = y$, существует такой локальный (x, y)-автоморфизм $\varphi\colon B_G \to B_G$, что $\varphi_*(p) = q$. Показать, что структурная функция любой локально репер-транзитивной G-структуры есть константа. [Обратное утверждение в общем случае снова не верно.]

Даже если структурная функция не постоянна, в нашем распоряжении имеются некоторые средства, позволяющие проверить необходимые условия теоремы 2.1. Идея состоит в том, чтобы более тщательно исследовать равенство (2.11). Вместо того чтобы пытаться сформулировать широкую теорему, покрывающую все частные случаи, мы опишем общую процедуру, как, пользуясь равенствами (2.11) и теоремой 2.1, получить необходимые условия эквивалентности G-структур, и проиллюстрируем ее в одном частном случае.

Поскольку группа G действует (с помощью представления σ) на $\mathrm{Hom}(V \wedge V, V)/\mathcal{A}(\mathrm{Hom}(V, g))$, это пространство разлагается на орбиты относительно действия группы G. В связи с этим введем отношение эквивалентности, полагая $w_1 \sim w_2$, если существует такой элемент $a \in G$, что $\sigma(a) w_1 = w_2$. Тогда каждый класс эквивалентности является дифференцируемым многообразием [которое называется орбитой группы G в $\mathrm{Hom}(V \wedge V, V)/\mathcal{A}(\mathrm{Hom}(V, g))$]. Разные орбиты могут иметь разные размерности. Например, поскольку представление линейно, нуль остается неподвижным при действии любых элементов из G, и, следовательно, является нульмерной орбитой. Обычно имеет место следующая альтернатива: либо множество орбит максимальной размерности дискретно, либо эти орбиты образуют (локально) непрерывное семейство.

Рассмотрим сначала случай, когда множество орбит максимальной размерности дискретно (и число их конечно). Тогда они являются открытыми множествами в $\mathrm{Hom}(V \wedge V, V)/\mathcal{A}(\mathrm{Hom}(V, g))$. Но структурная функция c на G-структуре B_G непрерывна. Поэтому если $c(p)$ лежит на орбите максимальной размерности, то $c(q)$ будет лежать на той же орбите для всех $q \in \pi^{-1}(U)$, где U — некоторая окрестность точки $\pi(p)$ [1]).

Назовем $x \in M$ *точкой общего положения*, если $c(\pi^{-1}(x))$ лежит на орбите максимальной размерности. Ограничимся рассмотрением проблемы локальной эквивалентности в точках общего положения $x \in M_1$ и $y \in M_2$. Тогда по теореме 2.1 *структурные функции c^1 и c^2 локально эквивалентных G-структур принимают значения в одной и той же орбите группы G в* $\mathrm{Hom}(V \wedge V, V)/\mathcal{A}(\mathrm{Hom}(V, g))$. Пусть w — фиксированная точка этой орбиты и H — группа изотропии точки w, т. е. подгруппа группы G, состоящая из тех $a \in G$, для которых $\sigma(a) w = w$. Пусть B_H^1 — подмногообразие в B_G^1, состоящее из всех точек $p \in B_G^1$, для которых $c(p) = w$. [Заметим, что, поскольку группа G транзитивно действует на орбите, из равенства (2.11) следует, что в каждом слое есть точка p, для которой $c(p) = w$. Пользуясь рассуждениями на стр. 231, можно показать, что B_H^1 есть подмногообразие в B_G^1.] Это подмногообразие является в действительности H-структурой. Аналогично строится H-структура B_H^2. Если φ — изоморфизм G-структур, то $c^2 \circ \varphi_* = c^1$, откуда $\varphi_*[(c^1)^{-1}(w)] = (c^2)^{-1}(w)$, и, значит, $\varphi_*(B_H^1) = B_H^2$. Поэтому локальный изоморфизм G-структур B_G^1 и B_G^2 является также локальным изоморфизмом H-структур B_H^1 и B_H^2. Обратное очевидно: если φ — изоморфизм H-структур, то, расширяя структурные группы, мы получим изоморфизм G-структур. Таким образом, мы свели проблему эквивалентности к меньшей группе H.

---

[1]) Заметим, что, согласно формуле (2.11), образ любого слоя $\pi^{-1}(x)$ при отображении c попадает на одну орбиту.— *Прим. перев.*

Аналогичный анализ можно провести и в случае непрерывных орбит [1]). В этом случае орбиты максимальной размерности группируются в конечное число семейств. Объединение орбит каждого семейства образует открытое множество в $\operatorname{Hom}(V \wedge V, V)/\mathscr{A}(\operatorname{Hom}(V, g))$. Каждое из этих открытых множеств можно рассматривать как «расслоенное пространство», слоями которого являются орбиты. Вместо того чтобы фиксировать по элементу в каждой из конечного числа максимальных орбит, как в дискретном случае, мы должны выбрать подходящее «сечение» этого расслоенного пространства. Точнее, мы выбираем подмногообразие W из $\operatorname{Hom}(V \wedge V, V)/\mathscr{A}(\operatorname{Hom}(V, g))$, которое пересекается с каждой орбитой максимальной размерности только в одной точке. Подгруппа, оставляющая эту точку неподвижной, будет, вообще говоря, зависеть от точки. Затем, как и раньше, мы сводим проблему эквивалентности к подмногообразию $c^{-1}(W)$. Однако теперь $c^{-1}(W)$ не является G-структурой в том смысле, как мы ее определяли, поскольку группа теперь меняется от точки к точке [2]). Поэтому для изучения проблемы эквивалентности в полной общности следовало бы рассматривать эти более общие объекты. Ради простоты мы не будем здесь это делать. Заметим, что для многих «хороших» групп Ли из стандартных теорем теории групп Ли следует возможность выбора такого подмногообразия W, для которого подмногообразие $c^{-1}(W)$ было бы G-структурой.

В любом случае проблема локальной эквивалентности (в точках общего положения) сводится к подгруппе H. Тогда мы строим структурные функции для полученных H-структур и снова используем теорему 2.1. Эту процедуру можно применять до тех пор, пока дальнейшая редукция структурной группы окажется невозможной. Редукция структурной группы выгодна по двум причинам. Во-первых, мы получаем все более и более тонкие необходимые условия эквивалентности в терминах структурных функций, возникающих на каждой стадии. Они могут позволить нам различить две неэквивалентные G-структуры. Во-вторых, если группа «достаточно мала» (в каком смысле — мы уточним в следующем параграфе), то мы можем дать необходимые и достаточные условия локальной эквивалентности.

Проиллюстрируем [3]) эту процедуру редукции, применив ее к случаю дифференциальной системы на пятимерном многообразии. [Дальнейший текст

---

[1]) Мы не будем доказывать никаких утверждений для непрерывного случая, а просто опишем общую процедуру. В каждом частном случае все упомянутые в рассуждениях объекты следует построить явным образом.

[2]) Подходящим геометрическим понятием является понятие дифференцируемого группоида Эресмана.

[3]) Читатель, не желающий вникать в это довольно длинное обсуждение специального примера, может перейти сразу к общим рассуждениям на стр. 349.

представляет собой вольный перевод короткого отрывка из статьи Э. Картана Sur les systèmes de Pfaff à cinq variables [7].] Как мы уже видели, дифференциальная система есть G-структура, где G — группа всех линейных преобразований, оставляющих инвариантным некоторое подпространство $V_1 \subset V$. В этом случае пространство $\mathrm{Hom}(V \wedge V, V)/\mathscr{A}(\mathrm{Hom}(V, g))$ можно отождествить с пространством $\mathrm{Hom}(V_1 \wedge V_1, V/V_1)$. Группа G действует на V_1 и на V/V_1, а значит, и на $\mathrm{Hom}(V_1 \wedge V_1, V/V_1)$. Это действие (как читатель должен проверить) переходит в действие σ группы G на $\mathrm{Hom}(V \wedge V, V)/\mathscr{A}(\mathrm{Hom}(V, g))$ при отождествлении этих пространств.

Рассмотрим сначала случай, когда коразмерность подпространства V_1 в V равна единице (а $\dim V$ произвольна). В этом случае V/V_1 есть вещественная прямая, и G действует на ней при помощи умножений. Тогда $\mathrm{Hom}(V_1 \wedge V_1, V/V_1)$ есть пространство антисимметрических билинейных форм на V_1. Две такие формы $(,)_1$ и $(,)_2$ лежат на одной орбите группы G, если существуют число λ и невырожденное линейное преобразование T пространства V_1, такие, что $(u, v)_1 = \lambda (Tu, Tv)_2$ для всех $u, v \in V_1$. Теорема 5.1 гл. I показывает, что формы $(,)_1$ и $(,)_2$ лежат на одной орбите тогда и только тогда, когда они имеют одинаковые ранги. Таким образом, существует конечное число орбит. Орбита максимальной размерности соответствует максимальному рангу, орбита нулевой размерности состоит из нулевой формы.

Небольшое обобщение теоремы 6.1 гл. III (теоремы Дарбу) показывает, что ранг — единственный инвариант дифференциальной системы, т. е. две дифференциальные системы одного ранга локально эквивалентны. Заметим, что в этой теореме мы разрешаем структурной функции c принимать значения в любой орбите (а не только в орбите максимальной размерности). Однако мы предполагаем (чтобы применить теорему Дарбу), что если функция c принимает значение в какой-то орбите, то она принимает значения в этой орбите на некотором открытом множестве. Например, в случае $c = 0$ система вполне интегрируема и теорема Дарбу сводится к теореме Фробениуса. Если не требовать, чтобы для точек, близких к данной, функция c принимала значения в той же орбите, то положение резко осложнится, и в этом случае почти ничего не известно.

Пусть теперь подпространство V_1 имеет произвольную коразмерность. Оказывается, что первый случай, который не может быть полностью проанализирован на основе теорем Фробениуса и Дарбу, имеет место, когда $\dim V = 5$. Поэтому мы изучим этот случай. Если $\dim V_1 = 1$, то делать нечего (все системы эквивалентны), а если $\dim V_1 = 4$, то все описывается теоремой Дарбу. Поэтому представляют интерес только случаи $\dim V_1 = 2$ и $\dim V_1 = 3$. Рассмотрим сначала случай, когда $\dim V_1 = 2$. Группа G есть группа всех невырожденных линейных преобразований, оставляющих инвариантным подпространство V_1. Если выбрать базис e_1, e_2, e_3, e_4, e_5 пространства V так, чтобы векторы e_4 и e_5 порождали V_1, то группу G можно отождествить с группой всех невырожденных матриц вида

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} - & - & - & 0 & 0 \\ - & - & - & 0 & 0 \\ - & - & - & 0 & 0 \\ \hline - & - & - & - & - \\ - & - & - & - & - \end{array}\right),$$

имеющих в правом верхнем углу нули, а в остальных местах — произвольные элементы. Группа G имеет размерность 19. Поскольку мы будем последовательно редуцировать эту группу (и G-структуру), удобно обозначать получающиеся группы, указывая их размерности. Так, нашу исходную группу мы будем обозначать G_{19}. Структурная функция группы G_{19} принимает значения в $\mathrm{Hom}(V_1 \wedge V_1, V/V_1)$. Так как подпространство V_1 двумерно, то $V_1 \wedge V_1$ одномерно, а V/V_1 трехмерно. Следовательно, пространство $\mathrm{Hom}(V_1 \wedge V_1, V/V_1)$ трехмерно. Как легко видеть, группа G_{19} действует транзитивно на ненулевых векторах этого пространства. Другими словами, имеется ровно две орбиты: нульмерное многообразие, состоящее из нулевого вектора, и трехмерное многообразие, состоящее из всех ненулевых векторов. Если структурная функция тождественно равна нулю, то система вполне интегрируема, и все такие системы локально эквивалентны. Если структурная функция обращается в нуль в некоторой точке, но не равна нулю ни в какой окрестности этой точки, то наша процедура не применима. Рассмотрим поэтому случай, когда структурная функция всюду отлична от нуля. Выберем определенный элемент из $\mathrm{Hom}(V_1 \wedge V_1, V/V_1)$, а именно, элемент w, отображающий $e_4 \wedge e_5$ в $\{e_3\}$ (где $e_1, \ldots, e_5$ — выбранный нами базис, а $\{e_3\}$ — класс эквивалентности вектора $e_3 \bmod V_1$). Наша процедура тогда редуцирует $B_{G_{19}}$ к $B_{G_{16}}$, где G_{16} — подгруппа группы G_{19}, состоящая из всех $a \in G_{19}$, для которых

$$w(au \wedge av) = aw(u \wedge v)$$

при любых $u, v \in V_1$ (действие элемента a в правой части — это действие, индуцированное на факторпространстве V/V_1). В соответствии с нашим выбором базиса $e_1, \ldots, e_5$ и элемента w группа G_{16} может быть отождествлена с группой всех невырожденных матриц вида

$$(G_{16}): \quad \left(\begin{array}{ccc|cc} - & - & 0 & 0 & 0 \\ - & - & 0 & 0 & 0 \\ - & - & \Delta & 0 & 0 \\ \hline - & - & - & \alpha & \beta \\ - & - & - & \gamma & \delta \end{array}\right), \qquad \text{где } \Delta = \alpha\delta - \beta\gamma,$$

а ее алгебра Ли g_{16} — с множеством матриц вида

$$(g_{16}): \quad \left(\begin{array}{ccc|cc} - & - & 0 & 0 & 0 \\ - & - & 0 & 0 & 0 \\ - & - & a_1 + a_4 & 0 & 0 \\ \hline - & - & - & a_1 & a_2 \\ - & - & - & a_3 & a_4 \end{array}\right)$$

(где прочерки обозначают произвольные числа). Теперь мы должны исследовать область значений структурной функции G_{16}-структуры $B_{G_{16}}$. Эта структурная функция принимает значения в

$$\mathrm{Hom}(V \wedge V, V/V_1)/\mathscr{A}(\mathrm{Hom}(V, g_{16})).$$

Согласно нашей общей процедуре, мы должны изучить действие группы G на этом пространстве. Поскольку это требует довольно неприятных вычислений, мы поступим несколько иначе. Заметим, что группа G_{16} оставляет инвариантным трехмерное подпространство, натянутое на e_3, e_4 и e_5. [Действительно, она оставляет инвариантным w, а значит, и одномерное подпространство $w(V_1)$ из V/V_1. Но пространство, натянутое на e_3, e_4 и e_5, есть в точности прообраз пространства $w(V_1)$ в V и, следовательно, оно тоже остается инвариантным.] Обозначим это подпространство через W. Так как G_{16} оставляет W инвариантным, существует естественная проекция

$$\chi: \mathrm{Hom}(V \wedge V, V)/\mathscr{A}(\mathrm{Hom}(V, g_{16})) \to \mathrm{Hom}(W \wedge W, V/W).$$

Эта проекция не будет изоморфизмом, поскольку G_{16} не является группой всех линейных преобразований, оставляющих инвариантным W. Тем не менее мы можем использовать функцию $\chi \circ c_{16}$ для того, чтобы редуцировать группу. [Таким образом, мы рассматриваем только «часть» структурной функции для редукции группы. Этот прием часто бывает полезен.] Поскольку подпространство W трехмерно, таким же будет и $W \wedge W$, тогда как пространство V/W двумерно. Следовательно, элементы из $\mathrm{Hom}\,(W \wedge W,\ V/W)$ (рассматриваемые как линейные отображения) могут иметь ранг 0, 1 или 2. [Если функция $\chi \circ c_{16}$ тождественно равна нулю, то соответствующая дифференциальная система вполне интегрируема. Из теорем Дарбу и Фробениуса немедленно следует тогда, что все такие структуры локально эквивалентны. Если значения функции $\chi \circ c_{16}$ всегда имеют ранг 1, то внимательный анализ (основанный на дальнейшей редукции группы) показывает, что ситуация полностью описывается теоремами Фробениуса и Дарбу.] Общим случаем является случай, когда ранг функции $\chi \circ c_{16}$ всюду равен двум. Заметим, что функция $\chi \circ c_{16}$ не произвольна. Действительно, по самой конструкции структуры $B_{G_{16}}$ значения функции $\chi \circ c_{16}$ (являющиеся элементами из $\mathrm{Hom}\,(W \wedge W,\ V/W)$) переводят $e_4 \wedge e_5$ в нуль. Читатель может проверить, что группа G_{16} действует транзитивно (на четырехмерном) многообразии, которое образуют элементы ранга 2 из $\mathrm{Hom}\,(W \wedge W,\ V/W)$, переводящие $e_4 \wedge e_5$ в нуль. Зафиксируем элемент z из этого многообразия. Пусть в терминах выбранного базиса $z\,(e_3 \wedge e_4) = \{e_1\}$ и $z\,(e_3 \wedge e_5) = \{e_2\}$, где $\{\ \}$ на этот раз обозначает класс эквивалентности mod W. Тогда подгруппа группы G_{16}, оставляющая точку z неподвижной, будет 12-мерной группой G_{12}. Читатель может легко убедиться в том, что в матричной форме группа G_{12} имеет вид

$$(G_{12}):\qquad \left(\begin{array}{ccc|cc} \Delta\alpha & \Delta\beta & 0 & 0 & 0 \\ \Delta\gamma & \Delta\delta & 0 & 0 & 0 \\ - & - & \Delta & 0 & 0 \\ \hline - & - & - & \alpha & \beta \\ - & - & - & \gamma & \delta \end{array}\right),$$

где $\Delta = \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$, а прочерки обозначают произвольные числа. Алгебра Ли g_{12} группы G_{12} состоит из всех матриц вида

$$(g_{12}):\qquad \left(\begin{array}{ccc|cc} 2a_1 + a_4 & a_2 & 0 & 0 & 0 \\ a_3 & a_1 + 2a_4 & 0 & 0 & 0 \\ - & - & a_1 + a_4 & 0 & 0 \\ \hline - & - & - & a_1 & a_2 \\ - & - & - & a_3 & a_4 \end{array}\right).$$

Прежде чем применять наш общий метод к случаю двумерных дифференциальных систем, обратимся к трехмерным системам. В этом случае мы имеем трехмерное подпространство $W_1 \subset V$ и группу G, состоящую из всех невырожденных линейных преобразований пространства V, оставляющих W_1 инвариантным. Эта группа также 19-мерна. Если выбрать базис $e_1, \ldots, e_5$ пространства V так, чтобы e_3, e_4 и e_5 лежали в W_1, то этой группе будет соответствовать группа всех невырожденных матриц вида

$$\left(\begin{array}{cc|ccc} - & - & 0 & 0 & 0 \\ - & - & 0 & 0 & 0 \\ \hline - & - & - & - & - \\ - & - & - & - & - \\ - & - & - & - & - \end{array}\right).$$

На этот раз пространство $W_1 \wedge W_1$ трехмерно, а $\mathrm{Hom}(W_1 \wedge W_1, V/W_1)$ шестимерно. Группа действует транзитивно на элементах ранга 2 последнего пространства (которые образуют единственную орбиту максимальной размерности). Зафиксируем элемент z этой орбиты. Отображение ранга 2 трехмерного пространства обращается в нуль на некоторой прямой. Но прямые в $W_1 \wedge W_1$ соответствуют двумерным подпространствам в W_1 (поскольку пространство W_1 трехмерно)[1]). Поэтому мы можем найти двумерное подпространство в W_1, инвариантное относительно (13-мерной) подгруппы группы G, оставляющей точку z неподвижной. Таким образом, мы можем каждой общей трехмерной системе сопоставить некоторую двумерную дифференциальную систему. Если мы произведем редукцию этой двумерной системы, то мы снова получим G_{12}. Итак, *проблемы классификации общих двумерных и трехмерных дифференциальных систем на пятимерном многообразии полностью эквивалентны.*

Редукция группы G_{12} выполняется значительно труднее. С помощью непосредственных, но длинных и запутанных вычислений можно провести эту процедуру еще дважды и прийти к семимерной группе G_7, алгебра Ли g_7 которой имеет вид

$$(g_7):\qquad \left(\begin{array}{ccc|cc} 2a_1+a_4 & a_2 & 0 & 0 & 0 \\ a_3 & a_1+2a_4 & 0 & 0 & 0 \\ a_5 & a_6 & a_1+a_4 & 0 & 0 \\ \hline a_7 & 0 & 4/3a_6 & a_1 & a_2 \\ 0 & a_7 & -4/3a_5 & a_3 & a_4 \end{array}\right).$$

Дальнейшая редукция при помощи указанного выше метода невозможна. Для дальнейшего исследования приходится обращаться к инвариантам второго порядка, как это описано в следующем параграфе.

Возвратимся к общему случаю. Структурная функция c для G-структуры B_G принимает значения в

$$\mathrm{Hom}(V \wedge V, V)/\mathcal{A}(\mathrm{Hom}(V, g)).$$

Выберем дополнение C к $\mathcal{A}(\mathrm{Hom}(V, g))$ в $\mathrm{Hom}(V \wedge V, V)$. Таким образом, $\mathrm{Hom}(V \wedge V, V) = C + \mathcal{A}(\mathrm{Hom}(V, g))$. Если отождествить C с факторпространством $\mathrm{Hom}(V \wedge V, V)/\mathcal{A}(\mathrm{Hom}(V, g))$, то c можно рассматривать как функцию со значениями в C.

Таким образом, мы получаем функцию на B_G со значениями в $\mathrm{Hom}(V \wedge V, V)$. Обозначим ее $\bar{c}$. [Подчеркнем, что функция $\bar{c}$ зависит от выбора дополнения C. Мы будем часто выбирать такое дополнение для различных встречающихся групп G.] Равенство (2.11), записанное в терминах $\bar{c}$, принимает вид

$$\bar{c}(pa) = \sigma(a)\bar{c}(p) + \mathcal{A}(t), \tag{2.13}$$

где t — некоторый элемент из $\mathrm{Hom}(V, g)$ (зависящий от p и a).

---

[1]) Действительно, любой элемент $u \in W_1 \wedge W_1$ представим в виде $u = x \wedge y$, $x, y \in W_1$. Тогда прямой $\{\lambda u\}$ соответствует двумерное подпространство $\{\lambda x + \mu y\}$.— *Прим. перев.*

Заметим, что выбор дополнения C выделяет в каждой точке $p \in B_G$ класс горизонтальных подпространств [1]). Действительно, по определению подпространства C и функции $\bar{c}$ существует горизонтальное подпространство H в точке p, для которого

$$c_H = \bar{c}(p). \tag{2.14}$$

В общем случае существует много таких подпространств. Действительно, если H_1 удовлетворяет условию (2.14), то таким же будет и H_2 при условии, что $\mathcal{A}(S_{H_1, H_2}) = 0$. Это утверждение немедленно следует из (2.8). Мы вернемся к этому в следующем параграфе.

