FOUNDATIONS
OF
ALGEBRAIC
TOPOLOGY

By
SAMUEL EILENBERG
and
NORMAN STEENROD

PRINCETON, NEW JERSEY
PRINCETON UNIVERSITY PRESS
1952

Н. СТИНРОД и С. ЭЙЛЕНБЕРГ

ОСНОВАНИЯ АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ ТОПОЛОГИИ

Перевод с английского
Б. С. ВИЛЕНСКОЙ

под редакцией
М. М. ПОСТНИКОВА

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1958

11-5-4

Настоящая книга содержит аксиоматическое изложеиие теории гомологий, наиболее развитой ветви алгебраической топологии. В связи с таким построением теория гомологий приобретает существенио более доступный вид. Преимущества чисто научного характера делают книгу интересиой не только иачинающему, но и каждому специалисту-топологу.

Книга рассчитана на читателя, интересующегося топологией и знакомого с осиовными понятиями алгебры и топологии.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА

Предлагаемая вниманию советского читателя книга содержит аксиоматическое изложение теории гомологий — наиболее развитой ветви алгебраической топологии, имеющей наиболее важные применения в других отделах математики. Классические изложения теории гомологий основываются на весьма сложном и трудно обозримом конструктивном определении групп гомологий. Труд, затраченный на изучение этого определения, как правило (особенно для читателя, интересующегося лишь приложениями теории гомологий), весьма мало производителен, так как фактически в приложениях теории гомологий используются лишь некоторые свойства групп гомологий, формулировки которых не зависят от того или иного конструктивного определения. Эти свойства и приняты в книге в качестве аксиом. В связи с этим теория гомологий приобретает существенно более доступный вид. Преимущества чисто научного характера, связанные с аксиоматическим подходом, делают эту книгу интересной не только начинающему, но и каждому специалисту-топологу. Используемый в этой книге метод коммутативных диаграмм и точных последовательностей совершенно незаслуженно игнорируется советскими математиками. Можно надеяться, что появление этой книги в русском переводе послужит лучшему ознакомлению советских математиков с достоинствами этого метода. То же самое (и даже еще в большей мере) относится к общей теории категорий и функторов, основы которой также излагаются в книге Эйленберга и Стинрода.

Следует иметь в виду, что основная цель этой книги — обозреть все многообразие теорий гомологий с единой точки зрения. Более содержательное развитие теории гомологий авторы предполагают дать во втором томе, который пока еще не выпущен в свет.

Вопросы, связанные с историей развития теории гомологий, излагаются в книге весьма бегло и не всегда правильно. Не ставя своей целью исправить все неточности исторического характера, редактор счел все же необходимым некоторые места книги снабдить подстрочными примечаниями. Некоторые построения приписываются авторами тем или иным лицам без достаточных на то оснований. В этих случаях (оговоренных в примечаниях редактора) в переводе сделаны соответствующие изменения.

ПРЕДИСЛОВИЕ

1. Предварительные замечания

Основная цель этой книги — изложить аксиоматическое построение теории гомологий — старейшей и наиболее хорошо развитой части алгебраической топологии. Аксиоматическое построение этой теории излагается здесь впервые. Одновременно излагается и аксиоматическое построение двойственной теории когомологии.

Предполагается, что читатель знаком с основными понятиями алгебры и топологии. Эти понятия никак здесь не аксиоматизируются, поскольку это уже неоднократно делалось многими авторами. В этой книге аксиоматизируется связь (т. е. функциональная зависимость), осуществляемая теорией гомологий между топологическими и алгебраическими понятиями.

Грубо говоря, теория гомологий относит топологическим пространствам некоторые группы, а непрерывным отображениям — гомоморфизмы этих групп. Каждому семейству пространств и отображений отвечает некоторое семейство групп и гомоморфизмов. Можно сказать, что теория гомологий есть некоторое отображение топологии в алгебру. Область определения теории гомологий является предметом изучения топологов, а ее область значений — предметом изучения алгебраистов. Значение теории гомологий состоит в том, что она превращает топологические задачи в алгебраические.

С этой точки зрения теория гомологий параллельна аналитической геометрии. Однако в отличие от аналитической геометрии рассматриваемый в теории гомологий переход необратим. Производная алгебраическая система описывает только одну сторону данной топологической системы и поэтому, как правило, более проста. Это имеет то преимущество, что при рассмотрении геометрических задач мы отвлекаемся от некоторых несущественных геометрических свойств и заменяем эти задачи более привычными алгебраическими задачами, решение которых можно надеяться найти. Конечно, некоторые существенные геометрические свойства при этом всегда теряются. Несмотря на это, теория гомологий доказала свою ценность многими разнообразными применениями.

Наши аксиомы формулируют основные свойства определяемого теорией гомологий соответствия между топологическими и алгебраическими понятиями. Эти аксиомы полны в том смысле, что все удовлетворяющие этим аксиомам соответствия приводят к изоморфным алгебраическим системам.

2. Потребность в аксиоматизации

Построение теории гомологий чрезвычайно громоздко. Хотя определения и необходимые леммы можно изложить на десяти страницах, а основные свойства доказать на сотне страниц, но этого можно достичь, только пренебрегая всеми возникающими по ходу дела задачами и не разбирая ни одного разъясняющего примера, что, как известно каждому, изучавшему теорию гомологий, совершенно необходимо. Изучающий должен рассмотреть достаточно образцов приложений теоретического материала, чтобы быть в состоянии самостоятельно его применять.

Сложность теории гомологий усугубляется тем, что существует много различных видоизменений основных определений, как, например, группы сингулярных гомологий в смысле Веблена, Александера или Лефшеца, группы относительных гомологий в смысле Лефшеца, группы гомологий в смысле Виеториса, группы гомологий в смысле Чеха, группы когомологий в смысле Александера и т. д. Цель каждого из этих видоизменений — обобщить основные теоремы теории гомологий и тем самым расширить ее область применения.

Несмотря на это многообразие, все же постепенно становилось ясным, чем является и чем должна быть теория гомологий. Однако до сих пор понятие теории гомологий не получило точного определения, и математики, пользуясь им в своих размышлениях, не употребляли его в своих публикациях. В настоящее время назрела необходимость дать этому понятию точное определение. Аналогичное положение часто возникало и в других отделах математики, и всегда появление аксиоматической точки зрения сразу оздоровляло атмосферу.

В процессе построения групп гомологий пространств можно выделить следующие четыре основные этапа:

(1) пространство $\to$ комплекс,

(2) комплекс $\to$ ориентированный комплекс,

(3) ориентированный комплекс $\to$ группы цепей,

(4) группы цепей $\to$ группы гомологий.

В первоначальном виде первый этап состоял в таком разбиении пространства на некоторые подмножества—клетки, гомеоморфные евклидовым кубам, что любые две клетки пересекаются либо по пустому множеству, либо по их общей грани. Такое разбиение допускают только некоторые, так называемые триангулируемые пространства. В связи с этим возникла задача о характеризации триангулируемых пространств в общих топологических терминах. Эта задача до сих пор не решена. Лишь для некоторых специальных классов пространств (например, для дифференцируемых многообразий) доказана их триангулируемость. Впрочем, для приложений этих пространств, как правило, достаточно.

Освобождение от условия триангулируемости было достигнуто тремя разными способами в работах Виеториса, Лефшеца и Чеха[1]). Соотношение между пространством и комплексом, состоящее в том, что комплекс является триангуляцией пространства, было в каждой из этих работ заменено другим более сложным соотношением, причем получающиеся комплексы оказались бесконечными. Таким образом, успех в обобщении был достигнут за счет возможности эффективного вычисления.

Этап (2) также вызывает определенные затруднения. Здесь задача состоит в отнесении некоторых чисел (коэффициентов инцидентности) каждой паре, состоящей из клетки и из ее грани (на единицу меньшей размерности), так чтобы при этом граница любой клетки была циклом. Это всегда возможно, но для доказательства этого в общем случае необходима уже построенная теория гомологий. Во избежание порочного круга следует поэтому ограничить класс рассматриваемых комплексов такими комплексами, ориентируемость которых может быть доказана непосредственно. Такой класс образуют, например, симплициальные комплексы. Это обстоятельство, а также и некоторые другие соображения обеспечивают первенствующую роль симплициальных комплексов в теории гомологий. Единственный недостаток этого класса комплексов состоит в том, что связанные с ним вычисления настолько обширны, что употребление его для практического вычисления групп гомологий неудобно даже для такого простого пространства, как тор.

Этапы (3) и (4) трудностей не вызывают. Они имеют чисто алгебраический характер и во всех вариантах теории гомологий одинаковы. С точки зрения обучающегося единственная трудность, связанная с этими этапами, состоит в отсутствии объяснения их необходимости.

Основная задача, относящаяся к группам гомологий, — это задача доказательства их топологической инвариантности, т. е. доказательства их независимости от произвола в построении, имеющего место на первом и втором этапах. Около тридцати лет понадобилось для того, чтобы найти вполне удовлетворительное доказательство инвариантности. Многие задачи, возникшие в связи с тем, чтобы найти такое доказательство, до сих пор еще не решены. Например, неизвестно, всегда ли гомеоморфные комплексы имеют изоморфные подразделения.

Толчком к построению излагаемой здесь аксиоматической теории гомологий явилось намерение авторов написать учебник по

[1]) Основные идеи построения Чеха принадлежат, по существу, П. С. Александрову. (*Прим. ред.*)

алгебраической топологии. В этом учебнике нужно было изложить как строгое и абстрактное (в стиле Лефшеца или Чеха) построение групп гомологий пространств, явно нуждающееся в объяснении, почему рассматривается именно такая конструкция, и, поскольку дело касается вычисления, совершенно неэффективное, так и нестрогий, частично интуитивный, но эффективный метод построения групп гомологий, возникший на ранних этапах развития теории. Кроме того, оба эти направления нужно было в конце концов объединить. Все это можно было сделать лишь в рамках аксиоматического изложения.

В формулировках наших аксиом используются лишь простейшие понятия алгебры и теоретико-множественной топологии. Такие понятия, как «комплекс», «ориентация», «цепь» и т. п., в их формулировки не входят. Понятие комплекса появляется лишь в дальнейшем в связи с задачей вычисления групп гомологии данных пространств. При этом каждый из этапов (2), (3) и (4) с необходимостью вытекает из аксиом. Доказательство этого обстоятельства составляет основу доказательства полноты рассматриваемой системы аксиом.

Таким образом, в то время как построение групп гомологий является длинной и скучной процедурой, мотивировка которой остается почти до самого конца неясной, аксиомы, которые можно изложить на нескольких страницах, четко определяют конечную цель построения и обосновывают каждый его шаг.

Мы не предлагаем никаких мотивировок наших аксиом. На протяжении первых трех глав начинающий должен принять эти аксиомы на веру. Это не так трудно, поскольку большинство аксиом совершенно естественны и все они вместе составляют весьма стройное целое, что должно вызвать необходимое доверие даже у скептически настроенного читателя.

3. Сравнение с другими аксиоматическими системами

Потребность в аксиоматизации теории гомологий ощущалась топологами в течение многих лет. Однако до сих пор были аксиоматизированы лишь отдельные этапы построения групп гомологий. Так, Майер выделил четвертый этап, введя с этой целью абстрактное, чисто алгебраическое понятие цепного комплекса. Он показал также, что многие смешанные геометрическо-алгебраические понятия и рассуждения, по существу, принадлежат одной алгебре. Далее, Таккер ввел понятие абстрактного клеточного комплекса, т. е. аксиоматизировал исходный пункт второго этапа, и показал, что все следующие этапы можно провести, исходя из таких абстрактных комплексов. Таким образом, геометрические соображения остаются только на первом этапе, где исключить их, конечно, невозможно.

Недавно Картан и Лере ввели аксиоматическое понятие перекрытия (в другой терминологии — разбиения). По существу, это понятие заменяет понятие комплекса, появляющееся в намеченном в п. 2 построении на первом этапе. По сравнению с комплексами перекрытия имеют некоторые преимущества. Самым важным из этих преимуществ является то обстоятельство, что относящаяся к перекрытиям теорема инвариантности содержит в качестве частного случая известную теорему де Рама о связи между внешними дифференциальными формами на многообразиях и их группами когомологий.

Все эти разнообразные системы являются аксиоматизациями лишь отдельных *этапов* построения групп гомологий. Ни одна из них не аксиоматизирует *переход* от одного этапа к другому. В этом их основное отличие от рассматриваемой в настоящей книге системы аксиом, которая полностью аксиоматизирует переход от пространств к группам гомологий.

4. Новые методы

Большой выигрыш при аксиоматическом рассмотрении состоит в упрощении доказательств теорем. Доказательства, основывающиеся непосредственно на аксиомах, как правило, более просты и понятны. Их не нужно более отягчать громоздкой техникой, с помощью которой определяются группы гомологий. По отношению к доказательствам не возникает вопроса: остаются ли они справедливыми при замене рассматриваемой теории гомологий какой-нибудь другой. После того как для некоторой теории гомологий аксиомы проверены, ее конструктивное построение может быть забыто.

Последовательная аксиоматизация приводит обычно к новой технике доказательств и соответственно к новому языку. Наша система не является в этом смысле исключением. Даже при беглом просмотре книги легко заметить, что текст сопровождается многочисленными диаграммами. Каждая диаграмма является линейчатым комплексом (графом), вершинам которого сопоставлены группы, а ориентированным ребрам — гомоморфизмы, связывающие группы, соответствующие конечным точкам этих ребер.

Любому ориентированному пути диаграммы соответствует гомоморфизм, являющийся композицией гомоморфизмов, отнесенных его ребрам. Путям, связывающим одну и ту же пару вершин, обычно соответствуют одинаковые гомоморфизмы. В этом случае мы говорим, что имеет место *соотношение коммутативности*. С точки зрения комбинаторной топологии соотношение коммутативности можно рассматривать как гомологию, возникающую благодаря приклеиванию к графу некоторой двумерной клетки.

Если в некоторой вершине графа два примыкающих ребра являются продолжением друг друга, причем один ориентирован к вершине, а другой — от нее, то очень часто образ входящего гомоморфизма совпадает с ядром исходящего. Это свойство называется *точностью*. В этом случае группа, отнесенная вершине, определяется двумя соседними группами как расширение фактор-группы по ядру входящего гомоморфизма с помощью образа исходящего. Во всей книге постоянно используются точные *последовательности* групп и гомоморфизмов. Алгебраические свойства этих последовательностей, вывод которых не составляет большого труда, очень удобны в самых разнообразных доказательствах.

Обратим внимание на некоторую, правда весьма неопределенную, аналогию между свойствами коммутативности и точности диаграммы и законами Кирхгофа для электрических цепей.

Некоторые диаграммы появляются неоднократно, как сами по себе, так и в качестве части других диаграмм. Алгебраические свойства таких диаграмм достаточно доказывать только один раз.

Каждая диаграмма содержит весьма большой объем информации. Использование диаграмм позволяет экономить как место, так и труд. Для многих теорем составление правильной диаграммы является основной частью доказательства. Мы рекомендуем читателю перед доказательством каждой теоремы самостоятельно строить соответствующую диаграмму, а затем сравнивать ее с указанной в тексте. Это значительно облегчает понимание доказательства теоремы и, более того, обычно позволяет читателю провести доказательство самостоятельно.

5. Строение книги

В главе I излагаются аксиомы теории гомологий. Здесь же из аксиом выводятся некоторые общие теоремы. Симплициальные комплексы и триангулируемые пространства рассматриваются в главе II, имеющей чисто геометрический характер. В главе III, предполагая, что на совокупности всех триангулируемых пространств задана некоторая теория гомологий, мы выводим из аксиом классический алгорифм вычисления групп гомологий комплексов. Используя этот алгорифм, мы показываем, что для триангулируемых пространств существует не более одной теории гомологий, удовлетворяющей нашим аксиомам.

Первые три главы, составляя единое целое, опираются на предположение о существовании теории гомологий, т. е. на предположение нетривиальной непротиворечивости аксиом. В главах IV—X существование теории гомологий доказывается четырьмя различными способами. Теория сингулярных гомологий излагается в главе VII, теория спектральных гомологий и два ее варианта — в главах IX и X.

Промежуточные главы имеют вспомогательный характер. Как отмечено выше, построение теории гомологий весьма сложно. При этом построении, кроме отмеченных в п. 2 четырех этапов, необходимо провести также соответствующие построения для гомоморфизмов. Затем необходимо проверить аксиомы. Наконец, для каждой теории гомологий нужно построить двойственную теорию когомологий. Ввиду наличия восьми различных теорий, тенденция к параллельным построениям и дословным повторениям становится почти непреодолимой. Мы избегаем этих повторений, описывая в главах IV и V некоторые этапы построения в абстрактном виде, пригодном во всех случаях.

В главе IV излагаются основные понятия теории *категорий* и *функторов*, в которой формализуется точка зрения, доминирующая в этой книге во всем изложении. С помощью этих понятий мы аксиоматически определяем понятие теории гомологий, заданной на абстрактной категории, и формулируем общую схему, которой должны следовать все наши дальнейшие построения. В главе V, имеющей чисто алгебраический характер, рассматривается переход от цепных комплексов к группам гомологий. В главе VI излагается классическая теория гомологий симплициальных комплексов. В главе VII определяется теория сингулярных гомологий и для нее проверяются аксиомы. Эта глава не зависит от предыдущей, за исключением, быть может, тех мест, где объясняется необходимость того или иного построения. Читатель, заинтересованный в кратчайшем доказательстве теоремы существования, может изучить только главу IV, первые четыре пункта главы V и главу VII.

В главе VIII рассматриваются прямые и обратные спектры групп и их предельные группы. Эта алгебраическая техника используется в главе IX для построения теории спектральных гомологий. В главе X излагаются некоторые дополнительные свойства групп спектральных гомологий. Там, в частности, показано, что добавление одной новой аксиомы полностью характеризует группы спектральных гомологий компактных пространств. В этой же главе строятся, кроме того, две теории гомологий, являющиеся распространением теории спектральных гомологий с компактных пространств на локально компактные и соответственно на нормальные пространства. Обе теории получаются с помощью соответствующих процессов компактификации.

В главе XI, последней в этом томе, излагаются некоторые классические приложения теории гомологий, как, например, теоремы Брауэра о неподвижных точках и инвариантности области и основная теорема алгебры.

Второй том, в настоящее время подготавливаемый к печати, будет начинаться с главы, посвященной доказательству теоремы единственности главы III для одного класса пространств, несколько более широкого, чем класс триангулируемых пространств, и включающего, в частности, все абсолютные окрестные ретракты в смысле Борсука. Кроме того, в этой главе теории сингулярных и спектральных гомологий будут охарактеризованы их экстремальными свойствами в классе всех теорий гомологий. Будет показано, что теория сингулярных гомологий является, по существу, теорией гомологий, основанной на рассмотрении отображений триангулируемых пространств в любые пространства, а теория спектральных гомологий является теорией гомологий, основанной на рассмотрении отображений любых пространств в триангулируемые.

Следующие две главы второго тома будут посвящены клеточным комплексам и вопросам вычисления групп гомологий. Хотя в первом томе и излагаются классические правила вычисления групп симплициальных комплексов, он содержит относительно мало примеров вычисления групп гомологий конкретных пространств, так как эти правила приводят к чрезвычайно громоздким вычислениям. Напротив, использование клеточных комплексов позволяет получить удобные правила вычисления; примеры таких вычислений будут изложены во втором томе. Там же будут изложены такие приложения, как теоремы о неподвижных точках и периодических преобразованиях, теоремы о размерности и теоремы Хопфа о классификации отображений n-мерного комплекса в n-мерную сферу.

В следующих шести главах второго тома будут изложены различные умножения, определенные для элементов групп гомологий и когомологий (как, например, прямое произведение, произведение Александера—Колмогорова и произведение Уитнея). Всего будет рассмотрено пять видов умножений. Каждое умножение будет аксиоматизировано и будет доказано, что соответствующие аксиомы полны на категории триангулируемых пространств. Существование произведений будет доказано как в теории сингулярных, так и в теории спектральных гомологий (когомологий). Для случая клеточных комплексов будут выведены эффективные методы вычисления произведений. В качестве приложения будет изложена теорема Хопфа о строении кольца когомологий группового многообразия.

В последней главе второго тома будет аксиоматизирована теория гомологий с локальными коэффициентами. В этой теории, являющейся обобщением обычной теории, фундаментальная группа пространства предполагается заданной как группа операторов группы коэффициентов.

Теории гомологий и когомологий двойственны друг другу. Мы рассматриваем их параллельно. В конце каждого пункта глав I и III формулируются двойственные определения и без доказательств формулируются двойственные теоремы. Эти определения и теоремы нумеруются соответствующим образом, например определение 4.1с является когомологическим вариантом определения 4.1. Следует отметить, что двойственность между обеими теориями не имеет полного формального обоснования. Только для некоторых специальных «групп коэффициентов» этой двойственности можно придать точный формальный смысл, основываясь на понтрягинской теории характеров. Тем не менее, эта двойственность проявляется и для других групп коэффициентов. В этом легко убедиться, проводя доказательства соответствующих теорем теории когомологий. Эти доказательства являются, помимо всего прочего, также чрезвычайно полезными упражнениями. Проведя эти доказательства, читатель полностью освоится с теорией когомологий.

В остальных главах теория когомологий излагается по иной схеме, поскольку большинство этапов построения теории гомологий, по существу, совпадают с соответствующими этапами построения теории когомологий. Этапы построения, в которых обе двойственные теории расходятся между собой, мы рассматриваем для обеих теорий с одинаковой тщательностью.

В конце каждой главы приведены упражнения. Они содержат материал, который, вообще говоря, можно было бы включить в текст, но который мы опустили как не существенный для основной линии нашего изложения.

Подстрочных примечаний книга не содержит. Исторические замечания, а также указания на связи рассматриваемого вопроса с другими вопросами собраны в конце каждой главы в виде отдельных примечаний.

В ссылках внутри книги указывается сначала номер главы, затем номер пункта и последним — номер предложения. Например, X.2.6 означает предложение 6 пункта 2 главы X. Номер главы опускается в случае, когда цитируемое предложение содержится в этой же главе. Ссылка вида (3) означает формулу того же пункта, имеющую номер 3.

Авторы пользуются случаем принести благодарность профессорам С. Маклейну, Т. Радо и П. Рейхельдерферу, прочитавшим рукопись, советы и указания которых способствовали существенному ее улучшению.

Н. Стинрод и С. Эйленберг

ГЛАВА I

АКСИОМЫ И ОБЩИЕ ТЕОРЕМЫ

1. Необходимые сведения из топологии

Аксиомы теории гомологий формулируются в п. 3. В пп. 1 и 2 напоминаются основные топологические и алгебраические обозначения и понятия, а также вводятся некоторые определения и соглашения, необходимые для построения нашей аксиоматической системы.

Парой множеств мы называем пару (X, A), состоящую из некоторого множества X и его подмножества A. В случае, когда подмножество A пусто, символ $(X, \varnothing)$, как правило, сокращается до символа (X) или просто до X.

Отображением

$$f\colon (X, A) \to (Y, B)$$

пары (X, A) в пару (Y, B) называется такая однозначная функция, определенная в X и принимающая значения в Y, что $f(A) \subset B$. *Композицией* отображения f и отображения $g\colon (Y, B) \to (Z, C)$ называется отображение $gf\colon (X, A) \to (Z, C)$, определенное формулой $(gf)x = g(fx)$.

Отношение $(X', A') \subset (X, A)$ означает, что $X' \subset X$ и $A' \subset A$. Отображение $i\colon (X', A') \to (X, A)$, определенное формулой $ix = x$ для любого $x \in X'$, называется *отображением вложения;* в этом случае пишут:

$$i\colon (X', A') \subset (X, A).$$

Если $(X', A') = (X, A)$, то отображение вложения i называется *тождественным отображением* пары (X, A).

Мы будем различать функции, получающиеся друг из друга тривиальными изменениями областей определения и значения. Пусть $f\colon (X, A) \to (Y, B)$ — некоторое отображение и пусть (X', A'), (Y', B') — такие пары, что $X' \subset X$, $Y' \subset Y$, $f(X') \subset Y'$ и $f(A') \subset B'$. Тогда отображение $f'\colon (X', A') \to (Y', B')$, для которого $f'x = fx$ для любой точки $x \in X'$, мы будем называть *отображением, определенным отображением* f. Мы будем также говорить, что отображение f *определяет* отображение f'. Например, любое отображение вложения определяется тождественным отображением его области значений. Определенное отображением $f\colon (X, A) \to (Y, B)$ отображение множества A в множество B обозначается через

$$f|A : A \to B.$$

Семейством пары (X, A) мы называем совокупность, состоящую из пар

$$\begin{tikzcd}[column sep=small, row sep=small]
 & & (X, \varnothing) \arrow[dr] & & \\
(\varnothing\ \varnothing) \arrow[r] & (A, \varnothing) \arrow[ur] \arrow[dr] & & (X, A) \arrow[r] & (X, X), \\
 & & (A, A) \arrow[ur] & &
\end{tikzcd}$$

их тождественных отображений, отображений вложения, отмеченных стрелками и всевозможных их композиций. Любое отображение $f\colon (X, A) \to (Y, B)$ определяет отображение каждой пары из семейства пары (X, A) в соответствующую пару из семейства пары (Y, B). Одним из таких отображений является, в частности, отображение $f|A$.

Топологическим пространством X называется множество X, в котором выделено некоторое семейство подмножеств, называемых открытыми множествами. *Открытые множества* должны удовлетворять следующим условиям:

(1) множество X и пустое множество $\varnothing$ открыты,

(2) объединение любого множества открытых множеств открыто,

(3) пересечение конечного множества открытых множеств открыто.

Семейство открытых множеств пространства X называется *топологией* этого пространства. Множество $X \setminus U$, являющееся дополнением некоторого открытого множества U, называется *замкнутым*.

Для любого подмножества A пространства X объединение всех открытых множеств, содержащихся в A, называется *внутренностью* множества A и обозначается через $\operatorname{Int} A$. Пересечение всех замкнутых множеств, содержащих множество A, называется *замыканием* множества A и обозначается через $\bar{A}$. Топология, определенная в A всеми пересечениями $A \cap U$, где U — любое открытое множество пространства X, называется *относительной топологией*. Рассматриваемое в этой топологии множество A называется *подпространством* пространства X, а (X, A) называется *парой топологических пространств* или, короче, *парой*. Отношение $X' \subset X$, где X, X' — топологические пространства, означает, что пространство X' является подпространством пространства X.

Отображение $f\colon X \to Y$ одного топологического пространства в другое называется *непрерывным*, если для любого открытого множества V пространства Y множество $f^{-1}(V)$ открыто в X. Отображение пар $f\colon (X, A) \to (Y, B)$ называется *непрерывным*, если определенное им отображение $X \to Y$ непрерывно. Термин отображение в применении к топологическим пространствам или парам всегда будет означать непрерывное отображение. Тождественные отображения и отображения вложения, очевидно, непрерывны.

Пространство X называется *хаусдорфовым*, если для любых двух различных точек $x_1, x_2 \in X$ существуют такие непересекающиеся открытые в X множества U_1, U_2, что $x_1 \in U_1$ и $x_2 \in U_2$. Хаусдорфово пространство называется *компактным*, если любое его покрытие открытыми множествами содержит конечное покрытие. Пара (X, A) называется *компактной*, если пространство X компактно, а A — замкнутое (и, следовательно, компактное) подмножество пространства X.

Мы будем предполагать, что читатель знаком с элементарными свойствами пространств и отображений; их можно найти, например, в книге Александрова и Хопфа (Topologie, J. Springer, Berlin, 1935), главы 1 и 2, или в книге Лефшеца (Algebraic Topology[1]), Colloq. Pub. Amer. Math. Soc., 1942), глава I.

Определение 1.1. Множество $\mathfrak{A}$, состоящее из пар пространств и их отображений, называется *допустимой для теории гомологий категорией*, если оно удовлетворяет следующим условиям:

1) все пары и отображения, принадлежащие семейству любой пары $(X, A) \in \mathfrak{A}$ принадлежат $\mathfrak{A}$;

2) если отображение $f\colon (X, A) \to (Y, B)$ принадлежит $\mathfrak{A}$, то пары (X, A) и (Y, B), а также все определяемые отображением f отображения пар из семейства пары (X, A) в соответствующие пары из семейства пары (Y, B), принадлежат $\mathfrak{A}$;

3) если отображения f_1 и f_2 принадлежат $\mathfrak{A}$ и их композиция $f_1 f_2$ определена, то $f_1 f_2 \in \mathfrak{A}$;

4) для любой пары $(X, A) \in \mathfrak{A}$ прямое произведение

$$(X, A) \times I = (X \times I, A \times I),$$

где $I = [0, 1]$ — замкнутый единичный интервал, принадлежит $\mathfrak{A}$ и отображения

$$g_0, g_1\colon (X, A) \to (X, A) \times I,$$

определенные формулами

$$g_0(x) = (x, 0), \qquad g_1(x) = (x, 1),$$

принадлежат $\mathfrak{A}$;

5) в $\mathfrak{A}$ содержится пространство P_0, состоящее из одной точки; если пространства X, P принадлежат $\mathfrak{A}$, причем P состоит из одной точки, то любое отображение $f\colon P \to X$ принадлежит $\mathfrak{A}$.

---

[1]) Имеется русский перевод: С. Лефшец, Алгебраическая топология, М., ИЛ, 1949. (*Прим. ред.*)

Пары и отображения допустимой категории $\mathfrak{A}$ называются *допустимыми*.

Укажем следующие примеры допустимых категорий:

$\mathfrak{A}_1$ — множество всех пар (X, A) и всех их отображений. Это — наиболее широкая допустимая категория.

$\mathfrak{A}_C$ — множество всех компактных пар и всех их отображений.

$\mathfrak{A}_{LC}$ — множество всех пар (X, A), где X — произвольное локально компактное хаусдорфово пространство, а A — замкнутое подпространство пространства X, и всех отображений этих пар, при которых прообраз любого компактного множества является компактным множеством.

Последний пример допустимой категории показывает, что если $X' \subset X$ и пространства X, X' оба допустимы, то отображение вложения $X' \to X$, вообще говоря, не является допустимым отображением. Так будет, например, если пространство X компактно, а X' является открытым, но не замкнутым подпространством пространства X.

Определение 1.2. Два отображения f_0, f_1: $(X, A) \to (Y, B)$ допустимой категории $\mathfrak{A}$ называются *гомотопными* в $\mathfrak{A}$, если в $\mathfrak{A}$ существует такое отображение

$$h\colon (X, A) \times I \to (Y, B),$$

что

$$f_0 = hg_0, \quad f_1 = hg_1,$$

т. е. если

$$f_0(x) = h(x, 0), \quad f_1(x) = h(x, 1).$$

Отображение h называется *гомотопией, связывающей отображение* f_0 *с отображением* f_1.

2. Необходимые сведения из алгебры

Пусть R — произвольное кольцо с единицей. Абелева группа G называется *R-модулем,* если любым элементам $r \in R$, $g \in G$ отнесен некоторый элемент $rg \in G$, причем

$$r(g_1 + g_2) = rg_1 + rg_2, \quad (r_1 + r_2)g = r_1g + r_2g,$$
$$r_1(r_2g) = (r_1r_2)g, \quad 1g = g.$$

Подгруппа H модуля G называется *подмодулем,* если $rh \in H$ для любых элементов $r \in R$, $h \in H$. Гомоморфизм φ модуля G в модуль G' называется *линейным,* если $\varphi(rg) = r\varphi(g)$ для всех $r \in R$, $g \in G$.

В последующих приложениях кольцо R является либо произвольным полем F, либо кольцом J целых чисел. В первом случае любой R-модуль G является линейным пространством над F, а во втором — обыкновенной абелевой группой (без какого-либо дополнительного строения). Единое понятие модуля, охватывающее оба эти случая, избавляет нас от повторений.

Кроме R-модулей, мы будем рассматривать также компактные абелевы группы. Для того чтобы избежать почти дословных повторений, мы примем следующие соглашения.

Каждый раз, когда не оговорено противное, слово «группа» будет обозначать любой из следующих двух объектов:

1° Произвольный R-модуль (над некоторым кольцом R с единицей).

2° Произвольную компактную топологическую абелеву группу.

Каждый раз, когда в некотором рассуждении появляется несколько «групп», слово «группа» понимается только в одном фиксированном смысле. В частности, в случае 1° кольцо R должно быть одним и тем же для всех групп. Все группы записываются аддитивно. Формула $G = 0$, где G — некоторая группа, означает, что G состоит только из нулевого элемента.

Слово «подгруппа» будет означать соответственно

1° произвольный подмодуль, или

2° произвольную замкнутую подгруппу.

Слово «гомоморфизм» будет означать

1° произвольный линейный гомоморфизм, или

2° произвольный непрерывный гомоморфизм.

Для любых двух групп G и H запись

$$\varphi\colon G \to H$$

означает, что φ гомоморфно отображает группу G в группу H. *Ядро* гомоморфизма φ определяется как подгруппа, состоящая из всех элементов группы G, отображающихся в нуль группы H, и обозначается через $\operatorname{Ker}\varphi$. Гомоморфизм φ, ядро которого состоит только из нуля, называется *мономорфизмом*. *Образом* $\operatorname{Im}\varphi$ гомоморфизма φ называется подгруппа $\varphi(G) \subset H$. Утверждение «φ отображает G *на* H» означает, что $\varphi(G) = H$. В этом случае гомоморфизм φ называется *эпиморфизмом*. Формула $\varphi = 0$ означает, что ядро гомоморфизма φ совпадает со всей группой G или, что равносильно, $\varphi(G) = 0$. Запись

$$\varphi\colon G \approx H$$

означает, что отображение $\varphi\colon G \to H$ изоморфно отображает группу G на группу H. В этом случае гомоморфизм φ называется *изоморфизмом*. Заметим, что из $\varphi\colon G \approx H$ следует, что $\varphi^{-1}\colon H \approx G$. В случае 1° это очевидно. В случае 2° это следует из того, что обращение непрерывного взаимно однозначного отображения компактных пространств непрерывно. То обстоятельство, что для некомпактных пространств отображение φ^{-1}, вообще говоря, не непрерывно, не позволяет объединить понятия R-модуля и компактной группы в единое понятие *топологического* R-модуля.

Для любой подгруппы L группы G мы будем через G/L обозначать соответствующую фактор-группу, т. е. группу, элементами которой являются смежные классы группы G по подгруппе L. *Естественный* гомоморфизм

$$\eta:\ G \to G/L$$

определяется как отображение, относящее любому элементу группы G содержащий его смежный класс $\eta(g) = g + L$. В случае 1° мы определяем фактор-группу G/L как R-модуль, полагая $r(g + L) = rg + L$. Тогда η будет линейным гомоморфизмом. В случае 2° мы вводим в группу G/L топологию, считая подмножество U группы G/L открытым тогда и только тогда, когда $\eta^{-1}(U)$ открыто в G. Легко проверяется, что относительно этой топологии G/L является компактной абелевой группой, а η — непрерывным отображением.

Пусть $\varphi:\ G \to G'$, а $L \subset G$, $L' \subset G'$ — такие подгруппы, что $\varphi(L) \subset L'$. Тогда, относя любому смежному классу группы G по подгруппе L смежный класс группы G' по подгруппе L', содержащий его образ при отображении φ, мы получим некоторый гомоморфизм $\tilde{\varphi}:\ G/L \to G'/L'$. Говорят, что гомоморфизм $\tilde{\varphi}$ *индуцирован* гомоморфизмом φ. Естественные отображения η, η' и гомоморфизмы φ, $\tilde{\varphi}$ удовлетворяют соотношению коммутативности

$$\tilde{\varphi}\eta = \eta'\varphi.$$

Первый из связанных этим соотношением гомоморфизмов получается из диаграммы

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\varphi} & G' \\ \Big\downarrow{\scriptstyle\eta} & & \Big\downarrow{\scriptstyle\eta'} \\ G/L & \xrightarrow{\tilde{\varphi}} & G'/L' \end{array}$$

при движении сначала вниз, а затем вправо. Второй получается при движении сначала вправо, а затем вниз. Соотношение коммутативности утверждает, что эти два гомоморфизма группы G в группу G'/L' совпадают.

Пусть $\{G_a\}$ $(a = 1, \ldots, n)$ — произвольные группы. Их (внешняя) *прямая сумма* $\sum_{a=1}^{n} G_a$ определяется обычным путем как множество всех n-членных последовательностей $\{g_a\}$, $g_a \in G_a$ с операциями

$$r\{g_a\} = \{rg_a\},\quad \{g_a\} + \{g'_a\} = \{g_a + g'_a\}.$$

В случае 2° группа ΣG_a рассматривается в топологии прямого произведения.

Любое множество гомоморфизмов $i_\alpha: G_\alpha \to G$ $(\alpha = 1, \ldots, n)$ определяет по формуле $i(\{g_\alpha\}) = \sum\limits_{\alpha=1}^{n} i_\alpha(g_\alpha)$ некоторый гомоморфизм $i: \sum\limits_{\alpha=1}^{n} G_\alpha \to G$. Если отображение i является изоморфизмом группы ΣG_α на группу G, то множество $\{i_\alpha\}$ называется *инъективным представлением группы G в виде прямой суммы*, а каждое отображение i_α называется *инъекцией*. Если, кроме того, $G_\alpha \subset G$ и каждое отображение i_α является вложением, то говорят, что группа G *разложена в* (внутреннюю) *прямую сумму* $G = \Sigma G_\alpha$.

Любое множество гомоморфизмов $j_\alpha: G \to G_\alpha$ $(\alpha = 1, \ldots, n)$ определяет по формуле $j(g) = \{j_\alpha g\}$ некоторый гомоморфизм j: $G \to \sum\limits_{\alpha=1}^{n} G_\alpha$. Если отображение j является изоморфизмом группы G на группу ΣG_α, то множество $\{j_\alpha\}$ называется *проективным представлением группы G в виде прямой суммы*, а каждое отображение j_α называется *проекцией*.

По данному инъективному представлению $\{i_\alpha\}$ можно построить проективное представление $\{j_\alpha\}$, определив $j_\alpha g$ как α-координату элемента $i^{-1}g$. Обратно, любое проективное представление определяет некоторое инъективное. Рассмотрение двух типов представлений оправдывается тем, что они двойственны друг другу, и поэтому из любой теоремы о прямой сумме можно получить двойственную теорему простой перестановкой слов «инъекция» и «проекция». Для бесконечных прямых сумм, которые мы будем рассматривать в главе V, различие между двумя типами представлений уже перестает быть только формальным.

Определение 2.1. Пусть любому целому числу q (положительному, отрицательному или равному нулю) отнесены некоторая группа G_q и некоторый гомоморфизм $\varphi_q: G_q \to G_{q-1}$; получающаяся при этом система $\{G_q, \varphi_q\}$ групп и гомоморфизмов называется *обратной последовательностью групп*. Обратная последовательность называется *точной*, если для любого q образ гомоморфизма φ_{q+1} совпадает с ядром гомоморфизма φ_q.

Определение 2.2. Пусть любому целому числу q (положительному, отрицательному или равному нулю) отнесена некоторая группа G^q и некоторый гомоморфизм $\varphi^q: G^q \to G^{q+1}$; получающаяся при этом система (G^q, φ^q) групп и гомоморфизмов называется *прямой последовательностью групп*. Прямая последовательность называется *точной*, если для любого q образ гомоморфизма φ^{q-1} совпадает с ядром гомоморфизма φ^q.

Пусть $\{G_q, \varphi_q\}$ — произвольная обратная последовательность. Тогда, положив $G^q = G_{-q}$, $\varphi^q = \varphi_{-q}$, мы получим прямую последовательность $\{G^q, \varphi^q\}$. Это преобразование устанавливает взаимно однозначное соответствие между множеством всех обратных последовательностей и множеством всех прямых последовательностей. В дальнейшем все определения будут даваться только для обратных последовательностей. Соответствующие определения для прямых последовательностей получаются с помощью описанного преобразования.

Определение 2.3. Обратная последовательность $G' = \{G'_q, \varphi'_q\}$ называется *подпоследовательностью* обратной последовательности $G = \{G_q, \varphi_q\}$, если $G'_q \subset G_q$ и $\varphi'_q = \varphi_q \mid G'_q$ для любого q. В этом случае мы будем писать $G' \subset G$. Система подгрупп $\{G'_q\}$ определяет подпоследовательность последовательности $\{G_q, \varphi_q\}$ тогда и только тогда, когда $\varphi_q(G'_q) \subset G'_{q-1}$ для любого q.

Замечание. Слово подпоследовательность используется здесь в смысле, отличном от общепринятого, — ни один член исходной последовательности не выбрасывается. Заметим, что, вообще говоря, подпоследовательность точной последовательности неточна. Например, последовательность, состоящая из ядер гомоморфизмов φ_q, как правило, неточна.

Определение 2.4. *Гомоморфизмом* $\psi: G \to G'$ двух обратных последовательностей G и G' называется последовательность $\{\psi_q\}$ гомоморфизмов ψ_q: $G_q \to G'_q$, где q — любое целое число, удовлетворяющая следующим соотношениям коммутативности:

$$\varphi'_q \psi_q = \psi_{q-1} \varphi_q.$$

Ядра гомоморфизмов ψ_q образуют подпоследовательность последовательности G. Эта подпоследовательность называется *ядром* гомоморфизма ψ. Формула $\operatorname{Ker} \psi = 0$ означает, что $\operatorname{Ker} \psi_q = 0$ для любого q. В этом случае гомоморфизм ψ называется *мономорфизмом*. Аналогично $\operatorname{Im} \psi = \{\operatorname{Im} \psi_q\}$ является подпоследовательностью последовательности G'. Гомоморфизм ψ называется *эпиморфизмом*, если $G' = \operatorname{Im} \psi$. Если каждый гомоморфизм ψ_q является изоморфизмом, то гомоморфизм ψ также называется *изоморфизмом*.

Соотношения коммутативности означают, что в диаграмме

$$\begin{tikzcd} G_{q-1} \arrow[d, "\psi_{q-1}"] & G_q \arrow[l, "\varphi_q"'] \arrow[d, "\psi_q"] \\ G'_{q-1} & G'_q \arrow[l, "\varphi'_q"] \end{tikzcd}$$

сквозные гомоморфизмы группы G_q в группу G'_{q-1} совпадают.

Определение 2.5. Пусть L — произвольная подпоследовательность обратной последовательности G. *Фактор-последовательностью* G/L последовательности G по подпоследовательности L называется обратная последовательность, состоящая из фактор-групп G_q/L_q и индуцированных отображениями φ_q гомоморфизмов $\tilde{\varphi}_q: G_q/L_q \to G_{q-1}/L_{q-1}$. Пусть $\eta_q: G_q \to G_q/L_q$ — естественные гомоморфизмы. Так как $\tilde{\varphi}_q \eta_q = \eta_{q-1} \varphi_q$, то $\eta = \{\eta_q\}: G \to G/L$.

Гомоморфизм η называется *естественным* гомоморфизмом последовательности G на последовательность G/L.

Определение 2.6. Пусть G', G'' — обратные последовательности. Их (внешней) *прямой суммой* $G' + G''$ называется обратная последовательность, группы которой имеют вид $G_q = G'_q + G''_q$, а гомоморфизмы определяются формулой $\varphi_q(g'_q, g''_q) = (\varphi'_q(g'_q), \varphi''_q(g''_q))$.

Определение 2.7. Говорят, что обратная последовательность G *разлагается в* (внутреннюю) *прямую сумму* подпоследовательностей G', G'', если для любого q группа G_q разлагается в прямую сумму подгрупп G'_q и G''_q.

Соглашения и обозначения, введенные для пар множеств (X, A) и их отображений, в дальнейшем безоговорочно употребляются и для пар групп, пар последовательностей и их гомоморфизмов.

3. Аксиомы теории гомологий

Теория гомологий H на некоторой допустимой категории $\mathfrak{A}$ определяется как совокупность трех функций, из которых первая $H_q(X, A)$ определена для любой пары (X, A) категории $\mathfrak{A}$ и любого целого числа q (положительного, отрицательного или равного нулю). Значениями этой функции являются абелевы группы. Они называются *относительными q-мерными группами гомологии пространства X по модулю подпространства A*[1]). Вторая функция относит любому отображению $f: (X, A) \to (Y, B)$ категории $\mathfrak{A}$ и любому целому числу q некоторый гомоморфизм

(1) $$f_{*q}: H_q(X, A) \to H_q(Y, B).$$

Этот гомоморфизм называется гомоморфизмом, *индуцированным* отображением f. Третья функция $\partial(q, X, A)$ определена для любой пары (X, A) категории $\mathfrak{A}$ и любого целого числа q. Ее значениями являются гомоморфизмы

(2) $$\partial(q, X, A): H_q(X, A) \to H_{q-1}(A),$$

называемые *граничными операторами.*

В дальнейшем вместо $\partial(q, X, A)$ мы будем писать просто ∂. Аналогично в обозначении f_{*q} мы будем опускать индекс q.

В соответствии с соглашением, введенным в предыдущем пункте, все группы $H_q(X, A)$ предполагаются либо R-модулями, либо компактными абелевыми группами. Соответственно этому гомоморфизмы ∂ и f_* предполагаются либо линейными, либо непрерывными гомоморфизмами.

Требуется, чтобы эти три функции удовлетворяли следующим аксиомам.

[1]) Эти группы называются также *q-мерными группами гомологий пары* (X, A). (*Прим. ред.*)

Аксиома 1. *Для любого тождественного отображения f гомоморфизм f_* также является тождественным отображением.*

Это означает, что если отображение f является тождественным отображением пары $(X, A) \in \mathfrak{A}$, то для любого q отображение f_* является тождественным отображением группы $H_q(X, A)$.

Аксиома 2. $(gf)_* = g_* f_*$.

Подробнее, если отображения $f: (X, A) \to (Y, B)$ и $g: (Y, B) \to \to (Z, C)$ допустимы, то композиция индуцированных ими гомоморфизмов $f_*: H_q(X, A) \to H_q(Y, B)$ и $g_*: H_q(Y, B) \to H_q(Z, C)$ совпадает с индуцированным гомоморфизмом $(gf)_*: H_q(X, A) \to H_q(Z,C)$.

Аксиома 3. $\partial f_* = (f \mid A)_* \partial$.

Разъясним смысл этой аксиомы более подробно. Пусть $f: (X, A) \to (Y, B)$ — произвольное допустимое отображение и $f|A: A \to B$ — отображение, определенное отображением f. Тогда группу $H_q(X, A)$ можно двумя способами отобразить в группу $H_{q-1}(B)$. Как показывает диаграмма

$$\begin{tikzcd} H_q(X, A) \arrow[r, "f_*"] \arrow[d, "\partial"] & H_q(Y, B) \arrow[d, "\partial"] \\ H_{q-1}(A) \arrow[r, "(f|A)_*"] & H_{q-1}(B) \end{tikzcd}$$

композиция ∂f_* получается при движении сначала вправо, а потом вниз, а композиция $(f|A)_* \partial$ получается при движении сначала вниз, а потом вправо. Аксиома 3 требует, чтобы эти два гомоморфизма совпадали на любом элементе группы $H_q(X, A)$.

Аксиома 4 (аксиома точности). *Для любой допустимой пары (X, A) обратная последовательность групп*

$$\ldots \xleftarrow{i_*} H_{q-1}(A) \xleftarrow{\partial} H_q(X, A) \xleftarrow{j_*} H_q(X) \xleftarrow{i_*} H_q(A) \xleftarrow{\partial} \ldots,$$

где $i: A \to X$, $j: X \to (X, A)$ — отображения вложения, является точной последовательностью. Эта обратная последовательность называется гомологической последовательностью пары (X, A).

Для того чтобы формулировать эту аксиому вполне корректно, необходимо снабдить группы и гомоморфизмы рассматриваемой обратной последовательности едиными целочисленными индексами. Мы принимаем группу $H_0(X, A)$ за нулевую, т. е. полагаем $G_{3q} = H_q(X, A)$, $\varphi_{3q} = \partial$, $G_{3q+1} = H_q(X)$ и т. д.

Аксиома 5 (аксиома гомотопии). *Для любых гомотопных в категории $\mathfrak{A}$ допустимых отображений $f_0, f_1: (X, A) \to \to (Y, B)$ и любого q гомоморфизмы f_{0*}, f_{1*} группы $H_q(X, A)$ в группу $H_q(Y, B)$ совпадают.*

Аксиома 6 (аксиома вырезания). *Пусть U — открытое подмножество пространства X, замыкание $\bar{U}$ которого* *содержится во внутренности подпространства A (т. е. $\bar{U} \subset V \subset A$ для некоторого открытого множества V пространства X), и пусть отображение вложения $(X \setminus U, A \setminus U) \to (X, A)$ допустимо. Тогда для любого q это отображение индуцирует изоморфизм $H_q(X \setminus U, A \setminus U) \approx H_q(X, A)$.*

Отображение вложения $i: (X \setminus U, A \setminus U) \subset (X, A)$, где U открыто в X и $\bar{U}$ содержится во внутренности A, называется *отображением вырезания* или просто *вырезанием*.

Аксиома 7 (аксиома размерности). *Для любого допустимого пространства P, состоящего из одной точки, $H_q(P) = 0$ для всех $q \neq 0$.*

Это — последняя аксиома теории гомологий. В доказательствах теорем мы будем пользоваться аксиомами 1, 2 и 3 без явных ссылок на них. Употребление остальных аксиом будет каждый раз особо отмечаться.

Названия аксиом 4, 5 и 6 не требуют пояснений. Причина, почему аксиома 7 названа аксиомой размерности, не так ясна. Пусть $H_q(X, A)$, ∂, f_* — теория гомологий, удовлетворяющая аксиомам 1—7. Положим $H'_q(X, A) = H_{q-1}(X, A)$ и соответствующим образом определим гомоморфизмы ∂', $f_{*'}$. Получающаяся теория гомологий, очевидно, удовлетворяет аксиомам 1—6. Тем же аксиомам удовлетворяет и теория гомологий $H''_q(X, A) = H_q(X, A) + H_{q-1}(X, A)$. Мы видим, что аксиома 7 обеспечивает геометрическую значимость размерностного индекса q. Совместность системы аксиом следует из того, что всем аксиомам удовлетворяют группы $H_q(X, A) = 0$. Конечно, интересно доказать существование нетривиальных теорий гомологий. Это будет сделано в главах VII и IX.

Аксиому гомотопии можно сформулировать в следующем, иногда более удобном виде:

Аксиома 5'. *Пусть (X, A) — произвольная допустимая пара и $g_0, g_1: (X, A) \to (X, A) \times I$ — отображения, определенные формулами $g_0(x) = (x, 0)$ и $g_1(x) = (x, 1)$. Тогда $g_{0*} = g_{1*}$.*

Действительно, из аксиомы 5 следует аксиома 5', так как отображения g_0 и g_1 гомотопны. Соответствующая гомотопия является тождественным отображением произведения $(X, A) \times I$. С другой стороны, если h является гомотопией отображений $f_0, f_1: (X, A) \to (Y, B)$, то $f_0 = hg_0$ и $f_1 = hg_1$. Следовательно, согласно аксиомам 2 и 5' $f_{0*} = h_* g_{0*} = h_* g_{1*} = f_{1*}$.

Аксиому вырезания можно сформулировать также следующим образом:

Аксиома 6'. *Пусть X_1, X_2 — такие подмножества пространства X, что X_1 замкнуто, $X = \operatorname{Int} X_1 \cup \operatorname{Int} X_2$ и отображение вложения $i: (X_1, X_1 \cap X_2) \subset (X_1 \cup X_2, X_2)$ допустимо. Тогда для всех q индуцированный гомоморфизм $i_*: H_q(X_1, X_1 \cap X_2) \approx H_q(X_1 \cup X_2, X_2)$ является изоморфизмом.*

Для доказательства равносильности аксиом 6 и 6′ достаточно положить $A = X_2$ и $U = X - X_1$. Новая формулировка аксиомы вырезания напоминает следующую теорему теории групп: Если G_1 и G_2 — подгруппы некоторой группы G, то отображение вложения $(G_1, G_1 \cap G_2) \to (G_1 \cup G_2, G_2)$ индуцирует изоморфизм фактор-групп $G_1/G_1 \cap G_2 \approx G \cup G_2/G_2$. Здесь $G_1 \cup G_2$ — наименьшая подгруппа группы G, содержащая подгруппы G_1 и G_2.

Во всех теориях гомологий, которые будут построены ниже, $H_q(X, A) = 0$, если $q < 0$. Согласно доказываемым далее теоремам единственности этим свойством обладает любая теория гомологий, если только пара (X, A) триангулируема (см. II. 5). Поэтому без существенного ограничения теории можно в число аксиом включить требование, чтобы $H_q(X, A) = 0$ для $q < 0$. Можно сделать и следующий шаг, предположив, что группы $H_q(X, A)$ определены только для $q \geqslant 0$ и что гомоморфизм ∂: $H_q(X, A) \to H_{q-1}(A)$ определен только для $q \geqslant 1$. При этом только аксиома точности должна быть несколько изменена. Действительно, гомологическая последовательность уже не будет бесконечной в обе стороны, а будет кончаться слева членами

$$H_0(X, A) \xleftarrow{j_*} H_0(X) \xleftarrow{i_*} \ldots .$$

В связи с этим в формулировку аксиомы точности необходимо добавить требование, чтобы гомоморфизм j_* отображал группу $H_0(X)$ на группу $H_0(X, A)$. При выполнении этого требования последовательность остается точной при неограниченном продолжении ее влево тривиальными группами и гомоморфизмами. Это изменение основного определения математически тривиально, так как, полагая $H_q(X, A) = 0$ для $q < 0$, мы получим теорию гомологий в первоначальном смысле.

Следующие пункты главы I посвящены общим теоремам, относящимся к произвольной теории гомологий на некоторой допустимой категории. При формулировке теорем это не будет явно указываться. Кроме того, будут опускаться предположения допустимости пар и отображений, встречающихся в теоремах, если только не будет особых причин для фиксации внимания на этом обстоятельстве.

3с. Аксиомы теории когомологий

Теория когомологий на допустимой категории $\mathfrak{A}$ определяется как совокупность трех функций, из которых первая $H^q(X, A)$ определена для любой пары (X, A) категории $\mathfrak{A}$ и любого целого числа q. Значениями этой функции являются абелевы группы. Они называются *относительными q-мерными группами когомологии пространства X по модулю подпространства A*[1]).

[1]) А также *q-мерными группами когомологий пары* (X, A). (*Прим. ред.*)

Вторая функция f^* определена для любого допустимого отображения

$$f: (X, A) \to (Y, B)$$

и любого целого числа q; ее значением является гомоморфизм

$$f^*: H^q(Y, B) \to H^q(X, A).$$

Этот гомоморфизм называется гомоморфизмом, *индуцированным* отображением f.

Третья функция $\delta(q, X, A)$ определена для любой пары $(X, A) \in \mathfrak{A}$ и любого целого числа q. Ее значениями являются гомоморфизмы

$$\delta: H^{q-1}(A) \to H^q(X, A),$$

называемые *кограничными операторами.*

Замечание. Гомоморфизмы f_* и f^* имеют противоположные направления, так же как и гомоморфизмы ∂ и δ. Различие в обозначениях между группами гомологий и когомологий легко запомнить, пользуясь следующим правилом: символ H_q с индексом внизу обозначает гомологии, потому что соответствующий граничный оператор уменьшает размерности; символ H^q с индексом вверху обозначает когомологии, потому что соответствующий кограничный оператор увеличивает размерности.

Введенные три функции должны обладать следующими свойствами (формулировки этих свойств сокращены, так как они аналогичны формулировкам соответствующих аксиом теории гомологий; в частности, указания на то, что все рассматриваемые пары и отображения допустимы, опущены).

Аксиома 1с. *Для любого тождественного отображения f гомоморфизм f^* является тождественным отображением.*

Аксиома 2с. $(gf)^* = f^*g^*$.

Аксиома 3с. $\delta(f \mid A)^* = f^*\delta$.

Аксиома 4с. *Прямая последовательность групп*

$$\ldots \xrightarrow{i^*} H^{q-1}(A) \xrightarrow{\delta} H^q(X, A) \xrightarrow{j^*} H^q(X) \xrightarrow{i^*} H^q(A) \xrightarrow{\delta} \ldots,$$

где i: $A \to X$ и j: $X \to (X, A)$ — отображения вложения, является точной последовательностью. Эта прямая последовательность называется когомологической последовательностью пары (X, A).

Аксиома 5с. *Если отображения $f, g: (X, A) \to (Y, B)$ гомотопны, то $f^* = g^*$.*

Аксиома 6с. *Если множество U открыто в пространстве X, его замыкание $\bar{U}$ содержится во внутренности подпространства A и отображение вложения $(X \setminus U, A \setminus U) \to (X, A)$ допустимо, то это отображение индуцирует изоморфизм $H^q(X, A) \approx H^q(X \setminus U, A \setminus U)$.*

Аксиома 7с. *Для любого пространства P, состоящего из одной точки, $H^q(P) = 0$ для всех $q \neq 0$.*

Между теорией гомологий и теорией когомологий существует отношение двойственности, основывающееся на понтрягинской теории характеров. Пусть $H^q(X, A)$, f^*, δ — некоторая теория когомологий, удовлетворяющая аксиомам 1с—7с, и пусть $H^q(X, A)$ — либо дискретная абелева группа (т. е. за R принято кольцо целых чисел), либо компактная абелева группа. Пусть, далее, $H_q(X, A)$ — группа характеров группы $H^q(X, A)$ и f_*, ∂ — гомоморфизмы, сопряженные гомоморфизмам f^* и δ соответственно. Легко показать, используя известные свойства групп характеров, что $H_q(X, A)$, f_*, ∂ удовлетворяют аксиомам 1—7. Следовательно, любое утверждение, двойственное некоторой теореме относительно $\{H_q, f_*, \partial\}$, является верной теоремой относительно $\{H^q, f^*, \delta\}$. При переходе от некоторой теоремы к двойственной гомоморфизмы меняют направление, а подгруппы заменяются фактор-группами, и наоборот.

В том случае, когда группы $H^q(X, A)$ являются R-модулями с произвольным кольцом R, двойственность не имеет полного формального основания. Частичная двойственность получается, если рассматривать группу $H^q(X, A)$ как дискретную абелеву группу и не учитывать операторы из R. Тогда описанная выше строгая двойственность показывает, что теорема, двойственная некоторой теореме теории гомологий, имеет место и в теории когомологий, по крайней мере постольку, поскольку мы рассматриваем только *аддитивные* свойства групп $H^q(X, A)$ (не связанные с кольцом R).

Ввиду этой двойственности мы не будем доказывать теорем теории когомологий, оставляя читателю их доказательство в качестве упражнений. Мы ограничимся тем, что в конце каждого пункта глав I и III, посвящённого теории гомологий, будем формулировать двойственные определения и теоремы теории когомологий.

4. Гомоморфизмы гомологических последовательностей

Любое отображение $f: (X, A) \to (Y, B)$ определяет отображения

$$f_1: X \to Y, \qquad f_2: A \to B.$$

Отображение f_2 есть не что иное, как рассмотренное выше отображение $f \mid A$.

Теорема 4.1. *Гомоморфизмы f_*, f_{1*} и f_{2*} составляют гомоморфизм гомологической последовательности пары (X, A) в гомологическую последовательность пары (Y, B). Этот гомоморфизм обозначается через f_{**}.*

Доказательство. Рассмотрим диаграмму

$$\begin{array}{ccccccccc}
\longleftarrow & H_q(X, A) & \xleftarrow{j_*} & H_q(X) & \xleftarrow{i_*} & H_q(A) & \xleftarrow{\partial} & H_{q+1}(X, A) & \longleftarrow \\
 & \downarrow{f_*} & & \downarrow{f_{1*}} & & \downarrow{f_{2*}} & & \downarrow{f_*} & \\
\longleftarrow & H_q(Y, B) & \xleftarrow{j'_*} & H_q(Y) & \xleftarrow{i'_*} & H_q(B) & \xleftarrow{\partial} & H_{q+1}(Y, B) & \longleftarrow .
\end{array}$$

В этой диаграмме i, j, i', j' — соответствующие отображения вложения. Нам нужно проверить соотношения коммутативности

$$f_* j_* = j'_* f_{1*}, \quad f_{1*} i_* = i'_* f_{2*}, \quad f_{2*} \partial = \partial f_* .$$

Первые два соотношения следуют из аксиомы 2, так как $fj = j'f_1$ и $f_1 i = i' f_2$. Третье соотношение с точностью до обозначений совпадает с аксиомой 3.

Теорема 4.2. *Пусть $f\colon (X, A) \to (Y, B)$ — такое отображение, что $f_{1*}\colon H_q(X) \approx H_q(Y)$ и $f_{2*}\colon H_q(A) \approx H_q(B)$ для всех q. Тогда $f_*\colon H_q(X, A) \approx H_q(Y, B)$ для всех q, т. е. отображение f_{**} является изоморфизмом.*

Эта теорема немедленно вытекает из следующей теоретико-групповой леммы.

Лемма 4.3 («лемма о пяти гомоморфизмах»). *Пусть $\{\psi_q\}$ — такой гомоморфизм точной обратной последовательности $\{G_q, \varphi_q\}$ в точную обратную последовательность $\{G'_q, \varphi'_q\}$, что для некоторого индекса q отображения $\psi_{q+2}, \psi_{q+1}, \psi_{q-1}$ и ψ_{q-2} являются изоморфизмами. Тогда отображение ψ_q также будет изоморфизмом.*

Эта лемма в свою очередь вытекает из следующих двух лемм.

Лемма 4.4. *Если отображение ψ_{q-1} мономорфно, а отображение ψ_{q+2} эпиморфно, то*

$$\operatorname{Ker} \psi_q = \varphi_{q+1} (\operatorname{Ker} \psi_{q+1}) .$$

Лемма 4.5. *Если отображение ψ_{q+1} эпиморфно, а отображение ψ_{q-2} мономорфно, то*

$$\operatorname{Im} \psi_q = \varphi_q'^{-1} (\operatorname{Im} \psi_{q-1}) .$$

Доказательство. Обе леммы доказываются на основе диаграммы

$$\begin{array}{ccccccccc}
G_{q-2} & \xleftarrow{\varphi_{q-1}} & G_{q-1} & \xleftarrow{\varphi_q} & G_q & \xleftarrow{\varphi_{q+1}} & G_{q+1} & \xleftarrow{\varphi_{q+2}} & G_{q+2} \\
\downarrow{\psi_{q-2}} & & \downarrow{\psi_{q-1}} & & \downarrow{\psi_q} & & \downarrow{\psi_{q+1}} & & \downarrow{\psi_{q+2}} \\
G'_{q-2} & \xleftarrow{\varphi'_{q-1}} & G'_{q-1} & \xleftarrow{\varphi'_q} & G'_q & \xleftarrow{\varphi'_{q+1}} & G'_{q+1} & \xleftarrow{\varphi'_{q+2}} & G'_{q+2} .
\end{array}$$

Так как $\psi_q \varphi_{q+1} = \varphi'_{q+1} \psi_{q+1}$, то

$$\varphi_{q+1}(\mathrm{Ker}\,\psi_{q+1}) \subset \mathrm{Ker}\,\psi_q.$$

Для доказательства обратного включения, предполагая, что условия леммы 4.4 выполнены, рассмотрим такой элемент $g \in G_g$, что $\psi_q g = 0$. Тогда $\varphi'_q \psi_q g = 0$, т. е. $\psi_{q-1} \varphi_q g = 0$. Так как отображение ψ_{q-1} по условию мономорфно, то $\varphi_q(g) = 0$. Ввиду точности верхней последовательности существует такой элемент $g_1 \in G_{q+1}$, что $\varphi_{q+1} g_1 = g$. Тогда $\varphi'_{q+1} \psi_{q+1} g_1 = \psi_q \varphi_{q+1} g_1 = \psi_q g = 0$ и, следовательно, ввиду точности нижней последовательности существует такой элемент $g'_2 \in G'_{q+2}$, что $\varphi'_{q+2} g'_2 = \psi_{q+1} g_1$. Так как отображение ψ_{q+2} эпиморфно, то существует такой элемент $g_2 \in G_{q+2}$, что $\psi_{q+2} g_2 = g'_2$. Тогда, с одной стороны, $\psi_{q+1}(g_1 - \varphi_{q+2} g_2) = \psi_{q+1} g_1 - \varphi'_{q+2} \psi_{q+2} g_2 = \psi_{q+1} g_1 - \varphi'_{q+2} g'_2 = 0$, а, с другой стороны, $\varphi_{q+1}(g_1 - \varphi_{q+2} g_2) = \varphi_{q+1} g_1 = g$. Таким образом, $g \in \varphi_{q+1}(\mathrm{Ker}\,\psi_{q+1})$.

Лемма 4.5 доказывается аналогично.

Теорема 4.1с. *Гомоморфизмы f^*, f_1^*, f_2^* составляют гомоморфизм когомологической последовательности пары (Y, B) в когомологическую последовательность пары (X, A). Этот гомоморфизм обозначается через f^{**}.*

Теорема 4.2с. *Пусть $f: (X, A) \to (Y, B)$ — такое отображение, что $f_1^*: H^q(Y) \approx H^q(X)$ и $f_2^*: H^q(B) \approx H^q(A)$ для всех q. Тогда $f^*: H^q(Y, B) \approx H^q(X, A)$ для всех q, т.е. отображение f^{**} является изоморфизмом.*

5. Инвариантность групп гомологий

Допустимые пары (X, A) и (Y, B) называются *гомеоморфными*, если существуют такие допустимые отображения $f: (X, A) \to (Y, B)$ и $g: (Y, B) \to (X, A)$, что оба отображения fg и gf тождественны. Отображение f называется в этом случае *гомеоморфизмом*, а отображение $g = f^{-1}$ — обратным к f.

Теорема 5.1. *Гомеоморфизм f пары (X, A) на пару (Y, B) индуцирует изоморфизм $f_*: H_q(X, A) \approx H_q(Y, B)$.*

Доказательство. Так как $f^{-1}f$ является тождественным отображением, то и отображение $(f^{-1}f)_* = (f^{-1})_* f_*$ является тождественным отображением. Аналогично $f_*(f^{-1})_*$ является тождественным отображением. Поэтому гомоморфизм f_* имеет обратный $(f_*)^{-1} = (f^{-1})_*$.

Теорема 5.2. *Гомеоморфизм f пары (X, A) на пару (Y, B) индуцирует изоморфизм гомологической последовательности пары (X, A) на гомологическую последовательность пары (Y, B).*

Доказательство. Так как отображение f определяет гомеоморфизмы $f_1: X \to Y$ и $f_2: A \to B$, то теорема следует из теорем 4.1 и 5.1.

Теорема 5.1с. *Гомеоморфизм f пары (X, A) на пару (Y, B) индуцирует изоморфизм $f^*: H^q(Y, B) \approx H^q(X, A)$.*

Теорема 5.2с. *Гомеоморфизм f пары (X, A) на пару (Y, B) индуцирует изоморфизм когомологической последовательности пары (Y, B) на когомологическую последовательность пары (X, A).*

6. Базисная точка P_0 и группа коэффициентов G

Определение 6.1. Пусть P_0 — некоторая фиксированная точка; пространство (допустимое), состоящее из этой точки, мы будем также обозначать через P_0. Группа $H_0(P_0)$ называется *группой коэффициентов* рассматриваемой теории гомологий и обозначается через G. Элементы этой группы обозначаются через g, g' и т. д.

Можно определить группу коэффициентов и не выбирая базисную точку P_0. Пусть M — множество, каждому элементу $\alpha \in M$ которого отнесена некоторая группа G_α, а каждой упорядоченной паре $\alpha, \beta \in M$ — такой изоморфизм $\pi^\alpha_\beta: G_\alpha \approx G_\beta$, что

(1) для любого α отображение π^α_α является тождественным отображением группы G_α и

(2) для любых $\alpha, \beta, \gamma \in M$ имеет место соотношение $\pi^\beta_\gamma \pi^\alpha_\beta = \pi^\alpha_\gamma$.

В этом случае говорят, что на множестве M задана *транзитивная* система групп. Рассмотрим множество G таких функций, относящих каждому $\alpha \in M$ некоторый элемент $g_\alpha \in G_\alpha$, что $\pi^\alpha_\beta g_\alpha = g_\beta$ для любых $\alpha, \beta \in M$. Определив сумму функций по известному правилу: $(g + g')_\alpha = g_\alpha + g'_\alpha$, мы, очевидно, превратим множество G в группу. Для любого $\alpha \in M$ проекция $g \to g_\alpha$ является, очевидно, изоморфным отображением группы G на группу G_α.

Если M является совокупностью всех пространств категории $\mathfrak{A}$, состоящих из одной точки, группы G_α — нульмерными группами гомологий этих пространств и отображения π^β_α — изоморфизмами, индуцированными отображениями одного такого пространства в другое, то все условия определения транзитивной системы, очевидно, выполнены, а соответствующая группа G изоморфна группе коэффициентов.

Определение 6.1с. Группа $H^0(P_0)$ называется *группой коэффициентов* теории когомологий и обозначается через G, а ее элементы—через g, g' и т. д.

7. Приведенная нульмерная группа гомологий

Определение 7.1. Для любой точки $x \in X$ рассмотрим отображение $f: P_0 \to X$, определенное формулой $f(P_0) = x$. Образ элемента $g \in G$ в группе $H_0(X)$ при гомоморфизме f_*, индуцированном этим отображением, будем обозначать через $(gx)_X$. Образ группы G в группе $H_0(X)$ при гомоморфизме f_* будем обозначать через $(Gx)_X$.

Теорема 7.2. *Пусть $f: X \to Y, x \in X$, $y = f(x)$ и $g \in G$. Тогда $f_* (gx)_X = (gy)_Y$. Таким образом, гомоморфизм f_* отображает подгруппу $(Gx)_X$ в подгруппу $(Gy)_Y$.*

Доказательство тривиально.

Определение 7.3. Если отображение $f: X \to P_0$ (это отображение определено однозначно) допустимо, то пространство X называется *стягиваемым*. В этом случае ядро гомоморфизма f_* : $H_0(X) \to G$ называется *приведенной нульмерной группой гомологий пространства* X и обозначается через $\tilde{H}_0(X)$.

Лемма 7.4. *Если $f: X \to Y$ — допустимое отображение и пространство Y стягиваемо, то и пространство X стягиваемо. Если пара (X, A) допустима и пространство X стягиваемо, то подпространство A стягиваемо и отображение $(X, A) \to (P_0, P_0)$ допустимо.*

Первое утверждение является тривиальным следствием свойства (3) допустимой категории. Если пара (X, A) допустима, то отображение вложения $A \to X$ допустимо. Если, кроме того, пространство X стягиваемо, то составное отображение $A \to X \to P_0$ допустимо, т. е. A стягиваемо. Так как отображение $X \to P_0$ допустимо, то допустимо и отображение $(X, X) \to (P_0, P_0)$. Поэтому отображение $(X, A) \to (X, X) \to (P_0, P_0)$ допустимо.

Замечание. В первых двух из данных в § 1 примеров допустимых категорий каждое допустимое пространство стягиваемо. В третьем же примере категории $\mathfrak{A}_{LC}$ локально компактных пространств стягиваемыми пространствами будут только компактные пространства.

Теорема 7.5. *Для любого пространства P, состоящего из одной точки, $\tilde{H}_0(P) = 0$ и $H_0(P) = (GP)_P$.*

Это предложение следует из теоремы 5.1, так как отображение $P \to P_0$ является гомеоморфизмом.

Теорема 7.6. *Пусть пространство X стягиваемо и $x \in X$. Тогда группа $H_0(X)$ разлагается в прямую сумму*

$$H_0(X) = \tilde{H}_0(X) + (Gx)_X$$

и соответствие $g \to (gx)_X$ является изоморфизмом группы G на группу $(Gx)_X$.

Доказательство. Пусть отображение $f_1: P_0 \to X$ определено формулой $f_1(P_0) = x$ и пусть $f_2: X \to P_0$. Так как $f_2 f_1$ — тождественное отображение пространства P, то композиция гомоморфизмов $f_{1*}: G \to H_0(X)$ и $f_{2*}: H_0(X) \to G$ является тождественным отображением. Поэтому гомоморфизм f_{1*} изоморфно отображает группу G на группу $(Gx)_X$, а гомоморфизм f_{2*} изоморфно отображает группу $(Gx)_X$ на группу G. Так как $\tilde{H}_0(X) = \operatorname{Ker} f_{2*}$, то отсюда следует, что группы $\widetilde{H}_0(X)$ и $(Gx)_X$ пересекаются по нулю. Для любого элемента $h \in H_0(X)$ положим $h' = f_{1*} f_{2*}(h)$ и $h'' = h - h_1$. Очевидно, что $h' \in (Gx)_X$, $h'' \in \widetilde{H}_0(X)$ и $h = h' + h''$.

Теорема 7.7. *Пусть f: $X \to Y$, пространство Y стягиваемо, $x \in X$ и $y = f(x)$. Тогда пространство X стягиваемо и гомоморфизм f_* отображает группу $\widetilde{H}_0(X)$ в группу $\widetilde{H}_0(Y)$, а подгруппу $(Gx)_X$ — изоморфно на подгруппу $(Gy)_Y$.*

Доказательство. Пусть отображение f_1: $P_0 \to X$ определено формулой $f_1(P_0) = x$ и пусть f_2: $Y \to P_0$. Тогда композиция $f_2 f f_1$ является тождественным отображением пространства P_0, и поэтому составной гомоморфизм $G \to (Gx)_X \to (Gy)_Y \to G$ также является тождественным отображением. Из определения 7.1 и теоремы 7.2 следует, что каждый из рассматриваемых гомоморфизмов является эпиморфизмом, а поэтому и изоморфизмом. Так как отображение $f_2 f$ стягивает пространство X в точку P_0, то $\widetilde{H}_0(X) = \mathrm{Ker}(f_2 f)_* = f_*^{-1}(\mathrm{Ker}\, f_{2*}) = f_*^{-1}(\widetilde{H}_0(Y))$.

Определение 7.8. Пусть f: $X \to Y$, где X — произвольное а Y — стягиваемое пространство. Отображение группы $\widetilde{H}_0(X)$ в группу $\widetilde{H}_0(Y)$, определенное отображением f_* (см. теорему 7.7), обозначается через $\widetilde{f}_*$.

Следствие 7.9. $\mathrm{Ker}\, \widetilde{f}_* = \mathrm{Ker}\, f_*$.

Определение 7.1с. Пусть $x \in X$, $h \in H^0(X)$ и пусть отображение f: $P_0 \to X$ определено формулой $f(P_0) = x$. Элемент $f^*(h) \in G$ обозначается через $h(x)$, а ядро гомоморфизма f^*: $H^0(X) \to G$ — через $\widetilde{H}^0_x(X)$.

Теорема 7.2с. *Пусть f: $X \to Y$, $x \in X$, $y = f(x)$ и $h \in H^0(Y)$. Тогда $(f^* h)(x) = h(y)$. Таким образом, гомоморфизм f^* отображает группу $\widetilde{H}^0_y(Y)$ в группу $H^0_x(X)$, причем ядро гомоморфизма f^* содержится в группе $\widetilde{H}^0_y(Y)$.*

Определение 7.3с. Пусть отображение f: $X \to P_0$ допустимо (т. е. пространство X стягиваемо). Тогда образ группы G в группе $H^0(X)$ при гомоморфизме f^* обозначается через G_X. Факторгруппа $\widetilde{H}^0(X) = H^0(X)/G_X$ называется *приведенной нульмерной группой когомологий пространства X.*

Теорема 7.5с. *Для любого пространства P, состоящего из одной точки, $H^0(P) = G_P$ и $H^0(P) = 0$.*

Теорема 7.6с. *Пусть X — стягиваемое пространство и $x \in X$. Тогда группа $H^0(X)$ разлагается в прямую сумму $\widetilde{H}^0_x(X) + G_X$ и отображение $X \to P_0$ индуцирует изоморфизм $G \approx G_X$.*

Теорема 7.7с. *Пусть f: $X \to Y$, пространство Y стягиваемо, $x \in X$ и $y = f(x)$. Тогда пространство X стягиваемо и гомоморфизм f^* отображает группу $\widetilde{H}^0_y(Y)$ в группу $\widetilde{H}^0_x(X)$; а группу G_Y — изоморфно на группу G_X.*

Определение 7.8с. Пусть $f\colon X - Y$, где X — произвольное, а Y —стягиваемое пространство. Отображение группы $\tilde{H}^0(Y)$ в группу $\tilde{H}^0(X)$, индуцированное гомоморфизмом f^*, обозначается через $\tilde{f}^*$.

Следствие 7.9с. *При естественном отображении $H^0(Y) \to \tilde{H}^0(Y)$ ядро гомоморфизма f^* изоморфно отображается на ядро гомоморфизма $\tilde{f}^*$.*

8. Приведенная гомологическая последовательность

Лемма 8.1. *Для любого пространства X и любого целого числа q группа $H_q(X, X)$ тривиальна.*

Доказательство. Пусть $i\colon X \to X$ и $j\colon X \to (X, X)$ — отображения вложения. Рассмотрим отрезок гомологической последовательности пары (X, X), содержащий группу $H_q(X, X)$:

$$H_{q-1}(X) \xleftarrow{i_*} H_{q-1}(X) \xleftarrow{\partial} H_q(X, X) \xleftarrow{j_*} H_q(X) \xleftarrow{i_*} H_q(X).$$

Так как каждое отображение i_* является изоморфизмом, то согласно свойству точности $0 = \operatorname{Ker} i_{*q-1} = \operatorname{Im} \partial$. Следовательно, $H_q(X, X) = \operatorname{Ker} \partial$. Аналогично $H_q(X) = \operatorname{Im} i_{*q} = \operatorname{Ker} j_{*q}$. Следовательно, $\operatorname{Im} j_* = 0$. Так как согласно свойству точности $\operatorname{Im} j_* = \operatorname{Ker} \partial$, то, следовательно, $H_q(X, X) = 0$.

Дадим второе доказательство леммы 8.1, которое использует аксиому вырезания и только ту часть аксиомы точности, в которой утверждается, что $j_* i_* = 0$. Таким образом, лемма 8.1 имеет место и для групп гомологий, не удовлетворяющих полной аксиоме точности. Такие группы гомологий будут рассматриваться ниже.

Отображение вложения $(\varnothing, \varnothing) \subset (X, X)$ является вырезанием, так что $H_q(X, X) \approx H_q(\varnothing)$. Рассмотрим отрезок гомологической последовательности пары $(\varnothing, \varnothing)$:

$$H_q(\varnothing) \xleftarrow{j_*} H_q(\varnothing) \xleftarrow{i_*} H_q(\varnothing).$$

Так как i и j являются тождественными отображениями, то и гомоморфизмы i_* и j_* являются тождественными отображениями. С другой стороны, $j_* i_* = 0$, что возможно только тогда, когда $H_q(\varnothing) = 0$.

Теорема 8.2. *Если пространство X стягиваемо, то гомоморфизм ∂ отображает группу $H_1(X, A)$ в группу $\tilde{H}_0(A)$.*

Доказательство. Согласно лемме 7.4 отображение $(X, A) \to (P_0, P_0)$ допустимо. Согласно лемме 8.1 для любого элемента $h \in H_1(X, A)$ элемент $f_*(h) \in H_1(P_0, P_0)$ равен нулю. Следовательно, $(f \mid A)_* \partial(h) = \partial f_*(h) = 0$. Таким образом, по определению $\partial(h) \in \tilde{H}_0(A)$.

Определение 8.3. Пусть отображение $f\colon (X, A) \to (P_0, P_0)$ допустимо (т. е. пространство X стягиваемо). Тогда ядро гомоморфизма f_{**} называется *приведенной гомологической последовательностью пары* (X, A).

Теорема 8.4. *Приведенная гомологическая последовательность пары* (X, A) *отличается от гомологической последовательности только в отрезке*

$$H_0(X, A) \xleftarrow{j_*} H_0(X) \xleftarrow{i_*} H_0(A) \xleftarrow{\partial} H_1(X, A),$$

который при переходе к приведенной последовательности заменяется отрезком

$$H_0(X, A) \xleftarrow{\tilde{j}_*} \tilde{H}_0(X) \xleftarrow{\tilde{i}_*} \tilde{H}_0(A) \xleftarrow{\tilde{\partial}} H_1(X, A),$$

где $\tilde{j}_*$, $\tilde{i}_*$, $\tilde{\partial}$ — *отображения, определенные гомоморфизмами* j_*, i_* *и* ∂ *соответственно.*

Следствие 8.5. *Для любого отображения* $f\colon (X, A) \to (X, B)$ *гомоморфизм* f_{**} *отображает приведенную гомологическую последовательность пары* (X, A) *в приведенную гомологическую последовательность пары* (Y, B).

Доказательство. Согласно лемме 8.1 и аксиоме размерности гомологическая последовательность пары (P_0, P_0) содержит только два отличных от нуля члена : $H_0(P_0) \approx H_0(P_0)$. Следовательно, за исключением соответствующих им членов, которыми согласно определению 7.3 являются группы $\tilde{H}_0(X)$ и $\tilde{H}_0(A)$, ядро гомоморфизма f_{**} совпадает с гомологической последовательностью пары (X, A). Для доказательства следствия достаточно сослаться на теорему 7.7.

Теорема 8.6. *Если отображение* $f\colon (X, A) \to (P_0, P_0)$ *допустимо (т. е. пространство* X *стягиваемо, см. лемму 7.4) и подпространство* A *непусто, то для любой точки* $x \in A$ *гомологическая последовательность пары* (X, A) *разлагается в прямую сумму двух точных подпоследовательностей, из которых первая является приведенной гомологической последовательностью пары* (X, A) *(т. е. ядром гомоморфизма* f_{**}*), а вторая — изоморфным образом гомологической последовательности пары* (P_0, P_0) *при гомоморфизме* g_{**}, *индуцированном отображением* $g\colon (P_0, P_0) \to (X, A)$, *определенном формулой* $g(P_0) = x$.

Заметим, что отображение g допустимо, так как допустимо отображение $(P_0, P_0) \to (A, A) \to (X, A)$.

Так как композиция fg является тождественным отображением пары (P_0, P_0), то эта теорема является частным случаем следующей теоремы.

Теорема 8.7. *Пусть* $f\colon (X, A) \to (Y, B)$ *и* $g\colon (Y, B) \to (X, A)$ — *такие допустимые отображения, что* fg *является тождественным отображением пары* (Y, B). *Тогда гомологическая последовательность пары* (X, A) *разлагается в прямую сумму двух* *точных подпоследовательностей, из которых первая является ядром гомоморфизма f_{**}, а вторая — изоморфным образом гомологической последовательности пары (Y, B) при отображении g_{**}.*

Последняя теорема в свою очередь вытекает из следующего, чисто алгебраического предложения.

Лемма 8.8. *Пусть C, C' — две обратные последовательности и ψ: $C \to C'$; ψ': $C' \to C$ — такие гомоморфизмы, что композиция $\psi\psi'$: $C' \to C'$ является тождественным отображением. Тогда последовательность C разлагается в прямую сумму ядра гомоморфизма ψ и изоморфного образа последовательности C' при гомоморфизме ψ'. Если последовательность C точна, то последовательность C' и подпоследовательности, на которые разлагается последовательность C, также точны.*

Доказательство. Пусть $K = \operatorname{Ker} \psi$ и $L = \operatorname{Im} \psi'$. Так как композиция $\psi\psi'$ является тождественным отображением, то гомоморфизм ψ' изоморфно отображает последовательность C' на подпоследовательность L. Пусть $C = \{C_q, \varphi_q\}$, $C' = \{C_q, \varphi_q'\}$, $\psi = \{\psi_q\}$, где ψ_q: $C_q \to C_q'$ и $\psi' = \{\psi_q'\}$, где ψ_q': $C_q' \to C_q$. Для любого элемента $l \in L_q$ существует такой элемент $c' \in C_q'$, что $\psi_q'(c') = l$. Если $\psi_q(l) = 0$, то $\psi_q\ \psi_q(c') = c' = 0$ и, следовательно, $l = 0$. Таким образом, $K_q \cap L_q = 0$. Пусть $c \in C_q$ и пусть $l = \psi_q'\ \psi_q(c)$. Тогда $l \in L_q$ и $\psi_q(l) = \psi_q \psi_q' \psi_q(c) = \psi_q(c)$. Следовательно, элемент $k = c - l$ принадлежит группе K_q и $c = k + l$. Таким образом, $C_q = K_q + L_q$. Пусть теперь последовательность C точна. Тогда $\varphi_q\, \varphi_{q+1} = 0$ (т. е. $\varphi^2 = 0$). Следовательно, $(\varphi \mid K)^2 = 0 = (\varphi \mid L)^2$. Пусть, далее, $k \in K_q$ — такой элемент, что $\varphi(k) = 0$. Так как последовательность C точна, то существует такой элемент $c \in C_{q+1}$, что $\varphi(c) = k$. Пусть $c = k_1 + l_1$, где $k_1 \in K_{q+1}$ и $l_1 \in L_{q+1}$. Тогда $k = \varphi(k_1) + \varphi(l_1)$. Следовательно, элемент $\varphi(l_1) = k - \varphi(k_1)$ лежит как в K_q, так и в L_q. Поэтому $\varphi(l_1) = 0$ и $k = \varphi(k_1)$. Аналогично показывается, что если $\varphi(l) = 0$, где $l \in L_q$, то существует элемент $l_1 \in L_{q+1}$, для которого $\varphi(l_1) = l$. Таким образом, последовательности K и L точны. Так как $L \approx C'$, то последовательность C' также точна.

Лемма 8.1с. *Для любого пространства X и любого целого числа q группа $H^q(X, X)$ тривиальна.*

Теорема 8.2с. *Если пространство X стягиваемо, то группа G_A принадлежит ядру гомоморфизма δ: $H^0(A) \to H^1(X, A)$. Следовательно, гомоморфизм δ индуцирует некоторый гомоморфизм $\tilde{\delta}$: $\tilde{H}^0(A) \to H^1(X, A)$.*

Определение 8.3с. Пусть отображение f: $(X, A) \to (P_0, P_0)$ допустимо (т. е. пространство X стягиваемо). Тогда фактор-последовательность (определение см. § 2) когомологической последовательности пары (X, A) по образу гомоморфизма f^{**} называется *приведенной когомологической последовательностью пары* (X, A).

Теорема 8.4с. *Приведенная когомологическая последовательность пары (X, A) отличается от когомологической последователь-*

ности только в отрезке

$$H^0(X, A) \xrightarrow{j^*} H^0(X) \xrightarrow{i^*} H^0(A) \xrightarrow{\delta} H^1(X, A),$$

который при переходе к приведенной последовательности заменяется отрезком

$$H^0(X, A) \xrightarrow{\tilde{j}^*} \tilde{H}^0(X) \xrightarrow{\tilde{i}^*} \tilde{H}^0(A) \xrightarrow{\tilde{\delta}} H^1(X, A),$$

где $\tilde{j}^*$, $\tilde{i}^*$, $\tilde{\delta}$ — отображения, индуцированные гомоморфизмами j^*, i^* и δ соответственно.

Следствие 8.5с. *Для любого отображения f: $(X, A) \to (Y, B)$ гомоморфизм f^{**} индуцирует гомоморфизм приведенной когомологической последовательности пары (Y, B) в приведенную когомологическую последовательность пары (X, A).*

Теорема 8.6с. *Если отображение f: $(X, A) \to (P_0, P_0)$ допустимо, то для любой точки $x \in A$ когомологическая последовательность пары (X, A) разлагается в прямую сумму двух точных подпоследовательностей, из которых первая является изоморфным образом когомологической последовательности пары (P_0, P_0) при отображении f^{**}, а вторая — ядром гомоморфизма g^{**}, индуцированном отображением g: $(P_0, P_0) \to (X, A)$, определенным формулой $g(P_0) = x$. При естественном отображении когомологической последовательности пары (X, A) на фактор-последовательность по первой подпоследовательности вторая подпоследовательность изоморфно отображается на приведенную когомологическую последовательность пары (X, A). Следовательно, приведенная когомологическая последовательность пары (X, A) точна.*

Теорема 8.7с. *Пусть f: $(X, A) \to (Y, B)$ и g: $(Y, B) \to (X, A)$ — такие допустимые отображения, что fg является тождественным отображением пары (Y, B). Тогда когомологическая последовательность пары (X, A) разлагается в прямую сумму двух точных подпоследовательностей, из которых первая является ядром гомоморфизма g^{**}, а вторая — изоморфным образом когомологической последовательности пары (Y, B) при гомоморфизме f^{**}.*

Лемма 8.8с (*получается из леммы 8.8 заменой слова «обратная» на слово «прямая»*).

9. Гомологически тривиальные пространства

В этом пункте все пространства предполагаются стягиваемыми (см. определение 7.3). Тем не менее, результаты этого пункта справедливы и для нестягиваемых пространств, за исключением, быть может, результатов, относящихся к размерностям 0 и 1.

Определение 9.1. Пространство X называется *гомологически тривиальным*, если $H_q(X) = 0$, когда $q \neq 0$ и $\tilde{H}_0(X) = 0$. Пара (X, A) с непустым A называется *гомологически тривиальной*, если $H_q(X, A) = 0$ для всех q.

Особая роль случая $q = 0$ в этом определении объясняется теоремой 7.6, согласно которой группа $H_0(X)$ отлична от нуля для любого непустого пространства X (если только группа коэффициентов нетривиальна).

Теорема 9.2. *Если пара (X, A) с непустым A гомологически тривиальна, то отображение вложения i: $(A, \varnothing) \to (X, \varnothing)$ индуцирует изоморфизмы*

$$i_*: H_q(A) \approx H_q(X) \quad \text{для всех } q,$$
$$\tilde{i}_*: \tilde{H}_0(A) \approx \tilde{H}_0(X).$$

Обратно, если эти отображения являются изоморфизмами, то пара (X, A) гомологически тривиальна.

Теорема 9.3. *Если подпространство A пространства X гомологически тривиально и непусто, то отображение вложения j: $(X, \varnothing) \to (X, A)$ индуцирует изоморфизмы*

$$j_*: H_q(X) \approx H_q(X, A) \quad \text{для } q \neq 0,$$
$$\tilde{j}_*: \tilde{H}_0(X) \approx H_0(X, A).$$

Обратно, если эти отображения являются изоморфизмами, то подпространство A гомологически тривиально.

Теорема 9.4. *Если пространство X гомологически тривиально, то для любого его непустого подпространства A граничный оператор пары (X, A) является изоморфизмом:*

$$\partial: H_q(X, A) \approx H_{q-1}(A) \quad \text{для } q \neq 1,$$
$$\tilde{\partial}: H_1(X, A) \approx \tilde{H}_0(A).$$

Обратно, если граничный оператор является изоморфизмом[1]*, то пространство X гомологически тривиально.*

Следствие 9.5. *Пара (X, A) гомологически тривиальна, если гомологически тривиальны пространства X и A.*

Эти теоремы вытекают из следующих двух алгебраических предложений.

Лемма 9.6. *Если для некоторого q в точной обратной последовательности $C = \{C_q, \varphi_q\}$ группы C_q и C_{q+3} тривиальны, то φ_{q+2}: $C_{q+2} \approx C_{q+1}$.*

Доказательство. Так как $C_{q+3} = 0$, то $\operatorname{Im} \varphi_{q+3} = \operatorname{Ker} \varphi_{q+2} = 0$. Так как $C_q = 0$, то $\operatorname{Im} \varphi_{q+1} = 0$. Следовательно, $C_{q+1} = \operatorname{Ker} \varphi_{q+1} = \operatorname{Im} \varphi_{q+2}$.

Лемма 9.7. *Если для некоторого q в точной обратной последовательности $C = \{C_q, \varphi_q\}$ гомоморфизмы φ_{q+2}: $C_{q+2} \approx C_{q+1}$ и φ_{q-1}: $C_{q-1} \approx C_{q-2}$ являются изоморфизмами, то $C_q = 0$.*

---

[1] Хотя бы для одного подпространства A. (*Прим. ред.*)

Доказательство. Так как $\operatorname{Ker} \varphi_{q-1} = 0$, то $\operatorname{Im} \varphi_q = 0$. Следовательно, $C_q = \operatorname{Ker} \varphi_q = \operatorname{Im} \varphi_{q+1}$. Кроме того, $\operatorname{Ker} \varphi_{q+1} = \operatorname{Im} \varphi_{q+2} = C_{q+1}$. Поэтому $C_q = \operatorname{Im} \varphi_{q+1}$.

Доказательства теорем 9.2, 9.3 и 9.4. Условия теоремы 9.2 означают, что каждый третий член гомологической последовательности пары (X, A) равен нулю (т. е. $H_q(X, A) = 0$). Ввиду точности гомологической последовательности отсюда и из леммы 9.6 следует, что отображения этой последовательности, попарно связывающие остающиеся члены, являются изоморфизмами. Обращение теоремы 9.2 вытекает из леммы 9.7. Теоремы 9.3 и 9.4 доказываются аналогично, но с заменой гомологической последовательности пары (X, A) ее приведенной гомологической последовательностью.

Определение 9.1с. Пространство X называется *когомологически тривиальным*, если $H^q(X) = 0$, когда $q \neq 0$ и $\tilde{H}^0(X) = 0$. Пара (X, A) с непустым A называется *когомологически тривиальной*, если $H^q(X, A) = 0$ для всех q.

Теорема 9.2с. *Если пара (X, A) с непустым A когомологически тривиальна, то отображение i^*: $H^q(X) \to H^q(A)$ для всех q является изоморфизмом. Обратно, если эти отображения являются изоморфизмами, то пара (X, A) когомологически тривиальна.*

Теорема 9.3с. *Если подпространство A пространства X когомологически тривиально и непусто, то*

$$j^*: H^q(X, A) \approx H^q(X) \quad \text{для } q \neq 0,$$

$$\tilde{j}^*: H^0(X, A) \approx \tilde{H}^0(X).$$

Обратно, из этих соотношений следует, что подпространство A когомологически тривиально.

Теорема 9.4с. *Если пространство X когомологически тривиально, то для любого его непустого подпространства A*

$$\delta: H^{q-1}(A) = H^q(X, A) \quad \text{для } q \neq 1,$$

$$\tilde{\delta}: \tilde{H}^0(A) = H^1(X, A).$$

Обратно, из этих соотношений следует, что пространство X когомологически тривиально.

Следствие 9.5с. *Пара (X, A) когомологически тривиальна, если когомологически тривиальны пространства X и A.*

10. Гомологическая последовательность тройки (X, A, B)

Пусть $X \supset A \supset B$ и пусть отображения вложения

$$\bar{i}: (A, B) \subset (X, B), \qquad \bar{j}: (X, B) \subset (X, A)$$

допустимы. Тогда (X, A, B) называется допустимой *тройкой*. Отображения вложения и граничные операторы, соответствующие парам (X, A), (X, B) и (A, B), обозначаются следующим образом:

$$\begin{array}{lll} i\colon\ A \to X, & j\colon\ X \to (X, A), & \partial\colon\ H_q(X, A) \to H_{q-1}(A), \\ i'\colon\ B \to X, & j'\colon\ X \to (X, B), & \partial'\colon\ H_q(X, B) \to H_{q-1}(B), \\ i''\colon\ B \to A, & j''\colon\ A \to (A, B), & \partial''\colon\ H_q(A, B) \to H_{q-1}(B). \end{array}$$

Сравнение этих отображений с отображениями $\bar{i}$ и $\bar{j}$ наводит на мысль рассмотреть отображение $\bar{\partial} = j''_*\partial$.

Определение 10.1. Отображение

$$\bar{\partial}\colon\ H_q(X, A) \to H_{q-1}(A, B)$$

называется *граничным оператором тройки* (X, A, B). Обратная последовательность групп

$$\ldots \leftarrow H_{q-1}(A, B) \xleftarrow{\bar{\partial}} H_q(X, A) \xleftarrow{\bar{j}_*} H_q(X, B) \xleftarrow{\bar{i}_*} H_q(A, B) \leftarrow \ldots$$

называется *гомологической последовательностью* тройки (X, A, B). Группы этой последовательности нумеруются так, чтобы номер 0 имела группа $H_0(X, A)$.

Теорема 10.2. *Гомологическая последовательность тройки точна.*

Доказательство этой теоремы является длинным и сложным упражнением на применение аксиом 1, 2, 3 и 4. Читатель может опустить это доказательство, если он готов принять теорему 10.2 в качестве аксиомы вместо аксиомы точности, к которой она сводится в случае $B = \varnothing$.

Доказательство. Рассмотрение нижеследующей диаграммы поможет читателю проследить доказательство

$$\begin{tikzcd}
H_q(A) \arrow[r, "i_*"] \arrow[d, "j''_*"] & H_q(X) \arrow[d, "j'_*"] & & \\
H_q(A, B) \arrow[r, "\bar{i}_*"] & H_q(X, B) \arrow[r, "\bar{j}_*"] \arrow[d, "\partial'"] & H_q(X, A) \arrow[d, "\partial"] & \\
& H_{q-1}(B) \arrow[r, "i''_*"] & H_{q-1}(A) \arrow[r, "i_*"] \arrow[d, "j''_*"] & H_{q-1}(X) \arrow[d, "j'_*"] \\
& & H_{q-1}(A, B) \arrow[r, "\bar{i}_*"] & H_{q-1}(X, B).
\end{tikzcd}$$

Соотношения коммутативности имеют место в каждом квадрате этой диаграммы. Кроме гомоморфизмов, указанных в диаграмме, мы будем также рассматривать гомоморфизмы

$$j_* = \bar{j}_* j'_*, \qquad i'_* = i_* i''_*, \qquad \partial'' = \partial' \bar{i}_*, \qquad \bar{\partial} = j''_* \partial.$$

Доказательство теоремы распадается на доказательства следующих шести предложений:

(1) $\qquad \bar{j}_* \bar{\bar{i}}_* = 0.$

(2) $\qquad \bar{\partial} \bar{j}_* = 0.$

(3) $\qquad \bar{i}_* \bar{\partial} = 0.$

(4) Для любого элемента $x \in H_q(X, B)$, для которого $\bar{j}_* x = 0$, существует такой элемент $x' \in H_q(A, B)$, что $\bar{i}_* x' = x$.

(5) Для любого элемента $y \in H_q(X, A)$, для которого $\bar{\partial} y = 0$, существует такой элемент $y' \in H_q(X, B)$, что $\bar{j}_* y' = y$.

(6) Для любого элемента $z \in H_{q-1}(A, B)$, для которого $\bar{i}_* z = 0$, существует такой элемент $z' \in H_q(X, A)$, что $\bar{\partial} z' = z$.

Доказательство предложения (1). Отображение $\bar{j}\bar{i}$: $(A, B) \to (X, A)$ можно рассматривать как композицию отображений вложения k: $(A, B) \subset (A, A)$ и l: $(A, A) \subset (X; A)$. Согласно лемме 8.1 группа $H_q(A, A)$ тривиальна. Следовательно, $k_* = 0$. Таким образом, $\bar{j}_* \bar{i}_* = (\bar{j}\bar{i})_* = (lk)_* = l_* k_* = 0$.

Доказательство предложения (2). Имеем $\bar{\partial}\bar{j}_* = j''_* \partial \bar{j}_* = j''_* i''_* \partial'$. Остается заметить, что так как гомологическая последовательность пары (A, B) точна, то $j''_* i''_* = 0$.

Доказательство предложения (3). Имеем $\bar{i}_* \bar{\partial} = \bar{i}_* j''_* \partial = j'_* i_* \partial$. Остается заметить, что так как гомологическая последовательность пары (X, A) точна, то $i_* \partial = 0$.

Доказательство предложения (4). Так как $\bar{j}_* x = 0$, то

$$i''_* \partial' x = \partial \bar{j}_* x = 0.$$

Из точности гомологической последовательности пары (A, B) следует, что элемент $\partial' x$ ядра отображения i''_* является образом некоторого элемента $x_1 \in H_q(A, B)$

$$\partial'' x_1 = \partial' x.$$

Следовательно,

$$\partial'(x - \bar{i}_* x_1) = \partial' x - \partial' \bar{i}_* x_1 = \partial' x - \partial'' x_1 = 0.$$

Из точности гомологической последовательности пары (X, B) сле дует, что элемент $x - \bar{i}_* x_1$ ядра отображения ∂' является образом некоторого элемента $u \in H_q(X)$

$$j'_* u = x - \bar{i}_* x_1.$$

Следовательно, согласно условию и предложению (1)

$$j_* u = \bar{j}_* j'_* u = \bar{j}_*(x - \bar{i}_* x_1) = \bar{j}_* x - \bar{j}_* \bar{i}_* x_1 = 0.$$

Из точности гомотопической последовательности пары (X, A) следует, что элемент u ядра отображения j_* является образом некоторого элемента $v \in H_q(A)$

$$i_* v = u.$$

Положим

$$x' = x_1 + j''_* v.$$

Тогда

$$\bar{i}_* x' = \bar{i}_* x_1 + \bar{i}_* j''_* v = \bar{i}_* x_1 + j'_* i_* v = \bar{i}_* x_1 + j'_* u = \bar{i}_* x_1 + x - \bar{i}_* x_1 = x$$

Доказательство предложения (5). Так как

$$j''_* \partial y = \bar{\partial} y = 0,$$

то ввиду точности гомологической последовательности пары (A, B) элемент ∂y ядра отображения j''_* является образом некоторого элемента $u \in H_{q-1}(B)$

$$i''_* u = \partial y.$$

Из точности гомологической последовательности пары (X, A) следует, что $i_* \partial = 0$. Поэтому

$$i'_* u = i_* i''_* u = i_* \partial y = 0.$$

Из точности гомологической последовательности пары (X, B) следует, что элемент u ядра отображения i'_* является образом некоторого элемента $y_1 \in H_q(X, B)$

$$\partial' y_1 = u.$$

Следовательно,

$$\partial(y - \bar{j}_* y_1) = \partial y - \partial \bar{j}_* y_1 = \partial y - i''_* \partial' y_1 = \partial y - i''_* u = 0.$$

Из точности гомологической последовательности пары (X, A) следует, что элемент $y - \bar{j}_* y_1$ ядра отображения ∂ является образом некоторого элемента $v \in H_q X$

$$j_* v = y - \bar{j}_* y_1.$$

Положим

$$y' = y_1 + j'_* v.$$

Тогда

$$\bar{j}_* y' = \bar{j}_* y_1 + \bar{j}_* j'_* v = \bar{j}_* y_1 + j_* v = \bar{j}_* y_1 + y - \bar{j}_* y_1 = y.$$

Доказательство предложения (6). Так как $\bar{i}z = 0$, то

$$\partial'' z = \partial' \bar{i}_* z = 0.$$

Из точности гомологической последовательности пары (A, B) следует, что элемент z ядра отображения ∂'' является образом некоторого элемента $u \in H_{q-1}(A)$

$$j''_* u = z.$$

Следовательно,

$$j'_* i_* u = \bar{i}_* j''_* u = \bar{i}_* z = 0.$$

Из точности гомологической последовательности пары (X, B) следует, что элемент $i_* u$ ядра отображения j'_* является образом некоторого элемента $v \in H_{q-1}(B)$

$$i'_* v = i_* u.$$

Так как $i_* i''_* = i'_*$, то

$$i_*(u - i''_* v) = i_* u - i_* i''_* v = i_* u - i'_* v = 0.$$

Из точности гомологической последовательности пары (X, A) следует, что элемент $u - i''_* v$ ядра отображения i_* является образом некоторого элемента $z' \in H_q(X, A)$

$$\partial z' = u - i''_* v.$$

Следовательно,

$$\bar{\partial} z' = j''_* \partial z' = j''_*(u - i''_* v) = j''_* u - j''_* i''_* v = j''_* u = z.$$

Тем самым теорема полностью доказана.

Отображением f: $(X_1, A_1, B_1) \to (X, A, B)$ одной тройки в другую называется отображение пространства X_1 в пространство X, которое переводит A_1 в A и B_1 в B. Отображение f определяет отображения

$$f_1\colon (X_1, A_1) \to (X, A), \quad f_2\colon (A_1, B_1) \to (A, B), \quad f_3\colon (X_1, B_1) \to (X, B).$$

Отображение f называется *допустимым*, если допустимы отображения f_1, f_2 и f_3. В этом случае индуцированные гомоморфизмы f_{1*}, f_{2*} и f_{3*} отображают группы гомологической последовательности тройки (X_1, A_1, B_1) в группы гомологической последовательности тройки (X, A, B).

Теорема 10.3. *Отображение* f: $(X_1, A_1, B_1) \to (X, A, B)$ *индуцирует гомоморфизм гомологической последовательности тройки* (X_1, A_1, B_1) *в гомологическую последовательность тройки* (X, A, B).

Доказательство сводится к проверке трех соотношений коммутативности. Мы оставляем эту проверку читателю в качестве упражнения.

Теорема 10.4. *Если подпространство B непусто и одна из трех пар (X, A), (X, B), (A, B) гомологически тривиальна, то группы гомологий остальных двух пар изоморфны друг другу посредством отображений гомологической последовательности тройки (X, A, B). Более точно:*

(1) *Если $H_q(X, A) = 0$ для всех q, то $\bar{i}_*$: $H_q(A, B) \approx H_q(X, B)$ для любого q.*

(2) *Если $H_q(X, B) = 0$ для всех q, то $\bar{\partial}$: $H_q(X, A) \approx H_{q-1}(A, B)$ для любого q.*

(3) *Если $H_q(A, B) = 0$ для всех q, то $\bar{j}_*$: $H_q(X, B) \approx H_q(X, A)$ для любого q.*

Обратно, если для всех q гомоморфизм i_* (соответственно гомоморфизмы $\bar{\partial}$ и j_*) является изоморфизмом, то $H_q(X, A) = 0$ (соответственно $H_q(X, B) = 0$ и $H_q(A, B) = 0$) для любого q.

С точностью до обозначений доказательсто этой теоремы совпадает с доказательством теоремы 9.2.

Теорема 10.5. *Пусть (X, A, B) — произвольная допустимая тройка. Если вложение $B \subset A$ для всех значений q индуцирует изоморфизм $H_q(B) \approx H_q(A)$, то вложение $(X, B) \subset (X, A)$ также индуцирует изоморфизм $H_q(X, B) \approx H_q(X, A)$ для всех q. Аналогично, если вложение $A \subset X$ для всех q индуцирует изоморфизм $H_q(A) \approx H_q(X)$, то вложение $(A, B) \subset (X, B)$ индуцирует изоморфизм $H_q(A, B) \approx H_q(X, B)$ для всех q.*

Доказательство. Что касается первого утверждения, то из условий теоремы и из точности гомологической последовательности пары (A, B) следует, что $H_q(A, B) = 0$ для всех q. Утверждение теоремы вытекает поэтому из теоремы 10.4.

Другое доказательство можно получить, применив теорему 4.2 к отображению вложения $(X, B) \subset (X, A)$.

Вторая часть теоремы доказывается аналогично.

Определение 10.1с. Гомоморфизм $\bar{\delta} = \delta j_*''$

$$\bar{\delta} \quad H^{q-1}(A, B) \to H^q(X, A)$$

называется *кограничным оператором тройки* (X, A, B). Прямая последовательность групп

$$\ldots \to H^{q-1}(A, B) \xrightarrow{\delta} H^q(X, A) \xrightarrow{j^*} H^q(X, B) \xrightarrow{i^*} H^q(A, B) \to \ldots$$

называется *когомологической последовательностью тройки* (X, A, B).

Теорема 10.2с. *Когомологическая последовательность тройки точна.*

Теорема 10.3с. *Любое отображение* $f: (X_1, A_1, B_1) \to (X, A, B)$ *индуцирует гомоморфизм когомологической последовательности тройки* (X, A, B) *в когомологическую последовательность тройки* (X_1, A_1, B_1).

Теорема 10.4с. *Если подпространство* B *непусто и одна из пар* (X, A), (X, B) *и* (A, B) *когомологически тривиальна, то группы когомологий остальных двух пар изоморфны друг другу посредством отображений когомологической последовательности тройки* (X, A, B).

Теорема 10.5с. *Пусть* (X, A, B) — *произвольная допустимая тройка. Если вложение* $B \subset A$ *для всех* q *индуцирует изоморфизм* $H^q(A) \approx H^q(B)$, *то вложение* $(X, B) \subset (X, A)$ *для всех* q *индуцирует изоморфизм* $H^q(X, A) \approx H^q(X, B)$. *Аналогично, если вложение* $A \subset X$ *для всех* q *индуцирует изоморфизм* $H^q(X) \approx H^q(A)$, *то вложение* $(A, B) \subseteq (X, B)$ *индуцирует изоморфизм* $H^q(X, B) \approx H^q(A, B)$.

11. Гомотопическая эквивалентность и стягиваемость по себе в точку

В этом пункте используется в основном только аксиома гомотопии. Предполагается, что все рассматриваемые пары, отображения и гомотопии принадлежат некоторой допустимой категории $\mathfrak{A}$.

Определение 11.1. Пары (X, A) и (Y, B) называются *гомотопически эквивалентными* (в категории $\mathfrak{A}$), если существуют такие два отображения

$$f: (X, A) \to (Y, B),$$
$$g: (Y, B) \to (X, A),$$

что отображение gf гомотопно тождественному отображению пары (X, A), а отображение fg гомотопно тождественному отображению пары (Y, B). Пара отображений f, g, удовлетворяющая этому условию, называется *гомотопической эквивалентностью*. Часто гомотопической эквивалентностью называют также каждое из отображений f и g.

Теорема 11.2. *Гомотопическая эквивалентность f индуцирует для любого q изоморфизм f_*: $H_q(X, A) \approx H_q(Y, B)$, причем $(f_*)^{-1} = g_*$.*

Доказательство. Так как отображение gf гомотопно тождественному отображению, то из аксиом гомотопии следует, что гомоморфизм $(gf)_* = g_* f_*$ является тождественным отображением. Аналогично гомоморфизм $f_* g_*$ также является тождественным отображением. Таким образом, отображение f_* имеет обратное отображение g_*.

Теорема 11.3. *Гомотопическая эквивалентность индуцирует изоморфизм гомологической и приведенной гомологической последовательностей пары (X, A) на соответствующие последовательности пары (Y, B).*

Доказательство. Гомотопическая эквивалентность f, g пар (X, A) и (Y, B) определяет гомотопическую эквивалентность пространств X и Y и подпространств A и B. Следовательно, согласно теореме 11.2 отображение f индуцирует изоморфизм гомологической последовательности пары (X, A), а отображение g индуцирует обратный изоморфизм. Утверждение относительно приведенной гомологической последовательности следует теперь из теоремы 7.7.

Лемма 11.4. *Стягиваемое по себе в точку*[1]) *пространство X гомотопически эквивалентно точке.*

Доказательство. Пусть $h(x, t)$ — такая гомотопия h: $X \times I \to X$, что $h(x, 0) = x$ и $h(x, 1) = x_0$ для любой точки $x \in X$. Пусть, далее f: $X \to (x_0)$[2]) и пусть отображение g: $(x_0) \to X$ определено формулой $g(x_0) = x_0$. Тогда отображение fg является тождественным отображением пространства (x_0), а гомотопия h связывает отображение gf с тождественным отображением пространства X. Таким образом, отображения f и g составляют гомотопическую эквивалентность.

Теорема 11.5. *Любое стягиваемое по себе в точку пространство гомологически тривиально.*

Доказательство. Ввиду теорем 11.3 и 11.4 достаточно доказать, что пространство, состоящее из одной точки P, гомологически тривиально. Согласно теореме 7.5 имеем $\tilde{H}_0(P) = 0$, а согласно аксиоме размерности $H_q(P) = 0$ для всех $q \neq 0$. Таким образом, точка P действительно является гомологически тривиальным пространством.

Определение 11.6. Пара (X', A'), содержащаяся в паре (X, A), называется *ретрактом* пары (X, A), если существует такое отображение f: $(X, A) \to (X', A')$, что $f(x) = x$ для всех $x \in X'$.

---

[1]) Пространство X называется *стягиваемым по себе в точку* $x_0 \in X$, если существует гомотопия h: $X \times I \to X$, обладающая указанным в доказательстве леммы свойством. (*Прим. ред.*)

[2]) Через (x_0) авторы обозначают пространство, состоящее из точки x_0. (*Прим. ред.*)

Ретракт (X', A') называется *деформационным ретрактом* пары (X, A), если композиция ретрагирующего отображения f и отображения вложения $(X', A') \subset (X, A)$ гомотопна тождественному отображению пары (X, A). Если соответствующая гомотопия оставляет неподвижными все точки пространства X', т. е. если $h(x, t) = x$ для всех $x \in X'$ и всех t, то пара (X', A') называется *строгим деформационным ретрактом* пары (X, A). (Эти определения зависят от категории $\mathfrak{A}$, так как все отображения должны принадлежать этой категории.)

Лемма 11.7. *Для любого деформационного ретракта (X', A') пары (X, A) отображение вложения g: $(X', A') \subset (X, A)$ и ретрагирующее отображение f составляют гомотопическую эквивалентность пар (X, A) и (X', A').*

Действительно, по определению деформационного ретракта отображение gf гомотопно тождественному отображению, а отображение fg само является тождественным отображением.

Теорема 11.8. *Для любого деформационного ретракта (X', A') пары (X, A) отображение вложения $(X', A') \subset (X, A)$ индуцирует изоморфизм гомологической последовательности пары (X', A') на гомологическую последовательность пары (X, A).*

Немедленно следует из теорем 11.7 и 11.3.

Теорема 11.2с. *Гомотопическая эквивалентность f индуцирует для любого q изоморфизм f^*: $H^q(Y, B) \approx H^q(X, A)$, причем $(f^*)^{-1} = g^*$.*

Теорема 11.3с. *Гомотопическая эквивалентность индуцирует изоморфизмы когомологической и приведенной когомологической последовательностей пары (Y, B) на соответствующие последовательности пары (X, A).*

Теорема 11.5с. *Любое стягиваемое по себе в точку пространство когомологически тривиально.*

Теорема 11.8с. *Для любого деформационного ретракта (X', A') пары (X, A) отображение вложения $(X', A') \subset (X, A)$ индуцирует изоморфизм гомологической последовательности пары (X, A) на когомологическую последовательность пары (X', A').*

12. Вырезание

Аксиома вырезания утверждает, что отображение вырезания индуцирует изоморфизм групп гомологий. Если условие $\overline{U} \subset \operatorname{Int} A$ для отображения вырезания ослабить до условия $U \subset A$, то соответствующее отображение групп гомологий, вообще говоря, не будет изоморфизмом. Однако в некоторых часто встречающихся случаях это отображение все же является изоморфизмом. Мы рассмотрим здесь два таких случая. Полное исследование возможных усилений теоремы вырезания будет произведено в пункте X. 5.

Теорема 12.1. *Пусть (X, A) — произвольная пара и U, V — такие открытые подмножества пространства X, что $\overline{V} \subset U \subset A$, а отображения вложения*

$$(X \setminus U, A \setminus U) \xrightarrow{f} (X \setminus V, A \setminus V) \xrightarrow{g} (X, A)$$

допустимы. Тогда если пара $(X \setminus U, A \setminus U)$ является деформационным ретрактом пары $(X \setminus V, A \setminus V)$, то отображение вложения gf индуцирует во всех размерностях изоморфизмы групп гомологий.

Доказательство. Так как g — отображение вырезания, то g_* — изоморфизм. Согласно теореме 11.8 отображение f_* также является изоморфизмом. Следовательно, отображение $(gf)_* = g_* f_*$ изоморфно.

Теорема 12.2. *Пусть (X, A) — произвольная пара, а U — содержащееся в A открытое подмножество пространства X. Тогда, если существует такое подмножество B пространства X, содержащее A, что (1) отображения вложения*

$$\begin{tikzcd}
(X \setminus U, A \setminus U) \arrow[r, "f"] \arrow[d, "l"] & (X, A) \arrow[d, "k"] \\
(X \setminus U, B \setminus U) \arrow[r, "m"] & (X, B)
\end{tikzcd}$$

допустимы, (2) $\overline{U} \subset \operatorname{Int} B$, (3) A является деформационным ретрактом множества B и (4) $A \setminus U$ является деформационным ретрактом множества $B \setminus U$, то отображение f индуцирует во всех размерностях изоморфизмы групп гомологий.

Доказательство. Из аксиомы вырезания и условия (2) следует, что отображение m_* является изоморфизмом. Из условий (3), (4) и теоремы 11.8 вытекает, что отображения вложения индуцируют изоморфизмы $H_q(A) \approx H_q(B)$ и $H_q(A \setminus U) \approx H_q(B \setminus U)$. Следовательно, согласно теореме 10.5 отображения l_* и k_* являются изоморфизмами. Поэтому отображение $f_* = k_*^{-1} m_* l_*$ также будет изоморфизмом.

Отметим, что если $A \setminus U$ является *строгим* деформационным ретрактом множества $B \setminus U$, то гомотопию

$$h\colon (B \setminus U) \times I \to A \setminus U$$

можно, полагая $h(x, t) = x$, если $x \in U$, продолжить до гомотопии $B \times I \to A$. Если продолженная гомотопия допустима, то подпространство A будет строгим деформационным ретрактом подпространства B. Как правило, теорема 12.2 применяется именно в этом случае.

Все теоремы этого пункта сохраняют силу при замене гомологий на когомологии.

13. Теорема о прямой сумме

Лемма 13.1. *Пусть в диаграмме*

$$\begin{tikzcd}
G_1' & & G_2' \\
& G \arrow[ul, "j_1"'] \arrow[ur, "j_2"] & \\
G_2 \arrow[uu, "k_1"] \arrow[ur, "i_2"] & & G_1 \arrow[uu, "k_2"'] \arrow[ul, "i_1"']
\end{tikzcd}$$

отображения k_1, k_2 *являются изоморфизмами,* $\operatorname{Im} i_\alpha = \operatorname{Ker} j_\alpha$ $(\alpha = 1, 2)$ *и во всех треугольниках выполнены условия коммутативности. Тогда отображения* i_1, i_2 *являются компонентами инъективного представления* i: $G_1 + G_2 \approx G$, *а* j_1, j_2 — *компонентами проективного представления* j: $G \approx G_1' + G_2'$ *группы* G *в виде прямой суммы.*

Доказательство. Так как отображение $j_1 i_2 = k_1$ является изоморфизмом, то отображение j_1 изоморфно на образе отображения i_2. Поэтому $\operatorname{Ker} j_1 \cap \operatorname{Im} i_2 = 0$. Так как $\operatorname{Im} i_2 = \operatorname{Ker} j_2$, то, следовательно,

$$\operatorname{Ker} j_1 \cap \operatorname{Ker} j_2 = 0. \tag{1}$$

Для любого элемента $g \in G$ положим $\bar{g} = i_1 k_2^{-1} j_2 g + i_2 k_1^{-1} j_1 g$. Тогда $j_1 \bar{g} = j_1 i_2 k_1^{-1} j_1 g = k_1 k_1^{-1} j_1 g = j_1 g$ и аналогично $j_2 \bar{g} = j_2 g$. Следовательно, ввиду формулы (1) $\bar{g} = g$. Это доказывает, что любой элемент g можно представить в виде $g = i_1 g_1 + i_2 g_2$. Для любого такого представления имеем $j_2 g = j_2 i_1 g_1 + j_2 i_2 g_2 = k_2 g_1$, так что $g_1 = k_2^{-1} j_2 g$. Аналогично $g_2 = k_1^{-1} j_1 g$. Следовательно, такое представление элемента g единственно.

Для доказательства второго утверждения рассмотрим элементы $g_1' \in G_1'$, $g_2' \in G_2'$ и $g = i_2 k_1^{-1} g_1' + i_1 k_2^{-1} g_2'$. Тогда $j_1 g = j_1 i_2 k_1^{-1} g_1' = k_1 k_1^{-1} g_1' = g_1'$ и аналогично $j_2 g = g_2'$. Таким образом, для любых элементов $g_\alpha' \in G_\alpha'$ $(\alpha = 1, 2)$ существует такой элемент $g \in G$, что $j_\alpha g = g_\alpha'$ $(\alpha = 1, 2)$. Единственность элемента g непосредственно следует из формулы (1).

Замечание. Изложенное выше доказательство сохраняется, если заменить условие $\operatorname{Im} i_1 = \operatorname{Ker} j_1$ условием $\operatorname{Im} i_1 \subset \operatorname{Ker} j_1$. Это формально более слабое условие на самом деле равносильно первоначальному.

Теорема 13.2. *Пусть пространство* X *является объединением* $X_1 \cup \ldots \cup X_n$ *непересекающихся множеств, каждое из которых замкнуто (а потому открыто) в пространстве* X. *Пусть, далее,* $A_i \subset X_i$ *и* $A = A_1 \cup \ldots \cup A_n$. *Предположим, что все пары,* *образованные множествами X_i, A_i и их объединениями, а также все отображения вложения этих пар допустимы. Тогда гомоморфизмы $i_{\alpha *}\colon H_q(X_\alpha, A_\alpha) \to H_q(X, A)$, где $i_\alpha\colon (X_\alpha, A_\alpha) \subset (X, A)$ $(\alpha = 1, \ldots, n)$ образуют инъективное представление группы $H_q(X, A)$ в виде прямой суммы, т. е. каждый элемент u группы $H_q(X, A)$ можно единственным образом записать в виде $u = \sum\limits_\alpha i_{\alpha *} u_\alpha$, где $u_\alpha \in H_q(X_\alpha, A_\alpha)$.*

Доказательство. Теорема тривиальна для $n = 1$. Предположим, что она справедлива для $n - 1$. Полагая $X' = X_1 \cup \ldots \cup X_{n-1}$ и $A' = A_1 \cup \ldots \cup A_{n-1}$, рассмотрим диаграмму

$$\begin{tikzcd}
(X, X_n \cup A) & & (X, X' \cup A_n) \\
& (X, A) \arrow[ul, "j_n"'] \arrow[ur, "j'"] & \\
(X' \cup A_n, A) \arrow[uu, "k'"] \arrow[ur, "l'"] & & (X_n \cup A, A) \arrow[uu, "k_n"'] \arrow[ul, "l_n"'] \\
(X', A') \arrow[u, "h'"] & & (X_n, A_n) \arrow[u, "h_n"']
\end{tikzcd}$$

отображениями которой являются отображения вложения. Отображения h_n, k_n, h', k' являются вырезаниями, а поэтому гомоморфизмы h_{n*}, k_{n*}, h'_*, k'_* — изоморфизмами. Далее, из точности гомологических последовательностей троек $(X, X' \cup A_n, A)$ и $(X, X_n \cup A, A)$ следует, что

$$\operatorname{Ker} j'_* = \operatorname{Im} l'_*, \quad \operatorname{Ker} j_{n*} = \operatorname{Im} l_{n*}.$$

Таким образом, условия леммы 13.1 выполнены и, следовательно, гомоморфизмы l'_* и l_{n*} образуют инъективное представление группы $H_q(X, A)$ в виде прямой суммы. Поэтому гомоморфизмы i'_* и i_{n*}, где $i'\colon (X', A') \subset (X, A)$, также образуют представление группы $H_q(X, A)$ в виде прямой суммы. По предположению индукции отображения $i'_{\alpha *}\colon H_q(X_\alpha, A_\alpha) \to H_q(X', A')$, где $i'_\alpha\colon (X_\alpha, A_\alpha) \subset \subset (X', A')$ $(\alpha = 1, \ldots, n-1)$, образуют инъективное представление группы $H_q(X', A')$ в виде прямой суммы. Так как $i_{\alpha *} = i'_* i'_{\alpha *}$ для $\alpha = 1, \ldots, n-1$, то следовательно, гомоморфизмы $i_{\alpha *}$ $(\alpha = 1, \ldots, n)$ образуют инъективное представление группы $H_q(X, A)$ в виде прямой суммы.

Теорема 13.2с. *В условиях теоремы 13.2 гомоморфизмы $i^*_\alpha\colon H^q(X, A) \to H^q(X_\alpha, A_\alpha)$ образуют проективное представление группы $H^q(X, A)$ в виде прямой суммы, т. е. любой последовательности элементов $u_\alpha \in H^q(X_\alpha, A_\alpha)$ $(\alpha = 1, \ldots, n)$ отвечает единственный элемент $u \in H^q(X, A)$, для которого $i^*_\alpha u = u_\alpha$ $(\alpha = 1, \ldots, n)$.*

14. Триады

Определение 14.1. *Триада* $(X; X_1, X_2)$ состоит, по определению, из пространства X и двух таких его подпространств X_1 и X_2, что пространства $X, X_1, X_2, X_1 \cup X_2, X_1 \cap X_2$ и все составленные из них пары, а также все соответствующие этим парам отображения вложения допустимы. Триада $(X; X_1, X_2)$ называется *собственной*, если отображения вложения

$$k_2\colon (X_1, X_1 \cap X_2) \subset (X_1 \cup X_2, X_2),$$
$$k_1\colon (X_2, X_1 \cap X_2) \subset (X_1 \cup X_2, X_1)$$

индуцируют во всех размерностях изоморфизмы групп гомологий Заметим, что за исключением случая, когда $X_1 = X_2$, триады $(X; X_2, X_1)$ и $(X; X_1, X_2)$ считаются различными.

Условия, определяющие собственную триаду, зависят от рассматриваемой теории гомологий. Однако, если

$$X_1 = \overline{X_1}, \quad X_2 = \overline{X_2}, \quad \overline{X_1 \setminus (X_1 \cap X_2)} \cap \overline{X_2 \setminus (X_1 \cap X_2)} = \varnothing,$$

где замыкание берется в $X_1 \cup X_2$, то отображения k_1 и k_2 являются вырезаниями и, следовательно, согласно аксиоме вырезания триада будет собственной относительно любой теории гомологий. Более слабые условия независимости от теории гомологий можно получить на основе результатов пункта 12.

Заметим, что для любой собственной триады $(X; X_1, X_2)$ триада $(X_1 \cup X_2; X_1, X_2)$ также является собственной триадой.

Теорема 14.2. *Триада $(X; X_1, X_2)$ тогда и только тогда является собственной триадой, когда отображения вложения $i_\alpha\colon (X_\alpha, X_1 \cap X_2) \to (X_1 \cup X_2, X_1 \cap X_2)$ определяют для любого q инъективное представление группы $H_q(X_1 \cup X_2, X_1 \cap X_2)$ в виде прямой суммы, т. е. когда любой элемент $u \in H_q(X_1 \cup X_2, X_1 \cap X_2)$ единственным образом выражается в виде $u = i_{1*} u_1 + i_{2*} u_2$, где $u_\alpha \in H_q(X_\alpha, X_1 \cap X_2)$ $(\alpha = 1, 2)$.*

Доказательство. Рассмотрим диаграмму

$$\begin{tikzcd}
(X_1 \cup X_2, X_1) & & (X_1 \cup X_2, X_2) \\
& (X_1 \cup X_2, X_1 \cap X_2) \arrow[ul, "j_1"'] \arrow[ur, "j_2"] & \\
(X_2, X_1 \cap X_2) \arrow[uu, "k_1"] \arrow[ur, "i_2"] & & (X_1, X_1 \cap X_2) \arrow[uu, "k_2"'] \arrow[ul, "i_1"']
\end{tikzcd}$$

Из точности гомологической последовательности тройки $(X_1 \cup X_2, X_\alpha, X_1 \cap X_2)$ следует, что $\operatorname{Ker} j_{\alpha*} = \operatorname{Im} i_{\alpha*}$. Если триада $(X; X_1, X_2)$— собственная, то отображение k_{1*} и k_{2*} являются изоморфизмами и, следовательно, согласно лемме 13.1 отображения $i_{\alpha *}$ определяют инъективное представление группы $H_q(X_1 \cup X_2, X_1 \cup X_2)$ в виде прямой суммы.

Обратно, пусть отображения $i_{\alpha *}$ определяют инъективное представление. Тогда отображение i_{1*} мономорфно и, следовательно, в гомологической последовательности тройки $(X_1 \cup X_2, X_1, X_1 \cap X_2)$ отображение ∂ тривиально, а потому ввиду точности отображение j_{1*} эпиморфно.

Следовательно, для любого элемента $u \in H_q(X_1 \cup X_2, X_1)$ существует такой элемент $v \in H_q(X_1 \cup X_2, X_1 \cap X_2)$, что $u = j_{1*} v$. По предположению $v = i_{1*}u_1 + i_{2*}u_2$ и, поэтому

$$u = j_{1*}i_{1*}u_1 + j_{1*}i_{2*}u_2 = k_{1*}u_2.$$

Таким образом, отображение k_{1*} эпиморфно.

Пусть теперь $u \in H_q(X_2, X_1 \cap X_2)$ и пусть $k_{1*}u = 0$. Тогда $j_{1*}\, i_{2*}u = 0$. Следовательно, ввиду точности гомологической последовательности тройки $(X_1 \cup X_2, X_1, X_1 \cap X_2)$ существует такой элемент $v \in H_q(X_1, X_1 \cap X_2)$, что $i_{1*} v = i_{2*} u$, т. е. $i_{1*}(-v) + i_{2*}u = 0$. Так как отображения i_{1*} и i_{2*} определяют инъективное представление в виде прямой суммы, то последнее равенство возможно только тогда, когда $u = 0$. Таким образом, отображение k_{1*} является изоморфизмом. По соображениям симметрии изоморфизмом будет и отображение k_{2*}. Следовательно, $(X; X_1, X_2)$ является собственной триадой.

Определение 14.3. Пусть $(X; X_1, X_2)$ — произвольная собственная триада. Составное отображение

$$H_q(X, X_1 \cup X_2) \xrightarrow{\partial} H_{q-1}(X_1 \cup X_2) \xrightarrow{l_{2*}}$$
$$\xrightarrow{l_{2*}} H_{q-1}(X_1 \cup X_2, X_2) \xrightarrow{k_{2*}^{-1}} H_{q-1}(X_1, X_1 \cap X_2),$$

где k_2, l_2 — отображения вложения, называется *граничным оператором собственной триады* $(X; X_1, X_2)$, и обозначается, несколько двусмысленно, снова через ∂. (Заметим, что этот граничный оператор является композицией граничного оператора тройки $(X, X_1 \cup X_2, X_2)$ и некоторого вырезания.) Обратная последовательность

$$\leftarrow H_{q-1}(X_1, X_1 \cap X_2) \xleftarrow{\partial} H_q(X, X_1 \cup X_2) \xleftarrow{j_*}$$
$$\xleftarrow{j_*} H_q(X, X_2) \xleftarrow{i_*} H_{q-1}(X_1, X_1 \cap X_2) \leftarrow,$$

где i, j — отображения вложения, называется *гомологической последовательностью собственной триады* $(X; X_1, X_2)$.

Теорема 14.4. *Гомологическая последовательность собственной триады точна.*

Доказательство. Как показывает диаграмма

$$\begin{tikzcd} H_q(X, X_2) & H_q(X_1 \cup X_2, X_2) \arrow[l, "i'_*"'] & H_{q+1}(X, X_1 \cup X_2) \arrow[l, "\partial'"'] \arrow[dl, "\partial"] & H_{q+1}(X, X_2) \arrow[l] \\ & H_q(X_1, X_1 \cap X_2) \arrow[ul, "i_*"] \arrow[u, "k_{2*}"] & & \end{tikzcd}$$

гомологическая последовательность триады $(X; X_1, X_2)$ получается из гомологической последовательности тройки $(X, X_1 \cup X_2, X_2)$ заменой группы $H_q(X_1 \cup X_2, X_2)$ изоморфной группой $H_q(X_1, X_1 \cap X_2)$, причем $k_{2*}\partial = \partial'$. Таким образом, гомологическая последовательность триады $(X; X_1, X_2)$ изоморфна гомологической последовательности тройки $(X, X_1 \cup X_2, X_2)$. Так как последняя последовательность точна, то точна и первая.

Заметим, что триада $(X; X_1, X_2)$, для которой $X_1 \supset X_2$ является собственной триадой, и ее гомологическая последовательность сводятся к гомологической последовательности тройки (X, X_1, X_2).

Теорема 14.5. *Любое непрерывное отображение $f: (X; X_1, X_2) \to (Y; Y_1, Y_2)$ собственных триад индуцирует гомоморфизм f_{**} гомологической последовательности триады $(X; X_1, X_2)$ в гомологическую последовательность триады $(Y; Y_1, Y_2)$. В частности, граничные операторы собственных триад коммутируют с гомоморфизмами, индуцированными непрерывными отображениями.*

Доказательство. Так как отображения i_*, j_*, i'_*, j'_* индуцированы отображениями вложения, то коммутативность очевидна для всех квадратов, не содержащих отображения ∂. Квадрат, содержащий это отображение, можно представить в следующем виде:

$$\begin{tikzcd} H_q(X_1, X_1 \cap X_2) \arrow[d, "f_{1*}"] & H_q(X_1 \cup X_2, X_2) \arrow[l, dashed, "k_*^{-1}"'] \arrow[d, "f_{2*}"] & H_{q+1}(X, X_1 \cup X_2) \arrow[l, "\partial'"'] \arrow[d, "f_{3*}"] \\ H_q(Y_1, Y_1 \cap Y_2) & H_q(Y_1 \cup Y_2, Y_2) \arrow[l, dashed, "k_*'^{-1}"'] & H_{q+1}(Y, Y_1 \cup Y_2), \arrow[l, "\partial'"'] \end{tikzcd}$$

где отображения f_1, f_2, f_3 определены отображением f. Согласно теореме 10.3 правый квадрат этой диаграммы коммутативен. Так как отображения k, k' являются вложениями, то $k'_* f_{1*} = f_{2*} k_*$. Следовательно, поскольку отображения k'_*, k_* являются изоморфизмами, то $f_{1*} k_*^{-1} = k_*'^{-1} f_{2*}$.

Теорема 14.6. *Пусть $(X; X_1, X_2)$ — такая собственная триада, что $X = X_1 \cup X_2$. Положим $A = X_1 \cap X_2$. Пусть, далее,*

f_1, f_2 и f — такие отображения $(X, A) \to (Y, B)$, что

$$f_1 \mid X_1 = f \mid X_1, \quad f_1(X_2) \subset B,$$
$$f_2 \mid X_2 = f \mid X_2, \quad f_2(X_1) \subset B.$$

Тогда $f_* = f_{1*} + f_{2*}$.

Доказательство. Рассмотрим диаграмму

$$\begin{tikzcd}
(X_1, A) \arrow[dr, "i_1"] \arrow[dd, "k_2"'] & & (X_2, A) \arrow[dl, "i_2"'] \arrow[dd, "k_1"] \\
& (X, A) \arrow[dl, "j_2"'] \arrow[dr, "j_1"] \arrow[dd, "f"] & \\
(X, X_2) \arrow[dr, "f_1'"'] & & (X, X_1) \arrow[dl, "f_2'"] \\
& (Y, B) &
\end{tikzcd}$$

где отображения f_1' определены отображениями f_i. Обратим внимание на то, что в нижних двух треугольниках эта диаграмма некоммутативна. Однако

$$f_1 = f_1' j_2, \quad f_2 = f_2' j_1, \quad f i_1 = f_1' k_2, \quad f i_2 = f_2' k_1.$$

Рассматривая индуцированные гомоморфизмы групп гомологий, мы немедленно замечаем, что часть получающейся диаграммы, не содержащая группу $H_q(Y, B)$, является диаграммой изученного в лемме 13.1 типа. Следовательно, для любого элемента $u \in H_q(X, A)$

$$u = i_{1*} k_{2*}^{-1} j_{2*} u + i_{2*} k_{1*}^{-1} j_{1*} u$$

и потому

$$f_* u = f_* i_{1*} k_{2*}^{-1} j_{2*} u + f_* i_{2*} k_{1*}^{-1} j_{1*} u = f_{1*}' k_{2*} k_{2*}^{-1} j_{2*} u + f_{2*}' k_{1*} k_{1*}^{-1} j_{1*} u =$$
$$= f_{1*}' j_{2*} u + f_{2*}' j_{1*} u = f_{1*} u + f_{2*} u.$$

Тем самым теорема доказана.

Определение триад, собственных относительно некоторой теории когомологий, совершенно аналогично определению 14.1.

Теорема 14.2c. *Триада $(X; X_1, X_2)$ тогда и только тогда является собственной триадой, когда для любого q гомоморфизмы i_a^*: $H^q(X_1 \cup X_2, X_1 \cap X_2) \to H^q(X_a, X_1 \cap X_2)$ определяют проективное представление группы $H^q(X_1 \cup X_2, X_1 \cup X_2)$ в виде прямой суммы.*

Определение 14.3c. *Кограничный оператор собственной триады* $(X; X_1, X_2)$ определяется как составное отображение

$$H^{q-1}(X_1, X_1 \cap X_2) \xrightarrow{k^{*-1}} H^{q-1}(X_1 \cup X_2, X_2) \xrightarrow{l^*} H^{q-1}(X_1 \cup X_2) \xrightarrow{\delta}$$
$$\xrightarrow{\delta} H^q(X, X_1 \cup X_2)$$

и обозначается также через δ. *Когомологической последовательностью собственной триады* называется прямая последовательность

$$\to H^{q-1}(X_1, X_1 \cap X_2) \xrightarrow{\delta} H^q(X, X_1 \cup X_2) \xrightarrow{j^*} H^q(X, X_2) \xrightarrow{i^*}$$
$$\xrightarrow{i^*} H^q(X_1, X_1 \cap X_2) \to$$

Теорема 14.4c. *Когомологическая последовательность собственной триады точна.*

Теорема 14.5c. *Любое непрерывное отображение* f: $(X; X_1, X_2) \to (Y; Y_1, Y_2)$ *собственных триад индуцирует гомоморфизм* f^{**} *когомологической последовательности триады* $(X; X_1, X_2)$ *в когомологическую последовательность триады* $(Y; Y_1, Y_2)$.

Теорема 14.6c. *В условиях теоремы* 14.6 *имеет место равенство* $f^* = f_1^* + f_2^*$.

15. Аддиционная последовательность триады

Пусть $(X; X_1, X_2)$ — такая собственная триада, что $X = X_1 \cup X_2$. Известна формула, доказанная впервые Майером и Виеторисом, связывающая числа Бетти (ранги групп гомологий) пространств X, X_1, X_2 и $A = X_1 \cap X_2$. Эта формула позволяет вычислять числа Бетти пространства, являющегося объединением двух других пространств. Многие авторы предлагали ее обобщение, связывающее не ранги, а сами группы гомологий[1]. Мы покажем, что это обобщение, по существу, сводится к требованию точности некоторой обратной последовательности. Чисто алгебраическая часть этой конструкции основывается на следующей лемме, которую мы будем называть «леммой о шестиугольнике».

Лемма 15.1. *Если в диаграмме*

$$\begin{tikzcd}
& G_0 \arrow[dl, "l_1"'] \arrow[dr, "l_2"] \arrow[dd, "i_0"] & \\
G_1' & & G_2' \\
& G \arrow[ul, "j_1"] \arrow[ur, "j_2"'] \arrow[dd, "j_0"] & \\
G_2 \arrow[uu, "k_1"] \arrow[ur, "i_2"] \arrow[dr, "h_1"'] & & G_1 \arrow[uu, "k_2"'] \arrow[ul, "i_1"'] \arrow[dl, "h_2"] \\
& G_0' &
\end{tikzcd}$$

1) Впервые такое обобщение было получено М. Ф. Бокштейном (Über die Homologiegruppen der Vereinigung zweier Komplexe, Матем. сб. 9 (51), № 2 (1941), 365—376). (*Прим. ред.*)

в каждом треугольнике выполнены соотношения коммутативности, отображения k_1 *и* k_2 *являются эпиморфизмами,* $\operatorname{Im} i_\alpha = \operatorname{Ker} j_\alpha$ $(\alpha = 1, 2)$ *и* $j_0 i_0 = 0$, *то два окаймляющих гомоморфизма группы* G_0 *в группу* G_0' *отличаются только знаком, т. е.*

$$h_1 k_1^{-1} l_1 g = -h_2 k_2^{-1} l_2 g$$

для любого элемента $g \in G_0$.

Доказательство. Согласно лемме 13.1 группа G разлагается в прямую сумму изоморфных образов групп G_1 и G_2. Кроме того, для любого элемента $g \in G_0$

$$i_0 g = i_2 k_1^{-1} j_1 i_0 g + i_1 k_2^{-1} j_2 i_0 g = i_2 k_1^{-1} l_1 g + i_1 k_2^{-1} l_2 g.$$

Применяя к обеим сторонам этого равенства отображение j_0, используя соотношение $j_0 i_0 = 0$ и условия коммутативности, мы получим требуемый результат.

Пусть теперь $(X; X_1, X_2)$ — собственная триада, для которой $X = X_1 \cup X_2$, и пусть $A = X_1 \cap X_2$. Рассмотрим диаграмму

$$\begin{tikzcd}
 & H_q(A) \arrow[dl, "h_{2*}"'] \arrow[dr, "h_{1*}"] \arrow[dd, "i_*"] & \\
H_q(X_2) \arrow[dr, "m_{2*}"'] & & H_q(X_1) \arrow[dl, "m_{1*}"] \\
 & H_q(X) \arrow[dl, "l_{1*}"'] \arrow[dr, "l_{2*}"] \arrow[dd, "j_*"] & \\
H_q(X, X_1) & & H_q(X, X_2) \\
 & H_q(X, A) \arrow[ul, "j_{1*}"] \arrow[ur, "j_{2*}"'] \arrow[dd, "\partial"] & \\
H_q(X_2, A) \arrow[uu, "k_{1*}"] \arrow[ur, "i_{2*}"] \arrow[dr, "\partial_1"'] & & H_q(X_1, A) \arrow[uu, "k_{2*}"'] \arrow[ul, "i_{1*}"'] \arrow[dl, "\partial_2"] \\
 & H_{q-1}(A) &
\end{tikzcd}$$

в которой все гомоморфизмы, кроме гомоморфизма ∂, индуцированы отображениями вложения. Нижний шестиугольник этой диаграммы удовлетворяет, очевидно, всем условиям леммы 15.1.