Заметим также, что если H удовлетворяет условию (2.14) в точке p, то $R_{a*}H$ будет удовлетворять (2.14) в точке $p \cdot a$ тогда и только тогда, когда $\sigma(a)\bar{c}(p) \in C$. Это следует непосредственно из (2.13). В частности, имеет место

Предложение 2.1. *Если дополнение C инвариантно относительно $\sigma(G)$ (т. е. $\sigma(a)C = C$ для всех $a \in G$) и если подпространство H удовлетворяет условию* (2.14), *то и $R_{a*}H$ удовлетворяет условию* (2.14) *при всех $a \in G$.*

Чтобы облегчить чтение работ Э. Картана по проблеме эквивалентности, удобно записать некоторые из основных формул этого параграфа в обозначениях, более близких к обозначениям Картана. Выберем прежде всего базис $e_1, \ldots, e_n$ пространства V. В терминах этого базиса V-значную форму ω можно рассматривать как набор n вещественнозначных линейных форм: $\omega = (\omega^1, \ldots, \omega^n)$. Представим B_G локально в виде прямого произведения, т. е. ограничимся рассмотрением малой окрестности $U \subset M$ и отождествим $\pi^{-1}(U)$ с $U \times G$. Далее, G как группа Ли обладает канонической левоинвариантной $\mathfrak{g}$-значной формой. Отображение, индуцированное проекцией $U \times G \to G$, переводит эту форму (локально) в некоторую форму на B_G. Обозначим ее Π. Пусть $A_1, \ldots, A_r$ — базис $\mathfrak{g}$. Тогда эту форму можно записать в виде $\Pi = (\Pi^1, \ldots, \Pi^r)$. Формы $\omega^1, \ldots, \omega^n, \Pi^1, \ldots, \Pi^r$ порождают кокасательное пространство в каждой точке $p \in B_G$. Заметим, что, в то время как формы $\omega^1, \ldots, \omega^n$ внутренним образом определены всюду на B_G, формы $\Pi^1, \ldots, \Pi^r$ определены только локально и при этом зависят от выбора локального представления расслоения B_G в виде прямого произведения. Однако они не совсем произвольны: они однозначно определены на слоях. Действительно, для любого $A \in \mathfrak{g}$ мы имеем $\langle \tilde{A}, \Pi \rangle = A$, так что

$$\langle \tilde{A}_\alpha, \Pi^\beta \rangle = \delta^\beta_\alpha. \tag{2.15}$$

По существу это единственное свойство форм Π^β, которое мы будем использовать. При этом в процессе рассуждений мы будем несколько раз изменять формы Π^β. Заметим, что, поскольку формы ω^i равны нулю на слоях, вместе с Π^β условию (2.15) будут удовлетворять и формы $\Pi^\beta + \sum d^\beta_i \omega^i$ для любых функций d^β_i.

Заметим также, что при фиксированном выборе форм Π^β любое горизонтальное подпространство H задается $(r \times n)$-матрицей $d^\beta_i(H)$. А именно,

[1]) Здесь под горизонтальным подпространством подразумевается любое дополнение к вертикальному подпространству.— *Прим. перев.*

касательный вектор X в точке p лежит в H тогда и только тогда, когда $\langle X, \Pi^\beta\rangle = \sum d_i^\beta \langle X, \omega^i\rangle$, где $d_i^\beta = d_i^\beta(H)$. Таким образом, мы получаем параметризацию всех горизонтальных подпространств в каждой точке.

Определим теперь константы $a_{j\alpha}^i$ формулой

$$A_\alpha e^i = \sum a_{j\alpha}^i e^j. \tag{2.16}$$

[Напомним, что $e^1, \ldots, e^n$ — базис пространства V, а элементы $A_\alpha \in g$ действуют на V, так что формула (2.16) имеет смысл.] Равенство (2.5) можно теперь переписать следующим образом:

$$d\omega^i = \sum c_{jk}^i \omega^1 \wedge \omega^k + \sum a_{j\alpha}^i \omega^j \wedge \Pi^\alpha, \tag{2.17}$$

где c_{jk}^i — некоторые функции на M. Чтобы проверить (2.17), заметим, что, поскольку форма $d\omega$ обращается в нуль на слоях, она не может содержать членов, включающих $\Pi^\alpha \wedge \Pi^\beta$. Поэтому остается только проверить, что коэффициенты при $\omega^i \wedge \Pi^\alpha$ равны $a_{j\alpha}^i$. Но это следует немедленно из формулы (2.5) (если учесть также (2.15) и (2.16)).

Функции c_{jk}^i из равенства (2.17) зависят от выбора форм Π^α. Действительно, значения $c_{jk}^i(p)$ этих функций в точке p соответствуют введенной ранее функции c_H, где H — горизонтальное подпространство, задаваемое уравнениями $\langle X, \Pi^\beta\rangle = 0$ $(\beta = 1, \ldots, r)$. А именно, $c_H = \sum c_{jk}^i(p)\, e_i \otimes e^{j*} \wedge e^{k*}$ (где мы отождествили $\mathrm{Hom}(V \wedge V, V)$ с $V \otimes V^* \wedge V^*$), или $c_H(e_j \wedge e_k) = \sum c_{jk}^i e_i$. Замена пространства H другим горизонтальным подпространством соответствует замене форм Π^β на $\Pi^\beta + \sum d_i^\beta \omega^i$, и это, конечно, изменяет функции c_{jk}^i в соответствии с формулой (2.7). [Читатель при желании может записать эту формулу в индексных обозначениях.]

Как мы уже видели, выбор дополнения C к $\mathcal{A}(\mathrm{Hom}(V, g))$ выделяет в каждой точке определенный класс горизонтальных подпространств и фиксирует функцию $\bar{c}$. Посмотрим, как это выражается на языке индексов. Выбор подпространства C равносилен наложению некоторого числа линейных соотношений на функции c_{jk}^i, выражающих условие, что $\sum c_{jk}^i e_i \otimes e^{j*} \wedge e^{k*}$ лежит в C. [Часто удобно задавать эти условия (т. е. выбирать дополнение C) в виде $c_{j'k'}^{i'} \equiv 0$, где i', j', k' — подходящий набор индексов. Однако иногда бывает удобнее выбрать C по-другому. Успех многих вычислений Картана объясняется умелым выбором дополнения C.] Как бы то ни было, функции c_{jk}^i однозначно определяются, как только мы выберем дополнение C. Однако при этом формы Π^β определяются с некоторым произволом, а именно, с тем же произволом, что и горизонтальные подпространства, удовлетворяющие условию (2.14). Мы можем, однако, зафиксировать выбор Π^β, потребовав, чтобы выполнялись равенства (2.15) и (2.17) и чтобы при этом функции c_{jk}^i удовлетворяли другим линейным соотношениям. Функции c_{jk}^i можно рассматривать как индексную форму нашей структурной функции c.

Равенство (2.17) показывает, что структурная функция не произвольна. Точнее, не каждая функция со значениями в $\mathrm{Hom}(V \wedge V, V)/\mathcal{A}(\mathrm{Hom}(V, g))$ на главном G-расслоении, удовлетворяющая условию (2.11), служит структурной функцией некоторой G-структуры. Действительно, если взять внешнюю производную от обеих частей равенства (2.17), то получится некоторое соотношение, содержащее dc^i_{jk}, $d\omega^i$, ω^i, Π^α и $d\Pi^\alpha$. Выражая формы $d\omega^i$ и $d\Pi^\alpha$ через базисные формы ω^j и Π^β, мы получим некоторое условие на функции c^i_{jk}. Проведем вычисления. Запишем формы $d\Pi^\alpha$ в виде

$$d\Pi^\alpha=\sum_{r,\ s=1}^{n} A^\alpha_{rs}\omega^r\wedge\omega^s+\sum B^\alpha_{r\beta}\omega^r\wedge\Pi^\beta+\sum\gamma^\alpha_{\beta\gamma}\Pi^\beta\wedge\Pi^\gamma. \tag{2.18}$$

Внешнее дифференцирование равенства (2.17) дает[1])

$$0=\sum dc^i_{jk}\omega^j\wedge\omega^k+\sum c^i_{jk}\,d\omega^j\wedge\omega^k-\sum c^i_{jk}\omega^j\wedge d\omega^k+$$
$$+\sum a^i_{j\alpha}d\omega^j\wedge\Pi^\alpha-\sum a^i_{j\alpha}\omega^j\wedge d\Pi^\alpha.$$

Подставим теперь вместо форм $d\omega^j$, $d\omega^k$ и $d\Pi^\alpha$ их выражения по формулам (2.17) и (2.18). Определим функции $c^i_{jk,l}$ и $c^i_{jk,\beta}$ равенством

$$dc^i_{jk}=\sum c^i_{jk,l}\omega^l+\sum c^i_{jk,\beta}\Pi^\beta.$$

Тогда, собирая коэффициенты при $\omega^j\wedge\omega^k\wedge\omega^l$ $(j<k<l)$ и приравнивая этот член нулю, получим

$$(c^i_{jk,l}+c^i_{kl,j}+c^i_{lj,k})+2\,(c^i_{rl}c^r_{jk}+c^i_{rk}c^r_{lj}+c^i_{rj}c^r_{kl})-$$
$$-(a^i_{j\alpha}A^\alpha_{kl}+a^i_{k\alpha}A^\alpha_{lj}+a^i_{l\alpha}A^\alpha_{jk})=0. \tag{2.19}$$

Аналогично, собирая коэффициенты при $\omega^i\wedge\omega^k\wedge\Pi^\alpha$ $(j<k)$, получим

$$c^i_{jk,\,\alpha}+2\,(a^r_{j\alpha}c^i_{rk}+a^r_{k\alpha}c^i_{rj}-a^i_{r\alpha}c^r_{jk})-a^i_{j\beta}B^\beta_{k\alpha}+a^i_{j\beta}B^\beta_{k\alpha}=0. \tag{2.20}$$

Сравнивая коэффициенты при $\omega^j\wedge\Pi^\alpha\wedge\Pi^\beta$, мы получаем в точности структурные уравнения группы G. Внимательный читатель заметит (упражнение!), что соотношения (2.20) не дают ничего нового, а являются по существу следствиями равенств (2.11) и (2.8). Соотношения (2.19), напротив, содержат новую информацию. Вероятно, их следует назвать *тождествами Бьянки — Картана.*

Посмотрим, что дают тождества Бьянки — Картана в случае, когда структурная функция постоянна. В этом случае c^i_{jk} постоянны, так что члены $c^i_{jk,l}$ тождественно равны нулю и равенство (2.19) принимает вид

$$2\,(c^i_{rl}c^r_{jk}+c^i_{rk}c^r_{lj}+c^i_{rj}c^r_{kl})=a^i_{j\alpha}A^\alpha_{kl}+a^i_{k\alpha}A^k_{lj}+a^i_{l\alpha}A^\alpha_{jk}. \tag{2.21}$$

Таким образом, мы получили квадратичные относительно c^i_{jk} необходимые условия (а именно, должны существовать такие функции A^α_{kl}, чтобы выполнялись соотношения (2.21)). Сформулируем теперь это условие в безиндексной форме в терминах функции $\bar{c}$ (которая предполагается постоянной).

Заметим прежде всего, что существует естественное билинейное отображение λ: $\operatorname{Hom}(V\wedge V,\ V)\times\operatorname{Hom}(V\wedge V,\ V)\to\operatorname{Hom}(V\wedge V\wedge V,\ V)$. Оно

---

[1]) Для упрощения обозначений условимся, что знак суммы означает суммирование по повторяющимся индексам. Латинские индексы принимают значения от 1 до n, греческие — от 1 до r.

определяется следующим образом: если $C_1, C_2 \in \mathrm{Hom}(V \wedge V, V)$, то

$$\lambda(C_1, C_2)(v_1 \wedge v_2 \wedge v_3) = C_1(C_2(v_1 \wedge v_2) \wedge v_3) + \\ + C_1(C_2(v_2 \wedge v_3) \wedge v_1) + C_1(C_2(v_3 \wedge v_1) \wedge v_2).$$

Читатель может проверить, что левая часть равенства (2.21) есть не что иное, как запись элемента $\lambda(\bar{c}, \bar{c})$ в базисе $e_1, \ldots, e_n$. С другой стороны, рассмотрим пространство $\mathrm{Hom}(V \wedge V, g)$. Существует естественное линейное отображение μ этого пространства в $\mathrm{Hom}(V \wedge V \wedge V, V)$, задаваемое формулой

$$\mu(\tau)(v_1 \wedge v_2 \wedge v_3) = \tau(v_1 \wedge v_2) v_3 + \tau(v_2 \wedge v_3) v_1 + \tau(v_3 \wedge v_1) v_2$$

для любого $\tau \in \mathrm{Hom}(V \wedge V, g)$ и $v_1, v_2, v_3 \in V$. В терминах выбранных базисов пространств V и g любой элемент из $\mathrm{Hom}(V \wedge V, g)$ задается своими коэффициентами A^{α}_{kl}. Поэтому существование коэффициентов A^{α}_{kl}, для которых выполняется равенство (2.21), эквивалентно существованию такого элемента $\tau \in \mathrm{Hom}(V \wedge V, g)$, что $\lambda(\bar{c}, \bar{c}) = \mu(\tau)$. Итак, условие (2.21) означает, что

$$\lambda(\bar{c}, \bar{c}) \in \mu(\mathrm{Hom}(V \wedge V, g)). \tag{2.22}$$

Посмотрим, к чему это сводится в случае простейшей G-структуры — $\{e\}$-структуры группы Ли. В этом случае V есть алгебра Ли группы Ли, а $c = \bar{c} \in \mathrm{Hom}(V \wedge V, V)$ — умножение:

$$c(v_1 \wedge v_2) = [v_1, v_2]$$

в этой алгебре Ли. Поскольку тогда $g = 0$, условие (2.22) означает, что $\lambda(\bar{c}, \bar{c}) = 0$ или $[[v_1, v_2], v_3] + [[v_2, v_3], v_1] + [[v_3, v_1], v_2] = 0$. Таким образом, для $\{e\}$-структуры группы Ли тождества Бьянки — Картана сводятся к тождествам Якоби.

§ 3. ПРОДОЛЖЕНИЯ

В предыдущем параграфе мы изучали проблему эквивалентности G-структур, используя структурную функцию первого порядка c. Сейчас мы покажем, что для некоторых групп G структурная функция первого порядка не дает никакой информации, а именно, что эта структурная функция для всех G-структур тождественно равна нулю. Поскольку c принимает значения в $\mathrm{Hom}(V \wedge V, V)/\mathcal{A}(\mathrm{Hom}(V, g))$, достаточно указать алгебру Ли g, для которой $\mathcal{A}(\mathrm{Hom}(V, g)) = \mathrm{Hom}(V \wedge V, V)$[1]. Это может случиться, если размерность $\mathrm{Hom}(V, g)$ велика, а размерность ядра отображения $\mathcal{A}$ мала. Естественно поэтому изучить ядро отображения $\mathcal{A}$, которое мы обозначим $g^{(1)}$. Поскольку это про-

---

[1]) Тривиальным примером, когда это так, является случай $g = gl(V)$ (алгебра всех линейных преобразований пространства V). Однако это не интересно, поскольку все $GL(V)$-структуры локально эквивалентны. Мы хотим построить примеры, когда структурная функция первого порядка не различает две неэквивалентные структуры.

странство будет играть в дальнейшем основную роль, мы дадим более общее

Определение 3.1. Пусть V и W — векторные пространства, и пусть g — подпространство в $\mathrm{Hom}(V, W)$. Обозначим через $g^{(1)}$ подпространство в $\mathrm{Hom}(V, g)$, состоящее из таких элементов T, что

$$T(u)v = T(v)u \tag{3.1}$$

для всех $u, v \in V$. [Напомним, что $T(u) \in g$, так что $T(u)v \in V$.] Пространство $g^{(1)}$ называется *первым продолжением* подпространства g. Положим $g^{(2)} = (g^{(1)})^{(1)}$ и, вообще, $g^{(i+1)} = (g^{(i)})^{(1)}$. Пространство $g^{(i)}$ называется *i-м продолжением* подпространства g.

В нашем случае $V = W$ и g есть не только подпространство, но и подалгебра алгебры Ли $\mathrm{Hom}(V, V)$. Из определения оператора $\mathcal{A}$ следует, что $g^{(1)} = \mathrm{Ker}\,\mathcal{A}$.

Упражнение 3.1. Если отождествить $\mathrm{Hom}(V, W)$ с $W \otimes V^*$, то g будет подпространством в $W \otimes V^*$, а $\mathrm{Hom}(V, g)$ можно рассматривать как подпространство в $W \otimes V^* \otimes V^*$. Показать, что тогда

$$g^{(1)} = \mathrm{Hom}(V, g) \cap W \otimes S^2(V).$$

Упражнение 3.2. При тех же отождествлениях показать, что

$$g^{(k)} = g \otimes \underbrace{V^* \otimes \ldots \otimes V^*}_{k \text{ раз}} \cap W \otimes S^{k+1}(V^*).$$

Упражнение 3.3. Векторное поле на векторном пространстве V можно рассматривать как V-значную функцию. Поэтому можно говорить о матрице Якоби векторного поля (подразумевая под ней матрицу Якоби соответствующего отображения $V \to V$). Отождествляя касательное пространство в каждой точке из V с самим V, мы можем рассматривать эту матрицу Якоби как функцию на V со значениями в $\mathrm{Hom}(V, V)$. Таким образом, каждому векторному полю X мы сопоставляем $\mathrm{Hom}(V, V)$-значную функцию, которую обозначим символом $\mathrm{Jac}(X)$. [В терминах базисов, если $X = (X^1, \ldots, X^n)$, то $\mathrm{Jac}(X) = (\partial X^i/\partial x^j)$.] Показать, что векторное поле X является инфинитезимальным автоморфизмом стандартной плоской G-структуры на V тогда и только тогда, когда $\mathrm{Jac}(X)(v) \in g$ для всех $v \in V$.

Упражнение 3.4. Рассматривая данное векторное поле X на V как V-значную функцию на V, мы можем вычислить его разложение Тейлора в любой точке. Члены степени $k+1$ разложения Тейлора можно рассматривать как элемент пространства $V \otimes S^{k+1}(V^*)$. Показать, что если X — инфинитезимальный автоморфизм плоской G-структуры, то элемент степени $k+1$ его разложения Тейлора (в любой точке) лежит в $g^{(k)}$. Вывести отсюда, что если $g^{(k)} = 0$ для некоторого k, то алгебра Ли всех инфинитезимальных автоморфизмов плоской G-структуры конечномерна.

Определение 3.2. Подпространство $g \subset \mathrm{Hom}(V, W)$ называется *пространством конечного типа*, если $g^{(k)} = 0$ для некоторого (а значит, и всех бóльших) k. Если $g^{(k)} \neq 0$ для всех k, то g называется *пространством бесконечного типа*.

Чтобы проиллюстрировать понятие продолжения, рассмотрим несколько алгебр. Возьмем прежде всего ортогональную алгебру $o(n)$. В этом случае мы имеем симметрическую невырожденную [1]) билинейную форму (,) на V. Алгебра $o(n)$ состоит из тех $A \in gl(V)$, для которых

$$(Au, v) + (u, Av) = 0 \quad \text{при любых } u, v \in V. \tag{3.2}$$

Предложение 3.1. *Первое продолжение алгебры $o(n)$ равно нулю*:

$$o(n)^{(1)} = 0.$$

Если выбрать базис, то доказательство предложения 3.1 сведется к лемме 1.2 гл. VI. Для удобства мы воспроизведем здесь это доказательство. Пусть u, v и w — три вектора из V, и пусть $T \in o(n)^{(1)}$. Тогда

$$\begin{aligned}
(T(u)v, w) &= (T(v)u, w) = && \text{согласно (3.1)}\\
&= -(u, T(v)w) = && \text{согласно (3.2)}\\
&= -(u, T(w)v) = && \text{согласно (3.1)}\\
&= (T(w)u, v) = && \text{согласно (3.2)}\\
&= (T(u)w, v) = && \\
&= (v, T(u)w) = && \text{(в силу симметрии (,))}\\
&= -(T(u)v, w). &&
\end{aligned}$$

Итак, $(T(u)v, w) = -(T(u)v, w) = 0$. Поскольку вектор w произволен, а форма (,) невырожденна, отсюда следует, что $T(u)v = 0$. Значит, $T(u) = 0$ при всех u, т. е. $T = 0$.

Выведем из предложения 3.1 несколько важных следствий. Заметим, что $\dim \operatorname{Hom}(V \wedge V, V) = n \times (n(n-1)/2)$. С другой стороны, $\dim o(n) = n(n-1)/2$ [2]). Следовательно,

$$\dim \operatorname{Hom}(V, o(n)) = n^2(n-1)/2 = \dim \operatorname{Hom}(V \wedge V, V).$$

Поскольку $\operatorname{Ker} \mathscr{A} = o(n)^{(1)} = 0$, мы заключаем, что

$$\mathscr{A}(\operatorname{Hom}(V, o(n))) = \operatorname{Hom}(V \wedge V, V). \tag{3.3}$$

---

[1]) Алгебра $o(n)$ соответствует положительно определенной билинейной форме. Однако все наши рассуждения остаются справедливыми для любой, не обязательно положительно определенной, невырожденной симметрической формы.

[2]) Доказательство. Форма (,) позволяет отождествить V с V^*, а $gl(V) = V \otimes V^*$ с $V^* \otimes V^*$. Элемент $A \in gl(V)$ соответствует при этом билинейной форме $\hat{A}$, где $\hat{A}(u, v) = (Au, v)$. Формула (3.2) показывает тогда, что $o(n)$ отождествляется с $V^* \wedge V^*$ и, таким образом, $\dim o(n) = n(n-1)/2$.

Таким образом, в случае римановой геометрии структурная функция первого порядка не дает абсолютно никакой информации.

Из равенства (3.3) можно извлечь также важное позитивное утверждение. Действительно, в силу этого равенства проблема выбора дополнения C к $\mathcal{A}(\mathrm{Hom}(V, o(n)))$ в $\mathrm{Hom}(V \wedge V, V)$ тривиальна, так как это нулевое подпространство. Согласно рассуждениям, приведенным в конце § 2, в каждой точке из $B_{O(n)}$ $(= \mathcal{O}(M))$ существует горизонтальное подпространство H, для которого $c_H = 0$. Из формулы (2.11) и предложения 3.1 следует, что такое горизонтальное подпространство единственно. Благодаря условию (2.11) выбор в каждой точке такого горизонтального подпространства определяет связность. Тем самым доказана

Теорема 3.1 (Леви-Чивита). *Для любого риманова многообразия M на расслоении $\mathcal{O}(M)$ существует каноническая связность. Горизонтальное подпространство H этой связности в каждой точке характеризуется условием $c_H = 0$.*

Задание связности на $\mathcal{O}(M)$ равносильно заданию $o(n)$-значной формы. В терминах стандартного базиса алгебры Ли $o(n)$ это сводится к заданию форм Ω_M^{ij}. Тем самым мы доказали существование форм Ω_M^{ij}, выполнив обещание, данное на стр. 270. Читатель может проверить, что равенство (2.17) сводится в этом случае к равенству (3.8) гл. VI.

Упражнение 3.5. Сравнить равенство (5.10) гл. VI с равенством (1.6) (структурным уравнением связности). Заключить отсюда, что в терминах базиса форма $\rho^*(D\Omega)$ задается формами $\sum_{k,l} A_{ik}\theta^k \wedge A_{jl}\theta^l$. (Отображение ρ определено на стр. 268). Таким образом, теорема Леви-Чивита дает новое доказательство и интерпретацию гауссовой теоремы «эгрегиум».

Следующие упражнения иллюстрируют понятие продолжения на примере других алгебр.

Упражнение 3.6. Рассмотрим алгебру Ли $co(n)$ конформной группы. Она состоит из таких $A \in gl(V)$, что

$$(Au, v) + (u, Av) = \lambda_A\ (u, v)$$

для любых $u, v \in V$, где $(\ ,\ )$ — невырожденная симметрическая билинейная форма. Рассмотрим отображение $co(n)^{(1)} \longrightarrow V^*$, переводящее каждый элемент $T \in co(n)^{(1)}$ в линейную форму $u \longrightarrow \lambda_{T(u)}$. Показать, что это изоморфизм, так что мы можем отождествить $co(n)^{(1)}$ с V^*.