Определение 15.2. *Аддиционной последовательностью*[1] *собственной триады* $(X; X_1, X_2)$, где $X = X_1 \cup X_2$, назяваемся

[1] Авторы называют эту последовательность последовательностью Майера—Виеториса, что, по моему мнению, неправильно, так как переход от формулы, связывающей ранги, к последовательности, связывающей группы, отнюдь не тривиален. Если желать приписывать аддиционной последовательности чье-либо имя, то ее следует называть последовательностью Бокштейна (см. примечание редактора к стр. 61). (*Прим. ред.*)

обратная последовательность

$$\ldots \leftarrow H_{q-1}(A) \xleftarrow{\Delta} H_q(X) \xleftarrow{\varphi} H_q(X_1) + H_q(X_2) \xleftarrow{\psi} H_q(A) \leftarrow \ldots,$$

отображения ψ, φ, Δ которой определены формулами

$$\begin{aligned} \psi u &= (h_{1*}u, -h_{2*}u), && u \in H_q(A),\\ \varphi(v_1, v_2) &= m_{1*}v_1 + m_{2*}v_2, && v_1 \in H_q(X_1),\ v_2 \in H_q(X_2),\\ \Delta w &= -\partial_1 k_{1*}^{-1} l_{1*} w, && w \in H_q(X). \end{aligned}$$

Согласно лемме 15.1 последнее отображение можно определить также следующей формулой

$$\Delta w = \partial_2 k_{2*}^{-1} l_{2*} w.$$

Теорема 15.3. *Аддиционная последовательность собственной триады $(X;\ X_1, X_2)$, где $X = X_1 \cup X_2$, точна.*

Доказательство. Нужно доказать шесть обычных включений.

(1). Для любого элемента $u \in H_q(A)$

$$\varphi\psi u = \varphi(h_{1*}u, -h_{2*}u) = m_{1*}h_{1*}u - m_{2*}h_{2*}u = i_*u - i_*u = 0.$$

(2). Для любого элемента $v = (v_1, v_2) \in H_q(X_1) + H_q(X_2)$ в силу аксиомы точности $l_{1*}m_{1*}v_1 = 0$. Следовательно,

$$\Delta m_{1*}v_1 = -\partial_1 k_{1*}^{-1} l_{1*} m_{1*} v_1 = 0.$$

Из леммы 15.1 вытекает, что $\Delta = \partial_2 k_{2*}^{-1} l_*$. Поэтому $\Delta m_{2*}v_2 = 0$ и, следовательно,

$$\Delta\varphi v = \Delta(m_{1*}v_1 + m_{2*}v_2) = \Delta m_{1*}v_1 + \Delta m_{2*}v_2 = 0.$$

(3). Для любого элемента $w \in H_q(X)$

$$h_{2*}\Delta w = -h_{2*}\partial_1 k_{1*}^{-1} l_{1*} w = 0,$$

так как $h_{2*}\partial = 0$ в силу аксиомы точности. Применяя лемму 15.1, получаем аналогично, что $h_{1*}\Delta = 0$. Следовательно, $\psi\Delta = 0$.

(4). Если $w \in H_q(X)$ и $\Delta w = 0$, то

$$\partial_\alpha k_{\alpha*}^{-1} l_{\alpha*} w = 0 \quad (\alpha = 1, 2).$$

В силу аксиомы точности существует такой элемент $v'_\alpha \in H_q(X_\alpha)$, что

$$n_{1*}v'_1 = k_{2*}^{-1} l_{2*} w, \qquad n_{2*}v'_2 = k_{1*}^{-1} l_{1*} w,$$

где n_α: $X_\alpha \subset (X_\alpha, A)$. Согласно лемме 13.1 элемент j_*w распадается в сумму, которая в рассматриваемом случае имеет вид

$$j_*w = i_{1*}n_{1*}v'_1 + i_{2*}n_{2*}v'_2 = j_*m_{1*}v'_1 + j_*m_{2*}v'_2.$$

Так как гомологическая последовательность пары (X, A) точна, то существует такой элемент $u \in H_q(A)$, что

$$i_* u = w - m_{1*}v_1' - m_{2*}v_2'.$$

Положив $v_1 = v_1' + h_{1*}$ и $v_2 = v_2'$, получаем, что $\varphi(v_1, v_2) = w$.

(5). Если $v = (v_1, v_2) \in H_q(X_1) + H_q(X_2)$ и $\varphi v = 0$, то

$$j_*\varphi v = j_* m_{1*} v_1 + j_* m_{2*} v_2 = i_{1*} n_{1*} v_1 + i_{2*} n_{2*} v_2 = 0$$

Из леммы 13.1 вытекает, что пересечение образов отображений i_{1*} и i_{2*} состоит только из нуля и, следовательно, $i_{\alpha*} n_{\alpha*} v_\alpha = 0$ $(\alpha = 1, 2)$. Из леммы 13.1 вытекает также, что $\operatorname{Ker} i_{\alpha*} = 0$ и, следовательно, $n_{\alpha*} v_\alpha = 0$ $(\alpha = 1, 2)$. В силу аксиомы точности существует такой элемент $u_\alpha \in H_q(A)$, что $h_{\alpha*} u_\alpha = v_\alpha$ $(\alpha = 1, 2)$. Поэтому

$$\varphi v = m_{1*} h_{1*} u_1 + m_{2*} h_{2*} u_2 = i_*(u_1 + u_2).$$

Так как $\varphi v = 0$, то в силу аксиомы точности существует такой элемент $x \in H_q(X, A)$, что $\partial x = u_1 + u_2$. С другой стороны, согласно лемме 13.1 существуют такие элементы $x_\alpha \in H_{q+1}(X_\alpha, A)$ $(\alpha = 1, 2)$, что $x = i_{1*} x_1 + i_{2*} x_2$. Таким образом,

$$\partial x = \partial_2 x_1 + \partial_1 x_2 = u_1 + u_2.$$

Пусть $u = u_1 - \partial_2 x_1$. Тогда $u = -(u_2 - \partial_1 x_2)$ и, следовательно,

$$h_{1*} u = h_{1*} u_1 - h_{1*} \partial_2 x_1 = h_{1*} u_1 = v_1.$$

Аналогично $h_{2*} u = -v_2$. Таким образом, $\psi u = v$.

(6). Если $u \in H_q(A)$ и $\psi(u) = 0$, то $h_{1*} u = 0$ и $h_{2*} u = 0$. В силу аксиомы точности существуют такие элементы $x_\alpha \in H_{q+1}(X_\alpha, A)$ $(\alpha = 1, 2)$, что

$$\partial_1 x_2 = u, \quad \partial_2 x_1 = -u.$$

Отсюда следует, что

$$\partial i_{1*} x_1 + \partial i_{2*} x_2 = \partial(i_{1*} x_1 + i_{2*} x_2) = 0.$$

Поэтому согласно аксиоме точности существует такой элемент $w \in H_{q+1}(X)$, что

$$j_* w = -i_{1*} x_1 - i_{2*} x_2.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \Delta w &= -\partial_1 k_{1*}^{-1} l_{1*} w = -\partial_1 k_{1*}^{-1} j_{1*} j_* w = \\ &= \partial_1 k_{1*}^{-1} j_{1*}(i_{1*} x_1 + i_{2*} x_2) = \\ &= 0 + \partial_1 k_{1*}^{-1} j_{1*} i_{2*} x_2 = \partial_1 x_2 = u, \end{aligned}$$

так как $k_{1*} = j_{1*} i_{2*}$. Тем самым теорема 15.3 полностью доказана.

Теорема 15.4. *Любое отображение f: $(X; X_1, X_2) \to (Y; Y_1, Y_2)$ собственных триад, для которых $X = X_1 \cup X_2$, $Y = Y_1 \cup Y_2$, индуцирует гомоморфизм аддиционной последовательности триады $(X; X_1, X_2)$ в аддиционную последовательность триады $(Y; Y_1, Y_2)$.*

Для доказательства достаточно заметить, что отображение индуцирует отображение диаграммы 15.2 в аналогичную диаграмму для триады $(Y; Y_1, Y_2)$. Подробное проведение доказательства предоставляется читателю.

Лемма 15.5. *Для любой собственной триады* $(X; X_1, X_2)$ *диаграмма*

$$\begin{tikzcd} H_{q+1}(X, X_1 \cup X_2) \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "\partial_1"'] & H_q(X_1, X_1 \cap X_2) \arrow[d, "\partial_2"] \\ H_q(X_1 \cup X_2) \arrow[r, "\Delta"] & H_{q-1}(X_1 \cap X_2) \end{tikzcd}$$

коммутативна; здесь ∂ — граничный оператор гомологической последовательности триады $(X; X_1, X_2)$, а Δ — граничный оператор аддиционной последовательности триады $(X_1 \cup X_2; X_1, X_2)$.

Доказательство. Рассмотрим диаграмму

$$H_{q+1}(X, X_1 \cup X_2) \xrightarrow{\partial_1} H_q(X_1 \cup X_2) \xrightarrow{l_{2*}} H_q(X_1 \cup X_2, X_2) \xleftarrow{k_{2*}}$$
$$\xleftarrow{k_{2*}} H_q(X_1, X_1 \cap X_2) \xrightarrow{\partial_2} H_{q-1}(X_1 \cap X_2),$$

в которой l_2 и k_2 — отображения вложения. Тогда согласно определениям 14.3 и 15.2

$$\partial_2 \partial = \partial_2 k_{2*}^{-1} l_{2*} \partial_1 = \Delta \partial_1,$$

что и доказывает лемму.

Определим теперь для любой собственной триады $(X; X_1, X_2)$ (уже не удовлетворяющей условию $X = X_1 \cup X_2$) *относительную аддиционную* последовательность. С этой целью рассмотрим диаграмму

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & H_q(X, X_1 \cap X_2) \arrow[dl, "h_{2*}"'] \arrow[dr, "h_{1*}"] \arrow[dd, "i_*"] & \\ H_q(X, X_2) \arrow[dr, "m_{2*}"'] & & H_q(X, X_1) \arrow[dl, "m_{1*}"] \\ & H_q(X, X_1 \cup X_2) \arrow[dl, "\partial_1"'] \arrow[dr, "\partial_2"] \arrow[dd, "\partial"] & \\ H_{q-1}(X_1 \cup X_2, X_1) & & H_{q-1}(X_1 \cup X_2, X_2) \\ & H_{q-1}(X_1 \cup X_2, X_1 \cap X_2) \arrow[ul, "d_{1*}"] \arrow[ur, "c_{2*}"'] \arrow[dd, "j_*"] & \\ H_{q-1}(X_2, X_1 \cap X_2) \arrow[ur, "i_{2*}"] \arrow[dr, "n_{1*}"'] & & H_{q-1}(X_1, X_1 \cap X_2) \arrow[ul, "i_{1*}"'] \arrow[dl, "n_{2*}"] \\ & H_{q-1}(X, X_1 \cap X_2) & \end{tikzcd}$$

аналогичную диаграмме, предшествующей определению 15.2. В этой диаграмме гомоморфизмы ∂ и j_* являются двумя соседними гомоморфизмами гомологической последовательности тройки $(X, X_1 \cup X_2, X_1 \cap X_2)$, и, следовательно, нижний шестиугольник диаграммы удовлетворяет всем условиям леммы 15.1.

Определение 15.6. *Относительной аддиционной последовательностью собственной триады* $(X; X_1, X_2)$ называется обратная последовательность

$$\xleftarrow{\varphi} H_q(X, X_1) + H_q(X, X_2) \xleftarrow{\psi} H_q(X, X_1 \cap X_2) \leftarrow \ldots$$
$$\ldots \leftarrow H_{q-1}(X, X_1 \cap X_2) \xleftarrow{\Delta} H_q(X, X_1 \cup X_2) \leftarrow \ldots,$$

отображения которой определены формулами

$$\begin{aligned} \psi u &= (h_{1*}u, -h_{2*}u), & u &\in H_q(X, X_1 \cap X_2), \\ \varphi(v_1, v_2) &= m_{1*}v_1 + m_{2*}v_2, & v_1 &\in H_q(X, X_1), v_2 \in H_q(X, X_2), \\ \Delta w &= n_{2*}k_{2*}^{-1}\partial_2 w, & w &\in H_q(X, X_1 \cup X_2). \end{aligned}$$

Согласно лемме 15.1 последнее отображение можно определить также следующей формулой

$$\Delta w = -n_{1*}k_{1*}^{-1}\partial_1 w.$$

Теорема 15.7. *Относительная аддиционная последовательность собственной триады точна.*

Доказательство аналогично доказательству теоремы 15.3 и предоставляется читателю, как и доказательство следующей теоремы.

Теорема 15.8. *Любое отображение* $f: (X; X_1, X_2) \to (Y; Y_1, Y_2)$ *собственных триад индуцирует гомоморфизм относительной аддиционной последовательности триады* $(X; X_1, X_2)$ *в относительную аддиционную последовательность триады* $(Y; Y_1, Y_2)$.

Определение 15.2с. *Когомологической аддиционной последовательностью собственной триады* $(X; X_1, X_2)$, где $X = X_1 \cup X_2$, называется прямая последовательность

$$\ldots \to H^{q-1}(A) \xrightarrow{\Delta} H^q(X) \xrightarrow{\varphi} H^q(X_1) + H^q(X_2) \xrightarrow{\psi} H^q(A) \to \ldots,$$

в которой $A = X_1 \cap X_2$ и

$$\begin{aligned} \varphi w &= (m_1^* w, m_2^* w), & w &\in H^q(X), \\ \psi(v_1, v_2) &= h_1^* v_1 - h_2^* v_2, & v_1 &\in H^q(X_1), v_2 \in H^q(X_2), \\ \Delta u &= -l_1^* k_1^{*-1}\delta_1 u, & u &\in H^{q-1}(A). \end{aligned}$$

Согласно лемме 15.1 последний гомомофизм можно представить также следующей формулой

$$\Delta u = l_2^* k_2^{*-1}\delta_2 u.$$

Теорема 15.3с. *Когомологическая аддиционная последовательность собственной триады* $(X; X_1, X_2)$, *для которой* $X = X_1 \cup X_2$, *точна.*

Теорема 15.4с. *Любое отображение* $f: (X; X_1, X_2) \to (Y; Y_1, Y_2)$ *собственных триад, для которых* $X = X_1 \cup X_2$, $Y = Y_1 \cup Y_2$, *индуцирует гомоморфизм когомологической аддиционной последовательности триады* $(Y; Y_1, Y_2)$ *в когомологическую аддиционную последовательность триады* $(X; X_1, X_2)$.

Лемма 15.5с. *Для любой собственной триады* $(X; X_1, X_2)$ *диаграмма*

$$\begin{array}{ccc} H^{q+1}(X, X_1 \cup X_2) & \xleftarrow{\delta} & H^q(X_1, X_1 \cap X_2) \\ \uparrow \delta_1 & & \uparrow \delta_2 \\ H^q(X_1 \cup X_2) & \xleftarrow{\Delta} & H^{q-1}(X_1 \cap X_2) \end{array}$$

коммутативна; здесь δ — *кограничный оператор когомологической последовательности триады* $(X; X_1, X_2)$, *а* Δ — *кограничный оператор когомологической аддиционной последовательности триады* $(X_1 \cup X_2; X_1, X_2)$.

Определение 15.6с. *Относительной когомологической аддиционной последовательностью собственной триады* $(X; X_1, X_2)$ называется прямая последовательность

$$\ldots \to H^{q-1}(X, X_1 \cap X_2) \xrightarrow{\Delta} H^q(X, X_1 \cup X_2) \xrightarrow{\varphi}$$
$$\xrightarrow{\varphi} H^q(X, X_1) + H^q(X, X_2) \xrightarrow{\psi} H^q(X, X_1 \cap X_2) \to \ldots,$$

в которой (см. диаграмму, предшествующую определению 15.6)

$$\begin{aligned} \Delta u' &= \delta_2 k_2^{*-1} n_2^* u = -\delta_1 k_1^{*-1} n_1^* u, && u \in H^{q-1}(X, X_1 \cap X_2), \\ \varphi w &= (m_1^* w, m_2^* w), && w \in H^q(X, X_1 \cup X_2), \\ \psi(v_1, v_2) &= h_1^* v_1 - h_2^* v_2, && v_1 \in H^q(X, X_1), v_2 \in H^q(X, X_2). \end{aligned}$$

Теорема 15.7с. *Относительная когомологическая аддиционная последовательность собственной триады точна.*

Теорема 15.8с. *Любое отображение* $f: (X; X_1, X_2) \to (Y; Y_1, Y_2)$ *собственных триад индуцирует гомоморфизм относительной когомологической аддиционной последовательности триады* $(Y; Y_1, Y_2)$ *в относительную когомологическую аддиционную последовательность триады* $(X; X_1, X_2)$.

16. Клетки и сферы

Пусть R^n — евклидово n-мерное пространство. Его точки $(x_1, \ldots, x_n)$ мы будем обозначать (пользуясь векторной символикой) через x. Длина вектора x будет обозначаться через $\|x\| = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2}$. Каждый из следующих шести символов будет обозначать подмножество пространства R^n, определенное указанными справа алгебраическими условиями

n-мерная клетка E^n	:	$\|\|x\|\| \leqslant 1,$	
$(n-1)$-мерная сфера S^{n-1}	:	$\|\|x\|\| = 1,$	
верхняя полусфера E_+^{n-1}	:	$\|\|x\|\| = 1,$	$x_n \geqslant 0,$
нижняя полусфера E_-^{n-1}	:	$\|\|x\|\| = 1,$	$x_n \leqslant 0,$
$(n-2)$-мерная сфера S^{n-2}	:	$\|\|x\|\| = 1,$	$x_n = 0,$
$(n-1)$-мерная клетка E^{n-1}	:	$\|\|x\|\| \leqslant 1,$	$x_n = 0.$

Ясно, что $S^{n-1} = E_+^{n-1} \cup E_-^{n-1}$ и $S^{n-2} = E_+^{n-1} \cap E_-^{n-1}$. Сфера S^0 состоит из двух точек, одна из которых является полусферой E_+^0, а другая—полусферой E_-^0. Пустое множество мы будем считать сферой S^{-1}. Множества R^0 и E^0 состоят из одной точки.

Пусть R^{n-1} — подпространство пространства R^n, определенное уравнением $x_n = 0$, и пусть f — проекция пространства R^n на подпространство R^{n-1}:

$$f(x_1, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_{n-1}, 0).$$

Проекция f определяет отображения

$$f_+ \colon E_+^{n-1} \to E^{n-1}, \quad f_- \colon E_-^{n-1} \to E^{n-1}.$$

Легко проверить, что отображения f_+ и f_- являются гомеоморфизмами.

Во всем этом пункте предполагается, что все рассматриваемые пары и отображения допустимы. В частности, все пространства предполагаются стягиваемыми. Эти предположения выполнены для всех допустимых категорий, которые мы будем в дальнейшем рассматривать.

Лемма 16.1. *Клетки E^n, E_-^{n-1} и пара (E^n, E_-^{n-1}) гомологически тривиальны.*

Доказательство. Пусть $x \in E^n$ и $0 \leqslant t \leqslant 1$. Используя векторные обозначения, положим $h(x, t) = (1-t)x$. Тогда $h(x, 0) = x$, $h(x, 1) = 0$. Таким образом, клетка E^n стягивается по себе в точку. Следовательно, согласно теореме 11.5 клетка E^n гомологически тривиальна. Так как клетка E_-^{n-1} гомеоморфна клетке E^{n-1}, то эта клетка также гомологически тривиальна. Наконец, пара (E^n, E_-^{n-1}) гомологически тривиальна в силу следствия 9.5.

Лемма 16.2. *Триады $(E^n; E_+^{n-1}, E_-^{n-1})$ и $(S^{n-1}; E_+^{n-1}, E_-^{n-1})$ являются собственными триадами.*

Доказательство. Нужно показать, что отображения вложения

$$k_2 \colon (E_+^{n-1}, S^{n-2}) \subset (S^{n-1}, E_-^{n-1}), \quad k_1 \colon (E_-^{n-1}, S^{n-2}) \subset (S^{n-1}, E_+^{n-1})$$

во всех размерностях индуцируют изоморфизмы групп гомологий. Вследствие симметричности достаточно рассмотреть только отображение k_2.

Пусть V — подмножество пространства R^n, определенное соотношениями

$$\|x\| = 1, \quad x_n < -\frac{1}{2}.$$

Очевидно, что V — открытое подмножество сферы S^{n-1} и что его замыкание $\bar{V}$ принадлежит внутренности клетки E_-^{n-1} относительно сферы S^{n-1}. Гомотопия

$$F(x, t) = \begin{cases} x, \text{ если } x \in E_+^{n-1}, \ 0 \leqslant t \leqslant 1, \\ \dfrac{(1-t)x + tf_-(x)}{\|(1-t)x + tf_-(x)\|}, \text{ если } x \in E_-^{n-1} \setminus V, \ 0 \leqslant t \leqslant 1 \end{cases}$$

показывает, что пара (E_+^{n-1}, S^{n-2}) является строгим деформационным ретрактом пары $(S^{n-1} \setminus V, E_-^{n-1} \setminus V)$. Следовательно, полагая в теореме 12.1 $X = S^{n-1}$, $A = E_-^{n-1}$, $U = E_-^{n-1} \setminus S^{n-2}$, мы получим, что отображение k_2 во всех размерностях индуцирует изоморфизмы групп гомологий.

Теорема 16.3. *Гомологическая последовательность триады $(E^n; E_+^{n-1}, E_-^{n-1})$ сводится к изоморфизму*

$$\partial: H_n(E^n, S^{n-1}) \approx H_{n-1}(E_+^{n-1}, S^{n-2}).$$

Все другие группы этой последовательности тривиальны. Изоморфизм ∂ называется изоморфизмом инцидентности и обозначается через $[E^n: E_+^{n-1}]$. С помощью триады $(E^n; E_-^{n-1}, E_+^{n-1})$ аналогично определяется изоморфизм $[E^n: E_-^{n-1}]$.

Теорема 16.4. *Группы гомологий пары (E^n, S^{n-1}) определяются формулами*

$$H_n(E^n, S^{n-1}) \approx G,$$
$$H_q(E^n, S^{n-1}) = 0, \quad \textit{если } q \neq n.$$

Доказательство теорем 16.3 и 16.4. Так как согласно лемме 16.1 пара (E^n, E_-^{n-1}) гомологически тривиальна, то $H_q(E^n, E_-^{n-1}) = 0$. Следовательно, ввиду точности гомологической последовательности триады $(E^n; E_+^{n-1}, E_-^{n-1})$ имеем $\partial: H_q(E^n, S^{n-1}) \approx H_{q-1}(E_+^{n-1}, S^{n-2})$. Так как пары (E_+^{n-1}, S^{n-2}) и (E^{n-1}, S^{n-2}) гомеоморфны, то $H_q(E^n, S^{n-1}) \approx H_{q-1}(E^{n-1}, S^{n-2})$. Итерируя этот изоморфизм, получим $H_q(E^n, S^{n-1}) \approx H_{q-n}(E^0, S^{-1}) = H_{q-n}(E^0)$.

Так как пространство E_0 состоит из одной точки, то теорема 16.4 следует теперь из аксиомы размерности и из определения группы коэффициентов G. Одновременно доказана также и теорема 16.3.

Теорема 16.5. *Диаграмма*

$$\begin{array}{ccc} H_n(E^n, S^{n-1}) & \xrightarrow{[E^n: E_+^{n-1}]} & H_{n-1}(E_+^{n-1}, S^{n-2}) \\ \Big\downarrow \partial_1 & & \Big\downarrow \partial_2 \\ H_{n-1}(S^{n-1}) & \xrightarrow{\ j\ } & H_{n-2}(S^{n-2}), \end{array}$$

в которой Δ — граничный оператор аддиционной последовательности триады $(S^{n-1}; E_+^{n-1}, E_-^{n-1})$, коммутативна. При $n > 2$ все четыре гомоморфизма являются изоморфизмами. То же самое имеет место и для $n = 2$, если только группу $H_{n-2}(S^{n-2}) = H_0(S^0)$ заменить группой $\tilde{H}_0(S^0)$. В частности,

$$\Delta\colon H_n(S^n) \approx H_{n-1}(S^{n-1}),\ n > 1,$$
$$\Delta\colon H_1(S^1) \approx \tilde{H}_0(S^0).$$

Теорема 16.6. *Группы гомологий сферы S^n определяются формулами*

$$\begin{array}{ll} H_0(S^n) \approx G, & \tilde{H}_0(S^n) = 0,\quad n > 1, \\ H_0(S^0) \approx G + G, & \tilde{H}_0(S^0) \approx G, \\ H_n(S^n) \approx G, & \qquad\qquad n > 0, \\ H_p(S^n) = 0, & \qquad\qquad p \neq n, 0. \end{array}$$

Доказательство. Коммутативность диаграммы, рассматриваемой в теореме 16.5, следует из леммы 15.5. Так как клетки E^n и E_+^{n-1} гомологически тривиальны, то согласно теореме 9.4

$$\begin{array}{ll} \partial_1: & H_q(E^n,\quad S^{n-1}) \approx H_{q-1}(S^{n-1}),\ q > 1, \\ \partial_1: & H_1(E^n,\quad S^{n-1}) \approx \tilde{H}_0(S^{n-1}), \\ \partial_2: & H_q(E_+^{n-1}, S^{n-2}) \approx H_{q-1}(S^{n-2}),\ q > 1, \\ \partial_2: & H_1(E_+^{n-1}, S^{n-2}) \approx \tilde{H}_0(S^{n-2}). \end{array}$$

Отсюда следуют все утверждения теоремы 16.5. Комбинируя эти изоморфизмы с изоморфизмами, указанными в теореме 16.4, мы получим все утверждения теоремы 16.6, за исключением относящихся к группе $H_0(S^n)$. С другой стороны, так как сфера S^n для $n \geqslant 0$ непуста, то согласно теореме 7.6 $H_0(S^n) \approx \tilde{H}_0(S^n) + G$. Тем самым теоремы 16.5 и 16.6 полностью доказаны.

Читателю предоставляется сформулировать и доказать аналогичные результаты для групп когомологий.

Примечания

Происхождение основных понятий. Основные понятия, необходимые для построения групп гомологий (т. е. комплексы и коэффициенты инцидентности), были предложены Пуанкаре (Analysis Situs, Journ. de l'Ec. Polyt. (2) **1** (1885), 1—123). С помощью этих понятий он дал прямое определение чисел Бетти и коэффициентов кручения, т. е. числовых инвариантов, характеризующих группы гомологий с группой целых чисел в качестве группы коэффициентов. В течение многих лет эти инварианты были основным предметом изучения. Лишь в 1925—1935 гг. внимание исследователей было переключено с числовых инвариантов на сами группы. Этим изменением точки зрения мы обязаны в основном влиянию Э. Нётер. Благодаря этому изменению стало возможным перейти, во-первых, от комплексов к более общим пространствам, группы гомологий которых уже нельзя описать с помощью числовых инвариантов, а во-вторых, от группы целых чисел к произвольной группе коэффициентов, когда числовых инвариантов также недостаточно для полного описания. Таким образом, хотя сам Пуанкаре и не рассматривал групп гомологий, он бесспорно должен считаться основателем современной гомологической теории. Понятие относительных групп гомологий (по модулю подкомплекса) принадлежит Лефшецу (Proc. Nat. Acad. **13** (1927), 614—622). Хотя оператор ∂ и рассматривался Лефшецем, однако неясно, кто первый дал его формальное определение. Также неизвестно, кто первый ввел индуцированный гомоморфизм f_*. По существу, он употреблялся еще со времен Пуанкаре, однако только в последние тридцать пять лет он получил имя и формальное признание. Отсутствие формальных определений гомоморфизмов ∂ и f_* явилось естественным следствием затянувшегося признания за группами гомологий права на существование.

Каждая из наших аксиом является в классической теории гомологий некоторой теоремой. Относительно большинства из этих теорем неясно, кто их первый сформулировал и доказал. Аксиомы 1, 2, 3 и 7 выражают, по-видимому, настолько первоначальные и самоочевидные свойства, что ни у кого не возникало желания их явно формулировать. Они появились в системе аксиом, прежде чем кто-либо захотел их специально отметить.

Впервые написал гомологическую последовательность и доказал ее точность Гуревич (Bull. Amer. Math. Soc. **47** (1942), 562). В дальнейшем она была подробно рассмотрена Келли и Питчером (Ann. of Math. **48** (1947), 682—709). Однако следует отметить, что все шесть частей, составляющих высказывание о точности гомологической последовательности, были известны и часто использовались при доказательстве других менее очевидных предложений. Свойство инвариантности при вырезании неявно входило в теорию относительных групп Лефшеца, который вместо выражения «группы гомологий пространства X относительно подпространства A» часто пользовался выражением «группы гомологий дополнения $X \setminus A$». Аксиома гомотопии явно не формулировалась, поскольку не существовало четкого определения гомоморфизма f_*. Однако предложение «гомотопные циклы гомологичны» было известно и многократно использовалось.

Первое появление групп когомологий также невозможно установить. «Ко»-терминология предложена Уитнеем (Ann. of Math. **39** (1938), 397—432). В неявном виде группы когомологий использовались в законе двойственности Александера (Trans. Amer. Math. Soc. **23** (1922), 333—349). В окончательном теоретико-групповом инвариантном виде закон двойственности был доказан Понтрягиным (Ann. of Math. **35** (1934), 904—914). В явном виде коциклы впервые появились под именем *псевдоциклов* в книге Лефшеца (Colloq. Publ., Amer. Math. Soc. **12** (1930)). Первое внутреннее определение групп когомологий предложил Александер на Московской конференции в 1935 г.[1]).

Гомотопические группы. Гомотопические группы Гуревича совершенно подобны группам гомологий в том смысле, что их теория аналогична теории гомологий и они подчиняются аналогичным аксиомам. Однако q-мерная гомотопическая группа зависит не только от пары (X, A), но и от некоторой фиксированной точки $x_0 \in A$. Эти группы обозначаются через $\pi_q(X, A, x_0)$. Они определены только для $q \geqslant 2$. Если пространство A состоит из одной точки, то гомотопическая группа определена и для $q = 1$ и называется в этом случае фундаментальной группой. При $q \geqslant 3$ гомотопические группы абелевы; группа $\pi_2(X, x_0)$ также абелева. Граничный оператор ∂: $\pi_q(X, A, x_0) \to \pi_{q-1}(A, x_0)$ определен для $q \geqslant 2$. Наконец, любое отображение f: $(X, A, x_0) \to (Y, B, y_0)$ индуцирует гомоморфизмы f_*: $\pi_q(X, A, x_0) \to \pi_q(Y, B, y_0)$.

Соответственно измененные, все наши аксиомы от 1 до 7 имеют место и для гомотопических групп, за исключением аксиомы вырезания. Последняя аксиома выражает основное свойство групп гомологий, отличающее их от гомотопических групп. Она обеспечивает вычислимость групп гомологий, тогда как для гомотопических групп, не удовлетворяющих аксиоме вырезания, не существует никакого алгорифма их вычисления[2]), чем и объясняется их сравнительно малая изученность. В качестве простого примера рассмотрим n-мерную сферу S^n, разбитую экватором S^{n-1} на верхнюю и нижнюю полусферы E^n_+ и E^n_-. Относя все группы к фиксированной точке $x_0 \in S^{n-1}$, мы получим диаграмму

$$\begin{tikzcd}
\pi_q(E^n_+, S^{n-1}) \arrow[r, "i_*"] \arrow[d, "\partial"] & \pi_q(S^n, E^n_-) \\
\pi_{q-1}(S^{n-1}) \arrow[r, "E"] & \pi_q(S^n), \arrow[u, "j_k"']
\end{tikzcd}$$

где i и j — отображения вложения. Все гомотопические группы клетки тривиальны. Следовательно, из точности гомотопической последовательности вытекает, что отображения ∂ и j_* являются

[1]) На той же конференции группы когомологий независимо от Александера ввел А. Н. Колмогоров. (*Прим. ред.*)

[2]) В последнее время алгорифм вычисления гомотопических групп (имеющий лишь принципиальное значение) был найдем Брауном (E. N. Brown, Finite computability of Postnikov complexes, Ann. of Math. 65 (1957), 1—20; русский перевод в сб. «Математика», № 2 (1957). (*Прим. ред.*)

изоморфизмами. В соответствии с этим мы определяем участвующее в диаграмме отображение E формулой $E = j_*^{-1} i_* \partial^{-1}$.

Отображение i является отображением вырезания. Наша цель состоит в изучении свойств гомоморфизма i_*. Мы предпочитаем рассматривать эквивалентный ему гомоморфизм E, потому что, как можно доказать, этот гомоморфизм совпадает с надстройкой (Einhängung) в смысле Фрейденталя (Comp. Math. **5** (1937), 299—314). Так как $\pi_2(S^1) = 0$ и $\pi_3(S^2)$ — бесконечная циклическая группа, то гомоморфизм E, а следовательно, и гомоморфизм i_*, не всегда является изоморфизмом. Таким образом, гомотопические группы не удовлетворяют аксиоме вырезания даже в самых простых случаях. Фрейденталь показал (там же), что отображение E изоморфно для всех $q < 2n - 1$. Этот результат мы можем толковать как утверждение о справедливости аксиомы вырезания при соответствующих ограничениях. Почти все из того немногого, что мы знаем о группах $\pi_q(S^n)$, основывается на результатах Фрейденталя относительно гомоморфизма E.

Задача аксиоматического описания гомотопических групп еще не решена[1]). Решая эту задачу, естественно пытаться, сохраняя остальные аксиомы, заменить чем-нибудь аксиому вырезания. Возможно, что эту новую аксиому можно получить на основании следующих соотношений. Пусть B — расслоенное пространство над базисным пространством X с проекцией p: $B \to X$ и пусть $x_0 \in X$, $Y_0 = p^{-1}(x)$ и $y_0 \in Y_0$. Тогда, как легко доказать с помощью теоремы о накрывающей гомотопии, гомоморфизм p_* является для любого $q \geqslant 2$ изоморфизмом группы $\pi_q(B, Y_0, y_0)$ на группу $\pi_q(X, x_0)$. Для групп гомологий отображение p_*, вообще говоря, изоморфизмом не является. Таким образом, мы имеем простое и полезное свойство гомотопических групп, которое, может быть, заменит аксиому вырезания.

Аксиоматическое описание гомотопических групп требует, кроме того, введения дополнительных основных понятий, а именно, изоморфизмов $\pi_q(X, A, x_0) \approx \pi_q(X, A, x_1)$, соответствующих гомотопическим классам путей пространства A, соединяющих точку x_0 с точкой x_1. Таким образом, мы имеем дело не с отдельными группами, а с системами групп,связанных изоморфизмами, отнесенными элементам фундаментального группоида пространства A. Эти изоморфизмы должны, в частности, определять группу $\pi_1(A, x_0)$ как группу операторов группы $\pi_q(X, A, x_0)$.

Когомотопические группы. Когомотопические группы Борсука—Спейньера (Ann.of Math. **50** (1949), 203—245) аналогичны группам когомологий. Когомотопическая q-мерная группа $\pi^q(X, A)$

---

[1]) В последнее время систему аксиом, описывающую гомотопические группы, предложил Ху (Hu, Axiomatic appriach to the homotopy groups, Bull. Amer. Math. Soc. **62**, № 5 (1956), 490—504.). (*Прим. ред.*)

компактной пары (X, A) конечной размерности n определена для всех $q > \frac{(n+1)}{2}$ и является абелевой группой. Элементами группы $\pi^q(X, A)$ являются гомотопические классы отображений пары (X, A) в пару (S^q, y_0), где S^q — q-мерная сфера, а y_0 — некоторая ее точка. Множество элементов группы $\pi^q(X, A)$ определено для любого $q \geqslant 0$, но сложение в этом множестве определено только для $q > \frac{(n+1)}{2}$. Граничный оператор δ: $\pi^{q-1}(A) \to \pi^q(X, A)$ определен для любого $q > 0$ и является гомоморфизмом, если $q - 1 > \frac{(n+1)}{2}$. Любое отображение f: $(X, A) \to (Y, B)$ индуцирует отображение $f^*: \pi^q(Y, B) \to \pi^q(X, A)$, являющееся гомоморфизмом, если $\pi^q(Y, B)$ и $\pi^q(X, A)$ являются группами. Спейньер показал (там же), что когомотопические группы удовлетворяют аналогам всех аксиом теории когомологий постольку, поскольку эти аналоги имеют смысл.

Задача аксиоматического описания когомотопических групп еще не рассматривалась. Основное различие между теорией когомологий и теорией когомотопий состоит в том, что множество $\pi^q(X, A)$ при $q \leqslant \frac{(n+1)}{2}$ не является группой. Поэтому невозможно вычислять когомотопические группы индуктивным путем, отправляясь от $q = 0$. О когомотопических группах мы знаем еще меньше, чем о гомотопических группах.

Упражнения

А. Элементарные свойства точных последовательностей

Доказать следующие свойства точной обратной последовательности $\{G_q, \varphi_q\}$:

1. $\varphi_{q+1} = 0$ тогда и только тогда, когда $\operatorname{Ker} \varphi_q = 0$.
2. $\varphi_{q-1} = 0$ тогда и только тогда, когда $\varphi_q(G_q) = G_{q-1}$.
3. $\varphi_{q+1} = 0$ и $\varphi_{q-1} = 0$ тогда и только тогда, когда φ_q: $G_q \approx G_{q-1}$.
4. $G_q = 0$ тогда и только тогда, когда $\varphi_{q+1} = 0$ и $\varphi_q = 0$.
5. $G_q = 0$ тогда и только тогда, когда $\varphi_{q+2}(G_{q+2}) = G_{q+1}$ и $\operatorname{Ker} \varphi_{q-1} = 0$.

В. Аксиомы

1. Показать, что аксиома 1 следует из аксиом 2, 3 и 4.
2. Показать, что аксиома 1 следует из аксиом 2 и 6.
3. Предположим, что для любой допустимой пары (X, A) отображение p: $(X, A) \times I \to (X, A)$, определенное формулой $p(x, t) = x$, допустимо. Показать, используя аксиомы 1 и 2, что аксиома гомотопии эквивалентна любой из двух следующих аксиом.

Аксиома 5''. Отображение p_* является изоморфизмом.
Аксиома 5'''. $\operatorname{Ker} p_* = 0$.

В следующих задачах предполагается, что теория гомологий определена на категории всех пар и любых их отображений.

C. Ретракты

1. Показать, что если композиция $\psi\varphi$ гомоморфизмов $\varphi: G \to H$, $\psi: H \to G$ является тождественным отображением, то $\operatorname{Ker}\varphi = 0$ и группа H разлагается в прямую сумму

$$H = \operatorname{Ker}\psi + \operatorname{Im}\varphi.$$

2. Показать, что если для пары (X, A) существует ретрагирующее отображение $r: X \to A$, то группа $H_q(X)$ разлагается в прямую сумму

$$H_q(X) = \operatorname{Im} i_{*q} + \operatorname{Ker} r_{*q},$$

где $i: A \subset X$. Вывести отсюда, что

$$H_q(X) \approx H_q(A) + H_q(X, A).$$

D. Нульмерные группы

1. Доказать, что $H_0(X, x) \approx \tilde{H}_0(X)$ для любой точки $x \in X$.

2. Доказать, что $\tilde{H}_0(X) = 0$ тогда и только тогда, когда $H_0(X, A) = 0$ для всех непустых подмножеств A пространства X.

3. Доказать, что если пространство X — линейно-связно, то $(gx)_X = (gx')_X$ и, следовательно, $(Gx)_X = (Gx')_X$ для любых точек $x, x' \in X$ и любого элемента $g \in G$.

4. Доказать, что если хаусдорфово пространство X состоит только из двух точек, то $\tilde{H}_0(X) \approx G$.

5. Доказать, что если $G \neq 0$, а $\tilde{H}_0(X) = 0$, то пространство X связно.

E. Тривиальные отображения

1. Доказать, что если $f: (X, A) \to (Y, B)$ — такое отображение, что $f(X) \subset B$, то $f_{*q} = 0$ для всех q.

2. Доказать, что если $f: X \to (Y, B)$ — такое отображение, что $f(X)$ состоит только из одной точки пространства Y, то $f_{*q} = 0$ для $q \neq 0$ и $\tilde{f}_{*0} = 0$.

F. Теорема о прямой сумме

1. Доказать теорему 13.2 для пересекающихся множеств X_α, предполагая, что пространство X нормально, а множества $X_\alpha \setminus A_\alpha$ не пересекаются.

G. Аддиционные последовательности

1. Пусть $(X; X_1, X_2)$ — произвольная собственная триада. Показать, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} H_{q+1}(X, X_1 \cup X_2) & \xrightarrow{\partial_1} & H_q(X_1, X_1 \cap X_2) \\ \Big\downarrow \partial_2 & & \Big\downarrow \partial \\ H_q(X_2, X_1 \cap X_2) & \xrightarrow{\partial} & H_{q-1}(X_1 \cap X_2), \end{array}$$

в которой ∂_1 и ∂_2 — граничные операторы триад $(X; X_1, X_2)$ и $(X; X_2, X_1)$ соответственно, удовлетворяет соотношению антикоммутативности

$$\partial\partial_1 + \partial\partial_2 = 0.$$

2. Пусть $(X; X_1, X_2)$ — произвольная собственная триада. Доказать, что оператор ∂ отображает относительную аддиционную последовательность этой триады в аддиционную последовательность триады $(X_1 \cup X_2; X_1, X_2)$.

3. Показать, что граничный оператор Δ (см. определение 15.6) относительной аддиционной последовательности триады $(X \times I,\ X \times 0,\ X \times 1)$ является изоморфизмом. Таким образом, $H_q(X \times I, X \times 0 \cup X \times 1) \approx H_{q-1}(X)$. Доказать этот изоморфизм, не пользуясь явно аддиционной последовательностью.

4. Пусть $(X; X_1, X_2)$ — собственная триада, для которой $X = X_1 \cup X_2$, и пусть $A = X_1 \cap X_2$, $I = [0, 1]$ и

$$Y = (X_1 \times 0) \cup (A \times I) \cup (X_2 \times 1),$$
$$B = (X_1 \times 0) \cup (X_2 \times 1).$$

Показать, используя изоморфизм, указанный в задаче 3, что аддиционная последовательность триады $(X; X_1, X_2)$ изоморфна гомологической последовательности пары (Y, B).

5. Показать, что относительная аддиционная последовательность триады $(X; X_1, X_2)$ изоморфна гомологической последовательности тройки, состоящей из произведения $X \times I$ и некоторых его подпространств.

6. Изучить аддиционную последовательность триады $(X; X; X)$.

7. Рассмотреть собственную триаду $(X; X_1, X_2)$, для которой $X = X_1 \cup X_2$, $A = X_1 \cap X_2 = \varnothing$. Определить для нее приведенную аддиционную последовательность и доказать точность этой последовательности.

H. Ранги групп

Предполагается, что все рассматриваемые группы являются D-модулями над областью целостности D (т. е. над коммутативным кольцом D с единицей, в котором из $d_1 \neq 0$ и $d_2 \neq 0$ следует, что $d_1 d_2 \neq 0$).

Определение. Элементы $g_1,\ldots,g_r$ D-модуля G называются *линейно независимыми*, если из соотношения $d_1g_1+\ldots+d_rg_r=0$, где $d_1,\ldots,d_r\in D$, следует, что $d_1=\ldots=d_r=0$. Максимальное число линейно независимых элементов модуля G называется его *рангом* и обозначается через $r(G)$ (или $r_D(G)$, если желательно отметить кольцо D). Если этот максимум не существует, то полагают $r(G)=\infty$. Если D — поле, то $r(G)$ является размерностью линейного пространства G над полем D.

1. Показать, что $r(G)+r(H)=r(G/H)$ для любого подмодуля H модуля G.

2. Пусть для точной обратной последовательности модулей $\{G_q,\varphi_q\}$ все числа $r(G_q)$ конечны. Положим $\pi_q=r$ ($\operatorname{Ker}\varphi_q$). Показать, что для любых $m\leqslant n$

$$\sum_{q=m}^{n}(-1)^q r(G_q)=(-1)^n\pi_n-(-1)^{m-1}\pi_{m-1}.$$

I. Числа Бетти

Определение. Предположим, что теория гомологий определена так, что все группы $H_q(X,A)$ являются D-модулями, а гомоморфизмы f_* и ∂ — линейными (над D) гомоморфизмами. Ранг $r[H_q(X,A)]$ обозначается в этом случае через $R_q(X,A)$ и называется q-мерным *числом Бетти* пары (X,A).

1. Пусть (X,A) — произвольная пара. Рассмотреть три последовательности чисел $\{R_q(A)\}$, $\{R_q(X)\}$, $\{R_q(X,A)\}$. Показать, что, если две из этих последовательностей состоят только из конечных чисел, то и третья последовательность также обладает этим свойством. Показать, что если в двух из этих последовательностей только конечное число членов отлично от нуля, то и третья последовательность обладает этим свойством.

2. Показать (предполагая все рассматриваемые числа конечными), что

$$\sum_{q=n}^{m}(-1)^q R^q(X)-\sum_{q=n}^{m}(-1)^q R_q(A)-$$
$$-\sum_{q=n}^{m}(-1)^q R_q(X,A)=(-1)^{n-1}w_{n-1}-(-1)^m w_m,$$

где w_q — ранг ядра гомоморфизма $H_q(A)\to H_q(X)$, индуцированного вложением $A\subset X$.

Определение. Пусть все числа $\{R_q(X,A)\}$ конечны и только конечное число из них отлично от нуля. Тогда определена сумма

$$\chi(X,A)=\sum_{-\infty}^{\infty}(-1)^q R_q(X,A),$$

называемая *эйлеровой характеристикой пары* (X,A).

3. Если две из трех эйлеровых характеристик $\chi(A)$, $\chi(X)$ и $\chi(X, A)$ определены, то определена и третья, причем

$$\chi(X) = \chi(A) + \chi(X, B).$$

4. Пусть $(X; X_1, X_2)$ — собственная триада, для которой $X = X_1 \cup X_2$, и пусть $A = X_1 \cap X_2$. Обозначая через N_q пересечение ядер гомоморфизмов

$$H_q(A) \to H_q(X_1), \qquad H_q(A) \to H_q(X_2),$$

индуцированных вложениями $A \subset X_1$ и $A \subset X_2$, доказать формулу Майера—Виеториса

$$R_q(X_1 \cup X_2) + R_q(X_1 \cap X_2) = \\ = R_q(X_1) + R_q(X_2) + r(N_q) + r(N_{q-1})$$

и вывести из нее формулу

$$\chi(X_1 \cup X_2) + \chi(X_1 \cap X_2) = \chi(X_1) + \chi(X_2),$$

предполагая, конечно, что все рассматриваемые эйлеровы характеристики определены.

5. Написать формулу Майера—Виеториса для когомологий. Написать *относительную* формулу Майера—Виеториса для гомологий и когомологий.

ГЛАВА II

СИМПЛИЦИАЛЬНЫЕ КОМПЛЕКСЫ

1. Введение

В этой главе развиваются некоторые, необходимые для следующих глав, аналитико-геометрические понятия, как-то понятия комплекса, подкомплекса, симплициального отображения, триангуляции и симплициальной аппроксимации. Теория гомологий в этой главе не рассматривается; ее изучение возобновляется в главе III. Основанием для такого пропуска является необходимость построить достаточно простые пространства (триангулируемые пространства), группы гомологий которых допускают алгорифмическое вычисление. Строение пространств этого класса определяется результатами главы I. Зная группы гомологий точек, мы знаем группы гомологий стягиваемых пространств. Мы выбираем некоторый класс стягиваемых пространств (так называемых симплексов) и образуем более сложные пространства (комплексы), объединяя симплексы некоторым регулярным образом. Группы гомологии последних пространств могут быть вычислены с помощью аддиционных последовательностей или другими аналогичными методами.

Однако недостаточно уметь только вычислять группы, необходимо уметь также вычислять и их гомоморфизмы, индуцированные отображениями. С этой целью мы определяем некоторый класс достаточно простых отображений — класс симплициальных отображений. Несмотря на то что этот класс очень узок, можно показать, что любое отображение триангулируемых пространств гомотопно некоторому симплициальному отображению. Более того, симплициальные отображения всюду плотны в функциональном пространстве всех отображений. Доказательство этого фундаментального факта основывается на барицентрических подразделениях и на теореме о симплициальной аппроксимации.

Хотя триангулируемые пространства кажутся очень узким классом, большинство пространств, встречающихся в применениях топологии к геометрии и анализу, имеют этот тип. Более того, в главе X будет показано, что любое компактное пространство является в некотором разумном смысле пределом триангулируемых пространств. В этом смысле триангулируемые пространства всюду плотны в множестве всех компактных пространств.

2. Симплексы

Определение 2.1. *Симплексом s размерности n* (или просто *n-симплексом)* называется некоторое множество $\{A\}$, состоящее из $n+1$ элементов, рассматриваемое вместе с совокупностью всех действительных функций α, определенных на множестве $\{A\}$ и удовлетворяющих следующим условиям:

$$(1) \qquad \sum_A \alpha(A) = 1, \quad \alpha(A) \geqslant 0.$$

Элементы множества $\{A\}$ называются *вершинами*, а функции α — *точками* симплекса s. Значения функции α на вершинах симплекса s называются *барицентрическими координатами точки* α. Расстояние $\varrho(\alpha, \beta)$ между двумя точками α, β симплекса s определяется формулой

$$\varrho(\alpha, \beta) = [\sum_A (\alpha(A) - \beta(A))^2]^{1/2}.$$

Получающееся топологическое пространство обозначается через $|s|$ и называется *пространством симплекса s*. Очевидно, что барицентрические координаты являются непрерывными функциями на пространстве $|s|$.

Для объяснения происхождения термина «барицентрические координаты» предположим, что вершины $\{A\}$ симплекса s являются точками некоторого евклидова пространства, и отнесем каждой вершине A массу $\alpha(A)$. Тогда точке α симплекса s будет соответствовать центр тяжести этой системы масс.

Определение 2.2. Симплекс s, рассматриваемый вместе с некоторой упорядоченностью $A^0 < \ldots < A^n$ его вершин, называется *упорядоченным симплексом*. Пусть R^{n+1} — арифметическое пространство с координатами $(x_0, \ldots, x_n)$. Тогда соответствие $\alpha \to (\alpha(A^0), \ldots, \alpha(A^n))$ является изометрическим отображением $s \to R^{n+1}$. Это отображение называется *каноническим вложением* симплекса s в пространство R^{n+1}. Образ симплекса s в пространстве R^{n+1} при этом отображении обозначается через Δ^n и называется *единичным симплексом* пространства R^{n+1}. Очевидно, что симплекс Δ^n является пересечением плоскости $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$ с сектором $x_i \geqslant 0$ $(i = 1, \ldots, n)$.

Так как множество Δ^n замкнуто и ограничено в пространстве R^{n+1}, то оно компактно. Следовательно, для любого симплекса s пространство $|s|$ компактно. Очевидно, что размерность пространства $|s|$ в евклидовом смысле равна n. Подчеркнем, что неупорядоченный n-мерный симплекс имеет $(n+1)!$ канонических вложений в пространство R^{n+1}, соответствующих различным упорядочениям вершин.

Определение 2.3. *Гранью* s' некоторого n-мерного симплекса s называется симплекс, вершины которого образуют подмножество множества вершин симплекса s. Грань размерности q называется также *q-гранью*.

Любая точка α' грани s' по определению является функцией, заданной на некотором подмножестве множества вершин симплекса s. Эту функцию можно продолжить до функции α, определенной на множестве всех вершин, полагая $\alpha(A) = \alpha'(A)$, если $A \in s'$, и $\alpha(A) = 0$ в противном случае. Очевидно, что функция α является точкой симплекса s. Из условия (1), которому должны удовлетворять функции α и α', следует, что продолжение α функции α' единственно. Отображение $\alpha' \to \alpha$ определяет изометрическое вложение пространства $|s'|$ в пространство $|s|$. Следуя принятому обыкновению, мы будем отождествлять точки α и α' и тем самым будем рассматривать множество $|s'|$ как подмножество множества $|s|$. Это подмножество, очевидно, замкнуто в $|s|$. Оно определяется уравнениями $\alpha(A) = 0$, где A — любая вершина, не принадлежащая грани s'.

Нульмерный симплекс имеет только одну вершину A и только одну точку $\alpha(A) = 1$. Принято отождествлять эту вершину с этой точкой и обозначать каждую из них через A. При этом соглашении вершины A симплекса s являются, с одной стороны, его нульмерными гранями, а с другой — его точками. В частности, для любых двух вершин A и B определен символ $A(B)$, причем $A(B) = 0$, если $A \neq B$, и $A(B) = 1$, если $A = B$. Вершинами единичного симплекса Δ^n пространства R^{n+1} являются единичные точки осей координат. Кроме того, симплекс Δ^n является минимальным выпуклым множеством в пространстве R^{n+1}, содержащим эти единичные точки. В соответствии с этим говорят, что симплекс *натянут* на свои вершины.

Определение 2.4. *Теоретико-множественной границей* $|\dot{s}|$ симплекса s называется множество всех его точек, хотя бы одна координата которых равна нулю. Очевидно, что граница $|\dot{s}|$ является замкнутым подмножеством пространства $|s|$. Открытое множество $|s| \setminus |\dot{s}|$ называется *внутренностью* симплекса s, а также *открытым симплексом*.

Пусть $\alpha^0, \ldots, \alpha^q$ — точки некоторого n-мерного симплекса s и $w_0, \ldots, w_q$ — такие неотрицательные действительные числа, что $w_0 + \ldots + w_q = 1$. Тогда функция α, определенная равенством

$$\alpha = w_0\alpha^0 + \ldots + w_q\alpha_q,$$

также является точкой симплекса s. Действительно, очевидно, что $\alpha(A) \geqslant 0$ в любой вершине A симплекса s и

$$\sum_A \alpha(A) = \sum_A \sum_i w_i\alpha^i(A) = \sum_i w_i \sum_A \alpha^i(A) = \sum_i w_i = 1.$$

Лемма 2.5. *Пусть $\alpha^0, \ldots, \alpha^q$ — такие точки симплекса s и $w_0, \ldots, w_q$ — такие положительные числа, сумма которых равна единице, что точка $\Sigma w_i \alpha^i$ является вершиной A симплекса s. Тогда $\alpha^i = A$ для всех i.*

Доказательство. Для любой вершины $B \neq A$ симплекса s имеем $\Sigma w_i \alpha^i(B) = A(B) = 0$. Так как $w_i > 0$ для любого i, то $\alpha^i(B) = 0$. Так как это верно для любой точки B, отличной от A, то, следовательно, $\alpha^i = A$.

3. Симплициальные комплексы

Определение 3.1. *Симплициальным комплексом* K называется множество граней симплекса s, содержащее вместе с некоторым симплексом и все его грани. *Пространство* $|K|$ *комплекса* K определяется как подмножество пространства $|s|$, состоящее из всех точек симплексов комплекса K.

Один и тот же симплициальный комплекс может лежать в двух различных симплексах s_1 и s_2. В этом случае комплекс K лежит в симплексе s, натянутом на вершины, общие обоим симплексам s_1 и s_2. Так как топология симплекса s индуцируется топологиями каждого из пространств $|s_1|$ и $|s_2|$, то топология комплекса[1]) K не зависит от того симплекса s, который используется в его определении.

Множество всех граней симплекса s, включая и сам симплекс s, является симплициальным комплексом. Этот комплекс мы также будем обозначать через s. Множество всех граней симплекса s, исключая сам симплекс s, тоже является симплициальным комплексом. Этот комплекс мы будем обозначать через $\dot{s}$.

Определение 3.2. Симплициальный комплекс K называется *n-мерным* (короче, *n-комплексом*), если K содержит хотя бы один n-мерный, но не содержит ни одного $(n+1)$-мерного симплекса (и, следовательно, не содержит симплексов размерности $> n$).

Определение 3.3. *Подкомплексом* L симплициального комплекса K называется совокупность симплексов комплекса K, содержащая вместе с некоторым симплексом и все его грани. Любой подкомплекс является симплициальным комплексом.

Лемма 3.4. *Пусть $\alpha^0, \ldots, \alpha^n$ — точки симплициального комплекса K и пусть $w_0, \ldots, w_n$ — такие положительные числа, что $w_0 + \ldots + w_n = 1$. Оказывается, что точка $\alpha = w_0\alpha^0 + \ldots + w_n\alpha^n$ тогда и только тогда принадлежит комплексу K, когда точки $\alpha^0, \ldots, \alpha^n$ все лежат в одном симплексе комплекса K.*

Доказательство. Пусть s — симплекс, содержащий комплекс K, и пусть s' — наименьшая по размерности грань симплекса s, содержащая точки $\alpha^0, \ldots, \alpha^n$. Тогда $\alpha \in s'$.

[1]) Точнее, топология пространства $|K|$. (*Прим. ред.*)

Если точки $a^0, \ldots, a^n$ лежат в некотором симплексе комплекса K, то симплекс s' содержится в комплексе K и $a \in |K|$. Тем самым достаточность условия доказана.

Предположим теперь, что $a \in |K|$. Если $A^0, \ldots, A^q$ — вершины симплекса s', то

$$a = a(A^0)\, A^0 + \ldots + a(A^q)\, A^q,$$

где

$$a(A^i) = \sum_j w_j a^j(A^i).$$

Так как $w_i > 0$ и так как s' — наименьший симплекс, содержащий точки $a^0, \ldots, a^n$, то $a(A^i) > 0$ и, следовательно, точка a принадлежит внутренности симплекса s'. Поэтому из включения $a \in |K|$ следует, что симплекс s' содержится в комплексе K, так что точки $a^0, \ldots, a^n$ действительно принадлежат одному симплексу комплекса K.

Следствие 3.5. *Точка*

$$a = w_0 a^0 + \ldots + w_n a^n,$$

где $a^0, \ldots, a^n \in |K|$ *и* $w_0 + \ldots + w_n = 1$, *тогда и только тогда лежит в* K, *когда точки* $a^0, \ldots, a^n$ *содержатся в одном симплексе комплекса* K.

Определение 3.6. *Открытой звездой* некоторой вершины A комплекса K называется подмножество $\operatorname{st}(A)$ комплекса K, определенное неравенством $a(A) > 0$.

Это определение равносильно следующему: $\operatorname{st}(A)$ есть объединение всех открытых симплексов комплекса K, имеющих точку A своей вершиной.

Лемма 3.7. *Пусть* $A^0, \ldots, A^n$ — *различные вершины симплициального комплекса* K. *Оказывается, что их открытые звезды тогда и только тогда имеют непустое пересечение, когда вершины* $A^0, \ldots, A^n$ *являются вершинами некоторого симплекса комплекса* K.

Доказательство. Пусть $A^0, \ldots, A^n$ — вершины симплекса s. Тогда внутренность симплекса s содержится в $\operatorname{st}(A^i)$ для всех i и, следовательно, $\bigcap \operatorname{st}(A^i) \neq \varnothing$. Обратно, пусть $a \in \bigcap \operatorname{st}(A^i)$. Тогда $a(A^i) > 0$ для любого $i = 0, \ldots, n$, и поэтому в силу леммы 3.4 точки $A^0, \ldots, A^n$ являются вершинами некоторого симплекса комплекса K.

4. Линейные и симплициальные отображения

Определение 4.1. Пусть K, K' — произвольные симплициальные комплексы. Отображение $f\colon |K| \to |K'|$ называется *линейным* (обозначение: $f\colon K \to K'$), если оно линейно в барицентрических координатах, т. е. удовлетворяет следующему условию: если $a, a^0, \ldots, a^n \in |K|$ и

$$a = w_0 a^0 + \ldots + w_n a^n, \qquad \sum_0^n w_i = 1, \qquad w_i \geqslant 0,$$

то

$$f(\alpha) = w_0 f(\alpha^0) + \ldots + w^n f(\alpha^n).$$

Линейное отображение, переводящее вершины в вершины, называется *симплициальным*.

Пусть L и L' — подкомплексы комплексов K и K' соответственно. Под *линейным (симплициальным)* отображением $f\colon (K, L) \to (K', L')$ подразумевают отображение пары $(|K|, |L|)$ в пару $(|K'|, |L'|)$, определяющее линейное (симплициальное) отображение комплекса K в комплекс K'.

Тривиальными следствиями этого определения являются следующие две теоремы.

Теорема 4.2. *Тождественное отображение $(K, L) \to (K, L)$ симплициально.*

Теорема 4.3. *Если отображения $f\colon (K, L) \to (K', L')$ и $g\colon (K', L') \to (K'', L'')$ линейны (симплициальны), то и отображение $gf\colon (K, L) \to (K'', L'')$ линейно (симплициально).*

Следующая теорема выражает основное свойство симплициальных комплексов: линейные отображения описываются своим поведением в вершинах.

Теорема 4.4. *Линейное отображение $f\colon (K, L) \to (K', L')$ однозначно определено его значениями в вершинах. Отображение φ множества вершин комплекса K в комплекс K' тогда и только тогда можно продолжить до линейного отображения $f\colon (K, L) \to$ $\to (K', L')$, когда φ-образ множества вершин любого симплекса комплекса K (подкомплекса L) содержится в некотором симплексе комплекса K' (соответственно подкомплекса L'). Если φ отображает вершины в вершины, то отображение f симплициально.*

Доказательство. Пусть отображение $f\colon (K, L) \to (K', L')$ линейно и пусть α — произвольная точка симплекса s комплекса K. Тогда

$$\alpha = \alpha(A^0)A^0 + \ldots + \alpha(A^n)A^n,$$

где $A^0, \ldots, A^n$ — вершины симплекса s и, следовательно,

$$f(\alpha) = \alpha(A^0) f(A^0) + \ldots + \alpha(A^n) f(A^n).$$

Таким образом, значение $f(\alpha)$ отображения f в любой точке α определено значениями отображения f в вершинах. Далее, если α — внутренняя точка симплекса s, то $\alpha(A^i) > 0$ для любого $i = 0, \ldots, n$ и согласно лемме 3.4 $f(A^0), \ldots, f(A^n)$ являются точками некоторого симплекса комплекса K'. Аналогично, если s — симплекс подкомплекса L, то $f(A^0), \ldots, f(A^n)$ являются точками некоторого симплекса подкомплекса L'. Тем самым необходимость условия теоремы 4.4 для продолжаемости отображения φ доказана.

Для доказательства достаточности этого условия рассмотрим симплексы s и s', натянутые на все вершины комплексов K и K' соответственно. Пусть $A^0, \ldots, A^n$ — вершины симплекса s и пусть

φ — произвольное отображение вершин, удовлетворяющее условиям теоремы 4.4. Тогда формула

$$f(\alpha) = \alpha(A^0)\,\varphi(A^0) + \ldots + \alpha\ (A^n)\,\varphi(A^n)$$

определяет значение $f(\alpha)$ отображения f в любой точке α симплекса s. Легко видеть, что точка $f(\alpha)$ принадлежит симплексу s' и что получающееся отображение f: $s \to s'$ линейно.

Пусть теперь $\alpha \in |K|$ (или $\alpha \in |L|$) и пусть $B^0, \ldots, B^q$ — подпоследовательность последовательности $A^0, \ldots, A^n$, состоящая из вершин, для которых $\alpha(A^i) > 0$. Тогда $\alpha = \alpha(B^0)B^0 + \ldots$ $\ldots + \alpha(B^q)\,B^q$, причем $\alpha(B^i) > 0$. Следовательно, согласно лемме 3.4 вершины $B^0, \ldots, B^q$ являются вершинами некоторого симплекса комплекса K (соответственно подкомплекса L). Поэтому все точки $\varphi(B^0), \ldots, \varphi(B^q)$ принадлежат одному симплексу комплекса K' (соответственно подкомплекса L') и, следовательно, точка

$$f(\alpha) = \alpha(B^0)\,\varphi(B^0) + \ldots + \alpha(B^q)\,\varphi(B^q)$$

принадлежит комплексу K' (соответственно подкомплексу L'). Таким образом, отображение f определяет линейное отображение f: $(K, L) \to (K', L')$. Теорема полностью доказана.

Очевидным следствием определения 4.1 является

Теорема 4.5. *Пусть f: $(K, L) \to (K', L')$ — линейное (симплициальное) отображение и пусть $(\tilde{K}, \tilde{L})$, $(\tilde{K}', \tilde{L}')$ — такие подкомплексы комплексов (K, L), (K', L') соответственно, что f отображает $|\tilde{K}|$ в $|\tilde{K}'|$ и $|\tilde{L}|$ в $|\tilde{L}'|$. Тогда отображение пары $(\tilde{K}, \tilde{L})$ в пару $(\tilde{K}', \tilde{L}')$, определенное отображением f, также линейно (симплициально).*

Лемма 4.6. *Если линейное отображение f: $K \to K'$ отображает $|K|$ на $|K'|$, то любая вершина комплекса K' является образом хотя бы одной вершины комплекса K.*

Доказательство. Пусть B — произвольная вершина комплекса K'. Тогда $B = f(\alpha)$, где α — некоторая точка комплекса K. Пусть $\alpha = \Sigma\,\alpha(A^i)\,A^i$, где A^i — вершины комплекса K. Тогда $B = \Sigma\,\alpha(A^i)\,f(A^i)$. Согласно лемме 2.5 отсюда следует, что $B = f(A^i)$ для любого i, удовлетворяющего условию $\alpha(A^i) > 0$.

Теорема 4.7. *Для гомеоморфного симплициального отображения f: $K \to K'$ отображение f^{-1} симплициально.*

Доказательство. Из предыдущей леммы следует, что отображение f устанавливает взаимно однозначное соответствие между вершинами комплексов K и K'. Пусть φ — отображение вершин комплекса K' в вершины комплекса K, соответствующее отображению f^{-1}. Пусть, далее, $B^0, \ldots, B^n$ — вершины некоторого симплекса комплекса K' и β — произвольная внутренняя точка этого симплекса. Тогда

$$\beta = \nu_0 B^0 + \ldots + \nu_n B^n,$$

где $\Sigma v_i = 1$ и $v_i > 0$. Точка $f^{-1}(\beta)$ является точкой комплекса K и поэтому

$$f^{-1}(\beta) = w_0 A^0 + \ldots + w_m A^m,$$

где $A^0, \ldots, A^m$ — некоторые различные вершины комплекса K, $\Sigma w_i = 1$ и $w_i > 0$. Применяя к этому равенству отображение f, получим, что

$$\beta = w_0 f(A^0) + \ldots + w_m f(A^m).$$

Следовательно, $m = n$ и вершины $f(A^0), \ldots, f(A^m)$ с точностью до перестановки совпадают с вершинами $B^0, \ldots, B^n$. Отсюда следует, что, поскольку вершины, $A^0, \ldots, A^n$ являются вершинами некоторого симплекса комплекса K, то тем же свойством обладают и вершины $\varphi(B^0), \ldots, \varphi(B^n)$. Следовательно, в силу теоремы 4.4 отображение φ можно продолжить до симплициального отображения $g: K' \to K$. Очевидно, что $g = f^{-1}$.

Теорема 4.8. *Если отображение $f: K \to K'$ гомеоморфно и оба отображения f и f^{-1} линейны, то отображение f симплициально.*

Доказательство. Пусть A — произвольная вершина комплекса K. Тогда

$$f(A) = v_0 B^0 + \ldots + v_n B^n,$$

где $B^0, \ldots, B^n$ — вершины некоторого симплекса комплекса K', $\Sigma v_i = 1$ и $v_i > 0$. Применяя отображение f^{-1}, получим, что

$$A = v_0 f^{-1}(B^0) + \ldots + v_n f^{-1}(B^n).$$

Следовательно, согласно лемме 2.5 $A = f^{-1}(B^0) = \ldots = f^{-1}(B^n)$. Поэтому $B^0 = \ldots = B^n$ и точка $f(A)$ является вершиной комплекса K'.

5. Триангулированные пространства

Определение 5.1. *Триангуляцией* $T = \{t, (K, L)\}$ пары (X, A) называется симплициальная пара (K, L), рассматриваемая вместе с некоторым гомеоморфным отображением

$$t: (|K|, |L|) \to (X, A).$$

Пара (X, A), рассматриваемая вместе с некоторой триангуляцией T, называется *триангулированной парой*. Если для пары (X, A) существует хотя бы одна ее триангуляция, то пара называется *триангулируемой*.

Пусть $T = \{t, (K, L)\}$ и $T' = \{t', (K', L')\}$ — триангуляции пар (X, A) и (X', A') соответственно. Отображение

$$f: (X', A') \to (X, A)$$

называется линейным (или симплициальным) относительно триангуляций T, T', если отображение $t^{-1}ft'$ является линейным (или симплициальным) отображением пары (K', L') в пару (K, L).

Аналогично определяются триангулированные тройки и их линейные (симплициальные) отображения.

Непосредственным следствием определения является

Лемма 5.2. *Тождественное отображение триангулированной пары симплициально. Композиция двух линейных или двух симплициальных отображений является линейным или соответственно симплициальным отображением.*

Из теорем 4.7 и 4.8 следуют

Лемма 5.3. *Отображение, обратное симплициальному гомеоморфизму, симплициально.*

Лемма 5.4. *Линейный гомеоморфизм симплициален, если обратное ему отображение линейно.*

Задание триангуляции $T = \{t, (K, L)\}$ пары (X, A) позволяет с помощью отображения t переносить в пространство X различные «симплициальные» понятия, определенные в комплексе K. Так, под *симплексом триангуляции* T понимают t-образ некоторого симплекса комплекса K и т. д.

Определение 5.5. *Мелкостью* mesh T триангуляции $T = \{t, K\}$ метрического пространства X называется максимум диаметров симплексов триангуляции T:

$$\operatorname{mesh} T = \max\ [\operatorname{diam} t(|s|)],$$

где s — произвольный симплекс комплекса K.

Определение 5.6. Пусть $T = \{t, K\}$ — триангуляция пространства X. Функция f: $X \to R^n$, гемеоморфно отображающая пространство X на некоторое подмножество евклидова пространства R^n, называется *линейным вложением* пространства X в пространство R^n (относительно триангуляции T), если отображение ft: $K \to R^n$ линейно, т. е. если декартовы координаты точки $ft(\alpha)$ являются линейными функциями барицентрических координат точки α комплекса K. Метрика пространства X, определенная формулой

$$\varrho(x, y) = |f(x) - f(y)|, \quad x, y \in X,$$

где f — некоторое линейное вложение, называется *линейной* (относительно триангуляции T).

Лемма 5.7. *Любое пространство X с триангуляцией $T = \{t, K\}$ обладает линейным вложением.*

Доказательство. Комплекс K является подкомплексом некоторого q-мерного симплекса s. Пусть l: $|s| \to R^{q+1}$ — указанное в определении 2.2 каноническое вложение. Тогда отображение $f = lt^{-1}$ является линейным вложением пространства X в пространство R^{q+1}.

Следствие 5.8. *Любое триангулированное пространство обладает линейной метрикой.*

6. Барицентрическое подразделение

Пусть K — произвольный симплициальный комплекс, s — некоторый симплекс комплекса K и $A^0, \ldots, A^n$ — вершины симплекса s. *Центром тяжести* b_s симплекса s называется точка, определенная формулой

$$b_s = \frac{1}{n+1} A^0 + \ldots + \frac{1}{n+1} A^n.$$

В частности, $b_A = A$ для любой вершины A.

Отнесем комплексу K новый комплекс, который будем обозначать через $\operatorname{Sd} K$. Вершинами этого комплекса являются по определению центры тяжести симплексов комплекса K, причем центры тяжести симплексов $s_0, s_1, \ldots, s_q$ комплекса K тогда и только тогда составляют множество вершин некоторого симплекса комплекса $\operatorname{Sd} K$, когда симплекс s_i является гранью симплекса s_{i+1} ($i = 0, \ldots$ $\ldots, q-1$). Вершины $b_{s_0}, \ldots, b_{s_q}$ некоторого симплекса комплекса $\operatorname{Sd} K$ принадлежат симплексу s_q комплекса K. Поэтому тождественное отображение вершин комплекса $\operatorname{Sd} K$ в комплекс K можно согласно теореме 4.4 единственным образом распространить до некоторого линейного отображения

$$l_K \colon \operatorname{Sd} K \to K.$$

Определение 6.1. Комплекс $\operatorname{Sd} K$, рассматриваемый вместе с линейным отображением l_K, называется *барицентрическим подразделением* комплекса K.

Для любого подкомплекса L комплекса K комплекс $\operatorname{Sd} L$ является подкомплексом комплекса $\operatorname{Sd} K$, причем $l_L = l_K | \operatorname{Sd} L$. Пара $(\operatorname{Sd} K, \operatorname{Sd} L)$, рассматриваемая вместе с линейным отображением

$$l_{(K, L)} \colon (\operatorname{Sd} K, \operatorname{Sd} L) \to (K, L),$$

определенным отображением l_K, называется *барицентрическим подразделением* пары (K, L).

Лемма 6.2. *Отображение* l_K *взаимно однозначно. Следовательно, комплекс* $\operatorname{Sd} K$ *(линейно) гомеоморфен комплексу* K.

Доказательство. Пусть

$$(1) \qquad \alpha = w_0 b_{s_0} + \ldots + w_q b_{s_q}$$

— произвольная точка симплекса комплекса $\operatorname{Sd} K$, имеющего вершины $b_{s_0}, \ldots, b_{s_q}$. Так как точки $b_{s_0}, \ldots, b_{s_q}$ принадлежат одному симплексу комплекса K, то то же самое выражение (1) представляет некоторую точку пространства $|K|$. Следовательно, в принятых обозначениях отображение l_K является тождественным отображением. Не теряя общности, можно предполагать, что размерность каждого симплекса s_i, являющегося гранью симплекса s_{i+1}, равна i. Пусть $A^0, \ldots, A^q$ — вершины симплекса s_q, упорядоченные таким образом, что точки $A^0, \ldots, A^i$ являются вершинами симплекса s_i $(i = 0, \ldots, q)$. Тогда согласно определению центра тяжести

$$b_{s_i} = \frac{1}{i+1} A^0 + \ldots + \frac{1}{i+1} A^i.$$

Подставляя это выражение в формулу (1), находим, что

$$\alpha = \alpha(A^0)\, A^0 + \ldots + \alpha(A^q)\, A^q,$$

где

$$\alpha(A^i) = \sum_i^q \frac{1}{j+1} w_j \tag{2}$$

— барицентрические координаты точки α в комплексе K. Из формулы (2) следует, что

$$\alpha(A^0) \geqslant \ldots \geqslant \alpha(A^q) \tag{3}$$

и

$$\begin{cases} w_i = (i+1)\,[\alpha(A^i) - \alpha(A^{i+1})] \text{ для } i = 0, \ldots, q-1, \\ w_q = (q+1)\,\alpha(A^q). \end{cases} \tag{4}$$

Эти формулы показывают, что отображение l_K взаимно однозначно отображает симплекс комплекса $\operatorname{Sd} K$, имеющий вершины $b_{s_0}, \ldots$ $\ldots, b_{s_q}$, на часть симплекса $A^0, \ldots, A^q$, определенную условиями (3). Любая точка α симплекса $A^0, \ldots, A^q$ принадлежит множеству, определенному условиями (3), соответствующими некоторому порядку вершин A^i. Если эта точка принадлежит двум таким множествам, то в одном из соответствующих упорядочений $\alpha(A^i) = \alpha(A^{i+1})$. В этом случае $w_i = 0$, так что преобразование (4) однозначно определено. Оно, очевидно, обратно отображению l_K.

Следующая лемма является непосредственным следствием определения комплекса $\operatorname{Sd} K$.

Лемма 6.3. *Для любого n-мерного комплекса K комплекс $\operatorname{Sd} K$ также является n-мерным комплексом.*

Определение 6.4. *Пусть $T = \{t, (K, L)\}$* — произвольная триангуляция пары (X, A). Рассмотрим барицентрическое подразделение $(\operatorname{Sd} K, \operatorname{Sd} L)$ и его линейный гомеоморфизм $l_{(K, L)}$ на пару (K, L). Триангуляция

$$\operatorname{Sd} T = \{t l_{(K, L)}, (\operatorname{Sd} K, \operatorname{Sd} L)\}$$

называется *барицентрическим подразделением* триангуляции T. Многократные барицентрические подразделения триангуляции T определяются индуктивно по формулам

$${}^0T = T, \quad {}^iT = \operatorname{Sd}({}^{i-1}T) \quad (i = 1, 2, \ldots).$$

Лемма 6.5. *Для любой триангуляции $T = \{t, K\}$ метрического пространства*

$$\lim_{i \to \infty} \operatorname{mesh} {}^iT = 0.$$

Так как пространство X компактно, то рассматриваемый предел (если он равняется нулю) не зависит от выбора метрики. Поэтому ввиду следствия 5.8 мы можем считать, что метрика пространства X линейна. Если комплекс K имеет размерность n, то согласно лемме 6.3 его последовательные барицентрические подразделения также являются n-мерными комплексами. Лемма 6.5 вытекает поэтому из следующей более точной леммы.

Лемма 6.6. *Пусть X — пространство с метрикой, линейной относительно триангуляции $T=\{t, K\}$, для которой комплекс K n-мерен. Тогда*

$$\operatorname{mesh} \operatorname{Sd} T \leqslant \frac{n}{n+1} \operatorname{mesh} T.$$

Эта лемма непосредственно вытекает из нижеприводимой последовательности элементарных лемм, относящихся к точкам евклидова пространства.

Пусть $p_0, \ldots, p_n$ — произвольная последовательность точек евклидова пространства R^q. Рассмотрим множество $C(p_0, \ldots, p_n)$ всех точек $x \in R^q$, имеющих вид (в векторных обозначениях)

$$x = w_0 p_0 + \ldots + w_n p_n,$$

где $w_i \geqslant 0$ и $\Sigma w_i = 1$. Заметим, что для любых точек $x, y \in C$ имеет место неравенство

(1) $|y-x| \leqslant |y-p_i|$ для некоторого $i=0, \ldots, n$.

Действительно,

$$\begin{aligned} |y-x| &= |\Sigma (w_i y - w_i p_i)| \leqslant \Sigma w_i |y-p_i| \leqslant \\ &\leqslant (\max |y-p_i|) \Sigma w_i = \max |y-p_i|. \end{aligned}$$

Применяя дважды неравенство (1), мы находим, что $|y-x| \leqslant |p_j - p_i|$ для некоторых p_i и p_j. Отсюда следует

Лемма 6.7. $\operatorname{diam} C(p_0, \ldots, p_n) = \operatorname{diam}(p_0, \ldots, p_n)$.

Лемма 6.8. *Если*

$$b = \frac{1}{n+1}(p_0 + \ldots + p_n), \quad b' = \frac{1}{i+1}(p_0 + \ldots + p_n), \; i \leqslant n,$$

то

$$|b-b'| \leqslant \frac{n}{n+1} \operatorname{diam}(p_0, \ldots, p_n).$$

Действительно, согласно формуле (1) имеем $|b-b'| \leqslant |b-p_j|$ для некоторого $j=0, \ldots, n$. Следовательно,

$$\begin{aligned} |b-b'| &\leqslant |b-p_j| = \\ &= \left| \frac{1}{n+1}(p_0 + \ldots + p_n) - p_j \right| = \frac{1}{n+1} \left| \sum_{i=0}^{n} (p_i - p_j) \right| \leqslant \\ &\leqslant \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^{n} |p_i - p_j| \leqslant \frac{n}{n+1} \operatorname{diam}(p_0, \ldots, p_n). \end{aligned}$$

Из лемм 6.7 и 6.8 вытекает, что для любого симплекса s' барицентрического подразделения некоторого n-мерного симплекса s триангуляции T имеет место неравенство $\operatorname{diam} s' \leqslant \frac{n}{(n+1)} \operatorname{diam} s$ (в линейной метрике). Лемма 6.6 следует отсюда непосредственно.

7. Симплициальная аппроксимация

Определение 7.1. Пусть X и X' — два пространства с триангуляциями $T=\{t, K\}$ и $T'=\{t', K'\}$ соответственно и пусть $f\colon X \to X'$ — произвольное отображение пространства X в пространство X'. Симплициальное (относительно триангуляций T, T') отображение $g\colon X \to X'$ называется *симплициальной аппроксимацией отображения* f, если для любой точки $x \in X$ точка $g(x)$ принадлежит замкнутому симплексу, внутренность которого содержит точку $f(x)$.

Лемма 7.2. *Симплициальное отображение $g\colon X \to X'$ тогда и только тогда является симплициальной аппроксимацией отображения f, когда для любой вершины A пространства X*

$$f(\operatorname{st}(A)) \subset \operatorname{st}(g(A)).$$

Доказательство. Пусть отображение g является симплициальной аппроксимацией отображения f и пусть $x \in \operatorname{st}(A)$, т. е. пусть точка x имеет положительную барицентрическую координату относительно вершины A. Тогда точка $g(x)$ имеет положительную барицентрическую координату относительно вершины $g(A)$. Так как точка $g(x)$ лежит в замыкании открытого симплекса, содержащего точку $f(x)$, то, следовательно, точка $f(x)$ имеет положительную барицентрическую координату относительно вершины $g(A)$, т. е. $f(x) \in \operatorname{st}(g(A))$.

Обратно, пусть условия леммы 7.2 выполнены. Пусть $x \in X$ и пусть s — симплекс пространства X (относительно триангуляции T), содержащий внутри себя точку x. Пусть аналогично s' — симплекс (относительно триангуляции T') пространства X', содержащий внутри себя точку $f(x)$. Для любой вершины A симплекса s точка x принадлежит звезде $\operatorname{st}(A)$ и, следовательно, $f(x) \in \operatorname{st}(g(A))$. Таким образом, точка $g(A)$ является вершиной симплекса s', т. е. g отображает симплекс s на некоторую грань симплекса s'. Следовательно, точка $g(x)$ принадлежит замкнутому симплексу s'.

Основным результатом этого пункта является следующая теорема существования.

Теорема 7.3. *Пусть X — триангулируемое метрическое пространство и X' — триангулированное пространство с триангуляцией $T'=\{t', K'\}$. Тогда для любого отображения $f\colon X \to X'$ существует такое число $\varepsilon > 0$, что для любой триангуляции T пространства X, мелкость которой меньше ε, найдется симплициальное* *относительно триангуляций T, T' отображение $g\colon X \to X'$, являющееся симплициальной аппроксимацией отображения f.*

Из этой теоремы и из леммы 6.5 вытекает

Следствие 7.4. *Пусть X, X' — триангулированные пространства с триангуляциями T, T' соответственно. Тогда для любого отображения $f\colon X \to X'$ существует такое целое число h_0, что для всех чисел $h \geqslant h_0$ найдется симплициальное относительно триангуляций ${}^hT, T'$ отображение $g\colon X \to X'$, являющееся симплициальной аппроксимацией отображения f.*

Доказательство теоремы 7.3 основывается на следующей лемме.

Лемма 7.5. *Для любого открытого покрытия φ компактного метрического пространства X существует такое положительное число ε, что любое подмножество пространства, диаметр которого меньше ε, содержится по крайней мере в одном элементе покрытия φ. Наименьшая верхняя грань всех таких чисел ε называется числом Лебега покрытия φ.*

Доказательство. Предположим противное. Тогда для каждого положительного числа n существует подмножество A_n пространства X с диаметром, меньшим $\frac{1}{n}$, не содержащееся ни в одном элементе покрытия φ. Пусть $x_n \in A_n$. Ввиду компактности пространства X существует такая точка $x \in X$, что любая окрестность ее содержит бесконечное множество точек последовательности $\{x_n\}$. Пусть U — открытое множество семейства φ, содержащее точку x, и пусть d — расстояние от точки x до множества $X \setminus U$. Выберем n так, чтобы $n > \frac{2}{d}$ и $\varrho(x, x_n) < \frac{d}{2}$. Тогда для любой точки $y \in A_n$ будем иметь:

$$\varrho(y, x) \leqslant \varrho(y, x_n) + \ldots + \varrho(x, x_n) \leqslant \frac{1}{n} + \frac{d}{2} < d.$$

Так как $y \in U$, то $A_n \subset U$, что противоречит определению множества A_n.

Доказательство теоремы 7.3. Пусть $B^1, \ldots, B^m$ — вершины триангуляции T', $U_i = \operatorname{st}(B^i)$ (в триангуляции T') и $V_i = f^{-1}(U_i)$. Так как $\{U_i\}$ является открытым покрытием пространства X', то $\{V_i\}$ является открытым покрытием пространства X. Пусть η — число Лебега покрытия $\{V_i\}$, $\varepsilon = \frac{\eta}{2}$ и $T = \{t, K\}$ — произвольная триангуляция пространства X, мелкость которой меньше ε. Тогда для каждой вершины A триангуляции T диаметр множества $\operatorname{st}(A)$ меньше η и, следовательно, существует такой индекс $i = 1, \ldots, m$, что $\operatorname{st}(A) \subset V_i$. Этому индексу соответствует определенная вершина B^i триангуляции T. Положим $g(A) = B^i$. Тогда

(1) $$\operatorname{st}(A) \subset f^{-1}(\operatorname{st}(g(A))),$$

где звезда $\mathrm{st}(A)$ определена в триангуляции T, а звезда $\mathrm{st}\,(g(A))$ — в триангуляции T'. Пусть $A^0, \ldots, A^n$ — вершины произвольного симплекса триангуляции T. Тогда согласно лемме 3.7 $\bigcap \mathrm{st}\,(A^i) \neq \varnothing$. Поэтому из формулы (1) следует, что $\bigcap \mathrm{st}\,(g(A^i)) \neq \varnothing$. Следовательно, согласно лемме 3.7 вершины $g(A^0), \ldots, g(A^n)$ принадлежат некоторому симплексу триангуляции T' и потому отображение вершин g можно продолжить до симплициального относительно триангуляций T, T' отображения $g\colon X \to X'$. Более точно, отображение вершин g определяет отображение $(t')^{-1}gt$ вершин комплекса K в вершины комплекса K', которое можно распространить до симплициального отображения $\bar{g}\colon K \to K'$. Соответствующее отображение $g\colon X \to X'$ определяется тогда формулой $g = t'\bar{g}t^{-1}$. Из включения (1) вытекает, что $f(\mathrm{st}(A)) \subset \mathrm{st}\,(g(A))$. Следовательно, согласно лемме 7.2 отображение g является симплициальной аппроксимацией отображения f.

Теорема 7.6. *Пусть (X, A) и (X', A') — триангулированные пары с триангуляциями $T = \{t, (K, L)\}$ и $T' = \{t', (K', L')\}$ соответственно. Рассмотрим произвольное отображение $f\colon (X, A) \to (X', A')$ и определенные им отображения $f_1\colon X \to X'$ и $f_2\colon A \to A'$. Пусть g_1 — некоторая симплициальная аппроксимация отображения f_1 (относительно триангуляций T и T'). Тогда $g_1(A) \subset A'$, так что отображение g_1 определяет отображения*

$$g\colon (X, A) \to (X', A') \text{ и } \quad g_2\colon A \to A'.$$

Отображение g симплициально относительно триангуляций T и T'. Отображение g_2 является симплициальной аппроксимацией отображения f_2 относительно индуцированных триангуляций подпространств A и A'. Наконец, что наиболее важно, отображения f и g гомотопны, причем во время деформации образ любой точки $x \in X$ остается в симплексе, внутренность которого содержит точку $f(x)$.

Доказательство. Для любой точки $x \in A$ точка $f(x) \in A'$ принадлежит некоторому симплексу подпространства A'. Следовательно, $g_1(x) \in A'$. Для любой точки $x \in X$ точки $f(x)$ и $g(x)$ лежат в одном и том же симплексе пространства X'. Следовательно, соответствующие им точки $\bar{f}(x)$, $\bar{g}(x)$ комплекса K' лежат в одном и том же симплексе комплекса K'. Указанную в формулировке теоремы гомотопию можно поэтому определить формулой

$$h(x, r) = t'\,[r\bar{f}(x) + (1 - r)\bar{g}(x)], \qquad 0 \leqslant r \leqslant 1.$$

8. Произведения симплициальных комплексов

Прямое произведение двух симплициальных комплексов, вообще говоря, симплициальным комплексом не является. Это обстоятельство, затрудняющее изучение прямых произведений триангулируемых пространств, мы обойдем, введя так называемое *симплициальное* *произведение*. Это произведение естественно возникает в связи с прямыми произведениями пространств и их покрытий открытыми множествами.

Определение 8.1. *Симплициальным произведением* $s_1 \triangle s_2$ симплексов s_1 и s_2 размерностей p и q соответственно называется симплекс размерности $(p+1)(q+1)-1$, вершинами которого являются всевозможные пары вида (A, B), где A — вершина симплекса s_1, а B — вершина симплекса s_2. Пусть K_1 и K_2 — некоторые подкомплексы симплексов s_1 и s_2 соответственно. Их *симплициальным произведением* $K_1 \triangle K_2$ называется подкомплекс симплициального произведения $s_1 \triangle s_2$, состоящий из всех симплексов вида $s_1' \triangle s_2'$, где $s_1' \in K_1$, $s_2' \in K_2$, и из всех граней этих симплексов.

Последнее условие необходимо потому, что грани симплекса $s_1 \triangle s_2$, вообще говоря, не являются симплициальными произведениями граней симплексов s_1 и s_2. Действительно, множество вершин симплекса $s_1 \triangle s_2$ является прямым произведением множеств вершин симплексов s_1 и s_2, а подмножество прямого произведения, вообще говоря, не будет прямым произведением подмножеств сомножителей.

Следующие пять лемм являются очевидными следствиями сформулированных определений.

Лемма 8.2. *Грань с вершинами* $(A^0, B^0), \ldots, (A^n, B^n)$ *симплекса* $s_1 \triangle s_2$ *тогда и только тогда принадлежит комплексу* $K_1 \triangle K_2$, *когда точки* $A^0, \ldots, A^n$ *являются вершинами некоторого симплекса комплекса* K_1 *(возможно, с повторениями), а точки* $B^0, \ldots, B^n$ *— вершинами некоторого симплекса комплекса* K_2 *(возможно, также с повторениями).*

Лемма 8.3. *Симплициальное произведение* $L_1 \triangle L_2$ *двух подкомплексов* L_1 *и* L_2 *комплексов* K_1 *и* K_2 *соответственно является подкомплексом комплекса* $K_1 \triangle K_2$. *Симплициальное произведение пар* (K_1, L_1) *и* (K_2, L_2) *определяется формулой*

$$(K_1, L_1) \triangle (K_2, L_2) = (K_1 \triangle K_2, L_1 \triangle K_2 \cup K_1 \triangle L_2)$$

В этой формуле подразумевается, что операция $\triangle$ *предшествует операции* $\cup$.

Лемма 8.4. *Для любых симплициальных отображений* $f_1\colon (K_1, L_1) \to (K_1', L_1')$ *и* $f_2\colon (K_2, L_2) \to (K_2', L_2')$ *отображение вершин* $(A, B) \to (f_1(A), f_2(B))$ *определяет некоторое симплициальное отображение*

$$f_1 \triangle f_2\colon (K_1, L_1) \triangle (K_2, L_2) \to (K_1', L_1') \triangle (K_2', L_2').$$

Лемма 8.5. *Отображения вершин* $(A, B) \to A$ *и* $(A, B) \to B$ *определяют симплициальные отображения*

$$\pi_1\colon K_1 \triangle K_2 \to K_1, \qquad \pi_2\colon K_1 \triangle K_2 \to K_2,$$

которые мы будем называть проекциями симплициального произведения на его множители.

Лемма 8.6. *Отображение вершин $A \to (A, A)$ определяет симплициальное отображение*

$$\triangle : (K, L) \to (K, L)\triangle(K, L),$$

называемое диагональным отображением.

Определение 8.7. Симплициальный комплекс K называется *упорядоченным*, если вершины любого его симплекса упорядочены, причем упорядоченность вершин каждого симплекса согласована с упорядоченностями вершин его граней. Любой подкомплекс упорядоченного комплекса K мы будем всегда предполагать снабженным упорядоченностью, индуцированной данной упорядоченностью комплекса K.

Любой комплекс K можно упорядочить, выбирая некоторую упорядоченность его вершин (т. е. упорядочивая наименьший симплекс, содержащий комплекс K).

Очевидно, что упорядочивание комплекса K равносильно заданию в множестве всех его вершин бинарного отношения $A \leqslant A'$, подчиненного следующим трем условиям:

(1) Из $A \leqslant B$ и $B \leqslant A$ следует, что $A = B$.

(2) Точки A и B тогда и только тогда являются вершинами некоторого симплекса комплекса K, когда $A \leqslant B$ или $B \leqslant A$.

(3) Если точки A, B, C являются вершинами некоторого симплекса комплекса K и $A \leqslant B$, $B \leqslant C$, то $A \leqslant C$.

Определение 8.8. Пусть K_1 и K_2 — упорядоченные симплициальные комплексы. Введем частичную упорядоченность в множество вершин симплекса $K_1 \triangle K_2$, полагая $(A, B) \leqslant (A', B')$, если $A \leqslant A'$ и $B \leqslant B'$. (Вообще говоря, это отношение не является упорядоченностью комплекса $K_1 \triangle K_2$.) *Прямым произведением* $K_1 \times K_2$ называется комплекс, состоящий из всех симплексов комплекса $K_1 \triangle K_2$, множества вершин которых упорядочены относительно этого отношения. Прямым произведением $(K_1, L_1) \times (K_2, L_2)$ пар (K_1, L_1) и (K_2, L_2) называется пара $(K_1 \times K_2, L_1 \times K_2 \cup K_1 \times L_2)$.

Сравним теперь прямое произведение $K_1 \times K_2$ двух упорядоченных комплексов K_1 и K_2 с прямым произведением $|K_1| \times |K_2|$ их пространств $|K_1|$ и $|K_2|$. Пусть x — точка комплекса $K_1 \triangle K_2$. Тогда проекции $\pi_1(x)$ и $\pi_2(x)$ являются точками комплексов K_1 и K_2 соответственно. Следовательно, формула $\pi(x) = (\pi_1(x), \pi_2(x))$ определяет некоторое отображение

$$\pi : |K_1 \triangle K_2| \to |K_1| \times |K_2|.$$

Если комплексы K_1 и K_2 упорядочены, то отображение π определяет некоторое отображение

$$\eta : |K_1 \times K_2| \to |K_1| \times |K_2|.$$

Лемма 8.9. *Отображение η является гомеоморфизмом, а система $\{\eta, K_1 \times K_2\}$ является триангуляцией прямого произведения $|K_1| \times |K_2|$. Для любых подкомплексов L_1 и L_2 комплексов K_1 и K_2 соответственно отображение η переводит пространство $|L_1 \times L_2|$ в пространство $|L_1| \times |L_2|$. Кроме того, для каждой вершины B, например, комплекса K_2 соответствие $x \to (x, B)$ является симплициальным отображением комплекса K_1 в пространство $|K_1| \times |K_2|$.*

Доказательство. Мы определим отображение $\bar{\eta}$: $|K_1| \times |K_2| \to |K_1 \times K_2|$, обратное к отображению η. Пусть $\alpha \in |K_1|$, $\beta \in |K_2|$ и пусть

$$\alpha = \alpha(A^0)\, A^0 + \ldots + \alpha(A^p)\, A^p,$$
$$\beta = \beta(B^0)\, B^0 + \ldots + \beta(B^q)\, B^q,$$

где $A^0 < \ldots < A^p$, $B^0 < \ldots < B^q$, $\alpha(A^i) > 0$, $\beta(B^j) > 0$, $\Sigma\, \alpha(A^i) = \Sigma\, \beta(B^j) = 1$. Этими условиями вершины A^i, B^j и числа $\alpha(A^i)$, $\beta(B^j)$ определены однозначно. Положим

$$a^m = \sum_{i=0}^{m} \alpha(A^i), \qquad b^n = \sum_{j=0}^{n} \beta(B^j),$$

где $0 \leqslant m \leqslant p$ и $0 \leqslant n \leqslant q$. Обозначим через

$$c^0 \leqslant \ldots \leqslant c^{p+q} = c^{p+q+1}\ (= 1)$$

последовательность чисел $a^0, \ldots, a^p, b^0, \ldots, b^q$, расположенных в порядке возрастания их величин. Для любого $r = 0, \ldots, p+q$ обозначим через C^r вершину (A^i, B^j), где i и j — число символов a^m и b^n соответственно в последовательности $c^0, \ldots, c^{r-1}$. Очевидно, что $i + j = r$ и вершина C^{r+1} имеет либо вид (A^{i+1}, B^j), либо вид (A^i, B^{j+1}), в зависимости от того, равно ли c^r числу a^i или числу b^j. Следовательно, $C^0 < \ldots < C^{p+q}$, так что эти точки являются вершинами некоторого симплекса комплекса $K_1 \times K_2$. Положим теперь

$$\gamma = \sum_{i=0}^{p+q} (c^i - c^{i-1})\, C^i,$$

где $c^{-1} = 0$. Так как $\sum_{i=0}^{p+q} (c^i - c^{i-1}) = c^{p+q} - c^{-1} = 1$, то γ является вполне определенной точкой комплекса $K_1 \Delta K_2$.

При построении вершин C^r может встретиться следующая неопределенность: если $a^i = b^j$, то вершиной C^{i+j+1} может быть либо вершина (A^{i+1}, B^j), либо вершина (A^i, B^{j+1}), в зависимости от того, какое из двух чисел, a^i или b^j, обозначено через c^{i+j}. Но в этом случае $c^{i+j+1} - c^{i+j} = 0$, так что произвол в выборе вершины C^{i+j+1} не влияет на точку γ, которая, следовательно, определена однозначно. Мы определим отображение $\bar{\eta}$, полагая $\bar{\eta}(\alpha, \beta) = \gamma$.

Для доказательства того, что $\bar{\eta}$ является отображением, обратным к отображению η, достаточно доказать следующие два утверждения.

(1) $\bar{\eta}$ отображает пространство $|K_1| \times |K_2|$ на пространство $|K_1 \times K_2|$.

(2) $\eta\bar{\eta}$ является тождественным отображением пространства $|K_1| \times |K_2|$.

Для доказательства утверждения (1) рассмотрим произвольную точку γ комплекса $K_1 \times K_2$. Пусть $\gamma = \sum_{r=0}^{s} d_r D^r$, где $D^r < D^{r+1}$. Обозначим через $A^0 < \ldots < A^p$ различные первые координаты точек $D^0, \ldots, D^s$ и через $B^0 < \ldots < B^q$ их вторые координаты. Добавляя, если это необходимо, лишние вершины D^r (входящие в выражение точки γ с коэффициентами, равными нулю), мы можем точки D^r расположить так, чтобы выполнялось следующее условие: если $D^r = (A^i, B^j)$, то $D^{r+1} = (A^i, B^{j+1})$, или $D^{r+1} = (A^{i+1}, B^j)$. Пусть $c^r = \sum_{i=0}^{r} d_i$ и $C^r = (A^i, B^j)$. Если $C^{r+1} = (A^{i+1}, B^j)$, то положим $a^i = c^r$, а если $C^{r+1} = (A^i, B^{j+1})$, то положим $b^j = c^r$. Имеем $a^0 \leqslant \ldots \leqslant a^p = 1$ и $b^0 \leqslant \ldots \leqslant b^q = 1$. Наконец, положим $\alpha = \sum_{i=0}^{p} (a^i - a^{i-1}) A^i$ и $\beta = \sum_{j=0}^{q} (b^j - b^{j-1}) B^j$. Легко проверить, что $\bar{\eta}(\alpha, \beta) = \gamma$.

Для доказательства утверждения (2) достаточно показать, что из $\gamma = \bar{\eta}(\alpha, \beta)$ следует, что $\pi_1(\gamma) = \alpha$ и $\pi_2(\gamma) = \beta$. Пусть $C^r, \ldots, C^{r+k}$ — все вершины последовательности $C^0, \ldots, C^{p+q}$ с первой координатой, равной A^i. Тогда $C^{r+l} = (A^i, B^{j+l})$, где $r = i + j$ и $0 \leqslant l \leqslant k$, в то время как $C^{r-1} = (A^{i-1}, B^j)$ и $C^{r+k+1} = (A^{i+1}, B^{j+k})$. Из определений проекции π_1 и точки γ следует, что

$$\pi_1(\gamma)(A^i) = \sum_{l=0}^{k} (c^{r+l} - c^{r+l-1}) = c^{r+k} - c^{r-1} =$$
$$= a^i - a^{i-1} = \alpha(A^i).$$

Так как эта формула верна для любого i, то $\pi_1(\gamma) = \alpha$. Аналогично $\pi_2(\gamma) = \beta$. Тем самым лемма 8.9 полностью доказана.

Следствие 8.10. *Для любых триангулируемых пар* (X, A) *и* (Y, B) *пары* $(X \times Y, A \times B)$ *и* $(X, A) \times (Y, B) = (X \times Y, A \times Y \cup X \times B)$ *также триангулируемы.*

Предыдущие рассуждения показывают, что симплициальное произведение $K_1 \Delta K_2$ содержит в качестве подкомплексов прямые произведения $K_1 \times K_2$, соответствующие различным упорядочениям комплексов K_1 и K_2. Следующая лемма показывает, что пространства $|K_1 \Delta K_2|$ и $|K_1 \times K_2|$ гомотопически эквивалентны.

Лемма 8.11. *Пространство* $|K_1 \times K_2|$ *является деформационным ретрактом пространства* $|K_1 \triangle K_2|$.

Доказательство. Рассмотрим введенные выше отображения π и η. Очевидно, что отображение $r = {}^{-1}\pi$ является ретрагирующим отображением пространства $|K_1 \triangle K_2|$ на пространство $|K_1 \times K_2|$. Далее, для любой точки x комплекса $K_1 \triangle K_2$ точки x и $r(x)$ лежат в некотором симплексе комплекса $K_1 \triangle K_2$. Поэтому формула $(1-t)\,x + tr(x)$ определяет гомотопию, связывающую отображение r с тождественным отображением.

Отображение r остается деформационной ретракцией на подкомплексах L_1 и L_2 комплексов K_1 и K_2 соответственно. Следовательно, пара $(K_1 \times K_2,\ L_1 \times L_2)$ является деформационным ретрактом пары $(K_1 \triangle K_2,\ L_1 \triangle L_2)$, а произведение $(K_1, L_1) \times (K_2, L_2)$ — деформационным ретрактом произведения $(K_1, L_1) \triangle (K_2, L_2)$.

Замкнутый единичный интервал $I = [0, 1]$ можно рассматривать как упорядоченный одномерный симплекс с вершинами $0 < 1$. Следовательно, для любого упорядоченного симплициального комплекса K определен упорядоченный комплекс $K \times I$. Если мы положим

$$A_0 = (A, 0), \qquad A_1 = (A, 1),$$

где A — произвольная вершина комплекса K, то любой симплекс комплекса $K \times I$ будет иметь либо вершины

$$A_0^0, \ldots, A_0^i, \qquad A_1^i, \ldots, A_1^q,$$

либо вершины

$$A_0^0, \ldots, A_0^i, \qquad A_1^{i+1}, \ldots, A_1^q \qquad (0 \leqslant i \leqslant q),$$

где $A^0 < \ldots < A^q$ — вершины некоторого симплекса комплекса K.

9. Регулярные окрестности

В этом пункте мы покажем, что для любого подкомплекса L комплекса K пространство $|L|$ гладко вложено в пространство $|K|$, т. е. является строгим деформационным ретрактом (см. I. 11.6) некоторой своей замкнутой триангулирумой окрестности в пространстве $|K|$.

Определение 9.1. Пусть L — произвольный подкомплекс комплекса A. Открытое множество

$$N(L) = \cup \operatorname{st}(A),$$

где суммирование распространено на все вершины A подкомплекса L, называется *регулярной окрестностью* подкомплекса L в комплексе K.

Следует заметить, что, вообще говоря, подкомплекс L не является деформационным ретрактом окрестности $N(L)$. Например, пусть K — одномерный симплекс s и L — его граница $\dot{s}$. Тогда $N(L) = |s|$, и тот факт, что пространство $|s|$ связно, а пространство $|\dot{s}|$ несвязно, показывает, что пространство $|\dot{s}|$ не является деформационным ретрактом пространства $|s|$. Рассмотрение этого примера приводит к следующему определению.

Определение 9.2. Подкомплекс L называется *полным* подкомплексом комплекса K, если L содержит каждый симплекс комплекса K, все вершины которого лежат в L.

В рассмотренном выше примере подкомплекс L не был полным подкомплексом комплекса K.

Лемма 9.3. *Пусть L — полный подкомплекс комплекса K. Для любой точки $\alpha \in N(L)$ положим*

$$v(\alpha) = \Sigma\, \alpha(A),$$

$$f(\alpha) = \sum \frac{1}{v(\alpha)}\, \alpha(A)\, A.$$

В обеих формулах суммирование распространено на все вершины подкомплекса L. Оказывается, что $f(\alpha) \in |L|$ и f является ретрагирующим отображением окрестности $N(L)$ на пространство $|L|$. Кроме того, гомотопия $h\colon N(L) \times I \to N(L)$, определенная формулой

$$h(\alpha, t) = tf(\alpha) + (1 - t)\, \alpha,$$

является строгой ретрагирующей деформацией окрестности $N(L)$ на пространство $|L|$. Наконец, барицентрическая координата точки $h(\alpha, t)$ относительно вершины A является неубывающей функцией переменной t, если вершина A принадлежит подкомплексу L, и невозрастающей функцией, если вершина A не принадлежит подкомплексу L.

Доказательство. Заметим в первую очередь, что $f(\alpha)$ является точкой наименьшего симплекса s, содержащего точку α. Далее, ее барицентрические координаты, соответствующие вершинам, не принадлежащим подкомплексу L, все равны нулю. Следовательно, точка $f(\alpha)$ принадлежит некоторой грани s' симплекса s, все вершины которой принадлежат подкомплексу L. Так как L является полным подкомплексом, то $f(\alpha) \in L$. Если $\alpha \in L$, то $v(\alpha) = 1$ и $f(\alpha) = \alpha$, так что отображение f действительно является ретракцией. Так как точки α и $f(\alpha)$ принадлежат одному и тому же симплексу s, то точка $h(\alpha, t)$ также принадлежит симплексу s. Последнее утверждение леммы является непосредственным следствием формул, определяющих отображения f и h. Из него следует, что $h(\alpha, t) \in N(L)$ для любой точки $\alpha \in N(L)$ и любого значения $t \in I$. Тем самым лемма доказана.

Следующая лемма показывает, что требование полноты подкомплекса L в условиях леммы 9.3 не является с топологической точки зрения серьезным ограничением.

Лемма 9.4. *Барицентрическое подразделение* Sd L *любого подкомплекса* L *комплекса* K *является полным подкомплексом комплекса* Sd K.

Доказательство. Произвольный симплекс $\bar{s}$ комплекса Sd K имеет вершины вида $b_{s_0}, \ldots, b_{s_q}$ где s_i — симплексы комплекса K, причем симплекс s_i является гранью симплекса s_i+1. Если все вершины симплекса $\bar{s}$ принадлежат комплексу Sd L, то, в частности, $b_{s_q} \in \mathrm{Sd}\, L$. Тогда симплекс s_q принадлежит подкомплексу L и, следовательно, поскольку симплекс $\bar{s}$ лежит в Sd s_q, то он лежит и в Sd L.

Заметим, что указанная в лемме 9.3 деформация не определена на замыкании окрестности $N(L)$. Для того чтобы получить замкнутую окрестность, деформационным ретрактом которой является подкомплекс L, необходимы дальнейшие подразделения.

Определение 9.5. Пусть L — произвольный подкомплекс комплекса K. Его *k-ой регулярной окрестностью* $N^k(L)$ называется образ в K регулярной окрестности $N(\mathrm{Sd}^k L)$ при естественном отображении $\mathrm{Sd}^k L \to K$. В частности, $N(L) = N^0(L)$.

Лемма 9.6. *Точка* α *комплекса* K *тогда и только тогда принадлежит первой регулярной окрестности* $N^1(L)$ *полного подкомплекса* L, *когда в подкомплексе* L *существует такая вершина* A, *что* $\alpha(A) > \alpha(B)$ *для любой вершины* B *комплекса* K, *не принадлежащей подкомплексу* L.

Доказательство. Пусть $\alpha \in K$. Тогда α принадлежит некоторому симплексу s, вершины $A^0, \ldots, A^q$ которого можно занумеровать так, чтобы $\alpha(A^0) \geqslant \ldots \geqslant \alpha(A^q)$. Пусть s_i — симплекс, натянутый на вершины $A^0, \ldots, A^i$. Точка $\alpha' = l_k^{-1}(\alpha)$ комплекса Sd K, соответствующая точке α (см. доказательство леммы 6.2), определяется формулой

$$\alpha' = w_0 b_{s_0} + \ldots + w_q b_{s_q}, \quad w_i = (i+1)\,[\alpha(A^i) - \alpha(A^{i+1})].$$

Пусть j — наименьший индекс, для которого $\alpha(A^j) > \alpha(A^{j+1})$, т. е. для которого $w_j > 0$.

Если теперь $\alpha \in N^1(L)$, т. е. $\alpha' \in N(\mathrm{Sd}\, L)$, то для некоторого индекса i мы будем иметь $b_{s_i} \in \mathrm{Sd}\, L$ и $w_i > 0$. Отсюда вытекает, что симплекс s_i, а потому и вершины $A^0, \ldots, A^i$ принадлежат подкомплексу L. Так как $i \geqslant j$, то, следовательно, вершины $A^0, \ldots, A^j$ принадлежат подкомплексу L и, значит, точка α удовлетворяет высказанному в лемме 9.6 условию.

Обратно, если точка α удовлетворяет условиям леммы 9.6, то вершины $A^0, \ldots, A^j$ лежат в L, и так как подкомплекс L полон, то симплекс s_j принадлежит подкомплексу L. Следовательно, $b_{s_j} \in \mathrm{Sd}\, L$, и так как $w_j > 0$, то $\alpha' \in N\,(\mathrm{Sd}\, L)$. Таким образом, $\alpha \in N^1(L)$, что доказывает лемму.

Лемма 9.7. *Для любого подкомплекса L комплекса K замыкание окрестности $N^{k+1}(L)$ $(k = 0, 1, \ldots)$ содержится в окрестности $N^k(L)$.*

Доказательство. Достаточно доказать, что замыкание окрестности $N^1(L)$ содержится в окрестности $N(L)$. Если L — полный подкомплекс, то это следует из леммы 9.6, так как при замыкании неравенство $\alpha(A) > \alpha(B)$ переходит в неравенство $\alpha(A) \geqslant \alpha(B)$. В случае, когда подкомплекс L не полон, необходимо рассмотреть подкомплекс L', состоящий из всех симплексов комплекса K, вершины которых принадлежат подкомплексу L. Подкомплекс L' полон, $N(L) = N(L')$ и $N'(L) \subset N'(L')$.

Как следует из леммы 9.3, гомотопия h не нарушает неравенства $\alpha(A) > \alpha(B)$, имеющего место для любых вершин $A \in L$ и $B \notin L$. Следовательно, если $\alpha \in N^1(L)$ и подкомплекс L полон, то $h(\alpha, t) \in N^1(L)$ для всех t. Так как замыкание окрестности $N^1(L)$ содержится в окрестности $N(L)$, то отсюда вытекает

Лемма 9.8. *Для любого полного подкомплекса L комплекса K указанная в лемме 9.3 гомотопия h определяет строгую ретрагирующую деформацию окрестности $\overline{N^1}(L)$ на пространство $|L|$.*

Эта лемма в комбинации с леммой 9.4 дает основной результат этого пункта.

Теорема 9.9. *Для любого подкомплекса L комплекса K пространство $|L|$ является строгим деформационным ретрактом замыкания второй регулярной окрестности $N^2(L)$.*

Упражнения

А. Симплексы

1. Пусть α и β — две различные точки некоторого симплекса s. Показать, что отображение $f\colon I \to s$, определенное формулой $f(t) = (1-t)\alpha + t\beta$, является взаимно однозначным линейным отображением интервала I в симплексе s. Это отображение называется *отрезком*, соединяющим точку α с точкой β. О точке $f(t)$ говорят, что она делит этот отрезок в отношении $t : (1-t)$. Показать, что любая точка симплекса s, не являющаяся его центром тяжести, принадлежит единственному отрезку, соединяющему центр тяжести с некоторой точкой его границы $|\dot{s}|$.

2. Пусть s — произвольный n-мерный симплекс и s' — его $(n-1)$-мерная грань. Показать, что тройки $(s, \dot{s}, s')$ и $(E^n, S^{n-1}, E_+^{n-1})$ гомеоморфны.

В. Евклидовы комплексы

Определение. Точки $A^0, \ldots, A^q$ евклидова n-мерного пространства R^n называются *линейно независимыми*, если они не содержатся ни в какой гиперплоскости размерности, меньшей q.

1. Показать, что точки $A^0, \ldots, A^r$ тогда и только тогда линейно независимы, когда матрица

$$\begin{pmatrix} a_1^0 \ldots a_n^0 & 1 \\ \ldots\ldots\ldots & \\ a_1^q \ldots a_n^q & 1 \end{pmatrix},$$

в которой $a_1^i, \ldots, a_n^i$ — координаты точки A^i, имеет ранг $q+1$.

2. Показать, что если точки $A^0, \ldots, A^q$ линейно независимы, то любое подмножество множества $A^0, \ldots, A^q$ также линейно независимо.

3. Пусть s^q — симплекс размерности q с вершинами $A^0, \ldots, A^q$ и и пусть $f\colon s^q \to R^n$ — произвольное линейное отображение. Показать, что отображение f тогда и только тогда является линейным вложением, когда точки $f(A^0), \ldots, f(A^q)$ линейно независимы.

4. Показать, что в пространстве R^n существует бесконечная последовательность точек, в которой каждые $n+1$ точки линейно независимы.

5. Используя упражнение 4, доказать, что каждый n-мерный комплекс K может быть линейно вложен в пространство R^{2n+1}.

Определение. Пусть $A^0, \ldots, A^q$ — линейно независимые точки пространства R^n. Наименьшее выпуклое множество σ, содержащее точки $A^0, \ldots, A^q$, называется *евклидовым q-мерным симплексом* с вершинами $A^0, \ldots, A^q$. *Гранями* симплекса σ называются евклидовы симплексы, множества вершин которых являются подмножествами множества $A^0, \ldots, A^q$. Конечное множество $\Sigma = \{\sigma\}$ евклидовых симплексов пространства R^n называется *евклидовым комплексом*, если пересечение любых двух симплексов множества Σ либо пусто, либо является общей гранью этих двух симплексов.

6. Пусть $f\colon K \to R^n$ — произвольное линейное вложение некоторого комплекса K в пространство R^n. Показать, что образы симплексов комплекса K образуют евклидов комплекс в пространстве R^n. Обратно, любому евклидову комплексу Σ пространства R^n отвечает такой симплициальный комплекс K и такое линейное вложение $f\colon K \to R^n$, что симплексы комплекса Σ совпадают с образами симплексов комплекса K.

C. Пространства с операторами

Определение. Говорят, что группа W (не обязательно абелева и записанная мультипликативно) *действует* в пространстве X, если для любого элемента $w \in W$ и любой точки $x \in X$ определена точка $wx \in X$, причем $w_2(w_1x) = (w_2w_1)x$, $1x = x$ и отображение $x \to wx$ является непрерывным отображением $X \to X$. Пусть группа W действует в пространствах X и Y. Тогда отображение $f\colon X \to Y$

называется *эквивариантным*, если $f(wx) = wf(x)$ для любых $w \in W$, $x \in X$.

Говорят, что группа W *действует* в симплициальном комплексе K, если любому элементу $w \in W$ отнесено симплициальное отображение w: $K \to K$, неподвижные точки которого образуют подкомплекс комплекса K, и $w_2(w_1x) = (w_2w_1)x$, $1x = x$ для всех $x \in K$.

Пусть $T = \{t, K\}$ — триангуляция пространства X, в котором действует группа W. Говорят, что триангуляция T *инвариантна относительно* W, если для каждого элемента $w \in W$ отображение $t^{-1}wt$: $K \to K$ симплициально и его неподвижные точки образуют некоторый подкомплекс комплекса K.

1. Пусть для группы W, действующей в пространстве X, существует инвариантная триангуляция этого пространства. Показать, что группа W содержит такую инвариантную подгруппу W_0, что фактор-группа W/W_0 конечна и $w_0x = x$ для всех $w_0 \in W_0$, $x \in X$.

2. Показать, что барицентрическое подразделение инвариантной триангуляции инвариантно.

3. Предположим, что в ситуации, описанной в теореме 7.3, в обоих пространствах X и X' действует некоторая группа W, относительно которой триангуляции T и T' инвариантны, а отображение f: $X \to X'$ эквивариантно. Доказать, что тогда существует симплициальная аппроксимация g, являющаяся эквивариантным отображением.

D. Соединение комплексов

Определение. *Соединением* $K \circ M$ двух непересекающихся комплексов называется комплекс, множеством вершин которого является объединение $A^1, \ldots, A^r$, $B^1, \ldots, B^s$ множеств вершин комплексов K и M соответственно. При этом предполагается, что на некоторую систему вершин тогда и только тогда натянут симплекс комплекса $K \circ M$, когда подмножества этой системы, состоящие из вершин комплексов K и M соответственно, в случае, когда они не пусты, являются множествами вершин некоторых симплексов этих комплексов.

1. Показать, что комплексы K и M являются подкомплексами комплекса $K \circ M$.

2. Показать, что соединение $s_1 \circ s_2$ двух симплексов s_1 и s_2, одного p-мерного, а другого q-мерного, является $(p + q + 1)$-мерным симплексом с границей $(\dot{s}_1 \circ s_2) \cup (s_1 \circ \dot{s}_2)$.

3. Показать, что пространство $|K|$ является деформационным ретрактом пространства $|K \circ M| \setminus |M|$.

4. Пусть L — подмножество таких точек α соединения $K \circ M$, что $\Sigma\, \alpha(A^i) = \Sigma \alpha(B^j) = \frac{1}{2}$. Показать, что подмножество L

гомеоморфно пространству $|K| \times |M|$. Показать, что пространство $|K \circ M| \setminus |K| \setminus |M|$ гомеоморфно произведению множества L на открытый интервал.

5. Показать, что соединение $K \circ M$ можно реализовать (многими различными способами) как подкомплекс комплекса $K \triangle M$.

6. Определить соединение $X \circ Y$ двух пространств и показать, что соединение $|K| \circ |M|$ гомеоморфно пространству $|K \circ M|$.

7. Показать, что если пространство X стягивается по себе в точку, то соединение $X \circ Y$ обладает тем же свойством.

8. Показать, что соединение p-мерной клетки и q-мерной сферы является $(p+q+1)$-мерной клеткой. Показать, что соединение p-мерной и q-мерной сфер является $(p+q+1)$-мерной сферой.

E. Элементарные подразделения комплексов

Определение. *Дополнением* $K \dot{-} s$ некоторого симплекса s комплекса K называется подкомплекс, состоящий из всех симплексов комплекса K, не имеющих симплекс s своей гранью. *Границей* $\mathrm{Bd}(s)$ дополнения $K \dot{-} s$ называется замкнутый подкомплекс, состоящий из всех симплексов дополнения $K \dot{-} s$, которые являются гранями симплексов, не принадлежащих дополнению $K \dot{-} s$. *Элементарным подразделением* $\mathrm{Sd}_s(K)$ комплекса K относительно симплекса s называется комплекс $(K \dot{-} s) \cup (b_s \circ \mathrm{Bd}(s))$, где b_s — центр тяжести симплекса s.

1. Показать, что линейное отображение $\mathrm{Sd}_s K \to K$, соответствующее тождественному отображению вершин, является гомеоморфизмом.

2. Пусть симплексы $s_1, s_2, \ldots, s_k$ комплекса K упорядочены так, что $\dim s_j \geqslant \dim s_{j+1}$ для любого j. Показать, что барицентрическое подразделение комплекса K является результатом последовательного применения элементарных подразделений:

$$\mathrm{Sd}_{s_k}(\mathrm{Sd}_{s_{k-1}}(\ldots \mathrm{Sd}_{s_1}(K) \ldots)).$$

F. Бесконечные комплексы

Определение. Пусть W — некоторое бесконечное множество, элементы которого мы будем называть *вершинами*. *Бесконечным комплексом* K с вершинами в W называется бесконечная совокупность (конечномерных) симплексов с вершинами в W, подчиненная следующему условию: любая грань произвольного симплекса из K также принадлежит K. Любая точка α комплекса K задается барицентрическими координатами $\alpha(A) \geqslant 0$, где $A \in W$, причем $\alpha(A) > 0$ только для конечного числа элементов множества W и $\sum\limits_A \alpha(A) = 1$. Комплекс K называется *локально конечным*, если любая его вершина принадлежит только конечному числу симплексов комплекса K.

Формула $\varrho(\alpha, \beta) = \{\sum_A [\alpha(A) - \beta(A)]^2\}^{\frac{1}{2}}$, где α и β — любые точки комплекса K, определяет в K некоторую метрику. Соответствующая топология называется *метрической топологией*. Пространство комплекса K, рассматриваемое в метрической топологии, обозначается через $|K|_m$.

Топология комплекса K, в которой открыты те и только те множества, пересечения которых с каждым (замкнутым) симплексом s комплекса K являются открытыми подмножествами пространства $|s|$, называется *слабой топологией*. Пространство комплекса K, рассматриваемое в слабой топологии, обозначается через $|K|_w$.

Таким образом, бесконечному комплексу соответствуют два топологических пространства $|K|_m$ и $|K|_w$.

1. Показать, что тождественное отображение $|K|_w \to |K|_m$ непрерывно.

2. Показать, что слабая топология тогда и только тогда совпадает с метрической, когда комплекс K локально конечен.

3. Показать, что линейные и симплициальные отображения (определяемые так же, как и для конечных комплексов) непрерывны в обоих топологиях. В частности, для любой вершины A барицентрическая координата $\alpha(A)$ в обеих топологиях непрерывно зависит от точки α. Любой подкомплекс замкнут в каждой топологии. Для любой вершины A комплекса K множество $\mathrm{st}(A)$ открыто в каждой топологии.

Определение. *Подразделением* (K', l) бесконечного комплекса K называется пара, состоящая из некоторого бесконечного комплекса K' и линейного отображения l: $K' \to K$, являющегося в слабой топологии гомеоморфизмом.

4. Пусть (K', l) — произвольное подразделение комплекса K и L — произвольный конечный подкомплекс комплекса K. Показать, что множество $l^{-1}(L)$ является конечным подкомплексом комплекса K'.

5. Показать, что для любого семейства $\{U\}$ открытых множеств, покрывающих пространство $|K|_w$, существует такое подразделение (K', l) комплекса K, что для любой вершины A' комплекса K' множество $l(\mathrm{st}\,(A'))$ лежит в одном из множеств семейства $\{U\}$.

Определение. *Бесконечной триангуляцией* пространства X называется система $T = \{t, K\}$, где K — некоторый бесконечный комплекс, а t: $|K|_w \to X$ — гомеоморфное отображение пространства $|K|_w$ на пространство X.

Определение. Пусть $T = \{t, K\}$ — некоторая триангуляция пространства X и $\{U\}$ — произвольное семейство открытых множеств, покрывающих пространство X. Говорят, что триангуляция T вписана в покрытие $\{U\}$, если для любой вершины A комплекса K множество $t(\mathrm{st}(A))$ лежит в одном из множеств семейства $\{U\}$.

6. (Теорема о симплициальной аппроксимации.) Пусть X — некоторое триангулируемое как бесконечный комплекс пространство и X' — пространство с (бесконечной) триангуляцией T'. Показать, что для любого отображения $f\colon X \to X'$ существует такое открытое покрытие $\{U\}$ пространства X, что для любой вписанной в $\{U\}$ триангуляции T пространства X найдется отображение $g\colon X \to X'$, являющееся симплициальной аппроксимацией (относительно триангуляций T и T') отображения f.

7. Показать, что соединение $K \circ M$ двух непустых комплексов K и M, из которых по крайней мере один бесконечен, не может быть локально конечным комплексом.

ГЛАВА III

ТЕОРИЯ ГОМОЛОГИЙ СИМПЛИЦИАЛЬНЫХ КОМПЛЕКСОВ

1. Введение

В этой главе предполагается заданной такая теория гомологий (когомологий), что группы $H_q(X, A)$ определены для всех триангулируемых пар, а гомоморфизмы f_* определены для любого отображения f: $(X, A) \to (Y, B)$ одной триангулируемой пары в другую. Другими словами, в этой главе предполагается, что допустимая категория $\mathfrak{A}$, на которой определена рассматриваемая теория гомологий (когомологий), содержит категорию $\mathfrak{T}$ триангулируемых пар и всех их отображений. Заметим, что из следствия II. 8.10 вытекает, что сама категория $\mathfrak{T}$ является допустимой категорией для теории гомологий в смысле пункта I. 1.

Первая основная задача этой главы состоит в выводе из наших аксиом классического алгорифма, употребляемого для определения и вычисления групп гомологий симплициальных комплексов. Тем самым будет мотивировано использование этого алгорифма в следующих главах для доказательства теорем существования.

Вторая цель этой главы состоит в доказательстве теоремы единственности, согласно которой две теории гомологий с изоморфными группами коэффициентов изоморфны на категории триангулируемых пар. Таким образом, наши аксиомы в некотором смысле полны, т. е. допускают только одну с точностью до изоморфизма интерпретацию. В дальнейшем (глава XII) этот результат будет распространен на более широкий класс пространств.

Как и в главе I, утверждения, относящиеся к когомологиям, формулируются без доказательств в конце каждого пункта.

2. Теоремы о вырезании и прямой сумме

В этом пункте будет показано, что для триангулируемых пар теоремы о вырезании и прямой сумме имеют место в более общих условиях, чем в теоремах главы I.

Теорема 2.1. *Для любых подкомплексов K_1 и K_2 произвольного комплекса K отображение вложения*

$$i\colon (K_1, K_1 \cap K_2) \subset (K_1 \cup K_2, K_2)$$

индуцирует во всех размерностях изоморфизмы групп гомологий. Следовательно, триада $(|K|;|K_1|, |K_2|)$ *является собственной триадой* (см. определение I. 14.1).

Доказательство. Не теряя общности, можно предполагать, что $K = K_1 \cup K_2$. Пусть $X = \bar{N}^2(K_1)$ — замыкание второй регулярной окрестности подкомплекса K_1 и пусть $A = X \cap |K_2|$. Пара (X, A) триангулируема, так как оба пространства X и A соответствуют некоторым подкомплексам второго барицентрического подразделения комплекса K. Отображение i можно представить как композицию вложений

$$(|K_1|, |K_1 \cap K_2|) \xrightarrow{i_1} (X, A) \xrightarrow{i_2} (|K|, |K_2|).$$

Так как $|K| = N^2(K_1) \cup (|K| \setminus |K|) \subset \operatorname{Int} X \cup \operatorname{Int} |K_2|$, то

$$|K| = X \cup |K_2|, \quad A = X \cap |K_2|, \quad |K| = \operatorname{Int} X \cup \operatorname{Int} |K_2|.$$

Следовательно, согласно аксиоме вырезания отображение i_2 индуцирует во всех размерностях изоморфизмы групп гомологий.

Далее, согласно теореме II.9.9 пространство $|K_1|$ является строгим деформационным ретрактом пространства X. В течение соответствующей деформации каждая точка пространства $|K_2|$ остается в $|K_2|$. Следовательно, пара $(|K_1|, |K_1 \cap K_2|)$ является деформационным ретрактом пары (X, A). Поэтому согласно теореме I.11.8 гомоморфизмы, индуцированные вложением i_1, также являются изоморфизмами.

Теорема 2.2. *Пусть (X, A) — произвольная триангулируемая пара и пусть U — такое открытое подмножество пространства X, что $U \subset A$. Если пара $(X \setminus U, A \setminus U)$ триангулируема, то отображение вложения f: $(X \setminus U, A \setminus U) \subset (X, A)$ индуцирует во всех размерностях изоморфизмы групп гомологий.*

Доказательство. Пусть T — триангуляция пары (X, A) (см. определение II. 5.1) и пусть V — внутренность подпространства A (относительно пространства X). Тогда $X \setminus V$ и $A \setminus V$ являются, очевидно, подкомплексами пространства X относительно триангуляции T, и поэтому согласно теореме 2.1 отображение вложения $i: (X \setminus V, A \setminus V) \subset (X, A)$ во всех размерностях индуцирует изоморфизмы групп гомологий. Пусть $X' = X \setminus U$, $A' = A \setminus U$ и пусть V' — внутренность подпространства A' относительно подпространства X'. Тогда по тем же, что и выше, соображениям отображение i': $(X' \setminus V', A' \setminus V') \subset (X', A')$ во всех размерностях индуцирует изоморфизмы групп гомологий. Так как пары $(X' \setminus V', A' \setminus V')$ и $(X \setminus V, A \setminus V)$ совпадают и так как $i' = fi$, то, следовательно, отображение $f_* = i'_* i_*^{-1}$ является изоморфизмом.

Теорема 2.3. *Пусть $K_1, \ldots, K_r, L$ — такие подкомплексы симплициального комплекса K, что*

$$K = K_1 \cup \ldots \cup K_r \cup L \quad \text{и} \quad K_i \cap K_j \subset L, \text{ если } i \neq j.$$

Пусть, далее, $L_i = K_i \cap L$ *и*

$$k_i\colon (K_i, L_i) \subset (K, L).$$

Оказывается, что гомоморфизмы $k_{i*}\colon H_q(|K_i|, |L_i|) \to H_q(|K|, |L|)$ $(i = 1, \ldots, r)$ *образуют инъективное представление группы* $H_q(|K|, |L|)$ *в виде прямой суммы.*

Доказательство. В случае $r = 1$ теорема вытекает из теоремы 2.1, поскольку $K = K_1 \cup L$ и $L_1 = K_1 \cap L$. Рассуждая по индукции, предположим, что теорема доказана для $r = n \geqslant 1$, и рассмотрим случай $r = n + 1$. Полагая $K' = K_1 \cup \ldots \cup K_n \cup L$, рассмотрим отображения вложения

$$(K_i, L_i) \xrightarrow{k'_i} (K', L) \xrightarrow{j} (K, L) \qquad (i = 1, \ldots, n),$$
$$(K_{n+1}, L_{n+1}) \xrightarrow{k'} (K_{n+1} \cup L, L) \xrightarrow{j'} (K, L).$$

Очевидно, что $k_{i*} = j_* k'_{i*}$ для любого $i = 1, \ldots, n$ и $k_{n+1*} = j'_* k'_*$. Далее, согласно теореме 2.1 отображение k'_* является изоморфизмом. Так как триада $(|K|; |K'|, |K_{n+1} \cup L|)$ является собственной, причем

$$K' \cup (K_{n+1} \cup L) = K, \qquad K' \cap (K_{n+1} \cup L) = L,$$

то согласно теореме I.14.2 отображения j_* и j'_* образуют инъективное представление группы $H_q(|K|, |L|)$ в виде прямой суммы. Остается заметить, что согласно предположению индукции отображения $k'_{i*} (i = 1, \ldots, n)$ образуют инъективное представление группы $H_q(|K'|, |L|)$ в виде прямой суммы.

Теорема 2.3с. *Отображения* k_i^* *(см. теорему 2.3) образуют проективное представление группы* $H^q(|K|, |L|)$ *в виде прямой суммы.*

3. Изоморфизм инцидентности

Пусть s^q — произвольный q-мерный симплекс, $\dot{s}^q$ — его граница, s^{q-1} — некоторая $(q-1)$-мерная грань симплекса s^q, A — противоположная грани s^{q-1} вершина и c^{q-1} — замкнутая звезда вершины A в границе $\dot{s}^q$, т. е. подкомплекс симплекса s^q, состоящий из всех граней симплекса s^q, кроме граней s^q и s^{q-1}. Тогда

$$\dot{s}^q = s^{q-1} \cup c^{q-1}, \qquad \dot{s}^{q-1} = s^{q-1} \cap c^{q-1}.$$

Для каждой точки $\alpha \in s^q$ функция

$$(1-t)\alpha + tA, \qquad 0 \leqslant t \leqslant 1,$$

является гомотопией, стягивающей пару $(|s^q|, |c^{q-1}|)$ в точечную пару (A, A)[1]). Поэтому согласно теореме I.11.5 и следствию I. 9.5 имеет место

[1]) То есть гомотопией, связывающей тождественное отображение $(|s^q|, |c^{q-1}|) \to (|s^q|, |c^{q-1}|)$ с отображением $(|s^q|, |c^{q-1}|) \to (A, A)$. *(Прим. ред.)*

Лемма 3.1. *Пространства* $|s^q|$, $|c^{q-1}|$ *и пара* $(|s^q|, |c^{q-1}|)$ *гомологически тривиальны.*

Изучим теперь триаду $(|s^q|; |s^{q-1}|, |c^{q-1}|)$, являющуюся согласно теореме 2.1 собственной триадой.

Теорема 3.2. *Гомологическая последовательность триады* $(|s^q|; |s^{q-1}|, |c^{q-1}|)$ *сводится к изоморфизму*

$$\partial\colon H_q(|s^q|, |\dot{s}^q|) \approx H_{q-1}(|s^{q-1}|, |\dot{s}^{q-1}|).$$

Все остальные группы этой последовательности тривиальны.

Теорема 3.3. *Группы гомологий пары* $(|s^q|, |\dot{s}^q|)$ *имеют вид*

$$H_q(|s^q|, |\dot{s}^q|) \approx G,$$
$$H_p(|s^q|, |\dot{s}^q|) = 0, \text{ если } p \neq q.$$

Доказательства. Согласно лемме 3.1 группа $H(|s^q|, |c^{q-1}|)$ для всех q тривиальна и, следовательно, в силу точности гомологической последовательности триады имеет место изоморфизм $\partial\colon H_p(|s^q|, |\dot{s}^q|) \approx H_{p-1}(|s^{q-1}|, |\dot{s}^{q-1}|)$. Итерируя этот изоморфизм, получаем, что $H_p(|s^q|, |\dot{s}^q|) \approx H_{p-q}(|s^0|, |\dot{s}^0|) = H_{p-q}(|s^0|)$. Так как пространство $|s^0|$ состоит из одной точки, то отсюда следует утверждение теоремы 3.3. Тем самым также доказана и теорема 3.2.

Определение 3.4. Пусть s^{q-1} — произвольная $(q-1)$-мерная грань q-мерного симплекса s^q $(q > 0)$. *Изоморфизмом инцидентности*

$$[s^q : s^{q-1}]\colon H_q(|s^q|, |\dot{s}^q|) \approx H_{q-1}(|s^{q-1}|, |\dot{s}^{q-1}|)$$

называется изоморфизм, определяемый изоморфизмом ∂, указанным в теореме 3.2. Точнее, изоморфизм инцидентности $[s^q : s^{q-1}]$ определяется из диаграммы

$$H_q(|s^q|, |\dot{s}^q|) \xrightarrow{\partial} H_{q-1}(|\dot{s}^q|) \xrightarrow{i_*} H_{q-1}(|\dot{s}^q|, |c^{q-1}|) \xleftarrow{j_*} H_{q-1}(|s^{q-1}|, |\dot{s}^{q-1}|),$$

в которой i, j — отображения вложения, по формуле

$$[s^q : s^{q-1}] = j_*^{-1} i_* \partial.$$

Лемма 3.5. *Пусть* $q > 0$ *и пусть отображение* $f\colon (|s^q|, |\dot{s}^q|) \to (|s_1^q|, |\dot{s}_1^q|)$ *переводит пространства* $|s^{q-1}|$ *и* $|c^{q-1}|$ *в пространства* $|s_1^{q-1}|$ *и* $|c_1^{q-1}|$ *соответственно. Тогда диаграмма*

$$\begin{array}{ccc}
H_q(|s^q|, |\dot{s}^q|) & \xrightarrow{[s^q : s^{q-1}]} & H_{q-1}(|s^{q-1}|, |\dot{s}^{q-1}|) \\
\downarrow{\scriptstyle f_*} & & \downarrow{\scriptstyle f_{1*}} \\
H_q(|s_1^q|, |\dot{s}_1^q|) & \xrightarrow{[s_1^q : s_1^{q-1}]} & H_{q-1}(|s_1^{q-1}|, |\dot{s}^{q-1}|)
\end{array}$$

в которой отображение f_1 *определено отображением* f, *коммутативна.*

Доказательство. Изоморфизм инцидентности является граничным оператором триады $(|s^q|; |s^{q-1}|, |c^{q-1}|)$; перестановочность этого граничного оператора с индуцированными гомоморфизмами групп гомологий следует из теоремы I.14.5.

Определение 3.6. Для любого нульмерного симплекса A (т. е. некоторой вершины) и любого элемента $g \in G$ будем через gA обозначать элемент группы $H_0(A)$, соответствующий элементу g при изоморфизме, индуцированном отображением $A \to P_0$. (В обозначениях, введенных в определении I.7.1, $gA = (gA)_A$.) Пусть s^q — упорядоченный q-мерный симплекс с вершинами $A^0 < A^1 < \ldots$ $\ldots < A^q$ и пусть $s^k (k = 0, 1, \ldots, q-1)$ — упорядоченный симплекс с вершинами $A^{q-k} < A^{q-k+1} < \ldots < A^q$. Для любого элемента $g \in G$ определим по индукции элемент gs^q группы $H_q(|s^q|, |\dot{s}^q|)$, полагая

$$gs^k = [s^k : s^{k-1}]^{-1} gs^{k-1}. \tag{1}$$

Таким образом,

$$gs^q = [s^q : s^{q-1}]^{-1} \ldots [s^1 : A^q]^{-1} gA^q.$$

Теорема 3.7. *Для любого упорядоченного q-мерного симплекса s^q соответствие $g \to gs^q$ является изоморфным отображением группы G на группу $H_q(|s^q|, |\dot{s}^q|)$.*

Доказательство. Достаточно заметить, что изоморфизмы инцидентности являются изоморфизмами, а соответствие $g \to gA^q$ изоморфным отображением группы G на группу $H_0(A^q)$ (см. теорему I.7.2).

Теорема 3.8. *Пусть s_1 и s_2 — упорядоченные q-мерные симплексы и f — некоторое симплициальное отображение $(s_1, \dot{s}_1) \to$ $\to (s_2, \dot{s}_2)$, сохраняющее порядок вершин. Тогда $f_*(gs_1) = gs_2$.*

Доказательство. Рассмотрим симплексы s_i^n $(i = 1, 2; n =$ $= 1, \ldots, q)$, введенные при доказательстве теоремы 3.6. Так как отображение f сохраняет порядок вершин, то оно определяет отображения

$$f_n \colon (s_1^n, \dot{s}_1^n) \to (s_2^n, \dot{s}_2^n).$$

Рассмотрим диаграмму

$$\begin{array}{ccccccc}
H_q(|s_1^q|, |\dot{s}_1^q|) & \to & H_{q-1}(|s_1^{q-1}|, |\dot{s}_1^{q-1}|) & \to & \ldots & \to & H_q(A_1^q) \\
\downarrow{\scriptstyle f_{q*}} & & \downarrow{\scriptstyle f_{q-1*}} & & & & \downarrow{\scriptstyle f_{0*}} \\
H_q(|s_2^q|, |\dot{s}_2^q|) & \to & H_{q-1}(|s_2^{q-1}|, |\dot{s}_2^{q-1}|) & \to & \ldots & \to & H_q(A_2^q),
\end{array}$$

в которой горизонтальные стрелки обозначают изоморфизмы инцидентности. Согласно лемме 3.5 каждый квадрат этой диаграммы коммутативен. Так как гомоморфизм f_{0*} отображает gA_1^q в gA_2^q (см. теорему I.7.2), то, следовательно, гомоморфизм f_{q*} отображает gs_1^q в gs_2^q.

Теорема 3.2с. *Когомологическая последовательность триады* $(|s^q|; |s^{q-1}|, |c^{q-1}|)$ *сводится к изоморфизму*

$$\delta: H^{q-1}(|s^{q-1}, |\dot{s}^{q-1}|) \approx H^q(|s^q|, |\dot{s}^q|).$$

Теорема 3.3с.

$$H^q(|s^q|, |\dot{s}^q|^1) = G, \quad H^q(|s^q|, |\dot{s}^q|) = 0, \text{ если } p \neq q.$$

Определение 3.4с. Пусть s^{q-1} — произвольная $(q-1)$-мерная грань некоторого q-мерного симплекса s^q. *Изоморфизмом инцидентности*

$$[s^{q-1} : s^q]: H^{q-1}(|s^{q-1}|, |\dot{s}^{q-1}|) \approx H^q(|s^q|, |s^?|)$$

называется изоморфизм, определенный указанным в теореме 3.2 изоморфизмом δ, т. е.

$$[s^{q-1} : s^q] = \delta i^* j^{*-1}.$$

Лемма 3.5с. *В условиях леммы* 3.5

$$f^* [s_1^{q-1} : s_1^q] = [s^{q-1} : s^q] f_1^*.$$

Определение 3.6с. Для любой вершины A и любого элемента $g \in G$ обозначим через $gA \in H^0(A)$ образ элемента g при изоморфизме, индуцированном отображением $A \to P_0$. (В обозначениях введенных в определении I.7.1с, $gA = g_A(A)$.) Пусть s^q — произвольный упорядоченный q-мерный симплекс с вершинами $A^0 < < A^1 < \ldots < A^q$. Для любого элемента $g \in G$ определим по индукции элемент $gs^q \in H^q(|s^q|, |\dot{s}^q|)$, положив

$$gs^k = [s^{k-1} : s^k]\, gs^{k-1}. \tag{1c}$$

Таким образом,

$$gs^q = [s^{q-1} : s^q] \ldots [A^q : s^1] gA^q.$$

Теорема 3.7с. *Соответствие* $g \to gs^q$ *является изоморфным отображением группы* G *на группу* $H^q(|s^q|, |\dot{s}^q|)$.

Теорема 3.8с. *Пусть* s_1, s_2 — *упорядоченные* q-*мерные симплексы и* f: $(s_1, \dot{s}_1) \to (s_2, \dot{s}_2)$ — *произвольное симплициальное отображение, сохраняющее порядок вершин. Тогда* $f^*(gs_2) = gs_1$.

4. Автоморфизмы симплексов

Введенный в предыдущем пункте элемент $gs^q \in H_q(|s^q|, |\dot{s}^q|)$ зависит от элемента $g \in G$ и от порядка вершин g-мерного симплекса s^q. Наша ближайшая задача состоит в выяснении его зависимости от порядка вершин. Получающийся результат (теорема 4.3) играет основную роль при сопоставлении нашей аксиоматической системы с классической теорией гомологий, в особенности с той ее частью, в которой встречается понятие *ориентации*. Предварительно мы более подробно рассмотрим группу H_0 пространства, состоящего из двух точек (нульмерной сферы).

Теорема 4.1. *Пусть A и B — вершины одномерного симплекса s^1. Для упрощения формул обозначим нульмерную сферу $|\dot{s}^1|$ через S^0. Оказывается, что любой элемент группы $h \in H_0(S^0)$ единственным образом записывается в следующем виде:*

$$h = (gA)_{S^0} + (g'B)_{S^0}, \quad \text{где} \quad g, g' \in G$$

(*обозначения см. в определении* I.7.1). *Элемент h тогда и только тогда принадлежит группе $H_0(S^0)$, когда $g + g' = 0$, т. е. когда*

$$h = (gA)_{S^0} - (gB)_{S^0}.$$

Доказательство. Первое утверждение теоремы немедленно следует из определения I.7.1 и теоремы I.13.2 о прямой сумме. Для доказательства второго утверждения рассмотрим отображение $f\colon S^0 \to P_0$, где P_0 — состоящее из одной точки пространство, которое было использовано для определения группы коэффициентов G (см. определение I.6.1). Согласно теореме I.7.2

$$f_* h = g + g',$$

и, следовательно, $f_* h = 0$ тогда и только тогда, когда $g + g' = 0$.

Определение 4.2. *Автоморфизмом* некоторого симплекса называется его взаимно однозначное симплициальное отображение на себя.

Согласно теореме II.4.4 автоморфизмы симплекса находятся во взаимно однозначном соответствии с подстановками его вершин. Любая подстановка является произведением транспозиций, т. е. подстановок, меняющих местами две вершины и оставляющих остальные вершины неподвижными. Вообще говоря, одну и ту же подстановку можно различным образом представить в виде произведения транспозиций. Однако для всех разложений число множителей имеет одну и ту же четность. Если число транспозиций, произведением которых является данная подстановка, четно, то подстановка называется *четной*. В противном случае подстановка называется *нечетной*. Мы будем называть автоморфизм симплекса *четным* или *нечетным* в зависимости от того, четна или нечетна соответствующая ему подстановка.

Теорема 4.3. *Пусть $f\colon (s, \dot{s}) \to (s, \dot{s})$ — произвольный автоморфизм q-мерного симплекса s. Тогда для любого элемента $h \in H_q(|s|, |\dot{s}|)$*

$$f_*(h) = \begin{cases} h, & \text{если автоморфизм } f \text{ четен,} \\ -h, & \text{если автоморфизм } f \text{ нечетен.} \end{cases}$$

Доказательство. Для $q = 0$ теорема очевидна. Рассмотрим случай $q = 1$. Пусть нульмерная сфера $S^0 = |\dot{s}^1|$ состоит из точек A, B и пусть $f_0\colon S^0 \to S^0$ — отображение, определенное отображением f. Если f является тождественным отображением, то доказываемое утверждение очевидно. Следовательно, мы можем предполагать, что $f(A) = B$ и $f(B) = A$. Рассмотрим диаграмму

$$\begin{array}{ccc} H_1(|s^1|, S^0) & \xrightarrow{f_*} & H_1(|s^1|, S^0) \\ \downarrow{\scriptstyle\tilde\partial} & & \downarrow{\scriptstyle\tilde\partial} \\ \tilde H_0(S^0) & \xrightarrow{f_{0*}} & \tilde H_0(S^0). \end{array}$$

Эта диаграмма коммутативна (см. теорему I.8.4). Согласно теореме 4.1 для любого элемента $h \in H_1(|s^1|, S^0)$ существует такой элемент $g \in G$, что

$$\tilde\partial h = (gA)_{S^0} - (gB)_{S^0}.$$

Далее, согласно теореме I.7.2

$$\tilde\partial f_* h = f_{0*}\tilde\partial h = (gf(A))_{S^0} - (gf(B))_{S^0} = (gB)_{S^0} - (gA)_{S^0} = -\tilde\partial h.$$

Так как $H_1(|s^1|) = 0$, то $\operatorname{Ker}\tilde\partial = 0$, и, следовательно, $f_* h = -h$.

Рассуждая по индукции, предположим, что теорема справедлива для $q - 1$, где $q \geqslant 2$. Так как любая подстановка является произведением транспозиций, то достаточно рассмотреть случай, когда автоморфизм f порождает транспозицию вершин. Поскольку симплекс s имеет более двух вершин, то в этом случае существует такая вершина A_0, что $f(A_0) = A_0$. Пусть s' — $(q - 1)$-мерная грань симплекса s, противоположная вершине A_0. Автоморфизм f отображает грань s' на себя и, следовательно, порождает автоморфизм

$$f'\colon (s', \dot s') \to (s', \dot s').$$

Согласно лемме 3.4 имеет место соотношение коммутативности

$$[s : s']\, f_* = f'_*\, [s : s'].$$

Пусть $h \in H_q(|s|, |\dot s|)$. Так как автоморфизм f' порождает транспозицию вершин симплекса s', то согласно предположению индукции

$$f'_*\, [s : s']\, h = -\, [s : s']\, h.$$

Следовательно,

$$[s : s']\, f_* h = [s : s']\, (-h).$$

Таким образом, $f_* h = -h$, так как отображение $[s : s']$ является изоморфизмом.

Теорема 4.4. *Если упорядоченные симплексы s_1 и s_2 получаются из одного и того же неупорядоченного q-мерного симплекса s, то*

$$gs_1 = \pm\, gs_2$$

в соответствии с тем, отличается ли порядок вершин симплекса s_2 на четную или нечетную подстановку от порядка вершин симплекса s_1.

Доказательство. Пусть f — автоморфизм пары $(s, \dot{s})$ отображающий с сохранением порядка симплекс s_2 на симплекс s_1. Тогда, с одной стороны, из теоремы 3.8 следует, что

$$f_*(gs_2) = gs_1,$$

а с другой стороны, из теоремы 4.3 следует, что

$$f_*(gs_2) = \pm gs_2.$$

Таким образом, $gs_1 = \pm gs_2$.

Теорема 4.5. *Пусть s — упорядоченный симплекс с вершинами $A^0 < \ldots < A^q$ и пусть s_k — его грань, получающаяся путем выбрасывания вершины A^k без изменения порядка остальных вершин. Тогда*

$$[s : s_k]\, gs = (-1)^k gs_k.$$

Доказательство. В случае $k = 0$ утверждение теоремы совпадает с формулой (1) определения 3.6. Общий случай можно следующим образом свести к случаю $k = 0$. Пусть $\bar{s}$ — упорядоченный симплекс, получающийся из симплекса s, если без изменения порядка остальных вершин вершину A^k поставить на первое место. Тогда $s_k = \bar{s}_0$ и $gs_k = gs_0$, в то время как согласно теореме 4.4 $gs = (-1)^k g\bar{s}$. Следовательно,

$$[s : s_k] gs = [\bar{s} : \bar{s}_0] (-1)^k g\bar{s} = (-1)^k g\bar{s}_0 = (-1)^k gs_k.$$

Теорема 4.1с. *Любой элемент $h \in H^0(S^0)$ однозначно определяется элементами $h(A) = g$ и $h(B) = g'$ группы G (см. определение I.7.1) и любой паре $g, g' \in G$ соответствует некоторый элемент $h \in H^0(S^0)$. Элемент h тогда и только тогда принадлежит подгруппе G_{s^0} (см. определение I.7.3с), когда $g = g'$.*

Теорема 4.3с. *Пусть f — произвольный автоморфизм q-мерного симплекса s. Тогда для любого элемента*

$$f^*(h) = \begin{cases} h, & \text{если автоморфизм } f \text{ четен,} \\ -h, & \text{если автоморфизм } f \text{ нечетен.} \end{cases}$$

Теорема 4.4с. *Если упорядоченные симплексы s_1 и s_2 получаются из одного и того же неупорядоченного q-мерного симплекса s, то $gs_1 = \pm gs_2$ в соответствии с тем, отличается ли порядок вершин симплекса s_2 на четную или нечетную подстановку от порядка вершин симплекса s_1.*

Теорема 4.5с. *Пусть s и s_k — те же симплексы, что и в теореме 4.5. Тогда*

$$[s_k : s] gs_k = (-1)^k gs.$$

5. Цепи в симплициальных комплексах

Определение 5.1. *Остовом K^q размерности q* симплициального комплекса K называется подкомплекс комплекса K, состоящий из всех его симплексов размерностей, не больших q.

В этом и следующем пунктах через (K, L) обозначается пара, состоящая из некоторого симплициального комплекса K и его подкомплекса L.

Лемма 5.2. *Если $p \neq q$, то*

$$H_p(|K^q \cup L|, |K^{q-1} \cup L|) = 0.$$

Доказательство. Пусть $s_1, \ldots, s_r$ — все симплексы комплекса K, не содержащиеся в подкомплексе L. Тогда

$$K^q \cup L = s_1 \cup \ldots \cup s_r \cup K^{q-1} \cup L$$

и

$$\dot{s}_m = s_m \cap (K^{q-1} \cup L) \quad (m = 1, \ldots, r).$$

Следовательно, применима теорема 2.3 о прямой сумме. Остается заметить, что согласно теореме 3.3 $H_p(|s_q|, |\dot{s}_q|) = 0$, если $p \neq q$.

Определение 5.3. Группа

$$C_q(K, L) = H_q(|K^q \cup L|, |K^{q-1} \cup L|)$$

называется *группой q-мерных цепей пары* (K, L). Пусть $f\colon (K, L) \to (K_1, L_1)$ — произвольное симплициальное отображение и

$$(K^q \cup L,\ K^{q-1} \cup L) \to (K_1^q \cup L_1,\ K_1^{q-1} \cup L_1)$$

— определяемое им отображение. Гомоморфизм

$$f_q\colon C_q(K, L) \to C_q(K_1, L_1),$$

индуцированный последним отображением, называется *цепным гомоморфизмом*, индуцированным отображением f.

Теорема 5.4. *$C_q(K, L) = 0$, если $q < 0$, или $q > \dim K$.*

Доказательство. Если $q < 0$, то $C_q(K, L) = H_q(|L|, |L|)$. Если $q > \dim K$, то $C_q(K, L) = H_q(|K|, |K|)$. Следовательно, согласно лемме I.8.1 в обоих случаях $C_q(K, L) = 0$.

Определение 5.5. Пусть $A^0, \ldots, A^q$ — произвольная конечная последовательность (возможно, с повторениями) вершин некоторого симплекса комплекса K. Для каждого элемента $g \in G$ следующим образом определим элемент $gA^0 \ldots A^q$ группы $C_q(K, L)$. Пусть s — произвольный упорядоченный симплекс с вершинами $B^0 < \ldots < B^q$ и пусть $f\colon (s, \dot{s}) \to (K^q \cup L, K^{q-1} \cup L)$ — такое симплициальное отображение, что $f(B^i) = A_i$. Тогда

$$gA^0 \ldots A^q = f_*(gs).$$

Из теоремы 3.8 следует, что элемент $gA^0 \ldots A^q$ не зависит от выбора симплекса s.

Теорема 5.6. *Сопоставление элементу g цепи $gA^0\ldots A^q$ определяет гомоморфизм $G \to C_q(K, L)$, т. е.*

$$(g_1 + g_2)\, A^0\ldots A^q = g_1A^0\ldots A^q + g_2A^0\ldots A^q.$$

Пусть $i_0,\ldots, i_q$ — некоторая перестановка чисел $0,\ldots, q$. Тогда

$$gA^{i_0}\ldots A^{i_q} = \pm\, gA^0\ldots A^q$$

в соответствии с тем, четна или нечетна данная перестановка. Если некоторая вершина встречается в последовательности $A^0,\ldots$ $\ldots, A^q$ по крайней мере два раза, то $g\,A^0\ldots A^q = 0$. Если вершины $A^0,\ldots$ $\ldots, A^q$ принадлежат некоторому симплексу подкомплекса L, то $gA^0\ldots A^q = 0$.

Доказательство. Первое и второе утверждения теоремы вытекают из теорем 3.7 и 4.4 соответственно. Если в последовательности $A^0,\ldots, A^q$ встречаются повторения или ее члены являются вершинами некоторого симплекса подкомплекса L, то отображение $f\colon (s, \dot{s}) \to (K^q \cup L, K^{q-1} \cup L)$ переводит симплекс s в подкомплекс $K^{q-1} \cup L$ и, следовательно, разлагается в композицию отображений

$$(s, \dot{s}) \to (K^{q-1} \cup L, K^{q-1} \cup L) \to (K^q \cup L, K^{q-1} \cup L).$$

Так как группа $H_q(K^{q-1} \cup L, K^{q-1} \cup L)$ тривиальна (см. лемму I.8.1), то отсюда вытекает, что $gA^0\ldots A^q = 0$.

Теорема 5.7. *Пусть $s_1,\ldots, s_{\alpha_q}$ — все q-мерные симплексы комплекса K, не принадлежащие подкомплексу L. Предположим, что для каждого симплекса s_m выбран некоторый порядок $A^0_m < \ldots$ $\ldots < A^q_m$ его вершин. Тогда каждая q-мерная цепь с пары (K, L) может быть единственным образом записана в следующем виде:*

$$c = \sum_{m=1}^{\alpha_q} g_m A^0_m\ldots A^q_m, \quad g_m \in G.$$

Доказательство. Пусть

$$i_m\colon (s, \dot{s}) \subset (K^q \cup L, K^{q-1} \cup L).$$

Так как

$$K^q \cup L = s_1 \cup\ldots\cup s_{\alpha_q} \cup K^{q-1} \cup L$$

и

$$\dot{s}_m = s_m \cap (K^{q-1} \cup L),$$

то применима теорема 2.3 о прямой сумме. Согласно этой теореме цепь c имеет единственное представление вида

$$c = \sum_{n=1}^{\alpha_q} i_{m*}h_m, \qquad h_m \in H_q(|s_m|, |\dot{s}_m|).$$

Согласно теореме 3.7 каждый элемент h_m однозначно записывается в виде $h_m = g_m\, s_m$. Остается заметить, что согласно определению 5.5 $i_{m*}g_m s_m = g_m A^0_m\ldots A^q_m$.

Одним из следствий теоремы 5.7 является тот факт, что символы $gA^0\dots A^q$ порождают группу $C_q(K, L)$. Заметим далее, что любую линейную комбинацию (с целыми коэффициентами) таких символов можно, применяя теорему 5.6, привести к нормальному виду, указанному в теореме 5.7. Таким образом, группу $C_q(K, L)$ можно рассматривать как группу, порожденную символами $gA^0\dots A^q$, где $g \in G$, а вершины $A^0,\dots, A^q$ принадлежат некоторому симплексу комплекса K, удовлетворяющими соотношениям, указанным в теореме 5.6.

Теорема 5.8. *Пусть $f\colon (K, L)\to(K_1, L_1)$ — произвольное симплициальное отображение. Тогда для любой q-мерной цепи вида $gA^0\dots A^q$ пары (K, L) имеет место соотношение*

$$f_q(gA^0\dots A^q) = gf(A^0)\dots f(A^q).$$

Доказательство. Пусть s — произвольный упорядоченный q-мерный симплекс с вершинами $B^0,\dots, B^q$ и пусть $h\colon (s, \dot{s})\to (K^q \cup L, K^{q-1} \cup L)$ — симплициальное отображение, для которого $h(B^i) = A^i$. Согласно определению 5.5 $gA^0\dots A^q = h_*(gs)$. Пусть

$${}_qf\colon (K^q \cup L, K^{q-1} \cup L)\to (K_1^q \cup L_1, K_1^{q-1} \cup L_1)$$

— отображение, определенное отображением f. Тогда $f_q = {}_qf_*$ и

$$\begin{aligned} f_q(gA^0\dots A^q) &= f_qh_*(gs) = {}_qf_*h_*(gs) = \\ &= ({}_qfh)_*(gs) = gf(A^0)\dots f(A^q), \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Символ $gA^0\dots A^q$ представляет как некоторый элемент группы $C_q(K)$, так и некоторый элемент группы $C_q(K, L)$. Если, кроме того, вершины $A^0,\dots, A^q$ принадлежат некоторому симплексу подкомплекса L, то символ $gA^0\dots A^q$ представляет также некоторый элемент группы $C_q(L)$. Во избежание неясностей мы будем писать $(gA^0\dots A^q)_K$, $(gA^0\dots A^q)_{(K,L)}$, $(gA^0\dots A^q)_L$, чтобы показать, элементом какой группы мы считаем символ $gA^0\dots A^q$. Из теоремы 5.7 следует, что

$$i_q(gA^0\dots A^q)_L = (gA^0\dots A^q)_K,$$

$$j_q(gA^0\dots A^q)_K = (gA^0\dots A^q)_{(K,L)},$$

где i и j — отображения вложения

$$L \xrightarrow{i} K \xrightarrow{j} (K, L).$$

Непосредственным следствием теорем 5.6—5.8 является

Теорема 5.9. *Последовательность*

$$0\to C_q(L) \xrightarrow{i_q} C_q(K) \xrightarrow{j_q} C_q(K, L)\to 0$$

точна, причем $\operatorname{Im} i_q$ *является прямым слагаемым группы* $C_q(K)$.

Лемма 5.2с. *Если* $p \neq q$, *то*

$$H^p(|K^q \cup L|, |K^{q-1} \cup L|) = 0.$$

Определение 5.3с. Группа

$$C^q(K, L) = H^q(|K^q \cup L|, |K^{q-1} \cup L|)$$

называется группой *q-мерных коцепей пары* (K, L). Пусть f: $(K, L) \to (K_1, L_1)$ — произвольное симплициальное отображение и

$$(K^q \cup L, K^{q-1} \cup L) \to (K_1^q \cup L_1, K_1^{q-1} \cup L_1)$$

— определяемое им отображение. Гомоморфизм

$$f^q \colon C^q(K_1, L_1) \to C^q(K, L),$$

индуцированный последним отображением, называется *коцепным гомоморфизмом*, индуцированным отображением f.

Теорема 5.4с. $C^q(K, L) = 0$, *если* $q < 0$ *или* $q > \dim K$.

Определение 5.5с. Пусть $c \in C^q(K, L)$ — произвольная q-мерная коцепь пары (K, L) и $A^0, \ldots, A^q$ — конечная последовательность (возможно, с повторениями) вершин некоторого симплекса комплекса K. Пусть, далее, s — произвольный упорядоченный симплекс с вершинами $B^0 < \ldots < B^q$ и пусть f: $(s, \dot{s}) \to (K^q \cup L, K^{q-1} \cup L)$ — такое симплициальное отображение, что $f(B^i) = A^i$. Определим элемент

$$c(A^0, \ldots, A^q) = g \in G,$$

как элемент, удовлетворяющий соотношению

$$f^*c = gs.$$

Этот элемент определен однозначно и согласно теореме 3.8с не зависит от выбора симплекса s.

Теорема 5.6с.

$$(c_1 + c_2)(A^0, \ldots, A^q) = c_1(A^0, \ldots, A^q) + c_2(A^0, \ldots, A^q).$$

Для любой перестановки $i_0, \ldots, i_q$ *чисел* $0, \ldots, q$

$$c(A^{i_0}, \ldots, A^{i_q}) = \pm c(A^0, \ldots, A^q)$$

в соответствии с тем, четна или нечетна данная перестановка. Если некоторая вершина встречается в последовательности $A^0, \ldots, A^q$ *по крайней мере два раза, то* $c(A^0, \ldots, A^q) = 0$. *Если вершины* $A^0, \ldots, A^q$ *принадлежат некоторому симплексу подкомплекса* L, *то* $c(A^0, \ldots, A^q) = 0$.

Теорема 5.7с. *Пусть* $s_1, \ldots, s_{\alpha_q}$ — *все симплексы комплекса* K, *не принадлежащие подкомплексу* L. *Предположим, что для каждого симплекса* s_m *выбран некоторый порядок* $A_m^0 < \ldots < A_m^q$ *его вершин. Тогда для любых элементов* $g_m \in G$ $(m = 1, \ldots, \alpha_q)$ *существует, и притом только одна, q-мерная коцепь* $c \in C^q(K, L)$, *для которой*

$$c(A_m^0, \ldots, A_m^q) = g_m \quad (m = 1, \ldots, \alpha_q).$$

Ввиду теорем 5.7с и 5.6с группу $C^q(K, L)$ можно определить как группу функций, принимающих значения в группе G, определенных на последовательностях вершин $A^0, \ldots, A^q$ симплексов комплекса K и подчиненных соотношениям, перечисленным в теореме 5.6с. Ввиду теоремы 5.7с коцепи можно записывать также в виде линейных форм, т. е. символ

$$\Sigma g_m A_m^0 \ldots A_m^q$$

можно интерпретировать как коцепь c, принимающую для каждого m значение g_m на последовательности $A_m^0, \ldots, A_m^q$. Однако, как показывает следующая теорема, функциональные обозначения для коцепей значительно более удобны.

Теорема 5.8с. *Пусть* f: $(K, L) \to (K_1, L_1)$ — *симплициальное отображение и* $c \in C^q(K_1, L_1)$ — *произвольная q-мерная коцепь. Тогда для любой последовательности* $A^0, \ldots, A^q$ *вершин, принадлежащих некоторому симплексу комплекса* K,

$$(f^q c)(A^0, \ldots, A^q) = c(fA^0, \ldots, fA^q).$$

Теорема 5.9с. *Последовательность*

$$0 \to C^q(K, L) \xrightarrow{j^q} C^q(K) \xrightarrow{i^q} C^q(L) \to 0$$

точна, причем $\operatorname{Im} j^q$ *является прямым слагаемым группы* $C^q(K)$.

6. Граничный оператор

Определение 6.1. *Граничный оператор* для цепей

$$\partial_q\colon C_q(K, L) \to C_{q-1}(K, L)$$

определяется как граничный оператор тройки

$$(|K^q \cup L|, |K^{q-1} \cup L|, |K^{q-2} \cup L|).$$

Более точно, оператором ∂_q называется сквозное отображение

$$H_q(|K^q \cup L|, |K^{q-1} \cup L|) \xrightarrow{\partial} H_{q-1}(|K^{q-1} \cup L|) \xrightarrow{k_*}$$
$$\xrightarrow{k_*} H_{q-1}(|K^{q-1} \cup L|, |K^{q-2} \cup L|),$$

где k — отображение вложения.

Теорема 6.2. $\partial_q \partial_{q+1} = 0$.

Доказательство. Так как $\partial_q = k_{q-1*}\partial$ и $\partial_{q+1} = k_{q*}\partial'$, то $\partial_q \partial_{q+1} = k_{q-1*}\partial k_{q*}\partial'$. Отображения ∂ и k_{q*} являются соседними гомоморфизмами

$$H_q(|K^q \cup L|) \xrightarrow{k_{q*}} H_q(|K^q \cup L|, |K^{q-1} \cup L|) \xrightarrow{\partial} H_{q-1}(|K^{q-1} \cup L|)$$

гомологической последовательности пары $(|K^q \cup L|, |K^{q-1} \cup L|)$. Следовательно, $\partial k_{q*} = 0$, и поэтому $\partial_q \partial_{q+1} = 0$.

Теорема 6.3. *$f_{q-1}\partial_q = \partial_q f_q$ для любого симплициального отображения f: $(K, L) \to (K_1, L_1)$.*

Это утверждение является следствием соответствующей теоремы I.10.3 для троек.

Найдем теперь для граничного оператора явное выражение. С этой целью удобно условиться в том, что *значок* $\wedge$, *поставленный над одной или несколькими вершинами последовательности $A^0 \ldots A^n$, означает, что отмеченные этим значком вершины должны быть опущены. Например,*

$$A^0\widehat{A^1}\ldots\widehat{A^k}\ldots A^n = A^0A^2\ldots A^{k-1}A^{k+1}\ldots A^n.$$

Теорема 6.4. *Граничный оператор ∂_q определяется формулой*

$$\partial_q(gA^0\ldots A^q) = \sum_{k=0}^{q}(-1)^k gA^0\ldots\widehat{A^k}\ldots A^q.$$

Доказательство. Предположим сначала, что комплекс K является упорядоченным q-мерным симплексом s с вершинами $A^0 < \ldots < A^q$ и что $L = \varnothing$. Тогда $K^q = K = s$ и $K^{q-1} = \dot{s}$. Пусть s_k — упорядоченный симплекс с вершинами $A^0 < \ldots \widehat{A^k} \ldots < A^q$ и c_k — подкомплекс симплекса s, состоящий из всех граней симплекса s, за исключением симплексов s и s_k. Рассмотрим диаграмму

$$\begin{tikzcd}
 & & H_{q-1}(|\dot{s}|, |\dot{s}^{q-2}|) \arrow[dd, "l_{k*}"] & \\
H_q(|s|, |\dot{s}|) \arrow[r, "\partial"] & H_{q-1}(|\dot{s}|) \arrow[ur, "i'_*"] \arrow[dr, "i_{k*}"'] & & H_{q-1}(|s_k|, |\dot{s}_k|) \arrow[ul, "j'_{k*}"'] \arrow[dl, "j_{k*}"] \\
 & & H_{q-1}(|\dot{s}|, |c_k|) &
\end{tikzcd}$$

все отображения которой, за исключением оператора ∂, индуцированы отображениями вложения. Элемент $\partial_q(gs)$ принадлежит по определению группе $H_{q-1}(|\dot{s}|, |\dot{s}^{q-2}|)$. Согласно теореме 5.7 существуют такие элементы $g_i \in G$, что

$$(1) \qquad \partial_q(gs) = \sum_{i=0}^{q} g_i A^0\ldots\widehat{A^i}\ldots A^q = \sum_{i=0}^{q} j'_{i*}(g_i s_i).$$

Применим к обеим частям равенства (1) отображение l_{k*}. Если $i \neq k$, то $s_i \subset c_k$ и отображение $l_k j'_i$ можно разложить в композицию отображений вложения

$$(s_i, \dot{s}_i) \to (c_k, c_k) \to (\dot{s}, c_k).$$

Так как согласно лемме I.8.1 $H_{q-1}(|c_k|, |c_k|) = 0$, то отсюда следует, что $(l_k j'_i)_* = 0$. Поэтому из формулы (1) вытекает, что

$$(2) \qquad l_{k*}\partial_q(gs) = l_{k*}j'_{k*}(gs) = j_{k*}(g_k s_k).$$

Ввиду соотношений $\partial_q = i'_*\partial$ и $l_k i' = i_k$ формулу (2) можно переписать в следующем виде:

$$i_{k*}\partial(gs) = j_{k*}(g_k s_k). \tag{3}$$

Отображение j_{k*} является изоморфизмом, причем согласно определению 3.4 отображение $j_{k*}^{-1} i_{k*}\partial$ есть не что иное, как изоморфизм инцидентности $[s : s_k]$. Поэтому из формулы (3) следует, что

$$[s : s_k](gs) = g_k s_k.$$

Сравнивая полученный результат с теоремой 4.5 и определением 3.6, немедленно получаем, что $g_k = (-1)^k g$. Остается подставить это выражение в формулу (1).

Вернемся теперь к общему случаю, когда $gA^0 \ldots A^q$ есть q-мерная цепь некоторой пары (K, L). Пусть s — упорядоченный q-мерный симплекс с вершинами $B^0 < \ldots < B^q$ и $f\colon s \to (K, L)$ — такое симплициальное отображение, что $f(B^i) = A^i$ $(i = 0, \ldots, q)$. Тогда согласно теореме 5.8

$$f_q(gB^0 \ldots B^q) = gA^0 \ldots A^q,$$
$$f_q(gB^0 \ldots \widehat{B}^k \ldots B^q) = gA^0 \ldots \widehat{A}^k \ldots A^q.$$

Так как $f_{q-1}\partial_q = \partial_q f_q$, то

$$\partial_q(gA^0 \ldots A^q) = \partial_q f_q(gB^0 \ldots B^q) = f_{q-1}\partial_q(gB^0 \ldots B^q) =$$
$$= f_{q-1}(\Sigma\, (-1)^k gB^0 \ldots \widehat{B}^k \ldots B^q) = \Sigma\, (-1)^k gA^0 \ldots \widehat{A}^k \ldots A^q.$$

Тем самым теорема полностью доказана.

Замечание. Так как отображение вырезания $(K^q, K^{q-1} \cup L^q) \subset (K^q \cup L, K^{q-1} \cup L)$ индуцирует изоморфизмы групп гомологий, то группы цепей можно определить также формулой

$$C_q(K, L) = H_q(|K^q|, |K^{q-1} \cup L^q|).$$

Это определение имеет то преимущество, что оно использует только остовы размерности, не большей q, и поэтому из него, например, непосредственно следует, что $C_q(K, L) = C_q(K^q, L^q)$. С другой стороны, в этом определении граничный оператор является композицией уже трех гомоморфизмов, один из которых является изоморфизмом, обратным к изоморфизму, индуцированному отображением вырезания.

Определение 6.1с. *Кограничным оператором*

$$\delta^q\colon C^q(K, L) \to C^{q+1}(K, L)$$

называется кограничный оператор тройки

$$(|K^{q+1} \cup L|, |K^q \cup L|, |K^{q-1} \cup L|).$$

Теорема 6.2с. $\delta^{q+1}\delta^q = 0$.

Теорема 6.3с. *$f^{q+1}\delta^q = \delta^q f^q$ для любого симплициального отображения f: $(K, L) \to (K_1, L_1)$.*

Теорема 6.4с. *Для любой коцепи $c \in C^q(K, L)$*

$$\delta^q c(A^0, \ldots, A^{q+1}) = \sum_{k=0}^{q+1} (-1)^k c(A^0, \ldots, \widehat{A^k}, \ldots, A^{q+1}).$$

7. Циклы и группы гомологий

Определение 7.1. Пусть (K, L) — произвольная пара, состоящая из симплициального комплекса K и его подкомплекса L. Ядро отображения ∂_q: $C_q(K, L) \to C_{q-1}(K, L)$ называется *группой q-мерных циклов* пары (K, L) и обозначается через $Z_q(K, L)$. Образ отображения ∂_{q+1}: $C_{q+1}(K, L) \to C_q(K, L)$ называется *группой q-мерных границ* пары (K, L) и обозначается через $B_q(K, L)$. Так как $\partial_q \partial_{q+1} = 0$, то группа $B_q(K, L)$ является подгруппой группы $Z_q(K, L)$. Фактор-группа $H_q(K, L) = Z_q(K, L) / B_q(K, L)$ называется *q-мерной группой гомологий* пары (K, L). Для любого симплициального отображения f: $(K, L) \to (K_1, L_1)$ гомоморфизм f_q переводит группу $Z_q(K, L)$ в группу $Z_q(K_1, L_1)$, группу $B_q(K, L)$ в группу $B_q(K_1, L_1)$ и, следовательно, индуцирует гомоморфизм

$$f_{\#}: H_q(K, L) \to H_q(K_1, L_1).$$

Замечание. Группу $H_q(K, L)$ не надо смешивать с аксиоматически определенной группой $H_q(|K|, |L|)$. В следующем пункте будет доказан изоморфизм этих групп, и это будет основным этапом в нашем доказательстве теоремы единственности.

Согласно теореме 5.9 отображения вложения

$$L \xrightarrow{i} K \xrightarrow{j} (K, L)$$

порождают точную последовательность

$$0 \to C_q(L) \xrightarrow{i_q} C_q(K) \xrightarrow{j_q} C_q(K, L) \to 0.$$

Мы используем этот факт для определения некоторого гомоморфизма $\partial_{\#}$: $H_q(K, L) \to H_{q-1}(L)$.

Лемма 7.2. *Пусть $\bar{Z}_q(K, L) = j_q^{-1}[Z_q(K, L)]$, $\bar{B}_q(K, L) = j_q^{-1}[B_q(K, L)]$ и $\bar{H}_q(K, L) = \bar{Z}_q(K, L) / \bar{B}_q(K, L)$. Тогда*

$$\bar{Z}_q(K, L) = \partial_q^{-1}[i_{q-1}C_{q-1}(L)], \quad \bar{B}_q(K, L) = B_q(K) \cup i_q[C_q(L)],$$

где через $\cup$ обозначена операция построения наименьшей подгруппы группы $C_q(K)$, содержащей две данные подгруппы. Далее, гомоморфизм j_q индуцирует изоморфизм

$$\bar{j}: \bar{H}_q(K, L) \approx H_q(K, L).$$

Доказательство. Цепь $c \in C_q(K)$ тогда и только тогда принадлежит группе $\overline{Z}_q(K, L)$, когда $j_q c \in Z_q(K, L)$, т. е. когда $\partial_q j_q c = 0$. Последнее равенство равносильно тому, что $j_{q-1}\partial_q c = 0$, и так как $\operatorname{Ker} j_{q-1} = \operatorname{Im} i_{q-1}$, то оно равносильно тому, что $\partial_q c \in i_{q-1}[C_{q-1}(L)]$.

Предположим, что $c \in \overline{B}_q(K, L)$. Тогда $j_q c \in B_q(K, L)$, т. е. $j_q c = \partial_{q+1} b$ для некоторого $b \in C_{q+1}(K, L)$. Пусть $d \in C_{q+1}(K)$ — такой элемент, что $j_{q+1} d = b$. Тогда

$$j_q(c - \partial_{q+1} d) = j_q c - \partial_{q+1} j_{q+1} d = j_q c - \partial_{q+1} b = 0,$$

так что существует такой элемент $e \in C_q(L)$, что $i_q e = c - \partial_{q+1} d$. Поэтому $c = \partial_{q+1} d + i_q e$ и, следовательно, $c \in B_q(K) \cup i_q[C_q(L)]$. Обратно, если $c = \partial_{q+1} d + i_q e$, то $j_q c = j_q \partial_{q+1} d + j_q i_q e = \partial_{q+1} j_{q+1} d$ и $j_q c \in B_q(K, L)$. Следовательно, $c \in \overline{B}_q(K, L)$.

Последняя часть леммы 7.2 непосредственно следует теперь из теоремы Нётер об изоморфизме.

Лемма 7.3. *Граничный гомоморфизм ∂_q: $C_q(K) \to C_{q-1}(K)$ определяет гомоморфизмы*

$$\overline{Z}_q(K, L) \to i_{q-1}[Z_{q-1}(L)],$$
$$\overline{B}_q(K, L) \to i_{q-1}[B_{q-1}(L)].$$

Так как $\operatorname{Ker} i_{q-1} = 0$, *то композиция* $i_{q-1}^{-1}\partial_q$ *определяет гомоморфизмы*

$$\overline{Z}_q(K, L) \to Z_{q-1}(L), \qquad \overline{B}_q(K, L) \to B_{q-1}(L)$$

и, следовательно, индуцирует некоторый гомоморфизм

$$\Delta\colon \overline{H}_q(K, L) \to H_{q-1}(L).$$

Доказательство. Пусть $c \in \overline{Z}_q(K, L)$. Согласно лемме 7.2 $\partial_q c = i_{q-1} d$, где $d \in C_{q-1}(L)$. Тогда $i_{q-2}\partial_{q-1} d = \partial_{q-1} i_{q-1} d = \partial_{q-1}\partial_q c = 0$ и, следовательно, $\partial_{q-1} d = 0$, так как $\operatorname{Ker} i_{q-2} = 0$. Поэтому $d \in Z_{q-1}(L)$ и $\partial_q c \in i_{q-1}[Z_{q-1}(L)]$.

Если $c \in \overline{B}_q(K, L)$, то согласно лемме 7.2 существуют такие элементы $d \in C_{q+1}(K)$, $e \in C_q(L)$, что $c = \partial_{q+1} d + i_q e$. Следовательно, $\partial_q c = \partial_q \partial_{q+1} d + \partial_q i_q e = i_{q-1}\partial_q e$, т. е. $\partial_q c \in i_{q-1}[B_{q-1}(L)]$.

Определение 7.4. Определим гомоморфизм

$$\partial_{\#}\colon H_q(K, L) \to H_{q-1}(L),$$

положив $\partial_{\#} = \Delta j^{-1}$.

Теорема 7.5. *Рассмотрим диаграмму*

$$\begin{array}{ccccccc} H_q(K, L) & \xleftarrow{\nu} & Z_q(K, L) & \xrightarrow{\eta} & C_q(K, L) & \xrightarrow{j_q} & C_q(K) \\ & & & & & & \downarrow \partial_q \\ H_{q-1}(L) & \xleftarrow{\nu_1} & Z_{q-1}(L) & \xrightarrow{\eta_1} & C_{q-1}(L) & \xrightarrow{i_{q-1}} & C_{q-1}(K), \end{array}$$

в которой τ, τ_1 — отображения вложения, а ν, ν_1 — естественные гомоморфизмы. Пусть $x \in H_q(K, L)$, $y \in H_{q-1}(L)$. Оказывается, что $y = \partial_{\#}x$ тогда и только тогда, когда для любых элементов $c \in Z_q(K, L)$ и $d \in C_q(K)$, удовлетворяющих соотношениям $x = \nu c$, $\tau c = j_q d$, существует такой элемент $e \in Z_{q-1}(L)$, что

$$\partial_q d = i_{q-1}\tau_1 e, \quad \nu_1 e = y.$$

Доказательство непосредственно вытекает из определений отображений j, Δ и $\partial_{\#}$.

Определение 7.1с. Ядро отображения δ^q: $C^q(K, L) \to C^{q+1}(K, L)$ называется группой *q-мерных коциклов* и обозначается через $Z^q(K, L)$. Образ отображения δ^{q-1} обозначается через $B^q(K, L)$ и называется группой *q-мерных кограниц*. Фактор-группа $H^q(K, L) = Z^q(K, L)/B^q(K, L)$ называется *q-мерной группой когомологий* пары (K, L). Для любого симплициального отображения f: $(K, L) \to (K_1, L_1)$ отображение f^q индуцирует некоторый гомоморфизм $f^{\#}$: $H^q(K_1, L_1) \to H^q(K, L)$.

Лемма 7.2с. *Рассматривая последовательность*

$$0 \to C^q(K, L) \xrightarrow{j^q} C^q(K) \xrightarrow{i_q} C^q(L) \to 0,$$

положим

$$\bar{Z}^q(L) = (i^q)^{-1} Z^q(L),$$
$$\bar{B}^q(L) = (i^q)^{-1} B^q(L)$$

и

$$\bar{H}^q(L) = \bar{Z}^q(L) / \bar{B}^q(L).$$

Тогда

$$\bar{Z}^q(L) = (\delta^q)^{-1} [j^{q+1}C^{q+1}(K, L)],$$
$$\bar{B}^q(L) = B^q(K) \cup j^q [C^q(K, L)].$$

Кроме того, отображение i^q индуцирует изоморфизм

$$\bar{i}: \bar{H}^q(L) \approx H^q(L).$$

Лемма 7.3с. *При отображении δ^q: $C^q(K) \to C^{q+1}(K)$ группа $\bar{Z}^q(L)$ переходит в группу $j^{q+1} Z^{q+1}(K, L)$, а группа $\bar{B}^q(L)$ — в группу $j^{q+1}B^{q+1}(K, L)$. Так как* Ker $j^{q+1}=0$, *то композиция $(j^{q+1})^{-1}\delta^q$ индуцирует некоторый гомоморфизм*

$$\Delta: \bar{H}^q(L) \to H^{q+1}(K, L).$$

Определение 7.4с. Определим гомоморфизм

$$\delta^{\#}: H^q(L) \to H^{q+1}(K, L),$$

положив $\delta^{\#} = \Delta \bar{i}^{-1}$.

Теорема 7.5с. *Рассмотрим диаграмму*

$$\begin{array}{ccccccc} H^q(K, L) & \xleftarrow{\nu} & Z^q(K, L) & \xrightarrow{\eta} & C^q(K, L) & \xrightarrow{j^q} & C^q(K) \\ & & & & & & \uparrow \delta^{q-1} \\ H^{q-1}(L) & \xleftarrow{\nu_1} & Z^{q-1}(L) & \xrightarrow{\eta_1} & C^{q-1}(L) & \xrightarrow{i^{q-1}} & C^{q-1}(K). \end{array}$$

Пусть $x \in H^{q-1}(L)$, $y \in H^q(K, L)$. *Оказывается, что* $\delta^{\#} y = x$ *тогда и только тогда, когда для любых элементов* $c \in Z^{q-1}(L)$ *и* $d \in C^{q-1}(K)$, *удовлетворяющих соотношениям* $x = \nu_1 c$ *и* $\eta_1 c = i^{q-1} d$, *существует такой элемент* $e \in Z^q(K, L)$, *что*

$$\delta^{q-1} d = j^q \eta e, \quad \nu e = y.$$

8. Фундаментальный изоморфизм

Пусть (X, A) — произвольная пара с триангуляцией $T = \{t, (K, L)\}$. Наш основной результат, доказываемый в этом пункте, состоит в том, что группы $H_q(X, A)$ и $H_q(K, L)$ изоморфны.

Лемма 8.1. *Отображения*

$$H_q(|K|, |L|) \xleftarrow{j_*} H_q(|K^q \cup L|, |L|) \xrightarrow{l_*} H_q(|K^q \cup L|, |K^{q-1} \cup L|),$$

где j: $(K^q \cup L, L) \subset (K, L)$ *и* l: $(K^q \cup L, L) \subset (K^q \cup L, K^{q-1} \cup L)$ — *отображения вложения, обладают следующими свойствами:*

(a) *отображение* l_* *мономорфно,*

(b) $\operatorname{Im} l_* = Z_q(K, L)$,

(c) *отображение* j_* *эпиморфно,*

(d) $\operatorname{Ker} j_* = l_*^{-1} [B_q(K, L)]$.

Непосредственным следствием этой леммы является

Теорема 8.2 (о фундаментальном изоморфизме). *Отображения*

$$H_q(X, A) \xleftarrow{t_*} H_q(|K|, |L|) \xleftarrow{j_*} H_q(|K^q \cup L|, |L|) \xrightarrow{l_*}$$
$$\xrightarrow{l_*} C_q(K, L) \xleftarrow{\eta} Z_q(K, L) \xrightarrow{\nu} H_q(K, L),$$

где η — *вложение и* ν — *естественное отображение, обладают следующими свойствами:*

(a) *гомоморфизмы* $t_* i_*$ *и* $\nu\eta^{-1} l_*$ *являются эпиморфизмами;*

(b) *их ядра, принадлежащие группе* $H_q(|K^q \cup L|, |L|)$, *совпадают.*

Следовательно, отображение $\theta_T = \nu\eta^{-1} l_* j_*^{-1} t_*^{-1}$ *однозначно определено и является изоморфизмом:*

$$\theta_T : H_q(X, A) \approx H_q(K, L).$$

Отображение θ_T можно описать также следующим образом: соотношение $y = \theta_T x$, где $x \in H_q(X, A)$ и $y \in H_q(K, L)$, имеет место тогда и только тогда, когда существуют такие элементы $c \in Z_q(K, L)$ и $d \in H_q(|K^q \cup L|, |L|)$, что

$$x = t_* j_* d, \quad l_* d = \eta c, \quad \nu c = y.$$

Свойства этого изоморфизма будут установлены в следующем пункте. Здесь же мы докажем только лемму 8.1. При доказательстве мы будем пользоваться следующими упрощенными обозначениями:

$$X = |K|, \quad \hat{X}^q = |K^q \cup L|, \quad A = \hat{X}^{-1} = |L|.$$

Из теорем этой главы нам понадобится только следующее предложение, лишь по форме отличающееся от леммы 5.2.

Лемма 8.3. *Если $p \neq q$, то $H_q(\hat{X}^p, \hat{X}^{p-1}) = 0$.*

Нам нужны будут также две следующие леммы.

Лемма 8.4. *Гомоморфизм*

$$H_q(\hat{X}^p, A) \to H_q(\hat{X}^{p+1} A),$$

индуцированный отображением вложения $(\hat{X}^p, A) \to (\hat{X}^{p+1}, A)$, является

(1) *эпиморфизмом, если $q \neq p + 1$,*

(2) *мономорфизмом, если $q \neq p$, и*

(3) *изоморфизмом, если $q \neq p,\ p + 1$.*

Доказательство. Рассмотрим отрезок

$$H_{q+1}(\hat{X}^{p+1}, X^p) \to H_q(X^p, A) \to H_q(X^{p+1}, A) \to H_q(\hat{X}^{p+1}, X^p)$$

гомологической последовательности тройки $(\hat{X}^{p+1}, \hat{X}^p, A)$. Согласно лемме 8.3 левый член равен нулю, если $q \neq p$, а правый член равен нулю, если $q \neq p + 1$. Поэтому утверждения (1) и (2) вытекают из точности гомологической последовательности тройки (см. теорему I.10.2). Утверждение (3) следует из утверждений (1) и (2).

Лемма 8.5. $H_q(\hat{X}^{q-1}, A) = 0.$

Доказательство. Из леммы 8.4 по индукции вытекает, что $H_q(\hat{X}^{q-1}, A) \approx H_q(\hat{X}^{q-r}, A)$ для любого $r = 2, \ldots, q + 1$. Остается заметить, что согласно лемме I.8.1 $H_q(\hat{X}^{-1}, A) = H_q(A, A) = 0$.

Доказательство *леммы* 8.1. Гомоморфизм $j_*: H_q(\hat{X}^q, A) \to H_q(X, A)$ можно разложить в композицию гомоморфизмов

$$H_q(\hat{X}^q, A) \xrightarrow{j_{1*}} H_q(\hat{X}^{q+1}, A) \xrightarrow{j_{2*}} \ldots \xrightarrow{j_{r*}} H_q(\hat{X}^{q+r}, A) = H_q(X, A),$$

где $q + r = \dim K$ и $j_1, j_2, \ldots$ — отображения вложения. Согласно лемме 8.4 отображение j_{1*} эпиморфно, тогда как отображения j_{2*}, $j_{3*}, \ldots$ изоморфны. Отсюда следует, что отображение j_* эпиморфно, что доказывает утверждение (с) леммы 8.1. Отсюда также следует, что

$$\text{(1)} \qquad \operatorname{Ker} j_* = \operatorname{Ker} j_{1*}.$$

Доказательство остальных трех утверждений леммы 8.1 основывается на рассмотрении следующей диаграммы:

$$\begin{tikzcd}
 & H_{q+1}(\hat{X}^{q+1}, \hat{X}^q) \arrow[d, "\bar{\partial}"] \arrow[dr, "\partial_{q+1}"] & & \\
H_q(\hat{X}^{q-1}, A) \arrow[r] & H_q(\hat{X}^q, A) \arrow[r, "l_*"] \arrow[d, "j_{1*}"] & H_q(\hat{X}^q, \hat{X}^{q-1}) \arrow[r, "\bar{\partial}_1"] \arrow[dr, "\partial_q"] & H_{q-1}(\hat{X}^{q-1}, A) \arrow[d, "l_*"] \\
 & H_q(\hat{X}^{q+1}, A) & & H_{q-1}(\hat{X}^{q-1}, \hat{X}^{q-2}).
\end{tikzcd}$$

Коммутативность обоих треугольников этой диаграммы является очевидным следствием определений соответствующих граничных операторов.

Средняя строчка диаграммы является отрезком гомологической последовательности тройки $(\hat{X}^q, \hat{X}^{q-1}, A)$ и, следовательно, точна. Так как согласно лемме 8.5 $H_q(\hat{X}^{q-1}, A) = 0$, то $\operatorname{Ker} l_* = 0$, что доказывает утверждение (а) леммы 8.1. Далее, $\operatorname{Im} l_* = \operatorname{Ker} \bar{\partial}_1$, и так как $\operatorname{Ker} l_* = 0$, то

$$\operatorname{Ker} \bar{\partial}_1 = \operatorname{Ker} l_* \bar{\partial}_1 = \operatorname{Ker} \partial_q = Z_q(K, L).$$

Поэтому $\operatorname{Im} l_* = Z_q(K, L)$, и утверждение (b) леммы 8.1 также доказано.

Вертикальная строчка диаграммы является отрезком гомологической последовательности тройки $(\hat{X}^{q+1}, \hat{X}^q, A)$. Поэтому ввиду точности этой последовательности, учитывая соотношение (1), мы получаем, что

$$\operatorname{Ker} j_* = \operatorname{Ker} j_{1*} = \operatorname{Im} \bar{\partial}.$$

Следовательно,

$$l_* [\operatorname{Ker} j_*] = l_* [\operatorname{Im} \bar{\partial}] = \operatorname{Im} l_* \bar{\partial} = \operatorname{Im} \partial_{q+1} = B_q(K, L).$$

Так как $\operatorname{Ker} l_* = 0$, то $\operatorname{Ker} j_* = l_*^{-1} [B_q(K, L)]$. Тем самым утверждение (d) и, следовательно, вся лемма 8.1 полностью доказаны.

Теорема 8.6. *Если $q < 0$, то $H_q(X, A) = 0$ для любой триангулируемой пары (X, A).*

Доказательство. Ввиду теоремы о фундаментальном изоморфизме достаточно показать, что $H_q(K, L) = 0$, если $q < 0$. Но согласно теореме 5.4 $C_q(K, L) = 0$, если $q < 0$, так что $Z_q(K, L) = 0$ и, следовательно, $H_q(K, L) = 0$.

Лемма 8.1с. *Отображения*

$$H^q(|K|, |L|) \xrightarrow{j^*} H^q(|K^q \cup L|, |L|) \xleftarrow{l^*} H^q(|K^q \cup L|, |K^{q-1} \cup L|),$$

где j и l — отображения вложения, обладают следующими свойствами:

(a) *отображение l^* эпиморфно,*

(b) $\operatorname{Ker} l^* = B^q(K, L)$,

(c) *отображение j_* мономорфно,*

(d) $\operatorname{Im} j^* = Z^q(K, L)$.

Теорема 8.2с. *Отображения*

$$H^q(X, A) \xrightarrow{t^*} H^q(|K|, |L|) \xrightarrow{j^*} H^q(|K^q \cup L|, |L|) \xleftarrow{l^*}$$
$$\xleftarrow{l^*} C^q(K, L) \xleftarrow{\eta} Z^q(K, L) \xrightarrow{\nu} H^q(K, L)$$

обладают следующими свойствами:

(1) *отображение t^* изоморфно,*

(2) $\operatorname{Ker} j^* = 0$, $\operatorname{Im} j^* = \operatorname{Im} l^* \eta$ *и* $\operatorname{Ker} l^* \eta = \operatorname{Ker} \nu$.

Следовательно, отображение $\theta_T = \nu\eta^{-1}l^{*-1}j^*t^*$ определено однозначно и является изоморфизмом:

$$\theta_T : \quad H^q(X, A) \approx H^q(K, L).$$

Отображение θ_T можно описать также следующим образом! соотношение $y = \theta_T x$, где $x \in H^q(X, A)$ и $y \in H^q(K, L)$, имеет место тогда и только тогда, когда существует такой элемент $c \in Z^q(K, L)$, что

$$j^*t^*x = l^*\eta c, \qquad \nu c = y.$$

Лемма 8.3с. *Если $p \neq q$, то $H^q(\hat{X}^p, \hat{X}^{p-1}) = 0$.*

Лемма 8.4с. *Гомоморфизм $H^q(\hat{X}^{p+1}, A) \to H^q(\hat{X}^p, A)$, индуцированный отображением вложения, является*

(1) *мономорфизмом, если $q \neq p + 1$,*

(2) *эпиморфизмом, если $q \neq p$,*

(3) *изоморфизмом, если $q \neq p, p + 1$.*

Лемма 8.5с. $H^q(\hat{X}^{q-1}, A) = 0$.

Теорема 8.6с. *Если $q < 0$, то $H^q(X, A) = 0$ для любой триангулируемой пары (X, A).*

9. Свойства фундаментального изоморфизма

Докажем теперь следующие три важных свойства построенного в предыдущем пункте изоморфизма θ_T.

Теорема 9.1. *Диаграмма*

$$\begin{array}{ccc} H_q(X, A) & \xrightarrow{\theta_{T'}} & H_q(K, L) \\ \Big\downarrow \partial & & \Big\downarrow \partial_{\#} \\ H_{q-1}(A) & \xrightarrow{\theta_T} & H_{q-1}(L), \end{array}$$

где $T' = \{t', L\}$ — триангуляция подпространства L, порожденная триангуляцией T, коммутативна:

$$\partial_{\#}\theta_T = \theta_{T'}\,\partial.$$

Теорема 9.2. *Пусть (X, A) и (X_1, A_1) — произвольные пары с триангуляциями $T = \{t, (K, L)\}$ и $T_1 = \{t_1, (K_1, L_1)\}$ соответственно. Тогда для любого симплициального отображения f: $(X, A) \to (X_1, A_1)$ диаграмма*

$$\begin{array}{ccc} H_q(X, A) & \xrightarrow{\theta_T} & H_q(K, L) \\ \Big\downarrow f_* & & \Big\downarrow g_{\#} \\ H_q(X_1, A_1) & \xrightarrow{\theta_{T_1}} & H_q(K_1, L_1), \end{array}$$

в которой симплициальное отображение g: $(K, L) \to (K_1, L_1)$ определено формулой $g = t_1^{-1}ft$, коммутативна:

$$g_{\#}\theta_T = \theta_{T_1}f_*.$$

Пусть P_0 — пространство, состоящее из одной точки. Рассматривая пространство P_0 как симплициальный комплекс K_0, получим, что $Z_0(K_0) = C_0(K_0) = G$, $B_0(K_0) = 0$ и, следовательно, $H_0(K_0) = G$.

Теорема 9.3. *Отображение θ: $H_0(P_0) \to H_0(K_0)$ является тождественным отображением $G \to G$.*

Теорема 9.3 является непосредственным следствием определения изоморфизма θ. Теорема 9.2 следует из стандартных соотношений коммутативности, имеющих место в диаграмме

$$\begin{array}{ccccccccc} H_q(X, A) & \leftarrow & H_q(|K|, |L|) & \leftarrow & H_q(|K^q|, |L^{q-1}|) & \rightarrow & Z_q(K, L) & \rightarrow & H_q(K, L) \\ \Big\downarrow f_* & & \Big\downarrow g_* & & \Big\downarrow h_* & & \Big\downarrow g_q & & \Big\downarrow g_{\#} \\ H_q(X_1, A_1) & \leftarrow & H_q(|K_1|, |L_1|) & \leftarrow & H_q(|K_1^q|, |L_1^{q-1}|) & \rightarrow & Z_q(K_1, L_1) & \rightarrow & H_q(K_1, L_1), \end{array}$$

в которой отображение h определено отображением g.

Доказательство теоремы 9.1 требует некоторых приготовлений.

Лемма 9.4. *Индуцированный вложением гомоморфизм*

$$k_*: H_q(|K^q|, |L^{q-1}|) \to H_q(|K^q \cup L|, |L|)$$

является эпиморфизмом.

Доказательство. Гомоморфизм k_* можно разложить в композицию гомоморфизмов

$$H_q(|K^q|, |L^{q-1}|) \xrightarrow{k_{1*}} H_q(|K^q|, |L^q|) \xrightarrow{k_{2*}} H_q(|K^q \cup L|, |L|),$$

индуцированных соответствующими отображениями вложения. Так как $L^q = K^q \cap L$, то согласно теореме вырезания 2.1 гомоморфизм k_{2*} является изоморфизмом. Чтобы изучить гомоморфизм k_{1*}, рассмотрим отрезок

$$H_q(|K^q|, |L^{q-1}|) \xrightarrow{k_{1*}} H_q(|K^q|, |L^q|) \longrightarrow H_{q-1}(|L^q|, |L^{q-1}|)$$

гомологической последовательности тройки (K^q, L^q, L^{q-1}). Согласно лемме 8.3 группа $H_{q-1}(|L^q|, |L^{q-1}|)$ тривиальна. Поэтому из точности гомологической последовательности вытекает, что отображение k_{1*} эпиморфно. Следовательно, отображение k_* также эпиморфно.

Доказательство теоремы 9.1. Рассмотрим диаграмму

$$\begin{tikzcd}
 & & & H_q(K, L) \\
 & & & Z_q(K, L) \arrow[u, "\nu"'] \arrow[d, "\eta"] \\
 & & H_q(|K^q \cup L|, |L|) \arrow[r, "l_*"] \arrow[dl, bend right, "j_*"'] & C_q(K, L) \\
H_q(X, A) \arrow[d, "\partial"] & H_q(|K|, |L|) \arrow[l, "t_*"'] \arrow[d, "\partial'"] & H_q(|K^q|, |L^{q-1}|) \arrow[l, "g_*"'] \arrow[r, "f_*"] \arrow[u, "k^*"] \arrow[d, "\partial_1"] & C_q(K) \arrow[u, "j_q"'] \arrow[d, "\partial_q"] \\
H_{q-1}(A) & H_{q-1}(|L|) \arrow[l, "t'_*"'] & H_{q-1}(|L^{q-1}|) \arrow[l, "j_{1*}"'] \arrow[r, "f_{1*}"] \arrow[dr, bend right, "l_{1*}"'] & C_{q-1}(K) \\
 & & & C_{q-1}(L) \arrow[u, "i_{q-1}"'] \\
 & & & Z_{q-1}(L) \arrow[u, "r_1"'] \arrow[d, "\nu_1"] \\
 & & & H_{q-1}(L),
\end{tikzcd}$$

в которой γ, γ_1 — отображения вложения, ν, ν_1 — естественные гомоморфизмы, а остальные гомоморфизмы являются либо граничными операторами, либо отображениями, индуцированными отображениями t и t' или соответствующими отображениями вложения. Легко видеть, что эта диаграмма коммутативна в каждом квадрате.

Пусть $x \in H_q(X, A)$. Согласно определению изоморфизма θ_T существуют такие элементы

$$c \in Z_q(K, L), \quad b \in H_q(|K^q \cup L|, |L|),$$

что

$$x = t_* j_* b, \quad l_* b = \gamma c, \quad \nu c = \theta_T x.$$

Согласно лемме 9.4 отображение k_* эпиморфно, так что существует такой элемент $a \in H_q(|K^q|, |L^{q-1}|)$, что $k_* a = b$. Положим $d = f_* a$. Тогда

$$j_q d = l_* k_* a = l_* b = \gamma c.$$

Поэтому согласно теореме 7.5 существует такой элемент $e \in Z_{q-1}(L)$, что

$$\partial_q d = i_{q-1} \gamma_1 l, \quad \nu_1 l = \partial_{\#} \theta_T x.$$

Так как

$$t'_* j_{1*} \partial_1 a = \partial t_* g_* a = \partial t_* j_* b = \partial x,$$

$$i_{q-1} l_{1*} \partial_1 a = \partial_q f_* a = \partial_q d = i_{q-1} \gamma_1 l$$

и так как $\operatorname{Ker} i_{q-1} = 0$, то

$$\partial x = t'_* j_{1*} \partial_1 a, \quad l_{1*} \partial_1 a = \gamma_1 a,$$

Поэтому согласно определению изоморфизма $\theta_{T'}$

$$\theta_{T'} \partial x = \nu_1 e = \partial_{\#} \theta_T x.$$

Теорема 9.1с. *Диаграмма*

$$\begin{tikzcd} H^q(X, A) \arrow[r, "\theta_T"] & H^q(K, L) \\ H^{q-1}(A) \arrow[u, "\delta"] \arrow[r, "\theta_{T'}"] & H^{q-1}(L) \arrow[u, "\delta^{\#}"'] \end{tikzcd}$$

коммутативна: $\theta_T \delta = \delta^{\#} \theta_{T'}$.

Теорема 9.2с. *Для любого симплициального относительно триангуляций* $T = \{t, (K, L)\}$, $T_1 = \{t_1, (K_1, L_1)\}$ *отображения* $f\colon (X, A) \ldots (X_1, A_1)$ *диаграмма*

$$\begin{tikzcd} H^q(X, A) \arrow[r, "\theta_T"] & H^q(K, L) \\ H^q(X_1, A_1) \arrow[u, "f^*"] \arrow[r, "\theta_{T'}"] & H^q(K_1, L_1), \arrow[u, "g^{\#}"'] \end{tikzcd}$$

где $g = t_1^{-1} f t$, *коммутативна:*

$$g^{\#}\theta_{T_1} = \theta_T f^*.$$

Теорема 9.3с. *Пусть* K_0 — *симплициальный комплекс, состоящий из одной вершины* P_0. *Тогда отображение* $\theta: H_0(P_0) \to H_0(K_0)$ *является тождественным отображением* $G \to G$.

Лемма 9.4с. *Индуцированный вложением гомоморфизм*

$$k^*: H^q(|K^q \cup L|, |L|) \to H^q(|K^q|, |L^{q-1}|)$$

является мономорфизмом.

Доказательство теоремы 9.1с не полностью двойственно доказательству теоремы 9.1, и поэтому мы его здесь приведем. Рассмотрим диаграмму

$$\begin{tikzcd}
 & & & H^q(K, L) \\
 & & & Z^q(K, L) \arrow[u, "\nu"'] \arrow[d, "\eta"] \\
 & & H^q(|K^q \cup L|, |L|) \arrow[d, "k^*"] & C^q(K, L) \arrow[l, "l^*"'] \arrow[d, "j^q"] \\
H^q(X, A) \arrow[r, "t^*"] & H^q(|K|, |L|) \arrow[r, "g^*"] \arrow[ur, "j^*"] & H^q(|K^q|, |L^{q-1}|) & C^q(K) \arrow[l, "f^*"'] \\
H^{q-1}(A) \arrow[r, "t'^*"] \arrow[u, "\delta"] & H^{q-1}(|L|) \arrow[r, "j_1^*"] \arrow[u, "\delta'"] & H^{q-1}(|L^{q-1}|) \arrow[u, "\delta_1"] & C^{q-1}(K) \arrow[l, "f_1^*"'] \arrow[u, "\delta^q"] \arrow[d, "i^q"] \\
 & & & C^{q-1}(L) \arrow[ul, "l_1^*"] \\
 & & & Z^{q-1}(L) \arrow[u, "\gamma_1"'] \arrow[d, "\nu_1"] \\
 & & & H^{q-1}(L).
\end{tikzcd}$$

Пусть $x \in H^{q-1}(A)$. Согласно определению изоморфизма $\theta_{T'}$ существует такой элемент $c \in Z^{q-1}(L)$, что

$$j_1^* t'^* x = l_1^* \gamma_1 c, \qquad \gamma_1 c = \theta_{T'} x.$$

Так как отображение i^q эпиморфно, то существует такой элемент $d \in C^{q-1}(K)$, что $i^q d = \gamma_1 c$. Поэтому согласно теореме 7.5с существует элемент $e \in Z^q(K, L)$, удовлетворяющий соотношениям

$$\delta^q d = j^q \gamma e, \quad \nu e = \delta^{\#}\theta_{T'} x.$$

Следовательно,

$$k^*j^*t^*\delta x = \delta_1 j_1^* t'^* x = \delta_1 l_1^* \gamma_1 c = \delta_1 l_1^* i^q d = f^* g^q \gamma e = k^* l^* \gamma e.$$

Так как согласно лемме 9.4с $\operatorname{Ker} k^* = 0$, то

$$j^*t^*\,\delta x = l^*\,\gamma e.$$

Поэтому из определения изоморфизма θ_T следует, что

$$\theta_T \delta x = \nu e = \delta^\# \theta_{T'} x.$$

10. Теорема единственности

Пусть H и $\bar{H}$ — две теории гомологий, определенные на допустимых категориях, содержащих все триангулируемые пары и их отображения. Основной результат этой главы заключается в том, что каждому изоморфизму групп коэффициентов G и $\bar{G}$ отвечает изоморфизм теорий гомологий H и $\bar{H}$ над категорией триангулируемых пространств и их отображений.

Теорема 10.1 (теорема единственности). *Для любых теорий гомологий H и $\bar{H}$ и любого гомоморфизма*

$$h_0\colon G \to \bar{G}$$

их групп коэффициентов существует единственное семейство гомоморфизмов

$$h(g, X, A)\colon H_q(X, A) \to \bar{H}_q(X, A),$$

определенных для каждой триангулируемой пары (X, A) и каждого целого числа q и обладающих следующими свойствами:

(1) $$h(0, P_0) = h_0,$$

(2) *для любого отображения $(X, A) \to (X_1, A_1)$ триангулируемых пар диаграмма*

$$\begin{array}{ccc} H_q(X, A) & \xrightarrow{h} & \bar{H}_q(X, A) \\ \downarrow f_* & & \downarrow \bar{f}_* \\ H_q(X_1, A_1) & \xrightarrow{h} & \bar{H}_q(X_1, A_1) \end{array}$$

коммутативна: $\bar{f}_* h(g, X, A) = h(q, X_1, A_1) f_*$,

(3) *диаграмма*

$$\begin{array}{ccc} H_q(X, A) & \xrightarrow{h} & \bar{H}_q(X, A) \\ \downarrow \partial & & \downarrow \bar{\partial} \\ H_{q-1}(A) & \xrightarrow{h} & \bar{H}_{q-1}(A) \end{array}$$

коммутативна: $\bar{\partial} h(q, X, A) = h(q-1, A)\,\partial$.

Если отображение h_0: $G \approx \bar{G}$ изоморфно, то каждое отображение $h(q, X, A)$ также является изоморфизмом.

Доказательство. Мы построим для каждой симплициальной пары (K, L) и каждого целого числа q гомоморфизм

$$\zeta(q, K, L)\colon H_q(K, L) \to \bar{H}_q(K, L),$$

обладающий следующими свойствами:

(4) $$\zeta(0, P_0) = h_0,$$

(5) для любого симплициального отображения $f\colon (K, L) \to (K_1, L_1)$ диаграмма

$$\begin{array}{ccc} H_q(K, L) & \xrightarrow{\zeta} & \bar{H}_q(K, L) \\ \downarrow f_\# & & \downarrow \bar{f}_\# \\ H_q(K_1, L_1) & \xrightarrow{\zeta} & \bar{H}_q(K_1, L_1) \end{array}$$

коммутативна: $\bar{f}_\# \zeta(q, K, L) = \zeta(q, K_1, L_1) f_\#$,

(6) диаграмма

$$\begin{array}{ccc} H_q(K, L) & \xrightarrow{\zeta} & \bar{H}_q(K, L) \\ \downarrow \partial_\# & & \downarrow \bar{\partial}_\# \\ H_{q-1}(L) & \xrightarrow{\zeta} & \bar{H}_{q-1}(L) \end{array}$$

коммутативна: $\bar{\partial}_\# \zeta(q, K, L) = \zeta(q-1, L)\partial_\#$.

Для q-мерных цепей комплекса K, имеющих вид $gA^0, \ldots, A^q$, где $g \in G$, положим

$$\eta(gA^0 \ldots A^q) = h_0(g)A^0 \ldots A^q.$$

Из теорем 5.4 — 5.7 следует, что отображение η определяет некоторый гомоморфизм

$$\eta\colon C_q(K) \to \bar{C}_q(K).$$

Из теорем 5.8 и 6.4 следует, что гомоморфизм η перестановочен с гомоморфизмами f_q и ∂_q. Следовательно, отображение η определяет гомоморфизмы

$$Z_q(K, L) \to \bar{Z}_q(K, L), \quad B_q(K, L) \to \bar{B}_q(K, L)$$

и поэтому индуцирует гомоморфизмы фактор-групп

$$\zeta\colon H_q(K, L) \to \bar{H}_q(K, L),$$

обладающие, очевидно, свойствами (4) — (6).

Пусть теперь задана некоторая пара (X, A) с триангуляцией $T = \{t, (K, L)\}$. Рассмотрим диаграмму

$$H_q(X, A) \xrightarrow{\theta_T} H_q(K, L) \xrightarrow{\zeta} \bar{H}_q(K, L) \xleftarrow{\bar{\theta}_T} \bar{H}_q(X, A),$$

в которой изоморфизмы θ_T и $\bar{\theta}_T$ определены согласно теореме 8.2 для теорий гомологий H и $\bar{H}$ соответственно. Положим

$$h_T(q, X, A) = \bar{\theta}_T^{-1} \zeta \theta_T.$$

Тогда

$$h_T(q, X, A): H_q(X, A) \to \bar{H}_q(X, A).$$

Покажем, что отображение h_T не зависит от триангуляции T и обладает свойствами (1) — (3).

Заметим, что при $(X, A) = P_0$ изоморфизмы θ_T: $G \approx G$ и $\bar{\theta}_T$: $\bar{G} \approx \bar{G}$ являются тождественными отображениями, так что $h_T(0, P_0) = \zeta(0, P_0) = h_0$, как и требуется.

Пусть, далее, (X, A) и, (X_1, A_1) — произвольные пары с триангуляциями $T = \{t, (K, L)\}$ и, $T_1 = \{t_1, (K_1, L_1)\}$ соответственно и пусть f: $(X, A) \to (X_1, A_1)$ — некоторое отображение (не обязательно симплициальное). Пусть, кроме того, i: $(X, A) \to (X, A)$ — тождественное отображение. Из теорем II.8.4 и II.8.6 вытекает существование целого числа n и отображений

$$f_n: \quad (X, A) \to (X_1, A_2), \qquad i_n: \quad (X, A) \to (X, A)$$

со следующими свойствами: отображение f_n симплициально относительно триангуляций ${}^nT = \{{}^nt, ({}^nK, {}^nL)\}$, $T_1 = \{t_1, (K_1, L_1)\}$ и гомотопно отображению f, отображение i_n симплициально относительно триангуляций ${}^nT = \{{}^nt, ({}^nK, {}^nL)\}$, $T = \{t, (K, L)\}$ и гомотопно отображению i. Определим симплициальные отображения

$$g: \ ({}^nK, {}^nL) \to (K_1, L_1), \qquad k: \ ({}^nK, {}^nL) \to (K, L),$$

полагая

$$g = t_1^{-1} f_n({}^nt), \quad k = t^{-1} i_n({}^nt),$$

и рассмотрим диаграмму

$$\begin{array}{ccccccc}
H_q(X, A) & \xrightarrow{\theta} & H_q(K, L) & \xrightarrow{\zeta} & \bar{H}_q(K, L) & \xleftarrow{\bar{\theta}} & \bar{H}_q(X, A) \\
\uparrow i_{n*} & & \uparrow k_\# & & \uparrow \bar{k}_\# & & \uparrow \bar{i}_{n*} \\
H_q(X, A) & \xrightarrow{\theta} & H_q({}^nK, {}^nL) & \xrightarrow{\zeta} & \bar{H}_q({}^nK, {}^nL) & \xleftarrow{\bar{\theta}} & \bar{H}_q(X, A) \\
\downarrow f_{n*} & & \downarrow g_\# & & \downarrow \bar{g}_\# & & \downarrow \bar{f}_{n*} \\
H_q(X_1, A_1) & \xrightarrow{\theta} & H_q(K_1, L_1) & \xrightarrow{\zeta} & \bar{H}_q(K_1, L_1) & \xleftarrow{\bar{\theta}} & \bar{H}_q(X_1, A_1).
\end{array}$$

Соотношения коммутативности, включающие отображение ζ, следуют из соотношения (5), так как отображения k и g симплициальны. Соотношения коммутативности, включающие отображения θ и $\bar{\theta}$, следуют из теоремы 9.2, так как отображения i_n и f_n симплициальны. Так как отображение i_n гомотопно отображению i, то отображения i_{n*} и $\bar{i}_{n*}$ являются тождественными отображениями. Так как отображение f_n гомотопно отображению f, то $f_{n*} = f_*$ и $\bar{f}_{n*} = \bar{f}_*$. Следовательно,

$$(7) \qquad \bar{f}_* h_T(q, X, A) = h_{T_1}(q, X_1, A_1) f_* .$$

Применяя это соотношение к случаю, когда пара $(X, A) = (X_1, A_1)$, а f является тождественным отображением, находим, что $h_T(q, X, A) = h_{T_1}(q, X, A)$, так что отображение $h_T(q, X, A)$ действительно не зависит от триангуляции T. Ввиду этого мы будем его впредь обозначать через $h(g, X, A)$. Тогда соотношение (7) примет вид (2).

Для доказательства свойства (3) рассмотрим произвольную пару (X, A) с триангуляцией $T = \{t, (K, L)\}$ и обозначим через T' триангуляцию подпространства A, индуцированную триангуляцией T. В диаграмме

$$\begin{tikzcd}
H_q(X, A) \arrow[r, "\theta"] \arrow[d, "\partial"] & H_q(K,L) \arrow[r, "\zeta"] \arrow[d, "\partial_\#"] & \bar{H}_q(K, L) \arrow[d, "\bar{\partial}_\#"] & \bar{H}_q(X, A) \arrow[l, "\bar{\theta}"'] \arrow[d, "\bar{\partial}"] \\
H_{q-1}(A) \arrow[r, "\theta"] & H_{q-1}(L) \arrow[r, "\zeta"] & \bar{H}_{q-1}(L) & H_{q-1}(A) \arrow[l, "\bar{\theta}"']
\end{tikzcd}$$

коммутативность центрального квадрата обеспечивается соотношением (6), в то время как коммутативность боковых квадратов следует из теоремы 9.1. Поэтому $\bar{\partial} h(q, X, A) = h(q^{-1}, A)\partial$, что и требовалось доказать.

Докажем теперь, что гомоморфизмы $h(q, X, A)$, обладающие свойствами (1) — (3), определены однозначно. Для этого нам понадобятся некоторые вспомогательные предложения.

Пусть s^q — упорядоченный q-мерный симплекс и g — произвольный элемент группы G. Тогда

$$(8) \qquad h(q, |s^q|, |\dot{s}^q|)\,(gs^q) = h_0(g)s^q.$$

При $q = 0$ это утверждение является непосредственным следствием соотношения (1). Предположим, что $q > 0$ и что соотношение (8) уже доказано для $q - 1$. Пусть $A^0 < \ldots < A^q$ — вершины симплекса s^q и пусть s^{q-1} — грань симплекса s^q с вершинами $A^1 < \ldots$ $\ldots < A^q$. Тогда согласно теореме 3.7 $[s^q : s^{q-1}]\, gs^q = gs^{q-1}$. Так как $[s^q : s^{q-1}] = j_*^{-1} i_* \partial$, то из соотношений (2) и (3) вытекает, что

$$h(q - 1, |s^{q-1}|, |\dot{s}^{q-1}|)\, [s^q : s^{q-1}] = \overline{[s^q : s^{q-1}]}\, h(g, |s^q|, |\dot{s}^q|).$$

Следовательно,

$$\overline{[s^q : s^{q-1}]}\, h(q, |s^q|, |\dot{s}^q|)(gs^q) =$$
$$= h(q-1, |s^{q-1}|, |\dot{s}^{q-1}|)(gs^{q-1}) = h_0(g)s^{q-1} = \overline{[s^q : s^{q-1}]}\, h(g)\dot{s}^q.$$

Остается заметить, что отображение $\overline{[s^q : s^{q-1}]}$ изоморфно.

Пусть $gA^0 \ldots A^q \in G_q(K, L)$. Тогда

(9) $\quad h(q, |K^q \cup L|, |K^{q-1} \cup L|)(gA^0 \ldots A^q) = h_0(g) A^0 \ldots A^q.$

Согласно определению 5.5 $gA^0 \ldots A^q = f_*(gs)$, где s — некоторый упорядоченный q-мерный симплекс и f — соответствующим образом подобранное отображение $(s, \dot{s}) \to (K^q \cup L, K^{q-1} \cup L)$. Поэтому из соотношений (2) и (8) вытекает, что

$$h(gA^0 \ldots A^q) = h(f_*(g)) = \bar{f}_* h(gs) = \bar{f}_* h_0(g)\, s = h_0(g) A^0 \ldots A^q,$$

как и требуется.

Пусть теперь h и h' — два семейства гомоморфизмов, удовлетворяющих соотношениям (1) — (3), и пусть (L, K) — произвольная симплициальная пара. Для сокращения формул положим:

$$h_1 = h(q_1 |K^q \cup L|, |K^{q-1} \cup L|), \qquad h_2 = h(q, |K^q \cup L|, |L|).$$

Аналогично определим символы h_1' и h_2'. Согласно свойству (9) $h_1 = h_1'$. Пусть l: $(K^q \cup L, L) \to (K^q \cup L, K^{q-1} \cup L)$ — отображение вложения. Тогда из соотношения (2) вытекает, что

$$\bar{l}_* h_2 = h_1 l_* = h_1' l_* = \bar{l}_* h_2'.$$

Так как согласно лемме 8.1 $\operatorname{Ker} \bar{l}_* = 0$, то $h_2 = h_2'$. Рассмотрим теперь отображение вложения j: $(K^q \cup L, L) \to (K, L)$. Имеем

$$h(q, |K|, |L|) j_* = \bar{j}_* h_2 = \bar{j}_* h_2' = h'(q, |K|, |L|) j_*.$$

Так как согласно лемме 8.1 отображение j_* эпиморфно, то, следовательно, $h(q, |K|, |L|) = h'(q, |K|, |L|)$.

Пусть (X, A) — произвольная триангулируемая пара и $T = \{t, (K, L)\}$ — некоторая ее триангуляция. Тогда

$$\bar{t}_* h(q, X, A) = h(q, |K|, |L|)\, t_* = h'(q, |K|, |L|)\, t_* = \bar{t}_* h'(q, X, A).$$

Так как отображение $\bar{t}_*$ изоморфно, то $h(q, X, A) = h'(q, X, A)$. Следовательно, $h = h'$ и единственность отображения h доказана.

Пусть теперь отображение h_0 изоморфно: h_0: $G \approx \bar{G}$. Обозначим через $\bar{h}_0$: $\bar{G} \approx G$ обратное отображение. Пусть $\bar{h}(q, X, A)$: $\bar{H}_q(X, A) \to H_q(X, A)$ — гомоморфизмы, обладающие свойствами (1) — (3) и соответствующие изоморфизму $\bar{h}_0$. Тогда гомоморфизмы

$$\bar{h}(q, X, A)\, h(q, X, A): \quad H_q(X, A) \to H_q(X, A)$$

обладают свойствами (1) — (3) и соответствуют тождественному отображению $G \to G$. Поэтому согласно свойству единственности гомоморфизм $\bar{h}(q, X, A)\, h(q, X, A)$ является тождественным отображением. Аналогично тождественным отображением является и гомоморфизм $h(q, X, A)\,\bar{h}(q, X, A)$. Следовательно, отображение $h(q, X, A)$ является изоморфизмом с обратным отображением $\bar{h}(q, X, A)$. Тем самым теорема полностью доказана.

Теорема 10.1с. *Для любых теорий когомологий H и $\bar{H}$ и любого гомоморфизма*

$$h_0\colon G \to \bar{G}$$

групп их коэффициентов существует единственное семейство гомоморфизмов

$$h(q, X, A)\colon H^q(X, A) \to \bar{H}^q(X, A),$$

определенных для каждой триангулируемой пары (X, A) и каждого целого числа q и обладающих следующими свойствами:

$$h(0, P_0) = h_0, \tag{1}$$

$$\bar{\delta} h(q, A) = h(q+1, X, A)\,\delta, \tag{2}$$

$$j^* h(q, X_1, A_1) = h(q, X, A)\, f^*, \tag{3}$$

где $f\colon (X, A) \to (X_1, A_1)$.

Если $h_0\colon G \approx \bar{G}$, то каждое отображение $h(q, X, A)$ является изоморфизмом.

Упражиеиия

A. Изоморфизмы инцидентности

1. Пусть s_1^{q-1}, s_2^{q-2} суть $(q-1)$-мерные грани некоторого q-мерного симплекса s^q и пусть s^{q-2} — их общая $(q-2)$-мерная грань. Проверить, что

$$[s_1^{q-1} : s_2^{q-2}]\,[s^q : s_1^{q-1}] = -\,[s_2^{q-1} : s^{q-2}]\,[s^q : s_2^{q-1}].$$

(Указание. Использовать теорему 4.5.)

B. Клетки и сферы

1. Используя обозначения пункта I.16, рассмотреть отображение $h_i\colon (E^n, S^{n-1}) \to (E^n, S^{n-1})$, определенное формулой $h_i(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, -x_i, \ldots, x_n)$. Доказать, что $h_{i*}z = -z$ для любого элемента $z \in H_n(E^n, S^{n-1})$.

2. Рассмотреть отображение $f_i\colon S^{n-1} \to S^{n-1}$, определенное отображением h_i, указанным в задаче 1. Доказать, что $f_{i*}z = -z$ для любого элемента $z \in H_{n-1}(S^{n-1})$.

3. Рассмотреть отображение h: $(E^n, S^{n-1}) \to (E^n, S^{n-1})$, определенное в векторных обозначениях соотношением $h(x) = -x$. Доказать, что $h_* z = (-1)^n z$ для любого элемента $z \in H_n(E^n, S^{n-1})$.

4. Рассмотреть отображение f: $S^{n-1} \to S^{n-1}$, определенное отображением h, указанным в задаче 3. Доказать, что $f_* z = (-1)^n z$ для любого элемента $z \in H_{n-1}(S^{n-1})$.

C. Эйлерова характеристика

Предположим, что значениями теории гомологий являются D-модули (см. упражнение I, H и I, гл. I) и что группа коэффициентов имеет ранг 1.

1. Пусть (X, A) — произвольная пара с триангуляцией $T = \{t, (K, L)\}$. Пусть α_q — число q-мерных симплексов комплекса K, не принадлежащих подкомплексу L. Показать, что эйлерова характеристика $\chi(X, A)$ существует и удовлетворяет соотношению

$$\chi(X, A) = \sum_{q=0}^{n} (-1)^q \alpha_q,$$

где $n = \dim K$. (Указание. Доказать, что $r[C_q(K, L)] = \alpha_q$.)

D. n-мерные псевдомногообразия

Определение. Симплициальная пара (K, L)[1]) называется *n-мерным псевдомногообразием*, если

(1) каждая точка комплекса K является точкой некоторого его n-мерного симплекса,

(2) каждый $(n-1)$-мерный симплекс дополнения $K \setminus L$ является гранью точно двух n-мерных симплексов из $K \setminus L$,

(3) для любых n-мерных симплексов σ и τ дополнения $K \setminus L$ существует последовательность

$$\sigma = \sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_k = \tau$$

попеременно n- и $(n-1)$-мерных симплексов из $K \setminus L$, в которой каждый $(n-1)$-мерный симплекс является гранью соседних n-мерных симплексов.

1. Предположим, что группа коэффициентов G теории когомологий является бесконечной циклической группой (т. е. изоморфна группе целых чисел). Пусть $A^0, \ldots, A^n$ — вершины некоторого n-мерного симплекса дополнения $K \setminus L$, где (K, L) — произвольное n-мерное псевдомногообразие. Показать, что для любого элемента $g \in G$ коцепь $gA^0 \ldots A^n$ является n-мерным коциклом пары (K, L) (см. замечание, сделанное перед формулировкой теоремы 5.8c) и что любой n-мерный коцикл пары (K, L) когомологичен коциклу такого вида. Показать, что группа $H^n(K, L)$ является либо беско-

[1]) Случай $L = \varnothing$ не исключается. (*Прим. ред.*)

нечной циклической группой, либо группой порядка 2. В первом случае (K, L) называется *ориентируемым* псевдомногообразием, во втором — *неориентируемым*.

2. Пусть (K, L) — произвольное n-мерное псевдомногообразие и пусть группа коэффициентов — бесконечная циклическая группа. Показать, что если псевдомногообразие (K, L) ориентируемо, то группа $H_n(K, L)$ является бесконечной циклической группой, а группа $H_{n-1}(K, L)$ не имеет элементов конечного порядка. Показать, что если псевдомногообразие (K, L) неориентируемо, то группа $H_n(K, L)$ тривиальна, а подгруппа группы $H_{n-1}(K, L)$, состоящая из элементов конечного порядка, является циклической группой второго порядка.

3. *Действительным проективным n-мерным пространством* P^n называется пространство, полученное из n-мерной сферы отождествлением диаметрально противоположных точек. Показать, что пространство P^n можно триангулировать в n-мерное псевдомногообразие, ориентируемое или нет в соответствии с тем, четно или нечетно число n.

4. Показать, что прямое произведение конечного числа сфер можно триангулировать в ориентируемое псевдомногообразие.

5. Пусть K — произвольное двумерное псевдомногообразие. Показать, что числа α_0, α_1, α_2 симплексов комплекса K размерностей 0, 1 и 2 соответственно удовлетворяют соотношениям

$$3\alpha_2 = 2\alpha_1,$$
$$\alpha_1 = 3(\alpha_0 - \chi(K)),$$
$$\alpha_0 \geqslant \frac{1}{2}(7 + \sqrt{49 - 24\chi(K)}).$$

6. Показать, что двумерную сферу S^2, проективную плоскость P^2 и тор T^2 можно триангулировать в двумерные псевдомногообразия. Показать, что для любой такой триангуляции выполняются следующие неравенства:

$$S^2: \ \alpha_0 \geqslant 4, \quad \alpha_1 \geqslant 6, \quad \alpha_2 \geqslant 4,$$
$$P^2: \ \alpha_0 \geqslant 6, \quad \alpha_1 \geqslant 15, \quad \alpha_2 \geqslant 10,$$
$$T^2: \ \alpha_0 \geqslant 7, \quad \alpha_1 \geqslant 21, \quad \alpha_2 \geqslant 14.$$

Найти триангуляции, для которых эти минимальные значения достигаются. Показать, что $\chi(S^2) = 2$, $\chi(P^2) = 1$, $\chi(T^2) = 0$.

ГЛАВА IV

КАТЕГОРИИ И ФУНКТОРЫ

1. Введение

Основная цель этой главы — ввести и иллюстрировать понятия *категории*, *функтора* и другие смежные понятия, которые будут нужны нам в следующих главах для упрощения формулировок теорем существования и единственности. Мы изложим только тот материал, который нам понадобится в дальнейшем. Более полное изложение теории категорий и функторов можно найти в статье Эйленберга и МакЛейна [Trans. Amer. Math. Soc. **58** (1945), 231—294].

Понятия категории и функтора частично появились в связи с излагаемым в этой книге аксиоматическим построением теории гомологий. Точка зрения, инспирированная этими понятиями, позволяет на каждом этапе контролировать развитие теории гомологий.

Вторая часть этой главы посвящена теориям гомологий, определенным на абстрактных h-категориях. Допустимые категории для теории гомологий, как они были определены в пункте 1 главы I, имеют много свойств, не необходимых для формулировки аксиом теории гомологий. Выделяя лишь существенные их свойства, мы приходим к понятию h-категории и к соответствующему понятию h-функтора. Оказывается, что композиция (когда она определена) некоторого h-функтора и любой теории гомологий снова является теорией гомологий. Таким образом, мы получаем правило для выведения одной теории гомологий из другой. В последующих главах этот прием будет часто использоваться.

2. Категории

Излагаемое ниже определение возникло при исследовании общих свойств таких совокупностей, как

(1) топологические пространства и их непрерывные отображения,

(2) группы и их гомоморфизмы и

(3) симплициальные комплексы и их симплициальные отображения.

Определение 2.1. Множество $\mathfrak{C}$ элементов $\{\gamma\}$ называется *мультипликативной системой*, если для некоторых пар

$\gamma_1, \gamma_2 \in \mathfrak{C}$ определено произведение $\gamma_1\gamma_2 \in \mathfrak{C}$. Элемент $\varepsilon \in \mathfrak{C}$ называется *тождественным* (или *единицей*), если $\varepsilon\gamma_1 = \gamma_1$ и $\gamma_2\varepsilon = \gamma_2$ всякий раз, когда произведения $\varepsilon\gamma_1$ и $\gamma_2\varepsilon$ определены. Мультипликативная система называется *абстрактной категорией*, если она удовлетворяет следующим аксиомам:

(1) Тройное произведение $\gamma_3(\gamma_2\gamma_1)$ определено тогда и только тогда, когда определено произведение $(\gamma_3\gamma_2)\gamma_1$. Если каждое из этих произведений определено, то

$$\gamma_3(\gamma_2\gamma_1) = (\gamma_3\gamma_2)\gamma_1$$

(закон ассоциативности). Ввиду этой аксиомы тройное произведение можно записывать без скобок: $\gamma_3\gamma_2\gamma_1$.

(2) Тройное произведение $\gamma_3\gamma_2\gamma_1$ определено тогда и только тогда, когда определены оба произведения $\gamma_3\gamma_2$ и $\gamma_2\gamma_1$.

(3) Для каждого элемента $\gamma \in \mathfrak{C}$ существуют такие единицы $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathfrak{C}$, что произведения $\gamma\varepsilon_1$ и $\varepsilon_2\gamma$ определены.

Лемма 2.2. *Для каждого элемента $\gamma \in \mathfrak{C}$ предусмотренные аксиомой (3) единицы ε_1 и ε_2 определены однозначно.*

Доказательство. Пусть определены произведения $\gamma\varepsilon_1$ и $\gamma\varepsilon_1'$, где $\varepsilon_1, \varepsilon_1'$ — единицы. Тогда определено произведение $(\gamma\varepsilon_1)\varepsilon_1' = \gamma\varepsilon_1'$. Поэтому определено произведение $\varepsilon_1\varepsilon_1'$ и, следовательно, $\varepsilon_1 = \varepsilon_1\varepsilon_1' = \varepsilon_1'$. Аналогично показывается, что единица ε_2 также определена однозначно.

Определение 2.3. Пусть $\mathfrak{C}$ — множество, состоящее из элементов двух сортов. Элементы $\{C\}$ первого сорта мы будем называть *объектами*, а элементы $\{\gamma\}$ второго сорта — *отображениями*. Множество $\mathfrak{C}$ называется *категорией*, если принадлежащие ему отображения образуют *абстрактную категорию* в смысле 2.1, а объекты находятся во взаимно однозначном соответствии $C \to i_C$ с множеством единиц этой абстрактной категории. Таким образом, каждому отображению γ однозначно соответствуют такие объекты C_1 и C_2, что определены произведения γi_{C_1} и $i_{C_2}\gamma$. Объекты C_1, C_2 называются соответственно *областью определения и областью значения отображения* γ; мы будем писать:

$$C_1 = D(\gamma), \quad C_2 = R(\gamma), \quad \gamma\colon C_1 \to C_2.$$

Лемма 2.4. *Произведение $\gamma_2\gamma_1$ определено тогда и только тогда, когда $R(\gamma_1) = D(\gamma_2)$. Если произведение $\gamma_2\gamma_1$ определено, то $R(\gamma_2\gamma_1) = R(\gamma_2)$ и $D(\gamma_2\gamma_1) = D(\gamma_1)$.*

Другими словами, если $\gamma_1\colon C_1 \to C_2$, $\gamma_2\colon C_2' \to C_3$, то произведение $\gamma_2\gamma_1$ определено тогда и только тогда, когда $C_2 = C_2'$, и в этом случае $\gamma_2\gamma_1\colon C_1 \to C_3$.

Доказательство. Пусть $\varepsilon = i_{R(\gamma_1)}$. Если произведение $\gamma_2\gamma_1$ определено, то определено и произведение $\gamma_2(\varepsilon\gamma_1) = \gamma_2\gamma_1$. Поэтому определено произведение $\gamma_2\varepsilon$ и, следовательно, $R(\gamma_1) = D(\gamma_2)$. Обратно, если $R(\gamma_1) = D(\gamma_2)$, то определены оба произведения $\gamma_2\varepsilon$ и $\varepsilon\gamma_1$, где $\varepsilon = i_{R(\gamma_1)}$, и поэтому определено произведение $(\gamma_2\varepsilon)\gamma_1 = \gamma_2\gamma_1$. Если определено произведение $\gamma_2\gamma_1$ и $\varepsilon = i_{D(\gamma_1)}$, то определено произведение $\gamma_1\varepsilon$. Поэтому определено произведение $\gamma_2\gamma_1\varepsilon = (\gamma_2\gamma_1)\varepsilon$. Следовательно, $D(\gamma_1) = D(\gamma_2\gamma_1)$. Аналогично доказывается, что $R(\gamma_2\gamma_1) = R(\gamma_2)$.

Определение 2.5. Отображение γ: $C_1 \to C_2$ категории $\mathfrak{C}$ называется *эквивалентностью*, если в категории существует такое отображение γ': $C_2 \to C_1$, что $\gamma'\gamma = i_{C_1}$ и $\gamma\gamma' = i_{C_2}$.

Лемма 2.6. *Отображение γ', предусмотренное определением 2.5, определено однозначно. Оно называется обратным к отображению γ и обозначается через γ^{-1}. Отображение γ^{-1} также является эквивалентностью, причем $(\gamma^{-1})^{-1} = \gamma$. Если отображения γ_1: $C_1 \to C_2$, γ_2: $C_2 \to C_3$ являются эквивалентностями, то и отображение $\gamma_2\gamma_1$ является эквивалентностью, причем $(\gamma_2\gamma_1)^{-1} = \gamma_1^{-1}\gamma_2^{-1}$. Каждая единица ε является эквивалентностью, причем $\varepsilon^{-1} = \varepsilon$.*

Доказательство. Пусть отображения γ' и γ'' удовлетворяют соотношениям $\gamma'\gamma = \gamma''\gamma = \varepsilon_{C_1}$, $\gamma\gamma' = \gamma\gamma'' = \varepsilon_{C_2}$. Тогда

$$\gamma' = \gamma'\varepsilon_{C_2} = \gamma'\gamma\gamma'' = \varepsilon_{C_1}\gamma'' = \gamma''.$$

Тот факт, что отображение γ^{-1} является эквивалентностью и что $(\gamma^{-1})^{-1} = \gamma$, непосредственно следует из определения. Если отображения γ_2, γ_1 являются эквивалентностями и если определено произведение $\gamma_2\gamma_1$, то определено произведение $(\gamma_2\gamma_1)(\gamma_1^{-1}\gamma_2^{-1})$, равное ε_{C_2}. Аналогично $(\gamma_1^{-1}\gamma_2^{-1})(\gamma_2\gamma_1) = \varepsilon_{C_1}$. Поэтому $(\gamma_2\gamma_1)^{-1} = \gamma_1^{-1}\gamma_2^{-1}$. Если ε — некоторая единица и $\varepsilon' = \varepsilon_{D(\varepsilon)}$, то определено произведение $\varepsilon\varepsilon'$ и $\varepsilon' = \varepsilon\varepsilon' = \varepsilon$. Следовательно, $\varepsilon = \varepsilon\varepsilon$, так что $\varepsilon = i_{D(\varepsilon)} = i_{R(\varepsilon)}$ и $\varepsilon^{-1} = \varepsilon$.

Определение 2.7. *Подкатегорией* $\mathfrak{C}_0$ категории $\mathfrak{C}$ называется подмножество категории $\mathfrak{C}$, удовлетворяющее следующим условиям:

1°. $i_C \in \mathfrak{C}_0$ для любого объекта $C \in \mathfrak{C}_0$.

2°. $\gamma_2\gamma_1 \in \mathfrak{C}_0$ для любых отображений $\gamma_2, \gamma_1 \in \mathfrak{C}_0$, для которых произведение $\gamma_2\gamma_1$ определено.

3°. $D(\gamma) \in \mathfrak{C}_0$ и $R(\gamma) \in \mathfrak{C}_0$ для любого отображения $\gamma \in \mathfrak{C}_0$.

Подкатегория $\mathfrak{C}_0$ категории $\mathfrak{C}$ называется *полной*, если для каждого элемента $\gamma \in \mathfrak{C}$ из условий $D(\gamma) \in \mathfrak{C}_0$ и $R(\gamma) \in \mathfrak{C}_0$ следует, что $\gamma \in \mathfrak{C}_0$.

Ясно, что подкатегория сама является категорией. Однако отображение $\gamma \in \mathfrak{C}_0$ может быть эквивалентностью для категории $\mathfrak{C}$, не будучи эквивалентностью в категории $\mathfrak{C}_0$.

Процесс построения некоторой подкатегории можно разложить на два шага. В первую очередь выбираем некоторое подмножество объектов категории $\mathfrak{C}$ и рассматриваем полную подкатегорию, определенную этими объектами. После этого, не изменяя множества объектов, выбираем некоторое подмножество множества всех отображений, удовлетворяющее условиям 1° и 2°.

3. Примеры категорий

Первый пример категории образуют топологические пространства и их непрерывные отображения. Объектами этой категории являются топологические пространства, а отображениями — непрерывные отображения одного топологического пространства в другое. Композиция (произведение) двух отображений определяется обычным образом, как их последовательное выполнение. Эквивалентностями этой категории являются гомеоморфные отображения одного пространства в другое.

Основное значение для нашего аксиоматического построения имеет категория, объектами которой являются пары (X, A), где X — топологические пространства и $A \subset X$, а отображениями — непрерывные отображения f: $(X, A) \to (Y, B)$. Эта категория будет обозначаться через $\mathfrak{A}_1$. Допустимые категории, упоминаемые в пункте 1 главы I, являются подкатегориями категории $\mathfrak{A}_1$. Эквивалентностями некоторой допустимой категории $\mathfrak{A}$ являются гомеоморфизмы в смысле пункта 5 главы I.

В пункте 2 главы I мы имели дело с категориями $\mathfrak{G}_C$ и $\mathfrak{G}_R$, объектами которых являются соответственно компактные абелевы группы и модули над некоторым кольцом R, а отображениями — гомоморфизмы, непрерывные в первом случае и линейные — во втором. В случае, когда R является кольцом целых чисел, категория $\mathfrak{G}_R$ есть не что иное, как категория $\mathfrak{G}$ обычных абелевых групп и их гомоморфизмов.

После категорий $\mathfrak{G}_C$, $\mathfrak{G}_R$ можно рассматривать категории $\mathfrak{S}_l\mathfrak{G}_C$, $\mathfrak{S}_l\mathfrak{G}_R$, объектами которых являются обратные последовательности групп категорий $\mathfrak{G}_C$ и $\mathfrak{G}_R$ соответственно. Отображениями этих категорий являются гомоморфизмы одной такой обратной последовательности в другую. Точные обратные последовательности образуют подкатегории $\mathfrak{E}_l\mathfrak{G}_C$, $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{G}_R$ этих категорий. Аналогично определяются категории прямых последовательностей и точных прямых последовательностей, которые мы будем обозначать через $\mathfrak{S}_u\mathfrak{G}_C$, $\mathfrak{E}_u\mathfrak{G}_C$ и т. д.

В главе II были рассмотрены категории $\mathfrak{K}_l$, $\mathfrak{K}_s$, объектами которых являются пары (K, L), где K — некоторый симплициальный комплекс и L — его подкомплекс, а отображениями являются в категории $\mathfrak{K}_l$ линейные отображения, а в категории $\mathfrak{K}_s$ — симплициальные отображения. Очевидно, что категория $\mathfrak{K}_s$ является подкатегорией категории $\mathfrak{K}_l$. Теорема II.4.8 утверждает, что любая эквивалентность категории $\mathfrak{K}_l$ является эквивалентностью категории $\mathfrak{K}_s$.

В пункте 1 главы III была введена важная категория $\mathfrak{T}$ триангулируемых пар. Ее объектами являются триангулируемые пары (X, A), а отображениями — непрерывные отображения одной такой пары в другую. Очевидно, что категория $\mathfrak{T}$ является полной подкатегорией категории $\mathfrak{A}_1$ и допустимой категорией для теории гомологий.

4. Функторы

Пусть $\mathfrak{C}$ и $\mathfrak{D}$ — произвольные категории и T — некоторая функция, переводящая объекты категории $\mathfrak{C}$ в объекты категории $\mathfrak{D}$ и, кроме того, относящая каждому отображению $f \in \mathfrak{C}$ некоторое отображение $T(f) \in \mathfrak{D}$. Функция T называется *ковариантным функтором* (из $\mathfrak{C}$ в $\mathfrak{D}$), если она обладает следующими свойствами:

1°. $T(f)$: $T(C_1) \to T(C_2)$ для любого отображения f: $C_1 \to C_2$.

2°. $T(i_C) = i_{T(C)}$.

3°. $T(f_2 f_1) = T(f_2)\, T(f_1)$ каждый раз, когда определено произведение $f_2 f_1$.

Функция T называется *контравариантным функтором*, если вместо свойств 1° — 3° она обладает следующими:

1′. $T(f)$: $T(C_2) \to T(C_1)$ для любого отображения f: $C_1 \to C_2$.

2′. $T(i_C) = i_{T(C)}$.

3′. $T(f_2 f_1) = T(f_1)\, T(f_2)$ каждый раз, когда определено произведение $f_2 f_1$.

Условие 1° можно переписать в виде $T(Df) = DT(f)$ и $T(Rf) = RT(f)$. Таким образом, можно сказать, что функция T является ковариантным функтором, если она перестановочна со всеми операциями, определенными в категориях.

В силу условия 2° функтор T полностью определяется функцией $T(f)$, определенной только на отображениях f. Таким образом, ковариантный функтор T является, по существу, некоторым гомоморфизмом абстрактной категории, соответствующей категории $\mathfrak{C}$, в абстрактную категорию, соответствующую категории $\mathfrak{D}$, подчиненным условию, что единицы отображаются в единицы. Аналогично контравариантный функтор соответствует антигомоморфизму абстрактных категорий.

Для любого функтора T из $\mathfrak{C}$ в $\mathfrak{D}$ и любого функтора T' из $\mathfrak{D}$ в $\mathfrak{E}$ обычным образом определяется композиция $T'T$, являющаяся функтором из $\mathfrak{C}$ в $\mathfrak{E}$. Если функторы T, T' оба ковариантны или контравариантны, то функтор $T'T$ ковариантен. В противоположном случае функтор $T'T$ контравариантен.

5. Примеры функторов

Пусть $\mathfrak{A}$ — произвольная допустимая категория, на которой задана некоторая теория гомологий, и пусть q — некоторое фиксированное целое число. Определим для любого допустимого отображения f: $(X, A) \to (Y, B)$ отображение

$$H_q f = f_*: H_q(X, A) \to H_q(Y, B).$$

Тогда аксиомы 1 и 2 теории гомологий утверждают, что пара функций $H_q(X, A)$, $H_q(f)$ является ковариантным функтором H_q, определенным в категории $\mathfrak{A}$ и принимающим значения в категориях $\mathfrak{G}_R$ или $\mathfrak{G}_C$.

Вместо категории $\mathfrak{G}_R$ можно использовать категорию $\mathfrak{E}_l\mathfrak{G}_R$ точных обратных последовательностей категории $\mathfrak{G}_R$. Тогда объект $H(X, A)$ определяется как гомологическая последовательность пары (X, A) и отображение $H(f)$ — как гомоморфизм f_{**} гомологической последовательности пары (X, A) в гомологическую последовательность пары (Y, B), индуцированный отображением f (см. теорему I.4.1). Аксиомы 1, 2, 3 и 4 обеспечивают, что H является ковариантным функтором из $\mathfrak{A}$ в $\mathfrak{E}_l\mathfrak{G}_R$ или $\mathfrak{E}_l\mathfrak{G}_C$. Этот функтор называют для сокращения речи *гомологическим функтором*.

Аналогично когомологический функтор является контравариантным функтором из $\mathfrak{A}$ в $\mathfrak{E}_u\mathfrak{G}_R$ или $\mathfrak{E}_u\mathfrak{G}_C$.

Другой ковариантный функтор в категории $\mathfrak{A}$, на этот раз со значениями также в $\mathfrak{A}$, мы получаем, полагая

$$T(X, A) = A, \quad T(f) = f|A,$$

где $f|A$ — отображение $A \to B$, определенное отображением $f\colon (X, A) \to (Y, B)$.

Наконец, полагая

$$T(K, L) = (|K|, |L|), \quad T(f) = f,$$

мы получим ковариантный функтор из $\mathfrak{K}_s$ в $\mathfrak{A}_C$ (где $\mathfrak{A}_C$ — категория компактных пар).

6. Преобразования функторов

Пусть T и S — два ковариантных функтора из $\mathfrak{C}$ в $\mathfrak{D}$. Функция Γ, относящая каждому объекту $C \in \mathfrak{C}$ некоторое отображение $\Gamma(C) \in \mathfrak{D}$, называется *естественным преобразованием* функтора T в функтор S, если

1°. $\Gamma(C)\colon T(C) \to S(C)$,

2°. $\Gamma(C_2)\, T(f) = S(f)\, \Gamma(C_1)$ для любого отображения $f\colon C_1 \to C_2$.

В этом случае, когда T и S являются контравариантными функторами, условие 2° заменяется следующим:

2′. $\Gamma(C_1)\, T(f) = S(f)\, \Gamma(C_2)$ для любого отображения $f\colon C_1 \to C_2$.

Если для каждого объекта $C \in \mathfrak{C}$ отображение $\Gamma(C)$ является эквивалентностью, то преобразование Γ называется *естественной эквивалентностью* функторов T и S (обозначение: $\Gamma\colon T \rightleftarrows S$). В этом случае условие 2° можно записать в виде

$$\Gamma(C_2)\, T(f)\, \Gamma(C_1)^{-1} = S(f).$$

Условие 1° равносильно тому, что указанная в условии 2° композиция отображений всегда определена. Условие 2° означает, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} T(C_1) & \xrightarrow{T(f)} & T(C_2) \\ \downarrow \Gamma(C_1) & & \downarrow \Gamma(C_2) \\ S(C_1) & \xrightarrow{S(f)} & S(C_2) \end{array}$$

коммутативна.

Легко проверяется, что композиция двух естественных преобразований также является естественным преобразованием. Если преобразование Γ: $T \to S$ является естественной эквивалентностью, то преобразование Γ^{-1}: $S \to T$, определенное формулой $\Gamma^{-1}(C) = [\Gamma(C)]^{-1}$, также является естественной эквивалентностью, а преобразование $\Gamma_0 = \Gamma\Gamma^{-1} = \Gamma^{-1}\Gamma$ удовлетворяет соотношению $\Gamma_0(C) = i_{T(C)}$, так что Γ_0: $T \rightleftarrows T$. Отсюда следует, что отношение естественной эквивалентности рефлексивно, симметрично и транзитивно.

7. Примеры преобразований функторов

Пусть $\mathfrak{A}$ — допустимая категория, на которой задан некоторый гомологический функтор H, и пусть T — функтор из $\mathfrak{A}$ в $\mathfrak{A}$, определенный формулами

$$T(X, A) = A, \quad T(f) = f|A.$$

Пусть q — произвольное положительное число и пусть H_q, H_{q-1} — гомологические функторы из $\mathfrak{A}$ в $\mathfrak{G}_R$ (или в $\mathfrak{G}_C$). Тогда аксиома $3: \partial f_* = (f|A)_*\partial$ является как раз условием 2° естественности гомоморфизма

$$\partial\colon H_q(X, A) \to H_{q-1}(A) = H_{q-1}(T(X, A)).$$

Таким образом, гомоморфизмы ∂ определяют естественное преобразование функтора H_q в составной функтор $H_{q-1}T$.

В главе III было доказано, что на подкатегории пар $(|s|, |\dot{s}|)$, где s — произвольный симплекс и $\dot{s}$ — его граница, отображение ∂: $H_q \rightleftarrows H_{q-1}T$ является эквивалентностью.

Положив $C_q(f) = f_q$ для любого симплициального отображения f: $(K, L) \to (K_1, L_1)$, мы определим группу q-мерных цепей $C_q(K)$ как ковариантный функтор из $\mathfrak{K}_s$ в $\mathfrak{G}_R$ (или в $\mathfrak{G}_C$). Аналогично группа $Z_q(K, L)$ q-мерных циклов и группа $B_q(K, L)$ q-мерных границ пары (K, L) являются функторами из $\mathfrak{K}_s$ в $\mathfrak{G}_R$ (или в $\mathfrak{G}_C$). Так как $B_q(K, L) \subset Z_q(K, L)$, то функтор B_q можно назвать *подфунктором* функтора Z_q. Соответствующий *фактор-функтор* $H_q(K, L) = Z_q(K, L) / B_q(K, L)$ имеет те же самые области определения и значения. Отображение $\nu_q(K, L)$: $Z_q(K, L) \to H_q(K, L)$, относящее каждому циклу его класс гомологий, является естественным преобразованием функтора Z_q в функтор H_q.

Для того чтобы различать эти q-функторы от q-мерных гомологических функторов, определенных из $\mathfrak{A}$ в $\mathfrak{G}_R$, мы q-мерный гомологический функтор, определенный в категории $\mathfrak{K}_s$, будем обозначать через $\widetilde{H}_q$.

Пару $(|K|, |L|)$, где (K, L) — некоторая симплициальная пара, можно рассматривать как триангулированную пару с триангуляцией $T = \{t, (K, L)\}$, где t — тождественное отображение пары $(|K|, |L|)$ на себя. Рассмотренные в пункте 8 главы III изоморфизмы $\theta = \theta_T: \quad H_q(|K|, |L|) \to H_q(K, L)$ определяют естественную эквивалентность функторов

$$\theta: H_q T \rightleftarrows \widetilde{H}_q,$$

где T — ковариантный функтор из $\mathfrak{K}_s$ в $\mathfrak{A}$, определенный формулами $T(K, L) = (|K|, |L|)$, $T(f) = f$. Естественность отображения θ утверждается в теореме II.8.4.

8. c-категории и ∂-функторы

В целях достижения однообразия и во избежание в следующих главах повторений удобно ввести некоторые понятия, аналогичные гомологическим понятиям, введенным в главе I, но определенные в категориях более общих, чем допустимые для теории гомологий категории. В излагаемой ниже теории сохраняются первые четыре аксиомы теорий гомологий.

Определение 8.1. *Категорией с отмеченными парами* (кратко *c-категорией*) называется категория $\mathfrak{C}$, в которой отмечены некоторые пары отображений (α, β). Для *отмеченных пар* (α, β) должна быть всегда определена композиция $\beta\alpha$. Отмеченную пару, состоящую из отображений α: $A \to B$ и β: $B \to C$, мы будем обозначать следующим образом:

$$(\alpha, \beta): A \to B \to C.$$

Некоторый ковариантный (контравариантный) функтор T: $\mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$ из одной c-категории в другую c-категорию называется *c-функтором*, если для каждой отмеченной пары (α, β) категории $\mathfrak{C}$ пара отображений (T_α, T_β) (соответственно (T_β, T_α)) является отмеченной парой категории $\mathfrak{D}$.

Примером c-категории может служить любая допустимая категория $\mathfrak{A}$ в смысле пункта 1 главы I. Для любой пары (X, A) категории $\mathfrak{A}$ отображения вложения i: $A \subset X$, j: $X \subset (X, A)$ образуют по определению отмеченную пару

$$(i, j): A \to X \to (X, A).$$

Ту же допустимую категорию $\mathfrak{A}$ можно обратить в другую c-категорию, приняв за отмеченные пары отображений вложения, соответствующие произвольной допустимой тройке (X, A, B)

$$(i, j): (A, B) \to (X, B) \to (X, A).$$

Другой пример c-категории можно получить, отметив в категории $\mathfrak{G}_R$ (или в категории $\mathfrak{G}_C$) пары

$$(\varphi, \psi)\colon G_1 \to G_2 \to G_3,$$

для которых отображение $\varphi\colon G_1 \to G_2$ мономорфно, отображение $\psi\colon G_2 \to G_3$ эпиморфно и $\operatorname{Ker}\psi = \operatorname{Im}\varphi$, т. е. для которых последовательность

$$0 \to G_1 \xrightarrow{\varphi} G_2 \xrightarrow{\psi} G_3 \to 0$$

точна.

Определение 8.2. Пусть $(\alpha, \beta)\colon A \to B \to C$ и $(\alpha_1, \beta_1)\colon A_1 \to B_1 \to C_1$ — отмеченные пары некоторой c-категории $\mathfrak{C}$. *Отображением* $(\alpha, \beta) \to (\alpha_1, \beta_1)$ называется тройка отображений категории $\mathfrak{C}$

$$\gamma_1\colon A \to A_1, \quad \gamma_2\colon B \to B_1, \quad \gamma_3\colon C \to C_1,$$

для которой диаграмма

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\gamma_1"] & B \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\gamma_2"] & C \arrow[d, "\gamma_3"] \\ A_1 \arrow[r, "\alpha_1"] & B_1 \arrow[r, "\beta_1"] & C_1 \end{tikzcd}$$

коммутативна.

Легко видеть, что так определенные отображения и отмеченные пары образуют категорию. Любой функтор $T\colon \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$ индуцирует некоторый функтор из категории отмеченных в $\mathfrak{C}$ пар в категорию отмеченных в $\mathfrak{D}$ пар.

Пусть теперь $\mathfrak{C}$ — произвольная c-категория. Мы будем рассматривать системы $H = \{H_q(A), \alpha_*, \partial_{(\alpha,\beta)}\}$, в которых

(1) каждому объекту $A \in \mathfrak{C}$ и каждому целому числу q соответствует некоторая группа $H_q(A)$,

(2) для каждого отображения $\alpha\colon A \to B$ категории $\mathfrak{C}$ и каждого целого числа q определено гомоморфное отображение $\alpha_*\colon H_q(A) \to H_q(B)$,

(3) для каждой отмеченной пары $(\alpha, \beta)\colon A \to B \to C$ и каждого целого числа q определено гомоморфное отображение $\partial_{(\alpha,\beta)}\colon H_q(C) \to H_{q-1}(A)$.

Предполагается, что все группы и гомоморфизмы принадлежат одной из категорий $\mathfrak{G}_R$ или $\mathfrak{G}_C$.

Такая система H называется *ковариантным ∂-функтором* на c-категории $\mathfrak{C}$, если выполнены следующие четыре аксиомы.

Аксиома 1. *Если отображение α является тождественным отображением, то и отображение α_* также является тождественным отображением.*

Аксиома 2. $(\beta\alpha)_* = \beta_*\alpha_*$.

Аксиома 3. *Если отображения $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ образуют отображения отмеченной пары* (α, β): $A \to B \to C$ *в отмеченную пару* (α_1, β_1): $A_1 \to B_1 \to C_1$, *то диаграмма*

$$\begin{array}{ccc} H_q(C) & \xrightarrow{\gamma_{3*}} & H_q(C_1) \\ \downarrow \partial_{(\alpha,\beta)} & & \downarrow \partial_{(\alpha_1,\beta_1)} \\ H_{q-1}(A) & \xrightarrow{\gamma_{1*}} & H_{q-1}(A_1) \end{array}$$

коммутативна.

Аксиома 4. *Для любой отмеченной пары* (α, β): $A \to B \to C$ *последовательность*

$$\ldots \leftarrow H_{q-1}(A) \xleftarrow{\partial} H_q(C) \xleftarrow{\beta_*} H_q(B) \xleftarrow{\alpha_*} H_q(A) \leftarrow \ldots$$

точна.

Эти четыре аксиомы являются точными копиями первых четырех аксиом теории гомологий.

Аналогично определяется *контравариантный δ-функтор*

$$H = \{H^q(A), \alpha^*, \delta_{(\alpha,\beta)}\},$$

где α^*: $H^q(B) \to H^q(A)$, если α: $A \to B$, и $\delta_{(\alpha,\beta)}$: $H^q(A) \to H^{q+1}(C)$, если (α, β): $A \to B \to C$. Соответствующие аксиомы являются копиями первых четырех аксиом теории когомологий.

Очевидно, что для любого ковариантного ∂-функтора H, определенного на c-категории $\mathfrak{D}$, и произвольного ковариантного c-функтора T: $\mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$ композиция

$$HT = \{H_q(TA), (T\alpha)_*, \partial_{(T\alpha, T\beta)}\}$$

является ковариантным ∂-функтором, определенным на категории $\mathfrak{C}$. Аналогично, для любого контравариантного δ-функтора H, определенного на категории $\mathfrak{D}$, и произвольно ковариантного c-функтора T: $\mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$ композиция

$$HT = \{H^q(TA), (T\alpha)^*, \delta_{(\alpha, T\beta)}\}$$

является контравариантным δ-функтором, определенным на категории $\mathfrak{C}$. Таким образом, для ковариантного функтора T композиция HT всегда определена.

Если функтор T контравариантен, то композиция HT формально определяется теми же формулами, но, вообще говоря, не является ни ковариантным ∂-функтором, ни контравариантным δ-функтором. Ввиду этого целесообразно дополнительно ввести «смешанные» функторы, а именно ковариантные δ-функторы и контравариантные ∂-функторы. Для ковариантного δ-функтора $H = \{H^q(A), \alpha_*, \delta_{(\alpha,\beta)}\}$ имеем α_*: $H^q(A) \to H^q(B)$, если α: $A \to B$, и $\delta_{(\alpha,\beta)}$: $H^q(C) \to H^{q+1}(A)$, если (α, β): $A \to B \to C$. Для контравариантного ∂-функтора $H = \{H_q(A), \alpha^*, \partial_{(\alpha,\beta)}\}$ имеем α^*: $H_q(B) \to$

$\to H_q(A)$, если α: $A \to B$, и $\partial_{(\alpha,\beta)}$: $H_q(C) \to H_{q-1}(A)$, если (α, β): $A \to B \to C$. Соответствующие аксиомы являются очевидными переформулировками приведенных выше аксиом.

После введения смешанных функторов можно считать, что композиция HT определена всегда. Характер этой композиции описывается следующей теоремой.

Теорема 8.3. *Композиция HT, где T: $\mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$ — произвольный с-функтор и H — произвольный ∂-функтор (δ-функтор) определенный на категории $\mathfrak{D}$, является ∂-функтором (δ-функтором), определенным на категории $\mathfrak{C}$, ковариантным, если функторы H и T оба ковариантны или контравариантны, и контравариантным, если один из функторов H и T ковариантен, а другой контравариантен.*

Доказательство очевидно.

Каждая теория гомологий на некоторой допустимой категории $\mathfrak{A}$ определяет некоторый ковариантный ∂-функтор на соответствующей c-категории. Аналогично любая теория когомологий на категории $\mathfrak{A}$ определяет контравариантный δ-функтор. Примеры смешанных функторов будут даны в главе V.

Связь между смешанными и несмешанными функторами может быть пояснена с помощью приема, который мы будем называть «приемом изменения знака». Пусть $H = \{H_q(A), \alpha_*, \partial_{(\alpha,\beta)}\}$ — произвольный ковариантный ∂-функтор. Определим ковариантный δ-функтор $\bar{H} = \{\bar{H}^q(A), \bar{\alpha}_*, \bar{\delta}_{(\alpha,\beta)}\}$, полагая

$$\bar{H}^q(A) = H_{-q}(A), \quad \bar{\alpha}_* = \alpha_*, \quad \bar{\delta}_{(\alpha,\beta)} = \partial_{(\alpha,\beta)}$$

(более точно отображение $\bar{\alpha}_*$: $\bar{H}^q(A) \to \bar{H}^q(B)$ определяется как α_*: $H_{-q}(A) \to H_{-q}(B)$ и т. д.). Обратно, применяя этот прием к функтору $\bar{H}$, получаем функтор H. Таким образом, соответствие $H \to \bar{H}$ является взаимно однозначным соответствием между ковариантными ∂-функторами и ковариантными δ-функторами. Аналогично можно рассмотреть и контравариантные функторы.

9. h-категории и h-функторы

Введение понятия c-категории является шагом вперед к рассмотрению теорий гомологий, определенных на категориях, более общих и абстрактных, чем допустимые категории пространств. Как мы видели, первые четыре аксиомы можно без труда сформулировать в весьма общем виде. Ясно, что остальные аксиомы нельзя сформулировать для произвольных c-категорий, так как в c-категориях отсутствуют понятия «гомотопии», «вырезания» и «точки». Имея в виду рассмотреть все аксиомы теории гомологий, введем следующее определение.

Определение 9.1. Категория $\mathfrak{C}$ с отмеченными парами называется *h-категорией*, если

(1) задано бинарное соотношение $\alpha \simeq \beta$ (*α гомотопно β*), где α, β: $A \to B$ — некоторые отображения категории $\mathfrak{C}$;

(2) выделены некоторые отображения α: $A \to B$, которые названы *вырезаниями*;

(3) выделены некоторые объекты категории $\mathfrak{C}$, которые названы *точками*.

Ковариантный ∂-функтор (контравариантный δ-функтор), определенный на категории $\mathfrak{C}$, называется *теорией гомологий (теорией когомологий)* на h-категории $\mathfrak{C}$, если он удовлетворяет аналогам аксиом гомотопии, вырезания и размерности.

Следует отметить, что мы не постулируем никаких свойств гомотопий, вырезаний и точек. Данное выше определение имеет чисто формальный характер и служит только для введения некоторого удобного для дальнейшего оборота речи.

Определение 9.2. Пусть α: $A \to B$, β: $B \to A$ — два отображения h-категории $\mathfrak{C}$. Если оба отображения $\beta\alpha$: $A \to A$ и $\alpha\beta$: $B \to B$ гомотопны тождественным отображениям, то отображения α и β называются *взаимно обратными гомотопическими эквивалентностями*. Отображение α: $A \to B$ категории $\mathfrak{C}$, являющееся композицией конечного числа вырезаний и гомотопических эквивалентностей, называется *обобщенным вырезанием*.

Теорема 9.3. *Пусть H — произвольная теория гомологий (когомологий) на некоторой h-категории $\mathfrak{C}$. Тогда для любого обобщенного вырезания α: $A \to B$*

$$\alpha_*\colon\ H_q(A) \approx H_q(B) \ (\textit{соответственно } \alpha^*\colon\ H^q(B) \approx H^q(A)).$$

Доказательство. Пусть $\alpha = \alpha^1 \ldots \alpha^n$ — представление обобщенного вырезания α в виде композиции вырезаний и гомотопических эквивалентностей. Так как $\alpha_* = \alpha_*^1 \ldots \alpha_*^n$, то достаточно показать, что каждое отображение α_*^i является изоморфизмом. Если α^i является отображением вырезания, то это следует из аксиомы вырезания. Если отображение α^i является гомотопической эквивалентностью с гомотопическим обратным отображением β^i, то отображение $\alpha_*^i\beta_*^i = (\alpha^i\beta^i)_*$ является тождественным отображением. Аналогично отображение $\beta_*^i\alpha_*^i$ является тождественным отображением. Следовательно, α_*^i является изоморфизмом.

Определение 9.4. Ковариантный c-функтор T: $\mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$ из h-категории $\mathfrak{C}$ в h-категорию $\mathfrak{D}$ называется *h-функтором*, если он сохраняет гомотопии, обобщенные вырезания и точки, т. е. если из $\alpha \simeq \beta$ в $\mathfrak{C}$ следует, что $T\alpha \simeq T\beta$ в $\mathfrak{D}$, для любого обобщенного вырезания α в $\mathfrak{C}$ отображение $T\alpha$ является обобщенным вырезанием в $\mathfrak{D}$ и для любой точки A категории $\mathfrak{C}$ объект TA является точкой категории $\mathfrak{D}$.

Теорема 9.5. *Для любого ковариантного h-функтора T: $\mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$ и произвольной теории гомологий (когомологий) H на категории $\mathfrak{D}$ композиция HT является теорией гомологий (когомологий) на категории $\mathfrak{C}$.*

Доказательство. Согласно теореме 8.3 композиция HT является ковариантным ∂-функтором (контравариантным δ-функтором). Следовательно, достаточно доказать, что HT удовлетворяет аксиомам гомотопии, вырезания и размерности. Но это немедленно следует из теоремы 9.3 и определения 9.4.

Так же как и теорему 8.3, определение 9.4 и теорему 9.5 можно сформулировать и для контравариантных функторов, введя в рассмотрение теории гомологий смешанного характера, т. е. ковариантные δ-функторы и контравариантные ∂-функторы, удовлетворяющие аналогам последних трех аксиом теорий гомологий. Эти смешанные теории не имеют геометрических аналогов, но время от времени встречаются в последующих главах. В частности, в пункте 12 главы V нам будет нужна следующая

Теорема 9.5c. *Для любого контравариантного h-функтора T: $\mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$ и любого ковариантного δ-функтора (контравариантного ∂-функтора) H, определенного на категории $\mathfrak{D}$ и удовлетворяющего аксиомам гомотопии, вырезания и размерности, композиция HT является теорией гомологий (когомологий) на категории $\mathfrak{C}$.*

Замечание. При доказательстве того, что некоторый c-функтор T является h-функтором, достаточно показать, что функтор T сохраняет гомотопии и точки и переводит вырезания в обобщенные вырезания. Отсюда уже будет немедленно следовать, что функтор T переводит обобщенные вырезания в обобщенные вырезания.

10. Сравнение ∂-функторов и теорий гомологий

В этом пункте мы ограничимся рассмотрением ковариантных ∂-функторов, принимающих значения в категории $\mathfrak{G}_R$. Однако все сказанное будет равным образом применимо как к контравариантным функторам, так и к δ-функторам, принимающим значения в категориях $\mathfrak{G}_R$ или $\mathfrak{G}_C$.

Определение 10.1. Пусть $H = \{H_q(A), \alpha_*, \partial_{(\alpha,\beta)}\}$ и $\overline{H} = \{\overline{H}_q(A), \overline{\alpha}_*, \overline{\partial}_{(\alpha,\beta)}\}$ — ковариантные ∂-функторы, определенные на c-категории $\mathfrak{C}$ и принимающие значения в категории $\mathfrak{G}_R$. Семейство гомоморфизмов

$$h(q, A)\colon H_q(A) \to \overline{H}_q(A),$$

определенных для любого объекта $A \in \mathfrak{C}$ и любого целого числа q, называется *гомоморфизмом* одного функтора в другой

$$h\colon H \to \overline{H},$$

если для любого отображения α: $A \to B$ категории $\mathfrak{C}$ диаграмма

$$\begin{array}{ccc} H_q(A) & \xrightarrow{h} & \bar{H}_q(A) \\ \downarrow{\scriptstyle\alpha_*} & & \downarrow{\scriptstyle\bar{\alpha}_*} \\ H_q(B) & \xrightarrow{h} & \bar{H}_q(B) \end{array}$$

коммутативна: $\bar{\alpha}_* h(q, A) = h(q, B)\,\alpha_*$, и для любой отмеченной пары (α, β): $A \to B \to C$ категории $\mathfrak{C}$ диаграмма

$$\begin{array}{ccc} H_q(C) & \xrightarrow{h} & \bar{H}_q(C) \\ \downarrow{\scriptstyle\partial} & & \downarrow{\scriptstyle\bar{\partial}} \\ H_{q-1}(A) & \xrightarrow{h} & \bar{H}_{q-1}(A) \end{array}$$

коммутативна: $\bar{\partial}_{(\alpha,\beta)}\, h(q, C) = h(q-1, A)\, \partial_{(\alpha,\beta)}$.

Если каждое отображение $h(q, A)$ является изоморфизмом $H_q(A) \approx \bar{H}_q(A)$, то h называется *изоморфизмом* h: $H \approx \bar{H}$.

Это определение автоматически пригодно и для теорий гомологий, поскольку любая теория гомологий является функтором, определенным на допустимой категории (или на h-категории) и удовлетворяющим некоторым дополнительным аксиомам. Мы можем теперь следующим образом переформулировать теоремы III.10.1 и III.10.1с.

Теорема 10.2. *Пусть H и $\bar{H}$ — две теории гомологий (когомологий), определенные на категории $\mathfrak{T}$ триангулируемых пар. Тогда любой гомоморфизм*

$$h_0\colon G \to \bar{G}$$

их групп коэффициентов единственным образом продолжается до гомоморфизма (над категорией $\mathfrak{T}$)

$$h\colon H \to \bar{H}.$$

Отображение h изоморфно, если изоморфно отображение h_0.

Определение 10.3. Допустимая категория $\mathfrak{A}$ называется *категорией единственности* для гомологий (когомологий), если для любых двух теорий гомологий (когомологий), определенных на категории $\mathfrak{A}$, каждый гомоморфизм групп коэффициентов

$$h_0\colon G \to \bar{G}$$

можно единственным образом продолжить до гомоморфизма (над категорией $\mathfrak{A}$)

$$h\colon H \to \bar{H}.$$

В том случае, когда отображение h_0 изоморфно, гомоморфизм h будет изоморфизмом. Для доказательства достаточно продолжить отображение h_0^{-1} до некоторого гомоморфизма h', заметить, что отображения $h'h$ и hh' являются продолжениями тождественных отображений $G \to G$ и $\bar{G} \to \bar{G}$ соответственно и воспользоваться тем, что в силу единственности продолжения оба отображения hh' и $h'h$ будут тождественными отображениями.

В этой терминологии теорема 10.2 принимает следующий вид.

Теорема 10.4. *Категория $\mathfrak{T}$ триангулируемых пар является категорией единственности для гомологий и когомологий.*

В главе XII мы построим некоторую другую существенно более широкую категорию единственности.

Используя теорему единственности, можно показать, почему смешанные типы теорий гомологий не рассматриваются над категориями пространств. Пусть, например, H — ковариантный δ-функтор, определенный на категории $\mathfrak{T}$ и удовлетворяющий аксиомам гомотопии, вырезания и размерности. Применим к функтору H описанный в § 8 прием изменения знака. В результате мы получим над категорией $\mathfrak{T}$ некоторую теорию гомологий $\bar{H}$. Согласно теореме единственности $\bar{H}_q(X, A) = 0$, если $q < 0$, так что $H_q(X, A) = 0$, если $q > 0$. Таким образом, для смешанных теорий все группы положительных размерностей тривиальны.

Примечания

Логические основания. Категории «всех топологических пространств» и «всех групп» могут при неосторожном употреблении привести к парадоксам, обыкновенно связываемым с «множеством всех множеств». Для избежания этих парадоксов необходимо либо ограничить понятие категории и запретить, например, пользоваться «категорией всех групп», либо включить его в полную аксиоматическую систему, в которой «категория всех групп» является законным объектом, не приводящим к парадоксам. Для дальнейших целей, по-видимому, наиболее удобна система аксиом Неймана—Бернайса—Гёделя (P. Bernays, A system of axiomatic, set theory, Journ. Symb. Logic **2** (1937), 65—77; **6** (1941), 1—17; **7** (1942), 65—89, 133—145; **8** (1943), 89—106; **13** (1948), 65—79; K. Gödel, The consistency of the continuum hypothesis, Ann. of Math. **3** (1940)[1]). В этой системе вводятся понятия «класса» и «множества»; любое множество является также классом, но не наоборот. Можно доказать, что различные определенные

[1]) Есть русский перевод К. Гёдель, Совместность аксиомы выбора и обобщенной континуум-гипотезы с аксиомами теории множеств, УМН III, вып. 1 (23), (1948), 96—149. *(Прим. ред.)*

в главах I и IV категории являются с точки зрения указанной системы аксиом не множествами, а только классами. Поэтому мы не можем производить над категориями некоторых запрещенных операций (таких, как образование множества всех подмножеств), которые можно производить только над множествами, а отнюдь не над любыми классами.

Транзитивность гомотопий. В определении 9.1 мы не наложили на бинарное отношение $\alpha \simeq \beta$ (α гомотопно β) никаких ограничений. Однако в большинстве h-категорий, которые приходится рассматривать, это отношение рефлексивно, симметрично и транзитивно. Кроме того, оно согласовано с композицией, т. е. для любых отображений α, β: $A \to B$, α', β': $B \to C$ из соотношений $\alpha \simeq \beta$, $\alpha' \simeq \beta'$ следует, что $\alpha'\alpha \simeq \beta'\beta$.

В любой h-категории $\mathfrak{C}$ имеющееся в ней отношение гомотопности всегда можно следующим образом расширить до отношения обладающего указанными выше четырьмя свойствами. В первую очередь определяем отношение $\alpha_1 \simeq' \alpha_2$, имеющее место тогда и только тогда, когда $\alpha_1 = \beta_1\gamma_1$, $\alpha_2 = \beta_2\gamma_2$, где $\beta_1 \simeq \beta_2, \gamma_1 \simeq \gamma_2$. Затем мы определяем отношение $\alpha \simeq'' \beta$, которое имеет место тогда и только тогда, когда существует такая конечная последовательность $\alpha = \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n = \beta$ $(n > 0)$, что для любого $i < n$ либо $\alpha_i \simeq' \alpha_{i+1}$, либо $\alpha_{i+1} \simeq' \alpha_i$. Новое отношение $\simeq''$ рефлексивно, симметрично, транзитивно и согласовано с композицией. Легко видеть, что в любой теории гомологий на категории $\mathfrak{C}$ из $\alpha \simeq'' \beta$ следует, что $\alpha_* = \beta_*$. Следовательно, отношение $\simeq$ всегда можно заменить отношением $\simeq''$.

Если отношение гомотопии обладает рассматриваемыми четырьмя свойствами, то определенное в 9.2 отношение гомотопической эквивалентности рефлексивно, симметрично и транзитивно.

Упражнения

А. Функторы многих переменных.

1. Пусть $\mathfrak{C}_1, \ldots, \mathfrak{C}_m, \mathfrak{D}_1, \ldots, \mathfrak{D}_n, \mathfrak{E}$ — произвольные категории. Определить понятие функтора, ковариантного в категориях $\mathfrak{C}_1, \ldots, \mathfrak{C}_m$, контравариантного в категориях $\mathfrak{D}_1, \ldots, \mathfrak{D}_n$, и принимающего значения в категории $\mathfrak{E}$. Обобщить понятия естественного преобразования и естественной эквивалентности на такие функторы.

2. Показать, что свойства коммутативности и ассоциативности (внешней) прямой суммы

$$G_1 + G_2 \approx G_2 + G_1,$$
$$G_1 + (G_2 + G_3) \approx (G_1 + G_2) + G_3$$

утверждают естественные эквивалентности некоторых функторов.

B. Функторы групп

1. Рассмотреть категорию всех групп (в том числе и неабелевых) и любых их гомоморфизмов. Рассмотреть функции, относящие каждой группе

(1) ее коммутант,

(2) ее центр,

(3) ее группу автоморфизмов.

Показать, что на соответствующих подкатегориях эти функции определяют некоторые функторы.

Определение. Функтор T, определенный на одной из категорий $\mathfrak{G}_R$, $\mathfrak{G}_C$ и принимающий значения в той или иной из этих категорий, называется *аддитивным*, если $T(\varphi_1 + \varphi_2) = T\varphi_1 + T\varphi_2$ для любых отображений φ_1, φ_2: $G \to G'$. Функтор T называется *точным*, если любую точную последовательность он преобразует также в точную.

2. Пусть функтор T аддитивен. Показать, что $T\varphi = 0$, если $\varphi = 0$, и $TG = 0$, если $G = 0$.

3. Пусть T — ковариантный аддитивный функтор. Показать, что для любого инъективного представления i_α: $G_\alpha \to G$ ($\alpha = 1, \ldots, n$) некоторой группы G в виде прямой суммы, отображение Ti_α: $TG_\alpha \to TG$ определяет инъективное представление группы TG в виде прямой суммы.

4. Показать, что для любого ковариантного аддитивного функтора T и любой точной последовательности

$$0 \to G_1 \xrightarrow{\varphi} G \xrightarrow{\psi} G_2 \to 0,$$

в которой образ гомоморфизма φ является прямым слагаемым группы G, преобразованная последовательность

$$0 \to TG_1 \xrightarrow{T\varphi} TG \xrightarrow{T\psi} TG_2 \to 0$$

обладает теми же свойствами.

5. Доказать, что некоторый функтор тогда и только тогда точен, когда любую точную последовательность вида $0 \to G' \to G \to G'' \to 0$ он переводит в точную последовательность такого же вида.

C. ∂-функторы как функторы

1. Согласно аксиоме 4 любой ковариантный (контравариантный) ∂- или δ-функтор H, определенный на c-категории $\mathfrak{C}$, относит каждой отмеченной паре (α, β) категории $\mathfrak{C}$ некоторую точную последовательность. Показать, что для любого отображения $(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ одной пары (α, β) в другую пару (α_1, β_1) тройка $(\gamma_{1*}, \gamma_{2*}, \gamma_{3*})$ (соответственно тройка $(\gamma_1^*, \gamma_2^*, \gamma_3^*)$) является гомоморфизмом соответствующих точных последовательностей. Показать, что тем самым получается новый ковариантный (контравариантный)

функтор H^*, определенный на категории пар отображений категории $\mathfrak{C}$, значениями которого являются точные обратные (прямые) последовательности. Сформулировать аксиомы 1—4 с помощью функторов H и H^*. Показать, что любой гомоморфизм h: $H \to \bar{H}$ одного ∂-функтора в другой порождает естественное преобразование h^*: $H^* \to \bar{H}^*$. Найти условия, которым должно удовлетворять естественное преобразование Γ: $H^* \to \bar{H}^*$ для того, чтобы существовал такой гомоморфизм h: $H \to \bar{H}$, что $\Gamma = h^*$.

2. Показать, что замена верхних индексов на нижние с одновременным изменением их знака преобразует ковариантные (контравариантные) δ-функторы в ковариантные (контравариантные) ∂-функторы.

3. Показать, что для любого ковариантного ∂-функтора H и любого ковариантного (контравариантного) точного функтора T, преобразующего группы в группы, композиция TH является ковариантным ∂-функтором (контравариантным δ-функтором). Исследовать, что получается, когда H является контравариантным ∂-функтором или ковариантным (контравариантным) δ-функтором. Показать, что те же результаты имеют место и для теорий гомологий (когомологий) в допустимых категориях или в h-категориях.

D. Модули и векторные пространства

Пусть G — произвольный модуль над некоторой областью целостности D (см. главу I, упражнения H). В множестве всех пар вида (d, g), где $d \in D$, $d \neq 0$, $g \in G$, определим отношение эквивалентности $(d_1, g_1) \sim (d_2, g_2)$, имеющее место тогда и только тогда, когда $d_2 g_1 = d_1 g_2$.

1. Показать, что указанное отношение действительно является отношением эквивалентности. Класс эквивалентности пары (d, g) будем обозначать через $[d, g]$, а множество всех классов эквивалентности — через $\hat{G}$.

2. Показать, что относительно операций

$$[d_1, g_1] + [d_2, g_2] = [d_1 d_2, d_2 g_1 + d_1 g_2], \qquad d'[d_1 g] = [d, d'g]$$

множество $\hat{G}$ является D-модулем.

3. Показать, что отображение $g \to [1, g]$ является линейным гомоморфизмом, и изучить его ядро.

4. Рассмотреть случай $D = G$ (кольцо D рассматривается как D-модуль относительно имеющегося в кольце умножения). Показать, что $\hat{D}$ является полем (полем отношений области целостности D).

5. Показать, что относительно операции

$$[d_1, d_2]\,[d, g] = [d_1 d, d_2 g]$$

модуль $\hat{G}$ является линейным пространством над полем $\hat{D}$.

6. Показать, что ранг модуля $\overset{*}{G}$ над кольцом D равен рангу (размерности) линейного пространства $\widehat{G}$ над полем $\widehat{D}$.

7. Любой гомоморфизм φ: $G_1 \to G_2$ двух D-модулей определяет по формуле $\varphi[d, g] = [d, \varphi g]$ некоторое отображение $\widehat{\varphi}$: $\widehat{G}_1 \to \widehat{G}_2$. Показать, что это отображение линейно над $\widehat{D}$. Показать, что операции $\widehat{G}, \widehat{\varphi}$ образуют ковариантный функтор, определенный на категории $\mathfrak{G}_D$ всех D-модулей, значения которого принадлежат категории $\mathfrak{G}_{\widehat{D}}$ линейных пространств над полем $\widehat{D}$. Показать, что этот функтор точен.

8. Для любой теории гомологий (когомологий) H, значения которой принадлежат категории $\mathfrak{G}_D$ всех D-модулей, определим функтор $\widehat{H}$ как композицию теории H с функтором, определенным в упражнении 7. Показать, что функтор $\widehat{H}$ является теорией гомологий (когомологий), значения которой принадлежат категории $\mathfrak{G}_{\widehat{D}}$. Показать, что числа Бетти, вычисленные в теории H, совпадают с числами Бетти, вычисленными в теории $\widehat{H}$.