Упражнение 3.7. Рассмотрим теперь $co(n)^{(2)}$. Для каждого $S \in co(n)^{(2)}$ и $u, v \in V$ линейное преобразование $S(u, v)$ лежит в $co(n)$. Поэтому для любой пары векторов $x,\ y \in V$

$$(S(u,\ v)\,x,\ y)+(x,\ S(u,\ v)\,y)=\lambda_{uv}\cdot(x,\ y),$$

где λ_{uv} — симметрическая билинейная форма, зависящая от S. Если $\lambda_{uv}=0$ для всех u и $v \in V$, то $S \in o(n)^{(2)}$ и, значит, $S=0$. Показать, что если $\dim V \geqslant 3$, то $\lambda_{uv} \equiv 0$. [*Указание*: поскольку $\lambda_{uv}=\lambda_{vu}$, достаточно проверить, что $\lambda_{uu}=0$. Пусть u и x — пара ортогональных векторов: $(u,\ x)=0$. Тогда

$$\lambda_{uu}\cdot(x,\ x)=2\,(S\ (u,\ u)\,x,\ x)=2\,(S\,(u,\ x)\,u,\ x)=$$
$$=-2\,(S\,(u,\ x)\,x,\ u)=-2\,(S\,(x,\ x)\,u,\ u)=-\lambda_{xx}\cdot(u,\ u).$$

В частности, если u и x — ортогональные единичные векторы: $(u,\ u)=(x,\ x)=1$, то $\lambda_{uu}=-\lambda_{xx}$. Если в пространстве существует не меньше трех взаимно ортогональных векторов, то из этого равенства следует, что $\lambda_{uu}=0$. Таким образом, алгебра Ли $co(n)$ имеет конечный тип, если $n \geqslant 3$.] Показать, что $co(2)$ — алгебра Ли бесконечного типа.

Упражнение 3.8. Пусть (,) — невырожденная антисимметрическая билинейная форма на V, а $sp(n)$ — алгебра Ли, состоящая из всех линейных преобразований A, для которых

$$(Au,\ v)+(u,\ Av)=0.$$

Билинейная форма (,) позволяет отождествить V с V^* и, следовательно, $V \otimes V^*$ с $V^* \otimes V^*$. Показать, что при этом алгебра Ли $sp(n) \subset V \otimes V^*$ $(=\mathrm{Hom}(V,\ V))$ отождествляется с пространством симметрических тензоров $S^2(V^*)$. Более общо, отождествим $V \otimes S^{k+1}(V^*)$ с $V^* \otimes S^{k+1}(V^*)$. Показать, что при этом $sp(n)^{(k)}$ отождествляется с $S^{k+2}(V^*)$ и, таким образом, $sp(n)$ — алгебра Ли бесконечного типа.

Упражнение 3.9. Пусть (,) и V — те же самые, что и в упражнении 3.8. Рассмотрим «конформную симплектическую алгебру Ли» g, состоящую из всех $A \in gl(V)$, для которых

$$(Ax,\ y)+(x,\ Ay)=\lambda_A\cdot(x,\ y).$$

Показать, что $g^{(1)}=sp(n)^{(1)}$.

Вернемся к общим рассмотрениям. Мы будем изучать G-структуры, предполагая, что для каждой группы G зафиксировано некоторое дополнение C к $\mathcal{A}\,(\mathrm{Hom}(V,\ g))$ в $\mathrm{Hom}(V \wedge V,\ V)$. Тогда в каждой точке G-структуры B_G выделен класс горизонтальных подпространств, а именно, те подпространства H, для которых $c_H \in C$. Горизонтальное подпространство H в точке $p \in B_G$ индуцирует изоморфизм пространства $T_p(B_G)$ на $V+g$. Действительно, мы уже имеем изоморфизм касательного пространства к слою на g. Поскольку форма ω индуцирует изоморфизм пространства H на V, мы получаем изоморфизм $T_p(B_G) \longrightarrow V+g$. Этот изоморфизм сопоставляет каждому горизонтальному подпространству H в точке p репер на многообразии B_G с началом в p (который соответствует стандартному реперу пространства $V+g$). Чем отличаются реперы, соответствующие двум подпространствам H_1 и H_2 выделенного класса? Согласно формуле (2.8), если $c_{H_i} \in C$ $(i=1, 2)$, то $S_{H_1, H_2} \in g^{(1)}$. Пусть z_1 и z_2 — реперы, соответствующие подпространствам H_1 и H_2. По определению для любого $v \in V$ мы имеем

$$z_1(v) = z_2(v) + S_{H_1, H_2}(v).$$

С другой стороны, $z_1(A) = z_2(A)$ для любого $A \in g$. В соответствии с этим дадим такое

Определение 3.3. Назовем *группой* $G^{(1)}$ группу всех линейных преобразований пространства $V+g$ вида a_T $(T \in g^{(1)})$, где

$$\begin{aligned} a_T(A) &= A \quad &\text{для} \quad A \in g, \\ a_T(v) &= v + T(v) \quad &\text{для} \quad v \in V. \end{aligned} \tag{3.4}$$

В «матричных» обозначениях группа $G^{(1)}$ состоит из всех линейных преобразований вида

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} V & g \end{array} \\ \begin{array}{c} V \\ g \end{array} & \begin{pmatrix} \mathrm{id} & 0 \\ T & \mathrm{id} \end{pmatrix} \end{array}.$$

Мы можем теперь сформулировать следующее утверждение:

Теорема 3.2. *Выбор дополнения C для алгебры Ли g определяет $G^{(1)}$-структуру на каждой G-структуре B_G. Эта структура называется первым продолжением G-структуры B_G. Для того чтобы две G-структуры B_G^1 и B_G^2 были локально эквивалентны, необходимо и достаточно, чтобы соответствующие $G^{(1)}$-структуры на B_G^1 и B_G^2 были локально эквивалентны (как $G^{(1)}$-структуры).*

Первое утверждение мы уже доказали. Пусть теперь B_G^1 и B_G^2 — две G-структуры соответственно на M_1 и M_2, и пусть φ — изоморфизм структуры B_G^1 на B_G^2. Если H_1 — горизонтальное подпространство в точке $p_1 \in B_G^1$ и $H_2 = (\varphi_*)_*(H_1)$ — соответствующее подпространство в точке $p_2 \in B_G^2$, то $c_{H_2} = c_{H_1}$. В частности, $c_{H_2} \in C$ тогда и только тогда, когда $c_{H_1} \in C$. Значит, $(\varphi_*)_*$ отображает реперы $G^{(1)}$-структуры на B_G^1 в реперы $G^{(1)}$-структуры на B_G^2.

Обратно, пусть ψ — диффеоморфизм многообразия B_G^1 на B_G^2, являющийся изоморфизмом $G^{(1)}$-структур. Тогда $\psi_*(\tilde{A}^1) = \tilde{A}^2$, где $\tilde{A}^1$ и $\tilde{A}^2$ — векторные поля на B_G^1 и B_G^2, соответствующие вектору $A \in g$. Следовательно, отображение ψ согласовано с действиями группы G на B_G^1 и B_G^2 и, значит, определяет дифференцируемое отображение φ многообразия M_1 на M_2, для которого

$$\varphi \circ \pi_1 = \pi_2 \circ \psi, \tag{3.5}$$

где π_1 и π_2 — проекции расслоений B^1_G и B^2_G соответственно на M_1 и M_2. Пусть p_1 — точка из B^1_G (т. е. репер на M_1), и H_1 — горизонтальное подпространство в точке p_1. Поскольку ψ есть изоморфизм $G^{(1)}$-структур, изоморфизм $V \to H_1$ переходит при отображении ψ_* в изоморфизм $V \to H_2 = \psi_*(H_1)$.

Далее, репер из $G^{(1)}$-структуры, соответствующий подпространству H_1, сопоставляет каждому вектору $v \in V$ такой вектор $X \in H_1$, что $\pi_{1*}(X) = p_1(v)$ [где репер p_1 рассматривается как изоморфизм пространства V на $T_{\pi_1(p)}(M_1)$]. Аналогично, репер, соответствующий H_2, сопоставляет вектору $v \in V$ такой вектор $Y \in H_2$, что $\pi_{2*}(Y) = p_2(v)$. Поскольку ψ — изоморфизм $G^{(1)}$-структур, мы должны иметь $\psi_*(X) = Y$. С другой стороны, из (3.5) следует, что $\varphi_* \circ \pi_{1*} = \pi_{2*} \circ \psi$, откуда $\varphi_* p_1(v) = p_2(v)$. Но это означает, что $\varphi_*(p_1) = p_2$, или, иначе, $\varphi_* = \psi$, что и доказывает теорему 3.2.

Теперь для исследования вопроса об эквивалентности $G^{(1)}$-структур мы можем применять все методы § 2, а именно, строить структурную функцию, редуцировать группу и т. д.

Прежде чем приступить к этому исследованию, заметим, что небольшое изменение нашего метода позволяет рассматривать структуры «высших порядков». А именно, вместо того, чтобы изучать всю $G^{(1)}$-структуру, ассоциированную с G-структурой B_G, мы можем рассматривать некоторую подструктуру. Это равносильно наложению условий «второго порядка» (соответствующих подгруппе из $G^{(1)}$) в дополнение к «линейным» условиям, налагаемым G-структурой B_G. Хорошей иллюстрацией служит редукция $G^{(1)}$-структуры к $\{e\}$-структуре. Она равносильна выбору в каждой точке расслоения B_G по горизонтальному подпространству из нашего выделенного класса. Это может быть сделано, например, заданием связности на B_G. Таким образом, теория G-связностей включается в нашу схему. Другим примером структуры второго порядка служит так называемая проективная дифференциальная геометрия. Рассмотрение таких структур с принятой здесь точки зрения см. у Гийемина [4].

Выясним теперь, что представляет собой структурная функция первого продолжения. Для этого мы должны исследовать алгебру Ли группы Ли $G^{(1)}$. Из определения 3.3 видно, что она состоит из всех линейных преобразований вида A_T ($T \in g^{(1)}$), где

$$A_T(A) = 0 \quad \text{для} \quad A \in g,$$
$$A_T(v) = T(v) \quad \text{для} \quad v \in V.$$

Ясно, что алгебру Ли группы Ли $G^{(1)}$ можно отождествить с $g^{(1)}$, если рассматривать $T \in g^{(1)}$ как линейное преобразование пространства $V+g$, действующее тривиально на g, т. е. $T(A)=0$ для всех $A\in g$. Таким образом, мы имеем специальное представление алгебры Ли $g^{(1)}$ на $V+g$. Новая структурная функция принимает значения в некотором факторпространстве пространства

$$\mathrm{Hom}\,((V+g)\wedge(V+g),\ V+g).$$

Снова, как на стр. 349, мы можем выбрать дополнение и рассматривать структурную функцию как функцию со значениями в некотором подпространстве пространства

$$\mathrm{Hom}\,((V+g)\wedge(V+g),\ V+g).$$

Это пространство естественным образом разлагается в прямую сумму подпространств. Рассмотрим проекцию структурной функции на каждое из этих подпространств. Прежде всего мы получаем элемент из $\mathrm{Hom}\,(V\wedge V,\ V)$ [1]). В качестве поучительного упражнения читатель может проверить, что это есть просто старая структурная функция структуры B_G, поднятая на $G^{(1)}$-структуру (которая, разумеется, является расслоением над B_G). Мы получаем также элемент из $\mathrm{Hom}\,(g\wedge g,\ g)$. Читатель может проверить, что он определяет просто операцию в алгебре Ли g. «Новыми» будут два билинейных отображения — элемент из $\mathrm{Hom}\,(V\otimes g,\ g)$ и элемент из $\mathrm{Hom}\,(V\wedge V,\ g)$.

Упражнение 3.10. Показать, что если $g^{(1)}=0$ и $G^{(1)}$-структура является связностью на B_G (как в случае римановой геометрии), то «новый» элемент, лежащий в $\mathrm{Hom}\,(V\wedge V,\ g)$, можно рассматривать как кривизну этой связности.

Продолжая этот процесс, мы получим $G^{(2)}$, $G^{(3)}$, ..., $G^{(k)}$, ...-структуры, ассоциированные с данной G-структурой. Они называются вторым, третьим, ..., k-м, ... продолжением G-структуры B_G. Тем самым мы получим последовательность все более тонких необходимых условий эквивалентности G-структур. Алгебра Ли группы Ли $G^{(k)}$ является представлением алгебры $g^{(k)}$. В частности, если $g^{(k+1)}=0$, то $G^{(k+1)}=\{e\}$. В этом случае $G^{(k+1)}$-структура, определенная на k-м продолжении, является $\{e\}$-структурой, т. е. абсолютным параллелизмом.

Итак, *проблема эквивалентности двух структур конечного типа сводится с помощью подходящего продолжения к проблеме эквивалентности $\{e\}$-структур.*

В качестве применения полученных результатов рассмотрим проблему эквивалентности данной структуры плоской структуре.

---

[1]) Точнее, функцию со значением в $\mathrm{Hom}\,(V\wedge V,\ V)$.— *Прим. перев.*

Как легко видеть, структурные функции всех продолжений плоской G-структуры постоянны. [Основные нетривиальные части этих функций обращаются в нуль. Например, для первого продолжения структурная функция (являющаяся константой) лежит в $\mathrm{Hom}((V+g)\wedge(V+g),\ V+g)$. Ее части, лежащие в $\mathrm{Hom}(V\wedge V,\ V)$ и $\mathrm{Hom}(V\otimes g,\ g)$, равны нулю. Слагаемое из $\mathrm{Hom}(g\wedge g,\ g)$ задает структурные константы алгебры Ли g и не равно нулю. Однако, оно не представляет интереса, поскольку оно одно и то же для всех G-структур (при фиксированной группе G).] Итак, справедлива

Теорема 3.3. *Пусть G — группа Ли конечного типа. В этом случае G-структура является локально плоской тогда и только тогда, когда структурные функции всех ее продолжений — константы, совпадающие с соответствующими структурными константами некоторой плоской G-структуры.*

[Равенство констант в теореме 3.3 достаточно проверить только для тех k, для которых $g^{(k)}\neq 0$.]

Необходимость вытекает непосредственно из теоремы 3.2 и следствия 2.1. Достаточность доказывается следующим образом. На k-м шаге мы имеем два абсолютных параллелизма с одинаковыми постоянными структурными функциями, поэтому достаточно просто применить теорему 2.4 гл. V. Здесь группой является группа всех автоморфизмов плоской G-структуры, а многообразием — k-е продолжение G-структуры B_G.

Заметим, что теорема 3.3 остается справедливой при значительно более слабых предположениях, чем предположение, что G — группа конечного типа. Например, она доказана (в упомянутой в предисловии статье Сингера и Стернберга) в предположении, что группа G вполне приводима, а также для любых групп G в предположении, что G-структура B_G аналитична. По-видимому, теорема справедлива для всех групп Ли G и всех G-структур B_G, однако доказательство мне пока неизвестно.

В следующем параграфе мы будем изучать абсолютный параллелизм и другие структуры конечного типа более подробно. В заключение этого параграфа заметим, что при решении проблемы эквивалентности часто оказывается плодотворным следующий подход: попытаться редуцировать группу к группе конечного типа методами § 2, а затем применить процедуру, изложенную в этом и следующем параграфах.

Так, группа G_7, полученная в § 2 при изучении дифференциальной системы на пятимерном пространстве, является группой конечного типа: $g_7^{(2)}=0$, в то время как исходная группа G_{19} была группой бесконечного типа.

§ 4. СТРУКТУРЫ КОНЕЧНОГО ТИПА

Как мы видели в предыдущем параграфе, проблема локальной эквивалентности структур конечного типа сводится к проблеме локальной эквивалентности $\{e\}$-структур, т. е. абсолютных параллелизмов. Это приводит к изучению проблемы эквивалентности абсолютных параллелизмов (или, по терминологии Картана, *ограниченной* проблемы эквивалентности). Мы решим эту проблему (в достаточно общих предположениях), пользуясь методами § 2 (главным образом, теоремой 2.1). В случае $\{e\}$-структуры

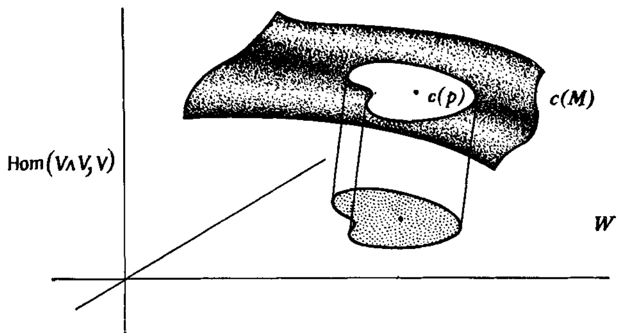


Рис. 32.

$g = 0$, так что структурная функция c принимает значения в $\mathrm{Hom}(V \wedge V, V)$. Кроме того, мы можем отождествить $B_{\{e\}}$ с базисным многообразием M и, следовательно, *можем рассматривать функцию c как отображение $M \to \mathrm{Hom}(V \wedge V, V)$*. Исследуем два крайних случая: 1) c — константа, 2) c — погружение $M \to \mathrm{Hom}(V \wedge V, V)$. В первом случае мы уже рассматривали проблему локальной эквивалентности: *если M_1 и M_2 — два многообразия с абсолютными параллелизмами, причем структурная функция c_1 для M_1 — константа, то они локально эквивалентны тогда и только тогда, когда структурная функция c_2 для M_2 является константой, равной c_1*. Необходимость этого условия устанавливает теорема 2.1. Достаточность следует из теоремы 2.7 гл. V (приведенное там доказательство теоремы использует как раз то, что функции c^i_{jk} постоянны).

Исследуем теперь другой крайний случай (являющийся вместе с тем случаем общего положения). Допустим, что c есть погружение многообразия M в $\mathrm{Hom}(V \wedge V, V)$. Пусть p — точка из M. Выберем n-мерное подпространство $W \subset \mathrm{Hom}(V \wedge V, V)$ так, чтобы проекция ρ: $c(M) \to W$ была невырожденной в некоторой окрестности U точки $c(p)$ (рис. 32). Тем самым мы получим специальную карту $(U, \rho \circ c)$ вблизи точки p. Пусть M' — другое многообразие с абсолютным параллелизмом, и пусть φ — локальный изоморфизм многообразия M на M', определенный на U, причем $\varphi(p) = q$. Согласно теореме 2.1, мы должны иметь $c' \circ \varphi = c$, где c' — структурная функция для M'. Таким образом, $c'(\varphi(U)) = c(U)$, и, в частности, c' есть погружение вблизи точки q и проекция ρ невырожденна в q. Мы можем написать $(\rho \circ c') \circ \varphi = \rho \circ c$. Поскольку $\rho \circ c$ и $\rho \circ c'$ — диффеоморфизмы, имеем $\varphi = (\varphi \circ c')^{-1} \circ (\rho \circ c)$. Тем самым изоморфизм φ однозначно определен. Поэтому условие локальной эквивалентности в случае общего положения можно сформулировать следующим образом:

Пусть M — многообразие с абсолютным параллелизмом, причем соответствующая структурная функция c является погружением вблизи точки p. Выберем n-мерное подпространство $W \subset \operatorname{Hom}(V \wedge V, V)$ и проекцию ρ: $\operatorname{Hom}(V \wedge V, V) \to W$ так, чтобы отображение ρ было невырожденным на $c(M)$ в точке $c(p)$. Пусть M' — другое многообразие с абсолютным параллелизмом и $q \in M'$. Для того чтобы существовал локальный изоморфизм φ: $M \to M'$, переводящий p в q, структурная функция c' для M' должна быть погружением в точке q. Кроме того, ρ должно быть невырожденным на $c'(M')$ в точке q. Если эти условия выполнены, то изоморфизмом φ может быть только отображение $\varphi = (\rho \circ c')^{-1} \circ (\rho \circ c)$. Для того чтобы это отображение было локальным изоморфизмом, мы должны иметь $c' \circ \varphi = c$.

Достаточность этих условий мы докажем позднее в более общей ситуации.

Отметим, что при изучении G-структур конечного типа мы не можем удовлетвориться последним результатом, несмотря на то, что он применим к $\{e\}$-структуре общего положения. Действительно, структурные функции $\{e\}$-структур, возникающих в результате продолжений G-структур конечного типа, имеют части, которые являются константами (а именно, структурными константами соответствующих алгебр Ли). Таким образом, эти структурные функции не являются погружениями.

В «промежуточном» случае, когда функция c не является ни погружением, ни константой, мы должны обратиться к структурным функциям «высших порядков», как в § 3. Для того чтобы представить результаты в форме, наиболее удобной для вычислений, мы будем пользоваться индексными обозначениями и введем еще несколько определений. Выберем некоторый базис пространства V.