ГЛАВА V

ЦЕПНЫЕ КОМПЛЕКСЫ

1. Введение

Основной целью этой и следующих четырех глав является построение теорий гомологий с данной группой коэффициентов. Это построение можно, грубо говоря, разделить на три этапа, а именно:

(1) пространство $\to$ комплекс,

(2) комплекс $\to$ цепной комплекс и

(3) цепной комплекс $\to$ группы гомологий.

Эта глава посвящена последнему этапу и является по своему характеру чисто алгебраической.

Цепным комплексом (по Майеру — *системой групп*) называется обратная последовательность групп, в которой композиция двух последовательных гомоморфизмов тривиальна. Построения на цепных комплексах, приводящие к их группам гомологий, подсказываются результатами главы III. Для получающихся групп доказываются аналоги аксиом главы I. Таким образом получается «теория гомологий» цепных комплексов.

Коцепные комплексы определяются аналогично. Однако они лишь по форме отличаются от цепных комплексов.

В этой же главе рассмотрены два метода построения новых групп из данных: тензорное произведение $C \otimes G$ групп C и G и группа гомоморфизмов $\mathrm{Hom}\,(C, G)$ группы C в группу G.

С помощью этих операций определяются группы гомологий и когомологий над произвольной группой коэффициентов. Именно, по любому цепному комплексу и любой группе коэффициентов G мы строим новый цепной и новый коцепной комплексы. Группы гомологий этих комплексов и являются группами гомологий и когомологий данного цепного комплекса над группой G.

2. Цепные комплексы

Определение 2.1. *Цепным комплексом* называется обратная последовательность $K = \{C_q(K), \partial_q\}$ групп и гомоморфизмов $\partial_q\colon C_q(K) \to C_{q-1}(K)$, для которой $\partial_{q-1}\partial_q = 0$ при любом целом q. Группа $C_q(K)$ называется группой *q-мерных цепей* комплекса K, а гомоморфизм ∂_q — *граничным* гомоморфизмом. *Отображением*

$f\colon K \to K'$ одного цепного комплекса в другой называется (как и в пункте 2 главы I) последовательность таких гомоморфизмов $f_q\colon C_q(K) \to C_q(K')$, определенных для любого целого числа q, что $f_{q-1}\partial_q = \partial'_q f_q$.

Определение 2.2. Пусть $K = \{C_q(K), \partial_q\}$ — произвольный цепной комплекс. Ядро $Z_q(K)$ гомоморфизма ∂_q называется группой *q-мерных циклов* комплекса K. Образ $B_q(K)$ гомоморфизма ∂_{q+1} называется группой *q-мерных границ* комплекса K. Так как $\partial_q\partial_{q+1} = 0$, то группа $B_q(K)$ является подгруппой группы $Z_q(K)$. Фактор-группа $H_q(K) = Z_q(K)/B_q(K)$ называется *q-мерной группой гомологий* комплекса K. Для любого отображения $f\colon K \to K'$ гомоморфизм f_q отображает группу $Z_q(K)$ в группу $Z_q(K')$, группу $B_q(K)$ в группу $B_q(K')$ и, следовательно, индуцирует некоторый гомоморфизм $f_*\colon H_q(K) \to H_q(K')$.

Следующая теорема является непосредственным следствием определений.

Теорема 2.3. *Для тождественного отображения $f\colon K \to K$ отображение f_* также является тождественным отображением. Если $f\colon K \to K'$ и $g\colon K' \to K''$, то $(gf)_* = g_*f_*$.*

Цепные комплексы K и их отображения f составляют категорию, которую мы будем обозначать через $\partial\mathfrak{G}_R$ или через $\partial\mathfrak{G}_C$ в соответствии с тем, принадлежат ли группы $C_q(K)$ категории $\mathfrak{G}_R$ или категории $\mathfrak{G}_C$. Теорема 2.3 означает с этой точки зрения, что пара $H_q(K)$, f_* является ковариантным функтором, определенным в категории $\partial\mathfrak{G}_R$ (или в $\partial\mathfrak{G}_C$) и принимающим значения в категории $\mathfrak{G}_R$ (соответственно в категории $\mathfrak{G}_C$).

Коцепные комплексы $K = \{C^q(K), \delta^q\}$ отличаются от цепных лишь тем, что $\delta^q\colon C^q(K) \to C^{q+1}(K)$, и, кроме того, тем, что индекс, указывающий размерность, пишется сверху. Следовательно, «прием перемены знака» (глава IV, пункт 8) превращает цепной комплекс в коцепной, и наоборот. Таким образом, теория коцепных комплексов лишь по форме отличается от теории цепных комплексов. Для коцепных комплексов принято гомоморфизм δ^q называть *кограничным оператором*, группу $Z^q(K)$ — группой *q-мерных коциклов*, группу $H^q(K)$ — *q-мерной группой когомологий* и т. д. Пара $H^q(K)$, f^* является ковариантным функтором из категории $\delta\mathfrak{G}_R$ (или $\delta\mathfrak{G}_C$) коцепных комплексов в категорию $\mathfrak{G}_R$ (или соответственно $\mathfrak{G}_C$).

3. Отмеченные пары

В этом пункте мы превратим категорию цепных комплексов в c-категорию (пункт 8 главы IV) и определим пару $H_q(K)$, f_* как ковариантный ∂-функтор.

Начнем со следующего замечания: для любого цепного комплекса K и произвольной его подпоследовательности L (в смысле пункта 2 главы I) последовательности L и K/L также являются цепными комплексами. Эти комплексы называются соответственно *подкомплексом* и *фактор-комплексом* данного комплекса K. Соответствующее отображение вложения i: $L \to K$ и естественное отображение η: $K \to K/L$ порождают точную последовательность

(1) $$0 \to L \xrightarrow{i} K \xrightarrow{\eta} K/L \to 0.$$

Это замечание подсказывает следующее

Определение 3.1. Пусть L, K, M — некоторые цепные комплексы. Будем говорить, что отображения φ: $L \to K$, ψ: $K \to M$ образуют *отмеченную пару* (φ, ψ): $L \to K \to M$, если последовательность

(2) $$0 \to L \xrightarrow{\varphi} K \xrightarrow{\psi} M \to 0$$

точна, т. е. если отображение φ мономорфно, отображение ψ эпиморфно и $\operatorname{Ker} \psi = \operatorname{Im} \varphi$.

Если, кроме того, образ отображения φ является прямым слагаемым комплекса K (т. е. если группа $\varphi(C_q(L))$ является для всех q прямым слагаемым группы $C_q(K)$), то отмеченная пара (φ, ψ) называется *прямой*.

Очевидно, что рассматриваемые вместе с так определенными отмеченными парами категории $\partial\mathfrak{G}_R$ и $\partial\mathfrak{G}_C$ являются c-категориями. Другие c-категории можно получить, беря только прямые отмеченные пары. Эти c-категории нам понадобятся в пунктах 11 и 12.

В следующих леммах и определениях предполагается заданной точная последовательность (2).

Лемма 3.2. *Пусть* $\overline{Z}_q(M) = \psi^{-1}(Z_q(M))$, $\overline{B}_q(M) = \psi^{-1}(B_q(M))$ *и* $\overline{H}_q(M) = \overline{Z}_q(M)/\overline{B}_q(M)$. *Тогда*

$$\overline{Z}_q(M) = \partial^{-1}(\varphi C_{q-1}(L)), \quad \overline{B}_q(M) = B_q(K) \cup \varphi(C_q(L)).$$

Кроме того, отображение ψ *индуцирует изоморфизм*

$$\overline{\psi}\colon \overline{H}_q(M) \approx H_q(M).$$

Доказательство. Цепь $c \in C_q(K)$ тогда и только тогда принадлежит группе $\overline{Z}_q(M)$, когда $\psi c \in Z_q(M)$, т. е. когда $\partial\psi c = 0$. Это равносильно тому, что $\psi\partial c = 0$, т. е., поскольку $\operatorname{Ker} \psi = \operatorname{Im} \varphi$, тому, что $\partial c \in \varphi(C_{q-1}(L))$.

Пусть $c \in \overline{B}_q(M)$. Тогда $\psi c \in B_q(M)$, т. е. $\psi c = \partial b$ для некоторого элемента $b \in C_{q+1}(M)$. Пусть $d \in C_{q+1}(K)$ — такой элемент, что $\psi d = b$. Тогда $\psi(c - \partial d) = \psi c - \partial\psi d = \psi c - \partial b = 0$, и, следовательно, существует такой элемент $e \in C_q(L)$, что $\varphi e = c - \partial d$. Таким образом, $c = \partial d + \varphi e$, и поэтому $c \in B_q(K) \cup \varphi(C_q(L))$. Обратно, если $c = \partial d - \varphi e$, то $\psi c = \psi\partial d + \psi\varphi e = \partial\psi d$ и $\psi c \in B_q(M)$. Таким образом, $c \in \overline{B}_q(M)$.

Последнее утверждение леммы 3.2 непосредственно следует из теоремы Нётер об изоморфизмах.

Лемма 3.3. *Граничный гомоморфизм цепного комплекса K определяет гомоморфизмы*

$$\bar{Z}_q(M) \to \varphi[Z_{q-1}(L)],$$
$$\bar{B}_q(M) \to \varphi[B_{q-1}(L)].$$

Так как ядро гомоморфизма φ тривиально, то определено отображение $\varphi^{-1}\partial$, которое определяет гомоморфизмы

$$\bar{Z}_q(M) \to Z_{q-1}(L), \qquad \bar{B}_q(M) \to B_{q-1}(L)$$

и, следовательно, индуцирует некоторый гомоморфизм

$$\Delta\colon \bar{H}_q(M) \to H_{q-1}(L).$$

Доказательство. Пусть $c \in \bar{Z}_q(M)$. Согласно определению 3.1 существует такой элемент $d \in C_{q-1}(L)$, что $\partial c = \varphi d$. Имеем $\varphi\partial d = \partial\varphi d = \partial\partial c = 0$ и поэтому $\partial d = 0$. Следовательно, $d \in Z_{q-1}(L)$ и $\partial c \in \varphi\,[Z_{q-1}(L)]$. Если $c \in \bar{B}_q(M)$, то согласно лемме 3.2 существуют такие элементы $d \in C_{q+1}(K)$ и $e \in C_q(L)$, что $c = \partial + \varphi e$. Следовательно, $\partial c = \partial\partial d + \varphi\partial e$ и $\partial c \in \varphi B_{q-1}(L)$.

Определение 3.4. Гомоморфизм

$$\partial_*\colon H_q(M) \to H_{q-1}(L),$$

определенный формулой $\partial_* = \Delta\bar{\psi}^{-1}$, называется *граничным гомоморфизмом* отмеченной пары $(\varphi, \psi)\colon L \to K \to M$.

Полезно иметь прямое описание гомоморфизма ∂_*. Пусть $h \in H_q(M)$. Выберем элемент $z \in Z_q(M)$, принадлежащий классу гомологий h, и элемент $c \in C_q(K)$, для которого $\psi c = z$. Тогда элемент ∂c принадлежит образу отображения φ и элемент $\varphi^{-1}\partial c \in Z_{q-1}(L)$ является циклом, принадлежащим классу гомологий $\partial_* h$. Это утверждение является непосредственным аналогом теоремы III.7.5.

Звездочка в символе ∂_* поставлена для того, чтобы отличить это отображение от граничного оператора цепного комплекса. В дальнейшем мы все же будем ее, как правило, опускать.

Теорема 3.5. *Система $H = \{H_q(K), f_*, \partial_*\}$ является ковариантным ∂-функтором, определенным на с-категории $\partial\mathfrak{G}_R$ (на категории $\partial\mathfrak{G}_C$) цепных комплексов и принимающим значения в категории $\mathfrak{G}_R$ (соответственно в категории $\mathfrak{G}_C$).*

Аксиомы 1 и 2 пункта 8 главы IV содержатся в теореме 2.3. Аксиомы 3 и 4 соответствуют нижеследующим теоремам 3.6 и 3.7.

Теорема 3.6. *Для любого отображения $(g, f, h)\colon (\varphi, \psi) \to (\varphi', \psi')$ отмеченной пары $(\varphi, \psi)\colon L \to K \to M$ в отмеченную пару $(\varphi', \psi')\colon L' \to K' \to M'$ диаграмма*

$$\begin{tikzcd} H_q(M) \arrow[r, "\partial_*"] \arrow[d, "h_*"] & H_{q-1}(L) \arrow[d, "g_*"] \\ H_q(M') \arrow[r, "\partial_*"] & H_{q-1}(L') \end{tikzcd}$$

коммутативна.

Доказательство. Теорема следует из коммутативности диаграммы

$$\begin{array}{ccccc} H_q(M) & \xleftarrow{\bar\psi} & \bar{H}_q(M) & \xrightarrow{\Delta} & H_{q-1}(L) \\ \downarrow h_* & & \downarrow \bar{f}_* & & \downarrow g_* \\ H_q(M') & \xleftarrow{\bar\psi} & \bar{H}_q(M') & \xrightarrow{\Delta} & H_{q-1}(L'), \end{array}$$

в которой отображение $\bar{f}_*$ индуцировано отображением f. Коммутативность же этой диаграммы непосредственно вытекает из определений отображений ψ и Δ.

Теорема 3.7. *Для любой отмеченной пары* (φ, ψ): $L \to K \to M$ *последовательность*

$$\ldots \leftarrow H_{q-1}(L) \xleftarrow{\partial_*} H_q(M) \xleftarrow{\psi_*} H_q(K) \xleftarrow{\varphi_*} H_q(L) \leftarrow \ldots$$

точна.

Доказательство. Согласно определению точности последовательности мы должны доказать три утверждения:

(1) $\operatorname{Ker} \psi_* = \operatorname{Im} \varphi_*$,

(2) $\operatorname{Ker} \partial_* = \operatorname{Im} \psi_*$,

(3) $\operatorname{Ker} \varphi_* = \operatorname{Im} \partial_*$.

Пусть $h \in H_q(L)$ и пусть $z \in Z_q(L)$ — произвольный цикл класса гомологий h. Тогда $\psi\varphi z = 0$, и поэтому $\psi_*\varphi_* h = 0$. Следовательно, $\operatorname{Im} \varphi_* \subset \operatorname{Ker} \psi_*$. Пусть теперь $h \in H_q(K)$ и $\psi_* h = 0$. Тогда $\psi z \in B_q(M)$ для любого цикла $z \in Z_q(K)$ класса h, т. е. $\psi z = \partial c$, где $c \in C_{q+1}(M)$. Пусть $b \in C_{q+1}(K)$ — такой элемент, что $\psi b = c$. Тогда $\psi(z - \partial b) = \psi z - \partial\psi b = \partial c - \partial c = 0$, и поэтому существует такой элемент $a \in C_q(L)$, что $\varphi a = z - \partial b$. Так как $\varphi\partial a = \partial\varphi a = \partial z - \partial\partial b = 0$, то $\partial a = 0$ и $a \in Z_q(L)$. Пусть $h' \in H_q(L)$ — класс гомологий, содержащий цикл a. Тогда $\varphi_* h = h'$ потому, что элементы φa и z лежат в одном классе гомологий.

Для доказательства утверждения (2) рассмотрим произвольный элемент $h \in H_q(K)$ и произвольный цикл $z \in Z_q(K)$, принадлежащий классу гомологий h. Тогда элемент ψz принадлежит классу $\psi_* h \in H_q(M)$. Так как $\partial z = 0$, то из определения отображения ∂_* следует, что $\partial_*\psi_* h = 0$. Таким образом, $\operatorname{Im} \psi_* \subset \operatorname{Ker} \partial_*$. Пусть теперь $h \in H_q(M)$ и $\partial_* h = 0$. Пусть, далее, $z \in Z_q(M)$ — произвольный цикл класса h и $c \in C_q(K)$ — такой элемент, что $\psi c = z$. Тогда элемент $\varphi^{-1}\partial c$ принадлежит группе $Z_{q-1}(L)$ и содержится в классе гомологий $\partial_* h$. Так как $\partial_* h = 0$, то существует такой элемент $b \in C_q(L)$, что $\partial b = \varphi^{-1}\partial c$, т. е. $\varphi\partial b = \partial c$. Следовательно, $\partial(c - \varphi b) = \partial c - \varphi\partial b = 0$, так что $c - \varphi b \in Z_q(K)$ и $\psi(c - \varphi b) = \psi c = z$. Следовательно, $\psi_* h' = h$, где $h' \in H_q(K)$ — класс гомологий цикла $c - \varphi b$.

Для доказательства утверждения (3) рассмотрим произвольный элемент $h \in H_q(M)$ и произвольный цикл $z \in Z_q(M)$, принадлежащий классу гомологий h. Выберем такой элемент $c \in C_q(K)$, что $\psi c = z$. Тогда существует такой элемент $b \in Z_{q-1}(L)$, что $\varphi b = \partial c$. Элемент b принадлежит классу гомологий $\partial_* h \in H_{q-1}(L)$. Так как $\varphi b \in B_{q-1}(K)$, то $\varphi_* \partial_* h = 0$. Следовательно, $\operatorname{Im} \partial_* \in \operatorname{Ker} \varphi_*$. Пусть теперь $h \in H_q(L)$, $\varphi_* h = 0$ и $z \in Z_q(L)$ — произвольный цикл класса h. Тогда $\varphi z \in B_q(K)$, т. е. $\varphi z = \delta c$ для некоторого элемента $c \in C_{q+1}(K)$. Следовательно, $\partial \psi c = \psi \partial c = \psi \varphi z = 0$, т. е. $\psi c \in Z_{q+1}(M)$. Пусть $h' \in H_{q+1}(M)$ — класс гомологий цикла ψc. Тогда $\partial_* h' = h$. Тем самым теорема 3.7 полностью доказана.

Соответствующие определения и теоремы для коцепных комплексов совершенно аналогичны и получаются приемом изменения знака. Аналогом теоремы 3.5 является

Теорема 3.5с. *Система $H = \{H^q(K), f_*, \partial^*\}$ является ковариантным δ-функтором, определенным на с-категории $\partial\mathfrak{G}_R$ (на категории $\partial\mathfrak{G}_C$) коцепных комплексов и принимающим значения в категории $\mathfrak{G}_R$ (соответственно в категории $\mathfrak{G}_C$).*

Возращаясь к замечанию, сделанному в начале этого пункта, подчеркнем, что всякий раз, когда это возможно, мы будем, используя операции взятия фактор-комплекса и подкомплекса, систематически переходить от пар к одиночным объектам. В частности, вместо пары (K, L), где L — подкомплекс комплекса K, мы будем рассматривать точную последовательность $0 \to L \to K \to K/L = 0$. Аналогично вместо тройки (K, L, N) мы будем рассматривать точную последовательность $0 \to L/N \to K/N \to K/L \to 0$ и т. д.

4. Гомотопии, вырезания, точки

В этом пункте мы определим гомотопии, вырезания и точки в c-категориях $\partial\mathfrak{G}_R$ и $\partial\mathfrak{G}_C$, тем самым превратив их в h-категории. Функтор $H = \{H_q(K), f_*, \partial_*\}$ окажется тогда некоторой теорией гомологий. Излагаемые здесь определения «гомотопии», «вырезания» и «точки» оправдываются их применениями в следующих двух главах.

Определение 4.1. Пусть K и K' — произвольные цепные комплексы и f, g — два отображения комплекса K в комплекс K'. *Цепной гомотопией D, связывающей отображения f и g* (обозначение: D: $f \simeq g$), называется такая последовательность гомоморфизмов

$$D_q: \; C_q(K) \to C_{q+1}(K'),$$

что

$$\partial_{q+1} D_q + D_{q-1} \partial_q = g_q - f_q$$

для любого q. Если гомотопия D существует, то отображения f и g называются (*цепно*) *гомотопными*. В этом случае мы будем писать $f \simeq g$. Цепь $D_q c$, где $c \in C_q(K)$, будем называть *деформационной цепью* цепи c.

Лемма 4.2. *Отношение $f \simeq g$ рефлексивно, симметрично и транзитивно.*

Доказательство. Если $D = 0$, то D: $f \simeq f$. Если D: $f \simeq g$, то $-D$: $g \simeq f$. Если D: $f \simeq g$ и D': $g \simeq h$, то $D + D'$: $f \simeq h$.

Лемма 4.3. *Если f, g: $K \to L$, f', g': $L \to M$, $f \simeq g$ и $f' \simeq g'$, то $f'f \simeq g'g$.*

Доказательство. Пусть D: $f \simeq g$ и D': $f' \simeq g'$. Определим гомотопию D''_q: $C_q(K) \to C_{q+1}(M)$, положив $D''_q = f'_{q+1} D_q + D'_q g_q$. Тогда, как легко видеть, D'': $f'f \simeq g'g$.

Теорема 4.4. *Гомоморфизмы*

$$f_*, g_*: H_q(K) \to H_q(K'),$$

индуцированные цепно гомотопными отображениями f, g: $K \to K'$, совпадают: $f_* = g_*$.

Доказательство. Пусть D: $f \simeq g$ и $z \in Z_q(K)$. Тогда $\partial Dz = gz - fz$. Таким образом, $gz - fz \in B_q(K)$ и, следовательно, $f_* = g_*$.

Определение 4.5. Отображение f: $K \to L$ называется *вырезанием*, если оно изоморфно отображает комплекс K на комплекс L.

Теорема 4.6. *Для любого вырезания f: $K \to L$ отображение f_* является изоморфизмом группы $H_q(K)$ на группу $H_q(L)$.*

Доказательство этой «аксиомы вырезания» тривиально.

Определение 4.7. Цепной комплекс $K = \{C_q(K), \partial\}$ называется *подобным точке*, если отображение ∂_q: $C_q(K) \to C_{q-1}(K)$ является изоморфизмом для четных положительных и нечетных отрицательных q.

Теорема 4.8. *Если комплекс K подобен точке, то $H_q(K) = 0$ для $q \neq 0$ и $H_0(K) = C_0(K)$.*

Доказательство. Пусть q четно и положительно. Так как ∂_q: $C_q(K) \approx C_{q-1}(K)$, то $Z_q(K) = 0$ и $B_{q-1}(K) = C_{q-1}(K)$. Следовательно, $H_q(K) = 0$ и $H_{q-1}(K) = 0$. Аналогично $H_q(K) = 0$, $H_{q-1}(K) = 0$ для нечетного отрицательного q. Так как $\partial_1\partial_2 = 0$, $\partial_{-1}\partial_0 = 0$ и отображения ∂_2, ∂_{-1} являются изоморфизмами, то $\partial_1 = 0$, $\partial_0 = 0$. Следовательно, $Z_0(K) = C_0(K)$ и $B_0(K) = 0$. Таким образом, $H_0(K) = C_0(K)$.

Из теорем 4.4, 4.6, 4.8 и 3.5 вытекает

Теорема 4.9. *Система $H = \{H_q(K), f_*, \partial_*\}$ является теорией гомологий на h-категории $\partial\mathfrak{G}_R$ (на h-категории $\partial\mathfrak{G}_C$) со значениями в категории $\mathfrak{G}_R$ (соответственно в категории $\mathfrak{G}_C$).*

Нужно иметь в виду, что на самом деле категория $\partial\mathfrak{G}_R$ (соответственно $\partial\mathfrak{G}_C$) представляет собой две категории: одну, в которой отмечены все пары, а другую, в которой отмечены только прямые пары. Теорема 4.9 справедлива при любом понимании категории $\partial\mathfrak{G}_R$ (соответственно $\partial\mathfrak{G}_C$).

В h-категории $\partial\mathfrak{G}_R$ (соответственно $\partial\mathfrak{G}_C$) определены согласно IV.9.2 понятия гомотопической эквивалентности и обобщенного вырезания. Так как каждое вырезание в категории $\partial\mathfrak{G}_R$ (соответственно $\partial\mathfrak{G}_C$) является также гомотопической эквивалентностью и так как композиция гомотопических эквивалентностей согласно лемме 4.3 снова является гомотопической эквивалентностью, то на категории $\partial\mathfrak{G}_R$ (соответственно $\partial\mathfrak{G}_C$) гомотопические эквивалентности и обобщенные вырезания совпадают.

Определения гомотопий, вырезаний и точек на c-категориях $\delta\mathfrak{G}_R$, $\delta\mathfrak{G}_C$ коцепных комплексов совершенно аналогичны и получаются приемом изменения знака. Получающиеся для коцепных комплексов результаты можно объединить в следующей теореме.

Теорема 4.9c. *Система $H = \{H^q(K), f_*, \delta^*\}$ является ковариантным δ-функтором, определенным на категории $\delta\mathfrak{G}_R$ (на категории $\delta\mathfrak{G}_C$) коцепных комплексов и удовлетворяющим аксиомам гомотопии, вырезания и размерности.*

5. Прямые суммы и произведения

В этом пункте рассматриваются определения и основные свойства прямого произведения пространств, а также прямых сумм и произведений групп.

Определение 5.1. Пусть $\{X_\alpha\}$ — семейство множеств, снабженных индексами из некоторого множества M. Таким образом, каждому элементу $\alpha \in M$ отнесено некоторое множество X_α данного семейства. *Произведением*

$$(1)\qquad \prod_{\alpha \in M} X_\alpha$$

множеств этого семейства называется совокупность всех таких функций $x = \{x_\alpha\}$, определенных на множестве M, что для любого индекса $\alpha \in M$ элемент x_α (значение функции x на элементе α) принадлежит множеству X_α. Элемент x_α называется α-координатой элемента x. Для каждого $\beta \in M$ формула

$$p_\beta(x) = x_\beta$$

определяет некоторое отображение

$$(2)\qquad p_\beta\colon \prod_{\alpha \in M} X_\alpha \to X_\beta,$$

называемое *проекцией*. В случае, когда все множества X_α совпадают с одним и тем же множеством X, произведение (1) обозначается через X^M и является не чем иным, как множеством всех функций, определенных на M и принимающих значения в X.

Определение 5.2. Если каждое множество X_α является топологическим пространством, то в произведении (1) следующим образом вводится некоторая топология. Конечное число пространств X_α заменяется их открытыми подмножествами $U_\alpha \subset X_\alpha$ и произведение полученного семейства множеств, являющееся подмножеством произведения (1), называется *прямоугольным открытым множеством* произведения (1). Объединения прямоугольных открытых множеств называются *открытыми множествами произведения.* Произведение с топологией, задаваемой этими открытыми множествами, называется *прямым произведением* данных топологических пространств. Очевидно, что проекции (2) являются в этой топологии непрерывными отображениями.

Лемма 5.3. *Функция*

$$f\colon Y \to \prod_{\alpha \in M} X_\alpha,$$

определенная на некотором пространстве Y и принимающая значения в прямом произведении, непрерывна тогда и только тогда, когда для каждого индекса $\alpha \in M$ функция

$$p_\alpha f\colon Y \to X_\alpha$$

непрерывна.

Доказательство предоставляется читателю в качестве упражнения.

Следующий классический результат принадлежит Тихонову. Доказательство его см., например, в книге Лефшеца (Algebraic Topology, Colloq. Pub. Amer. Math. Soc., 1942, стр. 19)[1]).

Теорема 5.4. *Прямое произведение компактных пространств компактно.*

Напомним, что термин «компактное пространство» употребляется здесь для обозначения хаусдорфовых пространств, в которых справедлива лемма Гейне—Бореля о покрытиях (см. пункт I. 1).

Определение 5.5. Если каждое множество X_α является абелевой группой, то в произведении (1) обычное правило сложения функций позволяет определить некоторое сложение

$$(x + x')_\alpha = x_\alpha + x'_\alpha, \tag{3}$$

относительно которого произведение (1) является абелевой группой. Эта группа называется *прямым произведением* групп $\{X_\alpha\}$. Если каждое множество X_α является компактной абелевой группой, то их произведение с топологией, определенной в 5.2, и только что определенной групповой операцией является *компактной абелевой группой.* Эта группа также называется *прямым произведением.*

[1]) Есть русский перевод (С. Лефшец, Алгебраическая топология, М., ИЛ, 1949). (*Прим. ред.*)

Пусть теперь каждое множество X_α является R-модулем над некоторым кольцом R. Определим в произведении (1) сложение по формуле (3) и умножение на скаляр по формуле

$$(rx)_\alpha = r \cdot x_\alpha. \tag{4}$$

Тогда произведение (1) будет R-модулем. Этот модуль также называют *прямым произведением.*

Во всех случаях проекции (2) являются гомоморфизмами.

Прямое произведение определено, таким образом, для любого семейства групп каждой из категорий $\mathfrak{G}_R$, $\mathfrak{G}_C$, причем произведение принадлежит той же категории. Для обозначения каждого из этих произведений употребляется один и тот же символ (1); точное значение этого символа каждый раз определяется характером сомножителей X_α.

В случае, когда все группы X_α, $\alpha \in M$ совпадают с одной и той же группой G, прямое произведение является не чем иным, как группой G^M всех функций, определенных на множестве M и принимающих значения в группе G.

Определение 5.6. Пусть $\{G_\alpha\}$ — произвольное семейство R-модулей. *Прямой суммой*

$$\sum_{\alpha \in M} G_\alpha$$

этих R-модулей называется подмодуль их прямого произведения $\Pi\, G_\alpha$, состоящий из всех элементов, у которых только конечное число координат отлично от нуля, т. е. $g_\alpha = 0 \in G_\alpha$ для всех, кроме, может быть, конечного числа индексов $\alpha \in M$. Для любого $\beta \in M$ формула

$$(i_\beta(g))_\alpha = \begin{cases} g, & \text{если } \alpha = \beta, \\ 0, & \text{если } \alpha \neq \beta, \end{cases}$$

определяет некоторое отображение

$$i_\beta\colon G_\beta \to \Sigma\, G_\alpha, \tag{5}$$

называемое *инъекцией*. Очевидно, что инъекция i_β является изоморфным отображением группы G_β на некоторую подгруппу прямой суммы $\Sigma\, G_\alpha$.

В случае, когда множество M конечно, прямая сумма и прямое произведение совпадают.

В случае, когда каждая группа G_α компактна, прямая сумма $\Sigma\, G_\alpha$ как подмножество прямого произведения $\Pi\, G_\alpha$ обладает топологией, относительно которой она является топологической группой, а инъекции i_β — непрерывными отображениями. Однако прямая сумма $\Sigma\, G_\alpha$ не замкнута в прямом произведении (более того, она всюду плотна) и, следовательно, не компактна. Поэтому к компактным группам операция прямого суммирования, как правило, не применяется.

Определение 5.7. *Проективным представлением* группы G в виде прямой суммы называется семейство групп $\{G_\alpha\}$ (с некоторым множеством индексов M), рассматриваемое вместе с такими заданными для каждого α эпиморфизмами η_α группы G на группу G_α, что гомоморфизм $\eta\colon G \to \Pi G_\alpha$, определенный формулой $(\eta g)_\alpha = \eta_\alpha g$, является изоморфизмом. Если, кроме того, каждая группа G_α является фактор-группой группы G по некоторой ее подгруппе, а гомоморфизмы η_α — естественными отображениями, то говорят, что группа G *разложена* в прямое произведение фактор-групп $\{G_\alpha\}$.

Определение 5.8. *Инъективным представлением* некоторого R-модуля G в виде прямой суммы называется семейство R-модулей $\{G_\alpha\}$ (с некоторым множеством индексов M), рассматриваемое вместе с такими определенными для каждого α гомоморфизмами ξ_α модуля G_α в модуль G, что гомоморфизм $\xi\colon \Sigma G_\alpha \to G$, получающийся при отнесении каждому элементу группы ΣG_α суммы $\Sigma \xi_\alpha g_\alpha$ образов в группе G, его отличных от нуля координат, является изоморфизмом. Если, кроме того, каждый модуль G_α является подгруппой модуля G, а отображения ξ_α — вложениями, то говорят, что группа G *разложена* в прямую сумму подгрупп $\{G_\alpha\}$. Это имеет место тогда и только тогда, когда каждый элемент $g \in G$ однозначно выражается в виде

$$g = g_{\alpha_1} + \ldots + g_{\alpha_m}, \qquad g_{\alpha_i} \in G_{\alpha_i},$$

где $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ — различные элементы множества M [1]).

Пусть $\{G_\alpha\}$ — произвольное семейство групп. Очевидно, что произведение ΠG_α и сумма ΣG_α представляются в виде прямых произведения и суммы групп $\{G_\alpha\}$ с помощью отображений $\{p_\alpha\}$ и $\{i_\alpha\}$ соответственно.

6. Свободные модули и их фактор-группы

Определение 6.1. Подмножество X некоторого R-модуля G называется *линейно независимым*, если для любых различных элементов $x_1, \ldots, x_n$ множества X из соотношения $r_1x_1 + \ldots + r_nx_n = 0$, $r_i \in R$ следует, что $r_1 = \ldots = r_n = 0$. Говорят, что множество X *порождает* модуль G, если множество X не содержится ни в одном собственном подмодуле модуля G. Если множество X линейно независимо и порождает модуль G, то оно называется *базой* модуля G, а сам модуль G называется *свободным*. В этом случае

[1]) Элементы g_{α_i} предполагаются отличными от нуля. (*Прим. ред.*)

каждый элемент $g \in G$ однозначно[1]) выражается в виде $g = r_1x_1 + \ldots$ $\ldots + r_nx_n$, где $r_i \in R$, $x_i \in X$, причем все элементы $x_1, \ldots, x_n$ различны.

Пусть X — база модуля G. Очевидно, что любое отображение φ: $X \to G'$ множества X в произвольный R-модуль G' можно единственным образом продолжить до некоторого гомоморфизма φ: $G \to G'$.

Как известно, если $R = F$, где F — некоторое поле, то любой R-модуль (т. е. линейное пространство над полем F) является свободным модулем.

Лемма 6.2. *Пусть φ: $G \to G'$ — произвольный эпиморфизм R-модулей. Тогда для любого гомоморфного отображения ψ: $H \to G'$ некоторого свободного модуля H в модуль G' существует такой гомоморфизм θ: $H \to G$, что $\varphi\theta = \psi$.*

Доказательство. Пусть X — база модуля H. Для каждого элемента $x \in X$ выберем такой элемент $\theta(x) \in G$, что $\varphi\theta(x) = \psi(x)$. Это возможно, так как отображение φ эпиморфно. Отображение θ: $X \to G$ продолжим затем до гомоморфизма θ: $H \to G$. Очевидно, что $\varphi\theta = \psi$.

Лемма 6.3. *Если для подмодуля H модуля G фактор-модуль G/H свободен, то подмодуль H является прямым слагаемым модуля G.*

Доказательство. Рассмотрим естественный гомоморфизм η: $G \to G/H$ и тождественное отображение i: $G/H \to G/H$. Согласно лемме 6.2 существует такой гомоморфизм θ: $G/H \to G$, что $\eta\theta = i$. Из этого соотношения следует, что группа G разлагается в прямую сумму образа отображения θ и ядра отображения η — подмодуля H. Так как каждое линейное пространство свободно, то отсюда вытекает

Следствие 6.4. *Любое подпространство линейного пространства является его прямым слагаемым.*

Определение 6.5. Пусть X — произвольное множество, и R_X — множество всех функций f: $X \to R$, отличных от нуля только для конечного числа элементов $x \in X$. Определим в множестве R_X сложение и умножение (на элементы кольца R), положив

$$(f_1 + f_2)\,x = f_1x + f_2\,x, \qquad (rf)\,x = r(fx).$$

Относительно этих операций множество R_X является R-модулем. Как это принято, отождествим каждый элемент $x \in X$ с функцией, равной единице на элементе x и нулю на всех других элементах. Тогда функция f, имеющая отличные от нуля значения $r_1, \ldots, r_n$ на элементах $x_1, \ldots, x_n$ соответственно и равная нулю на всех других элементах, имеет вид $f = \sum_{i=1}^{n} r_i x_i$. Отсюда следует, что множество R_X является свободным R-модулем с базой X. Он называется *свободным R-модулем, порожденным множеством X.*

[1]) С точностью до слагаемых вида $0x$, где $0 \in R$, $x \in X$. *(Прим. ред.)*

Пусть X' — подмножество множества X. Тогда отображение вложения $X' \subset X$ однозначно распространяется до изоморфизма модуля $R_{X'}$ с некоторым подмодулем модуля R_X. Если множество X является объединением $\cup X_\alpha$ непересекающихся множеств, то отображения вложения $X_\alpha \subset X$ индуцируют инъективное представление модуля R_X в виде прямой суммы $R_X \approx \sum_\alpha R_{X_\alpha}$.

Определение 6.6. Пусть G — произвольный R-модуль и $X \subset G$ — некоторое множество, порождающее модуль G. Тогда отображение вложения $X \to G$ можно распространить до некоторого эпиморфизма θ: $R_X \to G$. Пусть Y — любое множество, порождающее ядро отображения θ. Тогда говорят, что модуль G *задается системой образующих X и системой соотношений Y*. Каждый элемент множества Y можно записать в виде формальной конечной линейной комбинации элементов множества X с коэффициентами из кольца R. Эта линейная комбинация, рассматриваемая как элемент модуля G, равна нулю.

Лемма 6.7. *Пусть R-модуль G задан системой образующих X и системой соотношений Y, а R-модуль G' — системой образующих X' и системой соотношений Y'. Оказывается, что отображение f: $X \to X'$ тогда и только тогда можно распространить до некоторого гомоморфизма φ: $G \to G'$, когда для каждого элемента $r_1x_1 + \ldots + r_nx_n \in Y$, $r_i \in R$, $x_i \in X$ соответствующий элемент $r_1 f(x_1) + \ldots + r_nf(x_n) \in R_{X'}$ является линейной комбинацией элементов множества Y'. Если продолжение φ отображения f существует, то оно определено однозначно.*

Доказательство. Пусть ψ: $R_X \to R_{X'}$ — продолжение отображения f, а N и N' — ядра естественных отображений $R_X \to G$, $R_{X'} \to G'$. Так как множества Y и Y' порождают соответственно ядра N и N', то условия леммы равносильны тому, что $\psi(N) \subset N'$. Из этого включения следует, что гомоморфизм ψ индуцирует некоторый гомоморфизм φ: $G \to G'$, являющийся, очевидно, продолжением отображения f.

Лемма 6.8. *Пусть кольцо R является кольцом главных идеалов (т. е. областью целостности, в которой каждый идеал имеет вид Rr, $r \in R$). Тогда любой подмодуль свободного R-модуля является свободным R-модулем.*

Доказательство. Пусть G — свободный R-модуль, X — его база и H — некоторый подмодуль модуля G. Допуская аксиому выбора, мы можем считать, что элементы множества X вполне упорядочены: $x_1, x_2, \ldots, x_\alpha, \ldots$ Для любого индекса α (являющегося, вообще говоря, трансфинитным числом) обозначим через A_α подмодуль, состоящий из всех элементов модуля H, являющихся линейными комбинациями элементов x_β, $\beta \leqslant \alpha$, а через B_α — подмодуль, состоящий из всех элементов модуля H, являющихся линейными комбинациями элементов x_β, $\beta < \alpha$. Каждый элемент $a \in A_\alpha$

имеет, очевидно, вид $a = b + rx_\alpha$, где $b \in B_\alpha$. Коэффициент r линейно зависит от элемента a, т. е. отображение $a \to r$ является гомоморфизмом подмодуля A_α на некоторый идеал I_α кольца R. Из условий, наложенных на кольцо R, следует, что идеал I_α является свободным R-модулем. Поэтому согласно лемме 6.3 подмодуль A_α является прямой суммой подмодуля B_α и некоторого подмодуля C_α, изоморфного идеалу I_α. Покажем, что модуль H является прямой суммой подмодулей C_α. Если $\alpha < \beta$, то $C_\alpha \subset A_\alpha \subset B_\beta$ и, следовательно, $C_\alpha \cap C_\beta = 0$. С другой стороны, для любого элемента $a_0 \in H$ существует такой индекс α_0, что $a_0 \in A_{\alpha_0}$. Следовательно, $a_0 = a_1 + c_0$, где $c_0 \in C_{\alpha_0}$ и $a_1 \in B_{\alpha_0}$. Очевидно, что $a_1 \in A_{\alpha_1}$ для некоторого $\alpha_1 < \alpha_0$. Повторяя этот процесс, мы получаем такую последовательность индексов $\alpha_n < \alpha_{n-1} < \ldots < \alpha_0$ и такие элементы $c_i \in C_{\alpha_i}$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$, что $a_0 = a_{n+1} + c_n + \ldots + c_0$, где $a_{n-1} \in B_{\alpha_n}$. Так как каждая убывающая последовательность трансфинитных чисел конечна, то $a_{n+1} = 0$ для достаточно большого n. Таким образом, модуль H действительно является прямой суммой модулей C_α. Так как каждый модуль C_α свободен, то и модуль H свободен.

В случае, когда R — кольцо целых чисел, понятие R-модуля совпадает с понятием абелевой группы. Поэтому из леммы 6.8 вытекает.

Следствие 6.9. *Любая подгруппа свободной абелевой группы свободна.*

7. Группы с конечным числом образующих

В большинстве приложений теории гомологий рассматриваемые пространства считаются триангулируемыми, а за группу коэффициентов принимается группа целых чисел. В этом случае группы гомологий являются группами с конечным числом образующих. Строение таких групп полностью описывается числовыми инвариантами. Более того, имеется алгорифм, с помощью которого можно перейти от любого задания группы с помощью конечной системы образующих и соотношений к заданию, определяющему некоторое разложение данной группы в прямую сумму циклических групп; последнее разложение определит тогда и числовые инварианты группы. Этими обстоятельствами и определяется та колоссальная роль групп с конечным числом образующих, которую они имеют в приложениях теории гомологий.

В этом пункте вкратце рассматриваются основные факты теории групп с конечным числом образующих и излагаются их применения к теории цепных комплексов.

Напомним, что квадратная матрица $A = (a_{ij})$ с целочисленными элементами называется *унимодулярной*, если ее определитель равен ± 1. В этом случае матрица $A^{-1} = (\bar{a}_{ij})$, обратная матрице A, также является целочисленной унимодулярной матрицей. По отношению к обычному матричному умножению унимодулярные матрицы фиксированного порядка образуют группу.

Пусть F — свободная группа (т. е. свободный модуль в смысле определения 6.5 над кольцом целых чисел) с конечной базой $x_1, \ldots$ $\ldots, x_n$ и пусть (a_{ij}) — унимодулярная целочисленная матрица порядка n. Тогда элементы $y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j$ $(i = 1, \ldots, n)$ также образуют базу группы F. Действительно, во-первых, элементы $y_1, \ldots, y_n$ порождают группу F, так как $x_j = \Sigma\, \bar{a}_{ij}y_k$. Во-вторых, если $\sum_{i=1}^{n} c_iy_i = 0$, то $\sum_{i,j} c_ia_{ij}x_j = 0$ и, следовательно, $\sum_{i} c_ia_{ij} = 0$ для любого j, так как элементы $x_1, \ldots, x_n$ линейно независимы. Поэтому $0 = \sum_{i,j} c_ia_{ij}\bar{a}_{jk} = \Sigma\, c_i\delta_{ik} = c_k$. Таким образом, элементы $y_1, \ldots, y_n$ линейно независимы.

Пусть теперь F, F' — две свободные группы с конечными базами $x_1, \ldots, x_n$ и $x'_1, \ldots, x'_m$ соответственно и $f\colon F \to F'$ — произвольный гомоморфизм. Тогда для любого i имеем $f(x_i) = \sum_{j=1}^{m} b_{ij}x'_j$, где b_{ij} — целые числа. Ясно, что гомоморфизм f полностью определяется матрицей $B = (b_{ij})$. Обратно, любая $m \times n$-матрица B соответствует некоторому гомоморфизму. Если базы (x), (x') преобразованы в базы (y), (y') с помощью целочисленных унимодулярных матриц A и A' соответственно, то матрицей гомоморфизма f в базах (y), (y') является матрица ABA'^{-1}. Таким образом, гомоморфизму f соответствует некоторый класс эквивалентных целочисленных матриц. Имея это в виду, напомним классическую теорему о приведении целочисленных матриц к каноническому виду.

Теорема 7.1. *Для любой целочисленной $m \times n$-матрицы B существуют такие целочисленные унимодулярные матрицы A и A' порядков n и m соответственно, что матрица $C = ABA'^{-1}$ диагональна, ее диагональные элементы $d_1, d_2, \ldots$ неотрицательны и для любого $i = 1, \ldots, \min(m, n) - 1$ элемент d_i делит элемент d_{i+1}. Матрица C определяется матрицей B однозначно, т. е. эквивалентные диагональные матрицы, удовлетворяющие условиям теоремы, совпадают.*

Для гомоморфизма $f\colon F \to F'$ эта теорема устанавливает существование таких баз (y) и (y') групп F и F' соответственно, что

$$(1) \qquad f(y_i) = d_iy'_i \quad (i = 1, \ldots, \varrho).$$

Число ϱ является рангом матрицы B и равно числу отличных от нуля диагональных элементов матрицы C.

Рассмотрим, например, случай, когда отображение f является изоморфизмом. В этом случае $d_i = 1$ для всех i и $m = n$. Следовательно, матрица C унимодулярна. Поэтому унимодулярна и матрица $B = A^{-1}A'$. Таким образом, в произвольных базах (x), (x') любому изоморфизму соответствует унимодулярная матрица.

Применяя этот последний результат к случаю, когда $F = F'$, а отображение f является тождественным отображением, получаем, что любые две базы группы F связаны унимодулярной матрицей. Отсюда, в частности, следует, что все они состоят из одного и того же числа элементов. Это число совпадает с рангом группы F (определение ранга группы см. упражнения Н главы I).

Теорема 7.2. *Предположим, что группа G изоморфна фактор-группе свободной группы F' конечного ранга m по некоторой подгруппе, являющейся гомоморфным образом свободной группы F конечного ранга. Тогда группа G представляется в виде прямой суммы $r \leqslant m$ бесконечных циклических групп и $\tau \leqslant m-r$ конечных циклических групп порядков $\theta_1, \ldots, \theta_\tau$, где $\theta_i > 1$ и θ_i делит θ_{i+1} $(i = 1, \ldots, \tau-1)$. Числа r, $\theta_1, \ldots, \theta_\tau$ являются инвариантами группы G, т. е. если группа G разложена двумя способами в прямую сумму циклических групп, причем в обоих разложениях порядки конечных циклических групп последовательно делят друг друга, то числа r, $\theta_1, \ldots, \theta_\tau$ для обоих разложений совпадают.*

Доказательство. Согласно сказанному выше можно выбрать такие базы (y), (y') групп F, F' соответственно, что гомоморфизм $f\colon F \to F'$ будет записываться формулами (1). Пусть J'_i $(i = 1, \ldots, m)$ — подгруппа группы F', порожденная элементом y'_i, а J_i $(i = 1, \ldots, \varrho)$ — подгруппа, порожденная элементом $d_i y'$. Тогда группа F' разлагается в прямую сумму $\sum_{i=1}^{m} J'_i$, а образ гомоморфизма f — в прямую сумму $\sum_{i=1}^{\varrho} J_i$. Отсюда следует, что

$$G \approx \sum_{i=1}^{\varrho} \frac{J'_i}{J_i} + \sum_{i=\varrho+1}^{m} J'_i.$$

Это разложение обладает требуемыми свойствами; числами $\theta_1, \ldots, \theta_\tau$ являются те из чисел d_i, которые превосходят единицу.

Так как число r является рангом группы G, то его инвариантность очевидна. Пусть G' — подгруппа элементов конечного порядка группы G. Для любого целого числа n отображение $g \to ng$ является гомоморфным отображением $G' \to G'$. Пусть nG' — образ этого гомоморфизма, а $\varphi(n)$ — число элементов группы nG'. Предположим, что задано некоторое разложение группы G в прямую сумму описанного выше типа. Тогда, как легко видеть,

$$\varphi(n) = \frac{\theta_1}{(\theta_1, n)} \cdot \frac{\theta_2}{(\theta_2, n)} \cdots \frac{\theta_\tau}{(\theta_\tau, n)},$$

где (θ, n) — наибольший общий делитель чисел θ и n. Из того, что θ_i делит θ_{i+1}, следует, что для любого $\sigma = 1, \ldots, \tau$ равенство

$$\frac{\theta_1}{(\theta_1, n)} \cdots \frac{\theta_\sigma}{(\theta_\sigma, n)} = 1$$

имеет место для $n = \theta_\sigma$ и невозможно для любого положительного n, меньшего, чем θ_σ. Таким образом, θ_τ — наименьшее положительное значение числа n, удовлетворяющее соотношению $\varphi(n) = 1$, а θ_σ $(\sigma < \tau)$ — наименьшее положительное значение числа n, удовлетворяющее соотношению

$$\varphi(n) = \frac{\theta_{\sigma+1}}{(\theta_{\sigma+1}, n)} \cdots \frac{\theta_\tau}{(\theta_\tau, n)}.$$

Отсюда следует, что, зная функцию φ, мы можем последовательно определить все числа $\theta_\tau, \theta_{\tau-1}, \ldots, \theta_1$. Так как функция φ определена инвариантно, то, следовательно, числа θ_i также инвариантны. Теорема полностью доказана.

Теорема 7.3. *Утверждения предыдущей теоремы имеют место для любой группы G с конечным числом образующих.*

Пусть $x_1, \ldots, x_m$ — система образующих группы G и пусть F' — свободная группа, порожденная этими образующими (см. определение 6.5 для случая, когда R — кольцо целых чисел). Отображение вложения $\{x_i\} \subset G$ единственным образом распространяется до некоторого гомоморфизма h группы F' на группу G. Таким образом, группа G изоморфна фактор-группе F'/F, где F — ядро гомоморфизма h. Согласно следствию 6.9 группа F свободна. Так как ранг группы F не может превосходить ранга группы F', то, следовательно, группа F имеет *конечную* базу. Пусть f — отображение вложения $F \subset F'$. Мы видим, что группа G удовлетворяет условиям теоремы 7.2. Тем самым теорема 7.3 доказана.

Замечание. Анализ доказательства теоремы 7.3 обнаруживает, что оно содержит неконструктивные этапы. Так, например, доказательство того, что целые числа образуют кольцо главных идеалов (см. лемму 6.8), неконструктивно. Использование аксиомы выбора в доказательстве леммы 6.2 также имеет неконструктивную природу. Наоборот, доказательство теоремы 7.2 (включая приведение матрицы к диагональному виду) вполне конструктивно; разложение группы G может быть найдено конечным числом шагов, начиная с баз групп F, F' и матрицы отображения f. Применяя результаты этого пункта к конечным цепным комплексам, мы будем, как правило, пользоваться не теоремой 7.3, а теоремой 7.2, оставаясь, тем самым, в области эффективных построений.

8. Канонические базы конечных комплексов

Определение 8.1. Цепной комплекс K называется *конечным*, если для любого числа q группа $C_q(K)$ является свободной группой с конечным числом образующих. Тогда группа $H_q(K)$ также имеет конечное число образующих. Ранг R_q группы $H_q(K)$ называется q-мерным *числом Бетти* комплекса K. Инварианты $\theta_1^q, \ldots, \theta_{\tau_q}^q$ группы $H_q(K)$, описанные в теореме 7.2, называются *q-мерными коэффициентами кручения* комплекса K. Ранги групп $C_q(K)$ и $B_q(K)$ обозначаются через α_q и β_q.

Теорема 8.2. *Для любого конечного цепного комплекса K*

$$R_q = \alpha_q - \beta_q - \beta_{q-1}.$$

Кроме того, для каждого q существует база группы $C_q(K)$, состоящая из элементов пяти типов

$$\begin{aligned} &a_q^i, \; i = 1, \ldots, \beta_q - \tau_q, \\ &b_q^j, \; j = 1, \ldots, \tau_q, \\ &c_q^k, \; k = 1, \ldots, R_q, \\ &d_q^l, \; l = 1, \ldots, \tau_{q-1}, \\ &e_q^m, \; m = 1, \ldots, \beta_{q-1} - \tau_{q-1}, \end{aligned}$$

в которой гомоморфизм ∂_q задается формулами

$$\partial_q a_q^i = 0, \quad \partial_q b_q^j = 0, \quad \partial_q c_q^k = 0,$$
$$\partial_q d_q^l = \theta_l^{q-1} b_{q-1}^l, \quad \partial_q e_q^m = a_{q-1}^m.$$

Эти базы называются каноническими базами; граничный оператор имеет в них диагональный вид.

Доказательство. Так как группа $C_{q-1}(K)$ свободна, то согласно лемме 6.3 ядро отображения ∂_q — группа $Z_q(K)$ — является прямым слагаемым группы $C_q(K)$. Для каждого q выберем разложение группы $C_q(K)$ в прямую сумму $C_q(K) = Z_q(K) + W_q(K)$. Тогда отображение ∂_q будет определять некоторое гомоморфное отображение группы $W_q(K)$ в группу $Z_{q-1}(K)$. Так как обе эти группы являются свободными группами с конечным числом образующих, то (теорема 7.1) существуют их базы (y), (y'), в которых отображение ∂_q записывается формулами

$$\partial_q y_i = d_i y_i' \; (i = 1, \ldots, \beta_{q-1}).$$

Так как ядром отображения ∂_q является группа $Z_q(K)$, то ни один элемент d_i не равен нулю. Те элементы y_m, для которых $d_m = 1$, обозначим через e_q^m, соответствующие элементы y_m' — через a_{q-1}^m. Остальные элементы y обозначим через d_q^l, соответствующие элементы y' — через b_{q-1}^l. Остающиеся элементы y' обозначим через c_{q-1}^k. При таком выборе базисных элементов граничный оператор для каждого q имеет диагональный вид. Группа $H_q(K)$ разлагается в прямую сумму циклических групп, порожденных смежными классами базисных элементов b_q^j и c_q^k. Это разложение имеет вид, описанный в теореме 7.2. Следовательно, число образующих вида c_q^k равно R_q. Так как коэффициенты кручения инвариантны, то числа d_i, соответствующие элементам вида b_q, являются коэффициентами кручения группы $H_q(K)$. Для доказательства того, что найденные базы являются каноническими базами, остается определить числа базисных элементов каждого типа, т. е. области изменения соответствующих индексов. Для индексов j, k и l это уже сделано. С другой стороны, так как элементы a_q^i и $\theta_j^q b_q^j$ образуют базу группы $B_q(K)$ ранга β_q, то область изменения индекса i, следовательно и индекса m, совпадает с указанной в теореме. Наконец, формула для числа R_q вытекает из того, что число образующих всех пяти типов равно α_q.

С вычислительной точки зрения существенно, что канонические базы можно построить для любого конечного числа индексов q конечным числом шагов, исходя из произвольных баз групп цепей и целочисленных матриц, описывающих в этих базах граничные операторы. Это следует из того, что приведение к диагональному виду, описанное в теореме 7.1, является финитным процессом. Можно начинать с наименьшего числа q и привести оператор ∂_q к некоторой диагональной форме. Тем самым мы получим новую базу группы C_q, включающую некоторую базу группы Z_q и новую матрицу оператора ∂_{q+1}, на выходе которой будут теперь находиться лишь базисные элементы группы Z_q. Затем приведем к диагональному виду матрицу отображения ∂_{q+1}: $C_{q+1} \to Z_q$. В результате мы получим новую базу группы C_{q+1}, включающую базу группы Z_{q+1}, и новую матрицу оператора ∂_{q+2}: $C_{q+2} \to Z_{q+1}$. Этот процесс можно продолжать сколь угодно далеко.

Формулировка аналога определения 8.1 и доказательство аналога теоремы 8.2 для конечных коцепных комплексов предоставляется читателю.

9. Тензорное произведение

Определение[1]) 9.1. *Тензорным произведением* $C \otimes G$ двух R-модулей C и G называется R-модуль, порожденный множеством всех пар (c, g), $c \in C$, $g \in G$, связанных определяющими соотношениями

$$(1) \qquad \begin{cases} (c_1 + c_2, g) - (c_1, g) - (c_2, g) = 0, \\ (c, g_1 + g_2) - (c, g_1) - (c, g_2) = 0, \end{cases}$$

$$(2) \qquad (rc, g) - r(c, g) = 0, \quad (c, rg) - r(c, g) = 0.$$

[1]) Следует иметь в виду, что это определение целесообразно тогда, когда кольцо R коммутативно. Для некоммутативных R предпочтительнее определять тензорное произведение *левого* модуля C на *правый* модуль G. (*Прим. ред.*)

Согласно определению 6.5 модуль $C \otimes G$ строится следующим образом: пусть $R(C, G)$ — свободный R-модуль, порожденный всевозможными парами вида (c, g), и пусть $Y(C, G)$ — наименьший подмодуль модуля $R(C, G)$, содержащий все элементы вида

$$(c_1 + c_2, g) - (c_1, g) - (c_2, g), \quad (c, g_1 + g_2) - (c, g_1) - (c, g_2),$$
$$(rc, g) - r(c, g), \quad (c, rg) - r(c, g).$$

Тогда

$$C \otimes G = R(C, G)/Y(C, G).$$

Элемент модуля $C \otimes G$, являющийся образом образующей $(c, g) \in R(C, G)$, обозначается через $c \otimes g$. Эти элементы порождают модуль $C \otimes G$ и удовлетворяют следующим соотношениям:

$$(1') \qquad \begin{cases} (c_1 + c_2) \otimes g = c_1 \otimes g + c_2 \otimes g, \\ c \otimes (g_1 + g_2) = c \otimes g_1 + c \otimes g_2, \end{cases}$$

$$(2') \qquad (rc) \otimes g = r(c \otimes g) = c \otimes (rg).$$

Для любого элемента модуля G соответствие $c \to c \otimes g$ определяет некоторый гомоморфизм $C \to C \otimes G$. Аналогично для любого элемента c модуля C соответствие $g \to c \otimes g$ определяет некоторый гомоморфизм $G \to C \otimes G$. Действительно, из соотношений (1′) вытекает, что

$$(3) \qquad (\Sigma c_i) \otimes g = \Sigma (c_i \otimes g), \quad c \otimes \Sigma g_i = \Sigma (c \otimes g_i),$$

$$(4) \qquad 0 \otimes g = 0, \quad c \otimes 0 = 0.$$

Лемма 9.2. *Для любого R-модуля G отображение f: $R \otimes G \to G$, определенное формулой $f(r \otimes g) = rg$, является изоморфизмом. Аналогично $G \otimes R \approx G$. В дальнейшем мы будем модули $R \otimes G$ и $G \otimes R$ отождествлять (посредством этих изоморфизмов) с модулем G.*

Доказательство. Рассмотрим сначала отображение f': $R(R, G) \to G$, определенное формулой $f'(\tau, g) = \tau g$. Так как модуль $R(R, G)$ свободен и пары (τ, g) образуют его базу, то эта формула однозначно определяет гомоморфное отображение f'. Очевидно, что каждое из четырех соотношений (1) и (2) отображение f переводит в нуль. Следовательно, подгруппа $Y(R, G)$ содержится в ядре гомоморфизма f' и потому f' индуцирует некоторый гомоморфизм f фактор-модуля $R \otimes G$ в модуль G. Очевидно, что $f(\tau \otimes g) = \tau g$. Так как $f(1 \otimes g) = g$, то отображение f является эпиморфизмом. С другой стороны, из соотношений (2) и (3) следует, что

$$\sum_{i=1}^{k} \tau_i \otimes g_i = \sum_{i=1}^{k} 1 \otimes \tau_i g_i = 1 \otimes \sum_{i=1}^{k} \tau_i g_i,$$

т. е. каждый элемент группы $R \otimes G$ можно записать в виде $1 \otimes g$.

Но если $f(1 \otimes g) = 0$, то $g = 0$, и, следовательно, $1 \otimes g = 0$. Тем самым доказано, что отображение f является изоморфизмом.

Определение 9.3. Пусть $f\colon C \to C'$ и $h\colon G \to G'$ — произвольные гомоморфизмы. Тогда соответствие $c \otimes g \to (fc) \otimes (hg)$ определяет некоторый гомоморфизм

$$f \otimes h\colon \quad C \otimes G \to C' \otimes G',$$

который называется гомоморфизмом, *индуцированным* гомоморфизмами f и h. Для доказательства достаточно заметить, что соответствие $(c, g) \to (fc, hg)$ определяет гомоморфизм $R(C, G) \to R(C', G')$, переводящий подмодуль $Y(C, G)$ в подмодуль $Y(C', G')$ и потому индуцирующий вполне определенный гомоморфизм тензорных произведений.

В случае, когда $G = G'$ и отображение h тождественно, мы будем называть гомоморфизм $f \otimes h$ гомоморфизмом $C \otimes G \to C' \otimes G$, *индуцированным* гомоморфизмом f, и будем обозначать его через f'.

Теорема 9.4. *Если $i\colon C \to C'$, $j\colon G \to G$ — тождественные отображения, то $i \otimes j\colon C \otimes G \to C \otimes G$ также является тождественным отображением. Если $f\colon C \to C'$, $f'\colon C' \to C''$, $h\colon G \to G'$, $h'\colon G' \to G'$, то $(f'f) \otimes (hh') = (f' \otimes h')(f \otimes h)$.*

Доказательство тривиально.

Эта теорема утверждает, что операция $\otimes$ является двуместным ковариантным функтором, определенным на категории $\mathfrak{G}_R$ и принимающим значения в категории $\mathfrak{G}_R$.

Теорема 9.5. *Пусть модули C и G представлены в виде прямых сумм* (*см. определение* 5.8)

$$C = \sum_{\alpha \in M} C_\alpha, \qquad G \approx \sum_{\beta \in N} G_\beta$$

с помощью инъекций

$$i_\alpha\colon C_\alpha \to C, \qquad j_\beta\colon G_\beta \to G.$$

Тогда гомоморфизмы

$$i_\alpha \otimes j_\beta\colon C_\alpha \otimes G_\beta \to C \otimes G,$$

где $\alpha \in M$, $\beta \in N$ являются мономорфизмами и определяют некоторое представление модуля $C \otimes G$ в виде прямой суммы

$$C \otimes G \approx \sum_{(\alpha, \beta)} C_\alpha \otimes G_\beta.$$

Доказательство. Пусть $p_\alpha\colon C \to C_\alpha$, $r_\beta\colon G \to G_\beta$ — такие гомоморфизмы, что композиции $p_\alpha i_\alpha$ и $r_\beta j_\beta$ являются тождественными отображениями, а $p_{\alpha'} i_\alpha = 0$ и $r_{\beta'} j_\beta = 0$, если $\alpha' \neq \alpha$, $\beta' \neq \beta$. Тогда композиция $(p_\alpha \otimes r_\beta)(i_\alpha \otimes j_\beta)$ является тождественным отображением и

$$(p_{\alpha'} \otimes r_{\beta'})(i_\alpha \otimes j_\beta) = 0,$$

если $(\alpha, \beta) \neq (\alpha', \beta')$. Любой элемент h модуля $\Sigma C_\alpha \times G_\beta$ единственным образом записывается в виде конечной суммы $h = \Sigma h_{\alpha\beta}$ своих отличных от нуля компонент. Определим отображение

$$f\colon \Sigma C_\alpha \otimes G_\beta \to C \times G,$$

положив

$$f(h) = \Sigma (i_\alpha \otimes j_\beta) h_{\alpha\beta}.$$

Очевидно, что отображение $(p_\alpha \otimes r_\beta) f$ переводит элемент h в его компоненту $h_{\alpha\beta}$. Отсюда следует, что отображение f является мономорфизмом. Пусть $c \otimes g$ — произвольная образующая группы $C \otimes G$. Тогда $c = \Sigma i_\alpha c_\alpha$, $g = \Sigma j_\beta g_\beta$ и $f(\Sigma c_\alpha \otimes g_\beta) = c \otimes g$. Таким образом, отображение f является и эпиморфизмом. Теорема доказана.

Лемма 9.6. *Если модуль C является свободным R-модулем с базой X, то модуль $C \otimes G$ порождается элементами $x \otimes g$, связанными соотношениями $x \otimes (g_1 + g_2) = x \otimes g_1 + x \otimes g_2$, $r(x \otimes g) = x \otimes rg$. Если G также является свободным R-модулем с (базой Y), то модуль $C \otimes G$ является свободным R-модулем с базой $\{x \otimes y\}$, $x \in X, y \in Y$.*

Непосредственно следует из леммы 9.2 и теоремы 9.5.

Лемма 9.7. *Гомоморфизм $B \otimes G \to C \otimes G$, индуцированный произвольным эпиморфным отображением $f\colon B \to C$, также является эпиморфизмом.*

Доказательство. Каждый элемент модуля $C \otimes G$ является конечной суммой $\Sigma c_i \otimes g_i$. Для любого элемента c_i выберем такой элемент $b_i \in B$, что $f(b_i) = c_i$. Тогда $f'(\Sigma b_i \otimes g_i) = \Sigma c_i \otimes g_i$.

Лемма 9.8. *Для любой точной последовательности R-модулей*

$$0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{h} C \to 0$$

индуцированная последовательность

$$A \otimes G \xrightarrow{f'} B \otimes G \xrightarrow{h'} C \otimes G \to 0$$

также точна. (Замечание. *Относительно ядра гомоморфизма f' не делается никаких утверждений.*) *Если образ гомоморфизма f является прямым слагаемым модуля B, то точна последовательность*

$$0 \to A \otimes G \xrightarrow{f'} B \otimes G \xrightarrow{h'} C \otimes G \to 0$$

и образ гомоморфизма f' является прямым слагаемым модуля $B \otimes G$.

Доказательство. Второе утверждение леммы следует из первого и из теоремы 9.5. Что же касается первого утверждения, то, поскольку согласно лемме 9.7 отображение h является эпиморфизмом, нужно только показать, что $\operatorname{Im} f' = \operatorname{Ker} h'$. Обозначим через Γ образ отображения f'. Если $a \in A$, $g \in G$, то $h'f'(a \otimes g) = (hfa) \otimes g = 0 \otimes g = 0$ и, следовательно, подмодуль Γ содержится в ядре отображения h'. Поэтому гомоморфизм h' индуцирует некоторый гомоморфизм h'': $B \otimes G/\Gamma \to C \otimes G$. Композиция естественного отображения η: $B \otimes G \to B \otimes G/\Gamma$ и гомоморфизма h'' совпадает с гомоморфизмом h'.

Так как отображение h является эпиморфизмом, то существует такое отображение φ: $C \to B$ (вообще говоря, не гомоморфное), что композиция $h\varphi$ является тождественным отображением. Определим гомоморфизм

$$\varphi'\colon R(C, G) \to B \otimes G/\Gamma,$$

положив

$$\varphi'(c, g) = \eta((\varphi c) \otimes g).$$

Так как модуль $R(C, G)$ свободен, то эта формула действительно определяет некоторый гомоморфизм. Очевидно, что он переводит элементы $(c, g_1 + g_2) - (c, g_1) - (c, g_2)$, $r(c, g) - (c, rg)$ и $r(c, g) - (rc, g)$ в нуль. Пусть $c_1, c_2 \in C$ и $g \in G$. Так как

$$h(\varphi(c_1 + c_2) - \varphi c_1 - \varphi c_2) = h\varphi(c_1 + c_2) - h\varphi c_1 - h\varphi c_2 = \\ = (c_1 + c_2) - c_1 - c_2 = 0,$$

то из точности данной последовательности вытекает существование такого элемента $a \in A$, что $f(a) = \varphi(c_1 + c_2) - \varphi c_1 - \varphi c_2$. Следовательно,

$$\varphi'((c_1 + c_2, g) - (c_1, g) - (c_2, g)) = \\ = \eta(\varphi(c_1 + c_2) \otimes g - (\varphi c_1) \otimes g - (\varphi c_2) \otimes g) = \\ = \eta((\varphi(c_1 + c_2) - \varphi c_1 - \varphi c_2) \otimes g) = \\ = \eta(f(a) \otimes g) = \eta f'(a \otimes g) = 0.$$

Таким образом, гомоморфизм φ' отображает модуль $Y(C, G)$ в нуль. Поэтому он индуцирует некоторый гомоморфизм φ'': $C \otimes G \to B \otimes G/\Gamma$. Имеем:

$$\varphi'' h'' \eta(b \otimes g) = \varphi'' h'(b \otimes g) = \varphi((hb) \otimes g) = \eta((\varphi hb) \otimes g).$$

Но элемент $\varphi hb - b$ принадлежит образу гомоморфизма f' и поэтому $\eta((\varphi hb) \otimes g) = \eta(b \otimes g)$. Отсюда вытекает, что композиция $\varphi'' h''$ является тождественным отображением и, следовательно, $\operatorname{Ker} h'' = 0$. Так как $h' = h''\tau$, то группа Γ является ядром гомоморфизма h'. Тем самым лемма 9.8 доказана.

Пусть G — обычная абелева группа или, что то же самое, J-модуль, где J — кольцо целых чисел. Для любого целого числа p соответствие $g \to pg$ определяет некоторый эндоморфизм группы G, образ которого мы будем обозначать через pG.

Лемма 9.9. *Пусть G — абелева группа, p — некоторое целое число и η: $G \to G/pG$ — естественный гомоморфизм. Оказы-*

вается, что соответствие $n \otimes g \to \eta\ (n\ g)$ *определяет изоморфизм*

$$(J/pJ) \otimes G \approx G/pG.$$

Доказательство. Гомоморфизмы f и h, где h: $J \to J/pJ$ — естественный гомоморфизм, а гомоморфизм f: $J \to J$ определен формулой $f(n) = pn$, удовлетворяют, очевидно, условиям леммы 9.8. Поэтому последовательность

$$J \otimes G \xrightarrow{f'} J \otimes G \xrightarrow{h'} (J/pJ) \otimes G \to 0$$

точна. Согласно лемме 9.2 тензорное произведение $J \otimes G$ можно отождествить с группой G. Так как после этого отождествления отображение f' превращается в гомоморфизм $g \to pg$, то $\operatorname{Ker} h' = \operatorname{Im} f' = pG$. Остается заметить, что отображение h' является эпиморфизмом.

Лемма 9.10. *Пусть p и q — произвольные целые числа, а r — их наибольший общий делитель. Тогда*

$$(J/pJ) \otimes (J/qJ) \approx J/rJ.$$

Это следует из леммы 9.9 в силу известного изоморфизма

$$(J/qJ)/p(J/qJ) \approx J/rJ.$$

Пусть G — циклическая группа четвертого порядка и пусть f: $J \to J$ — отображение, определенное формулой $f(n) = 2n$. Тогда тензорное произведение $J \otimes G$ является циклической группой четвертого порядка и отображение f': $J \otimes G \to J \otimes G$ задается формулой $f'(n \otimes g) = 2(n \otimes g)$. Таким образом, хотя отображение f является мономорфизмом, отображение f' имеет нетривиальное ядро. Этот пример показывает, что при тензорном умножении понятие «подгруппа», вообще говоря, не сохраняется. Смысл символа $c \otimes g$ может измениться, если элемент c (или g) рассматривать не как элемент модуля C (соответственно модуля G), а как элемент некоторого подмодуля C' (соответственно некоторого подмодуля G').

До сих пор мы рассматривали операцию $\otimes$ как некоторый (двуместный) функтор, определенный на категории $\mathfrak{G}_R$, значения которого принадлежат категории $\mathfrak{G}_R$. Однако операцию $\otimes$ можно определить так же, как функтор, один из аргументов которого принадлежит категории $\mathfrak{G}$ (категории обычных абелевых групп), а другой — по-прежнему категории $\mathfrak{G}_R$; значения этого функтора по-прежнему принадлежат категории $\mathfrak{G}_R$. Действительно, пусть C — абелева группа и G — некоторый R-модуль. Определим тензорное произведение $C \otimes G$, рассматривая G как абелеву группу. Полагая

$$r(c \otimes g) = c \otimes rg,$$

мы, очевидно, обратим группу $C \otimes G$ в R-модуль. Для доказательства функториальности необходимо проверить, что для любых гомоморфизмов $f\colon C \to C'$, $h\colon G \to G'$ отображение $f \otimes h$ является гомоморфизмом R-модулей. Но это действительно так:

$$r(f \otimes h)(c \otimes g) = r[(fc) \otimes (hg)] = (fc) \otimes r(hg) = \\ = (fc) \otimes h(rg) = (f \otimes h)(c \otimes rg) = \\ = (f \otimes h)\, r(c \otimes g).$$

Все доказанные выше результаты остаются справедливыми для этого видоизменения тензорного произведения.

Тензорное произведение можно определить также, как функтор, один из аргументов которого принадлежит категории $\mathfrak{G}'$ (подкатегории категории $\mathfrak{G}$, состоящей из абелевых групп с конечным числом образующих и их гомоморфизмов), а другой — категории $\mathfrak{G}_C$, значения же которого принадлежат категории $\mathfrak{G}_C$. Для этого необходимы некоторые предварительные рассмотрения.

Лемма 9.11. *Пусть C — свободная группа с конечной базой $c_1, \ldots, c_n$. Тогда каждый элемент тензорного произведения $C \otimes G$ может быть однозначно записан в виде $\sum_{i=1}^{n} c_i \otimes g_i$. Отображение, определенное формулой*

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} c_i \otimes g_i\right) = (g_1, \ldots, g_n),$$

является изоморфным отображением тензорного произведения $C \otimes G$ на прямую сумму G_n (или, что то же самое, прямое произведение G^n) n экземпляров группы G.

Доказательство. Группа C разлагается в прямую сумму ΣC_k, где C_k — подгруппа, порожденная элементом c_k. Согласно теореме 9.5 $C \otimes G \approx \Sigma C_k \otimes G$, а согласно лемме 9.2 $C_k \otimes G \approx G$. Комбинируя эти изоморфизмы, получаем изоморфизм f.

Определение 9.12. Пусть G — компактная группа и C — свободная группа с базой $c_1, \ldots, c_n$. Прямое произведение G^n n экземпляров группы G является компактной группой. Изоморфизм $f\colon C \otimes G \approx G^n$, построенный в лемме 9.11, позволяет перенести *топологию* группы G^n в тензорное произведение $C \otimes G$. Тем самым тензорное произведение $C \otimes G$ превращается в компактную группу, а f — в непрерывное отображение.

Лемма 9.13. *Топология тензорного произведения $C \otimes G$ не зависит от выбора базы группы C.*

Лемма 9.14. *Пусть C и D — свободные группы с конечными базами, а G и H — компактные группы. Тогда для любых гомоморфизмов $f\colon C \to D$ и $h\colon G \to H$ отображение $f \otimes h\colon C \otimes G \to D \otimes H$ непрерывно.*

Доказательство. Мы докажем леммы 9.13 и 9.14 одновременно. Пусть $c_1, \ldots, c_n$ и $d_1, \ldots, d_m$ — базы групп C и D, с помощью которых определены топологии в тензорных произведениях $C \otimes G$ и $D \otimes H$. В этих базах гомоморфизм f определяется формулами $f(c_i) = \sum_{j=1}^{m} a_{ij} d_j$ $(i = 1, \ldots, n)$, где (a_{ij}) — некоторая целочисленная матрица. Имеем:

$$(f \otimes h)\left(\sum_{i=1}^{n} c_i \otimes g_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{m} a_{ij} d_j\right) \otimes hg_i =$$

$$= \sum_{j=1}^{m} d_j \otimes \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij} hg_i\right).$$

Отсюда следует, что построенные в лемме 9.11 изоморфизмы $C \otimes G \approx G^n$, $D \otimes H \approx H^m$ переводят отображение $f \otimes h$ в отображение φ: $G^n \to H^m$, определяемое формулой

$$\varphi(g_1, \ldots, g_n) = \left(\sum_{i=1}^{n} a_{i1} hg_i, \ldots, \sum_{i=1}^{n} a_{im} hg_i\right).$$

Так как отображение h непрерывно, а все a_{ij} являются целыми числами, то отображение φ непрерывно. Поэтому непрерывно и отображение $f \otimes h$. Тем самым лемма 9.14 доказана. Пусть теперь $C = D$, $G = H$ и пусть гомоморфизмы f, h являются тождественными отображениями. Тогда тождественное отображение $f \otimes h$ согласно лемме 9.14 непрерывно. Лемма 9.13 следует отсюда непосредственно.

Определение 9.15. Пусть C — произвольная группа с конечным числом образующих и пусть

$$R \xrightarrow{i} F \xrightarrow{\eta} C$$

— некоторое представление группы C в виде фактор-группы свободной группы F с конечной базой (i — отображение вложения, η — естественный гомоморфизм). Пусть, далее, G — произвольная компактная группа. В индуцированной последовательности

$$R \otimes G \xrightarrow{i'} F \otimes G \xrightarrow{\eta'} C \otimes G$$

тензорные произведения $R \otimes G$ и $F \otimes G$ являются компактными группами, отображение i' непрерывно, отображение η' согласно лемме 9.8 эпиморфно и $\operatorname{Ker} \eta' = \operatorname{Im} i'$. Следовательно, тензорное произведение $C \otimes G$ изоморфно компактной группе $F \otimes G/\operatorname{Im} i'$. С помощью этого изоморфизма мы можем перенести *топологию* группы $F \otimes G/\operatorname{Im} i'$ в тензорное произведение $C \otimes G$. В перенесенной топологии множество $U \subset C \otimes G$ тогда и только тогда *открыто*, когда множество $\eta'^{-1}(U)$ открыто в группе $F \otimes G$.

Лемма 9.16. *Для любой группы C с конечным числом образующих и любой компактной группы G топология тензорного произведения $C \otimes G$ не зависит от представления $C = F/R$.*

Лемма 9.17. *Пусть C и D — группы с конечным числом образующих, а G и H — компактные группы. Тогда для любых гомоморфизмов $f\colon C \to D$ и $h\colon G \to H$ отображение $f \otimes h\colon C \otimes G \to D \otimes H$ непрерывно.*

Доказательство. Обе леммы мы докажем одновременно. Пусть топологии групп $C \otimes G$ и $D \otimes H$ определены с помощью представлений

$$R \xrightarrow{i} F \xrightarrow{\eta} C, \quad R_1 \xrightarrow{i_1} F_1 \xrightarrow{\eta_1} D.$$

Согласно лемме 6.2 существует такой гомоморфизм $f: F \to F_1$, что $f\eta = \eta_1 f_1$. Следовательно, диаграмма

$$\begin{array}{ccc} F \otimes G & \xrightarrow{\eta'} & C \otimes G \\ \Big\downarrow{\scriptstyle f_1 \otimes h} & & \Big\downarrow{\scriptstyle f \otimes h} \\ F_1 \otimes H & \xrightarrow{\eta_1'} & D \otimes H \end{array}$$

коммутативна. Согласно лемме 9.16 отображения η', η_1' непрерывны, а согласно лемме 9.14 непрерывно отображение $f_1 \otimes h$. Поэтому отображение $\eta'_1(f_1 \otimes h)$, а следовательно, и отображение $(f \otimes h)\eta'$ непрерывно. Таким образом, для любого открытого подмножества U группы $D \otimes H$ множество $\eta'^{-1}(f \otimes h)^{-1}(U)$ открыто в группе $F \otimes G$. Согласно замечанию, сделанному в конце определения 9.15, из этого следует, что множество $(f \otimes h)^{-1}(U)$ открыто. Таким образом, отображение $f \otimes h$ непрерывно. Лемма 9.17 тем самым доказана. Предполагая отображения f и h тождественными, мы без труда получим из нее лемму 9.16.

Проверим, какие из доказанных в этом пункте результатов остаются справедливыми для топологизованного тензорного произведения $C \otimes G$. В лемме 9.2 отображение f непрерывно, так как именно с помощью этого отображения определялась в тензорном произведении топология. По тем же соображениям непрерывно отображение f, построенное в лемме 9.11, и изоморфизм, построенный в лемме 9.9. Из леммы 9.16 следует, что теорема 9.4 и леммы 9.7 и 9.8 остаются справедливыми и для топологизованного тензорного произведения. В теореме 9.5 для того, чтобы группа G была компактна и группа C имела конечное число образующих, необходимо потребовать, чтобы множества индексов M и N были конечны, каждая группа C_α имела конечное число образующих, каждая группа G_β была компактной группой и каждое отображение j_β было непрерывным отображением. Тогда все отображения $i_\alpha \otimes j_\beta$, а следовательно, и изоморфизм f, будут непрерывными отображениями.

Суммируя все сказанное, получаем следующую теорему.

Теорема 9.18. *Пусть $\mathfrak{G}$ — категория обычных абелевых групп, а $\mathfrak{G}'$ — ее подкатегория, состоящая из групп с конечным числом образующих. Тензорное произведение $C \otimes \mathfrak{G}$ определено в следующих случаях:*

(1) $C \in \mathfrak{G}_R$, $G \in \mathfrak{G}_R$ *и тогда* $C \otimes G \in \mathfrak{G}_R$;

(2) $C \in \mathfrak{G}$, $G \in \mathfrak{G}_R$ *и тогда* $C \otimes G \in \mathfrak{G}_R$;

(3) $C \in \mathfrak{G}'$, $G \in \mathfrak{G}_C$ *и тогда* $C \otimes G \in \mathfrak{G}_C$.

Все результаты этой главы справедливы в случаях (1) *и* (2). *В случае* (3) *исключением является теорема* 9.5 *о прямой сумме, которая остается справедливой только для конечных сумм.*

10. Группы гомоморфизмов

Определение 10.1. Пусть C и G — произвольные R-модули. Назовем суммой $\varphi_1 + \varphi_2$ двух гомоморфизмов $\varphi_1\colon C \to G$, $\varphi_2\colon C \to G$ гомоморфизм

$$\varphi_1 + \varphi_2\colon C \to G,$$

определенный формулой

$$(\varphi_1 + \varphi_2)(c) = \varphi_1(c) + \varphi_2(c).$$

Аналогично произведение $r\varphi$ элемента $r \in R$ и гомоморфизма $\varphi\colon C \to G$ определим формулой

$$(r\varphi)(c) = r(\varphi(c)) = \varphi(rc).$$

Очевидно, что относительно этих операций совокупность $\operatorname{Hom}(C, G)$ всех гомоморфизмов

$$\varphi\colon C \to G$$

является R-модулем.

В некотором смысле модуль $\operatorname{Hom}(C, G)$ двойственен тензорному произведению $C \otimes G$. Эта двойственность становится явной при сравнении результатов этого пункта с соответствующими результатами пункта 9.

Лемма 10.2. *Для любого R-модуля G отображение $f\colon \operatorname{Hom}(R, G) \to G$, определенное формулой $f(\varphi) = \varphi(1)$, является изоморфизмом.*

Доказательство. Так как $(\varphi_1 + \varphi_2)(1) = \varphi_1(1) + \varphi_2(1)$, то отображение f гомоморфно. Так как 1 порождает кольцо R, то из $f(\varphi)=0$ следует, что $\varphi = 0$. Так как кольцо R свободно[1]), то существует отображение φ, для которого $\varphi(1)$ имеет любое наперед заданное значение.

[1]) Как R-модуль. *(Прим. ред.)*

Определение 10.3. Пусть $f: C' \to C$ и $h: G \to G'$ — произвольные гомоморфизмы. Тогда соответствие $\varphi \to h\varphi f$ определяет некоторый гомоморфизм

$$\mathrm{Hom}(f, h): \mathrm{Hom}(C, G) \to \mathrm{Hom}(C', G').$$

Теорема 10.4. *Если $i: C \to C$ и $j: G \to G$ — тождественные отображения, то* $\mathrm{Hom}(i, j)$ *является тождественным отображением модуля* $\mathrm{Hom}(C, G)$. *Если $f: C' \to C$, $f': C'' \to C'$, $h: G \to G'$, $h': G' \to G''$, то* $\mathrm{Hom}(ff', h'h) = \mathrm{Hom}(f', h')\,\mathrm{Hom}(f, h)$.

Доказательство тривиально. Эта теорема утверждает, что Hom является двуместным функтором, определенным в категории $\mathfrak{G}_R$, принимающим значения в категории $\mathfrak{G}_R$, контравариантным относительно первого аргумента и ковариантным относительно второго.

Теорема 10.5. *Пусть модуль C представлен в виде прямой суммы $C \approx \sum_{\alpha \in M} C_\alpha$ с помощью инъекций $i_\alpha: C_\alpha \to C$, а модуль G представлен в виде прямого произведения $G \approx \prod_{\beta \in N} G_\beta$ с помощью проекций $p_\beta: G \to G_\beta$. Тогда проекции*

$$\mathrm{Hom}(i_\alpha, p_\beta): \mathrm{Hom}(C, G) \to \mathrm{Hom}(C_\alpha, G_\beta)$$

определяют представление модуля $\mathrm{Hom}(C, G)$ *в виде прямого произведения*

$$\mathrm{Hom}(C, G) \approx \prod \mathrm{Hom}(C_\alpha, G_\beta) \qquad (\alpha, \beta) \in M \times N.$$

Доказательство. Отображения $\mathrm{Hom}(i_\alpha, p_\beta)$ являются компонентами некоторого гомоморфизма $f: \mathrm{Hom}(C, G) \to \prod \mathrm{Hom}(C_\alpha, G_\beta)$. Пусть φ — произвольный, отличный от нуля элемент модуля $\mathrm{Hom}(C, G)$. Тогда существует такой индекс α и такой элемент $c_\alpha \in C_\alpha$, что $\varphi i_\alpha c_\alpha \neq 0$, и, следовательно, существует такой индекс β, что $p_\beta \varphi i_\alpha c_\alpha \neq 0$. Таким образом, элемент φ при отображении $\mathrm{Hom}(i_\alpha, p_\beta)$ переходит в элемент, отличный от нуля. Отсюда вытекает, что $f\varphi \neq 0$, т. е. отображение f является мономорфизмом. Предположим теперь, что для каждой пары $(\alpha, \beta) \in M \times N$ задан некоторый элемент $\varphi_{\alpha\beta} \in \mathrm{Hom}(C_\alpha, G_\beta)$. Пусть $c = \Sigma i_\alpha c_\alpha$ — произ- вольный элемент группы C. Для любого $\beta \in M$ определим гомоморфизм $\varphi_\beta \in \mathrm{Hom}(C, G_\beta)$, полагая $\varphi_\beta c = \Sigma \varphi_{\alpha\beta} c_\alpha$. Эти гомоморфизмы являются компонентами некоторого гомоморфизма $\varphi' \in \mathrm{Hom}(C, \prod G_\beta)$. Для соответствующего гомоморфизма $\varphi \in \mathrm{Hom}(C, G)$ имеем $\mathrm{Hom}(i_\alpha, p_\beta)\varphi = \varphi_{\alpha\beta}$. Таким образом, отображение f является изоморфизмом.

Лемма 10.6. *Если C — свободный R-модуль с базой X, то модуль* $\mathrm{Hom}(C, G)$ *изоморфен модулю G^X всех функций $X \to G$. Соответствующий изоморфизм относит каждому гомоморфизму $\varphi: C \to G$ определенную им функцию $X \to G$.*

Доказательство тривиально.

Лемма 10.7. *Гомоморфизм f': $\operatorname{Hom}(C, G) \to \operatorname{Hom}(B, G)$, индуцированный эпиморфизмом f: $B \to C$, является мономорфизмом.*

Доказательство. Для каждого отличного от нуля элемента $\varphi \in \operatorname{Hom}(C, G)$ выберем такой элемент $c \in C$, что $\varphi(c) \neq 0$. Затем выберем такой элемент $b \in B$, что $f(b) = c$. Тогда $(f'\varphi)\,b = \varphi f(b) \neq 0$. Следовательно, элемент $f'\varphi$ отличен от нуля.

Лемма 10.8. *Для любой точной последовательности R-модулей*

$$0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{h} C \to 0$$

индуцированная последовательность

$$0 \to \operatorname{Hom}(C, G) \xrightarrow{h'} \operatorname{Hom}(B, G) \xrightarrow{f'} \operatorname{Hom}(A, G)$$

точна. Если, кроме того, образ гомоморфизма f является прямым слагаемым модуля B, то точна последовательность

$$0 \to \operatorname{Hom}(C, G) \xrightarrow{h'} \operatorname{Hom}(B, G) \xrightarrow{f'} \operatorname{Hom}(A, G) \to 0$$

и образ гомоморфизма h' является прямым слагаемым модуля $\operatorname{Hom}(B, G)$.

Доказательство. Второе утверждение леммы следует из первого и из теоремы 10.5. Что же касается первого утверждения, то, поскольку согласно лемме 10.7 отображение h' мономорфно, нужно только доказать, что $\operatorname{Im} h' = \operatorname{Ker} f'$. Для любого элемента $\varphi \in \operatorname{Hom}(C, G)$ имеем $(f'h'\varphi)\,a = \varphi hf(a) = 0$, так как $hf = 0$. Следовательно, $\operatorname{Im} h' \subset \operatorname{Ker} f'$. Пусть $\varphi \in \operatorname{Ker} f'$. Тогда $\varphi f(a) = 0$ для любого элемента $a \in A$ и $\varphi(b) = 0$ для любого элемента $b \in \operatorname{Ker} h$. Поэтому гомоморфизм φ индуцирует некоторый гомоморфизм φ' группы $B/\operatorname{Ker} h$ в группу G. Так как отображение h эпиморфно, то фактор-группа $B/\operatorname{Ker} h$ естественно изоморфна группе C и гомоморфизм φ' можно рассматривать как элемент группы $\operatorname{Hom}(C, G)$. Очевидно, что $h'\varphi' = \varphi$. Таким образом, $\operatorname{Im} h' = \operatorname{Ker} f'$.

Лемма 10.9. *Для любого целого числа p отображение f: $\operatorname{Hom}(J/pJ, G) \to G$, определенное формулой $f(\varphi) = \varphi(1)$, является изоморфным отображением группы $\operatorname{Hom}(J/pJ, G)$ на подгруппу группы G, состоящую из элементов порядка p.*

Доказательство тривиально (сравнить с леммой 10.2).

Лемма 10.10. *Пусть p и q — произвольные целые числа и r — их наибольший общий делитель. Тогда*

$$\operatorname{Hom}(J/pJ, J/pJ) \approx J/rJ.$$

Это следует из леммы 10.9 и изоморфизма

$$\frac{q}{r}(J/qJ) = J/rJ.$$

До сих пор мы рассматривали операцию Hom как функтор, заданный на категории $\mathfrak{G}_R$, значения которого принадлежат категории $\mathfrak{G}_R$. Как и операцию $\otimes$, можно определить операцию Hom и как функтор, первый аргумент которого принадлежит категории $\mathfrak{G}$ (категории обычных абелевых групп), второй — категории $\mathfrak{G}_R$, а значения — категории $\mathfrak{G}_R$. Действительно, пусть C — произвольная абелева группа и G — произвольный R-модуль. Построив группу $\mathrm{Hom}\,(C, G)$, считая модуль G абелевой группой, превратим эту группу в R-модуль, полагая

$$(r\varphi)c = r(\varphi c),$$

где $\varphi\colon C \to C$ и $r \in R$. Остается заметить, что для любых гомоморфизмов $f\colon C' \to C$ и $h\colon G \to G'$ отображение $\mathrm{Hom}\,(f, g)$ является гомоморфизмом R-модулей. Действительно,

$$[r\,\mathrm{Hom}\,(f, h)]\,\varphi = r(h\varphi f) = h(r\varphi f) = \mathrm{Hom}\,(f, h)\,(r\varphi).$$

Операцию Hom можно также определить как функтор, первый аргумент которого принадлежит категории $\mathfrak{G}$, второй — категории $\mathfrak{G}_C$, а значения — категории $\mathfrak{G}_C$. Действительно, пусть C — обычная, а G — компактная абелева группа. Построив группу $\mathrm{Hom}\,(C, G)$, считая группу G обычной абелевой группой (без топологии), превратим эту группу в топологическую абелеву группу, рассматривая ее как подгруппу компактной группы G^C всех функций $\psi\colon C \to G$. Так как проекция прямого произведения непрерывна, то элемент $\psi(c)$ непрерывно зависит от функции $\psi \in G^C$ и, следовательно, условие $\psi(c_1 + c_2) - \psi(c_1) - \psi(c_2) = 0$, где c_1, c_2 — произвольные фиксированные элементы группы C, определяет замкнутое подмножество группы G^C. Таким образом, группа $\mathrm{Hom}\,(C, G)$ является пересечением замкнутых подмножеств группы G^C и потому замкнута. Следовательно, она является компактной группой.

Необходимо проверить, что отображение $\mathrm{Hom}\,(f, h)$ непрерывно для любого отображения $f\colon C' \to C$ и любого непрерывного гомоморфизма $h\colon G \to G'$ компактных групп G, G'. Пусть U — прямоугольное открытое подмножество группы $\mathrm{Hom}\,(C', G')$, определенное условиями $\varphi c_i \in V_i$, где $c_i \in C'$ и V_i — открытые подмножества группы G' $(i = 1, \ldots, n)$. Тогда множество $\mathrm{Hom}\,(f, h)^{-1}U$ является прямоугольным открытым множеством, определенным условиями $\psi f c_i \in h^{-1}(V_i)$ $(i = 1, \ldots, n)$. Следовательно, отображение $\mathrm{Hom}\,(f, h)$ непрерывно.

Суммируя все сказанное, получаем следующую теорему.

Теорема 10.11. *Группа* $\mathrm{Hom}\,(C, G)$ *определена в следующих случаях:*

$$C \in \mathfrak{G}_R, G \in \mathfrak{G}_R \text{ и тогда } \mathrm{Hom}\,(C, G) \in \mathfrak{G}_R, \tag{1}$$

$$C \in \mathfrak{G},\ G \in \mathfrak{G}_R \text{ и тогда } \mathrm{Hom}\,(C, G) \in \mathfrak{G}_R, \tag{2}$$

$$C \in \mathfrak{G},\ G \in \mathfrak{G}_C \text{ и тогда } \mathrm{Hom}\,(C, G) \in \mathfrak{G}_C. \tag{3}$$

Все результаты этого пункта справедливы во всех трех случаях.

11. Группы гомологий цепного комплекса над данной группой коэффициентов

Операция тензорного умножения следующим образом распространяется на цепные комплексы.

Определение 11.1. Пусть $K = \{C_q(K), \partial_q\}$ — произвольный цепной комплекс и G — некоторая группа. Их *тензорным произведением* $K \otimes G$ называется цепной комплекс $\{C_q(K) \otimes G, \partial'_q\}$, отображения ∂'_q которого индуцированы отображениями ∂_q, т. е. $\partial'_q = \partial_q \otimes i$, где i — тождественное отображение группы G. Для любого отображения $f\colon K \to K'$ цепных комплексов через $f'\colon K \otimes G \to K' \otimes G$ обозначается отображение, индуцированное отображением f, т. е. определенное формулой $f'_q = f_q \otimes i$. Таким образом, получается некоторый функтор, определенный на категории цепных комплексов, значения которого принадлежат той же категории. Этот функтор мы будем обозначать через $\otimes\, G$.

Согласно теореме 9.18 возможны следующие три случая:

(1) $G \in \mathfrak{G}_R$, и тогда $\otimes\, \mathfrak{G}\colon \partial\mathfrak{G}_R \to \partial\mathfrak{G}_R$,

(2) $G \in \mathfrak{G}_R$, и тогда $\otimes\, \mathfrak{G}\colon \partial\mathfrak{G} \to \partial\mathfrak{G}_R$,

(3) $G \in \mathfrak{G}_C$, и тогда $\otimes\, \mathfrak{G}\colon \partial\mathfrak{G}' \to \partial\mathfrak{G}_C$.

Для оправдания этих утверждений нужно, конечно, показать, что тензорное произведение $K \otimes G$ является цепным комплексом, т. е. что $\partial'_{q-1}\partial'_q = 0$. Для этого достаточно соотношение $\partial_{q-1}\partial_q = 0$ тензорно умножить на i и применить теорему 9.4. Аналогично из равенства $f_{q-1}\partial_q = \partial_q f_q$ следует, что $f'_{q-1}\partial'_q = \partial'_q f'_q$, так что f' действительно является цепным отображением.

Теорема 11.2. *Если категории $\partial\mathfrak{G}_R$, $\partial\mathfrak{G}$, $\partial\mathfrak{G}'$ рассматривать как h-категории, отметив в них прямые пары (см. определение 3.1), то функтор $\otimes\, G$ окажется ковариантным h-функтором.*

Доказательство. Пусть $(\varphi, \psi)\colon L \to K \to M$ — прямая отмеченная пара. Тогда по определению последовательность

$$0 \to L \xrightarrow{\varphi} K \xrightarrow{\psi} M \to 0$$

точна и образ отображения φ является прямым слагаемым комплекса K. Согласно лемме 9.8 теми же свойствами обладает и индуцированная последовательность

$$0 \to L \otimes G \xrightarrow{\varphi'} K \otimes G \xrightarrow{\psi'} M \otimes G \to 0,$$

т. е. пара (φ', ψ') также является прямой отмеченной парой. Таким образом, функтор $\otimes\, G$ является c-функтором.

Так как функтор $\otimes\, G$ переводит изоморфизм в изоморфизм, то он переводит вырезания в вырезания, а точки — в точки. Следовательно, остается показать, что функтор $\otimes\, G$ переводит гомотопии в гомотопии. Пусть $f, g\colon K \to L$ и $D\colon f \simeq g$. По определению гомотопия D является последовательностью таких гомоморфизмов D_q: $C_q(K) \to C_{q+1}(L)$, что

(4) $$\partial_{q+1} D_q + D_{q-1} \partial_q = g_q - f_q.$$

Пусть $D'_q = D_q \otimes i$, где i — тождественное отображение группы G. Умножая равенство (4) тензорно на отображение i и применяя теорему 9.4, получаем, что формула (4) имеет место и для «штрихованных» гомоморфизмов. Таким образом, $D'\colon f' \simeq g'$. Тем самым теорема полностью доказана.

Определение 11.3. Согласно теореме IV.9.5 композиция h-функтора $\otimes G$ с теорией гомологий H на категории $\partial \mathfrak{G}_R$ (или на категории $\partial \mathfrak{G}_C$) (см. теорему 4.9) является теорией гомологий, определенной на той же категории, на которой определен функтор $\otimes G$. Эта теория называется *теорией гомологий с группой коэффициентов* G. Группа $H_q(K \otimes G)$, где K — произвольный цепной комплекс, обозначается обычно через $H_q(K ; G)$ и называется *q-мерной группой гомологий комплекса K с группой коэффициентов* G, а также *q-мерной группой гомологий комплекса K над группой* G. Как и в определении 11.1, возможны следующие три случая:

(1) $G \in \mathfrak{G}_R$, $K \in \partial \mathfrak{G}_R$, и тогда $H_q(K ; G) \in \mathfrak{G}_R$;

(2) $G \in \mathfrak{G}_R$, $K \in \partial \mathfrak{G}$, и тогда $H_q(K ; G) \in \mathfrak{G}_R$;

(3) $G \in \mathfrak{G}_C$, $K \in \partial \mathfrak{G}'$, и тогда $H_q(K ; G) \in \mathfrak{G}_C$.

Соглашения и истолкования 11.4. Группы цепей, циклов и границ комплекса K с коэффициентами в группе G обозначаются, как правило, через $C_q(K ; G)$, $Z_q(K ; G)$ и $B_q(K ; G)$ (а не через $C_q(K \otimes G)$ и т. д.). Аналогично цепь $c \otimes g$, где $c \in C_q(K)$ и $g \in G$, обозначается через gc. Согласно определению 9.1 любой элемент группы $C_q(K ; G)$ является линейной комбинацией $\Sigma g_i c_i$ элементов группы $C_q(K)$ с коэффициентами из группы G, и любое соотношение, связывающее эти элементы, является следствием соотношений

$$(g_1 + g_2) c = g_1 c + g_2 c, \qquad g(c_1 + c_2) = gc_1 + gc_2$$

и

$$(rg) c = r(gc) = g(rc)$$

в случае (1) или

$$(rg) c = r(gc)$$

в случае (2). Граничный оператор тензорного произведения $K \otimes G$ определяется формулой

$$\partial'_q \Sigma g_i c_i = \Sigma g_i(\partial_q c_i),$$

а индуцированное отображением $f\colon K \to K'$ отображение $f'\colon K \otimes G \to K' \otimes G$ — формулой

$$f'_q \Sigma g_i c_i = \Sigma g_i(f_q c_i).$$

Замечание. В случае, когда группа G является группой J целых чисел, мы условились в пункте 9 для любой группы C отождествлять произведение $C \otimes J$ с группой C. Таким образом, $K \otimes J = K$ и $H_q(K; J) = H_q(K)$. Другими словами, обычные группы гомологий мы рассматриваем как группы гомологий с целочисленными коэффициентами.

Аналогичные построения для коцепных комплексов получаются приемом перемены знака; теория $H = \{H^q(K \otimes G), f_*, \delta^*\}$, где K — коцепный комплекс, является смешанной теорией, т. е. ковариантным δ-функтором, удовлетворяющим аксиомам гомотопии, вырезания и размерности.

12. Группы когомологий цепного комплекса над данной группой коэффициентов

Рассмотренная в пункте 10 операция Hom следующим образом распространяется на цепные комплексы.

Определение 12.1. Пусть $K = \{C_q(K), \partial_q\}$ — произвольный цепной комплекс и G — некоторая группа. Комплексом $\mathrm{Hom}(K, G)$ называется коцепный комплекс $\{\mathrm{Hom}(C_q(K), G), \delta^q\}$, для которого отображение

$$\delta^q: \mathrm{Hom}(C_q(K), G) \to \mathrm{Hom}(C_{q+1}(K), G)$$

индуцировано отображением $\partial_{q+1}: C_{q+1}(K) \to C_q(K)$, т. е. $\delta^q = \mathrm{Hom}(\partial_{q+1}, i)$, где i — тождественное отображение группы G. Для любого цепного отображения $f: K \to K'$ через

$$f': \mathrm{Hom}(K', G) \to \mathrm{Hom}(K, G)$$

обозначается отображение коцепных комплексов, индуцированное отображением f, т. е. определенное формулой $f'^q = \mathrm{Hom}(f_q, i)$. Таким образом, получается некоторый контравариантный функтор, определенный на категории цепных комплексов, значения которого принадлежат категории коцепных комплексов. Мы будем этот функтор обозначать символом $\mathrm{Hom}(\ , G)$. Согласно теореме 10.11 возможны следующие три случая:

(1) $G \in \mathfrak{G}_R$, и тогда $\mathrm{Hom}(\ , G): \partial\mathfrak{G}_R \to \delta\mathfrak{G}_R$,

(2) $G \in \mathfrak{G}_R$, и тогда $\mathrm{Hom}(\ , G): \partial\mathfrak{G} \to \delta\mathfrak{G}_R$,

(3) $G \in \mathfrak{G}_C$, и тогда $\mathrm{Hom}(\ , G): \partial\mathfrak{G} \to \delta\mathfrak{G}_C$.

Применяя операцию $\mathrm{Hom}(\ , i)$ к равенству $\partial_{q+1}\partial_{q+2} = 0$ и используя теорему 10.4, получаем, что $\delta^{q+1}\delta^q = 0$. Таким образом, $\mathrm{Hom}(K, G)$ действительно является коцепным комплексом. Аналогично из равенства $f_{q-1}\partial_q = \partial_q f_q$ вытекает, что $\delta^{q-1} f'^{q-1} = f'^q \delta^{q-1}$, т. е. f' действительно является отображением коцепных комплексов.

Теорема 12.2. *Если категории $\partial\mathfrak{G}_R$, $\partial\mathfrak{G}$ рассматривать как h-категории, отметив в них прямые пары (см. определение 3.1),* *то во всех трех случаях функтор* Hom (, G) *будет контравариантным h-функтором.*

Доказательство. Пусть (φ, ψ): $L \to K \to M$ — произвольная отмеченная пара. Тогда последовательность

$$0 \to L \xrightarrow{\varphi} K \xrightarrow{\psi} M \to 0$$

по определению точна и образ отображения φ является прямым слагаемым комплекса K. Согласно лемме 10.8 индуцированная последовательность

$$0 \to \operatorname{Hom}(M, G) \xrightarrow{\psi'} \operatorname{Hom}(K, G) \xrightarrow{\varphi'} \operatorname{Hom}(L, G) \to 0$$

также точна и образ отображения ψ' является прямым слагаемым. Другими словами, пара (ψ', φ') является прямой отмеченной парой. Таким образом, функтор Hom (, G) является контравариантным c-функтором.

Так как отображение $\operatorname{Hom}(f_q, i)$ является изоморфизмом, если отображения f_q и i изоморфны, то функтор Hom (, G) переводит вырезания в вырезания.

Если цепной комплекс K подобен точке, т. е. $C_q(K) \approx C_{q-1}(K)$ для положительных четных и для отрицательных нечетных q, то для тех же значений q отображение δ^{q-1} будет изоморфизмом. Отсюда следует, что комплекс $\operatorname{Hom}(K, G)$ будет подобным точке коцепным комплексом, так как, применяя прием перемены знака, мы получим из него подобный точке цепной комплекс.

Остается показать, что функтор Hom (, G) переводит гомотопии в гомотопии. Пусть f, g: $K \to L$ и D: $f \simeq g$. Гомотопия D является последовательностью таких гомоморфизмов D_q: $C_q(K) \to C_{q+1}(L)$, что

$$(4) \qquad \partial_{q+1} D_q + D_{q-1} \partial_q = g_q - f_q.$$

Пусть $D'^q = \operatorname{Hom}(D_{q-1}, i)$, где i — тождественное отображение группы G. Тогда

$$D'^q\colon \operatorname{Hom}(C_q(L), G) \to \operatorname{Hom}(C_{q-1}(K), G).$$

Применяя к равенству (4) операцию Hom (, i) и используя теорему 10.4, получаем, что

$$D'^{q+1}\delta^q + \delta^{q-1}D'^q = g'^q - f'^q.$$

Следовательно, D': $f' \simeq g$. Тем самым теорема полностью доказана.

Определение 12.3. Согласно теореме IV. 9.5c композиция контравариантного h-функтора Hom (, G) с ковариантным δ-функтором H, определенным на категории $\delta\mathfrak{G}_R$ (или на категории $\delta\mathfrak{G}_C$), является (см. теорему 4.9с) теорией когомологий, определенной на той же категории, на которой определен функтор Hom (, G). Эта теория называется *теорией когомологий цепных комплексов с группой коэффициентов* G. Для любого цепного комплекса K группа $H^q(\operatorname{Hom}(K, G))$ обозначается, как правило, через $H^q(K; G)$ и называется *q-мерной группой когомологий комплекса K с группой коэффициентов G* или *q-мерной группой когомологий комплекса K над группой G*. Как и в определении 12.1, возможны следующие три случая:

(1) $G \in \mathfrak{G}_R$, $K \in \partial\mathfrak{G}_R$, и тогда $H^q(K; G) \in \mathfrak{G}_R$,

(2) $G \in \mathfrak{G}_R$, $K \in \partial\mathfrak{G}$, и тогда $H^q(K; G) \in \mathfrak{G}_R$,

(3) $G \in \mathfrak{G}_C$, $K \in \partial\mathfrak{G}$, и тогда $H^q(K; G) \in \mathfrak{G}_C$.

Соглашения и истолкования 12.4. Группы коцепей, коциклов и кограниц комплекса $\mathrm{Hom}(K, G)$ обозначаются, как правило, через $C^q(K; G)$, $Z^q(K; G)$ и $B^q(K; G)$ (а не через $C^q(\mathrm{Hom}(K; G))$ и т. д.). По определению q-мерные коцепи комплекса K являются гомоморфизмами φ: $C_q(K) \to G$. Их кограницы $\delta^q\varphi$ являются $(q+1)$-мерными коцепями $\varphi\partial_{q+1}$: $C_{q+1}(K) \to G$. Таким образом, коцепь φ тогда и только тогда является q-мерным коциклом (т. е. удовлетворяет соотношению $\delta^q\varphi = 0$), когда гомоморфизм φ отображает группу $B_q(K)$ в нуль. Кроме того, любая q-мерная кограница отображает группу $Z_q(K)$ в нуль. Однако обратное, вообще говоря, не верно. Индуцированное отображением f: $K \to K'$ цепных комплексов отображение f': $\mathrm{Hom}(K', G) \to \mathrm{Hom}(K, G)$ определяется формулой

$$(f'^q\varphi')x = \varphi' f_q x, \quad \varphi' \in C^q(K', G), \quad x \in C_q(K).$$

Аналогичные построения для коцепных комплексов получаются с помощью приема перемены знака. Функтор

$$H = \{H_q(\mathrm{Hom}(K, G)),\ f^*,\ \partial_*\},$$

где K — произвольный коцепный комплекс, является контравариантным ∂-функтором, удовлетворяющим аксиомам гомотопии, вырезания и размерности.

13. Сравнение различных групп коэффициентов

В этом пункте будут установлены некоторые результаты относительно групп гомологий и когомологий цепных комплексов над различными группами коэффициентов. Так называемая «формула универсальных коэффициентов» не рассматривается, так как ее формулировка требует наряду с операциями $\otimes$ и Hom новых операций над группами, значение которых для дальнейшего изложения не настолько важно, чтобы оправдать здесь их изучение (по этим вопросам см. упражнение G).

Лемма 13.1. *Если цепной комплекс K состоит из свободных абелевых групп (или из линейных пространств над некоторым полем F), то группа $Z_q(K)$ является прямым слагаемым группы $C_q(K)$.*

Доказательство. Как подгруппа свободной группы группа $B_{q-1}(K)$ свободна (см. лемму 6.8). Так как гомоморфизм ∂_q отображает группу $C_q(K)$ на группу $B_{q-1}(K)$, причем ядром этого гомоморфизма является группа $Z_q(K)$, то из леммы 6.3 вытекает, что группа $Z_q(K)$ является прямым слагаемым группы $C_q(K)$.

Лемма 13.2. *Пусть в цепном комплексе K группа $Z_q(K)$ для всех q является прямым слагаемым группы $C_q(K)$ и $H_q(K)=0$. Тогда существует такой гомоморфизм D_q: $C_q(K)\to C_{q+1}(K)$, что для всех элементов $x\in C_q(K)$*

$$\partial_{q+1}D_qx+D_{q-1}\partial_qx=x.$$

Доказательство. Пусть $C_q(K)=Z_q(K)+W_q$ — разложение группы $C_q(K)$ в прямую сумму. Тогда оператор ∂_q изоморфно отображает группу W_q на группу $B_{q-1}(K)$. Так как $H_{q-1}(K)=0$, то $B_{q-1}(K)=Z_{q-1}(K)$. Пусть $\bar\partial_q$: $W_q\to Z_{q-1}(K)$ — отображение, определенное отображением ∂_q. Определим отображение D_q: $C_q(K)\to\to C_{q+1}(K)$, положив

$$D_qx=0,\qquad \text{если } x\in W_q,\qquad D_qx=\bar\partial_{q+1}^{-1}x, \text{ если } x\in Z_q(K).$$

Если $x\in W_q$, то $\partial Dx+D\partial x=\bar\partial^{-1}\partial x=x$, а если $x\in Z_q$, то $\partial Dx+D\partial x=\partial\bar\partial^{-1}x=x$. Следовательно, соотношение $\partial Dx+D\partial x=x$ имеет место для всех элементов $x\in C_q(K)$.

Теорема 13.3. *Отображение f: $K\to L$ цепных комплексов, состоящих из свободных абелевых групп (или из векторных пространств над некоторым полем), тогда и только тогда является гомотопической эквивалентностью (см. определение* IV. 9.2), *когда во всех размерностях q*

$$f_*:\ H_q(K)\approx H_q(L).$$

Доказательство. Необходимость условия непосредственно следует из теоремы 4.4. Для доказательства достаточности построим новый цепной комплекс $\hat f$, положив $C_q(\hat f)=C_{q-1}(K)+C_q(L)$ (сумма прямая) и

$$\partial_q(x,y)=(-\partial_{q-1}x,\ \partial_qy+f_{q-1}x),\qquad x\in C_{q-1}(K),\ y\in C_q(L).$$

Так как $\partial\partial(x,y)=\partial(-\partial x,\partial y+fx)=(\partial\partial x,\partial\partial y+\partial fx-f\partial x)=0$, то эти формулы определяют некоторый цепной комплекс.

Покажем, что из условий теоремы вытекает тривиальность групп $H_q(\hat f)$ для всех q. Действительно, пусть $(x,y)\in Z_q(\hat f)$. Тогда $\partial x=0$ и $-\partial y=fx$. Следовательно, $x\in Z_{q-1}(K)$ и $fx\in B_{q-1}(L)$. Так как отображение f_* является мономорфизмом, то $x\in B_{q-1}(K)$. Поэтому существует такой элемент $x'\in C_q(K)$, что $\partial x'=x$. Тогда $\partial(y+fx')=\partial y+f\partial x'=\partial y+fx=0$, так что $y+fx'\in Z_q(L)$. Так как отображение f_*: $H_q(K)\to H_q(L)$ является эпиморфизмом, то существуют такие элементы $x''\in Z_q(K)$ и $y'\in C_{q+1}(L)$, что $fx''+\partial y'=y+fx'$. Следовательно,

$$\partial(x''-x',y')=(\partial x'-\partial x'',\ \partial y'+fx''-fx')=(x,y).$$

Таким образом, $H_q(\hat f)=0$.

В силу леммы 13.1 группы $Z_q(\hat{f})$ являются прямыми слагаемыми групп $C_q(\hat{f})$, и поэтому из леммы 13.2 вытекает существование таких гомоморфизмов D_q: $C_q(\hat{f}) \to C_{q+1}(\hat{f})$, что

$$(1) \qquad \partial_{q+1}D_q(x, y) + D_{q-1}\partial_q(x, y) = (x, y).$$

Каждый гомоморфизм D_q порождает четыре гомоморфизма

$$D'_{q-1}: C_{q-1}(K) \to C_q(K), \qquad D''_q: C_q(L) \to C_{q+1}(L),$$
$$h_q: C_q(L) \to C_q(K), \qquad E_{q-1}: C_{q-1}(K) \to C_{q+1}(L),$$

причем

$$D_q(x, y) = (D'_{q-1}x + h_q y, E_{q-1}x + D''y).$$

Подставляя эти выражения в формулу (1), получим

$$(2) \qquad x = -D'\partial x + h\partial y + hfx - \partial D'x - \partial hy,$$

$$(3) \qquad y = -E\partial x + D''\partial y + D''fx + \partial Ex + \partial D''y + fD'x + fhy.$$

Полагая в равенстве (2) $x = 0$, получим, что $h\partial y = \partial hy$, т. е что h: $L \to K$ является отображением комплексов. Полагая в равенстве (2) $y = 0$, а в равенстве (3) $x = 0$, получим, что

$$\partial D'x + D'\partial x = hfx - x, \qquad \partial D''y + D''\partial y = y - fhy.$$

Следовательно, D': $hf \simeq i_1$ и $-D''$: $fh \simeq i_2$, где i_1 и i_2 — тождественные отображения комплексов K и L соответственно. Таким образом, отображение f является гомотопической эквивалентностью.

Теорема 13.4. *Пусть K и L — цепные комплексы, состоящие из свободных абелевых групп (или из векторных пространств над некоторым полем F) и пусть f: $K \to L$ — такое отображение, что для всех q*

$$f_*: H_q(K) \approx H_q(L).$$

Тогда

$$f_*: H_q(K; G) \approx H_q(L; G), \qquad f^*: H^q(L; G) \approx H^q(K; G)$$

для любой группы коэффициентов G (или для любого векторного пространства G над полем F).

Доказательство. Согласно теореме 13.3 отображение f является гомотопической эквивалентностью. Так как функторы $\otimes G$ и $\mathrm{Hom}(\ , G)$ переводят гомотопии в гомотопии, то они переводят гомотопические эквивалентности в гомотопические эквивалентности. Следовательно, отображения

$$f': K \otimes G \to L \otimes G, \qquad f'': \mathrm{Hom}(L, G) \to \mathrm{Hom}(K, G)$$

являются гомотопическими эквивалентностями. Поэтому индуцированные гомоморфизмы f_* и f^* являются изоморфизмами.

Примечания

Абстрактные клеточные комплексы. Наиболее часто встречаются цепные комплексы K, для которых каждая группа $C_q(K)$ является свободной абелевой группой с заданной базой $\{\sigma_i^q\}$. Для определения таких «абстрактных клеточных комплексов» достаточно в каждой размерности задать выражения для границы

$$\partial\sigma_i^q = \sum_j [\sigma_i^q : \sigma_j^{q-1}]\,\sigma_j^{q-1}$$

каждой «клетки» σ_i^q. Коэффициенты $[\sigma_i^q : \sigma_j^{q-1}]$ называются «коэффициентами инцидентности». Для фиксированного индекса i только конечное число из них отлично от нуля. Условие $\partial\partial = 0$ эквивалентно соотношению

$$(1) \qquad \sum_j [\sigma_i^q : \sigma_j^{q-1}]\,[\sigma_j^{q-1} : \sigma_k^{q-2}] = 0,$$

которое должно иметь место для любой пары σ_i^q, σ_k^{q-2}.

Обозначим через A^q матрицу, (i, j)-м элементом которой является коэффициент инцидентности $[\sigma_i^q : \sigma_j^{q-1}]$. Каждая строчка матрицы A^q соответствует некоторой q-мерной, а каждый столбец — некоторой $(q-1)$-мерной клетке. Условие (1) означает, что

$$A^q A^{q-1} = 0.$$

Пусть K и L — два таких комплекса с клетками σ и τ соответственно. Тогда любое отображение $f\colon K \to L$ определяется коэффициентами c_{ij}^q соотношения $f\sigma_i^q = \sum_j c_{ij}\tau_j^q$. Обозначая через C^q целочисленную матрицу, составленную из коэффициентов c_{ij}^q, немедленно получаем, что условие $\partial f = f\partial$ равносильно соотношению

$$C^q B^q = A^q B^{q-1},$$

где $\{B^q\}$ — матрицы инцидентности комплекса L.

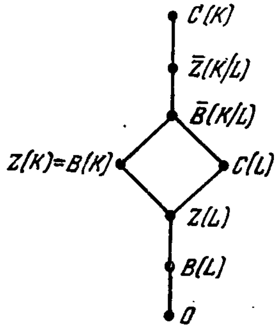
Упражнения

А. Гомоморфизмы точных последовательностей

Пусть $f\colon K \to K'$ — отображение точной обратной последовательности K в другую такую последовательность K'. Рассмотрим обе последовательности K и K' как цепные комплексы и обозначим их гомоморфизмы через ∂ и ∂'. Ядро отображения f является подкомплексом L комплекса K, и образ отображения f является подкомплексом L' комплекса K'. Таким образом возникают две точные последовательности:

$$0 \to L \to K/L \to 0, \qquad 0 \to L' \to K' \to K'/L' \to 0.$$

1. Показать, что для любого q отношения, связывающие различные подгруппы группы $C_q(K)$, описываются следующей схемой:



2. Показать, что такая же схема имеет место и для пары (K', L').

3. Показать, что указанные в схемах подгруппы групп $C_q(K)$ и $C_q(K')$ переходят друг в друга при каждом из шести гомоморфизмов $\partial, \partial^{-1}, \partial', \partial'^{-1}, f$ и f^{-1}.

4. Показать, что для каждого индекса q имеют место изоморфизмы

$$H_{q+1}(K'/L') \overset{\partial'}{\approx} H_q(L') \overset{(g_*)^{-1}}{\approx} H_q(K/L) \overset{\partial}{\approx} H_{q-1}(L),$$

где $g\colon K/L \to L'$ — отображение, индуцированное отображением f.

5. Вывести из упражнения 4 следующую теорему Фокса: для любого гомоморфизма $\{f_q\}$ одной точной последовательности $\{C_q, \varphi_q\}$ в другую точную последовательность $\{C'_q, \varphi'_q\}$ имеет место изоморфизм

$$\varphi'^{-1}_{q+1}(\operatorname{Im} f_q)/(\operatorname{Im} f_{q+1}) \cup (\operatorname{Im} \varphi'_{q+2}) \approx$$
$$\approx (\operatorname{Ker} f_{q-1}) \cap (\operatorname{Ker} \varphi_{q-1})/\varphi_q(\operatorname{Ker} f_q).$$

В. Цепные гомотопии

1. Пусть $f\colon K \to K'$ — произвольное отображение цепных комплексов и $D = \{D_q\}$ — произвольная последовательность гомоморфизмов $D_q\colon C_q(K) \to C_{q+1}(K')$. Показать, что формула

$$g_q = f_q + \partial_{q+1} D_q + D_{q-1}\partial_q$$

определяет такое отображение $g\colon K \to K'$, что $D\colon f \simeq g$.

2. Пусть $f, f'\colon K \to K'$, $g, g'\colon K' \to K$ — отображения цепных комплексов. Предположим, что отображение g гомотопически обратно отображению f и что $f \simeq f'$. Доказать, что отображение g' тогда и только тогда гомотопически обратно отображению f', когда $g' \simeq g$.

3. Пусть f: $K \to K'$, g: $K' \to K''$. Показать, что если два из трех отображений f, g и gf являются гомотопическими эквивалентностями, то и третье отображение является гомотопической эквивалентностью.

С. Свободные группы и комплексы

1. Показать, что абелева группа H тогда и только тогда свободна, когда для нее имеет место лемма 6.2.

2. Пусть F — свободная группа. Показать, что для любой точной последовательности $0 \to G' \to G \to G'' \to 0$ индуцированные последовательности

$$0 \to F \otimes G' \to F \otimes G \to F \otimes G'' \to 0,$$
$$0 \to \mathrm{Hom}\,(F, G') \to \mathrm{Hom}\,(F, G) \to \mathrm{Hom}\,(F, G'') \to 0$$

также точны.

3. Пусть K — цепной комплекс, состоящий из свободных абелевых групп. Показать, что для любой точной последовательности $0 \to G' \to G \to G'' \to 0$ индуцированные последовательности

$$0 \to K \otimes G' \to K \otimes G \to K \otimes G'' \to 0,$$
$$0 \to \mathrm{Hom}\,(K, G') \to \mathrm{Hom}\,(K, G) \to \mathrm{Hom}\,(K, G'') \to 0$$

точны. Написать точные последовательности соответствующих отмеченных пар. Дать прямое определение гомоморфизмов

$$H_q(K\,; G'') \to H_{q-1}(K\,; G'), \qquad H^q(K\,; G') \to H^{q+1}(K, G'')$$

и изучить их свойства.

4. Пусть $0 \to L \to K \to M \to 0$ — точная последовательность комплексов, состоящих из свободных абелевых групп, а $0 \to G' \to G \to G'' \to 0$ — точная последовательность групп коэффициентов. Этим точным последовательностям соответствуют шесть гомологических последовательностей. Расположить эти последовательности в виде одной диаграммы. Сделать то же самое для когомологических последовательностей.

5. Пусть K и M — цепные комплексы, состоящие из свободных абелевых групп, и пусть f: $K \to M$ — отображение комплекса K на комплекс M. Установить равносильность следующих условий:

(a) f_*: $H_q(K) \approx H_q(M)$ для всех q.

(b) Группа $H_q(L)$, где L — ядро отображения f, тривиальна для всех q.

(c) Существует такое отображение h: $M \to K$, что $fh = i_K$, и такая цепная гомотопия D: $hf \simeq i_M$, что $fD = 0$ (т. е. значения гомотопии D принадлежат подкомплексу L). Здесь i_K и i_M — соответствующие тождественные отображения.

D. Группы гомологий отображений

Определение. Любому отображению $f\colon K \to L$ цепных комплексов отнесем цепной комплекс, определенный в доказательстве теоремы 13.3. Группы $H_q(\hat{f})$ этого комплекса называются *группами гомологий отображения* f и обозначаются через $H_q(f)$.

1. Рассмотреть отображения $k\colon C_q(L) \to C_q(\hat{f})$ и $l\colon C_q(\hat{f}) \to C_{q-1}(K)$, определенные формулами $ky = (0, y)$, $l(x, y) = -x$. Показать, что отображение k является цепным отображением $K \to \hat{f}$, а отображение l снижает размерности на единицу и перестановочно с отображением ∂. Доказать точность последовательности

$$\ldots \to H_q(K) \xrightarrow{f_*} H_q(L) \xrightarrow{k_*} H_q(\hat{f}) \xrightarrow{l_*} H_{q-1}(K) \to \ldots,$$

в которой l_* — отображение, индуцированное обычным образом отображением l.

E. Свойства операции $\otimes$

Во всех последующих упражнениях предполагается, что все группы принадлежат категории $\mathfrak{G}$. Рассмотрение других категорий предоставляется читателю.

1. Установить естественные изоморфизмы

$$A \otimes B \approx B \otimes A, \qquad (A \otimes B) \otimes C \approx A \otimes (B \otimes C),$$

где A, B и C — обычные абелевы группы.

2. Если $C' \subset C$ и $G' \subset G$, то имеют место естественные гомоморфизмы

$$\begin{array}{ccccc} & & C' \otimes G & & \\ & & \downarrow & & \\ C \otimes G' & \to & C \otimes G & \to & C \otimes (G/G') \\ & & \downarrow & & \downarrow \\ & & (C/C') \otimes G & \to & (C/C') \otimes (G/G'). \end{array}$$

Показать, что отображение $C \otimes G \to (C/C') \otimes (G/G')$ является эпиморфизмом, ядром которого будет группа

$$\operatorname{Im}(C' \otimes G) \cup \operatorname{Im}(C \otimes G').$$

3. Показать, что тензорное произведение $C \otimes G$ двух периодических (т. е. не имеющих элементов конечного порядка) групп также является периодической группой.

Определение. Группа G называется *полной*, если для каждого элемента $g \in G$ и для каждого целого числа $n \neq 0$ существует такой элемент $g' \in G$, что $ng' = g$.

4. Показать, что тензорное произведение $C \otimes G$ двух полных групп C и G является полной группой.

5. Показать, что тензорное произведение полной и периодической групп равно нулю.

6. Пусть $G = \prod G_\beta$ — прямое произведение и p_β: $G \to G_\beta$ — соответствующие проекции. Индуцированные гомоморфизмы p'_β: $C \otimes G \to C \otimes G_\beta$ являются компонентами некоторого гомоморфизма p': $C \otimes G \to \prod C \otimes G_\beta$. Показать, что отображение p' является мономорфизмом[1]). На примере показать, что отображение p' эпиморфизмом, вообще говоря, не является. Если группа C имеет конечное число образующих, то отображение p' является изоморфизмом. Если, кроме того, группы G_β являются компактными группами, то отображение p' непрерывно.

7. Сформулировать и доказать аналоги теорем 9.5 и 10.5 вместо прямых сумм для прямых произведений, предполагая, что множество M конечно, а каждая группа C_α имеет конечное число образующих. Рассмотреть случай, когда группы G_β компактны.

F. Соотношения между операциями $\otimes$ и Hom

Определение. *Бигомоморфизмом* φ групп C_1 и C_2 в группу G называется такая функция $\varphi(c_1, c_2) \in G$, $c_1 \in C_1$, $c_2 \in C_2$, что

$$\varphi(c_1 + c'_1, c_2) = \varphi(c_1 + c_2) + \varphi(c'_1 + c_2),$$
$$\varphi(c_1, c_2 + c'_2) = \varphi(c_1, c_2) + \varphi(c_1, c'_2).$$

Пусть $\mathrm{Hom}(C_1, C_2; G)$ — группа всех таких бигомоморфизмов. Мы предполагаем, что группы C_1 и C_2 принадлежат категории $\mathfrak{G}$, а группы G и $\mathrm{Hom}(C_1, C_2; G)$ одновременно принадлежат одной из категорий $\mathfrak{G}_R$ или $\mathfrak{G}_C$.

1. Установить следующие естественные изоморфизмы:

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}(C_1, C_2; G) &\approx \mathrm{Hom}(C_1 \otimes C_2, G) \approx \\ &\approx \mathrm{Hom}(C_1, \mathrm{Hom}(C_2, G)) \approx \\ &\approx \mathrm{Hom}(C_2, \mathrm{Hom}(C_1, G)).\end{aligned}$$

2. Показать, что $H^q(K, \mathrm{Hom}(C, G)) \approx H^q(K \otimes C, G)$ для любого цепного комплекса K.

3. Пусть J — группа целых чисел. Определим гомоморфизм

$$\theta\colon C \otimes G \to \mathrm{Hom}(\mathrm{Hom}(C, J), G),$$

полагая для каждого элемента $c \otimes g \in C \otimes G$ и каждого отображения φ: $C \to J$

$$\theta_{c \otimes g}(\varphi) = \varphi(c) g.$$

Доказать, что отображение θ является естественным преобразованием соответствующих функторов. Доказать, что в случае, когда

[1]) Это утверждение неверно. Например, если C — группа рациональных чисел, а G — прямое произведение циклических групп J_n по всевозможным $n = 2, 3, \ldots$, то $C \otimes J_n = 0$ (см. предыдущее упражнение) и поэтому $\prod C \otimes \otimes J_n = 0$. С другой стороны, как нетрудно видеть, $C \otimes G \neq 0$. Этот пример указан Хилтоном (P. J. Hilton, Bull. de l'Acad. Polon. des Sciences, d. III, vol. IV, № 6 (1956), 22—25). (*Прим. ред.*)

группа C является свободной группой с конечной базой, отображение θ изоморфно.

4. Пусть K — цепной комплекс, для которого каждая группа $C_q(K)$ является свободной группой с конечной базой. Определить коцепный комплекс $\overline{K} = \mathrm{Hom}\,(K, J)$. Доказать, что $K \otimes G \approx \mathrm{Hom}\,(\overline{K}, G)$ и $\mathrm{Hom}\,(K, G) \approx \overline{K} \otimes G$, где G — группа одной из категорий $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{G}_C$ и $\mathfrak{G}_R$. Таким образом, группы гомологий (когомологий) комплекса K над любой группой коэффициентов совпадают с соответствующими группами когомологий (гомологий) комплекса $\overline{K}$.

G. Формула универсальных коэффициентов

1. Пусть F — свободная группа, R — подгруппа группы F и G — произвольная группа. Рассмотреть гомоморфизмы

$$i'\colon R \otimes G \to F \otimes G, \qquad i''\colon \mathrm{Hom}\,(F, G) \to \mathrm{Hom}\,(R, G),$$

индуцированные вложением $i\colon R \subset F$. Показать, что группы $\mathrm{Ker}\, i'$ и $\mathrm{Hom}\,(R, G)/\mathrm{Im}\, i''$ зависят только от групп $H = F/R$ и G. Эти группы обозначаются через $\mathrm{Tor}\,(H, G)$ и $\mathrm{Ext}\,(H, G)$ соответственно. Изучить их свойства.

2. Пусть K — цепной комплекс, состоящий из свободных групп. Доказать точность последовательностей

$$\ldots \to B_q \otimes G \to Z_q \otimes G \to H_q(K; G) \to B_{q-1} \otimes G \to \ldots,$$
$$\ldots \to \mathrm{Hom}\,(Z^{q-1}, G) \to \mathrm{Hom}\,(B^{q-1}, G) \to H^q(K, G) \to \mathrm{Hom}\,(Z^q, G) \to \ldots$$

(Указание. Рассмотреть точную последовательность $0 \to Z \to K \to K/Z \to 0$, где $Z = \{Z_q(K), 0\}$.)

3. Используя результаты упражнения 2, доказать точность последовательностей

$$0 \to H_q(K) \otimes G \xrightarrow{\alpha} H_q(K; G) \xrightarrow{\beta} \mathrm{Tor}\,(H_{q-1}(K), G) \to 0,$$
$$0 \to \mathrm{Ext}\,(H_{q-1}(K), G) \xrightarrow{\bar\beta} H^q(K; G) \xrightarrow{\bar\alpha} \mathrm{Hom}\,(H_q(K), G) \to 0$$

и показать, что образы отображений α и $\bar\beta$ являются прямыми слагаемыми соответствующих групп. Изучить поведение этих последовательностей при отображении $f\colon K \to K'$.

Из изложенных результатов следует, что для любого цепного комплекса K имеют место следующие изоморфизмы:

$$H_q(K; G) \approx H_q(K) \otimes G + \mathrm{Tor}\,(H_{q-1}(K), G),$$
$$H^q(K; G) \approx \mathrm{Hom}\,(H_q(K), G) + \mathrm{Ext}\,(H_q(K), G).$$

Эти формулы известны как «формулы универсальных коэффициентов», так как они выражают группы $H_q(K; G)$ и $H^q(K; G)$ над любой группой коэффициентов через группы $H_q(K)$ и $H_{q-1}(K)$. Более подробно эти формулы рассмотрены в статье Эйленберга и МакЛейна (Group extensions and homology, Ann. of Math. **43** (1942), 757—831). См. также Картан и Эйленберг (Homological Algebra, Princton, 1955)[1]).

4. Используя результаты предыдущих упражнений, показать, что если для отображения $f\colon K \to K'$ свободных цепных комплексов имеют место изоморфизмы $f_*\colon H_q(K) \approx H_q(K')$ и $f_*\colon H_{q-1}(K) \approx H_{q-1}(K')$, то $f_*\colon H_q(K; G) \approx H_q(K'; G)$ и $f^*\colon H^q(K, G) \approx H^q(K', G)$ для любой группы коэффициентов G.

---

[1]) Готовится русский перевод. (*Прим. ред.*)

ГЛАВА VI

ФОРМАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ ГОМОЛОГИЙ СИМПЛИЦИАЛЬНЫХ КОМПЛЕКСОВ

1. Введение

В этой главе развивается формальная теория гомологий и когомологий симплициальных комплексов. Каждому симплициальному комплексу мы относим некоторый цепной комплекс, к которому затем применяем определения и результаты главы V. В процессе построения цепного комплекса по симплициальному существенно используются результаты главы IV. Эти же определения указывают нам путь для доказательств теорем существования в главах VII и IX.

Теория гомологий симплициальных комплексов может быть построена двумя различными способами. Классический путь состоит в том, что любому симплициальному комплексу K относится некоторый цепной комплекс K_a, который мы называем *кососимметрическим* цепным комплексом симплициального комплекса K. Определение комплекса K_a основывается на результатах главы III. Другой путь состоит в том, что любому симплициальному комплексу относится так называемый *упорядоченный* цепной комплекс K_O. Имеет место естественное отображение $K_O \to K_a$, индуцирующее изоморфизм групп гомологий. Употребление комплекса K_O предпочтительнее при доказательстве общих теорем. Этот комплекс с формальной точки зрения проще комплекса K_a, так как группы цепей комплекса K_a удовлетворяют дополнительным соотношениям, возникающим в связи с рассмотрением вырожденных симплексов. С другой стороны, группы $C_q(K_O)$ излишне велики. Поэтому цепной комплекс K_a используется всякий раз, когда речь идет о вычислении групп гомологий данного комплекса.

Так как в этой главе мы почти исключительно будем иметь дело с формальными соотношениями в некотором комплексе K, а соответствующее пространство $|K|$ рассматриваться не будет, то предположение о конечности комплекса K может быть опущено. Имея это в виду, мы воспроизведем здесь определение, уже сформулированное в упражнениях в главе II.

Определение 1.1. Пусть W — некоторое бесконечное множество объектов, которые мы будем называть *вершинами*. *Комплексом K с вершинами в множестве* W называется собрание (конечномерных) симплексов с вершинами во множестве W, содержащее все грани каждого своего симплекса.

Очевидным образом вводятся понятия «подкомплекса» и «симплициального отображения». Категорию пар бесконечных комплексов и их симплициальных отображений мы будем обозначать через $\mathfrak{K}_s$. Термин «бесконечный» будет всегда пониматься в смысле «конечный или бесконечный», в связи с чем конечные комплексы будут образовывать подкатегорию $\mathfrak{K}'_s$ категории $\mathfrak{K}_s$.

2. Упорядоченный цепной комплекс симплициального комплекса

Определение 2.1. Последовательность $A^0, \ldots, A^q$ $(q \geqslant 0)$ вершин симплициального комплекса K, состоящая из вершин (быть может, повторяющихся) некоторого симплекса комплекса K, называется *элементарной q-мерной цепью* комплекса K. Элементарную q-мерную цепь можно рассматривать как функцию, которая каждому целому числу $i = 0, \ldots, q$ относит некоторую вершину A^i комплекса K, причем все вершины $A^0, \ldots, A^q$ принадлежат одному и тому же симплексу комплекса K. Свободная группа (см. определение V.6.5), порожденная элементарными q-мерными цепями комплекса K, обозначается через $C_q(K_O)$. По определению $C_q(K_O) = 0$, если $q < 0$.

Для любой элементарной q-мерной цепи $A^0 \ldots A^q$ $(q > 0)$ положим

$$\partial_q(A^0 \ldots A^q) = \sum_{i=0}^{q} (-1)^i A^0 \ldots \widehat{A^i} \ldots A^q,$$

где знак $\wedge$, поставленный над вершиной, означает, что эта вершина должна быть опущена. Отображение ∂_q, определенное на образующих группы $C_q(K_O)$, однозначно распространяется до некоторого гомоморфизма

$$\partial_q\colon C_q(K_O) \to C_{q-1}(K_O).$$

Если $q \leqslant 0$, то по определению $\partial_q = 0$.

Лемма 2.2. $\partial_{q-1}\partial_q = 0$.

Доказательство. Если $q \leqslant 1$, то по определению $\partial_{q-1} = 0$. Пусть $q \geqslant 2$. Достаточно проверить, что $\partial_{q-1}\partial_q(A^0 \ldots A^q) = 0$. Пусть $0 \leqslant k \leqslant l \leqslant q$. Так как

$$\partial_{q-1}\partial_q(A^0 \ldots A^q) = \sum_{i=0}^{q} (-1)^i \partial_{q-1}(A^0 \ldots \widehat{A^i} \ldots A^q),$$

то символ $A^0 \ldots \widehat{A^k} \ldots \widehat{A^l} \ldots A^q$ входит в выражение $(-1)^k \partial_{q-1}(A^0 \ldots \widehat{A^k} \ldots A^q)$ с коэффициентом $(-1)^k(-1)^{l-1}$, а в выражение $(-1)^l \partial_{q-1}(A^0 \ldots \widehat{A^l} \ldots A^q)$ — с коэффициентом $(-1)^l(-1)^k$ и, следовательно, сокращается. Таким образом, действительно $\partial_{q-1}\partial_q = 0$.

Из леммы 2.2 следует, что система $\{C_q(K_O), \partial_q\}$ является цепным комплексом. Этот цепной комплекс мы будем обозначать через K_O.

Для любого подкомплекса L комплекса K группа $C_q(L_O)$ порождается подмножеством множества, порождающего группу $C_q(K_O)$, и отображение ∂_q на этой группе совпадает с отображением ∂_q, построенным для комплекса K_O. Другими словами, цепной комплекс L_O является подкомплексом цепного комплекса K_O и, более того, является прямым слагаемым комплекса K_O. Пусть $c \in C_q(K_O)$. Мы будем писать $c \subset L$, если $c \in C_q(L_O)$.

Определение 2.3. Пусть (K, L) — произвольная симплициальная пара. Цепной комплекс K_O/L_O называется *упорядоченным* цепным комплексом пары (K, L). Его группы $C_q(K_O/L_O)$ являются свободными группами. Если комплекс K конечен, то комплекс K_O/L_O является конечным цепным комплексом в смысле определения V.8.1.

Лемма 2.4. *Для произвольного симплициального отображения f: $(K, L) \to (K', L')$ гомоморфизмы f_q: $C_q(K_O) \to C_q(K'_O)$ и f_q: $C_q(L_O) \to C_q(L'_O)$, определенные формулой*

$$f_q(A^0 \ldots A^q) = f(A^0) \ldots f(A^q),$$

порождают некоторое отображение

$$f_O\colon K_O/L_O \to K'_O/L'_O.$$

Если f: $(K, L) \to (K, L)$ — тождественное отображение, то f_O также является тождественным отображением, а если f: $(K, L) \to (K', L')$, g: $(K', L') \to (K'', L'')$, то $(gf)_O = g_O f_O$.

Для доказательства достаточно проверить соотношение коммутативности $\partial_q f_q = f_{q-1}\partial_q$, которое является, однако, непосредственным следствием определения.

Эта лемма утверждает, что комплекс K_O/L_O и отображение f_O образуют ковариантный функтор O, определенный на категории $\mathfrak{K}_s$ симплициальных пар и симплициальных отображений и принимающий значения в категории $\partial\mathfrak{G}$ цепных комплексов (напомним, что через $\mathfrak{G}$ мы обозначаем категорию обыкновенных абелевых групп, т. е. $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}_R$, где R — кольцо целых чисел). Превратим теперь категорию $\mathfrak{K}_s$ в c-категорию, определив отмеченные пары (i, j) как пары, состоящие из отображений вложения i: $L \to K$, j: $K \to (K, L)$, где (K, L) — произвольная симплициальная пара. Так как отображение i_0 является отображением вложения $L_O \to K_O$, то последовательность

$$0 \to L_O \xrightarrow{i_O} K_O \xrightarrow{j_O} K_O/L_O \to 0$$

точна, так что пара (i_O, j_O) является отмеченной парой категории $\partial\mathfrak{G}$. Как было замечено выше, комплекс L_O является прямым слагаемым комплекса K_O, так что отмеченная пара(i_O, j_O) является прямой отмеченной парой в смысле определения V.3.1.

Суммируя все сказанное, получаем следующую теорему.

Теорема 2.5. *Пара $K_O/L_O, f_O$ образует ковариантный с-функтор O, определенный на категории $\mathfrak{K}_s$ пар симплициальных комплексов и их симплициальных отображений и принимающий значения в с-категории $\partial\mathfrak{G}$ цепных комплексов (в которой отмечены только прямые пары).*

3. Гомотопии, вырезания, точки

Определение 3.1. Симплициальные отображения $f, g:(K, L) \to (K', L')$ называются *смежными*, если для каждого симплекса s комплекса K (подкомплекса L) симплексы $f(|s|)$ и $g(|s|)$ являются гранями одного и того же симплекса комплекса K' (соответственно подкомплекса L'). В категории $\mathfrak{K}_s$ это отношение играет роль отношения гомотопности.