Тогда V-значную форму ω, задающую на M абсолютный параллелизм, можно записать в виде $\omega = (\omega^1, \ldots, \omega^n)$. Для любой функции f на M имеем

$$df = \sum f_i \omega^i. \tag{4.1}$$

Функция f_i называется *i-й ковариантной производной* функции f. Если в обозначение функции входят индексы, то перед индексом, указывающим ковариантную производную, мы будем ставить запятую. Например,

$$dc^i_{jk} = \sum_l c^i_{jk,l}\omega^l. \tag{4.2}$$

Пусть $\mathscr{F}$ — семейство функций на M. *Рангом* $r_p(\mathscr{F})$ семейства $\mathscr{F}$ в точке $p \in M$ называется размерность подпространства пространства $T^*_p(M)$, порожденного дифференциалами df всех функций $f \in \mathscr{F}$. На классическом языке $r_p(\mathscr{F})$ есть степень функциональной независимости семейства функций $\mathscr{F}$ в точке p. Семейство $\mathscr{F}$ называется *регулярным* в точке p, если $r_q(\mathscr{F}) = r_p(\mathscr{F})$ для всех q из некоторой окрестности точки p. Предположим, что $\mathscr{F}$ регулярно в p, причем $r_p(\mathscr{F}) = k$. Тогда мы можем выбрать функции $f_1, \ldots, f_k \in \mathscr{F}$ так, чтобы их дифференциалы $df_1, \ldots, df_k$ были линейно независимы в некоторой окрестности точки p. Дополним функции f_i до системы координат вблизи p, т. е. выберем вблизи p такую систему координат $x^1, \ldots, x^n$, что $x^1 = f_1, \ldots, x^k = f_k$. Дифференциал df любой функции $f \in \mathscr{F}$ в силу регулярности семейства $\mathscr{F}$ является линейной комбинацией форм $dx^1, \ldots, dx^k$. Поэтому любую функцию $f \in \mathscr{F}$ можно представить в виде $f = f(x^1, \ldots, x^k)$. Тем самым доказана

Лемма 4.1. *Пусть $\mathscr{F}$ — регулярное семейство функций, имеющее в точке p ранг k. Тогда в окрестности точки p можно выбрать такие координаты $x^1, \ldots, x^n$, что $x^1, \ldots, x^k \in \mathscr{F}$ и любая функция $f \in \mathscr{F}$ записывается в виде $f = f(x^1, \ldots, x^k)$. Такая система координат называется приспособленной к $\mathscr{F}$.*

Вернемся к изучению абсолютного параллелизма. В терминах выбранного базиса пространства V структурная функция c задается функциями c^i_{jk}, где

$$d\omega^i = \sum c^i_{jk}\omega^j \wedge \omega^k.$$

Таким образом, мы имеем семейство $\mathscr{F}_0$, состоящее из $n(n(n-1))/2$ функций c^i_{jk} на M. Рассмотрим также семейство

$$\mathscr{F}_1 = \{c^i_{jk},\ c^i_{jk,l}\},$$

где функции $c^i_{jk,l}$ задаются формулой (4.2), состоящее из $(n(n-1)/2)(n+n^2)$ функций, и, более общо, семейство

$$\mathcal{F}_s = \{c^i_{jk};\ c^i_{jk,i_1};\ c^i_{jk,i_1,i_2};\ \ldots;\ c^i_{jk,i_1,\ldots,i_s}\}$$

из $(n(n-1)/2)(n+n^2+\ldots+n^s)$ функций. Положим

$$k_s(p) = r_p(\mathcal{F}_s). \tag{4.3}$$

Поскольку $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_{s+1}$, мы можем написать

$$0 \leqslant k_0(p) \leqslant k_1(p) \leqslant \ldots \leqslant k_s(p) \leqslant n. \tag{4.4}$$

Лемма 4.2. *Предположим, что семейство $\mathcal{F}_{s+1}$ регулярно в точке p. Тогда, если $k_s(p) = k_{s+1}(p)$, то $k_s(p) = k_u(p)$ для всех $u > s$.*

Доказательство. Пусть $k = k_s(p)$, и пусть $x^1, \ldots, x^n$ — приспособленная к $\mathcal{F}_{s+1}$ система координат в окрестности точки p. Поскольку $k_s(p) = k_{s+1}(p) = k$, мы можем считать, что функции $x^1, \ldots, x^k$ принадлежат $\mathcal{F}_s$ (а не только $\mathcal{F}_{s+1}$). Определим функции $x^i_{,j}$ равенством

$$dx^i = \sum x^i_{,j}\omega^j.$$

Из определения семейства $\mathcal{F}_{s+1}$ следует, что $x^i_{,j} \in \mathcal{F}_{s+1}$. Поэтому мы можем написать

$$x^i_{,j} = x^i_{,j}(x^1, \ldots, x^k).$$

Для любой функции $f \in \mathcal{F}_{s+1}$ имеем $f = f(x^1, \ldots, x^k)$, откуда

$$df = \sum_1^k \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^k \frac{\partial f}{\partial x^i} x^i_{,j}\right)\omega^j,$$

или

$$f_{,j} = \sum_{i=1}^k \frac{\partial f}{\partial x^i} x^i_{,j}.$$

Все функции в правой части этого равенства зависят только от $x^1, \ldots, x^k$. Таким образом, ковариантные производные любой функции $f \in \mathcal{F}_{s+1}$ являются функциями от $x^1, \ldots, x^k$. Значит, ранг семейства $\mathcal{F}_{s+2}$ равен k. Продолжая по индукции, мы докажем лемму 4.2.

Определение 4.1. Пусть $\omega^1, \ldots, \omega^n$—формы, определяющие на многообразии M абсолютный параллелизм. Пусть p — точка из M. Если для некоторого s семейство $\mathcal{F}_{s+1}$ регулярно в точке p

и $k_s(p)=k_{s+1}(p)$, то абсолютный параллелизм называется *регулярным в точке* p. Наименьшее такое s называется *порядком* $r(p)$ *абсолютного параллелизма в точке* p, а число $k(p)=k_s(p)$ — *рангом параллелизма в точке* p. Карта, приспособленная к $\mathcal{F}_i$ в p, будет называться *приспособленной картой в точке* p.

Заметим, что если p — точка общего положения из M, то семейство $\mathcal{F}_i$ регулярно в p при любом i. В этом случае, если i меньше, чем порядок параллелизма в точке p, то $k_i(p)<k_{i+1}(p)$. Поэтому для такой точки справедливо неравенство

$$r(p)\leqslant k(p)\leqslant n.$$

Это означает, что при изучении проблемы эквивалентности «общих» G-структур конечного типа необходимо только конечное число дифференцирований, причем это число определяется группой G.

Предположим, что формы $\omega^1, \ldots, \omega^n$ задают на M регулярный абсолютный параллелизм порядка r и ранга k. Каждая функция из $\mathcal{F}_r$ имеет определенное множество индексов. В частности, если $x^1, \ldots, x^n$ — приспособленные координаты, то мы можем рассмотреть индексы каждой из функций $x^1, \ldots, x^k \in \mathcal{F}_s$. Любые другие функции из $\mathcal{F}_s$ являются функциями от $x^1, \ldots, x^k$. Теперь мы в состоянии сформулировать необходимые и достаточные условия эквивалентности.

Теорема 4.1. *Пусть $\omega^1, \ldots, \omega^n$ — формы, задающие на многообразии M абсолютный параллелизм, регулярный в точке $p\in M$ и имеющий в ней порядок r и ранг k. Пусть $\bar\omega^1, \ldots, \bar\omega^n$ — формы, задающие абсолютный параллелизм на другом многообразии $\bar M$, и пусть $\bar p\in \bar M$. Для того, чтобы существовал локальный изоморфизм $\varphi\colon M\to\bar M$, переводящий p в $\bar p$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:*

(i) *абсолютный параллелизм на $\bar M$ имеет в точке $\bar p$ порядок r и ранг k;*

(ii) *если $x^1, \ldots, x^n$ — приспособленные координаты в точке p, а $\bar x^1, \ldots, \bar x^k$ — функции из $\bar{\mathcal{F}}_r$ с теми же индексами, что и $x^1, \ldots, x^k$, то $\bar x^1, \ldots, \bar x^k$ независимы, т. е. их можно дополнить до приспособленной системы координат на $\bar M$ в точке $\bar p$, причем $\bar x^i(\bar p)=x^i(p)$, $i=1, \ldots, k$;*

(iii) *если f — функция из $\mathcal{F}_{r+1}$, а $\bar f$ — функция с теми же индексами из $\bar{\mathcal{F}}_{r+1}$ и если f может быть представлена в виде функции от $x^1, \ldots, x^k$, скажем $f=g(x^1, \ldots, x^k)$, то $\bar f$ — та же самая функция от $\bar x^1, \ldots, \bar x^k$, т. е. $\bar f=g(\bar x^1, \ldots, \bar x^k)$.*

Если φ — локальный изоморфизм и функции $f \in \mathcal{F}_{r+1}$ и $\bar{f} \in \bar{\mathcal{F}}_{r+1}$ имеют одинаковые индексы, то

$$\bar{f} \circ \varphi = f. \tag{4.5}$$

Замечание. Если $r = 0$ и $k = n$, то теорема 4.1 является просто другой формулировкой утверждения, приведенного на стр. 363. Если $r = 0$ и $k = 0$, то теорема 4.1 сводится к теореме 2.4 гл. V. При доказательстве теоремы в общем случае мы более или менее следуем доказательству теоремы 2.4 гл. V.

Условие, что φ — локальный изоморфизм, можно записать в виде

$$\varphi^* \bar{\omega}^i = \omega^i, \qquad i = 1, \ldots, n. \tag{4.6}$$

В частности, если φ — локальный изоморфизм, то

$$d\omega^i = \varphi^* d\bar{\omega}^i = \sum (\bar{c}^i_{jk} \circ \varphi)\, \varphi^*\omega^j \wedge \varphi^*\omega^k = \sum c^i_{jk} \omega^j \wedge \omega^k,$$

откуда

$$\bar{c}^i_{jk} \circ \varphi = c^i_{jk}.$$

Отсюда следует, что

$$d(\bar{c}^i_{jk} \circ \varphi) = \sum (\bar{c}^i_{jk,\,l} \circ \varphi)\, \varphi^*(\bar{\omega}^l) = \sum c^i_{jk,\,l}\, \omega^l,$$

и, значит,

$$\bar{c}^i_{jk,\,l} \circ \varphi = c^i_{jk,\,l}.$$

Продолжая подобным образом, мы проверим свойство (4.5). Поскольку φ — диффеоморфизм, из этого свойства вытекают условия i), ii) и iii) и тем самым необходимость условий теоремы доказана.

Докажем теперь достаточность. Выберем приспособленные координаты $x^1, \ldots, x^n$ в точке p и приспособленные координаты $\bar{x}^1, \ldots, \bar{x}^n$ с теми же индексами в точке $\bar{p}$. Согласно равенству (4.5), для изоморфизма φ мы должны иметь $\bar{x}^i \circ \varphi = x^i$, $i = 1, \ldots, k$. Вместо того чтобы искать само отображение φ, мы будем искать его график, который является подмногообразием в $M \times \bar{M}$.

Многообразие $M \times \bar{M}$ имеет проекции π_1 и π_2 на первый и второй сомножители. Положим

$$\theta^i = \pi_1^*\omega^i \quad \text{и} \quad \bar{\theta}^i = \pi_2^*\bar{\omega}^i.$$

Аналогично, определим в окрестности точки $(p, \bar{p})$ функции y^i, $\bar{y}^i$, полагая

$$y^i = x^i \circ \pi_1 \quad \text{и} \quad \bar{y}^i = \bar{x}^i \circ \pi_2.$$

Очевидно, что формы $\theta^1, \ldots, \theta^n, \bar{\theta}^1, \ldots, \bar{\theta}^n$ линейно независимы на $M \times \bar{M}$, а функции $y^1, \ldots, y^n, \bar{y}^1, \ldots, \bar{y}^n$ образуют систему координат вокруг точки $(p, \bar{p})$. Если φ — локальный изоморфизм, то его график N [т. е. подмногообразие в $M \times \bar{M}$, состоящее из всех пар $(x, \varphi(x))$] является n-мерным подмногообразием в $M \times \bar{M}$. Если $\iota\colon N \to M \times \bar{M}$ — вложение, то из (4.6) и (4.5) следует, что

$$\iota^*(\theta^i - \bar{\theta}^i) = 0, \qquad i = 1, \ldots, n, \tag{4.7}$$

$$\iota^*(y^i - \bar{y}^i) = 0, \qquad i = 1, \ldots, n. \tag{4.8}$$

Обратно, пусть N есть n-мерное подмногообразие в $M \times \bar{M}$, проходящее через точку $(p, \bar{p})$ и удовлетворяющее условию (4.7). Поскольку $\dim N = n$ и формы $\theta^1, \ldots, \theta^n, \theta^1 - \bar{\theta}^1, \ldots, \theta^n - \bar{\theta}^n$ линейно независимы на $M \times \bar{M}$, формы $\iota^*(\theta^1), \ldots, \iota^*(\theta^n)$ линейно независимы на N. Точно так же формы $\iota^*(\bar{\theta}^1), \ldots, \iota^*(\bar{\theta}^n)$ линейно независимы на N. Отсюда следует, что ограничения проекций π_1 и π_2 на N невырожденны. Но тогда из равенства (4.7) вытекает, что отображение $\varphi = (\pi_2 | N) \circ (\pi_1 | N)^{-1}$ удовлетворяет условию (4.6).

Уравнения $y^i - \bar{y}^i = 0$ $(i = 1, \ldots, k)$ выделяют $(2n-k)$-мерное подмногообразие K многообразия $M \times \bar{M}$. Мы покажем, что уравнения (4.7), ограниченные на K, определяют вполне интегрируемую дифференциальную систему размерности n. Ее интегральное многообразие, проходящее через $(p, \bar{p})$, будет тогда графиком требуемого отображения φ.

Разрешим уравнения

$$dx^i = \sum_{j=1}^{n} x^i_{,j}\omega^j, \qquad i = 1, \ldots, k,$$

относительно k форм ω^j, выразив их через dx^i и через остальные ω^j. Изменив, если понадобится, нумерацию форм ω^j, мы можем написать

$$\omega^i = \sum_{j=1}^{k} a^i_j\, dx^j + \sum_{j=k+1}^{n} b^i_j \omega^j, \qquad i = 1, \ldots, k. \tag{4.9}$$

Входящие в (4.9) функции a^i_j и b^i_j являются рациональными функциями от $x^i_{,j}$ и, следовательно, зависят только от $x^1, \ldots, x^k$. В силу условий ii) и iii) точно так же мы можем выразить часть форм $\bar{\omega}^i$ через $d\bar{x}^i$ и оставшиеся формы $\bar{\omega}^j$. Можно считать, что при этом мы снова получим равенство (4.9), где над всеми символами поставлены черточки. Поднимая эти равенства на $M \times \bar{M}$, имеем

$$\theta^i - \bar{\theta}^i = \sum_{j=1}^{k} (a^i_j\, dy^j - \bar{a}^i_j\, d\bar{y}^j) + \sum_{j=k+1}^{n} (b^i_j \theta^j - \bar{b}^i_j \bar{\theta}^j),$$

где a^i_j, b^i_j — функции от $y^1, \ldots, y^k$, а $\bar{a}^i_j$, $\bar{b}^i_j$ — *те же самые* функции от $\bar{y}^1, \ldots, \bar{y}^k$. В частности, на многообразии K первое выражение в правой части обращается в нуль и $b^i_j = \bar{b}^i_j$, так что на K мы имеем

$$\theta^i - \bar{\theta}^i = \sum_{j=k+1}^{n} b^i_j (\theta^j - \bar{\theta}^j), \qquad i = 1, \ldots, k.$$

Таким образом, из форм $\theta^l - \bar{\theta}^l$ можно выбрать не более чем $n-k$ линейно независимых на K форм. С другой стороны, поскольку все формы $\theta^l - \bar{\theta}^l$ линейно независимы на $M \times \bar{M}$ и коразмерность многообразия K равна k, по крайней мере $n-k$ из этих форм должны быть линейно независимы на K. Поэтому ограничение на K уравнений (4.7) определяет дифференциальную систему размерности $(2n-k)-(n-k)=n$.

Покажем, что эта система вполне интегрируема. Заметим, что

$$d\omega^i = \sum c^i_{jk} \omega^j \wedge \omega^k \quad \text{и} \quad d\bar{\omega}^i = \sum \bar{c}^i_{jk} \bar{\omega}^j \wedge \bar{\omega}^k.$$

Следовательно,

$$d(\theta^i - \bar{\theta}^i) = \sum c^i_{jk} \theta^j \wedge \theta^k + \sum \bar{c}^i_{jk} \bar{\theta}^j \wedge \bar{\theta}^k,$$

где c^i_{jk} — функции от $y^1, \ldots, y^k$, а $\bar{c}^i_{jk}$ — те же самые функции от $\bar{y}^1, \ldots, \bar{y}^k$. В частности, на K мы имеем $c^i_{jk} = \bar{c}^i_{jk}$, откуда

$$d(\theta^i - \bar{\theta}^i) = \sum c^i_{jk} (\theta^j - \bar{\theta}^j) \wedge \theta^k + \sum c^i_{jk} \bar{\theta}^j \wedge (\bar{\theta}^k - \theta^k),$$

что доказывает полную интегрируемость системы, а тем самым и теорему 4.1.

Рассмотрим теперь локальные автоморфизмы абсолютного параллелизма на M. Точку из M назовем *вполне регулярной*, если параллелизм регулярен в этой точке и имеет одинаковый порядок (а также ранг) во всех близких к ней точках. Из теоремы 4.1 немедленно вытекает

Следствие 4.1. *Пусть p — вполне регулярная точка из M ранга k, и пусть $x^1, \ldots, x^n$ — приспособленные координаты в точке p. Тогда любую точку из некоторой окрестности точки p, лежащую на подмногообразии $x^1 = \mathrm{const}, \ldots, x^k = \mathrm{const}$, можно перевести в любую другую такую точку с помощью локального автоморфизма.*

До сих пор все наши рассмотрения были чисто локальными. Перейдем теперь к изучению группы всех автоморфизмов многообразия M с абсолютным параллелизмом. Легко сообразить, что структура этой группы сильно зависит от глобальных свойств многообразия M. [Например, выбрасывание одной точки из M может повлечь за собой значительное уменьшение группы. Поэтому полнота многообразия M (скажем, относительно метрики $(\omega^1)^2 + \ldots + (\omega^n)^2$) играет важную роль.]

Пусть M — многообразие с абсолютным параллелизмом, а G — его группа автоморфизмов.

Предположим для простоты, что M связно (хотя это на самом деле несущественно). Тогда формы $\omega^1, \ldots, \omega^n$ определяют на многообразии M риманову метрику, превращая его тем самым в метрическое пространство. Это в свою очередь определяет в группе G топологию: любому $\varepsilon > 0$ и любому компакту $K \subset M$ соответствует окрестность точки $a \in G$, состоящая из всех таких $b \in G$, что $d(ax, bx) < \varepsilon$ для всех $x \in K$, где d — функция расстояния на M.

Теорема 4.2 (Кобаяси). *Пусть M — связное многообразие с абсолютным параллелизмом и G — группа его автоморфизмов. Для любой точки $p \in M$ отображение φ_p: $G \to M$, задаваемое формулой*

$$\varphi_p(a) = a(p)$$

для всех $a \in G$, взаимно однозначно и взаимно непрерывно. Множество $\varphi_p(G)$ является замкнутым подмногообразием в M, и дифференцируемая структура, индуцированная на G отображением φ_p, превращает G в группу Ли. Короче, группа автоморфизмов абсолютного параллелизма есть группа Ли.

Применяя теорему 3.2, мы немедленно получаем

Следствие 4.2. *Группа автоморфизмов H-структуры конечного типа есть группа Ли.*

Для римановой структуры этот результат был впервые доказан Майерсом и Стинродом.

Для доказательства теоремы 4.2 введем некоторые обозначения. Абсолютный параллелизм позволяет отождествить V с касательным пространством в любой точке многообразия M. Таким образом, вектор $v \in V$ определяет векторное поле на M, которое мы будем обозначать $\hat{v}$. Векторное поле $\hat{v}$ задает в свою очередь локальную однопараметрическую группу, которую мы обозначим $\exp tv$. Отображение $\exp tv$ определено в точке $p \in M$ при достаточно малых t. Или, что то же самое, локальный диффеоморфизм $\exp v$ ($=\exp 1\cdot v$) определен в точке $p \in M$ для всех $v \in V$ из некоторой окрестности нуля. Отображение $p \to (\exp v)(p)$ есть диффеоморфизм окрестности нуля в V на окрестность точки p в M.

Если $a \in G$, то $a^*\hat{v} = \hat{v}$ для всех $v \in V$. Поэтому, как только определен локальный диффеоморфизм $\exp v$, мы можем написать

$$a \circ \exp v = (\exp v) \circ a. \tag{4.10}$$

Л е м м а 4.3. *Группа G действует на M без неподвижных точек. Другими словами, если $a(p) = p$ для некоторого $a \in G$ и некоторой точки $p \in M$, то $a = \mathrm{id}$.*

Действительно, множество неподвижных точек преобразования a замкнуто. С другой стороны, из формулы (4.10) следует, что оно открыто. Поскольку многообразие M связно, это означает, что множество неподвижных точек либо пусто, либо совпадает с M.

Л е м м а 4.4. *Пусть a_k — последовательность элементов из G, причем для некоторой точки $p \in M$ последовательность $a_k(p)$ сходится к $a(p)$, где $a \in G$. Тогда $a_k \to a$ во введенной нами топологии группы G.*

Снова воспользуемся связностью. Множество точек q, для которых последовательность $a_k(q)$ сходится к $a(q)$, замкнуто: если $q_r \to q$ и $a_r(q_k) \to a(q_k)$, то выбирая сначала k так, чтобы $d(q_k, q) < \varepsilon$, а затем r так, чтобы

$$d(a_r(q_k), a(q_k)) < \varepsilon,$$

мы получим

$$d(a_r(q), a(q)) \leqslant d(a_r(q_k), a_r(q)) + d(a(q_k), a(q)) + \\ + d(a_r(q_k), a(q_k)) \leqslant 3\varepsilon.$$

С другой стороны, из (4.10) следует, что это множество открыто. Значит, $a_k(p) \to a(p)$ для всех $p \in M$. Пусть теперь K — компактное подмножество в M. Выберем в K всюду плотную последовательность точек $\{p_k\}$. Для любого $\varepsilon > 0$ возьмем столь большое k, чтобы каждая точка из K находилась от одной из точек p_i ($i \leqslant k$) на расстоянии не больше ε. Для достаточно большого r имеем $d(a_r(p_i), a(p_i)) < \varepsilon$ при всех $i \leqslant k$. Тогда $d(a_r(p), a(p)) < 3\varepsilon$ для всех $p \in K$; значит, $a_r \to a$ в топологии группы G.

Л е м м а 4.5. *Пусть $\{a_k\}$ — последовательность элементов из G, причем $a_k(p) \to q$ для некоторых точек p и $q \in M$. Тогда существует такой элемент $a \in G$, что $a(p) = q$.*

Мы хотим построить автоморфизм a, переводящий p в q. Для этого определим сначала диффеоморфизм a в окрестности U точки p, полагая $a((\exp v)(p)) = \exp v(q)$. Во всех точках из U отображение a является поточечным пределом отображений a_i. Если мы продолжим отображение a подобным же образом вдоль любых кривых, то вновь полученное отображение по-прежнему будет являться поточечным пределом отображений a_i и, следовательно, не будет зависеть от выбора кривых. Таким образом, благодаря связности многообразия M, мы получим требуемый автоморфизм a.

Итак, мы доказали, что отображение φ_p: $G \to M$ взаимно однозначно и взаимно непрерывно и что образ группы G замкнут. Покажем теперь, что $\varphi_p(G)$ есть подмногообразие в M. Для этого построим сначала касательное пространство к этому подмногообразию.

Мы скажем, что последовательность $a_k \to e$ элементов из G тангенциально сходится к единице в точке p, если сходится последовательность

$$\frac{x^i(a_k(p)) - x^i(p)}{\left[\sum (x^j(a_k(p)) - x^j(p))^2\right]^{1/2}},$$

где $x^1, \ldots, x^n$ — некоторая (а значит, и любая) система координат. В таком случае эта последовательность определяет касательный вектор в точке p. Рассуждая так же, как в § 4 гл. V, мы заключаем, что множество таких векторов образует вполне интегрируемую дифференциальную систему $\mathscr{D}$ на M.

Пусть N — максимальное интегральное многообразие этой дифференциальной системы, проходящее через p. Покажем, что $N \subset \varphi_p(G)$. Достаточно проверить, что $\varphi_p(G) \cap N$ есть открытое множество в N. В силу замкнутости множества $\varphi_p(G)$ отсюда будет следовать, что $N \subset \varphi_p(G)$.

Пусть X_q — касательный вектор в точке q, принадлежащий $\mathscr{D}$. Тогда, согласно формуле (4.10), последовательность $\{a_k\}$, определяющая вектор X_q, определяет также вектор $(\exp v)_* X_q$ в точке $\exp v(q)$ при любом малом $v \in V$. Таким образом, мы получаем (локально определенное) векторное поле X, такое, что

$$X_{\exp v(q)} = (\exp v)_* X_q. \tag{4.11}$$

Ясно, что множество таких векторных полей порождает систему $\mathscr{D}$ в окрестности точки q. Если точка q лежит на N, то любая близкая к ней точка из N имеет вид $\exp X(q)$ [1]). Мы сейчас покажем, что все такие точки представимы в виде $b(q)$, где $b \in G$. Тогда для $q \in \varphi_p(G) \cap N$, т. е. для $q = a(p)$, мы получим, что все

---

[1]) То есть лежит на проходящей через q траектории подходящего векторного поля X. Это exp не надо путать с отображением $V \to M$, переводящим v в $\exp v(q)$.

точки, близкие к q, имеют вид $ba(p)$. Тем самым будет доказано, что множество $\varphi_p(G)\cap N$ открыто в N. Итак, пусть вектор $v_1\in V$ таков, что $\hat{v}_{1q}=X_q$. Дополним его до базиса $v_1, \ldots, v_n$ пространства V. Тогда отображение $v\to \exp v(q)$ задает в окрестности точки q систему координат $x^1, \ldots, x^n$; точка $\exp(x^1v_1+\ldots$ $\ldots+x^nv_n)\,q$ имеет координаты $x^1, \ldots, x^n$. Координаты самой точки q равны $(0, \ldots, 0)$. Вычислим координаты точки $\exp X(q)$. Имеем

$$\begin{aligned}X_{\exp tv_1(q)}&=(\exp tv_1)_*X_q=\\&=(\exp tv_1)_*\hat{v}_{1q}=\\&=\hat{v}_{1\exp(tv_1)(q)}.\end{aligned}$$

Другими словами, векторные поля X и $\hat{v}_1$ совпадают вдоль кривой $\exp tv_1(q)$. Следовательно,

$$\exp X(q)=\exp\hat{v}_1(q)$$

и координаты точки $\exp X(q)$ равны $(1, 0, \ldots, 0)$. Пусть теперь $\{a_k\}$ — такая последовательность элементов из G, что $a_k\to e$ и

$$\left|\frac{x^i(a_k(q))}{\left[\sum x^j(a_k(q))^2\right]^{1/2}}-\delta_1^i\right|<\varepsilon \tag{4.12}$$

при достаточно большом k. Такая последовательность существует, поскольку координаты точки q равны $(0, \ldots, 0)$, а координаты вектора X_q равны $(1, 0, \ldots, 0)$.

Выражение $\sum x^j(a_k(q))^2$ стремится к нулю. Поэтому, как следует из (4.12), при достаточно большом k можно найти такое целое число N, что

$$|Nx^i(a_k(p))-\delta_1^i|<\varepsilon. \tag{4.13}$$

Пользуясь равенством (4.10), находим, что если $(\exp v)\,q=aq$, то

$$(\exp 2v)\,q=(\exp v)^2\,q=(\exp v)\,aq=a(\exp v)\,q=a^2q,$$

или, более общо, $(\exp Nv)\,q=a^Nq$. Из определения координат $x^1, \ldots, x^n$ следует, что $Nx^i(a_k(q))$ есть координаты точки $a_k^N(q)$. Таким образом, неравенство (4.13) можно переписать в виде

$$|x^i(a_k^N(q))-x^i(\exp X(q))|<\varepsilon.$$

Другими словами, мы можем найти элементы из G, переводящие точку q сколь угодно близко к точке $\exp X(q)$. Согласно лемме 4.5, отсюда следует существование такого $a\in G$, для которого $a(q)=\exp X(q)$.

Тем самым доказано, что $N\subset\varphi_p(G)$. Пусть G_0 — связная компонента единицы группы G. Покажем, что $N=\varphi_p(G_0)$. Поскольку

$N \subset \varphi_p(G)$, достаточно проверить, что $\varphi_p(G)$ не может содержать никаких других интегральных многообразий системы $\mathscr{D}$. [Этого достаточно, поскольку вместе с любой точкой множество $\varphi_p(G)$ содержит и максимальное интегральное многообразие системы $\mathscr{D}$, проходящее через эту точку; это доказывается так же, как и включение $N \subset \varphi_p(G)$.] Предположим, что $\varphi_p(G)$ содержит другое интегральное многообразие. В силу связности мы можем тогда найти точку $q \in N$, являющуюся пределом последовательности

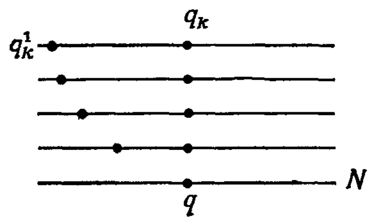


Рис. 33.

точек $q_k^1 \in \varphi_p(G_0)$, не лежащих в N. Заменяя каждую точку q_k^1 точкой q_k из того же максимального интегрального многообразия, что и q_k^1, мы можем добиться того, чтобы новая последовательность q_k сходилась к точке q в направлении, не касательном к N (рис. 33). С другой стороны, мы можем написать $q_k = a_k(q)$, где $a_k \in G_0$. Но по самому определению системы $\mathscr{D}$ мы можем выбрать подпоследовательность из $\{a_k\}$, которая сходится в касательном к N направлении. Полученное противоречие показывает, что $N = \varphi_p(G_0)$. Это в свою очередь означает, что $\varphi_p(G)$ есть подмногообразие из M. Остальные утверждения теоремы Кобаяси проверяются непосредственно.

§ 5. СВЯЗНОСТИ НА G-СТРУКТУРАХ

В этом параграфе мы будем изучать геометрию связностей на G-структурах. С одной стороны, поскольку G-структура есть главное расслоение, эту теорию можно рассматривать как частный случай теории связностей на главных расслоениях, развитую в § 1. С другой стороны, как было указано в § 3, связность на G-структуре над многообразием M представляет собой специальный вид структуры «второго порядка» на M. Взаимосвязь этих двух теорий обусловливает интересные геометрические свойства связности на G-структуре. Связность на $GL(n)$-структуре $\mathscr{F}(M)$ называется *линейной связностью* на M. Допуская вольность речи, мы будем называть связность на G-структуре над многообразием

M G-связностью на M. Таким образом, задание G-связности на M включает в себя задание двух объектов: конкретной G-структуры B_G на M и связности на B_G. Если $G_1 \subset G_2$, то процедура расширения группы (см. § 1) позволяет перейти от G_1-связности к G_2-связности. В частности, любая G-связность определяет некоторую линейную связность.

Всякая G-связность определяет параллельный перенос слоев расслоения B_G вдоль кривых базы M. Она также позволяет определить понятие параллельного переноса в любом ассоциированном с B_G расслоении. В частности, мы имеем параллельный перенос в $T(M)$: если C: $[0, 1] \to M$ — кривая на M и $X_0 \in T_{C(0)}(M)$, то однозначно определяются векторы $X_t \in T_{C(t)}(M)$ для всех $t \in [0, 1]$. Отображение $X_0 \to X_t$ линейно и переводит реперы из B_G в реперы из B_G. Поэтому все «дополнительные структуры», которые определяются в касательном пространстве с помощью группы G, сохраняются при параллельных переносах. Например, если $G = O(n)$, так что M — риманово многообразие, то $(X_t, Y_t) = (X_0, Y_0)$ при всех t.

Понятие параллельного переноса касательных векторов позволяет определить ковариантную производную векторного поля вдоль кривой. Пусть C: $[a, b] \to M$ — дифференцируемая кривая на M, и пусть $\{Y_t \in T_{C(t)}(M)\}$ — семейство касательных векторов вдоль этой кривой. Параллельно перенося векторы Y_t в точку $C(0)$ вдоль кривой C, мы получим семейство касательных векторов $\overline{Y}_t \in T_{C(0)}$. Можно рассмотреть предел

$$\left.\frac{DY_t}{dt}\right|_{t=0} = \lim_{t\to 0} \frac{\overline{Y}_t - Y_{C(0)}}{t}, \tag{5.1}$$

который существует, если семейство Y_t дифференцируемо (как кривая в $T(M)$).

Если X и Y — векторные поля на M, то мы можем ввести ковариантную производную поля Y относительно поля X. Она обозначается символом $\nabla_X Y$ и определяется следующим образом. Пусть $x \in M$ и C — интегральная кривая поля X, проходящая через x. Положим $Y_t = Y_{C(t)}$. Тогда

$$(\nabla_X Y)_x = \left.\frac{DY_t}{dt}\right|_{t=0}. \tag{5.2}$$

Найдем другие выражения для $\nabla_X Y$. Заметим прежде всего, что существует взаимно однозначное соответствие $X \leftrightarrow f_X$ между векторными полями X на M и V-значными функциями f на $\mathscr{F}(M)$, удовлетворяющими условию $f(p \cdot a) = a^{-1} f(p)$, где $a \in GL(n)$. Ясно, что такая функция f определяет векторное поле. Обратно, пусть X — векторное поле на M и $\hat{X}$ — соответствующее ему горизонтальное векторное поле на B_G (определяемое с помощью связности). Тогда $f_X = \langle \hat{X}, \omega \rangle$ — требуемая функция на B_G.

Пусть X и Y — векторные поля на M, и пусть $p \in B_G$, причем $\pi(p) = x$. Тогда

$$(\nabla_X Y)_x = p \cdot (\hat{X} f_Y)(p). \tag{5.3}$$

[В этой формуле $\hat{X} f_Y$ есть V-значная функция на B_G, так что $\hat{X} f_Y(p) \in V$ и, следовательно, $p(\hat{X} f_Y(p)) \in T_x(M)$.] Чтобы проверить формулу (5.3), рассмотрим интегральную кривую C поля X, проходящую через x. Пусть $\overline{C}$ — горизонтальная кривая, проходящая через p и лежащая над C. Тогда, используя определение связности на ассоциированном расслоении (см. конец § 1) и формулы (5.1) и (5.2), находим

$$\begin{aligned}(\nabla_X Y)_x &= \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} [\overline{C}(0) \overline{C}(t)^{-1} Y_t - Y_0] = \\ &= \overline{C}(0) \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} [\overline{C}(t)^{-1} Y_t - \overline{C}(0)^{-1} Y_0] = \\ &= \overline{C}(0) \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} [f_Y(\overline{C}(t)) - f_Y(\overline{C}(0))] = \\ &= p \hat{X}_p f_Y(p),\end{aligned}$$

поскольку $\overline{C}(0) = p$ и $\hat{X}_p$ — касательный вектор кривой $\overline{C}$ в точке p. Это доказывает формулу (5.3).

Далее, отображение $X \to \hat{X}$ линейно и $\widehat{gX} = (\pi^* g) \hat{X}$. Отображение $Y \to f_Y$ также линейно и удовлетворяет условию $f_{gY} = \pi^*(g) f_Y$. Эти замечания вместе с формулой (5.3) показывают, что

$$\nabla_{X_1 + X_2} Y = \nabla_{X_1} Y + \nabla_{X_2} Y, \tag{5.4}$$

$$\nabla_{gX} Y = g \nabla_X Y, \tag{5.5}$$

$$\nabla_X (Y_1 + Y_2) = \nabla_X Y_1 + \nabla_X Y_2, \tag{5.6}$$

$$\nabla_X g Y = g \nabla_X Y + (Xg) Y. \tag{5.7}$$

Дадим теперь выражение для ковариантной производной в терминах локальных координат. Пусть $x^1, \ldots, x^n$ — система координат в окрестности U на многообразии M. Тогда мы можем написать

$$\nabla_{\partial/\partial x^i} \left(\frac{\partial}{\partial x^j} \right) = \sum_k \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x^k}, \tag{5.8}$$

где Γ_{ij}^k — подходящие функции на U. Пользуясь формулами (5.4) — (5.7), мы можем с помощью Γ_{ij}^k вычислить ковариантную производную любого векторного поля относительно любого другого векторного поля в U. Пусть $y^1, \ldots, y^n$ — другая система координат с функциями Γ'^k_{ij}, определенная в окрестности V. Тогда в пересечении $U \cap V$ имеем

$$\frac{\partial}{\partial y^i} = \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial x^l}{\partial y^i} \frac{\partial}{\partial x^l}.$$

Подставляя эту формулу в равенство

$$\nabla_{\partial/\partial y^i}\left(\frac{\partial}{\partial y^j}\right) = \sum \Gamma'^k_{ij} \frac{\partial}{\partial y^k},$$

получаем

$$\Gamma'^k_{ij} = \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial^2 x^l}{\partial y^i \partial y^j} \frac{\partial y^k}{\partial x^l} + \sum_{r,\, s,\, t=1}^{n} \Gamma^t_{rs} \frac{\partial x^r}{\partial y^i} \frac{\partial x^s}{\partial y^j} \frac{\partial y^k}{\partial x^t}. \tag{5.9}$$

Предположим теперь, что в каждой карте некоторого атласа многообразия M заданы функции Γ^k_{ij}, причем в пересечении двух карт эти функции связаны соотношением (5.9). Легко проверить, что это позволяет определить ковариантную производную $\nabla_X Y$ для любых векторных полей X и Y. Действительно, локально, пользуясь формулами (5.4) — (5.8), мы можем вычислить $\nabla_X Y$ в любой карте. Соотношение (5.9) гарантирует, что полученные выражения согласованы на пересечении карт и, значит, не зависят от локальных координат. Покажем теперь, что такие функции Γ^k_{ij} действительно определяют на M линейную связность. Для этого напомним, как в $\mathcal{F}(M)$ были введены локальные координаты. Если $x^1, \ldots, x^n$ — система координат в окрестности $U \subset M$, то точка $p \in \mathcal{F}(M)$, для которой $\pi(p) = x \in U$, представляет собой репер $(X_1, \ldots, X_n)$, где

$$X_i = \sum_{k=1}^{n} X^k_i \left(\frac{\partial}{\partial x^k}\right),$$

причем матрица (X^k_i) невырожденна. Пусть (Y^i_j) — обратная матрица, так что (X^k_i) и (Y^i_j) — матричнозначные функции на $\pi^{-1}(U)$. Легко проверить, что

$$\omega^i = \sum Y^i_j \pi^* dx^j \tag{5.10}$$

на $\pi^{-1}(U)$ [где $\omega = (\omega^1, \ldots, \omega^n)$ — фундаментальная V-значная форма на $\mathcal{F}(M)$.] Положим

$$\Omega^s_i = \sum_{j=1}^{n} Y^s_j \left(dX^j_i + \sum_{k,\, l=1}^{n} \Gamma^j_{kl} X^l_i \pi^* dx^k\right). \tag{5.11}$$

Читатель может в качестве упражнения проверить, что формы Ω_i^s не зависят от локальной системы координат и определены глобально. Пусть $v^1, \ldots, v^n$ — базис пространства V и преобразования $A_j^i \in gl(V)$ заданы формулами $A_j^i v^k = \delta_k^i v^j$. Тогда, как легко проверить, форма

$$\Omega = \sum \Omega_i^j A_j^i$$

определяет на $\mathscr{F}(M)$ связность и функции Γ_{ij}^k этой связности совпадают с исходными. Итак, доказана

Теорема 5.1. *Пусть M — многообразие класса C^∞ (или аналитическое). Тогда следующие объекты на M эквивалентны:*

(i) *линейная связность на M;*

(ii) *отображение $(X, Y) \to \nabla_X Y$ любой пары (X, Y) векторных полей класса C^∞ (аналитических) на M, удовлетворяющее условиям* (5.4) — (5.7);

(iii) *набор функций Γ_{ij}^k для каждой карты некоторого атласа многообразия M, преобразующихся по правилу* (5.9).

До сих пор мы рассматривали $T(M)$ как ассоциированное с B_G расслоение и изучали параллельный перенос в $T(M)$, определяемый G-связностью. Поскольку любое тензорное расслоение также является ассоциированным расслоением, мы можем определить в нем параллельный перенос. Далее, мы можем рассмотреть ковариантную производную тензорного поля вдоль кривой или относительно векторного поля. Таким образом, ∇_X становится линейным оператором, отображающим пространство тензорных полей данного типа в себя. Соответствующее обобщение условия (5.7) состоит в том, что ∇_X является дифференцированием алгебры всех тензорных полей. Важным сопутствующим понятием является понятие *ковариантного дифференциала* тензорного поля. Пусть t — тензорное поле контравариантной степени r и ковариантной степени s (для краткости, типа (r, s)). Тогда для любого векторного поля X тензорное поле $\nabla_X t$ также имеет тип (r, s). Таким образом, мы имеем правило, сопоставляющее каждому векторному полю X тензорное поле типа (r, s), т. е. имеем тензорное поле типа $(r, s+1)$. Обозначим это тензорное поле символом ∇t. В дальнейшем мы несколько раз встретимся со случаем, когда t имеет контравариантную степень 1. Пусть t — тензорное поле типа $(1, s)$. Если $X_1, \ldots, X_s$ — векторные поля, то $t(X_1, \ldots, X_s)$ — также векторное поле. Тензорное поле ∇t типа $(1, s+1)$ определяется тогда формулой

$$(\nabla t)(X_1, \ldots, X_s, X) = \nabla_X(t(X_1, \ldots, X_s)) - \sum_{i=1}^{s} t(X_1, \ldots, \nabla_X X_i, \ldots, X_s). \tag{5.12}$$

Связность на B_G индуцирует на B_G абсолютный параллелизм — отождествление касательного пространства произвольной точки из B_G с $V+g$. Действительно, из определения G-структуры следует, что можно отождествить касательные пространства к слою с g, а выбор горизонтального подпространства H в каждой точке позволяет отождествить H с V. Поэтому любой элемент A из g и любой вектор $v \in V$ определяют векторное поле на B_G. В § 1 мы условились обозначать векторное поле, соответствующее $A \in g$, символом $\widetilde{A}$. В соответствии с этим (и в некотором противоречии с обозначениями § 4) мы будем обозначать символом $\widetilde{v}$ векторное поле, соответствующее вектору $v \in V$. По определению

$$\langle \widetilde{A}, \omega\rangle = 0, \qquad \langle \widetilde{A}, \Omega\rangle = A, \tag{5.13}$$

$$\langle \widetilde{v}, \omega\rangle = v, \qquad \langle \widetilde{v}, \Omega\rangle = 0, \tag{5.14}$$

где ω — фундаментальная V-значная форма на B_G, а Ω — (g-значная) форма связности. Вычислим теперь скобки Ли различных полей вида $\widetilde{A}$ и $\widetilde{v}$. Если $A \in g$ и $B \in g$, то мы имеем

$$[\widetilde{A}, \widetilde{B}] = \widetilde{[A, B]}.$$

Проверим, что

$$[\widetilde{A}, \widetilde{v}] = -\widetilde{A\cdot v}, \tag{5.15}$$

если $A \in g$ и $v \in V$. Рассмотрим для этого однопараметрическую подгруппу a_t группы G, порожденную A. Если $p \in B_G$, то $a_t^* \widetilde{v}_p = \widetilde{(a_t^{-1}v)}_{a_t p}$ в соответствии с формулой (2.3). Дифференцируя это равенство, получим (5.15). Осталось вычислить $[\widetilde{v}_1, \widetilde{v}_2]$ для $v_1, v_2 \in V$. Для этого дадим следующее

Определение 5.1. Форма $D\omega$ называется *кручением* связности.

Напомним, что, согласно определению ковариантного дифференциала D, данного в § 1,

$$\langle X \wedge Y \mid D\omega\rangle = \langle hX \wedge hY \mid d\omega\rangle$$

для любых векторных полей X, Y на B_G. В соответствии с формулой (2.3) имеем

$$R_a^*(D\omega) = a^{-1} D\omega. \tag{5.16}$$

По аналогии с равенством (1.6) можно написать

$$d\omega = -\Omega \wedge \omega + D\omega. \tag{5.17}$$

Проверка равенства (5.17) выполняется точно так же, как и равенства (1.6): используется уравнение (1.10) гл. III, написанное для подходящих векторных полей $\tilde{A}$ и $\tilde{v}$. Детали доказательства мы оставим читателю в качестве упражнения. Применяя теперь равенство (5.17) к $\tilde{v}_1 \wedge \tilde{v}_2$, получим

$$\langle \tilde{v}_1 \wedge \tilde{v}_2 \mid D\omega\rangle = \langle \tilde{v}_1 \wedge \tilde{v}_2 \mid d\omega\rangle =$$
$$= \tilde{v}_1 \langle \tilde{v}_2, \omega\rangle - \tilde{v}_2 \langle \tilde{v}_1, \omega\rangle - \langle [\tilde{v}_1, \tilde{v}_2], \omega\rangle,$$

или, поскольку $\langle \tilde{v}_2, \omega\rangle = v_2 = \mathrm{const}$ и $\langle \tilde{v}_1, \omega\rangle = v_1 = \mathrm{const}$,

$$\langle [\tilde{v}_1, \tilde{v}_2], \omega\rangle = \langle \tilde{v}_1 \wedge \tilde{v}_2 \mid D\omega\rangle.$$

Итак, горизонтальная компонента поля $[\tilde{v}_1, \tilde{v}_2]$ равна $\widetilde{\langle v_1 \wedge v_2, D\omega\rangle}$. Аналогично

$$\langle [\tilde{v}_1, \tilde{v}_2] \mid \Omega\rangle = -\langle \tilde{v}_1 \wedge \tilde{v}_2 \mid D\Omega\rangle.$$

Таким образом, мы можем написать

$$[\tilde{v}_1, \tilde{v}_2] = \widetilde{\langle \tilde{v}_1 \wedge \tilde{v}_2 \mid D\omega\rangle} + \widetilde{\langle \tilde{v}_1 \wedge \tilde{v}_2 \mid D\Omega\rangle}. \tag{5.18}$$

Соберем вместе полученные формулы:

$$[\tilde{A}, \tilde{B}] = \widetilde{[A, B]}, \qquad [\tilde{A}, \tilde{v}] = -\widetilde{A \cdot v}, \tag{5.15}$$

$$[\tilde{v}_1, \tilde{v}_2] = \widetilde{\langle \tilde{v}_1 \wedge \tilde{v}_2 \mid D\omega\rangle} + \widetilde{\langle \tilde{v}_1 \wedge \tilde{v}_2 \mid D\Omega\rangle}. \tag{5.18}$$

Введенные выше кручение и кривизна являются дифференциальными формами на B_G. Их также можно рассматривать как тензорные поля на M. Чтобы убедиться в этом, установим соответствие между определенным классом форм на B_G и тензорными полями на M. Мы уже установили соответствие между определенными V-значными функциями на B_G и векторными полями на M. Назовем дифференциальную форму θ на B_G горизонтальной, если $\langle X_1 \wedge \ldots \wedge X_k \mid \theta\rangle = 0$, как только один из векторов X_i вертикален.