Мы употребляем термин «смежные» вместо «гомотопные», чтобы избежать путаницы с понятием гомотопии отображений f, g: $(|K|,|L|)\to(|K'|, |L'|)$ соответствующих топологических пространств (в случае, когда K и K' являются конечными комплексами). Действительно, хотя смежные отображения f и g и гомотопны (соответствующая гомотопия определяется формулой $h(\alpha, t) = (1-t)f(\alpha) + t\,g(\alpha)$, $\alpha \in |K|, 0 \leqslant t \leqslant 1$), но обратное, вообще говоря, неверно: гомотопные отображения f и g не обязательно смежны.

Теорема 3.2. *Индуцированные смежными симплициальными отображениями f, g: $(K, L)\to(K', L')$ цепные отображения f_O, g_O: $K_O/L_O\to K'_O/L'_O$ цепно гомотопны.*

Доказательство. Определим гомоморфизмы D_q: $C_q(K_O/L_O)\to C_{q+1}(K'_O/L'_O)$, положив для любой элементарной цепи $c = A^0 \ldots A^q$ комплекса K

$$D_q c = \sum_{i=0}^{q} (-1)^i fA^0 \ldots fA^i gA^i \ldots gA^q.$$

Нужно проверить, что

$$\partial D_q c = gc - fc - D_{q-1}\partial c.$$

Для упрощения формул положим $B^i = fA^i, C^i = gA^i$. Тогда

$$\partial D_q c = \sum_{i=0}^{q} (-1)^i \Bigg[\sum_{j=0}^{i-1} (-1)^j B^0 \ldots \widehat{B^j} \ldots B^i C^i \ldots C^q +$$
$$+ (-1)^i B^0 \ldots B^{i-1} C^i \ldots C^q + (-1)^{i+1} B^0 \ldots B^i C^{i+1} \ldots C^q +$$
$$+ \sum_{j=i+1}^{q} (-1)^{j+1} B^0 \ldots B^i C^i \ldots \widehat{C^j} \ldots C^q\Bigg].$$

Члены средней строчки в суммировании по i попарно сокращаются, кроме первого и последнего членов:

$$C^0 \ldots C^q = gc, \quad -B^0 \ldots B^q = -fc.$$

После перестановки порядка суммирования членов первой и последней строчки, мы как раз и получим выражение для $-D_{q-1}\,\partial c$.

Второе, более содержательное доказательство теоремы 3.2 будет дано в конце пункта 5.

Определение 3.3. Пусть K' и K'' — подкомплексы цепного комплекса K. Мы будем обозначать через $K' \cap K''$ и $K' \cup K''$ подкомплексы комплекса K, определенные формулами

$$C_q(K' \cap K'') = C_q(K') \cap C_q(K''),$$
$$C_q(K' \cup K'') = C_q(K') \cup C_q(K'')$$

(через $C_q(K') \cup C_q(K'')$ обозначается наименьшая подгруппа группы $C_q(K)$, содержащая группы $C_q(K')$ и $C_q(K'')$. Эта группа обозначается иногда также через $C_q(K') + C_q(K'')$).

Следующая лемма непосредственно вытекает из этого определения.

Лемма 3.4. *Пусть K', K'' — подкомплексы симплициального комплекса K. Тогда*

$$(K' \cap K'')_O = K'_O \cap K''_O, \quad (K' \cup K'')_O = K'_O \cup K''_O.$$

Определение 3.5. Пусть K' и K'' — подкомплексы симплициального комплекса K. Отображение вложения

$$i\colon (K', K' \cap K'') \to (K' \cup K'', K'')$$

называется *вырезанием*.

Теорема 3.6. *Для любого вырезания*

$$i\colon \quad (K', K' \cap K'') \to (K' \cup K'', K'')$$

отображение

$$i_O\colon \quad K'_O/(K' \cap K'')_O \to (K' \cup K'')_O/K''_O$$

является изоморфизмом.

Доказательство. Согласно лемме 3.4 отображение i_O состоит из гомоморфизмов

$$i_q\colon\ C_q(K')/C_q(K') \cap C_q(K'') \to C_q(K') \cup C_q(K'')/C_q(K''),$$

индуцированных отображениями вложения $C_q(K') \subset C_q(K') \cup C_q(K'')$. Остается заметить, что согласно теореме Нётер об изоморфизмах все отображения i_q являются изоморфизмами.

Теорема 3.7. *Пусть P — симплициальный комплекс, состоящий из одной вершины. Тогда цепной комплекс P_O подобен точке в смысле определения* V.4.7.

Доказательство. Единственной элементарной q-мерной цепью комплекса P_O является цепь $c_q = A^0 \ldots A^q$, где $A^0 = \ldots$ $\ldots = A^q = P$. Для четного $q > 0$ имеем $\partial_q c_q = c_{q-1}$, так что $\partial_q\colon C_q(P_O) \approx C_{q-1}(P_O)$. Для $q < 0$ имеем $C_q(P_O) = 0$. Таким образом, условия определения V.4.7 полностью выполнены.

Определив в c-категории $\mathfrak{K}_s$ понятия гомотопии, вырезания и точки, мы получаем h-категорию в смысле определения IV.9.1. Следовательно, теоремы 2.5, 3.2, 3.6 и 3.7 можно ввиду определения IV.9.4 объединить в следующую теорему.

Теорема 3.8. *Если категорию $\partial\mathfrak{G}$ рассматривать как h-категорию, считая отмеченными лишь прямые пары, то соответствие O: $\mathfrak{K}_s \to \partial\mathfrak{G}$ будет ковариантным h-функтором.*

Определение 3.9. Согласно теореме IV.9.5 композиция h-функтора O с теорией гомологий на категории $\partial\mathfrak{G}$ с группой коэффициентов G (см. определение V.11.3) определяет на категории $\mathfrak{K}_s$ некоторую теорию гомологий. Эта теория называется *теорией гомологий на категории $\mathfrak{K}_s$ с группой коэффициентов G.* Аналогично композиция функтора O с теорией когомологий на категории $\partial\mathfrak{G}$ с группой коэффициентов G (см. определение V.12.3) определяет на категории $\mathfrak{K}_s$ некоторую теорию когомологий, которая называется *теорией когомологий на категории $\mathfrak{K}_s$ с группой коэффициентов G.* Для любой симплициальной пары (K, L) группы гомологий и когомологий $H_q(K_O/L_O; G)$, $H^q(K_O/L_O; G)$ (см. соглашения V.11.4, V.12.4) обозначаются через $H_q(K, L; G)$, $H^q(K, L; G)$ соответственно и называются *q-мерными группами гомологий и когомологий пары (K, L) с группой коэффициентов G.* Согласно определениям V.11.3 и V.12.3 возможны следующие случаи:

(1) $G \in \mathfrak{G}_R$, $(K, L) \in \mathfrak{K}_s$, и тогда $H_q(K, L; G) \in \mathfrak{G}_R$,

(2) $G \in \mathfrak{G}_R$, $(K, L) \in \mathfrak{K}_s$, и тогда $H^q(K, L; G) \in \mathfrak{G}_R$,

(3) $G \in \mathfrak{G}_C$, $(K, L) \in \mathfrak{K}_s$, и тогда $H^q(K, L; G) \in \mathfrak{G}_C$.

Если K является конечным комплексом, т. е. $(K, L) \in \mathfrak{K}'_s$, то, как было замечено в 2.3, фактор-комплекс K_O/L_O является конечным цепным комплексом. Поэтому $K_O/L_O \in \partial\mathfrak{G}'$ и, следовательно, согласно определению V.11.3 возможен четвертый случай:

(4) $G \in \mathfrak{G}_C$, $(K, L) \in \mathfrak{K}'_s$, и тогда $H_q(K, L; G) \in \mathfrak{G}_C$.

4. Прямое описание основных понятий

Обычное определение групп $H_q(K, L; G)$ основывается на прямом построении групп цепей $C_q(K, L; G) = C_q(K_O/L_O \otimes G)$ и граничных операторов, после чего группа H_q определяется как фактор-группа группы q-мерных циклов по подгруппе q-мерных границ. Процесс, которому мы следовали, определяет функтор H_q как результат композиции трех функторов: O, $\otimes G$ и гомологического функтора, определенного на цепных комплексах. Преимущество такого подхода двоякое: во-первых, этот подход позволяет подробно проанализировать все построение, а во-вторых, он позволяет охватить все многообразие различных случаев с наименьшим количеством повторений. Неудобство его заключается в том, что прямое определение при этом затемняется. В этом пункте мы, исправляя это положение, дадим прямое описание групп гомологий. Соответствующие теоремы, являясь результатом объединения определений, вряд ли нуждаются в доказательствах.

Группа $C_q(K, L; G)$ по определению является тензорным произведением $C_q(K_O/L_O) \otimes G$. Согласно определению 2.1 база группы $C_q(K_O)$ состоит из элементарных цепей $c = A^0 \ldots A^q$, а согласно определению 2.3 база группы $C_q(K_O/L_O)$ состоит из элементарных цепей c, не принадлежащих подкомплексу L. Следовательно, согласно лемме V. 9.6 группа $C_q(K, L; G)$ порождается элементами вида $c \otimes g$, которые в соответствии с соглашением V. 11.4 мы будем обозначать через gc. Таким образом, имеет место.

Теорема 4.1. *Группа $C_q(K, L; G)$ порождается элементами вида $gA^0 \ldots A^q$, где $A^0, \ldots, A^q$ — вершины комплекса K, принадлежащие одному симплексу комплекса K. Эти элементы удовлетворяют соотношениям*

$$(q_1 + q_2) A^0 \ldots A^q = g_1 A^0 \ldots A^q + g_2 A^0 \ldots A^q.$$

Кроме того,

$$gA^0 \ldots A^q = 0,$$

если вершины $A^0, \ldots, A^q$ принадлежат симплексу подкомплекса L. Граничный оператор задается формулой

$$\partial_q(gA^0 \ldots A^q) = \sum_{i=0}^{q} (-1)^i g A^0 \ldots \widehat{A^i} \ldots A^q.$$

Цепное отображение f_q: $C_q(K, L; G) \to C_q(K', L'; G)$, соответствующее симплициальному отображению f: $(K, L) \to (K', L')$, задается формулой

$$f_q(gA^0 \ldots A^q) = gf(A^0) \ldots f(A^q).$$

Если эту теорему рассматривать как определение, то необходимо проверить, что отображения f_q и ∂_q сохраняют соотношения и перестановочны друг с другом.

Дальнейшее построение групп гомологий является простой перефразировкой построений главы III и пункта 2 главы V. Группа $Z_q(K, L; G)$ циклов пары (K, L) состоит из таких цепей $c \in C_q$, что $\partial_q c = 0$, а группа $B_q(K, L; G)$ границ пары (K, L) состоит из границ элементов группы C_{q+1}. Наконец, группа $H_q(K, L; G)$ определяется формулой $H_q = Z_q/B_q$. Гомоморфизмы f_q, соответствующие отображению f: $(K, L) \to (K', L')$, переводят группы $Z_q(K, L; G)$ и $B_q(K, L; G)$ в группы $Z_q(K', L'; G)$ и $B_q(K', L'; G)$ соответственно и поэтому индуцируют гомоморфизмы f_*: $H_q(K, L; G) \to$ $\to H_q(K', L'; G)$. Прямое определение отображения ∂: $H_q(K, L; G) \to$ $\to H_{q-1}(L; G)$ следующее. Пусть $h \in H_q(K, L; G)$. В классе гомологий h выберем некоторый цикл $z \in Z_q(K, L; G)$. Запишем цикл z как формальную сумму элементарных цепей и истолкуем полученное выражение как цепь $x \in C_q(K\,;G)$. Граница $\partial_q x$ этой цепи принадлежит группе $Z_{q-1}(L\,;G)$ и определяет класс гомологий ∂h.

Если $G = J$, где J — группа целых чисел, то вместо $C_q(K, L\,;G)$ и т. д. мы будем писать $C_q(K, L)$ и т. д.

Переходя к когомологиям, начнем с группы $C^q(K, L\,;G) = C^q(K_O/L_O\,;G)$ коцепей пары (K, L) над группой G. Эта группа по определению является группой $\mathrm{Hom}\,(C_q(K_O/L_O), G)$, и поэтому из леммы V.10.6 и пункта 12 главы V вытекает

Теорема 4.1с. *Группа $C^q(K, L\,;G)$ является группой функций φ, определенных на множестве последовательностей вершин $A^0, \ldots, A^q$, принадлежащих одному и тому же симплексу комплекса K, значения $\varphi(A^0 \ldots A^q)$ которых принадлежат группе G и равны нулю, если вершины $A^0 \ldots A^q$ принадлежат некоторому симплексу подкомплекса L. Кограница $\delta^q\varphi$ определяется формулой*

$$(\delta^q\varphi)\,(A^0, \ldots, A^{q+1}) = \sum_{i=0}^{q+1} (-1)^i \varphi(A^0, \ldots, \widehat{A^i}, \ldots, A^{q+1}).$$

Коцепное отображение $f^q\colon C^q(K', L'\,;G) \to C^q(K, L\,;G)$, соответствующее симплициальному отображению $f\colon (K, L) \to (K', L')$, задается формулой

$$(f^q\varphi)\,(A^0, \ldots, A^q) = \varphi(f(A^0), \ldots, f(A^q)).$$

Группа $Z^q(K, L\,;G)$ коциклов пары (K, L) состоит из таких коцепей $\varphi \in C^q(K, L\,;G)$, что $\delta^q\varphi = 0$, группа $B^q(K, L\,;G)$ кограниц пары (K, L) состоит из кограниц элементов группы $C^{q-1}(K, L\,;G)$, а группа $H^q(K, L\,;G)$ определяется формулой $H^q = Z^q/B^q$. Прямое определение отображения $\delta\colon H^q(L\,;G) \to H^{q+1}(K, L\,;G)$ следующее. Пусть $u \in H^q(L\,;G)$. В классе когомологий u выберем произвольный коцикл $\varphi \in Z^q(L\,;G)$. Распространим коцикл φ до функции $\varphi' \in C^q(K\,;G)$, произвольным образом определяя значение $\varphi'(A^0, \ldots, A^q)$, когда вершины $A^0, \ldots, A^q$ не принадлежат симплексу подкомплекса L. Кограница $\delta^q\varphi'$ получающейся коцепи равна нулю на L и, следовательно, принадлежит группе $Z^{q+1}(K, L\,;G)$. Класс когомологий этого цикла и является классом δu.

Линейные обозначения для цепей и функциональные для коцепей употребляются потому, что формулы для ∂, δ, f_q, f^q приобретают в этих обозначениях наиболее удобный вид. Например, если употреблять функциональные обозначения для цепей, то оператор ∂ будет задаваться формулой

$$(\partial\varphi)\,(A^0, \ldots, A^{q-1}) = \sum_{A} \sum_{i=0}^{q-1} (-1)^i \varphi(A^0, \ldots, A^{i-1}, A, A^i, \ldots, A^{q-1}),$$

где суммирование по A распространяется на все вершины всех симплексов, среди вершин которых имеются вершины $A^0, \ldots, A^{q-1}$.

Ввиду лемм III.7.2 и V.3.2, мы можем рассматривать также группы $\bar{Z}_q(K, L; G)$ и $\bar{B}_q(K, L; G)$, являющиеся прообразами групп Z_q и B_q при естественном отображении $C_q(K; G) \to C_q(K, L; G)$. Согласно лемме V.3.2 группа $\bar{Z}_q$ состоит из всех цепей $c \in C_q(K; G)$, для которых $\partial c \in C_{q-1}(L; G)$, в то время как $\bar{B}_q = B_q(K; G) \cup \cup C_q(L; G)$. Группа $\bar{H}_q = \bar{Z}_q / \bar{B}_q$ изоморфна группе $H_q(K, L; G)$. Такое описание группы относительных гомологий более обычно. Оно имеет то преимущество, что позволяет дать более простое определение оператора ∂: $H_q(K, L; G) \to H_{q-1}(L; G)$.

Как правило, мы будем писать ∂ и δ вместо ∂_q и δ^q и f вместо f_q и f^q.

Пусть P — симплициальный комплекс, состоящий из одной вершины. Тогда согласно теоремам 4.1 и 4.1с

$$C_0(P; G) \approx G, \qquad C^0(P, G) \approx G$$

и $\partial_1 = 0$, $\partial_0 = 0$. Поэтому $H_0 = C_0$ и $H^0 = C^0$. Следовательно,

$$H_0(P; G) \approx G, \qquad H^0(P; G) \approx G.$$

Это показывает, что теория гомологий (когомологий) симплициальных комплексов над группой G имеет группу G своей группой коэффициентов в смысле определения I.6.1.

5. Приведенные группы, ацикличность, алгебраические отображения

Построив группы гомологий и когомологий симплициальных комплексов, мы рассмотрим теперь некоторые специальные свойства этих групп. В первую очередь мы рассмотрим вопрос о приведенных группах гомологий и когомологий. Хотя эти группы можно было бы определить точно так же, как в пункте 7 главы I, однако мы изложим другое, более прямое определение, которое удобнее для приложений.

Поскольку пространство, состоящее из одной точки P, является симплициальным комплексом и для любого симплициального комплекса K, отображение f: $K \to P$ симплициально, мы могли бы в соответствии с определением I.7.3 определить приведенную нульмерную группу гомологий $H_0(K; G)$ как ядро индуцированного гомоморфизма f_*: $H_0(K; G) \to H_0(P; G)$. Очевидно, что $f(c) = (\Sigma g_i)P$ для любой нульмерной цепи $c = \Sigma g_i A^i \in C_0(K, G)$. Эта формула подсказывает следующее

Определение 5.1. *Индексом* $\operatorname{In}(c)$ *нульмерной цепи* $c = \Sigma g_i A^i \in C_0(K; G)$ называется элемент

$$\operatorname{In}(c) = \Sigma g_i \in G.$$

Очевидно, что отображение In: $C_0(K; G) \to G$ гомоморфно. Кроме того, $\operatorname{In} \partial = 0$.

Определение 5.2. *Пополненный* упорядоченный цепной комплекс $\widetilde{K}_O$ симплициального комплекса K определяется следующим образом: если $K = 0$, то $\widetilde{K}_O = K_O = 0$; если $K \neq 0$, то

$$
\begin{aligned}
C_q(\widetilde{K}_O) &= C_q(K_O), \text{ если } q \neq -1,\\
C_{-1}(\widetilde{K}_O) &= J \ (J \text{ — аддитивная группа целых чисел}),\\
\widetilde{\partial}_q &= \partial_q, \text{ если } q \neq 0, -1,\\
\widetilde{\partial}_0 &= \mathrm{In}: \ C_q(\widetilde{K}_O) \to J,\\
\widetilde{\partial}_{-1} &= 0.
\end{aligned}
$$

Приведенные нульмерные группы гомологий и когомологий комплекса K определяются формулами

$$\widetilde{H}_0(K\,;G) = H_0(\widetilde{K}_O;G),\ \widetilde{H}^0(K\,;G) = H^0(\widetilde{K}_O\,;G).$$

Очевидно, что если $q > 0$, то

$$H_q(\widetilde{K}_O\,;G) = H_q(K_O\,;G) = H_q(K\,;G).$$

Группа $\widetilde{Z}_0(K\,;G) = Z_0(\widetilde{K}\,;G)$ является подгруппой группы $Z_0(K_O;G) = C_0(K_O\,;G)$ и состоит из всех нульмерных цепей c, для которых $\mathrm{In}(c) = 0$. Следовательно, согласно сказанному перед определением 5.1, мы получаем следующему теорему.

Теорема 5.3. *Приведенная нульмерная группа гомологий $\widetilde{H}_0(K\,;G)$ является ядром гомоморфизма f_*: $H_0(K\,;G) \to H_0(P\,;G)$, где f: $K \to P$ — отображение комплекса K на состоящий из одной точки комплекс P.*

Для групп когомологий имеем:

$$H^q(\widetilde{K}_O\,;G) = H^q(K_O\,;G) = H^q(K\,;G), \quad \text{если } q \neq 0,$$

в то время как $\widetilde{H}^0(K\,;G) = Z^0(K\,;G)/\widetilde{B}^0(K\,;G)$, где подгруппа $\widetilde{B}^0(K\,;G)$ состоит из всех коцепей $\varphi \in C^0(K\,;G)$, принимающих одно и то же значение на всех вершинах комплекса K. Отсюда следует

Теорема 5.3с. *Приведенная нульмерная группа когомологий $\widetilde{H}^0(K\,;G)$ является фактор-группой группы $H^0(K\,;G)$ по образу гомоморфизма f^*: $H^0(P\,;G) \to H^0(K\,;G)$, где f: $K \to P$ — отображение комплекса K на состоящий из одной точки комплекс P.*

До сих пор мы рассматривали только цепные отображения f: $K_O \to K'_O$, индуцированные симплициальными отображениями f: $K \to K'$. Такие отображения для любой цепи $c \in C_0(K)$ удовлетворяют соотношению $\mathrm{In}(fc) = \mathrm{In}(c)$.

В дальнейшем нам придется рассматривать отображения, вообще говоря, не индуцируемые никаким симплициальным отображением (например оператор подразделения цепей, рассматриваемый ниже, в пункте 7).

Определение 5.4. Пусть K и K' — произвольные симплициальные комплексы. *Алгебраическим отображением* f: $K \to K'$ называется такое цепное отображение f: $K_O \to K'_O$, что $\operatorname{In}(fc) = \operatorname{In}(c)$ для любой цепи $c \in C_0(K)$. Цепная гомотопия D, связывающая алгебраические отображения, называется *алгебраической гомотопией*.

Очевидно, что любое алгебраическое отображение f: $K \to K'$ можно распространить до отображения $\tilde{f}$: $\tilde{K}_O \to \tilde{K}'_O$ пополненных упорядоченных цепных комплексов; достаточно определить отображение $\tilde{f}_{-1}$ как тождественное отображение группы $J = C_{-1}(\tilde{K}_O) = C_{-1}(\tilde{K}'_O)$. Аналогично можно распространить любую алгебраическую гомотопию D: достаточно положить $D_{-1} = 0$.

Определение 5.5. Функция C, относящая каждому симплексу s симплициального комплекса K непустой подкомплекс $C(s)$ симплициального комплекса K', называется *несущей функцией*, если подкомплекс $C(s')$, соответствующий некоторой грани s' симплекса s, является подкомплексом комплекса $C(s)$. Несущая функция C называется *носителем* алгебраического отображения f: $K \to K'$, если для любого симплекса s и любой цепи $c \in C_q(K)$ из включения $c \subset s$ следует, что $fc \subset C(s)$. Аналогично C называется *носителем* алгебраической гомотопии D: $f \simeq g$, если для любого симплекса s и любой цепи $c \in C_q(K)$ из включения $c \subset s$ следует, что $Dc \subset C(s)$.

Определение 5.6. Симплициальный комплекс K называется *ациклическим*, если $H_q(K) = 0$ при $q \neq 0$ и $\tilde{H}_0(K) = 0$. Несущая функция C называется *ациклической*, если для каждого симплекса s комплекс $C(s)$ ацикличен.

Теорема 5.7. *Пусть K и K' — произвольные симплициальные комплексы, C — некоторая ациклическая несущая функция, определенная на комплексе K, значениями которой являются подкомплексы комплекса K', и L — произвольный подкомплекс комплекса K. Оказывается, что любое алгебраическое отображение $L \to K'$ с носителем C можно продолжить до алгебраического отображения $K \to K'$ с тем же носителем C. Любую алгебраическую гомотопию с носителем C, связывающую отображения $f|L$ и $g|L$, где f, g: $K \to K'$ — алгебраические отображения с носителем C, можно продолжить до алгебраической гомотопии с носителем C, связывающей отображения f и g.*

Доказательство. Пусть f: $L \to K'$ — произвольное алгебраическое отображение. Для любой вершины A комплекса K, не принадлежащей подкомплексу L, выберем в подкомплексе $C(A)$ некоторую вершину и обозначим ее через $f(A)$. Тем самым отображение f будет продолжено до алгебраического отображения f: $K^0 \cup L \to K'$. Пусть A^0A^1 — произвольная элементарная одномерная цепь комплекса K и пусть s — наименьший симплекс, содержащий цепь A^0A^1. Если симплекс s принадлежит подкомплексу

L, то цепь $f(A^0A^1)$ уже определена. Пусть симплекс s не принадлежит подкомплексу L. Так как

$$\operatorname{In}(f\partial(A^0A^1)) = \operatorname{In}(fA^1) - \operatorname{In}(fA^0) = 0,$$

то $f\partial(A^0A^1) \in \tilde{Z}_0(C(s))$. Следовательно, поскольку $\tilde{H}_0(C(s)) = 0$, существует такая цепь $f(A^0A^1) \in C_1(C(s))$, что $\partial f(A^0A^1) = f\partial(A^0A^1)$. Тем самым отображение f продолжено до алгебраического отображения f: $K^1 \cup L \to K'$.

Продолжая построение по индукции, предположим, что уже определено алгебраическое отображение f: $K^q \cup L \to K'$ $(q > 0)$ с носителем C. Пусть c — произвольная элементарная $(q+1)$-мерная цепь комплекса K, а s — наименьший симплекс комплекса K, содержащий цепь c. Если $s \subset L$, то цепь fc уже определена. Пусть симплекс s не принадлежит подкомплексу L. Так как $\partial f\partial c = f\partial\partial c = 0$, то $f\partial c \in Z_q(C(s))$. Следовательно, поскольку $H_q(C(s)) = 0$, существует такая цепь $fc \in C_{q+1}(C(s))$, что $\partial fc = f\partial c$. Тем самым отображение f продолжено до алгебраического отображения f: $K^{q+1} \cup L \to K'$ с носителем C.

Пусть f, g: $K \to K'$ — алгебраические отображения с носителем C, для которых существует алгебраическая гомотопия D: $f|L \simeq g|L$ с носителем C. Пусть вершина A комплекса K не принадлежит подкомплексу L. Так как $\operatorname{In}(gA - fA) = 0$, то $gA - f(A) \in \tilde{Z}_0(C(A))$ и, следовательно, поскольку $\tilde{H}_0(C(A)) = 0$, существует такая цепь $D_0(A) \in C_1(C(A))$, что $\partial D_0 A = gA - fA$. Тем самым гомотопия D продолжена до алгебраической гомотопии D: $f|K^0 \cup L \simeq g|K^0 \cup L$ с носителем C.

Продолжая построение по индукции, предположим, что уже определена алгебраическая гомотопия D: $f|K^{q-1} \cup L \simeq g|K^{q-1} \cup L$ с носителем C. Пусть c — произвольная элементарная q-мерная цепь комплекса K, а s — наименьший симплекс комплекса K, содержащий цепь c. Если $s \subset L$, то цепь Dc уже определена. В случае, когда симплекс s не принадлежит подкомплексу L, рассмотрим цепь $z = gc - fc - D\partial c$. Очевидно, что $z \subset C(s)$. Кроме того,

$$\partial z - \partial gc - \partial fc - \partial D\partial c = g\partial c - f\partial c - (g\partial c - f\partial c + D\partial\partial c) = 0.$$

Таким образом, $z \in Z_q(C(s))$. Так как $H_q(C(s)) = 0$, то существует такая цепь $Dc \in C_{q+1}(C(s))$, что $\partial Dc = z$. Следовательно, $\partial Dc + D\,\partial c = gc - fc$. Тем самым гомотопия D продолжена до алгебраической гомотопии D: $f|K^q \cup L \simeq g|K^q \cup L$ с носителем C.

Теорема 5.8. *Пусть f, g: $K \to K'$ — алгебраические отображения с ациклическим носителем C. Пусть L, L' — такие подкомплексы комплексов K и K' соответственно, что $C(s) \subset L'$ для любого симплекса $s \subset L$. Тогда индуцированные отображениями f и g цепные отображения f_0, g_0: $K_0/L_0 \to K'_0/L'_0$ цепно гомотопны. В частности, $f_{0*} = g_{0*}$ и $f_0^* = g_0^*$ для любой группы коэффициентов.*

Доказательство. Согласно теореме 5.7 существует алгебраическая гомотопия D: $f \simeq g$ с носителем C. Каждый гомоморфизм D_q: $C_q(K) \to C_{q+1}(K')$ переводит $C_q(L)$ в $C_{q+1}(L')$, а следовательно, индуцирует некоторый гомоморфизм D_{Oq}: $C_q(K)/C_q(L) \to \to C_{q+1}(K')/C_{q+1}(L')$. Гомоморфизмы D_{Oq}, очевидно, определяют требуемую гомотопию D_O.

Определение 5.9. *Звездой* $\mathrm{St}(A)$ вершины A симплициального комплекса K называется подкомплекс комплекса K, состоящий из его симплексов, имеющих точку A своей вершиной, и из всех их граней. (Необходимо отличать этот подкомплекс от определенной в II.3.6 открытой звезды $\mathrm{st}\, A$, являющейся открытым подмножеством пространства $|K|$.)

Определение 5.10. Пусть $c \in C_q(K)$ — такая цепь, что $c \subset \mathrm{St}\, A$, и пусть

$$c = \Sigma\, a_i A_i^0 \ldots A_i^q.$$

Цепь $Ac \in C_{q+1}(K)$, определенная формулой

$$Ac = \Sigma\, a_i A A_i^0 \ldots A_i^q,$$

называется *соединением* вершины A с цепью c.

Лемма 5.11. *Если* $c \subset \mathrm{St}\, A$, *где* $c \in C_q(K)$, то

$$\partial(Ac) = c - A(\partial c), \quad \text{если } q > 0,$$

$$\partial(Ac) = c - \mathrm{In}(c)(A), \text{ если } q = 0.$$

Доказательство. В силу линейности этих соотношений можно предполагать, что цепь c является элементарной q-мерной цепью $A^0 \ldots A^q$. Тогда для $q > 0$ будем иметь:

$$\partial Ac = \partial(AA^0 \ldots A^q) = A^0 \ldots A^q - \sum_{i=1}^{q} (-1)^i AA^0 \ldots \hat{A}^i \ldots A^q = $$
$$= c - A\partial c,$$

а для $q = 0$

$$\partial Ac = \partial AA^0 = A^0 - A = c - \mathrm{In}\,(c)A.$$

Теорема 5.12. *Звезда* $\mathrm{St}\,(A)$ *любой вершины* A *симплициального комплекса* K *является ациклическим подкомплексом.*

Доказательство. Пусть $z \in Z_q(\mathrm{St}\,(A))$, где $q > 0$. Тогда согласно лемме 5.11 $\partial(Az) = z$, так что $z \in B_q(\mathrm{St}\,(A))$. Следовательно, $H_q(\mathrm{St}\,(A)) = 0$. Если $z \in \tilde{Z}_0(\mathrm{St}\,(A))$, то $\mathrm{In}\,(z) = 0$, так что $\partial Az = z$ и $z \in B_0(\mathrm{St}\,(A))$. Таким образом, $\tilde{H}_0(\mathrm{St}\,(A)) = 0$.

Теорема 5.13. *Любой симплекс является ациклическим комплексом.*

Это утверждение следует из теоремы 5.12, так как для любой вершины A произвольного симплекса s имеем $s = \mathrm{St}\,(A)$.

Используя теоремы 5.8 и 5.13, мы можем дать второе, менее калькулятивное доказательство теоремы 3.2. Пусть $f, g\colon (K, L) \to (K', L')$ — смежные симплициальные отображения. Для любого симплекса s комплекса K обозначим через $C(s)$ наименьший симплекс комплекса K', содержащий оба симплекса, fs и gs. Согласно теореме 5.13 подкомплекс $C(s)$ ацикличен. Кроме того, если симплекс s принадлежит подкомплексу L, то симплекс $C(s)$ принадлежит подкомплексу L'. Таким образом, C является ациклическим носителем алгебраических отображений f_0 и g_0. Следовательно, согласно теореме 5.8 $f_0 \simeq g_0$.

6. Кососимметрический цепной комплекс симплициального комплекса

Определение 6.1. Пусть K — произвольный симплициальный комплекс. Цепь $c \in C_q(K_O)$ называется *элементарной вырожденной цепью*, если $c = A^0A^1 \ldots A^q$, где $A^0 = A^1$, или $c = v + v'$, где $v = A^0 \ldots A^q$ — произвольная элементарная цепь, а v' — элементарная цепь, полученная из цепи v перестановкой двух соседних вершин A^i и A^{i+1} $(i = 0, 1, \ldots, q-1)$. Цепь, являющаяся линейной комбинацией элементарных вырожденных цепей, называется *вырожденной*. Подгруппа вырожденных цепей обозначается через $D_q(K_O)$.

Лемма 6.2. $\partial_q [D_q(K_O)] \subset D_{q-1}(K_O)$.

Лемма 6.3. *Для любого подкомплекса L комплекса K*

$$D_q(L_O) = D_q(K_O) \cap C_q(L_O).$$

Лемма 6.4. *Для любого симплициального отображения $f\colon K \to K'$*

$$f_q [D_q(K_O)] \subset D_q(K'_O).$$

Эти леммы непосредственно следуют из определения. Для доказательства следующих трех лемм достаточно заметить, что любая подстановка является произведением транспозиций (т. е. подстановок, переставляющих два соседних элемента).

Лемма 6.5. *Пусть $i_0, \ldots, i_q$ — произвольная перестановка чисел $0, \ldots, q$ и пусть $\varepsilon = +1$, если эта перестановка четна, и $\varepsilon = -1$, если эта перестановка нечетна. Тогда цепь*

$$A^0 \ldots A^q - \varepsilon A^{i_0} \ldots A^{i_q}$$

вырождена.

Лемма 6.6. *Цепь $c = A^0 \ldots A^q$ вырождена, если хотя бы одна вершина входит в нее более одного раза.*

Лемма 6.7. *Пусть вершины каждого q-мерного симплекса s_i комплекса K определенным образом упорядочены $A_i^0 < \ldots < A_i^q$.*

Тогда для любой q-мерной цепи $c \in C_q(K_0)$ существует, и притом только одна, q-мерная цепь $c' \in C_q(K_0)$ вида

$$c' = \sum_i a_i A_i^0 \ldots A_i^q,$$

для которой $c - c' \in D_q(K_O)$. Кроме того, $c' = 0$ тогда и только тогда, когда $c \in D_q(K_O)$. Если $c \subset L$, где L — некоторый подкомплекс, то $c' \subset L$.

Аналогия последних трех лемм с теоремами III.5.6 и III.5.7 подсказывает целесообразность введения групп

$$C_q(K_a) = C_q(K_O)/D_q(K_O).$$

Ввиду леммы 6.2 гомоморфизмы ∂_q: $C_q(K_O) \to C_{q-1}(K_O)$ индуцируют гомоморфизмы ∂_q: $C_q(K_a) \to C_{q-1}(K_a)$, так что система $K_a = \{C_q(K_a)\partial_q\}$ является цепным комплексом. Для любого подкомплекса L комплекса K цепной комплекс L_a естественным образом определяется как подкомплекс комплекса K_a. Этот подкомплекс является прямым слагаемым комплекса K_a.

Определение 6.8. Пусть (K, L) — произвольная симплициальная пара. Цепной комплекс K_a/L_a называется *кососимметрическим* цепным комплексом пары (K, L).

Мы можем теперь повторить все сказанное в пункте 2, заменив всюду упорядоченные комплексы K_O/L_O кососимметрическими комплексами K_a/L_a. Функтор K_a/L_a, f_a[1]) мы будем обозначать через A. Теорема 2.5 сохраняется при замене функтора O на функтор A.

Пункт 3 не требует почти никаких изменений. Данное в пункте 3 доказательство теоремы 3.2 пройдет и для кососимметрических комплексов, если условиться записывать вершины, входящие в элементарные (кососимметрические) цепи комплекса K в некотором фиксированном порядке. Данное в пункте 5 второе доказательство этой теоремы проходит без всяких изменений. Доказательство теоремы 3.7 даже упрощается. Действительно, если P — симплициальный комплекс, состоящий из одной вершины, то $C_q(P_a) = 0$, если $q \neq 0$.

Содержание пункта 4 переносится на кососимметрические цепи со следующими двумя изменениями.

В теореме 4.1 список соотношений, которым должны удовлетворять символы $gA^0 \ldots A^q$, должен быть пополнен следующими двумя типами соотношений:

$$qA^0 \ldots A^q = 0,$$

[1]) Через f_a обозначается отображение кососимметрических комплексов, индуцированное отображением f_O. (*Прим. ред.*)

если вершины $A^0, \ldots, A^q$ не все различны, и

$$gA^0 \ldots A^q = \varepsilon g A^{i_0} \ldots A^{i_q},$$

где $i_0, \ldots, i_q$ — произвольная перестановка чисел $0, \ldots, q$, а ε — ее знак.

Соответствующие дополнительные соотношения в теореме 4.1c следующие: $\varphi(A^0, \ldots, A^q) = 0$, если вершины $A^0, \ldots, A^q$ не все различны, и $\varphi(A^0, \ldots, A^q) = \varepsilon\varphi(A^{i_0}, \ldots, A^{i_q})$, если $i_0, \ldots, i_q$ — перестановка чисел $0, \ldots, q$ и ε — ее знак.

Из этих замечаний следует, что, заменив функтор O функтором A, мы получим на h-категории $\mathfrak{K}_s$ вторую совокупность теорий гомологий и когомологий. Ниже мы покажем (см. теорему 6.9), что оба построения дают изоморфные теории, так что употребление той или иной теории определяется исключительно соображениями удобства. Кососимметрические цепи теснее связаны с геометрией, на что указывает кососимметрический характер цепей и коцепей, построенных в пункте 5 главы III. Кроме того, кососимметрические цепи удобнее для действительного вычисления групп гомологий, так как соответствующие группы $C_q(K, L; G)$ «меньше». Упорядоченные цепи теснее связаны с теорией сингулярных гомологий, излагаемой в главе VII, а также более удобны в различных задачах, связанных с абстрактной алгеброй. В дальнейшем, если не сделано специального указания, предполагается, что используется любая из этих двух теорий.

Для сравнения теорий гомологий упорядоченных и кососимметрических комплексов мы для любой симплициальной пары (K, L) определим некоторое отображение

$$(1) \qquad \alpha\colon K_O/L_O \to K_a/L_a.$$

Пусть

$$\alpha_q\colon C_q(K_O) \to C_q(K_a) = C_q(K_O)/D_q(K_O)$$

— естественный гомоморфизм. Согласно лемме 6.2 отображения α_q перестановочны с отображениями ∂ и, следовательно, определяют некоторое отображение $\alpha\colon K_O \to K_a$. Это отображение переводит подкомплекс L_O в подкомплекс L_a и, следовательно, индуцирует отображение (1).

Теорема 6.9. *Для любой группы коэффициентов G отображение α индуцирует изоморфизмы*

$$\alpha_*\colon H_q(K_O/L_O; G) \approx H_q(K_a/L_a; G),$$
$$\alpha^*\colon H^q(K_a/L_a; G) \approx H^q(K_O/L_O; G).$$

Эти изоморфизмы определяют изоморфизм между теориями гомологий (когомологий), основанными на рассмотрении упорядоченных и соответственно кососимметрических комплексов.

Доказательство. В первую очередь удостоверимся, что отображение α_* является гомоморфизмом теорий гомологий. Для этого нужно проверить коммутативность следующих диаграмм:

$$\begin{array}{ccc} H_q(K_O/L_O;G) & \xrightarrow{\alpha_*} & H_q(K_a/L_a;G) \\ \downarrow{\scriptstyle f_*} & & \downarrow{\scriptstyle f_*} \\ H_q(K'_O/L'_O;G) & \xrightarrow{\alpha_*} & H_q(K'_a/L'_a;G) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} H_q(K_O/L_O;G) & \xrightarrow{\alpha_*} & H_q(K_a/L_a;G) \\ \downarrow{\scriptstyle \partial} & & \downarrow{\scriptstyle \partial} \\ H_{q-1}(L_O;G) & \xrightarrow{\alpha_*} & H_{q-1}(L_a;G), \end{array}$$

где f: $(K, L) \to (K', L')$ — произвольное симплициальное отображение. Но коммутативность этих диаграмм немедленно вытекает из коммутативности диаграмм

$$\begin{array}{ccc} K_O/L_O & \xrightarrow{\alpha} & K_a/L_a \\ \downarrow{\scriptstyle f_O} & & \downarrow{\scriptstyle f_a} \\ K'_O/L'_O & \xrightarrow{\alpha} & K'_a/L'_a \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} L_O & \xrightarrow{i_O} & K_O & \xrightarrow{j_O} & K_O/L_O \\ \downarrow{\scriptstyle \alpha} & & \downarrow{\scriptstyle \alpha} & & \downarrow{\scriptstyle \alpha} \\ L_a & \xrightarrow{i_a} & K_a & \xrightarrow{j_a} & K_a/L_a, \end{array}$$

где i: $L \subset K$ и j: $K \subset (K, L)$.

По аналогичным соображениям отображение α^* является гомоморфизмом теорий когомологий.

Тот факт, что отображения α_* и α^* являются изоморфизмами, вытекает из следующей теоремы.

Теорема 6.10. *Отображение* α: $K_O/L_O \to K_a/L_a$ *является гомотопической эквивалентностью* (см. определение IV.9.2).

Доказательство. Выберем частичное упорядочение вершин комплекса K, в котором вершины любого симплекса линейно упорядочены. Некоторую q-мерную цепь комплекса K_O будем называть *нормальной*, если она является линейной комбинацией цепей $A^0, \ldots, A^q$, для которых $A^0 < \ldots < A^q$. Очевидно, что для любой нормальной цепи c цепь $\partial_q c$ также нормальна.

Согласно лемме 6.7 для любой q-мерной цепи $c \in C_q(K_a)$ существует, и притом только одна, нормальная цепь $\bar{\alpha}_q c \in C_q(K_O)$, для которой $\alpha_q \bar{\alpha}_q c = c$. Так как цепь $\partial_q \bar{\alpha}_q c$ нормальна и $\alpha_{q-1} \partial_q \bar{\alpha}_q c = \partial_q \alpha_q \bar{\alpha}_q c = \partial_q c$, то $\partial_q \bar{\alpha}_q c = \bar{\alpha}_{q-1} \partial_q c$. Далее, если $c \subset L$ (т. е. $c \in C_q(L_a)$), то согласно лемме 6.7 $\bar{\alpha}_q c \subset L$. Следовательно, гомоморфизмы $\bar{\alpha}_q : C_q(K_a) \to C_q(K_O)$ определяют отображение

$$\bar{\alpha}:\ K_a/L_a \to K_O/L_O,$$

причем композиция $\alpha\bar{\alpha}$ является тождественным отображением.

Рассмотрим теперь отображение $\bar{\alpha}\alpha$: $K_O \to K_O$. Если $c \subset s$, где $c \in C_q(K)$, а s — некоторый симплекс комплекса K, то $\bar{\alpha}\alpha c \subset s$. Следовательно, полагая $C(s) = s$, получим, что C является носителем как отображения $\bar{\alpha}\alpha$, так и тождественного отображения i: $K_O \to K_O$. Так как согласно теореме 5.13 носитель C ацикличен и так как оба отображения $\bar{\alpha}\alpha$ и i алгебраичны, то из теоремы 5.8 следует, что отображение $\bar{\alpha}\alpha$: $K_O/L_O \to K_O/L_O$ гомотопно тождественному. Таким образом, отображение $\bar{\alpha}$ гомотопически обратно к отображению α. Тем самым доказано, что отображение α: $K_O/L_O \to K_a/L_a$ является гомотопической эквивалентностью.

Заметим, что отображение $\bar{\alpha}$ зависит от выбранного упорядочения вершин комплекса K. Однако индуцированные изоморфизмы $\bar{\alpha}_*$ (и $\bar{\alpha}^*$) не зависят от этого упорядочения, поскольку они обратны к изоморфизмам α_* (соответственно α^*).

7. Действие барицентрического подразделения

В этом пункте все комплексы предполагаются конечными. Пусть K — произвольный конечный симплициальный комплекс и $(l_K,\ \mathrm{Sd}\, K)$ — его барицентрическое подразделение (см. пункт II. 6).

Мы начнем с построения некоторого алгебраического отображения

$$\mathrm{Sd}:\ K_O \to (\mathrm{Sd}\, K)_O,$$

которое называется *оператором подразделения цепей* и обладает следующими свойствами:

(1) Если $c \subset s$, где $c \in C_q(K)$, а s — произвольный симплекс комплекса K, то $\mathrm{Sd}\, c \subset \mathrm{Sd}\, s$.

(2) $$\partial\, \mathrm{Sd}\, c = \mathrm{Sd}\, \partial c.$$

Положим $\mathrm{Sd}\ c = 0$, если $q < 0$. Так как любая вершина комплекса K является также вершиной комплекса $\mathrm{Sd}\, K$, то группа $C_0(K)$ является подгруппой группы $C_0(\mathrm{Sd}\, K)$. Определим отображение Sd: $C_0(K) \to C_0(\mathrm{Sd}\, K)$ как отображение вложения. Применяя принцип математической индукции, предположим, что для размерностей $i < q$ (где $q \geqslant 1$) уже определено отображение Sd, обладающее свойствами (1) и (2). Пусть c — произвольная элементарная q-мерная цепь комплекса K и пусть s — наименьший симплекс комплекса K, для которого $c \subset s$. Тогда $\partial c \subset s$ и, следовательно, $\mathrm{Sd}\,\partial c \subset \mathrm{Sd}\, s$. Так как s является вершиной комплекса $\mathrm{Sd}\, s$ и $\mathrm{Sd}\, s \subset \mathrm{St}\, s$, то можно воспользоваться определенной в 5.10 операцией соединения. Мы полагаем:

$$\mathrm{Sd}\, c = s \cdot \mathrm{Sd}\,(\partial c).$$

Очевидно, что $\mathrm{Sd}\, c \subset \mathrm{Sd}\, s$. Далее, согласно лемме 5.11

$$\partial\, \mathrm{Sd}\, c = \mathrm{Sd}\,(\partial c) - s \cdot \partial\, \mathrm{Sd}\,(\partial c) = \mathrm{Sd}\,(\partial c) - s \cdot \mathrm{Sd}\,(\partial\partial c) = \mathrm{Sd}\,(\partial c).$$

Таким образом, отображение Sd, удовлетворяющее условиям (1) и (2), определено на образующих группы $C_q(K)$. Очевидно, что это отображение определяет гомоморфизм $\mathrm{Sd}\colon C_q(K) \to C_q(\mathrm{Sd}\, K)$, также удовлетворяющий условиям (1) и (2). Для любого подкомплекса L комплекса K гомоморфизм Sd переводит подкомплекс L_O в подкомплекс $(\mathrm{Sd}\, L)_O$ и, следовательно, индуцирует отображение

$$\mathrm{Sd}\colon K_O/L_O \to (\mathrm{Sd}\, K)_O/(\mathrm{Sd}\, L)_O.$$

Следует отметить, что, хотя оператор подразделения цепей определяется по индукции, его построение не содержит никакого произвола и может быть заменено явной формулой.

В дополнение к линейному отображению $l_K\colon \mathrm{Sd}\, K \to K$ мы следующим образом определим некоторые симплициальные отображения:

$$\pi\colon \mathrm{Sd}\, K \to K,$$

называемые *проекциями*. Для каждой вершины b_s комплекса $\mathrm{Sd}\, K$ обозначим через $\pi(b_s)$ одну из вершин симплекса s комплекса K. Если $b_{s_0}, \ldots, b_{s_q}$ — вершины некоторого симплекса комплекса $\mathrm{Sd}\, K$, то симплекс s_i является гранью симплекса s_{i+1} $(i = 0, \ldots, q-1)$ и все вершины $\pi(b_{s_0}), \ldots, \pi(b_{s_q})$ содержатся в множестве вершин симплекса s_q. Поэтому согласно теореме II.4.4 отображение π вершин комплекса $\mathrm{Sd}\, K$ в вершины комплекса K можно единственным образом продолжить до некоторого симплициального отображения $\pi\colon \mathrm{Sd}\, K \to K$. Для любого подкомплекса L комплекса K отображение π переводит комплекс $\mathrm{Sd}\, L$ в подкомплекс L, так что

$$\pi\colon (\mathrm{Sd}\, K, \mathrm{Sd}\, L) \to (K, L).$$

Теорема 7.1. *Для каждой (конечной) симплициальной пары (K, L) оператор подразделения*

$$\mathrm{Sd}\colon K_O/L_O \to (\mathrm{Sd}\, K)_O/(\mathrm{Sd}\, L)_O$$

является гомотопической эквивалентностью. Отображение

$$\pi_O\colon (\mathrm{Sd}\, K)_O/(\mathrm{Sd}\, L)_O \to K_O/L_O,$$

индуцированное произвольной проекцией $\pi\colon (\mathrm{Sd}\, K, \mathrm{Sd}\, L) \to (K, L)$, гомотопически обратно к отображению Sd.

Доказательство. Мы должны построить цепные гомотопии

(3) $$\pi_O \operatorname{Sd} \simeq i_{oO}$$

(4) $$\operatorname{Sd} \pi_O \simeq j_O,$$

где i_O и j_O — тождественные отображения комплексов K_O/L_O и $(\operatorname{Sd} K)_o/(\operatorname{Sd} L)_O$ соответственно.

Заметим сначала, что если $c \subset s$, где $c \in C_q(K)$, то $\operatorname{Sd} c \subset \operatorname{Sd} s$ и $\pi_q \operatorname{Sd} c \subset s$. Следовательно, положив $C(s) = s$, мы определим для обоих отображений $\pi_O \operatorname{Sd}$ и i_O общий носитель C. Так как этот носитель ацикличен, то согласно теореме 5.8 действительно имеет место гомотопия (3).

Пусть теперь s — произвольный симплекс комплекса $\operatorname{Sd} K$ и $\bar{s}$ — наименьший симплекс комплекса K, содержащий все вершины симплекса s. Положим $C(s) = \operatorname{Sd} \bar{s}$. Если $c \in C_q(\operatorname{Sd} K)$ и $c \subset s$, то $\pi_q c \subset \bar{s}$ и $\operatorname{Sd} \pi_q c \subset C(s)$. Так как $s \subset C(s)$, то, следовательно, $C(s)$ является общим носителем отображений $\operatorname{Sd} \pi$ и j. Так как $C(s) = \operatorname{Sd} \bar{s} = \operatorname{St}(\bar{s})$ (звезда рассматривается в комплексе $\operatorname{Sd} \bar{s}$), то согласно теореме 5.12 носитель $C(s)$ ацикличен. Таким образом, соотношение (4) также является следствием теоремы 5.8.

Замечание. Легко видеть, что цепь $c - \pi \operatorname{Sd} c$ является вырожденной цепью, так что отображение π Sd индуцирует тождественное отображение кососимметрического цепного комплекса K_a. Соответствующее утверждение для отображения $\operatorname{Sd} \pi$, вообще говоря, неверно.

Из теоремы 7.1 непосредственно вытекает

Следствие 7.2. *Любая проекция*

$$\pi\colon (\operatorname{Sd} K, \operatorname{Sd} L) \to (K, L)$$

индуцирует изоморфизмы

$$\pi_*\colon H_q(\operatorname{Sd} K, \operatorname{Sd} L\,; G) \approx H_q(K, L\,; G),$$
$$\pi^*\colon H^q(K, L\,; G) \approx H^q(\operatorname{Sd} K, \operatorname{Sd} L\,; G).$$

Эти изоморфизмы не зависят от выбора проекции.

8. Единственность симплициальной теории гомологий

Пусть H — произвольная теория гомологий, определенная на h-категории $\mathfrak{K}'_s$ *конечных* симплициальных комплексов. Мы покажем, что для такой симплициальной теории гомологий имеет место теорема единственности, аналогичная теореме III.10.1.

Заметим сначала, что после очевидного изменения формулировок все результаты главы I, за исключением результатов пункта 11, переносятся на симплициальные теории гомологий. Предложение I.11.5 о том, что стягиваемое пространство гомологически тривиально, имеет следующий аналог.

Комплекс K гомологически тривиален, если он является звездой (см. определение 5.9) какой-нибудь из своих вершин.

Действительно, пусть $K = \mathrm{St}\, A$. Рассмотрим отображение f: $K \to A$ и тождественное отображение g: $A \to K$. Тогда композиция fg: $A \to A$ является тождественным отображением; в то время как отображение gf: $K \to K$ смежно с тождественным. Поэтому отображение f_* является изоморфизмом $H_q(K) \approx H_q(A)$, и так как A гомологически тривиально, то и комплекс K гомологически тривиален.

После этого все предложения пунктов от 2 до 9 из главы III переносятся на симплициальные теории гомологий без всякого изменения даже в обозначениях. Первая часть доказательства теоремы единственности III.10.1 (построение гомоморфизма ζ) приводит к следующей теореме.

Теорема 8.1 (теорема единственности симплициальной теории гомологий). *Для любых симплициальных теорий гомологий H и $\bar{H}$ на h-категории $\mathfrak{K}'_s$ конечных симплициальных комплексов и любого гомоморфизма*

$$h_0\colon G \to \bar{G}$$

их групп коэффициентов существует единственный гомоморфизм

$$h\colon H \to \bar{H} \quad \text{на } \mathfrak{K}'_s,$$

продолжающий гомоморфизм h_0. Если отображение h_0 изоморфно, то отображение h также изоморфно.

Таким образом, что касается симплициальных гомологий, то наша теория полна: установлены как теоремы существования, так и единственности.

Эта теорема по-новому освещает строение доказательства теоремы III. 10.1. Каждая теория гомологий H (в смысле главы I), определенная на некоторой допустимой категории $\mathfrak{A}$, содержащей категорию $\mathfrak{T}$ триангулируемых пар, порождает некоторую симплициальную теорию гомологий H_s (определенную на категории $\mathfrak{K}'_s$); для этого достаточно положить $H_{s,q}(K, L) = H_q(|K|, |L|)$. Справедливость для H_s аксиом теории гомологий непосредственно вытекает из справедливости этих аксиом для теории H, за исключением аксиомы вырезания, которая является теоремой III.2.2.

Пусть $H, \bar{H}$ — две теории гомологий (определенные на категории $\mathfrak{T}$) и h_0: $G \to \bar{G}$ — произвольный гомоморфизм их групп коэффициентов. Тогда из теоремы 8.1 следует, что гомоморфизм h_0 можно единственным образом продолжить до некоторого гомоморфизма соответствующих симплициальных теорий:

$$h_s\colon H_s \to \bar{H}_s \quad \text{на } \mathfrak{K}'_s.$$

Во второй части доказательства теоремы III.10.1, по существу, показывается, как перейти от гомоморфизма h_s к гомоморфизму

$$h\colon\ H \to \overline{H} \text{ на } \mathfrak{I}.$$

Только в этой части доказательства теоремы единственности мы пользуемся теоремой о симплициальной аппроксимации (см. пункт II. 7).

Аналогично можно рассмотреть и теорию когомологий; подробное проведение соответствующих рассуждений предоставляется читателю.

Замечания

Классическая теорема инвариантности. Изложим здесь современную трактовку классической теоремы инвариантности.

Пусть (X, A) — произвольная триангулируемая пара и T, T' — некоторые ее триангуляции. Будем считать, что $T' < T$, если для каждой вершины B' триангуляции T' существует такая вершина B триангуляции T, что

$$\operatorname{st}(B') \subset \operatorname{st}(B).$$

Отметим следующие формальные свойства введенного отношения:

(1) Из $T' < T$ и $T'' < T'$ следует, что $T'' < T$.

(2) ${}^nT < T$, где ${}^nT$ — n-е барицентрическое подразделение триангуляции $T (n \geqslant 0)$.

(3) Для любых триангуляций T и T' существует такое целое число n, что ${}^nT < T'$ (следует из леммы II.6.5).

(4) Для любых триангуляций T_1, T_2 существует такая триангуляция T, что $T < T_1$, $T < T_2$ (следует из свойств (2) и (3)).

Пусть $T' < T$. Если для каждой вершины B' триангуляции T выбрать, как указано выше, вершину $p(B') = B$ триангуляции T, то определится некоторое симплициальное отображение $p\colon T' \to T$, которое мы будем называть *проекцией*. Любые две проекции смежны друг другу и поэтому согласно теоремам 3.2 и V.4.4 индуцируют один и тот же гомоморфизм

$$\alpha(T, T')\colon\ H_q(T') \to H_q(T).$$

Здесь через $H_q(T)$, где $T = \{t, (K, L)\}$ — триангуляция пары (X, A), обозначена группа гомологий $H_q(K, L)$, безразлично в кососимметрическом или упорядоченном смыслах.

Если $T'' < T' < T$ и $p\colon T' \to T$, $p'\colon T'' \to T'$ — соответствующие проекции, то отображение $pp'\colon T'' \to T$ также будет проекцией. Отсюда следует, что

(5) если $T'' < T' < T$, то

$$\alpha(T, T')\,\alpha(T', T'') = \alpha(T, T'').$$

Основным является следующее утверждение.

(6) Для любых триангуляций $T' < T$ отображение $\alpha(T, T')$ является изоморфизмом.

В специальном случае, когда триангуляция T' является барицентрическим подразделением ${}^1T$ триангуляции T, свойство (6) вытекает из следствия 7.2. Поэтому ввиду свойства (5) утверждение (6) имеет место и в случае, когда $T' = {}^nT$. Пусть теперь триангуляция $T' < T$ произвольна. Рассмотрим число n, для которого ${}^nT < T' < T$. Согласно только что сказанному отображение $\alpha(T, {}^nT) = \alpha(T, T')\alpha(T', {}^nT)$ является изоморфизмом. Поэтому отображение $\alpha(T, T')$ эпиморфно. Заменяя здесь T на T', а T' на ${}^nT$, получаем, что отображение $\alpha(T', {}^nT)$ также эпиморфно. Следовательно, отображение $\alpha(T, T')$ является изоморфизмом. Свойство (6) доказано.

Пусть теперь T_1, T_2 — произвольные триангуляции пары (X, A). Выберем триангуляцию T, для которой $T < T_1, T < T_2$, и положим:

$$\beta_T(T_2, T_1) = \alpha(T_2, T)\alpha^{-1}(T_1, T): \ H_q(T_1) \approx H_q(T_2).$$

Если $T' < T$, то

$$\begin{aligned}\beta_{T'}(T_2, T_1) &= \alpha(T_2, T')\alpha^{-1}(T_1, T') = \\ &= \alpha(T_2, T)\alpha(T, T')\alpha^{-1}(T, T')\alpha^{-1}(T, T_1) = \beta_T(T_2, T_1).\end{aligned}$$

Отсюда и из свойства (4) следует, что отображение $\beta_T(T_2, T_1)$ не зависит от выбора триангуляции T. Таким образом, имеют место однозначно определенные изоморфизмы

$$(7) \qquad \beta(T_2, T_1): \ H_q(T_1) \approx H_q(T_2).$$

В частности, $\beta(T_2, T_1) = \alpha(T_2, T_1)$, если $T_1 < T_2$. Пусть T_1, T_2, T_3 — три триангуляции. Рассматривая триангуляцию T, для которой $T < T_i (i = 1, 2, 3)$, получим:

$$(8) \qquad \beta(T_3, T_1) = \beta(T_3, T_2)\beta(T_2, T_1).$$

Таким образом, группы $H_q(T)$ вместе с изоморфизмом (7) образуют транзитивную систему групп в смысле пункта I.6. В этом смысле группы $H_q(T)$ не зависят от триангуляции T и поэтому их можно обозначать через $H_q(X, A)$.

Классическое доказательство инвариантности ограничивается проверкой изоморфности групп $H_q(T_1)$ и $H_q(T_2)$. «Однозначно определенный» изоморфизм (7), удовлетворяющий свойству (8) при этом явно не описывается.

Построив группы $H_q(X, A)$, можно было бы аналогичным образом построить отображения ∂ и f_* и затем проверить аксиомы. Тем самым было бы получено доказательство существования теории гомологий на категории триангулируемых пространств. Однако этого делать нам не стоит, потому что в следующей главе мы докажем существование теории гомологий на более широких категориях.

История теоремы инвариантности. Развитие теории гомологий в период 1895—1925 гг. в основном концентрировалось вокруг вопроса о топологической инвариантности групп гомологий. Первое вполне удовлетворительное доказательство было предложено Александером в конце этого периода на основе развитой им теории симплициальных комплексов (Trans. Amer. Math. Soc. **28** (1926), 301—329).

До Александера использовалось более общее понятие клеточного комплекса (см. главу XIII второго тома). Группы гомологий определялись с помощью клеточного разбиения пространства, которое после ориентации его клеток (т. е. определенного выбора коэффициентов инцидентности — коэффициентов граничных соотношений) определяло некоторый цепной комплекс. Группы гомологий этого комплекса и назывались группами гомологий данного пространства. В связи с этим построением немедленно возникал ряд проблем:

(1) дать отчетливое определение клеточных комплексов,

(2) доказать ориентируемость (т. е. показать, что $\partial\partial = 0$),

(3) доказать независимость групп гомологий от выбора ориентации и, наконец,

(4) доказать независимость групп гомологий от выбора клеточного разбиения.

Последняя (проблема и является проблемой инвариантности.

При использовании слишком общих определений клеточных комплексов вторая проблема оказывается весьма трудной. Проблемы (1), (2) и (3) были решены не для любых комплексов, а лишь для полиэдров, т. е. объединений клеток (множеств, определяющихся системами линейных уравнений и неравенств) некоторого евклидова пространства. Относительно проблемы (4) была доказана инвариантность при подразделении. В связи с этим было высказано так называемое основное предположение комбинаторной топологии (Hauptvermutung): *гомеоморфные полиэдры обладают изоморфными подразделениями*, из которого с помощью доказанной инвариантности при подразделении уже вытекает топологическая инвариантность. Однако это предположение и по сей день остается недоказанным.

Решение проблемы инвариантности требует, как это видно из самой формулировки проблемы, использования лишь топологических отображений. Однако группы гомологий являются также гомотопическими инвариантами. Использование этого обстоятельства позволило Александеру избежать утонченного исследования топологических эквивалентностей и дало возможность заменить его грубым рассмотрением симплициальных аппроксимаций и деформаций, что и привело к удовлетворительному доказательству.

Симплициальные комплексы необходимы в основном для преодоления теоретических трудностей и весьма неудобны для вычисления групп гомологий даже простых пространств. Как правило, триангуляция пространства требует значительного числа симплексов. Как указано в упражнении D.6 главы III, для триангуляции тора необходимы по меньшей мере 42 симплекса. Симплекс размерности n имеет $2^n - 1$ граней. С этой точки зрения, полиэдральные и клеточные разбиения значительно более удобны (см. главы XIII и XIV второго тома).

Группы гомологий Майера. Пусть K — произвольный симплициальный комплекс. Рассмотрим свободную абелеву группу $M_n(K)$, образующими которой являются системы $(A^0, \ldots, A^n)$ вершин комплекса K, принадлежащие одному симплексу комплекса K. Две такие системы будем считать равными, если они отличаются только порядком своих членов. Определим гомоморфизм $F\colon M_n(K) \to M_{n-1}(K)$, положив:

$$F(A^0, \ldots, A^n) = \sum_{i=0}^{n} (A^0, \ldots, \hat{A}^i, \ldots, A^n).$$

Пусть p — некоторое простое число и G — такая абелева группа, что $pG = 0$ (т. е. $pg = 0$ для всех $g \in G$). Положим $M_n(K; G) = M_n(K) \otimes G$ и рассмотрим гомоморфизм $F\colon M_n(K; G) \to M_{n-1}(K; G)$, индуцированный определенным выше отображением F. Очевидно, что итерация F^p отображения F равна нулю. Следовательно, для любого целого числа $0 < q < p$ композиция отображений

$$M_{n+p-q} \xrightarrow{F^{p-q}} M_n \xrightarrow{F^q} M_{n-q}$$

тривиальна. Группа гомологий Майера $H_{n,q}(K; G)$ определяется как $\operatorname{Ker} F^q / \operatorname{Im} F^{p-q}$. Впервые эти группы были рассмотрены Ч. Майером (A new homology theory I, II, Ann. of Math. **43** (1942), 370—380, 594—605). Он нашел много их свойств, но не смог установить их связи с обычными группами гомологий. Это было сделано Спейньером (The Mayer homology theory, Bull. Amer. Math. Soc. **55** (1949), 102—112), который существенно использовал нашу теорему единственности VI.8.1. Спейньер определил для произвольного подкомплекса L комплекса K относительные группы гомологий $H_{n,q}(K, L; G)$ и граничный оператор $F^q\colon H_{n,q}(K, L; G) \to H_{n-q,p-q}(L; G)$, а для произвольного симплициального отображения $f\colon (K, L) \to (K', L')$ гомоморфизм $f_*\colon H_{n,q}(K, L; G) \to H_{n,q}(K', L'; G)$. Затем он показал, что группы $H_{n,q}$, соответствующим образом перенумерованные, определяют несколько теорий гомологий на h-категории симплициальных комплексов. Группа коэффициентов каждой теории либо тривиальна, либо изоморфна группе G в зависимости от арифметических свойств соответствующих индексов. Следовательно, согласно теореме единственности группа $H_{n,q}(K, L; G)$ либо тривиальна, либо изоморфна обыкновенной группе гомологий

$H_r(K, L; G)$ для некоторого r. Точный результат гласит: $H_{n,q}(K, L; G) \approx H_r(K, L; G)$ в следующих двух случаях:

$$n+1 \equiv q \pmod p \quad \text{и} \quad r = 2(n+1-q)/p,$$

$$n+1 \equiv 0 \pmod p \quad \text{и} \quad r = 2(n+1)/p - 1.$$

Во всех остальных случаях группы $H_{n,q}$ тривиальны.

Упражнения

А. Симплициальные аппроксимации

1. Показать, что две симплициальные аппроксимации g_1, g_2: $K \to K_1$ одного и того же отображения f: $|K| \to |K_1|$ смежны.

2. Показать, что проекция π: $\mathrm{Sd}\, K \to K$ (в смысле пункта 7) является симплициальной аппроксимацией линейного отображения l_K: $\mathrm{Sd}\ K \to K$, входящего в определение подразделения.

В. Локально конечные комплексы

Определение. Пусть K — произвольный (возможно бесконечный) симплициальный комплекс. Каждой элементарной цепи $A^0 \ldots A^q \in C_q(K_0)$ отнесем целочисленную коцепь $\varphi \in C^q(K_0; J)$, для которой $\varphi(A^0, \ldots, A^q) = 1$ и $\varphi(c) = 0$ для всех других элементарных цепей комплекса $C_q(K_0)$. Так, полученные коцепи φ порождают свободную подгруппу группы $C^q(K_0; J)$. Эту подгруппу мы будем обозначать через $C^q(K)$ и будем называть ее группой *конечных целочисленных коцепей* комплекса K.

1. Показать, что комплекс K тогда и только тогда локально конечен, когда кограница каждой конечной коцепи является конечной коцепью. Соответствующий коцепный комплекс обозначается через K^o.

2. Симплициальное отображение f: $K \to K_1$ локально конечного комплекса K в локально конечный комплекс K_1 называется *локально конечным*, если прообраз $f^{-1}(L)$ любого конечного подкомплекса L комплекса K_1 является конечным подкомплексом комплекса K. Показать, что локально конечное симплициальное отображение индуцирует некоторое отображение f^o: $K_1^o \to K^o$.

3. Пусть L — произвольный подкомплекс локально конечного комплекса K и пусть i: $L \to K$, j: $K \to (K, L)$ — отображения вложения. Обозначим через $K^o - L^o$ ядро отображения i^o: $K^o \to L^o$. Показать, что локально конечное симплициальное отображение f: $(K, L) \to (K_1, L_1)$ индуцирует отображение f^o: $K_1^o - L_1^o \to K^o - L^o$. Показать, что при соответствующих определениях категория $\mathfrak{L}$ пар локально конечных комплексов и локально конечных отображений является h-категорией, а пара $K^o - L^o$, f^o — контравариантным h-функтором O', определенным на категории $\mathfrak{L}$, значения которого принадлежат категории $\delta\mathfrak{G}$ коцепных комплексов (с прямыми отмеченными парами).

4. h-функтор O' позволяет построить некоторые группы гомологий и когомологий $\mathfrak{H}_q(K, L; G)$, $\mathfrak{H}^q(K, L; G)$. Дать подробное построение этих групп аналогично проведенному в пункте 3. Какие ограничения необходимо наложить при этом на группу коэффициентов G?

5. С помощью кососимметрических цепей определить функтор A', аналогичный функтору A. Показать, что теории гомологий и когомологий, полученные с помощью функторов O' и A', изоморфны.

6. Сравнить H- и $\mathfrak{H}$-теории гомологий для конечных комплексов. Сопоставить результат с результатом упражнения F 4 главы V.

7. Показать, что в $\mathfrak{H}$-теории приведенные группы определены только для конечных комплексов.

Замечания относительно терминологии. Группы гомологий H_q бесконечных комплексов, основанные на цепных комплексах K_O (или K_a), называются *прямыми* группами гомологий, в то время как соответствующие группы когомологий H^q называются *обратными* группами когомологий. В локально конечных комплексах группы когомологий $\mathfrak{H}^q$, основанные на цепных комплексах K^O (или K^a), называются *прямыми группами когомологий*, в то время как соответствующие группы гомологий называются *обратными группами гомологий*. Основания для этой терминологии станут ясными в упражнении F главы VIII. Прямые группы гомологий и когомологий не определены для компактных коэффициентов. Если для всех цепей и коцепей используются линейные обозначения, то прямые группы основываются на конечных линейных формах, в то время как обратные группы используют бесконечные линейные формы. По причинам, изложенным в замечании после теоремы 4.1c, для цепей используются линейные обозначения, а для коцепей — функциональные, независимо от того, является цепь или коцепь конечной или бесконечной.

ГЛАВА VII

ТЕОРИЯ СИНГУЛЯРНЫХ ГОМОЛОГИЙ

1. Введение

Цель этой главы — доказать существование теорий гомологий и когомологий на максимальной допустимой категории $\mathfrak{A}_1$ всех пар (X, A) и всех их отображений. Существование теории гомологий (когомологий) доказывается для любой заданной группы коэффициентов из категорий $\mathfrak{G}_R$ (соответственно из категорий $\mathfrak{G}_R$ или $\mathfrak{G}_C$); областью значений теории является категория, которой принадлежит группа коэффициентов. Теория сингулярных гомологий со значениями в категории $\mathfrak{G}_C$ не рассматривается.

Метод построения состоит в следующем. Используя отображения упорядоченных симплексов в пространство X, мы строим некоторый цепной комплекс $S(X)$, который называется *сингулярным комплексом* пространства X. Затем, используя методы главы V, мы определяем группы гомологий и когомологий произвольной пары (X, A) над некоторой группой коэффициентов как соответствующие группы комплекса $S(X)/S(A)$.

Все аксиомы, кроме аксиом гомотопии и вырезания, являются тривиальными следствиями соответствующих теорем относительно цепных комплексов. Для доказательства аксиомы гомотопии необходимо уметь строить цепную гомотопию по данной непрерывной, а доказательство теоремы вырезания требует некоторых предварительных построений.

2. Сингулярный комплекс топологического пространства

Рассмотрим в евклидовом пространстве R^{q+1} с координатами $(x_0, \ldots, x_q)$ единичный q-мерный симплекс Δ_q (см. определение II.2.2). Вершины $d^0, \ldots, d^q$ этого симплекса являются единичными точками координатных осей пространства R^{q+1}. Если рассматривать пространство R^q как подмножество пространства R^{q+1}, заданное уравнением $x_q = 0$, то симплекс Δ_{q-1} будет гранью симплекса Δ_q с вершинами $d^0, \ldots, d^{q-1}$. В симплексе Δ_q барицентрические координаты любой точки совпадают с ее декартовыми координатами.

Рассмотрим симплициальные отображения

$$e_q^i\colon \Delta_{q-1} \to \Delta_q \qquad (i = 0, \ldots, q),$$

заданные следующими соответствиями вершин:

$$e_q^i(d^j) = d^j, \quad \text{если } j < i,$$
$$e_q^i(d^j) = d^{j+1}, \quad \text{если } i \leqslant j.$$

Таким образом, отображение e_q^i симплициально и с сохранением порядка вершин отображает симплекс Δ_{q-1} на $(q-1)$-мерную грань симплекса Δ_q, не содержащую вершины d^i.

Лемма 2.1. $e_q^i e_{q-1}^j = e_q^j e_{q-1}^{i-1}$, *если* $0 \leqslant j < i \leqslant q$.

Доказательство тривиально.

Определение 2.2. Непрерывное отображение

$$T\colon \Delta_q \to X$$

единичного q-мерного симплекса Δ_q в топологическое пространство X называется *сингулярным q-мерным симплексом пространства* X. Сингулярный $(q-1)$-мерный симплекс

$$T^{(i)} = Te_q^i\colon \Delta_{q-1} \to T \qquad (i = 0, \ldots, q)$$

называется i-й *гранью* сингулярного симплекса T.

Из леммы 2.1 вытекает

Лемма 2.3. $(T^{(i)})^{(j)} = (T^{(j)})^{(i-1)}$, *если* $0 \leqslant j < i \leqslant q$.

Определение 2.4. Свободная абелева группа, порожденная сингулярными q-мерными симплексами пространства X, обозначается через $C_q(X)$ и называется группой *сингулярных (целочисленных) q-мерных цепей пространства* X. Если $q < 0$, то q-мерных симплексов не существует и $C_q(X) = 0$.

Граничный гомоморфизм

$$\partial_q\colon \quad C_q(X) \to C_{q-1}(X)$$

определяется следующим образом. Если $q \leqslant 0$, то $\partial_q = 0$. Если $q > 0$, то для любого сингулярного q-мерного симплекса T полагаем

$$\partial_q T = \sum_{i=0}^{q} (-1)^i T^{(i)}.$$

Лемма 2.5. $\partial_{q-1}\partial_q = 0$.

Доказательство. Если $q \leqslant 1$, то $\partial_{q-1} = 0$ согласно определению. Предположим, что $q \geqslant 2$. Достаточно проверить лемму 2.5 для каждой образующей T группы $C_q(X)$. Согласно определению

$$\partial_{q-1}\partial_q T = \sum_{i=0}^{q} (-1)^i \partial_{q-1} T^{(i)} = \sum_{i=0}^{q} \sum_{j=0}^{q-1} (-1)^i (-1)^j (T^{(i)})^{(j)} =$$
$$= \sum_{0 \leq j < i \leq q} (-1)^{i+j} (T^{(i)})^{(j)} + \sum_{0 \leq i \leq j \leq q} (-1)^{i+j} (T^{(i)})^{(j)}.$$

В силу леммы 2.3 первая сумма равна

$$\sum_{0\le j<i\le q}(-1)^{i+j}(T^{(j)})^{(i-1)}.$$

Заменив $i-1$ на j и j на i, получим:

$$-\sum_{0\le i\le j<q}(-1)^{i+j}(T^{(i)})^{(j)}.$$

Поэтому обе суммы сокращаются. Лемма доказана.

Из леммы 2.5 следует, что система $\{C_q(X), \partial_q\}$ является цепным комплексом. Этот цепной комплекс обозначается через $S(X)$. Для любого подпространства A пространства X группа $C_q(A)$ порождается некоторым подмножеством множества образующих группы $C_q(X)$ и оператор ∂_q на группе $C_q(A)$ согласован с оператором ∂_q на группе $C_q(X)$, т. е. комплекс $S(A)$ является подкомплексом комплекса $S(X)$ (и даже его прямым слагаемым). Если цепь $c\in C_q(X)$ принадлежит группе $C_q(A)$, то мы будем писать $c\subset A$.

Определение 2.6. *Сингулярным комплексом пары* (X, A), состоящей из топологического пространства X и его подпространства A, называется цепной комплекс $S(X)/S(A)$. Его группы $C_q(S(X)/S(A)) = C_q(X)/C_q(A)$ являются свободными группами.

Замечание. Строго говоря, $S(A)$ не является подкомплексом комплекса $S(X)$, потому что образующими комплекса $S(A)$ являются отображения $T\colon \Delta_q\to A$, а не отображения $\Delta_q\to X$. Отображение вложения $i\colon A\subset X$ индуцирует изоморфизм комплекса $S(A)$ с некоторым прямым слагаемым комплекса $S(X)$, ввиду чего фактор-комплекс $S(X)/S(A)$ следовало бы записывать в виде $S(X)/iS(A)$.

Лемма 2.7. *Для любого отображения $f\colon (X, A)\to(Y, B)$ гомоморфизмы $f_q\colon C_q(X)\to C_q(Y)$ и $f_q\colon C_q(A)\to C_q(B)$, определенные формулой*

$$f_q(T) = fT,$$

где $T\colon \Delta_q\to X$ (соответственно $T\colon \Delta_q\to A$), порождают отображение

$$f_S\colon S(X)/S(A)\to S(Y)/S(B).$$

Если $f\colon (X, A)\to(Y, B)$ — тождественное отображение, то и f_s — тождественное отображение. Если $f\colon (X, A)\to(Y, B)$, $g\colon (Y, B)\to(Z, C)$, то $(gf)_S = g_Sf_S$.

Для доказательства необходимо только проверить соотношения коммутативности $\partial_q f_q = f_{q-1}\partial_q$, которые являются, однако, непосредственным следствием соотношения

$$(fT)^{(i)} = fTe_q^i = f(T^{(i)}).$$

Лемма 2.7 утверждает, что пара $S(X)/S(A)$, f_S является ковариантным функтором S, определенным на категории $\mathfrak{A}_1$ пар топологических пространств и принимающим значения в категории $\partial\mathfrak{G}$ цепных комплексов (напомним, что через $\mathfrak{G}$ обозначается категория обычных абелевых групп, т. е. $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}_R$, где R — кольцо целых чисел). Превратим теперь категорию $\mathfrak{A}_1$ в c-категорию, определив отмеченные пары (i, j) как пары, состоящие из отображений вложения i: $A \to X$, j: $X \to (X, A)$, где (X, A) — произвольная пара категории $\mathfrak{A}_1$. Так как i_s является отображением вложения $S(A) \to$ $\to S(X)$, то последовательность

$$0 \to S(A) \xrightarrow{i_s} S(X) \xrightarrow{j_s} S(X) / S(A) \to 0$$

точна, так что пара (i_s, j_s) отмечена в категории $\partial\mathfrak{G}$. Поскольку, как это было указано ранее, подкомплекс $S(A)$ является прямым слагаемым комплекса $S(X)$, то отмеченная пара (i_s, j_s) является *прямой парой* в смысле определения V.3.1. Таким образом, функтор S является c-функтором.

Сделаем теперь следующий шаг. В пункте V.4 c-категория $\partial\mathfrak{G}$ была превращена в h-категорию. Сделаем то же самое с категорией $\mathfrak{A}_1$. С этой целью будем понимать гомотопии и точки категории $\mathfrak{A}_1$ в их обычном смысле, а вырезания определим следующим образом. Отображение f: $(X', A') \to (X, A)$ называется *вырезанием*, если

(1) f является отображением вложения,

(2) $X \setminus A = X' \setminus A'$ и

(3) замыкание разности $X \setminus X'$ принадлежит внутренности подпространства A.

Два последних условия могут быть заменены следующими, более симметричными условиями

$$A' = X' \cap A, \quad X = \operatorname{Int}(X') \cup \operatorname{Int}(A).$$

Заметим, что это понятие вырезания обобщает понятие, введенное в пункте I.3, поскольку мы не требуем, чтобы множество $U = X \setminus X'$ было открытым.

Превратив, таким образом, категорию $\mathfrak{A}_1$ в h-категорию, мы можем теперь сформулировать основной результат этой главы.

Т е о р е м а 2.8. *Если рассматривать категорию $\partial\mathfrak{G}$ как h-категорию относительно прямых отмеченных пар, то функтор S: $\mathfrak{G}_1 \to \partial\mathfrak{G}$ будет ковариантным h-функтором (см. определение* IV.9.4).

Как уже было показано, S является c-функтором. Таким образом, для доказательства теоремы остается показать, что функтор S сохраняет гомотопии, обобщенные вырезания и точки. Это будет сделано в теоремах 4.7, 7.1 и 9.1. Предположим, что эти теоремы уже доказаны. Применяя к функтору S теорему IV.9.5, мы придем тогда к следующему определению, являющемуся нашей основной целью.

Определение 2.9. Композиция h-функтора S и теории гомологий на категории $\partial\mathfrak{G}$ с группой коэффициентов G (см. определение V. 11.3) определяет некоторую теорию гомологий на категории $\mathfrak{A}_1$. Эта теория называется *теорией сингулярных гомологий на категории $\mathfrak{A}_1$ с группой коэффициентов G*. Композиция функтора S и теории когомологий на категории $\partial\mathfrak{G}$ с группой коэффициентов G (см. определение V. 12.3) определяет *теорию сингулярных когомологий на категории $\mathfrak{A}_1$ с группой коэффициентов G*. Для любой пары $(X, A) \in \mathfrak{A}_1$ группы гомологий $H_q(S(X)/S(A); G)$ и когомологий $H^q(S(X)/S(A); G)$ (см. соглашения V. 11.4, V. 12.4) обозначаются через $H_q(X, A; G)$ и $H^q(X, A; G)$ соответственно и называются *q-мерными группами сингулярных гомологий и когомологий пары (X, A) с группой коэффициентов G*. Согласно определениям V. 11.3 и V. 12.3 здесь возможны следующие случаи:

(1) $G \in \mathfrak{G}_R$, и тогда $H_q(X, A; G) \in \mathfrak{G}_R$,

(2) $G \in \mathfrak{G}_R$, и тогда $H^q(X, A; G) \in \mathfrak{G}_R$,

(3) $G \in \mathfrak{G}_C$, и тогда $H^q(X, A; G) \in \mathfrak{G}_C$.

Заметим, что для компактной группы G группы сингулярных гомологий $H_q(X, A; G)$ не определены. Причина этого — отсутствие, как правило, у группы $C_q(X)$ конечной базы (см. определение V.11.3).

Укажем здесь также другое, иногда более удобное, определение сингулярных симплексов. Пусть s — произвольный упорядоченный q-мерный симплекс с вершинами $A^0 < \ldots < A^q$. Любое отображение T: $|s| \to X$ называется *сингулярным q-мерным симплексом* пространства X (в новом смысле). Пусть s' — симплекс с вершинами $B^0 < \ldots < B^q$ и T': $|s'| \to X$ — произвольное отображение. Отображения T и T' называются эквивалентными, если $T = T'B$, где B: $s \to s'$ — симплициальное отображение, для которого $B(A^i) = B^i$ $(i = 0, \ldots, q)$. С этой точки зрения, образующими группы $C_q(X)$ являются не индивидуальные сингулярные q-мерные симплексы, а их классы эквивалентности. Очевидно, что каждый такой класс содержит в точности один сингулярный q-мерный симплекс в смысле определения 2.2.

3. Прямое описание основных понятий

Этот пункт служит той же цели, что и пункт VI. 4. В нем дается прямое описание теорий сингулярных гомологий и когомологий. Замечания, сделанные в начале пункта VI. 4, применимы и к содержанию этого пункта.

Группа $C_q(X, A; G)$ сингулярных q-мерных цепей пространства X по модулю подпространства A является по определению тензорным произведением $[C_q(X)/C_q(A)] \otimes G$. Согласно определению 2.4 сингулярные симплексы T: $\Delta_q \to X$ образуют базу группы $C_q(X)$. Согласно лемме V. 9.6 группа $C_q(X, A; G)$ порождается элементами вида $T \otimes g$, которые в соответствии с соглашением V. 11.4 мы будем обозначать через gT. Таким образом, получаем следующую теорему.

Теорема 3.1. *Группа $C_q(X, A; G)$ порождается элементами вида gT, где $g \in G$ и T: $\Delta_q \to X$ — произвольный сингулярный q-мерный симплекс пространства X. Эти образующие удовлетворяют соотношениям*

$$(g_1 + g_2)\,T = g_1T + g_2T$$

и

$$gT = 0, \text{ если } T(\Delta_q) \subset A.$$

Граничный оператор определяется формулой

$$\partial_q(gT) = \sum_{i=0}^{q} (-1)^i g T^{(i)}.$$

Каждому отображению f: $(X, A) \to (Y, B)$ соответствует цепное отображение f_q: $C_q(X, A; G) \to C_q(Y, B; G)$, задаваемое формулой

$$f_q(gT) = g(fT).$$

Если рассматривать эту теорему как определение, то необходимо проверить перестановочность отображений f_q и ∂_q и их согласованность с соотношениями.

Группы $Z_q(X, A; G)$, $B_q(X, A; G)$, $H_q(X, A; G)$ и отображения f_* и ∂_* описываются так же, как и в пункте VI.4; нужно лишь пары (K, L) заменить на пары (X, A).

Переходя к когомологиям, начнем с группы $C^q(X, A; G) = C^q(S(X)/S(A); G)$ коцепей пространства X по модулю подпространства A над группой G. Эта группа по определению является группой $\mathrm{Hom}\,(C_q(X)/C_q(A); G)$, и поэтому согласно сказанному в пунктах V.10 и V.12 имеет место

Теорема 3.1с. *Группа $C^q(X, A; G)$ является группой функций φ, определенных на сингулярных q-мерных симплексах T пространства X; значения $\varphi(T)$ этих функций принадлежат группе G и равны нулю, если симплекс T лежит в подпространстве A. Кограница δ^q определяется формулой*

$$(\delta^q\varphi)(T) = \sum_{i=0}^{q+1} (-1)^i \varphi(T^{(i)}).$$

Каждому отображению f: $(X, A) \to (Y, B)$ соответствует коцепное отображение f^q: $C^q(Y, B; G) \to C^q(X, A; G)$, задаваемое формулой

$$(f^q\varphi)(T) = \varphi(fT).$$

Группы $Z^q(X, A; G)$, $B^q(X, A; G)$, $H^q(X, A; G)$ и отображения f^*, δ^* описываются так же, как и в пункте VI.4; нужно лишь пары (K, L) заменить на пары (X, A).

4. Сохранение точек, приведенные группы

Теорема 4.1. *Сингулярный комплекс $S(P)$ пространства P, состоящего из одной точки, подобен точке в смысле определения* V. 4.7.

Доказательство. Для любого целого числа $q \geqslant 0$ существует единственный сингулярный q-мерный симплекс T_q: $\Delta_q \to P$. Если q четно и положительно, то $\partial T_q = T_{q-1}$, так что ∂_q: $C_q(X) \approx \approx C_{q-1}(X)$. Если $q < 0$, то $C_q(X) = 0$. Следовательно, условия определения V. 4.7 полностью выполнены.

Заметим, далее, что согласно теоремам 3.1 и 3.1c

$$C_0(P\,;G) \approx G, \quad C^0(P\,;G) \approx G$$

и $\partial_1 = 0$, $\partial_0 = 0$. Поэтому $H_0 = C_0$ и $H^0 = C^0$. Следовательно,

$$H_0(P\,;G) \approx G, \quad H^0(P\,;G) \approx G.$$

Это показывает, что теории сингулярных гомологий и когомологий над группой G имеют группу G своей группой коэффициентов в емысле определения I.6.1.

Заметим, что для любого пространства X произвольный сингусярный нульмерный симплекс T: $\Delta_0 \to X$ полностью определяется точкой $x = T(\Delta_0)$. Если мы вместо T условимся писать x, то каждая нульмерная цепь $c \in C_0(X, G)$ примет вид конечной формальной суммы

$$c = \Sigma\, g_i x_i,$$

где $g_i \in G$, $x_i \in X$. Любая коцепь $\varphi \in C^0(X, G)$ является с этой точки зрения функцией φ: $X \to G$ (вообще говоря, разрывной).

По аналогии с определениями VI.5.1 и VI. 5.2 введем следующие определения.

Определение 4.2. Любому элементу $c = \Sigma\, g_i x_i$ группы $C_0(X, G)$ отнесем его *индекс* $\mathrm{In}\,(c)$, положив

$$\mathrm{In}\,(c) = \Sigma\, g_i \in G.$$

Очевидно, что In: $C_0(X, G) \to G$.

Определение 4.3. *Пополненный* сингулярный комплекс $\tilde{S}(X)$ пространства X определяется следующим образом: если $X = \varnothing$, то $\tilde{S}(X) = S(X) = 0$. Если $X \neq \varnothing$, то

$$\begin{aligned}
C_q(\tilde{S}(X)) &= C_q X, \text{ если } q \neq -1,\\
C_{-1}(\tilde{S}(X)) &= J \quad (J \text{ — аддитивная группа целых чисел}),\\
\tilde{\partial}_q &= \partial_q, \text{ если } q \neq 0, -1,\\
\tilde{\partial}_0 &= \mathrm{In}\colon C_0(\tilde{S}(X)) \to J,\\
\tilde{\partial}_{-1} &= 0.
\end{aligned}$$

Приведенные нульмерные группы гомологий и когомологий пространства X над группой G определяются формулами

$$\tilde{H}_0(X;G)=H_0(\tilde{S}(X);G),\qquad \tilde{H}^0(X;G)=H^0(\tilde{S}(X);G).$$

Очевидно, что $H^q(\tilde{S}(X);G)=H_q(X;G)$, если $q\neq 0$. В размерности нуль группа $\tilde{Z}_0(X,G)=Z_0(S(X);G)$ является подгруппой группы $Z_0(X;G)=C_0(X;G)$ и состоит из нульмерных цепей c, для которых $\operatorname{In}(c)=0$. Отсюда следует

Теорема 4.4. *Приведенная нульмерная группа гомологий $\tilde{H}_0(X;G)$ является ядром гомоморфизма $f_*\colon H_0(X;G)\to H_0(P;G)$, где $f\colon X\to P$ и P — пространство, состоящее из одной точки.*

Таким образом, введенное понятие приведенной группы гомологий совпадает с понятием приведенной группы гомологий, определенным в пункте I.7, для любой теории гомологий.

В случае когомологий $H^q(\tilde{S}(X);G)=H^q(X;G)$, если $q\neq 0$, и $\tilde{H}^0(X;G)=Z^0(X;G)/\tilde{B}_0(X;G)$, где группа $\tilde{B}^0(X;G)=B^0(\tilde{S}(X);G)$ состоит из коцепей $\varphi\in C^0(X;G)$, принимающих одно и то же значение на всех сингулярных нульмерных симплексах (т. е. точках) пространства X. Отсюда следует

Теорема 4.4с. *Приведенная нульмерная группа когомологий $\tilde{H}^0(X;G)$ является фактор-группой группы $H^0(X;G)$ по образу гомоморфизма $f^*\colon H^0(P;G)\to H^0(X,G)$, где $f\colon X\to P$ и P — пространство, состоящее из одной точки.*

«Ациклические пространства» и «алгебраические» отображения $f\colon S(X)\to S(Y)$ определяются так же, как в VI.5.6 и VI.5.4. Носителем отображения f называется функция C, которая каждому сингулярному симплексу T пространства X относит такое подмножество $C(T)$ пространства Y, что $f(T)\subset C(T)$ и $C(T^{(i)})\subset C(T)$. Теорема VI. 5.7 вместе с доказательством переносятся на рассматриваемый случай без какого-то ни было формального изменения.

5. Линейный комплекс выпуклого множества

Мы изложим здесь некоторые конструкции, необходимые для излагаемого в пунктах 7 и 9 доказательства того, что функтор S сохраняет гомотопии и обобщенные вырезания.

Определение 5.1. Пусть V — произвольное выпуклое множество евклидова пространства. Сингулярный симплекс $T\colon \Delta_q\to V$ называется *линейным*, если для любых точек $\alpha_1,\alpha_2\in\Delta_q$ и любых чисел $\lambda_1\geqslant 0,\lambda_2\geqslant 0$, подчиненных условию $\lambda_1+\lambda_2=1$, имеет место равенство

$$T(\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2)=\lambda_1 T(\alpha_1)+\lambda_2 T(\alpha_2).$$

Линейные симплексы образуют подкомплекс $Q(V)$ комплекса $S(V)$.

Линейный симплекс T полностью определяется точками $v^i = T(d^i)$ $(i = 0, \ldots, q)$. Поэтому для обозначения линейного симплекса T можно использовать символ $v^0 \ldots v^q$. В этих обозначениях

$$\partial_q(v^0 \ldots v^q) = \sum_{i=0}^{q} (-1)^i v^0 \ldots \hat{v}^i \ldots v^q .$$

Определение 5.2. *Соединением* vT некоторой точки v множества V и линейного q-мерного симплекса $T = v^0 \ldots v^q$ называется линейный $(q+1)$-мерный симплекс $vv^0 \ldots v^q$. Для любой фиксированной точки v эта операция над образующими однозначно распространяется до некоторого гомоморфизма $c \to vc$ группы $C_q(Q(V))$ в группу $C_{q+1}(Q(V))$.

Лемма 5.3. *Пусть* $v \in V$ *и* $c \in C_q(Q(V))$. *Тогда*

$$\partial(vc) = c - v(\partial c), \text{ если } q > 0,$$
$$\partial(vc) = c - \operatorname{In}(c)v, \text{ если } q = 0.$$

Эта лемма доказывается точно так же, как и лемма VI.5.11.

6. Призмы

Единичной q-мерной призмой $(q > 0)$ называется прямое произведение

$$\pi_q = I \times \Delta_{q-1}$$

единичного $(q-1)$-мерного симплекса Δ_{q-1} пространства R^q и замкнутого отрезка I: $0 \leqslant t \leqslant 1$ пространства R^1. Призма π_q является замкнутым подмножеством пространства $R^1 \times R^q = R^{q+1}$.

Рассмотрим отображения

$$r_q^i: \quad \pi_{q-1} \to \pi_q \qquad (i = 0, \ldots, q-1),$$

определенные формулой

$$r_q^i(t, v) = (t, e_{q-1}^i(v)), \quad (t, v) \in \pi_{q-1},$$

и отображения

$$l_q: \quad \Delta_{q-1} \to \pi_q, \; u_q: \quad \Delta_{q-1} \to \pi_q,$$

определенные формулой

$$l_q(v) = (0, v), \; u_q(v) = (1, v).$$

Прямым вычислением легко проверяется справедливость следующей леммы.

Лемма 6.1. $r_q^i r_{q-1}^j = r_q^j r_{q-1}^{i-1}$, *если* $0 \leqslant j < i \leqslant q-1$, $r_q^i l_{q-1} = l_q e_{q-1}^i$, $r_q^i u_{q-1} = u_q e_{q-1}^i$, *если* $i = 0, \ldots, q-1$.

Определение 6.2. Непрерывное отображение

$$P: \ \pi_q \to X$$

единичной q-мерной призмы π_q в топологическое пространство X называется *сингулярной q-мерной призмой пространства* $X (q > 0)$. Сингулярная $(q-1)$-мерная призма

$$P^{(i)} = Pr_q^i: \quad \pi_{q-1} \to X \qquad (i = 0, \ldots, q-1)$$

называется i-й *гранью* призмы P. Сингулярные одномерные призмы граней не имеют. Сингулярные $(q-1)$-мерные симплексы

$$P_l = Pl_q: \quad \Delta_{q-1} \to X, \qquad P_u = Pu_q: \quad \Delta_{q-1} \to X$$

называются соответственно *нижним* и *верхним основаниями* призмы P.

Из леммы 6.1 вытекает

Лемма 6.3. $(P^{(i)})^{(j)} = (P^{(j)})^{(i-1)}$, *если* $0 \leqslant j < i \leqslant q-1$, $(P^{(i)})_l = (P_l)^{(i)}$, $(P^{(i)})_u = (P_u)^{(i)}$, *если* $i = 0, \ldots, q-1$. *Следовательно, сокращенные обозначения* $P_u^{(i)}$, $P_l^{(i)}$ *не могут повести к недоразумениям.*

Определение 6.4. Свободная группа, порожденная сингулярными q-мерными симплексами и призмами пространства X обозначается через $C_q(SP(X))$ и называется группой *сингулярных (целочисленных) призматических q-мерных цепей* пространства X. Если $q < 0$, то $C_q(SP(X)) = 0$. Так как сингулярных нульмерных призм не существует, то

$$C_0(SP(X)) = C_0(X).$$

Граничный гомоморфизм

$$\partial_q: \ C_q(SP(X)) \to C_{q-1}(SP(X))$$

определяется следующим образом. Если $q \leqslant 0$, то $\partial_q = 0$. Если $q > 0$, то для любой сингулярной q-мерной призмы P полагаем:

$$\partial_q P = P_u - P_l - \sum_{i=0}^{q-1} (-1)^i P^{(i)}.$$

Для сингулярных q-мерных симплексов T полагаем по-прежнему

$$\partial_q T = \sum_{i=0}^{q} (-1)^i T^{(i)}.$$

Лемма 6.5. $\partial_{q-1}\partial_q = 0$.

Доказательство. Очевидно, что достаточно проверить для каждой сингулярной q-мерной призмы P соотношение

$\partial_{q-1}\partial_q P = 0$. Так как $\partial_0 = 0$, то можно предполагать, что $q > 1$. По определению

$$\partial_{q-1}\partial_q P = \partial_{q-1}(P_u - P_l - \sum_{i=0}^{-1}(-1)^i P^{(i)}) =$$

$$= \sum_{i=0}^{-1}(-1)^i P_u^{(i)} - \sum_{i=0}^{q-1}(-1)^i P_l^{(i)} -$$

$$- \sum_{i=0}^{-1}(-1)^i \left\{ P_u^{(i)} - P_l^{(i)} - \sum_{j=0}^{-2}(-1)^j (P^{(i)})^{(j)} \right\}.$$

Согласно второму утверждению леммы 6.3 простые суммы сокращаются. Двойная сумма также равна нулю; для доказательства ввиду первого утверждения леммы 6.3 достаточно повторить выкладки, проделанные в доказательстве леммы 2.5.

Определение 6.6. Цепной комплекс

$$SP(X) = \{C_q(SP(X)), \partial_q\}$$

называется *сингулярным призматическим комплексом пространства* X.

Очевидно, что комплекс $S(X)$ является подкомплексом комплекса $SP(X)$. Для любого подмножества A пространства X комплекс $SP(A)$ является подкомплексом комплекса $SP(X)$ и $S(A) = S(X) \cap SP(A)$. Следовательно, вложения $S(A) \subset S(X)$ и $SP(A) \subset SP(X)$ индуцируют некоторый гомоморфизм

$$r: \quad S(X)/S(A) \to SP(X)/SP(A).$$

Из теоремы Нётер об изоморфизмах следует, что этот гомоморфизм является мономорфизмом. Следовательно, комплекс $S(X)/S(A)$ можно рассматривать как подкомплекс комплекса $SP(X)/SP(A)$, а отображение   — как вложение.

Теорема 6.7. *Существует отображение*

$$r: \quad (SP(X), SP(A)) \to (S(X), S(A)),$$

тождественное на комплексе $S(X)$. *Другими словами, пара цепных комплексов* $(S(X), S(A))$ *является ретрактом пары* $(SP(X), SP(A))$.

Доказательство. Любому линейному n-мерному симплексу $v^0 \ldots v^n$ выпуклого множества Δ_{q-1} отнесем линейную $(n+1)$-мерную цепь $D_n^q(v^0 \ldots v^n)$ призмы π_q, положив

$$(1) \qquad D_n^q(v^0 \ldots v^n) = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i (l_q v^0) \ldots (l_q v^i)(u_q v^i) \ldots (u_q v^n).$$

Так определенное отображение D_n^q однозначно распространяется до некоторого гомоморфизма

$$D_n^q: \quad C_n(Q(\Delta_{q-1})) \to C_{n+1}(Q(\pi_q)).$$

Вычисления, аналогичные проведенным при доказательстве теоремы VI.3.2, показывают, что

$$(2)\qquad \partial D^q_n c = u_q c - l_q c - D^q_{n-1}\partial c, \qquad c \in C_n(Q(\Delta_{n-1})).$$

Из формулы (1) и второй системы соотношений из указанных в лемме 6.1 немедленно вытекает равенство

$$(3)\qquad r^i_q D^{q-1}_n c = D^q_n e^i_{q-1} c, \qquad c \in C_n(Q(\Delta_{n-2})).$$

Определим теперь гомоморфизм

$$r_q: \quad C_q(SP(X)) \to S_q(X),$$

положив $r_q T = T$ для любого сингулярного q-мерного симплекса T и

$$(4)\qquad r_q P = P_S D^q_{q-1}(d^0 \ldots d^{q-1})$$

для любой сингулярной q-мерной призмы P, где отображение P_S определено согласно лемме 2.7. Очевидно, что гомоморфизм r_q тождествен на группе $C_q(X)$ и отображает группу $C_q(SP(A))$ в группу $C_q(A)$. Остается доказать, что отображения r и ∂ перестановочны. Это очевидно, если эти отображения применяются к сингулярным симплексам. Поэтому достаточно доказать, что

$$\partial r_q P = r_{q-1}\partial P.$$

Применяя отображение ∂ к обеим частям равенства (4), используя соотношение $\partial P_S = P_S\partial$ и равенство (1), получаем:

$$(5)\qquad \partial r_q P = (P_S u_q - P_S l_q - P_S D^q_{q-2})(d^0 \ldots d^{q-1}).$$

По определению

$$(6)\qquad P_S u_q(d^0 \ldots d^{q-1}) = P_u, \quad P_S l_q(d^0 \ldots d^{q-1}) = P_l.$$

Так как P_u и P_l являются сингулярными симплексами, то

$$(7)\qquad P_u = r_{q-1}P_u, \quad P_l = r_{q-1}P_l.$$

Используя равенство (3), получаем:

$$D^q_{q-2}\partial(d^0 \ldots d^{q-1}) = D^q_{q-2}\sum_{i=0}^{q-1}(-1)^i(d^0 \ldots \hat{d}^i \ldots d^{q-1}) =$$

$$= D^q_{q-1}\sum_{i=0}^{q-1}(-1)^i e^i_{q-1}(d^0 \ldots d^{q-2}) =$$

$$= \sum_{i=0}^{q-1}(-1)^i r^i_q D^{q-1}_{q-2}(d^0 \ldots d^{q-2}).$$

Так как согласно определению 6.2 $P_S r_q^i = P_S^{(i)}$, то

$$(8)\qquad P_S D_{q-2}^q \partial(d^0\dots d^{q-1}) = \sum_{i=0}^{q-1}(-1)^i P_S^{(i)} D_{q-2}^{q-1}(d^0\dots d^{q-2}) = \\ = \sum_{i=0}^{q-1}(-1)^i r_{q-1} P^{(i)}.$$

Комбинируя равенства (5), (6), (7) и (8), получим:

$$\partial r_q P = r_{q-s} P_u - r_{q-1} P_l - \sum_{i=0}^{q-1}(-1)^i r_{q-1} P^{(i)} = r_{q-1}\partial P.$$

Теорема доказана.

7. Сохранение гомотопий

Теорема 7.1. *Гомотопные отображения*

$$f, g:\quad (X, A)\to(Y, B)$$

индуцируют цепно гомотопные отображения

$$f_S, g_S:\quad S(X)/S(A)\to S(Y)/S(B).$$

Доказательство. Пусть

$$h:\quad (X\times I, A\times I)\to(Y, B)$$

— такое отображение, что для любой точки $x\in X$

$$h(x, 0) = f(x),\qquad h(x, 1) = g(x).$$

Каждому сингулярному q-мерному симплексу $T:\ \Delta_q\to X$ отнесем сингулярную $(q+1)$-мерную призму

$$DT:\quad \pi_{q+1}\to Y,$$

положив

$$(DT)(x, t) = h(T(x), t),\quad x\in\Delta_q,\ 0\leqslant t\leqslant 1.$$

Тем самым определится некоторый гомоморфизм

$$D:\quad C_q(X)\to C_{q+1}(SP(Y)),$$

отображающий группу $C_q(A)$ в группу $C_{q+1}(SP(B))$ и потому индуцирующий гомоморфизм D: $C_q(X)/C_q(A)\to C_{q+1}(SP(Y)/C_{q+1}(SP(B))$. Очевидно, что

$$(DT)_l = fT,\qquad (DT)_u = gT,$$
$$(DT)^{(i)} = D(T^{(i)})\qquad (i = 0,\dots, q).$$

Поэтому

$$\partial DT = (DT)_u - (DT)_l - \sum_{i=0}^{q}(-1)^i (DT)^{(i)} = \\ = gT - fT - \Sigma(-1)^i D(T^{(i)}) = gT - fT - D\partial T.$$

Пусть теперь r: $SP(Y)/SP(B) \to S(Y)/S(B)$ — ретрагирующее отображение, указанное в теореме 6.7. Тогда

$$rD: C_q(X)/C_q(A) \to C_{q+1}(Y)/C_{q+1}(B),$$

причем

$$\partial rDT = r\partial DT = rgT - rfT - rD\partial T = gT - fT - rD\partial T.$$

Таким образом, оператор rD определяет требуемую цепную гомотопию.

8. Теорема о покрытии

Определение 8.1. Пусть F — произвольное семейство подмножеств пространства X. Говорят, что сингулярный симплекс T: $\Delta_q \to X$ *принадлежит* семейству F, если множество $T(\Delta_q)$ содержится по крайней мере в одном из множеств этого семейства. Очевидно, что в этом случае все грани симплекса T также принадлежат семейству F. Следовательно, сингулярные симплексы пространства X, принадлежащие семейству F, образуют подкомплекс $S(X,F)$ сингулярного комплекса $S(X)$. Для любого подмножества A пространства X комплекс $S(A,F)$, состоящий из сингулярных симплексов множества A, принадлежащих семейству F, является подкомплексом комплекса $S(X, F)$, причем

$$S(A,F) = S(A) \cap S(X,F).$$

Вложения $S(X,F) \subset S(X)$, $S(A,F) \subset S(A)$ определяют гомоморфизм

$$\eta: S(X,F)/S(A,F) \to S(X)/S(A),$$

который согласно теореме Нётер об изоморфизмах является мономорфизмом. Если рассматривать фактор-группу $S(X, F)/S(A, F)$ как подгруппу группы $S(X)/S(A)$, то отображение η будет отображением вложения.

Теорема 8.2. *Пусть F — такое семейство подмножеств пространства X, что каждая точка пространства X принадлежит внутренности по крайней мере одного множества семейства F. Тогда для любого подмножества $A \subset X$ отображение вложения*

$$\eta: S(X,F)/S(A,F) \to S(X)/S(A)$$

является гомотопической эквивалентностью (см. определение IV.9.2).

Для доказательства необходимо провести несколько предварительных построений.

Называя *центром тяжести* b_σ линейного r-мерного симплекса $\sigma = v^0 \dots v^r$, лежащего в выпуклом множестве Δ_q, точку

$$b_\sigma = \frac{1}{r+1} v^0 + \dots + \frac{1}{r+1} v^r,$$

определим две последовательности гомоморфизмов

$$\mathrm{Sd}\colon C_r(Q(\Delta_q)) \to C_r(Q(\Delta_q)),$$
$$R\colon C_r(Q(\Delta_q)) \to C_{r+1}(Q(\Delta_q))$$

следующими рекуррентными соотношениями: если $r=0$, то Sd является тождественным отображением, а $R=0$. Для любого линейного симплекса σ размерности $r>0$, лежащего в выпуклом множестве Δ_q, положим, используя операцию соединения (см. определение 5.2)

$$(1)\qquad \mathrm{Sd}\,\sigma = b_\sigma \,\mathrm{Sd}\,\partial\sigma,$$

$$(2)\qquad R_\sigma = b_\sigma(\sigma - \mathrm{Sd}\,\sigma - R\partial\sigma).$$

Докажем индукцией по r, что

$$(3)\qquad \partial S\,dc = \mathrm{Sd}\,\partial c,$$

$$(4)\qquad \partial Rc = c - \mathrm{Sd}\,c - R\partial c$$

для любой линейной r-мерной цепи c симплекса Δ_q. Для $q \leqslant 0$ это утверждение очевидно. Предполагая, что соотношения (3) и (4) справедливы для линейных цепей размерности $i<r$ (где $r>0$), рассмотрим произвольный линейный r-мерный симплекс σ, лежащий в выпуклом множестве Δ_q. Пользуясь леммой 5.3, получаем:

$$\partial\,\mathrm{Sd}\,\sigma = \partial b_\sigma \,\mathrm{Sd}\,\partial\sigma = \mathrm{Sd}\,\partial\sigma - b_\sigma\partial\,\mathrm{Sd}\,\partial\sigma = \mathrm{Sd}\,\partial\sigma - b_\sigma\,\mathrm{Sd}\,\partial\partial\sigma = \mathrm{Sd}\,\partial\sigma,$$

$$\begin{aligned}\partial R\sigma &= \partial b_\sigma(\sigma - \mathrm{Sd}\,\sigma - R\partial\sigma) = \\ &= \sigma - \mathrm{Sd}\,\sigma - R\partial\sigma - b_\sigma(\partial\sigma - \partial\,\mathrm{Sd}\,\sigma - \partial R\partial\sigma) = \\ &= \sigma - \mathrm{Sd}\,\sigma - R\partial\sigma - b_\sigma(\partial\sigma - \mathrm{Sd}\,\partial\sigma - \partial\sigma + \mathrm{Sd}\,\partial\sigma + \\ &\qquad + R\partial\partial\sigma) = \sigma - \mathrm{Sd}\,\sigma - R\partial\sigma.\end{aligned}$$

Из формулы (3) следует, что Sd является отображением $Q(\Delta_q) \to Q(\Delta_q)$, а из формулы (4), что отображение R является цепной гомотопией, связывающей отображение Sd с тождественным отображением.

Пусть теперь $T\colon \Delta_q \to X$ — произвольный сингулярный q-мерный симплекс пространства X. Определим сингулярные цепи $\mathrm{Sd}\,T$ и RT, положив

$$\mathrm{Sd}\,T = T_S\,\mathrm{Sd}\,(d^0\ldots d^q), \qquad RT = T_S R(d^0\ldots d^q),$$

где отображение T_S определено согласно лемме 2.7. Операции Sd и R, определенные на образующих, однозначно распространяются до некоторых гомоморфизмов

$$\mathrm{Sd}\colon C_q(X) \to C_q(X), \qquad R\colon C_q(X) \to C_{q+1}(X).$$

Легко видеть, что формулы (3) и (4) справедливы для каждой сингулярной q-мерной цепи c пространства X. Определим теперь итерации Sd^n отображения Sd, полагая $\mathrm{Sd}^0 c = c$ и $\mathrm{Sd}^n c = \mathrm{Sd}\,\mathrm{Sd}^{n-1} c$, если $n > 0$. Из формул (3) и (4) следует, что

$$\partial\, \mathrm{Sd}^n c = \mathrm{Sd}^n \partial c, \tag{5}$$

$$\partial \sum_{i=0}^{n-1} R\, \mathrm{Sd}^i c = c - \mathrm{Sd}^n c - \sum_{i=0}^{n-1} R\, \mathrm{Sd}^i \partial c. \tag{6}$$

Для любого семейства F подмножеств пространства X и любой сингулярной цепи c комплекса $S(X,F)$ цепи $\mathrm{Sd}\, c$ и Rc принадлежат, очевидно, комплексу $S(X,F)$.

Пусть теперь F — произвольное семейство подмножеств пространства X, обладающее указанными в теореме 8.2 свойствами. Докажем, что для каждого сингулярного симплекса T пространства X существует такое целое число n, что цепь $\mathrm{Sd}^n T$ принадлежит комплексу $S(X,F)$.

Пусть $T\colon \Delta_q \to X$ и пусть F_T — семейство подмножеств симплекса Δ_q, имеющих вид $T^{-1}(B)$, где $B \in F$. Так как каждая точка $x \in X$ содержится во внутренности одного из множеств семейства F, то любая точка $v \in \Delta_q$ содержится во внутренности одного из множеств семейства F_T. Так как симплекс Δ_q компактен, то согласно лемме II.7.5 существует такое число $\varepsilon > 0$, что каждое подмножество симплекса Δ_q диаметра $< \varepsilon$ содержится в одном из множеств семейства F_T. Отсюда следует, что для доказательства нашего утверждения достаточно найти целое число n, для которого цепь $\mathrm{Sd}^n (d^0, \ldots, d^q)$ является линейной комбинацией линейных симплексов диаметра $< \varepsilon$. С этой целью заметим, что для симплекса $\sigma = v^0 \ldots v^q$ цепь $\mathrm{Sd}\,\sigma$ имеет вид $\Sigma \pm \tau$, где $\tau = b_{\sigma_0} \ldots b_{\sigma_q}$ ($\sigma_0 = \sigma$ и σ_{i+1} — грань симплекса σ_i). Согласно лемме II.6.8

$$\operatorname{diam} \tau \leqslant \frac{q}{q+1} \operatorname{diam} \sigma.$$

Следовательно, цепь $\mathrm{Sd}^n(d^0 \ldots d^q)$ является линейной комбинацией линейных симплексов диаметра $\leqslant (q/(q+1))^n \operatorname{diam}(d^0 \ldots d^q)$ и поэтому диаметра $< \varepsilon$, если только n достаточно велико.

Теперь у нас все готово для доказательства теоремы 8.2. Так как комплексы $S(X)/S(A)$ и $S(X,F)/S(A,F)$ состоят из свободных групп, то согласно теореме V.13.3 достаточно показать, что

$$\eta_*\colon H_q(S(X,F)/S(A,F)) \approx H_q(S(X)/S(A))$$

для целочисленных коэффициентов и всех размерностей q. Так как отображение τ_* является одним из отображений, из которых составлено отображение гомологической последовательности отмеченной пары

$$0 \to S(A,F) \to S(X,F) \to S(X,F)/S(A,F) \to 0$$

в гомологическую последовательность пары (X, A), то согласно лемме о пяти гомоморфизмах (I.4.3) достаточно доказать, что для всех q

$$r_*: \quad H_q(S(X,F)) \approx H_q(S(X)).$$

Ввиду точности соответствующей гомологической последовательности этот изоморфизм имеет место тогда и только тогда, когда

$$(7) \qquad H_q(S(X)/S(X,F)) = 0$$

во всех размерностях q. Пусть $c \in C_q(S(X))$ — сингулярная цепь, граница ∂c которой принадлежит комплексу $S(X,F)$. Согласно сказанному выше существует целое число n, для которого цепь $\mathrm{Sd}^n c$ принадлежит комплексу $S(X, F)$. Так как цепь ∂c принадлежит комплексу $S(X,F)$, то цепи $R\,\mathrm{Sd}^i\,\partial c$ также принадлежат комплексу $S(X,F)$. Следовательно, согласно формуле (6) цепь

$$c - \partial \sum_{i=0}^{n-1} R\,\mathrm{Sd}^i c$$

принадлежит комплексу $S(X, F)$, так что цепь c является по модулю подкомплекса $S(X, F)$ ограничивающим циклом. Тем самым формула (7), а следовательно, и теорема 8.2, полностью доказана.

9. Инвариантность относительно вырезания

Теорема 9.1. *Если $\bar{U} \subset \operatorname{Int} A$, то отображение*

$$i_s: \quad S(X \setminus U)/S(A \setminus U) \to S(X)/S(A),$$

индуцированное отображением вложения

$$i: \quad (X \setminus U,\ A \setminus U) \subset (X, A),$$

является гомотопической эквивалентностью.

Доказательство. Рассмотрим семейство F, состоящее из двух множеств A и $X \setminus U$. Из условия $\bar{U} \subset \operatorname{Int} A$ следует, что $\operatorname{Int}(X \setminus U) \cup \operatorname{Int}(A) = X$, так что применима теорема 8.2. Так как

$$S(A \setminus U) = S(X \setminus U) \cap S(A),$$
$$S(X,F) = S(X \setminus U) \cup S(A), \qquad S(A,F) = S(A),$$

то отображение i_S можно разложить в композицию отображений

$$j: \quad S(X \setminus U)/S(A \setminus U) \to S(X, F)/S(A, F),$$
$$\eta: \quad S(X,F)/S(A,F) \to S(X)/S(A),$$

каждое из которых индуцировано вложениями. Согласно теореме 8.2

отображение r является гомотопической эквивалентностью. Отображение j можно рассматривать как отображение

$$j: S(X\setminus U)/S(X\setminus U)\cap S(A)\to S(X\setminus U)\cup S(A)/S(A),$$

которое согласно теореме Нётер об изоморфизмах является изоморфизмом. Следовательно, отображение j также является гомотопической эквивалентностью. Так как в категории $\partial\mathfrak{G}$ цепных комплексов композиция двух гомотопических эквивалентностей является снова гомотопической эквивалентностью, то отображение $i_S = rj$ действительно является гомотопической эквивалентностью.

Теорема 9.1 вместе с теоремами 4.1 и 7.1 полностью обосновывает утверждения теоремы 2.8 о том, что отображение S: $(X, A)\to S(X)/S(A)$ определяет h-функтор. Тем самым построение теории сингулярных гомологий и когомологий окончено.

Отметим, что доказанная для сингулярной теории аксиома вырезания сильнее соответствующей аксиомы, сформулированной в пункте 3 главы I. Именно, не предполагается, чтобы множество U было *открыто* в пространстве X.

10. Теория сингулярных гомологий триангулированных пространств

После того как для теории сингулярных гомологий проверены аксиомы, из результатов главы III следует, что для триангулированных пространств сингулярные группы изоморфны симплициальным группам, вычисленным по триангуляциям с помощью одного из приемов, изложенных в главе VI. Тем не менее, полезно иметь прямое определение изоморфизма между сингулярными и симплициальными группами гомологий. Такой изоморфизм строится в этом пункте.

Рассмотрим триангулированную пару (X, A) с триангуляцией $T = \{t, (K, L)\}$ и следующим образом определим некоторое отображение

$$\beta: K_O/L_O\to S(X)/S(A).$$

Любой элементарной q-мерной цепи $c = A^0\ldots A^q$ комплекса K_O отнесем линейное отображение

$$L_c: \Delta_q\to K,$$

определенное формулой $L_c(d^i) = A^i$ $(i = 0,\ldots, q)$. Соответствующее отображение tL_c: $\Delta_q\to X$ является сингулярным q-мерным симплексом. Положим

$$\beta c = tL_c.$$

Тем самым определится некоторый гомоморфизм

$$\beta: C_q(K)\to C_q(X),$$

отображающий группу $C_q(L)$ в группу $C_q(A)$. Для того чтобы доказать перестановочность отображений β и ∂, рассмотрим цепи $c^{(i)} = A^0 \ldots \hat{A}^i \ldots A^q$. Так как $\beta c^{(i)} = \beta c e_q^i = (\beta c)^{(i)}$, то

$$\partial \beta c = \sum_{i=0}^{q} (-1)^i (\beta c)^{(i)} = \sum (-1)^{(i)} \beta c^{(i)} = \beta \partial c.$$

Основным результатом этого пункта является

Теорема 10.1. *Для произвольной группы коэффициентов G отображение*

$$\beta: \ K_O / L_O \to S(X) / S(A)$$

индуцирует изоморфизмы

$$\beta_*: \ H_q(K, L; G) \approx H_q(X, A; G), \quad \beta^*: \ H^q(K, L; G) \approx H^q(X, A; G).$$

Под группами гомологий пары (K, L) здесь подразумеваются группы гомологий цепного комплекса K_O / L_O, рассмотренного в главе VI, *в то время как под группами гомологий пары (X, A) подразумеваются группы сингулярных гомологий.*

В силу леммы «о пяти гомоморфизмах» I.4.3 достаточно доказать эту теорему для случая $A = \varnothing$.

Доказательство существенно основывается на понятиях, введенных в пункте II.9. Рассмотрим для каждого симплекса s комплекса K первую регулярную окрестность $N^1(s)$. В силу леммы II.9.6 точка α комплекса K тогда и только тогда принадлежит окрестности $N^1(s)$, когда существует такая вершина A симплекса s, что $\alpha(A) > \alpha(B)$ для каждой вершины B комплекса K, не содержащейся в симплексе s. Отсюда вытекают следующие свойства окрестности $N^1(s)$.

(1) Окрестность $N^1(s)$ является открытым множеством, содержащим множество $|s|$.

(2) Каждая вершина комплекса K, принадлежащая окрестности $N^1(s)$, является вершиной симплекса s.

(3) $$N^1(s_1) \cap N^1(s_2) = N^1(s_1 \cap s_2).$$

Пусть F — семейство открытых множеств $tN^1(s) \subset X$, где s — произвольный симплекс комплекса K. Это семейство удовлетворяет условиям теоремы 8.2. Поэтому гомоморфизмы η_* и η^*, индуцированные отображением вложения

$$\eta: \ S(X, F) \subset S(X),$$

являются изоморфизмами. Далее, в силу свойства (1) для любой цепи c комплекса K_O сингулярная цепь βc принадлежит комплексу $S(X, F)$. Следовательно, можно положить $\beta = \eta \gamma$, где

$$K_O \xrightarrow{\gamma} S(X, F) \xrightarrow{\eta} S(X),$$

причем $\gamma c = \beta c$. Таким образом, достаточно показать, что отображения γ_* и γ^* являются изоморфизмами.

Для каждой точки α комплекса K выберем вершину $n(\alpha)$ комплекса K, ближайшую к этой точке в том смысле, что $\alpha(n(\alpha)) \geqslant \alpha(B)$ для любой вершины B комплекса K. Отметим следующие свойства вершины $n(\alpha)$:

(4) Если точка α является вершиной, то $n(\alpha) = \alpha$.

(5) Если $\alpha \in N^1(s)$, то $n(\alpha)$ является вершиной симплекса s.

Свойство (4) очевидно. Свойство (5) следует из данного выше описания окрестностей $N^1(s)$.

Любому сингулярному симплексу $T\colon \Delta_q \to X$ отнесем вершины

$$A^i = n(t^{-1}Td^i) \quad (i = 0, \ldots, q)$$

комплекса K. Если $T(\Delta_q) \subset tN^1(s)$, то $t^{-1}Td^i \in N^1(s)$ и, следовательно, в силу свойства (5) точка A^i является вершиной симплекса s. Таким образом, для любого сингулярного симплекса T комплекса $S(X, F)$ цепь

$$\bar{\gamma} T = A^0 \ldots A^q$$

является элементарной q-мерной цепью комплекса K_O. Это соответствие определяет гомоморфизмы $\bar{\gamma}\colon C_q(S(X, F)) \to C_q(K_O)$, очевидно, перестановочные с отображением ∂. Таким образом, мы построили отображение

$$\bar{\gamma}\colon S(X, F) \to K_O.$$

Изучим составное отображение $\bar{\gamma}\gamma$. Пусть $c = B^0 \ldots B^q$ — произвольная элементарная q-мерная цепь комплекса K_O и пусть $\bar{\gamma}\gamma(c) = A^0 \ldots A^q$. Полагая $T = \gamma c$ и учитывая определение отображения β, мы получим, что $Td^i = tB^i$. Следовательно, $A^i = n(t^{-1}Td^i) = n(B^i)$, и поэтому согласно свойству (4) $A^i = B^i$. Тем самым доказано, что композиция $\bar{\gamma}\gamma$ является тождественным отображением комплекса K_O. Таким образом,

(6) отображения $\bar{\gamma}_*\gamma_*$ и $\gamma^*\bar{\gamma}^*$ являются тождественными отображениями.

Рассмотрим теперь отображение $\gamma\bar{\gamma}$. Пусть $T\colon \Delta_q \to X$ — произвольный сингулярный симплекс комплекса $S(X, F)$ и пусть s — наименьший симплекс комплекса K, для которого $T(\Delta_q) \subset tN^1(s)$. В силу свойства (3) такой симплекс s существует и определен однозначно. Положим

$$C(T) = tN^1(s).$$

Оказывается, что множества $C(T)$, соответствующие симплексам T комплекса $S(X, F)$, обладают следующими свойствами:

(7) $C(T^{(i)}) \subset C(T)$.

(8) Симплексы T и $\gamma\bar{\gamma}T$ являются сингулярными симплексами множества $C(T)$.

(9) Множество $C(T)$ ациклично, т. е. $\tilde{H}_0(C(T)) = 0$ и $H_q(C(T)) = 0$, если $q > 0$.

Свойство (7) очевидно так же, как первая часть свойства (8). Из определения множества $C(T)$ следует, что $t^{-1}Td^i \in N^1(s)$, и поэтому в силу свойства (5) точка $n(t^{-1}Td^i)$ является вершиной симплекса s. Следовательно, симплекс $\bar{\gamma}T$ принадлежит множеству $|s|$, а симплекс $\gamma\bar{\gamma}T$ — множеству $t(|s|)$. Так как $|s| \subset N^1(s)$, то $t(|s|) \subset C(T)$. Следовательно, симплекс $\gamma\bar{\gamma}T$ принадлежит множеству $C(T)$.

Для доказательства свойства (9) заметим сначала, что, поскольку в силу леммы II.9.8 множество $|s|$ является деформационным ретрактом окрестности $N^1(s)$, а пространство $|s|$ стягиваемо в точку, то окрестность $N^1(s)$ также стягиваема в точку. Следовательно, комплекс $C(T)$ стягиваем в точку, и поэтому согласно теореме I.11.5 гомологически тривиален.

Установив свойства (7) — (9), мы можем, дословно повторив доказательство теоремы 5.7, построить цепную гомотопию, связывающую отображение $\gamma\bar{\gamma}$ с тождественным отображением комплекса $S(X, F)$. Из существования такой цепной гомотопии вытекает, что отображения $\gamma_*\bar{\gamma}_*$ и $\bar{\gamma}^*\gamma^*$ являются тождественными отображениями. Сопоставляя этот результат с утверждением (6), получаем, что отображения γ_* и γ^* являются изоморфизмами с обратными отображениями $\bar{\gamma}_*$ и $\bar{\gamma}^*$ соответственно.

11. Триады

Пусть $(X ; X_1, X_2)$ — произвольная триада, т. е. тройка, состоящая из некоторого топологического пространства X и его подпространств X_1 и X_2. В пункте I.14 были определены гомологические последовательности триад только для *собственных* триад. В рамках теории сингулярных гомологий мы определим теперь новые группы гомологий $H_q(X ; X_1, X_2)$, называемые группами гомологий триады. Мы включим эти группы в некоторую точную последовательность, которую будем называть *триадической* гомологической последовательностью. Для собственной триады эта последовательность сводится к гомологической последовательности триады.

Определение 11.1. Группы гомологий (когомологий) свободного цепного комплекса $S(X) / S(X_1) \cup S(X_2)$ называются *группами гомологий* (соответственно *когомологий*) *триады* $(X ; X_1, X_2)$ и обозначаются через $H_q(X ; X_1, X_2 ; G)$ (соответственно через $H^q(X ; X_1, X_2 ; G)$). Отображение триад $f: (X ; X_1, X_2) \to (Y ; Y_1 Y_2)$ индуцирует отображение $f: S(X) / S(X_1) \cup S(X_2) \to S(Y) / S(Y_1) \cup \cup S(Y_2)$, которое в свою очередь индуцирует гомоморфизмы $f_*: H_q(X ; X_1, X_2 ; G) \to H_q(Y ; Y_1, Y_2 ; G)$ и $f^*: H^q(Y ; Y_1, Y_2 ; G) \to \to H^q(X ; X_1 ; X_2 ; G)$.

Эти гомоморфизмы удовлетворяют аналогам аксиом 1 и 2: если отображение f тождественно, то отображение f_* также тождественно, $(gf)_* = g_* f_*$.

Рассмотрим теперь индуцированные вложением гомоморфизмы

$$0 \to S(X_1)/S(X_1) \cap S(X_2) \xrightarrow{i'} S(X)/S(X_2) \xrightarrow{j'} S(X)/S(X_1) \cup S(X_2) \to 0.$$

Так как отображение i' может быть разложено в отображения

$$S(X_1)/S(X_1) \cap S(X_2) \xrightarrow{i'_1} S(X_1) \cup S(X_2)/S(X_2) \xrightarrow{i_2} S(X)/S(X_2),$$

где i'_1 — изоморфизм Нётер, и так как отображения i_2, j' образуют прямую отмеченную пару, то отображения i', j' также образуют прямую отмеченную пару

Определение 11.2. *Триадическими гомологической и когомологической последовательностями триады $(X; X_1, X_2)$ над группой G* называются гомологическая и когомологическая последовательности отмеченной пары (i', j'):

$$\ldots \leftarrow H_q(X, X_2; G) \xleftarrow{i'_*} H_q(X_1, X_1 \cap X_2; G) \xleftarrow{\partial} H_{q+1}(X; X_1, X_2; G) \xleftarrow{j'_*}$$
$$\xleftarrow{j'_*} H_{q+1}(X, X_2; G) \leftarrow \ldots$$

$$\ldots \to H^q(X, X_2; G) \xrightarrow{i'^*} H^q(X_1, X_1 \cap X_2; G) \xrightarrow{\delta} H^{q+1}(X; X_1, X_2; G) \xrightarrow{j'^*}$$
$$\xrightarrow{j'^*} H^{q+1}(X, X_2; G) \to \ldots$$

Отображение f: $(X; X_1, X_2) \to (Y; Y_1, Y_2)$ индуцирует отображение соответствующих отмеченных пар f: $(i', j')_X \to (i', j')_Y$. Следовательно, гомоморфизмы f_* (соответственно гомоморфизмы f^*) порождают отображение f_{**} (соответственно отображение f^{**}) триадических гомологических (соответственно когомологических) последовательностей.

Подчеркнем, что хотя группы гомологий триад $(X; X_1, X_2)$ и $(X; X_2, X_1)$ одинаковы, их триадические гомологические последовательности различны.

Если в триаде $(X; X_1, X_2)$ имеет место включение $X_1 \supset X_2$, то, как легко видеть, триадическая гомологическая последовательность этой триады совпадает с гомологической последовательностью тройки $(X; X_1, X_2)$.

Теорема 11.3. *Для любой триады $(X; X_1, X_2)$ и любой группы коэффициентов G следующие утверждения равносильны:*

(I) *Триада $(X; X_1, X_2)$ является собственной триадой относительно теории сингулярных гомологий с группой коэффициентов G.*

(II) *Отображение вложения k_2: $(X_1, X_1 \cap X_2) \to (X_1 \cup X_2, X_2)$ для любого q индуцирует изоморфизм k_{2*}: $H_q(X_1, X_1 \cap X_2; G) \approx$ $\approx H_q(X_1 \cup X_2, X_2)$.*

(III) *Индуцированный вложением гомоморфизм* $S(X)/S(X_1) \cup S(X_2) \to S(X)/S(X_1 \cup X_2)$ *для любого* q *индуцирует изоморфизм* $H_q(X; X_1, X_2; G) \approx H_q(X, X_1 \cup X_2; G)$.

(IV) $H_q(X_1 \cup X_2; X_1, X_2; G) = 0$ *для всех* q.

(V) *Отображение вложения* $S(X_1) \cup S(X_2) \to S(X_1 \cup X_2)$ *для любого* q *индуцирует изоморфизм групп гомологий над группой* G. *Аналогичное утверждение справедливо и для групп когомологий над группой* G.

Доказательство. В течение всего доказательства мы будем во всех формулах опускать символ G.

(II) $\longleftrightarrow$ (III). Рассмотрим отображение вложения θ: $(X; X_1, X_2) \to (X; X_1 \cup X_2, X_2)$. Триадическая гомологическая последовательность второй триады совпадает с гомологической последовательностью тройки $(X, X_1 \cup X_2, X_2)$. Следовательно, имеет место диаграмма

$$\begin{tikzcd}
{} & & H_q(X_1, X_1 \cap X_2) \arrow[dl] \arrow[d, "k_{2*}"] & H_{q+1}(X; X_1, X_2) \arrow[l, "\partial"'] \arrow[d, "\theta_*"] & & {} \arrow[dl] \\
& H_q(X, X_2) \arrow[ul] \arrow[dl] & & & H_{q+1}(X, X_2) \arrow[ul] \arrow[dl] & \\
{} & & H_q(X_1 \cup X_2, X_2) \arrow[ul] & H_{q+1}(X; X_1 \cup X_2) \arrow[l, "\partial"] & & {} \arrow[ul]
\end{tikzcd}$$

верхняя строчка которой является триадической гомологической последовательностью триады $(X; X_1, X_2)$, а нижняя — гомологической последовательностью тройки $(X, X_1 \cup X_2, X_2)$. Применяя «лемму о пяти гомоморфизмах» (I.4.3), мы немедленно замечаем, что свойства (II) и (III) действительно равносильны.

(I) $\longleftrightarrow$ (II). Условие, что триада $(X; X_1, X_2)$ является собственной триадой, состоит из условия (II) и условия (II)', получающегося из условия (II) перестановкой индексов 1 и 2. Поэтому (I) $\to$ (II). С другой стороны, свойство (II) равносильно свойству (III), которое симметрично относительно индексов 1 и 2. Следовательно, (II) $\to$ (III) $\to$ (II)'. Таким образом (II) $\to$ (I).

(III) $\longleftrightarrow$ (IV). Рассмотрим прямую отмеченную пару

$$0 \to S(X_1 \cup X_2)/S(X_1) \cup S(X_2) \to S(X)/S(X_1) \cup S(X_2) \to \\ \to S(X)/S(X_1 \cup X_2) \to 0,$$

отображения которой индуцированы вложениями. Гомологическая последовательность этой пары имеет вид

$$\ldots \leftarrow H_{q-1}(X_1 \cup X_2; X_1, X_2) \leftarrow H_q(X, X_1 \cup X_2) \leftarrow \\ \leftarrow H_q(X; X_1, X_2) \leftarrow H_q(X_1 \cup X_2; X_1, X_2) \leftarrow \ldots$$

Итак, ввиду точности этой последовательности (III) $\longleftrightarrow$ (IV).

(IV) $\longleftrightarrow$ (V). Доказывается так же, как и предшествующее утверждение с помощью прямой отмеченной пары

$$0 \to S(X_1) \cup S(X_2) \to S(X_1 \cup X_2) \to S(X_1 \cup X_2)/S(X_1) \cup S(X_2) \to 0.$$

Вернемся ненадолго к диаграмме, использованной в доказательстве равносильности (II) $\longleftrightarrow$ (III), и предположим, что триада $(X; X_1, X_2)$ — собственная. Тогда оба отображения k_{2*} и θ_* являются изоморфизмами. Используя одно из отображений k_{2*}^{-1} и θ_*^{-1}, можно вставить в диаграмму гомоморфизм $H_{q+1}(X, X_1 \cup X_2) \to \to H_q(X_1, X_1 \cap X_2)$. Таким образом, рассматриваемая диаграмма содержит также определенную в I.14.3 гомологическую последовательность собственной триады $(X; X_1, X_2)$.

Тот факт, что данная триада $(X; X_1, X_2)$ является собственной относительно теории сингулярных гомологий или когомологий, может зависеть от группы коэффициентов и от того, используются ли гомологии или когомологии. Следующая теорема показывает, что в некотором смысле группы гомологий с целочисленными коэффициентами являются универсальными.

Теорема 11.4. *Если триада $(X; X_1, X_2)$ является собственной триадой относительно теории сингулярных гомологий с целочисленными коэффициентами, то она является собственной триадой относительно теорий сингулярных гомологий и когомологий с произвольными коэффициентами.*

Доказательство. Согласно теореме 11.3 (равносильность свойств (I) и (IV), если триада $(X; X_1, X_2)$ является собственной триадой относительно теории гомологий с целочисленными коэффициентами, то целочисленные группы гомологий цепного комплекса $S(X_1 \cup X_2)/S(X_1) \cup S(X_2)$ равны нулю. Так как этот комплекс является свободным цепным комплексом, то согласно теореме V.13.5 для любой группы G группы гомологий и когомологий $H_q(X_1 \cup X_2; X_1, X_2; G)$, $H^q(X_1 \cup X_2; X_1, X_2; G)$ также равны нулю. Применяя снова теорему 11.3, получаем, что триада $(X; X_1, X_2)$ является собственной триадой относительно теорий сингулярных гомологий и когомологий над группой G.

О триадах в теории гомотопий см. примечания к этой главе.

Примечания

История теории сингулярных гомологий. Исходная идея теории сингулярных гомологий, по-видимому, состояла в том, что сингулярную цепь пространства X нужно определять как систему, состоящую из некоторого комплекса K, некоторого отображения $K \to X$ и произвольной обыкновенной цепи комплекса K. Это определение можно найти, например, в книге Веблена (Analysis Situs, Colloq. Pub. Amer. Math. Soc. 5 (1921).

Развитие и уточнение этой точки зрения было дано Гуревичем, Даукером и Дугунджи (Ann. of Math. **49** (1948), 391—406). Однако этот подход неудобен потому, что группы гомологий не получаются из цепных комплексов, так как цепи не образуют группы.

Лефшец был первым (Bull. Amer. Math. Soc. **39** (1933), 124—129), кто определил *группу* сингулярных цепей. Он рассматривал отображения ориентированных симплексов в пространство X. Два отображения $f\colon s_1 \to X$ и $g\colon s_2 \to X$ он называл *эквивалентными*, если существовало такое сохраняющее ориентацию аффинное отображение $h\colon s_1 \to s_2$, что $gh = f$. Соответствующие классы эквивалентности назывались *особыми ориентированными симплексами*. Каждый такой симплекс обладал *противоположным*, получающимся при обращении ориентации отображаемого симплекса. Образующие групп цепей получались при выборе одной из двух ориентаций каждого особого симплекса.

Чех отметил следующую возникающую при этом трудность: *обе ориентации особого симплекса могут совпадать*. Например, сложив пополам одномерный симплекс и произвольно отобразив его в пространство X, мы получим особый симплекс, обладающий этим свойством. С алгебраической точки зрения отмеченное Чехом обстоятельство означает, что группы цепей содержат элементы второго порядка и, следовательно, не свободны. Однако, как мы видели, свобода групп цепей чрезвычайно полезна при всевозможных доказательствах. Например, мы определяли гомоморфизмы комплекса $S(X)$, задавая их значения на образующих, т. е. на сингулярных симплексах. Если комплекс $S(X)$ не был бы свободным комплексом, нужно было бы каждый раз проверять, что заданная на образующих функция продолжается до гомоморфизма.

Эта трудность была преодолена, когда ориентированные симплексы были заменены *упорядоченными* (S. Eilenberg, Ann. of Math. **45** (1944), 407—447). Интуитивное оправдание этой замены содержится в теореме VI.6.10 о том, что упорядоченный и кососимметрический цепные комплексы, отнесенные некоторому симплициальному комплексу, цепно эквивалентны.

Г о м о т о п и ч е с к и е г р у п п ы т р и а д. Группы и последовательности, рассмотренные в пункте 11, имеют естественные аналоги в гомотопической теории. Пусть $(X; X_1, X_2)$ — произвольная триада и x_0 — некоторая базисная точка. Блейкерс и Масси (The homotopy groups of a triad I, Ann. of Math. **53** (1951), 161—205) ввели гомотопические группы $\pi_q(X; X_1, X_2)$. Элементами этих групп являются классы отображений $(E^n, E^{n+1}_+, E^{n-1}_-) \to (X; X_1, X_2)$. Эти группы определены для $n > 2$ и абелевы при $n > 3$. По аналогии с триадическими последовательностями (см. определение 11.2) Блейкерс и Масси построили некоторую точную последовательность

$$\leftarrow \pi_q(X, X_2) \leftarrow \pi_q(X_1, X_1 \cap X) \leftarrow \pi_{q+1}(X; X_1, X_2) \leftarrow \pi_{q+1}(X, X_2) \leftarrow$$

Пусть, в частности, $X = X_1 \cup X_2$. Тогда из теории Блейкерса — Масси следует, что гомоморфизм «вырезания»

$$\pi_q(X_1, X_1 \cap X_2) \to \pi_q(X_1 \cup X_2, X_2)$$

принадлежит точной последовательности, в которой ему предшествует группа $\pi_q(X_1 \cup X_2; X_1, X_2)$, а за ним следует группа $\pi_q(X_1 \cup \cup X_2; X_1, X_2)$. Таким образом, последние группы измеряют, насколько гомотопические группы отклоняются от аксиомы вырезания. С помощью гомотопических групп триад Блейкерс и Масси доказали теорему Фрейденталя о надстройке (см. примечание о гомотопических группах к главе I) и другие результаты весьма общего характера.

Доказательство теоремы 8.2. Данное в тексте доказательство использует теорему V.13.3 (доказывая, что отображение η является цепной эквивалентностью, мы доказываем сначала, что для целочисленных групп гомологий отображение τ_* является изоморфизмом). Мы дадим здесь другое, несколько более длинное, но зато более прямое доказательство, не использующее теорему V.13.3. Это доказательство проходит также и в других случаях (например для локальных коэффициентов), когда данное в тексте доказательство рушится.

Для любого сингулярного симплекса T пространства X обозначим через $\{T_a\}$ семейство сингулярных симплексов, содержащее симплекс T, его грани, грани этих граней и т. д. Пусть $n(T)$ — наименьшее число, для которого цепь $\mathrm{Sd}^{n(T)}(T_a)$ принадлежит комплексу $S(X, F)$ для любого симплекса T_a семейства $\{T_a\}$. Это число существует и обладает следующими свойствами:

$n(T^{(i)}) \leqslant n(T)$.

Цепь $\mathrm{Sd}^{n(T)}\, T$ *принадлежит комплексу* $S(X, F)$.