Предложение 5.1. *Существует взаимно однозначное соответствие между тензорными полями t типа $(1, s)$ на M, антисимметричными по ковариантным аргументам, и множеством горизонтальных V-значных s-форм θ на B_G, удовлетворяющих условию $R_a^*\theta = a^{-1}\theta$. Если $\pi(p) = x$ и $X_1, \ldots, X_s \in T_p(B_G)$, то это соответствие устанавливается формулой*

$$t_x(\pi_*(X_1), \ldots, \pi_*(X_s)) = p\langle X_1 \wedge \ldots \wedge X_s \mid \theta\rangle.$$

Доказательство этого предложения очевидно и будет оставлено читателю в качестве упражнения. В частности, форме кручения $D\omega$ соответствует тензорное поле T типа (1, 2) на M. Оно называется *полем тензора кручения* и сопоставляет векторное поле $T(X, Y)$ любой паре X, Y векторных полей на M; при этом

$$T(X, Y) = -T(Y, X).$$

Рассмотрим тензорное поле t типа $(1, s)$ на M. Если свернуть его по последним $s-1$ индексам с векторными полями $X_1, \ldots$ $\ldots, X_{s-1}$, то получится тензорное поле $t(X_1, \ldots, X_{s-1})$ типа $(1, 1)$ на M. Но тензорное поле типа $(1, 1)$ определяет в каждом касательном пространстве $T_x(M)$ линейное преобразование. Заданием G-структуры B_G группа G отождествляется с группой линейных преобразований каждого касательного пространства $T_x(M)$, а ее алгебра Ли — с алгеброй Ли линейных преобразований пространства $T_x(M)$ при каждом $x \in M$. Мы будем говорить, что тензорное поле типа $(1, 1)$ *g-значно*, если определяемое им линейное преобразование пространства $T_x(M)$ принадлежит g при любом $x \in M$. Мы скажем, что тензорное поле t типа $(1, s)$ g-значно, если $t(X_1, \ldots, X_{s-1})$ есть g-значное тензорное поле типа $(1, 1)$ для любых векторных полей $X_1, \ldots, X_{s-1}$ на M. По аналогии с предложением 5.1 можно сформулировать

Предложение 5.2. *Существует взаимно однозначное соответствие между g-значными тензорными полями t типа* $(1, s)$ *на M, антисимметричными по последним $s-1$ индексам, и g-значными $(s-1)$-формами θ на B_G, для которых*

$$R_a^*\theta = \operatorname{ad}(a^{-1})\,\theta.$$

Если $\pi(p) = x$ и $X_1, \ldots, X_{s-1} \in T_p(B_G)$, то это соответствие устанавливается формулой

$$t_x(\pi_*(X_1), \ldots, \pi_*(X_{s-1}))\,Z = p\left(\langle X_1 \wedge \ldots \wedge X_{s-1} \,|\, \theta\rangle (pZ)\right),$$

где Z — произвольный вектор из $T_x(M)$.

[Тензор t_x однозначно определяется заданием линейных преобразований $t_x(Y_1, \ldots, Y_{s-1})$ для всех $Y_1, \ldots, Y_{s-1} \in T_x(M)$. В свою очередь линейное преобразование однозначно определяется своими значениями на всех векторах $Z \in T_x(M)$.]

Доказательство этого предложения мы также оставляем читателю в качестве упражнения. В частности, форме $D\Omega$ соответствует некоторое тензорное поле R типа $(1, 3)$ на M, которое называется *полем тензора кривизны*. Оно сопоставляет каждой паре векторных полей X и Y на M тензорное поле $R(X, Y)$, принадлежащее в каждой точке алгебре Ли g. Кроме того,

$$R(X, Y) = -R(Y, X)$$

Можно дать простое выражение тензоров кривизны и кручения в терминах оператора ∇:

$$T(X,\ Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,\ Y], \tag{5.19}$$

$$R(X,\ Y) = [\nabla_X,\ \nabla_Y] - \nabla_{[X,\ Y]}. \tag{5.20}$$

В формуле (5.20) выражение $[\nabla_X,\ \nabla_Y]$ означает коммутатор операторов ∇_X и ∇_Y в пространстве всех векторных полей. Таким образом, применяя $R(X,\ Y)$ к векторному полю Z, имеем

$$R(X,\ Y)Z = \nabla_X(\nabla_Y Z) - \nabla_Y(\nabla_X Z) - \nabla_{[X,\ Y]}Z.$$

Проверим формулу (5.19). Согласно предложению 5.1,

$$\begin{aligned} T(X,\ Y)_x &= p(\langle \hat{X} \wedge \hat{Y} \mid D\omega\rangle_p) = \\ &= p(\langle \hat{X} \wedge \hat{Y} \mid d\omega\rangle_p) = \\ &= p(\hat{X}_p\langle \hat{Y},\ \omega\rangle - \hat{Y}_p\langle \hat{X},\ \omega\rangle - \langle [\hat{X},\ \hat{Y}]_p,\ \omega\rangle). \end{aligned}$$

Но $\pi_*[\hat{X},\ \hat{Y}] = [X,\ Y]$, так что мы можем заменить $[\hat{X},\ \hat{Y}]$ на $[\widehat{X,\ Y}]$ в последнем члене справа. В соответствии с формулой (5.3), если $\pi(p) = x$, то

$$(\nabla_X Y)_x = p\cdot(\hat{X}_p f_Y) = p\cdot(X_p\langle \hat{Y},\ \omega\rangle).$$

Воспользовавшись такой же формулой для $\nabla_Y X$, мы докажем (5.19).

Проверим теперь формулу (5.20). Пусть Z — векторное поле на M и $f = \langle \hat{Z},\ \omega\rangle$ — соответствующая функция на B_G. Тогда, если $\pi(p) = x$, то мы имеем

$$([\nabla_X,\ \nabla_Y]Z - \nabla_{[X,\ Y]}Z)_x = p\cdot(\hat{X}_p(\hat{Y}f) - \hat{Y}_p(\hat{X}f) - h([X,\ Y])_p)f.$$

Но $\hat{X}_p(\hat{Y}f) - \hat{Y}_p(\hat{X}f) = [\hat{X},\ \hat{Y}]_p f$, так что выражение в круглых скобках равно $([\hat{X},\ \hat{Y}] - h([\hat{X},\ \hat{Y}]))f$, т. е. вертикальной составляющей поля $[\hat{X},\ \hat{Y}]$, примененной к функции f. Но

$$\langle \hat{X} \wedge \hat{Y} \mid D\Omega\rangle = \hat{X}\langle \hat{Y},\ \Omega\rangle - \hat{Y}\langle \hat{X},\ \Omega\rangle - \langle [\hat{X},\ \hat{Y}],\ \Omega\rangle = \\ = -\langle [\hat{X},\ \hat{Y}],\ \Omega\rangle,$$

так что вертикальная составляющая вектора $[\hat{X},\ \hat{Y}]_p$ равна $\hat{A}$, где $A = -\langle \hat{X} \wedge \hat{Y} \mid D\Omega\rangle$. С другой стороны, поскольку $R_a^* f = a^{-1}f$, мы можем написать $\hat{A}f = -Af$. Таким образом, получаем формулу

$$[\nabla_X,\ \nabla_Y]Z - \nabla_{[X,\ Y]}Z = p(\langle \hat{X} \wedge \hat{Y} \mid D\Omega\rangle f(p)) = p(\langle \hat{X} \wedge \hat{Y} \mid D\Omega\rangle p^{-1}Z),$$

поскольку $f(p) = p^{-1}Z$. Применяя теперь предложение 5.2, мы получим формулу (5.20).

Как показывает формула (5.20), кривизна измеряет, насколько отображение $X \to \nabla_X$ отличается от гомоморфизма алгебр Ли.

Упражнение 5.1. Используя формулу (5.19), показать, что если в локальных координатах $T(\partial/\partial x^i, \partial/\partial x^j) = \sum T_{ij}^k (\partial/\partial x^k)$, то

$$T_{ij}^k = \Gamma_{ij}^k - \Gamma_{ji}^k.$$

Упражнение 5.2. Используя формулу (5.20), показать, что если

$$R\left(\frac{\partial}{\partial x^j}, \frac{\partial}{\partial x^k}\right)\frac{\partial}{\partial x^l} = \sum R_{ljk}^i \frac{\partial}{\partial x^i},$$

то

$$R_{ljk}^i = \frac{\partial \Gamma_{kl}^i}{\partial x^j} - \frac{\partial \Gamma_{jl}^i}{\partial x^k} + \sum_{r=1}^n (\Gamma_{jr}^i \Gamma_{kl}^r - \Gamma_{kr}^i \Gamma_{jl}^r).$$

Выведем теперь несколько классических тождеств, содержащих тензоры кривизны и кручения и их ковариантные производные. Для любой функции t трех переменных обозначим через $\mathfrak{S}t$ ее циклическую сумму. Так, если t — тензор типа (1, 3), то

$$\mathfrak{S}t(X, Y, Z) = t(X, Y, Z) + t(Y, Z, X) + t(Z, X, Y).$$

Поскольку ∇_Z есть дифференцирование тензорной алгебры, мы можем написать

$$(\nabla_Z T)(X, Y) = \nabla_Z T(X, Y) - T(\nabla_Z X, Y) - T(X, \nabla_Z Y). \tag{5.21}$$

Используя (5.19) и антисимметричность тензора T, находим

$$T(T(X, Y), Z) = T(\nabla_X Y, Z) + T(Z, \nabla_Y X) - T([X, Y], Z).$$

Суммируя циклически и используя (5.21), получаем

$$\mathfrak{S}T(T(X, Y), Z) = \mathfrak{S}\{-(\nabla_Z T)(X, Y) + \nabla_Z T(X, Y) - T([X, Y], Z)\}.$$

Далее,

$$\mathfrak{S}(\nabla_Z T(X, Y) - T([X, Y], Z)) = \mathfrak{S}(\nabla_Z \nabla_X Y - \nabla_Z \nabla_Y X - \nabla_Z [X, Y] - \nabla_{[X, Y]} Z + \nabla_Z [X, Y] + [[X, Y], Z] = \mathfrak{S}(\nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z),$$

поскольку $\mathfrak{S}[[X, Y], Z] = 0$ (тождество Якоби). Используя равенство (5.20), находим

$$\mathfrak{S}(R(X, Y)Z) = \mathfrak{S}\{T(T(X, Y), Z) + (\nabla_X T)(Y, Z)\}. \tag{5.22}$$

В частности, если $T = 0$, то

$$\mathfrak{S}(R(X, Y)Z) = 0. \tag{5.23}$$

Аналогичным образом можно получить тождество Бьянки:

$$\mathfrak{S}\{(\nabla_Z R)(X, Y)\} + \mathfrak{S}\{R(T(X, Y), Z)\} = 0. \tag{5.24}$$

Доказательство мы оставляем читателю в качестве упражнения. В частности, если $T=0$, то

$$\mathfrak{S}\{(\nabla_Z R)(X, Y)\}=0. \tag{5.25}$$

§ 6. ПУЛЬВЕРИЗАЦИЯ ЛИНЕЙНОЙ СВЯЗНОСТИ

Заметим прежде всего, что линейная связность на многообразии M определяет пульверизацию на M: в каждой точке $z \in T(M)$ существует единственный горизонтальный вектор W_z, для которого $\pi_*(W_z) = z$. Таким образом, мы имеем на $T(M)$ векторное поле W, соответствующее дифференциальному уравнению второго порядка на M. Чтобы убедиться в том, что это пульверизация, мы должны проверить равенство (6.2) гл. IV. Это можно сделать непосредственно. Однако мы получим его как следствие одного замечания, имеющего первостепенное значение для дальнейшего. Вместо того чтобы рассматривать касательное расслоение, удобно ограничиться рассмотрением расслоения $T^+(M)$ всех ненулевых касательных векторов. Каждый ненулевой вектор $v \in V$ индуцирует отображение φ_v: $\mathscr{F}(M) \to T^+(M)$, задаваемое формулой

$$\varphi_v(p)=p(v). \tag{6.1}$$

Зафиксируем вектор v раз и навсегда и обозначим отображение φ_v через φ. Тогда

$$\varphi_*(\hat{v}_p)=W_{\varphi(p)}. \tag{6.2}$$

Действительно, вектор $\varphi_*(\hat{v}_p)$ горизонтален и

$$\pi_*\varphi_*(\hat{v}_p)=\pi_*(\hat{v}_p)=p(v).$$

Другими словами, векторные поля $\hat{v}$ и W φ-связаны. Пусть R_t — правое умножение реперов из $\mathscr{F}(M)$ на скалярное линейное преобразование tI, т. е. $R_t=R_{tI}$. Тогда

$$\varphi \circ R_t(v)=p(tv)=\mu_t(p(v)),$$

где μ_t — умножение на t в $T^+(M)$ (см. начало § 6 гл. IV). Согласно формуле (2.3),

$$R_t^*\hat{v}=-\frac{1}{t}\hat{v}.$$

Пользуясь соотношением (6.2), находим, что векторные поля μ_t^*W и $\frac{1}{t}\hat{v}$ φ-связаны и, значит,

$$\mu_t^*W=\frac{1}{t}W.$$

Таким образом, векторное поле W является пульверизацией.

Итак, мы можем перенести все результаты гл. IV относительно пульверизаций на случай линейной связности. В частности, мы можем определить экспоненциальное отображение, нормальные геодезические координаты и т. п. Из определения пульверизации W следует, что кривая C в M *является геодезической тогда и только тогда, когда ее касательные векторы параллельны вдоль* C.

Естественно ожидать, что кривизна и кручение дают некоторую информацию о пульверизации. И действительно, как мы сейчас увидим, они позволяют написать уравнение в вариациях для W, см. § 5 гл. IV. Исходной точкой является тот факт, что уравнения (5.15) и (5.16) определяют уравнения в вариациях поля $\hat{v}$ на $\mathscr{F}(M)$. Используя равенство (6.2), мы получим отсюда уравнения в вариациях для W. Сделаем сначала несколько предварительных замечаний.

Пусть α_t — (локальный) поток, порожденный полем W на $T(M)$. Зафиксируем геодезическую C на M. Мы хотим изучить действие потока α_{t*}: $T_{C'(0)}(T(M)) \to T_{C'(t)}(T(M))$ над кривой C'. Для этого мы должны выбрать параметризацию векторных пространств $T_{C'(t)}(T(M))$. Это можно сделать с помощью параллельного переноса, определяемого связностью. Действительно, в пространстве $T_{C'(t)}(T(M))$ выделены два n-мерных подпространства — вертикальное подпространство, касательное к слою, и горизонтальное подпространство, определяемое связностью. Проекция π_* позволяет нам отождествить горизонтальное подпространство с $T_{C(t)}(M)$. Это пространство в свою очередь может быть отождествлено с $T_{C(0)}(M)$ с помощью параллельного переноса вдоль C. Вертикальное подпространство служит касательным пространством к $T_{C(t)}(M)$ в точке $C'(t) \in T_{C(t)}(M)$. Стандартный изоморфизм касательного пространства к векторному пространству на само это векторное пространство и изоморфизм $T_{C(t)}(M)$ на $T_{C(0)}(M)$ позволяют отождествить $T_{C'(t)}(T(M))$ с пространством $T_{C'(0)}(T(M))$, которое в свою очередь отождествляется с $T_{C(0)}(M) + T_{C(0)}(M)$. Итак, мы можем отождествить ограничение расслоения $T(T(M))$ на кривую C' с $(T_{C(0)}(M) + T_{C(0)}(M)) \times R$. Пусть задана кривая X_t, состоящая из касательных векторов многообразия M вдоль кривой C. Тогда в пространстве $T_{C'(0)}(T(M))$ мы получаем кривую $(X_t, DX_t/dt)$. [Обратившись к § 5 гл. IV, читатель обнаружит, что для установления связи между уравнениями Якоби и Эйлера не хватало именно этого отождествления[1]).]

Точка $p_0 \in \mathscr{F}(M)$, для которой $\pi(p_0) = C(0)$, определяет отождествление пространства $T_{C(0)}(M)$ с V. Следовательно, ограничение расслоения $T(T(M))$ на $C'(t)$ отождествляется с $V \times V \times R$. Читатель, вероятно, смущен обилием всевозможных отождествле-

[1]) См. примечание 1 на стр. 209.— *Прим. перев.*

ний. Поэтому мы сформулируем их снова в том виде, в котором будем использовать. Вектор $\xi \in T_{C'(t)}(T(M))$ соответствует вектору $(a, b; t) \in V \times V \times R$. Здесь a — вектор из V, полученный параллельным переносом вектора $\pi_* \xi$ обратно вдоль кривой $C(t)$ до точки $C(0)$ и отображением $T_{C(0)}(M)$ на V, определяемым точкой p_0. Если p_t — горизонтальная кривая в $\mathscr{F}(M)$, лежащая над $C(t)$ и проходящая через точку p_0, то

$$a = p_t^{-1}(\pi_* \xi).$$

Вектор b получается взятием вертикальной составляющей $\mathrm{vert}\,\xi$ вектора ξ, отождествлением ее с вектором из $T_{C(t)}(M)$ с помощью $l_{C'(t)}$ (при помощи стандартного изоморфизма касательного пространства к векторному пространству на само это векторное пространство) и, наконец, применением отображения $p_t^{-1}\colon T_{C(t)}(M) \to V$. Итак,

$$b = p_t^{-1} \circ l_{C'(t)}(\mathrm{vert}\,\xi).$$

Рассмотрим теперь отображение

$$\varphi_*\colon T_{p_t}(\mathscr{F}(M)) \to T_{C'(t)}(T(M)).$$

Учитывая определение векторных полей $\tilde{a}$ и $\tilde{A}$, а также наши отождествления, имеем

$$\varphi_*(\tilde{a}_{p(t)}) = (a, 0; t), \tag{6.3}$$

$$\varphi_*(\tilde{A}_{p(t)}) = (0, Av; t). \tag{6.4}$$

Мы можем теперь применить формулы (5.15) и (5.18) для вычисления уравнения в вариациях. Полагая $(a_t, b_t; t) = \alpha_{t*}(a_0, b_0; 0)$, находим

$$\begin{aligned} \frac{da_t}{dt} &= b - \langle \tilde{a}_{tp_t} \wedge \tilde{v}_{p_t} \mid D\omega \rangle, \\ \frac{db_t}{dt} &= -\langle \tilde{a}_{tp_t} \wedge \tilde{v}_{p_t} \mid D\Omega \rangle v. \end{aligned} \tag{6.5}$$

Эти уравнения можно переписать в более поучительной форме. Пусть $X_t = C'(t)$ — касательный вектор кривой C, и пусть $Y_t = p_t(a_t)$ — проекция на $T_{C(t)}(M)$ касательного вектора, преобразующегося в соответствии с потоком α_{t*}. Предположим для простоты, что кручение связности равно нулю. Тогда, учитывая предложения 5.1 и 5.2, мы можем написать

$$\frac{D^2 Y_t}{dt^2} + R(Y_t, X_t) X_t = 0. \tag{6.6}$$

Наиболее часто уравнение (6.6) используется в римановой геометрии. Как мы уже видели, на расслоении $\mathcal{O}(M)$ существует единственная связность с нулевым кручением. Она определяет связность на $\mathcal{F}(M)$ и пульверизацию на $T(M)$. *Эта пульверизация совпадает с геодезической пульверизацией, введенной в гл.* IV. Доказательство этого утверждения проводится точно так же, как доказательство теоремы 6.2 гл. VI. Действительно, поскольку параллельный перенос сохраняет длину, геодезическая пульверизация, так же как и пульверизация, определяемая связностью, оставляют инвариантным подмногообразие $S(M) \subset T(M)$, состоящее из единичных векторов $z \in T(M)$. Поэтому достаточно убедиться в том, что ограничения двух рассматриваемых векторных полей на $S(M)$ совпадают. Согласно формуле (3.8) гл. IV, ограничение геодезической пульверизации на $S(M)$ представляет собой векторное поле X, удовлетворяющее условиям

$$X \lrcorner\, d\theta = 0, \qquad \langle X, \theta\rangle = 1, \tag{6.7}$$

где θ — ограничение на $S(M)$ формы на $T(M)$, соответствующей (при изоморфизме $T(M) \to T^*(M)$) фундаментальной форме на $T^*(M)$. Таким образом, если $z \in S(M)$ и $Y \in T_z(S(M))$, то

$$\langle Y_t, \theta\rangle = (\pi_* Y, z). \tag{6.8}$$

Зафиксируем теперь единичный вектор $v \in V$. Тогда $\varphi = \varphi_v$: $\mathcal{F}(M) \to T^+(M)$ отображает $\mathcal{O}(M)$ на $S(M)$. Пусть ψ — ограничение отображения φ на $\mathcal{O}(M)$. Вычислим форму $\psi^*(\theta)$ на $\mathcal{O}(M)$. Для любого вектора $X \in T_p(\mathcal{O}(M))$ имеем

$$\begin{aligned}\langle X, \psi^*\theta\rangle &= \langle \psi_* X, \theta\rangle = \\ &= (\pi_*\psi_* X, \pi(\psi(p))) = \\ &= (\pi_* X, p(v)) = \\ &= (p^{-1}(\pi_* X), v) = \qquad \text{(скалярное произведение в } V) \\ &= (\langle X, \omega\rangle, v).\end{aligned}$$

Итак,

$$\psi^*\theta = (\omega, v).$$

Далее, поле $\tilde{v}$ удовлетворяет равенству

$$\langle \tilde{v}, \psi^*\theta\rangle = (\langle \tilde{v}, \omega\rangle, v) = (v, v) = 1.$$

Кроме того,

$$\psi^* d\theta = (d\omega, v) = (\Omega \wedge \omega, v).$$

Так как поле $\tilde{v}$ горизонтально, $\langle \tilde{v}, \Omega\rangle = 0$. Поэтому для $X \in T(\mathcal{O}(M))$ имеем

$$\langle v \wedge X \mid \Omega \wedge \omega\rangle = -\langle X, \Omega\rangle v.$$

Очевидно, что $(\langle X, \Omega\rangle v, v)=0$, поскольку линейное отображение $\langle X, \Omega\rangle$ принадлежит ортогональной алгебре. Таким образом,

$$\tilde{v} \lrcorner\, \psi^* d\theta = 0.$$

Используя равенство (6.2), мы заключаем, что поле W удовлетворяет условиям (6.7), что и доказывает наше утверждение.

Уравнение (6.6) вместе с результатами гл. IV показывают, что информация о тензоре кривизны риманова многообразия позволяет установить некоторые глобальные свойства этого многообразия. Основная идея состоит в получении теорем сравнения, аналогичных лемме 6.1 гл. VI, и применении их к оценке расстояния между сопряженными точками. Дадим простой пример такой теоремы. Рассмотрим для этого выражение $(R(Y, X)X, Y)$, где X, Y — пара ортонормированных векторов. Это выражение, как легко проверить, зависит только от плоскости, натянутой на X и Y. Оно называется *секционной кривизной* этой плоскости. Чтобы установить его смысл, рассмотрим погружение f двумерной поверхности S в M. Это погружение определяет многообразие $\mathcal{O}_f(S)$, состоящее из пар $(x; e_1, \ldots, e_n)$, где $x \in S$, а $(e_1, \ldots, e_n)$ — ортонормированный репер в точке $f(x)$, первые два вектора которого касательны к $f(S)$, а остальные ортогональны. [Сравните с конструкцией многообразия $\mathcal{O}_\varphi(M)$, § 2 гл. VI.] Существует очевидное погружение $\hat{f}\colon \mathcal{O}_f(S) \to \mathcal{O}(M)$ и столь же очевидная проекция $\pi_f\colon \mathcal{O}_f(S) \to S$, причем $f \circ \pi_f = \pi \circ \hat{f}$. Кроме того, первые два вектора e_1, e_2 репера $e_1, \ldots, e_n$ определяют ортонормированный репер на S относительно индуцированной на S римановой метрики. Следовательно, мы имеем также проекцию $\rho\colon \mathcal{O}_f(S) \to \mathcal{O}(S)$. Таким образом, мы получаем такую же диаграмму, как в § 3 гл. VI:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}_f(S) \arrow[rr, "\hat{f}"] \arrow[d, "\rho"'] \arrow[dd, bend left, "\pi_f"] & & \mathcal{O}(M) \arrow[dd, "\pi"] \\
\mathcal{O}(S) \arrow[d, "\pi"'] & & \\
S \arrow[rr, "f"] & & M
\end{tikzcd}$$

Положим $\theta^i = \hat{f}^*(\omega^i)$ и $\hat{\theta}^{ij} = \hat{f}^*(\Omega^{ij})$, где $\omega = (\omega^1, \ldots, \omega^n)$ — фундаментальная форма на $\mathcal{O}(M)$, а $\Omega = (\Omega^{ij})$ — форма связности Леви-Чивита[1]) на M. Тогда (так же, как в § 3 гл. VI) легко проверяется, что

$$\theta^1 = \rho^*(\omega_S^1), \qquad \theta^2 = \rho^*(\omega_S^2) \quad \text{и} \quad \theta^i = 0, \qquad i > 2, \tag{6.9}$$

---

[1]) То есть канонической связности на $\mathcal{O}(M)$; см. теорему 3.1. — *Прим. перев.*

где (ω^1_S, ω^2_S) — фундаментальная форма на $\mathcal{O}(S)$. Теперь $d\omega^i = \sum \Omega^{ij} \wedge \omega^j$, так что $d\theta^i = \sum \hat{\Theta}^{ij} \wedge \theta^j$. Сопоставляя это с равенством (6.9) при $i > 2$, получаем

$$0 = \hat{\Theta}^{i1} \wedge \theta^1 + \hat{\Theta}^{i2} \wedge \theta^2.$$

Согласно лемме Картана, отсюда следует, что при $i > 2$

$$\begin{aligned} \hat{\Theta}^{i1} &= A^{i11}\theta^1 + A^{i12}\theta^2, \\ \hat{\Theta}^{i2} &= A^{i21}\theta^1 + A^{i22}\theta^2, \end{aligned} \tag{6.10}$$

причем $A^{i12} = A^{i21}$. Подставляя формулу $d\theta^i = \sum \hat{\Theta}^{ij} \wedge \theta^j$ в равенство (6.9) при $i = 1, 2$, мы заключаем, что $\hat{\Theta}^{12} = \rho^* (\Theta^{12})$ (где Θ^{12} — форма связности на $\mathcal{O}(S)$). Но $d\Theta^{12} = -K\omega^1_S \wedge \omega^2_S$, где K — гауссова кривизна поверхности S, в соответствии с равенством (6.9) гл. VI. С другой стороны,

$$d\hat{\Theta}^{12} = \sum \hat{\Theta}^{1j} \wedge \hat{\Theta}^{j2} + \sum R^{12}{}_{kl}\theta^k \wedge \theta^l,$$

где $D\Omega^{ij} = \sum R^{ij}{}_{kl}\omega^k \wedge \omega^l$. Используя равенство (6.10), получаем

$$K = -R^{12}{}_{12} + \sum_{i=3}^{n} (A^{i11}A^{i22} - (A^{i12})^2). \tag{6.11}$$

Очевидно, что $-R^{12}{}_{12}$ есть секционная кривизна плоскости, касательной к $f(S)$. Второе выражение в правой части равенства (6.11) играет роль второй фундаментальной формы. Оно показывает, насколько поверхность S «изогнута» в M. Сейчас мы увидим, что если геодезические поверхности S, проходящие через точку x, одновременно являются и геодезическими многообразия M, то это выражение обращается в нуль. Действительно, пусть v есть некоторая линейная комбинация векторов e_1 и e_2, скажем $v = e_1$. Тогда, согласно определению многообразия $\mathcal{O}_f(S)$, для точек $p_1, p_2 \in \mathcal{O}_f(S)$, для которых $\rho(p_1) = \rho(p_2)$, имеем

$$\psi \circ \hat{f}(p_1) = p_1(v) = p_2(v) = \psi \circ \hat{f}(p_2).$$

Геодезический поток на S задается векторным полем X на $\mathcal{O}(S)$, которое определяется условиями

$$\langle X, \omega^1_S \rangle = 1, \qquad \langle X, \omega^2_S \rangle = \langle X, \Theta^{12} \rangle = 0.$$

Пусть $\hat{X}_p$ — касательный вектор к многообразию $\mathcal{O}_f(S)$, для которого $\rho_*(\hat{X}_p) = X_p$. Вектор $\psi_* \hat{f}_* (\hat{X}_p)$ касается геодезической многообразия M тогда и только тогда, когда

$$\langle \psi_* \hat{f}_* (\hat{X}_p), \omega^1 \rangle = 1, \qquad \langle \psi_* \hat{f}_* (\hat{X}_p), \Omega^{ij} \rangle = 0,$$

или

$$\langle \hat{X}_p, \Theta^{ij} \rangle = 0, \qquad \langle \hat{X}_p, \theta^1 \rangle = 1.$$

Сравнивая эти два выражения, мы найдем, что они совпадают в том и только в том случае, когда второй член в правой части (6.11) обращается в нуль. Итак, *для любой плоскости* $P \subset T_x(M)$ *ее секционная кривизна равна гауссовой кривизне поверхности* $\exp P$ *в точке* x.

Внимательно анализируя предыдущие рассуждения, мы убедимся в том, что если поверхность S в M содержит ровно две геодезические многообразия M, проходящие через точку x, то гауссова кривизна поверхности S в точке x совпадает с секционной кривизной многообразия в касательной плоскости в точке x. Применим это замечание к следующей ситуации. Пусть $C(t)$ — геодезическая на M, и пусть X_t — параллельное семейство касательных векторов вдоль $C(t)$. Оно определяет двумерную поверхность в нормальном расслоении над кривой C. Применяя экспоненциальное отображение, мы получим двумерную поверхность в M, содержащую кривую C и вместе с каждой точкой x из C две геодезические многообразия M, проходящие через x. Поэтому гауссова кривизна этой поверхности равна секционной кривизне вдоль C. В частности, если секционная кривизна многообразия M ограничена снизу положительной константой h^2, то отрезок кривой C, имеющий длину больше π/h, не может минимизировать расстояние на этой поверхности. Это следует из теоремы 6.3 гл. VI .Тем более такой отрезок не минимизирует расстояние и в M. Итак,

если M — полное многообразие, секционная кривизна которого ограничена снизу положительной константой, то многообразие M компактно.

Проблема получения дальнейших следствий из предположения о положительности секционной кривизны остается открытой. Сильным и неожиданным результатом в этом направлении является теорема Рауха, которая утверждает, что если секционная кривизна многообразия M заключена между $h=1/4$ и 1, то многообразие M гомеоморфно сфере. [Раух [18] дал сложное доказательство теоремы в предположении, что $h > 1/4$. Берже [2] и Клингенберг [8] улучшили результат до $h = 1/4$ и показали, что эта константа — наилучшая возможная.]

Приложение I

ДВЕ ТЕОРЕМЫ СУЩЕСТВОВАНИЯ

В этом приложении мы сформулируем теорему о неявной функции и теорему существования решений обыкновенных дифференциальных уравнений и наметим их доказательство. Обе они общеизвестны, и наши доказательства не являются наилучшими, так как мы налагаем более ограничительные условия, чем необходимо. Доказательство в более общих предположениях читатель найдет у Каратеодори [5]. Подробное доказательство, аналогичное намеченному нами, но облаченное в более геометрическую форму, читатель найдет у Ленга [9].

Теорема о неявной функции. *Пусть $F^1, \ldots, F^k$ — функции класса C^m $(m \geqslant 1)$ (или аналитические) от $n+k$ переменных $y^1, \ldots, y^k, x^1, \ldots, x^n$, определенные в некоторой окрестности начала координат в $E^k \times E^n$. Пусть $F^i(0, \ldots, 0; 0, \ldots, 0) = 0$. Предположим далее, что*

$$\det\left(\frac{\partial F^i}{\partial y^j}\right)(0, \ldots, 0;\ 0, \ldots, 0) \neq 0. \tag{1}$$

Тогда уравнения

$$\begin{gathered} F^i(\varphi^1(x^1, \ldots, x^n), \ldots, \varphi^k(x^1, \ldots, x^n);\ x^1, \ldots, x^n) \equiv 0, \\ \varphi^i(0, \ldots, 0) = 0, \qquad i = 1, \ldots, k, \end{gathered} \tag{2}$$

однозначно определяют в некоторой окрестности начала координат в E^n функции $\varphi^1, \ldots, \varphi^k$. Эти функции непрерывно дифференцируемы столько же раз, сколько F^i.

Сделаем некоторые упрощающие замечания. Пусть (β^i_j) — матрица, обратная к $(\partial F^i/\partial y^j)(0, \ldots, 0;\ 0, \ldots, 0)$. Заменим функции F^i на $G^i = \sum \beta^i_j F^j$; это не изменит вида уравнений (2), но позволит считать, что в начале координат матрица $(\partial G^i/\partial y^j)$ равна единичной матрице. Таким образом, мы можем написать $G^i = y^i - f^i$, где $\partial f^i/\partial y^j = 0$ в начале координат для всех i и j. Уравнения (2) примут вид

$$\varphi^i(x^1, \ldots, x^n) = f^i(\varphi^1(x^1, \ldots, x^n), \ldots, \varphi^k(x^1, \ldots, x^n)). \tag{3}$$

Предположим, что мы доказали существование, единственность и непрерывность функций φ^i, удовлетворяющих уравнениям (3). Тогда все φ^i обладают производными в начале координат. Действительно, по теореме о среднем значении и ввиду того, что φ^i непрерывны, имеем

$$\varphi^i(0, \ldots, x^r, \ldots, 0) =$$
$$= f^i(\varphi^1(0, \ldots, x^r, \ldots, 0), \ldots, \varphi^k(0, \ldots, x^r, \ldots, 0); 0, \ldots, x^r, \ldots, 0) =$$
$$= \sum \frac{\partial f^i}{\partial y^j}\varphi^j(0, \ldots, x^r, \ldots, 0) + \frac{\partial f^i}{\partial x^r}x^r,$$

где производные $\partial f^i/\partial x^r$ и $\partial f^i/\partial y^j$ берутся в некоторой точке, стремящейся к нулю вместе с x^r. Рассматривая эти равенства как систему линейных уравнений относительно $\varphi^i(0, \ldots, x^r, \ldots, 0)$, решая ее и деля на x^r, мы получаем

$$\frac{\varphi^i(0, \ldots, x^r, \ldots, 0)}{x^r} = \frac{\partial f^i}{\partial x^r} + \sum a^i_j \frac{\partial f^j}{\partial x^r},$$

где a^i_j — функции, стремящиеся к нулю вместе с x^r. Переходя к пределу при $x^r \to 0$, мы видим, что производная $(\partial\varphi^i/\partial x^r)(0, \ldots, 0)$ существует и равна $(\partial f^i/\partial x^r)(0, \ldots, 0; 0, \ldots, 0)$. Так как начало координат ничем не лучше, чем любая достаточно близкая к нему точка, и так как мы предположили единственность, то частные производные $\partial\varphi^i/\partial x^r$ существуют во всех достаточно близких точках. Более того, эти частные производные составляют единственное решение системы линейных уравнений

$$\sum \frac{\partial F^i}{\partial y^j}\frac{\partial\varphi^j}{\partial x^r} + \frac{\partial F^i}{\partial x^r} = 0.$$

Следовательно, они непрерывны. Кроме того, они имеют ту же степень гладкости, что и частные производные функций F^i.

Таким образом, доказательство теоремы о неявных функциях сводится к доказательству существования и единственности непрерывных функций φ^i, удовлетворяющих условию (3). Для произвольной окрестности U начала координат в E^n обозначим через $\Phi(U)$ пространство, состоящее из наборов k функций $\varphi = (\varphi^1, \ldots, \varphi^k)$, определенных в U. Положим

$$\|\varphi - \psi\| = \sum_{i=1}^{k} \sup_{x\in U} |\varphi^i(x^1, \ldots, x^n) - \psi^i(x^1, \ldots, x^n)|.$$

Пусть T — отображение подмножества из $\Phi(U)$ в себя, задаваемое формулой $T\varphi = \psi = (\psi^1, \ldots, \psi^k)$, где

$$\psi^i(x^1, \ldots, x^n) = f^i(\varphi^1(x^1, \ldots, x^n), \ldots, \varphi^k(x^1, \ldots, x^n); x^1, \ldots, x^n).$$

Оно определено для всех $\varphi \in \Phi(U)$ с достаточно малой нормой $\|\varphi\|$.

Оценим $\|T\varphi\|$ через $\|\varphi\|$ для малой окрестности U при малых $\|\varphi\|$. Заметим прежде всего, что, так как $f^i(0, \ldots, 0; 0, \ldots, 0) = 0$, мы можем считать, что $|f^i(y^1, \ldots, y^k; x^1, \ldots, x^n)| < \varepsilon$, если $|x^i|$ и $|y^i| < \delta$. Аналогично, поскольку $\partial f^i/\partial y^j = 0$ в начале координат, мы можем считать, что $|\partial f^i/\partial y^j| < \varepsilon$, когда $|x^i| < \delta$, $|y^i| < \delta$ и $|\partial f^i/\partial x^r| < K$. Тогда из теоремы о среднем значении следует, что

$$|f^i(\varphi^1(x^1, \ldots, x^n), \ldots, \varphi^k(x^1, \ldots, x^n); x^1, \ldots, x^n)| \leqslant \leqslant \left| \sum \frac{\partial f^i}{\partial y^j} \varphi^j + \sum \frac{\partial f^i}{\partial x^r} x^r \right|.$$

Таким образом, $\|T\varphi\| < k\varepsilon\|\varphi\| + knK\delta < \varepsilon\|\varphi\| + nK\delta$. Предположим, что T определено на множестве функций $\varphi \in \Phi(U)$, для которых $\|\varphi\| < \eta$, и выберем окрестность U столь малой, чтобы δ и ε удовлетворяли неравенству

$$k\varepsilon\eta + knK\delta < \eta.$$

Например, добьемся того, чтобы $\varepsilon < 1/2k$ и $\delta < \eta/2knK$. Тогда T отображает шар радиуса η из $\Phi(U)$ (т. е. множество всех φ, для которых $\|\varphi\| < \eta$) в себя. Более того, из теоремы о среднем значении также следует, что

$$\|T\varphi - T\psi\| < k\varepsilon\|\varphi - \psi\|.$$

Применим теперь

Предложение 1. *Пусть T — отображение полного метрического пространства S в себя, удовлетворяющее условию*

$$d(T\varphi, T\psi) < \varkappa d(\varphi, \psi), \quad \varkappa < 1, \tag{4}$$

где d — функция расстояния. Тогда отображение T имеет единственную неподвижную точку, а именно, $\lim\limits_{n\to\infty} T^n\varphi$ для любого $\varphi \in S$.

Доказательство предложения 1 почти очевидно. Единственность: если T имеет две неподвижные точки φ и ψ, то $d(T\varphi, T\psi) = d(\varphi, \psi)$, что противоречит условию (4). Существование: $d(T^{n+1}\varphi, T^n\varphi) < \varkappa^n d(T\varphi, \varphi)$, поэтому $\lim T^n\varphi$ существует.

Применяя это утверждение к отображению T, получаем однозначно определенное решение уравнения (3). Выбирая начальную функцию φ непрерывной, мы получаем, что эта неподвижная точка является пределом равномерно сходящейся последовательности непрерывных функций и, следовательно, непрерывна, что и доказывает теорему о неявных функциях.

Теорема существования решений обыкновенных дифференциальных уравнений. *Пусть $f^1(x^1, \ldots, x^n, t), \ldots, f^n(x^1, \ldots, x^n, t)$ — функции* *класса C^k (аналитические), определенные в некоторой окрестности начала координат в $E^n \times R$. Тогда существуют окрестность U начала координат в E^n и окрестность I нуля в R, такие, что для любых $(x_0^1, \ldots, x_0^n) \in U$ и $t \in I$ существуют и единственны функции*

$$\varphi^1(t;\ x_0^1, \ldots, x_0^n), \ \ldots, \ \varphi^n(t;\ x_0^1, \ldots, x_0^n),$$

удовлетворяющие условиям

$$\frac{d\varphi^i}{dt} = f^i(\varphi^1, \ldots, \varphi^n;\ t), \qquad \varphi^i(0,\ x_0^1, \ldots, x_0^n) = x_0^i. \tag{5}$$

Функции φ^i являются функциями класса C^{k+1} (аналитическими) по t и класса C^k (аналитическими) по x_0^j.

Докажем сначала существование решений. Для этого запишем уравнени в «разрешенном» виде, чтобы можно было применить предложение 1. Уравнения (5) эквивалентны уравнениям

$$\varphi^i(t;\ x_0^1, \ldots, x_0^n) = \int_0^t f^i(\varphi^1, \ldots, \varphi^n;\ t) + x_0^i. \tag{6}$$

предположим, что f^i определены для $|x^i| < \eta$ и $|t| < a$ и что $\sup\limits_{i,x,t} |f^i| < M$ в этой области. Пусть $C(a, b)$ — множество наборов n функций $\varphi = (\varphi^1, \ldots, \varphi^n)$, определенных для $|t| \leqslant a$ и удовлетворяющих неравенству $|\varphi^i| \leqslant b$. Если $|x_0^i| \leqslant \eta/2$ $(i = 1, \ldots, n)$ и $|t| \leqslant 1/2M$, то для $\varphi \in C(a, b)$ элемент $T\varphi = \psi = (\psi^1, \ldots, \psi^n)$, где

$$\psi^i(t;\ x_0^1, \ldots, x_0^n) = \int_0^t f^i(\varphi^1, \ldots, \varphi^n;\ t) + x_0^i,$$

корректно определен и лежит в $C(a;\ b)$. Положим $\|\varphi\| = \sum\limits_{i=1}^n \sup\limits_{i,t} |\varphi^i|$. Тогда из теоремы о среднем значении следует, что $\|T\psi - T\varphi\| \leqslant naK \|\varphi - \psi\|$, где $K = \sup\limits_{i,j,x} |\partial f^i/\partial x^j|$. Поэтому, если a выбрано меньшим, чем $1/nK$, то мы можем применить предложение 1, что доказывает существование и единственность решения уравнения (6), а следовательно, и (5).

Теперь мы должны доказать гладкость этих функций. Непрерывность и дифференцируемость по t следуют из (6). Докажем непрерывность по x_0^i. Для этого заметим, что из теоремы о среднем значении следует неравенство

$$|\varphi^i(t;\ x_0^1, \ldots, x_0^n) - \varphi^i(t;\ y_0^1, \ldots, y_0^n)| <$$
$$< K \int_0^t \sum |\varphi^j(s;\ x_0^1, \ldots, x_0^n) - \varphi^j(s;\ y_0^1, \ldots, y_0^n)|\, ds, \tag{7}$$

из которого вытекает, что

$$|\varphi^i(t;\, x_0^1,\, \ldots,\, x_0^n) - \varphi^i(t;\, y_0^1,\, \ldots,\, y_0^n)| < e^{\left(nK\sum_j |x_0^j - y_0^j|\right)};$$

тем самым непрерывность доказана.

Для доказательства дифференцируемости заметим прежде всего, что если φ^i дифференцируемы по x_0^j, то из (5) следует, что частные производные $\partial\varphi^i/\partial x_0^j$ должны удовлетворять линейным дифференциальным уравнениям (уравнениям в вариациях, см. гл. IV)

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\varphi^i}{\partial x_0^j}\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f^i}{\partial x_0^k}\,\frac{\partial\varphi^k}{\partial x_0^j}\,. \tag{8}$$

Производные $\partial f^i/\partial x_0^k$ рассматриваются здесь как функции от t при фиксированных $x_0^1,\, \ldots,\, x_0^n$. Чтобы доказать дифференцируемость функций φ^i по x_0^j, сравним отношение приращений

$$\frac{\varphi^i(t;\, x_0^1,\, \ldots,\, x_0^j + h,\, \ldots,\, x_0^n) - \varphi^i(t;\, x_0^1,\, \ldots,\, x_0^n)}{h} \tag{9}$$

с решениями уравнения (8). Применяя снова теорему о среднем значении, получим неравенство, подобное (7), для разности выражений (9) и решений уравнения (8). Из него следует дифференцируемость функций φ^i. Утверждения о гладкости этих функций проверяются теперь без труда. Детали доказательства читатель найдет в книге [9].

Приложение II

НАБРОСОК ТЕОРИИ ИНТЕГРИРОВАНИЯ В E^n

В этом приложении мы наметим построение теории интегрирования в евклидовом пространстве. В стандартных учебниках анализа эта теория, особенно правило замены переменных, излагается только в размерностях два и три. Мы будем следовать схеме, предложенной Дж. Шварцем [см. Schwartz J., *Amer. Math. Monthly*, 61 (1954), 81—85].

Под брусом $\square_a^b$, где $a=(a^1, \ldots, a^n)$, $b=(b^1, \ldots, b^n)$, мы будем понимать множество всех $x=(x^1, \ldots, x^n)$, для которых $a^i \leqslant x^i \leqslant b^i$. {Мы допускаем также «частично открытые» брусы, для которых некоторые из неравенств являются строгими, и допускаем случаи, когда a^i или b^i есть ∞ или $-\infty$.]

Теория интегрирования в E^n состоит в том, что выделяются совокупность ограниченных множеств $\mathfrak{D}$, совокупность ограниченных функций $\mathcal{F}$ и задается правило $\int$, которое сопоставляет любым $D \in \mathfrak{D}$ и $f \in \mathcal{F}$ число $\int\limits_D f(x)\,dx$ так, чтобы выполнялись следующие аксиомы.

1. Аксиомы для $\mathfrak{D}$:
   a) если $D_1 \in \mathfrak{D}$ и $D_2 \in \mathfrak{D}$, то $D_1 \cup D_2 \in \mathfrak{D}$, $D_1 \cap D_2 \in \mathfrak{D}$ и $D_1 - D_2 \in \mathfrak{D}$;
   b) $\mathfrak{D}$ содержит все ограниченные брусы;
   c) если $D \in \mathfrak{D}$ и T — евклидово движение, то $TD \in \mathfrak{D}$, или
   c′) если $D \in \mathfrak{D}$ и T — параллельный перенос, то $TD \in \mathfrak{D}$.

2. Аксиомы для $\mathcal{F}$:
   a) $\mathcal{F}$ — векторное пространство;
   b) $\mathcal{F}$ содержит все константы;
   c) если $f \in \mathcal{F}$ и T — евклидово движение, то $f_T \in \mathcal{F}$, где $f_T(x) = f(Tx)$, или
   c′) если $f \in \mathcal{F}$ и T — параллельный перенос, то $f_T \in \mathcal{F}$.

3. Аксиомы для $\int$:

a) для каждого фиксированного D интеграл $\int\limits_D f(x)\,dx$ линеен по f;

b) если $D_1 \cap D_2 = \varnothing$, то для всех $f \in \mathcal{F}$

$$\int\limits_{D_1 \cup D_2} f(x)\,dx = \int\limits_{D_1} f(x)\,dx + \int\limits_{D_2} f(x)\,dx;$$

c) $\int\limits_{TD} f(T^{-1}x)\,dx = \int\limits_D f(x)\,dx$ для любого евклидова движения T или

c′) $\int\limits_{TD} f(T^{-1}x)\,dx = \int\limits_D f(x)\,dx$ для любого параллельного переноса T;

d) для любого $D \in \mathfrak{D}$ если $f(x) \leqslant g(x)$ для всех $x \in D$, то $\int\limits_D f(x)\,dx \leqslant \int\limits_D g(x)\,dx$;

e) $$\int\limits_{\square_{(0,\ \dots,\ 0)}^{(1,\ \dots,\ 1)}} 1 \cdot dx = 1.$$

Для каждого $D \in \mathfrak{D}$ положим $\mu(D) = \int\limits_D 1 \cdot dx$.