Если симплекс T *принадлежит комплексу* $S(X, F)$, *то* $n(T) = 0$.

Если T *является симплексом подпространства* A, *то цепь* $\mathrm{Sd}^{n(T)}(T)$ *принадлежит подкомплексу* $S(A, F)$.

Для любого сингулярного q-мерного симплекса T пространства X положим теперь

$$\tau T = \mathrm{Sd}^{n(T)}\, T + \sum_{i=0}^{q} (-1)^i \sum_{j=n(T^{(i)})}^{n(T)-1} R\, \mathrm{Sd}^j(T^{(i)}), \tag{1}$$

$$DT = \sum_{j=0}^{n(T)-1} R\, \mathrm{Sd}^j\, T. \tag{2}$$

Заметим, что τT является q-мерной цепью комплекса $S(X, F)$, а DT — $(q+1)$-мерной цепью комплекса $S(X)$. Следовательно, отображения τ и D определяют некоторые гомоморфизмы

$$\tau\colon\ C_q(X) \to C_q(S(X, F)), \quad D\colon\ C_q(X) \to C_{q+1}(S(X, F)),$$

причем

$$\tau(C_q(A)) \subset C_q(S(A, F)), \quad D(C_q(A)) \subset C_{q+1}(S(A, F)).$$

Из формулы (2) следует, что

$$\partial DT = T - \mathrm{Sd}^{n(T)} T - \sum_{i=0} (-1)^i \sum_{j=0}^{n(T)-1} R\, \mathrm{Sd}^j T^{(i)},$$

$$D\partial T = \sum_{i=0}^{q} (-1)^i \sum_{j=0}^{n(T^{(i)})} R\, \mathrm{Sd}^j T^{(i)}.$$

Складывая эти две формулы и сравнивая результат с формулой (1), получаем:

$$\partial DT + D\partial T = T - \tau T.$$

Таким образом, для любой сингулярной q-мерной цепи пространства X

(3) $$\partial Dc = c - \tau c - D\partial c.$$

Отсюда следует, что

$$\partial\tau c = \partial(c - \partial Dc - D\partial c) = \partial c - \partial\partial Dc - \partial D\partial c =$$
$$= \partial c - \partial c + \tau\partial c + D\partial\partial c = \tau\partial c,$$

так что τ является отображением $S(X) \to S(X, F)$. Так как отображение τ переводит подкомплекс $S(A)$ в подкомплекс $S(A, F)$, то оно определяет отображение

$$\tau\colon \ S(X)/S(A) \to S(X, F)/S(A, F).$$

Композиция $\tau\eta$ является тождественным отображением комплекса $S(X, F)/S(A, F)$. С другой стороны, $\eta\tau c = \tau c$, так что формулу (3) можно переписать в следующем виде: $D\partial c + D\partial c = c - \eta\tau c$. Следовательно, отображение $\eta\tau$ гомотопно тождественному отображению комплекса $S(X)/S(A)$. Таким образом, отображение τ гомотопически обратно отображению η.

Пространства с операторами. Пусть X — топологическое пространство, на котором действует некоторая группа W (определение см. главу II, упражнения C). Любой элемент $w \in W$, являясь гомоморфизмом $w\colon X \to X$, индуцирует некоторый изоморфизм $w_s\colon S(X) \to S(X)$, так что группа W является группой (левых) операторов цепного комплекса $S(X)$. Говорят, что группа W действует на паре (X, A), если операторы из группы W переводят подпространство A в себя. В этом случае группа W является группой операторов комплекса $S(X)/S(A)$.

Пусть G — абелева группа, для которой группа W определена как группа правых операторов. Фактор-группа тензорного произведения $G \otimes S(X)/S(A)$, получающаяся при отождествлении элементов $gw \otimes c$ с элементами $g \otimes wc$, обозначается через $G \otimes_w S(X)/S(A)$ и называется тензорным произведением группы G и комплекса $S(X)/S(A)$ над группой W. Группы гомологий этого тензорного произведения называются *эквивариантными группами гомологий* и обозначаются через $H_q^W(X, A; G)$.

Пусть группа W является группой левых операторов абелевой группы G. Рассмотрим коцепный комплекс $\mathrm{Hom}_w(S(X)/S(A), G)$, являющийся подкомплексом комплекса $\mathrm{Hom}(S(X)/S(A), G)$ и состоящий из эквивариантных (т. е. операторных) гомоморфизмов. Группы когомологий этого подкомплекса называются *эквивариантными группами когомологий* и обозначаются через $H_W^q(X, A; G)$.

Граничные операторы

$$\partial_*\colon H_q^W(X, A; G) \to H_{q-1}^W(A; G),$$

$$\delta^*\colon H_W^q(A; G) \to H_W^{q+1}(X, A; G)$$

для эквивариантных групп определяются обычным образом.

Если $f\colon (X, A) \to (Y, B)$ — эквивариантное отображение пар, для каждой из которых группа W является группой операторов, то отображение $f_S\colon S(X)/S(A) \to S(Y)/S(B)$ эквивариантно и индуцирует гомоморфизмы f_* и f^* эквивариантных групп гомологий и когомологий.

Определив эти основные понятия, можно доказать, что таким образом получаются теории гомологий и когомологий на категории $\mathfrak{A}_W$, объектами которой являются пары (X, A) с группой операторов W, отображениями — эквивариантные отображения, отмеченными парами — пары отображений $i, j\colon A \to X \to (X, A)$, гомотопиями — эквивариантные, т. е. удовлетворяющие соотношению $F(wx, t) = wF(x, t)$, отображения $F\colon (X \times I, A \times I) \to (Y, B)$, вырезаниями — отображения вложения $(X \setminus U, A \setminus U) \to (X, A)$, где U — такое множество, что $\overline{U} \subset \mathrm{Int}\, A$ и $w(U) = U$ для любого элемента $w \in W$, точками — дискретные пространства X, на которых группа W действует транзитивно и без неподвижных точек (в частности, группа W сама является точкой). Само собой разумеется, что категория $\mathfrak{A}_W$ не является допустимой категорией в смысле пункта I.1.

Если группа W симплициально действует на симплициальной паре (K, L) (см. главу II, упражнения С), то эквивариантные группы гомологий и когомологий можно определить, используя либо комплексы $G \otimes_W K_O / L_O$, $\mathrm{Hom}_w(K_O / L_O, G)$, либо комплексы $G \otimes_W K_a / L_a$, $\mathrm{Hom}_W(K_a / L_a, G)$. Получающиеся группы изоморфны эквивариантным группам гомологий и когомологий пары $(|K|, |L|)$, определенным с помощью сингулярной теории.

Упражнения

A. Линейная связность

Определение. *Путем* пространства X, соединяющим точки $x_0, x_1 \in X$, называется такое отображение $f\colon I \to X$ замкнутого единичного интервала I в пространство X, что $f(0) = x_0$ и $f(1) = x_1$.

1. Показать, что любое пространство X является объединением таких непересекающихся линейно связных множеств $\{X_\alpha\}$, так называемых *компонент линейной связности* пространства X, что две точки, принадлежащие различным компонентам, не могут быть соединены никаким путем пространства X.

2. Доказать изоморфизмы

$$H_q(X, G) \approx \sum_\alpha H_q(X_\alpha, G), \quad H^q(X, G) \approx \prod_\alpha H^q(X_\alpha; G),$$

где $\{X_\alpha\}$ — компоненты линейной связности пространства X.

3. Вычислить группы $H_0(X, G)$, $\tilde{H}_0(X, G)$, $H^0(X, G)$ и $\tilde{H}^0(X, G)$.

4. Получить аналогичные результаты для групп гомологий пары (X, A).

B. Бесконечные комплексы

1. Пусть K — произвольный бесконечный комплекс. По аналогии с рассмотренным в пункте 10 отображением β определить цепные отображения

$$\beta_w\colon K_O \to S(|K|_w), \quad \beta_m\colon K_O \to S(|K|_m),$$

где $|K|_w$ и $|K|_m$ — пространство комплекса K в слабой и метрической топологиях соответственно (см. главу II, упражнение F). Показать, что оба отображения β_w и β_m индуцируют изоморфизмы групп гомологий и когомологий.

2. Рассмотреть отображение $i\colon |K|_w \to |K|_m$, индуцированное тождественным отображением $K \to K$. Показать, что это отображение определяет комплекс $S(|K|_w)$ как подкомплекс комплекса $S(|K|_m)$ и что отображение вложения $S(|K|_w) \subset S(|K|_m)$ индуцирует изоморфизмы групп гомологий и когомологий. Показать на примерах, что комплекс $S(|K|_w)$ является собственным подкомплексом комплекса $S(|K|_m)$.

C. Цилиндр отображения

Определение. Пусть $f\colon X \to Y$ — произвольное непрерывное отображение. Рассмотрим подмножество C соединения $X \circ Y$ (см. главу II, упражнение D6), состоящее из пространств X, Y и всех интервалов, соединяющих каждую точку $x \in X$ с точкой $f(x) \in Y$. Множество C называется *цилиндром отображения* f.

1. Показать, что последовательность

$$\ldots \to H_q(X) \xrightarrow{f_*} H_q(Y) \xrightarrow{j_*} H_q(C, X) \xrightarrow{\partial} H_{q-1}(X) \to \ldots,$$

в которой j: $Y \to (C, X)$ — отображение вложения, точна.

2. Показать существование таких гомоморфизмов D_q: $C_q(X) \to C_{q+1}(C)$, что $\partial Dx + D\partial x = fx - x$ для любой цепи $x \in C_q(X)$.

3. Для отображения f_S: $S(X) \to S(Y)$, индуцированного отображением f: $X \to Y$, рассмотрим комплекс $\hat{f}_S$, введенный в теореме V.13.3. Группы гомологий $H_q(\hat{f}_S)$ этого комплекса называются *группами гомологий отображения* f и обозначаются через $H_q(f)$. С помощью указанного в упражнении 2 оператора гомотопии D: $S(X) \to S(C)$ определим отображение φ: $\hat{f}_S \to S(C)/S(X)$, полагая

$$\varphi(x, y) = Dx + y \bmod S(X),\ x \in C_{q-1}(X),\ y \in C_q(Y).$$

Показать, что отображение φ_*: $H_q(f) \approx H_q(C, X)$ является изоморфизмом.

Указание. Использовать диаграмму

$$\begin{tikzcd}
\ldots \arrow[r] & H(X) \arrow[r, "f_*"] \arrow[d, "m_*"] & H_q(Y) \arrow[r, "k_*"] \arrow[d, "n_*"] & H_q(f) \arrow[r, "l_*"] \arrow[d, "\varphi_*"] & H_{q-1}(X) \arrow[r] \arrow[d, "m_*"] & \ldots \\
\ldots \arrow[r] & H_q(X) \arrow[r, "i_*"] & H_q(C) \arrow[r, "j_*"] & H_q(C, X) \arrow[r, "\partial"] & H_{q-1}(X) \arrow[r] & \ldots,
\end{tikzcd}$$

в которой верхняя строчка является точной последовательностью рассмотренной в упражнении D1 главы V, нижняя строчка — гомологической последовательностью пары (C, X), отображение m — тождественным отображением и отображение n: $Y \subset C$ — вложением.

4. Получить аналогичные результаты для отображений f: $(X, A) \to (Y, B)$.

ГЛАВА VIII

СПЕКТРЫ ГРУПП И ИХ ПРЕДЕЛЫ

1. Введение

Эта глава содержит подготовительный материал, необходимый для второго доказательства теоремы существования теорий гомологий, которое будет изложено в главе IX. Она почти исключительно посвящена алгебраическим вопросам, связанным с используемыми в этом доказательстве предельными процессами (так называемыми прямыми и обратными спектрами групп), впервые введенными Понтрягиным. Хотя в первоначальном построении спектральной теории гомологий понятие спектра групп использовалось лишь в неявном виде, имеются серьезные основания для его явного выделения. Во-первых, тем самым разделяются алгебраические и геометрические трудности, во-вторых, появляется возможность введения в теорию гомологий предельных процессов различных типов. Независимое изложение теории спектров не может считаться бесполезным хотя бы еще и потому, что как прямые, так и обратные спектры нужны и в других вопросах, не связанных непосредственно с теорией гомологий.

2. Прямые и обратные спектры

Определение 2.1. Рефлексивное и транзитивное отношение $\alpha < \beta$, определенное в некотором множестве M, называется *квазипорядком*. Вообще говоря, не предполагается, что из $\alpha < \beta$ и $\beta < \alpha$ обязательно следует $\alpha = \beta$. Квазиупорядоченное множество M, в котором для любых двух элементов $\alpha, \beta \in M$ существует такой элемент $\gamma \in M$, что $\alpha < \gamma$ и $\beta < \gamma$, называется *направленным множеством*. Направленное множество M' называется подмножеством множества M (обозначение $M' \subset M$), если из $\alpha \in M'$ следует, что $\alpha \in M$, и из $\alpha < \beta$ в M' следует, что $\alpha < \beta$ в M. Подмножество M' называется *конфинальным подмножеством множества* M, если для любого элемента $\alpha \in M$ существует такой элемент $\beta \in M'$, что $\alpha < \beta$. Функция φ, определенная на направленном множестве M, значения которой принадлежат направленному множеству N, называется *отображением* φ: $M \to N$, если она сохраняет порядок (т. е. из $\alpha < \beta$ в M следует, что $\varphi\alpha < \varphi\beta$ в N).

Определение 2.2. Пусть M — произвольное направленное множество. Предположим, что любому элементу $\alpha \in M$ отнесено некоторое множество X^α, а каждой паре α, β элементов множества M, связанных отношением $\alpha < \beta$, отнесено отображение

$$\pi_\alpha^\beta\colon X^\alpha \to X^\beta.$$

Система $\{X, \pi\}$ множеств X^α и отображений π_α^β называется *прямым спектром множеств над направленным множеством* M, если

(1) для любого элемента $\alpha \in M$ отображение π_α^α является тождественным отображением;

(2) для любых элементов $\alpha < \beta < \gamma$ множества M

$$\pi_\beta^\gamma \pi_\alpha^\beta = \pi_\alpha^\gamma.$$

Аналогично предположим, что каждому элементу $\alpha \in M$ отнесено некоторое множество X_α, а каждой паре α, β элементов множества M, связанных отношением $\alpha < \beta$, отнесено отображение

$$\pi_\alpha^\beta\colon X_\beta \to X_\alpha.$$

Система $\{X, \pi\}$ множеств X_α и отображений π_α^β называется *обратным спектром множеств над направленным множеством* M, если

(1) для любого элемента $\alpha \in M$ отображение π_α^α является тождественным отображением;

(2) для любых элементов $\alpha < \beta < \gamma$ множества M

$$\pi_\alpha^\beta \pi_\beta^\gamma = \pi_\alpha^\gamma.$$

Как для обратных, так и для прямых спектров отображения π_α^β называются *проекциями*. Если каждое из множеств, составляющих спектр, является топологическим пространством, R-модулем или топологической группой, а все его проекции являются соответственно непрерывными отображениями, линейными или непрерывными гомоморфизмами, то спектр называется *спектром* соответственно *пространств*, *R-модулей* или *топологических групп*.

Направленное множество M можно рассматривать как категорию, если каждое отношение $\alpha < \beta$ считать отображением $\alpha \to \beta$. Тогда прямые (обратные) спектры над M будут не чем иным, как ковариантными (соответственно контравариантными) функторами, определенными на категории M и принимающими значения в категории всех множеств и их отображений (или категории всех R-модулей и их гомоморфизмов, и т. п.).

Определение 2.3. Пусть $\{X, \pi\}$ и $\{X', \pi'\}$ — прямые спектры над направленными множествами M и M' соответственно. *Отображением*

$$\Phi\colon \{X, \pi\} \to \{X', \pi'\}$$

этих прямых спектров называется совокупность, состоящая из некоторого отображения $\varphi\colon M \to M'$ и таких отображений

$$\varphi^\alpha\colon X^\alpha \to X'^{\varphi\alpha},$$

заданных для всех $\alpha \in M$, что для любых элементов $\alpha < \beta$ множества M диаграмма

$$\begin{tikzcd} X^\alpha \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\varphi"] & X^\beta \arrow[d, "\varphi"] \\ X'^{\varphi\alpha} \arrow[r, "\pi'"] & X'^{\varphi\beta} \end{tikzcd}$$

коммутативна.

Аналогично пусть $\{X, \pi\}$ и $\{X', \pi'\}$ — обратные спектры над направленными множествами M и M' соответственно. *Отображением*

$$\Phi\colon \{X, \pi\} \to \{X', \pi'\}$$

этих обратных спектров называется совокупность, состоящая из некоторого отображения $\varphi\colon M' \to M$ и таких отображений

$$\varphi_{\alpha'}\colon X_{\varphi\alpha'} \to X'_{\alpha'},$$

заданных для всех $\alpha' \in M'$, что для любых элементов $\alpha' < \beta'$ множества M' диаграмма

$$\begin{tikzcd} X_{\varphi\alpha'} \arrow[d, "\varphi"] & X_{\varphi\beta'} \arrow[l, "\pi"'] \arrow[d, "\varphi"] \\ X'_{\alpha'} & X'_{\beta'} \arrow[l, "\pi'"'] \end{tikzcd}$$

коммутативна.

Если рассматриваемые спектры являются спектрами топологических пространств или групп, то все компоненты отображения Φ (т. е. отображения φ^α для случая прямых спектров и отображения φ_α для случая обратных спектров) должны быть непрерывными или соответственно гомоморфными отображениями. Если

$$\Phi\colon \{X, \pi\} \to \{X', \pi'\}$$

и

$$\Phi'\colon \{X', \pi'\} \to \{X'', \pi''\},$$

то определено отображение (*композиция*)

$$\Phi'\Phi\colon \{X, \pi\} \to \{X'', \pi''\},$$

состоящее в случае прямых спектров из отображений $\varphi'\varphi$ и $\varphi'^{\varphi\alpha}\varphi^\alpha$, $\alpha \in M$, а в случае обратных спектров — из отображений $\varphi\varphi'$ и $\varphi'_{\alpha''}\varphi_{\varphi'\alpha''}$, $\alpha'' \in M''$.

Легко проверяется, что прямые или обратные спектры (множеств, групп и т. д.) и их отображения образуют категорию. Категория прямых (обратных) спектров R-модулей обозначается через $\mathrm{Dir}\,\mathfrak{G}_R$ (соответственно через $\mathrm{Inv}\,\mathfrak{G}_R$). Аналогично обозначаются и другие категории (например категория обратных спектров компактных групп обозначается через $\mathrm{Inv}\,\mathfrak{G}_C$).

Заметим, что тождественное отображение Φ спектра $\{X, \pi\}$ состоит из тождественных отображений φ: $M \to M$ и φ^α: $X^\alpha \to X^\alpha$.

Определение 2.4. Если направленное множество M' является подмножеством направленного множества M (см. определение 2.1), то для любого прямого (обратного) спектра $\{X, \pi\}$ над M совокупность всех его множеств, которые соответствуют элементам множества M', является прямым (обратным) спектром над M'; проекциями этого спектра являются те из проекций π_α^β исходного спектра, для которых $\alpha, \beta \in M'$ и $\alpha < \beta$ в M'. Этот спектр $\{X', \pi'\}$ называется *подспектром* спектра $\{X, \pi\}$ над множеством M'. Подспектр $\{X', \pi'\}$ называется *конфинальным*, если подмножество M' конфинально. Отображение вложения φ: $M' \to M$ и тождественные отображения φ: $X'^\alpha \to X^\alpha$ (для обратных спектров тождественные отображения φ_α: $X_\alpha \to X'_\alpha$) $\alpha \in M'$ образуют отображение Φ: $\{X', \pi'\} \to \{X, \pi\}$ (для обратных спектров отображение Φ: $\{X, \pi\} \to \{X', \pi'\}$), называемое *отображением вложения* подспектра в спектр (соответственно спектра в подспектр).

Очевидно, что тождественное отображение спектра $\{X, \pi\}$ является отображением вложения. Кроме того, композиция двух отображений вложения также является отображением вложения.

Заметим, что если множество M состоит из одного элемента, то любой (обратный или прямой) спектр над M сводится к единственному множеству (или группе). Обратно, любое множество (или группу) можно рассматривать как (обратный или прямой) спектр над множеством M, состоящим из одного элемента. В частности, если в определении 2.3 мы выберем за M' множество, состоящее из одного элемента, то мы получим определение отображения

$$\Phi: \{X, \pi\} \to X'$$

прямого спектра $\{X, \pi\}$ над множеством M в некоторое множество X'. Это отображение состоит из таких отображений φ^α: $X^\alpha \to X'$, что

$$\varphi^\beta \pi_\alpha^\beta = \varphi^\alpha.$$

Аналогично, в случае, когда множество M состоит только из одного элемента, получается определение отображения

$$\Phi: X \to \{X', \pi'\}.$$

Если спектр $\{X', \pi'\}$ является обратным спектром, то отображение Φ состоит из таких отображений φ_α: $X \to X'_\alpha$, что

$$\varphi_\alpha \pi_\alpha^\beta = \varphi_\beta.$$

Можно также рассматривать отображения $\{X, \pi\} \to X'$, где $\{X, \pi\}$ — обратный спектр, и отображения $X \to \{X', \pi'\}$, где $\{X', \pi'\}$ — прямой спектр. Эти типы отображений нам не понадобятся.

3. Пределы обратных спектров

Определение 3.1. Пусть $\{X, \pi\}$ — произвольный обратный спектр множеств над направленным множеством M. Его *пределом* X_∞ называется подмножество произведения $\prod X_\alpha$ (см. определение V.5.1), состоящее из таких функций $x = \{x_\alpha\}$, что

(1) $$\pi_\alpha^\beta(x_\beta) = x_\alpha$$

для любых элементов α, β множества M, связанных отношением $\alpha < \beta$. Отображения

$$\pi_\beta\colon\ X_\infty \to X_\beta,$$

определенные формулой

(2) $$\pi_\beta(x) = x_\beta,$$

называются *проекциями*. Отображение π_β есть не что иное, как определенное в V.5.1 отображение p_β, рассматриваемое только на подмножестве X_∞. В случае, когда спектр $\{X, \pi\}$ является обратным спектром пространств, множество X_∞ рассматривается в топологии, которую оно имеет как подпространство произведения $\prod X_\alpha$. В случае, когда спектр $\{X, \pi\}$ является обратным спектром R-модулей, множество X_∞ будет, как легко видеть, подмодулем модуля $\prod X_\alpha$, и, следовательно, это множество также определяется как R-модуль. Аналогично предел обратного спектра топологических групп является топологической группой.

Лемма 3.2. *Если* $\alpha < \beta$, *то* $\pi_\alpha = \pi_\alpha^\beta \pi_\beta$.

Доказательство. Согласно формуле (2) $\pi_\beta(x) = x_\beta$. Согласно формуле (1) $\pi_\alpha^\beta(x_\beta) = x_\alpha$. Следовательно, $\pi_\alpha^\beta\pi_\beta(x) = x_\alpha = \pi_\alpha(x)$.

Лемма 3.3. *Для любого обратного спектра* $\{X, \pi\}$ *пространств* (*R-модулей или топологических групп*) *каждая проекция* π_α *является непрерывным отображением* (*соответственно линейным или непрерывным гомоморфизмом*).

Следует из соответствующих свойств проекций (см. определения V.5.2 и V.5.5).

Замечание. Пусть к направленному множеству M добавлен элемент ∞, больший каждого элемента $\alpha \in M$. Получающееся множество M' также, очевидно, направлено. Обратный спектр $\{X, \pi\}$ вместе с множеством X_∞ и проекциями π_α является обратным спектром над множеством M'. Предел этого расширенного спектра находится в естественном взаимно однозначном соответствии с множеством X_∞.

Пример. Мы определили понятие предела обратного спектра с помощью понятия произведения. Обратно, произведение бесконечного числа множеств можно представить как предел обратного спектра конечных произведений. Пусть $\{X_j\}$ — произвольное семейство множеств; предполагается, что индексы пробегают некоторое бесконечное множество J. Обозначим через M упорядоченное по включению множество всех конечных подмножеств множества J. Для любого элемента $\alpha \in M$ положим $Y_\alpha = \prod_{j \in \alpha} X_j$. Любой элемент $y \in Y_\beta$ является некоторой функцией, определенной на множестве β. Если $\alpha < \beta$, то функция y определяет некоторую функцию на множестве α. Обозначим эту функцию через $\pi_\alpha^\beta(y)$. Она, очевидно, принадлежит множеству Y_α. Таким образом, π_α^β: $Y_\beta \to Y_\alpha$. Легко видеть, что предел Y_∞ построенного обратного спектра $\{Y, \pi\}$ совпадает с произведением $\prod X_j$.

Теорема 3.4. *Если в обратном спектре $\{X, \pi\}$ каждая проекция π_α^β является взаимно однозначным отображением множества X_β в (на) множество X_α, то каждая проекция π_α является взаимно однозначным отображением множества X_∞ в (на) множество X_α.*

Доказательство. Пусть $x, y \in X_\infty$ и пусть $x_\alpha = y_\alpha$ для некоторого α. Так как проекция π_α^β является по условию взаимно однозначным отображением множества X_β в множество X_α, то для любого $\beta < \alpha$ должно быть $x_\beta = y_\beta$. Так как множество M направлено, то для любого злемента $\gamma \in M$ существует элемент $\beta > \gamma, \alpha$. Поэтому из равенства $x_\beta = y_\beta$ следует равенство $x_\gamma = y_\gamma$. Следовательно, $x = y$. Тем самым доказано, что проекция π_α является взаимно однозначным отображением множества X_∞ в множество X_α. Предположим теперь, что каждая проекция π_α^β является взаимно однозначным отображением множества X_β на множество X_α. Для некоторого фиксированного индекса α рассмотрим произвольный элемент $x_\alpha \in X_\alpha$ и для любого $\beta > \alpha$ положим $x_\beta = (\pi_\alpha^\beta)^{-1}(x_\alpha)$. Кроме того, для произвольного индекса $\gamma \in M$ положим $x_\gamma = \pi_\alpha^\beta(x_\beta)$, где β — такой индекс, что $\beta > \alpha, \gamma$. Докажем, что элемент $x = \{x_\gamma\}$ принадлежит множеству X_∞. Пусть $\gamma_1 < \gamma_2$ и пусть $\beta_1 > \alpha, \gamma_1$ и $\beta_2 > \alpha, \gamma_2$ — индексы, использованные при определении элементов x_{γ_1} и x_{γ_2}. Выберем индекс $\beta > \beta_1, \beta_2$. Тогда $x_\alpha = \pi_\alpha^\beta(x_\beta) = \pi_\alpha^{\beta_i}\pi_{\beta_i}^\beta(x_\beta)$ и $x_\alpha = \pi_\alpha^{\beta_i}(x_{\beta_i})$ $(i = 1, 2)$. Так как проекция $\pi_\alpha^{\beta_i}$ является взаимно однозначным отображением, то отсюда следует, что $\pi_{\beta_i}^\beta(x_\beta) = x_{\beta_i}$. Следовательно, $\pi_{\gamma_i}^\beta(x_\beta) = \pi_{\gamma_i}^{\beta_i}\pi_{\beta_i}^\beta(x_\beta) = \gamma_i$, и потому $\pi_{\gamma_1}^{\gamma_2}(x_{\gamma_2}) = \pi_{\gamma_1}^\beta(x_\beta) = x_{\gamma_1}$. Тем самым теорема полностью доказана.

Замечание. Ослабим предположения теоремы 3.4, потребовав только, чтобы каждая проекция π_α^β была отображением множества X_β на множество X_α. Естественно думать, что в этих условиях каждая проекция π_α будет отображением множества X_∞ на множество X_α. Если множество M счетно или если оно обладает счетным конфинальным подмножеством, то это предположение действительно можно доказать. Ниже (см. следствие 3.9) оно будет также доказано для обратных спектров компактных хаусдорфовых пространств. Однако в общем случае это предположение неверно.

Соответствующий пример был построен Хенкиным (Proc. Amer. Math. Soc. 1 (1950), 224—225).

Лемма 3.5. *Предел X_∞ обратного спектра $\{X, \pi\}$ хаусдорфовых пространств является замкнутым подпространством произведения $\prod X_\alpha$.*

Доказательство. Пусть элемент $x \in \prod X_\alpha$ не содержится в множестве X_∞. Тогда в множестве M существуют такие элементы $\alpha < \beta$, что $\pi_\alpha^\beta(x_\beta) \neq x_\alpha$. Так как X_α является хаусдорфовым пространством, то существуют открытые непересекающиеся множества U_α и V_α, содержащие элементы x_α и $\pi_\alpha^\beta(x_\beta)$ соответственно. Пусть $U_\beta = (\pi_\alpha^\beta)^{-1}V_\alpha$. В семействе $\{X\}$ заменим множества X_α, X_β на множества U_α, U_β. Произведение полученного семейства множеств является прямоугольной окрестностью в произведении $\prod X_\alpha$ (см. определение V.5.2). Это открытое множество содержит точку x, но не содержит точек множества X_∞. Таким образом, дополнение к множеству X_∞ открыто и, следовательно, само множество X_∞ замкнуто.

Теорема 3.6. *Предел обратного спектра компактных пространств является компактным пространством. Предел обратного спектра непустых компактных пространств непуст.*

Доказательство. Так как пространство X_∞ замкнуто в произведении $\prod X_\alpha$ (лемма 3.5) и так как произведение $\prod X_\alpha$ является компактным пространством (теорема V.5.4), то пространство X_∞ также компактно (напомним, что «компактный» включает «хаусдорфов»). Для доказательства второго утверждения теоремы отнесем каждому элементу $\beta \in M$ подмножество Y_β произведения $\prod X_\alpha$, состоящее из таких элементов x, что $\pi_\gamma^\beta(x_\beta) = x_\gamma$ для всех $\gamma < \beta$. Множество Y_β непусто. Действительно, выбрав произвольно элемент $x_\beta \in X_\beta$, мы, очевидно, получим элемент множества Y_β, положив $x_\gamma = \pi_\gamma^\beta(x_\beta)$, если $\gamma < \beta$, и любым способом распространив функцию x на остальные элементы множества M. Кроме того, множество Y_β замкнуто. Доказательство этого утверждения повторяет доказательство леммы 3.5 и поэтому мы его опустим. Наконец, если $\alpha < \beta$, то $Y_\alpha \supset Y_\beta$, потому что $\pi_\gamma^\beta = \pi_\gamma^\alpha \pi_\alpha^\beta$, если $\gamma < \alpha < \beta$. Так как множество M направлено, то отсюда следует, что $\{Y_\alpha\}$ является таким семейством замкнутых множеств компактного пространства, что любое его конечное подсемейство имеет непустое пересечение. Поэтому пересечение всех множеств этого семейства также непусто. Остается заметить, что любая точка этого пересечения принадлежит множеству X_∞.

Теорема 3.7. *Пусть $\{X, \pi\}$ — произвольный обратный спектр компактных пространств над множеством M и α — произвольный элемент множества M. Оказывается, что для любого открытого множества U пространства X_α, содержащего множество $\pi_\alpha(X_\infty)$, существует такой элемент $\beta > \alpha$, что $\pi_\alpha^\beta(X_\beta) \subset U$.*

Доказательство. Для любого индекса $\beta > \alpha$ положим $Y_\beta = X_\beta \setminus (\pi_\alpha^\beta)^{-1}(U)$. Для остальных индексов β положим $Y_\beta = X_\beta$. Для любых индексов $\beta < \gamma$ обозначим через $\varrho_\beta^\gamma \colon Y_\gamma \to Y_\beta$ отображение, определенное проекцией π_β^γ. Построенная система $\{Y_\beta, \varrho_\beta^\gamma\}$ является, очевидно, обратным спектром компактных пространств. Если утверждение теоремы 3.7 неверно, то каждое множество Y_β непусто. Тогда и предельное множество $Y_\infty \subset X_\infty$ также непусто (теорема 3.6). Остается заметить, что для любого элемента $y \in Y_\infty$ элемент $y_\alpha = \varrho_\alpha(y) = \pi_\alpha(y)$ содержится в каждом из множеств Y_α и U, что по построению невозможно.

Следствие 3.8. *Для любого обратного спектра компактных пространств*

$$\pi_\alpha(X_\infty) = \bigcap_{\alpha < \beta} \pi_\alpha^\beta(X_\beta).$$

Доказательство. Если элемент $x_\alpha \in X_\alpha$ не принадлежит множеству $\pi_\alpha(X_\infty)$, то его дополнение U содержит множество $\pi_\alpha^\beta(X_\beta)$ для некоторого β. Поэтому элемент x_α не принадлежит рассматриваемому пересечению. Таким образом, левая часть доказываемого равенства содержит правую часть. С другой стороны, согласно лемме 3.2 $\pi_\alpha(X_\infty) \subset \pi_\alpha^\beta(X_\beta)$ для каждого $\beta > \alpha$, так что левая часть равенства содержится в правой.

Следствие 3.9. *Если в обратном спектре $\{X, \pi\}$ компактных пространств каждая проекция π_α^β является отображением множества X_β на множество X_α, то и каждая проекция π_α будет отображением множества X_∞ на множество X_α.*

Немедленно вытекает из следствия 3.8.

Определение 3.10. *Пределом φ_∞* некоторого отображения $\Phi \colon \{X, \pi\} \to \{X', \pi'\}$ одного обратного спектра в другой (см. определение 2.3) называется отображение

$$\varphi_\infty \colon X_\infty \to X'_\infty,$$

определенное, следующим образом. Для любых элементов $x \in X_\infty$ и $\alpha \in M'$ положим $x'_\alpha = \varphi_\alpha(x_{\varphi(\alpha)})$. Из условия коммутативности, предусмотренного определением 2.3, следует, что $\pi'^\beta_\alpha(x'_\beta) = x'_\alpha$ для любых элементов $\alpha < \beta$ множества M'. Таким образом, элемент $x' = \{x'_\alpha\}$ принадлежит множеству X'_∞. Мы полагаем $\varphi_\infty(x) = x'$.

Лемма 3.11. *Для любого отображения $\Phi \colon \{X, \pi\} \to \{X', \pi'\}$ и любого элемента $\alpha \in M'$ диаграмма*

$$\begin{array}{ccc} X_{\varphi(\alpha)} & \xleftarrow{\pi} & X_\infty \\ \downarrow{\scriptstyle \varphi_\alpha} & & \downarrow{\scriptstyle \varphi_\infty} \\ X'_\alpha & \xleftarrow{\pi'} & X'_\infty \end{array}$$

коммутативна.

Немедленно следует из определения.

Лемма 3.12. *Для любого обратного спектра пространств $\{X, \pi\}$ семейство $\{\pi_\alpha^{-1}(U)\}$, где α пробегает все множество M, а U все открытые множества пространства X_α являются базой открытых множеств пространства X_∞.*

Доказательство. Пусть множество W открыто в пространстве X_∞ и пусть $x \in W$. Согласно определению V.5.2 в произведении $\prod X_\alpha$ существует такая прямоугольная окрестность V точки x, что $V \cap X_\infty \in W$. Пусть окрестность V определена множествами $V_i \subset X_{\alpha_i}$ $(i = 1, \ldots, n)$ и, следовательно, состоит из всех элементов $y \in \prod X_\alpha$, для которых $y_{\alpha_i} \in V_i$. Так как множество M направлено, то существует элемент $\beta > \alpha_i$ $(i = 1, \ldots, n)$. Так как проекция $\pi_{\alpha_i}^\beta$ непрерывна и так как $\pi_{\alpha_i}^\beta(x_\beta) \subset V_i$, то пересечение

$$U = \bigcap_{i=1}^{n} (\pi_{\alpha_i}^\beta)^{-1}(V_i)$$

является открытым множеством пространства X_β, содержащим точку x_β. Следовательно, $x \in \pi_\beta^{-1}(U)$. Пусть $y \in \pi_\beta^{-1}(U)$. Тогда $y_\beta \in U$ и, следовательно, $y_{\alpha_i} \in V_i$ для любого $i = 1, \ldots, n$. Поэтому $y \in V \cap \cap X_\infty \subset W$. Таким образом, $x \in \pi_\beta^{-1}(U) \subset W$. Тем самым лемма полностью доказана.

Теорема 3.13. *Предел φ_∞ отображения Φ: $\{X, \pi\} \to \{X', \pi'\}$ обратных спектров пространств (R-модулей или топологических групп) является непрерывным отображением (соответственно линейным или непрерывным гомоморфизмом).*

Доказательство. Для доказательства непрерывности отображения φ_∞ достаточно показать, что отображение φ_∞^{-1} переводит каждое открытое множество некоторой базы открытых множеств пространства X'_∞ в открытое множество пространства X_∞. Согласно лемме 3.12 множества $\pi_\alpha'^{-1}(U)$, где $\alpha \in M'$ и множество U открыто в множестве X'_α, образуют такую базу. Согласно лемме 3.11

$$\varphi_\infty^{-1}\pi_\alpha'^{-1}(U) = \pi_{\varphi(\alpha)}^{-1}\varphi_\alpha^{-1}(U).$$

Так как отображения φ_α и $\pi_{\varphi(\alpha)}$ непрерывны, то это множество открыто. Доказательство того, что в случае R-модулей отображение φ_α является гомоморфизмом, предоставляется читателю.

Теорема 3.14. *Пусть $\mathfrak{A}$ — одна из следующих категорий: множеств и отображений, пространств и непрерывных отображений, компактных пространств и непрерывных отображений, R-модулей и линейных гомоморфизмов, компактных групп и непрерывных гомоморфизмов. Пусть, далее* Inv ($\mathfrak{A}$) *— соответствующая категория обратных спектров и их отображений. Оказывается, что, сопоставляя каждому обратному спектру $\{X, \pi\}$ и каждому отображению Φ: $\{X, \pi\} \to \{X', \pi'\}$ их пределы X_∞ и φ_∞, мы получим ковариантный функтор, определенный в категории* Inv ($\mathfrak{A}$) *и принимающий значения в категории $\mathfrak{A}$.*

Доказательство. Тот факт, что $X_\infty \in \mathfrak{A}$, очевиден во всех случаях, исключая случай категории компактных пространств, для которого это утверждение доказано в следствии 3.8. В теореме 3.13 доказано, что $\varphi_\infty \in \mathfrak{A}$. Условие 1° пункта IV.1, для ковариантного функтора требует, чтобы $\varphi_\infty \colon X_\infty \to X'_\infty$, что следует из определения отображения φ_∞. Условие 2° гласит: если отображение Φ тождественно, то и отображение φ_∞ тождественно. Это немедленно следует из того, что тождественное отображение Φ составлено из тождественных отображений. Последнее условие 3° требует, чтобы предел композиций отображений Φ, Φ' был композицией пределов этих отображений. Это непосредственно следует из того, что координаты точки $\varphi_\infty(x)$ определяются через координаты точки x с помощью координатных функций φ_α и из того, что композиция отображений $\Phi'\Phi$ определяется с помощью композиции соответствующих координатных функций.

Предложения 3.10, 3.11 и 3.13 применимы и в том случае, когда спектр $\{X, \pi\}$ является спектром над направленным множеством, состоящим из одной точки. Пределом спектра, состоящего из одного множества X, является само это множество. Следовательно, любое отображение $\Phi \colon X \to \{X', \pi'\}$ индуцирует некоторое отображение $\varphi_\infty \colon X \to X'_\infty$, для которого $\pi'_\alpha \varphi_\infty = \varphi_\alpha$.

Теорема 3.15. *Пусть $\{X, \pi\}$, $\{X', \pi'\}$ — обратные спектры над направленными множествами M, M' соответственно и пусть $\Phi \colon \{X, \pi\} \to \{X', \pi'\}$. Пусть существует такое направленное подмножество N множества M', что*

(1°) *N является конфинальным подмножеством множества M' (см. определение 2.1),*

(2°) *множество $\varphi(N)$ является конфинальным подмножеством множества M,*

(3°) *для любого $\beta \in N$ отображение φ_β является взаимно однозначным отображением множества $X_{\varphi(\beta)}$ на множество X'_β.*

Тогда отображение φ_∞ является взаимно однозначным отображением множества X_∞ на множество X'_∞.

Доказательство. Для любого элемента $\beta \in M'$ будем соответствующий элемент $\varphi(\beta)$ сокращенно обозначать через β'. Пусть x и y — различные точки пространства X_∞. Тогда существует такой индекс $\alpha \in M$, что $x_\alpha \neq y_\alpha$. Согласно условию 2° существует такой элемент $\beta \in N$, что $\alpha < \beta'$. Очевидно, что $x_{\beta'} \neq y_{\beta'}$, и следовательно, ввиду условия 3°, $\varphi_\beta(x_{\beta'}) \neq \varphi_\beta(y_{\beta'})$. Таким образом, β-координаты точек $\varphi_\infty(x)$ и $\varphi_\infty(y)$ различны. Следовательно, φ_∞ является взаимно однозначным отображением множества X_∞ в множество X'_∞. Остается доказать, что φ_∞ отображает множество X_∞ на множество X'_∞. Пусть $x' \in X'_\infty$. Для каждого элемента $\alpha \in M$ выберем такой элемент $\beta \in N$, что $\alpha < \beta'$, и положим

$$x_\alpha = \pi_\alpha^{\beta'} \varphi_\beta^{-1}(x'_\beta). \tag{3}$$

Пусть $\beta < \gamma$ в N. Из коммутативности диаграммы

$$\begin{array}{ccc} X_{\beta'} & \xleftarrow{\pi} & X_{\gamma'} \\ \downarrow{\scriptstyle\varphi_\beta} & & \downarrow{\scriptstyle\varphi_\gamma} \\ X'_\beta & \xleftarrow{\pi'} & X'_\gamma \end{array}$$

и взаимной однозначности отображений φ_β, φ_γ следует, что $\pi^{\gamma'}_{\beta'}\varphi_\gamma^{-1}(x'_\gamma) = \varphi_\beta^{-1}(x'_\beta)$. Поэтому, заменив в формуле (3) индекс β индексом γ, мы получим, то же значение координаты x_α. Так как множество N направлено, то отсюда вытекает, что элемент x_α не зависит от выбора индекса β. Покажем, что элемент $x = \{x_\alpha\}$ принадлежит множеству X_∞. Выберем элемент $\beta \in N$, для которого $\gamma < \beta'$. Как уже показано

$$x_\alpha = \pi^{\beta'}_\alpha \varphi_\beta^{-1}(x'_\beta),$$

$$x_\gamma = \pi^{\beta'}_\gamma \varphi_\beta^{-1}(x'_\beta).$$

Так как $\pi^{\beta'}_\alpha = \pi^\gamma_\alpha \pi^{\beta'}_\gamma$, то $\pi^\gamma_\alpha(x_\gamma) = x_\alpha$. Таким образом, $x \in X_\infty$. Покажем, наконец, что $\varphi_\infty(x) = x'$, т. е. что для любого $\beta \in M'$ элементы $\varphi_\infty(x)$ и x' имеют одинаковые β-координаты. Из условия (1°) следует, что совпадение β-координат достаточно доказать только для элементов $\beta \in N$. По определению $(\varphi_\infty(x))_\beta = \varphi_\beta(x_{\beta'})$. Как показано выше, $x_{\beta'} = \pi^{\beta'}_{\beta'}\varphi_\beta^{-1}(x'_\beta) = \varphi_\beta^{-1}(x'_\beta)$. Следовательно, $\varphi_\beta(x_{\beta'}) = x'_\beta$. Тем самым теорема полностью доказана.

Следствие 3.16. *Для любого конфинального подмножества M' направленного множества M и любого обратного спектра $\{X, \pi\}$ над множеством M предел φ_∞ отображения вложения Φ спектра $\{X, \pi\}$ в его подспектр $\{X', \pi'\}$ над множеством M' (см. определение 2.4) является взаимно однозначным отображением множества X_∞ на множество X'_∞.*

Для доказательства достаточно в теореме 3.15 положить $N = M'$.

Следствие 3.17. *Пусть M' — конфинальное подмножество множества M и пусть $\{X, \pi\}$ — обратный спектр над множеством M. Оказывается, что элементы $x, y \in X_\infty$ тогда и только тогда совпадают, когда $x_\alpha = y_\alpha$ для всех $\alpha \in M'$.*

Лемма 3.18. *Пусть Φ и Ψ — такие отображения $\{X, \pi\} \to \{X', \pi'\}$, что для каждого $\alpha \in M$ $\varphi(\alpha) < \psi(\alpha)$ и $\psi_\alpha = \varphi_\alpha \pi^{\psi(\alpha)}_{\varphi(\alpha)}$. Тогда $\varphi_\infty = \psi_\infty$.*

Доказательство. Согласно леммам 3.11 и 3.2

$$\pi'_\alpha \varphi_\infty = \varphi_\alpha \pi_{\varphi(\alpha)} = \varphi_\alpha \pi^{\psi(\alpha)}_{\varphi(\alpha)} \pi_{\psi(\alpha)} = \psi_\alpha \pi_{\psi(\alpha)} = \pi'_\alpha \psi_\infty.$$

Так как это справедливо для всех $\alpha \in M'$, то $\varphi_\infty = \psi_\infty$.

4. Пределы прямых спектров

Определение 4.1. Пусть $\{G, \pi\}$ — прямой спектр над направленным множеством M, состоящий из R-модулей G^{α} и гомоморфизмов π_{α}^{β}. Обозначим через $\sum G$ прямую сумму (см. определение V.5.6) R-модулей G^{α}. Любой элемент $g \in G^{\alpha}$ мы будем отождествлять с его образом в $\sum G$ при указанном в определении V.5.6 отображении i_{α}. Элемент

$$\pi_{\alpha}^{\beta} g^{\alpha} - g^{\alpha} \tag{1}$$

прямой суммы $\sum G$, где $g^{\alpha} \in G^{\alpha}$ и $\alpha < \beta$ в M, будем называть *соотношением*. Пусть Q — подмодуль модуля $\sum G$, порожденный всеми соотношениями; соответствующий фактор-модуль

$$G^{\infty}(\sum G)/Q$$

называется *пределом прямого спектра* $\{G, \pi\}$. Гомоморфизмы

$$\pi_{\alpha}\colon G^{\alpha} \to G^{\infty},$$

определенные естественным отображением $\sum G \to G^{\infty}$, называются *проекциями*.

Так как каждое соотношение (1) отображается в нуль, то имеет место

Лемма 4.2. *Если* $\alpha < \beta$, *то* $\pi_{\beta}\pi_{\alpha}^{\beta} = \pi_{\alpha}$.

Лемма 4.3. *Для любого элемента* $u \in G^{\infty}$ *существует такой индекс* α *и такой элемент* $g^{\alpha} \in G^{\alpha}$, *что* $\pi_{\alpha} g^{\alpha} = u$.

Доказательство. Пусть элемент u является образом элемента $v \in \sum G$ и пусть $v = \sum_{1}^{n} g^{\alpha_k}$, где $g^{\alpha_k} \in G^{\alpha_k}$. Так как множество M направлено (здесь впервые используется направленность множества M), то существует элемент $\alpha > \alpha_k$ $(k = 1, \ldots, n)$. Положим $g_k = \pi_{\alpha_k}^{\alpha} g^{\alpha_k}$ и $v' = \sum_{k=1}^{n} g_k$. Так как $g_k - g^{\alpha_k} \in Q$, то $v' - v \in Q$. Следовательно, элемент $v' \in G^{\alpha}$ также переходит в элемент u.

Лемма 4.4. *Если* $\pi_{\gamma} g = 0$, *где* $g \in G^{\gamma}$, *то существует такой индекс* $\delta > \gamma$, *что* $\pi_{\gamma}^{\delta} g = 0$.

Доказательство. Равенство $\pi_{\gamma} g = 0$ означает, что элемент $g \in \sum G$ является линейной комбинацией элементов вида (1). Так как любое кратное элемента этого вида также имеет тот же вид, то элемент g можно рассматривать как сумму элементов вида (1). Выберем индекс δ больший индекса γ и всех индексов α, β, входящих в эту сумму. Тогда элемент

$$\pi_{\gamma}^{\delta} g = (\pi_{\gamma}^{\delta} g - g) + g$$

также является суммой элементов вида (1). Так как

$$\pi_{\alpha}^{\beta} g^{\alpha} - g^{\alpha} = (\pi_{\alpha}^{\delta} g^{\alpha} - g^{\alpha}) + (\pi_{\beta}^{\delta}(-\pi_{\alpha}^{\beta} g^{\alpha}) - (\pi_{\alpha}^{\beta} g^{\alpha})),$$

то элемент $\pi^\delta_\gamma g$ можно рассматривать как сумму таких выражений вида (1), что для каждого из них $\beta = \delta$. Все члены с одинаковым индексом α можно объединить в один член. В результате получим:

$$\pi^\delta_\gamma g = \sum_\alpha (\pi^\delta_\alpha g^\alpha - g^\alpha).$$

Так как модуль $\sum G$ является прямой суммой, то любое соотношение между элементами этой группы являются следствием соотношений между элементами отдельных слагаемых. Следовательно, $g^\alpha = 0$ для любого индекса $\alpha \neq \delta$. С другой стороны, $\pi^\delta_\delta g^\delta - g^\delta = 0$. Таким образом, $\pi^\delta_\gamma g = 0$.

Лемма 4.5. $\pi_\alpha g^\alpha = \pi_\beta g^\beta$ *тогда и только тогда, когда существует такой индекс* $\gamma > \alpha, \beta$, *что* $\pi^\gamma_\alpha g^\alpha = \pi^\gamma_\beta g^\beta$.

Доказательство. Если такой индекс γ существует, то элементы $\pi^\gamma_\alpha g^\alpha - g^\alpha$ и $\pi^\gamma_\beta g^\beta - g^\beta$ принадлежат подмодулю Q. Следовательно, их разность $g^\beta - g^\alpha$ также принадлежит подмодулю Q. Поэтому $\pi_\alpha g^\alpha = \pi_\beta g^\beta$. Пусть, обратно, $\pi_\alpha g^\alpha = \pi_\beta g^\beta$. Выберем индекс $\gamma > \alpha, \beta$ и положим $g = \pi^\gamma_\alpha g^\alpha - \pi^\gamma_\beta g^\beta$. Согласно лемме 4.2 $\pi_\gamma g = 0$. Поэтому согласно лемме 4.4 существует такой индекс $\delta < \gamma$, что

$$\pi^\delta_\gamma g = \pi^\delta_\alpha g^\alpha - \pi^\delta_\beta g^\beta = 0.$$

Заметим, что в данном выше определении предела прямого спектра направленность множества M не используется. Другое определение модуля G^∞, использующее направленность множества M, указывается следующей теоремой, непосредственно вытекающей из лемм 4.3 и 4.5.

Теорема 4.6. *Пусть* $\{G, \pi\}$ — *произвольный прямой спектр* R-*модулей. Элемент* $g^\alpha \in G^\alpha$ *назовем эквивалентным элементу* $g^\beta \in G^\beta$, *если существует такой индекс* $\gamma > \alpha, \beta$, *что* $\pi^\gamma_\alpha g^\alpha = \pi^\gamma_\beta g^\beta$. *Это отношение эквивалентности разбивает множество элементов* $g^\alpha \in G^\alpha$ *для всех возможных* α *в непересекающиеся классы эквивалентности. Сумма* $\bar g_1 + \bar g_2 = \bar g$ *двух классов эквивалентности определяется следующим образом. Выбираем группу* G^α, *в которой классы* $\bar g_1, \bar g_2$ *обладают представителями* g_1^α, g_2^α, *и определяем сумму* $\bar g$ *как класс, содержащий сумму* $g_1^\alpha + g_2^\alpha$ *этих представителей. Произведение* $r\bar g$ *определяется как класс элемента* rg^α, *где* g^α — *любой элемент класса* $\bar g$. *Оказывается, что относительно этих операций классы эквивалентности образуют* R-*модуль, изоморфный модулю* G^∞. *Соответствующий изоморфизм относит каждому классу элемент группы* G^∞, *являющийся образом любого из его представителей.*

Теорема 4.7. *Пусть* $\{G, \pi\}$ — *произвольный прямой спектр модулей над множеством* M. *Если все отображения* $\pi^\beta_\alpha : G^\alpha \to G^\beta$ *являются мономорфизмами (эпиморфизмами), то все отобра-*

жения π_α: $G^\alpha \to G^\infty$ также являются мономорфизмами (эпиморфизмами).

Доказательство. Первое утверждение теоремы является непосредственным следствием леммы 4.4. Для доказательства второго утверждения рассмотрим произвольный элемент $u \in G^\infty$ и произвольный индекс $\alpha \in M$. Согласно лемме 4.3 существуют такой индекс β и такой элемент g^β, что $\pi_\beta(g^\beta) = u$. Выберем индекс $\gamma > \alpha, \beta$. Так как отображение π_α^γ по условию является эпиморфизмом, то существует такой элемент g^α, что $\pi_\alpha^\gamma(g^\alpha) = \pi_\beta^\gamma(g^\beta)$. Следовательно, $\pi_\alpha(g^\alpha) = u$. Таким образом, отображение π_α эпиморфно.

Следствие 4.8. *Если все отображения π_α^β являются изоморфизмами, то и все отображения π_α также являются изоморфизмами.*

Теорему 4.7 полезно сравнить с соответствующей теоремой для обратных спектров (см. теорему 3.4 и последующее замечание; см. также следствие 3.9).

Пример 4.9. Пусть G — произвольная группа и M — множество всех конечных подмножеств группы G. Для каждого подмножества $\alpha \in M$ определим группу G^α как подгруппу группы G, порожденную всеми элементами подмножества α. Будем считать, что $\alpha < \beta$ тогда и только тогда, когда $G^\alpha \subset G^\beta$. Соответствующее отображение вложения обозначим через π_α^β: $G^\alpha \to G^\beta$. Легко видеть, что множество M направлено, система $\{G, \pi\}$ является прямым спектром и $G^\infty \approx G$. Таким образом, *любая группа является пределом прямого спектра своих подгрупп с конечным числом образующих.*

Пример 4.10. Пусть $\{H_j\}$ — семейство групп, перенумерованных с помощью элементов некоторого множества J, и пусть H — прямая сумма этих групп. Обозначим через M упорядоченное по включению множество всех конечных подмножеств множества J. Для любого подмножества $\alpha \in M$ положим $G^\alpha = \sum_{j \in \alpha} H_j$. Для любых подмножеств α, β, для которых $\alpha \subset \beta$, очевидным образом определим отображение $\pi_\alpha^\beta: G^\alpha \to G^\beta$ (координаты элемента $\pi_\alpha^\beta(g)$ являются координатами элемента g для $j \in \alpha$ и равны нулю для $j \in \beta \setminus \alpha$). Непосредственно проверяется, что $G^\infty \approx H$. Таким образом, *любая прямая сумма является пределом прямого спектра конечных прямых сумм.*

Определение 4.11. Пусть Φ: $\{G, \pi\} \to \{G', \pi'\}$ — произвольное отображение одного прямого спектра R-модулей в другой. Соответствующие гомоморфизмы φ^α: $G^\alpha \to G'^{\varphi(\alpha)}$ можно считать компонентами некоторого гомоморфизма $\tilde{\Phi}$: $\sum G \to \sum G'$. Из условия коммутативности, предусмотренного определением 2.3, следует, что гомоморфизм $\tilde{\Phi}$ отображает каждое соотношение из $\sum G$ в некоторое соотношение из $\sum G'$. Поэтому гомоморфизм $\tilde{\Phi}$ индуцирует некоторый (линейный) гомоморфизм фактор-модулей

$$\varphi^\infty: \quad G^\infty \to G'^\infty.$$

Этот гомоморфизм называется *пределом* отображения Φ. Он удовлетворяет соотношению

$$\varphi^\infty \pi_\alpha = \pi'_{\varphi(\alpha)} \varphi^\alpha, \qquad \alpha \in M.$$

Рассмотрим второе (данное в теореме 4.6) определение предела прямого спектра. Очевидно, что из $g^\alpha \sim g^\beta$ следует, что $\varphi^\alpha g^\alpha \sim \varphi^\beta g^\beta$. Таким образом, отображение Φ переводит любой класс эквивалентности для спектра $\{G, \pi\}$ в класс эквивалентности для спектра $\{G', \pi'\}$. Это отображение классов и является отображением φ^∞.

Определение 4.11 применимо, в частности, и к специальному случаю, когда Φ является отображением $\{G, \pi\} \to G'$ прямого спектра $\{G, \pi\}$ в некоторый R-модуль G'.

Доказательство следующей теоремы совершенно тривиально и предоставляется читателю.

Теорема 4.12. *Пусть* Dir $(\mathfrak{G}_R)$ — *категория прямых спектров R-модулей и их отображений. Оказывается, что, сопоставляя каждому прямому спектру и каждому отображению одного прямого спектра в другой их пределы, мы получим ковариантный функтор, определенный в категории* Dir $(\mathfrak{G}_R)$ *и принимающий значения в категории* $\mathfrak{G}_R$.

Замечание. Отметим, что мы никакой топологии в предел прямого спектра топологических групп не вводим. Естественно пытаться это сделать с помощью топологии произведения пространств. Однако группа соотношений Q, как правило, не замкнута в прямой сумме $\sum G$ даже в случае компактных групп. Поэтому в множестве G^∞ индуцируется не хаусдорфова топология. Таким образом, аналога теоремы 4.12 не существует ни для какой разумно определенной категории топологических групп[1]).

Теорема 4.13. *Пусть $\{G, \pi\}$, $\{G', \pi'\}$ — прямые спектры над множествами M, M' соответственно и пусть $\Phi: \{G', \pi'\} \to \{G, \pi\}$. Если существует такое направленное подмножество N множества M', что*

(1°) *подмножество N конфинально в множестве M',*

(2°) *подмножество $\varphi(N)$ конфинально в множестве M и*

(3°) *$\varphi^\beta: G'^\beta \approx G^{\varphi(\beta)}$ для каждого индекса $\beta \in N$, то $\varphi^\infty: G'^\infty \approx G^\infty$.*

Доказательство. Для любого элемента $\beta \in M'$ будем элемент $\varphi(\beta)$ сокращенно обозначать через β'. Пусть $\varphi^\infty(g) = 0$ для некоторого элемента $g \in G'^\infty$. Так как подмножество N конфинально, то существуют такой индекс $\beta \in N$ и такой элемент $g^\beta \in G'^\beta$, что $\pi'_\beta g^\beta = g$ (см. лемму 4.3). Согласно определению 4.11 $\pi_{\beta'} \varphi^\beta(g^\beta) =$

---

[1]) По этому вопросу см. Г. С. Чогошвили, К применению прямых спектров бикомпактных групп в теории гомологий, Сообщ. АН Гр. ССР 15, № 10 (1954), 655—662. (*Прим. ред.*)

$= \varphi^\infty(g) = 0$. Следовательно, согласно лемме 4.4 существует такой индекс $\delta > \beta'$, что $\pi^\delta_{\beta'}\varphi^\beta(g^\beta) = 0$. Так как подмножество $\varphi(N)$ конфинально, то существует такой индекс $\gamma \in N$, что $\gamma' > \delta$. Тогда $\pi^{\gamma'}_{\beta'}\varphi^\beta(g^\beta) = 0$. Отсюда и из условия коммутативности, предусмотренного определением 2.3, вытекает, что $\varphi^\gamma\pi'^\gamma_\beta(g^\beta) = 0$. Так как отображение φ^γ является изоморфизмом, то $\pi'^\gamma_\beta(g^\beta) = 0$. Таким образом, $g = \pi'_\beta(g^\beta) = \pi'_\gamma\pi'^\gamma_\beta(g^\beta) = 0$. Тем самым доказано, что отображение φ^∞ мономорфно. Пусть теперь g — произвольный элемент модуля G^∞. Так как подмножество $\varphi(N)$ конфинально, то существуют такой индекс $\beta \in N$ и такой элемент $g^{\beta'} \in G^{\beta'}$, что $\pi_{\beta'}(g^{\beta'}) = g$. Так как отображение $\varphi^\beta\colon G'^\beta \to G^{\varphi(\beta)}$ эпиморфно, то существует такой элемент $g'^\beta \in G'^\beta$, что $\varphi^\beta(g'^\beta) = g^{\beta'}$. Пусть $g' = \pi'_\beta(g'^\beta)$. Тогда $g' \in G'^\infty$ и согласно соотношению коммутативности, предусмотренному определением 4.11, $\varphi^\infty(g') = g$.

Следствие 4.14. *Для любого прямого спектра $\{G, \pi\}$ над множеством M и любого конфинального подмножества M' множества M предел φ^∞ отображения вложения $\Phi\colon \{G', \pi'\} \to \{G, \pi\}$ (см. определение 2.4) соответствующего подспектра $\{G', \pi'\}$ в спектр $\{G, \pi\}$ является изоморфизмом $G'^\infty \approx G^\infty$.*

Достаточно в теореме 4.13 положить $N = M'$.

Лемма 4.15. *Пусть Φ, Ψ — такие отображения $\{G, \pi\} \to \{G', \pi'\}$, что для каждого индекса $\alpha \in M$, $\varphi(\alpha) < \psi(\alpha)$ и $\psi^\alpha = \pi'^{\psi(\alpha)}_{\varphi(\alpha)}\varphi^\alpha$. Тогда $\varphi^\infty = \psi^\infty$.*

Доказательство. Пусть $g \in G^\infty$. Выберем такой индекс $\alpha \in M$ и такой элемент $g' \in G^\alpha$, что $\pi_\alpha g' = g$. Тогда согласно определению 4.11

$$\begin{aligned}\varphi^\infty g &= \varphi^\infty\pi_\alpha g' = \pi'_{\varphi(\alpha)}\varphi^\alpha g' = \pi'_{\psi(\alpha)}\pi'^{\psi(\alpha)}_{\varphi(\alpha)}\varphi^\alpha g' = \\ &= \pi'_{\psi(\alpha)}\psi^\alpha g' = \psi^\infty\pi_\alpha g' = \psi^\infty g.\end{aligned}$$

5. Спектры точных последовательностей

Определение 5.1. Система $\{S, \pi\}$ обратных последовательностей S_α и гомоморфизмов π^β_α называется *обратным спектром обратных последовательностей над направленным множеством M*, если любому элементу α направленного множества M отнесена обратная последовательность $S_\alpha = \{G_{\alpha,q}, \varphi_{\alpha,q}\}$ (см. пункт I.2), а каждой паре α, β элементов множества M, связанных отношением $\alpha < \beta$, отнесен гомоморфизм $\pi^\beta_\alpha\colon S_\beta \to S_\alpha$, являющийся для $\alpha = \beta$ тождественным отображением и для любых элементов $\alpha < \beta < \gamma$ удовлетворяющий соотношению $\pi^\beta_\alpha\pi^\gamma_\beta = \pi^\gamma_\alpha$. Тогда для каждого фиксированного q группы гомоморфизмы $\{G_{\alpha,q}, \pi^\beta_{\alpha,q}\}$ также образуют обратный спектр групп над множеством M. Пусть $G_{\infty,q}$ — его предельная группа. Аналогично для каждого фиксированного q гомоморфизмы $\{\varphi_{\alpha,q}\}$ вместе с тождественным отображением множества M образуют отображение Φ_q: $\{G_{\alpha,q}, \pi^{\beta}_{\alpha,q}\} \to \{G_{\alpha,q-1}, \pi^{\beta}_{\alpha,q-1}\}$. Пусть $\varphi_{\infty,q}$: $G_{\infty,q} \to G_{\infty,q-1}$ — предел этого отображения. Обратная последовательность $S_\infty = \{G_{\infty,q}, \varphi_{\infty,q}\}$ называется *пределом* спектра $\{S, \pi\}$. *Прямые спектры прямых последовательностей* и их *пределы* определяются аналогично.

В изложенных определениях подразумевается, что все группы и гомоморфизмы обратных спектров обратных последовательностей принадлежат к одной из стандартных категорий $\mathfrak{G}_R$ или $\mathfrak{G}_C$. То, что предельная последовательность принадлежит той же категории, доказано в предыдущем пункте. В случае прямого спектра прямых последовательностей употребляется только категория $\mathfrak{G}_R$.

Определение 5.2. Обратная (прямая) последовательность называется *полуточной*, если композиция любых двух последовательных гомоморфизмов этой последовательности тривиальна, т. е. если $\mathrm{Ker} \supset \mathrm{Im}$. Хотя это понятие формально совпадает с понятием цепного (коцепного) комплекса (см. пункт V.2), мы предпочитаем «полуточную» терминологию, потому что здесь эти последовательности рассматриваются с иной точки зрения, не связанной с теорией цепных комплексов.

Теорема 5.3. *Предельная последовательность обратного* (*прямого*) *спектра полуточных обратных* (*прямых*) *последовательностей полуточна.*

Доказательство. Композиция $\Phi_{q-1}\Phi_q$, отображающая спектр $\{G_{\alpha,q}, \pi^{\beta}_{\alpha,q}\}$ в спектр $\{G_{\alpha,q-2}, \pi^{\beta}_{\alpha,q-2}\}$, состоит из тождественного отображения множества M и отображений $\varphi_{\alpha,q-1}\varphi_{\alpha,q} = 0$. Следовательно, предел отображения $\Phi_{q-1}\Phi_q$ равен нулю. Остается заметить, что согласно теореме 3.14 этот предел является композицией $\varphi_{\infty,q-1}\varphi_{\infty,q}$. Соответствующее доказательство для прямого спектра прямых последовательностей предоставляется читателю.

Теорема 5.4. *Предел прямого спектра точных прямых последовательностей является точной последовательностью.*

Доказательство. Включение $\mathrm{Ker} \supset \mathrm{Im}$ доказано в теореме 5.3. Докажем обратное включение. Пусть u — такой элемент группы $G^{\infty,q}$, что $\varphi^{\infty,q}(u) = 0$. Согласно лемме 4.3 существует такой индекс α и такой элемент $u^\alpha \in G^{\alpha,q}$, что $\pi^q_\alpha(u^\alpha) = u$. Поэтому согласно определению 4.11

$$\pi^{q+1}_\alpha \varphi^{\alpha,q}(u^\alpha) = \varphi^{\infty,q}\pi^q_\alpha(u^\alpha) = 0.$$

Следовательно, согласно лемме 4.4 существует такой индекс $\beta > \alpha$, что

$$\pi^{\beta,q+1}_\alpha \varphi^{\alpha,q}(u^\alpha) = 0.$$

Положим $u^\beta = \pi^{\beta,q}_\alpha(u^\alpha)$. Из перестановочности отображений π и φ следует, что $\varphi^{\beta,q}(u^\beta) = 0$. В силу точности последовательности S^β существует такой элемент $v^\beta \in G^{\beta,q-1}$, что $\varphi^{\beta,q-1}(v^\beta) = u^\beta$. Пусть

$v = \pi_\beta^{q-1}(v^\beta) \in G^{\infty, q-1}$. Тогда $\varphi^{\infty, q-1}(v) = u$. Тем самым обратное включение также доказано.

Пример 5.5. Следующий пример показывает, что предельная последовательность обратного спектра точных обратных последовательностей, вообще говоря, не является точной последовательностью.

Рассмотрим диаграмму

$$\begin{tikzcd} J \arrow[r, "\tau"] \arrow[d, "\gamma"] & J \arrow[r, "\eta"] \arrow[d, "\gamma"] & J/2J \arrow[d, "\varepsilon"] \\ J \arrow[r, "\tau"] & J \arrow[r, "\eta"] & J/2J, \end{tikzcd}$$

где J — группа целых чисел, $\tau(n) = 2n$, $\gamma(n) = 3n$, ε — тождественное и η — естественное отображения. Очевидно, что последовательность

$$S: \quad 0 \to J \xrightarrow{\tau} J \xrightarrow{\eta} J/2J \to 0$$

очна и что гомоморфизмы $\gamma, \gamma, \varepsilon$ составляют гомоморфизм φ: $S \to S$.

Пусть M — естественно упорядоченное множество положительных целых чисел. Для каждого числа $\alpha \in M$ положим $S_\alpha = S$ и $\pi_{\alpha+1}^\alpha = \varphi$. Остальные отображения $\pi_\alpha^\beta (\beta < \alpha)$ определим как композиции ($\pi_\alpha^\beta = (\varphi)^{\beta - \alpha}$). Очевидно, что система $\{S_\alpha, \pi_\alpha^\beta\}$ является обратным спектром точных обратных последовательностей. Пусть

$$S_\infty: \quad 0 \to G \to G \to H \to 0$$

— предельная последовательность этого обратного спектра. Так как ε — тождественное отображение, то $H = J/2J$. Элементами группы G являются такие последовательности $\{n_\alpha\}$ $(\alpha \in M)$ целых чисел, что $n_\alpha = 3n_{\alpha+1}$. Из этого соотношения вытекает, что число n_α делится на как угодно большую степень числа 3, что возможно только тогда, когда $n_\alpha = 0$. Следовательно, $G = 0$. Таким образом, предельная последовательность S_∞ имеет вид $0 \to 0 \to 0 \to J/2J \to \to 0$ и, следовательно, не является точной последовательностью.

Теорема 5.6. *Предел обратного спектра $\{S, \pi\}$ точных обратных последовательностей, состоящих из компактных групп, является точной последовательностью.*

Доказательство. Включение $\operatorname{Ker} \supset \operatorname{Im}$ доказано в теореме 5.3. Для доказательства обратного включения рассмотрим любой элемент $g \in G_{\infty, q}$, для которого $\varphi_{\infty, q}(g) = 0$. Пусть $g_\alpha = \pi_{\alpha, q}(g)$ — координата элемента g в группе $G_{\alpha, q}$. Так как $\varphi_{\infty, q}(g) = 0$, то $\varphi_{\alpha, q}(g_\alpha) = 0$ для любого α. Так как последовательность S_α точна, то прообраз $X_\alpha = (\varphi_{\alpha, q+1})^{-1}(g_\alpha)$ является непустым замкнутым подмножеством группы $G_{\alpha, q+1}$. Из соотношения $\varphi_{\alpha, q+1} \pi_{\alpha, q+1}^\beta =$

$=\pi^{\beta}_{\alpha,q}\varphi_{\beta,q+1}$ следует, что проекция $\pi^{\beta}_{\alpha,q+1}$ отображает множество X_β в множество X_α и, следовательно, определяет некоторое отображение $\varrho^{\beta}_{\alpha}\colon X_\beta \to X_\alpha$. Очевидно, что система $\{X_\alpha, \varrho^{\beta}_{\alpha}\}$ является обратным спектром компактных пространств. Так как каждое пространство этого спектра непусто, то согласно теореме 3.6 предельное пространство X_∞ также непусто. Очевидно, что $X_\infty \subset G_{\infty,q+1}$ и что $\varphi_{\infty,q+1}$ отображает множество X_∞ в элемент g. Тем самым обратное включение также доказано.

Теорема 5.7. *Предел S_∞ обратного спектра $\{S, \pi\}$ точных обратных последовательностей конечномерных векторных пространств над фиксированным полем F является точной последовательностью.*

Доказательство. Пусть G — произвольное векторное пространство над полем F. *Многообразием* V пространства G называется смежный класс по некоторому линейному подпространству H пространства G. *Размерностью* многообразия V называется размерность подпространства H. Очевидно, что при линейном отображении любое многообразие переходит в многообразие; кроме того, прообраз любого многообразия является многообразием; наконец, пересечение любого числа многообразий, если только оно непусто, также является многообразием. Для доказательства теоремы 5.7 нам будет нужна следующая

Лемма 5.8. *Пусть G — конечномерное векторное пространство над полем F и пусть $\{V_j\}$ $(j \in J)$ — семейство многообразий пространства G, любое конечное подсемейство которого имеет непустое пересечение. Тогда $\bigcap_{j\in J} V_j \neq \varnothing$.*

Так как пространство G имеет конечную размерность, то и любое его многообразие также имеет конечную размерность. По условию любое конечное подсемейство семейства $\{V_j\}$ имеет пересечение неотрицательной размерности. Так как все эти размерности являются целыми числами, то среди них существует наименьшее число k. Пусть $V = \bigcap_{i=1}^{h} V_{j_i}$ — соответствующее многообразие. Тогда $\dim V = k$. Для любого индекса $j \in J$ многообразие $V \cap V_j$ по условию непусто. Кроме того, $\dim V \cap V_j = k$ ввиду минимальности числа k. Следовательно, $\dim V = \dim V \cap V_j$, откуда вытекает, что $V = V \cap V_j$, т. е. $V \subset V_j$. Тем самым лемма полностью доказана.

Вернемся теперь к доказателству теоремы 5.7. Как и выше, включение $\operatorname{Ker} \supset \operatorname{Im}$ обеспечивается теоремой 5.3. Для доказательства обратного включения рассмотрим любой элемент $g \in G_{\infty,q}$, для которого $\varphi_{\infty,q}(g) = 0$. Тогда $\varphi_{\alpha,q}(g_\alpha) = 0$, где g_α — координата элемента g в члене $G_{\alpha,q}$. Положим $V^0_\alpha = (\varphi_{\alpha,q+1})^{-1}(g_\alpha)$. Так как последовательность S_α точна, то множество V^α_0 непусто. Являясь смежным классом по ядру отображения $\varphi_{\alpha,q-1}$, множество V^0_α

будет многообразием. Рассмотрим теперь семейство Ψ всех функций $v = \{V_\alpha\}$, определенных на элементах $\alpha \in M$, значения V_α которых являются такими многообразиями пространства $G_{\alpha, q+1}$, что $V_\alpha \subset \subset V_\alpha^0$ и $\pi_\alpha^\beta(V_\beta) \subset V_\alpha$, если $\alpha < \beta$. Очевидно, что функция $v^0 = \{V_\alpha^0\}$ принадлежит семейству Ψ. Определим в множестве Ψ частичную упорядоченность, считая, что $u < v$ $(u, v \in \Psi)$ тогда и только тогда, когда $U_\alpha \subset V_\alpha$ для всех индексов $\alpha \in M$. Согласно лемме Цорна частично упорядоченное множество Ψ содержит максимальное линейно упорядоченное подмножество Ψ'. Обозначим через V_α^1, где $\alpha \in M$, пересечение всех многообразий V_α, являющихся значениями функций $v \in \Psi'$. Так как подмножество Ψ' линейно упорядочено, то каждое его конечное подмножество имеет наименьший элемент. Кроме того, пространство $G_{\alpha, q+1}$ имеет конечную размерность. Следовательно, применима лемма 5.8, согласно которой многообразие V_α^1 непусто. Легко видеть, что $\pi_\alpha^\beta(V_\beta^1) \subset V_\alpha^1$, если $\alpha < \beta$. Следовательно, функция $v^1 = \{V_\alpha^1\}$ принадлежит семейству Ψ. Так как $v^1 < v$ для каждой функции $v \in \Psi'$ и так как подмножество Ψ' максимально, то $v^1 \in \Psi'$. Таким образом, мы нашли элемент $v^1 \in \Psi$, для которого из соотношения $v < v^1$, где $v \in \Psi$, следует, что $v = v^1$. Остается показать, что каждое многообразие V_α^1 состоит только из одной точки пространства $G_{\alpha,q+1}$. Рассмотрим произвольный фиксированный индекс $\alpha \in M$. Совокупность многообразий $\{\pi_\alpha^\beta(V_\beta^1)\}$, где $\beta > \alpha$, имеет то свойство, что любое конечное ее подмножество имеет непустое пересечение (M — направленное множество). Согласно лемме 5.8 существует элемент g'_α, принадлежащий пересечению всех многообразий этой совокупности. Для любого индекса $\gamma \in M$, выбрав индекс $\beta > \alpha, \gamma$, положим

$$V_\gamma = V_\gamma^1 \cap (\pi_\gamma^\beta(\pi_\alpha^\beta)^{-1}(g'_\alpha)).$$

Выбор элемента g'_α обеспечивает то, что многообразие V_γ непусто. Очевидно, что это многообразие не зависит от выбора индекса γ. По построению $V_\gamma \subset V_\gamma^1$ и $\pi_\gamma^\delta(V_\delta) \subset V_\gamma$, если $\gamma < \delta$. Таким образом, функция $v = \{V_\gamma\}$ принадлежит семейству Ψ и $v < v^1$. Ввиду минимальности элемента v^1 отсюда следует, что $v = v^1$. Так как $V_\alpha = g'_\alpha$, то $g'_\alpha = V_\alpha^1$. Таким образом, $g = \{g'_\alpha\}$ является точкой пространства $G_{\infty, q+1}$ и $\varphi_{\infty, q+1}(g') = g$. Тем самым теорема 5.7 полностью доказана.

З а м е ч а н и е. Исчезновение точности при переходе к пределу по обратному спектру точных обратных последовательностей объясняется тем, что хотя для любого отображения Φ : $\{G, \pi\} \to \{G', \pi'\}$ одного обратного спектра групп в другой

$$\operatorname{Ker} \varphi_\infty = \lim \{\operatorname{Ker} \varphi_\alpha\},$$

но, вообще говоря,

$$\operatorname{Im} \varphi_\infty \subset \lim \{\operatorname{Im} \varphi_\alpha\}.$$

Последнее включение переходит в равенство, если все группы компактны или являются конечномерными векторными пространствами над некоторым полем. Пример 5.5 показывает, что, вообще говоря, равенства не будет. В случае прямых спектров в обеих формулах имеет место равенство.

6. Перестановочность операций перехода к пределу и взятия фактор-группы

Определение 6.1. Пусть $\{G, \pi\}$ — обратный спектр групп над направленным множеством M. Предположим, что для каждого индекса $\alpha \in M$ в группе G_α выбрана такая подгруппа H_α, что $\pi_\alpha^\beta(H_\beta) \subset H_\alpha$ для любых элементов $\alpha < \beta$ множества M. Пусть ϱ_α^β: $H_\beta \to H_\alpha$ — отображение, определенное проекцией π_α^β. Очевидно, что система $\{H, \varrho\}$ является обратным спектром над M. Этот спектр называется *спектром подгрупп* спектра $\{G, \pi\}$. Для любого $\alpha \in M$ положим $K_\alpha = G_\alpha/H_\alpha$. Для любых элементов $\alpha < \beta$ определим отображение σ_α^β: $K_\beta \to K_\alpha$ как отображение, индуцированное отображением π_α^β. Тогда система $\{K, \sigma\}$ будет обратным спектром над M. Этот спектр называется *спектром фактор-групп* спектра $\{G, \pi\}$ по спектру $\{H, \varrho\}$. Обычным образом определяются *отображение вложения*[1]) Φ: $\{H, \varrho\} \to \{G, \pi\}$ и *естественное отображение* Ψ: $\{G, \pi\} \to \{K, \sigma\}$. По определению любой элемент предельной группы H_∞ спектра $\{H, \varrho\}$ является элементом группы G_∞ и отображение φ_∞: $H_\infty \to G_\infty$ является отображением вложения. Соответствующие определения для прямых систем предоставляются читателю.

Теорема 6.2. *Пусть $\{G, \pi\}$ — обратный спектр компактных групп или конечномерных векторных пространств над фиксированным полем F. Тогда для любого спектра подгрупп $\{H, \varrho\}$ и соответствующего спектра фактор-групп $\{K, \sigma\}$ отображение ψ_∞: $G_\infty \to K_\infty$ индуцирует изоморфизм $G_\infty/H_\infty \approx K_\infty$.*

Доказательство. Для любого α присоединим к последовательности

$$H_\alpha \xrightarrow{\varphi} G_\alpha \xrightarrow{\psi} K_\alpha$$

бесконечное множество тривиальных групп и отображений. В результате мы получим обратную последовательность S_α

$$\ldots \to 0 \to H_\alpha \xrightarrow{\varphi} G_\alpha \xrightarrow{\psi} K_\alpha \to 0 \to \ldots$$

Очевидно, что последовательность S_α точна. Аналогично присоединим к отображениям π_α^β, ϱ_α^β, σ_α^β, где $\alpha < \beta$, бесконечное

[1]) Здесь термин «отображение вложения» имеет другой смысл, чем в определении 2.4. *(Прим. ред.)*

множество тривиальных отображений. В результате мы получим отображение $\tau_\alpha^\beta: S_\beta \to S_\alpha$. Построенная система $\{S, \tau\}$ является обратным спектром точных последовательностей. Очевидно, что его предельная последовательность S_∞ имеет вид

$$\ldots \to 0 \to H_\infty \xrightarrow{\varphi} G_\infty \xrightarrow{\psi} K_\infty \to 0 \to \ldots$$

Согласно теоремам 5.6 и 5.7 последовательность S_∞ точна. Следовательно, отображение ψ_∞ эпиморфно и ядром его является последовательность H_∞. Тем самым теорема доказана.

Отметим, что, как показывает пример 5.5, теорема 6.2 для спектров произвольных групп не верна.

Теорема 6.3. *Пусть $\{G, \pi\}$ — прямой спектр модулей над произвольным кольцом R. Тогда для любого спектра подмодулей $\{H, \varrho\}$ и соответствующего спектра фактор-модулей $\{K, \sigma\}$ отображение ψ_∞: $G_\infty \to K_\infty$ индуцирует изоморфизм $G_\infty / H_\infty \approx K_\infty$.*

Доказательство аналогично доказательству теоремы 6.2. Вместо теорем 5.6 и 5.7 нужно воспользоваться теоремой 5.4.

Упражнения

А. Пределы обратных спектров пространств

1. Доказать, что любое счетное направленное множество содержит конфинальную подпоследовательность (т. е. направленное множество, изоморфное множеству положительных целых чисел).

2. Показать, что если каждое пространство X_α, $\alpha \in M$ обладает счетной базой открытых множеств, а множество M счетно, то произведение $\prod_{\alpha \in M} X_\alpha$ также обладает счетной базой.

3. Доказать, что если в обратном спектре $\{X_\alpha, \pi\}$ над множеством M каждое пространство X_α обладает счетной базой, а множество M содержит конфинальную подпоследовательность, то предельное пространство X_∞ также обладает счетной базой.

4. Доказать, что предел обратного спектра компактных связных пространств является связным пространством. Построить обратный спектр связных пространств над счетным множеством, имеющий несвязный предел.

В. Пределы групп

1. Пусть G — произвольная группа и пусть $\{G^\alpha\}$ — такая система ее подгрупп, что, во-первых, $\bigcup G^\alpha = G$ и, во-вторых, для любых подгрупп G^α, G^β существует такая подгруппа G^γ, что $G^\alpha \subset G^\gamma$, $G^\beta \subset G^\gamma$. Показать, что группа G естественно изоморфна пределу прямого спектра $\{G^\alpha, \pi_\alpha^\beta\}$, проекциями π_α^β которого являются отображения вложения.

2. Пусть G — произвольная компактная группа и пусть $\{G_\alpha\}$ — система ее (замкнутых) подгрупп, пересечение $\bigcap G_\alpha$ которой содержит только единицу группы и в которой для любых подгрупп G_α, G_β существует такая подгруппа G_γ, что $G_\gamma \subset G_\alpha \cap G_\beta$. Пусть $H_\alpha = G/G_\alpha$ и $\pi^\alpha_\beta\colon H_\alpha \to H_\beta$, где $G_\alpha \subset G_\beta$ — естественные отображения. Показать, что группа G естественно изоморфна пределу обратного спектра $\{H_\alpha, \pi^\alpha_\beta\}$.

3. Сформулировать определения прямых и обратных спектров неабелевых групп. Показать, что результаты упражнений 1 и 2 остаются справедливыми и для неабелевых групп.

C. Прямые суммы и произведения

1. Пусть $\{G, \pi\}$, $\{{}^\gamma G, {}^\gamma\pi\}$, $\gamma \in \Gamma$ — прямые спектры групп над одним и тем же направленным множеством M. Пусть ${}^\gamma\varphi\colon \{{}^\gamma G, {}^\gamma\pi\} \to \{G, \pi\}$ — такое отображение, что для каждого индекса $\alpha \in M$ отображения ${}^\gamma\varphi^\alpha\colon {}^\gamma G^\alpha \to G^\alpha$ образуют инъективное представление группы G^α в виде прямой суммы. Показать, что аналогичным свойством обладают и предельные отображения ${}^\gamma\varphi^\infty\colon {}^\gamma G^\infty \to G^\infty$.

2. Пусть ${}^\gamma\varphi\colon \{G, \pi\} \to \{{}^\gamma G, {}^\gamma\pi\}$ — такое отображение, что для каждого индекса $\alpha \in M$ отображения ${}^\gamma\varphi^\alpha\colon G^\alpha \to {}^\gamma G^\alpha$ образуют проективное представление группы G^α в виде прямого произведения. Показать, что аналогичным свойством обладают и предельные отображения ${}^\gamma\varphi^\infty\colon G^\infty \to {}^\gamma G^\infty$.

3. Доказать аналогичные утверждения для обратных спектров.

D. Расщепленные точные последовательности

Определение. *Расщепленной точной обратной последовательностью* называется пара, состоящая из точной обратной последовательности $\{G_n, \varphi_n\}$ и такой последовательности гомоморфизмов

$$\psi_{3i+1}\colon\ G_{3i+1} \to G_{3i+2}, \qquad i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

что для любого i композиция $\psi_{3i+1}\varphi_{3i+2}$ является тождественным отображением группы G_{3i+2}. Гомоморфизмы φ_n (определенные только для $n \equiv 1 \bmod 3$) называются *расщепляющими гомоморфизмами* этой точной последовательности. Отображение одной расщепленной точной последовательности в другую определяется обычным образом.

1. Показать, что последовательности $\{\varphi_n\}$ и $\{\psi_{3i+1}\}$ тогда и только тогда составляют расщепленную точную последовательность, когда выполнены следующие условия (для всех i):

(a) $\varphi_{3i} = 0$,

(b) $\varphi_{3i+1}\varphi_{3i+2} = 0$,

(c) композиция $\psi_{3i+1}\varphi_{3i+2}$ является тождественным отображением,

(d) отображения $\varphi_{3i+1}\colon G_{3i+1} \to G_{3i}$ и $\psi_{3i+1}\colon G_{3i+1} \to G_{3i+2}$ определяют проективное представление группы G_{3i+1} в виде прямой суммы.

2. Показать, что предел прямого (обратного) спектра расщепленных точных последовательностей также является расщепленной точной последовательностью.

3. Сформулировать предыдущие результаты для прямых последовательностей.

4. Пусть для пары (X, A) существует ретрагирующее отображение $r\colon X \to A$. Показать, что гомологическая последовательность пары (X, A) вместе с гомоморфизмами r_* образует расщепленную точную последовательность.

E. p-адические группы и соленоиды

1. Пусть G_n — циклическая группа порядка p^n с образующей g_n. Рассмотрим обратный спектр

$$G_1 \xleftarrow{\varphi_1} G_2 \xleftarrow{\varphi_2} G_3 \leftarrow \ldots \leftarrow G_n \xleftarrow{\varphi_n} G_{n+1} \leftarrow \ldots,$$

где $\varphi_n(g_{n+1}) = g_n$. Предел G_∞ этого спектра называется *p-адической группой*. Показать, что группа G_∞ компактна, вполне несвязна и совершенна. Показать, что она обладает счетной базой и, следовательно, гомеоморфна канторову множеству. Показать, что для каждого целого числа n подгруппа p^nG_∞ открыта и замкнута. Показать, что эти подгруппы образуют фундаментальную систему окрестностей нуля.

Определение. Пусть S^1 — мультипликативная группа всех комплексных чисел z, для которых $|z| = 1$. Рассмотрим обратный спектр

$$S^1 \xleftarrow{\varphi} S^1 \leftarrow \ldots \leftarrow S^1 \xleftarrow{\varphi} S^1 \leftarrow \ldots,$$

где $\varphi(z) = z^p$. Предел Σ_p этого спектра называется *p-адическим соленоидом*.

2. Показать, что существует непрерывное мономорфное отображение $\psi\colon R \to \Sigma_p$ аддитивной группы R действительных чисел в соленоид Σ_p, образ $\operatorname{Im} \psi$ которого всюду плотен в Σ_p.

3. Показать, что p-адический соленоид содержит подгруппу, изоморфную p-адической группе.

4. В евклидовом трехмерном пространстве R^3 рассмотрим диск $D = \{(x_1 + 2)^2 + x_2^2 \leqslant 1,\ x_3 = 0\}$ и трехмерное кольцо T, полученное вращением диска D вокруг оси x_1. Внутри диска D рассмотрим диск

$$D_0 = \left\{\left(x_1 + \frac{5}{2}\right)^2 + x_2^2 \leqslant c^2,\ x_3 = 0\right\}, \qquad c < \frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{p},$$

и диски D_i, полученные из диска D_0 вращением диска D вокруг его центра на угол $\frac{2\pi i}{p}$ $i = 1, \ldots, p-1$. Ввиду ограничения наложенного на число c диски $D_0, D_1, \ldots, D_{p-1}$ не пересекаются. Предположим теперь, что одновременно с вращением вокруг оси x_1 диск D вращается также вокруг своего центра таким образом, что после полного поворота вокруг оси x_1 диск D_0 переходит в диск D_1, диск D_1 переходит в диск D_2, и т. д. Тогда диски $D_0, D_1, \ldots, D_{p-1}$ заметают трехмерное кольцо T^1, которое совершает p оборотов внутри трехмерного кольца T. Эту конструкцию можно описать и арифметически. С этой целью отнесем каждой точке кольца T пару комплексных чисел (z, s), $|z| \leqslant 1$, $|s| = 1$ (числа z описывают точки диска D, а числа s — углы поворота вокруг оси x_1). Определим теперь отображение $\theta: T \to T$, положив

$$\theta(z, s) = \left(s\left(\frac{z}{c} + \frac{1}{2}\right), s^p\right),$$

где $0 < c < \frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{p}$. Тогда $T^1 = \theta(T)$. Показать, что p-адический соленоид гомеоморфен пределу обратного спектра $T \xleftarrow{\theta} T \xleftarrow{\theta} \ldots$ $\ldots \leftarrow T \xleftarrow{\theta} T \leftarrow \ldots$ Показать, что этот предел гомеоморфен также пересечению $\bigcap\limits_{n=0}^{\infty} \theta^n T$, где $\theta^0 T = T$, $\theta^n T = \theta(\theta^{n-1} T)$.

F. Предельные группы бесконечных комплексов

1. Пусть K — произвольный (быть может, бесконечный) симплициальный комплекс и пусть L — некоторый его подкомплекс. Пусть $\{K_\alpha\}$ — упорядоченное по вложению семейство всех конечных подкомплексов комплекса K. Показать, что группы $H_q(K_\alpha, K_\alpha \cap L; G)$ (соответственно группы $H^q(K_\alpha, K_\alpha \cap L; G)$) вместе с индуцированными вложениями гомоморфизмами образуют прямой (обратный) спектр групп. Предельная группа этого спектра обозначается через $\overrightarrow{H}_q(K, L; G)$ (соответственно через $\overleftarrow{H}_q(K, L; G)$) и называется *предельной прямой группой гомологий* (соответственно *предельной обратной группой когомологий*) пары (K, L) (ср. главу VI, упражнения B).

2. Показать, что группы $H_q(K, L; G)$ и $\overrightarrow{H}_q(K, L; G)$ изоморфны. Показать, что группы $H^q(K, L; G)$ и $\overleftarrow{H}^q(K, L; G)$ изоморфны, если группа G компактна или является векторным пространством над некоторым полем.

3. Пусть K — произвольный локально конечный симплициальный комплекс и L — его подкомплекс. Подкомплекс K_α комплекса K называется *антиконечным*, если он содержит все симплексы комплекса K, кроме, быть может, конечного их числа. Показать, что при соответствующем упорядочении множества всех антиконеч-

ных подкомплексов K_α группы $\mathfrak{H}_q(K, L \cup K_\alpha; G)$ (соответственно группы $\mathfrak{H}^q(K, L \cup K_\alpha; G)$) (см. главу VI, упражнения В) и их гомоморфизмы, индуцированные вложениями, образуют обратный (соответственно прямой) спектр группы. Предельная группа этого спектра обозначается через $\overleftarrow{\mathfrak{H}}_q(K, L; G)$ (соответственно через $\overrightarrow{\mathfrak{H}}^q(K, L; G)$) и называется *предельной обратной группой гомологий* (соответ ственно *предельной прямой группой когомологий*) пары (K, L).

4. Показать, что группы $\mathfrak{H}^q(K, L; G)$ и $\overrightarrow{\mathfrak{H}}^q(K, L; G)$ изоморфны. Показать, что группы $\mathfrak{H}_q(K, L; G)$ и $\overleftarrow{\mathfrak{H}}_q(K, L; G)$ изоморфны, если группа G компактна или является линейным пространством над некоторым полем.

ГЛАВА IX

ТЕОРИЯ СПЕКТРАЛЬНЫХ ГОМОЛОГИЙ

1. Введение

В этой главе рассматриваются теории спектральных гомологий и когомологий[1]). Излагается их определение и проверяются аксиомы. Общность результатов повышена за счет использования модификаций, предложенных Даукером (Ann. of Math. **51** (1950), 278—292).

Теория спектральных *когомологий* определена на категории $\mathfrak{A}_1$ произвольных пар (X, A) и любых их отображений[2]). Группа коэффициентов G берется в одной из категорий $\mathfrak{G}_R$ и группа $H^q(X, A)$ принадлежит той же категории, что и группа G. Группы когомологий удовлетворяют всем без исключения аксиомам. Группы спектральных когомологий с компактными коэффициентами не определяются.

Группы спектральных гомологий определены в тех же условиях, что и группы когомологий. Кроме того, если пара (X, A) компактна, то группа гомологий $H_q(X, A)$ определена также для любой группы $G \in \mathfrak{G}_c$. В этом случае она принадлежит категории $\mathfrak{G}_c$. Группы спектральных гомологий удовлетворяют всем аксиомам, кроме аксиомы точности, которая выполняется только при некоторых весьма сильных ограничениях.

Из полученных в пункте 6 главы VIII результатов относительно перестановочности операции перехода к фактор-группе и операции взятия предела обратных спектров непосредственно следует, что для любой пары (X, A) и любой группы G гомологическая последовательность является, вообще говоря, лишь полуточной последовательностью.

---

[1]) Авторы называют спектральные теории теориями Чеха, что по нашему мнению неправильно (см. примечание на стр. 313). (*Прим. ред.*)

[2]) Следует иметь в виду, что группы спектральных когомологий (и гомологий) на категории $\mathfrak{A}_1$ имеют в основном лишь формальное значение. Содержательные геометрические результаты можно получить лишь для пространств, удовлетворяющих тем или иным условиям счетности, обеспечивающих возможность употребления локально конечных покрытий. По этим вопросам см. П. С. Александров, Топологические теоремы двойственности, ч. 1, Труды МИАН 48 (1955). (*Прим. ред.*)

Точность гомологической последовательности пары (X, A) доказывается лишь в следующих двух случаях: 1) пара (X, A) компактна, а группа G либо компактна, либо является линейным пространством над некоторым полем; 2) пара (X, A) триангулируема, а группа G произвольна. В случае 2) точность обеспечивается тем, что группа $H_q(X, A)$ естественным образом изоморфна группе, полученной с помощью некоторого симплициального подразделения.

2. Покрытия, нервы и проекции

Определение 2.1. *Семейством подмножеств пространства* X называется функция α, определенная на некотором множестве индексов V_α, значениями α_v ($v \in V_\alpha$) которой являются подмножества пространства X. Если $X = \bigcup \alpha_v$, то семейство α называется *покрытием* пространства X. Покрытие называется *открытым* (*замкнутым*), если каждое подмножество α_v открыто (замкнуто) в пространстве X. Множество всех открытых покрытий пространства X обозначается через $\mathrm{Cov}(X)$.

Пусть A — произвольное подмножество пространства X. Покрытие α пространства X называется *покрытием пары* (X, A) *с индексирующей парой* (V_α, V_α^A), если V_α^A — такое подмножество[1] множества V_α, что $A \subset \bigcup \alpha_v$, $v \in V_\alpha^A$. Множество всех открытых покрытий пары (X, A) обозначается через $\mathrm{Cov}(X, A)$.

Необходимо различать множества $\mathrm{Cov}(X)$ и $\mathrm{Cov}(X, \varnothing)$. Множество $\mathrm{Cov}(X)$ можно рассматривать как подмножество множества $\mathrm{Cov}(X, \varnothing)$, состоящее из покрытий α с индексирующими парами $(V_\alpha, \varnothing)$.

Определение 2.2. Для любого семейства α подмножеств пространства X мы будем через s_α обозначать симплициальный комплекс, состоящий из всех симплексов, вершинами которых являются элементы множества V_α (если множество V_α конечно, то комплекс s_α является симплексом). *Носителем* $\mathrm{Car}_\alpha(s)$ некоторого симплекса s комплекса s_α называется пересечение всех множеств α_v, соответствующих вершинам v симплекса s. *Нервом* X_α семейства α называется подмножество комплекса s_α, состоящее из всех симплексов с непустыми носителями. Если семейство α является покрытием пары (X, A) с индексирующей парой (V_α, V_α^A), то через A_α мы обозначаем подмножество нерва X_α, состоящее из всех симплексов s, вершины которых принадлежат множеству V_α^A и для которых $A \cap \mathrm{Car}_\alpha(s) \neq \varnothing$. В этом случае *нервом* покрытия α называется пара (X_α, A_α).

Отметим, что носителем вершины v является множество α_v.

[1] Это подмножество можно выбрать многими различными способами. Изменяя его, мы из одного и того же покрытия пространства X получим *различные* покрытия пары (X, A). (*Прим. ред*).

Лемма 2.3. *Если симплекс s' является гранью симплекса s, то* $\operatorname{Car}_\alpha(s') \supset \operatorname{Car}_\alpha(s)$.

Доказательство. Так как каждая вершина симплекса s' является вершиной симплекса s, то каждый член пересечения, определяющего носитель $\operatorname{Car}_\alpha(s')$, входит в пересечение, определяющее носитель $\operatorname{Car}_\alpha(s)$.

Из леммы 2.3 следует, что каждая грань любого симплекса нерва X_α является симплексом нерва X_α. Следовательно, нерв X_α является симплициальным комплексом.

Определение 2.4. Пусть $f\colon (X, A) \to (Y, B)$ — произвольное отображение, β — некоторое покрытие пары (Y, B), а (V_β, V_β^B) — индексирующая пара покрытия β. Тогда формула $\alpha_v = f^{-1}(\beta_v)$, где $v \in V_\beta$, определяет покрытие α пары (X, A) с индексирующей парой $(V_\alpha, V_\alpha^A) = (V_\beta, V_\beta^B)$. Покрытие α обозначается через $f^{-1}\beta$. Из непрерывности отображения f следует, что для открытого (замкнутого) покрытия β покрытие $f^{-1}\beta$ также открыто (замкнуто).

Лемма 2.5. *Пусть $f\colon (X, A) \to (Y, B)$ и $\alpha = f^{-1}\beta$. Тогда нерв X_α является подкомплексом нерва Y_β, а комплекс A_α — подкомплексом комплекса B_β. Соответствующее отображение вложения $(X_\alpha, A_\alpha) \to (Y_\beta, B_\beta)$ мы будем обозначать через f_β.*

Для доказательства достаточно заметить, что $f(\operatorname{Car}_\alpha(s)) \subset \operatorname{Car}_\beta(s)$ для каждого симплекса s комплекса $s_\alpha = s_\beta$.

Лемма 2.6. *Если $f\colon (X, A) \to (X, A)$ — тождественное отображение, то для любого покрытия α пары (X, A) покрытие $f^{-1}\alpha$ совпадает с покрытием α, а f_α является тождественным отображением пары (X_α, A_α).*

Лемма 2.7. *Пусть $f\colon (X, A) \to (Y, B)$ и $g\colon (Y, B) \to (Z, C)$. Тогда для любого покрытия γ пары (Z, C) имеем $f^{-1}g^{-1}\gamma = (gf)^{-1}\gamma$ и $(gf)_\gamma = g_\gamma f_\beta$, где $\beta = g^{-1}\gamma$.*

Определение 2.8. Пусть α и β — два покрытия пары (X, A). Покрытие β называется *вписанным* в покрытие α (обозначение: $\alpha < \beta$), если каждое множество покрытия β содержится в некотором множестве покрытия α, причем если множество покрытия β имеет индекс, принадлежащий множеству V_β^A, то хотя бы одно содержащее его множество покрытия α имеет индекс, принадлежащий множеству V_α^A. Отображение $p\colon (V_\beta, V_\beta^A) \to (V_\alpha, V_\alpha^A)$, где $\alpha < \beta$, называется *проекцией*, если $\alpha_{pv} \supset \beta_v$ для каждого $v \in V_\beta$. Отображение вершин p однозначно продолжается до симплициального отображения $s_\beta \to s_\alpha$. Это отображение также обозначается через p.

Лемма 2.9. *Отношение $<$ является отношением квазиупорядоченности, т. е. $\alpha < \alpha$, и из $\alpha < \beta < \gamma$ следует, что $\alpha < \gamma$.*

Непосредственно вытекает из соответствующих свойств отношения $\subset$.

Заметим, что из $\alpha < \beta$ и $\beta < \alpha$, вообще говоря, не следует, что $\alpha = \beta$. Например, отношения $\alpha < \beta$ и $\beta < \alpha$ выполняются, если

$A=\varnothing$, $V_\alpha^A=V_\beta^A=\varnothing$ и каждое покрытие α и β содержит множество, совпадающее со всем пространством X.

Лемма 2.10. *Множество* $\mathrm{Cov}(X, A)$ *открытых покрытий пары* (X, A) *является относительно отношения* $<$ *направленным множеством.*

Доказательство. Согласно лемме 2.9 и определению VIII.2.1 достаточно доказать, что для любых покрытий $\alpha, \beta \in \mathrm{Cov}(X, A)$ существует такое покрытие $\gamma \in \mathrm{Cov}(X, A)$, что $\alpha<\gamma$ и $\beta<\gamma$. Пусть $V_\gamma=V_\alpha\times V_\beta$ и $V_\gamma^A=V_\alpha^A\times V_\beta^A$. Если $v\in V_\gamma$, то $v=(v_1, v_2)$, где $v_1\in V_\alpha$, $v_2\in V_\beta$. Положим

$$\gamma_v=\alpha_{v_1}\cap\beta_{v_2}.$$

Очевидно, что покрытие γ удовлетворяет всем требуемым условиям.

Отметим, что построенное покрытие γ является наименьшим покрытием, вписанным в оба покрытия α, β одновременно, т. е. если покрытие δ вписано в покрытия α и β, то $\gamma<\delta$.

Лемма 2.11. *Для любого покрытия* α *тождественное отображение* $s_\alpha\to s_\alpha$ *является проекцией. Композиция* pp': $s_\gamma\to s_\alpha$ *двух проекций* p: $s_\beta\to s_\alpha$, p': $s_\gamma\to s_\beta$ *также является проекцией.*

Первое утверждение следует из того, что $\alpha_v\supset\alpha_v$. Для доказательства второго утверждения достаточно заметить, что из включения $\alpha_{pp'v}\supset\beta_{p'v}\supset\gamma_v$ следует включение $\alpha_{pp'v}\supset\gamma_v$.

Лемма 2.12. *Если покрытие* β *пары* (X, A) *вписано в покрытие* α, *то соответствующая проекция* p: $s_\beta\to s_\alpha$ *отображает пару* (X_β, A_β) *в пару* (X_α, A_α). *Это симплициальное отображение нерва покрытия* β *в нерв покрытия* α *также называется проекцией и обозначается тем же символом* p.

Доказательство. Так как $\alpha_{pv}\supset\beta_v$, то любое пересечение множеств β_v содержится в пересечении соответствующих множеств покрытия α. Поэтому для любой грани s комплекса s_β имеет место включение $\mathrm{Car}_\beta(s)\subset\mathrm{Car}_\alpha(p(s))$. Следовательно, если носитель $\mathrm{Car}_\beta(s)$ непуст (соответственно, если непусто его пересечение с A), то носитель $\mathrm{Car}_\alpha(p(s))$ также непуст (соответственно непусто его пересечение с A).

Теорема 2.13. *Любые две проекции* p, p': $(X_\beta, A_\beta)\to(X_\alpha, A_\alpha)$, *где* $\alpha<\beta$, *являются смежными симплициальными отображениями* (*см. определение* VI.3.1).

Доказательство. Пусть s — произвольный симплекс нерва X_β и пусть $x\in\mathrm{Car}_\beta(s)$. Тогда $x\in\beta_v$ для любой вершины v симплекса s. Так как $\beta_v\subset\alpha_{pv}$ и $\beta_v\subset\alpha_{p'v}$, то точка x принадлежит каждому из множеств α_{pv} и $\alpha_{p'v}$. Следовательно, симплекс s' комплекса s_α, натянутый на точки, являющиеся образами вершин симплекса s при отображениях p и p', имеет непустой носитель, т. е. принадлежит комплексу X_α. Таким образом, симплексы $p(s)$ и $p'(s)$ являются гранями одного и того же симплекса комплекса X_α.

Если симплекс s принадлежит комплексу A_β, то точку x нужно выбрать в пересечении $A \cap \mathrm{Car}_\beta(s')$. Тогда аналогичное рассуждение покажет, что симплекс s' принадлежит комплексу A_α.

Следствие 2.14. *Для любой группы коэффициентов G индуцированные проекцией $(X_\beta, A_\beta) \to (X_\alpha, A_\alpha)$ гомоморфизмы*

$$H_q(X_\beta, A_\beta; G) \to H_q(X_\alpha, A_\alpha; G),$$
$$H^q(X_\alpha, A_\alpha; G) \to H^q(X_\beta, A_\beta; G)$$

групп гомологий и когомологий (в смысле определения VI.3.9) *не зависят от выбора проекции и, следовательно, однозначно определяются покрытиями α и β.*

Лемма 2.15. *Для любого отображения f: $(X, A) \to (Y, B)$ из того, что покрытие β пары (Y, B) вписано в покрытие α, следует, что покрытие $\beta' = f^{-1}\beta$ вписано в покрытие $\alpha' = f^{-1}\alpha$. Любая проекция p: $(Y_\beta, B_\beta) \to (Y_\alpha, B_\alpha)$ отображает пару $(X_{\beta'}, A_{\beta'})$ в пару $(X_{\alpha'}, A_{\alpha'})$ и, следовательно, определяет некоторое отображение p': $(X_{\beta'}, A_{\beta'}) \to (X_{\alpha'}, A_{\alpha'})$, также являющееся проекцией. Соответствующая диаграмма*

$$\begin{array}{ccc} (X_{\alpha'}, A_{\alpha'}) & \xleftarrow{p'} & (X_{\beta'}, A_{\beta'}) \\ \downarrow{\scriptstyle f_\alpha} & & \downarrow{\scriptstyle f_\beta} \\ (Y_\alpha, B_\alpha) & \xleftarrow{p} & (Y_\beta, B_\beta) \end{array}$$

коммутативна.

Доказательство. По определению $V_{\beta'} = V_\beta$ и $p(v) = p'(v)$ для любого индекса $v \in V_\beta$. Поэтому из включения $\alpha_{pv} \supset \beta_v$ следует включение $f^{-1}\alpha_{pv} \supset f^{-1}\beta_v$, т. е. включение $\alpha'_{pv} \supset \beta'_v$. Следовательно, отображение p' является проекцией. Из следствия 2.14 вытекает теперь, что проекция p' отображает пару $(X_{\beta'}, A_{\beta'})$ в пару $(X_{\alpha'}, A_{\alpha'})$. Наконец, коммутативность диаграммы следует из того, что отображения f_α, f_β являются вложениями (лемма 2.5) и что отображение p определяет отображение p'.

Начиная с определения 2.4, мы в этой главе ограничились изучением покрытий пар. Однако определения и результаты могут быть полностью повторены для покрытий пространств и даже для семейств, не являющихся покрытиями.

3. Группы спектральных гомологий

Теперь у нас все готово для определения групп спектральных гомологий и когомологий произвольной пары (X, A) над любой группой коэффициентов $G \in \mathfrak{G}_R$.

Определение 3.1. Пусть $\mathrm{Cov}\,(X, A)$ — направленное множество всех открытых покрытий пары (X, A) (см. лемму 2.10).

Обозначая через (X_α, A_α) нерв (см. определение 2.2) покрытия $\alpha \in \operatorname{Cov}(X, A)$, положим

$$H_{q,\alpha} \doteq H_q(X_\alpha, A_\alpha; G), \quad H_\alpha^q = H^q(X_\alpha, A_\alpha; G)$$

(группы гомологий и когомологий понимаются здесь в смысле определения VI. 3.9). Для любых покрытий $\alpha < \beta$ обозначим через

$$\pi_\alpha^\beta: H_{q,\beta} \to H_{q,\alpha}, \quad \pi_\beta^\alpha: H_\alpha^q \to H_\beta^q$$

гомоморфизмы, индуцированные проекциями $(X_\beta, A_\beta) \to (X_\alpha, A_\alpha)$ (см. следствие 2.14). Системы $\{H_{q,\alpha}, \pi_\alpha^\beta\}$ и $\{H_\alpha^q, \pi_\beta^\alpha\}$ называются *q-мерными гомологическим и когомологическим спектрами пары (X, A) над группой G.*

Теорема 3.2. *Гомологический (когомологический) спектр пары (X, A) над группой G является обратным (прямым) спектром групп над направленным множеством* $\operatorname{Cov}(X, A)$.

Доказательство. Согласно лемме 2.11 тождественное отображение нерва (X_α, A_α) является проекцией. Следовательно, отображение π_α^α является тождественным отображением группы $H_{q,\alpha}$. Пусть, далее, $\alpha < \beta < \gamma$. Из той же леммы 2.11 следует, что проекцию $(X_\gamma, A_\gamma) \to (X_\alpha, A_\alpha)$ можно представить как композицию проекций $(X_\gamma, A_\gamma) \to (X_\beta, A_\beta) \to (X_\alpha, A_\alpha)$. Следовательно, $\pi_\alpha^\beta \pi_\beta^\gamma = \pi_\alpha^\gamma$ в случае гомологий и $\pi_\gamma^\beta \pi_\beta^\alpha = \pi_\gamma^\alpha$ в случае когомологий.

Определение 3.3. Предел q-мерного гомологического (когомологического) спектра пары (X, A) над группой G обозначается через $H_q(X, A; G)$ (соответственно через $H^q(X, A; G)$) и называется *q-мерной группой спектральных гомологий (когомологий) пары (X, A) над группой G.* Группа G может при этом принадлежать любой категории $\mathfrak{G}_R$. Из теорем VIII. 3.14 и VIII.4.12 следует, что группы $H_q(X, A; G)$ и $H^q(X, A; G)$ принадлежат той же категории, что и группа G.

В случае, когда $G \in \mathfrak{G}_C$ имеет место следующая ситуация: каждая группа $H^q(X_\alpha, A_\alpha; G)$ принадлежит категории $\mathfrak{G}_C$ и все эти группы образуют прямой спектр. Так как предел прямого спектра компактных групп не определен (см. замечание в пункте VIII.4), то, следовательно, группы когомологий над группами $G \in \mathfrak{G}_C$ также не определены. С другой стороны, группы $H_q(X, A; G)$ определяются с помощью обратного спектра групп, когда переход к пределу возможен и для компактных групп. Однако для группы коэффициентов $G \in \mathfrak{G}_C$ группы $H_q(X_\alpha, A_\alpha; G)$, вообще говоря, не определены, так как комплекс X_α может быть бесконечным комплексом. Можно попытаться обойти эту трудность, заменяя направленное множество $\operatorname{Cov}(X, A)$ его подмножеством $\operatorname{Cov}^f(X, A)$, состоящим только из конечных покрытий (т. е. из покрытий α, множество индексов V_α которых конечно). Определения и результаты предыдущего пункта остаются справедливыми и для направленного множества $\operatorname{Cov}^f(X, A)$ и, следовательно, в определениях 3.1, 3.3 и в теореме 3.2 множество $\mathrm{Cov}(X, A)$ можно заменить множеством $\mathrm{Cov}^f(X, A)$. Получающаяся в пределе группа $H_q^f(X, A; G)$, вообще говоря, не изоморфна группе $H_q(X, A; G)$ (см. пункт X.9). Однако, если пара (X, A) компактна, то (см. ниже) множество $\mathrm{Cov}^f(X, A)$ является конфинальным подмножеством направленного множества $\mathrm{Cov}(X, A)$, и поэтому согласно следствию VIII. 3.16 предельные группы H_q^f и H_q изоморфны. Следовательно, для компактных пар можно ограничиться рассмотрением только конечных покрытий и, следовательно, можно определить группы гомологий $H_q(X, A; G)$ над любой группой $G \in \mathfrak{G}_C$. Группы $H_q(X, A; G)$ также принадлежат категории $\mathfrak{G}_C$. Изложенная ситуация аналогична ситуации, встретившейся в главе VI, где группы $H_q(K, L; G)$ над группами $G \in \mathfrak{G}_C$ были определены только для конечных комплексов K.

Для обоснования сказанного необходима

Лемма 3.4. *Для компактной пары (X, A) множество $\mathrm{Cov}^f(X,A)$, состоящее из конечных покрытий, является конфинальным подмножеством множества $\mathrm{Cov}(X, A)$.*

Доказательство. Пусть $\alpha \in \mathrm{Cov}(X, A)$ — произвольное покрытие и пусть (V_α, V_α^A) — его индексирующая пара. Так как пространство X и подмножество A компактны, то существуют такие конечные подмножества $U \subset V_\alpha$ и $W \subset V_\alpha^A$, что

$$\bigcup_{v \in U} \alpha_v = X, \quad \bigcup_{v \in W} \alpha_v \supset A.$$

Таким образом, покрытие α определяет конечное покрытие β с индексирующей парой $(U \cup W, W)$. Остается заметить, что $\alpha < \beta$.

При определении множества $\mathrm{Cov}(X, A)$ индексирующие пары (V_α, V_α^A) покрытий α считаются произвольными парами множеств. Как известно, понятие множества «всех» множеств приводит к логическим парадоксам. Естественно, что те же парадоксы возникают и при рассмотрении множества $\mathrm{Cov}(X, A)$. Преодолеть эту трудность можно, например, следующим образом.

Пусть M — произвольное бесконечное множество. Рассмотрим подмножество $\mathrm{Cov}_M(X, A)$ множества $\mathrm{Cov}(X, A)$, состоящее из всех покрытий α, для которых $V_\alpha \subset M$. Так как множество $M \times M$ имеет ту же мощность, что и множество M, то, повторяя доказательство леммы 2.10, можно доказать, что множество $\mathrm{Cov}_M(X, A)$ направлено.

Лемма 3.5. *Если $M \subset N$ и мощность множества M не меньше мощности некоторой базы открытых множеств пространства X, то множество $\mathrm{Cov}_M(X, A)$ конфинально в множестве $\mathrm{Cov}_N(X, A)$.*

Доказательство. Из условия, наложенного на мощность множества M, следует, что в пространстве X существует семейство подмножеств β с множеством индексов M, подмножества β_m $(m \in M)$ которого составляют базу открытых множеств пространства X. Для любого покрытия $\alpha \in \mathrm{Cov}_N(X, A)$ обозначим через V_γ подмножество множества M, состоящее из всех индексов $m \in M$, для которых существует такой индекс $v \in V_\alpha$, что $\beta_m \subset \alpha_v$. Подмножество множества V_γ, состоящее из индексов $m \in V_\gamma$, для которых хотя бы один индекс $v \in V_\alpha$ принадлежит множеству V_α^A, обозначим через V_γ^A. Очевидно, что подмножества семейства β, индексы которых принадлежат множеству V_γ, составляют покрытие γ с индексирующей парой (V_γ, V_γ^A), вписанное в покрытие α. Так как $\gamma \in \mathrm{Cov}_M(X, A)$, то, следовательно, множество $\mathrm{Cov}_M(X, A)$ конфинально в множестве $\mathrm{Cov}_N(X, A)$.

Из доказанной леммы следует, что группы гомологий и когомологий пары (X, A) можно определять как пределы соответствующих спектров над множеством $\mathrm{Cov}_M(X, A)$, где M — произвольное множество, мощность которого не меньше мощности некоторой базы открытых множеств пространства X. На первый взгляд это определение зависит от выбора множества M. Однако если N — другое такое множество, то согласно лемме 3.5 оба множества Cov_M и Cov_N конфинальны в множестве $\mathrm{Cov}_{M \cup N}$ и, следовательно, предельные группы, определенные с помощью множества M, изоморфны предельным группам, определенным с помощью множества N. Очевидно, что эти изоморфизмы определяют транзитивную систему групп в смысле пункта I.6. Поэтому можно считать, что предельные группы не зависят от выбора множества M.

Мы провели рассуждение для отдельной пары (X, A). Однако те же соображения применимы и к любой допустимой категории $\mathfrak{A}$, для которой мощности открытых баз пространств $X \in \mathfrak{A}$ ограничены сверху.

Теорема 3.6. (Аксиома размерности.) *Если множество P состоит из одной точки, то $H_q(P; G) = 0$, $H^q(P; G) = 0$, когда $q \neq 0$, и $H_0(P, G) \approx G$, $H^0(P; G) \approx G$.*

Доказательство. Пусть α — покрытие пространства P, состоящее только из самого множества P. Очевидно, что покрытие α вписано в любое другое покрытие пространства P, т. е. множество $C' \subset \mathrm{Cov}(P)$, состоящее из одного элемента α, конфинально в множестве $\mathrm{Cov}(P)$. Соответствующий обратный спектр $H_{q\alpha}$, $\alpha \in C'$ состоит только из одной группы. Согласно определению предела обратного спектра (определение VIII. 3.1) предел спектра $\{H_{q\alpha}\}$, состоящего из одной группы, совпадает с этой группой. Таким образом, согласно следствию VIII. 3.16 группа $H_q(P; G)$ изоморфна группе $H_{q\alpha}$. Так как нерв P_α состоит только из одной вершины, то для окончания доказательства остается сослаться на теорему VI. 3.8 (см. конец пункта VI. 4).

4. Индуцированные гомоморфизмы

Теорема 4.1. *Пусть f: $(X, A) \to (Y, B)$ — произвольное отображение, f^{-1}: $\mathrm{Cov}(Y, B) \to \mathrm{Cov}(X, A)$ — соответствующее отображение покрытий (см. определения 2.1, 2.4) и f_α: $(X_{\alpha'}, A_{\alpha'}) \to$*

$\to (Y_\alpha, B_\alpha)$, *где* $\alpha \in \mathrm{Cov}(Y, B)$ — *отображения вложения нерва покрытия* $\alpha' = f^{-1}\alpha$ *в нерв покрытия* α (*см. лемму* 2.5). *Тогда для всех покрытий* $\alpha \in \mathrm{Cov}(Y, B)$ *индуцированные гомоморфизмы*

$$f_{\alpha*}\colon H_q(X_{\alpha'}, A_{\alpha'}; G) \to H_q(Y_\alpha, B_\alpha; G)$$

(*соответственно гомоморфизмы*

$$f_\alpha^*\colon H^q(Y_\alpha, B_\alpha; G) \to H^q(X_{\alpha'}, A_{\alpha'}; G))$$

вместе с отображением f^{-1} *образуют отображение* $\Phi(f)$ *гомологического* (*соответственно когомологического*) *спектра пары* (X, A) (*соответственно пары* (Y, B)) *в соответствующий спектр пары* (Y, B) (*соответственно пары* (X, A)).

Доказательство. Согласно лемме 2.15 отображение f^{-1} сохраняет отношение вписанности. Следовательно, в соответствии с определением VIII. 2.3 $\Phi(f)$ будет отображением спектров, если для любых покрытий $\alpha < \beta$ из $\mathrm{Cov}(Y, B)$ диаграмма

$$\begin{array}{ccc}
H_q(X_{\alpha'}, A_{\alpha'}) & \xleftarrow{\pi_{\alpha'}^{\beta'}} & H_q(X_{\beta'}, A_{\beta'}) \\
\downarrow f_{\alpha*} & & \downarrow f_{\beta*} \\
H_q(Y_\alpha, B_\alpha) & \xleftarrow{\pi_\alpha^\beta} & H_q(Y_\beta, B_\beta)
\end{array}$$

коммутативна. Но согласно лемме 2.15 проекция $p\colon (Y_\beta, B_\beta) \to (Y_\alpha, B_\alpha)$ определяет проекцию $p'\colon (X_{\beta'}, A_{\beta'}) \to (X_{\alpha'}, A_{\alpha'})$. Следовательно, $f_\alpha p' = p f_\beta$. Поэтому, согласно теореме VI. 3.8 $f_{\alpha*} p'_* = p_* f_{\beta*}$. Остается заметить, что согласно определению 3.1 $\pi_\alpha^\beta = p_*$ и $\pi_{\alpha'}^{\beta'} = p'_*$.

Определение 4.2. Предел отображения $\Phi(f)$ гомологического (когомологического) спектра пары (X, A) (пары (Y, B)) в соответствующий спектр пары (Y, B) (пары (X, A)) обозначается через $f_*\colon H_q(X, A; G) \to H_q(Y, B; G)$ (соответственно через $f^*\colon H^q(Y, B; G) \to H^q(X, A; G)$) и называется *гомоморфизмом, индуцированным отображением* f. Гомоморфизмы f_* и f^* принадлежат той же категории $\mathfrak{G}_R$, которой принадлежит группа коэффициентов G (см. теоремы VIII.3.14, VIII.4.12). Если пара (X, A) компактна, то, заменив всюду множество Cov множеством Cov^f, мы получим определение отображения f_* (только для гомологий) и для случая, когда группа G принадлежит категории $\mathfrak{G}_C$.

Теорема 4.3. (Аксиома 1.) *Для тождественного отображения* $f\colon (X, A) \to (X, A)$ *гомоморфизмы* f_* *и* f^* *также являются тождественными отображениями.*

Достаточно заметить, что в этом случае $\Phi(f)$ является тождественным отображением.

Теорема 4.4. (Аксиома 2.) *Если* $f\colon (X, A) \to (Y, B)$ *и* $g\colon (Y, B) \to (Z, C)$, *то* $(gf)_* = g_* f_*$ *и* $(gf)^* = f^* g^*$.

Доказательство. Очевидно, что отображение $(gf)^{-1}$: $\mathrm{Cov}(Z, C) \to \mathrm{Cov}(X, A)$ является композицией отображений g^{-1} и f^{-1}. Если $\alpha \in \mathrm{Cov}(Z, C)$, $\beta = g^{-1}\alpha$ и $\gamma = f^{-1}\beta = (gf)^{-1}\alpha$, то $g_\alpha f_\beta = (gf)_\alpha$, так как все три отображения g_α: $(Y_\beta, B_\beta) \to (Z_\alpha, C_\alpha)$, f_β: $(X_\gamma, A_\gamma) \to (Y_\beta, B_\beta)$ и $(gf)_\alpha$: $(X_\gamma, A_\gamma) \to (Z_\alpha, C_\alpha)$ являются вложениями (лемма 2.5). Следовательно, отображение $\Phi(gf)$ является композицией отображений $\Phi(g)$ и $\Phi(f)$ (см. определение VIII. 2.3). Требуемый результат следует теперь из функториальных свойств предельного гомоморфизма (теоремы VIII. 3.14, VIII. 4.12).

5. Аксиома гомотопии

Удобно доказать аксиому гомотопии в форме, приданной ей в пункте I.3 (аксиома 5′).

Теорема 5.1. (Аксиома гомотопии.) *Пусть отображения g_0, g_1: $(X, A) \to (X, A) \times I$ определены формулами $g_0(x) = (x, 0)$, $g_1(x) = (x, 1)$. Тогда $g_{0*} = g_{1*}$ и $g_0^* = g_1^*$ для любой группы коэффициентов G, для которой определены соответствующие спектральные группы.*

Для доказательства теоремы необходимы некоторые предварительные определения и леммы.

Лемма 5.2. *Нерв I_α любого конечного покрытия α интервала I связными открытыми множествами является ациклическим комплексом (см. определение* VI. 5.6).

Доказательство. Сведем сначала общий случай к случаю, когда ни одно из множеств покрытия α не содержится в другом. Пусть для некоторых индексов $v_1, v_2 \in V_\alpha$ имеет место включение $\alpha_{v_1} \subset \alpha_{v_2}$. Обозначим через β покрытие, получающееся из покрытия α при выбрасывании элемента v_1 из множества индексов V_α. Очевидно, что $\alpha < \beta$ и $\beta < \alpha$. Пусть π_1: $I_\beta \to I_\alpha$ и π_2: $I_\alpha \to I_\beta$ — соответствующие проекции. Отображения $\pi_2\pi_1$: $I_\beta \to I_\beta$ и $\pi_1\pi_2$: $I_\alpha \to I_\alpha$ также являются проекциями и, следовательно, индуцируют тождественные отображения групп гомологий. Таким образом, нервы I_β и I_α имеют изоморфные группы гомологий. Так как покрытие β состоит из меньшего числа множеств, чем покрытие α, то, продолжая построение, мы придем к покрытию, ни одно из множеств которого не содержится в другом. Для любого такого покрытия α можно так упорядочить элементы множества V_α, чтобы

$$0 = l_0 \leqslant l_1 < l_2 < \ldots < l_n, \quad r_0 < r_1 < \ldots < r_{n-1} \leqslant r_n = 1,$$

где l_i — левые, а r_i — правые концевые точки множеств α_{v_i} этого покрытия. Рассмотрим симплициальные отображения f_i: $I_\alpha \to I_\alpha$ $(i = 0, \ldots, n)$, определенные формулами

$$f_i(v_j) = v_j, \text{ если } j \leqslant i,$$
$$f_i(v_j) = v_i, \text{ если } j \geqslant i.$$

Оказывается, что отображения f_{i+1} и f_i смежны. Действительно, пусть s — произвольный симплекс нерва I_α. Если все вершины симплекса s предшествуют вершине v_{i+1}, то $f_{i+1}(s) = f_i(s)$. Если некоторые из вершин симплекса s следуют за вершиной v_i, то симплекс $f_i(s)$ имеет вид $s'v_i$, а симплекс $f_{i+1}(s)$ — либо вид $s'v_i v_{i+1}$, либо вид $s'v_{i+1}$, где s' — симплекс, вершины которого предшествуют вершине v_i. В первом случае симплекс $f_i(s)$ является гранью симплекса $f_{i+1}(s)$. Следовательно, достаточно рассмотреть случай, когда $f_i(s) = s'v_i$ и $f_{i+1}(s) = s'v_{i+1}$. Так как все вершины симплекса s' предшествуют вершине v_i, то его носитель $\mathrm{Car}_\alpha(s')$ является связным множеством, концевые точки l, r которого удовлетворяют неравенствам $l \leqslant l_i$, $r \leqslant r_i$. Так как $\mathrm{Car}_\alpha(s') \cap \alpha_{v_{i+1}} \neq \varnothing$, то

$$l \leqslant l_i \leqslant l_{i+1} < r.$$

Следовательно, $\mathrm{Car}_\alpha(s') \cap \alpha_{v_i} \cap \alpha_{v_{i+1}} \neq \varnothing$, так что оба симплекса $f_i(s)$ и $f_{i+1}(s)$ являются гранями симплекса $s'v_i v_{i+1}$. Тем самым смежность отображений f_{i+1} и f_i доказана. Согласно теореме VI.3.2 имеем $f_{i+1*} = f_{i*}$ и, следовательно, $f_{n*} = f_{0*}$. Остается заметить, что отображение f_n является тождественным отображением нерва I_α, в то время как отображение f_0 отображает нерв I_α в вершину v_0.

Определение 5.3. Покрытие α интервала I открытыми связными множествами α_i, $i = 0, 1, \ldots, n$ $(n > 0)$, называется *регулярным*, если

$$0 \in \alpha_0,\ 0 \notin \alpha_1, \quad 1 \in \alpha_n,\ 1 \notin \alpha_{n-1},$$
$$\alpha_i \cap \alpha_{i+1} \neq \varnothing, \qquad i = 0, \ldots, n-1,$$
$$\alpha_i \cap \alpha_j \neq \varnothing, \qquad i < j - 1.$$

Лемма 5.4. *Регулярные покрытия образуют конфинальное подмножество множества* Cov (I).

Доказательство. Пусть α — произвольное покрытие интервала I. Рассмотрим семейство Φ, состоящее из компонент множеств покрытия α. Это семейство является покрытием интервала I связными открытыми множествами. Из компактности интервала I следует, что покрытие Φ содержит конечное подсемейство Φ_0, покрывающее интервал I. Выберем в покрытии Φ_0 минимальное подпокрытие Φ_1, т. е. такое подсемейство, покрывающее интервал I, что никакое его собственное подсемейство уже не покрывает интервал I. Очевидно, что при соответствующей нумерации покрытие Φ_1 является регулярным покрытием интервала I, вписанным в покрытие α.

Определение 5.5. Пусть $\alpha \in \mathrm{Cov}(X, A)$ — произвольное покрытие и пусть (V_α, V_α^A) — его индексирующая пара. Предположим, что каждому индексу $v \in V_\alpha$ отнесено некоторое регулярное покрытие β^v интервала I с множеством индексов $N^v = (0, 1, \ldots, n^v)$. Рассмотрим множество W всех пар (v, i), $v \in V_\alpha$, $i \in N^v$. Пусть

W' — его подмножество, состоящее из пар (v, i), для которых $v \in V_\alpha^A$. Покрытие $\gamma \in \operatorname{Cov}(X \times I, A \times I)$ с индексирующей парой (W, W'), определенное формулой

$$\gamma_{v,i} = \alpha_v \times \beta_i^v,$$

называется *брусчатым покрытием с базой* α. Покрытия β^v называются *брусками* покрытия γ.

Лемма 5.6. *Брусчатые покрытия образуют конфинальное подмножество множества* $\operatorname{Cov}(X \times I, A \times I)$.

Доказательство. Пусть $\delta \in \operatorname{Cov}(X \times I, A \times I)$ — произвольное покрытие и пусть (V_δ, V_δ^A) — его индексирующая пара. Для каждой точки (x, t) выберем такие открытые множества $U(x, t) \subset X$, $V(x, t) \subset I$, что множество $U(x, t) \times V(x, t)$ содержит точку (x, t) и содержится в одном из подмножеств δ_v, а в том случае, когда $x \in A$, — в одном из подмножеств δ_v с $v \in V_\delta^A$. Для каждой фиксированной точки $x \in X$ множества $V(x, t)$ образуют покрытие интервала I. Согласно лемме 5.3 в это покрытие можно вписать некоторое регулярное покрытие β^x. Для каждого множества β_i^x существует такое открытое множество $U(x, i) \subset X$, что множество $U(x, i) \times \beta_i^x$ содержится в одном из множеств δ_v, а в случае, когда $x \in A$, — в одном из множеств δ_v с $v \in V_\delta^A$. Положим $\alpha_x = \bigcap\limits_i U(x, i)$. Тогда α является покрытием пары (X, A) с индексирующей парой (X, A). Брусчатое покрытие γ с базой α и брусками β^x, очевидно, вписано в покрытие δ.

Лемма 5.7. *Пусть γ — брусчатое покрытие с базой $\alpha \in \operatorname{Cov}(X)$. Если нерв X_α является (конечным) симплексом, то нерв $(X \times I)_\gamma$ ацикличен.*

Доказательство. Не теряя общности, можно предполагать, что все множества покрытия α непусты. Пусть V и W — множества индексов покрытий α и γ и пусть β^v — бруски покрытия γ. Определим покрытие δ интервала I с множеством индексов W, положив

$$\delta_{v,i} = \beta_i^v.$$

Пусть s — произвольный симплекс с вершинами $(v_0, i_0), \ldots, (v_n, i_n)$ из множества W. Тогда

$$\begin{aligned}\operatorname{Car}_\gamma(s) &= \bigcap_j \gamma_{(v_j, i_j)} = \bigcap_j \alpha_{v_j} \times \bigcap_j \beta_{i_j}^{v_j} = \\ &= \bigcap_j \alpha_{v_j} \times \bigcap_j \delta_{v_j, i_j} = \bigcap_j \alpha_{v_j} \times \operatorname{Car}_\delta(s).\end{aligned}$$

Так как нерв X_α является симплексом, то множество $\bigcap\limits_j \alpha_{v_j}$ непусто. Отсюда следует, что носитель $\operatorname{Car}_\gamma(s)$ тогда и только тогда пуст, когда пуст носитель $\operatorname{Car}_\delta(s)$. Следовательно, $(X \times I)_\gamma = I_\delta$. Так как согласно лемме 5.2 нерв I_δ ацикличен, то ацикличен и нерв $(X \times I)_\delta$.

Нерв $(X \times I)_\gamma$ мы будем сокращенно обозначать через $X \times I_\gamma$.

Лемма 5.8. *Пусть покрытие α пары (X, A) с индексирующей парой (V_α, V_α^A) является базой брусчатого покрытия γ. Рассмотрим симплициальные отображения*

$$l, u\colon (X_\alpha, A_\alpha) \to (X \times I_\gamma, A \times I_\gamma),$$

определенные формулами

$$l(v) = (v, 0), \quad u(v) = (v, n^v).$$

Оказывается, что $l_* = u_*$ и $l^* = u^*$.

Доказательство. Любому симплексу s нерва X_α отнесем подкомплекс $C(s)$ нерва $X \times I_\gamma$, состоящий из всех симплексов с вершинами вида (v, i), где v — произвольная вершина симплекса s. Симплекс s является нервом покрытия α' некоторого подпространства X' пространства X, а подкомплекс $C(s)$ — нервом брусчатого покрытия γ' с базой α'. Согласно лемме 5.7 подкомплекс $C(s)$ ацикличен. Очевидно, что $C(s') \subset C(s)$ для любой грани s' симплекса s. Далее, если симплекс s содержится в нерве A_α, то подкомплекс $C(s)$ принадлежит нерву $A \times I_\gamma$. Наконец, для любой цепи c симплекса s цепи $l(c)$ и $u(c)$ являются цепями подкомплекса $C(s)$. Следовательно, подкомплекс $C(s)$ является общим ациклическим носителем отображений l и u. Поэтому согласно теореме VI. 5.8 $l_* = u_*$ и $l^* = u^*$.

Доказательство теоремы 5.1. Пусть D — подмножество множества $\operatorname{Cov}(X \times I, A \times I)$, состоящее из брусчатых покрытий. Так как подмножество D конфинально, то его можно использовать для определения спектральных групп пары $(X \times I, A \times I)$. Пусть $\gamma \in D$ — произвольное брусчатое покрытие и пусть α — его база. Рассмотрим покрытия $\gamma_0 = g_0^{-1}\gamma$ и $\gamma_1 = g_1^{-1}\gamma$ пары (X, A) и отображения вложения

$$g_{0\gamma}\colon (X_{\gamma_0}, A_{\gamma_0}) \to (X \times I_\gamma, A \times I_\gamma),$$
$$g_{1\gamma}\colon (X_{\gamma_1}, A_{\gamma_1}) \to (X \times I_\gamma, A \times I_\gamma).$$

Очевидно, что рассмотренное в лемме 5.8 отображение u является композицией $u = g_{1\gamma} u'$, где $u'\colon (X_\alpha, A_\alpha) \to (X_{\gamma_1}, A_{\gamma_1})$ — изоморфизм, определенный формулой $u'(v) = (v, n^v)$.

Заметим, что $\gamma_0 < \gamma_1$ и что определенное формулой $\pi(v, i) = (v, 0)$ отображение

$$\pi\colon (X_{\gamma_1}, A_{\gamma_1}) \to (X_{\gamma_0}, A_{\gamma_0})$$

является проекцией. Заметим, далее, что так как $l = g_{0\gamma}\, \pi\, u'$, то

$$l_* = g_{0\gamma *} \pi_* u'_* \quad \text{и} \quad u_* = g_{1\gamma *}\, u'_*.$$

Так как согласно лемме 5.8 $l_* = u_*$ и так как отображение u'_* изоморфно, то, следовательно,

$$g_{1\gamma *} = g_{0\gamma *}\, \pi_*.$$

Отсюда согласно лемме VIII.3.18 вытекает, что $g_{0*} = g_{1*}$. Для групп когомологий аналогично доказывается, что $g^*_{1\gamma} = \pi^* g^*_{0\gamma}$, после чего применяется лемма VIII.4.15.

6. Инвариантность при вырезании

Теорема 6.1. (Аксиома вырезания.) *Пусть U — открытое множество пространства X, замыкание $\bar{U}$ которого принадлежит внутренности множества $A \subset X$. Тогда для любой группы G, для которой определены спектральные группы, отображение вложения f: $(X \setminus U, A \setminus U) \to (X, A)$ индуцирует изоморфизмы*

$$f_*: H_q(X \setminus U, A \setminus U) \approx H_q(X, A),$$
$$f^*: H^q(X, A) \approx H^q(X \setminus U, A \setminus U).$$

Доказательство. Для сокращения обозначений положим $X' = X \setminus U$ и $A' = A \setminus U$. Пусть D — подмножество множества $\mathrm{Cov}\,(X, A)$, состоящее из всех покрытий α, для которых

(1) если $\alpha_v \cap U = \varnothing$, то $v \in V^A_\alpha$ и $\alpha_v \subset A$ (здесь и далее (V_α, V^A_α) — индексирующая пара покрытия α).

Ввиду теоремы VIII.3.15 для доказательства теоремы 6.1 достаточно доказать три следующих утверждения:

(2) Подмножество D конфинально в множестве $\mathrm{Cov}(X, A)$.

(3) Подмножество $f^{-1}(D)$ конфинально в множестве $\mathrm{Cov}(X', A')$.

(4) Для любого покрытия $\alpha \in D$

$$f_{\alpha *}: H_q(X'_\beta, A'_\beta) \approx H_q(X_\alpha, A_\alpha), \quad f^*_\alpha: H^q(X_\alpha, A_\alpha) \approx H^q(X'_\beta, A'_\beta),$$

где $\beta = f^{-1}\,\alpha$.

Для доказательства утверждения (2) рассмотрим произвольное покрытие α пары (X, A). Пусть (V_α, V^A_α) — его индексирующая пара, а V' — некоторое множество, элементы которого поставлены во взаимно однозначное соответствие с элементами множества V^A_α и которое не имеет общих элементов с множеством V_α. Элемент множества V', соответствующий элементу $v \in V^A_\alpha$, будем обозначать через v'. Рассмотрим покрытие γ пары (X, A) с индексирующей парой $(V_\alpha \cup V', V^A_\alpha \cup V')$, определенное формулами

$$\gamma_v = \alpha_v \setminus \bar{U}, \text{ если } v \in V_\alpha,$$
$$\gamma_{v'} = \alpha_v \cap \operatorname{Int} A, \text{ если } v' \in V'.$$

Так как $\bar{U} \subset \operatorname{Int} A$, то γ действительно является покрытием пары (X, A). Очевидно, что $\alpha < \gamma$ и $\gamma \in D$.

Для доказательства утверждения (3) произвольному покрытию β пары (X', A') отнесем покрытие $\alpha \in \mathrm{Cov}(X, A)$ с той же индексирующей парой, положив

$$\alpha_v = \beta_v \cup U.$$

Очевидно, что $\beta = f^{-1}\alpha$. Выберем покрытие $\gamma \in D$, вписанное в покрытие α. Тогда $\beta = f^{-1}\alpha < f^{-1}\gamma$. Таким образом подмножество $f^{-1}D$ конфинально в множестве $\mathrm{Cov}(X', A')$.

Для доказательства утверждения (4) достаточно в силу определения VI.3.5 и теоремы VI.3.6 показать, что

$$(5) \qquad X_\alpha = X'_\beta \cup A_\alpha, \quad A'_\beta = X'_\beta \cap A_\alpha.$$

Так как $(X'_\beta, A'_\beta) \subset (X_\alpha, A_\alpha)$ (см. лемму 2.5), то

$$X_\alpha \supset X'_\beta \cup A_\alpha, \quad A'_\beta \subset X_\beta \cap A_\alpha.$$

Следовательно, нужно только доказать, что

$$(6) \qquad X_\alpha \subset X'_\beta \cup A_\alpha, \quad A'_\beta \supset X'_\beta \cap A_\alpha.$$

Пусть s — симплекс нерва X_α, не содержащийся в нерве X'_β. Тогда $\mathrm{Car}_\alpha(s) \neq \varnothing$ и $\mathrm{Car}_\alpha(s) \cap X' = \mathrm{Car}_\beta(s) \neq \varnothing$. Следовательно, $\varnothing \neq \mathrm{Car}(s) \subset U$, и потому $\alpha_v \cap U \neq \varnothing$ для любой вершины v симплекса s. Так как $\alpha \in D$, то отсюда вытекает, что $v \in V_\alpha^A$. Так как $U \subset A$, то, следовательно, $\mathrm{Car}_\alpha(s) \cap A \neq \varnothing$, так что s является симплексом нерва A_α. Тем самым первое включение (6) доказано.

Если симплекс s лежит в комплексе $X'_\beta \cap A_\alpha$, то его вершины принадлежат множеству V_α^A и

$$\mathrm{Car}_\alpha(s) \cap X' = \mathrm{Car}_\beta(s) \neq \varnothing, \quad \mathrm{Car}_\alpha(s) \cap A \neq \varnothing.$$

Если $\mathrm{Car}_\alpha(s) \subset X'$, то

$$\mathrm{Car}_\beta(s) \cap A' = \mathrm{Car}_\alpha(s) \cap X' \cap A = \mathrm{Car}_\alpha(s) \cap A \neq \varnothing$$

и, следовательно, симплекс s принадлежит нерву A'_β. Если $\mathrm{Car}_\alpha(s) \cap U \neq \varnothing$, то $\alpha_v \subset A$ для каждой вершины v симплекса s, потому что $\alpha \in D$. Следовательно, $\mathrm{Car}_\alpha(s) \subset A$ и

$$\mathrm{Car}_\beta(s) \cap A' = \mathrm{Car}_\alpha(s) \cap A \cap X' = \mathrm{Car}_\alpha(s) \cap X' \neq \varnothing.$$

Таким образом, симплекс s принадлежит нерву A'_β. Тем самым теорема 6.1 полностью доказана.

7. Граничный оператор и аксиома точности

Группы спектральных гомологий и когомологий пространства X, подпространства A и пары (X, A) являются по определению пределами некоторых спектров групп над направленными множествами $\mathrm{Cov}(X, \varnothing)$, $\mathrm{Cov}(A, \varnothing)$ и $\mathrm{Cov}(X, A)$ соответственно. Для того чтобы определить граничный оператор и доказать аксиому точности, удобнее пользоваться равносильными определениями, в которых все спектры определены над одним и тем же направленным множеством. Оказывается, что для этой цели более всего подходит направленное множество $\mathrm{Cov}(X, A)$.

Определение 7.1. Для любого покрытия $\alpha \in \operatorname{Cov}(X, A)$ обозначим через S_α (соответственно через S^α) гомологическую (соответственно когомологическую) последовательность пары (X_α, A_α) над группой G. Для любых покрытий $\alpha < \beta$ из $\operatorname{Cov}(X, A)$ обозначим через π_α^β: $S_\beta \to S_\alpha$ (соответственно через π_α^β: $S^\alpha \to S^\beta$) отображение, индуцированное проекцией $(X_\beta, A_\beta) \to (X_\alpha, A_\alpha)$. Предел получающегося спектра последовательностей называется *усовершенствованной гомологической* (*когомологической*) *последовательностью пары* (X, A). Группы и гомоморфизмы усовершенствованных последовательностей обозначаются следующим образом:

$$\ldots \leftarrow H_q(X, A) \xleftarrow{j'_*} H_q(X)_{(X, A)} \xleftarrow{i'_*} H_q(A)_{(X, A)} \xleftarrow{\delta'} H_{q+1}(X, A) \leftarrow \ldots$$

$$\ldots \rightarrow H^q(X, A) \xrightarrow{j'^*} H^q(X)_{(X, A)} \xrightarrow{i'^*} H^q(A)_{(X, A)} \xrightarrow{\delta'} H^{q+1}(X, A) \rightarrow \ldots$$

Для того чтобы сравнить группы с индексом (X, A) с группами, не имеющими этого индекса, мы введем отображения

$$\varphi\colon \operatorname{Cov}(X, A) \to \operatorname{Cov}(A, \varnothing),$$

$$\psi\colon \operatorname{Cov}(X, A) \to \operatorname{Cov}(X, \varnothing),$$

которые определим следующим образом.

Пусть $\alpha \in \operatorname{Cov}(X, A)$ — произвольное покрытие и (V_α, V_α^A) — его индексирующая пара. Мы будем обозначать через $\varphi\alpha$ покрытие с индексирующей парой $(V_\alpha^A, \varnothing)$, определённое формулой $(\varphi\alpha)_v = A \cap \alpha_v$, $v \in V_\alpha^A$, а через $\psi\alpha$ — покрытие с индексирующей парой $(V_\alpha, \varnothing)$, определенное формулой $(\psi\alpha)_v = \alpha_v$. Заметим, что

$$A_\alpha = A_{\varphi\alpha}, \quad X_\alpha = X_{\psi\alpha}.$$

Отображения φ и ψ вместе с тождественными отображениями соответствующих групп гомологий определяют отображения обратных спектров

$$\Phi\colon \{H_q(A_\alpha; G), \pi_\beta^\alpha\}_{(A, \varnothing)} \to \{H_q(A_\alpha; G), \pi_\beta^\alpha\}_{(X, A)},$$

$$\Psi\colon \{H_q(X_\alpha; G), \pi_\beta^\alpha\}_{(X, \varnothing)} \to \{H_q(X_\alpha; G), \pi_\beta^\alpha\}_{(X, A)}$$

(индексы указывают направленные множества, над которыми определены соответствующие спектры). Отображения Φ и Ψ определяют в пределе гомоморфизмы

$$\varphi_\infty\colon H_q(A; G) \to H_q(A; G)_{(X, A)},$$

$$\psi_\infty\colon H_q(X; G) \to H_q(X; G)_{(X, A)}.$$

Для групп когомологий отображения Φ и Ψ являются отображениями прямых спектров, а их пределы являются гомоморфизмами

$$\varphi^\infty\colon H^q(A; G)_{(X, A)} \to H^q(A; G),$$

$$\psi^\infty\colon H^q(X; G)_{(X, A)} \to H^q(X; G).$$

Лемма 7.2. *Гомоморфизмы* φ_∞, ψ_∞, φ^∞ *и* ψ^∞ *являются изоморфизмами.*

Доказательство. Ввиду теорем VIII.3.15 и VIII.4.13 достаточно показать, что образ отображения φ является конфинальным подмножеством множества $\mathrm{Cov}(A, \varnothing)$, а образ отображения ψ — конфинальным подмножеством множества $\mathrm{Cov}(X, \varnothing)$. Пусть $\alpha \in \mathrm{Cov}(A, \varnothing)$ — произвольное покрытие и (V, W) — его индексирующая пара. Обозначим через V^+ множество, получающееся из множества V добавлением одного не принадлежащего этому множеству элемента v_0. Для каждого элемента $v \in V$ выберем в пространстве X такое открытое множество β_v, что $\alpha_v = A \cap \beta_v$. Кроме того, положим $\beta_{v_0} = X$. Тем самым мы получим покрытие $\beta \in \mathrm{Cov}(X, A)$ с индексирующей парой (V^+, V). Покрытия $\varphi\beta$ и α состоят из одних и тех же множеств, но индексирующей парой покрытия α является пара $(V, \varnothing) \subset (V, W)$. Отсюда следует, что $\alpha < \varphi\beta$. Тем самым доказано, что образ отображения φ является конфинальным подмножеством множества $\mathrm{Cov}(A; \varnothing)$.

Пусть теперь $\alpha \in \mathrm{Cov}(X, \varnothing)$ — произвольное покрытие и (V, W) — его индексирующая пара. Покрытие α определяет покрытие $\beta \in \mathrm{Cov}(X, A)$ с индексирующей парой (V, V)[1]. Покрытия $\psi\beta$ и α состоят из одних и тех же множеств, но индексирующей парой покрытия α является пара $(V, \varnothing)$. Следовательно, $\alpha < \psi\beta$. Тем самым доказано, что образ отображения ψ является конфинальным подмножеством множества $\mathrm{Cov}(X, \varnothing)$.

Определение 7.3. Граничные операторы

$$\partial\colon H_q(X, A; G) \to H_{q-1}(A; G),$$
$$\delta\colon H^q(A; G) \to H^{q+1}(X, A; G)$$

определяются из диаграмм

$$H_q(X, A; G) \xrightarrow{\partial'} H_{q-1}(A; G)_{(X, A)} \xleftarrow{\varphi_\infty} H_{q-1}(A; G),$$
$$H^q(A; G) \xleftarrow{\varphi^\infty} H^q(A; G)_{(X, A)} \xrightarrow{\delta'} H^{q+1}(X, A; G)$$

формулами $\partial = \varphi_\infty^{-1}\partial'$ и $\delta = \delta'(\varphi^\infty)^{-1}$.

Теорема 7.4. (Аксиома 3.) *Для любого отображения* $f\colon (X, A) \to (Y, B)$

$$(f|A)_* \partial = \partial f_* \text{ и } \delta(f|A)^* = f^* \delta.$$

Доказательство. Для групп гомологий эта теорема немедленно следует из коммутативности диаграммы

$$\begin{tikzcd}
H_q(X, A; G) \arrow[r, "\partial'"] \arrow[d, "f_*"] & H_{q-1}(A; G)_{(X, A)} \arrow[d, "(f|A)'_*"] & H_{q-1}(A; G) \arrow[l, "\varphi_\infty"'] \arrow[d, "(f|A)_*"] \\
H_q(Y, B; G) \arrow[r, "\partial'"] & H_{q-1}(B; G)_{(Y, B)} & H_{q-1}(B; G), \arrow[l, "\varphi_\infty"']
\end{tikzcd}$$

[1] $\beta_v = \alpha_v$ для любого $v \in V$. (*Прим. ред.*)

в которой $(f|A)'_*$ — соответствующее предельное отображение. Коммутативность каждого квадрата этой диаграммы непосредственно вытекает из определений. Для групп когомологий доказательство аналогично.

Теорема 7.5. *Гомологическая (когомологическая) последовательность пары (X, A) над любой группой коэффициентов G изоморфна усовершенствованной гомологической (когомологической) последовательности. Изоморфизм определяется отображениями φ_∞, ψ_∞ (соответственно отображениями φ^∞, ψ^∞) и тождественным отображением группы $H_q(X, A; G)$ (соответственно группы $H^q(X, A; G)$).*

Доказательство. Мы докажем эту теорему только для групп гомологий; доказательство для групп когомологий совершенно аналогично. Ввиду леммы 7.2 достаточно доказать коммутативность диаграммы

$$\begin{tikzcd}
 & H_q(A) \arrow[r, "i_*"] \arrow[dd, "\varphi_\infty"] & H_q(X) \arrow[dr, "j_*"] \arrow[dd, "\psi_\infty"] & \\
H_{q+1}(X, A) \arrow[ur, "\partial"] \arrow[dr, "\partial'"'] & & & H_q(X, A). \\
 & H_q(A)_{(X,A)} \arrow[r, "i'_*"] & H_q(X)_{(X,A)} \arrow[ur, "j'_*"'] &
\end{tikzcd}$$

Коммутативность левого треугольника непосредственно вытекает из определения отображения ∂. Для доказательства коммутативности среднего квадрата необходимо более подробно исследовать гомоморфизмы $\varphi_\infty i'_*$ и $i_* \psi_\infty$. Эти гомоморфизмы являются пределами отображений

$$\tau, \gamma: \{H_q(A_\alpha), \pi^\alpha_\beta\}_{(A, \varnothing)} \to \{H_q(X_\alpha), \pi^\alpha_\beta\}_{(X,A)}$$

(как и выше, индексы указывают направленные множества, над которыми определены рассматриваемые обратные спектры). Отображение τ переводит каждое покрытие $\alpha \in \mathrm{Cov}(X, A)$ с индексирующей парой (V_α, V^A_α) в покрытие $\tau\alpha = \varphi\alpha \in \mathrm{Cov}(A, \varnothing)$ с индексирующей парой $(V^A_\alpha, \varnothing)$, определенное формулой $(\tau\alpha)_v = A \cap \alpha_v$, а гомоморфизмы τ_α являются отображениями $H_q(A_{\tau\alpha}; G) \to H_q(X_\alpha; G)$, индуцированными вложениями $A_{\tau\alpha} \subset X_\alpha$. Отображение η каждому покрытию $\alpha \in \mathrm{Cov}(X, A)$ с индексирующей парой (V_α, V^A_α) относит покрытие $\eta\alpha = i^{-1}\psi\alpha \in \mathrm{Cov}(A, \varnothing)$ с индексирующей парой $(V, \varnothing)$, определенное формулой $(\eta\alpha)_v = A \cap \alpha_v$, а гомоморфизмы $\eta\alpha$ являются отображениями $H_q(A_{\eta\alpha}; G) \to H_q(X_\alpha; G)$, индуцированными вложениями $A_{\eta\alpha} \subset X_\alpha$. Очевидно, что $\eta\alpha < \tau\alpha$, причем отображение вложения $A_{\tau\alpha} \subset A_{\eta\alpha}$ является проекцией. Итак, проекции $\pi^{\tau\alpha}_{\eta\alpha}$ индуцированы вложениями. Таким образом,

$$\eta\alpha < \tau\alpha \text{ и } \tau_\alpha = \eta_\alpha \pi^{\tau\alpha}_{\eta\alpha}.$$

Отсюда согласно лемме VIII.3.18 следует, что $\tau_\infty = \eta_\infty$, т. е. $\varphi_\infty i'_* = i^* \psi_\infty$.

Коммутативность правого треугольника доказывается аналогично. Гомоморфизмы $j'_*\psi_\infty$ и j_* являются пределами отображений

$$\tau, \eta: \{H_q(X_\alpha; G), \pi^\alpha_\beta\}_{(X, \varnothing)} \to \{H_q(X_\alpha, A_\alpha; G), \pi^\alpha_\beta\}_{(X, A)}.$$

Для каждого покрытия $\alpha \in \mathrm{Cov}(X, A)$ с индексирующей парой (V_α, V^A_α) покрытия $\tau\alpha, \eta\alpha \in \mathrm{Cov}(X, \varnothing)$ состоят из тех же множеств, что и покрытие α, но их индексирующими парами являются пары $(V_\alpha, \varnothing)$ и (V_α, V^A_α) соответственно. Следовательно, $X_{\tau\alpha} = X_{\eta\alpha} = X_\alpha$ и оба отображения τ_α и η_α являются отображением $H_q(X_\alpha; G) \to H_q(X_\alpha; A_\alpha; G)$, индуцированным вложением. Таким образом, $\eta\alpha < \tau\alpha$ и тождественное отображение $X_\alpha \to X_\alpha$ является проекцией покрытия $\tau\alpha$ в покрытие $\eta\alpha$. Следовательно, как и выше,

$$\eta\alpha < \tau\alpha \quad \text{и} \quad \tau_\alpha = \eta_\alpha \pi^{\tau\alpha}_{\eta\alpha},$$

так что $\tau_\infty = \eta_\infty$.

Ввиду теоремы 7.5 вопрос о точности гомологической и когомологической последовательностей можно заменить вопросом о точности усовершенствованных последовательностей. С другой стороны, усовершенствованные последовательности являются пределами спектров точных последовательностей, определенных над одним и тем же направленным множеством $\mathrm{Cov}(X, A)$. Поэтому можно воспользоваться результатами пункта VIII.5.

Теорема 7.6. (Аксиома точности.) *Для любой пары (X, A) и любой группы $G \in \mathfrak{G}_R$ когомологическая последовательность точна, а гомологическая последовательность полуточна (см. определение* VIII.5.2). *Если пара (X, A) компактна, а группа G принадлежит либо категории $\mathfrak{G}_C$, либо категории $\mathfrak{G}_F$ (категории линейных пространств над некоторым полем F), то гомологическая последовательность также точна.*

Доказательство. Первое утверждение теоремы следует из теорем VIII.5.4 и VIII.5.3. Если пара (X, A) компактна, то, определяя группы, входящие в гомологическую последовательность, мы можем ограничиться конечными покрытиями. Если группа G компактна, то для каждого конечного покрытия α гомологическая последовательность пары (X_α, A_α) над группой G состоит из компактных групп, и следовательно, согласно теореме VIII.5.6 предельная последовательность точна. Если G является конечномерным векторным пространством над полем F, то все члены гомологической последовательности пары (X_α, A_α) являются конечномерными линейными пространствами над полем F, и следовательно, согласно теореме VIII.5.7 предельная последовательность также точна. Если линейное пространство $G \in \mathfrak{G}_F$ не конечномерно, то его можно представить в виде прямой суммы ΣG_β, каждое слагаемое которой конечномерно. Это разложение определяет разложение гомологической последовательности пары (X, A) над группой G в прямую сумму гомологических последовательностей над группами G_β. Так как каждая из этих последовательностей точна, то гомологическая последовательность над группой G также точна.

Как будет показано ниже (следствие 9.4), гомологическая последовательность любой триангулируемой пары точна без каких-либо ограничений на группу коэффициентов. С другой стороны, в пункте X. 4 будет указана компактная пара, целочисленная гомологическая последовательность которой неточна.

8. Замкнутые подмножества

В этом пункте мы покажем, почему при определении групп $H_q(X,A)$ необходимо покрытия $\alpha \in \mathrm{Cov}(X, A)$ рассматривать вместе с их индексирующими парами (V_α, V_α^A). Основная причина — незамкнутость подпространства A. В случае, когда подпространство A замкнуто, для определения групп $H_q(X, A)$ достаточно множества $\mathrm{Cov}(X)$ всех покрытий α с одним только индексирующим множеством V_α.

Определение 8.1. Покрытие $\alpha \in \mathrm{Cov}(X, A)$ с индексирующей парой (V_α, V_α^A) называется *собственным*, если множество V_α^A состоит из всех элементов $v \in V$, для которых $\alpha_v \cap A \neq \varnothing$.

Лемма 8.2. *Для каждого покрытия $\alpha \in \mathrm{Cov}(X)$ с множеством индексов V_α обозначим через $\varrho\alpha \in \mathrm{Cov}(X, A)$ покрытие с индексирующей парой (V_α, V'), определенное покрытием α, где V' — множество всех элементов $v \in V_\alpha$, для которых $\alpha_v \cap A \neq \varnothing$. Оказывается, что ϱ: $\mathrm{Cov}(X) \to \mathrm{Cov}(X, A)$ является взаимно однозначным сохраняющим отношение вписанности отображением множества $\mathrm{Cov}\ X$ на множество всех собственных покрытий из $\mathrm{Cov}\ (X, A)$.*

Доказательство тривиально.

Лемма 8.3. *Для любого замкнутого подмножества A пространства X собственные покрытия образуют конфинальное подмножество множества $\mathrm{Cov}(X, A)$. Если X является T_1-пространством, то верно и обратное утверждение.*

Доказательство. Пусть $\alpha \in \mathrm{Cov}(X, A)$ — произвольное покрытие, (V_α, V_α^A) — его индексирующая пара и V' — множество всех элементов $v \in V_\alpha^A$, для которых $\alpha_v \cap A \neq \varnothing$. Рассмотрим покрытие $\beta \in \mathrm{Cov}\ (X, A)$ с индексирующей парой (V_α, V'), определенное формулами

$$\beta_v = \alpha_v \setminus A, \text{ если } v \in V_\alpha \setminus V',$$
$$\beta_v = \alpha_v, \text{ если } v \in V'.$$

Покрытие β является, очевидно, собственным покрытием, вписанным в покрытие α.

Предположим теперь, что X является T_1-пространством и что подпространство A незамкнуто. Рассмотрим произвольную точку $x \in \bar{A} \setminus A$ и покрытие α, состоящее из множеств $\alpha_1 = X$, $\alpha_2 = X \setminus (x)$, индексирующая пара которого имеет вид (V_α, V_α^A), где $V_\alpha = (1, 2)$, $V_\alpha^A = (2)$.

Пусть $\beta \in \operatorname{Cov}(X, A)$ — произвольное покрытие, вписанное в покрытие α. Тогда $\beta_v \subset X \setminus (x)$ для любого индекса $v \in V_\beta^A$. Следовательно, существует такой индекс $v \in V_\beta \setminus V_\beta^A$, что $x \in \beta_\tau$. Так как множество β_v открыто, то $\beta_v \cap A \neq \varnothing$. Таким образом, покрытие β не является собственным покрытием. Следовательно, собственные покрытия не образуют конфинального подмножества множества $\operatorname{Cov}(X, A)$.

Эти леммы показывают, что для замкнутого подмножества A пространства X при определении усовершенствованной гомологической последовательности пары (X, A) множество $\operatorname{Cov}(X, A)$, над которым определялись прямые и обратные спектры, можно заменить его подмножеством, состоящим только из собственных покрытий. Ввиду леммы 8.2 последнее подмножество можно в свою очередь заменить множеством $\operatorname{Cov}(X)$ всех покрытий пространства X. Для любого покрытия $\alpha \in \operatorname{Cov}(X)$ мы будем через A_α обозначать подкомплекс нерва X_α, состоящий из всех его симплексов, носители которых пересекаются с множеством A. Пара (X_α, A_α) есть не что иное, как нерв покрытия $\varrho\alpha \in \operatorname{Cov}(X, A)$. Группы усовершенствованной гомологической (когомологической) последовательности, построенной с помощью множества $\operatorname{Cov}(X)$, мы будем отмечать индексом X.

Если пара (X, A) компактна, то, кроме того, можно ограничиться только конечными покрытиями. Таким образом, гомологическую (когомологическую) последовательность можно в этом случае определить как предел соответствующего спектра над направленным множеством $\operatorname{Cov}^f(X)$ конечных покрытий пространства X.

9. Спектральные группы триангулируемых пространств

Определение 9.1. Пусть (X, A) — некоторая пара с триангуляцией $T = \{t, (K, L)\}$. Полагая для любой вершины A комплекса K

$$\tau_A = t\,(\operatorname{st}(A)),$$

где $\operatorname{st}(A)$ — открытая звезда вершины A в комплексе K (см. определение II.3.6), мы определим покрытие τ пары (X, A), для которого $V_\tau = \{A\} = |K^0|$, $V_\tau^A = |L^0|$. Покрытие τ называется *покрытием, ассоциированным* с триангуляцией T.

Лемма 9.2. *Нервом покрытия τ является пара (K, L), т. е. $X_\tau = K$ и $A_\tau = L$.*

Доказательство. Так как комплексы K и X_τ имеют одни и те же вершины, то они являются подкомплексами одного и того же симплекса. Пусть $A^0, \ldots, A^n$ — произвольные вершины комплекса K, среди которых нет одинаковых. Так как отображение t гомеоморфно, то

$$(1) \qquad \bigcap_{i=0}^{n} \tau_{A^i} = \bigcap_{i=0}^{n} t\,(\operatorname{st}(A^i)) = t\Big(\bigcap_{i=0}^{n} \operatorname{st}(A^i)\Big).$$

Следовательно, $\bigcap \tau_{A^i} \neq \varnothing$ тогда и только тогда, когда $\bigcap \mathrm{st}(A^i) \neq \neq \varnothing$. Согласно лемме II.3.7 последнее пересечение отлично от нуля тогда и только тогда, когда $A^0, \ldots, A^n$ являются вершинами некоторого симплекса s комплекса K. Таким образом, $X_\tau = K$. Далее, из формулы (1) следует, что

$$\left(\bigcap_{i=0}^{n} \tau_{A^i}\right) \cap A = t\left(\bigcap_{i=0}^{n} |L| \cap \mathrm{st}\,(A^i)\right).$$

Следовательно, симплекс s с вершинами $A^0, \ldots, A^n$ тогда и только тогда принадлежит подкомплексу A_τ, когда вершины $A^0, \ldots, A^n$ являются вершинами подкомплекса L и

$$\bigcap_{i=0}^{n} |L| \cap \mathrm{st}\,(A^i) \neq \varnothing. \tag{2}$$

Но из определения звезды $\mathrm{st}(A^i)$ непосредственно следует, что

$$|L| \cap \mathrm{st}(A^i) = \mathrm{st}_L(A^i),$$

где $\mathrm{st}_L(A^i)$ — открытая звезда вершины A^i в комплексе L. Таким образом, ввиду леммы II.3.7 условие (2) означает, что симплекс s принадлежит подкомплексу L. Следовательно, $A_\tau = L$.

Теорема 9.3. *Пусть $T = \{t, (K, L)\}$ — триангуляция пары (X, A). Гомологическая (когомологическая) последовательность $S_{(K,L)}$ пары (K, L) (в смысле симплициальной теории) изоморфна усовершенствованной гомологической (когомологической) последовательности S пары (X, A) (в смысле спектральной теории). Соответствующий изоморфизм строится следующим образом. Последовательность $S_{(K,L)}$ рассматривается как гомологическая (когомологическая) последовательность нерва, ассоциированного с триангуляцией T покрытия τ. Получающиеся отображения*

$$\pi_\tau\colon S \to S_\tau \qquad (\pi^\tau\colon S^\tau \to S)$$

оказываются изоморфизмами.

Этот результат справедлив для всех групп коэффициентов G, для которых определены соответствующие спектральные группы.

Следствие 9.4. *Спектральная гомологическая последовательность триангулируемой пары (X, A) для любой группы коэффициентов G является точной последовательностью.*

Для доказательства теоремы 9.3 нам понадобится одно определение и две леммы.

Определение 9.5. *Мелкостью* покрытия α метрического пространства X называется максимум диаметров множеств α_v.

Лемма 9.6. *Подмножество C направленного множества $\mathrm{Cov}(X)$ всех открытых покрытий компактного метрического пространства X тогда и только тогда конфинально, когда для каждого $\varepsilon > 0$ оно содержит покрытие мелкости, меньшей ε.*

Доказательство. Очевидно, что условие необходимо. Чтобы доказать его достаточность, рассмотрим произвольное покрытие α пространства X. Пусть ε — число Лебега этого покрытия (см. лемму II.8.5) и пусть $\beta \in C$ — покрытие мелкости, меньшей ε. Тогда $\alpha < \beta$, и следовательно, множество C конфинально.

Лемма 9.7. *Покрытие τ', ассоциированное с барицентрическим подразделением $T' = \{t', (K', L')\}$ триангуляции $T = \{t, (K, L)\}$ пары (X, A), вписано в покрытие τ, ассоциированное с триангуляцией T, а соответствующие проекции*

$$\pi_{\tau}^{\tau'} : S_{\tau'} \approx S_{\tau}, \qquad \pi_{\tau}^{\tau'} : S^{\tau} \approx S^{\tau'}$$

являются изоморфизмами.

Доказательство. Напомним, что $(K', L') = (\mathrm{Sd}\, K, \mathrm{Sd}\, L)$. Пусть l: $(K', L') \to (K, L)$ — линейное отображение, соответствующее этому подразделению. Тогда $t' = tl$. Любая вершина B комплекса K' является центром тяжести некоторого симплекса s комплекса K. Пусть $A^0, \ldots, A^n$ — вершины этого симплекса. Тогда из определения отображения l и из определения открытых звезд следует, что

$$l(\mathrm{st}(B)) = \bigcap_{i=0}^{n} \mathrm{st}\,(A^i).$$

Поэтому

$$(1) \qquad \tau'_B = t' \,\mathrm{st}(B) = tl \,\mathrm{st}\,(B) = \bigcap_{i=0}^{n} t\,\mathrm{st}(A^i) = \bigcap_{i=0}^{n} \tau_{A^i}.$$

Отсюда вытекает, что покрытие τ' действительно вписано в покрытие τ.

Пусть π: $(K', L') \to (K, L)$ — определенная в пункте VI.7 проекция, т. е. симплициальное отображение, относящее каждой вершине B комплекса K' одну из вершин того симплекса комплекса K, центром тяжести которого является вершина B. Из формулы (1) вытекает, что π является также проекцией покрытия τ' в покрытие τ. Таким образом, для доказательства последнего утверждения леммы достаточно сослаться на следствие VI.7.2.

Доказательство теоремы 9.3. Пусть ${}^n\tau$ — покрытие пространства X, ассоциированное с n-кратным барицентрическим подразделением ${}^nT = \{{}^nt, ({}^nK, {}^nL)\}$ триангуляции T. Из леммы II.7.5 следует, что

$$\lim_{n \to \infty} \mathrm{mesh}\, {}^n\tau = 0.$$

Следовательно, покрытия $\{{}^n\tau\}$ образуют конфинальное подмножество C множества $\mathrm{Cov}(X)$. Эти же покрытия, рассматриваемые как покрытия пары (X, A), образуют конфинальное подмножество множества R собственных покрытий пары (X, A). Так как согласно лемме 8.3 множество R конфинально в множестве $\mathrm{Cov}(X, A)$, то и множество C конфинально в множестве $\mathrm{Cov}(X, A)$. Пусть S' — предел спектра $\{S_{\tau}, \pi_{\alpha}^{\beta}\}$ (соответственно спектра $\{S^{\tau}, \pi_{\alpha}^{\beta}\}$), определенного над направленным множеством C. Гомоморфизм π_τ (соответственно гомоморфизм π^τ) можно представить как композицию отображений $S \xrightarrow{\psi_\infty} S' \xrightarrow{\pi'_\tau} S_\tau$ (соответственно как композицию отображений $S \xleftarrow{\psi^\infty} S' \xleftarrow{\pi'^\tau} S^\tau$), где ψ_∞ (соответственно ψ^∞) — предел соответствующего отображения вложения. Так как множество C конфинально в множестве $\mathrm{Cov}(X, A)$, то отображение ψ_∞ (соответственно отображение ψ^∞) является изоморфизмом (следствия VIII. 3.16, VIII. 4.14). С другой стороны, согласно лемме 9.7 все проекции спектра над множеством C являются изоморфизмами. Следовательно, согласно теореме VIII.3.4 отображение π'_τ: $S' \to S_\tau$ (соответственно отображение π'^τ: $S^\tau \to S'$) также изоморфно. Таким образом, указанное в теореме 9.3 отображение действительно является изоморфизмом.

10. Теории частично точных гомологий и когомологий

Как мы уже видели, группы спектральных гомологий удовлетворяют всем аксиомам, за исключением аксиомы точности, которая выполняется только при некоторых весьма специальных условиях. Несмотря на это, спектральные группы весьма употребительны (особенно при изучении компактных пар), так как они обладают некоторыми важными специальными свойствами, которые мы рассмотрим в следующей главе. Кроме того, в дальнейшем мы встретимся с теориями гомологий, отличными от теории спектральных гомологий и также не удовлетворяющими аксиоме точности. Ввиду этого целесообразно обобщить понятие теории гомологий с тем, чтобы включить в него как теорию спектральных гомологий, так и другие теории, которые нам в дальнейшем встретятся.

Изменение аксиом мы начнем с изменения понятия допустимой категории $\mathfrak{A}$ (см. пункт I.1). Именно мы заменим условие (5) следующим условием:

(5′) Любая триангулируемая пара (X, A) принадлежит категории $\mathfrak{A}$. Любое отображение f: $(X, A) \to (Y, B)$ триангулируемых пар принадлежит категории $\mathfrak{A}$.

Эта аксиома утверждает, что категория $\mathfrak{T}$ триангулируемых пар является подкатегорией категории $\mathfrak{A}$. Этим свойством обладали все допустимые категории, которые мы до сих пор рассматривали.

Приняв эту аксиому, мы заменим аксиому точности следующей более слабой аксиомой.

Аксиома 4′ (аксиома частичной точности). *Гомологическая (когомологическая) последовательность любой допустимой пары является полуточной последовательностью (см. определение VIII.5.2). Гомологическая (когомологическая) последовательность любой триангулируемой пары является точной последовательностью.*

Система $H = \{H_q(X, A), f_*, \partial\}$ (соответственно система $H = \{H^q(X, A), f^*, \delta\})$, удовлетворяющая аксиомам 1—3, 5—7 и 4′, называется теорией *частично точных гомологий* (соответственно *частично точных когомологий*). Теория спектральных гомологий (на категории $\mathfrak{A}_1$) является типичным примером теории частично точных гомологий. Другие примеры будут указаны ниже.

Применяя результаты главы I к теории частично точных гомологий, мы должны предварительно проверить, в какой степени аксиома точности необходима для их доказательства. Например, при доказательстве тривиальности группы $H_q(X, X)$ (лемма I.8.1) первое доказательство использует аксиому точности в полном объеме, в то время как второе доказательство использует только полуточность гомологической последовательности. Таким образом, это предложение остается справедливым для теорий частично точных гомологий. Исследование доказательства теоремы I.10.2 показывает, что для частично точных гомологий и когомологий гомологическая и когомологическая последовательности тройки полуточны. Аналогично исследование доказательства теоремы I.8.6 показывает, что приведенные гомологические и когомологические последовательности пары полуточны.

Примечания

История развития спектральной теории. Первые определения групп гомологии, основывающиеся на предельных процессах, были предложены Виеторисом (Math. Ann. **97** (1927), 454—472), который ограничился рассмотрением только компактных метрических пространств и использовал для определения своих циклов специальную метрику. В то же самое время П. С. Александров (Ann. of Math. **30** (1928), 101—187) ввел понятие аппроксимации компактных метрических пространств с помощью обратных последовательностей комплексов (которые он называл проекционными спектрами) и с помощью этого понятия удовлетворительно определил числа Бетти. Л. С. Понтрягин (Math. Ann. **105** (1931), 165—205) присоединил к теории Александрова понятие об обратных последовательностях групп и получил группы гомологий. Первым, определившим понятие нерва конечного открытого покрытия и применившим нервы для аппроксимации пространств, был Чех[1]). Используя вместо последовательностей обратные спектры,

[1]) На самом деле общий метод аппроксимации, основывающийся на понятии нерва, был развит П. С. Александровым в ряде публикаций 1925—1927 гг. (первое краткое сообщение — Math. Ann. **96** (1925), полное изложение — Ann. of Math. **30** (1928), 101—187), правда, только для компактных метрических пространств. Чех был первым лишь в перенесении этих методов на произвольные пространства. *(Прим. ред.)*

он определил группы гомологий произвольных пространств. Когда стало ясно, что определения Чеха не дают для некомпактных пространств вполне удовлетворительной теории, Даукер (Ann. of Math. **51** (1950), 278—292) нашел удовлетворительное изменение этой теории, введя пары бесконечных покрытий.

Параллельное развитие теории шло, основываясь на идеях Александера[1]) (Proc. Nat. Acad. Sci. **21** (1935), 509—512), состоящих в том, что q-мерные коцепи можно определить как функции упорядоченных систем $q+1$ точек данного пространства, со значениями в группе коэффициентов. Александер впоследствии несколько видоизменил этот подход, введя понятия *разбиения* (Bull. Amer. Math. Soc. **53** (1947), 201—203). Последняя модификация этой теории, построенная Уоллесом и Спейньером (Ann. of Math. **49** (1948), 407—427), удовлетворяет нашим аксиомам на компактных пространствах и, следовательно, изоморфна спектральной теории. Преимущества такого подхода заключаются в простоте определения коцепи. Недостатком его является отсутствие аналогичной простой двойственной конструкции для цепей и групп гомологий.

Упражнения

А. Связность и квазикомпоненты

Определение. Пусть X — произвольное топологическое пространство. *Компонентой* некоторой точки $x_0 \in X$ в пространстве X называется объединение всех связных подмножеств пространства X, содержащих точку x_0. *Квазикомпонентой* точки x_0 называется пересечение всех одновременно открытых и замкнутых подмножеств пространства X, содержащих точку x_0.

1. Показать, что

(1) компоненты замкнуты, связны и не пересекаются,

(2) квазикомпоненты замкнуты и не пересекаются,

(3) каждая квазикомпонента является объединением компонент,

(4) квазикомпонента тогда и только тогда является компонентой, когда она связна,

(5) если пространство X компактно или если число его квазикомпонент конечно, то каждая квазикомпонента является компонентой. Показать на примере, что квазикомпонента может не быть компонентой.

2. Пусть $x_0, x_1 \in X$, $g \in G$ и $g \neq 0$. Показать, что элементы $(gx_0)_X$ и $(gx_1)_X$ группы спектральных гомологий $H_0(X; G)$, определенные

[1]) Аналогичные идеи одновременно были высказаны А. Н. Колмогоровым (Les groupes de Betti des espaces localement bicompacts, Compt. Rend. de Paris **202** (1936), 1144—1147). (*Прим. ред.*)

в соответствии с I.7.1, тогда и только тогда совпадают, когда точки x_0 и x_1 принадлежат одной квазикомпоненте.

3. Каждому элементу h группы спектральных гомологий $H^0(X; G)$ над группой $G \in \mathfrak{G}_R$ отнесем функцию $X \to G$, определенную в соответствии с I.7.1c. Показать, что тем самым определяется изоморфизм между группой $H^0(X; G)$ и R-модулем, состоящим из всех *непрерывных* функций $X \to G$ (группа G рассматривается в дискретной топологии). Аналогичным образом описать группу $\tilde{H}^0(X; G)$.

4. Показать, что группа $H_0(X; G)$ изоморфна группе $\mathrm{Hom}\,(H^0(X; J); G)$, где J — группа целых чисел.

B. Нульмерные множества

Определение. Пространство X называется *нульмерным*, если в любое его открытое покрытие можно вписать покрытие, состоящее из непересекающихся множеств.

1. Показать, что компактное пространство тогда и только тогда нульмерно, когда оно вполне несвязно (т. е. каждая его компонента состоит только из одной точки).

2. Показать, что каждое компактное нульмерное пространство является пределом обратного спектра конечных пространств.

3. Показать, что если пространство X нульмерно, то $H_q(X; G) = 0$ и $H^q(X; G) = 0$ для всех $q > 0$ (имеются в виду группы спектральных гомологий).

4. Пусть $(X; X_1, X_2)$ — собственная триада (по отношению к группам спектральных гомологий), для которой $X = X_1 \cup X_2$, а подпространство $A = X_1 \cap X_2$ нульмерно. Показать, что $H_q(X; G) \approx H_q(X_1; G) + H_q(X_2; G)$ для всех $q > 0$. Показать, что если подпространства X_1 и X_2 связны и $H_1(X_1; G) = H_1(X_2; G) = 0$, то $H_1(X; G) \approx \tilde{H}_0(A; G)$.

C. Предельные группы

Здесь мы будем рассматривать категорию $\mathfrak{A}_H$, состоящую из пар (X, A) с хаусдорфовым пространством X и всех отображений таких пар.

1. Любую (частично точную) теорию гомологий (когомологий) H, заданную на категории $\mathfrak{A}_C$ компактных пар, распространить до теории $\overrightarrow{H}$ (соответственно теории $\overleftarrow{H}$), заданной на категории $\mathfrak{A}_H$, используя пределы прямых спектров групп $H_q(X_\alpha, A_\alpha)$ (соответственно групп $H^q(X_\alpha, A_\alpha)$), где (X_α, A_α) — произвольная компактная пара, содержащаяся в паре (X, A). Для предельных теорий $\overrightarrow{H}$ и $\overleftarrow{H}$ проверить аксиомы.

2. Предполагая, что теория H задана на категории $\mathfrak{A}_H$, определить естественное отображение $\overrightarrow{H} \to H$ (соответственно отображение $H \to \overleftarrow{H}$).

3. Показать, что для теории сингулярных гомологий на категории $\mathfrak{A}_H$ отображение $\vec{H} \to H$ является изоморфизмом. Показать, что если группа коэффициентов компактна или является векторным пространством над некоторым полем, то для теории сингулярных когомологий отображение $H \to \overleftarrow{H}$ также является изоморфизмом.

4. Пусть в паре (X, A) категории $\mathfrak{A}_H$ подпространство A замкнуто. Показать, что в этом случае группы $\vec{H}_q(X, A)$ (группы $\overleftarrow{H}^q(X, A)$) можно определить как пределы групп $H_q(X_\alpha, A \cap X_\alpha)$ (соответственно групп $H^q(X_\alpha, A \quad X_\alpha)$), где X_α — любое компактное подмножество пространства X.

5. Пусть K — произвольный (вообще говоря, бесконечный) симплициальный комплекс и L — некоторый его подкомплекс. Показать, что предельная обратная группа когомологий $\overleftarrow{H}^q(K, L; G)$ (см. главу VIII, упражнения F) естественно изоморфна основанной на теории сингулярных когомологий предельной группе $\overleftarrow{H}^q(|K|, |L|; G)$ где $|K|$ — пространство комплекса K в слабой топологии.

Д. Гомологии с компактными носителями

Определение. Говорят, что теория частично точных гомологий H, определенная на категории $\mathfrak{A}_H$, обладает *компактными носителями*, если для каждого элемента $u \in H_q(X, A)$ существует такая компактная пара $(X', A') \subset (X, A)$, что элемент u содержится в образе индуцированного вложением гомоморфизма $H_q(X', A') \to H_q(X, A)$.

1. Предположим, что теория H точна и обладает компактными носителями. Пусть (X, A) — произвольная пара категории $\mathfrak{A}_H$ и (X', A') — компактная пара, содержащаяся в паре (X, A). Показать, что для любого элемента $u \in H_q(X', A')$, принадлежащего ядру индуцированного вложением гомоморфизма $H_q(X', A') \to H_q(X, A)$, существует такая компактная пара (X'', A''), что $(X', A') \subset (X'', A'') \subset (X, A)$ и элемент u принадлежит ядру гомоморфизма $H_q(X', A') \to H_q(X'', A'')$. (Указание. Рассмотреть тройку (X, A, A') и свести общий случай к случаю $A = A'$. Затем рассмотреть тройку (X, X', A').)

2. Показать, что для любой точной теории гомологий H на категории $\mathfrak{A}_H$ следующие условия равносильны:

(a) теория H обладает компактными носителями,

(b) рассмотренное в упражнении С2 отображение $\vec{H} \to H$ является изоморфизмом,

(c) рассмотренное в упражнении С2 отображение $\vec{H} \to H$ является эпиморфизмом.

3. Показать, что теория сингулярных гомологий обладает компактными носителями.

E. Допустимые категории и категории единственности

1. Пусть H — теория частично точных гомологий (когомологий) на допустимой категории $\mathfrak{A}$, а $\mathfrak{A}'$ — (полная) подкатегория категории $\mathfrak{A}$, состоящая из всех пар (X, A) с точными гомологическими (когомологическими) последовательностями. Показать, что категория $\mathfrak{A}'$ допустима и что H является теорией точных гомологий (когомологий) на категории $\mathfrak{A}'$.

2. Пусть $\mathfrak{I}_H$ — категория, состоящая из всех компактных пар (X, A), имеющих тот же гомотопический тип, что и триангулируемые пары, и из всех отображений таких пар. Показать, что категория $\mathfrak{I}_H$ допустима.

3. Показать, что любая теория частично точных гомологий (когомологий) на категории $\mathfrak{A}_C$ является точной теорией на подкатегории $\mathfrak{I}_H$.

4. Показать, что категория $\mathfrak{I}_H$ является категорией единственности для теорий гомологий и когомологий. (Этот результат будет обобщен в главе XII второго тома.)

ГЛАВА X

СПЕЦИАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА СПЕКТРАЛЬНЫХ ГОМОЛОГИЙ

1. Введение

В этой главе в основном рассматриваются вопросы, связанные со свойством непрерывности спектральных групп. В общих чертах это свойство может быть сформулировано следующим образом: если компактная пара (X, A) является пределом обратного спектра пар (X_α, A_α), то группы пары (X, A) являются пределами спектров (обратных для гомологий и прямых для когомологий) групп пары (X_α, A_α). В конце этой главы показано, что среди всех теорий частично точных гомологий (см. пункт IX. 10), определенных на категории $\mathfrak{A}_C$ теория спектральных гомологий является единственной теорией, удовлетворяющей «аксиоме непрерывности». Тем самым, несмотря на отсутствие точности получается (по крайней мере для компактных пар) полное аксиоматическое описание групп спектральных гомологий.

В качестве применения свойства непрерывности мы доказываем, что группы спектральных гомологий удовлетворяют более сильной форме аксиомы вырезания. В частности, в теории спектральных гомологий каждая компактная триада является собственной триадой (см. определение I. 14.1). В приложениях теории этот факт часто бывает полезен.

Пункты 6—9 посвящены группам гомологий некомпактных пространств, определяемых с помощью компактификации пространств (одним и тем же стандартным способом) как спектральные группы компактифицированных пространств. Рассматривается как компактификация локально компактных пространств с помощью присоединения точки на бесконечности, так и тихоновская компактификация нормальных пространств. В первом случае получается некоторая теория гомологий на категории $\mathfrak{A}_{LC}$ локально компактных пар. Эта теория особенно интересна ввиду того, что

(1) для любого локально конечного бесконечного симплициального комплекса получающиеся группы изоморфны группам, основанным на конечных коцепях и бесконечных цепях;

(2) в этой теории нельзя построить приведенные группы, так как в категории $\mathfrak{A}_{LC}$ стягиваемы (в смысле определения I. 7.3) только

компактные пространства. Теория гомологий и когомологий нормальных пространств, построенная с помощью компактификации по Тихонову, оказывается изоморфной теории спектральных гомологий и когомологий, основанной на *конечных* открытых покрытиях.

На протяжении всей главы рассматриваются группы спектральных гомологий и когомологий только компактных пар (X, A) и поэтому (см. пункт IX.8) можно предполагать, что эти группы определяются с помощью спектров над направленным множеством $\mathrm{Cov}^f(X)$ конечных открытых покрытий пространства X.

2. Свойство непрерывности

Пусть $\mathfrak{A}$ — произвольная категория пар (X, A) и их отображений, а $\mathrm{Inv}\,\mathfrak{A}$ — соответствующая категория обратных спектров. Объекты и отображения категории $\mathrm{Inv}\,\mathfrak{A}$ мы будем обозначать жирным шрифтом: через $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{A})$ — обратный спектр $\{(X_m, A_m), \pi^{m_1}_{m_2}\}$:

$$(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{A}) = \{(X_m, A_m), \pi^{m_1}_{m_2}\};$$

через

$$\boldsymbol{f}\colon (\boldsymbol{X}, \boldsymbol{A}) \to (\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{B})$$

отображение спектра $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{A})$ в спектр $(\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{B}) = \{(Y_n, B_n), \varrho^{n_1}_{n_2}\}$. Отображение $\boldsymbol{f}$ состоит из отображения $f\colon N \to M$ соответствующих направленных множеств и некоторых отображений $f_n\colon (X_{fn}, A_{fn}) \to (Y_n, B_n)$, удовлетворяющих указанным в определении VIII.2.3 требованиям.

Операцию перехода к пределу по обратному (или прямому) спектру мы будем обозначать через $\lim$. Таким образом, через $\lim(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{A})$ мы будем обозначать пару (X, A), для которой пространство X является пределом обратного спектра $\{X_m, \pi^{m_1}_{m_2}\}$, а подпространство A — пределом спектра $\{A_m, \pi^{m_1}_{m_2} \mid A_{m_1}\}$. Определение предела $\lim \boldsymbol{f}\colon \lim(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{A}) \to \lim(\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{B})$ отображения $\boldsymbol{f} \in \mathrm{Inv}\,\mathfrak{A}$ см. VIII.3.10.

Мы будем предполагать, что операция перехода к пределу по обратным спектрам переводит категорию $\mathrm{Inv}\,\mathfrak{A}$ в категорию $\mathfrak{A}$:

$$\lim\colon \mathrm{Inv}\,\mathfrak{A} \to \mathfrak{A}.$$

Этим свойством обладает, например, категория компактных пар. Заметим, что согласно теореме VIII.3.14 операция $\lim$ является ковариантным функтором.

Предположим теперь, что на категории $\mathfrak{A}$ определена теория частично точных гомологий (когомологий) H, значения которой принадлежат категории $\mathfrak{G}_R$ или категории $\mathfrak{G}_C$ (для когомологий — только категории $\mathfrak{G}_R$). В теории H каждому спектру $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{A}) \in \mathrm{Inv}\,\mathfrak{A}$ соответствуют обратный (соответственно прямой) спектр

$$H_q(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{A}) = \{H_q(X_m, A_m), \pi^{m_1}_{m_2 *}\},$$

(соответственно $H^q(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{A}) = \{H^q(X_m, A_m), \pi_{m_2}^{m_1 *}\}$) и отображение

$$\partial: \quad H_q(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{A}) \to H_{q-1}(\boldsymbol{A})$$

(соответственно отображение δ: $H^{q-1}(\boldsymbol{A}) \to H^q(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{A})$). Кроме того для любого отображения $\boldsymbol{f}$: $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{A}) \to (\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{B})$ гомоморфизмы f_{m*} (соответственно гомоморфизмы f_m^*) образуют отображение

$$\boldsymbol{f}_*: H_q(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{A}) \to H_q(\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{B}), \qquad (\boldsymbol{f}^*: H^q(\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{B}) \to H^q(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{A})).$$

Мы получаем, таким образом, нечто вроде «теории гомологий» на категории $\mathrm{Inv}\,\mathfrak{A}$, значения которой принадлежат категории $\mathrm{Inv}\,\mathfrak{G}_R$ или категории $\mathrm{Inv}\,\mathfrak{G}_C$ (соответственно категории $\mathrm{Dir}\,\mathfrak{G}_R$).

Из сказанного следует, что на категории $\mathrm{Inv}\,\mathfrak{A}$ можно определить два составных функтора $H_q \lim$ и $\lim H_q$. Значения обоих функторов принадлежат одной и той же категории $\mathfrak{G}_R$ или $\mathfrak{G}_C$. Эти функторы сравнимы друг с другом в следующем смысле.

Теорема 2.1. *Пусть* $(X, A) = \lim(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{A})$ *и пусть* π_m: $(X, A) \to (X_m, A_m)$ — *соответствующие проекции. Тогда* $\pi_m = \pi_m^{m'} \pi'_m$, *если* $m < m'$, *и следовательно,* $\pi_{m*} = \pi_{m*}^{m'} \pi_{m'*}$. *Таким образом, гомоморфизмы* $\{\pi_{m*}\}$ *составляют гомоморфизм*

$$H_q(\lim(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{A})) \to H_q(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{A}).$$

Согласно определению VIII.3.10 *и теореме* VIII.3.13 *этот гомоморфизм определяет предельный гомоморфизм*

$$l(q, \boldsymbol{X}, \boldsymbol{A}): \quad H_q(\lim(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{A})) \to \lim H_q(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{A}).$$

Оказывается, что гомоморфизм $l(q, \boldsymbol{X}, \boldsymbol{A})$ *является естественным преобразованием функтора* $H \lim$ *в функтор* $\lim H$, *т. е. для любого отображения* $\boldsymbol{f}$: $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{A}) \to (\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{B})$ *категории* $\mathrm{Inv}\,\mathfrak{A}$ *диаграмма*

$$\begin{array}{ccc} H_q(\lim(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{A})) & \xrightarrow{l} & \lim H_q(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{A}) \\ \downarrow (\lim \boldsymbol{f})_* & & \downarrow \lim(\boldsymbol{f}_*) \\ H_q(\lim(\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{B})) & \xrightarrow{l} & \lim H_q(\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{B}) \end{array}$$

коммутативна. Кроме того, для любой пары $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{A}) \in \mathrm{Inv}\,\mathfrak{A}$ *диаграмма*

$$\begin{array}{ccc} H_q(\lim(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{A})) & \xrightarrow{l} & \lim H_q(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{A}) \\ \downarrow \partial & & \downarrow \lim \partial \\ H_{q-1}(\lim(\boldsymbol{A})) & \xrightarrow{l} & \lim H_{q-1}(\boldsymbol{A}) \end{array}$$

коммутативна.

Теорема непосредственно следует из леммы VIII.3.11. Аналогичные результаты имеют место и для когомологий.

Теорема 2.2. *Пусть* $(X, A) = \lim(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{A})$ *и* π_m: $(X, A) \to (X_m, A_m)$ — *соответствующие проекции. Тогда отображения* $\{\pi_m^*\}$ *составляют гомоморфизм*

$$H^q(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{A}) \to H^q(\lim(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{A})),$$

предел которого

$$l(q, \boldsymbol{X}, \boldsymbol{A})\colon \lim H^q(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{A}) \to H^q(\lim(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{A}))$$

является естественным преобразованием функтора $\lim H$ *в функтор* $H \lim$ *в том смысле, что диаграммы*

$$\begin{tikzcd}
\lim H^q(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{A}) \arrow[r, "l"] & H^q(\lim(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{A})) \\
\lim H^{q-1}(\boldsymbol{A}) \arrow[r, "l"] \arrow[u, "\lim \delta"] & H^{q-1}(\lim(\boldsymbol{A})) \arrow[u, "\delta"]
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\lim H^q(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{A}) \arrow[r, "l"] & H^q(\lim(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{A})) \\
\lim H^q(\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{B}) \arrow[r, "l"] \arrow[u, "\lim(\boldsymbol{f}^*)"] & H^q(\lim(\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{B})) \arrow[u, "(\lim \boldsymbol{f})^*"]
\end{tikzcd}$$

коммутативны.

Определение 2.3. Теория частично точных гомологий (когомологий) H, значения которой принадлежат категории $\mathfrak{G}_R$ или категории $\mathfrak{G}_C$ (соответственно категории $\mathfrak{G}_R$), называется *непрерывной* на категории $\mathfrak{A}$, если указанное в теореме 2.1 (соответственно в теореме 2.2) преобразование l является естественной эквивалентностью, т. е. если для каждой пары $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{A}) \in \operatorname{Inv} \mathfrak{A}$

$$l(q, \boldsymbol{X}, \boldsymbol{A}): \quad H_q(\lim(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{A})) \approx \lim H_q(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{A})$$

(соответственно $l(q, \boldsymbol{X}, \boldsymbol{A}): \quad \lim H^q(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{A}) \approx H^q(\lim(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{A}))$).

Подчеркнем, что для теории когомологий, которой принадлежат значения категории $\mathfrak{G}_C$, понятие непрерывности не определяется.

Определение 2.4. Обратный спектр $\{(X_\alpha, A_\alpha), \pi_\alpha^\beta\}$ называется *спектром подпространств*, если каждое пространство X_α является подпространством некоторого фиксированного пространства Z и каждое отображение π_β^α является вложением $(X_\beta, A_\beta) \subset (X_\alpha, A_\alpha)$. Пара $(X, A) = (\bigcap X_\alpha, \bigcap A_\alpha)$ называется *пересечением* данного спектра подпространств.

Теорема 2.5. *Пусть пара* (X, A) *является пересечением спектра подпространств* $\{(X_\alpha, A_\alpha), \pi_\alpha^\beta\}$. *Тогда каждой точке* $x \in X$, *рассматриваемой как элемент любого пространства* X_α, *отвечает некоторый элемент* $\varphi(x)$ *предельной пары* (X_∞, A_∞). *Получающееся отображение* φ *является гомеоморфизмом* φ: $(X, A) \approx (X_\infty, A_\infty)$.

Очевидно, что отображение φ взаимно однозначно. Проверка того факта, что отображения φ и φ^{-1} непрерывны, предоставляется читателю.

Теорема 2.6. *Пусть H — произвольная непрерывная теория частично точных гомологий (когомологий), значения которой принадлежат категории $\mathfrak{G}_R$ или категории $\mathfrak{G}_C$ (соответственно категории $\mathfrak{G}_R$). Пусть, далее, пара (X, A) является пересечением спектра подпространств $\{(X_\alpha, A_\alpha), \pi_\alpha^\beta\}$, состоящего из компактных пар компактного пространства Z. Пусть, наконец, i_α: $(X, A) \subset \subset (X_\alpha, A_\alpha)$. Тогда каждая система $\{u_\alpha\}$, где $u_\alpha \in H_q(X_\alpha, A_\alpha)$ и $\pi_{\alpha *}^\beta u_\beta = u_\alpha$, однозначно определяет такой элемент $u \in H_q(X, A)$, что $u_\alpha = i_{\alpha *} u$, и наоборот. (Соответственно для каждого элемента $u \in H^q(X, A)$ существует такой индекс α и такой элемент $u_\alpha \in \in H^q(X_\alpha, A_\alpha)$, что $i_\alpha^* u_\alpha = u$. Если $i_\alpha^* u_\alpha = 0$, то существует такой индекс $\beta > \alpha$, что $\pi_\alpha^{\beta *} u_\alpha = 0$.)*

Доказательство. Используя отображение φ, указанное в теореме 2.5, отождествим пару (X, A) с пределом обратного спектра $\{(X_\alpha, A_\alpha), \pi_\alpha^\beta\}$. Тогда утверждение теоремы 2.6 будет прямым следствием непрерывности теории гомологий (когомологий) H.

3. Непрерывность теорий спектральных гомологий и когомологий

Теорема 3.1. *Теория спектральных гомологий с группой коэффициентов, принадлежащей категории $\mathfrak{G}_R$ или категории $\mathfrak{G}_C$, непрерывна на категории компактных пар. Аналогичное утверждение имеет место для теории спектральных когомологий с группой коэффициентов, принадлежащей категории $\mathfrak{G}_R$.*

Доказательству этой теоремы мы предпошлем несколько необходимых лемм.

Поскольку мы имеем дело с компактными парами, можно ограничиться рассмотрением лишь конечных покрытий. Так как подмножество A компактной пары (X, A) всегда замкнуто, то можно предполагать (см. пункт IX.8), что группы спектральных гомологий (когомологий) пары (X, A) определены как пределы обратных (прямых) спектров групп над направленным множеством $\mathrm{Cov}^f(X)$ конечных покрытий пространства X, а не над направленным множеством $\mathrm{Cov}^f(X, A)$.

Определение 3.2. Семейство α подмножеств пространства X называется *расширением* семейства β, если множества индексов семейств α и β совпадают: $V_\alpha = V_\beta$ и $\alpha_v \supset \beta_v$ для каждого индекса $v \in V_\alpha$. Для любого семейства α подмножеств пространства X через $\bar{\alpha}$ обозначается семейство, состоящее из замыканий множеств семейства α.

Лемма 3.3. *Для любого конечного открытого покрытия α нормального пространства X существует замкнутое покрытие β, расширением которого является покрытие α.*

Доказательство. Если множество индексов V_α состоит только из одного элемента v, то $\alpha_v = X$. В этом случае покрытие β определяется формулой $\beta_v = X$. Рассуждая по индукции, предположим, что лемма уже доказана для любого нормального пространства и любого его покрытия α, множество индексов которого V_α содержит k элементов. Пусть α — покрытие пространства X, для которого множество V_α состоит из $k+1$ элемента. Выберем фиксированный элемент $v_0 \in V_\alpha$ и положим $A = X \setminus \bigcup \alpha_v$, где $v \neq v_0$. Так как пространство X нормально, то существует такое открытое множество U, что $A \subset U$ и $\overline{U} \subset \alpha_{v_0}$. Пусть $X' = X \setminus U$ и пусть $\alpha'_v = \alpha_v \cap X'$ для любого $v \neq v_0$. Тогда α' является открытым покрытием нормального пространства X', множество индексов которого состоит из k элементов. Пусть β' — замкнутое покрытие, расширением которого является покрытие α'. Определим замкнутое покрытие β, положив $\beta_{v_0} = \overline{U}$ и $\beta_v = \beta'_v$, если $v \neq v_0$. Очевидно, что покрытие α является расширением покрытия β.

Лемма 3.4. *Пусть $\alpha \in \mathrm{Cov}^f(X)$, где X — произвольное нормальное пространство. Тогда для любого вписанного в покрытие α конечного семейства β замкнутых множеств пространства X существует такое расширение γ, состоящее из открытых множеств, что семейство $\overline{\gamma}$ вписано в покрытие α и имеет тот же нерв, что и семейства γ и β: $X_{\overline{\gamma}} = X_\gamma = X_\beta$.*

Доказательство. Для упрощений формул будем предполагать, что множество V_β состоит из чисел $1, 2, \ldots, k$. Выберем такой элемент $v \in V_\alpha$, что $\beta_1 \subset \alpha_v$. Пусть B — объединение всех пересечений множеств $\beta_2, \ldots, \beta_k$, которые не пересекаются со множеством β_1. Так как пространство X нормально, то существует такое открытое множество γ_1, что $\beta_1 \subset \gamma_1$ и $\overline{\gamma}_1 \cap B = \varnothing$. (Если $\beta_1 = \varnothing$, то мы полагаем $\gamma_1 = \varnothing$.) Очевидно, что семейство $\overline{\gamma}_1, \beta_2, \ldots, \beta_k$ вписано в семейство α и его нерв совпадает с нервом X_β. Применяя это построение к элементу β_2 семейства $\overline{\gamma}_1, \beta_2, \ldots, \beta_k$, мы получим множество γ_2 и новое семейство $\overline{\gamma}_1, \overline{\gamma}_2, \beta_3, \ldots, \beta_k$ с тем же нервом. Продолжая построение, мы получим, очевидно, искомое семейство γ.

Определение 3.5. Семейство α подмножеств пространства X называется *регулярным относительно подпространства* $A \subset X$, если выполнены следующие условия:

(1) из $\alpha_v \cap A = \varnothing$, $v \in V_\alpha$ следует, что $\overline{\alpha}_v \cap A = \varnothing$;

(2) из того, что $\alpha_{v_i} \cap A \neq \varnothing$ для любого $i = 1, \ldots, k$ и $D = \alpha_{v_1} \cap \ldots \cap \alpha_{v_k} \neq \varnothing$, следует, что $D \cap A \neq \varnothing$.

Эти два условия можно следующим образом сформулировать с помощью понятия нерва:

(1°) любая вершина v нерва $A_{\overline{\alpha}}$ является также вершиной нерва A_α;

(2°) если все вершины симплекса s нерва X_α принадлежат нерву A_α, то этот симплекс принадлежит нерву A_α, иначе говоря, в терминологии, введенной в определении II.9.1, нерв A_α является полным подкомплексом нерва X_α.

Лемма 3.6. *Пусть X — произвольное нормальное пространство и A', X' — такие его замкнутые множества, что $A' \subset X'$. Тогда конечные открытые покрытия пространства X, регулярные относительно обоих подпространств A' и X', образуют конфинальное подмножество множества* $\mathrm{Cov}^f X$.

Доказательство. Пусть $\alpha \in \mathrm{Cov}^f(X)$. Согласно лемме 3.3 существует покрытие β подпространства A', состоящее из замкнутых в A' множеств, вписанное (как семейство подмножеств пространства X) в покрытие α. Согласно лемме 3.4 существует такое расширение γ покрытия β, состоящее из открытых подмножеств пространства X', что $\alpha < \overline{\gamma}$ и $X_{\overline{\gamma}} = X_\gamma = X_\beta$. Пусть U — объединение множеств покрытия γ. Тогда множество $B = X' \setminus U$ замкнуто. Согласно лемме 3.3 существует замкнутое покрытие δ множества B, вписанное в покрытие α. Рассмотрим составное замкнутое покрытие $\varepsilon = \{\overline{\gamma}, \delta\}$ пространства X'. Очевидно, что $\alpha < \varepsilon$. Согласно лемме 3.4 существует такое расширение η покрытия ε, состоящее из открытых множеств пространства X, что $\alpha < \eta$ и $X_\eta = X_\varepsilon$. Можно, кроме того, предполагать, что $\overline{\eta}_v \cap A' = \varnothing$ для каждого множества η_v, являющегося расширением некоторого множества покрытия δ. Действительно, если это предположение не выполнено, то достаточно заменить множества η_v множествами $\eta_v \cap W$, где W — такое открытое множество, что $W \supset B$ и $\overline{W} \cap A' = \varnothing$. Свойства $\alpha < \eta$ и $X_\eta = X_\varepsilon$ после этой замены не нарушаются. Очевидно, что покрытие η удовлетворяет относительно подпространства A' условию (1) определения регулярного покрытия.

Пусть теперь s — произвольный симплекс нерва X_η, вершины которого принадлежат нерву A'_η. Тогда $\eta_v \cap A' = \varnothing$ для каждой вершины v симплекса s. Следовательно, множество η_v является расширением некоторого множества покрытия $\overline{\gamma}$. Так как $X_\eta = X_\varepsilon$, то симплекс s принадлежит нерву $X_{\overline{\gamma}}$. Так как $X_{\overline{\gamma}} = X_\beta$, то симплекс s принадлежит нерву X_β. Поэтому $\mathrm{Car}_\beta(s) \neq \varnothing$. Но $\mathrm{Car}_\beta(s) \subset A' \cap \mathrm{Car}_\eta(s)$. Следовательно, носитель $\mathrm{Car}_\eta(s)$ пересекается с подпространством A'. Поэтому симплекс s принадлежит нерву A'_η.

Пусть, наконец, s — произвольный симплекс нерва X_η, вершины которого принадлежат нерву X'_η. Так как $X_\eta = X_\varepsilon$, то симплекс s принадлежит нерву X_ε. Поэтому $\mathrm{Car}_\varepsilon(s) \neq \varnothing$. Но $\mathrm{Car}_\varepsilon(s) \subset X' \cap \mathrm{Car}_\eta(s)$. Следовательно, носитель $\mathrm{Car}_\eta(s)$ пересекается с подпространством X'. Поэтому симплекс s принадлежит нерву X'_η.

Таким образом, покрытие η регулярно относительно подпространства A' и удовлетворяет относительно подпространства X' условию (2) определения регулярного покрытия. Пусть U' —

объединение (открытых) множеств покрытия η и пусть W' — такое открытое множество, что $W' \supset X \setminus U'$ и $\overline{W'} \cap X' = \varnothing$. Наконец, пусть α' — покрытие множества W', высекаемое покрытием α. Присоединив покрытие α' к покрытию η, мы получим, очевидно, составное покрытие, вписанное в покрытие α и регулярное относительно подпространств A' и X'.

Лемма 3.7. *Пусть $\{X_m, \pi^{m_1}_{m_2}\}$ — обратный спектр компактных пространств и пусть $X = \lim\{X_m, \pi^{m_1}_{m_2}\}$. Оказывается, что совокупность всех покрытий вида $\pi_m^{-1}(\beta)$, где $m \in M$ и $\beta \in \mathrm{Cov}^f(X_m)$, является конфинальным подмножеством направленного множества* $\mathrm{Cov}^f(X)$.

Доказательство. Пусть $\alpha \in \mathrm{Cov}^f(X)$. Так как множества вида $\pi_m^{-1}(U)$, где U — произвольное открытое множество пространства X_m, образуют базу открытых множеств пространства X (лемма VIII.3.12), то вследствие компактности пространства X (теорема VIII.3.6) существует состоящее из множеств $\pi_{m_i}^{-1}(U_i)$ $(i = 1, \ldots, k)$ покрытие α', вписанное в покрытие α. Так как множество M направлено, то существует такой элемент m, что $m > m_i$ для любого $i = 1, \ldots, k$. Определим покрытие β пространства X_m, положив $\beta_i = (\pi^m_{m_i})^{-1}(U_i)$, если $i = 1, \ldots, k$ и $\beta_{k+1} = X_m \setminus \pi_m(X)$. Тогда $\pi_m^{-1}(\beta_i) = \pi_{m_i}^{-1}(U_i)$, если $i = 1, \ldots, k$ и $\pi_m^{-1}(\beta_{k+1}) = \varnothing$. Следовательно, $\pi_m^{-1}(\beta) > \alpha$.

Лемма 3.8. *Пусть $\{(X_m, A_m), \pi^{m_1}_{m_2}\}$ — обратный спектр компактных пар и пусть $(X, A) = \lim\{(X_m, A_m), \pi^{m_1}_{m_2}\}$. Оказывается, что совокупность всех покрытий вида $\alpha = \pi_m^{-1}(\beta)$, где $m \in M$, $\beta \in \mathrm{Cov}^f(X_m)$, для которых $(X_\alpha, A_\alpha) = (X_{m\beta}, A_{m\beta})$, является конфинальным подмножеством направленного множества* $\mathrm{Cov}^f(X)$.

Доказательство. Пусть $\gamma \in \mathrm{Cov}^\gamma(X)$. Согласно лемме 3.7 существует такой индекс m_0 и такое покрытие $\delta \in \mathrm{Cov}(X_{m_0})$, что $\pi_{m_0}^{-1}(\delta) > \gamma$. Пусть $X' = \pi_{m_0}(X)$ и $A' = \pi_{m_0}(A)$. Согласно лемме 3.6 существует такое регулярное относительно множеств X' и A' покрытие $\varepsilon \in \mathrm{Cov}(X_{m_0})$, что $\delta <^* \varepsilon$. Пусть U (соответственно W) — объединение множеств покрытия $\bar{\varepsilon}$, не пересекающихся с множеством X' (соответственно с множеством A'), и пусть U', W' — их дополнения в пространстве X_{m_0}. Тогда множества U', W' открыты и $X' \subset U'$, $A' \subset W'$. Кроме того, если некоторое множество покрытия ε пересекается с множеством U' (соответственно с множеством W'), то оно также пересекается с множеством X' (соответственно с множеством A'). Согласно теореме VIII.3.7 существует такой индекс $m > m_0$, что $\pi^m_{m_0}(X_m) \subset U'$ и $\pi^m_{m_0}(A_m) \subset W'$. Положим $\beta = (\pi^m_{m_0})^{-1}(\varepsilon)$. Тогда

$$\alpha = \pi_m^{-1}(\beta) = \pi_{m_0}^{-1}(\varepsilon) > \pi_{m_0}^{-1}(\delta) > \gamma.$$

Так как $\alpha = \pi_m^{-1}(\beta)$, то согласно лемме IX.2.5 $(X_\alpha, A_\alpha) \subset (X_{m\beta}, A_{m\beta})$. Пусть s — произвольный симплекс нерва $X_{m\beta}$. Тогда $\mathrm{Car}_\beta(s) \neq \varnothing$. Так как $\mathrm{Car}_\varepsilon(s) \supset \pi^m_{m_0}(\mathrm{Car}_\beta(s)) \subset U'$, то носитель $\mathrm{Car}_\varepsilon(s)$

пересекается с множеством U'. Поэтому для любой вершины v симплекса s множество ε_v пересекается с пространством X'. Так как покрытие ε регулярно относительно пространства X', то, следовательно, носитель $\mathrm{Car}_\varepsilon(s)$ пересекается с пространством X'. Но $\mathrm{Car}_\alpha(s) = \pi_{m_0}^{-1}(\mathrm{Car}_\varepsilon(s))$. Таким образом, $\mathrm{Car}_\alpha(s) \neq \varnothing$, т. е. симплекс s принадлежит нерву X_α. Тем самым доказано, что $X_\alpha = X_{m\beta}$. Заменяя в этом рассуждении множества X, X_m, X_{m_0}, U' на множества A, A_m, A_{m_0}, W', аналогично покажем, что $A_\alpha = A_{m\beta}$.

Доказательство теоремы 3.1. Доказательство будет дано только для случая гомологий; доказательство теоремы для случая когомологий предоставляется читателю.

Пусть $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{A}) = \{(X_m, A_m), \pi_{m_2}^{m_1}\}$ — произвольный обратный спектр компактных пар и пусть $(X, A) = \lim(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{A})$. Мы должны доказать, что указанный в теореме 2.1 гомоморфизм $l(q, \boldsymbol{X}, \boldsymbol{A})$ является, во-первых, мономорфизмом, а во-вторых, эпиморфизмом.

Предположим, что элемент $u \in H_q(X, A)$ принадлежит ядру гомоморфизма l. Так как элемент $\pi_{m*}(u)$ является координатой элемента $l(u)$ в группе $H_q(X_m, A_m)$, то $\pi_{m*}(u) = 0$ для любого индекса $m \in M$. Следовательно, для любого покрытия $\beta \in \mathrm{Cov}(X_m)$ координата элемента $\pi_{m*}(u)$ в группе $H_q(X_{m\beta}, A_{m\beta})$ равна нулю. Если $\alpha = \pi_m^{-1}(\beta)$ и $(X_\alpha, A_\alpha) = (X_{m\beta}, A_{m\beta})$, то из определения отображения π_{m*} (определение IX.4.2) следует, что координата элемента u в группе $H_q(X_\alpha, A_\alpha)$ равна нулю. Так как согласно лемме 3.8 такие покрытия α образуют конфинальное подмножество множества $\mathrm{Cov}^f(X)$, то, следовательно, $u = 0$.

Пусть теперь $v \in \lim H_q(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{A})$ и пусть v_m — координата элемента v в группе $H_q(X_m, A_m)$. Для любого покрытия $\beta \in \mathrm{Cov}^f(X_m)$ обозначим через $v_{m\beta}$ координату элемента v_m в группе $H_q(X_{m\beta}, A_{m\beta})$. Мы должны найти такой элемент $u \in H_q(X, A)$, что $l(u) = v$. Для этого достаточно построить координаты u_α элемента u для покрытий α, принадлежащих некоторому конфинальному подмножеству D множества $\mathrm{Cov}^f(X)$. Примем за D конфинальное подмножество, описанное в лемме 3.8. Выбрав для любого покрытия $\alpha \in D$ такой индекс $m \in M$ и такое покрытие $\beta \in \mathrm{Cov}^f(X_m)$, что $\alpha = \pi_m^{-1}(\beta)$ и $(X_\alpha, A_\alpha) = (X_{m\beta}, A_{m\beta})$, положим $u_\alpha = v_{m\beta}$.

Пусть $\alpha_1 < \alpha_2$ в D и пусть для покрытий α_1, α_2 выбраны m_1, β_1 и m_2, β_2, как указано выше. Найдем элемент $m_3 > m_i$ и положим $\beta_i' = (\pi_{m_i}^{m_3})^{-1}(\beta_i)$ $(i = 1, 2)$. Согласно лемме 3.6 существует покрытие $\varepsilon \in \mathrm{Cov}^f(X_{m_3})$, вписанное в покрытия β_1' и β_2' и регулярное относительно множеств $\pi_{m_3}(X)$ и $\pi_{m_3}(A)$. Как и в доказательстве леммы 3.8, отсюда следует, что существует такой индекс $m_4 > m_3$, что $(X_\alpha, A_\alpha) = (X_{m_4\beta}, A_{m_4\beta})$, где $\beta = (\pi_{m_3}^{m_4})^{-1}(\varepsilon)$ и $\alpha = \pi_{m_4}^{-1}(\beta)$. Пусть $\gamma_i = (\pi_{m_i}^{m_4})^{-1}(\beta_i)$, где $i = 1, 2$. Тогда $(X_{\alpha_i}, A_{\alpha_i}) = (X_{m_4\gamma_i}, A_{m_4\gamma_i}) = (X_{m_i\beta_i}, A_{m_i\beta_i})$ для $i = 1, 2$, так как каждая пара содержится в следующей и первая пара совпадает с третьей. Следовательно,

$u_{\alpha_i} = v_{m_4\gamma_i}$. Так как $\varepsilon > \beta'_1, \beta'_2$, то $\beta > \gamma_1, \gamma_2$ и $\alpha > \alpha_1, \alpha_2$. Пусть $u'_\alpha = v_{m_4\beta}$. Из коммутативности диаграммы

$$\begin{array}{ccc} H_q(X_\alpha, A_\alpha) & = & H_q(X_{m_4\beta}, A_{m_4\beta}), \\ \downarrow & & \downarrow \\ H_q(X_{\alpha_i}, A_{\alpha_i}) & = & H_q(X_{m_4\gamma_i}, A_{m_4\gamma_i}) \end{array}$$

следует, что элемент u'_α проектируется в элемент u_{α_i} $(i = 1, 2)$. Поэтому элемент u_{α_2} проектируется в элемент u_{α_1}. Это доказывает, что элементы u_α, где $\alpha \in D$, являются координатами некоторого элемента $u \in H_q(X, A)$. Это показывает также, что элемент u_α не зависит от выбора индекса m и покрытия β.

Остается показать, что $l(u) = v$, т. е. что $\pi_{m*}(u) = v_m$ для всех $m \in M$. Для этого достаточно доказать, что $(\pi_{m*}(u))_\varepsilon = v_{m\varepsilon}$ для любого покрытия ε, принадлежащего некоторому конфинальному подмножеству множества $\mathrm{Cov}(X_m)$. Пусть ε — покрытие, регулярное относительно множеств $\pi_m(X)$ и $\pi_m(A)$. Согласно лемме 3.6 такие покрытия образуют конфинальное подмножество множества $\mathrm{Cov}(X_m)$. По тем же соображениям, что и в доказательстве леммы 3.8, существует такой индекс $m_1 > m$, что $(X_\alpha, A_\alpha) = (X_{m_1\beta}, A_{m_1\beta})$, где $\beta = (\pi_m^{m_1})^{-1}(\varepsilon)$ и $\alpha = \pi_{m_1}^{-1}(\beta)$. Так как элемент u_α не зависит от выбора индекса m и покрытия β, используемых в его определении, то $u_\alpha = v_{m\beta}$. Поэтому элементы u_α и $v_{m_1\beta}$ при отображении вложения $(X_{m_1\beta}, A_{m_1\beta}) \to (X_{m\varepsilon}, A_{m\varepsilon})$ переходят в один и тот же элемент группы $H_q(X_{m\varepsilon}, A_{m\varepsilon})$. Остается заметить, что образами этих элементов являются элементы $(\pi_{m*}(u))_\varepsilon$ и $v_{m\varepsilon}$ соответственно.

4. Непрерывность против точности

В этом пункте показывается, что «теория спектральных гомологий» с целочисленными коэффициентами не удовлетворяет аксиоме точности на категории компактных пар. Доказательство этого факта основывается на свойстве непрерывности. Этот факт и доказываемая ниже теорема 12.2 показывают, что (по существу единственная) теория гомологий с целочисленными коэффициентами, имеющаяся на категории триангулируемых пар, не допускает расширения на категорию компактных пар, которое было бы одновременно непрерывной и точной теорией гомологий.

Пример 4.1. Пусть двумерная клетка (E, S) и ее граница определены на комплексной плоскости соотношениями $|z| \leqslant 1$ и $|z| = 1$ соответственно. Рассмотрим отображения

$$\varphi: \ S \to S, \quad f: \ E \to E,$$

определенные формулами

$$\varphi(z) = -z, \quad f(z) = z^3.$$

Каждую точку $z \in S$ отождествим с точкой $\varphi(z)$. Тогда пара (E, S) превратится в пару (P, C), где P — проективная плоскость и C — проективная прямая плоскости P. Так как $f\varphi(z) = (-z)^3 = -z^3 = \varphi f(z)$, то отображение f индуцирует некоторое отображение $\tilde{f}$: $(P, C) \to (P, C)$. В главе XIV (пример 9.7) будут вычислены приведенная гомологическая последовательность с целочисленными коэффициентами пары (P, C) и эндоморфизм этой гомологической последовательности, индуцированный отображением $\tilde{f}$. Оказывается, что единственными нетривиальными группами этой последовательности являются группы $H_1(P)$, $H_1(C)$ и $H_2(P, C)$, причем диаграмма

$$\begin{array}{ccccc}
H_2(P, C) & \xrightarrow{\partial} & H_1(C) & \xrightarrow{i_*} & H_1(P) \\
\downarrow{\scriptstyle \tilde{f}_*} & & \downarrow{\scriptstyle \tilde{f}_*} & & \downarrow{\scriptstyle \tilde{f}_*} \\
H_2(P, C) & \xrightarrow{\partial} & H_1(C) & \xrightarrow{i_*} & H_1(P)
\end{array}$$

изоморфна диаграмме, рассмотренной в примере VIII.5.5.

Пусть M — множество положительных целых чисел, обычным образом упорядоченное. Для каждого элемента $\alpha \in M$ положим $(P_\alpha, C_\alpha) = (P, C)$ и $\pi^\alpha_{\alpha+1} = \tilde{f}$. По транзитивности определим все остальные отображения π^β_α: $\pi^\beta_\alpha = \pi^\beta_{\alpha-1}\pi^{\alpha-1}_\alpha$ для $\beta < \alpha$. В результате мы получим обратный спектр $\{(P_\alpha, C_\alpha), \pi^\beta_\alpha\}$ пространств над множеством M. Пусть (P_∞, C_∞) — предел этого спектра. Согласно теореме VIII.3.6 пара (P_∞, C_∞) компактна. В теории спектральных гомологий (или в любой другой непрерывной теории гомологий) с целочисленными коэффициентами (приведенная) гомологическая последовательность пары (P_∞, C_∞) изоморфна пределу обратного спектра, состоящего из гомологических последовательностей пары (P, C) и отображений $(\pi^\beta_\alpha)_{**}$. Этот обратный спектр совпадает с обратным спектром, рассмотренным в примере VIII.5.5. Следовательно, в приведенной гомологической последовательности пары (P_∞, C_∞) группа $H_1(P_\infty)$ является циклической группой второго порядка, в то время как все остальные группы тривиальны. Поэтому приведенная гомологическая последовательность пары (P_∞, C_∞) не является точной последовательностью. Неприведенная гомологическая последовательность отличается от приведенной только в группах $H_0(P_\infty)$ и $H_0(C_\infty)$ (которые являются бесконечными циклическими группами) и также не является точной последовательностью.

Пара (P_∞, C_∞) иначе может быть описана следующим образом. Рассмотрим пару $(\tilde{E}, \tilde{S})$, где $\tilde{S}$ — триадический соленоид и $\tilde{E}$ — соединение соленоида $\tilde{S}$ и некоторой точки. Центральная симметрия, переводящая сферу S^1 в себя, определяет в пределе «центральную симметрию» соленоида $\tilde{S}$. Отождествив соответствующие в силу этой симметрии точки соленоида $\tilde{S}$, мы получим пару, гомеоморфную паре (P_∞, C_∞).

5. Вырезания и относительные гомеоморфизмы

Определение 5.1. Отображение $f\colon (X, A) \to (Y, B)$, гомеоморфно отображающее дополнение $X \setminus A$ на дополнение $Y \setminus B$, называется *относительным гомеоморфизмом.*

Лемма 5.2. *Любое отображение $f\colon (X, A) \to (Y, B)$ компактных пар, взаимно однозначно отображающее дополнение $X \setminus A$ на дополнение $Y \setminus B$, является относительным гомеоморфизмом.*

Доказательство. Нужно проверить непрерывность отображения $g\colon Y \setminus B \to X \setminus A$, определенного формулой $g(y) = f^{-1}(y)$. Пусть U — произвольное открытое подмножество дополнения $X \setminus A$. Тогда

$$g^{-1}(U) = f(U) = Y \setminus B \setminus f(X \setminus U).$$

Так как пространство $X \setminus U$ компактно, то множество $f(X \setminus U)$ замкнуто, а поэтому множество $g^{-1}(U)$ открыто. Таким образом, отображение g непрерывно.

Определение 5.3. Теория гомологий (когомологий) H (не обязательно точных) называется *относительно инвариантной,* если для каждого относительного гомеоморфизма $f\colon (X, A) \to (Y, B)$ гомоморфизмы f_* (соответственно гомоморфизмы f^*) являются во всех размерностях изоморфизмами.

Теорема 5.4. *Теории спектральных гомологий и когомологий на категории $\mathfrak{A}_c$ компактных пар относительно инвариантны.*

Доказательство. Пусть $f\colon (X, A) \to (Y, B)$ — относительный гомеоморфизм компактных пар и пусть $\{B_\alpha\}$ — система всех замкнутых множеств пространства Y, для которых $B \subset \operatorname{Int} B_\alpha$. Пересечение $B_\alpha \cap B_\beta$ любых двух множеств B_α и B_β этой системы также является множеством этой системы. Поэтому пары (Y, B_α) и отображения вложения $\varrho_\alpha^\beta\colon (Y, B_\beta) \subset (Y, B_\alpha)$ образуют спектр подпространств. Пересечением этого спектра является пара (Y, B). Пусть $A_\alpha = f^{-1}(B_\alpha)$. Тогда пары (X, A_α) и отображения вложения $\tau_\alpha^\beta\colon (X, A_\beta) \subset (X, A_\alpha)$ образуют спектр подпространств, пересечением которого является пара (X, A). Пусть $f\colon (X, A_\alpha) \to (Y, B_\alpha)$ — отображение, определенное отображением f. Покажем сперва, что отображение $f_{\alpha*}$ является изоморфизмом.

Пусть V — такое открытое множество пространства Y, что $B \subset V \subset \overline{V} \subset \operatorname{Int} B_\alpha$, и пусть $U = f^{-1}(V)$. Тогда $A \subset U \subset \overline{U} \subset \operatorname{Int} A_\alpha$. Рассмотрим диаграмму

$$\begin{tikzcd}
H_q(X \setminus U, A_\alpha \setminus U) \arrow[r, "i_*"] \arrow[d, "g_*"] & H_q(X, A_\alpha) \arrow[d, "f_{\alpha*}"] \\
H_q(Y \setminus V, B_\alpha \setminus V) \arrow[r, "i'_*"] & H_q(Y, B_\alpha),
\end{tikzcd}$$

где i и i' — отображения вложения, а g — отображение, определенное отображением f. Так как отображение f является относительным гомеоморфизмом, а $A \subset U$, $B \subset V$, то отображение g гомеоморфно и потому отображение g_* изоморфно. Согласно аксиоме вырезания отображения i_* и i'_* также являются изоморфизмами. Из коммутативности диаграммы следует поэтому, что гомоморфизм $f_{\alpha *}$ действительно является изоморфизмом.

Остается заметить, что из теоремы 2.6 и коммутативности диаграммы

$$\begin{array}{ccccc} H_q(X, A) & \longrightarrow & H_q(X, A_\beta) & \longrightarrow & H_q(X, A_\alpha) \\ \downarrow{\scriptstyle f_*} & & \downarrow{\scriptstyle f_{\beta *}} & & \downarrow{\scriptstyle f_{\alpha *}} \\ H_q(Y, B) & \longrightarrow & H_q(Y, B_\beta) & \longrightarrow & H_q(Y, B_\alpha), \end{array}$$

горизонтальные отображения которой индуцированы вложениями, вытекает, что отображение f_* является изоморфизмом.

В случае когомологий теорема доказывается аналогично.

Замечание. В изложенном доказательстве не используется специфика теории спектральных гомологий, так что оно остается справедливым для любой теории частично точных гомологий (когомологий), удовлетворяющей аксиоме непрерывности. Впрочем, эта общность иллюзорна, так как ниже будет показано (теорема 12.2), что любая такая теория изоморфна теории спектральных гомологий.

Теорему 5.4 можно, очевидно, рассматривать как обобщение аксиомы вырезания для компактных пар. Эта теорема превращается в аксиому вырезания, если определить вырезания как относительные гомеоморфизмы.

Вообще говоря, на категориях $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_C$ и $\mathfrak{A}_{LC}$ можно рассматривать следующие типы вырезаний:

(E) Отображения вложения f: $(X \setminus U, A \setminus U) \subset (X, A)$, где множество U открыто в пространстве X и $\overline{U} \subset \operatorname{Int} A$.

(E_1) Отображения вложения f: $(X \setminus U, A \setminus U) \subset (X, A)$, где множество U открыто в пространстве X и $U \subset A$.

(E_2) Отображения вложения f: $(X \setminus U, A \setminus U) \subset (X, A)$, где $\overline{U} \subset \operatorname{Int} A$.

(E_3) Относительные гомеоморфизмы.

Тип (E) состоит из вырезаний, введенных в главе I. Тип (E_2) на категориях $\mathfrak{A}_C$ и $\mathfrak{A}_{LC}$ совпадает с типом (E), так как в этих категориях отображение f допустимо только тогда, когда множество U открыто. Отображения типа (E_2) на категории $\mathfrak{A}_1$ являются вырезаниями в смысле теории сингулярных гомологий и когомологий (см. теорему VI.9.1). Теорема 5.4 утверждает, что отображения типа (E_3) являются вырезаниями для теории спектральных гомологий (когомологий) на категории $\mathfrak{A}_C$.

Следующий пример показывает, что отображения типа (E_1) не являются вырезаниями для теории сингулярных гомологий (даже в случае компактных метрических пространств).

Пример 5.5. Пусть R — область на (x, y)-плоскости, определенная неравенствами

$$\sin\frac{1}{x} < y < 2, \text{ при } 0 < |x| < \frac{2}{3\pi},$$

$$1 < y < 2, \text{ при } x = 0.$$

Пусть, далее, X — прямоугольник, определенный неравенствами

$$|x| \leqslant \frac{2}{3\pi}, \quad -1 \leqslant y \leqslant 2,$$

и C — граница прямоугольника X. Очевидно, что $R \subset X$. Положим $A = X \setminus R$. Легко видеть, что C является строгим деформационным ретрактом множества A. Следовательно, $H_q(C) \approx H_q(A)$ (изоморфизм индуцируется отображением вложения), и поэтому согласно теореме I.10.5 $H_q(X, C) \approx H_q(X, A)$. Так как пара (X, C) является двумерной клеткой, то $H_2(X, A) \approx G$.

Пусть $B = \bar{R} \cap A$ — граница области R. Покажем, что в теории сингулярных гомологий $H_2(\bar{R}, B) = 0$. Так как $(\bar{R}, B) = (X \setminus U, A \setminus U)$, где $U = A \setminus B = \operatorname{Int} A$, то тем самым будет показано, что для теории сингулярных гомологий отображения типа (E_1) не являются вырезаниями.

Так как множество $\bar{R}$ стягиваемо по себе в точку, то $H_1(\bar{R}) = H_2(\bar{R}) = 0$. Следовательно, ввиду аксиомы точности граничный изоморфизм является изоморфизмом $\partial : H_2(\bar{R}, B) \approx H_1(B)$. Таким образом, остается только показать, что $H_1(B) = 0$ (в теории сингулярных гомологий).

Пусть D — часть множества B на оси y, т. е. отрезок $-1 \leqslant y \leqslant 1$, и пусть $D' = B \setminus D$. Простые рассуждения, использующие соображения локальной связности, показывают, что любой сингулярный симплекс множества B лежит либо целиком в множестве D, либо целиком в множестве D'. Следовательно, полный сингулярный комплекс множества B распадается в два непересекающихся сингулярных комплекса: полный сингулярный комплекс множества D и полный сингулярный комплекс множества D'. Отсюда вытекает, что группа $H_1(B)$ разлагается в прямую сумму $H_1(D) + H_1(D')$. Так как множество D является замкнутым отрезком, то оно стягиваемо по себе в точку и, следовательно, $H_1(D) = 0$. Аналогично множество D', гомеоморфное открытому отрезку, также стягивается по себе в точку, и потому $H_1(D')=0$. Таким образом, $H_1(B)=0$.

Из изложенного исследования сингулярного комплекса множества B вытекает также, что $H_0(B) \approx G + G$, $\tilde{H}_0(B) \approx G$. Таким образом, в теории сингулярных гомологий

$$\tilde{H}_0(B) \approx G, \quad H_1(B) = 0.$$

Для вычисления групп спектральных гомологий множества B предположим, что группа коэффициентов G является полем, что обеспечивает выполнение аксиомы точности. Ввиду этой аксиомы $H_1(B) \approx \approx H_2(\ddot{R}, B)$, а ввиду теоремы 5.4 $H_2(R, B) \approx H_2(X, A)$. Следовательно, $H_1(B) = G$. Так как множество B связно, то нерв B_α любого его конечного открытого покрытия α также связен. Поэтому $\widetilde{H}(B_\alpha) = = 0$ и $\widetilde{H}_0(B) = 0$. Таким образом,

$$\widetilde{H}_0(B) = 0, \quad H_1(B) \approx G.$$

Тем самым доказано, что группы сингулярных гомологий отличаются от групп спектральных гомологий. Одновременно показано, что теория сингулярных гомологий на категории $\mathfrak{A}_C$ не удовлетворяет аксиоме непрерывности.

В изложенном рассуждении мы предполагали, что G является полем, лишь для того, чтобы можно было применить аксиому точности для вычисления группы спектральных гомологий $H_1(B)$. Прямыми рассуждениями, использующими аксиому непрерывности, можно доказать, что $H_1(B) \approx G$ для любой группы коэффициентов.

6. Теории гомологий локально компактных пространств

Напомним, что в пункте I.2 категория $\mathfrak{A}_{LC}$ была определена как категория пар (X, A), состоящих из локально компактного (хаусдорфова) пространства X и его замкнутого подмножества A; отображениями этой категории являются непрерывные отображения, для которых прообраз любого компактного множества компактен.

Определение 6.1. Подмножество A локально компактного пространства X называется *ограниченным*, если его замыкание $\bar{A}$ компактно. Подмножество U пространства X называется *контракомпактным*, если его дополнение $X \setminus U$ компактно.

Определение 6.2. Пусть X — произвольное локально компактное пространство и ω — некоторая точка, не принадлежащая пространству X. Определим топологическое пространство $X + \omega$ как пространство, состоящее из точек множества $X \cup \omega$, в котором открытыми множествами считаются:

(1) открытые множества пространства X и

(2) контракомпактные множества пространства X с присоединенной точкой ω. Очевидно, что пространство $X + \omega$ компактно (и хаусдорфово).

Лемма 6.3. *Пусть пара (X, A), пространство Y и отображение $f\colon X \setminus A \to Y$ принадлежат категории $\mathfrak{A}_{LC}$ и пусть ω — произвольная точка, не принадлежащая пространству Y. Положим $g(x) = f(x)$, если $x \in X \setminus A$, и $g(x) = \omega$, если $x \in A$. Тогда отображение $g\colon X \to Y + \omega$ является непрерывным продолжением отобра-*

жения f. Если отображение f гомеоморфно, то отображение g является относительным гомеоморфизмом. Если отображение f гомеоморфно, пространство X компактно и множество A состоит из одной только точки, то отображение g является гомеоморфизмом.

Доказательство. Для того чтобы доказать непрерывность отображения g, заметим, что $g^{-1}(U) = f^{-1}(U)$ для любого множества $U \subset Y$ и что

$$g^{-1}(U) = f^{-1}(W) \cup A = X \setminus f^{-1}(Y \setminus W)$$

для любого множества U вида $W \cup \omega$. Следовательно, если множество W контракомпактно, то множество $f^{-1}(Y \setminus W)$ компактно и множество $g^{-1}(U)$ открыто.

Второе утверждение леммы очевидно. Для доказательства последнего утверждения заметим, что в случае, когда отображение f гомеоморфно и множество A состоит из одной точки, отображение g взаимно однозначно. Следовательно, если пространство X компактно, то отображение g гомеоморфно.

Целесообразно в качестве точки ω выбирать некоторую фиксированную точку, не принадлежащую ни одному из пространств категории $\mathfrak{A}_{LC}$. Это равнозначно замене категории $\mathfrak{A}_{LC}$ некоторой ее подкатегорией. После выбора точки ω можно «компактифицировать» все пространства категории $\mathfrak{A}_{LC}$, присоединяя к ним точку ω. Пространство $X + \omega$ мы будем сокращенно обозначать через $\dot{X}$. Для любой пары (X, A) категории $\mathfrak{A}_{LC}$ пара $(\dot{X}, \dot{A})$ также принадлежит категории $\mathfrak{A}_C$. Для любого отображения $f\colon (X, A) \to (Y, B)$ категории $\mathfrak{A}_{LC}$ отображение $\dot{f}\colon (\dot{X}, \dot{A}) \to (\dot{Y}, \dot{B})$, для которого $\dot{f}(x) = f(x)$, если $x \in X$ и $\dot{f}(\omega) = \omega$, принадлежит согласно лемме 6.3 категории $\mathfrak{A}_C$. Очевидно, что операция $\cdot$ является ковариантным функтором, определенным на категории $\mathfrak{A}_{LC}$, значения которого принадлежат категории $\mathfrak{A}_C$. Мы будем называть этот функтор «компактификацией с помощью одной точки». Заметим, что $\dot{\varnothing} = \omega$, так что множество $\dot{A}$ пары $(\dot{X}, \dot{A})$ никогда не пусто.

Для того чтобы показать, что операция $\cdot$ является h-функтором, следующим образом превратим категории $\mathfrak{A}_C$ и $\mathfrak{A}_{LC}$ в h-категории $\mathfrak{A}'_C$ и $\mathfrak{A}'_{LC}$. *Отмеченными парами* (i, j) назовем пары отображений вложения

$$(A, B) \xrightarrow{i} (X, B) \xrightarrow{j} (X, A),$$

где (X, A, B) — произвольная тройка, т. е. X — произвольное пространство категории $\mathfrak{A}_C$ (или категории $\mathfrak{A}_{LC}$), а B и A — такие замкнутые подмножества пространства X, что $B \subset A$. *Вырезаниями* будем считать относительные гомеоморфизмы. Отображения $f_0, f_1\colon (X, A) \to (Y, B)$ назовем *гомотопными*, если существует такое отображение $F\colon (X \times I, A \times I) \to (Y, B)$ категории $\mathfrak{A}_C$ (соответственно категории $\mathfrak{A}_{LC}$), что $F(x, 0) = f_0(x)$ и $F(x, 1) = f_1(x)$.

Точками будем считать пары (X, A), для которых дополнение $X \setminus A$ состоит из одной точки.

Теорема 6.4. *Любая относительно инвариантная теория гомологий (когомологий) H на категории $\mathfrak{A}_C$ или на категории $\mathfrak{A}_{LC}$ является относительно граничного (соответственно кограничного) оператора троек теорией гомологий (когомологий) на категории $\mathfrak{A}'_C$ или на категории $\mathfrak{A}'_{LC}$ соответственно. Аналогичное утверждение имеет место и для теорий частично точных гомологий и когомологий.*

Доказательство. Справедливость аксиом 1, 2, 3 очевидна. Аксиома точности совпадает с утверждением о точности гомологической (когомологической) последовательности тройки. Если рассматриваемая теория является теорией частично точных гомологий (когомологий), т. е. если гомологическая (когомологическая) последовательность любой пары полуточна, то тем же свойством обладает и гомологическая (когомологическая) последовательность любой тройки (см. пункт IX. 10). Аксиома гомотопии имеет место потому, что гомотопии категории $\mathfrak{A}_C$ (или $\mathfrak{A}_{LC}$) совпадают с гомотопиями категории $\mathfrak{A}'_C$ (соответственно категории $\mathfrak{A}'_{LC}$). Аксиома вырезания имеет место потому, что рассматриваемая теория по условию относительно инвариантна. Наконец, если пара (X, A) является «точкой», то множество $X \setminus A$ состоит только из одной точки и отображение вложения $i\colon X \setminus A \subset (X, A)$ является относительным гомеоморфизмом. Следовательно, отображение i_* (соответственно отображение i^*) является изоморфизмом, откуда аксиома размерности вытекает непосредственно.

Теорема 6.5. *Компактификация с помощью одной точки является ковариантным h-функтором: $\mathfrak{A}'_{LC} \to \mathfrak{A}'_C$.*

Доказательство. Очевидно, что функтор $\dot{}$ переводит отмеченные пары в отмеченные и, следовательно, является c-функтором. Пусть для отображений $f_0, f_1\colon (X, A) \to (Y, B)$ категории $\mathfrak{A}'_{LC}$ существует такое отображение $F\colon (X \times I, A \times I) \to (Y, B)$ категории $\mathfrak{A}'_{LC}$, что $F(x, 0) = f_0(x)$ и $F(x, 1) = f_1(x)$. Продолжим отображение F до отображения $\tilde{F}\colon (\dot{X} \times I, \dot{A} \times I) \to (\dot{Y}, \dot{B})$, полагая $\tilde{F}(\omega, t) = \omega$. Согласно лемме 6.3 отображение $\tilde{F}$ непрерывно и $\tilde{F}(x, 0) = \dot{f}_0(x)$, $\tilde{F}(x, 1) = \dot{f}_1(x)$. Таким образом, отображения $\dot{f}_0$ и $\dot{f}_1$ гомотопны. Если отображение $f\colon (X, A) \to (Y, B)$ является относительным гомеоморфизмом, то, поскольку $\dot{X} \setminus \dot{A} = X \setminus A$ и $\dot{Y} \setminus \dot{B} = Y \setminus B$, отображение $\dot{f}$ также будет относительным гомеоморфизмом. Если пара (X, A) является «точкой» категории $\mathfrak{A}'_{LC}$, то дополнение $\dot{X} \setminus \dot{A} = X \setminus A$ состоит из одной точки и, следовательно, пара $(\dot{X}, \dot{A})$ является «точкой» категории $\mathfrak{A}'_C$.

Определение 6.6. Пусть H — относительно инвариантная теория частично точных гомологий (когомологий) на категории $\mathfrak{A}_C$. Рассматривая теорию H как теорию гомологий (когомологий) на категории $\mathfrak{A}'_C$, обозначим через $\dot{H}$ композицию теории H и h-функтора $\cdot$: $\mathfrak{A}'_{LC} \to \mathfrak{A}'_C$. Эта композиция является теорией частично точных гомологий (когомологий) на категории $\mathfrak{A}'_{LC}$ или, что равнозначно, относительно инвариантной теорией гомологий (когомологий) на категории $\mathfrak{A}_{LC}$. Теорию $\dot{H}$ мы будем называть *LC-теорией, ассоциированной с теорией H*. Если теория H точна, то точна и теория $\dot{H}$.

Заметим, что, если пара (X, A) категории $\mathfrak{A}_{LC}$ компактна, то отображение вложения i: $(X, A) \subset (\dot{X}, \dot{A})$ допустимо и является относительным гомеоморфизмом. Следовательно,

$$\dot{H}_q(X, A) = H_q(\dot{X}, \dot{A}) \overset{i_*}{\approx} H_q(X, A).$$

Таким образом, $\dot{H} \approx H$ на категории $\mathfrak{A}_C$. Ввиду этого теорию $\dot{H}$ можно рассматривать как «расширение» теории H.

Предполагая теперь, что H является теорией спектральных гомологий (когомологий) на категории $\mathfrak{A}_C$, найдем прямое описание ассоциированной LC-теории $\dot{H}$ в терминах покрытий.

Определение 6.7. Пусть (X, A) — произвольная пара категории $\mathfrak{A}_{LC}$ и $\alpha \in \mathrm{Cov}^f(X)$ — конечное открытое покрытие пространства X. Обозначим через Ω_α — подкомплекс нерва X_α, состоящий из всех симплексов s, носители $\mathrm{Car}_\alpha(s)$ которых не являются ограниченными множествами (т. е. имеют некомпактные замыкания). Мы будем рассматривать группы гомологий (когомологий) пары $(X_\alpha, A_\alpha \cup \Omega_\alpha)$. Если покрытие β вписано в покрытие α, то соответствующая проекция π: $X_\beta \to X_\alpha$ отображает комплекс $A_\beta \cup \Omega_\alpha$ в комплекс $A_\alpha \cup \Omega_\alpha$.

Определение 6.8. Пусть $\mathrm{Cov}_1(X)$ — подмножество множества $\mathrm{Cov}^f(X)$, состоящее из покрытий α, элементы α_v которых являются либо ограниченными, либо контракомпактными множествами. Очевидно, что $\mathrm{Cov}_1(X)$ является направленным подмножеством множества $\mathrm{Cov}^f(X)$. Рассмотрим над направленным множеством $\mathrm{Cov}_1(X)$ спектр, состоящий из групп $H_q(X_\alpha, A_\alpha \cup \Omega_\alpha)$ (соответственно из групп $H^q(X_\alpha, A_\alpha \cup \Omega_\alpha)$), проекциями которого являются гомоморфизмы, индуцированные проекциями $X_\beta \to X_\alpha$. Предел этого спектра мы будем обозначать через $H_q^\blacktriangle(X, A)$ (соответственно через $H^q_\blacktriangle(X, A)$). При этом предполагается, что группы коэффициентов удовлетворяют тем же ограничениям, что и группы коэффициентов групп спектральных гомологий и когомологий компактных пар (см. определение IX.3.3 и последующие замечания).

Теорема 6.9. *Для любой локальной компактной пары* (X, A)

$$H_q(\dot{X}, \dot{A}) \approx H_q^\blacktriangle(X, A), \quad H^q(\dot{X}, \dot{A}) \approx H^q_\blacktriangle(X, A),$$

где $H_q(\dot{X}, \dot{A})$ *и* $H^q(\dot{X}, \dot{A})$ *— группы спектральных гомологий и когомологий.*

Доказательство. Рассмотрим подмножество $\mathrm{Cov}^r(\dot{X})$ множества $\mathrm{Cov}^f(\dot{X})$, состоящее из покрытий, регулярных относительно точки ω, т. е. покрытий α, для которых либо $\omega \in \alpha_v$, либо $\omega \notin \bar{\alpha}_v$ для каждого v (см. определение 3.5). Согласно лемме 3.6 множество $\mathrm{Cov}^r(\dot{X})$ является конфинальным подмножеством множества $\mathrm{Cov}^f(\dot{X})$. Следовательно, группы пары $(\dot{X}, \dot{A})$ можно рассматривать как пределы соответствующих спектров над множеством $\mathrm{Cov}^r(\dot{X})$. Определим теперь сохраняющее отношение вписанности отображение φ: $\mathrm{Cov}^r(\dot{X}) \to \mathrm{Cov}_1(X)$, положив

$$(\varphi\alpha)_v = \alpha_v \cap X = \alpha_v \setminus \omega.$$

Очевидно, что система $\Phi = \{\varphi, \varphi_{\alpha *}\}$, где

$$\varphi_\alpha\colon (X_{\varphi\alpha}, A_{\varphi\alpha} \cup \Omega_{\varphi\alpha}) \subset (\dot{X}_\alpha, \dot{A}_\alpha)$$

— отображения вложения, является отображением обратного спектра групп $H_q(X_\beta, A_\beta \cup \Omega_\beta)$ над множеством $\mathrm{Cov}_1(X)$ в обратный спектр групп $H_q(\dot{X}_\alpha, \dot{A}_\alpha)$ над множеством $\mathrm{Cov}^r(\dot{X})$. Пусть

$$\varphi_\infty\colon H_q^\blacktriangle(X, A) \to H_q(\dot{X}, \dot{A})$$

— соответствующее предельное отображение. Аналогично в случае теории когомологий система $\{\varphi, \varphi_\alpha^*\}$ является отображением прямых спектров с предельным отображением

$$\varphi^\infty\colon H^q(\dot{X}, \dot{A}) \to H^q_\blacktriangle(X, A).$$

Мы утверждаем, что отображения φ_∞ и φ^∞ являются изоморфизмами. Доказательство этого факта мы приведем раздельно для компактных и некомпактных пар (X, A)

Если пара (X, A) компактна, то $\mathrm{Cov}^f(\dot{X}) = \mathrm{Cov}^r(\dot{X})$. Кроме того, отображение вложения $i\colon (X, A) \subset (\dot{X}, \dot{A})$ является относительным гомеоморфизмом, и поэтому отображения i_* и i^* являются изоморфизмами. Сравнение соответствующих определений показывает, что $i_* = \varphi_\infty$ и $i^* = \varphi^\infty$, чем и заканчивается в этом случае доказательство.

Если пара (X, A) не компактна, то, как легко видеть, отображение φ отображает множество $\mathrm{Cov}^r(\dot{X})$ на множество $\mathrm{Cov}_1(X)$, а отображения φ_α являются тождественными отображениями. Следовательно, и в этом случае отображения $\varphi_{\alpha *}$ и φ_α^* являются изоморфизмами. Из теорем VIII.3.15 и VIII.4.13 следует теперь, что отображения φ_∞ и φ^∞ также являются изоморфизмами.

Замечание 1. Наше определение $^\blacktriangle$-групп не полно, так как мы не определили индуцированные гомоморфизмы и граничные (кограничные) операторы. Впрочем, определения этих понятий совершенно аналогичны соответствующим определениям для групп спектральных гомологий (когомологий). Определив эти понятия, мы получим некоторую теорию гомологий (когомологий). Тривиально проверяется, что построенный выше изоморфизм φ_∞ перестановочен с отображениями f_* и ∂, т. е. определяет изоморфизм теорий гомологий (когомологий).

Замечание 2. Пусть пространство X локально компактно, но не компактно, и пусть $\alpha \in \mathrm{Cov}_1(X)$. Так как пересечение любого конечного числа контракомпактных множеств неограниченно, то множество Ω_α является симплексом и поэтому гомологически тривиально. Тогда из точности приведенной гомологической последовательности следует, что $H_q(X_\alpha, \Omega_\alpha) \approx \tilde{H}_q(X_\alpha)$. Таким образом, при определении (абсолютных) групп $H_q^\spadesuit(X)$ локально компактных, но некомпактных пространств можно вместо групп $H_q(X_\alpha, \Omega_\alpha)$ использовать группы $\tilde{H}_q(X_\alpha)$. В случае компактного пространства X комплекс Ω_α пуст и $H_q(X_\alpha, \Omega_\alpha) = H_q(X_\alpha)$. Следовательно, в этом случае при определении групп $H_q^\spadesuit(X)$ вместо групп $\tilde{H}_q(X_\alpha)$ необходимо использовать группы $H_q(X_\alpha)$. Конечно, различие между этими двумя случаями существенно только в размерности 0. Аналогичные обстоятельства имеют место и в теории когомологий.

Замечание 3. На примере легко показать, что функтор $\cdot$ не сохраняет вырезания типа (E). Следовательно, сингулярная теория не годится для композиции с этим функтором.

7. Абсолютные LC-теории гомологий

Пусть H — относительно инвариантная теория гомологий на категории $\mathfrak{A}_C$. Так как для любой компактной пары (X, A) тождественное отображение α дополнения $X \setminus A$ можно продолжить до отображения

$$\dot{\alpha}\colon (X, A) \to ((X \setminus A)^{\cdot}, \omega),$$

являющегося относительным гомеоморфизмом, то

$$H_q(X, A) \overset{\dot{\alpha}_*}{\approx} H_q((X \setminus A)^{\cdot}, \omega) = \dot{H}_q(X \setminus A).$$

Это наводит на мысль, что исходную теорию гомологий можно построить, используя только неотносительные группы гомологий, определенные над подходящей категорией. Этот новый тип аксиоматического описания групп гомологий мы сейчас и рассмотрим.

Пусть $\mathfrak{B}_{LC}$ — подкатегория категории $\mathfrak{A}_{LC}$, состоящая из всех локально компактных пространств и таких их отображений $f\colon X \to Y$, что для каждого компактного подмножества C пространства Y множество $f^{-1}(C)$ компактно.

«Абсолютной» теорией гомологий на категории $\mathfrak{B}_{LC}$ мы будем называть систему $H = \{H_q(X), f_*, \tau, \partial\}$, где

$H_q(X)$ — абелевы группы, определенные для каждого пространства $X \in \mathfrak{B}_{LC}$ и каждого целого числа q,

$f_*\colon H_q(X) \to H_q(Y)$ — гомоморфизмы, определенные для каждого отображения $f\colon X \to Y$ категории $\mathfrak{B}_{LC}$;

$\tau\colon H_q(X) \to H_q(U)$ — гомоморфизмы, определенные для каждого открытого подмножества U локально компактного пространства X; эти гомоморфизмы мы будем иногда обозначать через $\tau_{(X,U)}$, явно указывая пространства X и U;

$\partial\colon H_q(U) \to H_{q-1}(X \setminus U)$ — гомоморфизмы, определенные для каждого открытого подмножества U локально компактного пространства X.

Система $H = \{H_q(X), f_*, \tau, \partial\}$ должна удовлетворять следующим аксиомам.

Аксиома 1. *Если $f\colon X \to X$ является тождественным отображением, то f_* также является тождественным отображением.*

Аксиома 1′. *Отображение $\tau_{(X,X)}$ является тождественным отображением.*

Аксиома 2. *Если $f\colon X \to Y$, $g\colon Y \to Z$, то $(gf)_* = g_* f_*$.*

Аксиома 2′. *Если $V \subset U \subset X$ и множества U и V открыты в пространстве X, то $\tau_{(U,V)}\,\tau_{(X,U)} = \tau_{(X,V)}$.*

Аксиома 3. *Если $V \subset U \subset X$ и множества V и U открыты в пространстве X, то диаграмма*

$$\begin{tikzcd} H_q(U) \arrow[r, "\tau"] \arrow[d, "\partial"] & H_q(V) \arrow[d, "\partial"] \\ H_{q-1}(X \setminus U) \arrow[r, "h^*"] & H_{q-1}(X \setminus V), \end{tikzcd}$$

в которой $h\colon X \setminus U \subset X \setminus V$, коммутативна.

Аксиома 3′. *Если $f\colon X \to Y$ и U, V — такие открытые подмножества пространств X и Y соответственно, что $f(U) \subset V$ и $f(X \setminus U) \subseteq (Y - V)$, то диаграмма*

$$\begin{tikzcd} H_q(X) \arrow[r, "f_*"] \arrow[d, "\tau"] & H_q(Y) \arrow[d, "\tau"] \\ H_q(U) \arrow[r, "f_{1*}"] & H_q(V), \end{tikzcd}$$

в которой $f_1\colon U \to V$ — отображение, определенное отображением f, коммутативна.

Аксиома 3″. *В тех же условиях, что и в аксиоме 3′, коммутативна диаграмма*

$$\begin{tikzcd} H_q(U) \arrow[r, "f_{1*}"] \arrow[d, "\partial"] & H_q(V) \arrow[d, "\partial"] \\ H_{q-1}(X \setminus U) \arrow[r, "f_{2*}"] & H_{q-1}(Y \setminus V), \end{tikzcd}$$

в которой f_2: $X \setminus U \to Y \setminus V$ — отображение, определенное отображением f.

Аксиома 4 (аксиома точности). *Для любого открытого подмножества U пространства X гомологическая последовательность*

$$\ldots \leftarrow H_{q-1}(X \setminus U) \xleftarrow{\partial} H_q(U) \xleftarrow{\tau} H_q(X) \xleftarrow{j_*} H_q(X \setminus U) \leftarrow \ldots,$$

где j: $X \setminus U \subset X$, является точной последовательностью. (Если эта последовательность лишь полуточна, а для триангулируемых пар $(X, X \setminus U)$ точна, то рассматриваемые гомологии называются частично точными.)

Аксиома 5 (аксиома гомотопии). *Если g_0, g_1: $X \to X \times I$ — отображения, определенные формулами $g_0(x) = (x, 0)$, $g_1(x) = (x, 1)$, то $g_{0*} = g_{1*}$.*

Аксиома 7 (аксиома размерности). *Если множество P состоит из одной точки, то $H_q(P) = 0$ для всех $q \neq 0$.*

Отметим полное отсутствие какого-нибудь аналога аксиомы вырезания.

Основные результаты относительно связи между обычными и «абсолютными» теориями гомологий содержатся в следующих четырех теоремах.

Теорема 7.1. *Пусть H — относительно инвариантная теория гомологий на категории $\mathfrak{A}_C$. Для каждого пространства $X \in \mathfrak{B}_{LC}$ положим $H_q^O(X) = H_q(\dot{X}, \omega)$. Любому отображению f: $X \to Y$ категории $\mathfrak{B}_{LC}$ отнесем гомоморфизм f_*^O: $H_q^O(X) \to H_q^O(Y)$, полагая $f_*^O = \dot{f}_*$, где $\dot{f}$: $(\dot{X}, \omega) \to (\dot{Y}, \omega)$ — продолжение отображения f. Пусть U — открытое подмножество локально компактного пространства X и пусть f: $(\dot{X}, \omega) \to (\dot{U}, \omega)$ — такое отображение, что $f(x) = x$, если $x \in U$, и $f(x) = \omega$, если $x \in \dot{X} \setminus U$. Определим отображение τ^O: $H_q^O(X) \to H_q^O(U)$, полагая $\tau^O = f_*$. Рассмотрим, далее, отображение g: $(\dot{X}, (X \setminus U)^{\cdot}) \to (\dot{U}, \omega)$, определенное отображением f. Отображение g является относительным гомеоморфизмом и, следовательно, отображение g_* — изоморфизмом. Положим $\partial^O = \partial g_*^{-1}$, где ∂: $H_q(\dot{X}, (X \setminus U)^{\cdot}) \to H_{q-1}((X \setminus U)^{\cdot}, \omega)$ — граничный оператор тройки $(\dot{X}, (X \setminus U)^{\cdot}, \omega)$. Оказывается, что система $H^O = \{H_q^O(X), f_*^O, \tau^O, \partial^O\}$ является «абсолютной» теорией гомологий на категории $\mathfrak{B}_{LC}$.*

Теорема 7.2. *Пусть H — «абсолютная» теория гомологий, определенная на категории $\mathfrak{B}_{LC}$. Для каждой пары (X, A) категории $\mathfrak{A}_C$ положим $H_q^+(X, A) = H_q(X \setminus A)$. Пусть f: $(X, A) \to (Y, B)$ (в категории $\mathfrak{A}_C$), $U = f^{-1}(Y \setminus B)$ и пусть f_1: $U \to Y \setminus B$ — отображение, определенное отображением f. Тогда отображение f_1 принадлежит категории $\mathfrak{B}_{LC}$, так что определен гомоморфизм*

f_{1*}. *Определим отображение* f_*^+: $H_q^+(X, A) \to H_q^+(Y, B)$ *как композицию отображений* τ *и* f_{1*}:

$$H_q(X \setminus A) \xrightarrow{\tau} H_q(U) \xrightarrow{f_{1*}} H_q(Y \setminus B).$$

Для любой пары (X, A) *категории* $\mathfrak{A}_C$ *определим отображение* ∂^+: $H_q^+(X, A) \to H_{q-1}^+(A)$ *как гомоморфизм* ∂: $H_q(X \setminus A) \to H_{q-1}(A)$. *Оказывается, что система* $H^+ = \{H_q^+(X, A), f_*^+, \partial^+\}$ *является относительно инвариантной теорией гомологий на категории* $\mathfrak{A}_C$.

Теорема 7.3. *Пусть* H — *относительно инвариантная теория гомологий на категории* $\mathfrak{A}_C$. *Тогда* H^{O+} *также является относительно инвариантной теорией и*

$$H_q^{O}+(X, A) = H_q^O(X \setminus A) = H_q((X \setminus A)^{\cdot}, \omega).$$

Пусть φ: $(X, A) \to ((X \setminus A)^{\cdot}, \omega)$ — *такое отображение, что* $\varphi(x) = x$, *если* $x \in X \setminus A$, *и* $\varphi(x) = \omega$, *если* $x \in A$. *Отображение* φ *является относительным гомеоморфизмом и соответствующий изоморфизм* φ: $H_q(X, A) \approx H_q^{O+}(X, A)$ *определяет изоморфизм* $H \approx H^{O+}$ *теорий гомологий.*

Теорема 7.4. *Пусть* H — *«абсолютная» теория гомологий, определенная на категории* $\mathfrak{B}_{LC}$. *Тогда теория* H^{+O} *совпадает с теорией* H.

Доказательство этих четырех теорем тривиальны, но ввиду большого числа утверждений, которые необходимо проверить, весьма длинно. Поэтому мы оставляем эти доказательства как упражнение для читателя. Соответствующие результаты имеют место и для теорий частично точных гомологий, а также, после соответствующего изменения формулировок, и для теорий когомологий. Для «абсолютной» теории гомологий H^O на категории $\mathfrak{B}_{LC}$, соответствующей теории спектральных гомологий H на категории $\mathfrak{A}_C$, можно дать непосредственное описание с помощью конечных открытых покрытий[1]).

8. Тихоновские вложение и компактификация

Определение 8.1. Пусть A — произвольное множество и I^A — пространство всех функций α: $A \to I$, где $I = [0, 1]$ — замкнутый единичный отрезок; топология этого пространства определяется так же, как в V.5.2. Пространство I^A называется *кубом с индексирующим множеством* A. Согласно теореме V.5.4 пространство I^A компактно. Для любого подмножества B множества A мы будем рассматривать куб I^B как подмножество куба I^A, отождествляя каждую функцию α: $B \to I$ с функцией α': $A \to I$, для которых $\alpha'(x) = 0$, если $x \in A \setminus B$, и $\alpha'(x) = \alpha(x)$, если $x \in B$. В соответ-

---

[1]) Именно $H_q^O(X) \approx H_q^{\spadesuit}(X)$ (см. теорему 6.9). (*Прим. ред.*)

ствии с этим соглашением мы будем называть куб I^B *подкубом* куба I^A. Отображение p_B: $I^A \to I^B$, относящее каждой функции α: $A \to I$ функцию $\alpha|B$: $B \to I$, будем называть *проекцией* куба I^A на куб I^B. Если множество A конечно, то куб I^A будем называть *конечным* кубом.

Определение 8.2. T_1-пространство X называется *вполне регулярным*, если для каждого замкнутого множества $A \subset X$ и каждой точки x_0, не принадлежащей множеству A, существует такая непрерывная функция f: $X \to I$, что $f(x_0) = 0$ и $f(x) = 1$ для любой точки $x \in A$.

Из леммы Урысона следует, что нормальные пространства вполне регулярны.

Лемма 8.3. *Любое подпространство вполне регулярного пространства вполне регулярно.*

Доказательство. Пусть $Y \subset X$, где X — вполне регулярное пространство, и пусть A — замкнутое подмножество пространства Y, а $y_0 \in Y \setminus A$. Тогда замыкание $\bar{A}$ множества A является замкнутым подмножеством пространства X и $y_0 \in X \setminus \bar{A}$. Поэтому существует такая функция f: $X \to I$, что $f(y_0)=0$ и $f(\bar{A}) = 1$. Функция $g = f|Y$: $Y \to I$ такова, что $g(y_0) = 0$ и $g(A) = 1$. Следовательно, пространство Y вполне регулярно.

Определение 8.4. Пусть X — произвольное топологическое пространство и ξ — множество всех функций f: $X \to I$. Определим *отображение Тихонова* T: $X \to I^\xi$, полагая

$$T(x)(f) = f(x)$$

для любой точки $x \in X$ и любой функции $f \in \xi$. Из леммы V.5.3 следует, что отображение T непрерывно.

Лемма 8.5. *Если пространство X вполне регулярно, то для любого замкнутого множества $A \subset X$ существует такой подкуб Q куба I^ξ, что $T(A) = Q \cap T(X)$.*

Доказательство. Пусть α — подмножество множества ξ, состоящее из всех функций, не равных тождественно нулю на множестве A. Для любой точки $x \in X$ условие $T(x) \in I^\alpha$ равносильно тому, что $f(x) = 0$ для всех функций f: $X \to I$, для которых $f(A) = 0$. Так как пространство X вполне регулярно, то последнее условие равносильно тому, что $x \in A$. Таким образом, $T(A) = I^\alpha \cap T(X)$.

Теорема 8.6. *Для любого топологического пространства следующие три условия равносильны:*

(1) пространство X вполне регулярно,

(2) отображение Тихонова T: $X \to I^\xi$ является гомеоморфизмом пространства X на пространство $T(X)$,

(3) пространство X гомеоморфно подмножеству некоторого компактного пространства.

Доказательство. Предположим, что пространство X вполне регулярно. Для любых двух различных точек x_0, x_1 пространства X существует такая функция $f\colon X \to I$, что $f(x_0) = 0$, $f(x_1) = 1$. Следовательно, $T(x_0)(f) \neq T(x_1)(f)$, так что $T(x_0) \neq T(x_1)$. Таким образом, отображение T взаимно однозначно. Пусть A — замкнутое подмножество пространства X. Из леммы 8.5 следует, что множество $T(A)$ является замкнутым подмножеством пространства $T(X)$. Поэтому отображение, обратное к T, непрерывно, и следовательно, отображение T является гомоморфизмом. Таким образом, $(1) \to (2)$. Так как куб I^ξ компактен, то $(2) \to (3)$. Наконец, поскольку любое компактное пространство вполне регулярно, то из леммы 8.3 следует, что $(3) \to (2)$.

Лемма 8.7. *Любую функцию $f\colon T(X) \to I$, где X — произвольное пространство, можно продолжить до функции $f'\colon I^\xi \to I$.*

Доказательство. Очевидно, что функция $g = fT\colon X \to I$ принадлежит множеству ξ. Определим функцию $f'\colon I^\xi \to I$, положив $f'(y) = y(g)$ для любой точки $y \in I^\xi$. По определению для любой точки $y \in T(X)$ существует такая точка $x \in X$, что $y = T(x)$. Следовательно,

$$f'(y) = y(g) = T(x)(g) = g(x) = fT(x) = f(y).$$

Таким образом, функция f' действительно является продолжением функции f.

Определение 8.8. Компактное пространство $X^\sim$ называется *компактификацией по Тихонову* пространства $X \subset X^\sim$, если X плотно в $X^\sim$ (т. е. $\bar{X} = X^\sim$) и любую функцию $f\colon X \to I$ можно продолжить до некоторой функции $f^\sim\colon X^\sim \to I$.

Лемма 8.9. *Пусть $X^\sim$ и $Y^\sim$ — компактификации по Тихонову пространств X и Y соответственно. Оказывается, что каждое отображение $f\colon X \to Y$ можно единственным образом продолжить до некоторого отображения $f^\sim\colon X^\sim \to Y^\sim$.*

Доказательство. Согласно теореме 8.6 без потери общности можно предполагать, что пространство $Y^\sim$ является подмножеством некоторого куба I^A. Тогда отображение f описывается с помощью координатных отображений $f_\alpha\colon X \to I$, где $\alpha \in A$. Каждое отображение f_α допускает продолжение $f_\alpha^\sim\colon X^\sim \to I$. Все отображения $f_\alpha^\sim$ вместе образуют продолжение $f^\sim\colon X^\sim \to I^A$ отображения f. Так как $\bar{X} = X^\sim$, то $f^\sim(X^\sim) = f^\sim(\bar{X}) = \overline{f(X)} \subset \bar{Y} = Y^\sim$. Следовательно, $f^\sim\colon X^\sim \to Y^\sim$. Единственность отображения $f^\sim$ непосредственно следует из того, что $\bar{X} = X^\sim$.

Теорема 8.10. *Каждое вполне регулярное пространство X допускает компактификацию по Тихонову $X^\sim$. Эта компактификация определена однозначно в следующем смысле: если $X^\sim$ и X^+ — две компактификации пространства X, то существует единственный гомеоморфизм $h\colon X^\sim = X^+$, являющийся на пространстве X тождественным отображением.*

Доказательство. Пусть $T\colon X \to I^{\xi}$ — отображение тихонова пространства X. Из леммы 8.7 следует, что $\overline{T(X)}$ является компактификацией по Тихонову пространства $T(X)$. Так как пространство X вполне регулярно, то пространства $T(X)$ и X гомеоморфны, так что пространство X также обладает компактификацией по Тихонову.

Пусть $X^{\sim}$ и X^{+} — две компактификации по Тихонову пространства X. Согласно лемме 8.9 тождественное отображение $i\colon X \to X$ допускает продолжения $h\colon X^{\sim} \to X^{+}$ и $g\colon X^{+} \to X^{\sim}$. Оба отображения $gh\colon X^{\sim} \to X^{\sim}$ и $hg\colon X^{+} \to X^{+}$ являются тождественными отображениями, так как они обладают этим свойством на пространстве X. Поэтому $g = h^{-1}$, т. е. отображение h гомеоморфно. Тем самым теорема полностью доказана.

В силу теоремы 8.10 компактификацию по Тихонову $X^{\sim}$ вполне регулярного пространства X можно рассматривать как вполне определенное пространство. Тогда из леммы 8.9 следует, что функции $X^{\sim}, f^{\sim}$ образуют ковариантный функтор $\sim$, определенный на категории вполне регулярных пространств и их непрерывных отображений, значения которого принадлежат категории компактных пространств и их непрерывных отображений.

Лемма 8.11. *Пусть X — нормальное пространство и $A \subset X$ — его замкнутое подмножество. Оказывается, что замыкание $\bar{A}$ множества A в пространстве $X^{\sim}$ является его компактификацией по Тихонову $A^{\sim}$.*

Доказательство. Пусть $f\colon A \to I$. Согласно теореме Титце о продолжении функцию f можно продолжить до некоторой функции $g\colon X \to I$. Функцию g в свою очередь можно продолжить до функции $g^{\sim}\colon X^{\sim} \to I$. Функция $g^{\sim}|\bar{A}$ является, очевидно, продолжением функции f. Таким образом, любую функцию $f\colon A \to I$ можно продолжить до некоторой функции $\bar{A} \to I$. Поэтому $\bar{A} = A^{\sim}$.

Пусть X — нормальное пространство и $A \subset X$. Мы будем через $\bar{A}$ обозначать замыкание множества A в пространстве X, а через $\bar{A}^{\sim}$ — его замыкание в пространстве $X^{\sim}$, совпадающее в силу леммы 8.11 с компактификацией по Тихонову $(\bar{A})^{\sim}$. Очевидно, что

$$\bar{A} = X \cap \bar{A}^{\sim}.$$

Будем называть *нормальной* пару (X, A), состоящую из нормального пространства X и его замкнутого подмножества A. Категорию нормальных пар и их непрерывных отображений будем обозначать через $\mathfrak{A}_N$. Для любой нормальной пары (X, A) пара $(X^{\sim}, A^{\sim})$ является согласно лемме 8.11 компактной парой. Кроме того, $f^{\sim}\colon (X^{\sim}, A^{\sim}) \to (Y^{\sim}, B^{\sim})$ для любого отображения $f\colon (X, A) \to (Y, B)$ нормальных пар. Следовательно, операцию $\sim$ можно рассматривать как ковариантный функтор $\sim\colon \mathfrak{A}_N \to \mathfrak{A}_C$.

9. Теория гомологий нормальных пространств

Наша ближайшая задача — обратить категорию $\mathfrak{A}_N$ нормальных пар в h-категорию с тем, чтобы компактификация по Тихонову оказалась h-функтором (см. пункт IV. 9). Докажем сначала несколько предварительных результатов.

Лемма 9.1. *Для любых замкнутых подмножеств A и B нормального пространства X*

$$A^{\sim} \cap B^{\sim} = (A \cap B)^{\sim}, \quad A^{\sim} \cup B^{\sim} = (A \cup B)^{\sim}.$$

Доказательство. Так как $A \cap B \subset A^{\sim} \cap B^{\sim}$, то $(A \cap B)^{\sim} \subset A^{\sim} \cap B^{\sim}$. Предполагая, что точка x_0 не принадлежит множеству $(A \cap B)^{\sim}$, рассмотрим замкнутую окрестность V точки x_0 в пространстве $X^{\sim}$, для которой $V \cap (A \cap B)^{\sim} = \varnothing$. Множества $V \cap A$ и B являются непересекающимися замкнутыми подмножествами пространства X. Пусть f — соответствующая функция Урысона, т. е. такая функция f: $X \to I$, что $f(V \cap A) = 0$, $f(B) = 1$, и пусть $f^{\sim}$: $X^{\sim} \to I$ — ее продолжение на $X^{\sim}$. Очевидно, что $f^{\sim}((V \cap A)^{\sim}) = 0$ и $f^{\sim}(B^{\sim}) = 1$. Если $x \in A^{\sim}$, то $x_0 \in (V \cap A)^{\sim}$ и $f^{\sim}(x_0) = 0$, так что точка x_0 не принадлежит множеству $B^{\sim}$, а следовательно, и множеству $A^{\sim} \cap B^{\sim}$. Тем самым доказано, что $A^{\sim} \cap \cap B^{\sim} \subset (A \cap B)^{\sim}$. Второе утверждение леммы следует из известного общего свойства операции замыкания.

Теорема 9.2. *Если отображение вложения i: $(X_1, A_1) \subset \subset (X, A)$ нормальных пар является вырезанием (типа (E) в смысле пункта 5), то отображение $i^{\sim}$ также является вырезанием (того же типа).*

Доказательство. По определению множества X_1, A_1 замкнуты в пространстве X и

$$A_1 = X_1 \cap A, \quad X = \operatorname{Int} X_1 \cup \operatorname{Int} A.$$

Последнее соотношение равносильно тому, что

$$\overline{X \setminus X_1} \cap \overline{X \setminus A} = \varnothing.$$

Мы должны показать, что такое же соотношение выполняется для компактифицированных множеств. Согласно лемме 9.1

$$A_1^{\sim} = X_1^{\sim} \cap A^{\sim}, \quad \overline{X \setminus X_1^{\sim}} \cap \overline{X \setminus A^{\sim}} = \varnothing.$$

Так как множество A замкнуто в пространстве X, то $X \cap A^{\sim} = A$. Отсюда следует, что $X \setminus A \subset X^{\sim} \setminus A^{\sim}$. Так как пространство X плотно в пространстве $X^{\sim}$, то множество $X \setminus A$ плотно в множестве $X^{\sim} \setminus A^{\sim}$. Следовательно,

$$\overline{X \setminus A^{\sim}} = \overline{X^{\sim} \setminus A^{\sim}}.$$

Так как это соотношение остается справедливым, если множество A заменить пространством X_1, то

$$\overline{X^{\sim} \setminus X_1^{\sim}} \cap \overline{X^{\sim} \setminus A^{\sim}} = \varnothing .$$

Следовательно, отображение $i^{\sim}$ является вырезанием.

Лемма 9.3. *Для любого нормального пространства X отображение i^{-1}: $\mathrm{Cov}^f(X^{\sim}) \to \mathrm{Cov}^f(X)$, где $i: X \subset X^{\sim}$, является отображением на множество* $\mathrm{Cov}^f(X)$.

Доказательство. Пусть α — произвольное конечное открытое покрытие пространства X и пусть V — его множество индексов. Для каждого $v \in V$ положим $\beta_v = X^{\sim} \setminus (X - \alpha_v)^{\sim}$. Тогда согласно лемме 9.1

$$\bigcup_v \beta_v = X^{\sim} \setminus \bigcap_v (X - \alpha_v)^{\sim} = X^{\sim} \setminus (\bigcap_v (X - \alpha_v))^{\sim} = \\ = X^{\sim} \setminus (X \setminus \bigcup \alpha_v)^{\sim} = X^{\sim}.$$

Следовательно, β является открытым покрытием пространства $X^{\sim}$ с тем же множеством индексов V. Так как $X \cap \beta_v = X \setminus X \cap \cap (X - \alpha_v)^{\sim} = X \setminus (X \setminus \alpha_v) = \alpha_v$, то $i^{-1}\beta = \alpha$.

Определение 9.4. Пусть $\alpha \in \mathrm{Cov}(X)$, $\beta \in \mathrm{Cov}(Y)$ и V, W — множества индексов покрытий α, β соответственно. Определим покрытие $\alpha \times \beta \in \mathrm{Cov}(X \times Y)$ с множеством индексов $V \times W$, положив

$$(\alpha \times \beta)_{(v,\, w)} = \alpha_v \times \beta_w .$$

Лемма 9.5. *Для любых компактных пространств X и Y покрытия вида $\alpha \times \beta$, $\alpha \in \mathrm{Cov}^f X$, $\beta \in \mathrm{Cov}^f Y$ образуют конфинальное подмножество множества* $\mathrm{Cov}(X \times Y)$.

Доказательство. Пусть $\gamma \in \mathrm{Cov}(X \times Y)$. Так как пространство $X \times Y$ компактно и так как множества вида $U \times W$, где U, W — открытые подмножества пространств X, Y соответственно, образуют базу открытых множеств пространства $X \times Y$, то существует конечное покрытие δ пространства $X \times Y$, вписанное в покрытие γ, каждый элемент δ_v которого имеет вид $\delta_v = U_v \times W_v$. Для любых точек $x \in X$ и $y \times Y$ положим

$$U(x) = \bigcap U_v, \quad \text{где } x \in U_v,$$
$$W(y) = \bigcap W_v, \quad \text{где } y \in W_v.$$

Различные множества вида $U(x)$ и $W(y)$ образуют конечные покрытия α и β пространств X и Y соответственно. Так как каждое множество $U(x) \times W(y)$ содержится в некотором элементе $U_v \times W_v = \delta_v$ покрытия δ, то $\delta < \alpha \times \beta$. Следовательно, $\gamma < \alpha \times \beta$.

Лемма 9.6. *Пусть A — плотное подмножество пространства X и i: $A \subset X$ — соответствующее отображение вложения. Пусть, далее, f: $A \to Y$ — произвольное отображение множества A в некоторое компактное пространство Y. Оказывается, что* *отображение f тогда и только тогда может быть продолжено до отображения $F\colon X \to Y$, когда для каждого покрытия $\beta \in \mathrm{Cov}^f(Y)$ существует такое покрытие $\alpha \in \mathrm{Cov}^f(X)$, что $f^{-1}\beta < i^{-1}\alpha$.*

Доказательство. Предположим, что для отображения f существует продолжение $F\colon X \to Y$. Пусть $\gamma \in \mathrm{Cov}^f(Y)$ и $\alpha = F^{-1}(\gamma)$. Тогда $f^{-1}\gamma = i^{-1}F^{-1}\gamma = i^{-1}\alpha$, так как $f = Fi$. Таким образом, необходимость условия доказана.

Для доказательства достаточности этого условия рассмотрим семейство $N(x)$ всех окрестностей произвольной точки $x \in X$. Для каждой окрестности $V \in N(x)$ положим $S_V = \overline{f(V \cap A)}$. Если $V_1, \ldots, V_n \in N(x)$, то $V = V_1 \cap \ldots \cap V_n \in N(x)$ и $S_V \subset S_{V_1} \cap \ldots \cap S_{V_n}$. Так как $S_V \neq \varnothing$, то $S_{V_1} \cap \ldots \cap S_{V_n} \neq \varnothing$. Таким образом, любое конечное подсемейство семейства $\{S_V\}$ имеет непустое пересечение. Следовательно, поскольку множества S_V замкнуты в пространстве Y, а пространство Y компактно, то пересечение $F(x) = \bigcap S_V$, где $V \in N(x)$ непусто. Оказывается, что пересечение $F(x)$ состоит из одной точки. Действительно, пусть $y_1,\ y_2 \in F(x)$. Рассмотрим такое покрытие $\beta \in \mathrm{Cov}^f(Y)$, состоящее из двух множеств β_1, β_2, что $y_1 \in \beta_1 \setminus \overline{\beta}_2$, $y_2 \in \beta_2 \setminus \overline{\beta}_1$. Пусть $\alpha \in \mathrm{Cov}^f(X)$ — такое покрытие, что $f^{-1}\beta < i^{-1}(\alpha)$, и пусть $x \in \alpha_v$. Тогда множество $\alpha_v = V$ является элементом семейства $N(x)$ и

$$S_V = \overline{f(\alpha_v \cap A)}.$$

Множество $f(\alpha_v \cap A)$ содержится либо в множестве β_1, либо в множестве β_2. Предположим для определенности, что $f(\alpha_v \cap A) \subset \beta_1$. Тогда $S_V \subset \overline{\beta}_1$, и следовательно, $y_2 \notin S_V$, и потому $y_2 \notin F(x)$. Тем самым доказано, что множество $F(x)$ состоит только из одной точки.

Если $x \in A$, то $f(x) \in S_V$ для всех окрестностей $V \in N(x)$, так что $f(x) \in \bigcap S_V$ и, следовательно, $F(x) = f(x)$. Таким образом, отображение F является продолжением отображения f. Остается доказать, что отображение F непрерывно.

Пусть U — произвольное открытое множество, содержащее точку $F(x)$. Рассмотрим такое покрытие $\beta \in \mathrm{Cov}^f(Y)$, состоящее из двух множеств β_1 и β_2, что $F(x) \in \beta_1 \setminus \overline{\beta}_2$ и $\overline{\beta}_1 \subset U$. Пусть $\alpha \in \mathrm{Cov}^f(X)$ — такое покрытие, что $f^{-1}\beta < i^{-1}\alpha$, и пусть $x \in \alpha_v$. Так как $\alpha_v = V \in N(x)$ и $S_V = \overline{f(\alpha_v \cap A)}$, то $F(x) \in \overline{f(\alpha_v \cap A)}$. Так как множество $f(\alpha_v \cap A)$ содержится либо в множестве β_1, либо в множестве β_2, а $F(x) \in \overline{f(\alpha_v \cap A)}$ и $F(x) \in \beta_1 \setminus \overline{\beta}_2$, то $f(\alpha_v \cap A) \subset \beta_1$. Для каждой точки $x' \in \alpha_v$ имеем $\alpha_v = V \in N(x')$, так что $F(x') \in S_V = \overline{f(\alpha_v \cap A)} \subset \overline{\beta}_1 \subset U$. Следовательно, $F(\alpha_v) \subset U$. Тем самым непрерывность отображения F доказана.

Лемма 9.7. *Пусть X, Y — вполне регулярные пространства, Z — нормальное пространство и $f\colon X \times Y \to Z$. Оказывается, что отображение f тогда и только тогда можно продолжить до неко-*

торого отображения $F\colon X^{\sim}\times Y^{\sim}\to Z^{\sim}$, когда для каждого покрытия $\gamma\in\mathrm{Cov}^f(Z)$ существуют такие покрытия $\alpha\in\mathrm{Cov}^f(X)$ и $\beta\in\mathrm{Cov}^f X$, что $f^{-1}\gamma<\alpha\times\beta$.

Доказательство. Рассмотрим отображения вложения

$$i_1\colon X\to X^{\sim},\quad i_2\colon Y\to Y^{\sim},\quad i\colon Z\to Z^{\sim}.$$

Предположим, что продолжение $F\colon X^{\sim}\times Y^{\sim}\to Z^{\sim}$ существует. Согласно лемме 9.3 для любого покрытия $\gamma\in\mathrm{Cov}^f(Z)$ существует такое покрытие $\gamma'\in\mathrm{Cov}^f(Z^{\sim})$, что $\gamma=i^{-1}\gamma'$. Согласно лемме 9.5 существуют такие покрытия $\alpha'\in\mathrm{Cov}^f(X^{\sim})$ и $\beta'\in\mathrm{Cov}^f(Y^{\sim})$, что $F^{-1}\gamma'<\alpha'\times\beta'$. Пусть $\alpha=i_1^{-1}\alpha'$, $\beta=i_2^{-1}\beta'$. Тогда $\alpha\in\mathrm{Cov}^f(X)$, $\beta\in\mathrm{Cov}^f(Y)$, и так как $if=F(i_1\times i_2)$, то

$$f^{-1}\gamma=f^{-1}i^{-1}\gamma'=(i_1^{-1}\times i_2^{-1})F^{-1}\gamma'<(i_2^{-1}\times i_2^{-1})(\alpha'\times\beta')=$$
$$=i_1^{-1}\alpha'\times i_2^{-1}\beta'=\alpha\times\beta.$$

Обратно, пусть условия леммы выполнены. Рассмотрим отображение $g=if\colon X\times Y\to Z^{\sim}$. Пусть $\gamma\in\mathrm{Cov}^f(Z^{\sim})$. Тогда $i^{-1}\gamma\in\mathrm{Cov}^f(Z)$, и следовательно, существуют такие покрытия $\alpha\in\mathrm{Cov}^f(X)$ и $\beta\in\mathrm{Cov}^f(Y)$, что $f^{-1}i^{-1}\gamma<\alpha\times\beta$. Таким образом, $g^{-1}\gamma=f^{-1}i^{-1}\gamma<\alpha\times\beta$. Следовательно, согласно лемме 9.6 отображение g допускает продолжение $F\colon X^{\sim}\times Y^{\sim}\to Z^{\sim}$. Очевидно, что отображение F является также продолжением и отображения f.