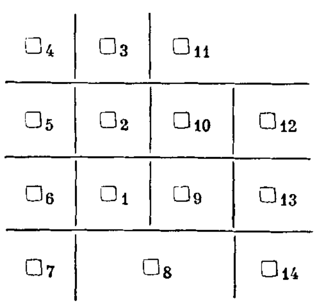
Множество S будем называть *элементарным*, если оно является объединением конечного числа брусов.

Упражнение 1. Показать, что если $\mathfrak{D}$ — семейство всех ограниченных элементарных множеств, то $\mathfrak{D}$ удовлетворяет условиям a), b) и c).

Конечная совокупность брусов $\{\square_i\}$, таких, что

$$\square_i \cap \square_j = \varnothing \text{ при } i \neq j \text{ и } E^n = \bigcup \square_i,$$

называется *замощением* пространства E^n. Например,



Функция f называется *ступенчатой*, если существует такое замощение $\{\square_i\}$ пространства E^n, что f постоянна на каждом $\square_i$.

Упражнение 2. Показать, что если $\mathcal{F}$ — множество всех ступенчатых функций, то $\mathcal{F}$ удовлетворяет аксиомам 2a), 2b) и 2c).

Упражнение 3. Показать, что для определенных выше $\mathfrak{D}$ и $\mathcal{F}$ существует и единственно правило $\int$, удовлетворяющее аксиомам 3a), 3b), 3c′), 3d) и 3e). Это правило задается следующим образом. Пусть f — ступенчатая функция и $\{\square_i,\ i=1, \ldots, k\}$ — соответствующее замощение, так что $f(x)=c_i$ для $x \in \square_i$. Пусть $D=\bigcup\limits_{j=1}^{l} \square_j'$ — элементарное множество. Тогда

$$\int\limits_D f(x)\,dx = \sum_{i=1,\ j=1}^{i=k,\ j=l} c_i \mu(\square_i \cap \square_j'), \tag{1}$$

где для любого бруса $\square_x^y$

$$\mu(\square_x^y) = |y^1-x^1|\,|y^2-x^2| \ldots |y^n-x^n|. \tag{2}$$

[*Указание*. Сначала попытайтесь доказать формулу (2). Проверьте ее для бруса $\square_{(0,\ \ldots,\ 0)}^{(1/2^r,\ \ldots,\ 1/2^r)}$, используя 3b), 3c′) и 3e); затем для любого бруса вида $\square_x^y$, где $y-x=(1/2^r, \ldots, 1/2^r)$, используя c′), и, наконец, для произвольного бруса, используя 3b), 3c′) и 3d). Потом докажите формулу (1).]

Для любого ограниченного множества D и любого замощения $P=\{\square_i\}$ обозначим

$$I_P(D) = \bigcup_{\substack{\square_i \in P \\ \square_i \subset D}} \square_i, \qquad O_P(D) = \bigcup_{\substack{\square_i \in P \\ \square_i \cap D \neq \varnothing}} \square_i.$$

Положим

$$\mu_-(D) = \sup \mu(I_P(D)),$$
$$\mu_+(D) = \inf \mu(O_P(D)),$$

где верхняя и нижняя грани берутся по всем замощениям множества D. Будем говорить, что множество D *наполнимо*, если $\mu_-(D) = \mu_+(D) = \mu(D)$. В этом случае число $\mu(D)$ называется *наполнением* множества D. Совокупность всех наполнимых множеств удовлетворяет аксиомам 1a), 1b), 1c). Для доказательства этого утверждения достаточно показать, что множество наполнимо тогда и только тогда, когда его граница имеет наполнение нуль. Действительно, совокупность множеств наполнения нуль инвариантна относительно евклидовых движений, [граница $(D_1 \cup D_2)] \subset$ $\subset$ [(граница D_1) $\cup$ (граница D_2)] и т. д.

Упражнение 4. Показать, что множество D наполнимо тогда и только тогда, когда его граница имеет наполнение нуль.

Упражнение 5. Пусть S — ограниченное подмножество в E^n, лежащее целиком в подпространстве размерности $n-1$. Показать, что S имеет наполнение нуль.

Упражнение 6. Пусть D — множество наполнения нуль в E^n и φ — дифференцируемое отображение $E^n \to E^n$. Показать, что $\varphi(D)$ имеет наполнение нуль.

Упражнение 7. Пусть D — множество, граница которого является объединением конечного числа множеств D_i, причем $D_i = \varphi_i(\square_i)$, где $\square_i$ — брус в некотором пространстве E^m $(m < n)$, а φ_i — дифференцируемое отображение $E^m \to E^n$. Показать, что множество D наполнимо.

Для любой функции f и любого наполнимого множества D положим

$$\int_D^- f(x)\,dx = \sup \int_{I_P(D)} s(x)\,dx,$$

где sup берется по всем ступенчатым функциям s, таким, что $s(x) \leqslant f(x)$ для всех x, а P — замощение, соответствующее s. Аналогично, положим

$$\int_D^+ f(x)\,dx = \inf \int_{O_P(D)} t(x)\,dx,$$

где inf берется по всем ступенчатым функциям t, таким, что $t(x) \geqslant f(x)$ для всех x. Функция f называется *интегрируемой на D*, если $\int_D^+ f(x)\,dx = \int_D^- f(x)\,dx$. Ее интеграл обозначается символом $\int_D f(x)\,dx$. Функция f называется *интегрируемой*, если $\int_D^+ f(x)\,dx = \int_D^- f(x)\,dx$ для всех наполнимых множеств D. Совокупность всех интегрируемых функций удовлетворяет аксиомам 2а), 2b), 2c′) (докажите!).

Упражнение 8. Если функция f непрерывна почти всюду (т. е. непрерывна всюду, за исключением множества наполнения нуль), то она интегрируема.

Теперь легко доказать следующее утверждение:

Теорема 1. *Пусть $\mathfrak{D}$ — совокупность областей, удовлетворяющая аксиомам* 1a), 1b), 1c′), *содержащая все элементарные множества и содержащаяся в совокупности всех наполнимых* *множеств. Пусть* $\mathcal{F}$ *— совокупность функций, удовлетворяющая аксиомам* 2a), 2b), 2c′), *содержащая все ступенчатые функции и содержащаяся в совокупности всех интегрируемых функций. Тогда для* $\mathfrak{D}$ *и* $\mathcal{F}$ *существует единственное правило* $\int$, *удовлетворяющее аксиомам* 3a), 3b), 3c′), 3d), 3e).

Изменение значения функции на множестве наполнения нуль не изменяет ее интеграла. В частности, функция может быть не определена на множестве наполнения нуль, но понятие ее интеграла по-прежнему имеет смысл.

Для любого подмножества $S \subset E^n$ характеристическая функция множества S, обозначаемая φ_S, определяется следующим образом:

$$\varphi_S(x) = 1, \text{ если } x \in S,$$
$$\varphi_S(x) = 0, \text{ если } x \notin S.$$

Упражнение 9. Показать, что $\varphi_{S_1 \cap S_2} = \varphi_{S_1} \cdot \varphi_{S_2}$ для любых двух множеств S_1 и S_2.

Упражнение 10. Показать, что $\varphi_{S'} = 1 - \varphi_S$ для всех S (S' — дополнение множества S).

Упражнение 11. Выразить $\varphi_{S_1 \cup S_2}$ и $\varphi_{S_1 - S_2}$ через φ_{S_1} и φ_{S_2}.

Упражнение 12. Показать, что D наполнимо тогда и только тогда, когда φ_D непрерывна почти всюду.

Упражнение 13. Пусть $D_1 \subset D_2$ — две наполнимые области, и пусть f — интегрируемая функция. Показать, что

$$\int_{D_1} f(x)\,dx = \int_{D_2} f(x)\,\varphi_{D_1}(x)\,dx.$$

Функция обладает *компактным носителем*, если $f(x) = 0$ для всех x, лежащих вне некоторого ограниченного множества. Если f обладает компактным носителем, положим

$$\int_{E^n} f(x)\,dx = \int_D f(x)\,dx,$$

где D — брус, содержащий все точки, в которых $f(x) \neq 0$. В частности,

$$\int_D f(x)\,dx = \int_{E^n} \varphi_D f(x)\,dx,$$

поэтому можно рассматривать только интегралы по E^n, когда это удобнее.

Пусть $E^n = E^k \times E^l$, так что каждая точка $x \in E^n$ может быть записана в виде $x = (y, z)$, где $y \in E^k$, $z \in E^l$. Для произвольного множества $D \subset E^n$ определим множество $D_y \subset E^l$ как множество всех таких $z \in E^l$, что $(y, z) \in D$.

Предположим, что $\mathfrak{D}$ — совокупность областей, удовлетворяющая аксиомам 1a), 1b), 1c′), а $\mathscr{F}$ — совокупность функций, удовлетворяющая аксиомам 2a), 2b), 2c′), причем выполнены следующие условия:

A) если D — область из $\mathfrak{D}$, то для почти всех y (т. е. всех, кроме множества наполнения нуль) множество D_y наполнимо (как подмножество в E^l);

B) для любой функции $f \in \mathscr{F}$ функция $f(y, \cdot)$ (от $z \in E^l$) интегрируема (как функция на E^l) для почти всех y;

C) для любых $f \in \mathscr{F}$ и $D \in \mathfrak{D}$ функция (от y), равная $\int\limits_{D_y} f(y, z)\,dz$, интегрируема. [Заметим, что, так как множество D ограничено, эта функция автоматически имеет компактный носитель.]

Для таких совокупностей $\mathfrak{D}$ и $\mathscr{F}$ правило, которое сопоставляет каждым $f \in \mathscr{F}$ и $D \in \mathfrak{D}$ число

$$\int\limits_{E^k} \Big(\int\limits_{D_y} f(y, z)\,dz \Big)\,dy,$$

удовлетворяет аксиомам 3a), 3b), 3c′), 3d), 3e). Таким образом, из теоремы 1 следует, что

$$\int\limits_{D} f(x)\,dx = \int\limits_{E^k} \Big(\int\limits_{D_y} f(y, z)\,dz \Big)\,dy,$$

ввиду единственности интеграла.

Приведем два примера семейств $\mathfrak{D}$ и $\mathscr{F}$, для которых условия A), B) и C) выполняются очевидным образом.

1) $\mathfrak{D}_1$ — все элементарные множества, а $\mathscr{F}_1$ — все ступенчатые функции.

2) $\mathscr{F}_2$ — множество таких функций f с компактным носителем, для которых существует множество $C_f \subset E^k$ наполнения нуль (в E^k), обладающее следующим свойством: если $y \notin C_f$, то существуют функция $\delta_y(\varepsilon)$ и множество $S_y(\varepsilon) \subset E^l$ наполнения $\mu_{E^l}(S_y(\varepsilon)) < \varepsilon$ [μ_{E^l} — наполнение множества в E^l), такие, что $|f(y, z) - f(y', z)| < \varepsilon$, как только $\|y - y'\| < \delta(\varepsilon)$ и $z \notin S_y(\varepsilon)$.

$\mathfrak{D}_2$ — множество всех таких D, что $\varphi_D \in \mathscr{F}_2$.

Лемма. *Любое невырожденное линейное преобразование можно представить как произведение линейных преобразований вида*

$$T_\lambda(x_1, \ldots, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, \lambda x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n)$$

и

$$S_{ij}(x_1, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_i + x_j, x_{i+1}, \ldots, x_n).$$

Набросок доказательства. Преобразование

$$(x_1, \ldots, x_n) \to (x_2, x_1, x_3, \ldots, x_n)$$

может быть представлено таким образом. Действительно (опуская остальные переменные, которые не меняются), мы имеем

$$(x_1, x_2) \xrightarrow{S_{12}} (x_1 + x_2, x_2) \xrightarrow{T_{-1}} (-x_1 - x_2, x_2) \xrightarrow{S_{21}}$$
$$\to (-x_1 - x_2, -x_1) \xrightarrow{T_{-1}} (-x_1 - x_2, x_1) \xrightarrow{S_{12}} (-x_2, x_1) \xrightarrow{T_{-1}} (x_2, x_1).$$

Аналогичные рассуждения показывают, что можно переставить любую пару переменных. Таким образом, любое линейное преобразование, представляющее собой перестановку переменных, может быть получено таким путем. Если (a_{ij}) — невырожденная матрица, то по крайней мере один минор порядка $n - 1$ отличен от нуля. Применяя подходящую перестановку переменных, мы можем добиться того, чтобы им оказался левый верхний минор порядка $n - 1$. Повторяя эту процедуру, мы докажем, что с точностью до умножения на перестановку переменных любое невырожденное линейное преобразование T имеет матрицу

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

каждая подматрица которой

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \ldots & a_{kk} \end{pmatrix}, \qquad 1 \leqslant k \leqslant n,$$

невырожденна. Осталось показать, что такое линейное преобразование может быть представлено как произведение преобразований T_λ и S_{ij}. Такое представление получается следующим образом:

$$(x_1, \ldots, x_n) \to (a_{11}x_1, x_2, \ldots, x_n) \to$$
$$\left.\begin{array}{l} \to (a_{11}x_1, a_{12}x_2, x_3, \ldots, x_n) \to \\ \to (a_{11}x_1 + a_{12}x_2, a_{12}x_2, \ldots, x_n) \to \\ \to (a_{11}x_1 + a_{12}x_2, x_2, \ldots, x_n) \end{array}\right\} \quad \text{если} \quad a_{12} \neq 0,$$

и так далее до $(a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n, x_2, \ldots, x_n)$. Затем, поскольку $a_{11} \neq 0$, мы можем получить $(a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n, a_{21}x_1 + a_{22}x_2, \ldots)$, и т. д. Этот процесс можно продолжать, поскольку невырожденны матрицы

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \ldots & a_{kk} \end{pmatrix}.$$

Применим теперь лемму к выводу формулы

$$\int\limits_{TD} f(Tx) \,|\det T|\, dx = \int\limits_{D} f(x)\, dx$$

для произвольного линейного преобразования T. Действительно, легко проверить эту формулу для T_λ и S_{ij}, используя правило сведения кратного интеграла к повторному и соответствующее одномерное утверждение. После этого общее утверждение следует из леммы и правила перемножения определителей.

Следствие 1. $\mu(TD) = |\det T|\, \mu(D)$.

Следствие 2. *Интеграл* $\int$ *на совокупности всех интегрируемых областей и совокупности всех интегрируемых функций удовлетворяет аксиоме* 3c).

Обозначение. Если $\psi\colon E^n \to E^n$ — дифференцируемое отображение, то через J_ψ мы обозначим линейное преобразование, соответствующее матрице Якоби $(j_{ik}(x))$, где $j_{ik} = \partial\psi^i/\partial x^k$.

Теорема 2. *Пусть* $\psi\colon D_1 \to D_2$ — *взаимно однозначное отображение класса* C^1, *такое, что отображение* ψ^{-1} *тоже класса* C^1. *Если* f — *интегрируемая функция на* D_2, *то* $f \circ \psi$ (*где* $f \circ \psi(x) = f(\psi(x))$) *есть интегрируемая функция на* D_1 *и*

$$\int\limits_{D_2} f(y)\, dy = \int\limits_{D_1} f(\psi(x))\, |\det J_\psi(x)|\, dx.$$

Доказательство. Сначала введем еще некоторые обозначения. Для $x = (x_1, \ldots, x_n)$ положим

$$|x| = \max_{i=1, \ldots, n} |x_i|.$$

Для $A = (a_{ij})$ положим

$$|A| = \max_{i=1, \ldots, n} \sum_j |a_{ij}|,$$

так что

$$|Ax| \leqslant |A|\,|x|.$$

Если $x = (x_1, \ldots, x_n)$ и $p = (p_1, \ldots, p_n)$, то

$$\psi_i(x) - \psi_i(p) = \sum_{k=1}^{n} j_{ik}[p + \theta_i(x-p)](x_k - p_k),$$

где $\theta_i \leqslant 1$. Таким образом, если C — куб, задаваемый неравенством $|x - p| \leqslant s$, то

$$|\psi(x) - \psi(p)| \leqslant s \max_{y \in C} |J_\psi(y)| \text{ для } x \in C.$$

Следовательно, $\psi(C)$ лежит в кубе

$$|y - \psi(p)| \leqslant s \max_{y \in C} |J_\psi(y)|$$

и

$$\mu(\psi(C)) \leqslant (\max |J_\psi(y)|)^n \mu(C). \tag{1}$$

Для произвольного линейного преобразования A и любого множества S имеем

$$\mu(A^{-1}S) = |\det A^{-1}|\,\mu(S).$$

Таким образом,

$$|\det A|^{-1} \mu(\psi(C)) = \mu(A^{-1}\psi(C)).$$

Подставляя это равенство в неравенство (1), написанное для отображения $A^{-1} \circ \psi$ (вместо ψ), получаем

$$|\det A|^{-1} \mu(\psi(C)) \leqslant (\max_{y \in C} |J_{A^{-1}\circ\psi}(y)|)^n \mu(C).$$

Поскольку, согласно закону перемножения матриц Якоби, $J_{A^{-1}\circ\psi}(y) = A^{-1}J_\psi(y)$, последнее неравенство можно переписать в виде

$$\mu(\psi(C)) \leqslant |\det A|\,(\max_{y \in C} |A^{-1}J_\psi(y)|)^n \mu(C). \tag{2}$$

Пусть S — произвольное наполнимое подмножество в D. Выберем замощение пространства E^n кубами со стороной δ. Пусть $I_P(S) = \bigcup C_i$ и x_i — точка из C_i. Напишем неравенство (2) для каждого куба C_i, полагая $A = J_\psi(x_i)$. Суммируя, получаем

$$\mu(\psi(I_P(S))) \leqslant \sum_{C_i \in I_P(S)} |\det J(x_i)|\,(\max_{z \in C_i} |J_\psi(x_i)^{-1} J_\psi(z)|)^n \mu(C_i).$$

Но $J_\psi(x)$ есть непрерывная матричная функция от x. Поэтому $J_\psi(x_i)^{-1} J_\psi(z) \to I$ при $z \to x_i$, где I — единичная матрица. Таким образом, $\max_{z \in C_i} | J_\psi (x_i)^{-1} J_\psi (z) | \to 1$ (и притом равномерно всюду, кроме множества сколь угодно малого наполнения). Следовательно, правая часть последнего неравенства стремится к $\int_S | \det J_\psi (x) | \, dx$, так что

$$\mu (\psi (S)) \leqslant \int_S | \det J_\psi (x) | \, dx. \qquad (3)$$

Предположим, что $f \geqslant 0$. Пусть $Q = \{\square_i\}$ — некоторое замощение пространства E^n и $t \leqslant f$ — неотрицательная ступенчатая функция, определенная на D_2. Записывая неравенство (3) для каждого множества $S = \psi^{-1} (\square_i)$, суммируя и переходя к пределу при $\delta \to 0$, получаем

$$\int_{D_2} f (y) \, dy \leqslant \int_{D_1} f (\psi (x)) \, | \det J_\psi (x) | \, dx.$$

Меняя местами D_1 и D_2, заменяя $f (y)$ на $g (x) = f (\psi (x)) \, | \det J_\psi (x) |$ и используя закон перемножения матриц Якоби, а также мультипликативное свойство определителей, заключаем, что

$$\int_{D_2} f (y) \, dy = \int_{D_1} f (\psi (x)) \, | \det J_\psi (x) | \, dx$$

для всех неотрицательных функций. Но отсюда следует справедливость этого равенства для всех функций, что и доказывает теорему.

ЛИТЕРАТУРА

1. Амброз и Сингер ((Ambrose W., Singer I. M.), A theorem on holonomy, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **75** (1953), 428—443.
2. Берже (Berger M.), Sur quelques variétés Riemanniennes suffisamment pincées, *Bull. Soc. Math. France*, **88** (1960), 57—71.
3. Бернар (Bernard D.), Sur la géométrie différentielle des G-structures, *Ann. Inst. Fourier*, **10** (1960), 151—270.
4. Гийемин (Guillemin V.), Theory of finite G-structures, Ph. D. Thesis, Harvard, 1962.
5. Каратеодори (Carathéodory C.), Variationsrechnung und partielle Differentialgleichungen erster Ordnung, Leipzig, 1956.
6. Картан Э., Интегральные инварианты, ГИТТЛ, М.-Л., 1940.
7. Картан (Cartan É)., Œuvres completes, p. II, t. 2, Paris, Gautier-Villars, 1953.
8. Клингенберг (Klingenberg W.), Contributions to Riemannian geometry, *Ann. Math.* (2), **69** (1959), 654—666.
9. Ленг С., Введение в теорию дифференцируемых многообразий, «Мир», М., 1967.
10. Морри (Morrey C. B.), The analytic embedding of abstract real-analytic manifolds, *Ann. Math.* (2), **68** (1958), 159—201.
11. Морс (Morse A. P.), The behaviour of a function on its critical set, *Ann. Math.* (2), **40** (1939), 62—70.
12. Нейенхёйс (Nijenhuis A.), Theory of the geometric object, Ph. D. Thesis, University of Amsterdam, 1952.
13. Номидзу К., Группы Ли и дифференциальная геометрия, ИЛ, М., 1960.
14. Ньюлендер А. и Ниренберг Л., Комплексно аналитические координаты в квазикомплексных многообразиях, сб. *Математика*, **3** : 6 (1959), 131—144.
15. Де Рам Ж., Дифференцируемые многообразия, ИЛ, М., 1956.
16. Раух (Rauch H. E.), Geodesics and curvature in differential geometry in the large, New York, 1959.
17. Сард (Sard A.), The measure of the critical values of differentiable maps, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **48** (1942), 883—890.
18. Уитни (Whitney H.), A function not constant on a connected set of critical points, *Duke Math. J.*, **1** (1935), 514—517.
19. Уитни Х., Геометрическая теория интегрирования, ИЛ, М., 1960.
20. Хартман и Ниренберг (Hartman P., Nirenberg L.), On spherical image maps whose Jacobians do not change sign, *Amer. J. Math.*, **81** (1959), 901—920.
21. Хефлигер (Haefliger A.), Plongements de variétés dans le domaine stable, Seminaire Bourbaki (1962).
22. Чжэнь и Лашоф (Chern S. S., Lashof R. K.), The total curvature of immersed manifolds, *Amer. J. Math.*, **79** (1957), 308—318.
23. Ямабе (Yamabe H.), On arcwise connected subgroup of a Lie group, *Osaka Math. J.* (Japan), **2** (1950), 13—14.

УКАЗАТЕЛЬ

ОГЛАВЛЕНИЕ

С. Стернберг

ЛЕКЦИИ ПО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ

Редактор *Н. И. Плужникова*
Художник *Д. В. Орлов*. Художественный редактор *В. И. Шаповалов*
Технические редакторы *Л. П. Кондюкова* и *А. Г. Резоухова*

Сдано в производство 9/III 1970 г. Подписано к печати 12/X 1970 г. Бумага № 1 $60\times90^1/_{16}$=12,88 бум. л. Усл. печ. л. 25,75. Уч.-изд. л. 22,43. Изд. № 1 5089
Цена 1 р. 79 к. Зак. 310

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»
Москва, 1-й Рижский пер., 2

Московская типография № 16 Главполиграфпрома Комитета по печати при Совете Министров СССР.
Москва, Трехпрудный пер., 9