Определение 9.8. Пусть (X, A) и (Y, B) — произвольные нормальные пары. Гомотопия $F\colon(X\times I, A\times I)\to(Y, B)$ называется *равномерной*, если для любого конечного открытого покрытия $\gamma\in\mathrm{Cov}^f(Y)$ существуют такие покрытия $\alpha\in\mathrm{Cov}^f(X)$ и $\beta\in\mathrm{Cov}^f(I)$, что $F^{-1}\gamma<\alpha\times\beta$.

Из леммы 9.7 непосредственно вытекает

Теорема 9.9. *Пусть $f_0, f_1\colon(X, A)\to(Y, B)$ — гомотопные отображения нормальных пар. Гомотопия $F\colon(X\times I, A\times I)\to(Y, B)$, связывающая отображения f_0 и f_1, тогда и только тогда является равномерной гомотопией, когда ее можно продолжить до гомотопии $G\colon(X^{\sim}\times I, A^{\sim}\times I)\to(Y^{\sim}, B^{\sim})$, связывающей отображения $f_0^{\sim}, f_1^{\sim}\colon(X^{\sim}, A^{\sim})\to(Y^{\sim}, B^{\sim})$.*

Теоремы 9.2 и 9.9 указывают путь превращения категории $\mathfrak{A}_N$ в h-категорию. *Отмеченными парами* категории $\mathfrak{A}_N$ нужно считать пары, состоящие из вложений $i\colon A\subset X$, $j\colon X\subset(X, A)$, где (X, A) — произвольная нормальная пара. *Вырезаниями* нужно считать, как обычно, отображения типа (E) в смысле пункта 5, *гомотопиями* — равномерные гомотопии и, наконец, *точками* — обыкновенные точки. Приняв эти определения, мы получим следующую теорему.

Теорема 9.10. *Компактификация по Тихонову является ковариантным h-функтором $\sim\colon\mathfrak{A}_N\to\mathfrak{A}_C$.*

Определение 9.11. Пусть H — произвольная теория частично точных гомологий (когомологий) на категории $\mathfrak{A}_C$ и пусть

$H^{\sim}$ — композиция теории H с h-функтором $\sim$: $\mathfrak{A}_N \to \mathfrak{A}_C$. Эта композиция является теорией частично точных гомологий (когомологий) на категории $\mathfrak{A}_N$ и называется *теорией гомологий (когомологий) нормальных пространств, ассоциированной с теорией H*. Если теория H точна, то теория $H^{\sim}$ также точна.

Так как категория $\mathfrak{A}_C$ является подкатегорией категории $\mathfrak{A}_N$ и так как для компактных пар $(X^{\sim}, A^{\sim}) = (X, A)$, то теория $H^{\sim}$, очевидно, является расширением теории H с категории $\mathfrak{A}_C$ на категорию $\mathfrak{A}_N$.

В случае, когда H является теорией спектральных гомологий (когомологий) на категории $\mathfrak{A}_C$, ассоциированная теория $H^{\sim}$ допускает прямое описание в терминах нервов и покрытий. Именно, оказывается, что определенные в пункте IX.3 с помощью конечных покрытий группы $H_q^f(X, A)$ совпадают для нормальных пар (X, A) с группами $H_q^{\sim}(X, A) = H_q(X^{\sim}, A^{\sim})$.

Теорема 9.12. *Пусть (X, A) — произвольная нормальная пара и пусть $H_q^f(X, A)$ (соответственно $H_f^q(X, A)$) — группы гомологий (соответственно когомологий), определенные с помощью конечных открытых покрытий. Оказывается, что отображение вложения i: $(X, A) \subset (X^{\sim}, A^{\sim})$ индуцирует изоморфизмы*

$$i_*: H_q^f(X, A) \approx H_q(X^{\sim}, A^{\sim})$$

$$(\text{соответственно изоморфизмы } i^*\colon H^q(X^{\sim}, A^{\sim}) \approx H_f^q(X, A)).$$

Доказательство. Так как подмножество A замкнуто, то, как было показано в пункте IX.8, направленное множество $\mathrm{Cov}^f(X, A)$ можно заменить направленным множеством $\mathrm{Cov}^f(X)$. Согласно лемме 9.3 отображение i^{-1}: $\mathrm{Cov}^f(X^{\sim}) \to \mathrm{Cov}^f X$ является отображением на множество $\mathrm{Cov}^f X$. Пусть $\alpha \in \mathrm{Cov}^f(X^{\sim})$ и $\beta = i^{-1}\alpha \in \mathrm{Cov}^f(X)$. Так как пространство X плотно в пространстве $X^{\sim}$, а множество A плотно в множестве $A^{\sim}$, то $(X_\alpha^{\sim}, A_\alpha^{\sim}) = (X_\beta, A_\beta)$, так что $H_q(X_\alpha^{\sim}, A_\alpha^{\sim}) = H_q(X_\beta, A_\beta)$. Отсюда и из теорем VIII.3.15 и VIII.4.13 вытекает, что отображения i_* и i^* действительно являются изоморфизмами.

Сопоставляя доказанное утверждение с тем очевидным фактом, что изоморфизм i_* перестановочен с отображениями f_* и ∂, получаем изоморфизм $H^f \approx H^{\sim}$.

Теорема 9.13. *Продолжение $f^{\sim}$: $(X^{\sim}, A^{\sim}) \to (Y^{\sim}, B^{\sim})$ относительного гомеоморфизма f: $(X, A) \to (Y, B)$ нормальных пар тогда и только тогда является относительным гомеоморфизмом, когда для каждого замкнутого множества C пространства X, содержащегося в дополнении $X \setminus A$, множество $f(C)$ замкнуто в пространстве Y.*

Доказательство. Предполагая, что отображение $f^{\sim}$ является относительным гомеоморфизмом, рассмотрим произвольное замкнутое в пространстве X множество $C \subset X \setminus A$. Согласно лемме 9.1 $C^{\sim} \cap A^{\sim} = \varnothing$. Следовательно, отображение $f^{\sim}$ гомеоморфно отображает множество $C^{\sim}$ в дополнение $Y^{\sim} \setminus B^{\sim}$. Так как

$$C = X \cap C^{\sim} = (X \setminus A) \cap C^{\sim}$$

и так как отображение $f^{\sim}$ взаимно однозначно на множествах $X \setminus A$ и $C^{\sim}$, то

$$f(C) = (Y \setminus B) \cap f^{\sim}(C^{\sim}) = Y \cap f^{\sim}(C^{\sim}).$$

Так как множество $C^{\sim}$ компактно и, следовательно, множество $f^{\sim}(C^{\sim})$ замкнуто в пространстве $Y^{\sim}$, то отсюда вытекает, что множество $f(C)$ замкнуто в пространстве Y. Таким образом, необходимость условия доказана.

Предположим теперь, что условие теоремы выполнено, и докажем, что отображение $f^{\sim}$ является относительным гомеоморфизмом. Так как пространство Y плотно в пространстве $Y^{\sim}$ и $B \subset B^{\sim}$, то множество $Y \setminus B$ плотно в множестве $Y^{\sim} \setminus B^{\sim}$. Следовательно, $Y^{\sim} \setminus B^{\sim} \subset f^{\sim}(X^{\sim})$. Так как $f^{\sim}(A^{\sim}) \subset B^{\sim}$, то

$$Y^{\sim} \setminus B^{\sim} \subset f^{\sim}(X^{\sim} \setminus A^{\sim}).$$

Предположим, что $x_0, x_1 \in X^{\sim} \setminus A^{\sim}$ и $x_0 \neq x_1$. Пусть N_0, N_1 — такие замкнутые окрестности точек x_0, x_1 в пространстве $X^{\sim}$, что множества A, N_0, N_1 попарно не пересекаются. Пусть $C_i = N_i \cap X$ и $D = f(C_i)$, $i = 0, 1$. Так как пространство X плотно в пространстве $X^{\sim}$, то множество C_i плотно в множестве N_i и, следовательно, $C_i^{\sim} = N_i$. Так как множество N_i замкнуто, то и множество C_i замкнуто (в пространстве X). Следовательно, согласно условию теоремы множество D_i замкнуто в пространстве Y. Таким образом, B, D_0 и D_1 — замкнутые непересекающиеся множества пространства Y. Согласно лемме 9.1 множества $B^{\sim}, D_0^{\sim}, D_1^{\sim}$ также не пересекаются. Так как

$$f^{\sim}(x_i) \in f^{\sim}(N_i) = f^{\sim}(C_i) \subset D_i^{\sim}, \quad i = 0, 1,$$

то $f^{\sim}(x_0)$ и $f^{\sim}(x_1)$ являются различными точками пространства $Y^{\sim} \setminus B^{\sim}$. Этот факт вместе с результатами предыдущего пункта показывает, что отображение $f^{\sim}$ определяет взаимно однозначное отображение пространства $X^{\sim} \setminus A^{\sim}$ на пространство $X^{\sim} \setminus B^{\sim}$. Отсюда и из леммы 5.2 следует, что отображение $f^{\sim}$ является относительным гомеоморфизмом.

З а м е ч а н и е. Если теория гомологий H на категории $\mathfrak{A}_C$ относительно инвариантна (например является теорией спектральных гомологий), то «вырезаниями» категории $\mathfrak{A}_N$ можно считать отображения более широкого класса, описанного в теореме 9.13. Аналогично, если в теории H вырезаниями являются отображения типа (E_1), то тем же свойством обладает и теория $H^{\sim}$.

10. Компактные пары как пределы триангулируемых пар

Целью этого пункта является доказательство следующей теоремы.

Теорема 10.1. *Каждая компактная пара гомеоморфна пределу обратного спектра триангулируемых пар.*

Доказательство основывается на следующих двух леммах.

Лемма 10.2. *Пара (Q, R), состоящая из конечного куба Q и его подкуба R, триангулируема.*

Доказательство. Так как Q является конечным произведением интервалов, то многократное применение леммы II.8.9 позволяет построить триангуляцию куба Q, подкомплексом которой является подкуб R.

Лемма 10.3. *Для произвольного конечного куба Q, его подкуба R, замкнутого подмножества X куба Q и такого открытого множества U, что $X \subset U \subset Q$, существует множество $Y \subset U$, для которого $X \subset \operatorname{Int} Y$ и пара $(Y, Y \cap R)$ триангулируема.*

Доказательство. Пусть T — триангуляция пары (Q, R) и пусть ${}^iT$ — ее i-е барицентрическое подразделение. Выберем такое замкнутое подмножество X', что

$$X \subset \operatorname{Int} X' \subset X' \subset U,$$

и такое достаточно большое число i, что каждый симплекс подразделения ${}^iT$, пересекающий множество X', принадлежит множеству U. Существование такого индекса i следует из леммы II.6.5. Пусть Y — объединение всех симплексов подразделения ${}^iT$, пересекающихся с множеством X'. Множества Y и $Y \cap R$ являются, очевидно, подкомплексами триангуляции ${}^iT$. Следовательно, пара $(Y, Y \cap R)$ триангулируема. Так как $X' \subset Y$, то $X \subset \operatorname{Int} Y$. Тем самым лемма полностью доказана.

Доказательство теоремы 10.1. Пусть (X, A) — произвольная компактная пара. Согласно теореме 8.6 и лемме 8.5 можно предполагать, что X является замкнутым подмножеством куба I^ξ и что $A = X \cap R$, где $R = I^\alpha$ — некоторый подкуб куба I^ξ, $\alpha \subset \xi$.

Каждому подмножеству a множества ξ отнесем подкуб I^a и проекцию $\varrho_a\colon I^\xi \to I_a$.

Пусть M — множество всех пар $m = [a, N]$, где

(1) a — конечное подмножество множества ξ,

(2) $N \subset I^a$,

(3) $p_a X \subset \operatorname{Int} N$ (относительно подкуба I^a),

(4) пара $(N, N \cap R)$ триангулируема.

Следующим образом определим в множестве M частичную упорядоченность: отношение $m_1 < m_2$, где $m_1 = [a_1, N_1]$ и $m_2 = [a_2, N_2]$, имеет место тогда и только тогда, когда

(5) $a_1 \subset a_2$,

(6) $p_{a_1}N_2 \subset N_1$.

Докажем, что множество M направлено. Пусть $m_1 = [a_1, N_1]$, $m_2 = [a_2, N_2]$. Положим

$$a = a_1 \cup a_2, \quad B = I^a \cap p_{a_1}^{-1}(N_1) \cap p_{a_2}^{-1}(N_2).$$

Тогда

$$p_a X \subset \operatorname{Int} B \subset I^a.$$

Согласно лемме 10.3 существует такое множество $N \subset I^a$, что пара $m = [a, N]$ является элементом множества M. Очевидно, что $m_1 < m$ и $m_2 < m$. Таким образом, множество M направлено.

Для любого элемента $m = [a, N]$ множества M положим $(X_m, A_m) = (N, N \cap R)$. Любым элементам $m_1 = [a_1, N_1]$, $m_2 = [a_2, N_2]$, связанным отношением $m_1 < m_2$, отнесем отображение $\pi_{m_1}^{m_2}$ пары $(N_2, N_2 \cap R)$ в пару $(N_1, N_1 \cap R)$, определенное проекцией $p_{a_1}: I^\xi \to I^{a_1}$. Без труда проверяется, что пары (X_m, A_m) и отображения $\pi_{m_1}^{m_2}$ образуют обратный спектр пространств. Пусть (X_∞, A_∞) — предел этого обратного спектра. Для каждого элемента $m = [a, N]$ рассмотрим определенное проекцией p_a: $I^\xi \to I^a$ отображение $f_m: (X, A) \to (X_m, A_m)$. Это отображение переводит множество X в множество $N = X_m$, а множество $A = X \cap R$ — в множество $N \cap R = A_m$. Система отображений $\{f_m\}$ составляет, очевидно, отображение пары (X, A) в спектр (X_m, A_m) и, следовательно, определяет некоторое предельное отображение f_∞: $(X, A) \to (X_\infty, A_\infty)$ (см. пункты VIII.2 и VIII.3).

Докажем, что отображение f_∞ является гомеоморфизмом. Пусть a — произвольное конечное подмножество множества ξ. Так как согласно теореме 10.1 пара $(I^a, I^{a \cap a})$ триангулируема, то $m = [a, I^a] \in M$. Для любой точки $x \in X_\infty$ положим $x(a) \doteq \pi_m(x)$. Оказывается, что

(7) $x(a) \in p_a X$.

(8) Если $x \in A_\infty$, то $x(a) \in R$.

(9) Если $a_1 \subset a_2$, то $p_{a_1} x(a_2) = x(a_1)$.

(10) Если $m' = [a, N]$, то $\pi_{m'}(x) = x(a)$.

Для доказательства свойства (7) предположим, что $x(a) \mathrel{\bar{\in}} p_a X$. Тогда согласно лемме 10.3 существует такой элемент $m' = [a, N]$, что $x(a) \mathrel{\bar{\in}} N$. С другой стороны, $x(a) = \pi_m^{m'} x_{m'} = x_{m'} \in N$, и мы приходим к противоречию. Свойства (8), (9), (10) очевидны. Из свойства (9) следует существование такого элемента $x' \in I^\xi$, что $p_a(x') = x(a)$ для всех конечных подмножеств a множества ξ. Очевидно, что $x' \in X$, $f_\infty(x') \doteq x$, причем $x' \in A$, если $x \in A_\infty$. Таким образом, f_∞ отображает пару (X, A) на пару (X_∞, A_∞).

Пусть $x_1, x_2 \in X$ и $x_1 \neq x_2$. Тогда $p_a x_1 \neq p_a x_2$ для некоторого конечного подмножества a множества ξ. Следовательно, $\pi_m x_1 \neq \pi_m x_2$, где $m = [a, I^a]$, а поэтому и $f_\infty(x_1) \neq f_\infty(x_2)$. Тем самым теорема полностью доказана.

11. Канонические отображения пространства в нерв

Определение 11.1. Пусть α — произвольное покрытие пространства X и X_α — его нерв. Для каждой точки $x \in X$ вершины $v \in X_\alpha$, для которых $x \in \alpha_v$, определяют некоторый симплекс нерва X_α. Этот симплекс обозначается через $\Delta_\alpha(x)$ и называется *симплексом, определенным точкой x в нерве X_α*. Очевидно, что симплекс $\Delta_\alpha(x)$ является наибольшим симплексом нерва X_α среди всех симплексов, носители которых содержат точку x.

Лемма 11.2. *Для любого отображения f: $X \to Y$ любого покрытия β пространства Y и любой точки $x \in X$*

$$\Delta_\alpha(x) = \Delta_\beta(f(x)),$$

где $\alpha = f^{-1}\beta$.

Действительно, для каждой вершины v нерва Y_β включение $f(x) \in \beta_v$ имеет место тогда и только тогда, когда $x \in \alpha_v = f^{-1}(\beta_v)$.

Определение 11.3. Пусть α — произвольное покрытие пространства X и X_α — его нерв. Отображение

$$\varphi\colon X \to |X_\alpha|$$

называется *каноническим относительно покрытия* α, если для каждой точки $x \in X$ соответствующая точка $\varphi(x)$ содержится в замкнутом симплексе $\Delta_\alpha(x)$.

Лемма 11.4. *Пусть f: $X \to Y$ и $\alpha = f^{-1}(\beta)$. Оказывается, что для любого канонического отображения φ: $Y \to |Y_\beta|$ композиция φf отображает пространство X в нерв X_α (напомним, что $X_\alpha \subset Y_\beta$) и является каноническим отображением относительно покрытия α.*

Непосредственно следует из леммы 11.2. Как следствие леммы 11.4 получается

Лемма 11.5. *Любое каноническое отображение φ: $X \to |X_\alpha|$ определяет каноническое отображение каждого множества $A \subset X$ в пространство $|A_\alpha|$. Соответствующее отображение пар φ: $(X, A) \to (|X_\alpha|, |A_\alpha|)$ также называется каноническим.*

Лемма 11.6. *Пусть покрытие β пространства X вписано в покрытие α и пусть p: $(X_\beta, A_\beta) \to (X_\alpha, A_\alpha)$ — соответствующая проекция. Тогда для любого канонического (относительно покрытия β) отображения φ: $(X, A) \to (|X_\beta|, |A_\beta|)$ отображение $p\varphi$: $(X, A) \to (|X_\alpha|, |A_\alpha|)$ является каноническим отображением (относительно покрытия α).*

Доказательство. Пусть $x \in X$ и пусть v — произвольная вершина симплекса $\Delta_\beta(x)$. Так как $x \in \beta_v \subset \alpha_{p(v)}$, то точка $p(v)$ является вершиной симплекса $\Delta_\alpha(x)$. Следовательно, проекция p отображает (замкнутый) симплекс $\Delta_\beta(x)$ в (замкнутый) симплекс $\Delta_\alpha(x)$, и потому $p\varphi(x) \in \Delta_\alpha(x)$. Таким образом отображение $p\varphi$ является каноническим отображением.

Лемма 11.7. *Любые два канонических отображения φ_0, φ_1: $(X, A) \to (|X_\alpha|, |A_\alpha|)$ гомотопны.*

Непосредственно следует из того, что для каждой точки $x \in X$ (или $x \in A$) точки $\varphi_0(x)$ и $\varphi_1(x)$ принадлежат одному и тому же симплексу нерва X_α (соответственно нерва A_α).

Теорема 11.8. *Для любого конечного покрытия α нормального пространства X существует каноническое отображение φ: $X \to |X_\alpha|$.*

Доказательство. Согласно лемме 3.3 существует замкнутое покрытие β, расширением которого является покрытие α. Согласно лемме Урысона для каждого элемента $v \in V_\alpha = V_\beta$ существует такая непрерывная функция f_v: $X \to I$ (где I — единичный замкнутый отрезок $[0,1]$), что

$$f_v(x) = 0, \text{ если } x \in X \setminus \alpha_v,$$
$$f_v(x) = 1, \text{ если } x \in \beta_v.$$

Так как $\bigcup \beta_v = X$, то сумма $f(x) = \sum_v f_v(x)$ положительна. Пусть $\varphi_v = f_v / f$. Тогда $\varphi_v(x) \geqslant 0$, $\Sigma \varphi_v(x) = 1$ и $\varphi_v(x) = 0$, если $x \notin \alpha_v$. Следовательно, полагая

$$\varphi(x) = \sum_v \varphi_v(x)\, v,$$

мы получим каноническое отображение φ: $X \to |X_\alpha|$.

Используя понятие канонического отображения, можно доказать следующую аппроксимационную теорему, которая понадобится нам в следующем пункте.

Теорема 11.9. *Пусть (X, A) — предел обратного спектра компактных пар $\{(X_m, A_m), \pi_{m_2}^{m_1}\}$. Тогда для каждого отображения f: $(X, A) \to (Y, B)$, где (Y, B) — произвольная триангулируемая пара, существует такой индекс m и такое отображение f_m: $(X_m, A_m) \to (Y, B)$, что отображения f и $f_m \pi_m$ пары (X, A) в пару (Y, B) гомотопны.*

Доказательство. Пусть $T = \{t, (K, L)\}$ — триангуляция пары (Y, B) и пусть τ — ассоциированное с ней покрытие пространства Y в смысле определения IX.9.1. Тогда $(Y_\tau, B_\tau) = (K, L)$ и отображение t^{-1}: $(Y, B) \to (|K|, |L|)$ является каноническим отображением. Пусть $\alpha = f^{-1}\tau$. Тогда пара (X_α, A_α) содержится в паре (K, L) и согласно лемме 11.4 отображение $t^{-1}f$ является каноническим отображением. Применяя теперь лемму 3.8, найдем такой индекс m и такое покрытие β пространства X_m, что покрытие $\gamma = \pi_m^{-1}\beta$ пространства X вписано в покрытие α и $(X_\gamma, A_\gamma) = (X_{m\beta}, A_{m\beta})$. Пусть

$$p\colon (X_\gamma, A_\gamma) \to (X_\alpha, A_\alpha)$$

— проекция и

$$\varphi\colon (X_m, A_m) \to (|X_{m\beta}|, |A_{m\beta}|)$$

— каноническое отображение, существование которого доказано в теореме 11.8 и лемме 11.5. Из лемм 11.4 и 11.5 получаем, что отображение

$$\varphi\pi_m\colon (X, A) \to (|X_\gamma|, |A_\gamma|)$$

является каноническим отображением (относительно покрытия γ) и, следовательно, согласно лемме 11.6 отображение

$$\rho\varphi\pi_m\colon (X, A) \to (|X_\alpha|, |A_\alpha|)$$

— каноническим отображением (относительно покрытия α). Так как отображение $t^{-1}f$ также является каноническим отображением (относительно покрытия α), то согласно лемме 11.7 оно гомотопно отображению $\rho\varphi\pi_m$. Таким образом, отображение $f_m = t\rho\varphi$ удовлетворяет условиям теоремы.

12. Теорема единственности непрерывной теории гомологии

В этом пункте доказывается, что теория спектральных гомологий (когомологий) является единственной теорией гомологий (когомологий), удовлетворяющей аксиоме непрерывности.

Теорема 12.1. *Пусть H и $\bar{H}$ — две теории частично точных гомологий (когомологий), определенные на категории $\mathfrak{A}_C$ компактных пар, и пусть теория $\bar{H}$ непрерывна. Пусть, далее, G и $\bar{G}$ — группы коэффициентов теорий H, $\bar{H}$ соответственно. Оказывается, что любой гомоморфизм*

$$h_0\colon G \to \bar{G} \quad (h_0\colon \bar{G} \to G)$$

можно единственным образом продолжить до некоторого гомоморфизма $h\colon H \to \bar{H}$ (соответственно $h\colon \bar{H} \to H$). Если теория H также непрерывна и отображение $h_0\colon G \approx \bar{G}$ (соответственно отображение $h_0\colon \bar{G} \approx G$) изоморфно, то гомоморфизм h является изоморфизмом.

Принимая за $\bar{H}$ теорию спектральных гомологий (когомологий), получаем отсюда следующую теорему.

Теорема 12.2. *Любая непрерывная теория частично точных гомологий (когомологий) на категории $\mathfrak{A}_C$ компактных пар изоморфна теории спектральных гомологий (когомологий) с той же группой коэффициентов.*

В этой теореме предполагается, что группы коэффициентов теорий гомологий принадлежат либо категории $\mathfrak{G}_R$, либо категории $\mathfrak{G}_C$, а группы коэффициентов теорий когомологий — категории $\mathfrak{G}_R$. Группы спектральных когомологий с группой коэффициентов категории $\mathfrak{G}_C$ не определены, так же как и понятие непрерывности соответствующей теории когомологий (см. пункт 2).

Доказательство теоремы 12.2. Мы докажем эту теорему для теории гомологий. Доказательство для теории когомологий легко получается по соображениям двойственности.

Так как на категории $\mathfrak{T}$ триангулируемых пар обе теории H и $\overline{H}$ удовлетворяют аксиоме точности, то согласно теореме единственности IV.10.2 гомоморфизм h можно продолжить до гомоморфизма

$$h\colon H \to \overline{H} \text{ на категории } \mathfrak{T}.$$

Пусть (X, A) — произвольная компактная пара. Согласно теореме 10.1 эта пара гомеоморфна пределу некоторого спектра $(\mathbf{X}, \mathbf{A}) \in \operatorname{Inv}\mathfrak{T}$. Пусть $\varphi\colon \lim(\mathbf{X}, \mathbf{A}) \to (X, A)$ — соответствующий гомеоморфизм. Пару, состоящую из спектра $(\mathbf{X}, \mathbf{A})$ и гомеоморфизма φ, мы будем называть *разверткой* пары (X, A) и будем обозначать через D.

Пусть M — множество индексов спектра $(\mathbf{X}, \mathbf{A})$. Тогда для каждого $m \in M$ определен гомоморфизм

$$h(q, X_m, A_m)\colon H_q(X_m, A_m) \to \overline{H}_q(X_m, A_m).$$

Эти гомоморфизмы определяют согласно сказанному в пункте 2 некоторый гомоморфизм обратных спектров

$$(1) \qquad h(q, \mathbf{X}, \mathbf{A})\colon H_q(\mathbf{X}, \mathbf{A}) \to \overline{H}_q(\mathbf{X}, \mathbf{A}).$$

Рассмотрим диаграмму

$$\begin{array}{ccccc} H_q(X, A) & \xleftarrow{\varphi_*} & H_q(\lim(\mathbf{X}, \mathbf{A})) & \xrightarrow{l(q,\mathbf{X},\mathbf{A})} & \lim H_q(\mathbf{X}, \mathbf{A}) \\ & & & & \big\downarrow h_\infty(q, \mathbf{X}, \mathbf{A}) \\ \overline{H}_q(X, A) & \xleftarrow{\overline{\varphi}_*} & \overline{H}_q(\lim(\mathbf{X}, \mathbf{A})) & \xrightarrow{\overline{l}(q,\mathbf{X},\mathbf{A})} & \lim \overline{H}_q(\mathbf{X}, \mathbf{A}), \end{array}$$

где $l(q, \mathbf{X}, \mathbf{A})$ и $\overline{l}(q, \mathbf{X}, \mathbf{A})$ — указанные в теореме 2.1 гомоморфизмы, а $h_\infty(q, \mathbf{X}, \mathbf{A})$ — предел отображения (1). Так как отображение φ гомеоморфно, то гомоморфизмы φ_* и $\overline{\varphi}_*$ являются изоморфизмами. Кроме того, из непрерывности теории $\overline{H}$ следует, что и гомоморфизмы $\overline{l}$ являются изоморфизмами. Определим теперь гомоморфизм

$$h(q, X, A, D)\colon H_q(X, A) \to \overline{H}_q(X, A),$$

полагая

$$h(q, X, A, D) = \overline{\varphi}_* \overline{l}^{-1} h_\infty l \varphi_*^{-1}.$$

Докажем следующие свойства гомоморфизма $h(q, X, A, D)$:

(2) Если $(X, A) \in \mathfrak{T}$, то $h(q, X, A, D) = h(q, X, A)$.

(3) $h(q, X, A, D) = h(q, X, A, D')$ для любых двух разверток D и D' пары (X, A).

(4) Если f: $(X, A) \to (Y, B)$, то для любых разверток D и D' пар (X, A) и (Y, B) соответственно диаграмма

$$\begin{tikzcd}
H_q(X, A) \arrow[r, "{h(q,X,A,D')}"] \arrow[d, "f_*"] & \overline{H}_q(X, A) \arrow[d, "\overline{f}_*"] \\
H_q(Y, B) \arrow[r, "{h(q,Y,B,D')}"] & \overline{H}_q(Y, B)
\end{tikzcd}$$

коммутативна.

(5) Пусть D' — развертка подпространства A, индуцированная разверткой D пары (X, A). Тогда диаграмма

$$\begin{tikzcd}
H_q(X, A) \arrow[r, "{h(q,X,A,D)}"] \arrow[d, "\partial"] & \overline{H}_q(X, A) \arrow[d, "\overline{\partial}"] \\
H_{q-1}(A) \arrow[r, "{h(q-1,A,D')}"] & \overline{H}_{q-1}(A)
\end{tikzcd}$$

коммутативна.

Из предложений (2) — (5) следует, что, полагая $h(q, X, A) = h(q, X, A, D)$, мы получим гомоморфизм h: $H \to \overline{H}$, являющийся продолжением гомоморфизма h_0.

Не теряя общности, можно предполагать, что пары (X, A) и (Y, B) являются пределами спектров $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{A})$ и $(\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{B})$, т. е. что гомеоморфизмы φ и φ_1 являются тождественными отображениями. Начнем с доказательства двух вспомогательных предложений.

(6) Для любой проекции π_m: $(X, A) \to (X_m, A_m)$ диаграмма

$$\begin{tikzcd}
H_q(X, A) \arrow[r, "{h(q,X,A,D)}"] \arrow[d, "\pi_{m*}"] & \overline{H}_q(X, A) \arrow[d, "\overline{\pi}_{m*}"] \\
H_q(X_m, A_m) \arrow[r, "{h(q, X_m, A_m)}"] & \overline{H}_q(X_m, A_m)
\end{tikzcd}$$

коммутативна.

Рассмотрим диаграмму

$$\begin{tikzcd}
& \lim H_q(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{A}) \arrow[rr, "{h_\infty(q,\boldsymbol{X},\boldsymbol{A})}"] \arrow[dd, "\tau_m"] & & \lim \overline{H}_q(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{A}) \arrow[dd, "\overline{\tau}_m"] & \\
H_q(X, A) \arrow[ur, "l"] \arrow[dr, "\pi_{m*}"'] & & & & \overline{H}_q(X, A) \arrow[ul, "\overline{l}"'] \arrow[dl, "\overline{\pi}_{m*}"] \\
& H_q(X_m, A_m) \arrow[rr, "{h(q,X_m,A_m)}"] & & \overline{H}_q(X_m, A_m) &
\end{tikzcd}$$

где τ_m и $\overline{\tau}_m$ — проекции предельных групп $\lim H_q$ и $\lim \overline{H}_q$ в m-е группы соответствующих спектров. Коммутативность квадрата этой диаграммы является следствием определения отображения h_∞, а коммутативность треугольников следует из определения отображений l и $\bar{l}$. Следовательно,

$$\bar{\pi}_{m*}h(q, X, A, D) = \bar{\pi}_{m*}\bar{l}^{-1}h_\infty l = \bar{\tau}_m h_\infty l =$$
$$= h(q, X_m, A_m)\tau_m l = h(q, X_m, A_m)\pi_{m*}.$$

Тем самым свойство (6) доказано.

(7) Если f: $(X, A) \to (Y, B)$ и пара (Y, B) принадлежит категории $\mathfrak{F}$, то диаграмма

$$\begin{array}{ccc} H_q(X, A) & \xrightarrow{h(q,X,A,D)} & \bar{H}_q(X, A) \\ \downarrow f_* & & \downarrow \bar{f}_* \\ H_q(Y, B) & \xrightarrow{h(q,Y,B)} & \bar{H}_q(Y, B) \end{array}$$

коммутативна.

Согласно теореме 11.9 существует такой элемент m множества индексов M спектра $(\mathbf{X}, \mathbf{A})$ и такое отображение

$$f_m: (X_m, A_m) \to (Y, B),$$

что

$$f_m \pi_m \simeq f,$$

где π_m: $(X, A) \to (X_m, A_m)$ — проекция. Рассмотрим диаграмму

$$\begin{array}{ccccc} H_q(X, A) & \xrightarrow{\pi_{m*}} & H_q(X_m, A_m) & \xrightarrow{f_{m*}} & H_q(Y, B) \\ h(q, X, A, D) \downarrow & & \downarrow h(q, X_m, A_m) & & \downarrow h(q, Y, B) \\ \bar{H}_q(X, A) & \xrightarrow{\bar{\pi}_{m*}} & \bar{H}_q(X_m, A_m) & \xrightarrow{\bar{f}_{m*}} & \bar{H}_q(Y, B). \end{array}$$

Коммутативность ее левого квадрата следует из предложения (6). Коммутативность правого квадрата является следствием того, что обе пары (X_m, A_m) и (Y, B) принадлежат категории $\mathfrak{F}$, на которой отображение h: $H \to \bar{H}$ является гомоморфизмом. Наконец, согласно аксиоме гомотопии

$$f_{m*}\pi_{m*} = (f_m\pi_m)_* = f_*, \qquad \bar{f}_{m*}\bar{\pi}_{m*} = \overline{(f_m\pi_m)}_* = \bar{f}_*.$$

Тем самым свойство (7) доказано.

Доказательство свойств (2)—(5). Для доказательства свойства (2) достаточно применить свойство (7) к случаю, когда $(X, A) = (Y, B)$, а f является тождественным отображением. Тогда гомоморфизмы f_* и $\bar{f}_*$ будут тождественными отображениями и, следовательно, согласно свойству (7) $h(q, X, A, D) = h(q, X, A)$.

Докажем теперь свойство (4). Пусть n — произвольный элемент множества индексов N развертки D' и пусть ϱ_n: $(Y, B) \to (Y_n, B_n)$ —

соответствующая проекция. Так как пара (Y_n, B_n) принадлежит категории $\mathfrak{F}$, то к отображениям ϱ_n и $\varrho_n f$ можно применить свойство (7), согласно которому

$$\bar{\varrho}_{n*}h(q, Y, B, D') = h(q, Y_n, B_n)\varrho_{n*},$$
$$\bar{\varrho}_{n*}\bar{f}_*h(q, X, A, D) = h(q, Y_n, B_n)\varrho_{n*}f_*.$$

Следовательно,

$$\bar{\varrho}_{n*}\bar{f}_*h(q, X, A, D) = \varrho_{n*}h(q, Y, B, D')f_*.$$

Так как это соотношение имеет место для любого индекса $n \in N$, то в нем можно отображение $\bar{\varrho}_{n*}$ заменить отображением l. Так как по предположению $\bar{H}$ является непрерывной теорией гомологий, то отображение $\bar{l}$ изоморфно и, следовательно,

$$\bar{f}_*h(q, X, A, D) = h(q, Y, B, D')f_*.$$

Тем самым свойство (4) доказано.

Для доказательства свойства (3) применим свойство (4) к случаю, когда $(X, A) = (Y, B)$, а f является тождественным отображением. Тогда оба отображения f_* и $\bar{f}_*$ будут тождественными отображениями и, следовательно, согласно свойству (4) $h(q, X, A, D) = h(q, X, A, D')$.

Свойство (5) является непосредственным следствием коммутативности диаграммы

$$\begin{tikzcd}
H_q(X, A) \arrow[r, "l"] \arrow[d, "\partial"] & \lim H_q(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{A}) \arrow[r, "h_\infty"] \arrow[d, "\partial_\infty"] & \lim \bar{H}_q(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{A}) \arrow[d, "\bar{\partial}_\infty"] & \bar{H}_q(X, A) \arrow[l, "\bar{l}"'] \arrow[d, "\bar{\partial}"] \\
H_{q-1}(A) \arrow[r, "l"] & \lim H_{q-1}(\boldsymbol{A}) \arrow[r, "h_\infty"] & \lim \bar{H}_{q-1}(\boldsymbol{A}) & \bar{H}_{q-1}(A), \arrow[l, "\bar{l}"']
\end{tikzcd}$$

в которой ∂_∞ — предел отображения ∂: $H_q(X_m, A_m) \to H_{q-1}(A_m)$, а $\bar{\partial}_\infty$ — предел аналогичного отображения $\bar{\partial}$. Тем самым свойства (2) — (5) полностью доказаны.

Покажем теперь, что продолжение h: $H \to \bar{H}$ гомоморфизма h_0 определено однозначно. Пусть h': $H \to \bar{H}$ — другое продолжение этого гомоморфизма. Тогда согласно теореме IV.10.2 $h = h'$ на категории $\mathfrak{F}$. Пусть (X, A) — произвольная компактная пара. Не теряя общности, можно предполагать, что пара (X, A) является пределом некоторого обратного спектра $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{A}) = \{(X_m, A_m), \pi_{m_2}^{m_1}\}$ триангулируемых пар. Пусть π_m: $(X, A) \to (X_m, A_m)$ — соответствующие проекции. Так как пара (X_m, A_m) триангулируема и так как h и h' являются гомоморфизмами теорий гомологий, то

$$\bar{\pi}_{m*}h(q, X, A) = h(q, X_m, A_m)\pi_{m*} = h'(q, X_m, A_m)\pi_{m*} = \bar{\pi}_{m*}h'(q, X, A).$$

Так как это соотношение имеет место для любого индекса m, то согласно определению отображения $\bar{l}(q, \boldsymbol{X}, \boldsymbol{A})$

$$\bar{l}(q, \boldsymbol{X}, \boldsymbol{A})h(q, X, A) = \bar{l}(q, \boldsymbol{X}, \boldsymbol{A})\, h'(q, X, A).$$

Так как теория $\bar{H}$ непрерывна, то отображение $\bar{l}$ изоморфно и, следовательно, $h(q, X, A) = h'(q, X, A)$.

Предположим, наконец, что теория H также непрерывна и что отображение h_0: $G \approx \bar{G}$ изоморфно. Пусть $\bar{h}_0$: $\tilde{G} \approx G$ — отображение, обратное отображению h_0, и пусть $\bar{h}$: $\bar{H} \to H$ — его продолжение на категорию $\mathfrak{A}_C$. Тогда отображение $\bar{h}h$: $H \to H$ является продолжением тождественного отображения $G \to G$ и, следовательно, согласно свойству единственности само будет тождественным отображением. Аналогично $h\bar{h}$ также является тождественным отображением. Следовательно, отображение h является изоморфизмом, а $\bar{h}$ — обратным к нему отображением.

Примечания

Спектральный процесс. Метод, использованный при определении групп спектральных гомологий и когомологий, можно применять не только в этих двух случаях. Общую ситуацию, к которой применим этот метод, можно приблизительно описать следующим образом.

Пусть на категории симплициальных пар и симплициальных отображений задан функтор H (ковариантный или контравариантный), принимающий значения в категории групп. Предположим далее, что $H(f_0) = H(f_1)$ для любых смежных отображений f_0, f_1 : $(K, L) \to (K_1, L_1)$. Тогда определения пунктов IX.2—IX.4 можно полностью повторить и тем самым построить на категории любых пар некоторый функтор $\check{H}$. На категории компактных пар функтор $\check{H}$ удовлетворяет аксиоме гомотопии (т. е. $\check{H}(f_0) = \check{H}(f_1)$, если отображения f_0 и f_1 гомотопны) и аксиоме непрерывности. Это построение было использовано Спейньером для доказательства того, что когомотопические группы удовлетворяют аксиоме непрерывности (см. примечания к главе I).

Компактификации. При определении компактификации $\dot{X}$ локально компактного пространства X мы требовали в пункте 6, чтобы компактификация происходила путем присоединения некоторой точки ω, не содержащейся ни в одном пространстве категории $\mathfrak{A}_{LC}$, что фактически равносильно замене этой категории некоторой подкатегорией. Это весьма искусственное условие необходимо для того, чтобы компактификация $(\dot{X}, \dot{A})$ любой пары (X, A) была в свою очередь также парой; поэтому при компактификации множества A мы должны использовать ту же точку, что и при компактификации пространства X.

Эту трудность можно преодолеть, обобщив понятие *пары*. Назовем *обощенной парой* тройку (X, A, φ), состоящую из топологических пространств X, A и гомеоморфизма $\varphi\colon A \to X$ пространства A на некоторое подпространство пространства X. Если пространства X, A и отображение φ принадлежат категории $\mathfrak{A}_{LC}$, то будем говорить, что обобщенная пара (X, A, φ) принадлежит категории $\mathfrak{A}_{LC}$. В силу этих определений компактификация $(\dot{X}, \dot{A}, \varphi)$ будет обобщенной парой даже в том случае, когда для компактификации пространств X и A использовались разные точки.

Остается вопрос о естественном выборе точки ω для каждого локально компактного пространства X. С этой целью заметим, что в аксиоматике Неймана—Бернайса—Гёделя множество может быть элементом другого множества, но никогда не может быть элементом самого себя. Следовательно, обозначая через $\{X\}$ множество, состоящее из единственного элемента X, будем иметь $\{X\} \cap \cap X = \varnothing$. Таким образом, мы можем положить $\dot{X} = X \cup \{X\}$. Аналогичные соображения применимы и к компактификации по Тихонову.

Упражнения

A. Слабая непрерывность

1. Показать, что любую компактную пару можно представить в виде пересечения спектра подпространств, состоящего из пар категории $\mathfrak{Z}_H$, т. е. пар, имеющих гомотопический тип триангулируемых пар. (Указание. Использовать метод, примененный при доказательстве теоремы 10.1.)

2. Назовем доказанное в теореме 2.6 свойство *слабой непрерывностью* теории гомологий (когомологий). Доказать теорему 12.1, предполагая, что теория $\bar{H}$ слабо непрерывна. (Указание. Использовать предыдущее упражнение и тот факт, что категория $\mathfrak{Z}_H$ является категорией единственности (глава IX, упражнение E4.)

3. Использовать результат предыдущего упражнения для доказательства равносильности свойств непрерывности и слабой непрерывности.

4. Показать, что на категории $\mathfrak{A}_C$ аксиома гомотопии является следствием аксиом 1, 2 и свойства непрерывности (см. I. W. Keesee, Ann. of Math. 54 (1951), 247—249).

B. Теоремы о разложении в прямую сумму

1. Показать, что теорема I.13.2 о разложении в прямую сумму остается справедливой и для теории спектральных гомологий (над категорией произвольных пар).

2. Пусть $(X; X_1, X_2)$ — компактная триада, в которой $X = X_1 \cup \cup X_2$. Показать, что отображения

$$H_q(X_i, A) \to H_q(X, A) \qquad (i = 1, 2),$$

где $A = X_1 \cap X_2$, определяют инъективное, а отображения

$$H_q(X, A) \to H_q(X, X_i) \qquad (i = 1, 2)$$

проективное представления группы $H_q(X, A)$ в виде прямой суммы. (Все отображения индуцированы вложениями; имеются в виду группы спектральных гомологий.) Доказать аналогичный результат для групп когомологий.

3. Пусть X — произвольное компактное пространство, $\{U_\alpha\}$, $\alpha \in M$ — семейство попарно не пересекающихся открытых множеств пространства X и U — объединение множеств этого семейства. Показать, что индуцированные вложениями отображения

$$H_q(X, X \setminus U) \to H_q(X, X \setminus U_\alpha)$$

порождают проективное представление группы спектральных гомологий $H_q(X, X \setminus U)$ в виде прямого произведения. Показать, что аналогично отображения

$$H^q(X, X \setminus U_\alpha) \to H^q(X, X \setminus U)$$

определяют инъективное представление группы $H^q(X, X \setminus U)$ в виде прямой суммы.

4. Перевести упражнение 3 на язык «абсолютной» теории, изложенной в пункте 7.

C. Точность

1. Пусть A — одновременно открытое и замкнутое подмножество пространства X. Показать, что гомологическая последовательность (в теории спектральных гомологий) пары (X, A) точна. Показать, что эта последовательность расщепляется (см. главу VIII, упражнение D) с помощью гомоморфизма ψ: $H_q(X) \to H_q(A)$, где $\psi = k_*^{-1} l_*$, l: $X \subset (X, X \setminus A)$, k: $A \subset (X, X \setminus A)$.

2. Пусть $(X; X_1, X_2)$ — компактная триада, для которой $X = X_1 \cup X_2$. Показать, что гомологическая последовательность (в теории спектральных гомологий) тройки (X, X_2, A), где $A = X_1 \cap X_2$, точна. Показать, что эта последовательность расщепляется посредством гомоморфизма ψ: $H_q(X, A) \to H_q(X_2, A)$, где $\psi = k_*^{-1} l_*$, l: $(X, A) \subset (X, X_1)$, k: $(X_2, A) \subset (X, X_1)$.

3. Сформулировать аналогичные результаты для когомологических последовательностей (в теории спектральных когомологий).

D. LC-группы

1. Показать, что в определении группы $H_q^{\spadesuit}(X, A)$ направленное множество $\mathrm{Cov}_1(X)$ можно заменить любым из перечисленных ниже

направленных множеств, причем получающаяся предельная группа изоморфна группе $H_q^{\blacktriangle}(X, A)$:

(a) $\mathrm{Cov}_2(X)$ — множество всех конечных открытых покрытий α пространства X, хотя бы один элемент α_v которых контракомпактен.

(b) $\mathrm{Cov}_0(X)$ — множество всех конечных открытых покрытий α пространства X, все элементы α_v которых, кроме, быть может, одного, являются ограниченными множествами. (Указание. Показать, что $\mathrm{Cov}_0 \subset \mathrm{Cov}_1 \subset \mathrm{Cov}_2$ и что множество Cov_0 конфинально в множестве Cov_2.)

(c) $\mathrm{Cov}_3(X)$ — множество всех конечных открытых покрытий пространства X, с новым отношением порядка $<<$, определенным следующим образом: отношение $\alpha << \beta$ имеет место тогда и только тогда, когда $\alpha < \beta$ и объединение всех ограниченных множеств покрытия β содержит объединение всех ограниченных множеств покрытия α. (Указание. Построить отображение $\mathrm{Cov}_3(X) \to \to \mathrm{Cov}_0(X)$).

(d) $\mathrm{Cov}^f(X)$.

(e) Множества $\mathrm{Cov}_0(X)$, $\mathrm{Cov}_1(X)$, $\mathrm{Cov}_2(X)$ упорядоченные отношением $<<$.

2. Пусть $\alpha \in \mathrm{Cov}^f(X, A)$. В дополнение к подкомплексу Ω_α определим новый подкомплекс Ω'_α как полный подкомплекс нерва X_α, содержащий те и только те вершины v, для которых множество α_v не ограничено. Другими словами, подкомплекс Ω'_α является наименьшим полным подкомплексом нерва X_α, содержащим подкомплекс Ω_α.

Показать, что, не меняя (с точностью до изоморфизма) предельных групп, можно над каждым из перечисленных выше семейств покрытий группы $H_q(X_\alpha, A_\alpha \cup \Omega_\alpha)$ заменить группами $H_q(X_\alpha, A_\alpha \cup \Omega'_\alpha)$.

Замечание. Пределы групп $H_q(X_\alpha, A_\alpha \cup \Omega'_\alpha)$ над направленным множеством $\mathrm{Cov}^f(X)$ подробно изучены П. С. Александровым (Ученые записки МГУ). Согласно сказанному группы Александрова изоморфны $\blacktriangle$-группам.

3. Пусть (X, A) — произвольная локально компактная пара, а $\{X_\alpha\}$ — семейство всех контракомпактных подмножеств пространства X. Показать, что группы спектральных гомологий $H_q(X, A \cup X_\alpha; G)$ (соответственно группы $H^q(X, A \cup X_\alpha; G)$) и индуцированные вложениями гомоморфизмы образуют обратный (соответственно прямой) спектр групп, предельная группа которого изоморфна группе $H_q^{\blacktriangle}(X, A; G)$ (соответственно группе $H^q_{\blacktriangle}(X, A; G)$).

4. Пусть K — произвольный локально конечный симплициальный комплекс и L — некоторый его подкомплекс. Показать, что пара $(|K|, |L|)$ локально компактна, и построить естественные

изоморфизмы

$$H_q^{\blacktriangle}(|K|, |L|; G) \approx \overleftarrow{\mathfrak{H}}_q(K, L; G), \qquad H_{\blacktriangle}^q(|K|, |L|; G) \approx \overrightarrow{\mathfrak{H}}^q(K, L; G)$$

(определение групп $\overleftarrow{\mathfrak{H}}_q$ и $\overrightarrow{\mathfrak{H}}^q$ см. главу VIII, упражнение F 3).

5. Перевести относительную гомологическую аддиционную последовательность компактной триады $(X; A_1, A_2)$ на язык «абсолютных» теорий, изложенных в пункте 7.

E. Компактификация по Тихонову

1. Показать, что для любого топологического пространства X каждую функцию f: $X \to I$ можно единственным образом представить в виде композиции $X \xrightarrow{T} T(X) \to I$. Показать, что это свойство однозначно (с точностью до гомеоморфизма) выделяет пространство $T(X)$ среди всех компактных пространств.

2. Заменить в упражнении 1 отрезок I любым вполне регулярным пространством.

3. Пусть X — такое всюду плотное нормальное подмножество компактного пространства Y, что для любых двух подмножеств A, B пространства X из $\overline{A} \cap \overline{B} \cap X = \varnothing$ следует, что $\overline{A} \cap \overline{B} = \varnothing$. Показать, что пространство Y является компактификацией по Тихонову пространства X.

4. Пусть X — нормальное пространство и Y — компактное метрическое пространство с метрикой ϱ. Показать, что гомотопия F: $X \times I \to Y$ тогда и только тогда равномерна, когда для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что $\varrho(F(x, t_1), F(x, t_2)) < \varepsilon$ для всех $x \in X$, как только $|t_1 - t_2| < \delta$, $t_1, t_2 \in I$.

5. Пусть X — нормальное пространство и пусть $\omega(X)$ — множество всех точек $x \in X$, обладающих такой счетной системой N окрестностей, что любая окрестность точки x содержит некоторую окрестность из N. Показать, что $\omega(X) = \omega(X^{\sim})$.

6. Показать, что теории спектральных гомологий и когомологий нормальных пар, основанные на конечных открытых покрытиях, изоморфны теориям, основанным на конечных замкнутых покрытиях.

F. Соленоиды

В этих упражнениях используется тот факт (доказанный в теореме XI.4.5), что $f_{k*}u = ku$ для любого элемента $u \in H_1(S^1; G)$ и $f_k^*(u) = ku$ для любого элемента $u \in H^1(S^1; G)$, где f_k: $S^1 \to S^1$ — отображение, определенное формулой $f_k(z) = z^k$.

1. Пусть Σ_p — p-адический соленоид (см. главу VIII, упражнение E). Показать для групп спектральных гомологий и когомологий, что

$$\tilde{H}_0(\Sigma_p; G) = 0, \qquad \tilde{H}^0(\Sigma_p; G) = 0,$$

$$H_q(\Sigma_p; G) = 0, \qquad H^q(\Sigma_p; G) = 0, \text{ если } q > 0.$$

Показать, что группа $H_1(\Sigma_p; G)$ изоморфна предельной группе обратного спектра

$$G \xleftarrow{\varphi} G \xleftarrow{\varphi} \ldots \xleftarrow{\varphi} G \xleftarrow{\varphi} \ldots,$$

где $\varphi(g) = pg$, а группа $H^1(\Sigma_p; G)$ — предельной группе прямого спектра

$$G \xrightarrow{\varphi} G \xrightarrow{\varphi} \ldots \xrightarrow{\varphi} G \xrightarrow{\varphi} \ldots$$

Используя эти результаты, доказать, что $H_1(\Sigma_p; J) = 0$ и что группа $H^1(\Sigma_p; J)$ изоморфна на группе всех рациональных чисел вида $\frac{m}{p^n}$, где m и n — целые числа, и что группа $H_1(\Sigma_p; S^1)$, где S^1 — мультипликативная группа комплексных чисел по модулю равных единице (или, что то же самое, фактор-группа аддитивной группы действительных чисел по подгруппе целых чисел), изоморфна группе Σ_p.

2. Пусть p и q — целые числа. Рассмотреть точную последовательность

$$S: \quad 0 \to J \xrightarrow{\tau} J \xrightarrow{\eta} J/qJ \to 0,$$

в которой $\tau(n) = qn$ и η — естественное отображение. Рассмотреть отображение γ: $S \to S$, определенное формулой $\gamma(x) = px$. Изучить предел S_∞ обратного спектра последовательностей

$$S \xleftarrow{\gamma} S \xleftarrow{\gamma} \ldots \xleftarrow{\gamma} S \xleftarrow{\gamma} \ldots$$

Для каких p и q последовательность S_∞ точна (см. пример VIII.5.5)?

3. Пусть E — двумерная клетка комплексной плоскости, определенная неравенством $|z| \leqslant 1$, и S — ее граница (определенная уравнением $|z| = 1$). Рассмотрим отображение φ: $S \to S$, определенное равенством $\varphi(z) = ze^{\frac{2\pi i}{q}}$. Пусть (P, C) — пара, полученная из пары (E, S) отождествлением точек $z \in S$ с точками $\varphi(z)$. Показать, что гомологическая последовательность (с целочисленными коэффициентами) пары (P, C) изоморфна точной последовательности S, рассмотренной в предыдущем упражнении. Показать, что отображение f: $(E, S) \to (E, S)$, определенное формулой $f(z) = z^p$, индуцирует такое отображение $\tilde{f}$: $(P, C) \to (P, C)$, что $\tilde{f}_*(u) = pu$. Пусть (P_∞, C_∞) — предел обратной последовательности

$$(P, C) \xleftarrow{\tilde{f}} (P, C) \xleftarrow{\tilde{f}} \ldots \xleftarrow{\tilde{f}} (P, C) \xleftarrow{\tilde{f}} \ldots$$

Показать, что гомологическая последовательность пары (P_∞, C_∞) (групп спектральных гомологий с целочисленными коэффициентами) изоморфна последовательности S_∞, рассмотренной в предыдущем упражнении (см. пример X.4.1). Показать, что пространства C_∞ и Σ_p гомеоморфны.

G. Разные вопросы

1. Пусть (X, A) — произвольная компактная пара и u — ядро естественного гомоморфизма $H^q(X) \to H^q(A)$ (имеются в виду группы спектральных когомологий). Показать, что существует такая замкнутая окрестность V множества A, что u содержится в ядре гомоморфизма $H^q(X) \to H^q(V)$.

2. Пусть α — произвольное покрытие пространства X. Показать, что отображение φ: $X \to |X_\alpha|$ тогда и только тогда является каноническим отображением относительно покрытия α, когда $\varphi^{-1}(st(v)) \subset \subset \alpha_v$ для каждого индекса $v \in V_\alpha$.

ГЛАВА XI

ПРИЛОЖЕНИЯ К ЕВКЛИДОВЫМ ПРОСТРАНСТВАМ

1. Введение

Цепь этой главы—двоякая. Во-первых, здесь доказываются некоторые теоремы о евклидовых пространствах, в частности, такие классические и часто используемые теоремы, как теоремы Брауера о неподвижных точках и инвариантности области. Во-вторых, в этой главе показывается, как эти теоремы можно доказать, пользуясь только аксиомами без обращения к какой-нибудь конкретно определенной теории гомологий или когомологий.

Первые пять пунктов используют материал только глав I и II. В последнем пункте (6) используется, кроме того, аксиома непрерывности из главы X.

На протяжении всей главы употребляются обозначения, введенные в пункте I.6: через R^n обозначается евклидово n-мерное пространство, через E^n — n-мерная клетка $||x|| \leqslant 1$, через S^{n-1} — $(n-1)$-мерная сфера $||x|| = 1$ и т. д. Все теоремы, как правило, относятся к этим пространствам. Однако эти *теоремы остаются справедливыми при замене пространств R^n, E^n, S^{n-1} любыми гомеоморфными им пространствами*. Например, теорема 3.3 Брауера о неподвижных точках справедлива для любого пространства X, гомеоморфного пространству E^n. Действительно, пусть f' — произвольное отображение $X \to X$ и пусть h — некоторый гомеоморфизм $X \to E^n$. Тогда отображение $f = hf'h^{-1}$ будет отображением пространства E^n в себя. Согласно теореме 3.3 для отображения f существует хотя бы одна неподвижная точка, скажем x. Тогда точка $h^{-1}(x)$ является неподвижной точкой отображения f'. Инвариантность других теорем этой главы доказывается столь же тривиально.

2. Отображения в сферы

Лемма 2.1. *Если пара (X, A) нормальна (т. е. состоит из нормального пространства X и его замкнутого подмножества A), то любое отображение $f\colon A \to S^n$ можно продолжить на некоторое открытое множество U пространства X, содержащее мно-*

жество A, т. е. можно построить отображение f': $U \to S^n$, совпадающее на A с отображением f.

Доказательство. Будем отображение f рассматривать как отображение множества A в пространство R^{n+1}. Тогда согласно теореме Титце о продолжении можно построить продолжение g: $X \to R^{n+1}$ отображения f. Пусть $U = X \setminus g^{-1}(0)$, где 0 — начало координат пространства R^{n+1}. Полагая

$$f'(x) = \frac{g(x)}{\|g(x)\|}, \quad x \in U,$$

мы получим требуемое продолжение отображения f.

Лемма 2.2. *Если для нормальной пары (X, A) пространство $X \times I$ нормально, то каждое отображение f: $X \times 0 \cup A \times I \to S^n$ допускает продолжение F: $X \times I \to S^n$.*

Доказательство. Пусть $B = X \times 0 \cup A \times I$. Так как пара $(X \times I, B)$ нормальна, то согласно лемме 2.1 существует окрестность U множества B, на которую можно продолжить отображение f. Пусть φ: $U \to S^n$ — произвольное продолжение отображения f. Так как $A \times I \subset U$ и множество I компактно, то существует такая окрестность V множества A, что $V \times I \subset U$. Построим функцию Урысона θ: $X \to I$, равную нулю на множестве $X \setminus V$ и единице на множестве A. Тогда $(x, \theta(x)t) \in U$ для каждой точки $x \in X$ и любого числа $t \in I$. Положим $F(x, t) = \varphi(x, \theta(x)t)$. Очевидно, что $F(x, 0) = \varphi(x, 0) = f(x, 0)$. Кроме того, если $x \in A$, то $\theta(x) = 1$ и, следовательно, $F(x, t) = \varphi(x, t) = f(x, t)$. Таким образом, F является требуемым продолжением.

Лемма 2.3. *Если для нормальной пары (X, A) пространство $X \times I$ нормально, то для любого отображения f: $X \to S^n$ любую гомотопию отображения $f|A$ можно продолжить до некоторой гомотопии отображения f.*

Доказательство. Пусть h: $A \times I \to S^n$ — произвольная гомотопия отображения $f|A$. Продолжим отображение h до отображения h': $X \times 0 \cup A \times I$, полагая $h(x, 0) = f(x)$, если $x \in X$. Согласно лемме 2.2 отображение h' допускает продолжение H: $X \times I \to S^n$, являющееся, очевидно, требуемой гомотопией.

Определение 2.4. Отображение f: $X \to S^n$ называется *несущественным*, если оно гомотопно отображению пространства X в одну точку сферы S^n. В противном случае отображение f называется *существенным*.

Лемма 2.5. *Если отображение f: $X \to S^n$ существенно, то $f(X) = S^n$.*

Доказательство. Предположим, что $y \in S^n \setminus f(X)$. Из того, что пространство $S^n \setminus y$ стягиваемо по себе в точку, следует, поскольку $f(X) \subset S^n \setminus y$, что отображение f несущественно.

Лемма 2.6. *Если для нормальной пары (X, A) пространство $X \times I$ нормально, то каждое несущественное отображение f: $A \to S^n$ допускает несущественное продолжение f': $X \to S^n$.*

Доказательство. Пусть h: $S \to S^n$ — отображение пространства X в одну точку сферы S^n. Тогда отображение $h|A$ гомотопно отображению f. Существование отображения f' следует теперь из леммы 2.3.

Лемма 2.7. *Если пространство X допускает триангуляцию $T = \{t, K\}$, для которой $\dim K < n$, то каждое отображение f: $X \to S^n$ несущественно.*

Доказательство. Пусть $T' = \{t', K'\}$ — такая триангуляция сферы S^n, что $\dim K' = n$. Согласно теореме о симплициальной аппроксимации существует отображение g: $X \to S^n$, гомотопное отображению f и симплициальное относительно триангуляций ${}^kT$ и T', где ${}^kT = \{{}^kt, {}^kK\}$ — достаточно мелкое барицентрическое подразделение триангуляции T. Так как размерность симплициального комплекса не меняется при барицентрическом подразделении, то $\dim {}^kK < n$. Следовательно, так как отображение g симплициально, то образ пространства X при отображении g не покрывает сферу S^n. Поэтому согласно лемме 2.5 отображение g несущественно, а значит, несущественно и отображение f.

Следствие 2.8. *При $m < n$ каждое отображение f: $S^m \to S^n$ несущественно и может быть продолжено до отображения f': $E^{m+1} \to S^n$.*

Доказательство. Несущественность отображения f следует из леммы 2.7. Существование продолжения f' следует из леммы 2.6.

Лемма 2.9. *Если пространство X обладает триангуляцией $T = \{t, K\}$, для которой $\dim K \leqslant n$, то любое отображение f: $A \to S^n$, где A — произвольное замкнутое подмножество пространства X, допускает продолжение f': $X \to S^n$.*

Лемма 2.10. *Если пространство X обладает триангуляцией $T = \{t, K\}$, для которой $\dim K \leqslant n + 1$, то любое отображение f: $A \to S^n$, где A — произвольное замкнутое подмножество пространства X, может быть продолжено до отображения f': $X \setminus F \to S^n$, где $F \subset X \setminus A$ — некоторое конечное множество.*

Доказательство лемм 2.9 и 2.10. Согласно лемме 2.1 отображение f можно продолжить до отображения f': $U \to S^n$, где U — некоторое открытое множество пространства X, содержащее множество A. Заменяя триангуляцию T достаточно мелким барицентрическим подразделением ${}^kT = \{{}^kt, {}^kK\}$, можно найти такой подкомплекс A' пространства X (относительно триангуляции ${}^kT$), что $A \subset A' \subset U$. Так как $\dim K = \dim {}^kK$, то, следовательно, в леммах 2.9 и 2.10 можно предполагать, что множество A является подкомплексом пространства X относительно триангуляции T.

Пусть X^q — q-мерный остов пространства X относительно триангуляции T. Очевидно, что отображение f: $A \to S^n$ допускает продолжение f^0: $X^0 \cup A \to S^n$. Рассуждая по индукции, предположим, что для некоторого $q < n$ уже построено продолжение

f^q: $X^q \cup A \to S^n$. Пусть $S_1, \ldots, S_r$ — все $(q+1)$-мерные симплексы дополнения $X \setminus A$. Отображение f^q определено на их границах $\dot{s}_1, \ldots, \dot{s}_r$ и, следовательно, согласно лемме 2.8 отображение f^q можно продолжить на каждый из симплексов $s_1, \ldots, s_r$. В результате получается продолжение f^{q+1}: $X^{q+1} \cup A \to S^n$. Таким образом мы можем построить продолжение f^n: $X^n \cup A \to S^n$. Если $\dim K \leqslant n$, то $X^n = X$, что доказывает лемму 2.9. Пусть теперь $\dim K \leqslant n+1$ и $s_1, \ldots, s_n$ — $(n+1)$-мерные симплексы дополнения $X \setminus A$. Рассмотрим множество $F = \{b_1, \ldots, b_r\}$ их центров тяжестей. Радиальные проекции в каждом из симплексов $s_1, \ldots, s_r$ определяют некоторое ретрагирующее отображение h: $X \setminus F \to X^n \cup A$. Очевидно, что отображение $f^q h$: $X \setminus F \to S^n$ является продолжением отображения f: $A \to S^n$. Тем самым лемма 2.10 также доказана.

Лемма 2.11. *Пусть A — произвольное замкнутое подмножество сферы S^n и B — множество, содержащее точно по одной точке из каждой компоненты дополнения $S^n \setminus A$. Тогда любое отображение f: $A \to S^{n-1}$ можно продолжить до отображения f': $S^n \setminus F \to S^{n-1}$, где F — некоторое конечное подмножество множества B.*

Доказательство. Согласно лемме 2.10 существует такое конечное подмножество $(x_1, \ldots, x_k)$ пространства $S^n \setminus A$, что отображение f можно продолжить до отображения $S^n \setminus (x_1, \ldots, x_k) \to S^{n-1}$. Для каждой точки x_i обозначим через b_i точку множества B, принадлежащую компоненте дополнения $S \setminus A$, содержащей точку x_i, а через F обозначим множество $(b_1, \ldots, b_k)$. Мы должны доказать, что отображение f допускает продолжение $S^n \setminus F \to S^{n-1}$. С этой целью мы по индукции докажем, что если отображение f допускает продолжение $S^n \setminus (b_1, \ldots, b_{i-1}, x_i, \ldots, x_k) \to S^{n-1}$, то оно допускает также продолжение $S^n \setminus (b_1, \ldots, b_i, x_{i+1}, \ldots, x_k) \to S^{n-1}$. Так как точки x_i и b_i лежат в одной и той же компоненте дополнения $S^n \setminus A$, то в $S^n \setminus A$ существует такая конечная последовательность точек

$$x_i = y_0, \ldots, y_l = b_i$$

и такая последовательность выпуклых n-мерных клеток

$$E_1, \ldots, E_l,$$

что $y_{j-1}, y_j \in E_j$ для любого $j = 1, \ldots, l$, причем границы S_j клеток E_j не содержат ни точек b, ни точек x, ни точек y.

Очевидно, достаточно доказать, что если отображение f допускает продолжение

$$f_{i,\,j-1}: \quad S^n \setminus (b_1, \ldots, b_{i-1}, y_{j-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n) \to S^{n-1},$$

то оно допускает также продолжение

$$f_{i,\,j}: \quad S^n \setminus (b_1, \ldots, b_{i-1}, y_j, x_{i+1}, \ldots, x_k) \to S^{n-1}.$$

Пусть r: $S^n \setminus y_j \to \overline{S^n \setminus E_j}$ — произвольное, ретрагирующее отображение. Полагая $f_{i,j}(x) = f_{i,j-1}r(x)$ для любой точки $x \in S^n \setminus (b_1, \ldots, b_{i-1}, y_j, x_{i+1}, \ldots, x_k)$, мы получим требуемое продолжение $f_{i,j}$. Тем самым лемма полностью доказана.

3. Теоремы Брауэра и Борсука

Теорема 3.1. *Сфера S^n не стягиваема по себе в точку, т. е. тождественное отображение сферы S^n существенно.*

Доказательство. Пусть H — произвольная теория гомологий (или когомологий), определенная на категории I триангулируемых пар, с группой коэффициентов $G \neq 0$. Согласно теореме I.16.6 сфера S^n не является гомологически тривиальным пространством. Следовательно, согласно теореме I.11.5 сфера S^n не стягиваема по себе в точку.

Замечание. Предыдущее утверждение является единственным в этом пункте требующим для доказательства гомологических методов. Все другие предложения следуют из теоремы 3.1 с помощью результатов пункта 2 и некоторых других простых геометрических соображений.

Теорема 3.2. *Сфера S^{n-1} не является ретрактом клетки E^n.*

Доказательство. Если существует ретрагирующее отображение r: $E^n \to S^{n-1}$, то отображение

$$F(x, t) = r((1 - t)x), \quad x \in S^{n-1}, t \in I,$$

является гомотопией, стягивающей сферу S^{n-1} в точку, что невозможно в силу теоремы 3.1.

Теорема 3.3. (Теорема Брауера о неподвижной точке.) *Для любого отображения f: $E^n \to E^n$ существует по крайней мере одна неподвижная точка, т. е. такая точка $x \in E^n$, что $f(x) = x$.*

Доказательство. Предположим, что $f(x) \neq x$ для всех точек $x \in E^n$. Пусть $r(x)$ — точка пересечения сферы S^{n-1} с лучом, исходящим из точки $f(x)$ и проходящим через точку x. Непрерывность отображения r легко следует из непрерывности отображения f с помощью элементарных геометрических соображений. Так как $r(x) = x$, если $x \in S^n$, то r является ретрагирующим отображением $E^n \to S^{n-1}$, что противоречит теореме 3.2.

Теорема 3.4. *Пусть $T = \{t, K\}$ — произвольная триангуляция некоторого пространства X. Оказывается, что $\dim K \leqslant n$ тогда и только тогда, когда для любого отображения f: $A \to S^n$, где A — произвольное замкнутое подмножество пространства X, существует продолжение f': $X \to S^n$.*

Доказательство. Необходимость условия следует из леммы 2.9. Предполагая, что $\dim K > n$, рассмотрим некоторый $(n + 1)$-мерный симплекс s пространства X. Пусть $A = \dot{s}$ и пусть

f: $A \to S^n$ — произвольный гомеоморфизм. По условию отображение f допускает продолжение f': $X \to S^n$. Рассмотрим отображение $f^{-1}f'$: $X \to A$. Очевидно, что оно является ретрагирующим отображением. Поэтому множество $\dot{s}$ является ретрактом замкнутого симплекса s, что противоречит теореме 3.2.

Теорема 3.5. (Инвариантность размерности.) *Пусть $T_1 = \{t_1, K_1\}$ и $T_2 = \{t_2, K_2\}$ — триангуляции одного и того же пространства X. Тогда* $\dim K_1 = \dim K_2$.

Немедленно следует из теоремы 3.4

Теорема 3.6. (Теорема Борсука об отделении точки от бесконечности.) *Пусть X — компактное подмножество евклидова пространства R^n и пусть $x_0 \in R^n \setminus X$. Оказывается, что точка x_0 тогда и только тогда принадлежит неограниченной компоненте дополнения $R^n \setminus X$, когда определенное формулой*

$$p(x) = \frac{x - x_0}{\|x - x_0\|} \qquad (x \in X)$$

отображение p: $X \to S^{n-1}$ несущественно.

Доказательство. Переносами и аналогичными преобразованиями пространства R^n можно добиться того, чтобы подмножество X лежало внутри клетки E^n и чтобы точка x_0 была началом координат. Отображение p будет тогда задаваться формулой $p(x) = \frac{x}{\|x\|}$.

Предположим, что точка x_0 лежит в неограниченной компоненте C дополнения $R^n \setminus X$. Так как компонента C линейносвязна, то существует такое отображение f: $I \to C$, что $f(0) = x_0$, $f(1) = x_1 \in R^n \setminus E^n$. Рассмотрим отображение F: $X \times I \to S^{n-1}$, определенное формулой

$$F(x, t) = \frac{x - f(t)}{\|x - f(t)\|}, \qquad x \in X, t \in I.$$

Очевидно, что $F(x, 0) = p(x)$ и $F(x, 1) = \frac{x - x_1}{\|x - x_1\|}$. Так как $x \in E^n$ и $x_1 \notin E^n$, то $F(x, 1) \neq \frac{x_1}{\|x_1\|}$. Из леммы 2.5 следует поэтому, что отображение p несущественно.

Предположим теперь, что компонента C дополнения $R^n \setminus X$, содержащая точку x_0, ограничена. Тогда $\overline{C} \subset E^n$ и множество $C \cup X$ замкнуто. Предположим, что отображение p несущественно. Тогда согласно лемме 2.6 отображение p допускает продолжение p': $C \cup X \to S^{n-1}$. Определим отображение r: $E^n \to S^{n-1}$, полагая

$$r(x) = p'(x), \text{ если } x \in C \cup X,$$

$$r(x) = \frac{x}{\|x\|}, \text{ если } x \in E^n \setminus C.$$

Оба определения согласованы на множестве X, так что отображение r непрерывно. Если $x \in S^{n-1}$, то $r(x) = x$, так что отображение r является ретрагирующим отображением клетки E^n на сферу S^{n-1}. Это противоречит теореме 3.2.

Теорема 3.7. (Теорема Борсука.) *Дополнение $S^n \setminus X$ замкнутого подмножества X сферы S^n тогда и только тогда связно, когда каждое отображение $f\colon X \to S^{n-1}$ несущественно.*

Доказательство. Предположим, что дополнение $S^n \setminus X$ несвязно и пусть x_0, x_1 — точки дополнения $S^n \setminus X$, лежащие в разных его компонентах. Если рассматривать множество $S^n \setminus x_1$ как евклидово пространство R^n, то точка x_0 окажется в ограниченной компоненте пространства $R^n \setminus X$. Поэтому согласно теореме 3.6 имеется существенное отображение $p\colon X \to S^{n-1}$.

Предположим теперь, что множество $S^n \setminus X$ связно. Пусть $f\colon X \to S^{n-1}$ — произвольное отображение и $x_0 \in S^n \setminus X$ — некоторая точка. Согласно лемме 2.11 отображение f можно продолжить до отображения $f'\colon s^n \setminus x_0 \to s^{n-1}$. Так как множество $S^n \setminus x_0$ стягиваемо по себе в точку, то отображение f' несущественно. Поэтому отображение f также несущественно.

Лемма 3.8. *Пусть (X, A) — произвольная пара, лежащая в сфере S^n и гомеоморфная паре (E^n, S^{n-1}). Тогда множество $S^n \setminus A$ разлагается на две компоненты, а именно, на множества $S^n \setminus X$ и $X \setminus A$. В частности, множество $X \setminus A$ открыто в сфере S^n.*

Доказательство. Так как клетка E^n не допускает существенного отображения на сферу S^{n-1}, то согласно теореме 3.7 множество $S^n \setminus X$ связно. С другой стороны, сфера S^{n-1} обладает существенными отображениями в сферу S^{n-1} (например, тождественным отображением) и, следовательно, пространство $S^n \setminus A$ несвязно. Наконец, множество $X \setminus A$ гомеоморфно множеству $E^n \setminus S^{n-1}$ и поэтому связно. Остается заметить, что

$$S^n \setminus A = (S^n \setminus X) \cup (X \setminus A).$$

Теорема 3.9. (Инвариантность области.) *Пусть U_1, U_2 — гомеоморфные между собой подмножества сферы S^n. Оказывается, что если множество U_1 открыто, то множество U_2 также открыто.*

Доказательство. Пусть $f\colon U_1 \to U_2$ — заданный гомеоморфизм и пусть $x_2 \in U_2$, $x_1 = f^{-1}(x_2)$. Выберем такую сферическую окрестность V_1 точки x_1, чтобы $\overline{V}_1 \subset U_1$. Пусть $\dot{V}_1 = \overline{V}_1 \setminus V_1$. Тогда пары $(\overline{V}_1, \dot{V}_1)$ и (E^n, S^{n-1}) гомеоморфны. Пусть $(X, A) = (f\overline{V}_1, f\dot{V}_1)$. Тогда пары (X, A) и (E^n, S^{n-1}) гомеоморфны, и, следовательно, согласно лемме 3.8, множество $X \setminus A$ открыто. Так как $x_2 \in X \setminus A \subset \subset U_2$, то множество U_2 открыто.

Определение 3.10. Пространство M называется *локально евклидовым n-мерным пространством*, если каждая точка $x \in M$ обладает окрестностью, гомеоморфной пространству R^n.

Теорема 3.11. *Пусть U_1 и U_2 — гомеоморфные между собой подмножества двух локально евклидовых n-мерных пространств M_1 и M_2 соответственно. Тогда, если множество U_1 открыто, то множество U_2 также открыто.*

Доказательство. Пусть $f: U_1 \to U_2$ — заданный гомеоморфизм и пусть $x_2 \in U_2$, $x_1 = f^{-1}(x_2)$. Выберем такие гомеоморфные пространству R^n окрестности V_1, V_2 точек x_1, x_2 соответственно, что

$$x_1 \in V_1 \subset U_1, \quad x_2 \in V_2 \subset M_2, \quad f(V_1) \subset V_2.$$

Так как пространство R^n гомеоморфно открытому подмножеству сферы S^n, то существуют отображения $\varphi_1: V_1 \to S^n$, $\varphi_2: V_2 \to S^n$, гомеоморфно отображающие окрестности V_1 и V_2 на открытые подмножества W_1 и W_2 сферы S^n. Тогда композиция $\varphi_2 f \varphi_1^{-1}$ является гомеоморфным отображением множества W_1 на некоторое подмножество множества W_2. Согласно теореме 3.9 множество $\varphi_2 f \varphi_1^{-1}(W_1)$ открыто в сфере S^n, а следовательно, и в множестве W_2. Таким образом, множество $f\varphi^{-1}(W_1) = f(V_1)$ открыто в множестве V_2, а следовательно, и в пространстве M_2. Так как $x_2 \in f(V_1) \subset U_2$, то множество U_2 открыто.

Следствие 3.12. *Два локально евклидовых пространства M_1 и M_2 разной размерности не гомеоморфны.*

Доказательство. Пусть m_1, m_2 — размерности пространств M_1 и M_2 соответственно и пусть $m_1 = m_2 + n$, где $n > 0$. Тогда произведение $M_2 \times R^n$ является локально евклидовым пространством размерности m_1, содержащим неоткрытое подмножество, гомеоморфное пространству M_2. Следовательно, согласно теореме 3.11 пространства M_1 и M_2 не могут быть гомеоморфны.

4. Степень отображения

В этом и в следующем пункте предполагается, что задана некоторая теория гомологий H с группой коэффициентов G, изоморфной группе целых чисел J.

Результаты, аналогичные доказываемым в этих пунктах, имеют место и для теории когомологий с группой коэффициентов $G \approx J$.

Определение 4.1. Так как $H_n(S^n) \approx J$, если $n > 0$ (см. теорему I.16.6), то для любого отображения $f: S^n \to S^n$ существует такое целое число d, что $f_* u = du$ для всех элементов $u \in H_n(S^n)$. Это целое число d называется *степенью* отображения f и обозначается через степ. (f).

Очевидно, что два гомотопных отображения $S^n \to S^n$ имеют одну и ту же степень. Обратное утверждение также верно, но будет доказано только в главе XV. Легко проверяется, что степень композиции двух отображений равна произведению их степеней.

Лемма 4.2. *Отображение $f\colon S^n \to S^n$ степени, отличной от нуля, существенно и, следовательно, отображает сферу S^n на сферу S^n.*

Доказательство. Предположим, что отображение f несущественно. Тогда отображение f можно заменить таким отображением f', что множество $f'(S^n)$ состоит из единственной точки $x_0 \in S^n$. Так как $H_n(x_0) = 0$, то $f'_* = 0$. Отсюда следует, что степень отображения f равна нулю.

Лемма 4.3. *Пусть $n > 1$ и пусть f — произвольное отображение триады $(S^n; E^n_+, E^n_-)$ в себя:*

$$f\colon (S_n; E^n_+, E^n_-) \to (S^n; E^n_+, E^n_-).$$

Пусть, далее, $f_1\colon S^n \to S^n$, $f_2\colon S^{n-1} \to S^{n-1}$ — отображения, определенные отображением f. Тогда

$$\text{степ.}\,(f_1) = \text{степ.}\,(f_2).$$

Доказательство. Согласно лемме I.16.2 триада $(S^n; E^n_+, E^n_-)$ является собственной триадой. Рассмотрим диаграмму

$$\begin{array}{ccc} H_n(S^n) & \xrightarrow{\Delta} & H_{n-1}(S^{n-1}) \\ \big\downarrow{\scriptstyle f_{1*}} & & \big\downarrow{\scriptstyle f_{2*}} \\ H_n(S^n) & \xrightarrow{\Delta} & H_{n-1}(S^{n-1}), \end{array}$$

где Δ — граничный оператор аддиционной последовательности триады $(S^n; E^n_+, E^n_-)$. Согласно теореме I.15.4 эта диаграмма коммутативна. Далее, согласно теореме I.16.5 отображение Δ является изоморфизмом. Пусть $u \in H_n(S^n)$, $u \neq 0$. Тогда

$$\text{степ.}\,(f_2)\Delta u = f_{2*}\,\Delta u = \Delta f_{1*}\,u = \text{степ.}\,(f_1)\Delta u.$$

Так как $\Delta u \neq 0$, то, следовательно, степ. $(f_2) =$ степ. (f_1).

Лемма 4.4. *Предположим, что существует такое отображение $\Gamma\colon S^n \times S^n \to S^n (n > 0)$, что для некоторой точки $e \in S^n$ (эта точка называется единичной) и любой точки $x \in S^n$*

$$(1) \qquad \Gamma(e, x) = \Gamma(x, e) = x$$

(см. примечание в конце этой главы). Тогда любым двум отображениям $f_1, f_2\colon S^n \to S^n$ можно отнести отображение $f\colon S^n \to S^n$, полагая

$$f(x) = \Gamma(f_1(x), f_2(x)).$$

Оказывается, что

$$\text{степ.}\,(f) = \text{степ.}\,(f_1) + \text{степ.}\,(f_2).$$

Доказательство. Заменим сначала отображения f_1, f_2 такими гомотопными им отображениями g_1, g_2, что

$$(2)\qquad g_1(E^n_-) = e, \qquad g_2(E^n_+) = e.$$

Чтобы доказать существование этих отображений, рассмотрим отображение $f_1|E^n_-$. Так как множество E^n_- стягиваемо в точку, то существует такая гомотопия $F\colon E^n_- \times I \to S^n$ отображения $f_1|E^n_-$, что $F(x, 1) = e$ для любой точки $x \in E^n_-$. Согласно лемме 2.3 эту гомотопию можно продолжить до гомотопии $F\colon S^n \times I \to S^n$ отображения f. Отображение g_1 определяется теперь формулой $g_1(x) = F(x, 1)$. Существование отображения g_2 доказывается аналогично. Очевидно, что отображение f гомотопно отображению $g\colon S^n \to S^n$, определенному формулой

$$(3)\qquad g(x) = \Gamma(g_1(x), g_2(x)).$$

Таким образом, достаточно доказать, что в размерности n

$$g_* = g_{1*} + g_{2*}.$$

Из формул (1) — (3) следует, что

$$g(x) = \begin{cases} g_1(x), & \text{если } x \in E^n_+, \\ g_2(x), & \text{если } x \in E^n_-. \end{cases}$$

Обозначим через g', g'_1, g'_2 отображения $(S^n, S^{n-1}) \to (S^n, e)$, определенные отображениями g, g_1, g_2 соответственно. Условия теоремы I.14.6, очевидно, выполнены, и следовательно,

$$g'_* = g'_{1*} + g'_{2*}.$$

Рассмотрим теперь отображения вложения $i\colon S^n \subset (S^n, S^{n-1})$ и $j\colon S^n \subset (S^n, e)$. Так как $jg = g'i$, $jg_1 = g'_1 i$ и $jg_2 = g'_2 i$, то

$$j_* g_* = j_* g_{1*} + j_* g_{2*}.$$

Так как $n > 0$, то $H_n(e) = 0$, и потому согласно аксиоме точности отображение j_* в размерности n является мономорфизмом. Следовательно, $g_* = g_{1*} + g_{2*}$.

Теорема 4.5. *Пусть отображение $f_k\colon S^1 \to S^1$, где k — любое целое число, определено формулой $f_k(z) = z^k$. (Мы рассматриваем сферу S^1 как множество всех комплексных чисел z, для которых $|z| = 1$.) Оказывается, что степень этого отображения равна k.*

Доказательство. Определим отображение $\Gamma\colon S^1 \times S^1 \to S^1$, полагая $\Gamma(x, y) = xy$. Тогда для любых двух чисел k, l

$$f_{k+l}(z) = f_k(z) f_l(z) = \Gamma(f_k(z), f_l(z)).$$

Следовательно, согласно лемме 4.4

$$\text{степ.}\,(f_{k+l}) = \text{степ.}\,(f_k) + \text{степ.}\,(f_l).$$

Так как f_1 является тождественным отображением, то его степень равна единице. Следовательно, отображение f_k действительно имеет степень k.

Замечание. Изложенное доказательство фактически устанавливает более точный результат, а именно то, что $f_{k*}u = ku$ для каждого элемента $u \in H_1(S^1)$ в любой теории гомологий. Аналогично в любой теории когомологий $f_k^*(u) = ku$ для каждого элемента $u \in H^1(S^1)$.

Теорема 4.6. *Для любого $n > 0$ и любого целого числа k существуют отображения f: $S^n \to S^n$ степени k.*

Доказательство. Для случая $n = 1$ теорема уже доказана. Рассуждая по индукции, предположим, что уже построено некоторое отображение g: $S^{n-1} \to S^{n-1}$ $(n > 1)$ степени k. Продолжим отображение g до такого отображения f: $S^n \to S^n$, что $f(E_+^n) \subset E_+^n$ и $f(E_-^n) \subset E_-^n$ (такое продолжение, очевидно, существует). Тогда из леммы 4.3 следует, что отображения f и g имеют одну и ту же степень. Следовательно, отображение f имеет степень k.

5. Основная теорема алгебры

Рассмотрим компактификацию $\dot{R}^n$ евклидова пространства R^n, полученную присоединением в бесконечности точки ω (см. определение X.6.2). Отображение f: $R^n \to R^n$ допустимо (в категории $\mathfrak{A}_{LC}$ локально компактных пар), если его продолжение $\dot{f}$: $\dot{R}^n \to \dot{R}^n$, определенное формулой $\dot{f}(\omega) = \omega$, непрерывно.

Определение 5.1. *Степенью* допустимого отображения f: $R^n \to R^n$ называется степень отображения $\dot{f}$: $\dot{R}^n \to \dot{R}^n$. Последняя степень определена, так как пространство $\dot{R}^n$ гомеоморфно n-мерной сфере S^n.

Лемма 5.2. *Отображение f: $R^n \to R^n$ степени, отличной от нуля, отображает пространство R^n на себя.*

Доказательство. Из леммы 4.2 следует, что $\dot{f}$ отображает пространство $\dot{R}^n$ на себя. Следовательно, $f(R^n) = R^n$.

Лемма 5.3. *Пусть $D^n = \overline{R^n \setminus E^n}$, т. е. D^n есть множество точек x, для которых $\|x\| \geqslant 1$. Пусть, далее, f: $R^n \to R^n$, $n > 1$ — такое допустимое отображение, что $f(E^n) \subset E^n$ и $f(D^n) \subset D^n$. Оказывается, что степень отображения f совпадает со степенью отображения g: $S^{n-1} \to S^{n-1}$, определенного отображением f.*

Непосредственно следует из леммы 4.3, так как триады $(\dot{R}^n; E^n, \dot{D}^n)$ и $(S^n; E_n^+, E_-^n)$ гомеоморфны.

Лемма 5.4. *Пусть для отображений f_0, f_1: $R^n \to R^n$ существует такая связывающая их гомотопия F: $R^n \times I \to R^n$, что для любого действительного числа A можно найти такое действительное число B, что*

$$\|F(x, t)\| > A, \quad \text{если} \quad \|x\| > B, \quad t \in I.$$

Тогда отображения f_0 и f_1 допустимы и имеют одну и ту же степень.

Доказательство. Из условий леммы следует, что, полагая $\dot{F}(\omega, t) = \omega$, мы получим непрерывное продолжение $\dot{F}$: $\dot{R}^n \times I \to \dot{R}^n$ отображения F. Следовательно, отображения f_0 и f_1 допустимы и отображение $\dot{F}$ является гомотопией, связывающей отображения $\dot{f}_0$ и $\dot{f}_1$. Поэтому отображения f_0 и f_1 имеют одну и ту же степень.

Теорема 5.5. *Многочлен степени* $k > 0$

$$f(z) = a_k z^k + a_{k-1} z^{k-1} + \ldots + a_1 z + a_0, \qquad a_k \neq 0$$

с комплексными коэффициентами является отображением f: $R^2 \to R^2$ *топологической степени* k.

Следствие 5.6. (Основная теорема алгебры.) *Уравнение* $f(z) = 0$ *имеет по крайней мере один корень*[1].

Доказательство. Пусть $g(z) = a_{k-1} z^{k-1} + \ldots + a_1 z + a_0$ и $a = |a_{k-1}| + \ldots + |a_0|$. Определим отображение F: $R^2 \times I \to R^2$, полагая

$$F(z, t) = a_k z^k + (1 - t) g(z), \quad z \in R^2, t \in I.$$

Пусть A — любое целое число и пусть

$$|z| > \frac{1}{|a_k|}(A + a), \qquad |z| > 1.$$

Так как $k > 0$, то

$$|F(z, t)| \geqslant |a_k z^k| - |g(z)| \geqslant |a_k z^k| - a|z^{k-1}| > |a_k|\,|z| - a > A.$$

Таким образом, гомотопия F удовлетворяет условиям леммы 5.4. Следовательно, отображение f допустимо и имеет ту же степень, что и отображение f': $R^2 \to R^2$, где $f'(z) = F(z, 1) = a_k z^k$.

Пусть θ: $I \to R^2 \setminus (0)$ — такое отображение, что $\theta(0) = a_k$, $\theta(1) = 1$. Гомотопия G: $R^2 \times I \to R^2$, определенная формулой $G(z, t) = \theta(t) z^k$, также удовлетворяет условиям леммы 5.4. Следовательно, отображение f' имеет ту же степень, что и отображение $f''(z) = G(z, 1) = z^k$. Так как $|f''(z)| = |z|^k$, то выполнены условия леммы 5.3 и отображение f'' имеет ту же степень, что и определенное им отображение f_k: $S^1 \to S^1$. Остается заметить, что согласно теореме 4.5 отображение f_k имеет степень k.

Докажем теперь некоторые аналогии основной теоремы алгебры в более общих условиях.

Мы будем предполагать, что задано некоторое отображение Γ: $R^n \times R^n \to R^n$. Для простоты будем обозначать точку $\Gamma(x, y)$

---

[1] Так как отображение f: $R^2 \to R^2$ является отображением плоскости R^2 на всю плоскость R^2 (лемма 5.2). *(Прим. ред.)*

просто через xy. Потребуем, чтобы это произведение удовлетворяло следующим условиям:

(1) Из $x \neq 0$, $y \neq 0$ следует, что $xy \neq 0$.

(2) Существует такая точка $e \in R^n$, что $ex = x = xe$ для всех точек $x \in R^n$.

(3) Для всех действительных положительных чисел t имеет место равенство $(tx)y = t(xy) = x(ty)$. Из этого условия по соображениям непрерывности вытекает, что $0\,x = 0$, $x\,0 = 0$.

Эти свойства выполняются, если пространство R^n является пространством действительной алгебры с делением. Типичными примерами являются: поле действительных чисел ($n = 1$), поле комплексных чисел ($n = 2$), тело кватернионов ($n = 4$) и алгебра чисел Кэли ($n = 8$). Для каких значений n в пространстве R^n существует подчиненное указанным выше условиям умножение — до сих пор неизвестно (см. примечание в конце этой главы).

Определим теперь по индукции *одночлен* (от одного переменного) степени k. Отличные от нуля точки пространства R^n являются по определению одночленами степени нуль. Тождественная функция x является одночленом степени 1. Если m_1 и m_2 — одночлены степеней k_1 и k_2 соответственно, то $m_1 m_2$ является многочленом степени $k_1 + k_2$.

Таким образом, если m — одночлен, то для любой точки $x \in R^n$ определена точка $m(x) \in R^n$. Получающееся отображение m: $R^n \to R^n$, очевидно, непрерывно.

Теорема 5.7. *Предположим, что $n > 1$. Тогда для любого многочлена f алгебраической степени $k > 0$, имеющего вид $m + g$, где m — одночлен степени k и g — конечная сумма одночленов степени $< k$, отображение f: $R^n \to R^n$ допустимо и имеет топологическую степень k.*

Следствие 5.8. *Уравнение $f(x) = 0$ имеет по крайней мере один корень.*

Применяя этот результат к уравнениям $ax - e = 0$ и $xa - e = 0$, получаем

Следствие 5.9. *Любой элемент $a \neq 0$ имеет по крайней мере один левый обратный элемент и по крайней мере один правый обратный элемент.*

Применяя следствие 5.8 к многочлену $xx + e$, получаем.

Следствие 5.10. *Существует элемент, квадрат которого равен $-e$.*

Доказательству теоремы 5.7 предпошлем некоторые леммы.

Лемма 5.11. *Существуют такие действительные числа $0 < A < B$, что*

$$A\,\|x\|\,\|y\| \leqslant \|xy\| \leqslant B\,\|x\|\,\|y\|.$$

Доказательство. Пусть отображение γ: $S^{n-1} \times S^{n-1} \to R^n$ определено формулой $\gamma(x, y) = xy$. Тогда $\gamma(S^{n-1} \times S^{n-1})$

является компактным подмножеством пространства R^n, не содержащим нуля. Следовательно, существуют такие действительные числа $0 < A < B$, что $A \leqslant ||xy|| \leqslant B$ для любых точек $x, y \in S^{n-1}$. Для завершения доказательства леммы остается воспользоваться условием (3).

Лемма 5.12. *Для любого одночлена m степени k существуют такие действительные числа $0 < A_m < B_m$, что*

$$A_m ||x||^k \leqslant ||m(x)|| \leqslant B_m ||x||^k.$$

Доказательство. Утверждение, очевидно, справедливо для одночленов степени 0 и для одночлена x. Предположим теперь, что одночлен $m = m_1 m_2$ является произведением одночленов степеней k_1, k_2 соответственно, причем $k = k_1 + k_2$, и что утверждение леммы с константами A_{m_1}, B_{m_1}, A_{m_2}, B_{m_2} соответственно справедливо для одночленов m_1 и m_2. Тогда согласно лемме 5.11

$$||m(x)|| \leqslant B\, ||m_1(x)||\, ||m_2(x)|| \leqslant BB_{m_1}B_{m_2}\, ||x||^{k_1}||x||^{k_2} = B_m||x||^k,$$

где $B_m = BB_{m_1}B_{m_2}$. Аналогично $A_m||x||^k \leqslant ||m(x)||$, где $A_m = AA_{m_1}A_{m_2}$.

Доказательство теоремы 5.7. Рассмотрим гомотопию F: $R^n \times I \to I$, определенную формулой

$$F(x, t) = m(x) + (1 - t)g(x), \quad x \in R^n, t \in I.$$

Пусть $g = m_1 + \ldots + m_l$ — разложение многочлена g в сумму одночленов, степени которых по условию меньше k и пусть

$$B' = B_{m_1} + \ldots + B_{m_l}.$$

Пусть, кроме того, A' — произвольное действительное число. Так как $k > 0$, то из

$$||x|| > \frac{1}{A_m}(A' + B'), \quad ||x|| > 1,$$

следует, что

$$||F(x, t)|| \geqslant ||m(x)|| - ||g(x)|| \geqslant$$
$$\geqslant A_m||x||^k - \Sigma\, B_{m_i}||x||^{k-1} > A_m||x|| - B' > A'.$$

Таким образом, гомотопия F удовлетворяет условиям леммы 5.4. Следовательно, отображение f допустимо и имеет ту же топологическую степень, что и отображение $m(x) = F(x, 1)$. Это сводит доказательство к случаю, когда многочлен f является одночленом m степени k.

Отнесем каждому одночлену m степени k отображение g: $S^{n-1} \to S^{n-1}$, определенное формулой

$$g(x) = \frac{m(x)}{||m(x)||}, \quad x \in S^{n-1}.$$

Из леммы 5.11 следует, что $m(x) \neq 0$, если $x \neq 0$, так что отображение g непрерывно. Докажем, что отображения m и g имеют одну и ту же топологическую степень. Если $k = 0$, то m и g являются константами и имеют топологическую степень 0. Пусть $k > 0$. Определим гомотопию $F\colon R^n \times I \to R^n$, полагая

$$F(x, t) = \begin{cases} \frac{m(x)}{\|m(x)\|}[(1-t)\|m(x)\| + t\|x\|^k], & \text{если } x \in R^n \setminus (0),\ t \in I, \\ 0, & \text{если } x = 0,\ t \in I. \end{cases}$$

Согласно лемме 5.12

$$[(1-t)A_m + t]\|x\|^k \leqslant \|F(x,t)\| \leqslant [(1-t)B_m + t]\|x\|^k,$$

и поэтому

$$A_F\|x\|^k \leqslant \|F(x, t)\| \leqslant B_F\|x\|^k,$$

где $A_F = \min(1, A_m)$, $B_F = \max(1, B_m)$. Это неравенство показывает, что отображение F непрерывно в точке $x = 0$ и удовлетворяет условиям леммы 5.4. Так как $F(x, 0) = m(x)$, то согласно лемме 5.4 отображение $M\colon R^n \to R^n$, определенное формулами

$$M(0) = 0 \text{ и } M(x) = F(x, 1) = m(x)\frac{\|x^k\|}{\|m(x)\|}, \quad \text{если } x \neq 0,$$

допустимо и имеет ту же топологическую степень, что и отображение m. Отображение M удовлетворяет условиям леммы 5.3 и поэтому имеет ту же степень, что и определенное им отображение $S^{n-1} \to S^{n-1}$. Так как $M(x) = g(x)$, если $x \in S^{n-1}$, то m и g действительно имеют одну и ту же степень.

Рассмотрим теперь отображение

$$\gamma\colon S^{n-1} \times S^{n-1} \to S^{n-1},$$

определенное формулой

$$\gamma(x, y) = \frac{xy}{\|xy\|}, \quad x, y \in S^{n-1}.$$

Полагая $e' = \frac{e}{\|e\|}$, получим, что для любой точки $x \in S^{n-1}$

$$\gamma(e', x) = x, \qquad \gamma(x, e') = x.$$

Рассмотрим, далее, произведение $m = m_1m_2$ двух одночленов, и пусть g, g_1, g_2 — соответствующие отображения сферы S^{n-1} в себя. Тогда

$$\gamma(g_1(x), g_2(x)) = \frac{g_1(x)g_2(x)}{\|g_1(x)g_2(x)\|} =$$

$$= \frac{m_1(x)m_2(x)}{\|m_1(x)\|\ \|m_2(x)\|}\ \frac{\|m_1(x)\|\ \|m_2(x)\|}{\|m_1(x)\ m_2(x)\|} = \frac{m(x)}{\|m(x)\|} = g(x).$$

Так как $n - 1 > 0$, то согласно лемме 4.4

$$\text{степ.}\,(g) = \text{степ.}\,(g_1) + \text{степ.}\,(g_2).$$

Следовательно, топологическая степень одночлена m является суммой топологических степеней одночленов m_1 и m_2. Другими словами, топологическая степень одночленов подчиняется тем же правилам сложения, что и алгебраическая степень. Так как для одночленов нулевой алгебраической степени (т. е. для констант $\neq 0$) топологическая степень также равна нулю и так как алгебраическая и топологическая степени одночлена x равны единице, то алгебраическая и топологическая степени совпадают для всех одночленов. Тем самым теорема полностью доказана.

6. Многообразия

Определение 6.1. Пара (X, A) называется *относительным n-мерным многообразием*, если пространство X компактно, множество A замкнуто в пространстве X и дополнение $X \setminus A$ является локально евклидовым пространством размерности n (см. определение 3.10). Если существует относительный гомеоморфизм $f: (E, S) \to (X, A)$ (см. определение X. 5.1), где E — n-мерная клетка и S—ее граница, то пара (X, A) называется *относительной n-мерной клеткой*.

Целью этой главы является, во-первых, доказательство того, что группы гомологий и когомологий относительного n-мерного многообразия тривиальны в размерностях, больших n, во-вторых, определение строения его n-мерной группы гомологий (и когомологий).

В случае, когда пара (X, A) триангулируема, теорема единственности главы III показывает, что получающиеся результаты не зависят от выбора теории гомологий. Доказано, что любое компактное дифференцируемое абсолютное многообразие[1]) триангулируемо (S. Cairns, Bull. Amer. Math. Soc. **41** (1935), 549—522), но до сих пор неизвестно, остается ли это утверждение справедливым и для недифференцируемых многообразий. С другой стороны, нетриангулируемые *относительные* n-мерные многообразия строятся без труда. Например, пара (X, A), где X — n-мерная сфера, а A — ее замкнутое нетриангулируемое подмножество, является нетриангулируемым относительным n-мерным многообразием. Менее тривиальный пример получается следующим образом. Пусть Y — несепарабельное локально евклидово пространство, X — компактное пространство, полученное из пространства Y присоединением к нему в бесконечности некоторой точки, и пусть A — множество, состоящее из этой точки. Так как пространство Y несепарабельно, то пара (X, A) нетриангулируема.

Мы будем пользоваться теорией спектральных гомологий (когомологий), непрерывность которой будет играть основную роль в наших вычислениях. Как было уже отмечено выше, для триангули-

[1]) Абсолютными многообразиями авторы называют компактные локально евклидовы пространства. (*Прим. ред.*)

руемых многообразий (X, A) получающиеся результаты не зависят от выбора теории. Однако если мы пользовались бы теорией сингулярных гомологий, то в нетриангулируемом случае получились бы более сложные результаты.

Поскольку результаты, которые мы получим, в основном интересны лишь для случая групп когомологий, то мы и ограничимся только этим случаем. Соответствующие результаты для групп гомологий будут сформулированы в конце пункта.

Лемма 6.2. *Если компактная пара (X, A) лежит в пространстве Y, обладающем n-мерной триангуляцией T, то для любого $q > n$ группа $H^q(X, A)$ тривиальна.*

Доказательство. Пусть ${}^iT$ — i-е барицентрическое подразделение триангуляции T, а X_i и A_i — наименьшие подкомплексы пространства Y в триангуляции ${}^iT$, содержащие множества X и A соответственно. Очевидно, что для всех $q > n$ группы $H^q(X_i, A_i)$ тривиальны и что $(X_{i+1}, A_{i+1}) \subset (X_i, A_i)$. Так как мелкость триангуляции ${}^iT$ стремится к нулю, когда индекс i стремится к бесконечности, то $(X, A) = (\cap X_i, \cap A_i)$. Следовательно, согласно теореме X.2.6 группа $H^q(X, A)$ тривиальна.

Так как относительные гомеоморфизмы индуцируют изоморфизмы групп спектральных когомологий (теорема X.5.4), то группы когомологий относительной n-мерной клетки (X, A) совпадают с группами когомологий n-мерной клетки. Другими словами, все группы когомологий относительной n-мерной клетки (X, A) тривиальны, за исключением группы $H^n(X, A) \approx G$.

Лемма 6.3. *Пусть (X, A) и (X, B) — относительные n-мерные клетки. Тогда, если $(X, A) \subset (X, B)$, то соответствующее отображение вложения индуцирует изоморфизм*

$$H^n(X, A) \approx H^n(X, B).$$

Доказательство. Рассмотрим сначала специальный случай, когда пространство X является евклидовой n-мерной клеткой E: $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \leqslant 1$, а подпространство A — сферой S: $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 1$. Пусть x_0 — произвольная точка открытой клетки $E \setminus S$, U — открытый шар с центром в точке x_0, целиком лежащий в $E \setminus S$, и $B = E \setminus U$. Тогда пара (E, B) является относительной n-мерной клеткой и содержит пару (E, S). Радиальная проекция из точки x_0 определяет, очевидно, ретрагирующее отображение r: $B \to S$. Полагая

$$r(x, t) = (1 - t)x + tr(x),$$

мы получим строгую деформационную ретракцию пространства B на сферу S. Следовательно, в этом случае лемма вытекает из теоремы I.10.5с.

Пусть теперь (X, A) — произвольная относительная n-мерная клетка, f: $(E, S) \to (X, A)$ — соответствующий относительный гомеоморфизм, U — некоторый открытый шар, содержащийся в открытой клетке $E \setminus S$ и $B = X \setminus f(U)$. Тогда пара (X, B) является относительной n-мерной клеткой и отображение f определяет относительный гомеоморфизм f_1: $(E, E \setminus U) \to (X, B)$. Пусть j: $(E, S) \subset \subset (E, E \setminus U)$ и h: $(X, A) \subset (X, B)$. Так как $f_1 j = hf$, то $j^* f_1^* = f^* h^*$. Так как отображения f_1, f являются относительными гомеоморфизмами, то гомоморфизмы f_1^* и f^* являются изоморфизмами. Согласно полученному в первой части доказательства отображение j^* является изоморфизмом. Следовательно, отображение h^* также будет изоморфизмом.

Рассмотрим теперь общий случай. Пусть f: $(E, S) \to (X, A)$ и g: $(E, S) \to (X, B)$ — относительные гомеоморфизмы. Множество $f^{-1}(X \setminus B)$ открыто в $E \setminus S$ и, следовательно, оно содержит некоторый открытый шар U. Пусть $A' = X \setminus f(U)$. Множество $g^{-1}(X, A')$ открыто в $E \setminus S$, и следовательно, оно содержит некоторый открытый шар V. Пусть $B' = X \setminus f(V)$. Отображения вложения индуцируют гомоморфизмы

$$H^n(X, B') \xrightarrow{j^*} H^n(X, A') \xrightarrow{k^*} H^n(X, B) \xrightarrow{l^*} H^n(X, A).$$

По построению, отображения jk и kl удовлетворяют условиям, при которых лемма уже доказана. Поэтому отображения $k^* j^*$ и $l^* k^*$ изоморфны. Как легко видеть, это возможно только тогда, когда изоморфно отображение l^*. Тем самым лемма полностью доказана.

Определение 6.4. Пусть (X, A) — произвольное относительное n-мерное многообразие. Упорядоченная пара n-мерных клеток (X, B), (X, B') называется *шагом* в пространстве $X \setminus A$, если

$$(X, A) \subset (X, B) \subset (X, B') \quad \text{или} \quad (X, A) \subset (X, B') \subset (X, B).$$

Согласно лемме 6.3 соответствующее отображение вложения индуцирует изоморфизм $H^n(X, B) \approx H^n(X, B')$, который мы будем называть *изоморфизмом, соответствующим этому шагу*. Конечная последовательность P относительных n-мерных клеток

$$(X, B_1), \quad (X, B_2), \ldots, \quad (X, B_k),$$

в которой каждая пара соседних клеток образует шаг в пространстве $X \setminus A$, называется *путем* пространства $X \setminus A$, соединяющим клетку (X, B_1) с клеткой (X, B_k). Изоморфизм $H^n(X, B_1) \approx H^n(X, B_k)$, являющийся композицией изоморфизмов, соответствующих последовательным шагам этого пути, называется *изоморфизмом, соответствующим пути* P, и обозначается через P^*. В случае, когда $(X, B_1) = (X, B_k)$, путь называется *замкнутым* и соответствующий ему изоморфизм является *автоморфизмом*. Многообразие (X, A) называется *ориентируемым*, если автоморфизм, соответствующий любому замкнутому пути пространства $X \setminus A$, является тождественным отображением. В противном случае многообразие (X, A) называется *неориентируемым*. (Заметим, что это понятие зависит от группы коэффициентов.)

Лемма 6.5. *Пусть (X, A), (X', A') — такие относительные n-мерные многообразия, что $X' \subset X$ и $X' \setminus A' \subset X \setminus A$. Оказывается, что если многообразие (X, A) ориентируемо, то и многообразие (X', A') ориентируемо.*

Доказательство. Пусть $(X', B'_1), \ldots, (X', B'_k)$ — произвольный замкнутый путь пространства $X' \setminus A'$. Положим

$$B_i = B'_i \cup (X \setminus X') \qquad (i = 1, \ldots, k).$$

Так как согласно теореме 3.11 множество $X' \setminus B'_i = X \setminus B_i$ открыто в пространстве $X' \setminus A'$, то оно открыто также и в пространстве $X \setminus A$, и следовательно, множество B_i замкнуто. Отсюда вытекает, что отображение g_i: $(X', B'_i) \subset (X, B_i)$ является относительным гомеоморфизмом, пара (X, B_i) — относительной n-мерной клеткой и последовательность $(X, B_1), \ldots, (X, B_k)$ — замкнутым путем пространства $X \setminus A$. Мы получаем, таким образом, диаграмму

$$\begin{array}{ccccccc}
H^n(X, B_1) & \approx & H^n(X, B_2) & \approx & \ldots & \approx & H^n(X, B_k) \\
\downarrow g_1^* & & \downarrow g_2^* & & & & \downarrow g_k^* \\
H^n(X', B'_1) & \approx & H^n(X', B'_2) & \approx & \ldots & \approx & H^n(X', B'_k).
\end{array}$$

Изоморфизмы верхней (нижней) строчки диаграммы определяют автоморфизм φ (соответственно φ'), соответствующий данному пути пространства $X \setminus A$ (соответственно пространства $X' \setminus A'$). Так как отображение g_i является относительным гомеоморфизмом, то отображение g_i^* изоморфно. Все изоморфизмы диаграммы индуцированы вложениями, следовательно, каждый квадрат диаграммы коммутативен и $g_k^* \varphi = \varphi' g_1^*$. Так как исходный путь замкнут, то $B'_1 = B'_k$, а поэтому и $g_1 = g_k$. Таким образом, многообразие (X, A) ориентируемо и φ является тождественным отображением, но тогда и φ' будет тождественным отображением. Следовательно, пара (X', A') ориентируема.

Лемма 6.6. *Пусть путь P пространства $X \setminus A$ соединяет клетку (X, B) с клеткой (X, B') и пусть P^* — изоморфизм, соответствующий этому пути. Тогда диаграмма*

$$\begin{array}{ccc}
H^n(X, B) & \overset{P^*}{\approx} & H^r(X, B') \\
 & {}_{j^*}\searrow \quad \swarrow_{j'^*} & \\
 & H^n(X, A) &
\end{array}$$

где j, j' — отображения вложения, коммутативна.

Доказательство. Если путь P состоит из одного шара, то коммутативность диаграммы очевидна, так как все гомоморфизмы индуцированы отображениями вложения. В общем случае необходимо расширить диаграмму, вставляя в нее отдельные шаги и индуцированные вложениями гомоморфизмы $H^n(X, B_i) \to H^n(X, A)$. Так как каждый треугольник получившейся диаграммы коммутативен, то исходная диаграмма также коммутативна.

Лемма 6.7. *Пусть (X, A) — относительное n-мерное многообразие, для которого пространство $X \setminus A$ связно. Пусть далее (X, B) и (X, B') — такие относительные n-мерные клетки, что $A \subset B$ и $A \subset B'$. Тогда в пространстве $X \setminus A$ существует путь, соединяющий клетку (X, B) с клеткой (X, B').*

Доказательство. Пусть F — семейство относительных n-мерных клеток (X, C), являющихся последними членами путей пространства $X \setminus A$, начинающихся с клетки (X, B). Пусть W — объединение пространств $X \setminus C$ для всех клеток $(X, C) \in F$. Очевидно, множество W связно и открыто в пространстве $X \setminus A$. Пусть $x \in X \setminus A$ — предельная точка множества W. Поскольку пространство $X \setminus A$ локально евклидово, существует такая относительная n-мерная клетка (X, D), что $D \supset A$ и $x \in X \setminus D$. Так как множество $X \setminus D$ открыто, то оно содержит точку $y \in W$. Следовательно, существует такая клетка $(X, C) \in F$, что $y \in X \setminus C$. Так как пространство $X \setminus A$ локально евклидово, то существует такая относительная n-мерная клетка (X, C'), что $C' \supset C \cup D$ и $y \in X \setminus C'$. Тогда клетки (X, C), (X, C'), (X, D) образуют некоторый путь пространства $X \setminus A$, соединяющий клетку (X, C) с клеткой (X, D). Объединяя его с путем, соединяющим клетку (X, B) с клеткой (X, C), мы получим путь, соединяющий клетку (X, B) с клеткой (X, D). Таким образом, $x \in W$ и, следовательно, множество W замкнуто в пространстве $X \setminus A$. Так как пространство $X \setminus A$ связно, то отсюда вытекает, что $W = X \setminus A$. Следовательно, множество $X \setminus B'$ содержит точку $z \in W$. Применяя в клетке (X, B') и точке z рассуждения, которые выше были применены к клетке (X, D) и точке y, получим путь, соединяющий клетку (X, B) с клеткой (X, B').

Теперь мы можем сформулировать и доказать основной результат этого пункта.

Теорема 6.8. *Пусть (X, A) — относительное n-мерное многообразие, для которого пространство $X \setminus A$ связно, (X, B) — относительная n-мерная клетка, содержащая многообразие (X, A), и j: $(X, A) \subset (X, B)$. Тогда*

(I) $H^q(X, A) = 0$, *если* $q > n$;

(II) *гомоморфизм* j^* *отображает группу* $H^n(X, B)$ *на группу* $H^n(X, A)$;

(III) *ядро гомоморфизма* j^* *содержит все элементы вида* $u - P^*u$, *где* $u \in H^n(X, B)$ *и* P — *произвольный замкнутый путь пространства* $X \setminus A$, *начинающийся с клетки* (X, B);

(IV) *если многообразие* (X, A) *ориентируемо, то*

$$j^*\colon H^n(X, B) \approx H^n(X, A).$$

(V) *если группа коэффициентов G является группой целых чисел и многообразие* (X, A) *неориентируемо, то группа* $H^n(X, A)$ *является циклической группой второго порядка.*

Доказательство. Для доказательства свойства (III) применим лемму 6.6, полагая в ней $j = j'$. Согласно этой лемме $j^*P^* = j^*$ и, следовательно, $j^*(u - P^*u) = 0$.

Мы будем говорить, что многообразие (X, A) *конечно*, если существует такое конечное множество относительных n-мерных клеток $(X, B_1), \ldots, (X, B_k)$, что $X \setminus A = \bigcup_{i=1}^{k} X \setminus B_i$. Свойства (I), (II), (IV), (V) для конечных многообразий (X, A) мы будем обозначать через (I)′, (II)′, (IV)′, (V)′ соответственно. Мы покажем сначала, что из справедливости этих свойств для конечных многообразий следует их справедливость в общем случае.

Пусть $\{(X, B_\alpha)\}$, где $\alpha \in M$, — семейство таких относительных n-мерных клеток, что $A = \bigcap_{\alpha \in M} B_\alpha$. Предположение о существовании такого семейства в неявном виде содержится в предположении локальной евклидовости пространства $X \setminus A$. Пусть $V_\alpha = X \setminus B_\alpha$. Для каждого конечного множества $\xi \subset M$ положим $W_\xi = \bigcup_{\alpha \in \xi} V_\alpha$ и $A_\xi = X \setminus W_\xi$. Пусть N — совокупность всех множеств ξ, для которых множество W_ξ связно. Отношения вложения в множестве M определяют в N некоторую частичную упорядоченность. Покажем, что по отношению к этой упорядоченности множество N является направленным множеством. Пусть $x \in X \setminus A$ и $C(x)$ — объединение всех таких множеств W_ξ, что $\xi \in N$ и $x \in W_\xi$. Множество $C(x)$ открыто. Пусть y — предельная точка множества $C(x)$ в пространстве $X \setminus A$. Рассмотрим произвольное множество V_α, содержащее точку y. Множество $V_\alpha \cap C(x)$ содержит точку некоторого множества W_ξ, содержащего точку x. Следовательно, множество $V_\alpha \cup W_\xi$ связно, содержит точки x и y и является множеством вида W_η для некоторого $\eta \in N$. Поэтому $y \in C(x)$. Так как множество $C(x)$ открыто и замкнуто в связном пространстве $X \setminus A$, то $C(x) = X \setminus A$. Пусть $\xi, \eta \in N$ и $x \in W_\xi$, $y \in W_\eta$. Так как $C(x) = X \setminus A$, то существует такое множество $\zeta \in N$, что $x, y \in W_\zeta$. Пусть $\omega = \xi \cup \eta \cup \zeta$. Тогда множество $W_\omega = W_\xi \cup W_\eta \cup W_\zeta$ связно. Следовательно, $\omega \in N$. Так как множество ω содержит множества ξ и η, то тем самым доказано, что множество N направлено.

Таким образом, пара (X, A) является пересечением спектра подпространств $\{(X, A_\xi)\}$, $\xi \in N$. Поэтому согласно теореме 2.6, ввиду непрерывности групп спектральных когомологий группа $H^q(X, A)$ является предельной группой спектра групп $\{H^q(X, A_\xi)\}$.

Согласно свойству (I)′ $H^q(X, A_\xi) = 0$ для любого $q > n$ и любого $\xi \in N$. Поэтому $H^q(X, A) = 0$. Таким образом, из свойства (I)′ вытекает свойство (I).

Пусть $u \in H^n(X, A)$. По определению предела прямого спектра существует такой элемент $v \in H^n(X, A_\xi)$, что $g^*v = u$, где g: $(X, A) \subset \subset (X, A_\xi)$. Пусть (X, B') — такая относительная n-мерная клетка, что $(X, A_\xi) \subset (X, B')$, и пусть j' — соответствующее отображение вложения. Тогда согласно свойству (II)′ существует такой элемент $w \in H^n$ (X, B'), что $j'^*w = v$. Следовательно, образ отображения $(j'g)^*: H^q(X, B') \to H^q(X, A)$ содержит элемент u. Согласно леммам 6.7 и 6.6 образ отображения $(j'g)^*$ совпадает с образом отображения j^*. Так как u — произвольный элемент, то тем самым доказано, что из свойства (II)′ вытекает свойство (II).

Рассмотрим произвольный элемент $\alpha_0 \in M$. Пусть $\xi_0 \in N$ — множество, состоящее из единственного элемента α_0, а N' — совокупность таких множеств $\xi \in N$, что $\xi \supset \xi_0$. Очевидно, что множество N' конфинально в множестве N. Следовательно, группу $H^n(X, A)$ можно рассматривать как предельную группу спектра $\{H^n(X, A_\xi)\}, \xi \in N'$. Пусть $\xi, \eta \in N'$ и $\xi \subset \eta$. Рассмотрим диаграмму

$$(1) \qquad H^n(X, B_{\alpha_0}) \xrightarrow{f^*} H^n(X, A_\xi) \xrightarrow{g^*} H^n(X, A_\eta) \xrightarrow{h^*} H^n(X, A),$$

где f, g, h — отображения вложения. Если многообразие (X, A) ориентируемо, то согласно лемме 6.5 клетки (X, A_ξ) и (X, A_η) также ориентируемы. Следовательно, согласно свойству (IV)′ отображения f^* и g^*f^* изоморфны. Поэтому отображение g^* также изоморфно. Таким образом, все проекции прямого спектра $\{H^n(X, A_\xi)\}$, $\xi \in N'$ являются изоморфизмами. Из следствия VIII.4.8 вытекает поэтому, что отображение $(fgh)^*$ изоморфно. Применяя лемму 6.6 к случаю $B_{\alpha_0} = B'$, получаем, следовательно, что отображение j^* является изоморфизмом. Таким образом, из свойства (IV)′ вытекает свойство (IV).

Пусть группой коэффициентов является группа целых чисел и пусть многообразие (X, A) неориентируемо. Тогда существует такой путь P, что соответствующий изоморфизм P^* не является тождественным отображением. Можно предполагать, что семейство $\{(X, B_\alpha)\}$ содержит все n-мерные клетки, принадлежащие пути P (в противном случае их можно присоединить к этому семейству). Пусть $\xi_0 \subset M$ — множество индексов клеток, составляющих путь P. Очевидно, что множество W_{ξ_0} связно, так что $\xi_0 \in N$. Пусть N' — совокупность всех множеств $\xi \in N$, для которых $\xi \supset \xi_0$. Повторяя рассуждения предыдущего абзаца, мы получим диаграмму (1), в которой за α_0 принят некоторый элемент множества ξ_0. Для каждого $\xi \in N'$ путь P является путем пространства $X \setminus A_\xi$, и поэтому клетка (X, A_ξ) неориентируема. Следовательно, согласно свойству (V)′ группы $H^n(X, A_\xi)$ и $H^n(X, A_\eta)$ являются группами второго порядка. С другой стороны, согласно свойству (II)′ гомоморфизмы f^* и g^*f^* являются эпиморфизмами, откуда следует, что гомоморфизм g^* является изоморфизмом. Наконец, согласно следствию VIII.4.8 отображение h^* также является изоморфизмом. Следовательно, группа $H^n(X, A)$ является циклической группой второго порядка. Таким образом, из свойств (II)′ и (V)′ следует свойство (V).

Остается доказать рассматриваемые свойства в конечном случае, когда $X \setminus A = \bigcup\limits_{i=1}^{k} (X \setminus B_i)$. Если $k = 1$, то многообразие (X, A) является относительной n-мерной клеткой. В этом случае свойство (I) тривиально, а свойства (II) и (IV) следуют из леммы 6.3, согласно которой отображение j^* изоморфно. Так как отображение j^*, в частности, мономорфно, то из уже доказанного утверждения (III) следует, что для $k = 1$ многообразие (X, A) ориентируемо. Свойство (V) в случае $k = 1$ бессодержательно.

Рассуждая по индукции, предположим, что свойства (I), (II), (IV), (V) уже доказаны для всех конечных многообразий (X, A) с $k \leqslant m$. Пусть $k = m + 1$. Так как пространство $X \setminus A$ связно, то объединение некоторых m множеств вида $X \setminus B_i$ связно. Предположим, что обозначения выбраны таким образом, что связно объединение $\bigcup\limits_{i=1}^{m} (X \setminus B_i)$. Пусть $A' = \bigcap\limits_{i=1}^{m} B_i$ и $B' = B_{m+1}$. Тогда множество $X \setminus A'$ связно и, следовательно, по предположению индукции доказываемые свойства справедливы для пары (X, A'). Рассмотрим следующий отрезок относительной аддиционной последовательности (см. определение I.15.6) триады $(X; A', B')$:

$$H^q(X, A' \cup B') \xrightarrow{\varphi} H^q(X, A') + H^q(X, B') \xrightarrow{\psi} \xrightarrow{\psi} H^q(X, A) \xrightarrow{\Delta} H^{q+1}(X, A' \cup B'). \tag{2}$$

Пусть $f: (E, S) \to (X, B')$ — произвольный относительный гомеоморфизм и пусть $C = f^{-1}(A' \cup B')$. Множество C замкнуто и отображение f определяет относительный гомеоморфизм $g: (E, C) \to \to (X, A' \cup B)$. Согласно лемме 6.2 $H^{q+1}(E, C) = 0$, если $q \geqslant n$, а согласно лемме X.5.4 отображение g^* является изоморфизмом. Таким образом, $H^{q+1}(X, A' \cup B') = 0$, если $q \geqslant n$. Поэтому в силу точности последовательности (2) группа $H^q(X, A)$ является образом гомоморфизма ψ. Но согласно предположению индукции $H^q(X, A') = 0$ и $H^q(X, B') = 0$ для любого $q > n$. Следовательно, $H^q(X, A) = \psi(0) = 0$. Тем самым свойство (I) доказано.

Пусть α — произвольная компонента пространства $X \setminus A' \cup B'$, $C_\alpha = X \setminus \alpha$ и (X, D_α) — такая относительная n-мерная клетка, что

$D_\alpha \supset C_\alpha$. Рассмотрим диаграмму

$$
\text{(3)} \qquad
\begin{tikzcd}
 & H^n(X, A') \arrow[dr, "f^*"] & \\
H^n(X, D_\alpha) \arrow[ur, "f_\alpha^*"] \arrow[r, "h_\alpha^*"] \arrow[dr, "i_\alpha^*"'] & H^n(X, C_\alpha) \arrow[u, "f_\alpha'^*"'] \arrow[r] \arrow[d, "g_\alpha'^*"] & H^n(X, A) \\
 & H^n(X, B') \arrow[ur, "g^*"'] &
\end{tikzcd}
$$

все гомоморфизмы которой индуцированы вложениями. Из леммы 6.3 непосредственно вытекает, что

(4) отображение g_α^* является изоморфизмом.

В силу свойства (II) (оно применимо к многообразию (X, A') по предположению индукции)

$$\text{(5)} \qquad H^n(X, A') = \operatorname{Im} f_\alpha^*.$$

Как показано выше,

$$\text{(6)} \qquad H^n(X, A) = \operatorname{Im} \psi.$$

Следовательно, для любого элемента $w \in H^n(X, A)$ существуют такие элементы $u \in H^n(X, A')$ и $v \in H^n(X, B')$, что

$$w = \psi(u, v) = f^*u - g^*v \quad \text{(см. определение I.15.6c).}$$

Из свойств (4) и (5) следует, что существуют такие элементы u', $v' \subset H^n(X, D_\alpha)$, что $f_\alpha^* u' = u$ и $g_\alpha^* v' = v$. Так как $f_\alpha f = g_\alpha g$, то

$$g^* g_\alpha^* (u' - v') = f^* f_\alpha^* u' - g^* g_\alpha^* v' = f^* u - g^* v = w.$$

Тем самым доказано, что

$$\text{(7)} \qquad H^n(X, A) = \operatorname{Im} g^*.$$

Согласно леммам 6.6 и 6.7 группы $H^n(X, B')$ и $H^n(X, B)$ имеют один и тот же образ в группе $H^n(X, A)$. Следовательно, из формулы (7) вытекает свойство (II).

Из доказанного свойства (II) следует, что отображение h_α^* эпиморфно. Так как $g_\alpha'^* h_\alpha^* = g_\alpha^*$, то из свойства (4) вытекает, что

(8) отображение h_α^* является изоморфизмом.

Так как согласно упражнению B3 главы X

$$H^n(X, A' \cup B') \approx \sum_\alpha H^n(X, C_\alpha),$$

то из (8) следует, что

$$H^n(X, A' \cup B') \approx \sum_\alpha H^n(X, D_\alpha).$$

Из определения гомоморфизма φ вытекает, что его образ совпадает с образом гомоморфизма

$$\varphi' \colon \sum_\alpha H^n(X, D_\alpha) \to H^n(X, A') + H^n(X, B'),$$

определенного гомоморфизмами f_α^* и g_α^*. Так как последовательность (2) точна, то

$$\operatorname{Ker} \psi = \operatorname{Im} \varphi = \operatorname{Im} \varphi'.$$

Поэтому в силу формулы (6)

$$H^n(X, A) \approx [H^n(X, A') + H^n(X, B')]/\operatorname{Im} \varphi'.$$

Так как $\psi(0, v) = -g^*v$, то отсюда и из формулы (7) следует, что

$$H^n(X, A) \approx H^n(X, B')/K, \tag{9}$$

где

$$K = H^n(X, B') \cap \operatorname{Im} \varphi'.$$

(Мы считаем группу $H^n(X, B')$ вложенной в прямую сумму $H^n(X, A') + H^n(X, B')$.)

Любой элемент прямой суммы $\sum_\alpha H^n(X, D_\alpha)$ имеет вид $\sum u_\alpha$, где только конечное число слагаемых $u_\alpha \in H^n(X, D_\alpha)$ отлично от нуля. По определению

$$\varphi'(\sum u_\alpha) = (\sum f_\alpha^* u_\alpha, \sum g_\alpha^* u_\alpha).$$

Следовательно, элемент u тогда и только тогда принадлежит группе K, когда существуют такие элементы $u_\alpha \in H^n(X, D_\alpha)$, что

$$u = \sum g_\alpha^* u_\alpha \text{ и } \sum f_\alpha^* u_\alpha = 0. \tag{10}$$

Зафиксируем некоторую компоненту γ пространства $X \setminus A' \cup B'$. Для любой компоненты α через Q_α обозначим путь пространства $X \setminus A'$, соединяющий клетку (X, D_α) с клеткой (X, D_γ). Путь (X, D_γ), (X, B'), (X, D_α) вместе с путем Q_α образует замкнутый путь P_α пространства $X \setminus A$, начинающийся и кончающийся в клетке (X, D_γ). Положим

$$v_\alpha = g_\gamma^{*-1} g_\alpha^* u_\alpha \in H^n(X, D_\gamma).$$

Из леммы 6.6 следует, что

$$\Sigma f_\alpha^* u_\alpha = \Sigma f_\gamma^* Q_\alpha^* g_\alpha^{*-1} g_\gamma^* v_\alpha = f_\gamma^* \Sigma P_\alpha^* v_\alpha.$$

Таким образом, элемент u тогда и только тогда принадлежит группе K, когда существуют такие элементы $v_\alpha \in H^n(X, D_\gamma)$, что

$$u = g_\gamma^* \Sigma v_\alpha \text{ и } f_\gamma^* \Sigma P_\alpha^* v_\alpha = 0. \tag{11}$$

Если многообразие (X, A) ориентируемо, то

$$\Sigma P_\alpha^* v_\alpha = \Sigma v_\alpha. \tag{12}$$

Согласно лемме 6.5 многообразие (X, A') также ориентируемо и поэтому, поскольку по предположению индукции свойство (IV) справедливо для многообразия (X, A'), отображение f_γ^* является изоморфизмом. Следовательно, из формул (11) и (12) вытекает, что любой элемент $u \in K$ равен нулю, т. е. $K = 0$. Другими словами,

$g^*: H^n(X, B') \approx H^n(X, A)$. Применяя лемму 6.6 к пути P, соединяющему клетку (X, B) с клеткой (X, B'), мы получим, что отображение j^* является изоморфизмом. Тем самым для многообразия (X, A) свойство (IV) доказано.

Пусть теперь группой G является группа целых чисел и пусть многообразие (X, A) неориентируемо. Так как единственным нетривиальным автоморфизмом группы G является преобразование, состоящее в изменении знака, то $P_\alpha^* v_\alpha = \pm v_\alpha$. Пусть x — сумма всех элементов v_α, для которых $P_\alpha^* v_\alpha = v_\alpha$, и y — сумма всех элементов v_α, для которых $P_\alpha^* v_\alpha = -v_\alpha$. Тогда формулы (11) принимают вид

$$u = g_\gamma^*(x + y) \text{ и } f_\gamma^*(x - y) = 0. \tag{13}$$

Если многообразие (X, A') ориентируемо, то из свойства (IV) вытекает, что $x - y = 0$ и, следовательно, $u = 2g_\gamma^* x$. Если многообразие (X, A') неориентируемо, то из свойства (V) (справедливого по предположению индукции для этого многообразия) вытекает, что элемент $x - y$ имеет вид $2z$ и, следовательно, $u = 2g_\gamma^*(x - z)$. В обоих случаях $u \equiv 0 \bmod 2$. Таким образом, группа K состоит из четных элементов группы $H^n(X, B')$, и поэтому группа $H^n(X, A)$ является циклической группой второго порядка. Таким образом, свойство (V) для многообразия (X, A) доказано. Теорема тем самым полностью доказана.

Замечание. Ограничение в свойстве (V) только целочисленными коэффициентами не вызывается необходимостью: если многообразие (X, A) неориентируемо, то для любой группы коэффициентов G группа $H^n(X, A)$ изоморфна группе G, приведенной по модулю 2. Данное нами доказательство сохраняется и в общем случае; дополнительных соображений требует только доказательство того, что для любого замкнутого пути P соответствующий изоморфизм P^* имеет вид $\pm I$, где I — тождественное отображение. Проще всего это можно доказать с помощью оставленной нами без доказательства формулы универсальных коэффициентов (см. главу V, упражнение G 3). Из этой формулы непосредственно следует, что если $P^* = I$, или соответственно $-I$, для целочисленных коэффициентов, то $P^* = I$, или соответственно $-I$ для любой группы коэффициентов G. Тем самым, в частности, объясняется, почему ориентируемость многообразий обыкновенно принято определять только с помощью когомологий (или гомологий) с целочисленными коэффициентами.

Теорема 6.9. *Сфера S^n ориентируема относительно любой группы коэффициентов.*

Доказательство. Пусть $x_0 \in S^n$. Стереографическая проекция показывает, что пара (S^n, x_0) является относительной n-мерной клеткой. Так как $H^n(S^n, x_0) \approx H^n(S^n)$ (изоморфизм индуцируется отображением вложения), то из свойства (III), указанного в теореме 6.8, следует, что сфера S^n ориентируема.

Теорема 6.10. *Пусть (X, A) — относительное n-мерное многообразие, для которого пространство X гомеоморфно некоторому подмножеству n-мерной сферы. Для любой связной компоненты α пространства $X \setminus A$ положим $A_\alpha = X \setminus \alpha$. Оказывается, что каждая пара (X, A_α) ориентируема, так что $H^n(X, A_\alpha) \approx G$, и индуцированные вложениями гомоморфизмы $H^n(X, A_\alpha) \to H^n(X, A)$ определяют инъективное представление группы $H^n(X, A)$ в виде прямой суммы*

$$H^n(X, A) \approx \sum_\alpha H^n(X, A_\alpha).$$

Ориентируемость пары (X, A_α) следует из теоремы 6.9 и леммы 6.5. Разложение в прямую сумму следует из результатов упражнения X.13.3.

Сформулируем теперь соответствующие результаты для групп гомологий. Вплоть до леммы 6.7 аксиома точности не используется. Поэтому все сказанное до леммы 6.7 остается справедливым после замены когомологий на гомологии.

В доказательстве теоремы 6.8 используется аксиома точности. С другой стороны, теория спектральных гомологий на компактных парах, вообще говоря, этой аксиоме не удовлетворяет. Для выполнения аксиомы точности мы должны потребовать, чтобы группа коэффициентов G была компактной группой или векторным пространством над некоторым полем. Для таких групп коэффициентов будут верны следующие утверждения, двойственные утверждениям (I) — (IV) теоремы 6.8:

(I) $H_q(X, A) = 0$, *если* $q > n$;

(II) *отображение* j_*: $H_n(X, A) \to H_n(X, B)$ *является мономорфизмом;*

(III) *если элемент и принадлежит образу отображения* j_*, *то* $u = P^*u$, *где* P — *некоторый замкнутый путь пространства* $X \setminus A$, *начинающийся с клетки* (X, B);

(IV) *если многообразие* (X, A) *ориентируемо, то* j_*: $H_n(X, A) \approx H_n(X, B)$.

Теоремы, двойственные теоремам 6.9 и 6.10, справедливы при тех же ограничениях на группу G. Теорема, двойственная теореме 6.10, гласит: гомоморфизмы $H_n(X, A) \to H_n(X, A_\alpha)$ определяют проективное представление группы $H_n(X, A)$ в виде прямого произведения

$$H_n(X, A) \approx \prod_\alpha H_n(X, A_\alpha).$$

Так как теория спектральных гомологий на триангулируемых парах удовлетворяет аксиоме точности без всяких ограничений на группу коэффициентов G, то теорему 6.8 можно перенести на случай теории гомологий, присоединяя к ее условиям требование триангулируемости пары (X, A). При этом для того, чтобы можно было сохранить изложенное выше доказательство, необходимо показать, что на каждом этапе доказательства можно ограничиться только триангулируемыми парами. Относительные n-клетки, рассматриваемые в доказательстве, должны быть триангулируемыми и должны иметь триангулируемые объединения и пересечения. Этого можно достичь, рассматривая некоторую фиксированную триангуляцию пары (X, A) и ее барицентрические подразделения. Таким способом можно доказать сформулированные выше утверждения, двойственные утверждениям (I)—(IV), и, кроме того, следующее утверждение, двойственное утверждению (V):

(V) *Если G — группа целых чисел и многообразие (X, A) неориентируемо, то $H_n(X, A) = 0$.*

Примечания

Существование умножения. В пункте 5 мы предполагали, что

(A). Существует некоторое умножение Γ: $R^n \times R^n \to R^n$, удовлетворяющее условиям (1), (2) и (3) пункта 5.

Мы также отметили, что примерами такого умножения являются для $n = 1$, 2, 4 и 8 соответственно умножения действительных чисел, комплексных чисел, кватернионов и чисел Кэли. Никакие другие примеры не известны[1]). При дополнительных предположениях, чтобы умножение $\Gamma(x, y)$ было билинейным и чтобы $|\Gamma(x, y)| = |x|\,|y|$, Гурвиц доказал (Nachr. Ges. d. Wiss. Gottingen (1898), 309—316), что $n = 1$, 2, 4 и 8 и что умножение Γ изоморфно одному из указанных выше классических умножений. В дальнейшем Хопф, отказавшись от второго условия Гурвица и сохранив лишь билинейность, доказал (Comm. Math. Helv. **13** (1941), 219—239), что число n должно быть степенью двух.

Можно показать, что предложение (A) равносильно каждому из перечисленных ниже предложений (B), (C) и (D) (о равносильности предложений (C) и (D), а также об определении входящих в них понятий см. S. Eilenberg, Ann. of Math. **41** (1940), 662—673).

(B) Существует умножение $S^{n-1} \times S^{n-1} \to S^{n-1}$ с двусторонней единицей e: $ex = x = xe$ для любого $x \in S^{n-1}$.

(C) Существует отображение $S^{n-1} \times S^{n-1} \to S^{n-1}$ типа (1, 1).

(D) Существует отображение $S^{2n-1} \to S^n$ с инвариантом Хопфа, равным единице.

Предложение (D) имеет особенно большое значение для теории гомотопических групп сфер, и много усилий было потрачено на определение тех значений n, при которых оно справедливо. Хопф показал (Fund. Math. **25** (1935), 427—440), что при $n > 1$ из

[1]) Имеются в виду другие значения n, так как, например, для $n = 4$ существуют алгебры с делением, отличные от тела кватернионов. (*Прим. ред.*)

справедливости предложения (D) вытекает четность числа n. Уайтхед доказал (Ann. of Math. **51** (1950), 192—237), что при $n > 2$ из справедливости предложения (D) вытекает делимость числа n на 4. Адем утверждает (Proc. Nat. Acad. Sci. **38** (1952)), что из справедливости предложения (D) вытекает, что число n является степенью двойки[1]).

Упражнения

A. Степень отображения

1. Определить понятие степени отображения $f: S^0 \to S^0$, используя приведенную группу $\widetilde{H}_0(S^0)$. Показать, что эта степень всегда равна 0, 1 или —1. Показать, что лемма 4.3 остается справедливой и для $n = 1$.

2. Определить понятие степени отображения $f: (E^n, S^{n-1}) \to (E^n, S^{n-1})$ и показать, что она равна степени отображения $g: S^{n-1} \to S^{n-1}$, определенного отображением f.

3. Показать, что любое отображение $f: (E^1, S^0) \to (E^1, S^0)$ имеет степень, равную 0, 1 или —1.

4. Показать, что для каждого числа $n > 1$ и для каждого целого числа k существует отображение $f: (E^n, S^{n-1}) \to (E^n, S^{n-1})$ степени k.

B. Инвариантность области

1. Пусть X — замкнутое подмножество сферы S^n и пусть $x_0 \in X$. Показать, что если $x_0 \in \operatorname{Int} X$, то $H^n(X, X \setminus U) \neq 0$ для всех достаточно малых окрестностей U точки x_0.

2. Доказать обратную теорему, предполагая, что рассматриваемая теория когомологий удовлетворяет как аксиоме непрерывности, так и аксиоме точности.

C. Картановский процесс подбора

Пусть X — произвольное компактное пространство, $\{A_\alpha\}$ — некоторое семейство замкнутых подмножеств пространства X, $A = \bigcap A_\alpha$ и $i_\alpha: (X, A) \subset (X, A_\alpha)$. Предположим, что задана некоторая точная и непрерывная теория гомологий (на категории $\mathfrak{A}_C$ компактных пар) и что для любого фиксированного целого числа q

$$H_{q+1}(X, B \cup A_\alpha) = 0$$

для всех индексов α, где B — произвольное конечное пересечение множеств семейства $\{A_\alpha\}$.

---

[1]) В самое последнее время Адамс доказал, что предложение (D) (а следовательно, и все предложения (A), (B), (C)) верно только для классических значений n. Изложение этого результата Адамса еще не опубликовано. (*Прим. ред.*)

1. Доказать, что элемент $u \in H_q(X, A)$, для которого $i_{\alpha *}u = 0$ при любом α, равен нулю.

2. Каждый элемент $u \in H_q(X, A)$ определяет такие элементы $u_\alpha = i_{\alpha *}u \in H_q(X, A_\alpha)$, что $k_{\alpha,\beta}u_\alpha = k_{\beta,\alpha}u_\beta$, где $k_{\alpha,\beta}\colon H_q(X, A_\alpha) \to H_q(X, A_\alpha \cup A_\beta)$ — индуцированное вложением отображение. Показать, что каждое семейство $\{u_\alpha\}$, удовлетворяющее соотношениям $k_{\alpha\beta}u_\alpha = k_{\beta\alpha}u_\beta$, получается из некоторого элемента $u \in H_q(X, A_\alpha)$.

3. Предположим, что открытые множества $X \setminus A_\alpha$ образуют базу пространства $X \setminus A$. Пусть выбраны такие элементы $u_\alpha \in H_q(X, A_\alpha)$, что $k_{\alpha\beta}u_\alpha = u_\beta$ каждый раз, когда $A_\alpha \subset A_\beta$. Показать, что существует такой элемент $u \in H_q(X, A)$, что $i_{\alpha *}u = u_\alpha$ для любого α.

4. Сформулировать результаты пункта 6 и предыдущего упражнения на языке «абсолютной» теории гомологий в смысле пункта X.7.

5. Предполагая, что группа коэффициентов G является областью целостности, вывести из результатов пункта 6 соотношения для рангов R^i групп когомологий. В частности, показать, что если A является собственным замкнутым подмножеством сферы S^n, то пространство $S^n \setminus A$ имеет $R^{n-1}(A; G) + 1$ компоненту.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

УКАЗАТЕЛЬ ОБОЗНАЧЕНИЙ

---

[1]) Звездочки означают, что в тексте иа их месте могут стоят ные буквы.

Н. Стинрод и *С. Эйленберг*
Основания алгебраической топологии
Редактор *А. Ф. Лапко*
Техн. редактор *С. С. Гаврилов*
Корректор *З. В. Моисеева*

Сдано в набор 20/VI 1957 г. Подписано к печати 25/IX 1958 г. Бумага 60×92 1/16. Физ. печ. л. 25,25. Условн. печ. л. 25,25. Уч.-изд. л. 24,50. Тираж 4000 экз. Т-08253. Цена книги 14 р. 25 к. Заказ № 241

Государственное издательство
физико-математической литературы
Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

Типография Академии, Будапешт